



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**ANÁLISIS DEL FLUJO CORTANTE Y EXTENSIONAL EN UN
SISTEMA DE PLATOS PARALELOS**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERA QUÍMICA**

PRESENTA:

JOSÉ ALFONSO BARRIOS ISLAS

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M.C. e I.M. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 03 de noviembre del 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Barrios Islas José Alfonso con número de cuenta 316027470 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el día 24 del mes de noviembre de 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es:

“Análisis del flujo cortante y extensional en un sistema de platos paralelos”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. e I.M. Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bioingeniería >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- A la unidad de Investigación en Bio-Ingeniería UI-FESZ-110323
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LUI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LUI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

DEDICATORIAS.

A mi amada mamá Elena Islas Huerta, quien ha sido mi mayor fuente de amor, apoyo y aliento en cada paso de mi vida. Gracias por creer en mí y por ser mi inspiración constante.

A mi querido hermano Marco Antonio Barrios Islas, siempre presente para animarme y motivarme en los momentos difíciles. Tu confianza en mí ha sido fundamental para lograr este logro.

A mi dulce abuelita Teresa Huerta Caselín, por su sabiduría, amor y paciencia infinita. Tus consejos y bendiciones han sido un faro de luz en mi camino.

A mis amigos Eberth Mata, Efrén Palafox, Ali Herrera y demás amigos, quienes han estado a mi lado en las buenas y en las malas. Gracias por su amistad incondicional y por brindarme momentos de diversión y alegría durante este desafiante proceso.

A mis profesores, cuya guía y conocimientos han sido fundamentales para mi crecimiento académico. Gracias por su dedicación y por compartir su pasión por el aprendizaje.

A Dios, por su infinita sabiduría y por bendecirme con oportunidades y fortaleza para enfrentar los desafíos de esta tesis.

Al Club Deportivo Guadalajara, mi equipo de fútbol amado, por ser una fuente de inspiración y pasión en mi vida. Su espíritu luchador y su legado de grandeza me motivaron a nunca rendirme.

Al Real Madrid, un club legendario que me ha enseñado la importancia de la excelencia y el trabajo en equipo. Su historia y éxito son una fuente de inspiración constante.

A Messi, un genio del fútbol cuyo talento y dedicación han sido una fuente de admiración y motivación en mi vida. Tu habilidad para superar obstáculos y tu humildad son ejemplos a seguir.

A Cristiano Ronaldo, un atleta excepcional cuya determinación y disciplina son una inspiración para alcanzar grandes metas. Tu mentalidad ganadora y tu pasión por el juego me han motivado a dar siempre lo mejor de mí.

A la Lucha Libre, un espectáculo lleno de pasión, valentía y trabajo duro. Su energía y emoción me han enseñado a enfrentar los desafíos con valentía y a nunca rendirme.

Gracias a todos ustedes por ser parte de mi vida y por haberme acompañado en este viaje. Su amor, apoyo y ejemplo han sido fundamentales en mi éxito. ¡Esta tesis está dedicada a cada uno de ustedes!"

Espero que esta dedicatoria refleje tu aprecio y gratitud hacia todas las personas e influencias significativas en tu vida. ¡Mucho éxito en tu tesis!

RESUMEN

En este trabajo se analiza las componentes cortantes y extensionales en sistemas de discos paralelos. EL primero de estos es el flujo radial en donde entra un líquido por un orificio de radio R_1 y existe un laminado radial por el disco de radio R_2 . En este sistema se supone estado estacionario y se deprecia el termino no lineal de la componente r de la ecuación de movimiento. Se deducen expresiones analíticas para la velocidad y el flujo volumétrico. El segundo sistema es el flujo por compresión que consiste en un fluido con alta viscosidad que se encuentra en el plato de abajo y que, por efecto de la tensión superficial, no puede fluir del sustrato. El plato superior situado a una distancia $H(t)$ se encuentra se aproxima con una velocidad constante al plato inferior de tal manera que, el fluido es comprimido induciendo un laminado radial y por ende un flujo de Poiseuille. El tercer sistema es un flujo continuo por compresión entre dos platos separados a una distancia $H(t)$. El fluido entra por el plato inferior por medio de unas perforaciones aleatorias y el líquido comprime al plato superior por lo que se induce un laminado radial.

Estos problemas tienen en común lo siguiente:

- A) Componentes cortantes en la pared debido a la fricción entre el fluido y la pared
- B) Componentes extensionales debido a la compresión y a que el flujo es bidireccional, es decir se tienen componentes radial y extensional de las velocidades.
- C) Su solución analítica es complicada, por lo que se utilizan métodos aproximados o numéricos.

Los tres sistemas se pueden resolver por métodos perturbativos mediante un parámetro de pequeñez que relaciona las longitudes características Axial y radial y mediante teoría de perturbaciones aplicadas a los componentes del vector velocidad radial, axial, presión y esfuerzos normales y cortantes. El punto clave es el gradiente de presión en el sistema con el fin de dilucidar la fuerza de compresión. Finalmente se escoge uno de los sistemas para ser perturbado (flujo continuo por compresión) con el fin de mostrar las bondades del método perturbativo. Para este efecto, se escalan las ecuaciones de continuidad, movimiento y reológica y se deducen expresiones para la fuerza a ordenes cero y primero. Finalmente, el efecto de incluir la inercia a primer orden aumenta la fuerza de compresión en el fluido y puede ser el punto de partida en la aplicación de estos sistemas en la biomecánica del cuerpo humano a través de prótesis de rodilla biocompatibles.

Este trabajo de investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas de flujo que puedan caracterizar fluidos a través de la función viscosidad.

Palabras claves:

Fluido Newtoniano, Flujo Radial, Flujo por Compresión, Flujo Continuo Por Compresión, Viscosimetría, Análisis de Órdenes de Magnitud, Método perturbativo

ÍNDICE

CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN	9
1.1. Preliminares	10
1.2. Hipótesis	11
1.3. Objetivos de la investigación:	11
A) General	11
B) Particular	11
1.4. Distribución del material.	12
CAPÍTULO 2 PROBLEMA FÍSICO	13
2.1. Análisis del problema	14
2.2. Ecuaciones Teóricas.	15
2.2.1. Ecuación de continuidad: Conservación de la masa sin generación	15
2.2.2. Ecuación de Cauchy en su segunda forma: Segunda Ley de Newton aplicada a un medio continuo	15
2.2.3. Ecuación reológica: Ecuación constitutiva de Newton	15
2.2.4. Tensores Cinemáticos.....	16
CAPÍTULO 3 MODELADO MATEMÁTICO	18
3.1. Flujo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos.	19
3.1.1. Razonamiento.	19
3.1.2. Velocidad Radial.	20
3.1.3. Flujo Volumétrico.	22
3.2. Flujo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos	24
3.2.1. Razonamiento	24
3.2.2. Distribución de presiones.	27
3.2.3. Fuerza de Compresión.	28
3.2.4. Viscosimetría del Flujo por Compresión.....	29
3.3. Flujo Continuo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos. ..	30
3.3.1. Razonamiento.	30
3.3.2. Distribución de Presiones.	35
3.3.3. Fuerza de Compresión.....	36

CAPÍTULO 4 MODELADO MATEMÁTICO	38
4.1. Argumento.	39
4.2. Variables adimensionales	39
4.2.1. Componente radial de la ecuación de Navier-Stokes	40
4.2.2. Componente axial de la Ecuación de Navier-Stokes.....	40
4.2.3. Ecuación de continuidad:.....	40
4.2.4. Números adimensionales	40
4.2.5. Fuerza del líquido en el plato superior	41
4.3. Perturbación	41
4.3.1. Teoría a orden cero: $O(\alpha^0)$	41
4.3.2. Teoría a primer orden: $O(\alpha^1)$	43
4.4. Recapitulación.	45
CAPITULO 5. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	46
5.1. Argumento.	47
5.2. Velocidad Radial a Orden Cero $O(\alpha^0)$:.....	47
5.3. Velocidad Axial a Orden Cero.....	49
5.4. Gradiente y perfil de presión a Orden Cero.....	50
5.5. Teoría a orden uno	52
5.6. Velocidad Axial a Orden Uno.....	53
5.7. Gradiente de Presión a Orden Uno.	55
CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....	56
6.1. Aportación al Conocimiento.....	57
6.2. Trabajo Futuro.	59
BIBLIOGRAFÍA.....	60

ÍNDICE DE FIGURAS.

Figura 1. En la figura se ilustra un fluido el flujo entre discos paralelos.	19
Figura 2. Ilustra el flujo por compresión de un fluido newtoniano entre dos platos concéntricos los cuales, están separados a una distancia $H(t)$ y de radio $r = a..$	25
Figura 3. Ilustra el flujo continuo por compresión entre dos platos concéntricos.....	32
Figura 4. Representación del perfil de velocidades la ecuación de la velocidad Radial a Orden Cero.	47
Figura 5. Representación gráfica de la ecuación de la velocidad radial a orden cero.	48
Figura 6 Representación gráfica de la ecuación de la velocidad axial a orden cero.	49
Figura 7. Representación gráfica de la ecuación del Gradiente de Presión a Orden Cero. ..	50
Figura 8. Representación gráfica de la ecuación del Delta de Presión a Orden Cero.	50
Figura 9. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Radial a Orden Uno, variando los valores de r	52
Figura 10. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Radial a Orden Uno, variando los valores de Reynolds.	52
Figura 11. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Axial a Orden Uno, sin tomar en cuenta Reynolds.	53
Figura 12. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Axial a Orden Uno, variando el Reynolds.	53
Figura 13. Representación gráfica de la ecuación del Gradiente de Presión a Orden Cero, variando Reynolds.	55
Figura 14. Representación gráfica de la ecuación del Delta de Presión a Orden Cero, variando Reynolds.	55

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Preliminares

En las aplicaciones industriales, se tiene una combinación de flujo cortantes con extensionales. Estos flujos cortantes se asocian a un vector velocidad que depende de una variable independiente. Opuesto a esto, se encuentran los flujos que dependen de dos variables independientes y muestran una transición cortante y extensional. Actualmente el flujo extensional se ocupa en la formación de colágeno y en la ingeniería del tejido humano (Wang et al. 2023; Shaoqiong et al. 2023).

El flujo extensional es uno de los sistemas más difíciles de medir y no existe una sola forma de medirlo (Reddy Malipeddi et al. 2023). Este tipo de sistemas han sido estudiados en fluidos viscoelásticos con mecanismos inerciales incluidos (Reddy Malipeddi et al. 2023).

Este tipo de sistemas de flujo han sido, utilizados para el flujo estacionario elongacional de dinámica de fluidos poliméricos con el fin, de dilucidar propiedades materiales en estos sistemas complejos (Chol Park et al. 2023).

Por otra parte, y debido a la complejidad que representa este tipo de sistemas debido a dos puntos importantes:

- a) El flujo extensional se genera debido a una transición de flujo de cortante a extensional por efecto del flujo.
- b) No existe un aparato que lo mida, o la menos que sea único.

Por lo tanto, existen sistemas de flujo que involucran componentes cortantes y extensionales. Uno de estos ejemplos es el conocido como flujo por compresión, flujo continuo por compresión y flujo entre discos paralelos (Bird et al. 2002; Fusi y Ballotti 2023).

Una de las primeras aproximaciones que se utiliza para analizar el flujo por compresión consiste en la teoría de ordenes de magnitud, seguida de la aproximación de lubricación. Esta, es igual a pensar que la curvatura se desprecia y el sistema se aproxima mediante al flujo de Poiseuille en placas paralelas (Shabnam et al. 2022).

Esmaeili et al. (2023) estudio el problema del flujo por compresión para un fluido viscoplástico que presenta esfuerzo de cedencia, entre dos platos paralelos. El líquido fue caracterizado mediante un líquido de Bingham. En su trabajo analiza el flujo por compresión aplicando una fuerza constante y demuestran que existe un espesor finito al final de la compresión.

Existen otros sistemas que involucran mecanismos extensionales y cortantes en la literatura. Estos simulan el flujo continuo por compresión mediante un sistema de flujo continuo. Waters y Gooden (1984) describen estudiaron el flujo continuo por compresión para un líquido viscoelástico de Oldroyd. Su trabajo fue analizado mediante un esquema perturbativo a ordenes cero y primero para incorporar los mecanismos inerciales y elásticos.

Ellos demostraron que los mecanismos inerciales contribuyen en poco a la compresión y que los mecanismos elásticos juegan un papel importante debido al almacenamiento de energía.

Sin embargo y a pesar de todos los avances científicos tecnológicos en el área de lubricación, todavía existen dudas en esta aproximación y bajos qué condiciones se utiliza este principio. Básicamente el truco consiste en tener un sistema en donde existan dos longitudes características en la cuales se pueda contrastar los términos y aplicar entonces la aplicación de lubricación. En este punto, existen tres sistemas clásicos que pueden ser estudiados, los cuales son mencionados a continuación:

- A) Flujo por compresión entre discos paralelos
- B) Flujo entre discos paralelos
- C) Flujo continuo por compresión

Precisamente, este trabajo pretende establecer las bases para entender este tipo de sistemas de flujo a detalle con el fin, de presentar una metodología que permita entender la aproximación de Lubricación y su importancia en Ingeniería Química. Esta investigación

1.2. Hipótesis

Si en un sistema de platos paralelos separados a una distancia $H(t)$ el plato superior se aproxima con una rapidez que depende del tiempo, entonces la fuerza de compresión estará dominada por los mecanismos cortantes, extensionales y una combinación cinemática de estos, a través de las propiedades materiales y geométricas del medio.

Para debatir esta hipótesis, se plantean los siguientes objetivos, los cuales son mencionados a continuación:

1.3. Objetivos de la investigación:

A) General

Analizar el efecto de compresión de un fluido newtoniano entre dos platos paralelos en función de las propiedades geométricas y del medio.

B) Particular

P.1. Obtener los perfiles de velocidad radial y axial, rapidez de deformación cortante, extensional y la fuerza de compresión de un fluido newtoniano.

P.2 Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que aparezcan grupos adimensionales que describan los mecanismos macroscópicos en el sistema de flujo.

P.3 Proponer un esquema de perturbación con el fin de deducir expresiones analíticas a ordenes cero y primero en función de las características geométricas y de flujo.

P.4 Caracterizar el rol de los mecanismos cortantes y extensionales mediante el formalismo de Fuller.

P.5 Usar datos reométricos de un fluido modelo con el fin probar las bondades de las expresiones analíticas deducidas en esta investigación a nivel de licenciatura.

1.4. Distribución del material.

En la primera sección de este trabajo se presenta la introducción, motivación, estado del arte, hipótesis y objetivos del proyecto.

En el segundo capítulo, se presenta la solución completa de los problemas de esta tesis los cuales consisten en

- a) Flujo entre discos paralelos
- b) Flujo por compresión
- c) Flujo continuo por compresión

Se presenta el desarrollo a partir de las ecuaciones generales, los vectores cinemáticos y dinámica del flujo y los resultados para el vector de velocidad radial, vector de velocidad axial, flujo volumétrico y tensores rapidez de deformación y segunda invariante del tensor rapidez de deformación.

En el tercer capítulo, se presenta un esquema perturbativo de las ecuaciones descritas con el fin de proponer una contribución debido a los mecanismos inerciales. Es claro, que se escogerá un flujo en específico de los tres para desarrollar el método perturbativo.

En el cuarto capítulo se presentarán las simulaciones en el programa WOLFRAM-MATHEMATICA y los resultados numéricos serna exportados a una hoja de cálculo con el fin de que puede ser visualizados correctamente. Los resultados serán analizados matemáticamente y desde el punto de vista físico. Finalmente, se establecerán las conexiones entre los problemas y la transición de los mecanismos cortantes y extensionales con el sistema.

En el quinto, capítulo se establecerá las conclusiones, aportación al conocimiento y trabajo futuro. En el diagrama de Flujo se observa la distribución de la tesis

CAPÍTULO 2

PROBLEMA FÍSICO

2.1. Análisis del problema

En este capítulo se presentan las ecuaciones de conservación de la masa, transporte y reológica en el sistema de estudio. Las condiciones de proceso en estos problemas son enlistadas a continuación:

- A. **Fluido incompresible:** El fluido no depende de la posición el tiempo, por lo que la densidad permanece constante.
- B. **Fluido newtoniano:** El fluido solo depende de una propiedad material y el tensor de esfuerzos es proporcional al tensor rapidez de deformación.
- C. **Proceso isotérmico:** La temperatura es constante, es decir, ninguna propiedad material cambia con respecto a la temperatura.
- D. **Estado estacionario:** Las propiedades dinámicas o intrínsecas del sistema no dependen del tiempo y se puede considerar el sistema que es analizado a tiempos largos.
- E. **Estado transitorio:** En contraste con las propiedades en estado estacionario, las propiedades dinámicas o intrínsecas dependen del tiempo.
- F. **Flujo unidireccional:** El campo de velocidades depende de un solo componente.
- G. **Flujo bidireccional:** El campo de velocidades depende de dos componentes.
- H. **Flujo cortante:** El flujo que es inducido cuando una componente del vector velocidad en función de la variable en donde se transfiere el movimiento.
- I. **Flujo extensional:** El flujo que se obtiene cuando una componente del vector velocidad es función de la variable que describe la velocidad.
- J. **Flujo combinado:** Flujo que contiene componentes cortantes y extensionales.

La estrategia para resolver los problemas es presentar las ecuaciones generales. La primera de estas ecuaciones es la ecuación de continuidad, la cual describe la conservación de la materia sin generación. La ecuación de movimiento que es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo y que es de naturaleza vectorial. Este modelo puede describirse en términos de sus componentes radial, angular y axial. Los problemas que serán resueltos son los siguientes:

- A) Flujo radial entre discos paralelos de un fluido Newtoniano
- B) Flujo por compresión entre discos paralelos de un fluido Newtoniano
- C) Flujo continuo por compresión entre discos de un fluido Newtoniano

En la siguiente sección se presentará paso a paso los desarrollos de esto tres sistemas, con el fin de obtener expresiones analíticas para la velocidad, flujo volumétrico y fuerza en el sistema.

2.2. Ecuaciones Teóricas.

Las ecuaciones básicas que serán utilizadas en la solución de los problemas son presentadas a continuación:

2.2.1. Ecuación de continuidad: Conservación de la masa sin generación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

2.2.2. Ecuación de Cauchy en su segunda forma: Segunda Ley de Newton aplicada a un medio continuo

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

2.2.3. Ecuación reológica: Ecuación constitutiva de Newton

La ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} \quad (3)$$

En donde la contribución del solvente se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \quad (4)$$

Al combinar las Ecs. (2-4), se obtiene la siguiente expresión para la ecuación dinámica, i.e.,

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla \cdot [\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T]) + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

Distribuyendo el operador divergencia, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}^T)) + \rho \mathbf{g} \quad (6)$$

La Ec. (6), se puede simplificar a:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla [\nabla \cdot \mathbf{V}]) + \rho \mathbf{g} \quad (7)$$

Suponiendo fluido incompresible, es decir densidad constante, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (8)$$

Desarrollando la derivada material del vector velocidad \mathbf{V}

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (9)$$

El sistema se encuentra en estado estacionario, i.e.,

$$\text{Lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Suponiendo que los mecanismos gravitacionales son despreciables, i.e.,

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \cong -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (11)$$

Por lo que la Ec. (11), toma la forma:

$$\rho (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

2.2.4. Tensores Cinemáticos.

Para obtener las componentes de las ecuaciones de transporte correspondientes, se empearán los siguientes vectores y tensores cinemáticos y dinámicos en el sistema.

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (V_r(r,z,t), 0, V_z(r,z,t)) \quad (12)$$

El tensor gradiente de velocidad tiene la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (13)$$

El tensor rapidez de deformación \mathbf{D} y el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ tienen la siguiente forma:

$$2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{V_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Y el tensor de esfuerzos este definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Sustituyendo el vector de velocidad, tensor gradiente de velocidad, tensor rapidez de deformación y esfuerzo se sustituye en la ecuación de continuidad y de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (16)$$

Y en coordenadas cilíndricas la ecuación de Navier-Stokes toma la forma:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{(V_\theta)^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_r \right) \quad (18)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V_\theta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_\theta \right) \quad (19)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

(20)

En la siguiente sección, se utilizarán las Ecs. (16-20) con el fin de resolver los problemas y deducir expresiones para: (i) Campo de velocidades, (ii) Flujo volumétrico, (iii) Presión y (iv) Fuerza de compresión.

CAPÍTULO 3

MODELADO MATEMÁTICO

3.1. Flujo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos.

3.1.1. Razonamiento.

Para modelar el sistema se suponen las siguientes restricciones físicas. El sistema fluye por dos geometrías. La primera de ellas es una rendija y la segunda es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.

- El líquido complejo es incompresible, i.e. su volumen no cambia.
- El proceso es isotérmico, i.e. la temperatura es constante y no es necesario el balance de energía.
- El fluido contiene dos contribuciones: c.1. Solvente y c.2 Polímero.
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables, el fluido es cortado por un gradiente de presión oscilatorio, el cual depende del tiempo y de la frecuencia.
- El sistema de coordenadas es colocado en el centro del tubo por lo que, se supone simetría cilíndrica.

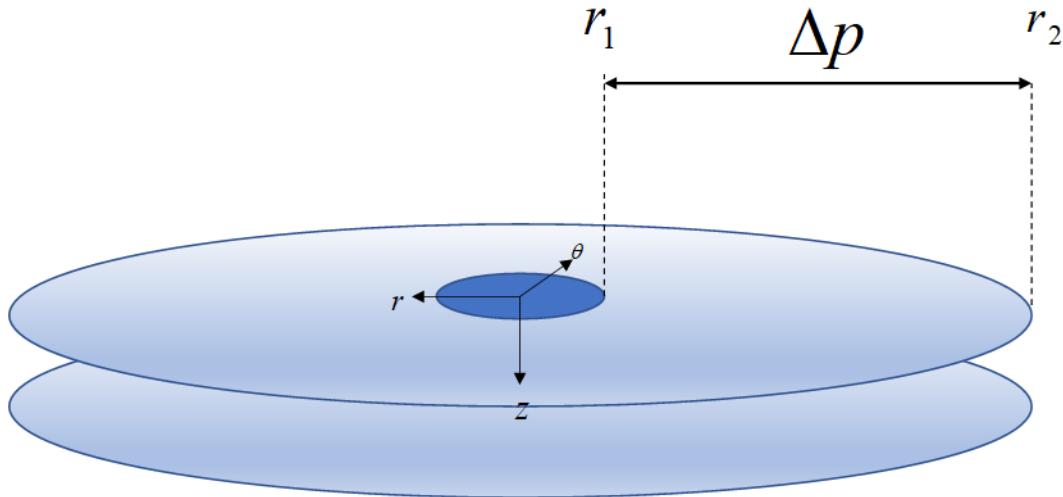


Figura 1. En la figura se ilustra un fluido el flujo entre discos paralelos. El fluido entra por la parte superior y se produce un lamiamiento radial. El sistema consiste dos discos de radio $r = r_1$ y $r = r_2$. Por efecto del cambio de área se produce una diferencia de presión Δp en el sistema.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) &= 0 \\ \rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_r \right) \\ V_r(r, B) &= 0 \\ V_r(r, -B) &= 0 \end{aligned}$$

De la ecuación de continuidad se tiene la siguiente expresión analítica

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0 \Rightarrow r V_r = \Phi(z) \Rightarrow V_r = \frac{\Phi(z)}{r} \quad (1)$$

Finalmente, la velocidad radial toma la forma:

$$\therefore \boxed{V_r(r,z) = \frac{\Phi(z)}{r}} \quad (2)$$

Al sustituir el campo de velocidades, en la componente radial de la ecuación de movimiento, se tiene la siguiente expresión:

$$\rho \left(\frac{\Phi(z)}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi(z)}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi(z)) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\Phi(z)}{r} \right) \right) \quad (3)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\rho \left(\frac{\Phi(z)}{r} \right) \left(-\frac{\Phi(z)}{r^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Phi(z)) \right)}_{=0} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\Phi(z)}{r} \right) \right) \quad (4)$$

Entonces

$$-\rho \left(\frac{\Phi^2(z)}{r^3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} \quad (5)$$

De la misma manera, tenemos lo siguiente:

$$\boxed{\frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} - \underbrace{\rho \frac{\Phi^2(z)}{r^3}}_{\text{Termino No-Lineal}}} \quad (6)$$

3.1.2. Velocidad Radial.

El termino no-lineal complica la ecuación por lo que, su solución es completamente numérica. Para avanzar en su solución, se procederá a despreciar este término por lo que se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7)$$

Al despejar la segunda derivada, se obtiene la siguiente expresión en el sistema:

$$\frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} = \frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8)$$

Al integrar con respecto a z

$$\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z + C_1 \quad (9)$$

En la ecuación anterior C_1 es una constante de integración. Una segunda integración permite obtener la siguiente expresión por lo que,

$$\Phi(z) = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (10)$$

En donde C_2 es una segunda integración. Al sustituir las condiciones de frontera, en la expresión para $\Phi(z=B) = \Phi(z=-B) = 0$. Finalmente, al sustituir las condiciones de frontera en el perfil de general:

$$\Phi(z=B) = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 + C_1 B + C_2 = 0 \quad (11)$$

$$\Phi(z=-B) = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (-B)^2 + C_1 (-B) + C_2 = 0 \quad (12)$$

Al resolver las expresiones, se obtiene que $C_1 = 0$. Esto implica que las condiciones de frontera muestran que la solución debe ser una función par. La constante C_2 se despeja fácilmente de la primera ecuación C_2 por lo que, obtenemos:

$$C_2 = -\frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 \quad (13)$$

Al sustituir las constantes C_1 y C_2 en la ecuación general, obtenemos la ecuación particular:

$$\Phi(z) = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 - \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 \quad (14)$$

Mediante algebra, obtenemos:

$$\Phi(z) = -\frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 + \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 = -\frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 \left(1 - \left(\frac{z}{B} \right)^2 \right) \quad (15)$$

Por lo tanto, la función $\Phi(z)$ tiene la siguiente forma:

$$\Phi(z) = -\frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} B^2 \left(1 - \left(\frac{z}{B} \right)^2 \right) \quad (16)$$

La ecuación anterior, se puede resolver mediante el método de separación de variables, por lo que:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\Phi(z)}{r} \partial r = \int_{p_1}^{p_2} -\frac{B^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) \partial p \quad (17)$$

Por linealidad, se tiene lo siguiente:

$$\Phi(z) \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \partial r = \frac{B^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) \left(-\int_{p_1}^{p_2} \partial p\right) \quad (18)$$

Integrando,

$$\Phi(z) \text{Ln}r \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{B^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) \left(-p \Big|_{p_1}^{p_2}\right) \quad (19)$$

Simplificando y utilizando las leyes de los logaritmos:

$$\Phi(z) (\text{Ln}r_2 - \text{Ln}r_1) = \frac{B^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) (p_1 - p_2) \quad (20)$$

Finalmente,

$$\Phi(z) = \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) \quad (21)$$

En términos de la velocidad,

$$V_r(r,z) = \frac{\Phi(z)}{r} \quad (22)$$

Por lo que, la velocidad axial toma la forma:

$$\therefore V_r(r,z) = \frac{1}{r} \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \left(1 - \left(\frac{z}{B}\right)^2\right) \quad (23)$$

3.1.3. Flujo Volumétrico.

El flujo volumétrico, se puede calcular mediante una doble integral integrando el campo de velocidades en una sección de área transversal por lo que, tenemos la siguiente expresión analítica:

$$Q = \int_{-B}^B \int_0^{2\pi} Vr(r,z)rd\theta dz \quad (24)$$

El flujo volumétrico puede ser expresado mediante la fluidez

$$Q = \int_{-B}^B \int_0^{2\pi} \underbrace{Vr(r,z)rd\theta}_{\Phi(z)} dz = 2\pi \int_{-B}^B \Phi(z)dz = 4\pi \int_0^B \Phi(z)dz \quad (25)$$

$$Q = 4\pi \int_0^B \Phi(z)dz = 4\pi \int_0^B \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \left(1 - \left(\frac{z}{B} \right)^2 \right) dz \quad (26)$$

Por linealidad, se tiene lo siguiente:

$$Q = 4\pi \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \int_0^B \left(1 - \left(\frac{z}{B} \right)^2 \right) dz \quad (27)$$

Integrando,

$$Q = 4\pi \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \left(z - \frac{1}{3B^2} z^3 \right) \Big|_0^B \quad (28)$$

Así que,

$$Q = 4\pi \frac{B^2 (p_1 - p_2)}{2\mu \left(\text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \right)} \left(B - \frac{1}{3B^2} B^3 \right) \quad (29)$$

Finalmente

$$\therefore Q = \frac{4 \pi B^3 (p_1 - p_2)}{3 \mu \text{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right|} \quad (30)$$

La expresión para el flujo volumétrico depende de la diferencia de presiones, de las variables geométricas del sistema como son: (i) separación de los platos, (ii) logaritmo del

cociente de longitudes características y (iii) de la viscosidad que es una propiedad del sistema que se opone a que el fluido sea deformado continua e irreversiblemente.

$$\Delta p = -(p_2 - p_1) = \mu \operatorname{Ln} \left| \frac{r_2}{r_1} \right| \frac{3Q}{4\pi B^3} = \dot{\gamma}_{\text{app}} \quad (31)$$

La ecuación anterior, puede servir para calcular la viscosidad aparente y es punto de partida en el cálculo de la viscosidad aparente.

3.2. Flujo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos

3.2.1. Razonamiento

Para modelar el sistema se suponen las siguientes restricciones físicas. El fluido viscoso es colocado entre dos platos paralelos como se observa en la Fig. 1. El fluido es comprimido mediante una fuerza que depende del tiempo. Esta, produce un laminado radial. Las restricciones para este fluido son las siguientes

- El fluido es incompresible, i.e. su volumen no cambia.
- El proceso es isotérmico, i.e. la temperatura es constante y no es necesario el balance de energía.
- El líquido es deformado continua e irreversiblemente por una fuerza de compresión que induce un gradiente de presión en la dirección radial
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables
- El sistema de coordenadas es colocado en la base del plato inferior. El eje de coordenado radial es en la dirección del flujo y el eje z en la dirección de la compresión.
- Suponemos que la velocidad de compresión del plato inferior es muy lenta de tal manera que se puede suponer estado cuasi-estacionario.

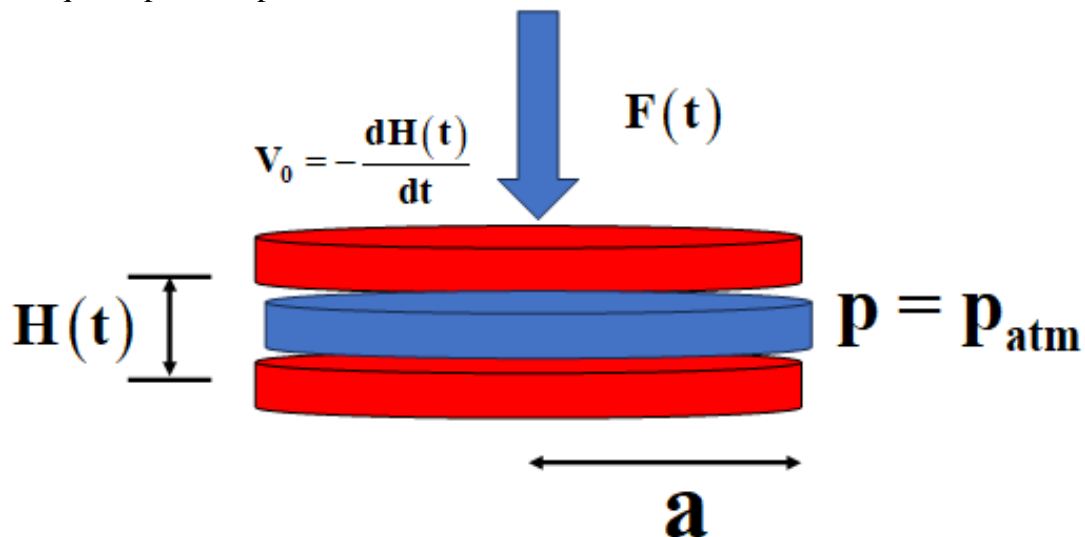


Figura 2. Ilustra el flujo por compresión de un fluido newtoniano entre dos platos concéntricos los cuales, están separados a una distancia $H(t)$ y de radio $r = a$. El plato superior se aproxima con una velocidad $V_0 = -dH(t)/dt$, lo cual induce un laminado radial, se supone que el fluido no presenta mecanismos de deslizamiento entre el fluido y la pared.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0 \\
 & \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \\
 & \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \\
 & V_z(r, H(t)) = V_0 = -dH(t)/dt; V_z(r, 0) = 0 \\
 & V_r(r, 0) = 0; V_r(r, H(t)) = 0 \\
 & p(r=a) = p_{\text{atm}}
 \end{aligned}$$

En este caso, y despreciando los efectos de curvatura asociados a la geometría, el sistema es aproximado al flujo de un gradiente de presión en placas paralelas suponiendo que no existe deslizamiento, se obtendrá lo siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la velocidad radial en función del gradiente de presión

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \quad (1)$$

La Ec. (1) tiene la misma forma que la ecuación del flujo radial entre discos paralelos. Al integrar dos veces con respecto a la coordenada axial,

$$V_r = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (2)$$

Acomodando la ecuación, nos queda:

$$V_r(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (3)$$

Las condiciones de frontera para este flujo, se define como:

$$\text{C.F.1: } V_r(r, z = 0) = 0 \quad (4)$$

$$\text{C.F.2: } V_r(r, z = H(t)) = 0$$

Al sustituir las Ecs. (4) en la Ec. (3), se tiene lo siguiente:

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (0^2) + C_1(0) + C_2 \quad (5)$$

Y la segunda condición, tiene la estructura

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} H^2 + C_1 H + C_2 \quad (6)$$

Al resolver las Ecs. (5) y (6) y sustituirla en la expresión general, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$V_r(r,z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H) \quad (7)$$

Por conservación de masa,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Sustituimos Ec. (7) en la Ec. (8)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H) \right] \right\} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Resolviendo la Ec. (18) para la velocidad axial, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H) \right] \right\} \quad (10)$$

Integrando con respecto a z, desde z = 0 (límite inferior), hasta z = H(t) (límite superior), obtenemos la siguiente expresión:

$$V_z(r,z,t) = V_z(r,z=0,t) - \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - H(t) \frac{z^2}{2} \right) \quad (11)$$

Por lo que, la velocidad axial del fluido esta dada por, la siguiente expresión analítica:

$$V_z(r,z,t) = -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - H(t) \frac{z^2}{2} \right) \quad (12)$$

Sustituyendo la condición de frontera, z = H(t), la velocidad V_z(r,t) = -dH(t)/dt, en la Ec. (12), se tiene lo siguiente:

$$-\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(-\frac{1}{6\mu} H^3 \right) \quad (13)$$

Por lo que:

$$-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{6\mu}{H^3} \left(\frac{dH}{dt} \right) \quad (14)$$

Al sustituir la Ec. (14) en la Ec. (12), se obtiene la expresión para la velocidad axial en el sistema de estudio.

$$\therefore \boxed{V_z(r,z,t) = \left(\frac{dH}{dt} \right) \left(2 \left(\frac{z}{H(t)} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{H(t)} \right)^2 \right)} \quad (15)$$

Es importante resalta tres aspectos importantes en la Ec. (15):

- La velocidad axial depende de la velocidad de la velocidad de aproximación del plato superior.
- No depende de las propiedades materiales del sistema
- Las Ecs. (7) y (15) son punto de partida en cálculos más complicados empleados en ecuaciones viscoelásticas y métodos numéricos computacionales.

3.2.2. Distribución de presiones.

De la Ec. (14) obtuvimos una expresión para el gradiente de presión en términos de la viscosidad newtoniana, la distancia de separación de los platos y la velocidad con la que se aproxima el plato superior al fluido

$$-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{6\mu}{H^3} \left(\frac{dH}{dt} \right) \quad (16)$$

Al separar variables, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{12\mu}{H^3} \left(\frac{dH}{dt} \right) r \quad (17)$$

Integrando dos veces, obtenemos la siguiente expresión analítica:

$$p(r) = -3\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (18)$$

En $r = 0$, la presión debe de estar definida por lo que, se tiene lo siguiente:

$$p(r) = -3\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} r^2 + C_1 \ln(0) + C_2 \quad (19)$$

La Ec. (19) muestra una singularidad cuando r se aproxima a cero, por lo que para evitar esto, se supondrá que la constante C_1 vale cero, i.e.

$$p(r) = -3\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} r^2 + C_2 \quad (20)$$

En $r = a$, la $p = p_{\text{atm}}$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$C_2 = p_{\text{atm}} + 3\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} a^2 \quad (21)$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$p(r) = p_{\text{atm}} + 3\mu \frac{a^2}{H^3} \frac{dH}{dt} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (22)$$

3.2.3. Fuerza de Compresión.

La fuerza que experimenta el plato superior por efecto del fluido, se puede calcular de la siguiente manera:

$$\frac{dF}{dA} = p + \sigma_{zz} - p_{\text{atm}} \quad (23)$$

En la Ec. (23) el esfuerzo normal σ_{zz} es evaluado en el plato superior, i.e., $\sigma_{zz}(z = H(t))$. Entonces, la fuerza toma la siguiente forma

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(p + \sigma_{zz}|_{z=H(t)} - p_{\text{atm}} \right) r dr d\theta \quad (24)$$

El esfuerzo normal zz , se puede calcular como:

$$\sigma_{zz}|_{z=H(t)} = \mu \frac{dVz}{dz} \Big|_{z=H(t)} = \frac{6}{H(t)} \left(\frac{dH(t)}{dt} \right) \left(\left(\frac{z}{H(t)} \right)^2 - \frac{z}{H(t)} \right) \Big|_{z=H(t)} = 0$$

(25)

Por lo que, la Ec. (24) toma la forma:

$$F = 2\pi \int_0^a \left(p(r) + \sigma_{zz}|_{z=H(t)} - p_{atm} \right) r dr = -2\pi \int_0^a \left(p(r) - p_{atm} \right) r dr$$

(26)

Al integrar por partes, la Ec. (26) se tiene la siguiente expresion

$$F = -2\pi \int_0^a p(r) r dr = -\pi \left\{ [p(r=a) - p_{atm}] a^2 - \int_0^a r^2 \frac{dp(r)}{dr} dr \right\}$$

(27)

Simplificando, obtenemos la fuerza en funcion del tiempo:

$$F = \pi \int_0^a \frac{dp(r)}{dr} r^2 dr$$

(28)

Al sustituir el gradiente de presión radial en la Ec. (28), se tiene los siguiente:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -6\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} r$$

(29)

Finalmente, sustituimos la Ec. (28) en la Ec. (30.1); por lo que la fuerza se puede calcular como:

$$F = -6\pi\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} \int_0^a r^3 dr = -6\pi\mu \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dt} \frac{a^4}{4} = \frac{3}{2} \pi\mu \frac{a^4}{H^3} \left(-\frac{dH}{dt} \right)$$

(30)

Por lo tanto, la fuerza que experimenta el plato superior esta establecida por la ecuación de Steefan, i.e.

$$\therefore F = \frac{3}{2} \pi\mu \frac{a^4}{H^3} \left(-\frac{dH}{dt} \right)$$

(31)

3.2.4. Viscosimetría del Flujo por Compresión.

Integrando y manteniendone la fuerza constante e independiente del tiempo, i.e., $F(t) = F_0$, se tiene lo siguiente:

$$F_0 = \frac{3}{2} \pi \mu \frac{a^4}{H^3} \left(-\frac{dH}{dt} \right) \quad (32)$$

Separamos lo que esta entre corchetes

$$\int_{t_0}^t F_0 dt = \int_{H_0}^{H(t)} -\frac{3}{2} \pi \mu a^4 \frac{d\bar{H}}{\bar{H}^3(t)} = -\frac{3}{2} \pi \mu a^4 \int_{H_0}^{H(t)} \frac{d\bar{H}}{\bar{H}^3(t)} \quad (33)$$

Integrando, se tiene la siguiente expresión analítica

$$\frac{4F_0(t-t_0)}{3\pi\mu a^4} + \frac{1}{\bar{H}_0^2} = \frac{1}{\bar{H}^2(t)} \quad (34)$$

Finalmente, el resultado general puede ser expresado como:

$$\therefore \boxed{\frac{1}{\bar{H}^2(t)} = \frac{1}{\bar{H}_0^2} + \frac{4F_0(t-t_0)}{3\pi\mu a^4}} \quad (35)$$

3.3. Flujo Continuo por Compresión de un Fluido Newtoniano en Platos Paralelos.

3.3.1. Razonamiento.

El sistema es muy parecido al del ejercicio de flujo por compresión. Excepto, que en este no hay casos no hay partes móviles y por lo tanto no hay que tomar en cuenta la inercia del palto que se mueve. Los siguientes puntos son tomados en cuenta para la deducción de la fuerza.

- A) El líquido es incompresible, i.e., su densidad es constante e independiente de la posición y del tiempo.
- B) El fluido es newtoniano, i.e., su viscosidad no depende de la rapidez con la que es deformado.
- C) Su temperatura es constante, i.e., no es necesario tomar en cuenta el balance de energía.

- D) Se supone simetría cilíndrica, i.e., las propiedades materiales no dependen de la coordenada angular θ
- E) Se supone que el vector de velocidad tiene dos componentes radiales y axiales las cuales dependen de las coordenadas radial y axial.
- F) Se supone que el plato inferior, tiene una distribución aleatorios de orificios por donde el líquido newtoniano entra a flujo volumétrico constante Q .
- G) La entrada del líquido en el plato inferior induce un gradiente de presión radial.
- H) Los mecanismos gravitacionales son despreciables, i.e., $g = 0$.

Las ecuaciones teóricas que describen el flujo por compresión se definen de la siguiente manera:

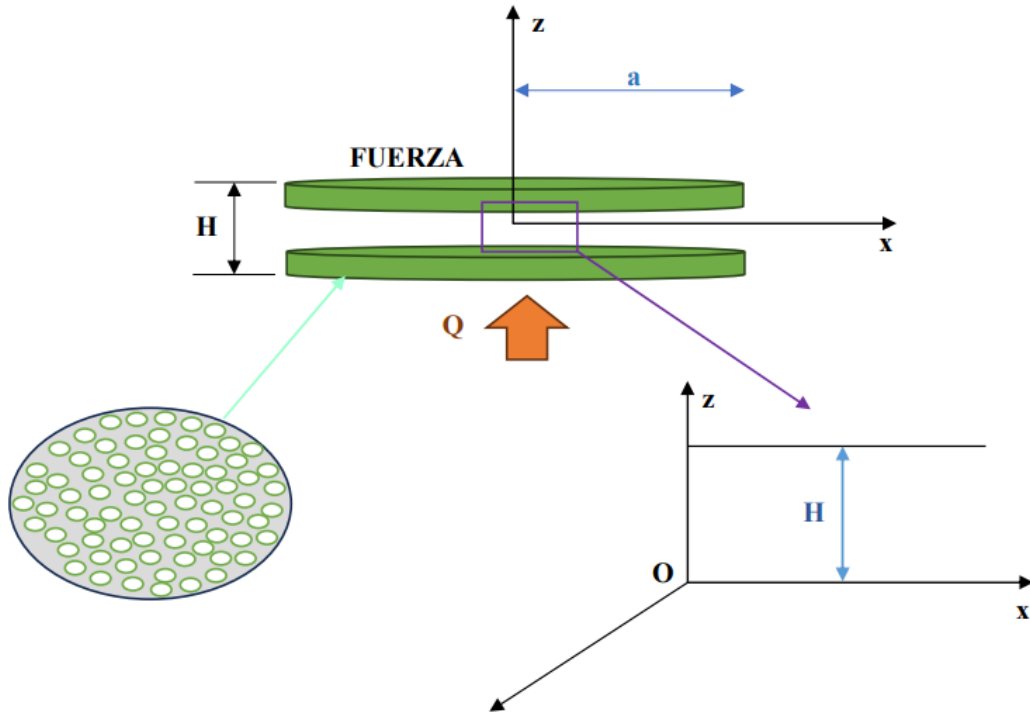


Figura 3. Ilustra el flujo continuo por compresión entre dos platos concéntricos. El plato de abajo contiene una serie de perforaciones las cuales, están distribuidas aleatoriamente. El líquido es inyectado a flujo constante y este ejerce una fuerza en el plato superior situado a una distancia H . La ventaja de este sistema es que no debe tomarse en cuenta la inercia del plato superior debido a que no se mueve por compresión de un fluido newtoniano entre dos platos concéntricos los cuales, están separados a una distancia $H(t)$ y de radio $r = a$. El plato superior se aproxima con una velocidad $V_0 = -dH(t)/dt$, lo cual induce un laminado radial, se supone que el fluido no presenta mecanismos de deslizamiento entre el fluido y la pared.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0 \\
& \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \\
& \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \\
& V_z(r, z=0) = 0; \quad Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(z=0, r) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a u(r) r dr d\theta \\
& V_z(r, H) = 0 \\
& V_r(r, z=H) = 0 \\
& V_r(r=0, z) = 0 \\
& Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(z=0, r) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a u(r) r dr d\theta \\
& F = \int_0^{2\pi} \int_0^a (p(r) + \sigma_{zz}|_{z=H}) r dr d\theta = -\pi \int_0^a \frac{\partial p(r)}{\partial r} r^2 dr
\end{aligned}$$

En este caso, y despreciando los efectos de curvatura asociados a la geometría, el sistema es aproximado al flujo de un gradiente de presión en placas paralelas suponiendo que no existe deslizamiento, se obtendrá lo siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la velocidad radial en función del gradiente de presión

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 V_r(r, z)}{\partial z^2} \quad (1)$$

La Ec. (1) tiene la misma forma que la ecuación del flujo radial entre discos paralelos. Al integrar dos veces con respecto a la coordenada axial,

$$V_r(r, z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (2)$$

Las condiciones de frontera para este flujo, se define como:

$$\text{C.F.1: } V_r(r, z=0) = 0 \quad (3)$$

$$\text{C.F.2: } V_r(r, z=H) = 0 \quad (4)$$

Al sustituir las Ecs. (4) en la Ec. (3), se tiene lo siguiente:

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (0^2) + C_1(0) + C_2 \quad (5)$$

Y la segunda condición, tiene la estructura

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} H^2 + C_1 H + C_2 \quad (6)$$

Al resolver las Ecs. (5) y (6) y sustituirla en la expresión general, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\therefore \boxed{Vr(r,z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H)} \quad (7)$$

Por conservación de masa,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr(r,z)) + \frac{\partial Vz(r,z)}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Sustituimos Ec. (7) en la Ec. (8)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H) \right] \right\} + \frac{\partial Vz}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Resolviendo la Ec. (18) para la velocidad axial, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial Vz}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-H) \right] \right\} \quad (10)$$

Integrando con respecto a z, desde z = 0 (límite inferior), hasta z = H(t) (límite superior), obtenemos la siguiente expresión:

$$Vz(r,z) = Vz(r,z=0) - \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - H \frac{z^2}{2} \right) = u(r) - \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - H \frac{z^2}{2} \right) \quad (11)$$

Por lo que, la velocidad axial del fluido esta dada por, la siguiente expresión analítica:

$$Vz(r,z) = u(r) - \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - H \frac{z^2}{2} \right) \quad (12)$$

Sustituyendo la condición de frontera, z = H, la velocidad Vz(r,H) = 0, en la Ec. (2), se tiene lo siguiente:

$$-u(r) = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(-\frac{1}{6\mu} H^3 \right) \quad (13)$$

Por lo que:

$$-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{6\mu}{H^3} u(r) \quad (14)$$

Al sustituir la Ec. (14) en la Ec. (12), se obtiene la expresión para la velocidad axial en el sistema de estudio.

$$\therefore \boxed{V_z(r,z) = u(r) \left(2 \left(\frac{z}{H} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right)} \quad (15)$$

Es importante resalta tres aspectos importantes en la Ec. (15):

- La velocidad axial depende de la velocidad de la velocidad de aproximación del plato superior.
- No depende de las propiedades materiales del sistema
- Las Ecs. (7) y (15) son punto de partida en cálculos más complicados empleados en ecuaciones viscoelásticas y métodos numéricos computacionales.

3.3.2. Distribución de Presiones.

De la Ec. (14) obtuvimos una expresión para el gradiente de presión en términos de la viscosidad newtoniana, las distancias de separación de los platos y la velocidad con la que se aproxima el plato superior al fluido

$$-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{6\mu}{H^3} u(r) \quad (16)$$

Al separar variables, e integrar se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\mu}{H^3} \frac{1}{r} \int_0^r u(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \quad (17)$$

En este punto, si la función de distribución $u(r)$ es constante, i.e., no hay diferencia en el volumen de líquido que entra por los orificios. El flujo volumétrico, debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a u(r) r dr d\theta = 2\pi u(r) \int_0^a r dr = \pi a^2 u(r) \quad (18)$$

Por lo que, la función $u(r)$ se puede expresar como:

$$u(r) = \frac{Q}{\pi a^2} \quad (19)$$

Por lo que, el gradiente de presión, tiene la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\mu}{H^3} \frac{Q}{\pi a^2} r \quad (20)$$

Al intergrar la Ec. (20), se tiene:

$$p(r) = -\frac{3\mu}{H^3} \frac{Q}{\pi a^2} r^2 + C \quad (21)$$

Si suponemos que, que la presión es conocida en $r = a$, i.e., $p(a) = 0$, entonces:

$$p(r) = \frac{3\mu}{H^3} \frac{Q}{\pi a^2} a^2 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (22)$$

3.3.3. Fuerza de Compresión.

La fuerza que experimenta el plato superior por efecto del fluido, se puede calcular de la siguiente manera:

$$\frac{dF}{dA} = p + \sigma_{zz} - p_{\text{atm}} \quad (23)$$

En la Ec. (23) el esfuerzo normal σ_{zz} es evaluado en el plato superior, i.e., $\sigma_{zz}(z = H)$. Entones, la fuerza toma la siguiente forma

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(p + \sigma_{zz}|_{z=H(r)} - p_{\text{atm}} \right) r dr d\theta \quad (24)$$

El esfuerzo normal zz , se puede calcular como:

$$\sigma_{zz}|_{z=H} = \mu \frac{dV_z}{dz} \Big|_{z=H} = \frac{6}{H} u(r) \left(\left(\frac{z}{H} \right)^2 - \frac{z}{H} \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (25)$$

Por lo que, la Ec. (25) toma la forma:

$$F = 2\pi \int_0^a \left(p(r) + \sigma_{zz}|_{z=H} \right) r dr = 2\pi \int_0^a p(r) r dr \quad (26)$$

Al integrar por partes, la Ec. (26) se tiene la siguiente expresion

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = \pi \left\{ [p(r=a)] a^2 - \int_0^a r^2 \frac{dp(r)}{dr} dr \right\} \quad (27)$$

Simplificando, obtenemos la fuerza en función del tiempo:

$$F = - \int_0^a r^2 \frac{dp(r)}{dr} dr \quad (28)$$

Finalmente, sustituimos la Ec. (20) en la Ec. (28) con el fin de obtener la fuerza que experimenta el plato superior por efecto del líquido. Esta ecuación sería la analoga a la ecuación de Stefan del flujo por compresión tradicional.

$$\therefore \boxed{F = \frac{3}{2} \pi \mu \frac{a^4}{H^3} \frac{Q}{\pi a^2}} \quad (29)$$

CAPÍTULO 4

MODELADO MATEMÁTICO

4.1. Argumento.

En esta sección, presentaremos un esquema perturbativo para incorporar los mecanismos inerciales a los flujos estudiados. Este esquema perturbativo, se obtiene mediante un esquema adimensional que será punto de partida en la solución del problema. A continuación, se hace un resumen de los puntos más importantes de este sistema:

- A) Se presenta un conjunto de ecuaciones adimensionales acopladas que en forma adimensional dependen del número de Reynolds, i.e., Re y de la razón geométrica $\alpha = H/a \ll 1$.
- B) Los términos que contienen α y ordenes superior a α son pequeños y pueden despreciarse. Por lo que tenemos un modelo más simplificado.
- C) La velocidad radial, axial, gradiente de presión y fuera a orden cero, coinciden con las técnicas de ordenes de magnitud.
- D) Mediante el método perturbativo, se obtiene una expresión para la velocidad radial, velocidad axial, gradiente de presión y presión y fuera a orden uno.
- E) La clave de estos sistemas es el cálculo del gradiente de presión a ordenes cero y primero respectivamente.

En la siguiente sección se presentan las variables y grupos adimensionales.

4.2. Variables adimensionales

Se propusieron las siguientes variables adimensionales para el adimensionamiento de la ec. de continuidad, ec. de Navier Stokes para el componente "r" (radial) y ec. de Navier Stokes para el componente "z" (Axial), con el fin de introducir grupos adimensionales y escalar las variables para así facilitar el modelado y simulación computacional del sistema de flujo continuo por compresión de un fluido Newtoniano entre dos placas paralelas. Las variables adimensionales utilizadas fueron las siguientes:

$$r^* = \frac{r}{a}; z^* = \frac{z}{H(t)}; V_r^* = \frac{V_r}{\frac{a \dot{H}}{H}}; V_z^* = \frac{V_z}{\dot{H}}; p^* = \frac{p}{a^2 \mu \frac{\dot{H}}{H^3}}; t^* = \frac{t}{t_c} \quad (1)$$

En donde la velocidad característica $\langle V \rangle$ esta dada por la siguiente expresión:

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{2\pi a h} \quad (2)$$

Al sustituir estas variables adimensionales en las ecuaciones de Navier-Stokes descritas en los capítulos anteriores, tenemos la siguiente expresión analítica:

4.2.1. Componente radial de la ecuación de Navier-Stokes

$$\alpha^1 \text{Re} \left(V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) = \alpha^2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \right) + \alpha^0 \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}} + \alpha^0 \left(-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) \quad (3)$$

4.2.2. Componente axial de la Ecuación de Navier-Stokes

$$\alpha^3 \text{Re} \left(V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) = -\alpha^0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \alpha^2 \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) + \alpha^1 \frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}} \quad (4)$$

4.2.3. Ecuación de continuidad:

$$\alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \alpha^0 \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (5)$$

4.2.4. Números adimensionales

Nótese que dichas ecuaciones dependen de dos números adimensionales α , Re los cuales están definidos como:

$$\alpha = \frac{h}{a} \quad (6)$$

$$\text{Re} = \rho \langle V \rangle a / \mu \quad (7)$$

El primer grupo adimensional es un cociente de dos longitudes características asociadas con el eje axial y radial respectivamente. El valor de alfa siempre es menor de uno, i.e., $\alpha = h/a \ll 1$. El número de Reynolds es un cociente de dos mecanismos los cuales relacionan los procesos viscosos e inerciales. Cuando el número de $\text{Re} \gg 1$, los mecanismos dominantes son los inerciales, mientras que si $\text{Re} \ll 1$, dominan los procesos viscosos. Las condiciones de frontera para el conjunto de ecuaciones acopladas, tiene la forma:

$$V_r^* = 0, V_z^* = u(r^*); z^* = 0 \quad (8)$$

$$V_r^* = V_z^* = 0; z^* = 1 \quad (9)$$

$$V_r^* = 0; r^* = 0 \quad (10)$$

4.2.5. Fuerza del líquido en el plato superior

La fuerza en el plato superior se calcula mediante un balance de fuerzas en la sección transversal del plato superior en $z = H$.

$$F = 2\pi \int_0^a p(r) r dr = -\pi \int_0^a \frac{\partial p(r)}{\partial r} r^2 dr \quad (11)$$

Al sustituir las variables adimensionales en la expresión para la fuerza obtenemos:

$$F = -\pi \frac{a^4 \mu \langle Vz \rangle}{H^3} \int_0^1 \frac{\partial p(r)}{\partial r} r^2 dr \quad (12)$$

4.3. Perturbación

En la siguiente sección, se llevará a cabo un desarrollo resumen de los cálculos y pasos necesarios que se llevaron a cabo para la perturbación a orden cero y a primer orden de los resultados de las ecuaciones adimensionales obtenidas; sin embargo, si quiere conocer acerca del desarrollo completo que se llevó a cabo para la obtención de los resultados perturbados a orden cero y a primer orden, puede revisarlos en los apéndices.

$$Vr(r,z) = \alpha^0 Vr_0 + \alpha^1 Vr_1 + \alpha^2 Vr_2 + O(\alpha^2) \quad (13)$$

$$Vz(r,z) = \alpha^0 Vz_0 + \alpha^1 Vz_1 + \alpha^2 Vz_2 + O(\alpha^2) \quad (14)$$

$$p(r) = \alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + O(\alpha^2) \quad (15)$$

4.3.1. Teoría a orden cero: $O(\alpha^0)$

Una vez que las series son sustituidas en las ecuaciones de continuidad, movimiento y las condiciones de frontera, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* Vr_0^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial Vz_0^*}{\partial z^*} = 0 \quad (16)$$

$$0 = -\frac{\partial p_0^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 Vr_0^*}{\partial z^{*2}} \quad (17)$$

$$0 = -\frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} \quad (18)$$

$$F_0 = -\pi \langle V \rangle \frac{\mu a^3}{H^2} \int_0^1 \frac{dp_0^*}{dr^*} r^{*2} dr^* \quad (19)$$

Y las condiciones de frontera, prácticamente son las mismas que en los casos anteriores, así que, se tiene lo siguiente:

$$Vr_0^* = 0, Vz_0^* = u(r^*); z^* = 0 \quad (20)$$

$$Vr_0^* = Vz_0^* = 0; z^* = 1 \quad (21)$$

$$Vr_0^* = 0; r^* = 0 \quad (22)$$

Y para el flujo volumétrico, se tendría la siguiente expresión analítica:

$$\int_0^1 r^* u(r^*) dr^* = 1 \quad (23)$$

Si suponemos la no-homogeneidad del sistema, se obtiene

$$u(r^*) = (m+2)r^{*m} \quad (24)$$

En el caso homogéneo, i.e. $m = 0$, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$u(r^*) = 2 \quad (25)$$

Obsérvese que, la teoría a orden cero, nos da las mismas ecuaciones que invocando la teoría de lubricación que se emplea utilizando el análisis de ordenes de magnitud, así que, solamente expondremos los resultados finales.

Al combinar las ecuaciones, se obtiene los siguientes resultados analíticos:

$$Vr_0^*(r^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{dp_0^*(r^*)}{dr^*} z^* (z-1) \quad (26)$$

$$Vz_0^*(r^*, z^*) = u(r^*) (2z^3 - 3z^2 + 1) \quad (27)$$

$$\frac{dp_0^*(r^*)}{dr^*} = -\frac{12}{r^*} \int_0^{r^*} ru(r) dr = -12r^{*m+1} \quad (28)$$

En el caso de la fuerza, se tiene lo siguiente:

$$F_{0m} = 12\pi\mu \frac{a^3 \langle V \rangle}{h^2 (m+4)}; m \geq 1 \quad (29)$$

En el caso de que el flujo sea homogéneo, i.e., $m = 0$, por lo que se tiene la siguiente expresión analítica:

$$F_{00} = 3\pi\mu \frac{a^3 \langle V \rangle}{H^2}; m \geq 1 \quad (30)$$

Esta expresión es la equivalente al modelo de Stefan.

4.3.2. Teoría a primer orden: $O(\alpha^1)$

El balance de masa y las ecuaciones de continuidad, y de movimiento a primer orden tiene la siguiente forma analítica

Componente radial de la ecuación de Navier-Stokes

$$\text{Re} \left(V_{r_0}^* \frac{\partial V_{r_0}^*}{\partial r^*} + V_{z_0}^* \frac{\partial V_{r_0}^*}{\partial z^*} \right) = \frac{\partial^2 V_{r_0}^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial p_1^*}{\partial r^*} \quad (31)$$

Componente axial de la Ecuación de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{\partial p_1^*}{\partial z^*} + \frac{\partial^2 V_{z_1}^*}{\partial z^{*2}} \quad (32)$$

Ecuación de continuidad:

$$\alpha^0 \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_{r_1}^*) + \alpha^0 \frac{\partial V_{z_1}^*}{\partial z^*} = 0 \quad (33)$$

Las condiciones de frontera a primer orden, tiene la siguiente forma:

$$V_{r_0}^* = 0, V_{z_0}^* = 0; z^* = 0 \quad (34)$$

$$V_{r_0}^* = V_{z_0}^* = 0; z^* = 1 \quad (35)$$

$$V_{r_0}^* = 0; r^* = 0 \quad (36)$$

Nótese que las condiciones de frontera son homogéneas y valen cero en todos los casos.

La fuerza a orden uno toma la forma:

$$F = 2\pi \int_0^a (p_0 - \sigma_{zz} + \alpha p_1) r dr \quad (37)$$

Integrando con respecto a r , se tiene la siguiente expresion analítica:

$$F_1 = -\pi \langle V \rangle \frac{\mu a^3}{H^2} \int_0^1 \left(\frac{dp_0^*}{dr^*} + \alpha \frac{dp_1^*}{dr^*} \right) (r^*)^2 dr^* \quad (38)$$

A primer orden la velocidad radial toma la forma:

$$V_{r_1}^*(r^*, z^*) = \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} u(r) \left(\frac{2z^{*6}}{5} - \frac{6z^{*5}}{5} + \frac{3}{2} z^{*4} - 2z^{*3} + \frac{129}{70} z^{*2} - \frac{19}{35} z^* \right) \\ - \left(\frac{6z^{*6}}{5} - \frac{18z^{*5}}{5} + 3z^{*4} - \frac{27z^{*2}}{35} + \frac{6z^*}{35} \right) \frac{1}{r^2} \int_0^r r' u(r') dr' \end{array} \right\} \times \frac{1}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (39)$$

La componente axial

$$V_{z_1}^*(r^*, z^*) = -\text{Re} \left\{ \begin{array}{l} u(r) \left(\frac{2z^{*7}}{35} - \frac{z^{*6}}{5} + \frac{3}{10} z^{*5} - \frac{z^{*4}}{2} + \frac{43}{10} z^{*3} - \frac{19}{70} z^{*2} \right) \times \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[u(r^*) \int_0^{r^*} r' u(r') dr' \right] \\ - \left(\frac{6z^{*7}}{35} - \frac{3z^{*6}}{5} + \frac{3}{5} z^{*5} - \frac{9z^{*3}}{35} + \frac{3z^{*2}}{35} \right) \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left[\frac{1}{r^*} \int_0^{r^*} r' u(r') dr' \right]^2 \end{array} \right\} \quad (40)$$

El gradiente de presión a primer orden toma la forma:

$$\frac{dp_1^*}{dr^*} = -\frac{27}{35} \text{Re} \left\{ 3u(r^*) - \frac{2}{r^{*2}} \int_0^{r^*} r' u(r') dr' \right\} \frac{1}{r^*} \int_0^{r^*} r' u(r') dr' \quad (41)$$

La fuerza a primer orden para un fluido newtoniano toma la forma:

$$F_{1m} = F_{0m} \left\{ 1 + \frac{9(m+4)(3m+4)}{280(m+2)} \alpha \text{Re} \right\} \quad (42)$$

En el caso del flujo homogéneo, se tiene lo siguiente:

$$F_{1m} = F_{0m} \left\{ 1 + \frac{9}{35} \alpha \text{Re} \right\} \quad (43)$$

4.4. Recapitulación.

En resumen, en esta sección se desarrollaron la teoría de perturbaciones a ordenes cero y primero respectivamente. A orden cero, coincide con la aproximación de lubricación que desprecia los efectos de curvatura y aproxima localmente el sistema al del flujo de Poiseuille en una rendija. La no-homogeneidad del problema decrece la fuerza de compresión del líquido en el plato superior. A primer orden e incorporando los mecanismos inerciales aparece el número de Reynolds el cual, es una medida de las fuerzas inerciales y viscosas en e sistema de flujo. Es claro que, la fuerza aumenta tomando en cuenta la resistencia del fluido, sin embargo, hay que incorporar la inercia del plato. Por otra parte, este trabajo desprecia las contribuciones elásticas de los fluidos valdría la pena repetir los cálculos con un fluido viscoelástico general. Finalmente, se analizaron tres sistemas de flujo que son clásicos en mecánica de fluidos y que incorporan técnicas perturbativas y la famosa aproximación de lubricación.

- A) **Flujo entre discos paralelos:** En este sistema se utiliza la aproximación e lubricación y solo se deduce una expresión para la velocidad radial y el flujo volumétrico. Los resultados para el fluido newtoniano son analíticos y se puede utilizar para calcular la viscosidad en el sistema de estudio.
- B) **Flujo por compresión:** En este trabajo se invoca estado cuasi-estacionario es decir que el sistema baja el plato superior muy lentamente, de tal manera que la dinámica del sistema tiene el tiempo suficiente para llegar al equilibrio. La segunda suposición es el análisis de ordenes de magnitud del sistema, la cual permite deducir que términos son relevantes y conduce a la misma ecuación que el método de lubricación. El resultado es análogo al de la ecuación de Stefan.
- C) **Fujo continuo por compresión:** este sistema evita las partes móviles y no involucra la inercia de los platos. El sistema es el opuesto al flujo por compresión tradicional ya que, el fluido es el que comprime al plato superior. La dificultad de este sistema se reduce a la no-homogeneidad del fluido que entra por la parte inferior del sistema.
- D) Los dos sistemas pueden ser resueltos por un método perturbativo para deducir expresiones más generales y que puedan incluir los mecanismos inerciales.

En la siguiente sección se presentarán los resultados más relevantes de este trabajo de estudio y las simulaciones realizadas en el programa MATHEMATICA (licencia UNAM).

CAPITULO 5

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

5.1. Argumento.

En esta sección se presentan los resultados de este esquema perturbativo el cual consiste en las velocidades a ordenes cero y primero respectivamente. Los cálculos que se obtienen fueron calculado a través del programa **WOLFRAM-MATHEMATICA** y los cálculos fueron exportado en una hoja de cálculo.

5.2. Velocidad Radial a Orden Cero $O(\alpha^0)$:

A continuación, se muestra la simulacion de la ecuación de la velocidad radial perturbada a orden cero. Matemática se describe mediante una función de dos variables y cuya regla de correspondencia se expresa a continuación:

$$Vr_0^*(r^*, z^*) = 3r^*(z^* - z^{*2})$$

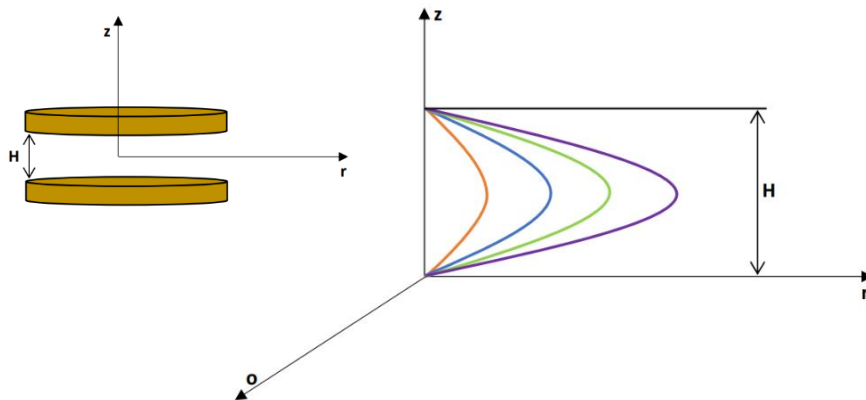


Figura 4. Representación del perfil de velocidades la ecuación de la velocidad Radial a Orden Cero.

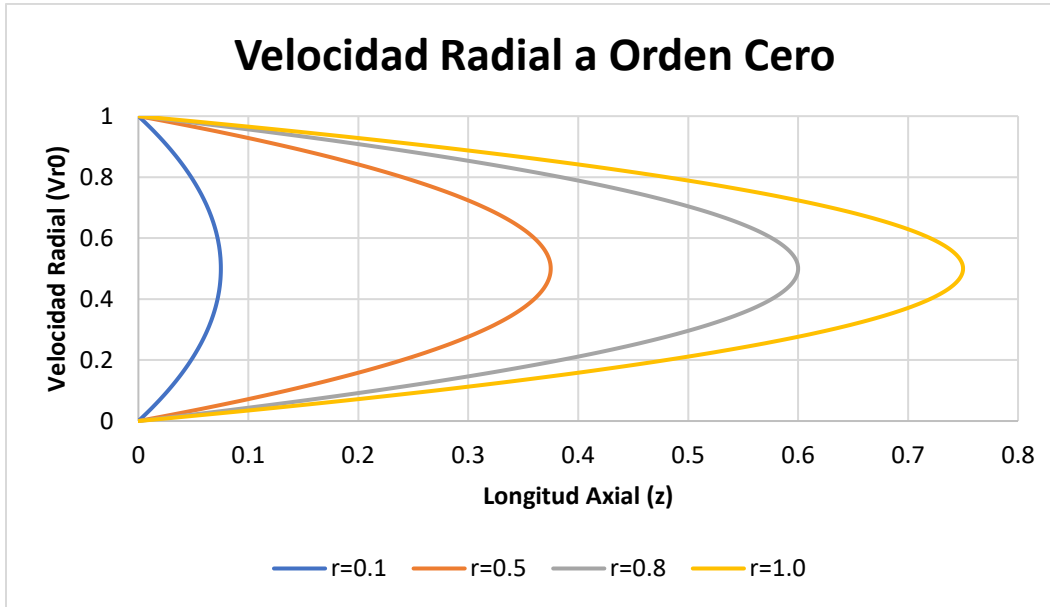


Figura 5. Representación gráfica de la ecuación de la velocidad radial a orden cero.

En la Fig. 4 se esbozan los perfiles de velocidad que se esperan debido a la compresión del fluido o inyección en el plato de abajo. Es claro que la comparación se obtiene en el caso de flujo homogéneo.

En la Fig. 5 se ilustra la velocidad radial vs longitud axial para diferentes valores de la coordenada radial r . En todos los casos se observa el clásico comportamiento parabólico y este va aumentando con respecto a la coordenada radial en el sistema de flujo. Si derivamos la expresión para el flujo con respecto a la coordenada z , se tiene:

$$\frac{\partial V_{r_0}^*(r^*, z^*)}{\partial z^*} = 3r^*(1 - 2z^*) = 0 \Rightarrow z^* = 1/2; r^* \neq 0$$

La velocidad máxima se obtiene cuando se sustituye, el valor de $z^* = 1/2$, por lo que:

$$V_{r_0, \max}^* \left(r^* = \frac{1}{2}, z^* \right) = 3r^* \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} r^*$$

La velocidad máxima en el sistema de flujo va a depender de la coordenada radial r^* . Es claro que la máxima velocidad es cuando $r^* = 1$, por lo que su valor es de 0.75.

5.3. Velocidad Axial a Orden Cero.

La velocidad axial se define mediante la siguiente ecuación analítica.

$$V_{z_0}^*(r^*, z^*) = u(r^*) (2z^3 - 3z^2 + 1)$$

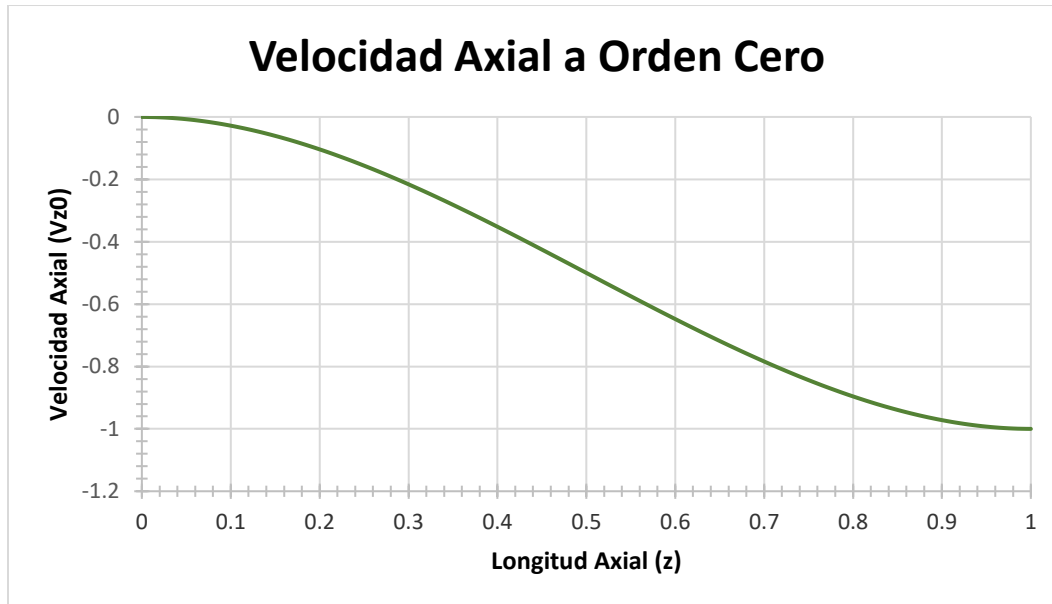


Figura 6 Representación gráfica de la ecuación de la velocidad axial a orden cero.

Es importante notar, que la velocidad disminuye monotonamente en función de la posición axial z. Además, la velocidad en z es independiente de las propiedades del fluido.

5.4. Gradiente y perfil de presión a Orden Cero.

A continuación, se muestra la gráfica de la ecuación del gradiente de presión perturbada a orden cero. La ecuación matemática que lo describe tiene la siguiente forma analítica:

$$-\frac{dp_0}{dr^*} = 6r^*$$

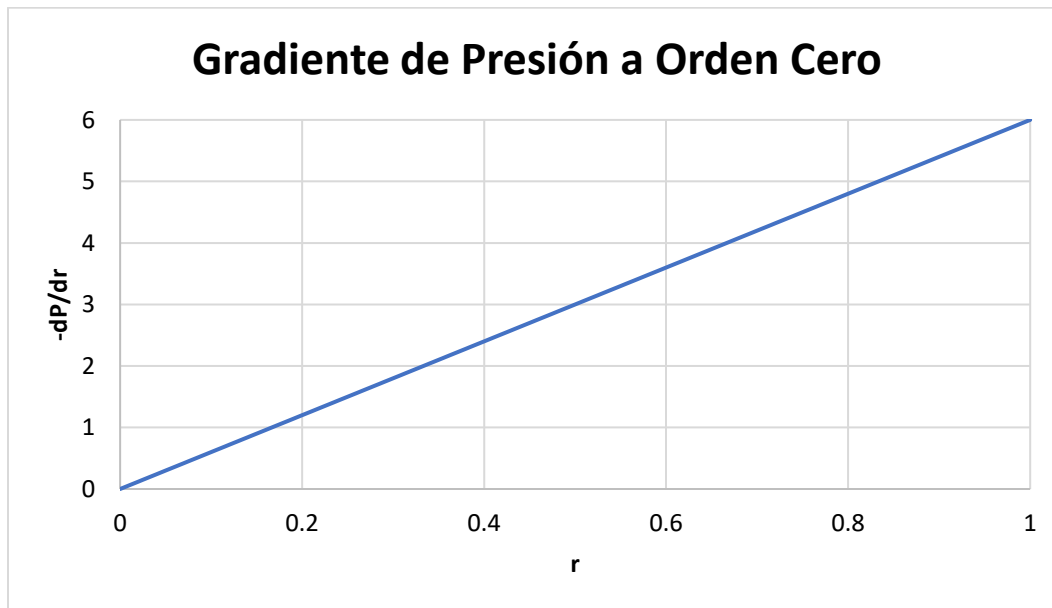


Figura 7. Representación gráfica de la ecuación del Gradiente de Presión a Orden Cero.

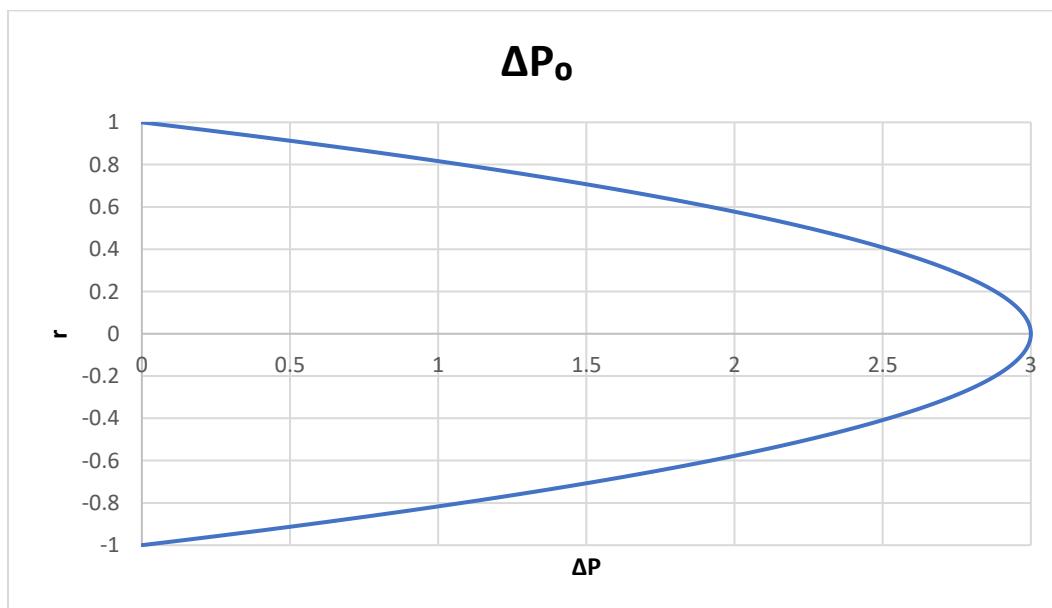


Figura 8. Representación gráfica de la ecuación del Delta de Presión a Orden Cero.

En la Fig. 7 se observa el resultado del gradiente de presión para el sistema de estudio. En esta simulación se supone que el fluido que es comprimido o que entra en el sistema, es homogéneo. En todo los casos, el sistema muestra un comportamiento lineal, y este es independiente de los números adimensionales en el sistema.

Al integrar la ecuación diferencial parcial con los valores de frontera establecida, obtenidos

$$p(r^*) = 3(1 - r^{*2})$$

En la Fig. 8 se observa el comportamiento parabólico y el valor crítico se obtiene cuando derivamos con respecto a la coordenada radial adimensional r^* . Nótese que la presión radial y los perfiles son parabólicos.

A continuación, se mencionan las contribuciones a orden cero:

- A) A orden cero, todos los sistemas de flujo por compresión, se aproximan al flujo de Poiseuille en placas paralelas.
- B) La aproximación de lubricación, la cual proviene de un análisis de órdenes de magnitud.
- C) El método perturbativo a orden cero omite las contribuciones de la curvatura y coincide con el análisis de órdenes de magnitud.
- D) Los perfiles de velocidad y de la presión son parabólicos e independientes de los números adimensionales, los cuales se manifiestan hasta el primer orden.
- E) En todos los casos, se omite la contribución por efectos de deslizamiento.

En la siguiente sección, se presenta el primer orden donde aparece el número de Reynolds y el parámetro alfa.

5.5. Teoría a orden uno

En esta sección se presentan los resultados numéricos de las predicciones a primer orden del flujo por compresión o flujo continuo por compresión

$$Vr_1^*(r^*, z^*) = Re r^* \left\{ -\frac{2z^{*6}}{5} + 6\frac{z^{*5}}{5} - 4z^{*3} + \frac{156}{35}z^{*2} - \frac{44}{35}z^* \right\}$$

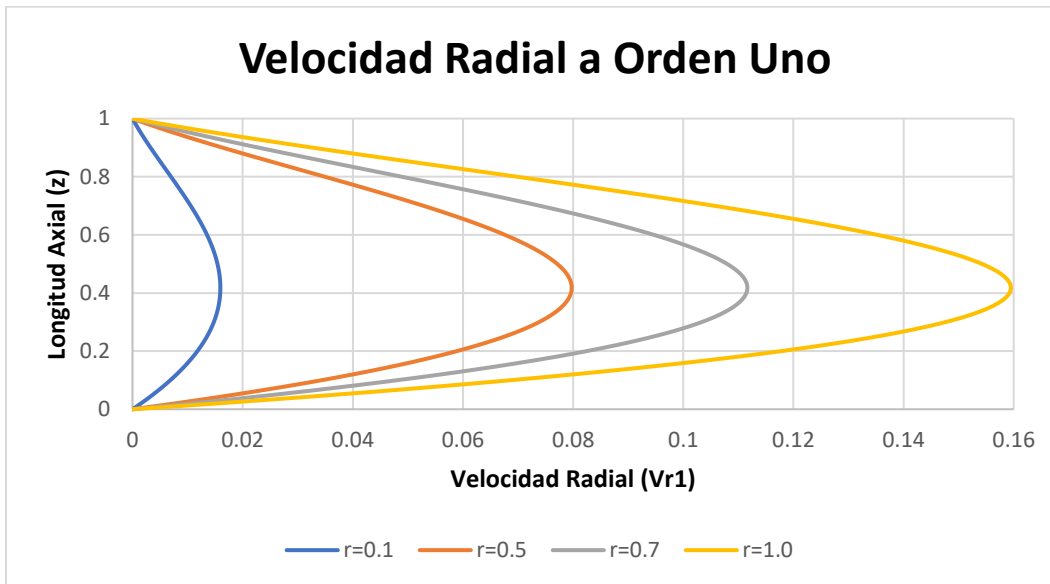


Figura 9. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Radial a Orden Uno, variando los valores de r.

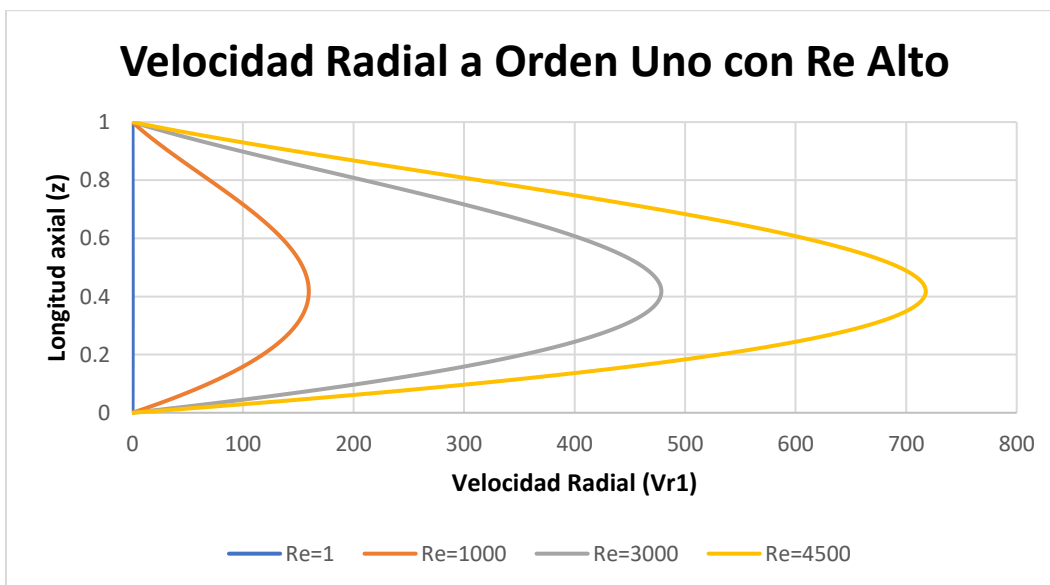


Figura 10. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Radial a Orden Uno, variando los valores de Reynolds.

5.6. Velocidad Axial a Orden Uno.

A continuación, se muestra la gráfica de la ecuación de la velocidad radial perturbada a orden uno. La ecuación matemática que describe el perfil axial tiene la siguiente forma analítica:

$$Vz_1^*(r^*, z^*) = \text{Re} \left\{ \frac{-4}{35} z^{*7} + \frac{2}{5} z^{*6} - \frac{6}{5} z^{*5} + 4 z^{*4} - \frac{124}{7} z^{*3} + \frac{44}{35} z^{*2} \right\}$$

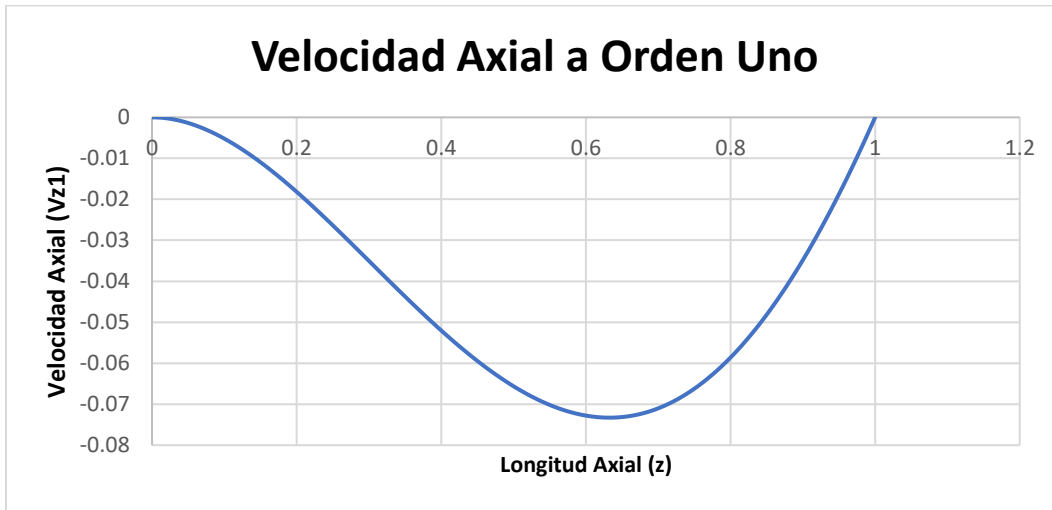


Figura 11. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Axial a Orden Uno, sin tomar en cuenta Reynolds.

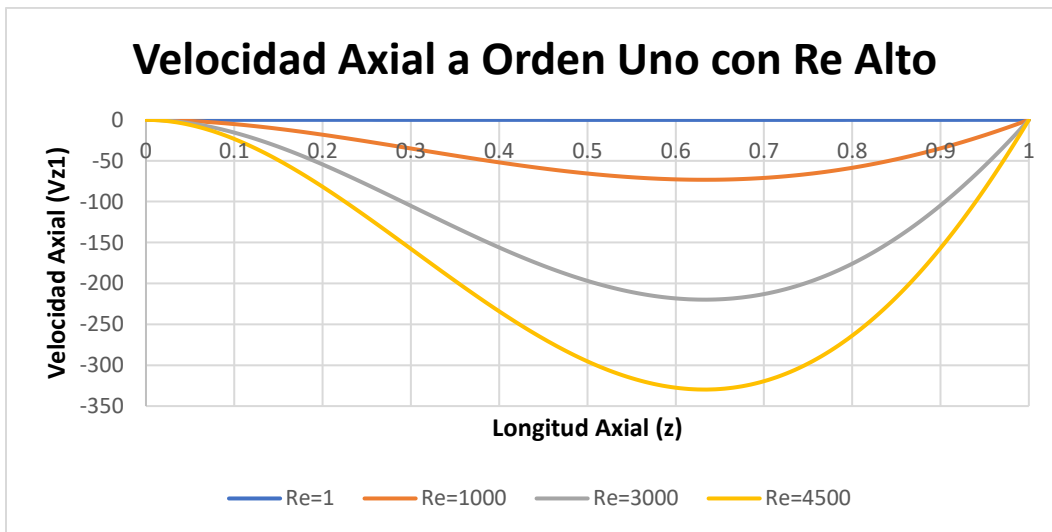


Figura 12. Representación gráfica de la ecuación de la Velocidad Axial a Orden Uno, variando el Reynolds.

En la Fig. 9, se observa el comportamiento de velocidad radial vs longitud axial en el caso del primer orden. Es claro que en todas las simulaciones se obtiene un perfil

parabólico, el cual va evolucionando conforme la coordenada radial r . Se observa que no existe mecanismos delizantes y que existe un eje de simetría asociado a la compresión del fluido.

En la Fig. 10 se observa que los perfiles de velocidad aumentan conforme el número de Reynolds lo hace. Evidentemente, se debe de fijar un valor de la coordenada radial, con el fin de observar el perfil para diferentes valores de la coordenada espacial z .

Las siguientes conclusiones importantes son resaltadas a continuación:

- A) Las velocidades a primer orden muestran el clásico comportamiento newtoniano y estas dependen de los mecanismos inerciales y viscosos en el sistema.
- B) En todas las simulaciones se considera que el flujo es homogéneo.
- C) La velocidad axial en todos los casos presenta un valor negativo, esto se puede suponer porque la compresión se da en la dirección negativa del eje z .

Las ecuaciones para la velocidad radial, axial y gradiente de presión que se utilizaron, suponiendo flujo homogéneo ($m = 0$) son las siguientes:

Velocidad radial:

$$V_{r_1}^*(r^*, z^*) = \text{Re } r^* \left\{ -\frac{2z^{*6}}{5} + 6\frac{z^{*5}}{5} - 4z^{*3} + \frac{156}{35}z^{*2} - \frac{44}{35}z^* \right\}$$

Velocidad axial:

$$V_{z_1}^*(r^*, z^*) = \text{Re} \left\{ \frac{-4}{35}z^{*7} + \frac{2}{5}z^{*6} - \frac{6}{5}z^{*5} + 4z^{*4} - \frac{124}{7}z^{*3} + \frac{44}{35}z^{*2} \right\}$$

Gradiente de presión radial:

$$\frac{dp_1^*}{dr^*} = -\frac{108}{35} \text{Re } r$$

Al integrar el gradiente de presión radial, se tiene la siguiente expresión

Perfil de presiones radial:

$$p_1(r^*) = \frac{54}{35} \text{Re}(1 - r^{*2})$$

En las Figs. 13 y 14 se observan el comportamiento lineal del gradiente de presión y del perfil de presiones. Se observa que el número de Reynolds modifica la pendiente del gradiente de presión y amplifica el efecto de los perfiles de presión.

Nótese que, el gradiente de presión está relacionada con la fuerza del líquido y los efectos inerciales aumentan la compresión del palto superior en el fluido (flujo por compresión) o del líquido sobre el palto superior (Flujo continuo por compresión homogéneo).

5.7. Gradiente de Presión a Orden Uno.

A continuación, se muestra la gráfica de la ecuación del gradiente de presión perturbada a orden uno.

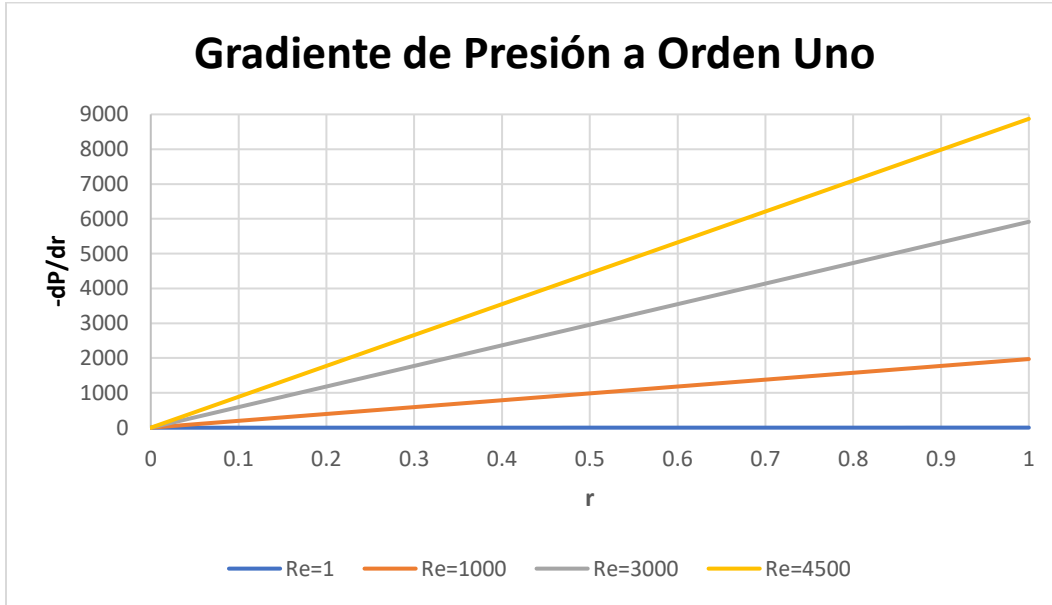


Figura 13. Representación gráfica de la ecuación del Gradiente de Presión a Orden Cero, variando Reynolds.

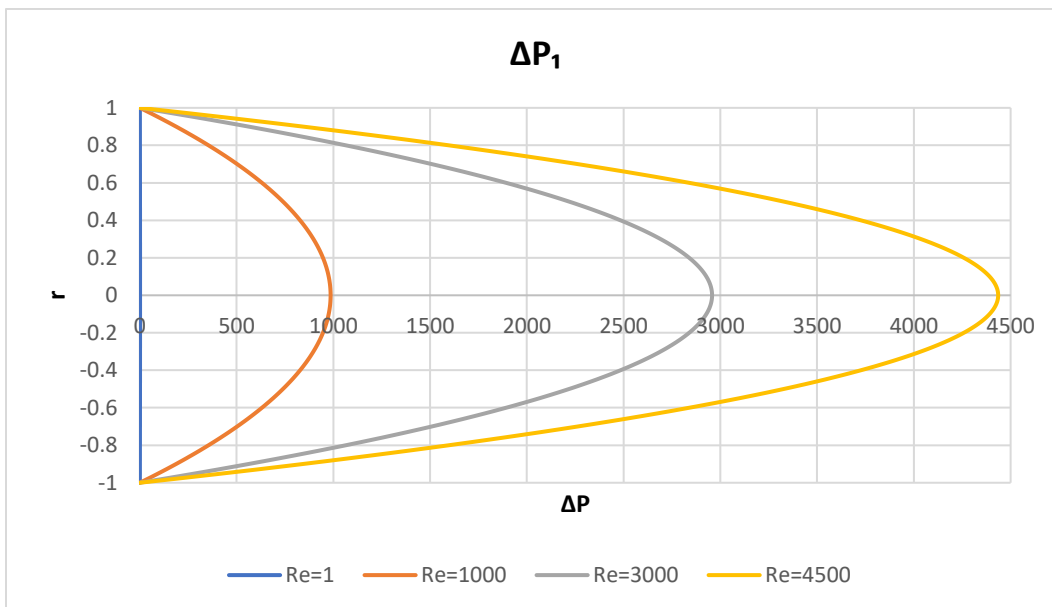


Figura 14. Representación gráfica de la ecuación del Delta de Presión a Orden Cero, variando Reynolds.

CAPITULO 6.
CONCLUSIONES Y TRABAJO
FUTURO.

6.1. Aportación al Conocimiento.

En esta investigación a nivel de licenciatura, se analizó la competencia entre los mecanismos cortantes y extensionales en sistemas de flujo que se ocupan en las teorías de lubricación. Los sistemas que se analizaron son:

- A) Flujo entre discos paralelos:** Este sistema de flujo consiste en dos platos paralelos de radio R y separados a una distancia H . El líquido entra por un orificio en la parte inferior y este ocasiona un laminado radial. El cambio abrupto del área de entrada a la de salida, induce un gradiente de presión radial. Este sistema, se resuelve suponiendo un perfil de velocidades particular, y que en las paredes se satisface la condición de no-deslizamiento, es decir debido a la fricción el fluido se queda adherido a la superficie del plato. Suponiendo flujo a bajos Reynolds, i.e., los mecanismos inerciales son despreciables, y solo tenemos un balance entre las fuerzas viscosas e inerciales. Para este sistema, se deduce expresiones analíticas para el perfil de velocidades y el flujo volumétrico. Las expresiones obtenidas son funciones de las propiedades materiales del sistema.
- B) Flujo por compresión:** En este sistema, el fluido es colocado entre las superficies dos platos paralelos, separados a una distancia $H(t)$. suponiendo que el fluido puede permanecer en el plato inferior por efectos de la tensión superficial, el plato de arriba se aproxima con una velocidad $V_0 = -dH(t)/dt$. La compresión del fluido por el plato superior, induce un laminado radial en dirección r . Asumiendo que el balance de masa se cumple en el sistema, es decir, la masa que es comprimida es la que fluye radialmente, se tiene que el flujo volumétrico de compresión es el que fluye radialmente $Q_E = Q_S$. El punto importante es obtener el valor de la fuerza en función de las propiedades materiales del sistema. La clave, en este trabajo es calcular la fuerza de compresión que experimental el fluido por el plato superior e induce que este, se deforme continua e irreversiblemente radialmente. La expresión se puede expresar como:

$$F(t) = -\pi \int_0^R \frac{dp}{dr} r^2 dr$$

Esta expresión es la base de este trabajo de investigación a nivel de licenciatura.

- C) Flujo continuo por compresión:** Este sistema es la contraparte del flujo continuo y en este, no existen partes móviles por lo que no, se toma en cuenta la inercia. El sistema de flujo consiste en dos platos paralelos separados a una distancia fija H y de radio R . Los orificios están distribuidos aleatoriamente y la entrada del fluido en ($z = 0$) es a flujo volumétrico constante. El líquido comprime al plato superior y se obtiene seguido de esto, un laminado radial el cual induce un gradiente de presión en la dirección de r (Flujo de Poiseuille). La transferencia de momento y reología es caracterizada por la ecuación constitutiva de Newton la cual, es el modelo reológico

más sencillo y contiene una propiedad material conocida como viscosidad. Asumiendo que estado estacionario, incompresible, proceso isotérmico y que el campo de velocidades tiene dos componentes (radial y axial), se obtienen tres ecuaciones diferenciales no lineales cuya solución es numérica.

Para simplificar el sistema y analizar cuáles son los términos importantes en nuestro análisis, se propuso un conjunto de variables adimensionales que permiten escalar el sistema de estudio, e introducir números adimensionales que describan la naturaleza de las fuerzas macroscópicas en el sistema de flujo.

El primer número adimensional es el número de Reynolds que relaciona los mecanismos inerciales y viscosos en el sistema de flujo. El segundo número es un parámetro de pequeñez α el cual, es un cociente entre las longitudes axial y radial respectivamente.

Este escalamiento de las ecuaciones nos permite proponer o invocar un esquema perturbativo con el fin de obtener expresiones analíticas a ordenes cero y primero asociados, a los procesos viscosos e inerciales. A orden cero, se obtienen expresiones cerradas para las componentes radial y axial del sistema, gradiente de presión, presión y fuerza. La fuerza es proporcional al modelo de Stefan obtenido en el flujo continuo por compresión. Es claro que este modelo, es una buena aproximación y tiene ventajas muy importantes con respecto al flujo tradicional por compresión. A primer orden en el esquema perturbativo, se obtuvieron las contribuciones asociadas a la inercia para los componentes de la velocidad radial, axial, gradiente de presión, presión y la fuerza en el sistema. En esta contribución aparece el número de Reynolds el cual, cuantifica los mecanismos inerciales y viscosos. En particular, se observó que la fuerza aumenta si se toma en cuenta los mecanismos inerciales. Un hecho importante, es que los perfiles de velocidad se deforman por efecto de las contribuciones inerciales. Este sistema se puede emplear para la caracterización de fluido newtoniano y como base para los fluidos no newtonianos. Este trabajo puede servir para la caracterización visco-métrica de fluidos newtonianos y en especial aquellos relacionadas como ciencia de lubricación, alimentos y pinturas. Los siguientes puntos son los más importantes de esta investigación:

- A) El orden cero de estos sistemas combinados pueden ser punto de partida para calcular la viscosidad aparente en sistemas de flujo.
- B) El primer orden incorpora los efectos inerciales y extensionales.
- C) Los métodos perturbativo permiten deducir o dilucidar componentes diferentes al del flujo cortante no-homogéneo.
- D) El problema general, puede ser resuelto mediante métodos computacionales sofisticados como diferencias finitas, Galerkin o softwares especializados en la construcción de mallado y elemento finito (COMSOL-MULTIPHYSICS)

6.2. Trabajo Futuro.

El trabajo futuro es la continuación de este sistema, pero para fluidos más complejos. En este caso, se puede caracterizar un fluido que dependa de la estructura y que presente adelgazamiento, engrosamiento, tixotropía, reopexía, esfuerzo de cedencia o bandeo. A continuación, se presenta los caminos naturales en la continuación de este trabajo

- a. Analizar el flujo por compresión en fluidos complejos.
- b. Estudiar estos sistemas desde el punto de vista numérico y computacional
- c. Aplicar técnicas de elemento finito para el estudio numérico, estabilidad computacional mediante softwares especializados (COMSOL-MULTIPHYSICS)
- d. Acoplar la transferencia de movimiento con ecuaciones de masa.
- e. Trabajo experimental para contrastar los resultados teóricos obtenidos.

Finalmente, este trabajo es un paso en la búsqueda constante de sistemas de flujo que permitan entender fluidos más realistas y que sean punto de partida en la caracterización de sistemas complejos y que permitan entender las fuerzas que deforman continua e irreversiblemente estos materiales de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Atif HM, Akhtar M, Javed MA (2023), Theoretical Analysis of Roll-over-web Coating of a Non-Newtonian Polymer Using Lubrication Approximation Theory. *J. Plast Film and Sheet.* 39, 241-262.

Chol Park M, Giacomini AJ, Kanso MA (2023), Steady elongational flow from rotarance theory, *Physics of Fluids*, 35 103116.

Esmaeili E, Grassia P, Torres Ulloa C (2022), Squeeze film flow of viscoplastic Bingham fluid between non-parallel plates, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 305, 104817.

Fusi L, Ballotti A (2021), Squeeze flow of stress power law fluids, *Fluids*, 6, 194.

Reddy Malipeddi A, Tarafder A, Sarkar K (2023), Deformation and breakup of a viscoelastic drop in time-dependent extensional flows with finite inertia. 321, 105108.

Shabnam, Mei S, Sohail Khan M, Mahmoud O, Galal AM (2022), Numerical investigation of a squeezing flow between concentric cylinders under the variable magnetic field of intensity, *Scientific Reports*, 12, 9148.

Shaoqiong L, Chau-Sang L, Kun L, Feng W, Swee HT (2022), Marine collagen scaffolds in tissue engineering, *Current Opinio in Biotechnology*, 74, 92-103.

Takeuchi S, Fukada T, Yamada S, Miyauchi S, Kajishima T (2021) Lubrication pressure model in a non-negligible gap for fluid permeation through a membrane with finite permeability. *Phys Rev Fluid* 6, 114101.

Takeuchi S, Miyauchi S, Yamada S, Tazaki A, Zhang LT, Onishi R, Kajishima T (2021) Effect of lubrication in the non-Reynolds regime due to the non-negligible gap on the fluid permeation through a membrane. *Fluid Dyn Res* 53, 035501.

Takeuchi S, Omori T, Fujii T, Kajishima T (2023), Higher order lubrication model between slip walls (2023), Higher order lubrication model between slip walls. *Microfluid Nanofluid* 27, 46

Veltkamp B, Jagielka J, Velikov KP, Bonn Daniel (2023), Lubrication with Non-Newtonian Fluids, *Phys. Rev. Appl.* 19, 014056

Veltkamp B, Velikov KP, Venner CH, Bonn D (2021), Lubricated Friction and the Hersey Number, *Phys. Rev. Lett.* 126, 044301.

Wang Y, Wang Z, Dong Y **(2023)**, Collagen-Based biomaterials for tissue engineering, ACS Biomater. Sci. Eng. 9, 1132-1150.

Waters ND, Gooden DK **(1984)**, The flow of an Oldroyd liquid in a continuous-flow squeeze film, J. Non-Newton. Fluid Mechanics, 14, 361-376.

Wen-Hui H, Sheng-Long D, Xi-Yuan Z, Kai L, Hai-Tao G, Ming-Zhu Z, Qi G **(2023)**, Collagen for neural tissue engineering: Materials, strategies and challenges, 20, 100639.

Yamada S, Takeuchi S, Miyauchi S, Kajishima T **(2021)**, Transport of solute and solvent driven by lubrication pressure through nondeformable permeable membranes. Microfluid Nanofuid 25, 83.