



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

**INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA EN ARCILLAS NO SENSITIVAS  
TOTALMENTE SATURADAS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
BRYAN ERICK JORGE BARROSO

TUTOR:  
M.I AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., Diciembre 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Magaña del Toro Roberto

Secretario: M. I. Sanginés García Héctor

1<sup>er</sup> Vocal: M.I. Demeneghi Colina Agustín

2<sup>do</sup>.Vocal: M.I. Umaña Romero Juan Luis

3<sup>er</sup>.Vocal: Dr. Hermosillo Arteaga Armando Rafael

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad de México, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

M.I AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA

-----  
**FIRMA**

A mis padres, que son mi inspiración y mi más grande amor.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi Tutor, M. I. Agustín Demeneghi Colina, por su desmedida atención para con mi persona, por su incalculable generosidad, colaboración, dedicación y paciencia para la realización de la presente tesis. Eternamente agradecido por compartir sus invaluable conocimientos.

A cada uno de mi sinodales por su amabilidad y el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo de tesis: M. I. Héctor Sanjinés García, Dr. Roberto Magaña del Toro, M. I. Juan Luis Umaña Romero y Dr. Armando Hermsillo Arteaga

Al M. I. Héctor Sanjinés y al Dr. Armando Hermsillo, por compartir sus conocimientos y permitirme utilizar el programa "ISE3D" de su autoría.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por cobijarme y brindarme conocimientos de primer nivel. Orgulloso de ser sello UNAM.

A mis hermanos, Henry y Willy, que son mi ejemplo a seguir, además de un apoyo incondicional.

A Susana Vega y su familia, que me adoptaron como un miembro más de su familia durante la estancia de la maestría en la Ciudad de México.

A todos aquellos que contribuyeron de manera directa e indirecta en este logro.

Gracias.

# ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 Antecedentes .....	1
1.2 Objetivo General .....	2
1.2.1 Objetivos Específicos .....	2
2. CARACTERÍSTICAS DE LAS ARCILLAS NO SENSITIVAS .....	2
2.1 Arcillas.....	2
2.2 Arcillas No Sensitivas.....	6
2.2.1 Origen.....	7
2.2.2 Características Fisicoquímicas .....	7
2.2.2.1 Superficie Específica.....	8
2.2.2.2 Capacidad de Intercambio Catiónico .....	8
2.2.2.3 Capacidad de Absorción .....	9
2.2.2.4 Plasticidad.....	10
2.2.2.5 Tixotropía .....	11
3. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD .....	11
3.1 Ley de Hooke .....	12
3.2 Teoría de la Elasticidad Aplicada a Suelos .....	16
4. ASENTAMIENTOS EN ARCILLAS NO SENSITIVAS .....	19

4.1	Aspectos Generales .....	19
4.2	Distribución de Esfuerzos en los Suelos .....	21
4.3	Asentamientos Inmediatos .....	24
4.3.1	Ley de Hooke.....	25
4.3.2	Fórmula de Schleicher .....	26
4.3.3	Fórmula de Steinbrenner .....	26
4.3.4	Propiedades de Deformación .....	27
4.4	Asentamientos Diferidos o a Largo Plazo .....	30
4.4.1	Deformación de un Elemento de Suelo de Espesor $\Delta z_0$ .....	33
4.4.2	Asentamientos por Consolidación Primaria en Suelos Preconsolidados	37
4.4.3	Asentamiento por consolidación secundaria.....	45
5.	ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	50
5.1	Método de Rigideces .....	51
5.1.1	Convención de Signos.....	52
5.1.2	Determinación de la Matriz de Rigideces.....	53
5.1.2.1	Marcos Planos Ortogonales con Barras Inclinas.....	53
5.1.3	Vigas.....	69
5.2	Cálculo de Elementos Mecánicos .....	71
6.	INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA.....	72
6.1	Antecedentes Generales .....	74

6.2	Métodos de Interacción Suelo-Estructura .....	76
6.3	Módulo de Rigidez del Suelo.....	81
6.4	Interacción Estática Suelo-Zapata Corrida .....	82
6.4.1	Análisis Estructural .....	84
6.4.2	Calculo de Deformaciones del Suelo.....	85
6.4.3	Compatibilidad de deformaciones.....	89
7.	EJEMPLO DE APLICACIÓN .....	89
7.1	Estados Límite de Falla (Revisión por Capacidad de Carga) .....	91
7.2	Estados Límite de Servicio.....	94
7.2.1	Asentamientos Inmediatos.....	94
7.2.2	Asentamientos a Largo Plazo .....	96
7.2.3	Asentamiento Total.....	100
7.3	Interacción Suelo-Estructura .....	100
7.3.1	Procedimiento Método Directo (Demeneghi 1996) .....	100
7.3.1.1	Interacción Suelo-Estructura a Corto Plazo .....	101
7.3.1.2	Interacción Suelo-Estructura a Largo Plazo .....	109
7.3.2	Método Directo (Demeneghi, 1996) por ISE3D .....	113
7.3.2.1	Interacción Suelo-Estructura a Corto Plazo .....	113
7.3.1.2	Interacción Suelo-Estructura a Largo Plazo.....	119
8.	CONCLUSIONES.....	124

9. BIBLIOGRAFÍA .....	127
-----------------------	-----

**Anexo A**

**Anexo B**

**Anexo C**

**Anexo D**

**Anexo E**

**Anexo F**

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Unidad y lámina silícica. (Díaz-Rodríguez, 2014).....	4
Figura 2. Unidad y lámina alumínica. (Díaz-Rodríguez, 2014) .....	4
Figura 3. Sistema arcilla-agua. (Lambe, 1958).....	5
Figura 4. Estructura de sedimentos. (Lambe, 1958). .....	6
Figura 5. Estructura dispersa. ....	7
Figura 6. Elemento sometido a un estado de esfuerzo cortante puro. (Demeneghi, 2015). ....	14
Figura 7. a) Espécimen perfectamente elástico sometido a fuerzas axiales; b) Resultados de la prueba; c) Orientación de los esfuerzos principales (Terzagui, 1943).....	17
Figura 8. Comportamiento de un material elasto-plástico en una prueba de compresión.....	18
Figura 9. Historia del asentamiento en un punto de una cimentación (Winterkorn y Fang, 1975). ....	20
Figura 10. Esfuerzos en un punto P, producidos por una carga Q en la superficie (Das, 2014).....	22
Figura 11. Estado de esfuerzos de un elemento (Zeevaert, 1973).....	23
Figura 12. Esfuerzos normales bajo la esquina de un rectángulo cargado (Damy, 1985). ....	23
Figura 13. Deformación bajo la esquina del rectángulo cargado (Demeneghi, 2011). ....	26

Figura 14. Módulo $E_{50}$ y módulo tangente inicial $E_{si}$ (Demeneghi, 2011).....	28
Figura 15. Variación del módulo $E_{50}$ o del módulo tangencial $E_{si}$ con la presión de confinamiento (Demeneghi, 2011).....	29
Figura 16. Curva de consolidación (Juárez y Rico, 1976). ....	31
Figura 17. Curva de compresibilidad, a) escala aritmética, b) escala logarítmica (Juárez y Rico, 1976). ....	32
Figura 18. Deformación de un elemento de suelo (Demeneghi, 2011). ....	33
Figura 19. Curva de compresibilidad (Demeneghi, 2011). ....	36
Figura 20. Estrato de arcilla totalmente saturada (Demeneghi, 2021).....	40
Figura 21. Estado de esfuerzos sobre el elemento (Demeneghi, 2021).....	40
Figura 22. Deformación de un elemento arcilla no sensitiva (Demeneghi, 2021).....	41
Figura 23. Modelo de viscosidad intergranular. Unidad Z (Zeevaert, 1986).....	46
Figura 24. Barra m (Demeneghi et al, 2003). ....	52
Figura 25. Convención de signos (Demeneghi et al, 2003).....	53
Figura 26. Giro positivo ( $\theta'_p$ ) en el extremo izquierdo de la barra m (Demeneghi et al, 2003).....	54
Figura 27. Giro positivo ( $\theta'_q$ ) en el extremo derecho de la barra m (Demeneghi et al, 2003).....	54
Figura 28. Desplazamiento vertical unitario positivo ( $\delta'_r$ ) en el nudo izquierdo de la barra m (Demeneghi et al, 2003). ....	54
Figura 29. Desplazamiento vertical unitario positivo ( $\delta'_s$ ) en el nudo derecho de la barra m (Demeneghi et al, 2003).....	55

Figura 30. Desplazamiento horizontal positivo $\delta'_u$ en el nudo izquierdo (Demeneghi et al, 2003). .....	55
Figura 31. Desplazamiento horizontal positivo ( $\delta'_v$ ) en el nudo derecho (Demeneghi et al, 2003). .....	55
Figura 32. Giro de torsión unitario positivo ( $\theta'_a$ ) en el nudo izquierdo (Demeneghi et al, 2003).....	56
Figura 33. Giro de torsión unitario positivo ( $\theta'_b$ ) en el nudo derecho (Demeneghi et al, 2003).....	56
Figura 34. Marcos planos ortogonales entre si (Demeneghi et al, 2003). .....	59
Figura 35. Transformación de un vector del sistema global x-y al sistema local x'-y' (Demeneghi et al, 2003).....	60
Figura 36. Desplazamientos de la barra inclinada (Demeneghi et al, 2003). .....	61
Figura 37. Giros de la barra paralelos al plano x-y (Demeneghi et al, 2003).....	62
Figura 38. Sistema local y sistema global en vigas (Rojas y Padilla, 2009). .....	70
Figura 39. Geometría y cargas en una barra de cimentación (Demeneghi et al, 2003). .....	70
Figura 40. Convención de signos para fines de diseño estructural (Demeneghi, 2011). .....	72
Figura 41. Perfil del asentamiento bajo un área uniformemente cargada sobre la superficie de la masa de suelo (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003). .....	75
Figura 42. Distribución de presiones bajo una placa infinitamente rígida (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003). .....	76

Figura 43. Marco estructural con cimentación a base de zapata corrida.....	82
Figura 44. Reacciones sobre la estructura y cargas sobre el terreno. ....	83
Figura 45. Cálculo de los hundimientos del terreno (Demeneghi, 1996).....	85
Figura 46. Dimensiones de la zapata y propiedades de la estratigrafía. Arcilla no sensible.....	90
Figura 47. Sección de la zapata para el cálculo del momento de inercia. ....	101
Figura 48. Numeración de barras y grados de libertad. ....	103
Figura 49. Sistema de cargas sobre la estructura. ....	104
Figura 50. División de la zapata en barras de cimentación. ....	113
Figura 51. Grados de libertad de las barras de cimentación. ....	114
Figura 52. Sistema de cargas sobre la estructura de cimentación. ....	115
Figura 53. Diagramas de asentamientos y reacciones, análisis a corto plazo. ....	116
Figura 54. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de toda la zapata corrida, análisis a corto plazo. ....	118
Figura 55. Diagramas de asentamientos y reacciones, análisis a largo plazo. ....	121
Figura 56. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de toda la zapata corrida, análisis a largo plazo. ....	123

## ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Parámetros elásticos (Diaz, 2011).....	29
Tabla 2. Valores típicos del Coeficiente A en condiciones de esfuerzo de trabajo (Skempton y Bjerrum, 1957).....	39
Tabla 3. Matriz de rigidez de la barra inclinada (Demeneghi, et al, 2003).....	67
Tabla 4. Datos del problema. ....	91
Tabla 5. Datos para el cálculo de los incrementos de esfuerzos del estrato 1. ....	94
Tabla 6. Datos para el cálculo de los incrementos de esfuerzos en el estrato 2. ....	95
Tabla 7. Propiedades de cada sección.....	102
Tabla 8. Valores de influencia del análisis a corto plazo. ....	107
Tabla 9. Valores de los incrementos de esfuerzos y asentamientos.....	110
Tabla 10. Valores de influencia del análisis a largo plazo. ....	111
Tabla 11. Grados de libertad de cada una de las barras de cimentación.....	114
Tabla 12. Desplazamientos, giros y reacciones del suelo en cada nudo a corto plazo.....	115
Tabla 13. Elementos mecánicos en los nodos de cada una de las barras de cimentación, análisis a corto plazo. ....	117
Tabla 14. Valores de los incrementos de esfuerzos y asentamientos.....	119
Tabla 15. Desplazamientos, giros y reacciones en cada nudo a largo plazo. ....	121
Tabla 16. Elementos mecánicos en los nodos de cada una de las barras de cimentación, análisis a largo plazo. ....	122

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 Antecedentes

El suelo es una creación de la naturaleza, este ha sido producido por un proceso complejo; rocas víctimas del intemperismo, desintegraciones químicas, sedimentaciones han variado el proceso de creación del suelo. 5300 especies de minerales que existen en la naturaleza, se combinan para el desarrollo de los suelos con distintas propiedades físicoquímicas, hidráulicas y mecánicas.

Las arcillas que se forman por sedimentación en cuerpos de agua se pueden dividir en dos grupos: (a) aquellas que se depositan en agua salada, y (b) aquellas que se sedimentan en agua dulce. En las primeras los cationes del agua reducen la carga eléctrica negativa de la superficie de las partículas del suelo, y favorecen la unión de dichas partículas; este fenómeno da lugar a una estructura “floculenta” (o estructura en “castillo de naipes”) del suelo, el cual queda formado por “cadenas”, cuyos eslabones son los propios granos del mismo. A estos sedimentos los denominamos “arcillas sensitivas” Por el contrario, las partículas que se depositan en agua dulce no se unen entre sí, formando una estructura “dispersa”. A estos suelos los llamamos “arcillas no sensitivas”.

En la actualidad, cuando se realiza el diseño de una cimentación, es de gran importancia tomar en cuenta cualquier eventualidad que pueda generar cambios en el comportamiento de la misma, en este caso, el de una arcilla no sensitiva. Por ello, se realiza la verificación de los estados límite de servicio y de falla, y un análisis de interacción suelo-estructura para determinar los elementos mecánicos que se pueden presentar en la estructura tanto a corto como a largo plazo.

La interacción suelo-estructura ha sido la solución para la disminución de las incertidumbres en los asentamientos de las edificaciones. La consideración de la

rigidez de la estructura, en algunas investigaciones, se ha encontrado con una directa relación con los asentamientos totales que se tienen en el subsuelo.

## **1.2 Objetivo General**

Desarrollar el diseño geotécnico de una cimentación desplantada en arcillas no sensitivas, considerando las propiedades de la estructura y del suelo; en este caso, una arcilla no sensitiva totalmente saturada, para posteriormente analizar la interacción estática suelo-estructura y la factibilidad de los métodos estudiados en esta tesis.

### **1.2.1 Objetivos Específicos**

- Estudiar las características de una arcilla no sensitiva.
- Análisis de revisión por capacidad de carga.
- Estudiar el comportamiento entre una zapata corrida y el suelo de cimentación, considerando los asentamientos a corto y largo plazo para una arcilla no sensitiva.
- Obtención de los resultados obtenidos del cálculo de asentamientos ajustados por el procedimiento no lineal para la predicción de deformaciones a largo plazo en arcillas preconsolidadas totalmente saturadas, válida para arcillas no sensitivas, propuesto por Demeneghi (2012) y del cálculo de interacción suelo-estructura por el programa ISE3D (Sanginés y Hermosillo, 2021).

## **2. CARACTERÍSTICAS DE LAS ARCILLAS NO SENSITIVAS**

### **2.1 Arcillas**

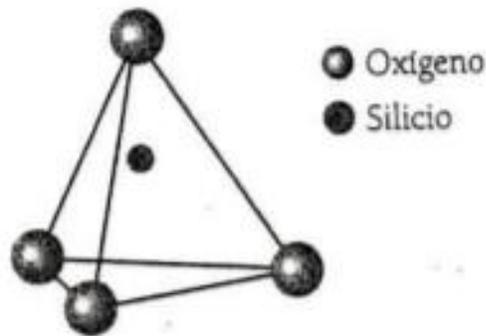
Las rocas ígneas se originan por el enfriamiento de los magmas, que surgen de masas fundidas procedentes del interior de la Tierra. Las arcillas son el producto de la meteorización de las rocas, por acción de los agentes atmosféricos, las variaciones de temperatura y presión, durante largos periodos de tiempo (eras geológicas). Es así que el termino arcilla no corresponde a una determinada composición química o

mineralógica, sino a mezclas de diversas especies minerales, que se relacionan con la composición química y mineralógica de la roca matriz y el proceso de meteorización que la ha afectado (Kingery W. D. et al, 1976). Resulta que el estudio de las arcillas y la evaluación de sus depósitos, que presentan una elevada heterogeneidad, sea bastante complejo.

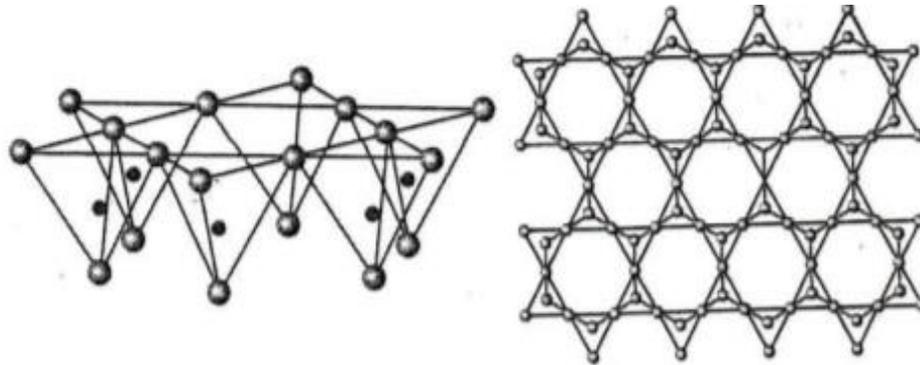
La AIPEA (Asociación Internacional Pour L'Etude des Argiles) y la CMS (Clay Minerals Society), redefinieron el término "arcilla", para referirse a: un material "natural" compuesto fundamentalmente por "mineral de grano fino", generalmente "plástico", con una apropiada cantidad de agua, que se endurece cuando se lo seca al aire o se lo calcina. De manera general la arcilla está constituida por silicatos aluminicos hidratados, con una estructura reticular aplanada. Los minerales del tipo filosilicatos que componen las arcillas, pertenecen fundamentalmente a cuatro grupos: el del Caolín, el de la Montmorillonita, el de la Mica arcillosa (principalmente illita), y el de la Clorita; siendo los tres primeros los más conocidos.

Los minerales de arcilla son sílico-aluminatos hidratados con una forma cristalina y una estructura molecular. Estos minerales están constituidos por dos tipos de láminas:

- Lámina silícica, unidad básica silícica ( $SiO_4^{4-}$ ).



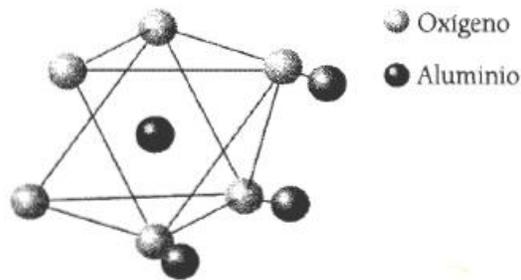
a) Unidad básica silícica (tetraedro).



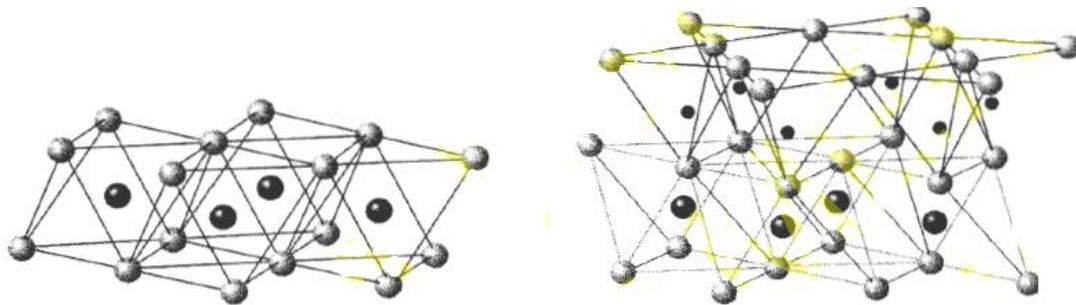
b) Lámina Silícica.

Figura 1. Unidad y lámina silícica. (Díaz-Rodríguez, 2014).

- Lámina aluminica, unidad básica aluminica  $[Al_2(OH)_6]$ .



a) Unidad básica aluminica (octaedro).



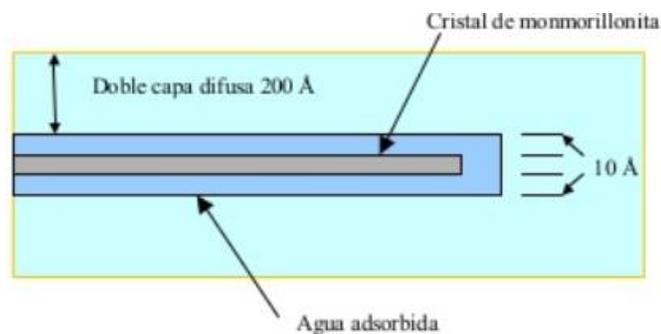
b) lámina aluminica.

Figura 2. Unidad y lámina aluminica. (Díaz-Rodríguez, 2014)

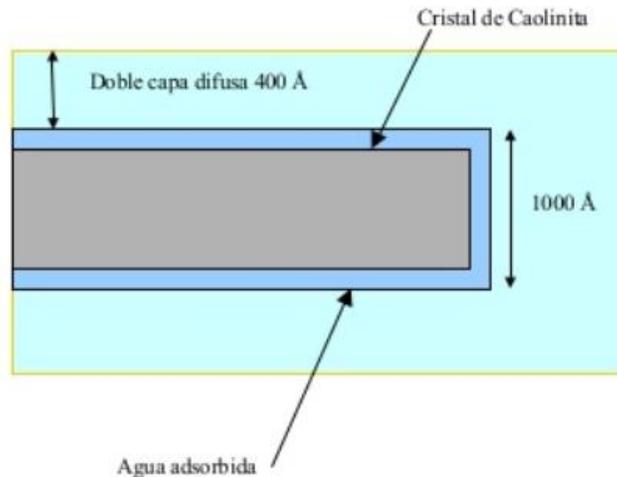
Los átomos de la superficie de una partícula de arcilla son predominantemente oxígenos o hidroxilos. La carga negativa de este atrae con fuerza a las moléculas de

agua (o cationes), y forman una capa de agua, conocida como capa de agua adsorbida (Figura 3).

Cuando dos partículas de arcilla en suspensión se acercan, sus dobles capas difusas (distancia entre la superficie de la partícula de arcilla y el agua normal) interfieren entre sí y se generan fuerzas de repulsión, cuya magnitud depende de la cantidad de electrolitos. Si la concentración de electrolitos es baja, las fuerzas de repulsión son altas; y si la concentración es alta, las fuerzas de repulsión son bajas.



a) Partícula típica de Montmorillonita.



b) Partícula típica de Caolinita.

**Figura 3. Sistema arcilla-agua. (Lambe, 1958).**

Si la resultante de las fuerzas entre dos partículas de arcilla es de atracción, ambas partículas flocculan. Y si existe un aumento de la doble capa difusa, disminuye la

atracción eléctrica, provocando la dispersión. En la Figura 4 se observa los fenómenos de floculación y dispersión.

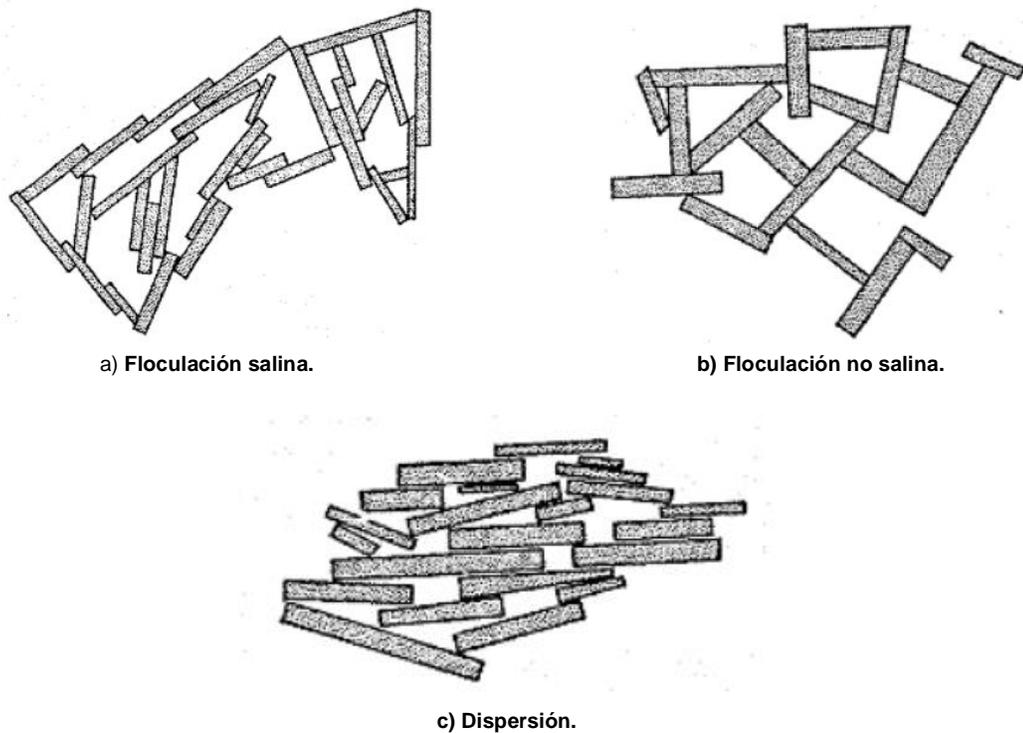


Figura 4. Estructura de sedimentos. (Lambe, 1958).

## 2.2 Arcillas No Sensitivas

Las partículas de arcilla que se depositan en agua dulce y no se unen entre sí, forman una estructura “dispersa”. A estos suelos se los conoce como “arcillas no sensitivas”.

La dispersión depende fundamentalmente del tipo de catión predominante en la estructura de arcilla, siendo los suelos sódicos más dispersivos que los que contienen calcio, potasio y magnesio. Por tanto, las arcillas no sensitivas se caracterizan por presentar un elevado contenido de cationes sodio en el agua presente en sus poros. Estos cationes rodean totalmente a las partículas de arcilla haciendo que las fuerzas eléctricas repulsivas entre partículas excedan a las fuerzas atractivas, de tal forma que, cuando la arcilla entra en contacto con el agua, sus partículas son progresivamente desprendidas quedando así en suspensión (Figura 5).



**Figura 5. Estructura dispersa.**

En general, según la NRCS, 2014, las arcillas no sensitivas son de media a baja plasticidad y son del tipo CL (arcillas de media a baja plasticidad), de acuerdo al SUCS. Otros tipos de suelos que pueden contener arcillas no sensitivas son los ML, CL y CH. Los suelos del tipo MH muy pocas veces pueden contener arcillas no sensitivas.

### **2.2.1 Origen**

Las arcillas dispersivas no están definitivamente asociadas a una formación geológica específica y han sido encontradas en depósitos aluviales, sedimentos lacustres, depósitos de loess y llanuras diluviales. Con frecuencia se ha encontrado en el agua de los poros de rocas calizas y esquistos originarios de depósitos marinos el mismo contenido de sales que en las arcillas dispersivas y el suelo residual de estas rocas es también dispersivo. En las zonas áridas, la evaporación del agua provoca el desplazamiento del sodio hacia la parte superior. Resulta especulativo afirmar que estas arcillas deban su origen a rocas que estuvieron, en algún tiempo geológico, sumergidas en el mar, donde adquirieron los niveles de sodio que las caracterizan.

### **2.2.2 Características Fisicoquímicas**

Las arcillas no sensitivas generalmente poseen una resistencia a la erosión cuando se encuentran en un ambiente cuyas condiciones químicas son similares a los que se tienen cuando se forman originalmente. Cuando la arcilla no sensitiva está inmersa en el agua, la fracción arcillosa tiende a tener un comportamiento similar al de partículas granulares, esto es, las partículas arcillosas tienen un mínimo de atracciones

electroquímicas y no pueden adherirse entre sí o estar ligadas con otras partículas de suelo.

Varios factores influyen en la dispersión de los suelos, entre ellos se encuentran la mineralogía y química de las arcillas, así como las sales disueltas en el agua pura. La principal diferencia entre las arcillas no sensitivas y las resistentes a erosión radica en la naturaleza de los cationes en el agua de poro que se encuentra en la masa del suelo. Las arcillas no sensitivas contienen mayor proporción de cationes de calcio, potasio y magnesio en el agua de poro (Comisión Nacional del Agua, 2007).

### **2.2.2.1 Superficie Específica**

La superficie específica o área superficial de una arcilla se define como el área de la superficie externa más el área de la superficie interna (en el caso de que esta exista) de las partículas constituyentes, por unidad de masa, expresada en  $m^2/g$ .

Las arcillas poseen una elevada superficie específica, la interacción sólido-fluido depende directamente de esta propiedad.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de superficies específicas de arcillas:

- Caolinita de elevada cristalinidad hasta  $15 m^2/g$ .
- Caolinita de baja cristalinidad hasta  $50 m^2/g$ .
- Halloisita hasta  $60 m^2/g$ .
- Illita hasta  $50 m^2/g$ .
- Montmorillonita  $80-300 m^2/g$ .
- Sepiolita  $100-240 m^2/g$ .
- Paligorskita  $100-200 m^2/g$ .

### **2.2.2.2 Capacidad de Intercambio Catiónico**

Es una propiedad fundamental de las esmectitas. Son capaces de cambiar, fácilmente, los iones fijados en la superficie exterior de sus cristales, en los espacios interlaminares, o en otros espacios interiores de las estructuras, por otros existentes

en las soluciones acuosas envolventes. La capacidad de intercambio catiónico (*CEC*) se puede definir como la suma de todos los cationes de cambio que un mineral puede adsorber a un determinado pH. Es equivalente a la medida del total de cargas negativas del mineral. Estas cargas negativas pueden ser generadas de tres formas diferentes:

- Sustituciones isomórficas dentro de la estructura.
- Enlaces insaturados en los bordes y superficies externas.
- Disociación de los grupos hidroxilos accesibles.

El primer tipo es conocido como carga permanente y supone un 80% de la carga neta de la partícula; además es independiente de las condiciones de pH y actividad iónica del medio. Los dos últimos tipos de origen varían en función del pH y de la actividad iónica. Corresponden a bordes cristalinos, químicamente activos y representan el 20% de la carga total de la lámina.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de capacidad de intercambio catiónico (en *meq/100g*):

- Caolinita: 3-5
- Halloisita: 10-40
- Illita: 10-50
- Clorita: 10-50
- Vermiculita: 100-200
- Montmorillonita: 80-200
- Seiolita-paligorskita: 20-35

### **2.2.2.3 Capacidad de Absorción**

La capacidad de absorción está directamente relacionada con las características texturales (superficie específica y porosidad) y se puede hablar de dos tipos de procesos que difícilmente se dan de forma aislada: absorción (cuando se trata fundamentalmente de procesos físicos como la retención por capilaridad) y adsorción

(cuando existe una interacción de tipo químico entre el adsorbente, en este caso la arcilla, y el líquido o gas adsorbido, denominado adsorbato).

La capacidad de adsorción se expresa en porcentaje de adsorbato con respecto a la masa y depende, para una misma arcilla, de la sustancia de que se trate. La absorción de agua de arcillas absorbentes es mayor del 100% con respecto al peso.

#### **2.2.2.4 Plasticidad**

Las arcillas son eminentemente plásticas. Esta propiedad se debe a que el agua forma una envuelta sobre las partículas laminares produciendo un efecto lubricante que facilita el deslizamiento de unas partículas sobre otras cuando se ejerce un esfuerzo sobre ellas.

La elevada plasticidad de las arcillas es consecuencia, nuevamente, de su morfología laminar, tamaño de partícula extremadamente pequeño (elevada área superficial) y alta capacidad de hinchamiento. Generalmente, esta plasticidad puede ser cuantificada mediante la determinación de los índices de Atterberg (Límite Líquido, Límite Plástico y Límite de Retracción). Estos límites marcan una separación arbitraria entre los cuatro estados o modos de comportamiento de un suelo sólido, semisólido, plástico y semilíquido o viscoso.

La relación existente entre el límite líquido y el índice de plasticidad ofrece una gran información sobre la composición granulométrica, comportamiento, naturaleza y calidad de la arcilla. Existe una gran variación entre los límites de Atterberg de diferentes minerales de la arcilla, e incluso para un mismo mineral arcilloso, en función del catión de cambio. En gran parte, esta variación se debe a la diferencia en el tamaño de partícula y al grado de perfección del cristal. En general, cuanto más pequeñas son las partículas y más imperfecta su estructura, más plástico es el material.

### **2.2.2.5 Tixotropía**

La tixotropía se define como el fenómeno consistente en la pérdida de resistencia de un coloide, al amasarlo, y su posterior recuperación con el tiempo. Las arcillas tixotrópicas cuando son amasadas se convierten en un verdadero líquido. Si, a continuación, se las deja en reposo recuperan la cohesión, así como el comportamiento sólido. Para que una arcilla tixotrópica muestre este especial comportamiento deberá poseer un contenido en agua próximo a su límite líquido. Por el contrario, en torno a su límite plástico no existe posibilidad de comportamiento tixotrópico.

## **3. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD**

En la mayoría de los materiales que se utilizan en los proyectos de ingeniería civil, presentan comportamientos, en cierta manera, gobernados por el principio de la teoría de la elasticidad. Es decir, un material se considera elástico, cuando, al momento de llevarlo al proceso de deformación, al ser sometido a una fuerza axial; esta deformación se vuelva nula al ceder la aplicación de la fuerza, siempre y cuando no sobrepase el límite del material, llamado límite elástico.

Esta ley está basada en asumir ciertas hipótesis, como la que el material es homogéneo (sus propiedades son las mismas en cualquier punto), isótropo (sus propiedades son independientes de la dirección adoptada) y que los esfuerzos y las deformaciones están relacionados linealmente. En los suelos se ha demostrado que la teoría de la elasticidad puede ser aplicable y que tiene resultados bastante convincentes en la geotecnia; a pesar de no cumplir con las hipótesis de una manera estricta. Sin embargo, de acuerdo a las extensas investigaciones y aplicaciones realizadas a lo largo de la historia, han demostrado que el suelo tiene un comportamiento hasta cierto punto elasto-plástico.

### 3.1 Ley de Hooke

Robert Hooke (1660) establece la relación entre los componentes de esfuerzo y los componentes de deformaciones y da pie a la ley que lleva su propio nombre, Ley de Hooke. Cuando se le aplica un esfuerzo a un rectángulo paralelepípedo con características isotrópicas, los esfuerzos normales no producen distorsión en los ángulos del elemento, por tal, la magnitud de la elongación producida está dado por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.1)$$

Siendo  $\varepsilon_x$  la deformación producida por el esfuerzo  $\sigma_x$  y  $E$ , conocido como el módulo de elasticidad. Las deformaciones producidas por alargamiento en el elemento en la dirección equis producen acortamientos en sus otras direcciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para presentar estas contracciones se hace uso de la variable “ $\nu$ ” la cual es una constante conocida como “Relación de Poisson”. Esta constante, es una constante elástica que proporciona una mediana del estrechamiento de sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo, cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la del estiramiento; y al comprimirse el fenómeno es inverso. En los suelos como las arcillas de la Ciudad de México, para deformaciones a corto plazo, esta relación vale 0.5, dicho valor físicamente supone que es un material que no tiene pérdida de volumen.

Consideremos ahora que actúan en forma simultánea los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , por el principio de superposición, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.5)$$

Con estas ecuaciones se pueden obtener las deformaciones totales producidas por fuerzas ortogonales en los tres sentidos

Este principio es válido cuando las deformaciones son pequeñas y los correspondientes pequeños desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas. En tales caso se desprecian los pequeños cambios en las dimensiones de los cuerpos deformados y también los pequeños desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas externas, y los cálculos se realizan tomando las dimensiones iniciales y la configuración inicial del cuerpo; los desplazamientos resultantes se obtienen por superposición en la forma de funciones lineales de fuerzas externas, como se hizo para llegar a las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5). Sin embargo, se pueden presentar casos excepcionales en los que no es posible despreciar pequeñas deformaciones (Timoshenko y Goodier, 1970).

En un material elástico lineal, el esfuerzo cortante produce únicamente deformación angular (Figura 6), así:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \propto \tau_{xy}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{G'} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{G'} \tau_{xy} = \frac{1}{\frac{G'}{2}} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$G = \frac{G'}{2}$$

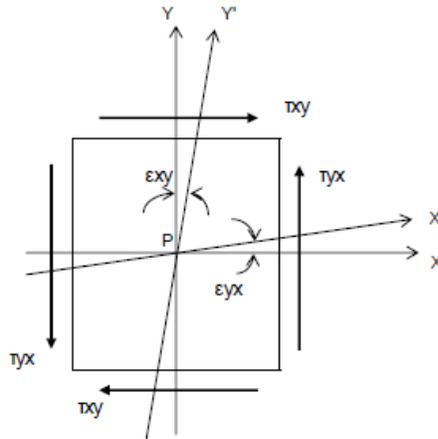


Figura 6. Elemento sometido a un estado de esfuerzo cortante puro. (Demeneghi, 2015).

En forma análoga:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (3.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (3.8)$$

Los alargamientos y los movimientos angulares son independientes uno del otro. Al igual que las componentes de deformación se puede obtener como funciones de las componentes de esfuerzos, las de esfuerzos se obtienen de manera análoga. Es cuestión de establecer una relación entre el volumen de expansión y la suma de los esfuerzos normales:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.9)$$

Reemplazando la Ley de Hooke en (3.9), tenemos:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.10)$$

Para la determinación de los esfuerzos en función de las deformaciones unitarias, reordenando las ecuaciones:

$$\frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z = \varepsilon_x \quad (3.11)$$

$$-\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z = \varepsilon_y \quad (3.12)$$

$$-\frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y + \frac{1}{E} \sigma_z = \varepsilon_z \quad (3.13)$$

Despejando de las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) el esfuerzo  $\sigma_x$ ; y usando la regla de Cramer, obtenemos:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_v + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_x \quad (3.14)$$

De forma análoga se obtiene:

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_v + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_y \quad (3.15)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_\nu + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_z \quad (3.16)$$

El primer factor es conocido como el parámetro de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_\nu \quad (3.17)$$

y

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} , \quad 2G = \frac{E}{(1 + \nu)} \quad (3.18)$$

De esta manera se pueden simplificar las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16) de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_\nu + 2G \varepsilon_x \quad (3.19)$$

### 3.2 Teoría de la Elasticidad Aplicada a Suelos

El suelo es un material producto de la desintegración de rocas y del intemperismo. Al tratarse de materiales compuestos y de combinaciones de minerales, es catalogado como impredecible. En la teoría de la elasticidad aplicada a suelos está basada principalmente en que se define al material como isótropo y homogéneo, por tanto, este se rige por la Ley de Hooke. Las deformaciones producidas por un esfuerzo axial pueden ser analizadas en una prueba triaxial o de compresión simple. Los desplazamientos verticales positivos, están asociados con una deformación negativo en sentido horizontal (Relación de Poisson).

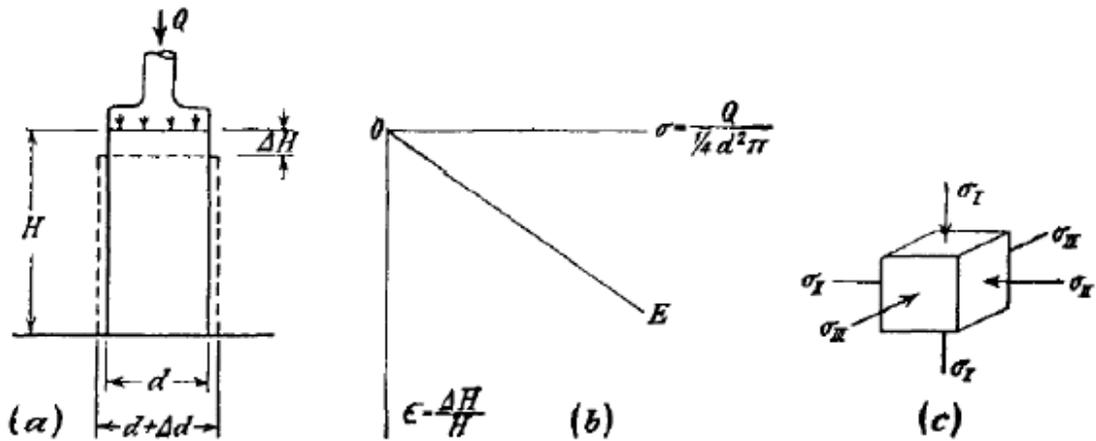


Figura 7. a) Espécimen perfectamente elástico sometido a fuerzas axiales; b) Resultados de la prueba; c) Orientación de los esfuerzos principales (Terzagui, 1943).

Cada punto en análisis se puede dividir en tres esfuerzos principales, los cuales son perpendiculares uno del otro. La deformación en cierta dirección es igual a la suma de las deformaciones producidas por cada uno de los esfuerzos en su respectiva dirección. Figura 7 muestra un elemento con cierto volumen, el cual cada cara es sometida a un esfuerzo perpendicular a estas (Terzaghi, 1943). Estos esfuerzos son considerados iguales:

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma_w \quad (3.20)$$

La deformación en la dirección de cada uno de esos esfuerzos es:

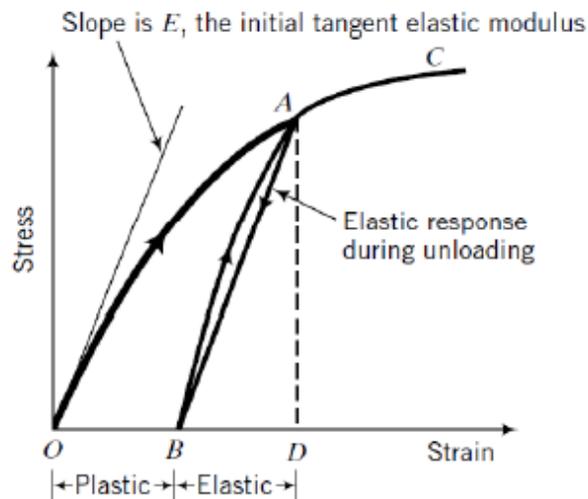
$$\frac{\sigma_w}{E} - 2\nu \frac{\sigma_w}{E} = \frac{\sigma_w}{E} (1 - 2\nu) \quad (3.21)$$

Cuando se aplican estos esfuerzos el cambio de volumen del elemento es dado por:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\sigma_w}{E} (1 - 2\nu) \quad (3.22)$$

Para una relación de Poisson de 0.5, el cambio de volumen es igual a cero, Por tanto, los sólidos elásticos se consideran incompresibles ( $\nu = 0.5$ ).

Los suelos tienen un comportamiento el cual al deformarse no se tiene una recuperación total después de la descarga. Estos muestran un comportamiento esfuerzo deformación como el de la Figura 8, el cual, el tramo  $OA$ , representa el tramo de carga; el tramo  $AB$ , como el tramo de descarga y el tramo  $BC$ , el tramo como de recarga.



**Figura 8. Comportamiento de un material elasto-plástico en una prueba de compresión.**

Se puede observar en la figura que el tramo  $OA$  consiste en dos partes que definen el comportamiento real del suelo. Una es la parte elástica, es el tramo de recuperación de la deformación al cesar la carga; y la segunda parte es la plástica, en esta etapa las deformaciones en el suelo no son recuperables. Esto es lo que define al suelo como un material con un comportamiento elasto-plástico.

El módulo elástico o módulo de Young, es la pendiente de la línea de la gráfica esfuerzo-deformación de un material linealmente elástico. Para un material elástico no lineal, tenemos los módulos de elasticidad tangente y el módulo secante, ambos se encuentran determinados con una relación de esfuerzo y deformación.

Los módulos elásticos tanto como el secante y el tangente, tienden a ser menores cuando las deformaciones tangenciales aumentan. Comúnmente los módulos para un material elasto-plástico son obtenidos con la tangente inicial, haciendo una descarga y calculando la pendiente inicial de la línea de descarga como la tangente inicial del módulo elástico.

#### **4. ASENTAMIENTOS EN ARCILLAS NO SENSITIVAS**

Al aplicar una carga sobre una masa de suelo, se produce un nuevo estado de esfuerzos en dicha masa, este nuevo estado de infiere a deformaciones que se traducen en asentamientos de la estructura. La naturaleza y magnitud de tales deformaciones dependerá de:

- La magnitud de la carga aplicada
- Las propiedades del material, y
- El tiempo

##### **4.1 Aspectos Generales**

Resulta necesario con frecuencia la estimación de los desplazamientos verticales debidos a la aplicación de cargas estáticas transmitidas de la estructura al suelo subyacente.

La Figura 9 representa la historia del asentamiento de un punto de una cimentación; se puede apreciar que existen tres componentes del asentamiento que difieren en magnitud, lo cual, es aplicable a todos los suelos, si reconocemos que la escala de tiempo y magnitudes relativas de los tres componentes pueden diferir en varios órdenes de magnitud para diferentes tipos de suelos (Winterkorn y Fang, 1975).

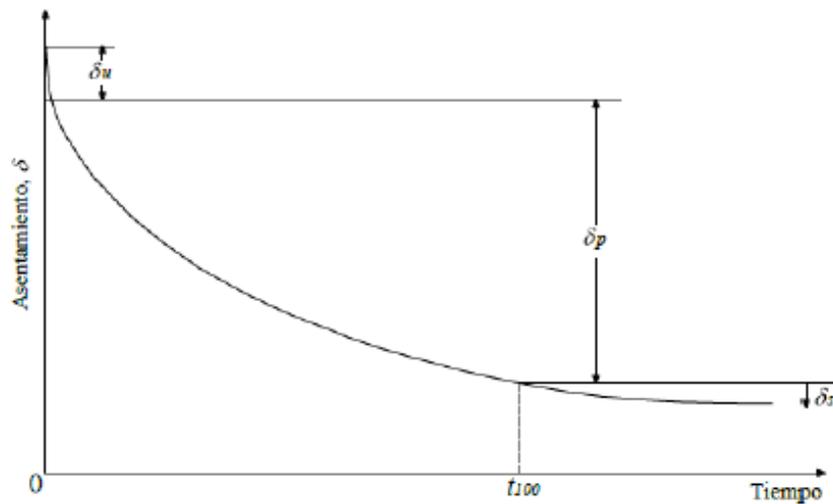
Es conveniente para el cálculo, que el asentamiento ( $\delta$ ) sea la suma de las tres componentes, como se aprecia en la Figura 9 (Winterkorn y Fang, 1975).

$$\delta_T = \delta_u + \delta_{pt} + \delta_{st} \quad (4.1)$$

$\delta_u$  = Asentamiento inmediato o asentamiento distorsional.

$\delta_{pt}$  = Asentamiento por consolidación primaria.

$\delta_{st}$  = Asentamiento por consolidación secundaria.



**Figura 9. Historia del asentamiento en un punto de una cimentación (Winterkorn y Fang, 1975).**

El asentamiento inmediato es aquella parte del asentamiento total que tiene lugar simultáneamente a la aplicación de la carga, como consecuencia principalmente de una distorsión en el suelo de cimentación. El asentamiento distorsional es generalmente no-elástico, sin embargo, se calcula utilizando la teoría de la elasticidad cuando el asentamiento tiene lugar en materiales cohesivos, como es el caso de las arcillas preconsolidadas.

El resto de las componentes es resultado de la expulsión gradual del agua de los vacíos y la compresión simultánea del esqueleto de suelo; ambas componentes son resultado de una deformación diferida. La distinción entre asentamiento por consolidación primaria (controlada por la rapidez que el agua es expulsada de los vacíos) y consolidación secundaria (controlada por la velocidad que el esqueleto de

suelo cede y se comprime) se hace sobre las bases de los procesos físicos que controlan la velocidad del asentamiento. El tiempo de transición entre estos dos procesos es identificado como el tiempo cuando el exceso de presión de poro llega a ser sensiblemente cero. Este tiempo, indicado como  $t_{100}$ , se aprecia en la Figura 9.

Por otra parte, el fenómeno de asentamientos se genera cuando existen esfuerzos, para calcular las deformaciones en los estratos subyacentes, es necesario tener información acerca de las propiedades mecánicas del suelo y como es que se transmite el esfuerzo hasta ese punto. Para ello es necesario saber la presión que hay entre los granos del suelo, esta es llamada presión o esfuerzo efectivo.

#### **4.2 Distribución de Esfuerzos en los Suelos**

Es sabido que el esfuerzo en la superficie no es igual al esfuerzo a cierta profundidad, por tanto, para la determinación de los asentamientos inducidos en un estrato de suelo es necesario cuestionarse que ocurre en él. Las soluciones aplicadas se encuentran desarrolladas con base en la Teoría de la Elasticidad

Joseph Boussinesq en el año 1885, teniendo como principio la Teoría de la Elasticidad, presento una de las primeras soluciones a este problema para una carga puntual actuando en la dirección normal a la superficie de un semi-espacio linealmente elástico (Figura 10).

Teniendo consideradas en la solución las hipótesis simplistas en las que se estima que el medio en que se transmite el esfuerzo, es un medio elástico, por tanto, obedece a la Ley de Hooke, además, el medio se considera anisótropo, semi-infinito y que la distribución de esfuerzos es independiente del tipo de material y en este se considera válida una distribución de esfuerzos lineal.

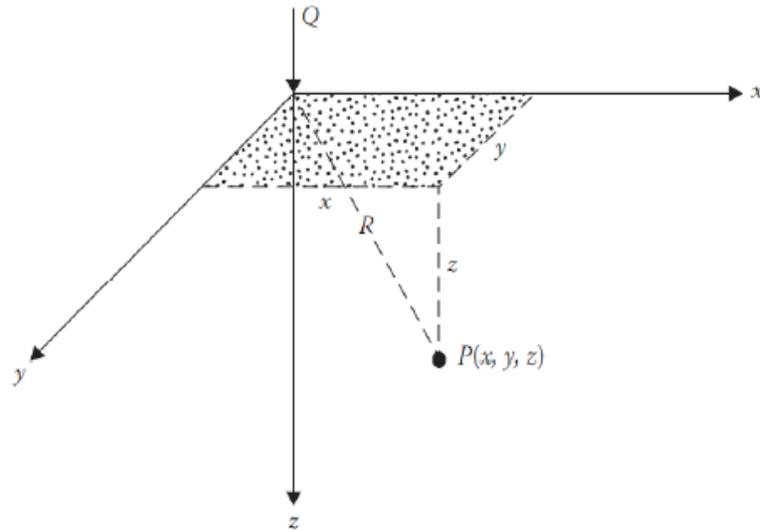


Figura 10. Esfuerzos en un punto P, producidos por una carga Q en la superficie (Das, 2014).

La distribución de esfuerzos en el centro de una carga circular, de radio  $r$ , a una profundidad  $z$ , se encuentra dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma_z = q \left[ 1 - \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (4.2)$$

El incremento de esfuerzo radial horizontal esta dado por Yoder, 1959.

$$\sigma_r = \frac{q}{2} \left[ 1 + 2\nu - \frac{2(1 + \nu)z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (4.3)$$

En este trabajo se analizará la zapata corrida como una figura rectangular uniformemente cuadrada, los cuales se obtienen de la esquina del elemento. Se incluirá el efecto de los esfuerzos laterales causados por la carga, teniendo un efecto tridimensional en la masa del suelo.

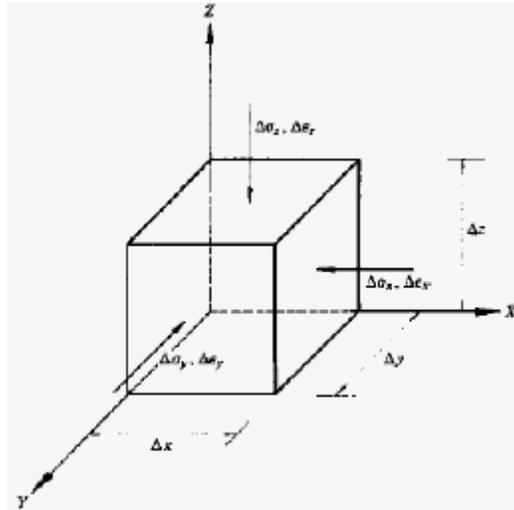


Figura 11. Estado de esfuerzos de un elemento (Zeevaert, 1973).

Las deformaciones laterales se proponen como nulas considerando un confinamiento infinito, por tanto:

$$\Delta \varepsilon_x = \Delta \varepsilon_y = 0 ; \Delta \varepsilon_z \neq 0 \quad (4.4)$$

Habiendo hecho la simplificación anterior, usamos la ecuación formulada por Damy (et al 1985). La cual es para obtener los esfuerzos en la dirección z para una carga vertical (Figura 12).

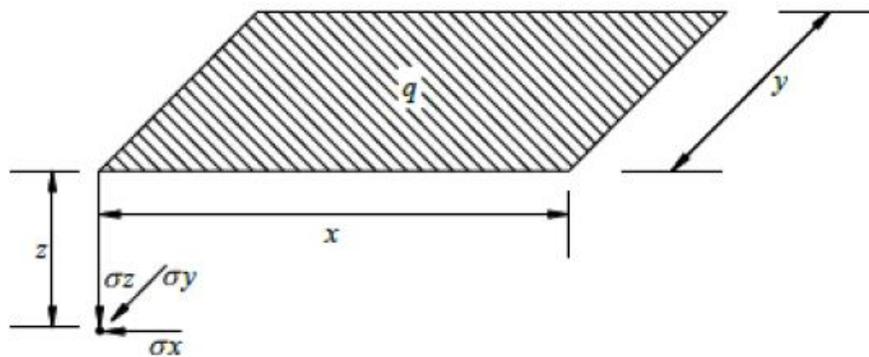


Figura 12. Esfuerzos normales bajo la esquina de un rectángulo cargado (Damy, 1985).

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (4.5)$$

Para  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  debido a un esfuerzo vertical en la superficie se tiene (Daskó y Kagán, 1980):

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{yB}{yz} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (4.7)$$

donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas donde se encuentra el punto de estudio y  $B$  es una constante que está definida de la siguiente manera:

$$B = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.8)$$

### 4.3 Asentamientos Inmediatos

Como ya lo hemos mencionado anteriormente, aunque el suelo no es un material elástico, a menudo se trata como tal, debido a que existen en la literatura especializada en el tema un gran número de soluciones y métodos para materiales elásticos, que aplicados sobre todo a los suelos cohesivos, proporcionan resultados muy aproximados y que funcionan muy bien en la práctica.

A continuación, se presentan algunas teorías derivadas de la teoría de la elasticidad aplicables para el cálculo de asentamientos elásticos en arcillas preconsolidadas totalmente saturadas (Demeneghi, 2011).

### 4.3.1 Ley de Hooke

Para el correcto uso de esta ley en materiales no lineales, es necesario utilizar un módulo de deformación del suelo  $E$  aproximado, ya sea el módulo de elasticidad tangente o el módulo secante.

La deformación vertical bajo la esquina de un rectángulo cargado (Figura 12) a la profundidad  $z$ , está dada por la expresión:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4.9)$$

Donde:

$\varepsilon_z$  = Deformación vertical o asentamiento.

$E$  = Módulo de elasticidad o de deformación del suelo.

$\nu$  = Relación de Poisson.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  = Esfuerzos normales bajo la esquina de un rectángulo cargado.

Sabemos que,

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta\delta_z}{\Delta Z} \quad (4.10)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\delta_z}{\Delta Z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \Delta\delta_z &= \frac{\Delta Z}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Fórmula de Schleicher

Para calcular los asentamientos bajo una esquina de una superficie rectangular uniformemente cargada en un medio semi-infinito, elástico, homogéneo, e isótropo, Schleicher obtuvo la siguiente ecuación (Terzaghi, 1943 citado por Deméneghi, 2011):

$$\delta_z = \frac{q(1 - \nu^2)}{\pi E} \left\{ y \ln \left[ \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right] + x \ln \left[ \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right] \right\} \quad (4.12)$$

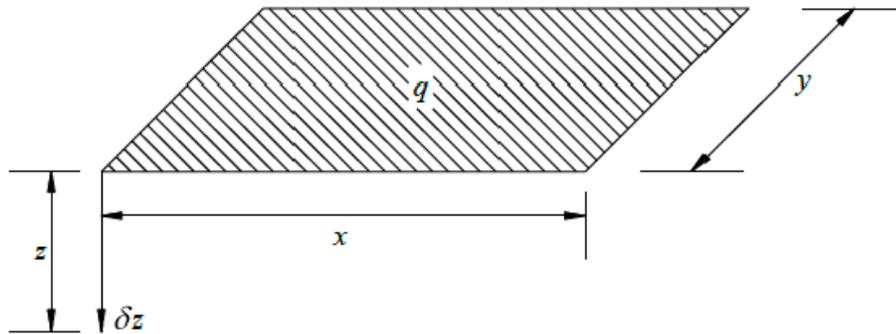


Figura 13. Deformación bajo la esquina del rectángulo cargado (Deméneghi, 2011).

### 4.3.3 Fórmula de Steinbrenner

Para el cálculo de asentamientos elásticos inducidos por una carga rectangular con carga uniforme, Steinbrenner resolvió el problema de cálculo de asentamientos en un medio elástico, homogéneo e isótropo de espesor "h" bajo una esquina del rectángulo cargado con la siguiente expresión (Terzaghi, 1943, citado por Deméneghi, 2011).

$$\delta_z = \frac{q(1 - \nu^2)}{\pi E} \left\{ y \ln \left[ \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{y^2 + h^2}}{y(x + A)} \right] \right. \\ \left. + x \ln \left[ \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + h^2}}{x(y + A)} \right] \right\} \\ + \frac{q}{2\pi E} (1 - \nu - 2\nu^2) h \tan^{-1} \left( \frac{yx}{hA} \right) \quad (4.13)$$

Donde:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} \quad (4.14)$$

#### 4.3.4 Propiedades de Deformación

La magnitud del cálculo de los asentamientos elásticos depende directamente de los valores de los parámetros elásticos del suelo, como lo son el módulo de elasticidad ( $E$ ) y la relación de Poisson ( $\nu$ ).

Debido a que los suelos cohesivos son materiales elásticamente no lineales, el objetivo de la evaluación de los parámetros elásticos es determinar los valores de éstos, para que al ser sustituidos en la ecuación apropiada proporcionen una correcta determinación del asentamiento distorsional inicial.

Para suelos cohesivos, en los cuales la deformación ocurre a volumen constante y requieren de poco tiempo para que se desarrolle el asentamiento distorsional o elástico, se asume una relación de Poisson  $\nu = 0.5$ , correspondiente a un medio incompresible. A pesar de que esta suposición puede no ser correcta, la magnitud del cálculo del asentamiento no es sensible a pequeños cambios en la variación de la relación de Poisson (Winterkorn y Fang, 1975).

La apropiada determinación del módulo equivalente de deformación del suelo ( $E$ ) es un problema mucho más complicado. Este parámetro es comúnmente obtenido a partir

del módulo tangente inicial en la curva esfuerzo-deformación de una prueba de compresión triaxial.

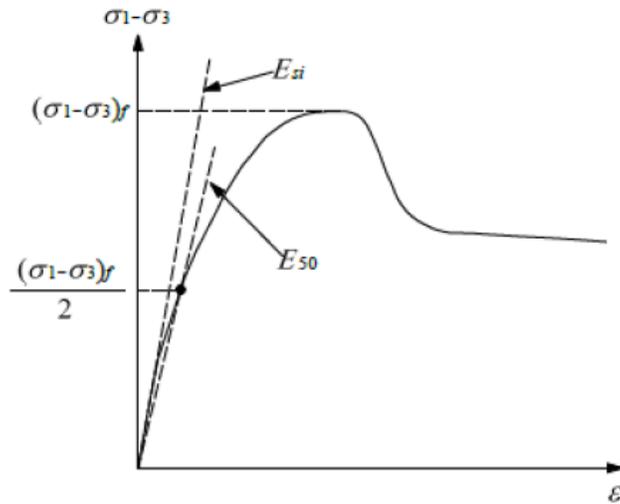
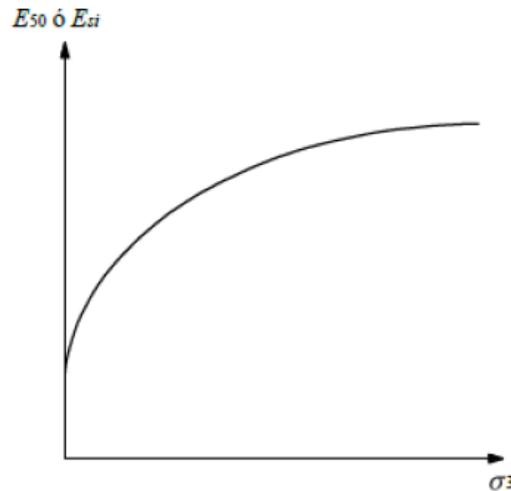


Figura 14. Módulo  $E_{50}$  y módulo tangente inicial  $E_{si}$  (Demeneghi, 2011).

Es común en la práctica utilizar las ecuaciones (4.9) o (4.12), haciendo  $E = E_s$ , siendo  $E_s$  el módulo de deformación del suelo. El módulo  $E_s$  se puede obtener como ya se dijo a partir de los resultados de una prueba de compresión triaxial (Figura 14). Como  $E_s$  se puede usar el módulo tangente inicial  $E_{si}$  o el módulo  $E_{50}$  (Figura 14), el cual corresponde al 50% del esfuerzo desviador de falla.

La rigidez de un suelo es función de la presión de confinamiento. En la Figura 15 se muestra la variación de  $E_{50}$  o  $E_{si}$  con el confinamiento  $\sigma_3$ .



**Figura 15. Variación del módulo  $E_{50}$  o del módulo tangencial  $E_{st}$  con la presión de confinamiento (Demeneghi, 2011).**

Para condiciones no drenadas,  $\nu = \nu_u = 0.5$  y  $E_u$  es usualmente obtenido a partir de pruebas triaxiales no drenadas  $UU$ . Para estratos razonablemente homogéneos,  $E_u$  se considera constante, aunque éste si aumenta con la profundidad. Para estratos de espesor mayor a 3 m, es conveniente dividir dicha capa en una serie de subcapas, asignado a cada una de ellas las adecuadas propiedades de la capa de suelo en cuestión.

En la Tabla 1. Parámetros elásticos (Diaz, 2011).Tabla 1 se muestran parámetros elásticos donde se pueden obtener valores típicos de diferentes tipos de suelos.

Tipo de suelos	E Kg/cm <sup>2</sup>	$\nu$
Arcilla blanda	21-53	0.30-0.50
Arcilla media	51-105	0.30-0.50
Arcilla rígida	105-246	0.10-0.30
Limo arenoso	105-176	0.20-0.40
Arena suelta	105-246	0.20-0.40
Arena semi-densa	175-281	0.25-0.40
Arena densa	352-563	0.30-0.45
Arena y grava suelta	490-1468	0.15-0.30
Arena y grava densa	980-1960	0.20-0.35

**Tabla 1. Parámetros elásticos (Diaz, 2011).**

El uso de tablas debe limitarse solamente para estimaciones y requiere de buen criterio y experiencia para su aplicación.

#### 4.4 Asentamientos Diferidos o a Largo Plazo

$$\Delta\delta_t = (\Delta\delta)_{pt} + (\Delta\delta)_{st} \quad (4.15)$$

Donde:

$\Delta\delta_t$  = Asentamiento total a largo plazo para un tiempo  $t$ .

$(\Delta\delta)_{pt}$  = Asentamiento por un tiempo  $t$ , debido a consolidación primaria.

$(\Delta\delta)_{st}$  = Asentamiento por un tiempo  $t$ , debido a consolidación secundaria.

Se conoce como consolidación al fenómeno de proceso de disminución de volumen que tenga lugar en un lapso de tiempo, provocado por el aumento de las cargas sobre el suelo. Generalmente este proceso va acompañado por la salida de agua de los vacíos del suelo (Juárez y Rico, 1976).

La teoría de consolidación se le debe a Karl Terzaghi (1923), para reproducir esta, se recurre a la prueba de consolidación unidimensional en laboratorio. Dicha prueba consiste, esencialmente, en aplicar una carga vertical a una pastilla cilíndrica de suelo confinada lateralmente por un anillo metálico, de manera que se deforme únicamente en el sentido vertical. Se aplica un incremento de carga y se mantiene sostenido durante un cierto intervalo de tiempo (normalmente un día). Con ayuda de un micrómetro se mide la evolución de la deformación durante este lapso, con lo que se obtiene la correspondiente curva de consolidación. El proceso se repite para varios incrementos de carga, con lo que se dispone de una curva de consolidación para cada incremento como la que se aprecia en la Figura 16.

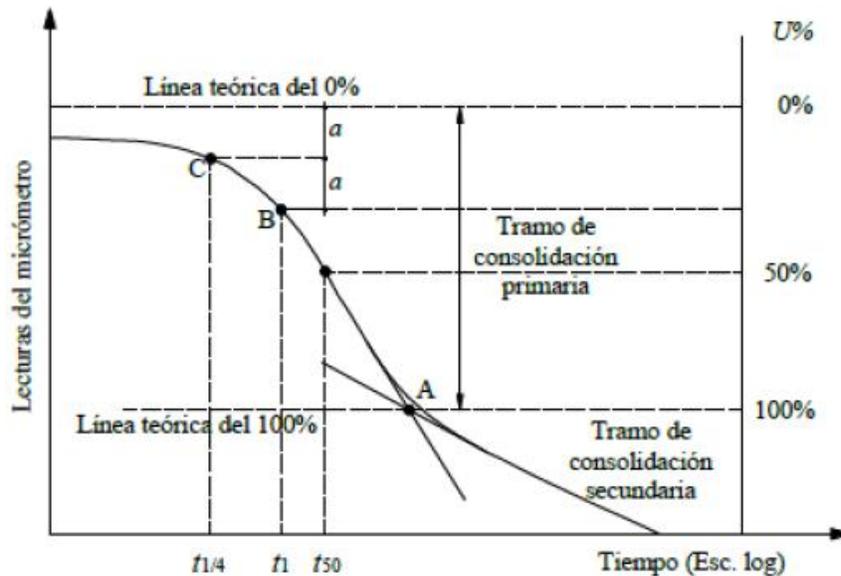


Figura 16. Curva de consolidación (Juárez y Rico, 1976).

En campo, cuando las cargas de una cimentación son transmitidas a un suelo cohesivo, se produce una deformación volumétrica, que en el caso de materiales saturados se manifiesta en un incremento en la presión de poro. Cuando ha transcurrido suficiente tiempo, el agua fluye fuera del suelo, acompañada de una disipación de la presión de poro.

Con base en los resultados de las curvas deformación-tiempo (curvas de consolidación), se obtiene la relación entre relación de vacíos y esfuerzo efectivo, denominada curva de compresibilidad (Figura 17). Esta curva permite asociar la variación de la relación de vacíos con el esfuerzo vertical efectivo,  $\sigma'_v$ , aplicado.

La curva de compresibilidad, se puede dibujar en escala aritmética o en escala logarítmica como se ilustra en la Figura 17, en la gráfica (Figura 17b) se aprecian dos tipos de comportamiento, el lado izquierdo con una pequeña pendiente (A) (denominada rama preconsolidada, OC, o rama estructurada), el lado derecho caracterizado por una línea recta de gran pendiente (B) (denominada rama normalmente consolidada, NC, o rama desestructurada). En esta rama (NC), la

pendiente de la línea recta se denomina índice de compresión ( $C_c$ ), y está definido mediante la relación:

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \quad (4.16)$$

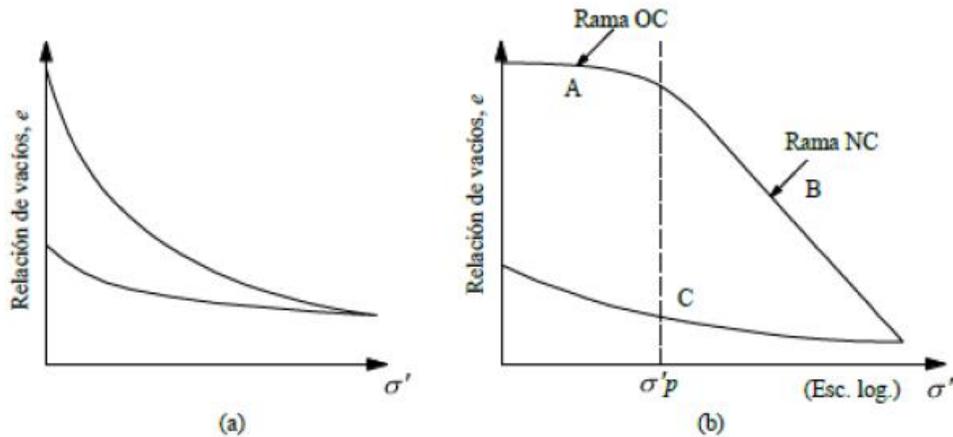


Figura 17. Curva de compresibilidad, a) escala aritmética, b) escala logarítmica (Juárez y Rico, 1976).

La curva que une la rama OC con la rama NC representa la transición entre la condición estructurada y la desestructurada, por tanto, se define un concepto denominado esfuerzo de preconsolidación,  $\sigma'_p$ , que representa el máximo esfuerzo que ha soportado el suelo en estudio, en toda su historia geológica (Casagrande, 1936). Se dice que un suelo está normalmente consolidado, NC, cuando  $\sigma'_v = \sigma'_p$ , es decir, nunca ha sufrido esfuerzos efectivos superiores a los que tiene en el momento del estudio. En caso contrario,  $\sigma'_v < \sigma'_p$ , se dice que éste está sobreconsolidado o preconsolidado, OC. Se denomina relación de preconsolidación, OCR, a la relación que existe entre el esfuerzo de preconsolidación,  $\sigma'_p$ , y el esfuerzo efectivo actual,  $\sigma'_v$ , esta relación se expresa:

$$OCR = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_v} \quad (4.17)$$

El esfuerzo de preconsolidación,  $\sigma'_p$ , es estimado mediante un procedimiento de Casagrande (1936) con base en la curva de compresibilidad.

#### 4.4.1 Deformación de un Elemento de Suelo de Espesor $\Delta z_0$

Consideremos un estrato de arcilla de espesor inicial  $\Delta z_0$ , el cual, al ser sometido a un incremento de carga, sufre una deformación vertical  $\delta_z$  (Figura 18), quedando con un espesor final  $\Delta z_f$ .

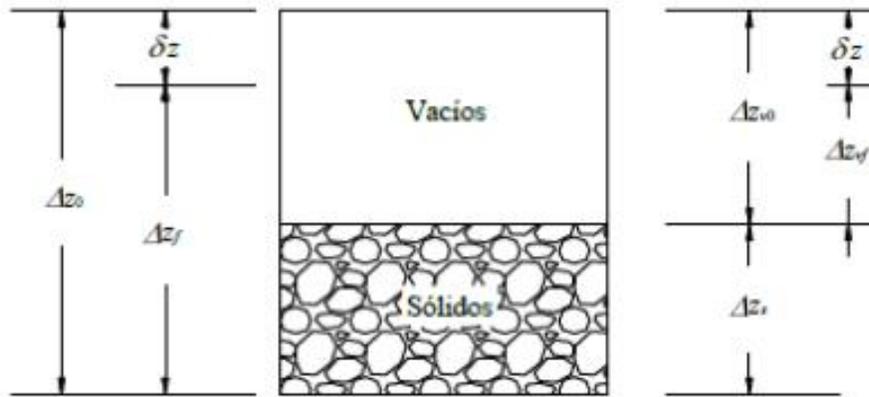


Figura 18. Deformación de un elemento de suelo (Demenoghi, 2011).

Con relación a la Figura 18 podemos apreciar el asentamiento:

$$\delta_z = \Delta z_0 - \Delta z_f \quad (4.18)$$

Sus relaciones de vacíos, inicial y final son:

$$e_0 = \frac{\Delta z_{v0}}{\Delta z_s} \quad (4.19)$$

$$e_f = \frac{\Delta z_{vf}}{\Delta z_s} \quad (4.20)$$

Suponiendo que la compresión vertical se debe únicamente a una reducción de los vacíos del suelo. Entonces,

$$\Delta z_0 = \Delta z_{v0} + \Delta z_s \quad (4.21)$$

$$\Delta z_f = \Delta z_{vf} + \Delta z_s \quad (4.22)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.21) y (4.22) en la ecuación (4.18).

$$\delta_z = \Delta z_{v0} - \Delta z_{vf} \quad (4.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.19) y (4.20) en la ecuación (4.23).

$$\delta_z = e_0 \Delta z_s - e_f \Delta z_s = \Delta z_s (e_0 - e_f) \quad (4.24)$$

Ahora dividimos ambos miembros entre  $\Delta z_0$ .

$$\frac{\delta_z}{\Delta z_0} = \frac{\Delta z_s (e_0 - e_f)}{\Delta z_0} \quad (4.25)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.21) y (4.19).

$$\frac{\delta_z}{\Delta z_0} = \left[ \frac{\Delta z_s}{\Delta z_{v0} + \Delta z_s} \right] (e_0 - e_f) \quad (4.26)$$

$$\frac{\delta_z}{\Delta z_0} = \left[ \frac{\Delta z_s}{e_0 \Delta z_{v0} + \Delta z_s} \right] (e_0 - e_f) = \left[ \frac{1}{1 + e_0} \right] (e_0 - e_f)$$

$$\delta_z = \left[ \frac{e_0 - e_f}{1 + e_0} \right] \Delta z_0$$

Donde  $\Delta e = e_0 - e_f$

$$\delta_z = \left[ \frac{\Delta e}{1 + e_0} \right] \Delta z_0 \quad (4.27)$$

La ecuación (4.27) permite calcular la deformación vertical de un estrato de suelo de espesor inicial  $\Delta z_0$ , en función de su decremento de relación de vacíos y de su relación de vacíos inicial.

Con los resultados de una prueba de consolidación se puede calcular el decremento de la relación de vacíos. De la ecuación (4.26) tenemos que:

$$e_f = e_0 \left( 1 - \frac{\delta_z}{\Delta z_0} \right) - \frac{\delta_z}{\Delta z_0} \quad (4.28)$$

siendo  $\delta_z$  la deformación al final del incremento de carga (después de que se disipó la presión de poro) y  $\Delta z_0$  el espesor del espécimen de suelo en el momento de aplicar la carga. Usando la ecuación (4.28) se calcula la relación de vacíos al final de cada incremento de carga, con lo que se obtiene una curva de compresibilidad (Figura 19).

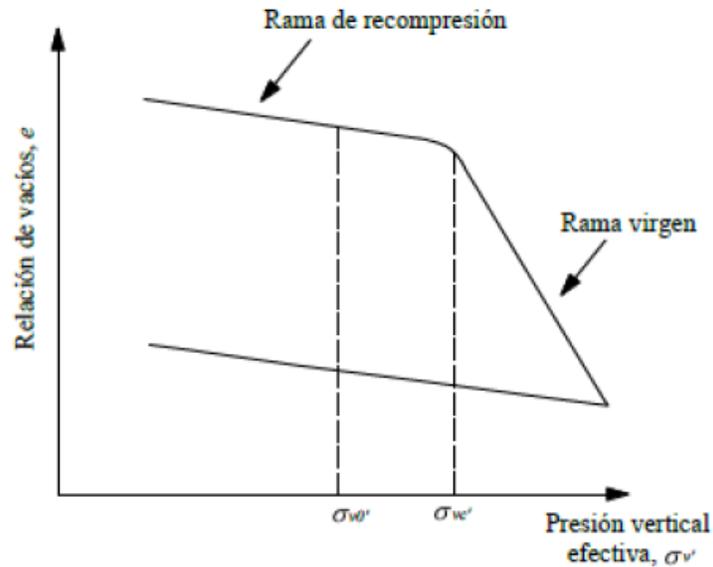


Figura 19. Curva de compresibilidad (Demeneghi, 2011).

Tomemos dos puntos de la curva de compresibilidad de la Figura 19. Se define el coeficiente de compresibilidad  $a_v$ :

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta p_v'} \quad (4.29)$$

Mientras que el coeficiente de compresibilidad volumétrica,  $m_v$ , es:

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0} \quad (4.30)$$

Para obtener una ecuación más explícita se multiplica y divide la ecuación (4.27) por  $\Delta\sigma$ . Y tomando en cuenta las ecuaciones (4.29) y (4.30), tenemos:

$$\delta_z = \left[ \frac{\Delta e / \Delta \sigma}{1 + e_0} \right] \Delta z_0 \Delta \sigma = \frac{a_v}{1 + e_0} \Delta z_0 \Delta \sigma \quad (4.31)$$

$$\delta_z = m_v \Delta z_0 \Delta \sigma$$

La expresión (4.31) permite calcular el asentamiento debido a consolidación para un tiempo  $t = \infty$ . En donde:

$m_v$  = Coeficiente de compresibilidad volumétrica.

$\Delta z_0$  = Espesor del estrato sujeto a consolidación.

$\Delta \sigma$  = Incremento de esfuerzo debido a la aplicación de la carga.

#### 4.4.2 Asentamientos por Consolidación Primaria en Suelos Preconsolidados

Skempton y Bjerrum (1957), proponen un procedimiento para corregir el cálculo de la deformación en arcillas preconsolidadas.

La deformación por consolidación primaria vale:

$$\Delta \delta_{pcon} = m_v \sigma_z \Delta z_0 \quad (4.32)$$

En el consolidómetro, el incremento de presión de poro, en el momento de aplicar la carga, vale:

$$\Delta \mu_{wcon} = \sigma_z \quad (4.33)$$

Por tanto,

$$\Delta \delta_{pcon} = m_v \Delta \mu_{wcon} \Delta z_0 \quad (4.34)$$

Por otra parte, el incremento de presión de poro es función del incremento del esfuerzo desviador, es decir:

$$\Delta \mu_{wcon} = B \sigma_3 + AB(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4.35)$$

Donde  $A$  y  $B$  son los coeficientes de presiones de poro (Skempton, 1954). Para arcillas saturadas  $B = 1$  y el valor de  $A$  puede ser determinado mediante la medición de presión poro en una prueba triaxial  $UU$  (Bishop y Henkel, 1957).

Entonces,

$$\Delta\mu_{wcon} = \sigma_3 + A(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4.36)$$

En el campo,

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.37)$$

$$\sigma_1 = \sigma_z$$

Reemplazamos las ecuaciones (4.37) en la ecuación (4.36), tenemos:

$$\Delta\mu_{wcpo} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + A\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \quad (4.38)$$

Consideran que el asentamiento en el campo se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\Delta\delta_{Pcpo} = m_v \Delta\mu_{wcpo} \Delta z_0 \quad (4.39)$$

Dividimos la ecuación (4.39) y la ecuación (4.34). Y teniendo en cuenta (4.33) y (4.38).

$$\frac{\Delta\delta_{Pcpo}}{\Delta\delta_{Pcon}} = \frac{\Delta\mu_{wcpo}}{\Delta\mu_{wcon}} = \frac{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + A\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)}{\sigma_z} \quad (4.40)$$

Reordenando la ecuación (4.40), tenemos el coeficiente de corrección de Skempton y Bjerrum, “ $\mu$ ”:

$$\mu = \frac{A\sigma_z + \frac{(1-A)(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z} \quad (4.41)$$

Por tanto, el asentamiento en el campo, al término de la consolidación primaria es:

$$\Delta\delta_{PCPO} = \mu(\Delta\delta_{PCON}) \quad (4.42)$$

Y, por tanto, el asentamiento para un tiempo  $t$ , debido a consolidación primaria es:

$$\Delta\delta_{Pt} = \Delta\delta_{PCPO}U \quad (4.43)$$

Donde  $U$  es el grado o porcentaje de consolidación primaria ( $U = 1$  si  $T > 2$ ).

Tipo de arcilla	$A_{Ste}$
Arcillas blandas sensitivas	>1
Arcillas normalmente consolidadas	½ -1
Arcillas preconsolidadas	¼ - ½
Arenas arcillosas fuertemente preconsolidadas	0-¼

Tabla 2. Valores típicos del Coeficiente  $A$  en condiciones de esfuerzo de trabajo (Skempton y Bjerrum, 1957).

Para el cálculo de deformación por consolidación primaria  $\Delta\delta_{PCON}$ , utilizamos el procedimiento no lineal para la predicción de deformaciones a largo plazo en arcillas preconsolidadas totalmente saturadas propuesta por Demeneghi, et al (2012), válida para arcillas no sensitivas. En estas arcillas se puede emplear el principio de proporcionalidad natural de Juárez Badillo (2010), que establece que no vivimos en un mundo de cantidades sino más bien en un mundo de proporciones. Por tanto, hagamos

uso de este concepto para el cálculo de deformación vertical a largo plazo de un estrato de arcilla como el mostrado en la Figura 20.

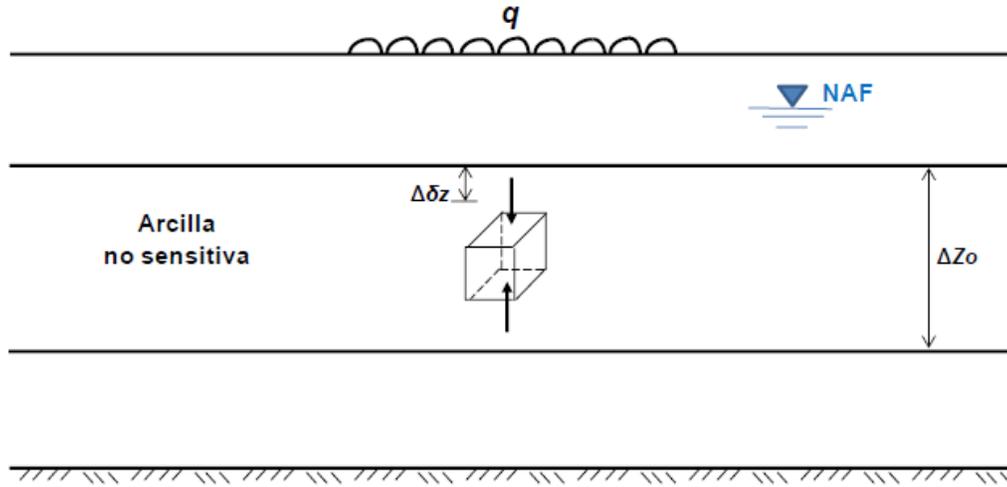


Figura 20. Estrato de arcilla totalmente saturada (Demeneghi, 2021).

El estado de esfuerzos efectivos sobre el elemento se muestra en la figura 16. Supongamos que la deformación ocurre únicamente en dirección vertical, y que las deformaciones laterales son nulas.

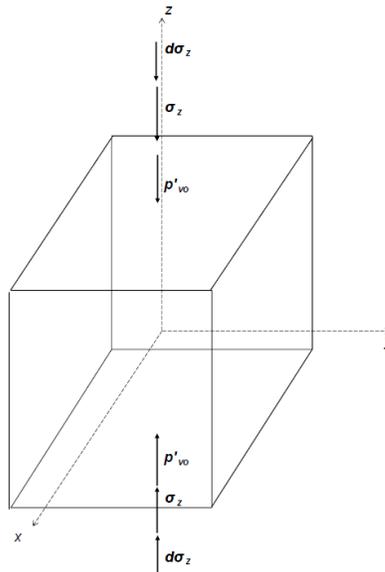


Figura 21. Estado de esfuerzos sobre el elemento (Demeneghi, 2021).

Demos ahora un incremento diferencial de esfuerzo vertical  $d\sigma_z$ . Haciendo uso del principio de proporcionalidad natural de Juárez Badillo (2010) podemos establecer que la diferencial de la deformación lineal unitaria es:

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A p'_{v0} + \sigma_z} d\sigma_z \quad (4.44)$$

En la ecuación (4.44) notamos que la deformación vertical es directamente proporcional al incremento de esfuerzo  $d\sigma_z$  e inversamente proporcional a la presión vertical efectiva debida a peso propio y al incremento de esfuerzo vertical por la aplicación de la carga repartida  $q$ .

La deformación  $d\varepsilon_z$  la definimos en mecánica de suelos de la siguiente forma:

$$d\varepsilon_z = -\frac{dw}{h} \quad (4.45)$$

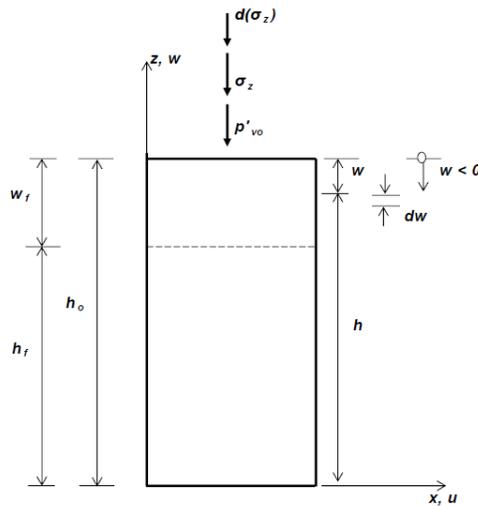


Figura 22. Deformación de un elemento arcilla no sensitiva (Demeneghi, 2021).

De acuerdo con la Figura 22,

$$h = h_0 + w, dh = dh_0 + dw, dh = dw$$

$$d\varepsilon_z = -\frac{dh}{h} \quad (4.46)$$

Reemplazamos en la ecuación (4.44),

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1}{A} \frac{d\sigma_z}{p'_{vo} + \sigma_z}$$

Integremos esta expresión:

$$\int_{h_0}^{h_f} \frac{dh}{h} = -\frac{1}{A} \int_0^{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{p'_{vo} + \sigma_z}$$

$$\ln \frac{h_f}{h_0} = -\frac{1}{A} \ln \left( \frac{p'_{vo} + \sigma_z}{p'_{vo}} \right)$$

$$\frac{h_f}{h_0} = \left( \frac{p'_{vo} + \sigma_z}{p'_{vo}} \right)^{-\frac{1}{A}}$$

De acuerdo con la Figura 22,

$$h_f = h_0 + w_f, (w_f < 0)$$

$$\frac{w_f}{h_0} = \frac{h_f}{h_0} - 1$$

$$w_f = \left[ \left( \frac{p'_{vo} + \sigma_z}{p'_{vo}} \right)^{-\frac{1}{A}} - 1 \right] h_0 \quad (4.47)$$

Utilicemos la ecuación (4.47) para el cálculo de la deformación del estrato de la Figura 20; denominemos  $\Delta w_f$  a la deformación del estrato y  $\Delta z_0$  a su espesor inicial. Consideremos que podemos hacer extensiva la fórmula (4.47) para el estrato, entonces:

$$\Delta w_f = \left[ \left( \frac{p'_{vo} + \sigma_z}{p_{vo}'} \right)^{-\frac{1}{A}} - 1 \right] \Delta h_0 \quad (4.48)$$

El valor de  $\Delta w_f$  dado por la ecuación (4.48) es siempre negativo, por lo que para obtener una magnitud positiva de la deformación hacemos  $\Delta w_f = -\Delta \delta_z$ . La ecuación (4.48) queda:

$$\Delta \delta_z = \left[ 1 - \left( \frac{P'_{vo} + \sigma_z}{P_{vo}'} \right)^{-\frac{1}{A}} \right] (\Delta z_0) \quad (4.49)$$

La ecuación (4.49) proporciona la deformación a largo plazo de un estrato de arcilla no sensitiva, totalmente saturada, de espesor  $\Delta z_0$ , sometido a un incremento de esfuerzo vertical  $\sigma_z$  (Figura 20). En arcillas no sensitivas la deformación se debe a consolidación primaria y a consolidación secundaria; además, podemos estar en la rama de recompresión (o rama de descarga) o en la rama virgen. Por lo tanto, para el cálculo de las deformaciones, las magnitudes de  $A$  que debemos emplear en la ecuación (4.49) son:

### **Rama de descarga**

Consolidación primaria,  $A = A_{sp}$

Consolidación secundaria,  $A = A_{scs}$

### **Rama Virgen**

Consolidación primaria,  $A = A_p$

Consolidación secundaria,  $A = A_{cs}$

El módulo de rigidez  $A$  se puede obtener a partir de mediciones de deformación en ensayos de consolidación. Lo despejamos de la ecuación (4.49).

$$A = - \frac{\log\left(\frac{P'_{v0} + \sigma_z}{P'_{v0}}\right)}{\log\left(1 - \frac{\Delta\delta_z}{\Delta z_0}\right)} \quad (4.50)$$

Consideremos que, en una de las etapas de una prueba de consolidación, el espesor inicial de la probeta de suelos es  $\Delta z_0 = \Delta z_1$ , y la presión inicial  $p'_{v0} = p'_{v1}$ , se da un incremento de presión  $\sigma_z = \Delta p'_v$ . La presión al final de la etapa  $P'_{v2} = p'_{vi} + \Delta p'_v$ . El módulo  $A_p$  para consolidación primaria es entonces:

$$A_{sp}, A_p = - \frac{\log\left(\frac{P'_{v2}}{p'_{v1}}\right)}{\log\left(1 - \frac{\Delta\delta_p}{\Delta z_1}\right)} \quad (4.51)$$

Donde  $\Delta\delta_p$  es la deformación por consolidación primaria, al término de esta.

El módulo  $A_{cs}$  para la consolidación secundaria vale:

$$A_{scs}, A_{cs} = - \frac{\log\left(\frac{P'_{v2}}{p'_{v1}}\right)}{\log\left(1 - \frac{C_t}{\Delta z_1}\right)} \quad (4.52)$$

Donde  $C_t$  es la deformación que ocurre en un ciclo de tiempo en escala logarítmica de base 10

Por lo tanto, el asentamiento por consolidación primaria  $\Delta\delta_{pcon}$  reescrita, queda de la siguiente manera:

$$\Delta\delta_{P_{con}} = \left[ 1 - \left( \frac{P'_{vo} + \sigma_z}{P_{vo}'} \right)^{\frac{1}{A_{sp,p}}} \right] (\Delta Z_0) \quad (4.53)$$

#### 4.4.3 Asentamiento por consolidación secundaria

La teoría de la consolidación secundaria de Zeevaert (1986) analiza con base en el modelo reológico de la teoría de la consolidación primaria de Terzaghi y en un segundo modelo reológico, el cual representa la labor de la viscosidad intergranular, llamada Unidad Z.

Consideremos el modelo de viscosidad intergranular de la Figura 23 (unidad Z; Zeevaert, 1986), que consiste en un amortiguador  $N$  con coeficiente de fluidez  $\Phi_N$  y otro amortiguador 2 cuya fluidez disminuye con el tiempo.

En el amortiguador  $N$

$$\dot{\epsilon}_N = \Phi_N \sigma_N \quad (4.54)$$

En el amortiguador 2

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{a}{b+t} \sigma_2 \quad (4.55)$$

Por equilibrio

$$\sigma_z = \sigma_N + \sigma_2 \quad (4.56)$$

Como los amortiguadores están en paralelo

$$\dot{\epsilon}_{St} = \dot{\epsilon}_N + \dot{\epsilon}_2 \quad (4.57)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.56)

$$\sigma_z = \frac{1}{\Phi_N} \dot{\epsilon}_N + \frac{b+t}{a} \dot{\epsilon}_2$$

$$\sigma_z = \left( \frac{1}{\Phi_N} + \frac{b+t}{a} \right) \dot{\epsilon}_{St}$$

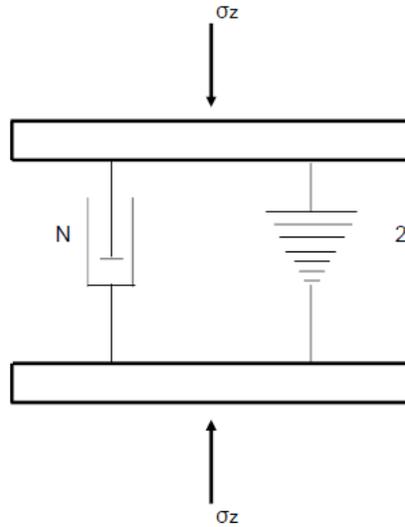


Figura 23. Modelo de viscosidad intergranular. Unidad Z (Zeevaert, 1986).

$$\dot{\epsilon}_{St} = \frac{a}{\frac{a}{\Phi_N} + b + t} \sigma_z \quad (4.58)$$

Considerando  $\sigma_z = \text{constante}$ , integramos la ecuación (4.58)

$$\epsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( b + t + \frac{a}{\Phi_N} \right) \Big|_0^t$$

$$\varepsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( \frac{b + t + \frac{a}{\bar{\Phi}_N}}{b + \frac{a}{\bar{\Phi}_N}} \right) \quad (4.59)$$

En el modelo de Newton, de acuerdo con las ecuaciones (4.54) y (4.58)

$$\sigma_N = \frac{1}{\bar{\Phi}_N} \dot{\varepsilon}_{St} = \frac{\frac{a}{\bar{\Phi}_N}}{\frac{a}{\bar{\Phi}_N} + b + t} \sigma_z$$

Consideramos la siguiente condición inicial: para  $t = 0 \rightarrow \sigma_N = \sigma_z$ , de donde  $b = 0$

Reemplazando en la ecuación (4.59)

$$\varepsilon_{St} = a\sigma_z \ln \left( \frac{t + \frac{a}{\bar{\Phi}_N}}{\frac{a}{\bar{\Phi}_N}} \right) \quad (4.60)$$

Por otra parte  $\ln x = 2.3 \log_{10} x = 2.3 \log x$

Tomando en cuenta un gran número de modelos  $Z$  en serie

$$\varepsilon_{St} = 2.3\bar{a}\sigma_z \log \left( 1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{\bar{a}} t \right) \quad (4.61)$$

Pero

$$\varepsilon_{St} = \frac{\Delta\delta_{St}}{\Delta z_0}$$

Por lo tanto

$$\Delta\delta_{St} = 2.3\bar{a}\sigma_z(\Delta z_0) \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{\bar{a}}t\right) \quad (4.62)$$

O bien, haciendo

$$m_t = \frac{1}{E_{cs}} = 2.3\bar{a} \quad (4.63)$$

$$\Delta\delta_{St} = m_t\sigma_z(\Delta z_0) \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{\bar{a}}t\right) \quad (4.64)$$

$$\Delta\delta_{St} = \frac{1}{E_{cs}}\sigma_z(\Delta z_0) \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{\bar{a}}t\right) \quad (4.65)$$

Sea

$$C_t = m_t\sigma_z(\Delta z_0) = \frac{1}{E_{cs}}\sigma_z(\Delta z_0) \quad (4.66)$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N}{\bar{a}}t\right) \quad (4.67)$$

Como hemos comentado, para que inicie la deformación por consolidación secundaria es necesario que salga el agua libre (representada por el amortiguador  $N$  de la Figura 23). Por lo tanto, el tiempo  $t$  de la ecuación (4.67) depende del espesor efectivo  $\Delta z_e$  de salida del agua. Conviene entonces hallar la relación entre los tiempos de salida y los espesores efectivos de dos estratos de suelo. En efecto, consideremos dos estratos de espesores  $\Delta z_{e1}$  y  $\Delta z_{e2}$ , y supongamos que alcanzan el mismo grado de consolidación  $U$  para un valor del factor tiempo  $T$ ; entonces

$$T = \frac{C_v t_1}{(\Delta z_{e1})^2} = \frac{C_v t_2}{(\Delta z_{e2})^2}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(\Delta z_{e1})^2}{(\Delta z_{e2})^2}$$

La ecuación (4.67) la podemos poner de la siguiente forma

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N (\Delta z_e)^2}{\bar{a} C_v (\Delta z_e)^2} t\right)$$

Pero con la ecuación:

$$T = \frac{C_v t}{(\Delta z_e)^2} \quad (4.68)$$

Tenemos

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log\left(1 + \frac{\bar{\Phi}_N (\Delta z_e)^2}{\bar{a} C_v} T\right)$$

$$\Delta\delta_{St} = C_t \log(1 + \xi T) \quad (4.69)$$

Donde

$$\xi = \frac{\bar{\Phi}_N (\Delta z_e)^2}{\bar{a} C_v} \quad (4.70)$$

Por lo señalado antes, la magnitud de  $\xi$  es constante para un estrato de espesor efectivo  $\Delta z_e$ .

Cabe señalar que

$\bar{\Phi}_N = \Sigma \bar{\Phi}_N$  = Fluidez del agua de los macroporos, en todo el elemento

$\bar{a} = \Sigma \bar{a}$  =Fluidez del agua de los microporos, en todo el elemento

La consolidación secundaria está representada por la siguiente expresión:

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{P'_{vo} + \sigma_z}{P'_{vo}} \right)^{-\frac{1}{A_{cs}}} \right] (\Delta z_0) \quad (4.71)$$

Donde:

$C_t$  = Deformación por consolidación secundaria, en ciclo logarítmico (base 10).

$A_{cs}$  = Módulo de rigidez para la consolidación secundaria.

$\xi$  = Parámetro de compresión secundaria, que depende del tipo de curva de consolidación.

$\Delta z_0$  = Espesor total del estrato de suelo.

$\Delta z_e$  = Espesor efectivo del estrato de suelo.

$C_v$  = Coeficiente de consolidación primaria.

$T$  = Factor tiempo.

## 5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El objetivo del análisis estructural, es determinar las fuerzas externas (o componentes de reacción) y las fuerzas internas (o de resultantes de compatibilidad). En esencia estas fuerzas deben satisfacer las condiciones de equilibrio y producir deformaciones compatibles con la continuidad de la estructura y las condiciones de los apoyos.

Para realizar el análisis estructural se empleará el método de rigideces. Éste es un método que se puede modelar con base en elementos barra, como es el caso de vigas, armaduras en el plano, armaduras tridimensionales, marcos planos, retículas y

estructuras tridimensionales. Este es el método más adecuado para su programación, por lo que todos los paquetes formales para el análisis estructural en computadora lo utilizan.

A continuación, se describe el procedimiento del análisis de la estructura por el método de rigideces.

### 5.1 Método de Rigideces

En términos generales, el método de las rigideces consiste en establecer a través del equilibrio y la compatibilidad, la relación que hay entre las cargas y los desplazamientos que estas generan en la estructura. A partir de dicha relación es posible conocer los desplazamientos en los nudos de la estructura, y a partir de éstos, los elementos mecánicos en cada una de las barras que forman la estructura (Rojas y Padilla, 2009).

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait et al, 1970 citado por Demeneghi et al, 2003):

- Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos bajo estas condiciones.
- Se liberan los nudos de la estructura y se obtienen los elementos mecánicos producto de los desplazamientos lineales y angulares.
- Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde existan desplazamientos diferentes de cero.
- Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura.
- Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es:

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (5.1)$$

Donde:

$\underline{K}$  = Matriz de rigideces de la estructura.

$\underline{\delta}$  = Vector de desplazamientos.

$\underline{P}^e$  = Vector de cargas de empotramiento.

$\underline{P}^c$  = Vector de cargas concentradas.

La matriz de rigideces de la estructura se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que conforman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de empotramiento de todas y cada una de las barras de la estructura.

Obtengamos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de la barra  $m$  con apoyos continuos, sometida a una carga uniformemente repartida ( $w$ ), mostrada en la Figura 24.

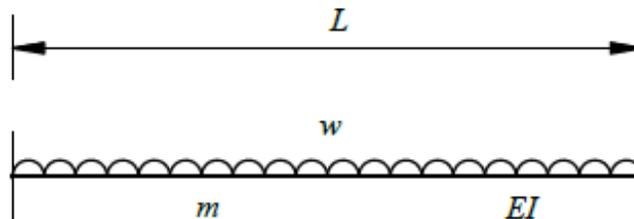


Figura 24. Barra  $m$  (Demeneghi et al, 2003).

### 5.1.1 Convención de Signos

Utilizaremos la siguiente convención de signos, para una barra horizontal (Figura 25): los giros en sentido anti-horario se consideran positivos, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda (Figura 25a). Los momentos flexionantes en sentido horario son positivos, las fuerzas cortantes verticales que van hacia arriba son

positivas y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (Figura 25b).

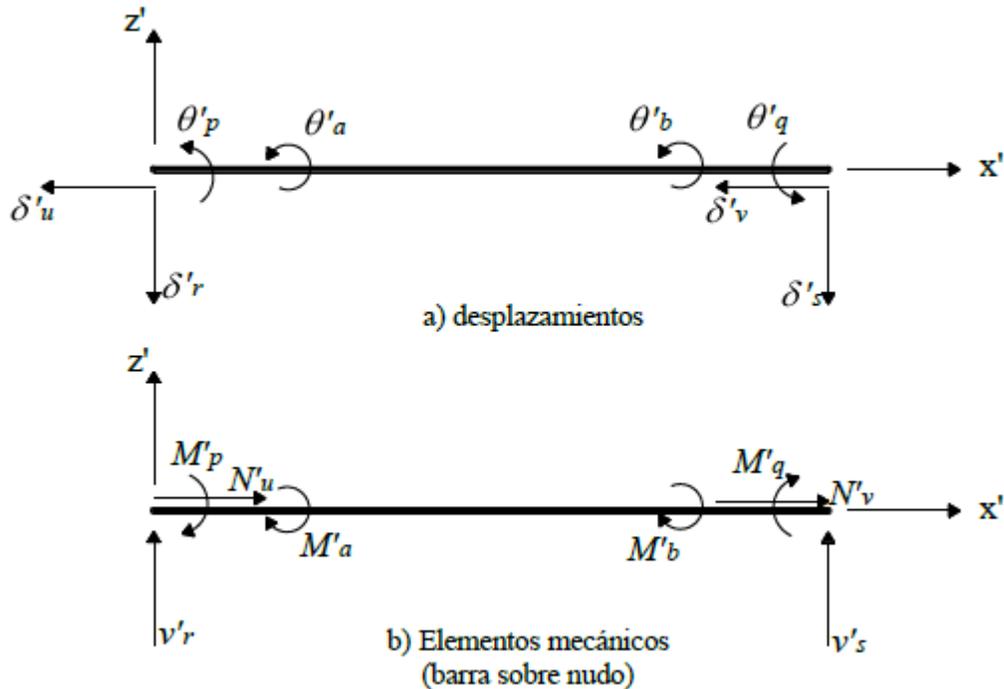


Figura 25. Convención de signos (Demeneghi et al, 2003).

## 5.1.2 Determinación de la Matriz de Rigideces

### 5.1.2.1 Marcos Planos Ortogonales con Barras Inclinadas

La rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud requerida para producir un desplazamiento unitario. Para ser más específicos, la palabra desplazamiento en el concepto anterior deberá especificarse en detalle mencionando su carácter (lineal o angular) y su localización. Como cada elemento tiene dos extremos, la palabra desplazamiento se interpreta como desplazamiento generalizado en los extremos de un elemento (Rojas y Padilla, 2009). Las rigideces se determinan a partir de la relación que existe entre los desplazamientos y las fuerzas generalizadas.

Apliquemos un giro unitario ( $\theta'_p$ ) en sentido positivo en el extremo izquierdo de la barra  $m$ . En la Figura 26 se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la Figura 27 se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro unitario positivo ( $\theta'_q$ ) en el extremo derecho de la barra  $m$ .

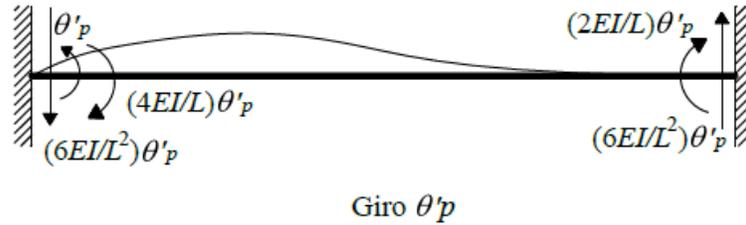


Figura 26. Giro positivo ( $\theta'_p$ ) en el extremo izquierdo de la barra  $m$  (Demeneghi et al, 2003).

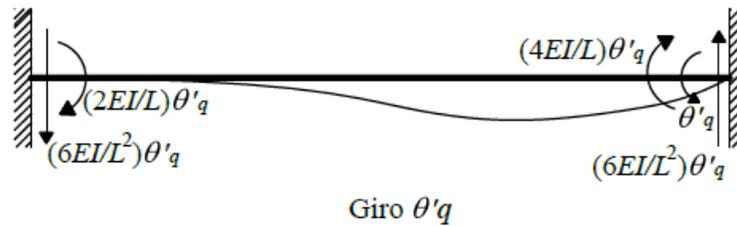


Figura 27. Giro positivo ( $\theta'_q$ ) en el extremo derecho de la barra  $m$  (Demeneghi et al, 2003).

En la Figura 28 se muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento vertical unitario positivo ( $\delta'_r$ ) en el extremo izquierdo de la barra  $m$ .

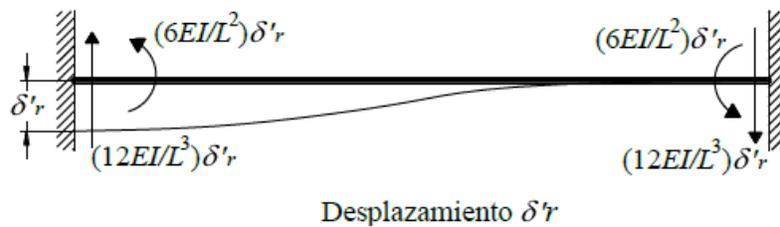


Figura 28. Desplazamiento vertical unitario positivo ( $\delta'_r$ ) en el nudo izquierdo de la barra  $m$  (Demeneghi et al, 2003).

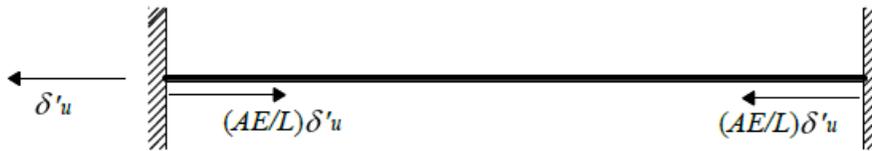
La Figura 29 presenta los elementos mecánicos ocasionados por un desplazamiento vertical unitario ( $\delta'_s$ ) en el extremo derecho de la barra  $m$ .



Desplazamiento  $\delta'_s$

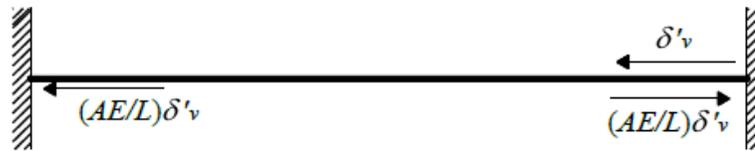
Figura 29. Desplazamiento vertical unitario positivo ( $\delta'_s$ ) en el nudo derecho de la barra m (Demeneghi et al, 2003).

La Figura 30 y Figura 31 muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento unitario horizontal ( $\delta'_u$ ) positivo en el nudo izquierdo y un desplazamiento unitario horizontal ( $\delta'_v$ ) positivo en el nudo derecho, respectivamente.



Desplazamiento  $\delta'_u$

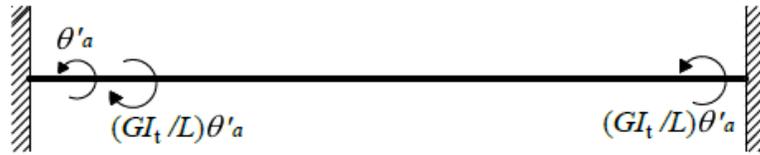
Figura 30. Desplazamiento horizontal positivo  $\delta'_u$  en el nudo izquierdo (Demeneghi et al, 2003).



Desplazamiento  $\delta'_v$

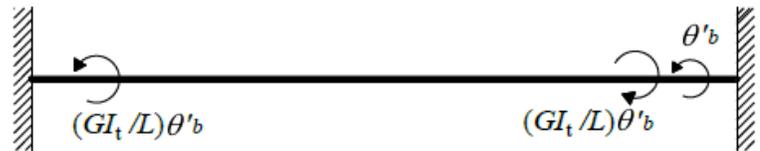
Figura 31. Desplazamiento horizontal positivo ( $\delta'_v$ ) en el nudo derecho (Demeneghi et al, 2003).

La Figura 32 y Figura 33 contienen los elementos mecánicos producidos por un giro unitario de torsión ( $\theta'_a$ ) en el nudo izquierdo y un giro unitario de torsión ( $\theta'_b$ ) en el nudo derecho, respectivamente.



Giro  $\theta'_a$

Figura 32. Giro de torsión unitario positivo ( $\theta'_a$ ) en el nudo izquierdo (Demeneghi et al, 2003).



Giro  $\theta'_b$

Figura 33. Giro de torsión unitario positivo ( $\theta'_b$ ) en el nudo derecho (Demeneghi et al, 2003).

De la Figura 26 a la Figura 33, se incluyen algunas variables en las fórmulas correspondientes a las propiedades de la barra, como son:

$E$  = Modulo de elasticidad de concreto.

$I$  = Momento de inercia de la sección de la barra  $m$ .

$A$  = Area de la sección de la barra.

$L$  = Longitud de la barra.

$G$  = Modulo de elasticidad al corte.

$I_t$  = Momento polar de inercia de la sección debido a torsión.

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait et al, 1970).

$$I_t \cong \left( \frac{hb^3}{3} \right) \left[ 1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left( \frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (5.2)$$

$$h \geq b$$

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$ , valen:

$$M'_p = \frac{wL^2}{12} + \left( \frac{4EI}{L} \right) \theta'_p + \left( \frac{2EI}{L} \right) \theta'_q - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \delta'_r + \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \delta'_s \quad (5.3)$$

$$M'_q = -\frac{wL^2}{12} + \left( \frac{2EI}{L} \right) \theta'_p + \left( \frac{4EI}{L} \right) \theta'_q - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \delta'_r + \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \delta'_s \quad (5.4)$$

$$V'_r = -\frac{wL}{2} - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \theta'_p - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \theta'_q + \left( \frac{12EI}{L^3} \right) \delta'_r - \left( \frac{12EI}{L^3} \right) \delta'_s \quad (5.5)$$

$$V'_s = -\frac{wL}{2} + \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \theta'_p + \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \theta'_q - \left( \frac{12EI}{L^3} \right) \delta'_r + \left( \frac{12EI}{L^3} \right) \delta'_s \quad (5.6)$$

$$N'_u = \left( \frac{AE}{L} \right) \delta'_u - \left( \frac{AE}{L} \right) \delta'_v \quad (5.7)$$

$$N'_v = -\left( \frac{AE}{L} \right) \delta'_u + \left( \frac{AE}{L} \right) \delta'_v \quad (5.8)$$

$$M'_a = \left( \frac{GI_t}{L} \right) \theta'_a - \left( \frac{GI_t}{L} \right) \theta'_b \quad (5.9)$$

$$M'_b = -\left( \frac{GI_t}{L} \right) \theta'_a + \left( \frac{GI_t}{L} \right) \theta'_b \quad (5.10)$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por:

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (5.11)$$

Donde:

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b & \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta'_p \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta'_q \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta'_r \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta'_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \delta'_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \delta'_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & -\frac{GI_t}{L} & \theta'_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & \frac{GI_t}{L} & \theta'_b \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\underline{\delta}'_m = \begin{Bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

$$(\underline{P}_m^e)' = \begin{Bmatrix} \frac{wL^2}{12} \\ \frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ \frac{wL}{2} \\ -\frac{wL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

$\underline{K}'_m$  = Matriz de rigidez de la barra  $m$ .

$\underline{\delta}'_m$  = Vector de desplazamientos de la barra  $m$ .

$(\underline{P}_m^e)'$  = Vector de cargas de empotramiento de la barra  $m$ .

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí (Figura 34); en cada marco pueden existir barras inclinadas.

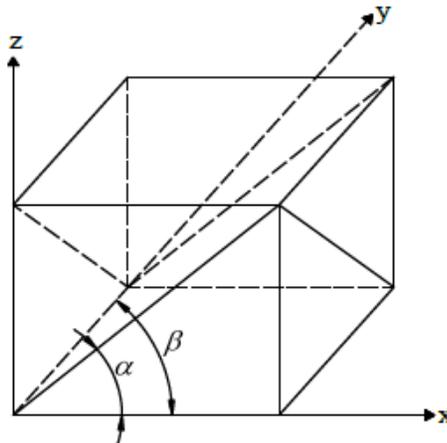
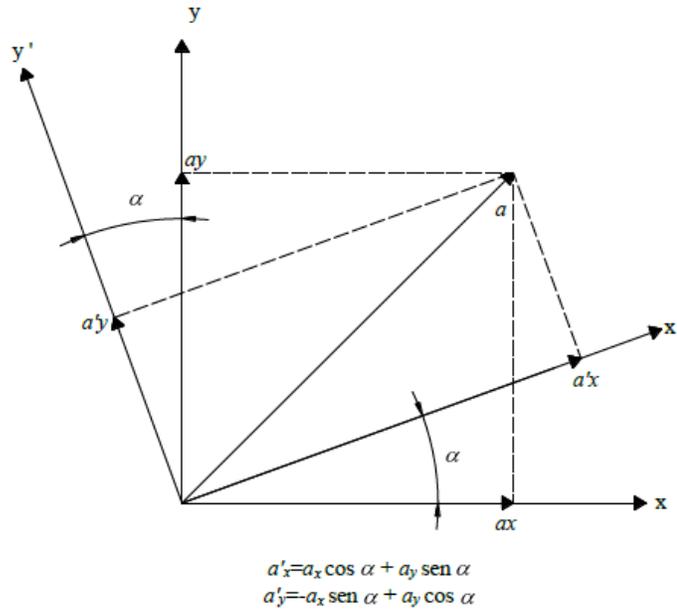


Figura 34. Marcos planos ortogonales entre si (Demeneghi et al, 2003).

En la Figura 35 se muestra la transformación de un vector del sistema global  $x - y$  al sistema local  $x' - y'$ .



**Figura 35. Transformación de un vector del sistema global  $x-y$  al sistema local  $x'-y'$  (Demeneghi et al, 2003).**

Aplicando las ecuaciones de la Figura 35 a la barra inclinada de la Figura 36 (despreciando el efecto de torsión con eje de giro vertical):

$$\theta'_p = \theta_p \quad \theta'_q = \theta_q$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha$$

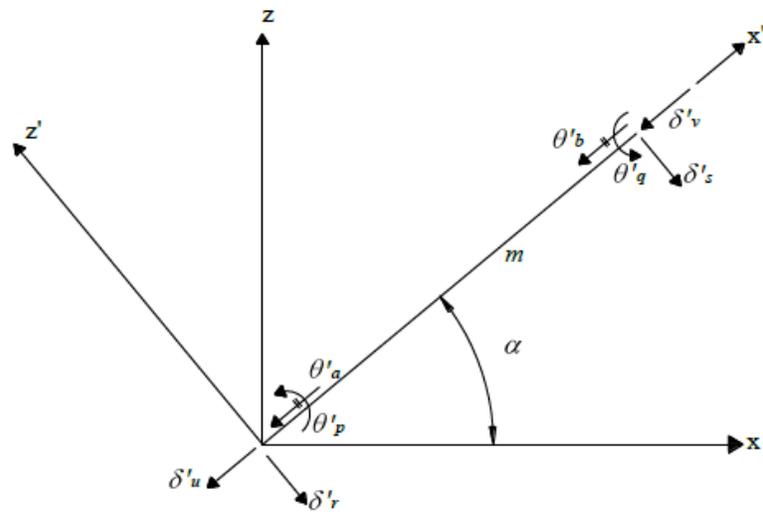
$$\delta'_s = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha$$

$$\delta'_u = \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha$$

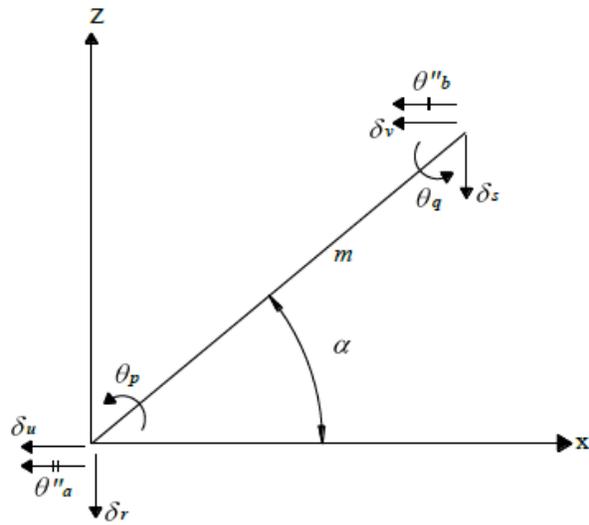
$$\delta'_v = \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha$$

$$\theta'_a = \theta''_a \cos \alpha$$

$$\theta'_b = \theta''_b \cos \alpha$$



a) Sistema local x' - z'



b) Sistema global x - z

Figura 36. Desplazamientos de la barra inclinada (Demeneghi et al, 2003).

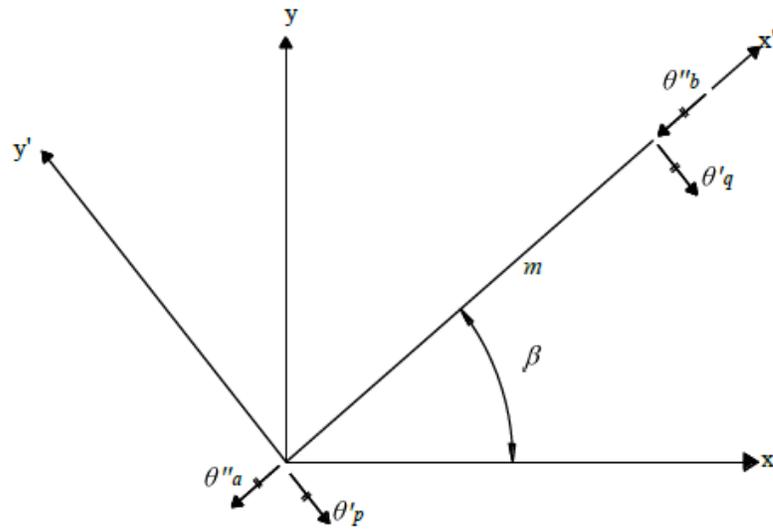
Aplicando las expresiones de la Figura 35 a la barra de la Figura 37:

$$\theta'_p = \theta_p \cos \beta - \theta_a \sin \beta$$

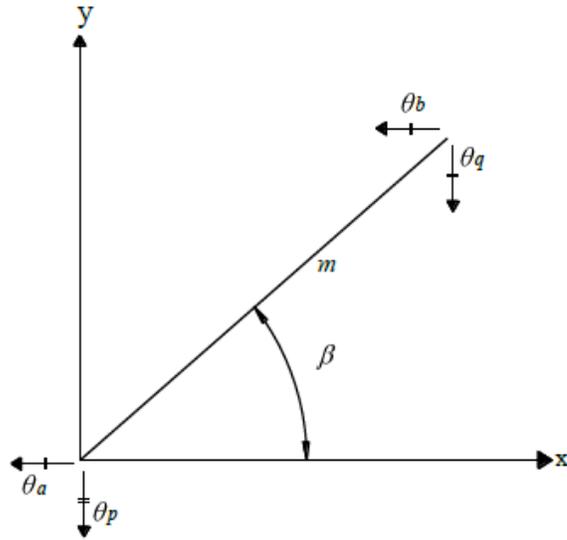
$$\theta'_q = \theta_q \cos \beta - \theta_b \sin \beta$$

$$\theta''_a = \theta_p \sin \beta + \theta_a \cos \beta$$

$$\theta''_b = \theta_q \sin \beta + \theta_b \cos \beta$$



a) Sistema local  $x' - y'$



b) Sistema global  $x - y$

Figura 37. Giros de la barra paralelos al plano  $x-y$  (Demeneghi et al, 2003).

Sean:

$$\underline{\delta}'_m = \begin{Bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\underline{\delta}_m = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Es decir:

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (5.17)$$

Donde  $\underline{T}_m$  es la matriz de la rotación del sistema al sistema local y está dada por:

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las siguientes expresiones:

$$\theta'_p = \theta_p \cos \beta - \theta_a \sin \beta \quad (5.19)$$

$$\theta'_q = \theta_q \cos \beta - \theta_b \sin \beta \quad (5.20)$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \quad (5.21)$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \quad (5.22)$$

$$\delta'_u = \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (5.23)$$

$$\delta'_v = \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (5.24)$$

$$\theta'_a = \theta_p \cos \alpha \sin \beta + \theta_a \cos \alpha \cos \beta \quad (5.25)$$

$$\theta'_b = \theta_q \cos \alpha \sin \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (5.26)$$

En el sistema local  $x'-z'$  (Figura 36),

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (5.27)$$

Pero,

$$(\underline{P}_m^e)' = \underline{T}_m \underline{P}_m^e \quad (5.28)$$

Y,

$$\underline{P}'_m = \underline{T}_m \underline{P}_m \quad (5.29)$$

Sustituyendo la ecuación (5.29) en la ecuación (5.27):

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (5.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.17) y (5.28) en la ecuación (5.30):

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{T}_m \underline{P}_m^e$$

Premultiplicando por  $\underline{T}_m^{-1}$ :

$$\underline{P}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}_m^e$$

Donde:

$$\underline{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

En el sistema global,

$$\underline{P}_m = \underline{K}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}_m^e \quad (5.32)$$

Donde:

$$\underline{K}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \quad (5.33)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.12), (5.18) y (5.31) en la ecuación (5.33), se obtiene la matriz  $\underline{K}_m$ , la cual se muestra en la Tabla 3.

Sean:	$D= 4EI/L$ $F= GI/L$	$M= 6EI/L^2$	$N= 12EI/L^3$	$Q=AE/L$				
	$SA = \text{sen } A$ $CA = \text{cos } A$	$S^2 A = \text{sen}^2 A$ $C^2 A = \text{cos}^2 A$	$SB = \text{sen } B$ $CB = \text{cos } B$	$S^2 B = \text{sen}^2 B$ $C^2 B = \text{cos}^2 B$				
$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\theta_a$	$\theta_b$	
$D C^2 B$ $+ F S^2 B$	$(D/2) C^2 B$ $- F S^2 B$	$-M CB CA$	$M CB CA$	$M CB CA$	$-M CB CA$	$-D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$\theta_p$
$(D/2) C^2 B$ $- F S^2 B$	$D C^2 B$ $+ F S^2 B$	$-M CB CA$	$M CB CA$	$M CB CA$	$-M CB CA$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$-D CB SB$ $+ F CB SB$	$\theta_q$
$-M CA CB$	$-M CA CB$	$N C^2 A$ $+ Q S^2 A$	$-N C^2 A$ $- Q S^2 A$	$-N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$M CA SB$	$M CA SB$	$\delta_r$
$-M CA CB$	$-M CA CB$	$-N C^2 A$ $- Q S^2 A$	$N C^2 A$ $+ Q S^2 A$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$-N CA SA$ $+ Q CA SA$	$-M CA SB$	$-M CA SB$	$\delta_s$
$M SA CB$	$M SA CB$	$-N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$N S^2 A$ $+ Q C^2 A$	$-N S^2 A$ $- Q C^2 A$	$-M SA SB$	$-M SA SB$	$\delta_u$
$-M SA CB$	$-M SA CB$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$-N CA SA$ $+ Q CA SA$	$-N S^2 A$ $- Q C^2 A$	$N S^2 A$ $+ Q C^2 A$	$M SA SB$	$M SA SB$	$\delta_v$
$-D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$M CA SB$	$-M CA SB$	$-M SA SB$	$M SA SB$	$D S^2 B$ $+ F C^2 B$	$(D/2) S^2 B$ $- F C^2 B$	$\theta_a$
$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$-D CB SB$ $+ F CB SB$	$M CA SB$	$-M CA SB$	$-M SA SB$	$M SA SB$	$(D/2) S^2 B$ $- F C^2 B$	$D S^2 B$ $+ F C^2 B$	$\theta_b$

Tabla 3. Matriz de rigidez de la barra inclinada (Demeneghi, et al, 2003).

Para el vector de cargas de empotramiento:

$$\underline{P}_m^e = \underline{T}^{-1}(\underline{P}_m^e)' \quad (5.34)$$

Para una barra sometida a una carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $\underline{P}_m^e$  vale:

$$\underline{P}_m^e = \begin{pmatrix} \left(\frac{wL^2}{12}\right) \cos \beta \\ -\left(\frac{wL^2}{12}\right) \cos \beta \\ -\left(\frac{wL}{2}\right) \cos \alpha \\ -\left(\frac{wL}{2}\right) \cos \alpha \\ \left(\frac{wL}{2}\right) \sin \alpha \\ \left(\frac{wL}{2}\right) \sin \alpha \\ -\left(\frac{wL^2}{12}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{wL^2}{12}\right) \sin \beta \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

La ecuación (5.33) proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x$ - $y$ - $z$ . Las ecuaciones (5.34) o (5.35) proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x$ - $y$ - $z$ .

En resumen, primero se utiliza la Tabla 3 y las ecuaciones (5.34) o (5.35) para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de cada una de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene de la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

Sustituyendo valores en la ecuación (5.1) se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; a continuación, resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los desplazamientos correspondientes al sistema global  $x$ - $y$ - $z$  (vector  $\underline{\delta}$ ).

Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma:

- Primero se determinan los desplazamientos en el sistema local, empleando la ecuación (5.17) o las ecuaciones (5.19) a (5.26):

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (5.17)$$

- A continuación, se determinan los elementos mecánicos en la barra  $m$  empleando la ecuación (5.11) o las ecuaciones (5.3) a (5.10):

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (5.11)$$

### 5.1.3 Vigas

En el ejemplo de aplicación que se realizará en este trabajo, se analizará una zapata corrida, la cual se tratará para el análisis estructural como una viga, por tal motivo es conveniente presentar las fórmulas y conceptos a emplear para el correcto manejo del método de rigideces.

Las vigas son estructuras que están sujetas a fuerza cortante y momento flexionante. En general no están sujetas a carga axial, por esta razón el desplazamiento horizontal no se considera. Con base en lo anterior, los desplazamientos posibles en una viga pueden ser: desplazamientos verticales y desplazamientos angulares (giros), los cuales dependerán de las condiciones de apoyo (Rojas y Padilla, 2009).

En el caso de vigas como la que se muestra en la figura 3.15, el sistema local coincide con el sistema global, puesto que el eje de la barra tiene la dirección del eje  $x'$ , es decir,  $\alpha = \beta = 0$ , por lo cual, la matriz de rotación es igual a la matriz identidad; como consecuencia las submatrices de rigidez en el sistema global y en el sistema local son iguales, es decir:

$$\underline{K}_m = \underline{K}'_m$$

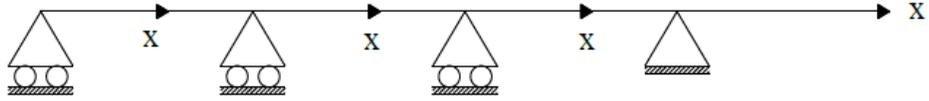


Figura 38. Sistema local y sistema global en vigas (Rojas y Padilla, 2009).

En una barra de cimentación (Figura 39), el vector de cargas de empotramiento para el sistema global vale:

$$\underline{P}_m^e = \begin{Bmatrix} \frac{wL^2}{12} - \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_r - \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_s \\ -\frac{wL^2}{12} + \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_r + \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_s \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_r + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_s \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_r + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

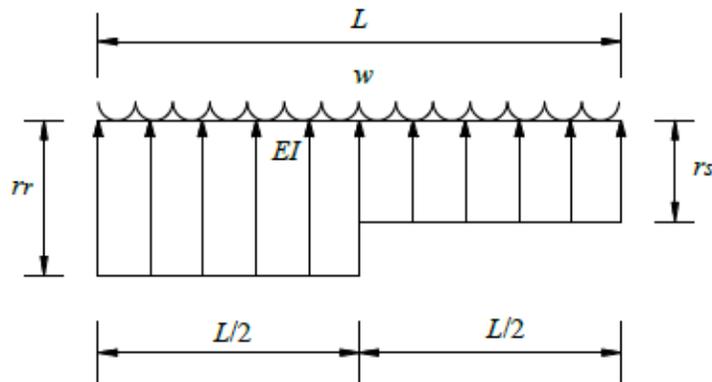


Figura 39. Geometría y cargas en una barra de cimentación (Demeneghi et al, 2003).

En resumen, el proceso a seguir para realizar el análisis estructural de la zapata corrida es:

- Se comienza utilizando la Tabla 3 para el cálculo de las matrices de rigidez de cada una de las barras.
- A continuación, aplicamos la ecuación (5.36) para el cálculo de los vectores de empotramiento de cada una de las barras de la estructura.
- Se suman todas las matrices para obtener la matriz de rigidez de toda la estructura, y de igual forma se suman los vectores de cargas de empotramiento para obtener el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa.
- Finalmente, se aplica la ecuación (5.1) para obtener la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura y así resolver el sistema de ecuaciones, para encontrar los desplazamientos de la estructura y posteriormente los elementos mecánicos.

Es importante mencionar que en este punto aún no se pueden encontrar los desplazamientos, esto debido a que la ecuación matricial de equilibrio resultante queda en función de las reacciones del suelo que aún son desconocidas, por ello, para la solución del problema se debe proseguir con el cálculo de las deformaciones del suelo y posteriormente con un análisis de interacción suelo-estructura.

## 5.2 Cálculo de Elementos Mecánicos

Con el método directo de interacción suelo-estructura (Demeneghi, 1996) que se explicará más adelante se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de cada barra. Para encontrar los elementos mecánicos a lo largo de cada barra se utilizan las siguientes expresiones (Demeneghi, 2011):

Para el tramo 1 ( $0 < x < L/2$ )

$$V = -V_r + (r_r - w)x \quad (5.37)$$

$$M = -M_p - V_r x + (r_r - w) \frac{x^2}{2} \quad (5.38)$$

$$x_{M \text{ máx}} = \frac{V_r}{r_r - w} \quad (5.39)$$

Para el tramo 2 ( $L/2 < x < L$ )

$$V = -V_r + (r_r - w) \frac{L}{2} + (r_s - w) \left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (5.40)$$

$$M = -M_p - V_r x + (r_r - w) \frac{L}{2} \left(x - \frac{L}{4}\right) + \frac{(r_s - w)}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \quad (5.41)$$

$$x_{M \text{ máx}} = \frac{L}{2} + \frac{V_r - (r_r - w) \frac{L}{2}}{r_r - w} \quad (5.42)$$

Los valores de  $V$  y  $M$ , en las ecuaciones (5.37) a (5.42) son los elementos mecánicos a lo largo de las barras de cimentación, para los que rige la convención de signos del diseño estructural que se aprecia en la Figura 40.

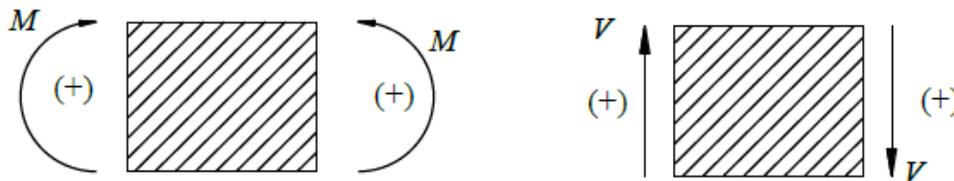


Figura 40. Convención de signos para fines de diseño estructural (Demeneghi, 2011).

## 6. INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

La masa de suelo, al recibir cargas (esfuerzos) que son transmitidas por la cimentación, tiende a deformarse en una o en varias de sus capas (estratos),

dependiendo de la compresión y las propiedades del mismo, las cuales pueden variar con el tiempo o con algunos factores como lo son: la variación del volumen de vacíos como consecuencia de la consolidación del suelo, el desplazamiento y la disminución de la distancia relativa entre las partículas y produciendo, de forma acumulada con los demás estratos, un asentamiento en la superficie de contacto entre la cimentación y la masa del suelo.

Los cimientos juegan un papel muy importante dentro de la edificación ya que, éstos son los que distribuyen las cargas de la estructura hacia el suelo y los materiales que lo constituyen deben tener la capacidad suficiente para soportarlas sin sufrir deformaciones excesivas.

A partir de esto, la interacción suelo-estructura es aquella parte de la ingeniería que estudia las deformaciones del terreno de cimentación cuando éstas se ven afectadas por la presencia y rigidez de la propia estructura. La influencia de la estructura puede ser en condiciones estáticas, lo cual es tratado por la interacción estática suelo-estructura, o puede ser en condiciones dinámicas, lo cual cae en el campo de la interacción dinámica suelo-estructura.

En la interfaz de la estructura de cimentación y el suelo se originan desplazamientos debido a las cargas que transmite la cimentación dando lugar a desplazamientos totales y diferenciales. Los desplazamientos diferenciales de la estructura deberán ser iguales a los originados en la superficie de apoyo de la cimentación. Así pues, la estructura de la cimentación junto con las cargas que obran sobre ella y las reacciones que se provocan en el suelo se sujetará a una determinada configuración, igual a la que el suelo adoptará debido a las reacciones que éste aporta a la estructura de cimentación para su equilibrio. La configuración de esfuerzos y deformaciones en la superficie de contacto dependerá de la rigidez de la estructura de la cimentación, de la rigidez del subsuelo y de la distribución de cargas que se apliquen sobre la estructura de la cimentación.

En términos generales, el procedimiento de cálculo para la interacción suelo-estructura consiste en tres pasos:

- a) Se calculan los desplazamientos de la subestructura.
- b) Se calculan los desplazamientos del terreno de cimentación.
- c) Se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

Se puede mencionar que si se realiza en forma correcta la interacción estática suelo-estructura, se podrá verificar que la cimentación de una estructura cumpla con dos funciones:

1. Proporcionar un apoyo adecuado a las descargas de la superestructura, distribuyendo estas de tal forma que se logre una seguridad específicamente por capacidad de carga del suelo.
2. Lograr que los asentamientos totales y diferenciales se encuentren por debajo de los especificados en proyectos estructurales y arquitectónicos, es decir, que sean compatibles con las normas de cimentación.

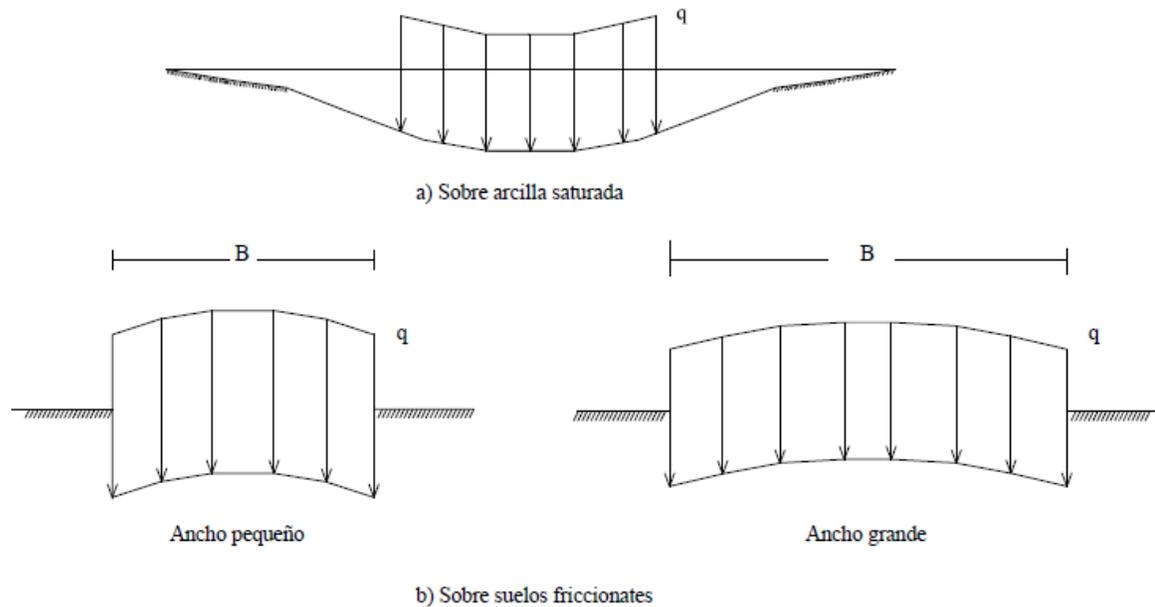
Antes de realizar un análisis de interacción suelo-estructura con un programa por computadora es importante tener clara la definición de interacción suelo-estructura y el procedimiento de cálculo que habrá de llevarse a cabo para su análisis.

## **6.1 Antecedentes Generales**

El problema fundamental en el diseño de cimentaciones, consiste en encontrar la correcta distribución de las presiones de contacto para que sea compatible la deformación de la superficie del suelo con la de la estructura de cimentación, es decir, la interacción estática suelo-estructura consistirá en encontrar un sistema de reacciones aplicadas simultáneamente a la estructura y al suelo que originen la misma configuración de asentamientos diferenciales.

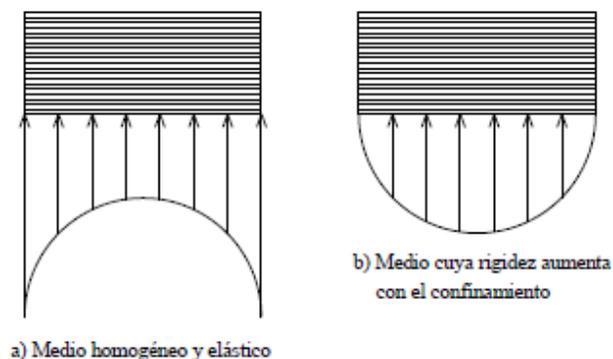
Supongamos en primer lugar el caso de un cimiento totalmente flexible con carga uniforme apoyado en un suelo saturado. Debido a la flexibilidad las presiones que el

área cargada transmite al suelo serán idénticas a la presión uniforme sobre el área. Por otra parte, el asentamiento no será uniforme, tendrá un máximo al centro del área cargada y será menor en la periferia, adoptando una forma similar a la que se muestra en la Figura 41a. En la práctica el asentamiento inmediato debido exclusivamente al cambio de forma de áreas flexibles con carga uniforme, apoyadas en arcillas saturadas, adopta un perfil similar al mostrado en la Figura 41a. En cambio, cuando el área flexible se apoya en suelos granulares (arenas o gravas), el perfil se asemeja al mostrado en la Figura 41b, ya que este tipo de materiales posee la propiedad de aumentar su rigidez con el confinamiento.



**Figura 41. Perfil del asentamiento bajo un área uniformemente cargada sobre la superficie de la masa de suelo (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).**

Sea ahora, una placa de una rigidez infinita apoyada en una arcilla saturada. El asentamiento es uniforme, pero el diagrama de reacción a largo plazo toma la forma indicada en la Figura 42a. Si la placa se apoya sobre un suelo friccionante, el diagrama de reacción toma la forma de la Figura 42b.



**Figura 42. Distribución de presiones bajo una placa infinitamente rígida (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).**

Se observa en los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno dependen de la clase de suelo y de la rigidez de la estructura. Un cimiento real puede quedar entre los dos casos extremos señalados, pues su rigidez no necesariamente es nula o infinita.

## 6.2 Métodos de Interacción Suelo-Estructura

La mayoría de los métodos de interacción estática suelo-estructura están basados en el principio de que, en el contacto cimiento-terreno los desplazamientos tanto de la subestructura como los del terreno son iguales, es decir, existe compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo. A continuación, se mencionarán brevemente algunos métodos como un pequeño antecedente al método que será descrito más adelante.

Samuel Chamecki (1956): trata el caso de una viga con tres apoyos, desplantada sobre arcillas compresibles; Chamecki resuelve el problema al utilizar lo que llamó coeficientes de transferencia de carga (equivalentes a la matriz de rigideces de la estructura), además de considerar una arcilla normalmente consolidada de la cual se conoce su índice de compresibilidad. Estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre viga y suelo, resuelve el problema en forma explícita (Deméneghi, 1991). Posteriormente trata el caso de marcos estructurales, y debido a que las relaciones esfuerzo-deformación unitarias en los suelos son no-lineales, propone un

procedimiento iterativo para la solución del problema, en el cual utiliza los coeficientes de transferencia en la estructura y calcula los hundimientos del suelo mediante procedimientos usuales. Los valores de los asentamientos resultantes de las aproximaciones sucesivas oscilan alrededor de un valor medio y tienden a él. Para evitar un gran número de iteraciones, se aplica una corrección después de la primera iteración, es decir, se calculan las cargas en la primera columna del marco con un promedio de los asentamientos obtenidos. En la mayoría de los casos prácticos no hay necesidad de correcciones adicionales para alcanzar la convergencia del procedimiento (Chamecki, 1956 citado por Deméneghi, 1991).

Flores Victoria (1968): Planteó otro método iterativo en el cual se aplica una distribución de presiones al suelo con la que se calculan los asentamientos. Con esos asentamientos se determina el estado de cargas que debe tener la estructura como reacción al suelo. Esa reacción se vuelve a aplicar al suelo sucesivamente hasta lograr la convergencia. Posteriormente (Flores Victoria y Esteva, 1970), presentaron un procedimiento simplificado en que se considera que el suelo es un medio elástico lineal-semi-infinito, que la cimentación es rectangular con una red ortogonal de trabes y que la rigidez de la superestructura puede desprejiciarse.

Damy (1977): Presentó un procedimiento incremental en el que se toma en cuenta el comportamiento no lineal del suelo aplicando incrementos del vector de carga suficientemente pequeños para que el sistema responda linealmente. Al aplicar el último incremento deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el suelo.

Leonardo Zeevaert (1973, 1980 y 1983): Considera el suelo como un medio estratificado, donde se asigna el valor correspondiente a las propiedades de esfuerzo-deformación-tiempo de todos y cada uno de los estratos. En este método de interacción suelo-estructura, consiste en formar una ecuación matricial de asentamientos (EMA) que relaciona los asentamientos del suelo en función de las cargas aplicadas en la superficie:

$$\underline{\delta} = \underline{D} \underline{q} \quad (6.1)$$

Donde:

$\underline{\delta}$  = Vector de asentamientos en el contacto cimiento suelo.

$\underline{D}$  = Matriz de asentamientos ocasionados por presiones unitarias.

$\underline{q}$  = Vector de cargas aplicadas en el contacto cimiento suelo.

La matriz  $D$  se forma a partir del concepto de valor de influencia, que es el esfuerzo ocasionado por una presión unitaria en la superficie. A continuación, se forma la ecuación matricial de interacción ( $EMI$ ), que es la que relaciona las deformaciones de la estructura con las cargas que le transmite al suelo.

$$\underline{S} \underline{x} = \underline{\Delta} \quad (6.2)$$

Donde:

$\underline{S}$  = Matriz de flexibilidades del suelo.

$\underline{x}$  = Vector de cargas del suelo sobre la estructura.

$\underline{\Delta}$  = Vector de deformaciones de la estructura

La interacción de la estructura de cimentación con el suelo depende del valor del módulo de cimentación por área tributaria  $K$ , definido como el cociente de la carga sobre el suelo (en unidades fuerza), entre la deformación que ésta produce.

La interacción correcta entre la estructura de cimentación y la masa de suelo se obtiene al reemplazar las reacciones  $x_i$  obtenidas por  $EMI$ , en la ecuación  $EMA$ ; de esta forma se obtienen los desplazamientos verticales  $\delta_i$  que proporcionan valores del módulo de cimentación iguales a los usados en la ecuación  $EMI$ ,  $K_i = x_i/d_i$ . Si los valores

resultantes no concuerdan con los utilizados inicialmente, la interacción es incorrecta, ya que los módulos de cimentación no fueron debidamente elegidos, por lo cual es necesario utilizar la ecuación *EMA* para resolver este problema.

Es posible hallar una matriz única de interacción para resolver el problema sin realizar iteraciones y obtener resultados más precisos. La nueva ecuación matricial se denomina “Ecuación Matricial de Interacción Suelo-Estructura”, (*EMISE*). Mediante el empleo de la cual no se necesitan iteraciones para resolver el problema de interacción.

*Método del Elemento Finito*: Este es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas con valores en la frontera, así como problemas con materiales no homogéneos y complejos que se presenten en ingeniería. Este método se basa en la matriz de rigideces. Esquemáticamente, la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los pasos siguientes:

- El medio continuo se divide en varias regiones, denominados elementos finitos (discretización), de formas convenientes (líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, etc.).
- Se realiza una selección apropiada de ciertos puntos (elementos finitos) denominados puntos nodales, en donde se especifican las variables de la ecuación diferencial que se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpolación seleccionadas adecuadamente y de los valores de las variables y en algunos casos de sus derivadas.
- Con el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados, las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones del elemento finito en forma aislada.
- Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones algebraicas.

$$[F] = [K][\delta] \quad (6.3)$$

Donde:

$[F]$  = Fuerzas actuantes en el sistema.

$[K]$  = Matriz de rigideces.

$[\delta]$  = Vector de desplazamientos.

- Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales (Desplazamientos) quedan definidos al resolver el sistema de ecuaciones simultaneas correspondiente.

Agustín Demeneghi (1979, 1983, 1985, 1996, 2003): Propuso otro método de interacción estática suelo-estructura en el que las reacciones del terreno son consideradas como un sistema de cargas sobre la estructura, de igual magnitud y de sentido contrario a las cargas que la cimentación transmite al suelo. Durante el proceso de análisis, estas cargas son manejadas como incógnitas. El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces, pero como no se conocen las reacciones del suelo, las ecuaciones faltantes las proporcionan el análisis de asentamientos del terreno de cimentación, en el que se obtienen las deformaciones del suelo en función de las cargas sobre el mismo. En esta etapa se utiliza el concepto de valores de influencia de Zeevaert (1980). Al sustituir las deformaciones del suelo en las ecuaciones obtenidas a través del método de rigideces, el problema se resuelve en forma directa, sin necesidad de iteraciones. Otras de las ventajas que ofrece este método son que realiza un análisis tridimensional con relativa sencillez, que permite tomar en cuenta la rigidez de toda la superestructura y que se puede programar en una computadora con facilidad.

En el desarrollo de este trabajo se utilizará un método directo para la solución del problema de interacción suelo-estructura, debido al Maestro Agustín Deméneghi Colina (1996), el cual será descrito de forma detallada en las páginas siguientes.

La interacción suelo-estructura distingue dos casos (Deméneghi et al, 2003):

1. Cuando los cimientos están suficientemente separados, de tal forma que la carga sobre un apoyo no ejerce influencia sobre los desplazamientos de los apoyos vecinos (este fenómeno se presenta usualmente en zapatas aisladas).
2. Cuando se trata de un cimiento continuo donde el desplazamiento de un punto de dicho cimiento está afectado por la carga repartida en toda la subestructura (es el caso de zapatas corridas o losas de cimentación).

### 6.3 Módulo de Rigidez del Suelo

Al aplicar una carga o esfuerzo sobre un material este sufre una deformación proporcional a dicho esfuerzo, esta constante de proporcionalidad se denomina como “constante de resorte”.

En mecánica de suelos esta “constante del resorte” se conoce como módulo de reacción o módulo de rigidez del suelo, y se representa con la letra  $K$  seguida de un sufijo dependiendo del sentido de esta como veremos a continuación.

El módulo de reacción o de rigidez lineal vertical de un cimiento se define de la siguiente forma (Demeneghi et al, 2003):

$$K_v = \frac{Q_v}{\delta_v} \quad (6.4)$$

Donde  $Q_v$  es la fuerza vertical aplicada al cimiento y  $\delta_v$  es el asentamiento vertical ocasionado por  $Q_v$ .

El módulo de rigidez lineal horizontal de un cimiento se expresa mediante la siguiente expresión:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} \quad (6.5)$$

Donde  $Q_h$  es la fuerza horizontal aplicada al cimiento y  $\delta_h$  es el desplazamiento horizontal producido por  $Q_h$ .

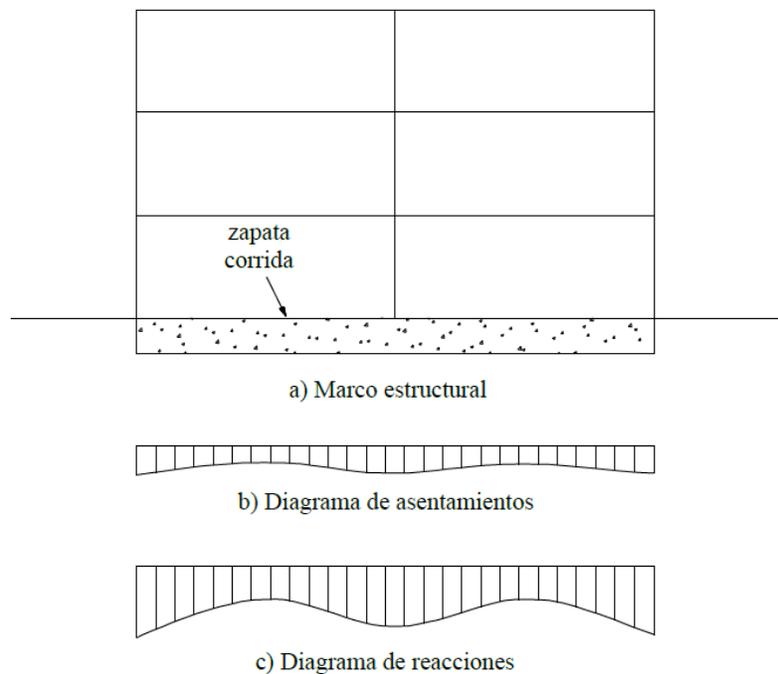
Se define la rigidez a la rotación de un cimiento:

$$K_r = \frac{M}{\theta} \quad (6.6)$$

Donde  $M$  es el momento aplicado al cimiento y  $\theta$  el ángulo en radianes producto de dicho momento.

#### 6.4 Interacción Estática Suelo-Zapata Corrida

Ilustremos el proceso de interacción suelo-estructura con un marco estructural que consta de una cimentación a base de una zapata corrida (Figura 43a); en el cual se tratan de obtener los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno de cimentación (Figura 43b y Figura 43c).



**Figura 43. Marco estructural con cimentación a base de zapata corrida.**

En el caso más general la forma del diagrama de reacciones del suelo es diferente de una reacción uniforme (Figura 43c). Para simplificar el problema sustituimos la curva de reacción del terreno por una serie de reacciones uniformes  $r_1, r_2, \dots, r_n$  como se aprecia en la a. El análisis estructural lo llevamos a cabo utilizando el método de rigideces descrito en el capítulo 5, considerando las reacciones  $r_i$  como incógnitas. A continuación, aplicando la tercera ley de Newton, adaptamos las reacciones  $r_i$  como cargas sobre el terreno (Figura 44b) y se obtienen los hundimientos de éste en función de las  $r_i$ , utilizando para ello el método de Chamecki (1956). El problema de interacción queda resuelto al establecer la compatibilidad de deformaciones entre suelo y estructura, es decir, al estar el suelo en contacto con la estructura de cimentación, las deformaciones de ambos medios deben ser iguales.

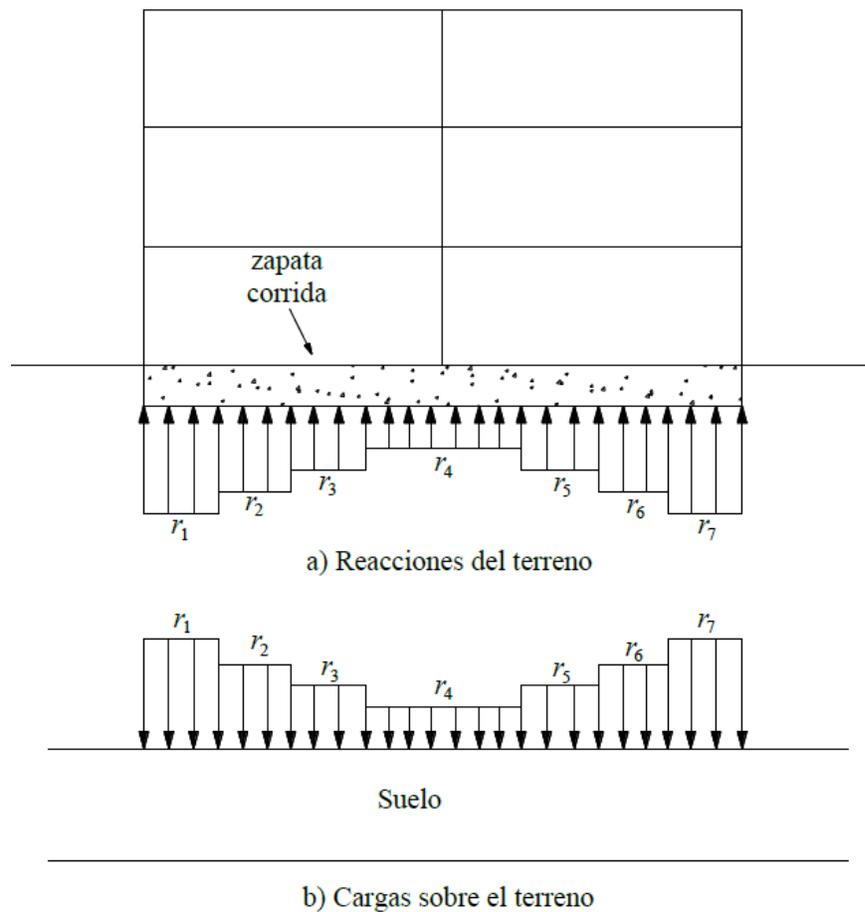


Figura 44. Reacciones sobre la estructura y cargas sobre el terreno.

En los siguientes incisos veremos cómo se realiza la interacción suelo-estructura para una estructura de cimentación real, es decir, de rigidez finita. Es importante mencionar también algunos aspectos importantes de dicha interacción, tanto a corto como a largo plazo.

#### **6.4.1 Análisis Estructural**

El análisis estructural lo realizamos empleando el método de rigideces. La matriz de rigidez, el vector de cargas de empotramiento y el vector de cargas concentradas se obtienen como se vio en el capítulo 5 de este trabajo.

##### *Corto Plazo*

Para el análisis a corto plazo se utilizará un módulo de elasticidad del concreto ( $E$ ) obtenido con la siguiente expresión:

$$E = 14000 \sqrt{f'c} \quad (6.7)$$

Donde  $f'c$  es el factor de resistencia a compresión del concreto a los 28 días y está dado en  $kg/cm^3$ .

##### *Largo Plazo*

Para el análisis a largo plazo se debe tomar en cuenta el efecto del tiempo en la estructura. Algunos autores recomiendan afectar el módulo de elasticidad  $E$ , por un coeficiente de entre 0.5 y 1 (Demeneghi et al, 2003). Para nuestro ejemplo el módulo de elasticidad del concreto será:  $E' = 0.7E$ . Esto quiere decir que la estructura a lo largo de 50 años, habrá perdido el 30% de su rigidez, por tanto, la influencia de la estructura en el suelo será menor.

### 6.4.2 Cálculo de Deformaciones del Suelo

Para el cálculo de las deformaciones en el suelo se asume que las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton (Demeneghi, 1996).

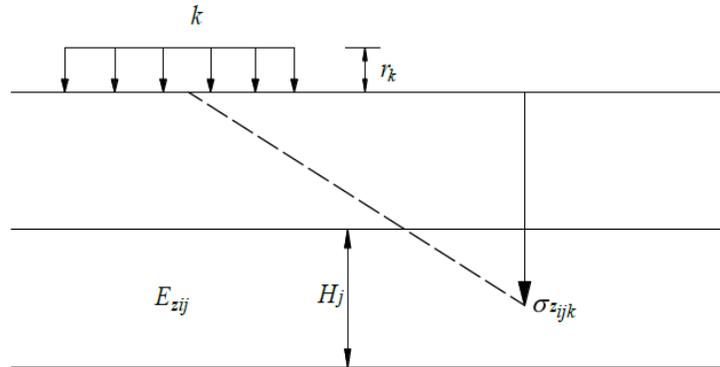


Figura 45. Cálculo de los hundimientos del terreno (Demeneghi, 1996).

Por lo que debemos calcular los asentamientos del terreno en función de estas cargas: consideremos una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (Figura 45); la presión vertical vale  $r_k d_k / a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. El esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , debido a la carga  $r_k$ , está dado por:

$$\sigma_{zijk} = I_{zijk} \frac{r_k d_k}{a_k}$$

Donde  $I_{zijk}$  es el esfuerzo normal vertical producido por una presión unitaria en el área  $k$  (Zeevaert, 1973). El esfuerzo normal vertical debido a todas las cargas  $r_k$  vale:

$$\sigma_{zij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{zijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (6.8)$$

En forma análoga:

$$\sigma_{xij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{xijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (6.9)$$

$$\sigma_{yij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{yijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (6.10)$$

Por otra parte, la deformación bajo el punto  $i$  de un estrato de suelo de espesor  $H_j$ , esta dado por:

$$\delta_{ij} = \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) [\sigma_{zij} - \nu(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] \quad (6.11)$$

Donde  $E_{ij}$  es el módulo de deformación del suelo y  $\nu$  su relación de Poisson.

Sustituyendo las ecuaciones (6.8) a (6.10) en la ecuación (6.11).

$$\delta_{ij} = \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} [I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk})] \frac{r_k d_k}{a_k}$$

Sea:

$$I_{ijk} = I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk}) \quad (6.12)$$

$$\delta_{ij} = \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} \frac{r_k d_k}{a_k}$$

Tomando en cuenta todos los estratos de subsuelo y una posible deformación previa  $\delta_{oi}$ , la deformación del punto  $i$  es:

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{ne} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (6.13)$$

Donde  $ne$  = número total de estratos.

$E_{ij}$  es el módulo lineal de deformación del suelo, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que se presenta, en el punto  $ij$ . Sustituyendo:

$$E_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \quad (6.14)$$

Siendo  $\sigma_{ij}$  el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$  (a la mitad del estrato  $j$ ), y  $\varepsilon_{ij}$  la deformación lineal unitaria vertical del estrato  $j$ .  $\varepsilon_{ij}$  se puede calcular usando una teoría no lineal o una teoría lineal.

Los valores de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , se obtienen con las fórmulas de Damy, Dashko y Kagan, mencionados anteriormente (capítulo 4), que son:

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (4.5)$$

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{yB}{yz} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (4.7)$$

Siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  las coordenadas del punto en el cual se calculan los esfuerzos y  $q$  es una carga unitaria aplicada en el área analizada.

La teoría descrita anteriormente para el cálculo de deformaciones del suelo, es una variante de la Ley de Hooke. El análisis de deformaciones del suelo se realizará a corto y largo plazo, por lo cual es importante mencionar algunos detalles que distinguen el análisis en cada uno de los casos.

#### *Corto Plazo*

Para el cálculo de deformaciones a corto plazo se empleará un módulo de elasticidad  $E = E_u$  obtenido de pruebas triaxiales no consolidadas no drenadas ( $UU$ ), y dado que la deformación ocurre a volumen constante se tomará  $\nu = 0.5$  correspondiente a un medio incompresible.

#### *Largo Plazo*

$\Delta\delta_u$  se obtiene con  $\nu = 0.5$ , mientras que  $\Delta\delta_T$  se obtiene con  $\nu = 0$ , por lo que en forma aproximada se pueden calcular los esfuerzos con una magnitud de  $\nu$  como el promedio ponderado entre ellos, es decir:

$$\nu = \frac{(0.5)\Delta\delta_u + (0)\Delta\delta_T}{\Delta\delta_T} = \frac{0.5\Delta\delta_u}{\Delta\delta_T} \quad (6.15)$$

Donde:

$\Delta\delta_u$  = Asentamiento inmediato o asentamiento distorsional

$\Delta\delta_T$  = Asentamiento total

Para fines de análisis de interacción tomamos la carga total de la estructura, entonces debemos usar módulos de deformación del suelo correspondientes a la deformación total de cada estrato, así:

$$E_s = \frac{\Delta z_0}{\Delta\delta_T} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6.16)$$

$E_s$  debe calcularse para cada estrato que conforma el suelo.

### **6.4.3 Compatibilidad de deformaciones**

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructuras y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despegaba de la estructura (Demeneghi, 1996).

La compatibilidad se da al realizar el ensamble de las matrices de la estructura (matriz de rigidez, vector de cargas de empotramiento, vector de cargas concentradas) y la matriz de flexibilidades del suelo. De este ensamble de matrices se obtiene el sistema de ecuaciones que, al ser resuelto proporciona las magnitudes de los desplazamientos y las reacciones del suelo en cada nudo, con lo que el problema queda resuelto.

## **7. EJEMPLO DE APLICACIÓN**

En las siguientes páginas se presenta el diseño geotécnico de una zapata corrida desplazada sobre arcillas no sensitivas totalmente saturadas. En la Figura 46 se muestran las dimensiones de la zapata, así como las propiedades de la misma y de los estratos de suelo subyacente.

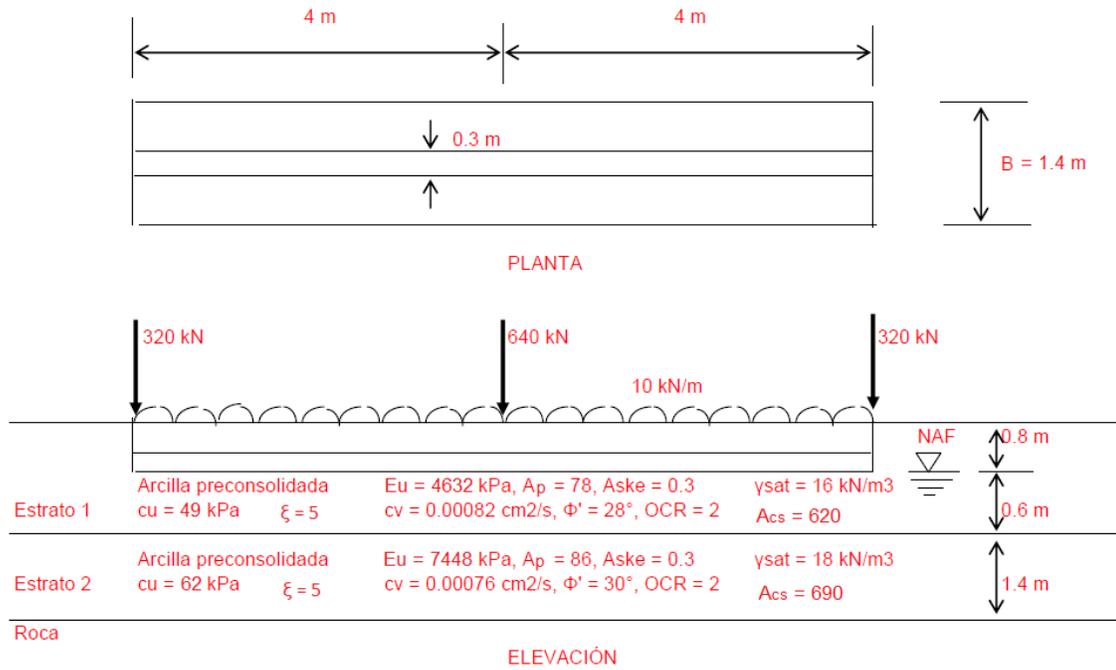
En este capítulo se lleva a cabo la revisión por capacidad de carga, cálculo de asentamientos y por último se realiza un análisis de interacción estática suelo-estructura, con lo que es posible determinar los desplazamientos y elementos mecánicos en la cimentación que permitan su diseño estructural, considerando una vida útil de 50 años.

Las deformaciones deben cumplir los estratos límites de servicio estipulados en las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Cimentaciones para el Distrito Federal. La cimentación debe cumplir por capacidad de carga y los asentamientos no deben de ser mayores a 15 cm.

En la estructura:

Concreto:  $f'_c = 25 \text{ MPa}$

Acero:  $f_y = 420 \text{ MPa}$



**Figura 46. Dimensiones de la zapata y propiedades de la estratigrafía. Arcilla no sensitiva.**

En la Tabla 4 se muestran en resumen los datos del problema.

Datos del Suelo	
Estrato 1	Estrato 2
$h_1 = 0.6 \text{ m}$	$h_2 = 1.4 \text{ m}$
$\gamma_1 = 16 \text{ kN/m}^3$	$\gamma_2 = 18 \text{ kN/m}^3$
$c_{u1} = 49 \text{ kPa}$	$c_{u2} = 62 \text{ kPa}$
$A'_{s,p1} = 78$	$A'_{s,p2} = 86$
$A_{cs1} = 620$	$A_{cs2} = 690$
$A_{ske1} = 0.3$	$A_{ske2} = 0.3$
$C_{v1} = 0.00082 \text{ cm}^2/\text{s}$	$C_{v2} = 0.00076 \text{ cm}^2/\text{s}$
$F_{c1} = 1.1$	$F_{c2} = 1.1$
$\xi = 5$	
Prof. de empotramiento = 0.8 m	
Dimensiones de la Zapata	
Losa de la Zapata	Dado de la Zapata
$B = 1.4 \text{ m}$	$b = 0.3 \text{ m}$
$h_L = 0.25 \text{ m}$	$h_d = 0.55 \text{ m}$
$L = 8 \text{ m}$	$l = 8 \text{ m}$
$\gamma_1 = 24 \text{ kN/m}^3$	$\gamma_1 = 24 \text{ kN/m}^3$
$F_c = 1.4$	$F_c = 1.4$
Cargas	
$P_{1,2} = 320 \text{ kN}$	
$P_3 = 640 \text{ kN}$	
$w_1 = 10 \text{ kN/m}$	

**Tabla 4. Datos del problema.**

## 7.1 Estados Límite de Falla (Revisión por Capacidad de Carga)

Se debe verificar que:

$$q_{ult} \leq q_R \quad (7.1)$$

La capacidad de carga ultima, que es la carga a la que el suelo está impuesto, está dada por:

$$q_{ult} = \frac{\sum Q F_c}{A} \quad (7.2)$$

$$\sum Q = 320(2) + 640 + 10(8) + 0.25(1.4)(8)(24) + 0.55(0.3)(8)(24) \\ + (1.4 - 0.3)(0.55)(8)(16)$$

$$\sum Q = \overbrace{640 + 640 + 80}^{\text{Cargas}} + \overbrace{67.2 + 31.68}^{\text{Estructura}} + \overbrace{77.44}^{\text{Relleno Suelo}} = 1536.32 \text{ kN}$$

$$q = \frac{\sum Q}{A} = \frac{1536.32}{1.4 \times 8} = 137.17 \text{ kPa}$$

El total de las cargas se modifica con un factor  $F_c$ , el cual para cargas muertas tiene un valor de  $F_c = 1.4$  y para suelos un valor de  $F_c = 1.1$ .

$$\sum Q F_c = 1458.88(1.4) + 77.44(1.1) = 2127.62$$

$$q_{ult} = \frac{2127.62}{1.4 \times 8} = 189.97 \text{ kPa}$$

En suelos cohesivos como el de la Ciudad de México, la capacidad de carga resistente se determina con la siguiente ecuación:

$$q_R = 5.14c_u f_c F_R + p_v \quad (7.3)$$

Donde:

$c_u$  = Cohesión aparente determinada en ensaye triaxial no-consolidado no-drenado.

$f_c$  = Factor de forma que depende de la geometría de la zapata.

$F_R$  = Factor de resistencia (NTC:  $0.35 \leq F_R \leq 0.65$ ).

$p_v$  = Presión vertical efectiva a la misma profundidad.

El suelo de cimentación está conformado por dos estratos, cuyas propiedades varían de estrato a estrato como se puede apreciar en la Figura 46; por tal razón es necesario determinar un promedio ponderado de la resistencia al corte no drenado ( $c_{um}$ ). Considerando que el área de influencia de la zapata es de  $0.7B$ , además de obtener un  $f_c$  que depende de la geometría de la zapata, por tanto:

$$0.7B = 0.7(1.4) = 0.98$$

$$c_{um} = \frac{0.6(49) + (0.98 - 0.6)(62)}{0.98} = 54.04 \text{ kPa}$$

El factor de forma  $f_c$ , tomando en cuenta la profundidad de empotramiento, se calcula de la siguiente manera:

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{B}{L} + 0.25 \frac{D}{B} \quad (7.4)$$

para  $\frac{D}{B} < 2$  y  $\frac{B}{L} < 1$ . En caso de que  $\frac{D}{B}$  y  $\frac{B}{L}$  no cumplan con las desigualdades anteriores, dichas relaciones se tomarán iguales a 2 y 1, respectivamente.

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{1.4}{8} + 0.25 \frac{0.8}{1.4} = 1.187$$

Sustituyendo valores en la ecuación (7.3). Para este caso el factor de reducción es  $F_R = 0.55$  (Para condiciones normales se recomienda  $0.45 \leq F_R \leq 0.55$ ).

$$q_R = 5.14(54.04)(1.189)(0.55) + (0.8 \times 16) = 194.08 \text{ kPa}$$

Por tanto, de acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones, sí pasa por capacidad de carga y cumple la desigualdad de la ecuación (7.1):

$$189.97 \text{ kPa} < 194.08 \text{ kPa}$$

## 7.2 Estados Límite de Servicio

### 7.2.1 Asentamientos Inmediatos

El cálculo de deformación a corto plazo (a volumen constante,  $\nu = 0.5$ ) de un estrato de arcilla no sensitiva lo llevamos a cabo usando la Ley de Hooke, mencionada anteriormente:

$$\Delta\delta_u = \frac{\Delta z_0}{E_u} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4.11)$$

#### ***Estrato 1***

Los incrementos de esfuerzo normales, a la mitad del estrato 1, al centro de la zapata; se calculan con las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7). En la Tabla 5 se muestran las dimensiones del rectángulo cargado y datos del estrato para el cálculo de dichos esfuerzos.

DATOS	
x = 4.0 m	q = 137.17 kPa
y = 0.7 m	$\nu = 0.5$
z = 0.3 m	B = 4.07 m

**Tabla 5. Datos para el cálculo de los incrementos de esfuerzos del estrato 1.**

Se sustituyen los valores en las ecuaciones mencionadas y se obtienen los incrementos de esfuerzos a la mitad del estrato 1:

$$\sigma_z = 133.427 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 100.128 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 70.187 \text{ kPa}$$

El  $E_u = 4632 \text{ kPa}$  del estrato 1, se obtiene de una prueba triaxial no-consolidada no-drenada ( $UU$ ). Entonces, sustituyendo valores en la ecuación (4.11), la deformación del primer estrato es:

$$\delta_u = \frac{0.6}{4632} [133.427 - 0.5(100.128 + 70.187)]$$

$$\delta_u = 0.0063 \text{ m} = 0.63 \text{ cm}$$

### **Estrato 2**

Se procede de manera similar para la obtención del asentamiento inmediato del estrato 2. En la Tabla 6 se muestran los datos para la obtención de los incrementos de esfuerzos.

DATOS	
x = 4.0 m	q = 137.17 kPa
y = 0.7 m	v = 0.5
z = 1.3 m	B = 4.26 m

**Tabla 6. Datos para el cálculo de los incrementos de esfuerzos en el estrato 2.**

Los incrementos de esfuerzos en el estrato 2 son:

$$\sigma_z = 79.258 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 36.633 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 6.650 \text{ kPa}$$

Entonces, sustituyendo valores en la ecuación (4.11), la deformación del segundo estrato, con  $E_u = 7448 \text{ kPa}$ , es:

$$\delta_u = \frac{0.6}{7448} [79.258 - 0.5(36.633 + 6.650)]$$

$$\delta_u = 0.0108 \text{ m} = 1.08 \text{ cm}$$

El asentamiento inmediato total en el centro de la zapata, es:

$$\delta_{uT} = 0.0063 + 0.0108 = 0.0171 \text{ m} = 1.71 \text{ cm}$$

## 7.2.2 Asentamientos a Largo Plazo

El asentamiento a largo plazo lo obtenemos con las siguientes expresiones (Juárez Badillo y Rico, 2001; Zeevaert, 1986; Skempton y Bjerrum, 1957; Demeneghi, 2012), mencionadas en los capítulos anteriores.

$$\Delta\delta_t = (\Delta\delta)_{pt} + (\Delta\delta)_{st} \quad (4.15)$$

$$\Delta\delta_{pt} = (\Delta\delta)_{pcpo} U \quad (4.43)$$

$$\Delta\delta_{pcpo} = \mu(\Delta\delta_{pccon}) \quad (4.42)$$

$$\Delta\delta_{pccon} = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{-\frac{1}{A_p}} \right] (\Delta Z_o). \quad (4.53)$$

( $\sigma_z$  = incremento de esfuerzo vertical a largo plazo)

$$\mu = \frac{A_{ske}\sigma_z + \frac{(1 - A_{ske})(\sigma_x + \sigma_y)}{2}}{\sigma_z} \quad (4.41)$$

( $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son incrementos de esfuerzo por la carga de la estructura, obtenidos con una relación de Poisson  $\nu = 0.5$ )

(4.69) ¡Error!

$$\Delta\delta_{st} = C_t \log(1 + \xi T)$$

**No se encuentra el origen de**

la  
referencia.

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{p_{veo} + \sigma_z}{p_{veo}} \right)^{-\frac{1}{A_{cs}}} \right] (\Delta z_o) \quad (4.71)(4.71)$$

$$T = \frac{C_v t}{(\Delta z_e)^2} \quad (4.68)$$

De las expresiones anteriores:

$\Delta \delta_t$  = asentamiento para un tiempo  $t$ .

$\Delta \delta_{Pt}$  = asentamiento para un tiempo  $t$ , debido a consolidación primaria.

$\Delta \delta_{St}$  = asentamiento para un tiempo  $t$ , debido a consolidación secundaria.

$\Delta \delta_{P_{con}}$  = deformación debida a compresión primaria, obtenida en el laboratorio, en una prueba de consolidación unidimensional.

$\Delta \delta_{P_{cpo}}$  = asentamiento en el campo, al término de la consolidación primaria.

$C_t$  = deformación por consolidación secundaria, en ciclo logarítmico (base 10).

$A_{p,cs}$  = módulos de rigidez para consolidación primaria y secundaria.

$\xi$  = parámetro de compresión secundaria, que depende del tipo de curva de consolidación.

$\mu$  = coeficiente de corrección de Skempton y Bjerrum.

$C_v$  = coeficiente de consolidación primaria.

$\Delta z_0$  = espesor total del estrato de suelo.

$\Delta z_e$  = espesor efectivo del estrato de suelo.

$\sigma_z$  = incremento de esfuerzo vertical.

$T$  = factor tiempo.

### **Estrato 1**

Utilizando la ecuación constitutiva, ecuación (4.49), se obtiene  $\Delta\delta_{pcon}$ . Previamente se determina el esfuerzo efectivo a la mitad del estrato 1:

$$p_{veo} = 16(0.8) + (16 - 9.81)(0.3) = 14.657 \text{ kPa}$$

Entonces, con  $A_p = 78$ , en el estrato 1, tenemos:

$$\Delta\delta_{pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{14.657 + 133.427}{14.657} \right)^{-\frac{1}{78}} \right] (0.6) = 0.01753 \text{ m}$$

Calculamos el factor de corrección de Skempton y Bjerrum (1957), ecuación (4.41):

$$\mu = \frac{0.3(133.427) + \frac{(1 - 0.3)(100.128 + 70.187)}{2}}{133.426} = 0.747$$

Obtenemos el asentamiento en el campo al término de la consolidación primaria:

$$\Delta\delta_{pcpo} = 0.747(0.01753) = 0.01309 \text{ m}$$

El asentamiento para el estrato 1 para un tiempo  $t$ , se determina con la ecuación (4.43), donde  $U$  es el grado de consolidación primaria, que es función del factor tiempo  $T$ , ecuación (4.68). Considerando una vida útil a 50 años, vale:

$$T = \frac{(0.00082)(1577880000)}{(60)^2} = 359.41 > 2$$

Por tanto, la consolidación primaria se completó.

$$U = 1$$

$$\Delta\delta_{pt} = 0.01309(1) = 0.01309 \text{ m} = 1.31 \text{ cm}$$

Para la obtención del asentamiento debido a la consolidación secundaria, utilizamos la teoría de Zeevaert. Previamente obtenemos la deformación por consolidación secundaria en un ciclo logarítmico,  $C_t$ , ecuación (4.71).

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{14.657 + 133.427}{14.657} \right)^{-\frac{1}{620}} \right] (0.6) = 0.00223 \text{ m}$$

Debido al tipo de curva de consolidación  $\xi = 5$ , Entonces:

$$\Delta\delta_{St} = 0.00223 \log(1 + 5(359.41)) = 0.00727 \text{ m} = 0.73 \text{ cm}$$

El asentamiento en el estrato 1, debido a la consolidación primaria y secundaria es:

$$\Delta\delta_{t1} = 1.31 + 0.73 = 2.04 \text{ cm}$$

## **Estrato 2**

Se procede de manera similar para el cálculo de los asentamientos a largo plazo con los respectivos datos del estrato 2:

$$p_{veo} = 16(0.8) + (16 - 9.81)(0.6) + (18 - 9.81)(0.7) = 22.247 \text{ kPa}$$

$$\Delta\delta_{Pcon} = \left[ 1 - \left( \frac{22.247 + 79.258}{22.247} \right)^{-\frac{1}{86}} \right] (1.4) = 0.02449 \text{ m}$$

$$\mu = \frac{0.3(79.258) + \frac{(1 - 0.3)(36.633 + 6.650)}{2}}{79.258} = 0.491$$

$$\Delta\delta_{Pcpo} = 0.491(0.02449) = 0.01202 \text{ m}$$

$$T = \frac{(0.00076)(1577880000)}{(140)^2} = 61.183 > 2$$

$$U = 1$$

$$\Delta\delta_{pt} = 0.01202(1) = 0.01202 \text{ m} = 1.20 \text{ cm}$$

$$C_t = \left[ 1 - \left( \frac{22.247 + 79.258}{22.247} \right)^{-\frac{1}{690}} \right] (1.4) = 0.00308 \text{ m}$$

$$\Delta\delta_{st} = 0.00308 \log(1 + 5(61.183)) = 0.00765 \text{ m} = 0.77 \text{ cm}$$

El asentamiento en el estrato 2, debido a la consolidación primaria y secundaria es:

$$\Delta\delta_{t2} = 1.20 + 0.77 = 1.97 \text{ cm}$$

El asentamiento total a 50 años es:

$$\delta_t = 2.04 + 1.97 = 4.01 \text{ cm}$$

### 7.2.3 Asentamiento Total

El asentamiento total es la suma del asentamiento inmediato más el asentamiento a largo plazo, ecuación (4.1), es decir:

$$\delta_T = 1.71 + 4.01 = 5.72 \text{ cm}$$

$$5.72 \text{ cm} < 15 \text{ cm}$$

Por tanto, de acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones, cumple los límites máximos para deformaciones originados por la cimentación.

## 7.3 Interacción Suelo-Estructura

### 7.3.1 Procedimiento Método Directo (Demeneghi 1996)

Como ya se explicó en el capítulo 5, el procedimiento consiste en establecer la compatibilidad de deformaciones entre estructura y terreno de cimentación, lo que permite determinar los diagramas de reacciones y de asentamientos del terreno (Demeneghi, 1996). Con estas cantidades se obtienen los elementos mecánicos en la subestructura.

En el apartado se presenta el desarrollo del procedimiento de interacción suelo-estructura de la zapata corrida del ejemplo de aplicación.

#### 7.3.1.1 Interacción Suelo-Estructura a Corto Plazo

Antes de proceder con el análisis de interacción, es necesario calcular algunos valores que se requieren para el análisis de interacción, como lo son: el momento de inercia de la sección de la zapata, además del módulo de elasticidad del concreto, y detallar como es que se obtiene la carga distribuida  $w$ , que se utilizará en el análisis.

En la Figura 47 se muestra la sección de la zapata, así como sus dimensiones.

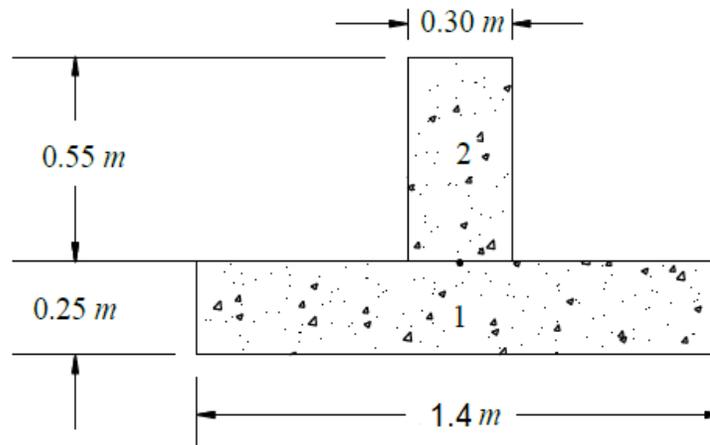


Figura 47. Sección de la zapata para el cálculo del momento de inercia.

Como la zapata es una sección compuesta por la trabe y la losa de la zapata, tenemos que descomponer dicha sección en formas geométricas simples, y obtener el momento de inercia de cada sección por separado. En la Tabla 7 se muestran los valores de las propiedades de cada sección.

Previamente se calcula el centroide  $\bar{y}$  de la sección compuesta con la siguiente expresión:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} \quad (7.5)$$

Donde:

A = Área de cada sección

y = Distancia que hay del eje de referencia (y) al centroide de dicha sección.

FIGURA	b (m)	h (m)	A (m <sup>2</sup> )	y (m)	Ay (m <sup>3</sup> )	I <sub>0x</sub> (m <sup>4</sup> )	d (m)	d <sup>2</sup> (m <sup>2</sup> )
1	1.4	0.25	0.350	0.125	0.04375	0.001823	0.128155	0.016424
2	0.3	0.55	0.165	0.525	0.08663	0.004159	0.271845	0.07390
Σ			0.515		0.1304			

**Tabla 7. Propiedades de cada sección.**

Entonces:

$$\bar{y} = \frac{0.130}{0.515} = 0.253 \text{ m}$$

Una vez calculado el centroide de la zapata, se aplica el teorema de Steiner a cada sección de la Figura 47.

$$I_x = I_{0x} + Ad^2 \quad (7.6)$$

Donde:

$I_{0x}$  = es el momento de inercia de la sección simple con respecto al eje  $x$ .

$d$  = distancia que hay del centroide de la sección compuesta, al centroide de cada sección simple.

Sustituyendo valores, tenemos:

$$I_{x1} = 0.001823 + 0.350 \times 0.1282^2 = 0.007571 \text{ m}^4$$

$$I_{x2} = 0.004159 + 0.165 \times 0.2718^2 = 0.016353 \text{ m}^4$$

El momento de inercia de la sección compuesta será la suma de los momentos de inercia de las dos secciones, es decir:

$$I_x = 0.023924 \text{ m}^4$$

Por otra parte, el módulo de elasticidad del concreto se obtiene con la ecuación (6.7):

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359.436 \text{ kg/cm}^2 = 22135943.6 \text{ kPa}$$

Por último, es necesario considerar dentro de la carga distribuida sobre la barra, el peso propio de la zapata, además del peso del relleno del suelo. Del análisis de capacidad de carga se tiene:

$$W_{zapata} = 98.88 \text{ kN}$$

$$W_{relleno} = 77.44 \text{ kN}$$

Por lo que la carga distribuida  $w$  a considerar, será:

$$w = 10 + \frac{98.88 + 77.44}{8} = 32.04 \text{ kN/m}$$

#### a) Análisis Estructural

El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces (Capítulo 5). En la Figura 48 se muestran los grados de libertad y en la Figura 49 el sistema de cargas sobre la estructura.

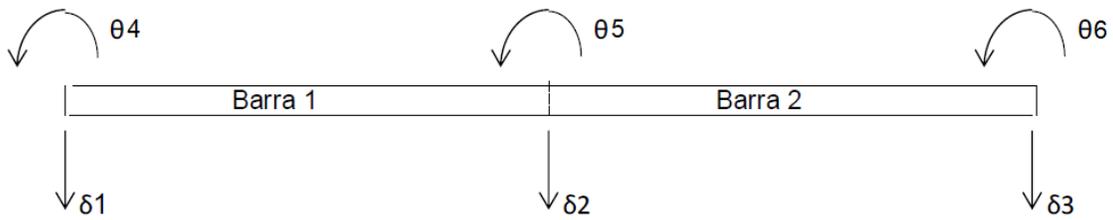


Figura 48. Numeración de barras y grados de libertad.

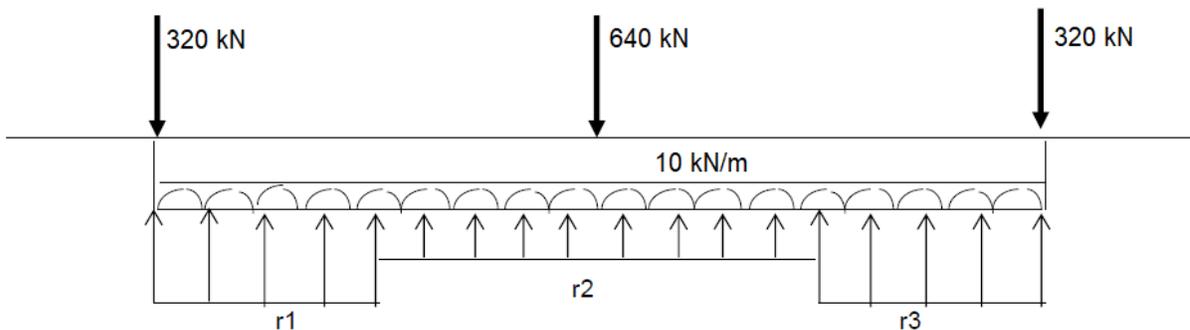


Figura 49. Sistema de cargas sobre la estructura.

Las matrices de rigidez se obtienen con los valores de la ecuación (5.12), para barras horizontales, como se describió en el capítulo 5. Los vectores de cargas de empotramiento se calculan con la ecuación (5.36).

Matriz de rigidez. Barra 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_4 & \theta_5 & \delta_1 & \delta_2 & \\ 529580.31 & 264790.16 & -198592.62 & 198592.62 & \theta_4 \\ 264790.16 & 529580.31 & -198592.62 & 198592.62 & \theta_5 \\ -198592.62 & -198592.62 & 99296.31 & -99296.31 & \delta_1 \\ 198592.62 & 198592.62 & -99296.31 & 99296.31 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez. Barra 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_5 & \theta_6 & \delta_2 & \delta_3 & \\ 529580.31 & 264790.16 & -198592.62 & 198592.62 & \theta_5 \\ 264790.16 & 529580.31 & -198592.62 & 198592.62 & \theta_6 \\ -198592.62 & -198592.62 & 99296.31 & -99296.31 & \delta_2 \\ 198592.62 & 198592.62 & -99296.31 & 99296.31 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

Vector de cargas de empotramiento. Barra 1:

$$\underline{P}_1^e = \begin{bmatrix} 42.72 - 0.92r_1 - 0.42r_2 & \theta_4 \\ -42.72 + 0.42r_1 + 0.92r_2 & \theta_5 \\ -64.08 + 1.625r_1 + 0.375r_2 & \delta_1 \\ -64.08 + 0.375r_1 + 1.625r_2 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

Vector de cargas de empotramiento. Barra 2:

$$\underline{P}_2^e = \begin{bmatrix} 42.72 - 0.92r_2 - 0.42r_3 & \theta_5 \\ -42.72 + 0.42r_2 + 0.92r_3 & \theta_6 \\ -64.08 + 1.625r_2 + 0.375r_3 & \delta_2 \\ -64.08 + 0.375r_2 + 1.625r_3 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \\ 99296.31 & -99296.31 & 0 & -198592.62 & -198592.62 & 0 & \delta_1 \\ -99296.31 & 198592.62 & -99296.31 & 198592.62 & 0 & -198592.62 & \delta_2 \\ 0 & -99296.31 & 99296.31 & 0 & 198592.62 & 198592.62 & \delta_3 \\ -198592.62 & 198592.62 & 0 & 529580.31 & 264790.16 & 0 & \theta_4 \\ -198592.62 & 0 & 198592.62 & 264790.16 & 1059160.62 & 264790.16 & \theta_5 \\ 0 & -198592.62 & 198592.62 & 0 & 264790.16 & 529580.31 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es la suma de los vectores de carga de empotramiento de cada una de las barras, el cual vale:

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -64.08 + 1.625r_1 + 0.375r_2 & \delta_1 \\ -128.16 + 0.375r_1 + 3.25r_2 + 0.375r_3 & \delta_2 \\ -64.08 + 0.375r_2 + 1.625r_3 & \delta_3 \\ 42.72 - 0.92r_1 - 0.42r_2 & \theta_4 \\ 0.42r_1 - 0.42r_3 & \theta_5 \\ -42.72 + 0.42r_2 + 0.92r_3 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas concentradas vale:

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} -320 & \delta_1 \\ -640 & \delta_2 \\ -320 & \delta_3 \\ 0 & \theta_4 \\ 0 & \theta_5 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

La condición de equilibrio de cargas en los nudos de la estructura conduce a la siguiente expresión:

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (7.7)$$

Sustituyendo valores:

$$(\delta_1): \quad 99296.31\delta_1 - 99296.31\delta_2 - 198592.62\theta_4 - 198592.62\theta_5 + 1.625r_1 + 0.375r_2 - 384.08 = 0$$

$$(\delta_2): \quad -99296.31\delta_1 + 198592.62\delta_2 - 99296.31\delta_3 + 198592.62\theta_4 - 198592.62\theta_6 + 0.375r_1 + 3.25r_2 + 0.375r_3 - 768.16 = 0$$

$$(\theta_4): \quad -198592.62\delta_1 + 198592.62\delta_2 + 529580.31\theta_4 + 264790.16\theta_5 - 0.92r_1 - 0.42r_2 + 42.72 = 0$$

Por simetría, sabemos que  $\delta_3 = \delta_1$ ,  $\theta_6 = -\theta_4$  y  $\theta_5 = 0$ , entonces:

$$(\delta_1): \quad 99296.31\delta_1 - 99296.31\delta_2 - 198592.62\theta_4 + 1.625r_1 + 0.375r_2 = 384.08 \quad (7.8)$$

$$(\delta_2): \quad -198592.62\delta_1 + 198592.62\delta_2 + 397185.24\theta_4 + 0.75r_1 + 3.25r_2 = 768.16 \quad (7.9)$$

$$(\theta_4): \quad -198592.62\delta_1 + 198592.62\delta_2 + 529580.31\theta_4 - 0.92r_1 - 0.42r_2 = -42.72 \quad (7.10)$$

b) Deformaciones del suelo

Los hundimientos del suelo quedan dados por la ecuación (6.13):

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{ne} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (6.13)$$

Desarrollamos esta expresión para  $i = 1$

$$\delta_1 = \left( \frac{H_1}{E_{11}} \right) \left( \frac{I_{111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{113} r_3 d_3}{a_3} \right) + \left( \frac{H_2}{E_{12}} \right) \left( \frac{I_{121} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{122} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{123} r_3 d_3}{a_3} \right)$$

En la siguiente Tabla 8 se muestran los valores de influencia para este problema. Para determinar estos valores, se realizan con las ecuaciones (4.5), (4.6), (4.7) y (6.11).

Punto	Estrato	Reacción	lx	ly	lz	nu	I <sub>ijk</sub>
1	1	1	0.3478609	0.2554289	0.4861139	0.5	0.1844690
1	1	2	0.0204971	0.0004338	0.0002517	0.5	-0.0102138
1	1	3	0.0012020	0.0000042	0.0000024	0.5	-0.0006007
1	2	1	0.0891684	0.0232259	0.2779782	0.5	0.2217811
1	2	2	0.0567211	0.0011030	0.0118601	0.5	-0.0170520
1	2	3	0.0047856	0.0000168	0.0001751	0.5	-0.0022261
2	1	1	0.0171124	0.0004092	0.0002380	0.5	-0.0085228
2	1	2	0.6957217	0.5108577	0.9722278	0.5	0.3689381
2	1	3	0.0171124	0.0004092	0.0002380	0.5	-0.0085228
2	2	1	0.0443619	0.0010140	0.0109263	0.5	-0.0117617
2	2	2	0.1783369	0.0464518	0.5559565	0.5	0.4435622
2	2	3	0.0443619	0.0010140	0.0109263	0.5	-0.0117617
3	1	1	0.0012020	0.0000042	0.0000024	0.5	-0.0006007
3	1	2	0.0204971	0.0004338	0.0002517	0.5	-0.0102138
3	1	3	0.3478609	0.2554289	0.4861139	0.5	0.1844690
3	2	1	0.0047856	0.0000168	0.0001751	0.5	-0.0022261
3	2	2	0.0567211	0.0011030	0.0118601	0.5	-0.0170520
3	2	3	0.0891684	0.0232259	0.2779782	0.5	0.2217811

Tabla 8. Valores de influencia del análisis a corto plazo.

Entonces,

$$\delta_1 = \frac{0.6}{4632} \left[ (0.1845) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (-0.0121) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (-0.0006) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{7448} \left[ (0.2218) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (-0.0171) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (-0.0022) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

En forma análoga se obtiene  $\delta_2$  y  $\delta_3$ .

$$\delta_2 = \frac{0.6}{4632} \left[ (-0.0085) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.3689) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (-0.0085) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{7448} \left[ (-0.0118) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.4436) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (-0.0118) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

$$\delta_3 = \frac{0.6}{4632} \left[ (-0.0006) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (-0.0102) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.1845) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{7448} \left[ (-0.0022) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (-0.0171) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.2218) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

La matriz de flexibilidades del suelo  $\underline{F}$  queda:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 46.84 & -3.23 & -0.35 \\ -2.37 & 93.69 & -2.37 \\ -0.35 & -3.23 & 46.84 \end{bmatrix} \times 10^6 \left[ \frac{m^2}{kN} \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta} = \underline{F} \underline{r}$$

Tomando en cuenta que  $r_1 = r_3$

$$\delta_1 = 0.00004649r_1 - 0.000003234r_2 \quad (7.11)$$

En forma análoga se obtiene,

$$\delta_2 = -0.0000047367r_1 + 0.00009369r_2 \quad (7.12)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

Resolviendo el sistema de 5 ecuaciones (7.8) a (7.12), tenemos:

$$\delta_1 = 0.011436 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.010888 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0006703 \text{ rad}$$

$$r_1 = 254.9772 \text{ kN/m}$$

$$r_2 = 129.1028 \text{ kN/m}$$

### 7.3.1.2 Interacción Suelo-Estructura a Largo Plazo

El procedimiento para largo plazo es similar al que se realizó a corto plazo. Para este análisis recomienda usar una magnitud de  $E$  de la estructura del orden del 70% del valor para condiciones a corto plazo. Por lo tanto, para el análisis estructural empleamos un módulo:

$$E' = 0.7E = 0.7 \times 22135943.6 = 15495160.53 \text{ kPa}$$

La matriz de rigideces de la estructura queda:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \\ 69507.42 & -69507.42 & 0 & -139014.83 & -139014.83 & 0 & \delta_1 \\ -69507.42 & 139014.83 & -69507.42 & 139014.83 & 0 & -139014.83 & \delta_2 \\ 0 & -69507.42 & 69507.42 & 0 & 139014.83 & 139014.83 & \delta_3 \\ -139014.83 & 139014.83 & 0 & 370706.22 & 185353.11 & 0 & \theta_4 \\ -139014.83 & 0 & 139014.83 & 185353.11 & 741412.44 & 185353.11 & \theta_5 \\ 0 & -139014.83 & 139014.83 & 0 & 185353.11 & 370706.22 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -64.08 + 1.625r_1 + 0.375r_2 & \delta_1 \\ -128.16 + 0.375r_1 + 3.25r_2 + 0.375r_3 & \delta_2 \\ -64.08 + 0.375r_2 + 1.625r_3 & \delta_3 \\ 42.72 - 0.92r_1 - 0.42r_2 & \theta_4 \\ 0.42r_1 - 0.42r_3 & \theta_5 \\ -42.72 + 0.42r_2 + 0.92r_3 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} -320 & \delta_1 \\ -640 & \delta_2 \\ -320 & \delta_3 \\ 0 & \theta_4 \\ 0 & \theta_5 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de equilibrio de la estructura, ya tomando en cuenta la simetría, son:

$$(\delta_1): \quad 69507.42\delta_1 - 69507.42\delta_2 - 139014.83\theta_4 + 1.625r_1 + 0.375r_2 = 384.08 \quad (7.13)$$

$$(\delta_2): \quad -139014.83\delta_1 + 139014.83\delta_2 + 278029.66\theta_4 + 0.75r_1 + 3.25r_2 = 768.16 \quad (7.14)$$

$$(\theta_4): \quad -139014.83\delta_1 + 139014.83\delta_2 + 370706.22\theta_4 - 0.92r_1 - 0.42r_2 = -42.72 \quad (7.15)$$

El módulo de deformación del suelo también se verá afectado, por lo que resulta necesario calcular un nuevo módulo de elasticidad  $E_s$  para cada estrato del suelo, que tome en cuenta la deformación inmediata y diferida del suelo. De acuerdo con las ecuaciones (6.15) y (6.16).

En la siguiente tabla se muestran los valores de los incrementos de esfuerzo y de los asentamientos inmediato y total.

Estrato	$\Delta z_0$ (m)	$\sigma_z$ (kPa)	$\sigma_x$ (kPa)	$\sigma_y$ (kPa)	$\Delta\delta_u$ (m)	$\Delta\delta_T$ (m)
1	0.6	133.427	100.128	70.187	0.0063	0.0267
2	1.4	79.258	36.633	6.650	0.0108	0.0305

Tabla 9. Valores de los incrementos de esfuerzos y asentamientos.

Para el estrato 1, sustituyendo valores en la ecuación (6.15) y luego en la (6.16), tenemos:

$$v = \frac{0.5(0.0063)}{0.0267} = 0.118$$

$$E_{s1} = \frac{0.6}{0.0267} [133.427 - 0.118(100.128 + 70.187)] = 2546.82 \text{ kPa}$$

De manera análoga, para el estrato 2:

$$v = \frac{0.5(0.0108)}{0.0305} = 0.177$$

$$E_{s2} = \frac{1.4}{0.0305} [79.258 - 0.177(36.633 + 6.650)] = 3286.32 \text{ kPa}$$

Los hundimientos del suelo quedan dados por la ecuación (6.13) y desarrollando esta expresión para  $i = 1$ , tenemos:

$$\delta_1 = \left( \frac{H_1}{E_{11}} \right) \left( \frac{I_{111}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{112}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{113}r_3d_3}{a_3} \right) + \left( \frac{H_2}{E_{12}} \right) \left( \frac{I_{121}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{122}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{123}r_3d_3}{a_3} \right)$$

En la Tabla 10 se muestran los valores de influencia para el análisis a largo plazo.

Punto	Estrato	Reacción	lx	ly	lz	nu	l <sub>ijk</sub>
1	1	1	0.3478609	0.2554289	0.4861139	0	0.4861139
1	1	2	0.0204971	0.0004338	0.0002517	0	0.0002517
1	1	3	0.0012020	0.0000042	0.0000024	0	0.0000024
1	2	1	0.0891684	0.0232259	0.2779782	0	0.2779782
1	2	2	0.0567211	0.0011030	0.0118601	0	0.0118601
1	2	3	0.0047856	0.0000168	0.0001751	0	0.0001751
2	1	1	0.0171124	0.0004092	0.0002380	0	0.0002380
2	1	2	0.6957217	0.5108577	0.9722278	0	0.9722278
2	1	3	0.0171124	0.0004092	0.0002380	0	0.0002380
2	2	1	0.0443619	0.0010140	0.0109263	0	0.0109263
2	2	2	0.1783369	0.0464518	0.5559565	0	0.5559565
2	2	3	0.0443619	0.0010140	0.0109263	0	0.0109263
3	1	1	0.0012020	0.0000042	0.0000024	0	0.0000024
3	1	2	0.0204971	0.0004338	0.0002517	0	0.0002517
3	1	3	0.3478609	0.2554289	0.4861139	0	0.4861139
3	2	1	0.0047856	0.0000168	0.0001751	0	0.0001751
3	2	2	0.0567211	0.0011030	0.0118601	0	0.0118601
3	2	3	0.0891684	0.0232259	0.2779782	0	0.2779782

Tabla 10. Valores de influencia del análisis a largo plazo.

Entonces,

$$\delta_1 = 0.0114 + \frac{0.6}{2546.82} \left[ (0.48611) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.00025) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.0000024) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{3286.32} \left[ (0.27798) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.01186) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.000175) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

En forma análoga se obtiene  $\delta_2$  y  $\delta_3$ .

$$\delta_2 = 0.0109 + \frac{0.6}{2546.82} \left[ (0.000238) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.97223) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.000238) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{3286.32} \left[ (0.010926) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.55596) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.010926) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

$$\delta_3 = 0.0114 + \frac{0.6}{2546.82} \left[ (0.0000024) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.00025) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.48611) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right] \\ + \frac{1.4}{3286.32} \left[ (0.000175) \frac{2 \times r_1}{2 \times 1.4} + (0.01186) \frac{4 \times r_2}{4 \times 1.4} + (0.27798) \frac{2 \times r_3}{2 \times 1.4} \right]$$

Procediendo de forma análoga obtenemos la siguiente expresión matricial para el cálculo de los hundimientos, para un tiempo  $t = 50$  años:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0114 \\ 0.0109 \\ 0.0114 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 166.39 & 3.65 & 0.0537 \\ 3.36 & 332.78 & 3.36 \\ 0.0537 & 3.65 & 166.39 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \times \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}$$

Tomando en cuenta que  $r_1 = r_3$

$$\delta_1 = 0.0114 + 0.000166442r_1 + 0.00000365129r_2 \quad (7.16)$$

En forma análoga se obtiene,

$$\delta_2 = 0.0109 + 0.00000672967r_1 + 0.000332777r_2 \quad (7.17)$$

Resolviendo el sistema de 5 ecuaciones (7.13) a (7.17)(7.12), tenemos:

$$\delta_1 = 0.054939 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.054376 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0008789 \text{ rad}$$

$$r_1 = 258.6191 \text{ kN/m}$$

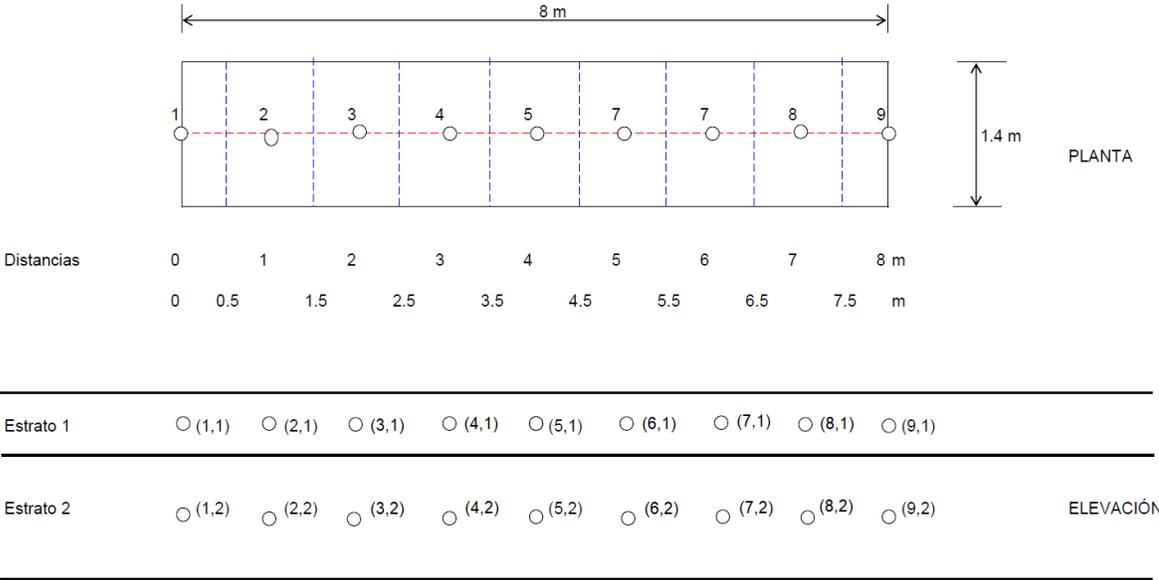
$$r_2 = 125.4609 \text{ kN/m}$$

### 7.3.2 Método Directo (Demeneghi, 1996) por ISE3D

Para este análisis de interacción suelo-estructura se utilizará el programa de computadora ISE3D, realizado por el M.I. Héctor Sanginés y el Dr. Armando Hermosillo.

Para iniciar con el método es fundamental fragmentar el elemento para obtener resultados tenues y más precisos en el diagrama de deformaciones y elementos

mecánicos. Dicho esto, para este ejemplo se ha dividido la zapata corrida de 8 metros de longitud en segmentos de 1 metro. A cada segmento se llamará barra de cimentación y cada una estará constituida por dos nudos, uno en cada extremo, en los cuales se calcularán los desplazamientos tanto del suelo como de la estructura de cimentación. En la Figura 50 se puede apreciar la división de la zapata en barras de cimentación, además se muestran los puntos en el suelo, tanto en el estrato 1 como en el estrato 2, bajo los nudos.

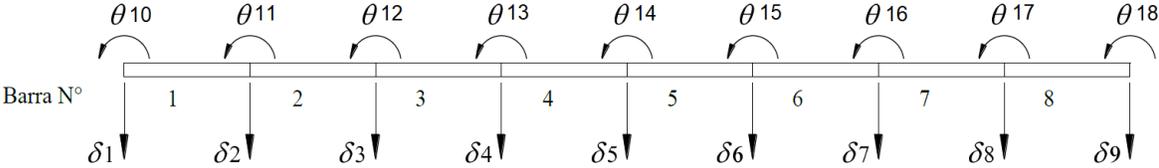


**Figura 50. División de la zapata en barras de cimentación.**

**7.3.2.1 Interacción Suelo-Estructura a Corto Plazo**

En la Figura 51 y en la

Tabla 11 se muestran los grados de libertad del problema.



**Figura 51. Grados de libertad de las barras de cimentación.**

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\alpha$	$\beta$
1	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\delta_1$	$\delta_2$	0	0
2	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\delta_2$	$\delta_3$	0	0
3	$\theta_{12}$	$\theta_{13}$	$\delta_3$	$\delta_4$	0	0
4	$\theta_{13}$	$\theta_{14}$	$\delta_4$	$\delta_5$	0	0
5	$\theta_{14}$	$\theta_{15}$	$\delta_5$	$\delta_6$	0	0
6	$\theta_{15}$	$\theta_{16}$	$\delta_6$	$\delta_7$	0	0
7	$\theta_{16}$	$\theta_{17}$	$\delta_7$	$\delta_8$	0	0
8	$\theta_{17}$	$\theta_{18}$	$\delta_8$	$\delta_9$	0	0

Tabla 11. Grados de libertad de cada una de las barras de cimentación.

En la Figura 52 se muestra el sistema de cargas que actúan sobre la estructura de cimentación.

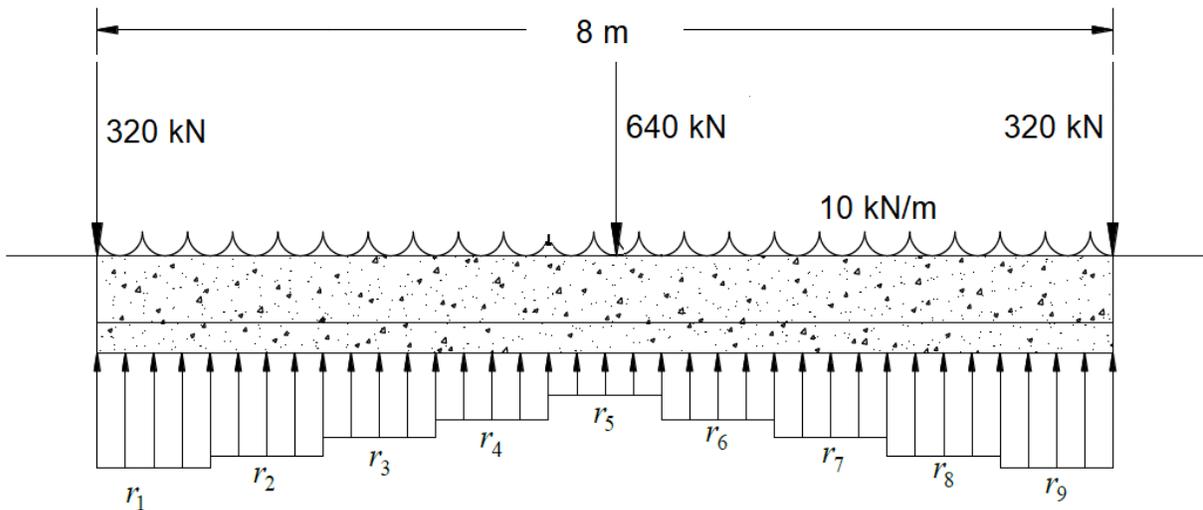


Figura 52. Sistema de cargas sobre la estructura de cimentación.

Los datos introducidos para el análisis de interacción suelo-estructura a corto plazo en el programa ISE3D, se muestran en el Anexo A. Cuando se cuenta con el archivo de datos completos se procede a la ejecución del programa.

En la Tabla 12 se muestran los resultados de los desplazamientos, giros y reacciones del suelo en cada nudo, producto del análisis de interacción suelo-estructura a corto plazo.

NUDO	DESPLAZAMIENTOS (m)	GIROS (rad)	REACCIONES (kN)
1	$\delta_1 = 0.01603$	$\theta_1 = 0.000780$	$r_1 = 378.1241$
2	$\delta_2 = 0.01532$	$\theta_2 = 0.000578$	$r_2 = 158.8430$
3	$\delta_3 = 0.01492$	$\theta_3 = 0.000210$	$r_3 = 167.0983$
4	$\delta_4 = 0.01487$	$\theta_4 = -0.000068$	$r_4 = 168.3316$
5	$\delta_5 = 0.01494$	$\theta_5 = 0.000000$	$r_5 = 169.6500$
6	$\delta_6 = 0.01487$	$\theta_6 = 0.000068$	$r_6 = 168.3316$
7	$\delta_7 = 0.01492$	$\theta_7 = -0.000210$	$r_7 = 167.0983$
8	$\delta_8 = 0.01532$	$\theta_8 = -0.000578$	$r_8 = 158.8430$
9	$\delta_9 = 0.01603$	$\theta_9 = -0.000780$	$r_9 = 378.1242$

**Tabla 12. Desplazamientos, giros y reacciones del suelo en cada nudo a corto plazo.**

Los diagramas de asentamientos y reacciones de la zapata corrida, en el análisis a corto plazo, se muestran en la Figura 53.

En la Tabla 13 se muestran los elementos mecánicos obtenidos en los nodos de cada una de las barras de cimentación. El programa ISE3D también presenta el cálculo de los elementos mecánicos cada cierto tramo a lo largo de toda la barra. Pero también se pueden obtener dichos valores con las ecuaciones (5.37), (5.38), (5.40) y (5.41).

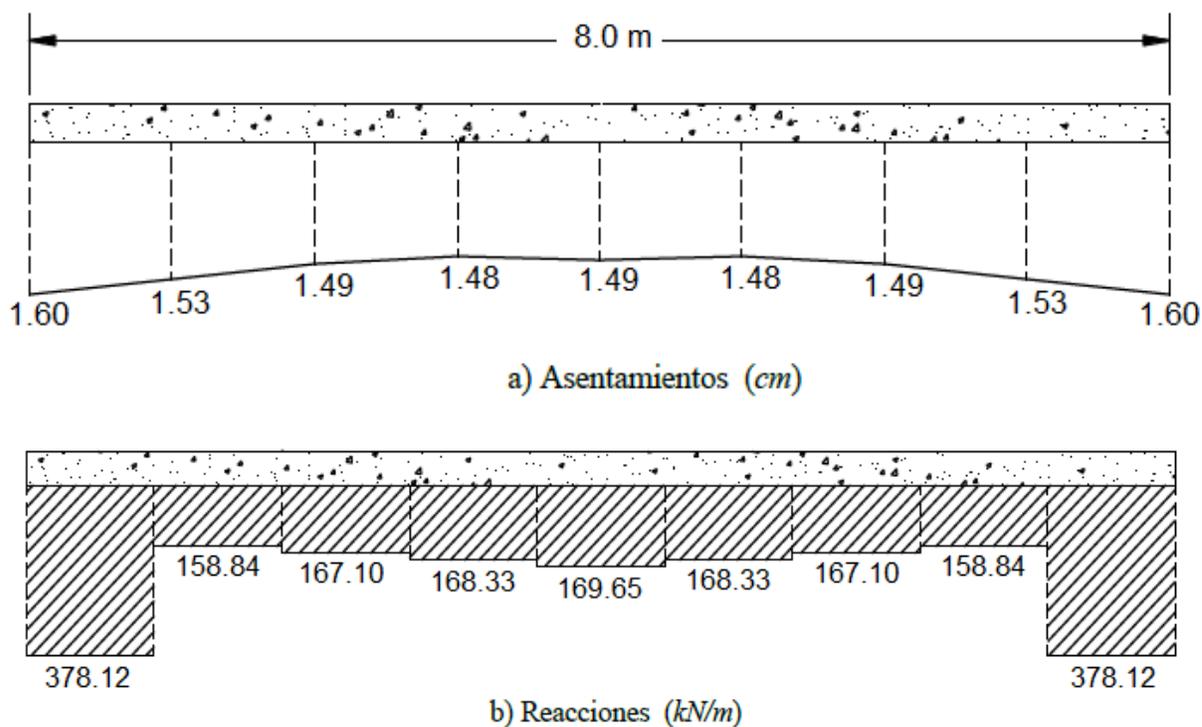


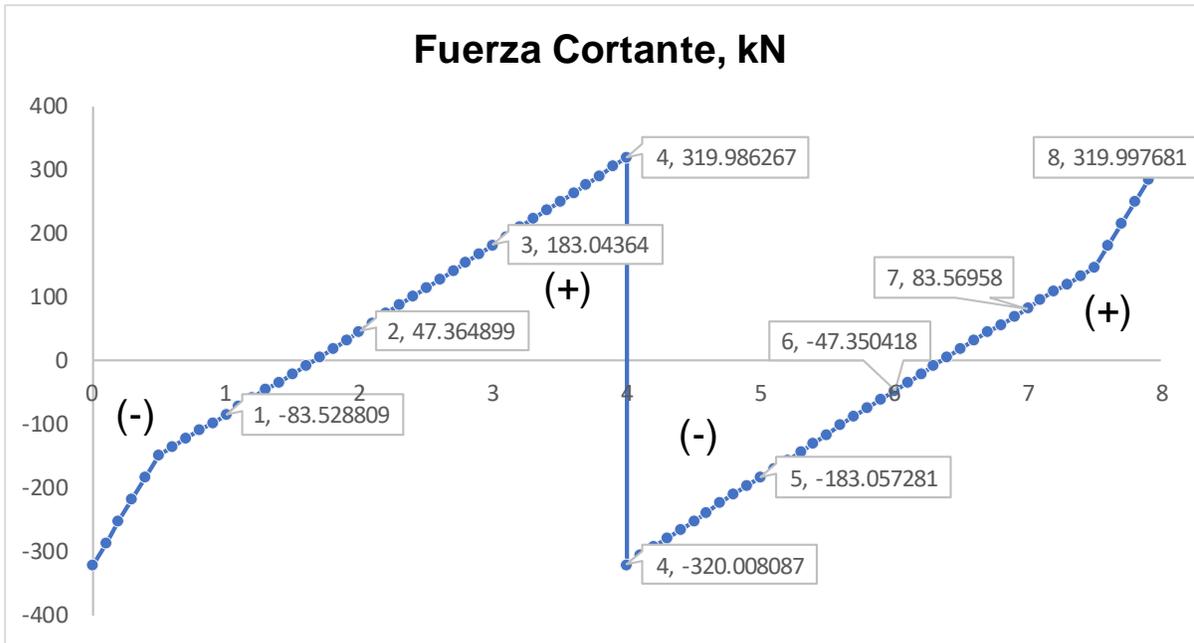
Figura 53. Diagramas de asentamientos y reacciones, análisis a corto plazo.

Barra Nº	$V_r$ (kN)	$V_p$ (kN)	$M_p$ (kN.m)	$M_q$ (kN.m)
1	-319.9724	-83.5288	-0.0148	-174.3552
2	-83.5658	47.3649	-174.3614	-193.4938
3	47.3687	183.0436	-193.4870	-78.4351
4	183.0355	319.9863	-78.4245	172.9216
5	-320.0081	-183.0573	172.9301	-78.4378
6	-183.0253	-47.3504	-78.4482	-193.4819
7	-47.3610	83.5696	-193.4952	-174.3590
8	83.5541	319.9977	-174.3690	-0.0033

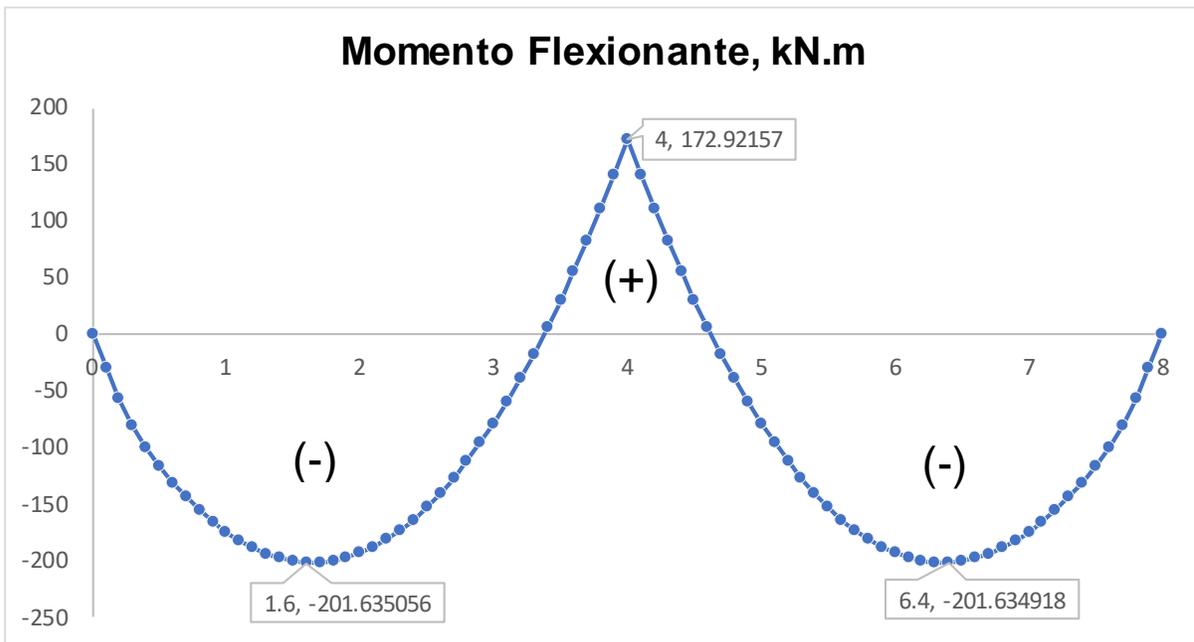
Tabla 13. Elementos mecánicos en los nodos de cada una de las barras de cimentación, análisis a corto plazo.

Los elementos mecánicos correspondientes al resto de las barras de cimentación se calcularon cada 10 cm con la finalidad de obtener diagramas más representativos

como se muestran en la Figura 54. En el Anexo B se pueden apreciar los valores de los elementos mecánicos de cada una de las 8 barras de cimentación.



a) Diagrama de Fuerza Cortante, *kN*.



b) Momento Flexionante, *kN.m*.

**Figura 54. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de toda la zapata corrida, análisis a corto plazo.**

Los valores de influencia se obtienen mediante las ecuaciones de esfuerzos para un elemento rectangular (4.5) de Damy (1985) y los esfuerzos perpendiculares a  $z$ , se calculan con las ecuaciones (4.6) y (4.7) de Dashko y Kágan (1980). En el Anexo C se muestran los valores de influencia para caso a corto plazo.

### 7.3.1.2 Interacción Suelo-Estructura a Largo Plazo

El procedimiento es similar al que se llevó a cabo para la revisión a corto plazo. Pero como se mencionó en el capítulo 6, la interacción suelo-estructura, no es la misma a largo que a corto plazo, por lo que a continuación se mencionan algunos aspectos relevantes a tomar en cuenta.

Para la revisión a largo plazo se debe tomar en cuenta el efecto del tiempo en la estructura, es decir, el módulo de elasticidad del concreto se ve disminuido, por lo que debemos afectar el módulo  $E$  cómo se menciona en el inciso 6.4.1 de este trabajo, con lo que se obtiene un nuevo módulo de elasticidad del concreto  $E'$ , es decir:

$$E' = 0.7E = 0.7 \times 22135943.6 = 15495160.53 \text{ kPa}$$

El módulo de deformación del suelo también se verá afectado, por lo que resulta necesario calcular un nuevo módulo de elasticidad  $E_s$  para cada estrato del suelo, que tome en cuenta la deformación inmediata y diferida del suelo. De acuerdo con las ecuaciones (6.15) y (6.16).

En la siguiente tabla se muestran los valores de los incrementos de esfuerzo y de los asentamientos inmediato y total.

Estrato	$\Delta z_0$ (m)	$\sigma_z$ (kPa)	$\sigma_x$ (kPa)	$\sigma_y$ (kPa)	$\Delta\delta_u$ (m)	$\Delta\delta_T$ (m)
1	0.6	133.427	100.128	70.187	0.0063	0.0267
2	1.4	79.258	36.633	6.650	0.0108	0.0305

**Tabla 14. Valores de los incrementos de esfuerzos y asentamientos.**

Para el estrato 1, sustituyendo valores en la ecuación (6.15) y luego en la (6.16), tenemos:

$$\nu = \frac{0.5(0.0063)}{0.0267} = 0.118$$

$$E_{s1} = \frac{0.6}{0.0267} [133.427 - 0.118(100.128 + 70.187)] = 2546.82 \text{ kPa}$$

De manera análoga, para el estrato 2:

$$\nu = \frac{0.5(0.0108)}{0.0305} = 0.177$$

$$E_{s2} = \frac{1.4}{0.0305} [79.258 - 0.177(36.633 + 6.650)] = 3286.32 \text{ kPa}$$

Una vez aclarados las consideraciones para el análisis a largo plazo se procede con la revisión. En el Anexo D se muestra el archivo de datos introducidos para ejecutar el programa.

Los desplazamientos, giros y reacciones del suelo en cada nudo, producto del análisis de interacción a largo plazo se muestran en la

Tabla 15. Como se puede apreciar, la magnitud de los asentamientos se ha incrementado a diferencia de los obtenidos en el análisis a corto plazo.

NUDO	DESPLAZAMIENTOS (m)	GIROS (rad)	REACCIONES (kN)
1	$\delta_1 = 0.05706$	$\theta_1 = 0.000662$	$r_1 = 408.5031$
2	$\delta_2 = 0.05648$	$\theta_2 = 0.000468$	$r_2 = 150.1361$
3	$\delta_3 = 0.05618$	$\theta_3 = 0.000127$	$r_3 = 165.6990$
4	$\delta_4 = 0.05619$	$\theta_4 = -0.000113$	$r_4 = 165.2335$
5	$\delta_5 = 0.05628$	$\theta_5 = 0.000000$	$r_5 = 165.6796$
6	$\delta_6 = 0.05619$	$\theta_6 = 0.000113$	$r_6 = 165.2335$
7	$\delta_7 = 0.05618$	$\theta_7 = -0.000127$	$r_7 = 165.6990$
8	$\delta_8 = 0.05648$	$\theta_8 = -0.000468$	$r_8 = 150.1362$
9	$\delta_9 = 0.05706$	$\theta_9 = -0.000662$	$r_9 = 408.5031$

Tabla 15. Desplazamientos, giros y reacciones en cada nudo a largo plazo.

Los diagramas de asentamientos y reacciones de la zapata corrida, en el análisis a largo plazo, se muestran en la Figura 55.

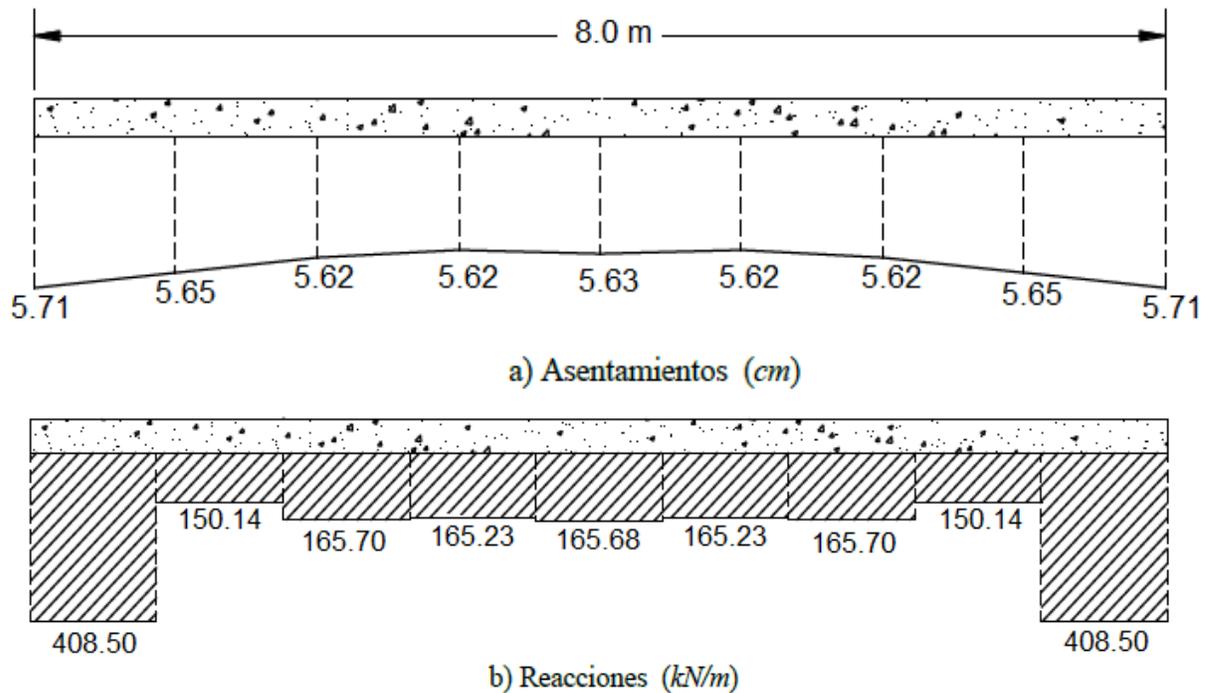


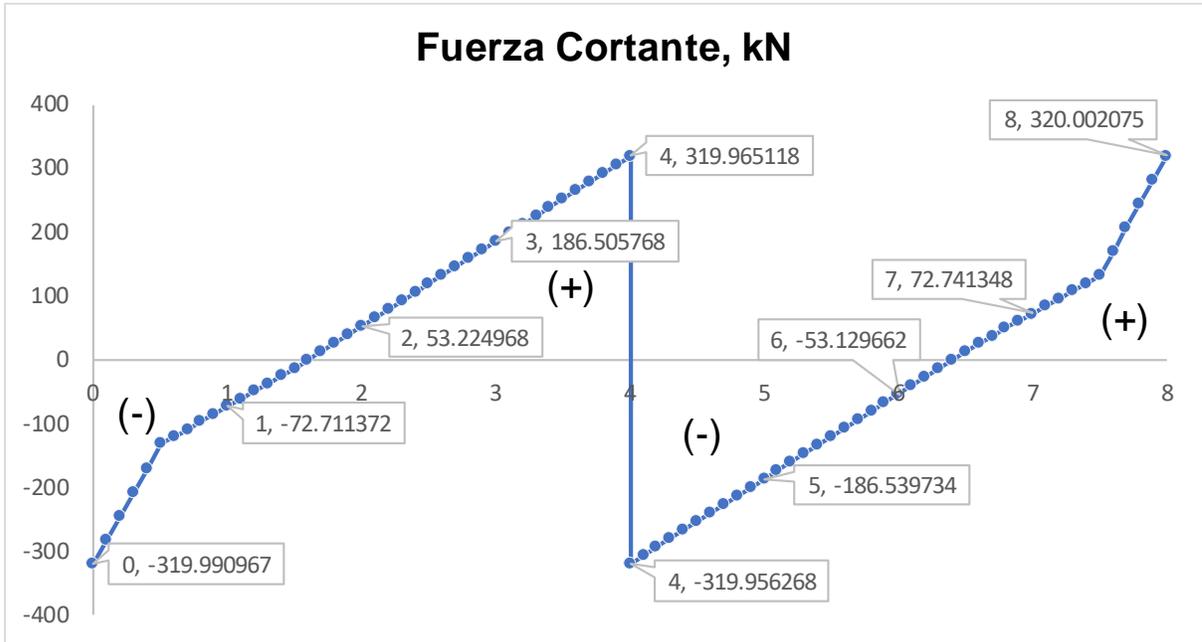
Figura 55. Diagramas de asentamientos y reacciones, análisis a largo plazo.

En la Tabla 16 se muestran los elementos mecánicos obtenidos en los nodos de cada una de las barras de cimentación. El programa ISE3D también presenta el cálculo de los elementos mecánicos cada cierto tramo a lo largo de toda la barra. Pero también se pueden obtener dichos valores con las ecuaciones (5.37), (5.38), (5.40) y (5.41).

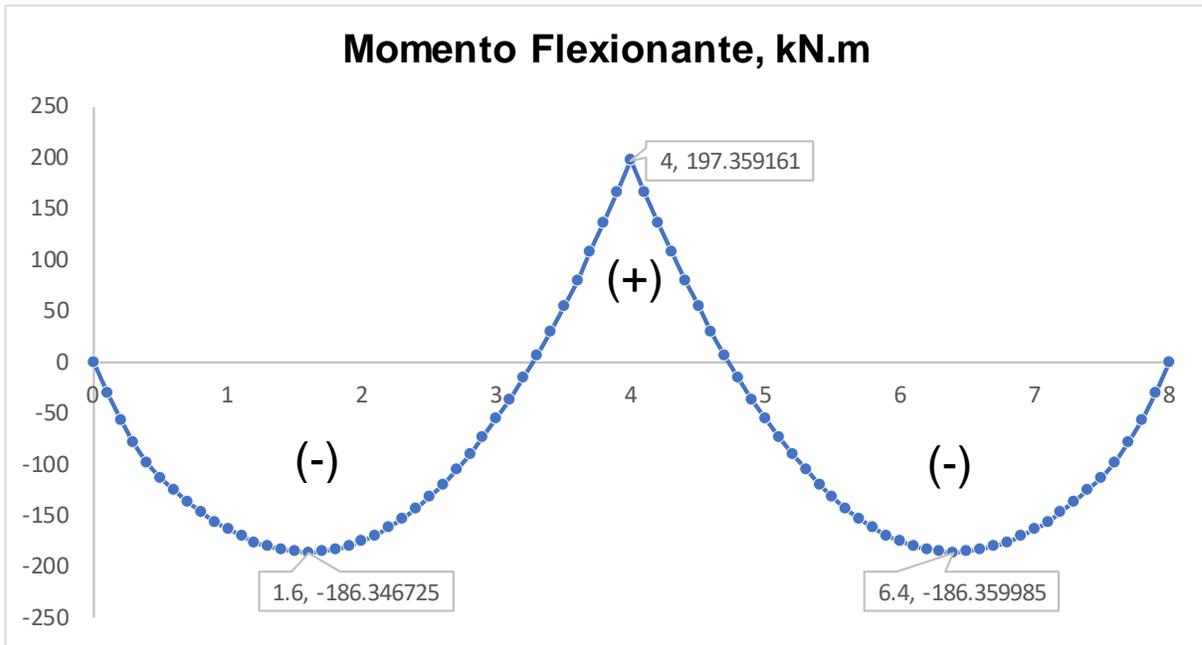
Barra Nº	$V_r$ (kN)	$V_p$ (kN)	$M_p$ (kN.m)	$M_q$ (kN.m)
1	-319.9910	-72.7114	0.0020	-164.0533
2	-72.6526	53.2250	-164.0903	-175.7495
3	53.0795	186.5058	-175.7561	-55.9052
4	186.5486	319.9651	-55.8419	197.3592
5	-319.9563	-186.5397	197.3511	-55.8411
6	-186.5559	-53.1297	-55.8801	-175.7811
7	-53.1362	72.7413	-175.7982	-164.0503
8	72.7225	320.0021	-164.0737	-0.0073

**Tabla 16. Elementos mecánicos en los nodos de cada una de las barras de cimentación, análisis a largo plazo.**

Los elementos mecánicos correspondientes al resto de las barras de cimentación se calcularon cada 10 cm con la finalidad de obtener diagramas más representativos como se muestran en la Figura 56. En el Anexo E se pueden apreciar los valores de los elementos mecánicos de cada una de las 8 barras de cimentación.



a) Diagrama de Fuerza Cortante, *kN*.



b) Diagrama de Momento Flexionante, *kN.m*.

Figura 56. Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de toda la zapata corrida, análisis a largo plazo.

Los valores de influencia se obtienen mediante las ecuaciones de esfuerzos para un elemento rectangular (4.5) de Damy (1985) y los esfuerzos perpendiculares a  $z$ , se calculan con las ecuaciones (4.6) y (4.7) de Dashko y Kágan (1980). En el Anexo F se muestran los valores de influencia para caso a corto plazo.

De la Figura 54 y Figura 56 se puede apreciar que los momentos flexionantes máximos positivos se producen en la revisión a largo plazo, mientras que los máximos negativos tienen lugar a corto plazo. Esta situación es importante, ya que para el diseño estructural es necesario conocer los elementos mecánicos máximos, por lo que dicho diseño se llevaría a cabo utilizando la envolvente de los elementos mecánicos.

## **8. CONCLUSIONES**

En este trabajo se presentó el ejemplo del diseño geotécnico de una zapata corrida emplazada sobre arcillas no sensitivas, que bien podría usarse como manual de diseño de este tipo. Este trabajo incluye: un análisis de las características de las arcillas no sensitivas; un análisis por capacidad de carga; una minuciosa revisión de asentamientos a corto y largo plazo, haciendo énfasis especial en el método propuesto por Demenegui, et al (2012), para la predicción no lineal de deformaciones a largo plazo; y por último, un análisis de la interacción suelo-estructura, tanto a corto plazo como para a largo plazo, utilizando el método directo presentado por Demeneghi, 1996, tanto de manera didáctica como asistida por un programa de cómputo; discretizada en dos y ocho barras, respectivamente. Por tanto, con base en el trabajo desarrollado, se puede concluir lo siguiente:

- La sensibilidad de las arcillas de la Ciudad de México, limita la aplicación de cargas en estos suelos, debido, principalmente, a la composición mineralógica y a la naturaleza fisicoquímicas de estos suelos. Las partículas de arcilla que se depositan en agua dulce con poco contenido de sales y no se unen entre sí, forman una estructura dispersa; resultado de un aumento de la doble capa difusa, disminuyendo la atracción eléctrica. A estos suelos se los conoce como “arcillas

no sensitivas”. Estas arcillas se caracterizan por presentar un elevado contenido de cationes de sodio en el agua presente en sus poros, de tal forma que, cuando la arcilla entra en contacto con el agua, sus partículas son progresivamente desprendidas, quedando así en suspensión.

- El análisis de revisión por capacidad de carga cumple satisfactoriamente con un valor de:  $189.97 \text{ kPa} < 194.08 \text{ kPa}$ , es decir, el suelo es capaz de resistir las cargas que serán impuestas por la construcción. Los factores de carga ( $F_c$ ) y factores de reducción ( $F_R$ ), son datos extraídos de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones (2017).
- Para el análisis de los asentamientos, es imperante tomar en consideración dos tipos de análisis debido al tiempo que se necesita para la disipación de presión de poro: análisis a corto y largo plazo. Para el análisis a corto plazo, es decir, asentamientos inmediatos, se utilizó la Ley de Hooke de manera satisfactoria, que aplica muy bien en suelos cohesivos; dando como resultado un asentamiento inmediato total en el centro de la zapata de  $\delta_{uT} = 1.71 \text{ cm}$ . Para los asentamientos a largo plazo, se hizo énfasis en el método propuesto por Demeneghi (2012), Skempton y Bjerrum (1957), como también el de Zeevaert (1985) para consolidación secundaria, dando como resultado un asentamiento total a 50 años de  $\delta_t = 4.01 \text{ cm}$ . Y, por último, el asentamiento total es de  $\delta_T = 5.72 \text{ cm}$ , lo cual es satisfactorio ya que cumple los límites máximos para deformaciones originados por la cimentación como exigen las Normas Técnicas Complementarias.
- Para la revisión de la interacción a corto plazo se obtuvo un módulo de elasticidad no drenado  $E_u$ , que se consigue una prueba triaxial  $UU$ , lo cual es aceptable ya que se logra representar satisfactoriamente la elasticidad del suelo en campo, siempre y cuando la muestra extraída, sea lo más inalterada posible. Para la revisión de la interacción a largo plazo se corrigieron los módulos de deformación  $E_s$  que se ven afectados por el tiempo. El análisis de interacción nos proporciona los elementos mecánicos en los nodos de cada barra de cimentación, por lo que resulta necesario calcular el resto de los elementos a lo largo de la barra para

dibujar diagramas lo bastante representativos que puedan ayudar al ingeniero estructurista a realizar un excelente diseño estructural.

- En ambos casos donde se hizo un análisis de interacción se obtuvo asentamientos relativamente menores al cálculo tradicional, llamémosle así al análisis sin considerar el efecto de la estructura. En el caso del análisis a corto plazo por el método tradicional, se obtuvo un asentamiento en el centro de la zapata de 1.71 cm, frente a un asentamiento por interacción suelo-estructura de 1.49 cm, es decir, una diferencia de alrededor del 13% menos que de manera tradicional. Por otro lado, en el análisis a largo plazo por el método propuesto por Demeneghi (2012), se obtuvo un asentamiento en el centro de la zapata de 5.72 cm, frente a un asentamiento por interacción suelo-estructura de 5.63 cm, es decir, una diferencia de alrededor del 2% menos del que se obtuvo por Demeneghi (2012).
- La revisión de la interacción suelo-estructura por el programa ISE3D, arrojan resultados más precisos al tener una mayor discretización del modelo. En el ejemplo presentado, resuelto por el programa ISE3D, el modelo de la zapata corrida se discretizó en 8 barras, el cual nos da un resultado más preciso que el ejemplo con fines didácticos, discretizado en 2 barras.
- La ventaja del método directo (Demeneghi, 1996), es que no se necesita realizar iteraciones; los resultados que arrojan los análisis son bastante confiables y se pueden emplear satisfactoriamente en la práctica, y es un análisis más completo que el tradicional, mitigando los efectos de la incertidumbre.
- En una ciudad como la Ciudad de México, en donde las condiciones del suelo presentan propiedades tan variables, un buen diseño geotécnico resulta muy necesario. Es importante que el ingeniero geotecnista y estructural tengan consciencia del tipo de comportamiento del suelo y se diseñe con esfuerzos menores a este, con fin de evitar asentamientos diferenciales de gran magnitud.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

Aitchison, G. D., and C. C. Wood. (1965). Some Interactions of compaction, permeability, and post-construction deflocculation affecting the probability of piping failures in small dams. Proceedings, 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Montreal, Canada, International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. II, p. 442, 1965.

Arulanandan, K. y Heinzen, R.T. (1977). Factors influencing erosion in dispersive clays and methods of identification. Erosion and solid matter transport in inland waters. IAHS,122, 76-81.

Beaufait, F., Rowan, W., Hoadley, P. y Hackett, R. (1970), "*Computer method of structural*", Prentice-Hall Inc, Estados Unidos de América.

Casagrande, A. (1936). "The determination of the pre-consolidation load and it's practical significance", Proc. 1st. Internatioanl Conference on Soil Mechanics and Foundation Emgineering.

Chamecki, S, "Structural rigidity in calculating settlements", Jour Soil Mech Found Div, PrcASCE, Vol 88, N° SM1,1956.

CNA. (2007). Manual de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento, Geotecnia en Suelos Inestables. Comisión Nacional del Agua, México.

Craft D. and R. G. Acciardi. (1984). Failure of Pore-Water Analyses for Dispersion. Journal, Geotechnical Engineering Division, ASCE, vol. 110, N° 4, April.

Damy, J. (1985). "Integración de las superficies de Boussinesq, Westergaard y Fröhlich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas". Rev. Ingeniería, Vol. LV, N° 1: 82-86.

Dashkó, R. E. y Kagán, A. A., (1980). "Mecánica de Suelos en la Práctica de la Geología Aplicada a la Ingeniería", Capítulo 2, MIR, Moscú.

Díaz, A. (2011), "Apuntes del Curso de Propiedades de los Suelos", Facultad de Ingeniería. UNAM. México, D.F.

Demeneghi, A. (1983), Interacción Suelo-Estructura. Revista Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, LIII.

Deméneghi, A. (1985), "Non-iterative method for the analysis of soil-structure interaction", Proceedings of the XI Int Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. San Francisco, E.U.A. pp 733-736

Deméneghi, A (1996), "Interacción estática suelo-estructura, considerando efectos de torsión y acortamiento de barras", XVIII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Vol 1: 303-310, Morelia, Michoacan.

Deméneghi, A. (2011), "Apuntes del Curso de Cimentaciones." Facultad de Ingeniería. UNAM. México, D. F.

Demeneghi, A (2015), Apuntes de Mecánica del Medio Continuo, Facultad de Ingeniería, UNAM, vol. 2.

Demeneghi, A (2021), "Empleo de ecuaciones constitutivas en mecánica de suelos", Tercera Conferencia Eulalio Juárez Badillo, Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica.

Demeneghi, A., Avilés, J., Lopez, G., et al. (2016). Interacción Suelo-Estructura, Estática y Dinámica. México D.F., México: Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica A.C.

Demeneghi, A, Compeán, J (2014), Determinación de módulos de deformación para ser utilizados en análisis numéricos, Reunión Nacional de Mecánica de suelos e Ingeniería Geotécnica, SMIG, Puerto Vallarta, Jalisco.

Demeneghi, A, Magaña, R y Sanginés (2002), H, Apuntes de Mecánica del Medio Continuo, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Deméneghi, A., Puebla, M. (2004). “Predicción de deformaciones en arcillas preconsolidadas”. XXVI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, SMIG, Cancún, Quintana Roo.

Deméneghi, A., Puebla, M. (2012). “Cálculo de asentamientos a largo plazo en suelos cohesivos totalmente saturados”. XXII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos Tomo II. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos. México, D.F. págs. 39-46.

Deméneghi, A., Puebla, M. y Sanginés, H. (2003), “Apuntes de análisis y diseño de cimentaciones. Tomo I”, Facultad de Ingeniería. UNAM. México, D.F.

Esteva, L., Guerra, R. y Barradas, L., (1977). “*Aproximaciones sucesivas en el análisis de cimentaciones continuas sobre terreno compresible*”, Memoria del 1er Congreso Nacional sobre Ingeniería Estructural. México, D. F.

G. Gallegos Fonseca, C. Michel Cuello, M. Escalera Chávez y Julio Cesar Leal Vaca (2014a) Identificación de los suelos dispersivos y colapsables del valle del Rioverde S. L. P., México. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas-Cedex.

Garay Porteros, H., y Alva Hurtado, J. E.: “Identificación y Ensayos en Suelos Dispersivos”, XII Congreso Nacional de Ingeniería Civil, Huanuco, México, noviembre de 1999.

Gibbs H. J. (1961). Properties with divide loess and dense uncement of the soils. Earth Laboratory Report EM-658, Bureau of Reclamation, U. S. Department of Interior, Washington D. C.

Holmgren, F. Diccionario básico de Geotecnia. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, Escuela de Ingeniería Civil. 2007.

Juárez, E. y Rico, A. (1976), “Mecánica de suelos. Tomo 1. Fundamentos de la mecánica de suelos”, Editorial Limusa. México D.F.

Juárez, E. y Rico, A. (2006), "Mecánica de suelos. Tomo 2. Teoría y aplicaciones de la mecánica de suelos", 2da edición. Editorial Limusa. México D.F.

Juárez-Badillo, E. (1969), Pore Pressure and Compressibility Theory for Saturated Clays, VII International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Specialty Session No. 12 on Advances in Consolidation Theories for Clays, University of Waterloo, Canada, 99-116.

Knodel, P. C., "Characteristics and Problems of Dispersive Clay Soils", Report N° R-91-09, Bureau of Reclamations, Denver Office, Research a Laboratory Service Divisio Materials Engineering Branch, U.S., October 1991.

Lambe, T. W. (1958), The structure of compacted clay, ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, vol. 84 (SM2) 1654-1-34.

Natural Resources Conservation Service of Wisconsin (NRCS) (2014). Dispersive soils.

Norma ASTM D 4221 – 99 "Standard Test Method for Dispersive Characteristics of Clay Soil by Double Hydrometer". Edition approved June 10, 1999. Published September 1999. Originally published as D 4421 – 83. Last previous edition D 4221 – 90.

Manual de Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones de la Ciudad de México (2017).

Manual de Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto de la Ciudad de México (2017.)

Rojas, R. M. y Padilla, H.M. (2009), "*Análisis estructural con matrices*", Editorial Trillas S. A. de C. V., México, D.F.

Sanginéz, H., Hermosillo, A. (2021), Programa de interacción suelo estructura tridimensional ISE3D, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Skempton, A. W. (1954), "The pore-pressure coefficients  $a$  and  $b$ ": geotechnique, volumen 4, p 143 –147.

Skempton, A.W. and Bjerrum, L. (1957), "A Contribution to the Settlement Analysis of Foundations on Clay", Geotechnique, vol. 7, p. 168.

Sowers, G. B. y Sowers G. F. (1961) "*Introductory soil mechanics and foundations*". Editorial The Macmillan Company. New York, E.U.A.

Terzaghi, K. (1943), "Theoretical soil mechanics". Editorial John Wiley and Sons, Inc. New York, E.U.A.

Terzaghi, K. y Peck, R. (1967), "Soil mechanics in engineering practice". Editorial John Wiley and Sons, Inc. New York, E.U.A.

Van Olphen, H. (1991), Clay Colloid Chemistry, 2a. ed., Krieger Publishing Company. Malabar, Florida, EUA.

Volk, G. M., "Method of Determination of the Degree of Dispersion of the Clay Fraction of Soils, "Proceedings, Soil Science Society of America, vol. 2, p. 561, 1937.

Winterkorn, H. y Fang, H. (1975), "Foundation engineering handbook", Van Nostrand Reinhold Company. New York, Estados Unidos de América.

Zeevaert, L. (1973), "*Foundation engineering for difficult subsoil conditions*", Van Nostrand Reinhold Company. Estados unidos de América.

Zeevaert, L. (1980), "Interacción suelo-estructura de cimentaciones superficiales y profundas, sujetas a cargas estáticas y sísmicas", Editorial Limusa, México, D.F.

Zeevaert, L. (1985), Consolidation in the intergranular viscosity of highly compressible soils, Consolidations of Soils: Testing and Evaluation, ASTM STP 892: 257-281. R. N. Young y F. C. Townsed eds, Filadelfia.

# ANEXO A

## ARCHIVO DE DATOS PARA EL PROGRAMA ISE3D

### ANÁLISIS A CORTO PLAZO

```
Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana 2 X
ZapCorbsec.dat
1 "ZAPATA CORRIDA /C INTERACCIÓN SE"
2 UNIDADES UTILIZADAS
3 "KN" "m" "KN/m" "KN/m2" "KN/m3"
4 Lin/NLin EXP CMFCP CMFLP CMFLPS
5 0 1 0 0
6 2 !NUMERO DE MATERIALES
7 ! MAT GAMA E POISSON
8 CONC200 0.0 1130000.00 0.2 !CUIDADO CON EL NOMBRE DEL MATERIAL, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA SECCIÓN
9 CONC250 0.0 22135943.6 0.2
10 1 !NUMERO DE SECCIONES
11 ! SECC MAT b h
12 VIGAL40x59 CONC250 1.4 0.589697 !CUIDADO CON EL NOMBRE DE LA SECCIÓN, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA BARRA
13 9 !NUMERO DE NODOS
14 ! NN X Y Z GLX GLY GLZ GLMX GLMY GLMZ PERFIL Df
15 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
16 2 1.0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
17 3 2.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
18 4 3.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
19 5 4.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
20 6 5.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
21 7 6.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
22 8 7.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
23 9 8.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
24 8 !NUMERO DE BARRAS
25 NBAR SECC i j ROT FacV WCVMax WCVMed WCVAcc WCM WPV
26 1 VIGAL40x59 1 2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
27 2 VIGAL40x59 2 3 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
28 3 VIGAL40x59 3 4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
29 4 VIGAL40x59 4 5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
30 5 VIGAL40x59 5 6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
31 6 VIGAL40x59 6 7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
32 7 VIGAL40x59 7 8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
33 8 VIGAL40x59 8 9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
34 0 !# DE ZAPATAS AISLADAS
35 ! N b l h nodo
36 0 !LOSAS
37 3 !CARGAS CONCENTRADAS
38 NODO FX FY FZ MX MY MZ
41 1 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
42 5 0. 0. -640.00 0. 0. 0.
43 9 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
44 1 10.3 !NUMERO DE PERFILES DE SUELO, PRESIÓN ATMOSFÉRICA
45 2 !# ESTRATOS DE PERFIL 1
46 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
47
48
```

```
Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana 2 X
ZapCorbsec.dat
7 ! MAT GAMA E POISSON CONC200 0.0 1130000.00 0.2 !CUIDADO CON EL NOMBRE DEL MATERIAL, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA SECCIÓN
8 CONC250 0.0 22135943.6 0.2
9 1 !NUMERO DE SECCIONES
10 ! SECC MAT b h
11 VIGAL40x59 CONC250 1.4 0.589697 !CUIDADO CON EL NOMBRE DE LA SECCIÓN, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA BARRA
12 9 !NUMERO DE NODOS
13 ! NN X Y Z GLX GLY GLZ GLMX GLMY GLMZ PERFIL Df
14 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
15 2 1.0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
16 3 2.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
17 4 3.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
18 5 4.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
19 6 5.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
20 7 6.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
21 8 7.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
22 9 8.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
23 8 !NUMERO DE BARRAS
24 NBAR SECC i j ROT FacV WCVMax WCVMed WCVAcc WCM WPV
25 1 VIGAL40x59 1 2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
26 2 VIGAL40x59 2 3 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
27 3 VIGAL40x59 3 4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
28 4 VIGAL40x59 4 5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
29 5 VIGAL40x59 5 6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
30 6 VIGAL40x59 6 7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
31 7 VIGAL40x59 7 8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
32 8 VIGAL40x59 8 9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
33 0 !# DE ZAPATAS AISLADAS
34 ! N b l h nodo
35 0 !LOSAS
36 3 !CARGAS CONCENTRADAS
37 NODO FX FY FZ MX MY MZ
40 1 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
41 5 0. 0. -640.00 0. 0. 0.
42 9 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
43 1 10.3 !NUMERO DE PERFILES DE SUELO, PRESIÓN ATMOSFÉRICA
44 2 !# ESTRATOS DE PERFIL 1
45 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
46
47
48
```

# ANEXO B

## ELEMENTOS MECÁNICOS EN LAS BARRAS

### ANÁLISIS A CORTO PLAZO

Normal text file length: 18,421 lines: 388 Ln: 1 Col: 1 Pos: 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Normal text file length: 18,421 lines: 388 Ln: 337 Col: 42 Sel: 37 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

349	5	4.500000	-251.203094	30.127289
350	5	4.600000	-237.573929	5.688429
351	5	4.700000	-223.944763	-17.387489
352	5	4.800000	-210.315613	-39.100525
353	5	4.900000	-196.686462	-59.450630
354	5	5.000000	-183.057281	-78.437798
355	6	5.000000	-183.025345	-78.446227
356	6	5.100000	-169.396179	-96.069305
357	6	5.200000	-155.767029	-112.327469
358	6	5.300000	-142.137863	-127.222710
359	6	5.400000	-128.508698	-140.755035
360	6	5.500000	-114.879547	-152.924454
361	6	5.600000	-101.373718	-163.737106
362	6	5.700000	-87.867905	-173.199203
363	6	5.800000	-74.362076	-181.310699
364	6	5.900000	-60.856247	-188.071625
365	6	6.000000	-47.350418	-193.481949
366	7	6.000000	-47.361027	-193.495163
367	7	6.100000	-33.855202	-197.555969
368	7	6.200000	-20.349375	-200.246205
369	7	6.300000	-6.843548	-201.625854
370	7	6.400000	6.662277	-201.634918
371	7	6.500000	20.168102	-200.293396
372	7	6.600000	32.848404	-197.642563
373	7	6.700000	45.528694	-193.723709
374	7	6.800000	58.208992	-188.536819
375	7	6.900000	70.889297	-182.081924
376	7	7.000000	83.569580	-174.358978
377	8	7.000000	83.554092	-174.369003
378	8	7.100000	96.234390	-165.379578
379	8	7.200000	108.914688	-155.122131
380	8	7.300000	121.594986	-143.596634
381	8	7.400000	134.275289	-130.693131
382	8	7.500000	146.955566	-116.741592
383	8	7.600000	159.635843	-100.315605
384	8	7.700000	172.316120	-80.428787
385	8	7.800000	185.000000	-57.081139
386	8	7.900000	197.683877	-30.272617
387	8	8.000000	210.367754	-0.003284
388				

# ANEXO C

## VALORES DE INFLUENCIA

### ANÁLISIS A CORTO PLAZO

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 1 Col: 1 Pos: 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 38 Col: 58 Sel: 50 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Line	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7
73	4	2	3	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
74	4	2	4	0.0130949	0.0236398	0.2898979	
75	4	2	5	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
76	4	2	6	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
77	4	2	7	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
78	4	2	8	0.0105364	0.0001100	0.0011601	
79	4	2	9	0.0033421	0.0000241	0.0002523	
80	5	1	1	0.0018344	0.0000211	0.0000118	
81	5	1	2	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
82	5	1	3	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
83	5	1	4	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
84	5	1	5	0.3621325	0.4514291	0.9202359	
85	5	1	6	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
86	5	1	7	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
87	5	1	8	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
88	5	1	9	0.0018344	0.0000211	0.0000118	
89	5	2	1	0.0060808	0.0000700	0.0007393	
90	5	2	2	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
91	5	2	3	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
92	5	2	4	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
93	5	2	5	0.0130949	0.0236398	0.2898979	
94	5	2	6	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
95	5	2	7	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
96	5	2	8	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
97	5	2	9	0.0060808	0.0000700	0.0007393	
98	6	1	1	0.0009148	0.0000066	0.0000037	
99	6	1	2	0.0031045	0.0000325	0.0000182	
100	6	1	3	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
101	6	1	4	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
102	6	1	5	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
103	6	1	6	0.3621325	0.4514291	0.9202359	
104	6	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
105	6	1	8	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
106	6	1	9	0.0045126	0.0000956	0.0000550	
107	6	2	1	0.0033421	0.0000241	0.0002523	
108	6	2	2	0.0105364	0.0001100	0.0011601	
109	6	2	3	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
110	6	2	4	0.0425390	0.0018419	0.0202893	

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 74 Col: 58 Sel: 50 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Line	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7
109	6	2	3	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
110	6	2	4	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
111	6	2	5	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
112	6	2	6	0.0130949	0.0236398	0.2898979	
113	6	2	7	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
114	6	2	8	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
115	6	2	9	0.0121660	0.0002506	0.0027720	
116	7	1	1	0.0005194	0.0000026	0.0000015	
117	7	1	2	0.0015951	0.0000106	0.0000059	
118	7	1	3	0.0031045	0.0000325	0.0000182	
119	7	1	4	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
120	7	1	5	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
121	7	1	6	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
122	7	1	7	0.3621325	0.4514291	0.9202359	
123	7	1	8	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
124	7	1	9	0.0159492	0.0000895	0.0004961	
125	7	2	1	0.0020005	0.0000099	0.0001028	
126	7	2	2	0.0059032	0.0000391	0.0004103	
127	7	2	3	0.0105364	0.0001100	0.0011601	
128	7	2	4	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
129	7	2	5	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
130	7	2	6	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
131	7	2	7	0.0130949	0.0236398	0.2898979	
132	7	2	8	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
133	7	2	9	0.0249288	0.0012864	0.0142555	
134	8	1	1	0.0003224	0.0000012	0.0000006	
135	8	1	2	0.0009248	0.0000042	0.0000024	
136	8	1	3	0.0015951	0.0000106	0.0000059	
137	8	1	4	0.0031045	0.0000325	0.0000182	
138	8	1	5	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
139	8	1	6	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
140	8	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
141	8	1	8	0.3621325	0.4514291	0.9202359	
142	8	1	9	0.1128588	0.0253107	0.0230715	
143	8	2	1	0.0012818	0.0000046	0.0000478	
144	8	2	2	0.0035897	0.0000165	0.0001718	
145	8	2	3	0.0059032	0.0000391	0.0004103	
146	8	2	4	0.0105364	0.0001100	0.0011601	

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 110 Col: 58 Sel: 50 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Line	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6	Col 7
133	7	2	9	0.0249288	0.0012864	0.0142555	
134	8	1	1	0.0003224	0.0000012	0.0000006	
135	8	1	2	0.0009248	0.0000042	0.0000024	
136	8	1	3	0.0015951	0.0000106	0.0000059	
137	8	1	4	0.0031045	0.0000325	0.0000182	
138	8	1	5	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
139	8	1	6	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
140	8	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
141	8	1	8	0.3621325	0.4514291	0.9202359	
142	8	1	9	0.1128588	0.0253107	0.0230715	
143	8	2	1	0.0012818	0.0000046	0.0000478	
144	8	2	2	0.0035897	0.0000165	0.0001718	
145	8	2	3	0.0059032	0.0000391	0.0004103	
146	8	2	4	0.0105364	0.0001100	0.0011601	
147	8	2	5	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
148	8	2	6	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
149	8	2	7	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
150	8	2	8	0.0130949	0.0236398	0.2898979	
151	8	2	9	0.0264120	0.0070129	0.0832907	
152	9	1	1	0.0002136	0.0000006	0.0000003	
153	9	1	2	0.0005831	0.0000019	0.0000011	
154	9	1	3	0.0009248	0.0000042	0.0000024	
155	9	1	4	0.0015951	0.0000106	0.0000059	
156	9	1	5	0.0031045	0.0000325	0.0000182	
157	9	1	6	0.0072977	0.0001381	0.0000792	
158	9	1	7	0.0239296	0.0010596	0.0006430	
159	9	1	8	0.1508454	0.0289048	0.0254999	
160	9	1	9	0.1810663	0.2257145	0.4601180	
161	9	2	1	0.0008668	0.0000024	0.0000245	
162	9	2	2	0.0023296	0.0000078	0.0000816	
163	9	2	3	0.0035897	0.0000165	0.0001718	
164	9	2	4	0.0059032	0.0000391	0.0004103	
165	9	2	5	0.0105364	0.0001100	0.0011601	
166	9	2	6	0.0206709	0.0003885	0.0041531	
167	9	2	7	0.0425390	0.0018419	0.0202893	
168	9	2	8	0.0576921	0.0101197	0.1187738	
169	9	2	9	0.0065475	0.0118199	0.1449489	
170							

# ANEXO D

## ARCHIVO DE DATOS PARA EL PROGRAMA ISE3D

### ANÁLISIS A LARGO PLAZO

```
Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana ?
ZapCon8sec.dat ZapCon8sec.dat
1 "ZAPATA CORRIDA /C INTERACCIÓN SE"
2 UNIDADES UTILIZADAS
3 "kN" "m" "kN/m" "kN/m2" "kN/m3"
4 Lin/NLin EXP CMPCP CMPLP CMPLFS
5 0 0 1 1 0
6 2 !NUMERO DE MATERIALES
7 ! MAT GAMA E POISSON
8 CONC200 0.0 1130000.00 0.2 !CUIDADO CON EL NOMBRE DEL MATERIAL, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA SECCIÓN
9 CONC250 0.0 22135943.6 0.2
10 1 !NUMERO DE SECCIONES
11 ! SECC MAT b h
12 VIGAL40x59 CONC250 1.4 0.589697 !CUIDADO CON EL NOMBRE DE LA SECCIÓN, DEBE SER IGUAL CAUNDO SE INVOQUE EN CADA BARRA
13 9 !NUMERO DE NODOS
14 ! NN X Y Z GLX GLY GLZ GLMX GLMY GLMZ PERFIL Df
15 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
16 2 1.0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
17 3 2.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
18 4 3.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
19 5 4.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
20 6 5.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
21 7 6.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
22 8 7.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
23 9 8.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
24 9 !NUMERO DE BARRAS
25 NBAR SECC i j ROT FacV WCVMax WCVMed WCVAcc WCM WEPV
26 1 VIGAL40x59 1 2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
27 2 VIGAL40x59 2 3 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
28 3 VIGAL40x59 3 4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
29 4 VIGAL40x59 4 5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
30 5 VIGAL40x59 5 6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
31 6 VIGAL40x59 6 7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
32 7 VIGAL40x59 7 8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
33 8 VIGAL40x59 8 9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
34
35 0 !# DE ZAPATAS AISLADAS
36 ! N b l h nodo
37
38 0 !LOSAS
39
40
41 3 !CARGAS CONCENTRADAS
42 NODO FX FY FZ MX MY MZ
23 9 8.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
24 8 !NUMERO DE BARRAS
25 NBAR SECC i j ROT FacV WCVMax WCVMed WCVAcc WCM WEPV
26 1 VIGAL40x59 1 2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
27 2 VIGAL40x59 2 3 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
28 3 VIGAL40x59 3 4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
29 4 VIGAL40x59 4 5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
30 5 VIGAL40x59 5 6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
31 6 VIGAL40x59 6 7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
32 7 VIGAL40x59 7 8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
33 8 VIGAL40x59 8 9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
34
35 0 !# DE ZAPATAS AISLADAS
36 ! N b l h nodo
37
38 0 !LOSAS
39
40
41 3 !CARGAS CONCENTRADAS
42 NODO FX FY FZ MX MY MZ
43 1 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
44 5 0. 0. -640.00 0. 0. 0.
45 9 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
46
47 1 10.3 !NUMERO DE PERFILES DE SUELO, PRESIÓN ATMOSFÉRICA
48 2 !# ESTRATOS DE PERFIL 1
49 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
50 1 2 1.4 16.00
51 4632.00 0.50 0.47 749.0 0.50 300 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN INMEDIATA : Eu,NU,k0,k,n,A_DEM
52 2546.82 78.00 359.41 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN DIFERIDA, CONSOLIDACION PRIMARIA : (Ev,NU=0,AP,T)
53 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
54 2 2 1.4 18.00
55 7448.00 0.50 0.47 749.0 0.50 300 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN INMEDIATA : Eu,NU,k0,k,n,A_DEM
56 3286.32 86.00 61.18 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN DIFERIDA, CONSOLIDACION PRIMARIA : (Ev,NU=0,AP,T)
57 # Ejes #particiones de la barra
58 1
59 EJE 1
60 8 1 2 3 4 5 6 7 8
61
62
63
```

```
Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana ?
ZapCon8sec.dat ZapCon8sec.dat
23 9 8.0 0 0.0 1 1 0 1 0 1 1 0.8
24 8 !NUMERO DE BARRAS
25 NBAR SECC i j ROT FacV WCVMax WCVMed WCVAcc WCM WEPV
26 1 VIGAL40x59 1 2 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
27 2 VIGAL40x59 2 3 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
28 3 VIGAL40x59 3 4 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
29 4 VIGAL40x59 4 5 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
30 5 VIGAL40x59 5 6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
31 6 VIGAL40x59 6 7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
32 7 VIGAL40x59 7 8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
33 8 VIGAL40x59 8 9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 32.04 0.0 0
34
35 0 !# DE ZAPATAS AISLADAS
36 ! N b l h nodo
37
38 0 !LOSAS
39
40
41 3 !CARGAS CONCENTRADAS
42 NODO FX FY FZ MX MY MZ
43 1 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
44 5 0. 0. -640.00 0. 0. 0.
45 9 0. 0. -320.00 0. 0. 0.
46
47 1 10.3 !NUMERO DE PERFILES DE SUELO, PRESIÓN ATMOSFÉRICA
48 2 !# ESTRATOS DE PERFIL 1
49 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
50 1 2 1.4 16.00
51 4632.00 0.50 0.47 749.0 0.50 300 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN INMEDIATA : Eu,NU,k0,k,n,A_DEM
52 2546.82 78.00 359.41 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN DIFERIDA, CONSOLIDACION PRIMARIA : (Ev,NU=0,AP,T)
53 Estrato TipoSuelo Espesor Gama
54 2 2 1.4 18.00
55 7448.00 0.50 0.47 749.0 0.50 300 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN INMEDIATA : Eu,NU,k0,k,n,A_DEM
56 3286.32 86.00 61.18 % PROPIEDADES PARA COMPRESIÓN DIFERIDA, CONSOLIDACION PRIMARIA : (Ev,NU=0,AP,T)
57 # Ejes #particiones de la barra
58 1
59 EJE 1
60 8 1 2 3 4 5 6 7 8
61
62
63
```

# ANEXO E

## ELEMENTOS MECÁNICOS EN LAS BARRAS

### ANÁLISIS A LARGO PLAZO

Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana 2

ZapConBsec.dat ZapConBscp.dat ZapConBsecp.sal

DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS POR EJE  
EJE 1

BARRA	X	V	M	
540	1	0.000000	-319.990967	0.001955
541	1	0.100000	-282.344666	-30.114826
542	1	0.200000	-244.698349	-56.466980
543	1	0.300000	-207.052032	-79.054504
544	1	0.400000	-169.405731	-97.877388
545	1	0.500000	-131.759430	-112.935646
546	1	0.600000	-119.949814	-125.521118
547	1	0.700000	-108.140205	-136.925598
548	1	0.800000	-96.330597	-147.149155
549	1	0.900000	-84.520981	-156.191727
550	1	1.000000	-72.711372	-164.053329
551	2	1.000000	-72.652573	-164.090286
552	2	1.100000	-60.842964	-170.765060
553	2	1.200000	-49.033356	-176.258881
554	2	1.300000	-37.223743	-180.571732
555	2	1.400000	-25.414135	-183.703629
556	2	1.500000	-13.604527	-185.654556
557	2	1.600000	-0.238625	-186.346725
558	2	1.700000	13.127272	-185.702286
559	2	1.800000	26.493170	-183.721268
560	2	1.900000	39.859074	-180.403656
561	2	2.000000	53.224968	-175.749451
562	3	2.000000	53.079533	-175.756073
563	3	2.100000	66.445435	-169.779831
564	3	2.200000	79.811333	-162.466980
565	3	2.300000	93.177231	-153.817551
566	3	2.400000	106.543137	-143.831543
567	3	2.500000	119.909027	-132.508942
568	3	2.600000	133.228394	-119.852058
569	3	2.700000	146.547729	-105.863258
570	3	2.800000	159.867081	-90.542503
571	3	2.900000	173.186432	-73.889839
572	3	3.000000	186.505768	-55.905231
573	4	3.000000	186.548569	-55.841927
574	4	3.100000	199.867920	-36.521103
575	4	3.200000	213.187271	-15.868343
576	4	3.300000	226.506622	6.116352
577	4	3.400000	239.825958	29.432983

Normal text file length: 29.696 lines: 628 Ln: 385 Col: 42 Sel: 37 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana 2

ZapConBsec.dat ZapConBscp.dat ZapConBsecp.sal

577	4	3.400000	239.825958	29.432983
578	4	3.500000	253.145309	54.081543
579	4	3.600000	266.509277	80.064285
580	4	3.700000	279.873230	107.383392
581	4	3.800000	293.237213	136.038925
582	4	3.900000	306.601196	166.030869
583	4	4.000000	319.965118	197.359161
584	5	4.000000	-319.956268	197.351089
585	5	4.100000	-306.592316	166.023666
586	5	4.200000	-293.228333	136.032623
587	5	4.300000	-279.864380	107.377991
588	5	4.400000	-266.500397	80.059753
589	5	4.500000	-253.136444	54.077911
590	5	4.600000	-239.817108	29.430233
591	5	4.700000	-226.497772	6.114498
592	5	4.800000	-213.178406	-15.869333
593	5	4.900000	-199.859070	-36.521202
594	5	5.000000	-186.539734	-55.841118
595	6	5.000000	-186.555893	-55.880119
596	6	5.100000	-173.236542	-73.869743
597	6	5.200000	-159.917206	-90.527428
598	6	5.300000	-146.597855	-105.853180
599	6	5.400000	-133.278503	-119.847000
600	6	5.500000	-119.959167	-132.508881
601	6	5.600000	-106.593262	-143.836502
602	6	5.700000	-93.227371	-153.827530
603	6	5.800000	-79.861465	-162.481979
604	6	5.900000	-66.495560	-169.799835
605	6	6.000000	-53.129662	-175.781097
606	7	6.000000	-53.136227	-175.798218
607	7	6.100000	-39.770325	-180.443542
608	7	6.200000	-26.404427	-183.752289
609	7	6.300000	-13.038525	-185.724426
610	7	6.400000	0.327374	-186.359985
611	7	6.500000	13.693272	-185.658951
612	7	6.600000	25.502888	-183.699142
613	7	6.700000	37.312500	-180.558380
614	7	6.800000	49.122116	-176.236633
615	7	6.900000	60.931740	-170.733963
616	7	7.000000	72.741348	-164.050293
617	8	7.000000	72.722458	-164.073715

Normal text file length: 29.696 lines: 628 Ln: 577 Col: 42 Sel: 37 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

589	5	4.500000	-253.136444	54.077911
590	5	4.600000	-239.817108	29.430233
591	5	4.700000	-226.497772	6.114498
592	5	4.800000	-213.178406	-15.869333
593	5	4.900000	-199.859070	-36.521202
594	5	5.000000	-186.539734	-55.841118
595	6	5.000000	-186.555893	-55.880119
596	6	5.100000	-173.236542	-73.869743
597	6	5.200000	-159.917206	-90.527428
598	6	5.300000	-146.597855	-105.853180
599	6	5.400000	-133.278503	-119.847000
600	6	5.500000	-119.959167	-132.508881
601	6	5.600000	-106.593262	-143.836502
602	6	5.700000	-93.227371	-153.827530
603	6	5.800000	-79.861465	-162.481979
604	6	5.900000	-66.495560	-169.799835
605	6	6.000000	-53.129662	-175.781097
606	7	6.000000	-53.136227	-175.796218
607	7	6.100000	-39.770325	-180.443542
608	7	6.200000	-26.404427	-183.752289
609	7	6.300000	-13.038525	-185.724426
610	7	6.400000	0.327374	-186.359985
611	7	6.500000	13.693272	-185.658951
612	7	6.600000	25.502888	-183.699142
613	7	6.700000	37.312500	-180.558380
614	7	6.800000	49.122116	-176.236633
615	7	6.900000	60.931740	-170.733963
616	7	7.000000	72.741348	-164.050293
617	8	7.000000	72.722458	-164.073715
618	8	7.100000	84.532074	-156.210983
619	8	7.200000	96.341690	-147.187297
620	8	7.300000	108.151306	-136.942657
621	8	7.400000	119.960922	-125.537033
622	8	7.500000	131.770538	-112.950470
623	8	7.600000	169.416855	-97.891090
624	8	7.700000	207.063141	-79.067093
625	8	7.800000	244.709457	-56.478462
626	8	7.900000	282.355774	-30.125195
627	8	8.000000	320.002075	-0.007313
628				

# ANEXO F

## VALORES DE INFLUENCIA

### ANÁLISIS A LARGO PLAZO

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 1 Col: 1 Pos: 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 42 Col: 58 Sel: 50 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Line	Column	Field 1	Field 2	Field 3	Field 4	Field 5	Field 6	Field 7
81	5	1	2	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
82	5	1	3	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
83	5	1	4	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
84	5	1	5	0.3621325	0.4514291	0.9202359		
85	5	1	6	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
86	5	1	7	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
87	5	1	8	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
88	5	1	9	0.0018344	0.0000211	0.0000118		
89	5	2	1	0.0060808	0.0000700	0.0007393		
90	5	2	2	0.0206709	0.0003885	0.0041531		
91	5	2	3	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
92	5	2	4	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
93	5	2	5	0.0130949	0.0236398	0.2898979		
94	5	2	6	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
95	5	2	7	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
96	5	2	8	0.0206709	0.0003885	0.0041531		
97	5	2	9	0.0060808	0.0000700	0.0007393		
98	6	1	1	0.0009148	0.0000066	0.0000037		
99	6	1	2	0.0031045	0.0000325	0.0000182		
100	6	1	3	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
101	6	1	4	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
102	6	1	5	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
103	6	1	6	0.3621325	0.4514291	0.9202359		
104	6	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
105	6	1	8	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
106	6	1	9	0.0045126	0.0000956	0.0000550		
107	6	2	1	0.0033421	0.0000241	0.0002523		
108	6	2	2	0.0105364	0.0001100	0.0011601		
109	6	2	3	0.0206709	0.0003885	0.0041531		
110	6	2	4	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
111	6	2	5	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
112	6	2	6	0.0130949	0.0236398	0.2898979		
113	6	2	7	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
114	6	2	8	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
115	6	2	9	0.0121660	0.0002586	0.0027720		
116	7	1	1	0.0005194	0.0000026	0.0000015		
117	7	1	2	0.0015951	0.0000106	0.0000059		
118	7	1	3	0.0031045	0.0000325	0.0000182		
119	7	1	4	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
120	7	1	5	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
121	7	1	6	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
122	7	1	7	0.3621325	0.4514291	0.9202359		

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 82 Col: 58 Sel: 50 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

Line	Column	Field 1	Field 2	Field 3	Field 4	Field 5	Field 6	Field 7
121	7	1	6	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
122	7	1	7	0.3621325	0.4514291	0.9202359		
123	7	1	8	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
124	7	1	9	0.0159492	0.0008095	0.0004961		
125	7	2	1	0.0020005	0.0000099	0.0001028		
126	7	2	2	0.0059032	0.0000391	0.0004103		
127	7	2	3	0.0105364	0.0001100	0.0011601		
128	7	2	4	0.0206709	0.0003885	0.0041531		
129	7	2	5	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
130	7	2	6	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
131	7	2	7	0.0130949	0.0236398	0.2898979		
132	7	2	8	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
133	7	2	9	0.0249288	0.0012864	0.0142555		
134	8	1	1	0.0003224	0.0000012	0.0000006		
135	8	1	2	0.0009248	0.0000042	0.0000024		
136	8	1	3	0.0015951	0.0000106	0.0000059		
137	8	1	4	0.0031045	0.0000325	0.0000182		
138	8	1	5	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
139	8	1	6	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
140	8	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
141	8	1	8	0.3621325	0.4514291	0.9202359		
142	8	1	9	0.1128588	0.0253107	0.0230715		
143	8	2	1	0.0012818	0.0000046	0.0000478		
144	8	2	2	0.0035897	0.0000165	0.0001718		
145	8	2	3	0.0059032	0.0000391	0.0004103		
146	8	2	4	0.0105364	0.0001100	0.0011601		
147	8	2	5	0.0206709	0.0003885	0.0041531		
148	8	2	6	0.0425390	0.0018419	0.0202893		
149	8	2	7	0.0576921	0.0101197	0.1187738		
150	8	2	8	0.0130949	0.0236398	0.2898979		
151	8	2	9	0.0264120	0.0070129	0.0832907		
152	9	1	1	0.0002136	0.0000006	0.0000003		
153	9	1	2	0.0005831	0.0000019	0.0000011		
154	9	1	3	0.0009248	0.0000042	0.0000024		
155	9	1	4	0.0015951	0.0000106	0.0000059		
156	9	1	5	0.0031045	0.0000325	0.0000182		
157	9	1	6	0.0072977	0.0001381	0.0000792		
158	9	1	7	0.0239296	0.0010596	0.0006430		
159	9	1	8	0.1508454	0.0289048	0.0254999		
160	9	1	9	0.1810663	0.2257145	0.4601180		
161	9	2	1	0.0008668	0.0000024	0.0000245		
162	9	2	2	0.0023296	0.0000078	0.0000816		

Normal text file length: 9,711 lines: 170 Ln: 122 Col: 58 Sel: 51 | 1 Windows (CR LF) ANSI INS

130	7	2	6	0.0576921	0.0101197	0.1187738
131	7	2	7	0.0130949	0.0236398	0.2898979
132	7	2	8	0.0576921	0.0101197	0.1187738
133	7	2	9	0.0249288	0.0012864	0.0142555
134	8	1	1	0.0003224	0.0000012	0.0000006
135	8	1	2	0.0009248	0.0000042	0.0000024
136	8	1	3	0.0015951	0.0000106	0.0000059
137	8	1	4	0.0031045	0.0000325	0.0000182
138	8	1	5	0.0072977	0.0001381	0.0000792
139	8	1	6	0.0239296	0.0010596	0.0006430
140	8	1	7	0.1508454	0.0289048	0.0254999
141	8	1	8	0.3621325	0.4514291	0.9202359
142	8	1	9	0.1128588	0.0253107	0.0230715
143	8	2	1	0.0012818	0.0000046	0.0000478
144	8	2	2	0.0035897	0.0000165	0.0001718
145	8	2	3	0.0059032	0.0000391	0.0004103
146	8	2	4	0.0105364	0.0001100	0.0011601
147	8	2	5	0.0206709	0.0003885	0.0041531
148	8	2	6	0.0425390	0.0018419	0.0202893
149	8	2	7	0.0576921	0.0101197	0.1187738
150	8	2	8	0.0130949	0.0236398	0.2898979
151	8	2	9	0.0264120	0.0070129	0.0832907
152	9	1	1	0.0002136	0.0000006	0.0000003
153	9	1	2	0.0005831	0.0000019	0.0000011
154	9	1	3	0.0009248	0.0000042	0.0000024
155	9	1	4	0.0015951	0.0000106	0.0000059
156	9	1	5	0.0031045	0.0000325	0.0000182
157	9	1	6	0.0072977	0.0001381	0.0000792
158	9	1	7	0.0239296	0.0010596	0.0006430
159	9	1	8	0.1508454	0.0289048	0.0254999
160	9	1	9	0.1810663	0.2257145	0.4601180
161	9	2	1	0.0008668	0.0000024	0.0000245
162	9	2	2	0.0023296	0.0000078	0.0000816
163	9	2	3	0.0035897	0.0000165	0.0001718
164	9	2	4	0.0059032	0.0000391	0.0004103
165	9	2	5	0.0105364	0.0001100	0.0011601
166	9	2	6	0.0206709	0.0003885	0.0041531
167	9	2	7	0.0425390	0.0018419	0.0202893
168	9	2	8	0.0576921	0.0101197	0.1187738
169	9	2	9	0.0065475	0.0118199	0.1449489
170						