



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FASE GEOMÉTRICA EN FÍSICA DE PLASMAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

NAHÚM EFRÉN VÁZQUEZ ESPINOSA

TUTOR

DR. EN C. JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELÁZQUEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mis padres por su apoyo y afecto a lo largo de toda mi formación académica y en mi vida.

A mis abuelos, que desde pequeño me cuidaron, educaron y trataron de llevarme por el mejor camino para ser mi mejor versión.

A mi hermana por tratar de ver lo mejor en mí.

A mis compañeros de la carrera por la maravillosa experiencia y memorables recuerdos.

A mi asesor por toda la paciencia que me tuvo, el apoyo que me brindó y el tiempo que se tomó.

Gracias a todos.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Antecedentes de Mecánica clásica	5
1.1. Mecánica de Hamilton	5
1.1.1. Ecuaciones de Hamilton	5
1.1.2. Transformaciones canónicas	7
1.2. Mecánica de Hamilton-Jacobi	8
1.3. Variables acción-ángulo	11
1.4. Invariantes adiabáticos	12
1.4.1. Oscilador armónico	14
1.4.2. Partícula en una mesa	28
1.4.3. Péndulo simple	32
1.4.4. Comentarios finales de invariantes adiabáticos	43
2. Elementos de electromagnetismo	45
2.1. Formulación hamiltoniana del campo magnético	45
2.1.1. Coordenadas toroidales	45
2.1.2. Formulación hamiltoniana del campo magnético	48
2.1.3. Superficies magnéticas	50
2.2. Partícula cargada en campos electromagnéticos	53
2.2.1. Campo magnético constante	53
2.2.2. Campos Eléctrico y Magnético constantes	55
2.2.3. Deriva por gradiente de B	58
2.2.4. Deriva por curvatura de B	61
2.3. Invariantes adiabáticos para una partícula cargada	61
2.3.1. Momento magnético	62
2.3.2. Variable de Acción	66
3. Fase geométrica	69
3.1. Fase de Pancharatnam	70
3.2. Fase de Hannay	75
3.3. Fase de Berry	83

4. Fase geométrica y campos magnéticos	89
4.1. Fase geométrica en giromovimiento	89
4.2. Fase geométrica e invariantes adiabáticos	96
5. Conclusiones	99
Apéndice A. Elementos de análisis matemático y ecuaciones diferenciales	103
A.1. Análisis matemático	103
A.2. Ecuaciones Diferenciales	105
Apéndice B. Simulación de los invariantes en python	107
B.1. Simulación del Oscilador Armónico	107
B.2. Simulación del péndulo	112
Bibliografía	113

Índice de figuras

1.1. Cambio lineal de frecuencia en 10 segundos	19
1.2. Posición para cambio lineal de frecuencia en 10 segundos	20
1.3. Comparación cambio lineal de frecuencia en 10 segundos	20
1.4. Cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos	20
1.5. Posición para cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos	21
1.6. Comparación cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos	21
1.7. Cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos	21
1.8. Posición para cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos	22
1.9. Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos	22
1.10. Cambio lineal de frecuencia en 1 minuto	22
1.11. Posición para cambio lineal de frecuencia en 1 minuto	23
1.12. Comparación cambio lineal de frecuencia en 1 minuto	23
1.13. Cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto	23
1.14. Posición para cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto	24
1.15. Comparación cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto	24
1.16. Cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto	24
1.17. Posición para cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto	25
1.18. Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto	25
1.19. Cambio lineal de frecuencia en 10 minutos	25
1.20. Posición para cambio lineal de frecuencia en 10 minutos	26
1.21. Comparación cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto	26
1.22. Cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos	26
1.23. Posición para cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos	27
1.24. Comparación cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos	27
1.25. Cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos	27
1.26. Posición para cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos	28
1.27. Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos	28
1.28. Diagrama de partícula en una mesa	29
1.29. Diagrama del péndulo de longitud variable	32
1.30. Cambio lineal de longitud en 10 segundos	38
1.31. Cambio lineal de longitud en 1 minuto	38
1.32. Cambio lineal de longitud en 10 minutos	38
1.33. Cambio exponencial de longitud en 10 segundos	39
1.34. Cambio exponencial de longitud en 1 minuto	39

1.35. Cambio exponencial de longitud en 10 minutos	39
1.36. Cambio gaussiano de longitud en 10 segundos	40
1.37. Cambio gaussiano de longitud en 1 minuto	40
1.38. Cambio gaussiano de longitud en 10 minutos	40
1.39. Simulación por 60 segundos	41
1.40. Simulación por 600 segundos	42
1.41. Simulación por 60000 segundos	43
2.1. Curvas al dejar x_2 constante	46
2.2. Curvas de nivel en polares	46
2.3. Curvas de nivel para coordenadas toroidales en 2D	47
2.4. Rotación para obtener coordenadas en \mathbb{R}^3	47
2.5. Flujo a través de una superficie	51
2.6. Flujo toroidal	52
2.7. Flujo poloidal	53
2.8. Trayectoria a lo largo de un campo magnético constante	55
2.9. Trayectoria con deriva $E \times B$	57
B.1. Simulación sin condición para evitar no unicidad	111

Introducción

Dentro de la física de plasmas es de suma importancia tratar el problema de transporte de partículas en campos magnéticos. Para ello hay que entender ¿Cómo se mueven las partículas dentro de un plasma? Y siendo mas generales ¿Como es la trayectoria de un grupo de partículas cuando se someten a un campo electromagnético? Para atacar este problema hay varios acercamientos, uno popular consiste en tratar al conjunto de partículas como un fluido [1]; otro acercamiento consiste en tratarlas de manera individual, en este acercamiento la trayectoria de cada partícula es influenciada a primer orden por el campo electromagnético externo vía la fuerza de Lorentz [2]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q \vec{E} + q \frac{dx}{dt} \times \vec{B}, \quad (1)$$

sin embargo la trayectoria también va a ser afectada por su interacción con las otras partículas del plasma, por ejemplo, cada una de las partículas produce un campo electromagnético adicional que naturalmente va a contribuir en la ecuación (1); para un tratamiento mas sencillo podríamos asumir que estos campos adicionales son considerablemente pequeños y despreciables; sin embargo con tales consideraciones aun existe la posibilidad de que las partículas colisionen entre si, lo que afectaría la trayectoria. Realmente tratar el problema de la trayectoria de una partícula en un plasma no es trivial aunque es de gran importancia en el estudio de la fusión nuclear. Así pues conviene estudiar la ecuación (1) en escenarios sencillos e idealizados para darnos una idea de como son las trayectorias de una partícula. El caso mas simple consiste en tener el campo eléctrico igual a 0 y un campo magnético constante, supongamos paralelo al eje Z, para tal configuración la solución a (1) son hélices dadas por [3]:

$$\vec{x}(t) = (v_{\parallel} t + z_i) (0, 0, 1) + r (\sin(\omega t + \delta) - \sin(\delta), \cos(\omega t + \delta) - \cos(\delta), 0) + (x_i, y_i, 0), \quad (2)$$

donde v_{\parallel} es la componente paralela al campo magnético de la velocidad inicial, r es el llamado girorradio y evidentemente es el radio de la hélice, que viene dado por:

$$r = \frac{v_{\perp}}{\omega}, \quad (3)$$

y ω es la frecuencia de giro que viene dada por:

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (4)$$

la expresión (2) se puede reescribir como:

$$\vec{x}(t) = X(t) + r(\sin(\omega t + \delta), \cos(\omega t + \delta), 0), \quad (5)$$

la expresión anterior es fácil de reconocer como una hélice con eje dado por X que en este caso es paralelo al campo magnético. La resolución de este caso podría motivar a pensar que en el caso general las soluciones son hélices cuyo eje se mueve sobre las líneas de campo magnético, sin embargo esto no ocurre. A las desviaciones del centro de las hélices respecto de las líneas de campo se les llama "Derivas" [1]; una que es particularmente relevante en física de plasmas es la deriva por curvatura [1]:

$$v_d = \frac{mv_{\parallel}^2}{RB^2} \vec{R} \times \vec{B}, \quad (6)$$

con v_d la velocidad de deriva y \vec{R} el vector de curvatura. Esta deriva es importante porque en las configuraciones típicas para confinar plasmas se usan dispositivos toroidales donde inevitablemente las líneas de campo se van a curvar. Otra deriva que es importante es la de gradiente de campo magnético pues la magnitud del campo en la práctica no es homogénea, esta deriva viene dada por:

$$v_d = \frac{rv_{\perp}}{2B^2} \vec{B} \times \nabla B. \quad (7)$$

En la literatura al centro X de la hélice se le suele llamar "girorradio" [1] y a esta descripción se le llama "giromovimiento"; pero ¿Por qué estudiar el giromovimiento? No olvidemos que el problema es entender como se transportan las partículas en presencia de un campo magnético, en cierta forma el centro de giromovimiento da una aproximación de la posición de la partícula, pues la trayectoria se puede pensar como círculos alrededor de dicho centro, a la distancia que hay entre la posición real de la partícula y su centro de giromovimiento se le llama "Radio de Larmor". En principio la intuición nos diría que si el radio de Larmor es "pequeño" obtener la trayectoria de giromovimiento nos dará una aproximación muy buena de la trayectoria real de la partícula, sin embargo, como veremos en este trabajo hay correcciones de forma irremediable que no se pueden ignorar.

Dado que el problema de interacción es complejo se han buscado métodos alternativos para describir la física sin necesidad de obtener explícitamente las trayectorias. Éste es un enfoque que se utiliza en varias ramas de la física, por ejemplo en mecánica para un campo conservativo que no depende del tiempo se sabe que la energía total es constante [4], para una fuerza central el momento angular es constante [4] y en un sistema periódico la variable de acción se conserva [5] donde se define la variable de acción como:

$$S = \oint pdq, \quad (8)$$

un poco menos conocido es que la variable de acción se conserva si el sistema periódico se perturba “poco”, en estas condiciones se dice que la variable de acción es un invariante adiabático. Para una partícula cargada en un campo magnético uniforme las coordenadas X y Y son periódicas por lo que su variable de acción es constante, mas aún bajo perturbaciones “pequeñas” del campo magnético la acción debería mantener su conservación. En física de plasmas hay otra cantidad que es invariante adiabático: el momento magnético, estas dos cantidades y en general cualquier otra que sea invariante adiabático nos da bastante información sobre la física del sistema, por ejemplo, la conservación del momento magnético es la razón de que los espejos magnéticos funcionen y las partículas “reboten” en las regiones donde las líneas de campo son mas densas, este comportamiento se puede deducir sin necesidad de conocer exactamente la trayectoria de las partículas, simplemente se requiere conocer la ley de conservación.

Calcular el valor de la variable de acción requiere resolver la integral (8), sin embargo para ello se requiere conocer la trayectoria de la partícula pues es una integral de línea; una alternativa sería usar como curva la trayectoria de giromovimiento y después añadir correcciones que son proporcionales a potencias del girorradio [6]. La idea detrás de esto es que si el girorradio es “pequeño” cada corrección va siendo mas pequeña; al hacer esto aparece una contribución al invariante de acción que impacta la física del sistema, la contribución se va a deber a que las trayectorias de la partícula no necesariamente se cierran cuando las trayectorias de giromovimiento cierran [7], es decir, aunque el centro de la hélice vuelve a su punto original la partícula no necesariamente vuelve a su punto de partida, esta diferencia se puede cuantificar con el ángulo de diferencia entre la posición inicial y final de la trayectoria de la partícula. De bastante relevancia es que hay una contribución a este ángulo que solo depende de la trayectoria de giromovimiento que se siguió [8], y dado que esta depende del campo magnético se sigue que la fase depende de los valores que tomó el campo, no le importa la carga ni la masa de la partícula, es decir, es un ejemplo de una fase cuyo origen es puramente geométrico que tiene un impacto real en la física.

La distribución del trabajo escrito es la siguiente: En el capítulo 2 se presentan los elementos de mecánica requeridos, se hace un breve repaso de la mecánica lagrangiana y del concepto de acción, luego pasamos a la mecánica hamiltoniana para después ir a la mecánica de Hamilton-Jacobi que es un marco muy poderoso para estudiar sistemas con cantidades conservadas donde trabajamos con variables de acción-ángulo, se termina con unos ejemplos donde la variable de acción es un invariante adiabático y se formaliza la condición matemática que se requiere para que se de la conservación. En el capítulo 3 se trabaja con los elementos de teoría electromagnética que se requieren, se da un breve repaso de coordenadas toroidales, con ello se ve la formulación hamiltoniana del campo magnético; después se trabaja con la interacción de una partícula con el campo magnético para revisar el concepto de derivadas, se termina con los invariantes adiabáticos para plasmas y se

formaliza la condición de adiabaticidad. En el capítulo 4 se estudian 3 ejemplos de Fase geométrica, el primero es la fase de Pancharatnam que trata sobre el cambio de fase que se induce en un haz por cambiar su estado de polarización, el segundo es la fase de Hannay que es la fase que se induce en la variable de ángulo en sistemas clásicos, el último es la fase de Berry que es la fase asociada a una función de onda en mecánica cuántica que se induce por perturbar el hamiltoniano del sistema. En el capítulo 5 se trabaja con la fase que aparece en el giromovimiento de una partícula cargada debido a que se mueve en un campo magnético variable, se discute como contribuye al cálculo de la variable de acción cuando se tiene una partícula cuyo centro de giro es periódico. Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

1 Antecedentes de Mecánica clásica

Se inicia con un repaso sobre la mecánica hamiltoniana y lagrangiana, para después poder abordar el marco teórico de Hamilton-Jacobi donde las cantidades conservadas van a ser centrales; en toda esta parte el concepto de acción será fundamental para la teoría. Después pasaremos al estudio de las variables de acción-ángulo y con ello se puede pasar a trabajar con los invariantes adiabáticos que serán elementos protagónicos en el presente trabajo escrito; se encontraron las condiciones que se requieren para definir de forma rigurosa que se entiende por “cambiar lentamente” en un proceso adiabático y se hicieron simulaciones en Python para corroborar la conservación de la variable de acción.

1.1. Mecánica de Hamilton

1.1.1. Ecuaciones de Hamilton

La Mecánica Analítica es una teoría muy poderosa y nos ha dado una gran variedad de formulaciones para abordar diferentes tipos de problemas, una de las más famosas es la mecánica hamiltoniana, en ella se parte de una función $H(q, p, t)$ llamada hamiltoniano que depende de las coordenadas q y los momentos p ; a partir de ella se obtienen las ecuaciones de movimiento para las coordenadas y los momentos generalizados [5]:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1.2)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema, que es una función del momento, de la coordenada, y en general del tiempo. Si se parte de la mecánica Newtoniana las ecuaciones arriba mencionadas se pueden deducir. Sin embargo se puede trabajar en el marco de la mecánica hamiltoniana, en tal caso las ecuaciones arriba mencionadas se postulan, no se deducen, y el hamiltoniano es una función arbitraria que se postula dependiendo del problema físico que se aborde [9]; es decir, cada problema físico tendrá asociado un hamiltoniano que a su vez induce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución a dicho sistema nos describe la dinámica del problema. En tales condiciones las últimas dos leyes de Newton se

pueden deducir, de hecho es fácil ver que la ecuación (1.2) corresponde a la segunda Ley de Newton. Es decir, la mecánica newtoniana y la hamiltoniana son equivalentes [9].

Existe otro formalismo de la mecánica clásica que es el formalismo lagrangiano, en dicho esquema se postula una función $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ llamada lagrangiano y se define una funcional llamada acción como:

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, \tau) d\tau. \quad (1.3)$$

En este formalismo se postula que las trayectorias del sistema físico son aquellas que vuelvan extrema la acción. Al aplicar principios variacionales se nota que las curvas que minimizan las funcionales de la forma (1.3) deben satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange [10]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right). \quad (1.4)$$

Se puede probar [5] que si se define el momento generalizado como $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ los formalismos hamiltoniano y lagrangiano son equivalentes pues se puede obtener el hamiltoniano del lagrangiano a través de una transformada de Legendre:

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}. \quad (1.5)$$

En efecto, de la definición de momento y del hamiltoniano se sigue que:

$$p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (p\dot{q} - \mathcal{H}) = \dot{q} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} + p - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}}, \quad (1.6)$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}}, \quad (1.7)$$

pero desarrollando a la parcial del hamiltoniano con respecto a p se llega a que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p}, \quad (1.8)$$

en la deducción de la última igualdad se usó que $\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = 0$. Juntando (1.7) con (1.8) se concluye que:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}. \quad (1.9)$$

Por otro lado, usando la definición de momento generalizado en la ecuación (1.4) podemos obtener:

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad (1.10)$$

en la última igualdad se usó (1.9). Las ecuaciones (1.9) y (1.10) son las ecuaciones de Hamilton, como se buscaba mostrar, concluyendo que la mecánica lagrangiana implica la mecánica hamiltoniana. De forma análoga se puede ver la otra implicación.

Como última observación del formalismo lagrangiano consideremos el caso en el que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, es decir $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ y supongamos que $(q(t), p(t))$ es una curva solución del sistema. Por la regla de la cadena notamos que la derivada del hamiltoniano es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.11)$$

en virtud de las ecuaciones (1.1) y (1.2) y de que el hamiltoniano no depende del tiempo llegamos a que:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (1.12)$$

Es decir, el hamiltoniano se conserva en las curvas solución del sistema. Si ahora usamos la ecuación (1.5) en la (1.3) deducimos que:

$$S = \int_{t_0}^t (p\dot{q} - \mathcal{H}) d\tau = \int_{t_0}^t p\dot{q} d\tau - \int_{t_0}^t \mathcal{H} d\tau. \quad (1.13)$$

Como el hamiltoniano es constante en las trayectorias físicas tenemos que, limitándonos a las trayectorias solución, la segunda integral es simplemente el valor del hamiltoniano por el intervalo de tiempo. La primer integral es conocida como acción reducida y está definida como:

$$S' := \int_{t_0}^t p\dot{q} d\tau = \int_{q_0}^q p d\tilde{q}. \quad (1.14)$$

Como la variable de acción reducida y la acción están relacionadas por (1.13) en algunas fuentes se define la variable de acción como en (1.14) [5] y se le llama simplemente "acción", como veremos mas adelante esa definición de acción resulta práctica cuando se trabaja con las variables acción-ángulo.

1.1.2. Transformaciones canónicas

Parte del poder de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica clásica es que son independientes de las coordenadas elegidas, es decir, las ecuaciones son las mismas sin importar que se decida describir el movimiento con coordenadas cartesianas, polares o cualquier posibilidad. Lo único que se debe tener en cuenta es que al cambiar de un sistema coordenado a otro seguramente cambiará la descripción del hamiltoniano; en general se pueden postular cambios de coordenadas que mezclen las coordenadas y los momentos, en tal caso puede que las ecuaciones si cambien [5]. Sin embargo existe una familia de cambios que preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, a tales transformaciones se les llama Transformaciones Canónicas .

Supongamos que partimos de una descripción inicial con coordenadas q_i, p_i con hamiltoniano \mathcal{H} y queremos pasar a una descripción con coordenadas y momentos Q_i, P_i con hamiltoniano \mathcal{K} donde $Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), P_i = P_i(q_i, p_i, t)$. Se puede probar que la relación entre los hamiltonianos viene dada por [5]:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.15)$$

la función F se llama función generadora y en general puede tener 4 formas: $F_1(q_i, Q_i, t), F_2(q_i, P_i, t), F_3(p_i, Q_i, t), F_4(p_i, P_i, t)$, a las que se les llama del primer, segundo, tercer y cuarto tipo respectivamente [5]. Asimismo, los nuevos momentos y las nuevas coordenadas se relacionan con la función generadora, por ejemplo, para una función del segundo tipo se cumple que [5]:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (1.16)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \quad (1.17)$$

1.2. Mecánica de Hamilton-Jacobi

Ahora bien ¿Con que hamiltoniano se va a trabajar? Dado un problema físico pueden existir una variedad enorme de hamiltonianos y coordenadas para abordarlo, así que sería prudente escoger uno que nos haga la vida mas sencilla. En la práctica los problemas mas sencillos son aquellos que tienen cantidades conservadas, como la conservación de la energía, del momento lineal o del momento angular. Así pues, parece sensato trabajar con un hamiltoniano que explícitamente muestre que cantidades se conservan, este marco es conocido como Teoría de Hamilton-Jacobi.

Ya conocemos las ecuaciones de movimiento canónicas para un hamiltoniano dado, una forma sencilla de encontrar cantidades conservadas es trabajar con un hamiltoniano cuyas ecuaciones de movimiento nos den directamente las cantidades conservadas, es decir, que el momento generalizado y la coordenada generalizada se conserven. Así pues, la pregunta es ¿Que forma debe tomar el hamiltoniano para que directamente se conserven las coordenadas y los momentos? La forma mas rápida de hacerlo es obligar al hamiltoniano transformado a ser la constante cero; Es decir, si usamos K para denotar al hamiltoniano modificado entonces vamos a imponer que $K(Q, P, t) = 0$.

Como ya mencionamos los dos hamiltonianos no son independientes, están relacionados por (1.15). Supongamos que el nuevo hamiltoniano se obtiene con una función generadora del tipo 2, es decir:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q_i, P_i, t). \quad (1.18)$$

Para este tipo de transformaciones se cumple que el momento original satisface la igualdad [5]:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (1.19)$$

Recordemos que queremos encontrar \mathcal{K} tal que sea igual a la constante cero; Usando las ecuaciones (1.16) y (1.17) se llega a que encontrar dicho \mathcal{K} es equivalente a encontrar F que satisfaga la ecuación:

$$\mathcal{H} \left(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (1.20)$$

esta ecuación es la famosa ecuación de Hamilton-Jacobi; una ecuación diferencial parcial de primer orden para F , es decir, para la función generadora. Hallar su solución es equivalente a resolver el problema mecánico [5].

A una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi se le suele llamar función principal de Hamilton, y se denotará por $\mathcal{S}(q_i, P_i, t)$. En la práctica los momentos P_i resultarán ser las condiciones iniciales para el problema planteado, que naturalmente deben ser constantes a lo largo de una trayectoria pues una misma curva esta definida por sus condiciones iniciales si se satisface el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias [11].

Como el hamiltoniano en el nuevo sistema se está construyendo para ser constante y la derivada de una función constante es cero se concluye que las ecuaciones de Hamilton para los nuevos momentos y coordenadas generalizadas son:

$$\dot{Q}_i = 0, \quad (1.21)$$

$$\dot{P}_i = 0, \quad (1.22)$$

Es decir, las coordenadas y los momentos generalizados serán constantes de movimiento, la parte de conservación para los momentos ya se sabía, sin embargo la parte de la conservación de las coordenadas generalizadas es nueva. Con la ecuación (1.21) podemos ver que resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi es equivalente a resolver el problema mecánico, pues una vez encontrada la función generadora podemos derivar y por la ecuación (1.17) se conocerán las coordenadas generalizadas que tienen un valor constante, teniendo una coordenada generalizada por cada coordenada física del problema original. Estas coordenadas generalizadas son funciones de las coordenadas originales y del tiempo, es decir, tenemos algo de la forma:

$$Q_i(q_j, P_j, t) = C_i, \forall i, \quad (1.23)$$

con C_i y P_i constantes. Podemos revertir la transformación si se asume que el cambio de coordenadas es localmente biyectivo [12] y así obtener que:

$$q_i = q_i(P_j, C_j, t), \quad (1.24)$$

y la expresión anterior nos da las soluciones al problema mecánico. Este marco es muy poderoso porque nos da directamente las cantidades conservadas, estas son funciones de la posición, la velocidad y el tiempo, así que, en principio, a partir de las cantidades conservadas se puede “despejar” a las coordenadas físicas como funciones del tiempo y de las condiciones iniciales.

Supongamos que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo y supongamos que existen $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de n funciones independientes de q y p que sabemos se conservan en una trayectoria. Por ejemplo, en el caso de potencial central podrían ser el momento angular y la energía. En tal escenario se puede dar un ansatz para la ecuación de Hamilto-Jacobi, al proponer [5]:

$$\mathcal{S}(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) t, \quad (1.25)$$

al sustituir (1.25) en (1.20) utilizando \mathcal{S} como F y usando que $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -f$ y $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}$ llegamos a:

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = f(\alpha_i), \quad (1.26)$$

Por como se construyó la función W las funciones α_i juegan el papel de los momentos generalizados, y por hipótesis estas α_i son constantes de movimiento, entonces cualquier función de ellas será constante, por lo que la ecuación (1.26) se convierte en:

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = cte, \quad (1.27)$$

La expresión anterior motiva considerar a la función W como una función generadora en lugar de \mathcal{S} de la expresión (1.25); al no depender del tiempo se sigue de la ecuación (1.15) que el hamiltoniano en las nuevas coordenadas obtenidas con W como generadora coincide con el viejo hamiltoniano, es decir

$$\mathcal{K}(Q_i, P_i) = \mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = f(\alpha_i). \quad (1.28)$$

Usando la ecuación de Hamilton para la nueva coordenada Q_i tenemos que:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = cte, \quad (1.29)$$

como f solo depende de las α_i se tiene que su derivada solo depende de ellas, y al ser estas constantes de movimiento al evaluar la función $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ en algunos valores iniciales también será constante, es decir, la solución para Q_i es:

$$Q_i = v_i t + Q_{i0}, \quad (1.30)$$

con v_i constante y Q_{i0} la condición inicial apropiada a cada problema. Además, por construcción tomamos los nuevos momentos como:

$$P_i = \alpha_i. \quad (1.31)$$

A la ecuación (1.27) también se le suele llamar Ecuación de Hamilton-Jacobi, y a una solución se le llama función característica de Hamilton.

1.3. Variables acción-ángulo

La teoría desarrollada hasta ahora es bastante general, y ello es simultáneamente una virtud y una complicación pues se puede aplicar en muchos casos pero quizá no es posible obtener la solución en términos cómodos para un problema particular. Como ya hemos dicho en la sección anterior no es necesario resolver el caso general, solo los casos que son de interés a estudiar. En particular es de mucho interés estudiar sistemas con movimiento periódico.

Empecemos con un movimiento unidimensional. ¿Que significa un movimiento periódico? En lo general hay dos tipos de movimiento periódico [5]. El primero es cuando simultáneamente q y p son funciones de periodo T , obsérvese que es el mismo periodo para ambas. El segundo tipo es cuando se puede escribir a p como función de q y dicha función es periódica.

Recordemos que en la teoría de Hamilton-Jacobi se trabaja con cantidades conservadas que tienen toda la información de la dinámica, y estas cantidades se vuelven los momentos generalizados. Por ello, para el caso de movimiento periódico trabajaremos con la variable:

$$J_i = \oint p_i dq_i, \quad (1.32)$$

a la que llamaremos variable de acción abreviada o simplemente acción, [5] pues como vimos en la ecuación (1.14) corresponde a la acción del sistema. Como la integral se esta efectuando sobre un ciclo y estamos suponiendo que el movimiento es periódico, esta integral es constante de movimiento por construcción y así podemos aplicar el formalismo de Hamilton-Jacobi con J_i en el papel del nuevo momento. A esta variable le corresponde una variable conjugada

$$\omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \quad (1.33)$$

donde W es la función característica de Hamilton solución a la ecuación (1.27). Esta variable se llamará variable de ángulo, por construcción satisface la ecuación (1.30) por lo que como función del tiempo la variable de ángulo satisface:

$$\omega_i = \nu_i (J_1, \dots, J_n) t + \omega_{i0}. \quad (1.34)$$

Ahora bien ¿Que le pasa a ω_i a lo largo de una trayectoria? Pues debe cambiar; escribiendo a ω_i como función de las coordenadas originales tenemos que su

cambio neto a lo largo de un ciclo se puede expresar como:

$$\Delta\omega_i = \oint d\omega_i = \sum_{j=1}^n \oint \frac{\partial\omega_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (1.35)$$

Recordando la definición de ω_i obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i &= \sum_{j=1}^n \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \frac{d}{dJ_i} \sum_{j=1}^n \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dJ_i} \int p_j dq_j = \sum_{j=1}^n \frac{dJ_j}{dJ_i} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = 1, \end{aligned} \quad (1.36)$$

pero por la expresión (1.34) sabemos que:

$$\Delta\omega_i = \nu_i \tau_i, \quad (1.37)$$

donde τ_i es el periodo para la coordenada q_i . De las expresiones (1.36) y (1.37) se concluye que:

$$\nu_i \tau_i = 1, \quad (1.38)$$

es decir, ν_i tiene interpretación física, es la frecuencia asociada al movimiento periódico de la coordenada q_i . Esta es una de las principales ventajas de trabajar con las variables acción-ángulo, pues si de antemano se sabe que un problema en cuestión es periódico se puede calcular directamente la variable de acción y escribir al hamiltoniano en términos de estas variables, luego se puede derivar al hamiltoniano con respecto de J_i y en virtud de la ecuación (1.29) se obtienen directamente las frecuencias del movimiento periódico, todo esto sin la necesidad de encontrar explícitamente la solución al problema mecánico.

1.4. Invariantes adiabáticos

Modelar sistemas dinámicos es difícil, no es de extrañarse que varios métodos numéricos se hayan desarrollado con el propósito expreso de estimar trayectorias de sistemas que no se podían resolver analíticamente. Ante la imposibilidad de encontrar soluciones analíticas uno podría desistir de buscar soluciones y simplemente optar por estudiar otro problema. Sin embargo, eso sería rendirse muy pronto. ¿Se puede rescatar algo de un sistema aún si no se conoce su solución exacta? La experiencia en lo que hemos desarrollado nos da una respuesta: Cantidades conservadas. Conocer la solución exacta de un sistema por supuesto que es útil pues te da toda la información posible de un sistema, sin embargo, a veces no es de interés toda la información, solo aquella que tiene un papel relevante en el movimiento estudiado, como pueden ser la energía o el momento angular. Una ventaja de estas variables es que hay situaciones en las que se conservan: la energía cuando el lagrangiano no depende del tiempo y el momento angular cuando no

depende de la dirección. Por lo tanto, al obtener su valor inicial sabremos su valor en cualquier tiempo.

Ahora bien, consideremos un sistema dinámico que tiene una dependencia explícita en el tiempo, y que dicha dependencia está dada a través de un parámetro $\lambda(t)$ que tiene alguna interpretación física, por ejemplo la energía del sistema o la longitud de un pedazo de cuerda. Ahora bien, supongamos que “congelamos” el parámetro en un valor $\lambda(t_0)$. Para dicho valor el sistema es autónomo y se pueden obtener las trayectorias solución. Dichas trayectorias en general van a cambiar si se cambia el valor del parámetro, por lo que se pueden construir familias de trayectorias solución, cada familia asociada a una λ . Podemos preguntarnos ¿Existe alguna cantidad conservada en el sistema original? En general es difícil encontrar respuesta, pero si suponemos que el parámetro λ cambia “lentamente” podemos llegar a soluciones que aproximan muy bien la realidad. Es a través de dicha suposición de “lentitud” que aparecen los invariantes adiabáticos, nuestra experiencia previa con la mecánica de Hamilton-Jacobi nos debe dar una idea, ya vimos que si el movimiento es periódico entonces la acción es una constante de movimiento, supongamos que en nuestro sistema físico que depende del parámetro λ al congelar el valor del parámetro las curvas solución son periódicas, entonces sabríamos directamente que $\int pdq$ es constante, así pues, si suponemos que el valor del parámetro cambia “poco” a lo largo de un periodo es de esperar que las curvas se modifiquen “poco” y por tanto la acción $\int pdq$ se conserve. El método previamente descrito tiene sus raíces en un problema de astronomía con el que la mayoría está familiarizado: El movimiento de los planetas en el sistema solar. Es bien sabido que si se considera solo la presencia del Sol el movimiento de un planeta es una elipse, para llegar a esta conclusión se puede utilizar toda la teoría para el problema de dos cuerpos [5]. Sin embargo, para el problema de tres cuerpos o más se conocen muy pocas soluciones exactas, por lo que no es posible obtener las trayectorias exactas de los planetas cuando se consideran sus interacciones con todos los cuerpos del sistema solar. Una manera de resolver este problema llega al notar que la mayor parte de la masa del sistema solar está concentrada en el Sol, por lo que podemos aproximar el movimiento de cualquier planeta como el movimiento que tendría si solo estuviera el Sol y luego añadir pequeñas perturbaciones. Mas específicamente lo que se hace es suponer que el movimiento de cualquier planeta es una elipse pero los parámetros que determinan dicha elipse cambian con el tiempo, estos parámetros incluyen: su excentricidad, su eje mayor, el ángulo del plano en el que se encuentra la elipse, etc. [13] Finalmente, apelando a que la mayor parte de la masa del sistema solar se encuentra en el Sol se asume que los parámetros de la elipse varían lentamente, por lo que se asume que a lo largo de un periodo los parámetros de la elipse no cambian de forma perceptible.

Para adentrarnos a este tema exploremos algunos de los ejemplos presentados en la literatura [14] [15] siendo mas rigurosos en las deducciones que se hacen, en particular poniendo mas rigor a lo que se entiende por “cambiar poco”; se necesitarán conceptos de Análisis y el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales que se puede consultar el Apéndice B o en su defecto revisar la bibliografía pertinente [16] [11].

1.4.1. Oscilador armónico

Consideremos un escenario típico de física: El oscilador armónico. Como es bien sabido su energía viene dada por [5]:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (1.39)$$

Por otro lado, su hamiltoniano coincide con la expresión para su energía [5]:

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (1.40)$$

Las soluciones a dicho sistema son bien conocidas, son ondas periódicas sinusoidales con periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, es decir [5]:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi), \quad (1.41)$$

luego, podemos derivar y obtener que:

$$\frac{dx}{dt} = X\omega \cos(\omega t + \phi). \quad (1.42)$$

Tenemos que nuestro movimiento es periódico, vamos a definir el promedio de una función en un tiempo t como la integral de dicha función a lo largo de un periodo y dividida por el mismo, se va a denotar como $\langle y \rangle$, es decir:

$$\langle y \rangle(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(s) ds. \quad (1.43)$$

Haciendo uso de la ecuación (1.42) podemos determinar la energía cinética promedio:

$$\langle K \rangle(t) = \frac{X^2 m \omega^2}{2\tau} \int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega t + \phi) dt, \quad (1.44)$$

pero $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, por lo que la expresión anterior se reescribe como:

$$\langle K \rangle(t) = \frac{mX^2\omega^2}{4\pi} \int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega t + \phi) \omega dt, \quad (1.45)$$

en virtud del cambio de variable [17] podemos resolver la integral y obtener:

$$\langle K \rangle(t) = \frac{mX^2\omega^2}{4}. \quad (1.46)$$

Vamos a promediar la energía potencial en un periodo, vemos que:

$$\langle V \rangle(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{m\omega^2 X^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{2} dt = \frac{m\omega X^2}{2\tau} \int_t^{t+\tau} \sin^2(\omega t + \phi) \omega dt, \quad (1.47)$$

resolviendo la integral obtenemos:

$$\langle V \rangle (t) = \frac{mX^2\omega^2}{4}. \quad (1.48)$$

Por otro lado, la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial, por lo que al promediar se sigue que:

$$\langle E \rangle (t) = \langle K \rangle (t) + \langle V \rangle (t), \quad (1.49)$$

mezclando las ecuaciones (1.46),(1.48) y (1.49) concluimos que:

$$\langle K \rangle (t) = \langle V \rangle (t) = \frac{\langle E \rangle (t)}{2}. \quad (1.50)$$

Como el oscilador armónico es conservativo [5] su energía es constante, por lo que su promedio es ella misma, así que la ecuación anterior queda:

$$\langle K \rangle (t) = \frac{E}{2}. \quad (1.51)$$

Ahora bien, supongamos que el parámetro ω puede variar adiabáticamente; en la literatura se entiende por adiabático que su cambio a lo largo de un periodo es despreciable, es decir, $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$ con $\Delta\omega$ el cambio de ω en un periodo [15], sin embargo, vamos a profundizar un poco más en lo que significa la hipótesis de adiabaticidad en este trabajo.

Con esto en mente, nos podemos preguntar ¿Cual es el cambio de la energía con respecto al tiempo?. Aplicando la regla de la cadena [12] a la ecuación (1.40) obtenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p\dot{p}}{m} + m\omega^2 x\dot{x} + mx^2\omega\dot{\omega}, \quad (1.52)$$

en virtud de las ecuaciones de Hamilton tenemos que:

$$\dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad (1.53)$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad (1.54)$$

sustituimos en la ecuación (1.52) y obtenemos que:

$$\frac{dE}{dt} = mx^2\omega\dot{\omega}, \quad (1.55)$$

es decir, el cambio en la energía es debido al cambio en ω .

Podemos calcular el promedio de la energía potencial en un periodo de oscilación como una integral. Para ello primero notemos que si ω como función del tiempo es de clase \mathcal{C}^1 el sistema va a tener soluciones de clase \mathcal{C}^2 [11]; en particular para el intervalo $[t, t + \tau] \forall t \in \mathbb{R}$ la solución $x(t)$ será continua y por lo tanto alcanza una amplitud máxima pues el intervalo es compacto [17]. Digamos que dicha

amplitud máxima es A_t , entonces nos preguntamos ¿Que significa que ω cambie de forma adiabática?, para ello tenemos que entender que en física la teoría se tiene que ajustar a la realidad observada, pero en el proceso de medición de la realidad hay de forma inevitable un intervalo de error tolerable pues los instrumentos de medición no tienen precisión infinita, con esto en mente podemos decir que el valor β es una aproximación físicamente válida para la variable α si $|\beta - \alpha| < \epsilon^*$ donde ϵ^* representa el valor del error tolerable. Supongamos que ϵ^* en este caso representa el error tolerable para la derivada de la energía.

Diremos que $\omega(t)$ evoluciona de forma adiabática en el intervalo $[t, t + \tau]$ si cumple las siguientes tres condiciones:

$$\left| \left\langle V \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right\rangle (t) - \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \langle V \rangle (t) \right| \leq \frac{\epsilon^*}{6} \quad (1.56)$$

$$\left| \langle V \rangle (t) - \frac{E(t)}{2} \right| \leq \frac{\epsilon^* \omega(t)}{6 \dot{\omega}(t)}, \quad (1.57)$$

$$\left| \frac{dE(t)}{dt} - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle (t) \right| \leq \frac{\epsilon^*}{3}, \quad (1.58)$$

En términos cualitativos las tres condiciones anteriores nos dicen respectivamente que:

1. El cociente $\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ en un periodo varia poco por lo que se puede considerar constante
2. La trayectoria $x(t)$ es suficientemente cercana a una sinusoidal como en el caso de ω constante por lo que la diferencia en el equivalente del resultado (1.51) es pequeño .
3. La tasa de cambio de la energía del sistema es para fines prácticos constante a lo largo de un periodo.

Como ya mencionamos se va a suponer que la función $\omega(t)$ es continua, por lo tanto en el intervalo compacto $[t, t + \tau]$ alcanza su máximo, denotémoslo por ω_{Mt} , en tal caso podemos garantizar que se satisface la ecuación (1.56) si se cumple que:

$$\left| \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} - \frac{\omega(\dot{\zeta})}{\omega(\zeta)} \right| \leq \frac{\epsilon^*}{3mA_t^2\omega_{Mt}^2} \forall \zeta \in [t, t + \tau], \quad (1.59)$$

en efecto, desarrollando la ecuación (1.56):

$$\left| \frac{1}{\tau(t)} \int_t^{t+\tau} V(x(\zeta)) \frac{\dot{\omega}(\zeta)}{\omega(\zeta)} d\zeta - \frac{\dot{\omega}(t)}{\tau(t)\omega(t)} \int_t^{t+\tau} V(x(\zeta)) d\zeta \right| \leq, \quad (1.60)$$

$$\frac{m}{2\tau(t)} \int_t^{t+\tau} \omega^2(\zeta) x^2(\zeta) \left| \frac{\omega(\dot{\zeta})}{\omega(\zeta)} - \frac{\omega(\dot{t})}{\omega(t)} \right| d\zeta,$$

en la expresión anterior se uso la desigualdad del triángulo para la integral [17]; usando la hipótesis de (1.59) en la expresión anterior tenemos que:

$$\left| \left\langle V \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right\rangle (t) - \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \langle V \rangle (t) \right| \leq \frac{m}{2\tau(t)} \omega_{Mt}^2 A_t^2 \frac{\epsilon^* \tau(t)}{3m A_t^2 \omega_{Mt}^2} = \frac{\epsilon^*}{6}, \quad (1.61)$$

la expresión anterior coincide con la primer condición de adiabaticidad por lo que basta pedir que se satisfaga (1.59), esta expresión nos cuantifica en términos mas precisos que significa pedir que $\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ " cambie poco " en un periodo.

Veamos que significa la condición de (1.57), denotemos por $\tilde{x}(\zeta)$ a la curva solución que se obtiene si el parámetro ω se queda fijo en su valor en el tiempo t durante el lapso $[t, t + \tau]$ y condiciones iniciales para el tiempo t que coincida con la solución de ω variable, es decir, $\tilde{x}(t) = x(t)$ y $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t)$, denotemos $\tilde{\omega} = \omega(t)$. Sabemos que dicha función será sinusoidal y por la ecuación (1.51) cumple que su energía cinética potencial es igual a la energía total entre 2, es decir:

$$\frac{1}{\tau(t)} \int_t^{t+\tau(t)} \frac{m \tilde{\omega}^2 \tilde{x}(\zeta)^2 d\zeta}{2} = \frac{E(t)}{2}, \quad (1.62)$$

con esto en mente notamos que la condición (1.57) es equivalente a pedir:

$$\frac{m}{2\tau(t)} \left| \int_t^{t+\tau(t)} \tilde{\omega}^2 \tilde{x}^2(\zeta) - \omega^2(\zeta) x^2(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{\epsilon^* \omega(t)}{6\dot{\omega}(t)}, \quad (1.63)$$

para satisfacer la ecuación anterior basta pedir que se cumpla:

$$\int_t^{t+\tau(t)} \left| \tilde{\omega}^2 \tilde{x}^2(\zeta) - \omega^2(\zeta) x^2(\zeta) \right| d\zeta \leq \frac{2\epsilon^* \pi}{3m\dot{\omega}(t)}, \quad (1.64)$$

la expresión anterior tiene significado matemático, podemos reconocer el lado de la izquierda como la norma del espacio $\mathcal{L}^1([t, t + \tau(t)])$ [16], así pues, podemos describir mejor que significa la segunda hipótesis de adiabaticidad: cuando pedimos que "la curva se parezca a una sinusoidal" nos referimos a que la función $\omega^2(\zeta) x^2(\zeta)$ esté en una épsilon vecindad [16] de $\tilde{\omega}^2(\zeta) \tilde{x}^2(\zeta)$ con la norma de $\mathcal{L}^1([t, t + \tau(t)])$.

Por último, supongamos que la función ω y su derivada satisfacen la siguiente acotación:

$$|\omega(\zeta) \dot{\omega}(\zeta)| \leq \frac{\epsilon^*}{12m A_t^2} \forall \zeta \in [t, t + \tau(t)]. \quad (1.65)$$

Al aplicar la desigualdad del triangulo para el valor absoluto en la desigualdad anterior es inmediato que:

$$|\omega(t) \dot{\omega}(t) - \omega(\zeta) \dot{\omega}(\zeta)| \leq \frac{\epsilon^*}{6m A_t^2} \forall \zeta \in [t, t + \tau(t)]. \quad (1.66)$$

Así pues, desarrollemos el término de la izquierda de la ecuación (1.58):

$$\left| \frac{dE}{dt}(t) - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle(t) \right| = \left| \frac{1}{\tau(t)} \int_t^{t+\tau} mx^2(t) \omega(t) \dot{\omega}(t) - mx^2(\zeta) \omega(\zeta) \dot{\omega}(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\frac{m}{\tau(t)} \int_t^{t+\tau} \left| x^2(t) [\omega(t) \dot{\omega}(t) - \omega(\zeta) \dot{\omega}(\zeta)] \right| + |\omega(\zeta) \dot{\omega}(\zeta)| \left| x^2(t) - x^2(\zeta) \right| d\zeta, \quad (1.67)$$

usando las cotas de (1.65) y (1.66) obtenemos:

$$\left| \frac{dE}{dt}(t) - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle(t) \right| \leq \frac{m}{\tau(t)} \left[\int_t^{t+\tau} A_t^2 \frac{\epsilon^*}{6mA_t^2} + 2A_t^2 \frac{\epsilon^*}{12mA_t^2} d\zeta \right] = \frac{\epsilon^*}{3}, \quad (1.68)$$

es decir, basta pedir que se cumpla (1.65) para satisfacer la tercer condición de adiabaticidad. En palabras coloquiales (1.65) nos dice que $\dot{\omega}$ debe ser “muy pequeño” que es como se suele describir en la literatura [15].

Volviendo a la ecuación (1.55), notamos que se puede reescribir como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2V(x) \dot{\omega}}{\omega}, \quad (1.69)$$

al usar las condiciones de adiabaticidad y la expresión anterior la siguiente diferencia se puede acotar:

$$\left| \frac{dE}{dt}(t) - \frac{E(t) \dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \right| \leq \left| \frac{dE}{dt}(t) - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle(t) \right| + \left| 2 \left\langle \frac{V\dot{\omega}}{\omega} \right\rangle - \frac{2\dot{\omega}}{\omega} \langle V \rangle \right| +$$

$$+ \left| \frac{2\dot{\omega}}{\omega} \langle V \rangle - \frac{E(t) \dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \right| \leq \frac{\epsilon^*}{3} + \frac{\epsilon^*}{3} + \frac{\epsilon^*}{3} = \epsilon^*, \quad (1.70)$$

dado que el error tolerable es menor a ϵ^* que es nuestro umbral de error podemos igualar los dos elementos y será válida para todos los fines de importancia física, concluyendo que:

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\omega}{\omega}. \quad (1.71)$$

Al resolver la ecuación (1.71) vemos que la relación entre la energía y la frecuencia de oscilación es:

$$\log \left(\frac{E}{\omega} \right) = \text{constante}, \quad (1.72)$$

o lo que es equivalente:

$$E\tau = \text{constante}. \quad (1.73)$$

Recordando lo que vimos en el capítulo de mecánica clásica vemos que la acción reducida se puede definir como:

$$S = \int_0^\tau p dq = 2\langle K \rangle \tau, \quad (1.74)$$

y nuevamente si la trayectoria es lo suficientemente cerca a una sinusoidal en un periodo podemos tomar el promedio de la energía cinética como la energía total entre 2; usando este resultado en la ecuación (1.74) llegamos a que la acción se conserva:

$$S = E\tau = \text{constante}, \quad (1.75)$$

así pues, este es nuestro invariante adiabático.

En lo siguiente se presentan simulaciones numéricas para contrastar los resultados previos. Primero se resuelve el sistema (1.40) por el método de Runge-Kutta de segundo orden y se grafican la posición, la frecuencia y la variable de acción como funciones del tiempo; posteriormente se resuelve el sistema asumiendo que la acción se conserva y se compara contra el resultado anterior. Para resolver el sistema cuando la acción se presupone constante se usa la ecuación (1.75); escribiendo la energía en términos de la posición y la velocidad se tiene que:

$$\frac{2\pi}{\omega(t)} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega(t)^2 x^2}{2} \right) = S_0 \quad (1.76)$$

lo que es equivalente a:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{S_0 \omega(t)}{m\pi} - \omega(t)^2 x^2}, \quad (1.77)$$

el sistema anterior es el que se resuelve numéricamente.

El código se implementó en el software Python y se puede consultar en el apéndice B.

Las primeras 3 simulaciones corresponden a variar la frecuencia del oscilador de forma lineal, exponencial y gaussiana desde 0.5 Hz a 0.25 Hz en 10 segundos.

Para el cambio de 10 segundos simulando el sistema original se obtuvo:

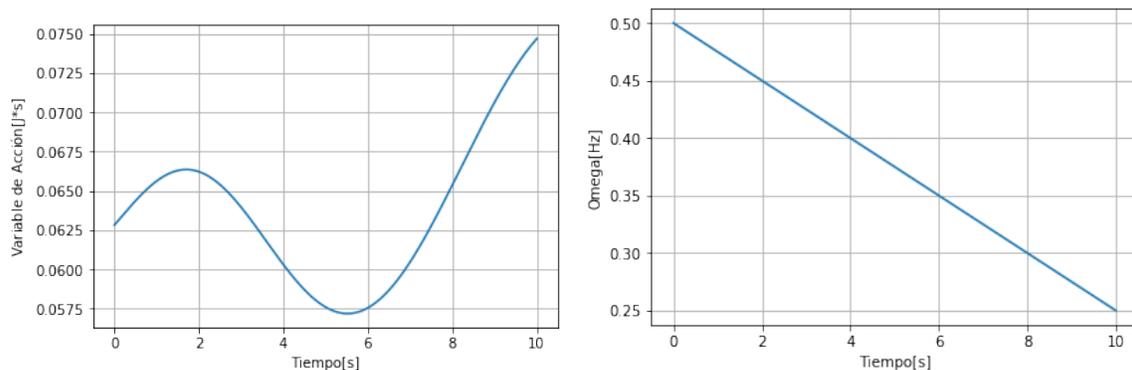


Figura 1.1: Cambio lineal de frecuencia en 10 segundos

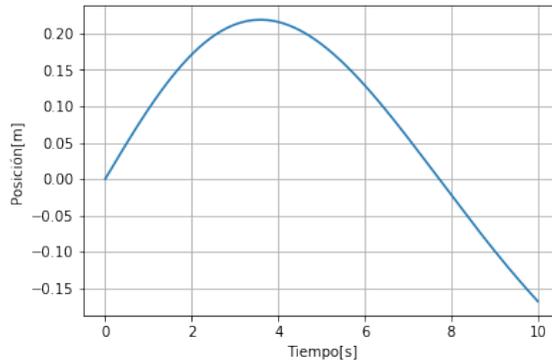


Figura 1.2: Posición para cambio lineal de frecuencia en 10 segundos

Se observa que la variación porcentual del invariante fue del 27.84 %.

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

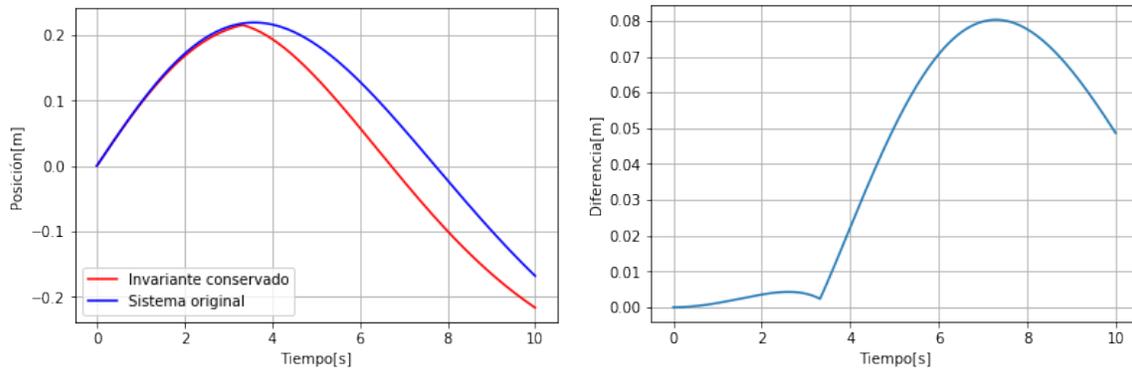


Figura 1.3: Comparación cambio lineal de frecuencia en 10 segundos

La diferencia porcentual máxima de la posición para los dos sistemas fue de 36.64 %.

En el caso de cambio exponencial en 10 segundos se obtuvo que:

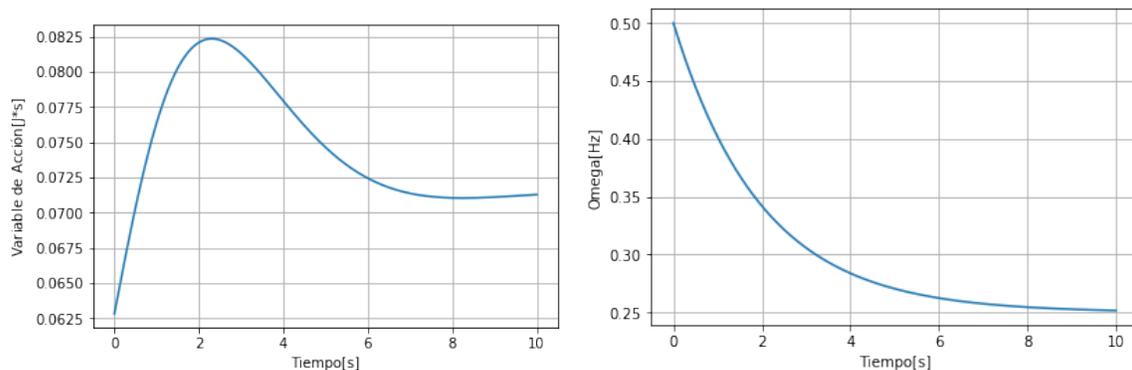


Figura 1.4: Cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos

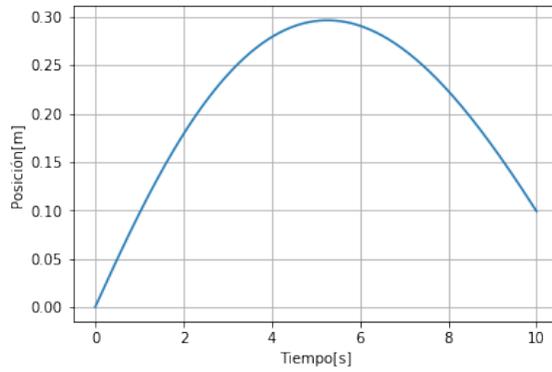


Figura 1.5: Posición para cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 31.06 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

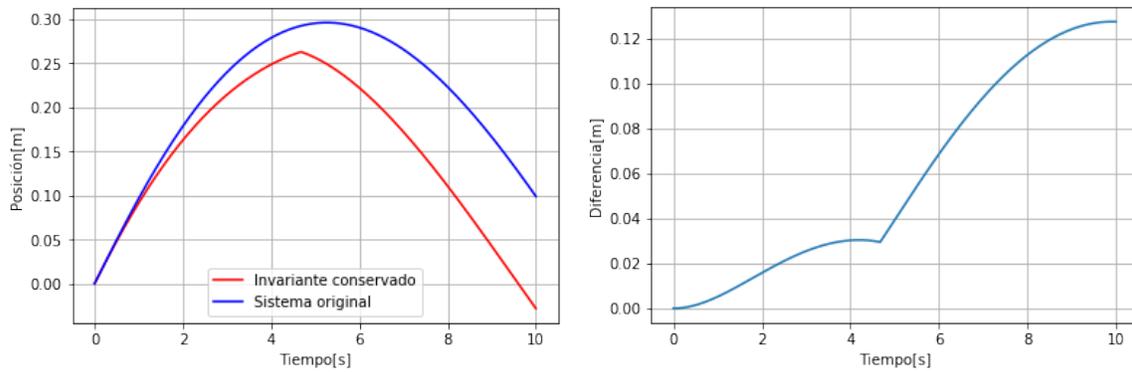


Figura 1.6: Comparación cambio exponencial de frecuencia en 10 segundos

La diferencia porcentual máxima de posición entre las dos simulaciones fue de 42.98 %.

Finalmente para el caso de cambio gaussiano en 10 segundos se obtuvo que:

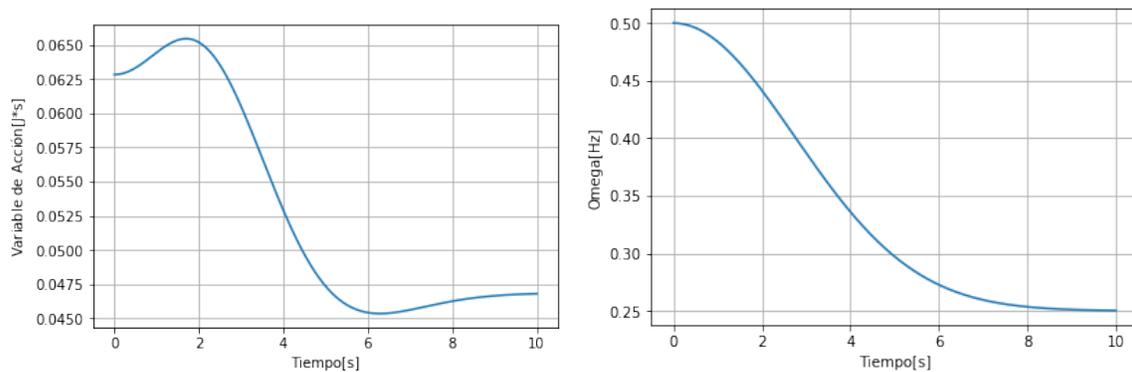


Figura 1.7: Cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos

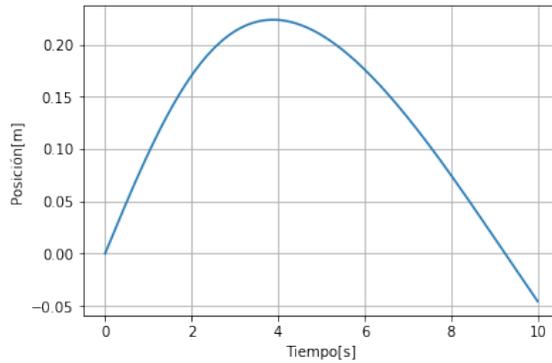


Figura 1.8: Posición parra cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 31.98 %.

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

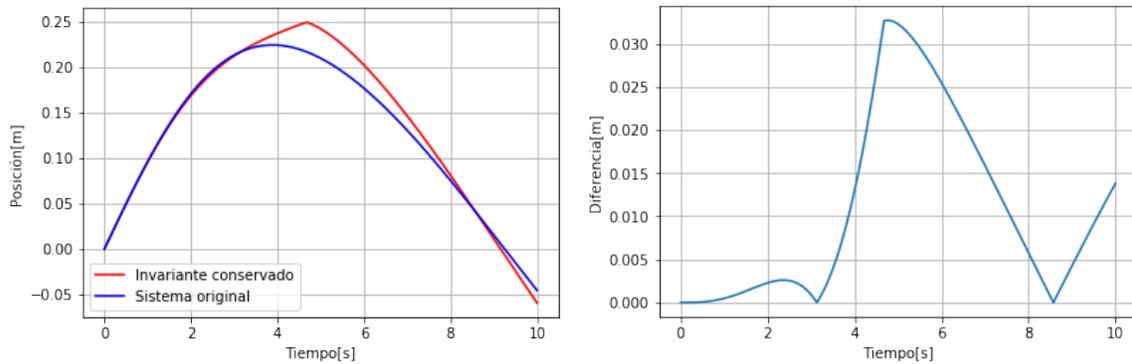


Figura 1.9: Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 10 segundos

La diferencia porcentual máxima de posición fue de 14.61 %.

Las siguientes 3 simulaciones asumen que la frecuencia cambia con las mismas funciones pero en un intervalo de 1 minuto

Para el cambio lineal en 1 minuto se obtuvo:

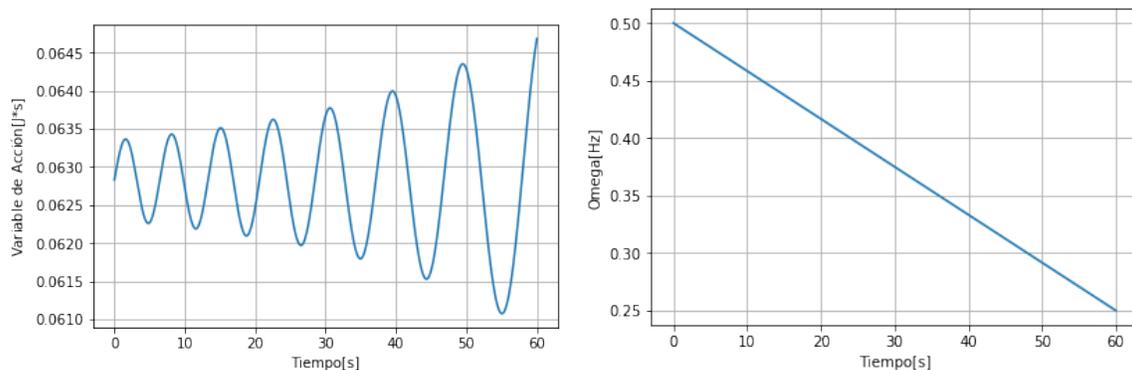


Figura 1.10: Cambio lineal de frecuencia en 1 minuto

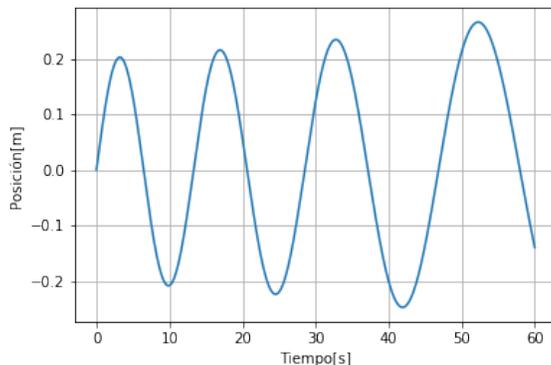


Figura 1.11: Posición para cambio lineal de frecuencia en 1 minuto

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 5.75 %
 Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

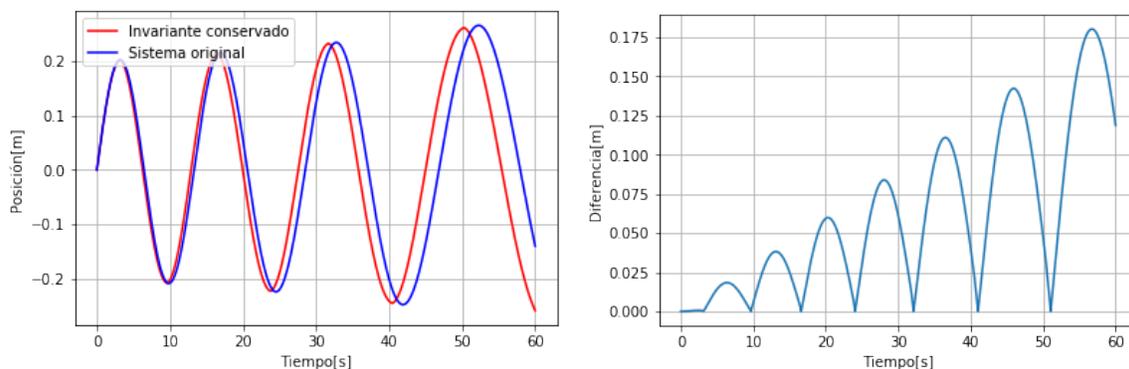


Figura 1.12: Comparación cambio lineal de frecuencia en 1 minuto

La diferencia porcentual máxima de posición fue de 67.80 %.
 Para el caso de cambio exponencial en 1 minuto se obtuvo:

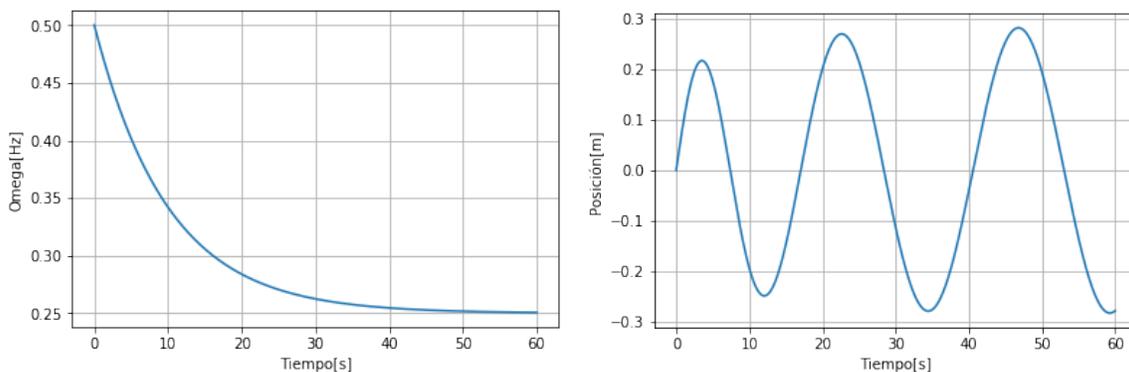


Figura 1.13: Cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto

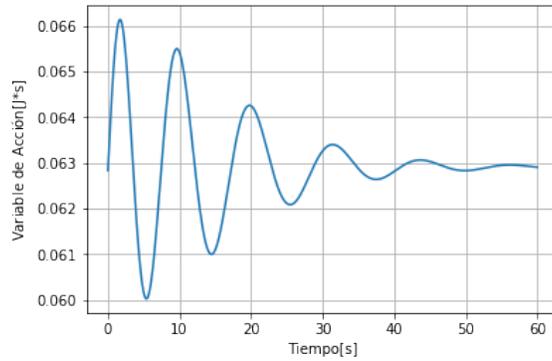


Figura 1.14: Posición para cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 9.72 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

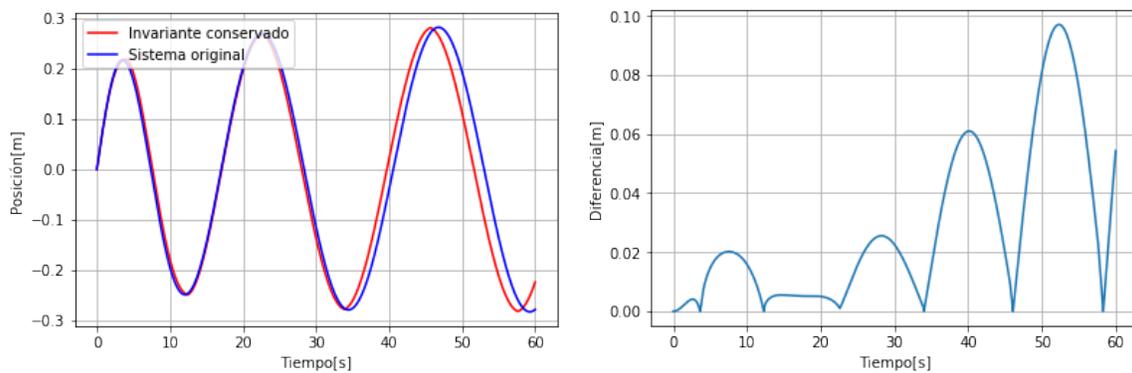


Figura 1.15: Comparación cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto

La diferencia porcentual máxima de posición fue de 34.44 %.

Por último en el caso de cambio gaussiano en 1 minuto se obtuvo:

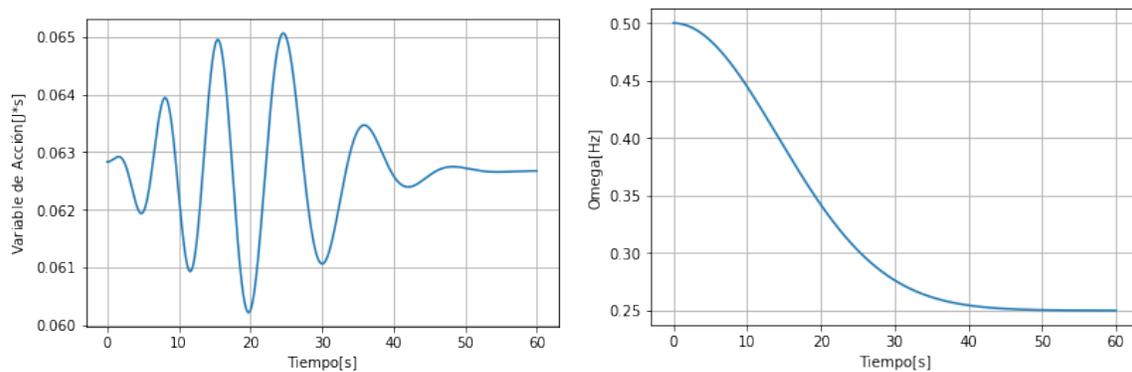


Figura 1.16: Cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto

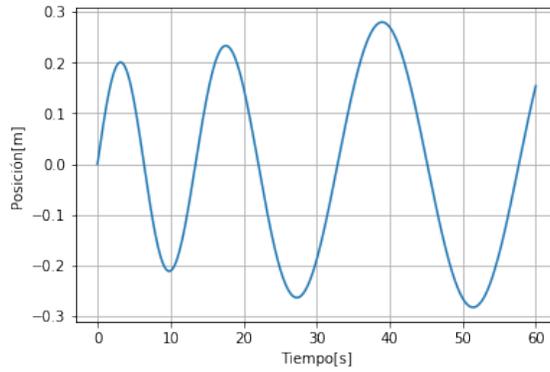


Figura 1.17: Posición para cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 7.71 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

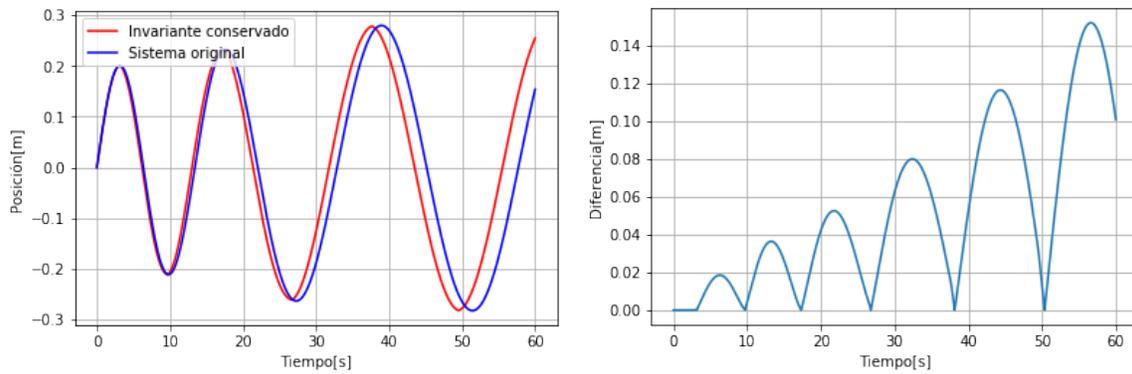


Figura 1.18: Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 1 minuto

La diferencia porcentual máxima de posición fue de 54.29 %.

Las últimas 3 simulaciones corresponden a casos donde el cambio se dio en 10 minutos.

Cuando el cambio fue lineal en 10 minutos se obtuvo:

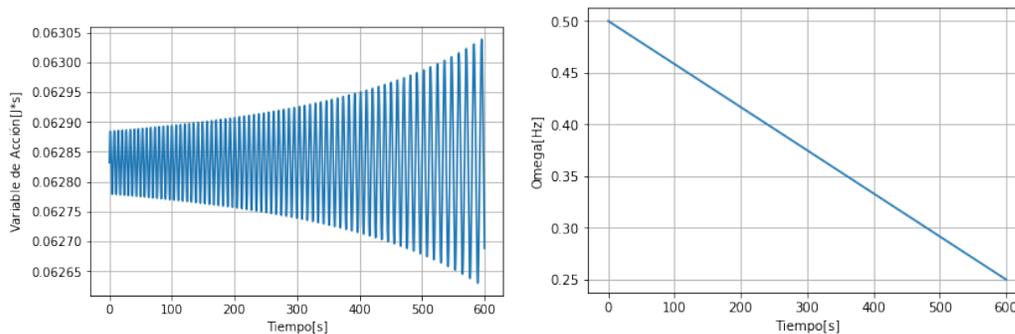


Figura 1.19: Cambio lineal de frecuencia en 10 minutos

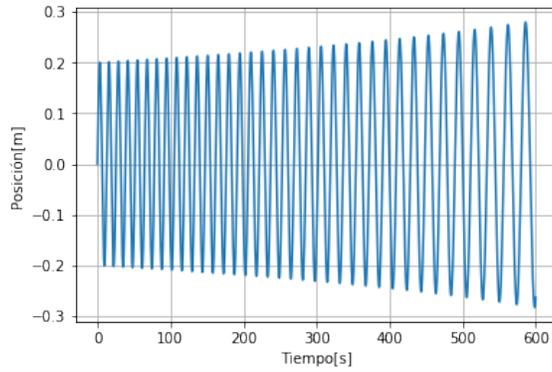


Figura 1.20: Posición para cambio lineal de frecuencia en 10 minutos

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 0.65 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

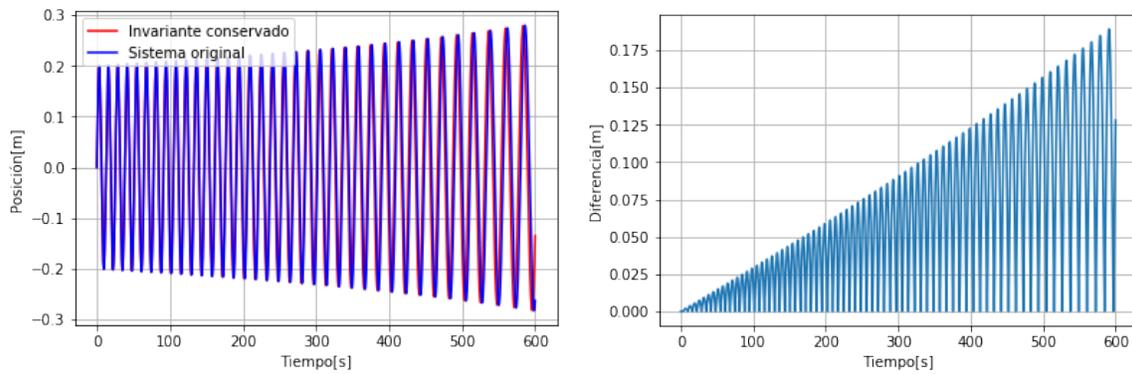


Figura 1.21: Comparación cambio exponencial de frecuencia en 1 minuto

La diferencia porcentual máxima para la posición fue de 67.62 %.
para el cambio exponencial en 10 minutos se obtuvo:

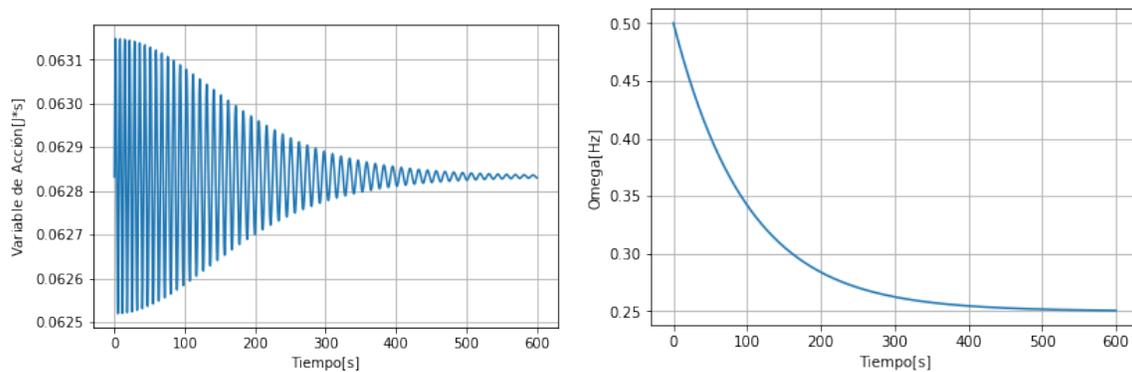


Figura 1.22: Cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos

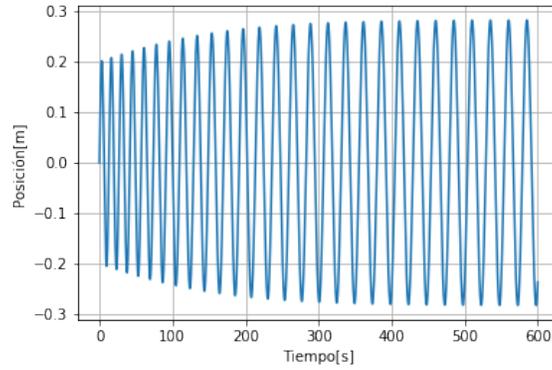


Figura 1.23: Posición para cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 1.00 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

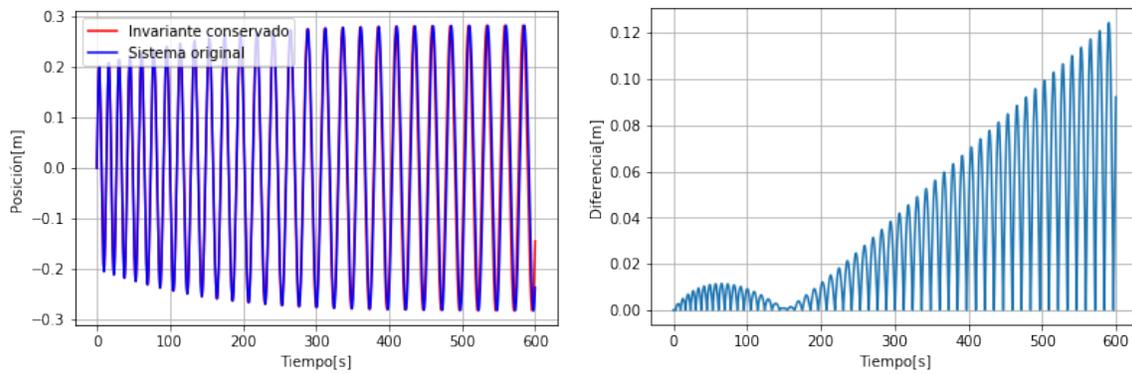


Figura 1.24: Comparación cambio exponencial de frecuencia en 10 minutos

La diferencia porcentual máxima para la posición fue de 44.02 %.

Por último, para el cambio gaussiano en 10 minutos se obtuvo:

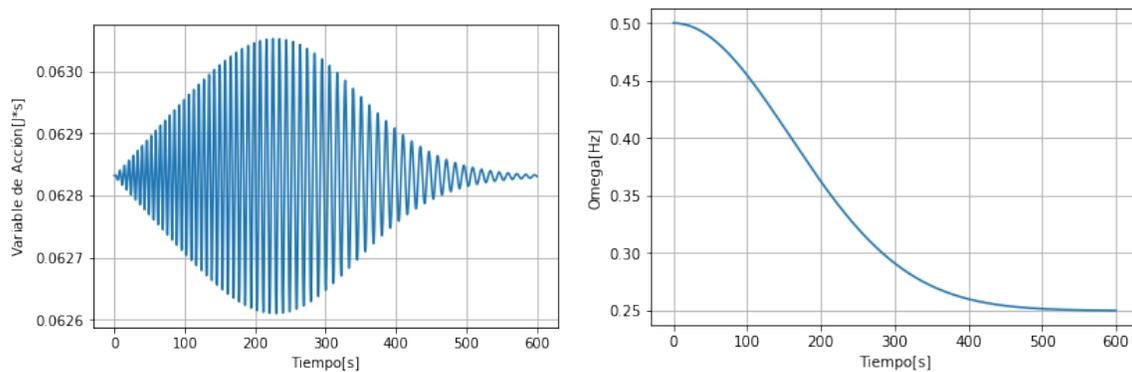


Figura 1.25: Cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos

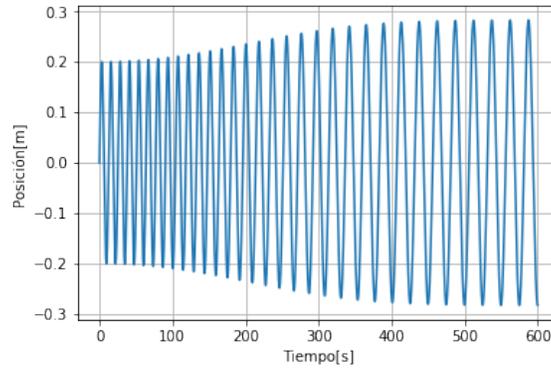


Figura 1.26: Posición para cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos

Obtenemos que la variación porcentual del invariante fue de 0.70 %

Al simular el sistema asumiendo conservación del invariante y comparar las dos simulaciones se obtuvo:

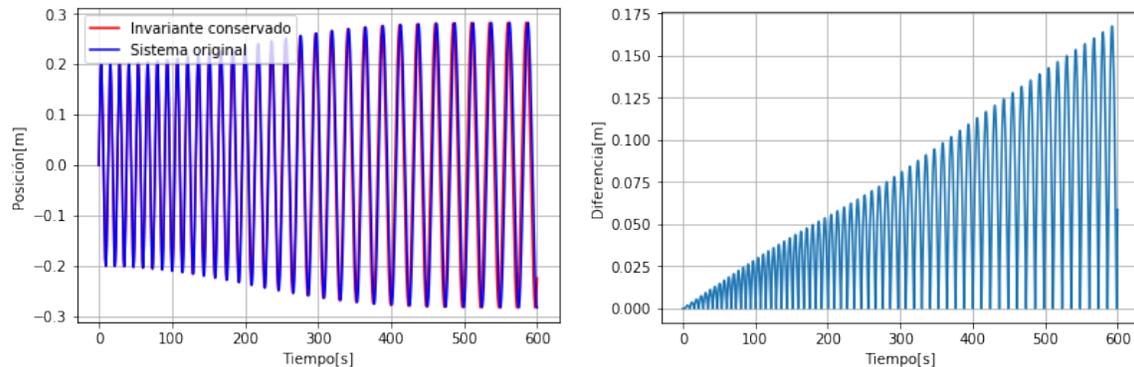


Figura 1.27: Comparación cambio gaussiano de frecuencia en 10 minutos

La diferencia porcentual máxima para la posición fue de 59.21 %.

En todos los casos observamos que mientras mayor sea el valor absoluto de la derivada de ω en el tiempo mayor será la variación del invariante adiabático; también se observa que cuando $\dot{\omega}$ tiende a cero el invariante tiende a ser constante. Por último, notamos numéricamente que la diferencia de resolver el sistema completo o resolverlo presuponiendo que el invariante se conserva da un error que puede acotarse como kt donde k es una constante, aunque este comportamiento se observó numéricamente no he encontrado justificación teórica en la literatura [15] [14] y es posible que existan casos donde esta cota no se respete.

1.4.2. Partícula en una mesa

Pasemos a otro problema sencillo: Una partícula sobre una mesa sin fricción que esta atada por una cuerda al centro de la mesa, la partícula se mueve con la única condición de que la cuerda siempre este tensa, la figura 1.28 ejemplifica este sencillo problema.

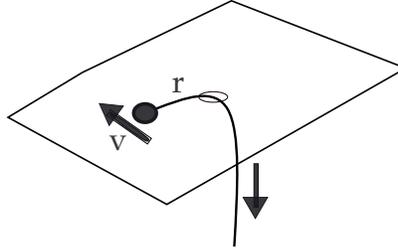


Figura 1.28: Diagrama de partícula en una mesa

Este problema es común para un estudiante que acaba de entrar a la carrera, sus soluciones son orbitas en movimiento circular uniforme. Vamos a complicarlo un poco. Supongamos que la longitud de la cuerda es variable en el tiempo, esto se puede conseguir si en el centro de la mesa hay un pequeño agujero por el que pasa la cuerda y un agente externo la jala para acortarla. La intuición nos dice que las trayectorias dejarán de ser círculos y se volverán espirales, la expresión exacta de la espiral dependerá de la fuerza con la que se jale la cuerda; así pues, nos preguntamos ¿Existe alguna cantidad conservada en este sistema? En este escenario la única fuerza actuando sobre la partícula es la tensión de la cuerda pues asumimos que no hay fricción con la mesa, por otra parte si colocamos un marco de referencia en el centro de la mesa tenemos que la tensión es paralela al vector posición. Por lo tanto tenemos un problema de fuerza central [4], recordando la relación del momento angular con las fuerzas tenemos que [4]:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1.78)$$

con \vec{L} el momento angular de la partícula. En nuestro caso \vec{F} siempre es paralela a \vec{r} por lo que $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$. Es decir, el momento angular es nuestra cantidad conservada, al ser un vector constante es inmediato que su norma L también se conserva. Vale la pena mencionar que esta cantidad se conserva independientemente de que tan “rápido” o “lento” cambie la longitud de la cuerda, es decir, no se ha usado hasta este punto alguna condición de adiabaticidad.

También notemos que la energía es pura energía cinética, por lo tanto:

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.79)$$

con p el momento de la partícula

Para seguir trabajando este problema escojamos un marco de referencia apropiado, dotemos al sistema de coordenadas polares con el origen en el centro de la mesa, en tal descripción la posición de la partícula viene dada por el vector [4]:

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t), \quad (1.80)$$

con r la distancia de la partícula al centro de la mesa y \hat{r} el vector unitario que va del centro de la mesa a la posición de la partícula. Podemos derivar la ecuación (1.80) para obtener la velocidad, llegando a que:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t), \quad (1.81)$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector unitario definido por la coordenada angular y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular, se usó que $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$. Usando las dos expresiones anteriores y la linealidad del producto cruz [18] podemos obtener el momento angular como:

$$L = m \|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\| = m r^2(t) \dot{\theta}(t), \quad (1.82)$$

donde usamos que $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ [4] y que $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$. Como ya dijimos el momento angular se debe conservar por ser una fuerza central, así que la expresión anterior tiene un valor constante en el tiempo, denotémoslo por L_0 . Por otra parte, tomando (1.81) y sustituyéndolo en (1.79) obtenemos la expresión de la energía:

$$E = m \frac{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}{2} = m \frac{\dot{r}^2(t) + r^2(t) \dot{\theta}^2(t)}{2}, \quad (1.83)$$

naturalmente se usó que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ y que $p = m\dot{r}$ [4]. Mezclando las ecuaciones (1.82) y (1.83) obtenemos la relación:

$$E(t) = \frac{m\dot{r}^2(t)}{2} + \frac{\dot{\theta}(t) L_0}{2}, \quad (1.84)$$

aplicando un poco de álgebra obtenemos:

$$\left| \frac{2E(t)}{\dot{\theta}(t)} - L_0 \right| = \left| \frac{m\dot{r}^2(t)}{\dot{\theta}(t)} \right|, \quad (1.85)$$

volviendo a usar (1.82) para sustituir a $\dot{\theta}$:

$$\left| \frac{2E(t)}{\dot{\theta}(t)} - L_0 \right| = \left| \frac{m^2 r^2(t) \dot{r}^2(t)}{L_0} \right|, \quad (1.86)$$

el resultado anterior es valido en general para cualquier fuerza central. Pasemos a un caso adiabático. En la literatura [15] se entiende por adiabático aquel en el que la cuerda "varía lentamente", hay que recalcar que el parámetro λ través del cual nuestro sistema depende del tiempo es la longitud de la cuerda, es decir, la coordenada $r(t)$. Vamos a escribir de forma mas explícita que es lo que se debe pedir. Sea ϵ^* el umbral asociado a las mediciones de momento angular, es decir, la precisión a la que se puede medir, entonces diremos que el proceso es adiabático si se cumple que:

$$r(t) \dot{r}(t) \leq \frac{\sqrt{\epsilon^* |L_0|}}{m} \forall t. \quad (1.87)$$

Bajo el supuesto de adiabaticidad podemos acotar la relación de (1.86) para obtener:

$$\left| \frac{2E(t)}{\dot{\theta}(t)} - L_0 \right| \leq \left| \frac{m^2 L_0}{L_0 m^2} \right| \epsilon^* = \epsilon^*, \quad (1.88)$$

dado que la diferencia es menor al umbral concluimos que las dos cantidades en el lado izquierdo se pueden tratar como iguales para cualquier propósito físico relevante, por lo tanto el supuesto de adiabaticidad nos lleva a:

$$\frac{E(t)}{\dot{\theta}(t)} = \frac{L_0}{2}, \quad (1.89)$$

dado que el momento angular se conserva en general concluimos que en el caso adiabático el cociente de la energía sobre la velocidad angular es constante, a dicha cantidad es a la que se le llama el invariante adiabático del sistema en la literatura [14].

Podemos profundizar un poco más. Supongamos que $\tilde{\epsilon}$ denota el umbral de medición para la acción y sea $\tau(t) = \frac{2\pi}{\dot{\theta}(t)}$. De la definición de acción en (1.14) y usando (1.79) tenemos que:

$$S(t) = \int_t^{t+\tau} 2E(\zeta) d\zeta = \int_t^{t+\tau} m\dot{r}^2(\zeta) + \frac{L_0^2}{mr^2(\zeta)} d\zeta, \quad (1.90)$$

por otro lado tenemos que:

$$2E(t)\tau(t) = 2E(t) \int_t^{t+\tau} d\zeta = \int_t^{t+\tau} m\dot{r}^2(t) + \frac{L_0^2}{mr^2(t)} d\zeta. \quad (1.91)$$

Impongamos dos condiciones adicionales de adiabaticidad, a saber:

$$\left| \dot{r}^2(t) - \dot{r}^2(\zeta) \right| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2m\tau(t)} \forall \zeta \in [t, t+\tau], \quad (1.92)$$

y

$$\left| \frac{1}{r^2(t)} - \frac{1}{r^2(\zeta)} \right| \leq \frac{\tilde{\epsilon}m}{2L_0^2\tau(t)} \forall \zeta \in [t, t+\tau], \quad (1.93)$$

las dos condiciones anteriores nos ponen cotas a los valores que pueden tomar r y \dot{r} durante un periodo de movimiento.

Tomando la diferencia entre (1.90) y (1.91) y aplicando desigualdad del triángulo para la integral se obtiene:

$$|S(t) - 2E(t)\tau(t)| \leq \int_t^{t+\tau} m \left| \dot{r}^2(t) - \dot{r}^2(\zeta) \right| + \frac{L_0^2}{m} \left| \frac{1}{r^2(t)} - \frac{1}{r^2(\zeta)} \right| d\zeta. \quad (1.94)$$

Aplicando las condiciones de adiabaticidad (1.92) y (1.93) obtenemos:

$$|S(t) - 2E(t)\tau(t)| \leq \int_t^{t+\tau} m \frac{\tilde{\epsilon}}{2m\tau(t)} + \frac{L_0^2}{m} \frac{\tilde{\epsilon}m}{2L_0^2\tau(t)} d\zeta = \tilde{\epsilon}, \quad (1.95)$$

con la última desigualdad notamos que su diferencia es menor al umbral, así que para cualquier fin práctico de importancia física son iguales, pero por (1.89) la función $E(t)\tau(t)$ es un invariante adiabático, así pues bajo las hipótesis adicionales de adiabaticidad concluimos que la acción también es un invariante adiabático.

El resultado anterior se puede contrastar con lo que existe en la literatura [14] [15]. En particular se puede aplicar al caso del oscilador armónico bidimensional para llegar a la misma conclusión [14] por un camino un tanto diferente: La acción es invariante adiabático.

1.4.3. Péndulo simple

Tomemos otro caso muy estudiado en física: Una masa puntual colgando de una cuerda, es decir, un péndulo, pero con la particularidad de que su longitud puede variar. Para abordar este problema primero repasemos el que es mas conocido, cuando la longitud es constante.

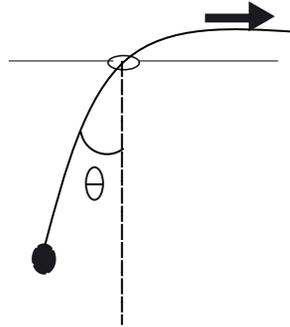


Figura 1.29: Diagrama del péndulo de longitud variable

Supongamos que la longitud de la cuerda es l ; la cuerda ejerce una fuerza sobre la partícula; su tensión, llamémosle T . Además, la partícula está sujeta a la acción de la gravedad. Coloquemos un marco de referencia en el punto donde cuelga el péndulo, y vamos a descomponer las fuerzas en dos componentes, la que es paralela a la posición de la partícula y la que es tangente, en virtud de la segunda Ley de Newton la suma de todas las fuerzas debe ser igual a la masa de la partícula por su aceleración [4]. La componente radial de la fuerza gravitacional es $-mg \cos(\theta) \hat{r}$ con \hat{r} el vector radial unitario, si la tensión sobre la cuerda es $\vec{T} = -T\hat{r}$ tenemos que la componente radial de la Fuerza es:

$$F_r = mg \cos(\theta) - T, \quad (1.96)$$

donde m es la masa de la partícula. Por otro lado, la componente radial de la aceleración es en el caso general [4]:

$$\frac{d^2l}{dt^2} - l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (1.97)$$

Como en nuestro caso la longitud es constante tenemos que $\frac{d^2l}{dt^2} = 0$, así pues, al aplicar la segunda ley de Newton las ecuaciones (1.96) y (1.97) deben ser iguales, es decir:

$$T = ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \cos(\theta). \quad (1.98)$$

Ahora bien, dado que la partícula esta sometida a la fuerza gravitacional tiene una energía potencial dada por la expresión $V = -mgl \cos(\theta)$, donde se ha fijado el 0 de la energía potencial en el punto donde cuelga el péndulo. Como la longitud del péndulo es constante la velocidad solo tiene componente tangencial, por lo que la energía cinética viene dada por $K = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}$, así que podemos reescribir la ecuación (1.98) como:

$$T = \frac{2K}{l} - \frac{V}{l}. \quad (1.99)$$

El péndulo de longitud constante es un sistema conservativo [4], por lo que en todo tiempo se cumple que $E = K + V$; además, las soluciones son periódicas [11], entonces podemos promediar la energía en un ciclo completo, obteniendo:

$$E = \langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle, \quad (1.100)$$

promediando la ecuación (1.99) llegamos a que:

$$\langle T \rangle = \frac{3\langle K \rangle - E}{l}. \quad (1.101)$$

Si ahora hacemos el análisis de fuerzas para la componente tangencial y recordando que estamos en el caso $\dot{l} = 0$ tenemos que por la segunda ley de Newton:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin(\theta). \quad (1.102)$$

Si suponemos que los ángulos son pequeños podemos hacer la aproximación en serie de Taylor de primer orden $\sin(\theta) = \theta$; si denotamos por ϵ^* al umbral de medición asociado al ángulo del péndulo tenemos que basta pedir $|\sin(\theta(t)) - \theta(t)| \leq \epsilon^* \forall t$ para que nuestra aproximación sea físicamente válida. Sin perder generalidad imponemos las condiciones iniciales $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0$, con ello llegamos a que la solución para la componente angular es:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (1.103)$$

De la expresión anterior se sigue que:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}} \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right). \quad (1.104)$$

Haciendo uso de la ecuación anterior podemos determinar la energía promedio pues solo hay que integrar el cuadrado de la velocidad durante un periodo y dividir entre el mismo, es decir:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (1.105)$$

De la ecuación (1.103) se sigue que el periodo del péndulo bajo el supuesto de oscilaciones pequeñas es $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, al usar la expresión del periodo y la ecuación (1.104) en la ecuación (1.105) llegamos a que:

$$\langle K \rangle = \frac{m\theta_0^2 l^2}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \frac{g}{l} dt. \quad (1.106)$$

Usando el Teorema de cambio de variable [17] se llega a:

$$\langle K \rangle = \frac{m\theta_0^2 l g}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(u) du = \frac{m\theta_0^2 l g}{4}, \quad (1.107)$$

recordando que para la energía potencial la expresión es $V = -mgl \cos(\theta)$ podemos usar la expresión en serie de Taylor del coseno [17] hasta segundo término, para que esto sea válido físicamente supongamos que $\tilde{\epsilon}$ representa el umbral medición asociado a la energía, requerimos que se cumpla $mgl \left| \frac{\theta^2(t)}{2} - 1 - \cos(\theta(t)) \right| \leq \tilde{\epsilon}$. En tales condiciones tenemos que:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} mgl \left[\frac{\theta^2}{2} - 1 \right] dt, \quad (1.108)$$

usando la expresión (1.103) de nuevo se obtiene que:

$$\langle V \rangle = \frac{mgl}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \sqrt{\frac{g}{l}} \theta_0^2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) dt \right] - mgl, \quad (1.109)$$

usando el Teorema de cambio de variable nuevamente se obtiene:

$$\langle V \rangle = \frac{mgl\theta_0^2}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(u) du \right] - mgl = \frac{mgl\theta_0^2}{4} - mgl. \quad (1.110)$$

Observemos que las ecuaciones (1.105) y (1.110) implican:

$$\langle V \rangle = \langle K \rangle - mgl. \quad (1.111)$$

Si ahora se juntan las ecuaciones (1.100) y la (1.111) se puede despejar a $\langle K \rangle$ obteniendo:

$$\langle K \rangle = \frac{E + mgl}{2}. \quad (1.112)$$

Finalmente, usando (1.112) en (1.101) se llega a una expresión para el promedio de la tensión en la cuerda:

$$\langle T \rangle = \frac{E}{2l} + \frac{3}{2}mg. \quad (1.113)$$

Hasta ahora nuestro estudio se ha limitado al péndulo de longitud constante. Pasemos a un caso mas interesante: dejemos que la longitud sea variable pero que

su cambio sea pequeño, es decir, un escenario adiabático; ¿Que significa adiabático en este caso? Para deducir la ecuación (1.108) se usó la aproximación:

$$V(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad (1.114)$$

que ya dijimos es valida si se cumple:

$$\left| \frac{\theta^2(t)}{2} - 1 - \cos(\theta(t)) \right| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{mlg}. \quad (1.115)$$

En términos físicos la expresión anterior representa que los ángulos son suficientemente pequeños. Lo importante de la ecuación (1.114) es que nos permite trabajar con un potencial de oscilador armónico que ya estudiamos en la sección 1.4.1 con parámetro $\omega(t) = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l(t)}}$, para este parámetro ya estudiamos las condiciones de adiabaticidad que son las desigualdades (1.56), (1.57) y (1.58), así que basta que pedir que en este caso también se cumplan para concluir lo equivalente a (1.75), es decir, que en este escenario la acción también se conserva, en concordancia con lo que se reporta en la literatura [15]. Usando la expresión para el parámetro $\omega(t)$ tenemos que su derivada se ve como:

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = -\pi\sqrt{\frac{g}{l(t)}}\frac{dl}{dt}(t), \quad (1.116)$$

por lo que:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\dot{l}}{2l}, \quad (1.117)$$

con esto en mente podemos ver qué se requiere para satisfacer las condiciones de adiabaticidad del oscilador armónico, que son (1.59),(1.64) y (1.65); en este escenario se transforman en:

$$\left| \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - \frac{\dot{l}(\zeta)}{l(\zeta)} \right| \leq \frac{\epsilon^* l_{mt}}{3mA_t^2 4\pi^2 g} \forall \zeta \in [t, t + \tau], \quad (1.118)$$

$$\left| \frac{\dot{l}(l)}{l^2(t)} \right| \leq \frac{\epsilon^*}{24\pi^2 gmA_t^2} \forall \zeta \in [t, t + \tau], \quad (1.119)$$

y que se siga satisfaciendo la relación (1.64). En tales condiciones podemos concluir que la acción es invariante adiabático.

Otra forma de proceder es pedir que la tensión cambie “poco” a lo largo de un periodo para que se pueda tratar como una constante [15], tomando como valor de la constante su promedio, podemos formalizar esto un poco mas, digamos que ϵ es el umbral de medición aceptable para la fuerza, entonces diremos que el proceso es adiabático si se cumple que:

$$|T(t) - \langle T \rangle(t)| \leq \epsilon, \quad (1.120)$$

dado nuestro desarrollo previo cuando la longitud es constante ya tenemos expresiones para el promedio de la tensión en el caso de longitud constante por lo que la hipótesis de adiabaticidad va a pedir que en el caso de longitud variable la tensión sea suficientemente cercana a dicho valor promedio, así que la hipótesis de adiabaticidad se puede reemplazar al usar la ecuación (1.113) por:

$$\left| T(t) - \left(\frac{E(t)}{2l} + \frac{3}{2}mgl(t) \right) \right| \leq \epsilon. \quad (1.121)$$

Usando (1.97) podemos sustituir el valor de la tensión para llegar a la expresión equivalente:

$$\left| ml \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 + mg \cos(\theta(t)) - m \frac{d^2 l}{dt^2}(t) - \left(\frac{E(t)}{2l} + \frac{3}{2}mgl(t) \right) \right| \leq \epsilon. \quad (1.122)$$

La ecuación (1.121) es la condición de adiabaticidad que se pide.

Al cambiar la longitud de la cuerda se está cambiando la energía del sistema pues se está realizando un trabajo [4]. El trabajo se hace al jalar la cuerda, y como la tensión es paralela a la cuerda tenemos que el cambio en la energía viene dado por :

$$dE = -Tdl = -\frac{3}{2}mgdl - \frac{Edl}{2l}. \quad (1.123)$$

donde se sustituyó el valor de la tensión por la expresión (1.113) que es válido si se cumple la hipótesis de adiabaticidad.

Para resolver la ecuación diferencial primero resolvemos el sistema homogéneo [11]:

$$dE = -\frac{Edl}{2l}, \quad (1.124)$$

este sistema se puede convertir en:

$$d \left(\ln(E\sqrt{l}) \right) = 0, \quad (1.125)$$

cuya solución es:

$$E = \frac{C}{\sqrt{l}}. \quad (1.126)$$

Ahora, para resolver la ecuación (1.123) aplicamos variación de parámetros [11] viendo C como función de l , es decir, $C(l)$, con lo que llegamos a la ecuación:

$$dE = \left[-\frac{C(l)}{2l} + \frac{dC}{dl} \right] \frac{dl}{\sqrt{l}} = -\frac{Edl}{2l} + \frac{dC}{\sqrt{l}}. \quad (1.127)$$

Al comparar la ecuación (1.123) con la (1.119) vemos que se requiere:

$$dC = -\frac{3\sqrt{l}}{2}mgdl, \quad (1.128)$$

cuya solución es:

$$C(l) = \tilde{C} - mg\sqrt{l}^3, \quad (1.129)$$

donde \tilde{C} es constante en todo el movimiento. Regresando a la ecuación (1.126) vemos que se satisface:

$$E\sqrt{l} + mg\sqrt{l}^3 = \tilde{C}, \quad (1.130)$$

es decir, $E\sqrt{l} + mg\sqrt{l}^3$ es un invariante, que es al que llamaremos el invariante adiabático pues se usó la condición (1.121)

Ahora bien, notemos que la expresión (1.130) se puede ver como:

$$\tilde{C} = (E + mgl) \sqrt{l} = \tilde{E}\sqrt{l}. \quad (1.131)$$

Evidentemente \tilde{E} corresponde a medir la energía poniendo el cero de la energía potencial en el punto mas bajo donde oscila el péndulo mientras que E corresponde a poner el cero de la energía potencial en el origen de la cuerda. En la literatura [15] es común usar la expresión con \tilde{E} .

Recordando la ecuación (1.103) vemos que el periodo del péndulo en esta aproximación viene dado por: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, por lo que $\frac{\tau}{\sqrt{l}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ es invariante; Multiplicando $\frac{\tau}{\sqrt{l}}$ por la ecuación (1.131) se llega a que:

$$(E + mgl) \tau = \tilde{C}, \quad (1.132)$$

este último también se conoce como el invariante adiabático del péndulo [15].

Para concluir recordemos que, como vimos en la primera sección en la ecuación (1.13), la acción se puede definir como:

$$S = \oint pdq = \int_0^\tau m \frac{dq}{dt} \frac{dq}{dt} dt = \int_0^\tau 2K dt = 2\langle K \rangle \tau, \quad (1.133)$$

y si tomamos la ecuación (1.105) y sustituimos en (1.133) se obtiene:

$$S = (E + mgl) \tau = \tilde{C}. \quad (1.134)$$

Es decir, la acción es el invariante adiabático, este resultado es probablemente el más conocido y quizá el más importante en el estudio de invariantes adiabáticos.

La deducción anterior se hizo a nivel teórico. Para someter este resultado a prueba se hicieron simulaciones en el software Python resolviendo numéricamente las ecuaciones de movimiento del péndulo. Se resolvieron las ecuaciones de movimiento con el método de Runge-Kutta de segundo orden y se calculó en cada instante el valor del invariante y de la coordenada angular. El correspondiente código se encuentra en el Apéndice B del presente trabajo escrito.

Las simulaciones se hicieron haciendo variar la longitud del péndulo de diferentes maneras, aunque siempre empieza en 100 metros y acaba en 90 metros, en todos los casos la condición inicial del ángulo es 0rad , es decir, inicia en el punto más bajo que puede alcanzar el péndulo y la velocidad angular inicial es 0.1rad/s . Adicionalmente se hicieron simulaciones del péndulo paramétrico para ver el comportamiento del invariante como función de la frecuencia de oscilación del péndulo.

Las primeras 3 simulaciones son suponiendo que el péndulo cambia su longitud de forma lineal de 10 metros a 9 metros respecto al tiempo; y tarda 10 segundos, 1 minuto y 10 minutos respectivamente en hacerlo. Se asumió velocidad angular inicial de 0.1rad/s . Se presentan las gráficas de la longitud, el ángulo y el invariante como funciones del tiempo:

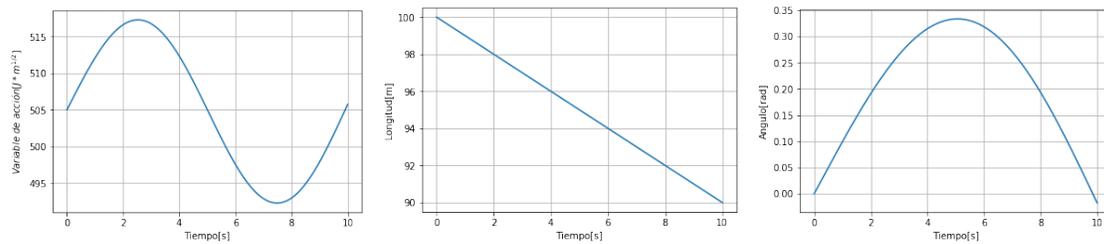


Figura 1.30: Cambio lineal de longitud en 10 segundos

Podemos observar que el invariante oscila entre $492.28J\sqrt{m}$ y $517.28J\sqrt{m}$, lo que representa una oscilación del 5.08 %.

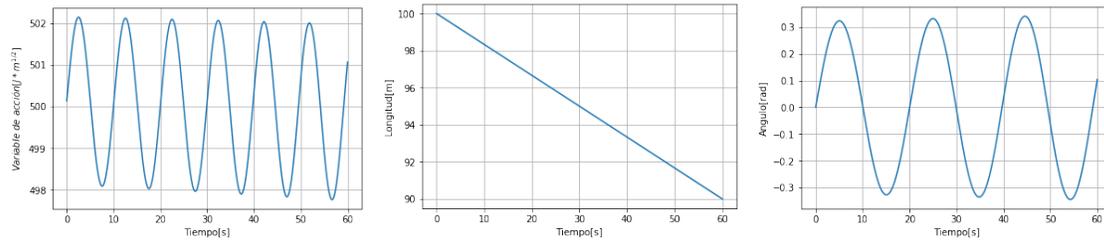


Figura 1.31: Cambio lineal de longitud en 1 minuto

En este caso el invariante oscila entre $497.77J\sqrt{m}$ y $502.15J\sqrt{m}$, lo que representa una oscilación de apenas 0.87 %.

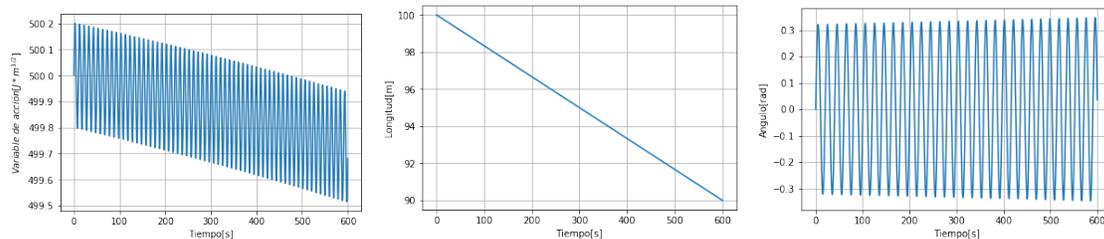


Figura 1.32: Cambio lineal de longitud en 10 minutos

En el último caso lineal el invariante oscila entre $499.51J\sqrt{m}$ y $500.2J\sqrt{m}$, representando un cambio de 0.14 %.

Las siguientes 3 simulaciones corresponden a suponer que la cuerda reduce su longitud de manera exponencial, Se supone que el cambio tarda 10 segundos, 1 minuto y 10 minutos.

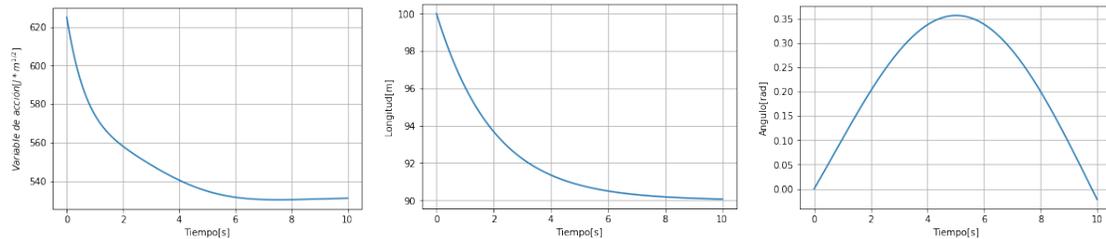


Figura 1.33: Cambio exponencial de longitud en 10 segundos

En este primer escenario el invariante baja de $625J\sqrt{m}$ a $530.24J\sqrt{m}$, lo que representa un cambio del 15.16 %

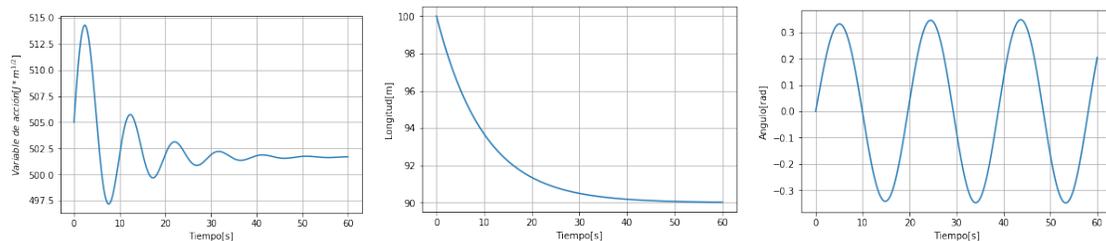


Figura 1.34: Cambio exponencial de longitud en 1 minuto

En este escenario el invariante oscila entre $514.27J\sqrt{m}$ y $497.17J\sqrt{m}$, que corresponde a una oscilación del 3.33 %. Notamos que conforme pasa el tiempo la oscilación se va amortiguando, esto tiene sentido pues el cambio en la longitud va como una exponencial, eso quiere decir que conforme pasa el tiempo el cambio en la longitud es mas lento y por lo tanto estamos mas cerca del escenario adiabático ideal.

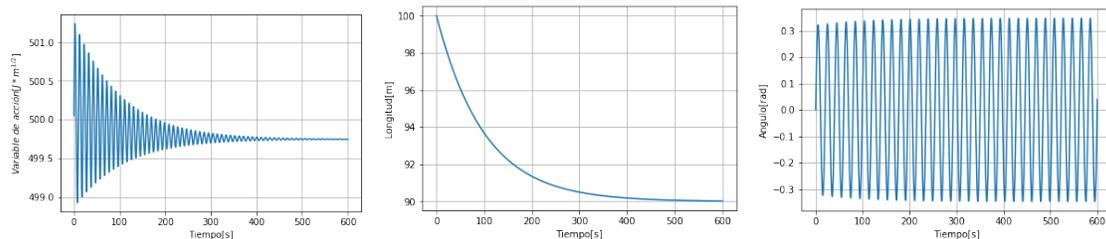


Figura 1.35: Cambio exponencial de longitud en 10 minutos

En este escenario el invariante oscila entre $498.92J\sqrt{m}$ y $501.24J\sqrt{m}$, correspondiente a 0.46 %. En este escenario también se puede observar el amortiguamiento

de la oscilación, siendo notorias dos curvas que forman una envolvente para el invariante.

Las últimas 3 simulaciones corresponden a una reducción de la longitud de forma gaussiana, es decir, que va como e^{-x^2} .

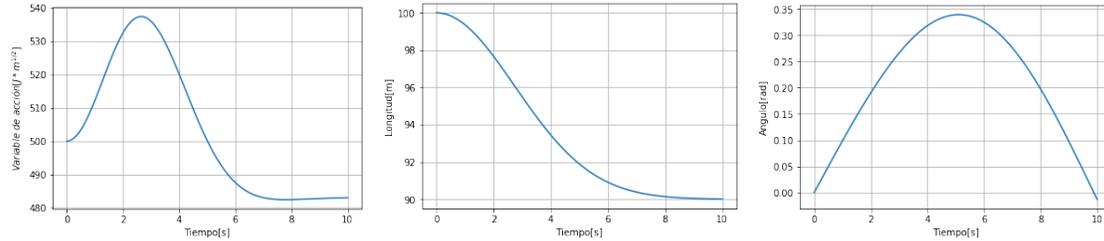


Figura 1.36: Cambio gaussiano de longitud en 10 segundos

En este primer escenario el invariante oscila entre $537.46J\sqrt{m}$ y $482.37J\sqrt{m}$, lo que representa un cambio del 10.25 %.

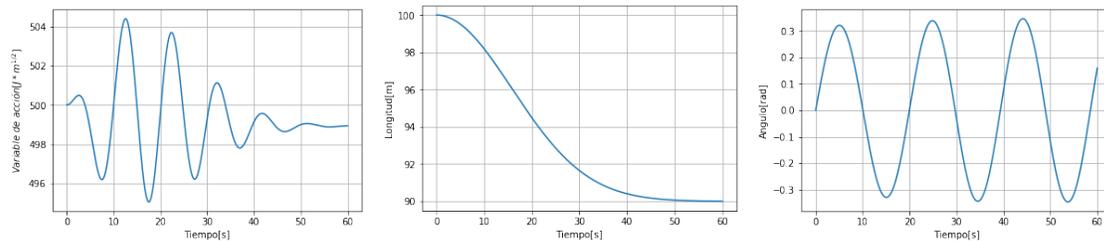


Figura 1.37: Cambio gaussiano de longitud en 1 minuto

En este escenario las oscilaciones están entre $495.05J\sqrt{m}$ y $504.4J\sqrt{m}$, que corresponde 1.85 %.

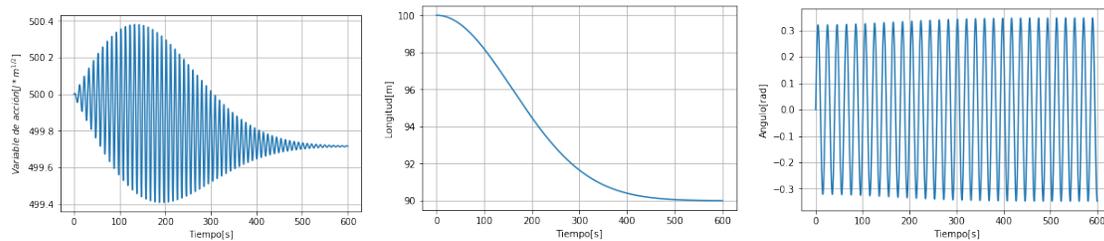


Figura 1.38: Cambio gaussiano de longitud en 10 minutos

En el último escenario el invariante oscila entre $499.41J\sqrt{m}$ y $500.38J\sqrt{m}$, que corresponde a 0.19 %. En este escenario se observa también el amortiguamiento del invariante, además se observa como en los primeros 2 minutos la oscilación del invariante aumenta y después disminuye, esto tiene sentido pues el cambio en la longitud es como una gaussiana, implicando que la velocidad con la que cambia la

longitud empieza en cero, después va aumentando, llega a un máximo y después vuelve a disminuir hasta irse asintóticamente a cero de nuevo.

Observamos que en todos los escenarios el invariante tiene oscilaciones menores cuando la velocidad con la que cambia la longitud es menor, en concordancia con el supuesto de adiabaticidad; con lo que verificamos numéricamente la conservación del invariante del péndulo.

A continuación se muestran los resultados de simular el péndulo paramétrico. Para ello se asume que la longitud del péndulo varía como un seno, es decir:

$$l(t) = l_0 + A \sin(\Omega t), \quad (1.135)$$

Primero se permitió que el valor A de la amplitud fuera 1m, 3m, 5m y 7m y la longitud base $l_0 = 100$. Para cada valor fijo de A se hizo variar la frecuencia Ω de la longitud del péndulo en un intervalo entre $[0.002, 1.2]$ con saltos de tamaño 0.003. Para cada valor fijo de A y Ω se dejó correr la simulación por 60 segundos y se calculó la variación porcentual máxima de la variable de acción, esto último se calculó como $var = \frac{S_{Max} - S_{min}}{S_0}$, donde S_{Max} es el valor máximo registrado en la simulación, S_{min} es el valor mínimo y S_0 es el valor inicial. Finalmente, se graficó la variación de la variable de la acción contra la frecuencia del péndulo, esto define una curva para cada valor de la amplitud, por lo que se graficaron las curvas para las diferentes amplitudes. Los resultados se muestran a continuación.

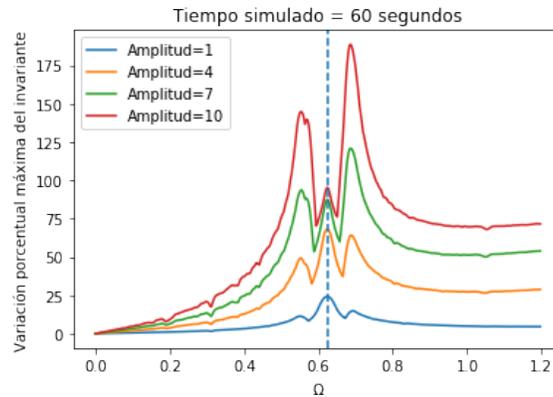


Figura 1.39: Simulación por 60 segundos

Lo más destacable es que aparece un pico en todas las curvas, este pico se puede explicar si nos adentramos en la teoría que se ha desarrollado sobre el péndulo paramétrico. Se sabe que un péndulo que satisface la ecuación (1.135) va a entrar en resonancia si la frecuencia del péndulo toma ciertos valores, estos valores son aquellos de la forma [19] [20]:

$$\Omega = 2\frac{\omega}{n}, \quad (1.136)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $\omega = \sqrt{\frac{l_0}{g}}$, siendo g la aceleración debida a la gravedad. En nuestro caso se tiene que $\omega = 0.313$, por lo que la primer resonancia aparece en $\Omega =$

0.6261. Al ver la gráfica vemos que esto es consistente, mas aún, notamos que la explicación de porque el invariante varía tanto es sencilla: como la solución diverge es imposible que se mantenga cercana en norma de \mathcal{L}^1 a la solución sin perturbar, es decir, es imposible que se satisfaga la condición (1.64). Lo mas destacable es que esta divergencia, y por extensión el pico de la gráfica, aparecen sin importar la amplitud que se ponga en la ecuación (1.135). Intuitivamente se esperaría que si la amplitud es muy pequeña sea valida la conservación del invariante adiabático, sin embargo aquí se muestra que no es tan sencillo, si la frecuencia es tal que el sistema entra en resonancia no importa el valor que se le de a la amplitud, la variable de acción estará lejos de ser invariante. Con esto queda claro que para afirmar que los invariantes adiabáticos son en verdad invariantes no basta con pedir que la perturbación del sistema sea “pequeña”, es necesario analizar la validez de las condiciones de adiabaticidad que ya hemos expuesto.

Se repitió la simulación anterior pero aumentando el tiempo simulado a 600 segundos, los resultados fueron los siguientes:

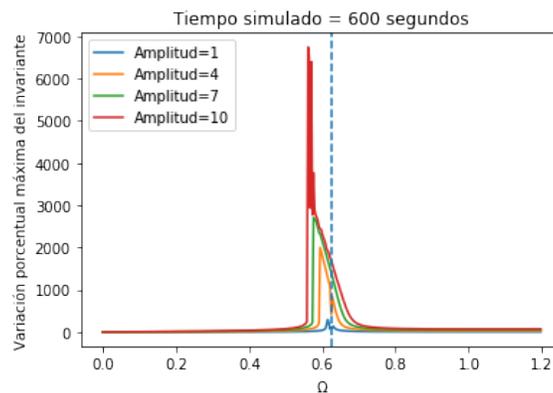


Figura 1.40: Simulación por 600 segundos

Aunque vemos nuevamente los picos en la frecuencia de resonancia notamos una diferencia, a mayor amplitud el máximo de los picos se desplaza hacia una frecuencia menor; no he sido capaz de encontrar una justificación de este fenómeno.

Finalmente, se hizo una tercera tanda de simulaciones pero ahora por 60000 segundos y con frecuencias en el intervalo $[0.001, 0.4]$ con saltos de tamaño 0.001, la razón de esto fue para ver si en la segunda frecuencia de resonancia también aparecen picos. Los resultados fueron los siguientes:

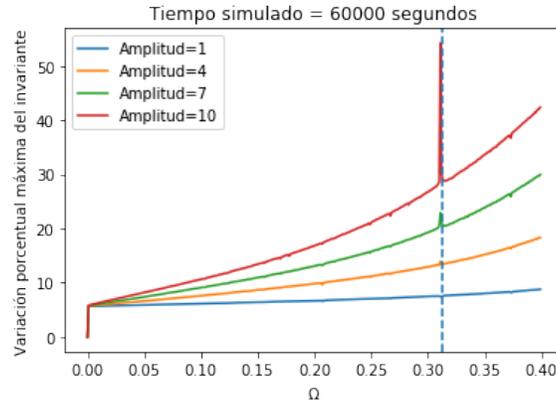


Figura 1.41: Simulación por 60000 segundos

Como era de esperarse los picos volvieron a aparecer aunque con un tamaño menor, esto es consistente con la literatura [20] [19] pues es sabido que las frecuencias de resonancia posteriores a la primera tienen un impacto menor que solo es perceptible para amplitudes mayores a las requeridas para ver el fenómeno con la primer frecuencia. Aún así resulta de interés que es posible encontrar la segunda frecuencia de resonancia ya que esto nos demuestra que garantizar que la variable de acción es invariante requiere un análisis completo de las condiciones de adiabaticidad. Es posible que aumentando el tiempo de simulación así como las amplitudes en (1.135) se encuentren picos en las frecuencias de resonancia posteriores.

1.4.4. Comentarios finales de invariantes adiabáticos

Dados los ejemplos que hemos visto la pregunta natural que puede surgir es ¿Existe un teorema general para formalizar la conservación de la variable de acción en casos adiabáticos? La respuesta a esta pregunta está lejos de ser trivial, como se puede verificar en la literatura [20] no hay un resultado general que garantice la conservación deseada, mas concretamente este es un problema relacionado con la teoría ergódica donde aún quedan muchas preguntas sin respuestas satisfactorias, incluida esta. Sin embargo también se puede revisar en la literatura que existen sistemas para los que se puede garantizar la conservación [20], a saber, si un sistema cumple con el “El principio del Promedio” se puede concluir el resultado deseado, el problema con este principio es que no se conoce un resultado general para garantizar que se cumpla aunque se observa que se satisface en todos los casos físicos estudiados, citando textualmente a Vladimir Iгореvich Arnold [21] “We note that this principle is neither a theorem, an axiom nor a definition, but rather a physical proposition, i.e. a vaguely formulated and, strictly speaking untrue assertion.”, contrastandolo con lo que hicimos en esta sección podemos notar que dicho principio es una forma de garantizar que se satisfagan las condiciones de adiabaticidad, por ejemplo para el caso del oscilador armónico es una forma de garantizar que se cumplan (1.56), (1.57) y (1.58). Hay que destacar que se tienen pruebas para cier-

tos escenarios, por ejemplo para el caso de una dimensión con un potencial que va como un polinomio se puede demostrar la conservación de la acción reducida [15].

Otra observación de interés es que en la demostración de la conservación de la acción para el péndulo se usó la aproximación de ángulos pequeños, este supuesto puede no ser necesario, al analizar las implicaciones de esta suposición nos podemos dar cuenta de que la más influyente es que el promedio de la energía cinética y el de la energía potencial coinciden con el de la energía total, esto nos permite satisfacer la hipótesis de adiabaticidad (1.57), así pues para el caso general del péndulo se tendría que encontrar la reformulación apropiada de esta condición para que se cumpla la conservación de la acción.

2 Elementos de electromagnetismo

Hasta ahora hemos estudiado conceptos de mecánica clásica. Ahora veamos los elementos generales de electromagnetismo que necesitamos.

2.1. Formulación hamiltoniana del campo magnético

2.1.1. Coordenadas toroidales

Parte de la importancia de la física de plasmas se debe a que es parte fundamental en la fusión nuclear [1], una característica común en los dispositivos usados para experimentos de plasmas es tratar con configuraciones toroidales [1] como el Tokamak o el Stellarator; dada esta condición es pertinente trabajar en coordenadas toroidales para simplificar la descripción, aunque no es fundamentalmente necesario va a simplificar varias cuentas.

Empecemos por recordar las diferentes coordenadas que se le pueden dar al plano \mathbb{R}^2 , las primeras por supuesto son las cartesianas, dado cualquier punto \vec{x} en el plano se puede escribir como [18]:

$$\vec{x} = (x_1, x_2) = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2, \quad (2.1)$$

donde \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son los vectores canónicos en la dirección del eje x y del eje y respectivamente, los escalares x_1, x_2 son las coordenadas del vector. En este caso podemos preguntarnos ¿Que conjunto se forma al tomar una de las coordenadas constante? La respuesta en este caso sencillo son rectas [18]; específicamente si se deja fija la primer coordenada se obtienen rectas paralelas al eje Y mientras que al dejar fija la segunda coordenada se obtienen rectas paralelas al eje X como se puede apreciar en la figura 2.1.

la relevancia de lo anterior radica en que podemos pensar a x_2 de dos formas: Una es como la distancia con signo del vector \vec{x} al eje X , y la segunda es como un índice que nos exhibe en que curva de todas las rectas paralelas al eje X se encuentra el vector, de la misma forma x_1 nos dice en qué curva de todas las rectas paralelas al eje Y se encuentra el vector, la intersección de estas dos curvas es el conjunto que solo tiene al vector \vec{x} por lo que para describirlo de forma única basta tener las dos coordenadas. Cada una de las curvas que corresponden a tomar una coordenada constante se llama curva de nivel [17], esta forma de abordar la descripción de un vector nos será útil para tratar las coordenadas toroidales.

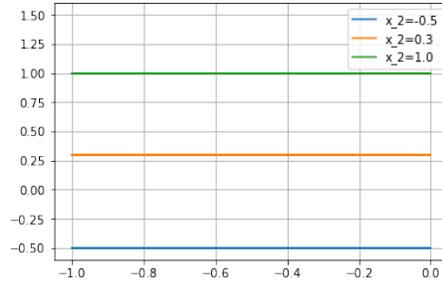
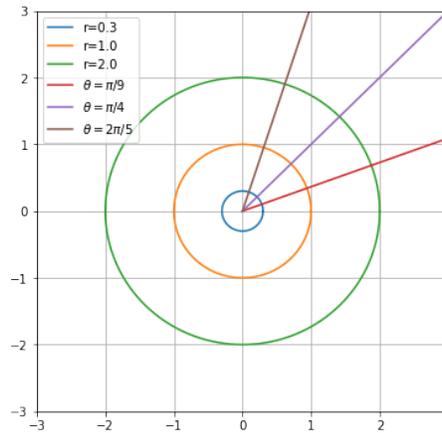
Figura 2.1: Curvas al dejar x_2 constante

Figura 2.2: Curvas de nivel en polares

Otro ejemplo típico de coordenadas son las polares [18], en las que se dan dos números, $r \in [0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, y el vector se puede escribir de forma única como:

$$\vec{x} = r \cos(\theta) \hat{e}_1 + r \sin(\theta) \hat{e}_2. \quad (2.2)$$

Geoméricamente r nos dice la distancia del origen al vector y θ el ángulo que forma el vector con el eje X. En la figura 2.2 se aprecian las curvas que se obtienen al tomar r constante que corresponden a circunferencias; al tomar θ constante se obtienen rayos que parten del origen.

Aunque las polares y las cartesianas son los juegos de coordenadas mas comunes no son los únicos. Otro ejemplo menos conocido viene dado por las coordenadas $R \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ con las coordenadas cartesianas dadas por:

$$\vec{x} = \left(\frac{1 - R^2}{R^2 - 2R \cos(\theta) + 1} \right) \hat{e}_1 + \frac{2R \sin(\theta)}{R^2 - 2R \cos(\theta) + 1} \hat{e}_2. \quad (2.3)$$

La expresión anterior tiene por curvas de nivel círculos anidados, con la peculiaridad de que el centro es diferente para cada círculo, como se puede ver en la figura 2.3

Notamos que estas curvas solo cubren la región del plano con $x_1 > 0$; las curvas

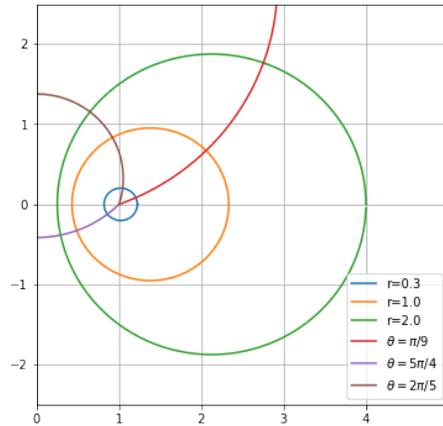


Figura 2.3: Curvas de nivel para coordenadas toroidales en 2D

de nivel para R constante son círculos anidados pero cada uno con centro diferente; para θ constante no se obtienen rayos, esto es porque el ángulo es geoméricamente el que forma el vector $\vec{x} - \vec{c}$ con el eje X donde \vec{c} es el centro de la circunferencia, sin embargo, al ser este último variable las curvas de nivel no son rectas; para valores de R pequeños podemos apreciar que las curvas se pueden aproximar como rectas pues en esta zona el centro de los círculos cambia poco. Un análisis algebraico demuestra que las curvas a θ constante son de hecho círculos con centro en el eje Y [22].

Con las coordenadas anteriores podemos inducir una elección de coordenadas toroidales para \mathbb{R}^3 , pensemos que las coordenadas anteriores son para el plano YZ y este último se hace rotar con eje de rotación el eje Z , si se efectúa la rotación con un valor que puede estar entre $\zeta \in [0, 2\pi)$ se va a cubrir a todo el espacio [18], esta acción esta ejemplificada en la figura 2.4. Lo que notamos es que al efectuar la rotación las curvas de R constante se transforman en toroides anidados.

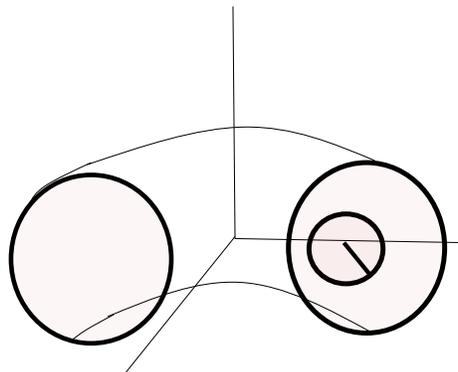


Figura 2.4: Rotación para obtener coordenadas en \mathbb{R}^3

Así pues, la terna (R, θ, ζ) es una elección de coordenadas con superficies de nivel toroides para R fijo, a la coordenada θ se le llama “ángulo poloidal” y a la coordenada ζ “ángulo toroidal”. Esta es una elección de coordenadas toroidales

aunque no es la única [1], en general si se tienen superficies de nivel que son topológicamente equivalentes a toroides se pueden inducir coordenadas toroidales [1] similares a las que hemos descrito; para escoger una de las tantas opciones se debe observar el fenómeno físico y tratar con el juego de coordenadas adecuado, en este sentido para el caso de plasmas las superficies que van a dictar la topología son las superficies magnéticas que como veremos mas adelante están determinadas por el flujo magnético.

Por último, notemos que en cada punto del espacio podemos asignar una base de vectores del espacio, a saber, podemos calcular los vectores gradientes ∇R , $\nabla\theta$ y $\nabla\zeta$ que son funciones del punto en el que nos encontremos; es de particular interés cuando estos vectores son ortogonales pues muchas cuentas se simplifican, además de que esta condición garantiza que estos vectores formen una base del espacio [23] lo que permite descomponer a cualquier vector como combinación lineal de ellos. Se puede demostrar que las coordenadas descritas por (2.3) son ortogonales [22] aunque no son el único juego de coordenadas toroidales que lo satisface [1].

2.1.2. Formulación hamiltoniana del campo magnético

Tratemos ahora la relación de las líneas de campo magnético con el formalismo hamiltoniano. Recordemos que para el campo magnético no existen fuentes o sumideros por lo que [2]:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.4)$$

esto implica que \vec{B} se puede ver como el rotacional de otra función [2]:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.5)$$

donde \vec{A} es un campo vectorial que debe satisfacer condiciones a la frontera para el problema particular planteado. A dicho campo se le llama potencial vectorial.

Ahora bien, supongamos que tenemos un marco de coordenadas ortogonal, denotemos a dichas coordenadas como (ρ, θ, ϵ) , aunque dichas coordenadas no son forzosamente toroidales conviene imaginarlas así. En tal caso como mencionamos en la sección anterior podemos escribir el potencial vectorial como una combinación lineal de los vectores para dichas coordenadas:

$$\vec{A} = A_\rho \nabla \rho + A_\theta \nabla \theta + A_\epsilon \nabla \epsilon. \quad (2.6)$$

Algo que sería útil es que \vec{A} fuera un campo gradiente, sin embargo en el caso más general no lo será; lo que si podemos hacer es ver a \vec{A} como un campo gradiente más algo extra. Supongamos que existe una función $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$A_\rho = \partial_\rho G, \quad (2.7)$$

Luego, por la regla de la cadena tenemos que $\nabla G = \partial_\rho G \nabla \rho + \partial_\theta G \nabla \theta + \partial_\epsilon G \nabla \epsilon$, podemos despejar $\partial_\rho G \nabla \rho$ y sustituir su valor en (2.6), obteniendo que:

$$\vec{A} = \nabla G + (A_\theta - \partial_\theta G) \nabla \theta + (A_\epsilon - \partial_\epsilon G) \nabla \epsilon. \quad (2.8)$$

Notemos que en la expresión anterior hemos logrado que \vec{A} tenga la forma de un campo gradiente mas algo extra; Ahora, por simplicidad definamos $\psi = A_\theta - \partial_\theta G$ y $\psi_p = \partial_\epsilon G - A_\epsilon$, entonces tenemos:

$$\vec{A} = \nabla G + \psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \epsilon, \quad (2.9)$$

Donde G, ψ, ψ_p son funciones que deben satisfacer ciertas condiciones a la frontera. Recordemos que la raíz de todo esto es querer estudiar el campo magnético, y tenemos una relación del campo \vec{A} con \vec{B} que es la ecuación (2.5), usando dicha expresión en (2.8) junto al hecho de que el rotacional de un gradiente siempre es cero [12] llegamos a:

$$\vec{B} = \nabla \times (\psi \nabla \theta) - \nabla \times (\psi_p \nabla \epsilon), \quad (2.10)$$

usando la regla de Leibniz para el rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \psi \times \nabla \theta + \psi \nabla \times (\nabla \theta) - \nabla \psi_p \times \nabla \epsilon - \psi_p \nabla \times (\nabla \epsilon) = \\ &= \nabla \psi \times \nabla \theta - \nabla \psi_p \times \nabla \epsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde nuevamente se usó que el rotacional de un gradiente es cero.

¿Que utilidad tiene la ecuación (2.11)? Es sencillo, primero supongamos que las funciones ψ, θ, ϵ forman un sistema de coordenadas ortonormales. Supongamos que $(\tilde{\psi}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\epsilon}(t))$ es la ecuación paramétrica para una línea de campo con t su parámetro, en tal caso dicha curva debe satisfacer que su vector tangente en todo momento es igual a B [11]; como el sistema coordinado es ortonormal esto es equivalente a satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = \vec{B} \cdot \nabla \psi, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \vec{B} \cdot \nabla \theta, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = \vec{B} \cdot \nabla \epsilon, \quad (2.14)$$

Ahora vamos a asumir que $\tilde{\epsilon}(t)$ es una función localmente inyectiva y que la derivada nunca es cero; bajo este supuesto, y en virtud del Teorema de la función inversa [12] podemos usar a la coordenada ϵ como parámetro de la curva en lugar de t ; con ello y usando la ecuación (2.11) nuestro sistema de ecuaciones diferenciales se transforma en:

$$\frac{d\tilde{\psi}}{d\epsilon} = \frac{\frac{d\tilde{\psi}}{dt}}{\frac{d\tilde{\epsilon}}{dt}} = \frac{(\nabla \psi \times \nabla \theta - \nabla \psi_p \times \nabla \epsilon) \cdot \nabla \psi}{(\nabla \psi \times \nabla \theta - \nabla \psi_p \times \nabla \epsilon) \cdot \nabla \epsilon} = -\frac{\nabla \psi \cdot (\nabla \psi_p \times \nabla \epsilon)}{\nabla \epsilon \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta)}, \quad (2.15)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\epsilon} = \frac{\frac{d\tilde{\theta}}{dt}}{\frac{d\epsilon}{dt}} = \frac{(\nabla\psi \times \nabla\theta - \nabla\psi_p \times \nabla\epsilon) \cdot \nabla\theta}{(\nabla\psi \times \nabla\theta - \nabla\psi_p \times \nabla\epsilon) \cdot \nabla\epsilon} = -\frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\psi_p \times \nabla\epsilon)}{\nabla\epsilon \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)}, \quad (2.16)$$

En las deducciones anteriores se usó el hecho de que para cualesquiera vectores \vec{u}, \vec{w} ocurre [18]:

$$(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.17)$$

Finalmente, el gradiente de ψ_p se puede escribir como $\nabla\psi_p = \partial_\psi\psi_p\nabla\psi + \partial_\theta\psi_p\nabla\theta + \partial_\epsilon\psi_p\nabla\epsilon$, usando esta expresión en las ecuaciones (2.15) y (2.16) se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\psi}}{d\epsilon} &= -\frac{\nabla\psi \cdot (\partial_\psi\psi_p\nabla\psi \times \nabla\epsilon + \partial_\theta\psi_p\nabla\theta \times \nabla\epsilon)}{\nabla\epsilon \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)} = \\ &= -\partial_\theta\psi_p \frac{\nabla\psi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\epsilon)}{\nabla\epsilon \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)} = -\partial_\theta\psi_p, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\epsilon} = +\partial_\psi\psi_p, \quad (2.19)$$

para llegar a la última igualdad en (2.18) y (2.19) se usaron dos identidades del triple producto interior, a saber que dados cualesquiera tres vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} entonces se cumple que [18]:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} \quad (2.20)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = -\vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{v}. \quad (2.21)$$

Las ecuaciones (2.18) y (2.19) son de gran relevancia pues notamos que tienen la misma estructura matemática que las ecuaciones (1.1) y (1.2) respectivamente, es decir, son un sistema de ecuaciones hamiltonianas, donde el papel del tiempo lo ocupa la variable ϵ , el hamiltoniano es la función ψ_p , la coordenada es la función θ y su momento conjugado es la función ψ . Como veremos en la siguiente sección ψ puede considerarse como la coordenada radial pues tendrá una interpretación física útil en ciertos casos.

2.1.3. Superficies magnéticas

Parte de la dificultad para conseguir la fusión nuclear controlada radica en que se necesita confinar al plasma, para ello resulta conveniente que las líneas de campo magnético estén confinadas, lo cual es una de las principales razones por las que se trabaja con configuraciones toroidales [1]. Una forma sencilla de tener a las líneas confinadas es que todas estén en una superficie. Cuando esto ocurre decimos que tenemos una superficie magnética [1]; dada una superficie diferenciable su vector gradiente es perpendicular a ella en cada punto [12], así que un criterio suficiente para que las líneas de campo se queden en una superficie es que el campo magnético sea ortogonal al vector gradiente de la superficie en todos los puntos

de la línea de campo [12], es decir, si f es la función que define a las superficies es suficiente que $\vec{B} \cdot \nabla f = 0$ para que las líneas de campo se queden contenidas en las superficies.

Ahora bien, usando lo que se desarrolló en la sección anterior podemos preguntarnos ¿Cuándo ocurre que ψ y ψ_p definen superficies magnéticas?. Usando (2.11) podemos desarrollar el siguiente producto interior:

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = (\nabla \psi \times \nabla \theta - \nabla \psi_p \times \nabla \epsilon) \cdot \nabla \psi = -(\nabla \psi_p \times \nabla \epsilon) \cdot \nabla \psi, \quad (2.22)$$

usando (2.20) y nuevamente suponiendo que (ψ, θ, ϵ) forman un sistema ortogonal podemos expandir $\nabla \psi_p = \partial_\psi \psi_p \nabla \psi + \partial_\theta \psi_p \nabla \theta + \partial_\epsilon \psi_p \nabla \epsilon$ para llegar a:

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi = -\partial_\theta \psi_p (\nabla \theta \times \nabla \epsilon) \cdot \nabla \psi. \quad (2.23)$$

Notando que (2.23) es cero si y solo si $\partial_\theta \psi_p = 0$, esto último es condición necesaria y suficiente para que ψ defina superficies magnéticas, es decir $\psi_p = \psi_p(\psi, \epsilon)$ [1].

Por otro lado, si ahora tomamos el producto interior de \vec{B} con $\nabla \psi_p$ tenemos:

$$\vec{B} \cdot \nabla \psi_p = (\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \psi_p = \partial_\epsilon \psi_p (\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \epsilon, \quad (2.24)$$

la expresión anterior nos indica que ψ_p define superficies magnéticas si y solo si $\partial_\epsilon \psi_p = 0$, es decir, $\psi_p = \psi_p(\psi, \theta)$ [1]. De (2.23) y (2.24) vemos que una condición necesaria y suficiente para que simultáneamente ψ y ψ_p definan superficies magnéticas es que ψ_p solo sea función de ψ . Es por ello que este escenario es típicamente el punto de partida para el estudio de superficies magnéticas, y lo que se suele hacer posteriormente es perturbarlo [1].

Ahora tratemos de dar un significado físico a ψ y ψ_p . Para ello primero consideremos el flujo magnético que pasa por una superficie dada, pictóricamente se representa con la figura 2.5, cuantitativamente se calcula como la siguiente integral [2]:

$$\Phi(S) = \int_S \vec{B} \cdot N dS, \quad (2.25)$$

con N el vector normal a la superficie en cada punto; tomando la ecuación (2.5) y usando el teorema de Stokes [12] tenemos que:

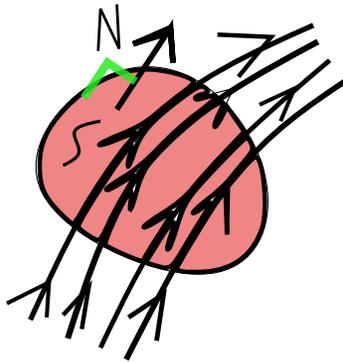


Figura 2.5: Flujo a través de una superficie

$$\Phi(S) = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot N dS = \int_{\partial S} A \cdot dl, \quad (2.26)$$

usando (2.8) en (2.26) tenemos que el flujo es:

$$\Phi(S) = \int_{\partial S} (\nabla G + \psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \epsilon) \cdot dl, \quad (2.27)$$

notamos que el termino ∇G no contribuye en la integral pues la integral de un gradiente sobre una curva cerrada es exactamente cero [12], así en la integral solo aparecen los otros 2 términos:

$$\Phi(S) = \int_{\partial S} (\psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \epsilon) \cdot dl. \quad (2.28)$$

La integral (2.28) es valida para una superficie general en la que sea válido el teorema de Stokes. Tomemos ahora un caso específico, la superficie de nivel definida por un valor cualquiera de ϵ , y dentro de esta superficie limitémonos a trabajar con la superficie cuya frontera está definida por dos curvas de θ constante, digamos $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_1$; y dos curvas de ψ constante, digamos ψ_I y ψ_{II} , esta configuración esta esquematizada en la figura 2.6.

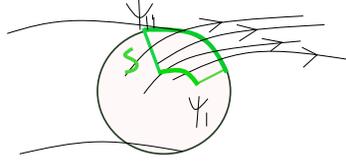


Figura 2.6: Flujo toroidal

Al tomar la curva que define la frontera de esta superficie tenemos que $\nabla \epsilon = 0$ pues la superficie se encuentra contenida en la superficie de nivel de ϵ constante, por lo que podemos reescribir (2.28) y obtener:

$$\Phi(S) = \int_{\partial S} \psi \nabla \theta \cdot dl, \quad (2.29)$$

para la superficie que tomamos su frontera está definida por dos curvas de ψ constante y dos curvas de θ constante, en las dos últimas tenemos que $\nabla \theta = 0$ por lo que no contribuyen a la integral; en las curvas de ψ constante tenemos que ψ se puede sacar de la integral y nos queda $\int \nabla \theta \cdot dl$ y esta integral vale $\pm \Delta \theta = \pm (\theta_1 - \theta_0)$ donde el signo depende de si $\nabla \theta$ y dl son paralelos o anti-paralelos. Sustituyendo en (2.29) llegamos a:

$$\Phi(S) = (\psi_{II} - \psi_I) \Delta \theta, \quad (2.30)$$

tomando $\theta_0 = 0$ y el limite $\theta_1 \rightarrow 2\pi$ tenemos que:

$$\phi(S) = 2\pi (\psi_{II} - \psi_I), \quad (2.31)$$

para estos valores de θ_0 y θ_1 tenemos que (2.31) define el flujo paralelo a la dirección del ángulo toroidal entre dos toros, por lo que a esta expresión se le llama “Flujo toroidal”, lo que nos permite interpretar físicamente a ψ como el flujo toroidal del campo magnético.

Si ahora tomamos una superficie a θ constante y dentro de esta nos quedamos con la superficie delimitada por dos curvas de ψ constante, digamos ψ_I y ψ_{II} , y dos curvas de ϵ constante, digamos ϵ_0 y ϵ_1 , obtenemos en la ecuación (2.28):

$$\Phi(S) = - \int_{\partial S} \psi_p \nabla \epsilon \cdot dl. \quad (2.32)$$

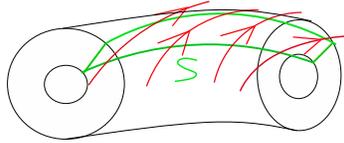


Figura 2.7: Flujo poloidal

En la integral anterior notamos que las curvas de ϵ constante no contribuyen pues $\nabla \epsilon = 0$ en ellas; por otro lado, si suponemos que ψ_p solo es función de ψ y de θ podemos sacar a ψ_p de la integral:

$$\Phi(S) = (\psi_p(\psi_I, \theta) - \psi_p(\psi_{II}, \theta)) \Delta \epsilon, \quad (2.33)$$

si tomamos $\epsilon_0 = 0$ y el límite $\epsilon_1 \rightarrow 2\pi$ llegamos a que:

$$\Phi(S) = 2\pi (\psi_p(\psi_I, \theta) - \psi_p(\psi_{II}, \theta)), \quad (2.34)$$

de la expresión (2.34) notamos que ψ_p tiene interpretación física, corresponde al flujo del campo magnético en la dirección poloidal [1].

2.2. Partícula cargada en campos electromagnéticos

En la física de plasmas y en particular en la fusión nuclear es fundamental entender el movimiento de una partícula cargada en campos electromagnéticos [1] pues se requiere confinarla, así pues vamos a ver el movimiento de una partícula en casos sencillos, veremos como emerge el concepto de deriva y el de centro de guía.

2.2.1. Campo magnético constante

Recordemos que una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético estará sujeta a la fuerza de Lorentz [2] que viene dada por la expresión:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}). \quad (2.35)$$

Supongamos que el campo eléctrico es cero y el campo magnético es constante, digamos $\vec{B} = B\hat{e}_z$, esta situación la podemos encontrar cerca del centro de dos bobinas de Helmholtz o dentro de un solenoide suficientemente largo [2]. En tal situación las ecuaciones de movimiento se vuelven:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.36)$$

que en componentes queda:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_y B_z, \quad (2.37)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B_z, \quad (2.38)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (2.39)$$

Las soluciones a las ecuaciones (2.37) y (2.38) son combinaciones lineales de senos y cosenos con frecuencia $\omega = \frac{q}{m}B_z$ [11], mientras que la solución a (2.39) es que v_z es constante en el tiempo. Si suponemos que tenemos como condiciones iniciales en el tiempo $t = 0$ $v_x(0) = v_\perp \cos(\delta)$, $v_y(0) = v_\perp \sin(\delta)$ y $v_z(0) = v_\parallel$ las soluciones a nuestro sistema son:

$$v_x(t) = v_\perp \cos(\omega t + \delta), \quad (2.40)$$

$$v_y(t) = v_\perp \sin(\omega t + \delta), \quad (2.41)$$

$$v_z(t) = v_\parallel. \quad (2.42)$$

Notemos que podemos interpretar fácilmente v_\perp y v_\parallel como las componentes perpendicular y paralela de la velocidad inicial al campo magnético, también notemos que la frecuencia así definida puede ser negativa si el producto qB_z lo es. Esta solución es periódica con periodo $\tau = \frac{2\pi}{|\omega|}$. Usando las expresiones anteriores podemos encontrar la solución para la posición, si suponemos que tenemos como condiciones iniciales $x(0) = x_i$, $y(0) = y_i$ y $z(0) = z_i$ las soluciones son:

$$x(t) = x_i + \frac{v_\perp}{\omega} (\sin(\omega t + \delta) - \sin(\delta)), \quad (2.43)$$

$$y(t) = y_i + \frac{v_\perp}{\omega} (\cos(\omega t + \delta) - \cos(\delta)), \quad (2.44)$$

$$z(t) = z_i + v_\parallel t. \quad (2.45)$$

Es inmediato que la proyección de las trayectorias en el plano XY corresponde a circunferencias con radio $r_{gc} = \frac{v_\perp}{\omega}$, a dicha cantidad se le suele llamar girorradio [3] o radio de Larmor [24]. Por otro lado la proyección en el eje Z sigue a las líneas

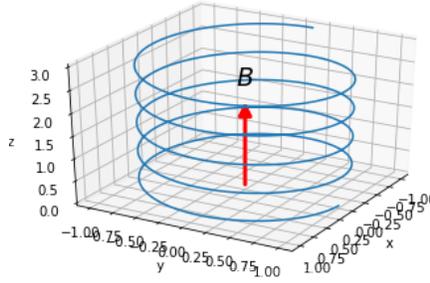


Figura 2.8: Trayectoria a lo largo de un campo magnético constante

de campo, por lo que las trayectorias son hélices con eje paralelo al eje Z. En la figura 2.8 se puede apreciar un ejemplo típico de una trayectoria; así pues podemos escribir la posición como función del tiempo de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = \vec{X}(t) + r_{gc}\hat{c}(t), \quad (2.46)$$

donde se definió:

$$\vec{X}(t) = \left(x_i - \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\delta), y_i - \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\delta), z_i + v_{\parallel}t \right), \quad (2.47)$$

y

$$\hat{c} = (\sin(\omega t + \delta), \cos(\omega t + \delta), 0), \quad (2.48)$$

el término \vec{X} lo podemos identificar como el centro de la hélice. En general el término $\vec{v} \times \vec{B}$ es una fuerza que forma hélices cuyos ejes tratan de seguir a las líneas de campo magnético. La ecuación de las trayectorias en general es como (2.46) [1], a \vec{X} se le llama "Centro de guía" [1]. Si la frecuencia es suficientemente alta el girorradio será suficientemente pequeño pues r_{gc} es inversamente proporcional a la frecuencia, de ahí que en una primera aproximación se utilice la trayectoria del "Centro de guía" en lugar de la trayectoria de la partícula; naturalmente hay un error al hacer este tratamiento por lo que si se desea hacer un análisis más preciso se añaden correcciones en potencias del girorradio. Mas adelante veremos un ejemplo.

2.2.2. Campos Eléctrico y Magnético constantes

Tomemos el escenario previo y prendemos un campo Eléctrico constante que no depende del tiempo. Una forma de conseguir esto es si se pone el solenoide en el centro de un capacitor suficientemente grande.

La fuerza de Lorentz, en términos de la velocidad es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.49)$$

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$\vec{v} = \vec{v} - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2} \quad (2.50)$$

dado que $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2}$ es un vector constante tenemos que su derivada temporal es cero, por lo que la ecuación (2.49) en nuestra nueva variable se reescribe:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{\|B\|^2} \right), \quad (2.51)$$

podemos usar la identidad $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ [18] para llegar a:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{\|B\|^2} - \vec{E} \right) = q \left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}_{\parallel} \right), \quad (2.52)$$

donde \vec{E}_{\parallel} nos indica la componente del campo eléctrico paralela al campo magnético. Podemos dividir la ecuación (2.52) en componentes paralela y perpendicular al campo magnético; para la primera se tiene que su solución es:

$$\vec{v}_{\parallel}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_{\parallel} t + \vec{v}_{\parallel}(0), \quad (2.53)$$

notamos que $\vec{E} \times \vec{B}$ es perpendicular al campo magnético, usando esto en la ecuación (2.50) obtenemos que la componente paralela de \vec{v} es igual a la de \vec{v} , así que (2.53) se reescribe como:

$$\vec{v}_{\parallel}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_{\parallel} t + \vec{v}_{\parallel}(0). \quad (2.54)$$

Integrando obtenemos la solución para la coordenada z:

$$z(t) = \frac{q}{2m} \vec{E}_{\parallel} t^2 + \vec{v}_{\parallel}(0) t, \quad (2.55)$$

si ahora tomamos la componente perpendicular de (2.52) obtenemos un sistema equivalente a (2.36) que ya lo resolvimos en la sección previa, su solución es:

$$\vec{v}_x = \vec{v}_{\perp i} \cos(\omega t + \delta), \quad (2.56)$$

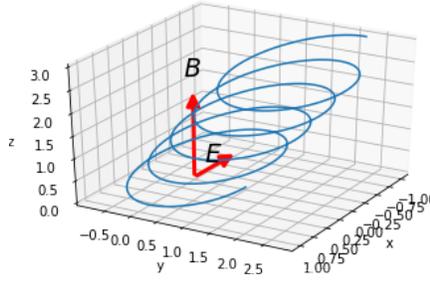
$$\vec{v}_y = -\vec{v}_{\perp i} \sin(\omega t + \delta). \quad (2.57)$$

Dado que $\vec{E} \times \vec{B}$ es perpendicular a \vec{B} su componente ortogonal es el mismo. Usando esto en (2.50), tomando magnitud y recordando que $\vec{v}_{\perp i}$ en (2.56) y (2.57) nos indica la magnitud inicial de la componente ortogonal obtenemos que:

$$\vec{v}_{\perp i} = \|\vec{v}_{\perp}(0)\| = \left\| \vec{v}_{\perp}(0) - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2} \right\|, \quad (2.58)$$

lo que implica para la velocidad que:

$$\vec{v}_{\perp}(t) = \vec{v}(t) + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2} =$$

Figura 2.9: Trayectoria con deriva $E \times B$

$$= \left\| \vec{v}_{\perp}(0) - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2} \right\| (\cos(\omega t + \delta), -\sin(\omega t + \delta), 0) + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2}. \quad (2.59)$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.59) también nos darán como solución hélices análogas a las descritas por (2.40) y (2.41) con dos diferencias: La primera es que el radio de la hélice cambia a $\left\| \vec{v}_{\perp}(0) - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2} \right\|$; es decir que conforme se aumenta la intensidad del campo magnético el radio decrece, puede llegar a un punto en el que el radio se hace cero si $\vec{E} \times \vec{B}$ y \vec{v}_{\perp} son paralelos, en este punto la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ y la magnética $\vec{v} \times \vec{B}$ se cancelan y la trayectoria es una línea recta; si se sigue aumentando la intensidad del campo eléctrico vuelven a aparecer hélices. La segunda diferencia que quizá es la más discutida en la literatura [3] [24] es que aparece un término extra para la velocidad del centro de la hélice, una velocidad que va como $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\|B\|^2}$, a este término se le llama “Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ ”, se puede pensar como una velocidad que “arrastra” a las partículas desviándolas de seguir las líneas de campo magnético, vale la pena notar que esta velocidad solo depende de los campos, no depende de la masa o de la carga de la partícula, por lo que afecta a todas las partículas por igual. En general a las interacciones que tengan este comportamiento de desviar el Centro de guía de las líneas de campo se les llama “Derivas”. En la figura 2.9 se aprecia una trayectoria con la deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ puesto que se añadió un campo eléctrico paralelo al eje X; vemos que el efecto es un desplazamiento del centro de la hélice en la dirección del eje Y.

Finalmente, vale la pena mencionar que en el análisis previo lo que se utilizó es que \vec{E} fuera constante en el espacio y en el tiempo, por lo que si en su lugar se aplica una fuerza externa \vec{F} constante se va a tener el mismo efecto, reemplazando en (2.59) a \vec{E} por $\frac{\vec{F}}{q}$ [3]:

$$v_d = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{q\|B\|^2}. \quad (2.60)$$

Obsérvese que en este caso la deriva depende de la carga de la partícula.

2.2.3. Deriva por gradiente de B

Supongamos ahora que tenemos un campo magnético que no cambia de dirección pero que su magnitud es variable, por simplicidad supongamos un campo paralelo al eje Z:

$$\vec{B} = B(x, y, z) \hat{e}_z, \quad (2.61)$$

el campo magnético debe satisfacer (2.4); si calculamos su divergencia e igualamos a cero vemos que se debe satisfacer que:

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad (2.62)$$

por lo que el campo magnético no puede depender de la coordenada z, es decir, nuestro campo en realidad se puede ver como:

$$\vec{B} = B(x, y) \hat{e}_z. \quad (2.63)$$

La forma de proceder ahora es aproximar. Primero, si la variación espacial del campo magnético es “poca” podemos representar el valor del campo magnético como una serie de Taylor a primer orden centrada en el centro de guía, es decir:

$$\vec{B}(\vec{r}(t)) = \vec{B}(\vec{X}(t)) + ([\vec{r}(t) \cdot \nabla] \vec{B})(\vec{X}(t)), \quad (2.64)$$

donde $\vec{X}(t)$ es el centro de guía y \vec{r} es la posición medida desde el centro de guía. La expresión anterior tendrá validez física si se cumple que:

$$\left\| \vec{B}(\vec{r}(t)) - \vec{B}(\vec{X}(t)) - ([\vec{r}(t) \cdot \nabla] \vec{B})(\vec{X}(t)) \right\| \leq \epsilon, \quad (2.65)$$

con ϵ el umbral para medir el campo magnético, además vamos a suponer que \vec{r} se puede aproximar por la curva de giromovimiento que se obtendría con un campo magnético constante igual a $\vec{B}(\vec{X})$. Ahora, dado que la variación del campo magnético es “pequeña” supongamos que el movimiento de la partícula se puede ver como el movimiento de tener el campo magnético del centro de guía constante más una corrección, en particular para la velocidad vamos a tener que:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}, \quad (2.66)$$

con \vec{v}_0 la solución con campo constante y \vec{v} la corrección, es decir que \vec{v}_0 satisface:

$$m \frac{d\vec{v}_0}{dt}(t) = q\vec{v}_0(t) \times \vec{B}(\vec{X}(t)) \forall t, \quad (2.67)$$

sustituyendo (2.64) y (2.66) en (2.35) y usando (2.67) tenemos que:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}_0 \times ([\vec{r} \cdot \nabla] \vec{B})(\vec{X}) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{X}(t)) + q\vec{v} \times ([\vec{r} \cdot \nabla] \vec{B})(\vec{X}), \quad (2.68)$$

en la bibliografía se desprecia el termino $q\tilde{v} \times ([\tilde{r} \cdot \nabla] \vec{B}) (\vec{X})$ [3] [24] debido a que \tilde{v} es una corrección “pequeña”; como veremos más adelante es de orden del girorradio, y $[\tilde{r} \cdot \nabla] B$ es explícitamente del orden \tilde{r} que es el girorradio, por lo que su producto es del orden del girorradio al cuadrado, si el girorradio es suficientemente pequeño los términos cuadráticos se pueden despreciar. Podemos formalizar esto un poco más: si ϵ_F es el umbral para medir la magnitud de fuerzas se está asumiendo que:

$$\left\| q\tilde{v} \times ([\tilde{r} \cdot \nabla] \vec{B}) (\vec{X}) \right\| \leq \epsilon_F, \quad (2.69)$$

por lo que para la corrección de la velocidad nos queda la ecuación:

$$m \frac{d\tilde{v}}{dt} = q\vec{v}_0 \times ([\tilde{r} \cdot \nabla] \vec{B}) (\vec{X}) + q\tilde{v} \times \vec{B} (\vec{X}(t)). \quad (2.70)$$

En la práctica lo que es de interés es estudiar el desplazamiento del girocentro [3], esto lo podemos obtener si promediamos la expresión anterior a lo largo de un periodo de la hélice; promediando el lado izquierdo de la ecuación (2.69) llegamos a que:

$$m \left\langle \frac{d\tilde{v}}{dt} \right\rangle = \frac{m}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{d\tilde{v}}{d\zeta} (\zeta) d\zeta = \frac{m}{\tau} (\tilde{v}(t+\tau) - \tilde{v}(t)), \quad (2.71)$$

Es común que el resultado anterior se iguale a cero [3] [24], lo cual físicamente se justifica pues la corrección es “pequeña”, y además el movimiento original es periódico con periodo τ . Así es físicamente razonable tratar el término $\tilde{v}(t+\tau) - \tilde{v}(t)$ como cero; aquí podemos ver que una forma menos informal de hacer eso es suponer que $m \left\| \frac{\tilde{v}(t+\tau) - \tilde{v}(t)}{\tau} \right\| \leq \epsilon_F$; notamos que no es solamente la diferencia de las velocidades lo que se requiere sea pequeño, es el cociente de la diferencia con el periodo del movimiento.

Para tratar lado derecho de la ecuación (2.70) tomemos la componente perpendicular a las líneas de campo magnético. Esto se puede conseguir si tomamos el producto cruz con el campo magnético; lo hacemos porque nos interesa como se desvía la trayectoria de las líneas de campo. Así pues, (2.70) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{m}{q} \frac{d\tilde{v}}{dt} \times \vec{B} (\vec{X}) &= (\vec{v}_0 \times ([\tilde{r} \cdot \nabla] \vec{B}) (\vec{X})) \times \vec{B} (\vec{X}) + (\tilde{v} \times \vec{B} (\vec{X}(t))) \times \vec{B} (\vec{X}) = \\ &= (\tilde{v} \cdot \vec{B} (\vec{X})) \vec{B} (\vec{X}) - (\vec{B} (\vec{X}) \cdot \vec{B} (\vec{X})) \tilde{v} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B} (\vec{X})) [(\tilde{r} \cdot \nabla) \vec{B}] (\vec{X}) - \\ &\quad - \left([(\tilde{r} \cdot \nabla) \vec{B}] (\vec{X}) \cdot \vec{B} (\vec{X}) \right) \vec{v}_0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

para el desarrolló previo se usó nuevamente que para cualesquiera tres vectores u , v , w se satisface $(u \times v) \times w = (u \cdot w) v - (v \cdot w) u$ [18]. Usando que el campo es paralelo al eje Z notamos que:

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{r} \cdot \nabla) (B \hat{e}_z) = (\vec{r} \cdot \nabla B) \hat{e}_z. \quad (2.73)$$

Si ahora tomamos la componente ortogonal, promediamos a lo largo de un periodo de giro y usamos que (2.71) se puede considerar igual a 0 tenemos:

$$0 = -\left\| \vec{B}(\vec{X}) \right\|^2 \langle \vec{v}_\perp \rangle + \vec{v}_{0z} B(\vec{X}) \langle \vec{r} \cdot (\nabla B)(\vec{X}) \rangle - B \langle (\vec{r} \cdot (\nabla B)(\vec{X})) \vec{v}_{0\perp} \rangle, \quad (2.74)$$

y desarrollando el segundo promedio usando (2.43) y (2.44):

$$\langle \vec{r} \cdot (\nabla B)(\vec{X}) \rangle = \frac{\vec{v}_{0\perp}}{\omega\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{\partial B}{\partial x}(\vec{X}) \sin(\omega\zeta + \delta) + \frac{\partial B}{\partial y}(\vec{X}) \cos(\omega\zeta + \delta) d\zeta. \quad (2.75)$$

La expresión anterior es 0 pues la integral de seno o de coseno a lo largo de un periodo es 0 [17]. Finalmente desarrollemos el cuarto promedio de (2.74) apoyándonos de (2.40),(2.41),(2.43) y (2.44), para la componente X tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} \cdot (\nabla B)(\vec{X}) \vec{v}_{0\perp} \rangle_x &= \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{\omega\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{\partial B}{\partial x}(\vec{X}) \sin(\omega\zeta + \delta) \cos(\omega\zeta + \delta) d\zeta + \\ &+ \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{\omega\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{\partial B}{\partial y}(\vec{X}) \cos^2(\omega\zeta + \delta) d\zeta = \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{2\omega} \frac{\partial B}{\partial y}(\vec{X}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde se uso que la integral del producto del seno y el coseno es 0 a lo largo de un periodo y que $\int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega\zeta) d\zeta = \frac{\tau}{2}$. De forma análoga para la componente Y tenemos:

$$\langle \vec{r} \cdot (\nabla B)(\vec{X}) \vec{v}_{0\perp} \rangle_y = -\frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{2\omega} \frac{\partial B}{\partial x}(\vec{X}), \quad (2.77)$$

por lo que (2.74) queda:

$$\left\| \vec{B}(\vec{X}) \right\|^2 \langle \vec{v}_\perp \rangle = B(\vec{X}) \frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{2\omega} \left(\frac{\partial B}{\partial y}(\vec{X}), -\frac{\partial B}{\partial x}(\vec{X}), 0 \right), \quad (2.78)$$

finalmente, notamos que:

$$\vec{B} \times \nabla B = B \left(-\frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial x}, 0 \right), \quad (2.79)$$

así que se puede reescribir (2.74) como:

$$\langle \vec{v}_\perp \rangle = -\frac{\vec{v}_{0\perp}^2}{2\omega B^2(\vec{X})} \vec{B} \times \nabla B, \quad (2.80)$$

de (2.43) y (2.44) tenemos que el radio de giro viene dado por $r_{gc} = \frac{\bar{v}_\perp}{\omega}$ así que (2.80) se puede reformular como una corrección de orden lineal respecto al radio de giro, de forma consistente con lo que se presupuso en (2.70):

$$\langle \bar{v}_\perp \rangle = -\frac{r_{gc} \bar{v}_{0\perp}}{2B^2} \vec{B} \times \nabla B. \quad (2.81)$$

A esta desviación de las trayectorias se le llama “Deriva de gradiente de B” [3] [24], notamos que nos indica que cuando hay un gradiente en la magnitud del campo magnético se produce una deriva que es ortogonal al vector gradiente y al campo magnético.

2.2.4. Deriva por curvatura de B

Como último ejemplo tomemos una configuración de campo magnético donde las líneas ya no sean líneas rectas. Supongamos que se pueden curvar, esto se puede conseguir experimentalmente si tomamos un solenoide y lo cerramos formando un toro [2]. Una partícula va a formar hélices como trayectorias cuyos centros deben seguir a las líneas de campo [3]. Podemos aproximar a las líneas de campo por arcos de circunferencias en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño si el radio de curvatura es suficientemente grande. Para que el centro de giro de la partícula ya no siga líneas rectas se necesita que la partícula sienta una fuerza; una fuerza que genera movimiento circular uniforme viene dada por [24]:

$$F = m \frac{v_t^2}{R} \hat{R}, \quad (2.82)$$

con v_t la velocidad tangencial y \hat{R} el vector unitario que va del centro de curvatura a la posición del centro de giro; para el caso de la partícula cargada v_t es la componente paralela de la velocidad a las líneas de campo. Si la frecuencia de giromovimiento es suficientemente alta podemos tratar a la fuerza de (2.82) como constante en un periodo, y por (2.60) esta fuerza debe acompañar a una deriva:

$$v_d = \frac{mv_\parallel^2}{R\|B\|^2} \hat{R} \times \vec{B}, \quad (2.83)$$

la expresión anterior nos indica que si las líneas de campo se curvan se va a presentar una deriva que va a llevar a las partículas en una dirección perpendicular al campo magnético y también perpendicular al radio de curvatura.

2.3. Invariantes adiabáticos para una partícula cargada

Los invariantes adiabáticos también aparecen en física de plasmas, esto no debería sorprender pues en el caso de campo magnético constante vimos que una partícula cargada va a tener un movimiento periódico en el plano XY, por lo que $\int p dq$ es un invariante exacto de acuerdo a lo que vimos en la sección de mecánica

de Hamilton-Jacobi; mas aún, de los ejemplos que vimos para invariantes adiabáticos es de esperar que esta cantidad se conserve bajo perturbaciones “pequeñas” del campo magnético.

2.3.1. Momento magnético

El momento magnético se puede definir para una espira con corriente como [2]:

$$\mu = IA, \quad (2.84)$$

con I la corriente de la espira y A el área que encierra. Una carga puntual no es una espira con corriente, sin embargo, como ya vimos en presencia de un campo magnético las trayectorias de una carga puntual van a ser hélices. De las ecuaciones (2.37) y (2.38) tenemos el periodo para el caso de campo magnético constante, podemos usarlo para aproximar el periodo de la hélice en el caso general como $\tau = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi m}{|qB|}$, la “corriente” que circula por la trayectoria la podemos calcular como la carga entre el tiempo que le toma completar una vuelta, es decir:

$$I = \frac{|q|}{\tau} = \frac{q^2 B}{2\pi m}, \quad (2.85)$$

vale la pena notar que se usa $|q|$ y no q , la razón de esto es porque al cambiar el signo de la carga también se cambia el sentido en el que se recorre la trayectoria como se puede ver en la expresión (2.44). Al combinar estos dos cambios se nota que cambiar el signo de la carga no tiene efecto en el cambio de la corriente. Por otro lado, el área la podemos calcular como $A = \pi r^2$, y el radio lo obtenemos de (2.43) y (2.44) como $r = \frac{v_{\perp}}{\omega}$, recalcando que al hacer esto estamos aproximando el movimiento por el que se tiene para el caso de campo magnético constante. Así pues, el momento magnético queda:

$$\mu = IA = \frac{q^2 B}{2\pi m} \pi \frac{m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B^2} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B}, \quad (2.86)$$

la ventaja de la ecuación (2.86) es que se puede definir en términos locales usando las propiedades puntuales de una partícula, a saber solo se requiere la magnitud del campo magnético que siente la partícula y la componente de la velocidad que es perpendicular al campo magnético; así pues ésta se puede tomar como la definición del momento magnético para una partícula puntual sin necesidad de que haga una orbita cerrada. Con esta expresión también podemos obtener la razón de cambio del momento magnético, aplicando la regla de la cadena y la regla del producto es inmediato que:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B} \frac{d}{dt} \frac{m v_{\perp}^2}{2} - \frac{m v_{\perp}^2}{2B^2} \frac{dB}{dt}. \quad (2.87)$$

Tomemos ahora un escenario sin campo eléctrico, solo magnético que depende del espacio. La trayectoria de una partícula cargada se puede ver como el movimiento del centro de guía mas el giromovimiento, es decir:

$$\vec{r}(t) = X(t) + x(t), \quad (2.88)$$

con X la trayectoria del centro de guía y x el giromovimiento, dada esta configuración podemos describir la velocidad de la partícula como la suma de dos componentes, la primera es la componente paralela al campo magnético evaluado en el centro de guía y la segunda es su componente perpendicular, dicha descomposición viene dada por [23]:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \hat{b}(X(t)) \hat{b}(X(t)) + \sum_{i=1}^2 \dot{\vec{r}}(t) \cdot \hat{e}_i(X(t)) \hat{e}_i(X(t)), \quad (2.89)$$

con \hat{b} el vector unitario paralelo al campo magnético y \hat{e}_1, \hat{e}_2 dos vectores que completan una base ortonormal, vale la pena mencionar que dichos vectores no son únicos, cualquier rotación que los mantenga en el plano ortogonal a \hat{b} nos dará dos vectores que siguen completando una base. Aunque está explícito en la notación hay que recalcar que el vector \hat{b} se definió como el vector paralelo al campo magnético en el centro de guía de la trayectoria, no en la posición de la partícula. Podemos simplificar la notación en (2.89) y simplemente escribir:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\parallel}(t) + \vec{v}_{\perp}(t), \quad (2.90)$$

de la misma forma podemos escribir el campo magnético que siente la partícula como:

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_{\parallel}(t) + \vec{B}_{\perp}(t), \quad (2.91)$$

donde de nuevo se recalca que las componentes paralelas y perpendiculares se están tomando respecto al campo magnético en el centro de guía. Ahora podemos calcular $\vec{v} \times \vec{B}$ para obtener la expresión de la fuerza de Lorentz, al hacerlo se obtiene:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp}, \quad (2.92)$$

el primer término tendrá como efecto generar el giromovimiento que ya discutimos previamente. El segundo como se puede verificar, es una fuerza paralela al campo magnético del centro de guía que tendrá como efecto aumentar la magnitud de la componente paralela de la velocidad. El tercer termino es peculiar, dotando de coordenadas polares al plano generado por \hat{e}_1 y \hat{e}_2 podemos ver que este término es el equivalente de una componente tangencial [3], así pues su efecto es aumentar la magnitud angular de la velocidad; en efecto podemos validar esto con mas formalidad. Para cualquier fuerza se sabe que el cambio en la energía cinética es igual al trabajo ejercido por la fuerza [4], así pues limitándonos a estudiar el cambio de la magnitud de la componente perpendicular tenemos:

$$\frac{m}{2} \frac{dv_{\perp}^2}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp} = q \left(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_{\parallel} + \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp} \right) \cdot \vec{v}_{\perp} = q \left(\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp} \right) \cdot \vec{v}_{\perp}, \quad (2.93)$$

esta expresión es general y no se ha utilizado alguna aproximación. La primera aproximación de adiabaticidad en este caso consiste en suponer que los vectores $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp}$ y \vec{v}_{\perp} son “casi antiparalelos” para considerar su producto interior igual al negativo del producto de sus normas; geoméricamente vemos que esta condición corresponde a la interpretación que le dimos a este término de la fuerza, que era una componente angular. Podemos escribir esto de forma más formal, si ϵ_F representa el umbral de tolerancia para la derivada de la energía se va a imponer como primer condición de adiabaticidad que:

$$|q| \left| \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp} + \left\| \vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_{\perp} \right\| \left\| v_{\perp} \right\| \right| \leq \epsilon_F, \quad (2.94)$$

notemos que \vec{v}_{\parallel} y \vec{B}_{\perp} son perpendiculares por lo que su norma es el producto de sus normas. Así pues, si se satisface (2.94) podemos reemplazar (2.93) para todo fin práctico por:

$$\frac{m}{2} \frac{dv_{\perp}^2}{dt} = -qv_{\parallel} B_{\perp} v_{\perp}, \quad (2.95)$$

a primera vista la expresión (2.95) sugiere que podríamos reemplazarla en la expresión (2.87) para la derivada del momento magnético, sin embargo hay que recordar que en (2.87) la componente perpendicular se tomó respecto al campo magnético que siente la partícula, mientras que en (2.95) la componente perpendicular se tomó respecto al campo magnético en el centro de guía; si el radio de giro es “pequeño” una suposición bastante razonable sería que las magnitudes de ambas componentes sean iguales para fines prácticos pues los campos magnéticos en ambos puntos deberían diferir muy poco. Podemos formalizar esta oración, para nuestros fines lo que se necesita que sean similares son las derivadas así que como segunda condición de adiabaticidad se pide que:

$$\left| \frac{m}{2B} \frac{dv_{\perp}^2}{dt} - \frac{m}{2B} \frac{d\tilde{v}_{\perp}^2}{dt} \right| \leq \epsilon_{\mu}, \quad (2.96)$$

con \tilde{v}_{\perp} la componente perpendicular al campo en la posición de la partícula y v_{\perp} el campo perpendicular al campo en el centro de giro, ϵ_{μ} es el umbral de medición aceptable para la derivada del momento magnético.

Notemos que en (2.87) aparece la derivada del campo magnético respecto al tiempo, por la regla de la cadena podemos reescribir este término como:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla B, \quad (2.97)$$

intuitivamente la expresión “adiabático” nos dice que un proceso es lento del tal suerte que los cambios temporales se desprecian, así pues, en este caso vamos a suponer que la parcial respecto al tiempo es suficientemente pequeña para no tomarla en cuenta, como tercer hipótesis de adiabaticidad se impone que:

$$\left| \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} \frac{\partial B}{\partial t} \right| \leq \epsilon_{\mu}, \quad (2.98)$$

podemos utilizar (2.95)-(2.98) para reescribir (2.87) por la siguiente expresión físicamente válida:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{qv_{\parallel}B_{\perp}v_{\perp}}{B} - \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} (\vec{v} \cdot \nabla B). \quad (2.99)$$

Notemos que ∇B es un vector pues es el gradiente de la magnitud del campo magnético, así se puede descomponer también en su parte paralela y parte perpendicular al campo magnético del centro de giro. Como cuarta hipótesis de adiabaticidad vamos a suponer que el cambio en la magnitud se da principalmente en la componente paralela, siendo más formales la cuarta condición de adiabaticidad se puede escribir como:

$$\left| \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} (\vec{v} \cdot \nabla B) - \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s} \right| \leq \epsilon_{\mu}, \quad (2.100)$$

con $\frac{\partial}{\partial s}$ representando la derivada respecto a la longitud de arco al moverse sobre una línea de campo magnético. Así podemos reescribir (2.99) como:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{qv_{\parallel}B_{\perp}v_{\perp}}{B} - \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (2.101)$$

Ahora bien, el campo magnético debe satisfacer las leyes de Maxwell, en particular se debe cumplir que [2]:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.102)$$

Hay una quinta hipótesis de adiabaticidad, para motivarla vamos a discutir primero la aproximación de manera informal. Tomando las coordenadas generadas por $\{\hat{b}, \hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ podemos pensar que localmente generan un sistema cilíndrico del tal forma que la divergencia del campo magnético se puede escribir “a buena aproximación” como:

$$0 = \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial B_{\perp}}{\partial r} + \frac{B_{\perp}}{r}, \quad (2.103)$$

donde r es la distancia al girocentro. Vale la pena observar que en el girocentro la componente B_{\perp} vale cero, así pues podemos aproximar a primer orden en serie de Taylor y aproximar la componente ortogonal como:

$$\frac{B_{\perp}}{r} = \frac{\partial B_{\perp}}{\partial r}, \quad (2.104)$$

de donde podemos mezclar (2.103) y (2.104) para obtener:

$$\frac{\partial B_{\parallel}}{\partial s} = -2\frac{B_{\perp}}{r}, \quad (2.105)$$

finalmente, si el girorradio es suficientemente pequeño es razonable que la componente paralela del campo sea “parecida” a la magnitud total del campo, así, lo

mismo sus derivadas por lo que podríamos sustituir $\frac{\partial B}{\partial s}$ por $\frac{\partial B_{\parallel}}{\partial s}$; con lo que hemos desarrollado podemos dar la quinta hipótesis de adiabaticidad que se va a imponer:

$$\left| \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{2B^2} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{B^2} v_{\parallel} \frac{B_{\perp}}{r} \right| \leq \epsilon_{\mu}, \quad (2.106)$$

con lo que (2.101) nos queda:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{qv_{\parallel}B_{\perp}v_{\perp}}{B} + \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{B^2} v_{\parallel} \frac{B_{\perp}}{r}, \quad (2.107)$$

pero como ya vimos en (2.43) y (2.44) el girorradio es $r = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{v_{\perp}m}{qB}$, sustituyendo en (2.106) obtenemos:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{qv_{\parallel}B_{\perp}v_{\perp}}{B} + \frac{m\tilde{v}_{\perp}^2}{B^2} v_{\parallel} \frac{qBB_{\perp}}{mv_{\perp}} = -\frac{qv_{\parallel}B_{\perp}v_{\perp}}{B} + \frac{\tilde{v}_{\perp}}{B} v_{\parallel} qB_{\perp} = 0, \quad (2.108)$$

es decir, el momento magnético es constante de movimiento para todo fin práctico si se cumplen las 5 condiciones de adiabaticidad que hemos descrito.

Hay que destacar que aunque a las 5 condiciones se les llamó de “adiabaticidad” solo (2.96) y (2.98) implican que los cambios de alguna cantidad respecto al tiempo sean “pequeños”, las otras 3 condiciones implican condiciones sobre el comportamiento geométrico del campo magnético por lo que no necesariamente son adiabáticas, un nombre más apropiado podría ser “condiciones geométricas”.

2.3.2. Variable de Acción

Si retomamos nuestra experiencia con los casos de campos magnético y eléctrico constantes vemos que la solución tiene orbitas periódicas en el plano XY ; por otro lado de nuestro desarrollo en la sección de Variables de Acción-ángulo tenemos que la variable de acción $\int pdq$ es una cantidad conservada donde q es cualquier coordenada periódica; en el caso de campo magnético constante las coordenadas X y Y son periódicas como vimos explícitamente en (2.43) y (2.44). De nuestro tratamiento de invariantes adiabáticos nos podemos preguntar ¿En este caso también se conserva la variable de acción bajo perturbaciones “pequeñas”? La respuesta como veremos es afirmativa.

Primero tomemos el lagrangiano para una partícula en un campo electromagnético, que es [25]:

$$\mathcal{L} = \frac{m\|\dot{\vec{r}}\|^2}{2} + q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (2.109)$$

de esta expresión es inmediato que en cartesianas el momento para cualquiera de las 3 coordenadas es:

$$p_i = m\dot{r}_i + qA_i. \quad (2.110)$$

Para generar un campo magnético uniforme en la dirección del eje Z como $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$ podemos tomar el potencial vectorial como:

$$\vec{A} = B_0 \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0 \right), \quad (2.111)$$

en efecto, un cálculo inmediato nos muestra que:

$$\nabla \times \vec{A} = B_0\hat{e}_z, \quad (2.112)$$

ahora bien, podemos tomar la componente x y calcular el valor de la variable de acción asociada usando (2.40) y (2.43):

$$\begin{aligned} S &= \int_t^{t+\tau} \left(mv_{\perp} \cos(\omega t) - qB_0 \frac{y_i - \frac{v_{\perp}}{\omega} + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t)}{2} \right) v_{\perp} \cos(\omega t) dt = \\ &= \int_t^{t+\tau} \left(mv_{\perp}^2 - \frac{qB_0 v_{\perp}^2}{2\omega} \right) \cos^2(\omega t) - qB_0 v_{\perp} \frac{y_i \omega - v_{\perp}}{2\omega} \cos(\omega t) dt, \end{aligned} \quad (2.113)$$

usando que la integral de \cos a lo largo de un periodo es 0 y que $\int_t^{t+\tau} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ obtenemos:

$$S = \frac{mv_{\perp}^2 \pi}{\omega} - \frac{qB_0 v_{\perp}^2}{2\omega^2}, \quad (2.114)$$

recordando que la frecuencia de giro es $\omega = \frac{qB_0}{m}$ podemos sustituir y llegar a:

$$S = \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{qB_0} - \frac{m^2 v_{\perp}^2}{2qB_0} = \left(\frac{m\pi}{q} - \frac{m}{2q} \right) \frac{mv_{\perp}^2}{B_0} = \frac{m}{2q} (2\pi - 1) \mu. \quad (2.115)$$

La primera observación de (2.115) es que la variable de acción se conserva, esto ya lo sabíamos por el desarrollo que hicimos en el capítulo de Antecedentes de Mecánica clásica. La segunda observación es que la variable de acción es esencialmente el momento magnético salvo una constante, así pues, si se cumplen condiciones adiabáticas para la conservación del momento magnético es de esperar que se conserve la variable de acción; para formalizar esto se puede introducir como condición de adiabaticidad:

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} |p(\zeta) \dot{x}(t) - \tilde{p}(\zeta) \dot{\tilde{x}}(t)| dt \leq \epsilon_S, \quad (2.116)$$

donde las variables con tilde son las soluciones que se obtendrían si se tuviera un campo magnético homogéneo igual al del centro de giro en el instante t y las variables sin tilde son las del campo magnético en cuestión. Hay que recalcar que esta condición de adiabaticidad implica la conservación de la variable de acción y que es independiente de las 5 condiciones dadas previamente para garantizar la conservación del momento magnético.

3 Fase geométrica

La fase geométrica es un tópico conocido en física teórica, consiste en tener un sistema físico con una propiedad que es un ángulo o semejante a uno, la pregunta que uno se hace es ¿Que le pasa a la fase si mi sistema físico evoluciona y al final acaba en su punto de partida? ¿La fase cambia o se queda igual?.

Esta pregunta de hecho es bastante relevante, el fenómeno ganó popularidad cuando fue extendido por Berry en la década de los 80's a la ecuación de Schrödinger [26], aunque un análisis de la bibliografía previa muestra que ya había precedentes [27] [28]. Pensemos en un péndulo de Foucault, la dirección en la que oscila tiene un ángulo con respecto al meridiano que podemos pensarlo como una fase. Después de un día el péndulo vuelve al mismo lugar, sin embargo el ángulo que forma su eje de oscilación con el meridiano ya no es el mismo [29], esto se debe a que la Tierra es redonda y de hecho el experimento es famoso por dar evidencia experimental de eso. Lo interesante es que hay propiedades que no vuelven a su punto de partida cuando se completa un ciclo, y que esto es debido a puros efectos topológicos.

Otro ejemplo de la aplicación de la fase geométrica es el de la fibra óptica y la luz polarizada. Se podría pensar ingenuamente que al tener un haz de luz polarizada viajando en fibra óptica su polarización no cambiará, pero resulta que este no es el caso, si la fibra óptica esta enroscada o curvada la polarización de un haz incidente no será la misma que la polarización del haz saliente [30]. Por ejemplo, si la luz entra con polarización lineal el haz que sale tendrá polarización lineal pero su eje habrá rotado, la fase de la rotación es la fase geométrica y se debe a que la fibra óptica se enroscó obligando al haz a modificar su polarización, de nuevo esto se debe a puros efectos geométricos, en particular a la geometría de la fibra óptica.

Matemáticamente esto se puede tratar con los llamados haces fibrados [31]. Supongamos que nuestro espacio X es una variedad diferencial que representa una familia de parámetros a través de los cuales depende nuestro sistema, para el caso de la fase de Berry puede ser un parámetro que determina al hamiltoniano y para la fase en el péndulo de Foucault la variedad puede ser la esfera; podemos considerar un espacio más grande que sea $X \times \mathcal{F}$ donde \mathcal{F} es el espacio donde viven las variables en las que podemos medir ángulos, para el caso de fase de Berry el espacio \mathcal{F} sería el de las funciones de onda y para el del péndulo de Foucault sería el de las posibles direcciones que puede tomar el péndulo en cada punto de la esfera, dado que en este espacio queremos medir ángulos es necesario que \mathcal{F} tenga la estructura de espacio vectorial con producto interior. Al considerar una

trayectoria cerrada en X podríamos preguntarnos que tan cerca o lejos estamos del valor inicial de la fase, a la diferencia en caso de existir se le llama anholonomía [32].

A continuación veremos unos ejemplos de fase geométrica en diferentes ramas de la física.

3.1. Fase de Pancharatnam

Ahora veremos un ejemplo de fase geométrica estudiando la propagación de una onda electromagnética polarizada.

Supongamos que tenemos un haz de luz propagándose en la dirección del eje z , veamos que le pasa al campo eléctrico. Como se propaga en el eje z el campo eléctrico solo tiene componentes en el plano XY , digamos $\vec{E}(t) = (E_x(t), E_y(t))$, cada componente es una onda sinusoidal y su gráfica es una elipse; supongamos que tiene su eje mayor sobre el eje X . Entonces se puede describir como [33]:

$$(E_x = A_x \cos(\omega t), E_y = A_y \sin(\omega t)) . \quad (3.1)$$

Sin embargo, una polarización general no tiene su eje mayor paralelo al eje X , puede ocurrir que la elipse este rotada, así pues, el caso mas general se obtiene al aplicar una matriz de rotación a la expresión (3.1), es decir, el estado mas general se ve como [33]:

$$E_x = A_x \cos(\omega t) \cos(\tilde{\phi}) - A_y \sin(\omega t) \sin(\tilde{\phi}), \quad (3.2)$$

$$E_y = A_x \cos(\omega t) \sin(\tilde{\phi}) + A_y \sin(\omega t) \cos(\tilde{\phi}), \quad (3.3)$$

la expresión anterior nos da un marco general para trabajar con luz polarizada siempre que el ángulo $\tilde{\phi}$ esté en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, así se garantiza que se abarcan todas las polarizaciones [27]. Por ejemplo, la polarización lineal corresponde al caso particular $A_y = 0$, y la polarización circular corresponde a $A_x = A_y$. Ahora bien, dado un haz de luz que se propaga como antes hemos mencionado podemos primero asociar a cada $\tilde{\phi}$ una fase asociada vía la siguiente expresión:

$$\phi = \begin{cases} \pi - \tilde{\phi} & \text{si } \tilde{\phi} \geq 0, \\ -\pi - \tilde{\phi} & \text{si } \tilde{\phi} < 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

y con esta relación podemos asociar a cada estado de polarización un vector, digamos $(2\lambda, 2\phi)$, donde se define [27]:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right), \quad (3.5)$$

el parámetro λ nos indica el cociente entre los ejes menor y mayor, mientras que el parámetro ϕ es el ángulo que forma el eje mayor con el eje Y , así pues estos dos

parámetros son suficientes para describir a la familia de elipses; notemos que para que λ este definido por el cociente del eje menor y del eje mayor se requiere que $A_y \leq A_x$ o lo que es equivalente $\lambda \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, así el vector de parámetros vive en el espacio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi)$; este espacio se puede poner en correspondencia con una esfera donde la primera coordenada es la latitud y la segunda la longitud, a dicha esfera se le llama “Esfera de Poincaré” [27]. Para una descripción completa de la onda que se propaga se requiere añadir un tercer parámetro, la intensidad de la onda I , que es esencialmente un reescalamiento de la elipse; al conjunto de estos 3 parámetros se le llama “Parámetros de Stokes” [27] o también “Esfera de Stokes”. Ahora bien, en la esfera de Poincaré dos estados de polarización diametralmente opuestos se dicen con polarización opuesta. En las expresiones (3.2) y (3.5) se puede hacer el cambio de variable $\omega t' = \omega t + \delta$ y se recorrería la misma elipse, es decir, es una reparametrización así que el estado de polarización es el mismo, sin embargo físicamente no son la misma onda, están desfasadas, es decir, llegan en tiempo diferentes a sus máximos y mínimos, esto ocasiona que estas dos ondas puedan generar un patrón de interferencia.

Si se inicia con un estado de polarización en la Esfera de Poincaré uno puede preguntarse ¿Cómo se ve como descomposición de otros estados? La pregunta anterior puede ser útil cuando se quiere hacer interferir un haz con otro haz y sus polarizaciones son diferentes. El teorema siguiente nos ayuda a responder esa pregunta.

Teorema 1. *Dado un estado de polarización C con intensidad I , éste se puede descomponer como la suma de dos estados de polarización opuesta A, B donde la intensidad del primero es $I \cos^2(\frac{CA}{2})$ y la del segundo es $I \sin^2(\frac{CA}{2})$, donde CA es el ángulo formado por los estados C y A en la esfera de Poincaré. [27]*

Ahora bien, supongamos que se tiene un haz en el estado A , y este se hace interferir con un haz en el estado B . ¿Cuál es la intensidad resultante? Si el primer haz tiene intensidad I_1 y el segundo I_2 se afirma que entonces la intensidad resultante es $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\frac{c}{2}) \cos(\delta)$, donde c es el ángulo que forman los estados A y B en la esfera de Poincaré y δ es la diferencia de fase entre A y la proyección de B en la polarización de A . Para probarlo primero descomponemos el estado B como la suma de dos estados B_1, B_2 , el primero está en el mismo estado de polarización que A , y el segundo tiene polarización opuesta. Por el resultado del Teorema 1 sabemos que la intensidad de B_1 es $I_{2,1} = I_2 \cos^2(\frac{c}{2})$, y la del segundo es $I_{2,2} = I_2 \sin^2(\frac{c}{2})$.

Si tenemos dos estados en la misma polarización estos aún pueden diferir por una fase, es decir, si $A(t) = \sqrt{I_1} F_1(\omega t)$ donde F_1 es un estado de polarización con intensidad unitaria entonces ocurre que $B_1(t) = \sqrt{I_{2,1}} F_1(\omega t + \delta)$, donde δ es la diferencia de fase y es, en principio, arbitraria. La intensidad del haz al hacer interferir A con B_1 es [33]:

$$I = \int_0^T \|A(t) + B_1(t)\|^2 dt = \int_0^T \left\| \sqrt{I_1} F_1(\omega t) + \sqrt{I_{2,1}} F_1(\omega t + \delta) \right\|^2 dt =$$

$$= I_1 + I_{2,1} + 2\sqrt{I_1 I_{2,1}} \int_0^T F_1(\omega t) \cdot F_1(\omega t + \delta) dt, \quad (3.6)$$

ahora bien, si $F_1(\omega t) = (E_x \sin(\omega t), E_y \sin(\omega t + \phi))$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^T F_1(\omega t) \cdot F_1(\omega t + \delta) dt &= \int_0^T \left[E_x^2 \sin^2(\omega t) + E_y^2 \sin^2(\omega t + \phi) \right] \cos \delta + \\ &+ \left[E_x^2 \sin \omega t \cos(\omega t) + E_y^2 \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi) \right] \sin \delta dt = \cos \delta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde la última igualdad se da porque F_1 tiene intensidad 1 por hipótesis y se usó que la integral del producto de \sin y \cos a lo largo de un periodo es cero.

Regresando a nuestro problema original nos interesa cual es la intensidad al hacer interferir los estados A y B , a este estado llamémosle C , por el Teorema 1 se puede ver como una suma de dos estados, uno con polarización igual a la de A y otro con polarización opuesta, y la intensidad total será la suma de sus dos componentes, pero la intensidad de la componente con la misma polarización que A es justo la que calculamos en (3.6), esto es debido a que la componente B_2 no contribuye por tener polarización opuesta; así pues tenemos que la intensidad resultante al interferir A y B es la suma de (3.6) con la intensidad de B_2 :

$$\begin{aligned} I_T &= I_1 + I_{2,1} + 2\sqrt{I_1 I_{2,1}} \cos \delta + I_{2,2} = I_1 + I_2 \cos^2\left(\frac{c}{2}\right) + \sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{c}{2} \cos \delta + \\ &+ I_2 \sin^2\left(\frac{c}{2}\right) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{c}{2}\right) \cos \delta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

la expresión anterior es justo la igualdad que queríamos demostrar para obtener la expresión de la intensidad para la interferencia de dos estados A y B . Podemos tratar de invertir el problema anterior; supongamos que tenemos un haz con polarización elíptica C y nos interesa obtenerlo como la suma de dos haces, digamos C_1, C_2 , donde el primero tiene su polarización en el estado A y el segundo en el estado B sin que estas sean opuestas pues ese caso está resuelto por el Teorema 1. ¿Hay alguna relación entre las intensidades de C_1, C_2 y la de C ? La respuesta es afirmativa.

Llamemos $a = \bar{BC}, b = \bar{AC}, c = \bar{AB}$ los ángulos formados en la esfera de Poincaré y digamos que C, C_1, C_2 tienen intensidad I, I_1, I_2 respectivamente. Para encontrar la relación entre las intensidades partimos de la hipótesis:

$$C = C_1 + C_2, \quad (3.9)$$

como son iguales entonces sus componentes en cualquier dirección también deben ser iguales, en particular tomemos la componente en la dirección A' , la dirección con polarización opuesta a A . Por el Teorema 1 se tiene que la componente de C en A' tiene intensidad $I \sin^2 \frac{cA}{2}$, pero al sacar la componente del lado derecho de (3.9)

notamos que solo debemos considerar la contribución de C_2 , pues C_1 tiene polarización A . La componente de C_2 es $I_2 \sin^2 \frac{AB}{2}$, como ambas componentes deben ser iguales concluimos que:

$$I_2 = I \frac{\sin^2 \frac{b}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}}, \quad (3.10)$$

de forma análoga se puede comprobar que:

$$I_1 = I \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}}. \quad (3.11)$$

Una pregunta natural en este punto sería ¿Cual es la diferencia de fase entre los haces C_1 y C_2 ? Para responderla podemos usar la relación (3.8) y concluimos que se debe satisfacer:

$$\cos \delta = \frac{I - I_1 - I_2}{\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{c}{2}}, \quad (3.12)$$

donde δ es la diferencia de fase entre C_1 y la componente de C_2 que tiene la misma polarización. En este punto vale la pena mencionar que el concepto de diferencia de fase está bien establecido cuando se tienen estados con la misma polarización [33], sin embargo para estados con polarización arbitraria no fue hasta el trabajo de Pancharatnam que se logró definir como (3.12). Esta definición no es arbitraria, tiene un sentido físico, al observar la ecuación (3.8) se observa que la intensidad máxima se obtiene cuando la diferencia de fase δ es 0 y es mínima cuando $\delta = \pi$, este comportamiento es bien sabido que ocurre cuando los dos estados tienen la misma polarización y la definición de Pancharatnam lo recupera y lo generaliza bien por lo que es la definición que se adopta para casos mas generales [32]. Usando los valores obtenidos en (3.10) y (3.11) obtenemos que:

$$\cos \delta = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{b}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}}}{2 \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{b}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}} \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{c}{2}}} \cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{c}{2} - \sin^2 \frac{b}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \quad (3.13)$$

la ecuación de arriba nos muestra que la diferencia de fase entre C_1 y C_2 no es arbitraria, y que solo depende de la geometría en la esfera de Poincaré pues solo aparecen términos asociados a los ángulos formados por los estados A, B, C , este resultado es sorprendente pues en principio se esperaría que la diferencia de fase sea un parámetro libre. Mas aún, se puede dar una interpretación geométrica de la diferencia de fase que se obtiene, para ello tomemos C' el elemento diametralmente opuesto a C en la esfera de Poincaré; Es inmediato que $a + a' = \pi$, $b + b' = \pi$, donde a' es el segmento que une C' con A y b' el que une lo une con B , esto es pues el segmento $a + a'$ es un medio círculo que va de C a C' . Ahora, tomemos C' , recordando que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ se concluye que:

$$-\cos \delta = \frac{\cos^2 \frac{a'}{2} + \cos^2 \frac{b'}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 1}{2 \cos \frac{a'}{2} \cos \frac{b'}{2} \cos \frac{c}{2}}. \quad (3.14)$$

El lado derecho tiene una interpretación directa en la esfera: Es el coseno de la mitad del área del triángulo ABC' en la esfera de Poincaré [27], es decir, si Ω es el área del triángulo entonces se deduce:

$$-\cos \delta = \cos \frac{\Omega}{2} \quad (3.15)$$

Recordando que $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ vemos que la expresión anterior es equivalente a:

$$\cos \delta = \cos \left(\pi - \frac{\Omega}{2} \right) \quad (3.16)$$

Dado que la función coseno es par se concluye que la diferencia de fase entre las dos componentes viene dada por:

$$|\delta| = \pi - \frac{\Omega}{2} \quad (3.17)$$

El resultado anterior es sorprendente porque determina el valor de la diferencia de fase únicamente con la geometría en la esfera de Poincaré. Una persona estricta puede reclamar pues el resultado tiene una ambigüedad: El signo de la fase. Este problema se puede resolver estudiando la óptica del problema; Para evitar desviarnos impondremos el resultado [27]: El signo de delta es positivo si el triángulo ABC' se recorre en el sentido de las manecillas del reloj, y negativo si lo hace en el sentido contrario.

Recapitemos un poco. Lo que se ha hecho hasta ahora es demostrar que si un haz se descompone como la suma de dos haces en estados de polarización diferentes sus componentes vendrán dadas por las ecuaciones (3.10) y (3.11), y estas componentes tendrán una diferencia de fase que no es arbitraria, esta determinada por la ecuación (3.14) que tiene de fondo la geometría de la esfera de Poincaré.

Podemos echarnos de reversa, supongamos que empezamos un experimento con dos haces, cada uno con estados de polarización A y B e intensidades I_1 e I_2 ; Además, puede existir una diferencia de fase δ entre estos haces que es arbitraria. El haz resultante de su interferencia tendrá un estado de polarización C en la esfera de Poincaré que estará a una distancia a de A y b de B ., este estado es la suma de sus componentes en A y B , pero dichas componentes justamente son los haces con los que iniciamos el experimento, por lo tanto se deben satisfacer las ecuaciones (3.8) que nos da su intensidad, y (3.10) y (3.11) que determinan la intersección de dos círculos en la esfera de Poincaré, en dicha intersección hay dos puntos, para saber cual punto corresponde al estado final C' basta quedarse con el punto que haga que el triángulo ABC' se recorra en el sentido de las manecillas del reloj si δ es positivo o tomar el otro si δ es negativo.

Al observar (3.17) notamos que si se hace pasar un haz de luz por una secuencia de estados de polarización y al final regresa a su estado de polarización inicial se acumulará una fase que se puede detectar con un experimento de interferencia; por ejemplo, se podría tomar un haz de luz, polarizarlo, dividir dicho haz en dos, digamos A y B , el haz A se hace pasar por una secuencia de estados de tal forma que termina en su estado inicial, finalmente se hace interferir con B , produciendo

un patrón de interferencia debido a la fase δ que acumuló A por la trayectoria que tomó en la esfera de Poincaré. Tenemos una fase geométrica en el sistema que se debe puramente a los efectos geométricos de la trayectoria tomada en el espacio de parámetros.

3.2. Fase de Hannay

Previamente hemos visto que la fase geométrica aparece en óptica. El trabajo de Berry en su momento atrajo mucha atención porque tenía un sistema cuántico al que hacía evolucionar, regresaba a las mismas condiciones iniciales pero la función de onda cambiaba por una fase, naturalmente muchas personas empezaron a cuestionarse si este comportamiento tan extraño se debía a la rareza de la mecánica cuántica o si había otra razón de fondo; El trabajo de Hannay respondió esa pregunta: Existen ejemplos de fase geométrica en física clásica.

Supongamos que tenemos un hamiltoniano $H(q, p, t)$. Podemos fijar un tiempo y obtenemos $H_{t_0}(q, p, t_0)$, a dicho sistema le podemos asociar sus ecuaciones de Hamilton y obtendremos sus trayectorias, por simplicidad supongamos que dichas trayectorias son periódicas.

Ahora bien, tratemos el problema del hamiltoniano inicial con las variables de acción-ángulo I, θ , supongamos que la dependencia del hamiltoniano se puede escribir como $H(q, p, R(t))$ donde R representa un espacio de parámetros. Las ecuaciones de Hamilton asociadas a estas variables tienen una corrección debida al cambio de los parámetros. A saber, las nuevas ecuaciones serán [28]:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{dR}{dt} \frac{\partial I}{\partial R'} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} + \frac{dR}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial R'} \quad (3.19)$$

pero por construcción las variables de acción-ángulo satisfacen que $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$

Por otro lado, vamos a entender que el cambio es adiabático si ocurre que la razón de cambio de las variables de acción-ángulo es la misma que se obtendría al promediar dicho cambio sobre todos los puntos de una trayectoria del Hamiltoniano normal a lo largo de un periodo. Es decir, las ecuaciones anteriores se transforman en [28]:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} \overline{\frac{\partial I}{\partial R'}} \quad (3.20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} + \frac{dR}{dt} \overline{\frac{\partial \theta}{\partial R'}} \quad (3.21)$$

donde los promedios para una función se calculan como [28] $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int f d\theta$.

Ahora bien ¿Cuál es el propósito de tomar estos promedios? En principio las ecuaciones (3.18) y (3.19) se pueden tratar y resolver. La ventaja de tomar promedios aparece al tomar una trayectoria cerrada, es decir, hacer un ciclo completo

en el espacio fase, en tal trayectoria el promedio en (3.20) se anula por el principio adiabático [28] dando conservación de la variable de acción; mas en general el análisis de Hannay se limita a sistemas integrables, es decir, que al dejar fijo el valor de los parámetros se pueda garantizar la conservación de la variable de acción y así el principio adiabático garantiza su conservación si los parámetros varían lentamente.

Si queremos estudiar nuestro sistema dinámico en un ciclo cerrado solo nos van a interesar los valores iniciales y finales de las variables, por tanto concluimos que nuestro sistema dinámico está determinado por el siguiente par de ecuaciones:

$$I = I_0, \quad (3.22)$$

$$\Delta\theta = \Delta_1\theta + \Delta_2\theta. \quad (3.23)$$

$$\text{Con } \Delta_1\theta = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial I} dt \text{ y } \Delta_2\theta = \int \frac{dR}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial R} dt = \int \frac{\partial \theta}{\partial R} dR,$$

Notamos que $\Delta_1\theta$ es el cambio esperado pero el termino $\Delta_2\theta$ es el que puede sorprender, tiene como propiedad que solo depende de la trayectoria tomada en el espacio de parámetros por lo que es una fase geométrica.

Como se menciona en el articulo de Hannay un ejemplo directo de esta fase se obtiene en el Péndulo de Foucault [28], el péndulo tiene la constricción inicial de estar en un plano determinado por dos vectores, uno es el vector normal a la tierra y el otro lo determina la oscilación del péndulo, llamémosle \vec{v} . Debido al movimiento de rotación de la Tierra este vector \vec{v} se traslada, pero siempre debe satisfacer estar sobre la superficie terrestre, esto se traduce en trasladar de forma paralela al vector \vec{v} sobre la esfera de la Tierra, específicamente se está trasladando al vector sobre un paralelo. Podemos medir el ángulo que se genera entre \vec{v} y \vec{u} con \vec{u} un vector que en cada punto del paralelo apunta hacia el polo Norte, aplicando la ecuación (3.21) obtenemos que hay una derivada del ángulo que es debida al movimiento en la esfera, con R representando el punto de la esfera en el que estamos. Vamos a profundizar un poco mas en este caso siguiendo el argumento de [29], la ventaja de tomar esta ruta será que de forma clara se podrá enunciar lo que significa pedir que el proceso sea adiabático, en contraste con el trabajo de Hannay donde se impone el Principio del promedio [28].

Supongamos que tenemos un sistema cuyo movimiento está limitado a un plano, la orientación de este plano está determinada por un vector que es ortogonal al plano, llamémosle S , el cual podemos suponer que es unitario [18]. Ahora supongamos que el plano en el que se puede mover la partícula puede evolucionar con el tiempo, esto se puede modelar si permitimos que el vector S sea función del tiempo; nos interesa describir el movimiento de la partícula, un enfoque directo consiste en utilizar coordenadas, dado que el movimiento tiene la constricción de satisfacer $\vec{x} \cdot S = 0$ basta con encontrar dos vectores ortogonales a S para cualquier momento y podremos escribir a \vec{x} como combinación lineal de dichos vectores. Si suponemos que $\frac{dS}{dt} \neq 0$ podemos obtener un primer vector ortogonal a $S(t)$ como:

$$N = \frac{1}{\left\| \frac{dS}{dt} \right\|} \frac{dS}{dt}, \quad (3.24)$$

en efecto es ortogonal debido a que la norma de S se está suponiendo igual a 1 en todo momento, por lo tanto su derivada y la de cualquier composición es cero; desarrollando:

$$0 = \frac{d\|S\|^2}{dt} = \frac{d(S \cdot S)}{dt} = 2S \cdot \frac{dS}{dt}, \quad (3.25)$$

dado que el vector $\frac{dS}{dt}$ es ortogonal a S cualquier escalamiento del mismo seguirá siendo ortogonal, en particular al dividirlo por su norma. Podemos encontrar un tercer vector ortonormal a los dos primeros definiéndolo como:

$$B = S \times N, \quad (3.26)$$

las definiciones resultarán familiares a cualquier persona que tenga formación en Geometría Diferencial, a saber, dada una curva diferenciable que cumpla que su vector tangente en todo tiempo sea $S(t)$ entonces los vectores N y B son el vector normal y el binormal respectivamente [12]. La dinámica de estos vectores viene dada por las fórmulas de Frenet [12]:

$$\frac{dS}{dt} = \zeta N, \quad (3.27)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\zeta S + \tau B, \quad (3.28)$$

$$\frac{dB}{dt} = -\tau N, \quad (3.29)$$

con ζ la curvatura y τ la torsión de la curva.

Por hipótesis el movimiento esta en el plano ortogonal a S de donde la trayectoria de la partícula se puede expresar como:

$$\vec{x}(t) = \lambda_1(t) N(t) + \lambda_2(t) B(t). \quad (3.30)$$

Nos interesa describir la dinámica de esta partícula, que es lo mismo que resolver la ecuación diferencial asociada a la segunda Ley de Newton, es decir obtener las componentes de la aceleración en términos de las fuerzas que se apliquen, para ello derivamos.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(\zeta) = \frac{d\lambda_1}{dt}(\zeta) N(\zeta) + \lambda_1(\zeta) \frac{dN}{dt}(\zeta) + \frac{d\lambda_2}{dt}(\zeta) B(\zeta) + \lambda_2(\zeta) \frac{dB}{dt}(\zeta), \quad (3.31)$$

usando (3.28) y (3.29) obtenemos:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\lambda_1}{dt} N + \lambda_1 [\tau B - \zeta S] + \frac{d\lambda_2}{dt} B - \lambda_2 \tau N =$$

$$= -\lambda_1 \zeta S + \left[\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_2 \tau \right] N + \left[\lambda_1 \tau + \frac{d\lambda_2}{dt} \right] B, \quad (3.32)$$

volvemos a derivar para obtener la aceleración:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = & - \left[\frac{d\lambda_1}{dt} \zeta + \lambda_1 \frac{d\zeta}{dt} \right] S - \lambda_1 \zeta \frac{dS}{dt} + \left[\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} - \frac{d\lambda_2}{dt} \tau - \lambda_2 \frac{d\tau}{dt} \right] N + \\ & + \left[\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_2 \tau \right] \frac{dN}{dt} + \left[\frac{d\lambda_1}{dt} \tau + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} \right] B + \left[\lambda_1 \tau + \frac{d\lambda_2}{dt} \right] \frac{dB}{dt}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

nuevamente se pueden usar las relaciones de Frenet para deducir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = & - \left[\frac{d\lambda_1}{dt} \zeta + \lambda_1 \frac{d\zeta}{dt} \right] S - \lambda_1 \zeta^2 N + \left[\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} - \frac{d\lambda_2}{dt} \tau - \lambda_2 \frac{d\tau}{dt} \right] N + \\ & + \left[\frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_2 \tau \right] [\tau B - \zeta S] + \left[\frac{d\lambda_1}{dt} \tau + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} \right] B - \left[\lambda_1 \tau + \frac{d\lambda_2}{dt} \right] \tau N = \\ = & \left[\lambda_1 \frac{d\zeta}{dt} - 2\zeta \frac{d\lambda_1}{dt} + \zeta \tau \lambda_2 \right] S + \left[\frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} - 2\tau \frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2 \frac{d\tau}{dt} - \lambda_1 (\zeta^2 + \tau^2) \right] N + \\ & + \left[\frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + 2\tau \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_2 \tau^2 \right] B. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por la segunda Ley de Newton [4] se debe satisfacer que el producto de la masa por la aceleración es igual a la fuerza total aplicada, en el marco τ generado por S, N, B esto se ve como:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = F_S S + F_N N + F_B B. \quad (3.35)$$

Igualando las componentes con la ecuación (3.34) se obtiene:

$$m \left[\lambda_1 \frac{d\zeta}{dt} - 2\zeta \frac{d\lambda_1}{dt} + \zeta \tau \lambda_2 \right] = F_S, \quad (3.36)$$

$$m \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} = F_N + m \left[2\tau \frac{d\lambda_2}{dt} + \lambda_2 \frac{d\tau}{dt} + \lambda_1 (\zeta^2 + \tau^2) \right], \quad (3.37)$$

$$m \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} = F_B + m \left[\lambda_2 \tau^2 - 2\tau \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} \right]. \quad (3.38)$$

Las ecuaciones anteriores nos describen el movimiento de la partícula usando como ejes coordenados S, N, B , dado que el movimiento debe estar en el plano perpendicular a S tiene sentido que determine uno de los ejes, sin embargo no hay

razón física o matemática para escoger a N y a B para determinar los otros dos ejes, bien se habrían podido escoger otros dos vectores ortonormales a S , digamos U_1 y U_2 , sin embargo la descripción en tal sistema se puede recuperar fácilmente de la que ya escribimos, esto gracias a que cualquier par de vectores ortogonales sobre un plano se puede obtener de otro par de vectores ortogonales sobre ese mismo plano con una rotación [18]; en nuestro caso digamos que el ángulo correspondiente a dicha rotación es $\beta(t)$, entonces se debe tener que:

$$U_1(t) = \cos(\beta(t)) N(t) - \sin(\beta(t)) B(t), \quad (3.39)$$

$$U_2(t) = \sin(\beta(t)) N(t) + \cos(\beta(t)) B(t), \quad (3.40)$$

con estas expresiones podemos obtener las derivadas respecto al tiempo para la nueva base, para la derivada de U_1 se obtiene:

$$\frac{dU_1}{dt} = \cos(\beta) \frac{dN}{dt} - \sin(\beta) \frac{d\beta}{dt} N - \sin(\beta) \frac{dB}{dt} - \cos(\beta) \frac{d\beta}{dt} B, \quad (3.41)$$

nuevamente podemos hacer uso de las relaciones de Frenet (3.28) y (3.29) para llegar a:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= \cos(\beta) [\tau B - \zeta S] - \sin(\beta) \frac{d\beta}{dt} N + \sin(\beta) \tau N - \cos(\beta) \frac{d\beta}{dt} B = \\ &= -\zeta \cos(\beta) S + \left[\tau - \frac{d\beta}{dt} \right] [\cos(\beta) B + \sin(\beta) N], \end{aligned} \quad (3.42)$$

usando (3.40) obtenemos que:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\zeta \cos(\beta) S + \left(\tau - \frac{d\beta}{dt} \right) U_2, \quad (3.43)$$

de forma completamente análoga se puede deducir la derivada de U_2 :

$$\frac{dU_2}{dt} = -\zeta \sin(\beta) S + \left(\frac{d\beta}{dt} - \tau \right) U_1. \quad (3.44)$$

Las expresiones anteriores nos dan las derivadas temporales respecto a cualquier marco y con ellas podemos abordar el problema en cualquier marco de coordenadas, sin embargo en Física existe una familia de marcos de particular interés: los "Marcos de referencia inerciales", naturalmente en nuestro caso nuestro marco nunca va a ser inercial pues $\frac{dS}{dt} \neq 0$, aun así podemos buscar un marco que esté "lo mas cerca posible" de ser inercial, limitándonos al plano perpendicular a S esta condición se traduce en pedir que los vectores U_1 y U_2 se "trasladen "lo mas cerca posible" forma paralela a lo largo del tiempo; matemáticamente pedimos que su derivada covariante sea 0, donde la derivada covariante es simplemente la proyección de la derivada sobre el plano [34]. De las expresiones (3.43) y (3.44) vemos que una condición necesaria y suficiente para que el marco se traslade de forma paralela es:

$$\frac{d\beta}{dt} = \tau, \quad (3.45)$$

podemos integrar la torsión y de esta forma tenemos el ángulo β que podemos sustituir en las ecuaciones (3.43) y (3.44) para obtener U_1 y U_2 , en tal marco sus derivadas respecto al tiempo tienen la forma:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\zeta \cos(\beta) S, \quad (3.46)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = -\zeta \sin(\beta) S. \quad (3.47)$$

De las ecuaciones (3.39) y (3.40) podemos expresar a N y a B en términos de U_1 y U_2 como:

$$N = \cos(\beta) U_1 + \sin(\beta) U_2, \quad (3.48)$$

$$B = -\sin(\beta) U_1 + \cos(\beta) U_2, \quad (3.49)$$

sustituyendo en (3.27) obtenemos a la derivada de S en términos de U_1 y U_2 :

$$\frac{dS}{dt} = \zeta [\cos(\beta) U_1 + \sin(\beta) U_2]. \quad (3.50)$$

Con esto podemos calcular la expresión de la velocidad de la partícula en el nuevo marco, dado que la partícula debe quedarse en el plano su posición viene dada por:

$$\vec{x}(t) = x(t) U_1(t) + y(t) U_2(t), \quad (3.51)$$

derivando se obtiene:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} U_1 + x \frac{dU_1}{dt} + \frac{dy}{dt} U_2 + y \frac{dU_2}{dt}, \quad (3.52)$$

usando (3.46) y (3.47) podemos reescribir la velocidad como:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} U_1 + \frac{dy}{dt} U_2 - \zeta [x \cos(\beta) + y \sin(\beta)] S, \quad (3.53)$$

podemos volver a derivar para obtener la aceleración, solo nos interesa la componente sobre el plano pues la componente perpendicular es la responsable de mantener a la partícula sobre el plano ortogonal a S en todo momento. Podemos derivar (3.53) y quedarnos solo con los elementos que estarán sobre el plano, denotando a esta proyección como $Proy\left(\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right)$ llegamos a:

$$Proy\left(\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} U_1 + \frac{d^2y}{dt^2} U_2 - \zeta^2 [x \cos(\beta) + y \sin(\beta)] [\cos(\beta) U_1 + \sin(\beta) U_2], \quad (3.54)$$

podemos utilizar la segunda Ley de Newton para llegar a una expresión en componentes; si se denota como F_x a la componente de la fuerza sobre U_1 y como F_y a la componente sobre U_2 tenemos:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + m\tilde{\zeta}^2 \cos(\beta) [x \cos(\beta) + y \sin(\beta)], \quad (3.55)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y + m\tilde{\zeta}^2 \sin(\beta) [x \cos(\beta) + y \sin(\beta)]. \quad (3.56)$$

La expresión anterior no ha utilizado aproximación alguna, ahora vamos a añadir una hipótesis de “adiabaticidad”. Si el umbral para medir fuerzas es ϵ_F diremos que la fuerza es adiabática si se satisface que:

$$m\tilde{\zeta}^2 (|x| + |y|) \leq \epsilon_F, \quad (3.57)$$

notar que la condición de adiabaticidad solo impone que la curvatura sea “pequeña” pero no impone restricción alguna sobre la torsión. Dado que $|\cos(\theta)| \leq 1$, $|\sin(\theta)| \leq 1 \forall \theta$ tenemos que bajo la hipótesis de adiabaticidad el sistema (3.55), (3.56) se puede sustituir por el siguiente que es equivalente para todo fin práctico:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad (3.58)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad (3.59)$$

el nuevo sistema se puede reconocer como la versión en componentes de la Segunda Ley de Newton en un marco de referencia inercial; así pues la hipótesis de adiabaticidad en términos físicos se traduce en que para todo fin práctico las ecuaciones de movimiento corresponden a las que se tendrían en un marco de referencia inercial.

Supongamos que el sistema recorre una trayectoria cerrada, donde por cerrada vamos a entender que se satisface $S(0) = S(T)$; en tales condiciones los vectores U_1 y U_2 no regresarán necesariamente a su punto de partida, debido a (3.39), (3.40) y (3.45) habrán rotado respecto al vector normal por un ángulo:

$$\beta = \int_0^T \tau, \quad (3.60)$$

es decir, bajo la hipótesis de adiabaticidad tendríamos que las ecuaciones de movimiento corresponden a un sistema de referencia inercial, pero al completar el ciclo y volver al punto de partida veríamos que el sistema coordinado giró por el ángulo β más el ángulo que haya acumulado el vector normal respecto a su configuración inicial; este efecto es puramente geométrico ya que como vimos tiene su origen en el transporte paralelo de los ejes a lo largo de la curva que determina a S . Como ejemplo directo podemos abordar el péndulo de Foucault. Usando coordenadas θ, ϕ para la esfera, siendo ϕ el ángulo del punto al polo norte y θ el meridiano, podemos determinar vector perpendicular en cada punto como:

$$S = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)). \quad (3.61)$$

Supongamos que recorremos la esfera sobre un paralelo, eso corresponde a tomar θ constante, y tomemos que ϕ se recorra con velocidad constante, es decir:

$$\phi(t) = t\omega_0, \quad (3.62)$$

de donde es inmediato que:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (3.63)$$

en el caso de la Tierra ω_0 corresponde a la frecuencia que le toma a la Tierra dar una vuelta completa, es decir $\omega_0 = \frac{2\pi}{24hrs}$. Con esto podemos derivar respecto al tiempo (3.61) para obtener al vector normal y la curvatura; derivando vemos:

$$\frac{dS}{dt} = (-\sin(\theta) \sin(\phi) \omega_0, \sin(\theta) \cos(\phi) \omega_0, 0) = \sin(\theta) \omega_0 (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0), \quad (3.64)$$

de la expresión anterior es inmediato que la curvatura y el vector normal viene dados por:

$$N = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0), \quad (3.65)$$

$$\xi = \sin(\theta) \omega_0. \quad (3.66)$$

Tomando el producto cruz de (3.61) con (3.65) obtenemos la expresión para el vector binormal:

$$\begin{aligned} B &= (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)) \times (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) = \\ &= \left(-\cos(\theta) \cos(\phi), -\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \cos^2(\phi) + \sin(\theta) \cos^2(\phi) \right) = \\ &= (-\cos(\theta) \cos(\phi), -\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta)), \end{aligned} \quad (3.67)$$

finalmente podemos derivar al vector binormal para obtener la torsión:

$$\frac{dB}{dt} = (\cos(\theta) \sin(\phi) \omega_0, -\cos(\theta) \cos(\phi) \omega_0, 0) = -\omega_0 \cos(\theta) N, \quad (3.68)$$

comparando con (3.29) vemos que la torsión viene dada por:

$$\tau = \omega_0 \cos(\theta). \quad (3.69)$$

Notamos que $\phi\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = 2\pi$, usando que las funciones trigonométricas tienen periodo 2π concluimos que S es función periódica y por lo tanto la trayectoria es cerrada. Sin embargo los ejes U_1 y U_2 habrán rotado un ángulo β respecto al vector

normal al terminar el ciclo, con β la integral de la torsión como vimos en (3.45). De (3.65) notamos que el vector normal regresa a su posición inicial al terminar el ciclo por lo que el ángulo de rotación total de los ejes U_1 y U_2 es solo la integral de la torsión. Usando la expresión (3.69) concluimos que el ángulo de rotación total es:

$$\beta = 2\pi \cos(\theta). \quad (3.70)$$

Finalmente, usando (3.57) y (3.66) vemos que para satisfacer la condición de adiabaticidad se requiere:

$$\sin^2(\theta) \leq \frac{\epsilon_F}{\omega_0^2 m [|x| + |y|]}, \quad (3.71)$$

en palabras coloquiales se pide que “ θ sea pequeño”. Bajo la hipótesis de adiabaticidad la expresión en componentes para la fuerza es igual a la que se tendría en un marco inercial, así si tenemos un péndulo y las condiciones iniciales son apropiadas tendríamos que el movimiento en el plano perpendicular a S sería unidimensional, por ejemplo estaría confinado a moverse sobre la recta generada por U_1 , pero este vector va rotando, al volver al punto de partida veríamos que el eje de movimiento del péndulo habría rotado por el ángulo descrito por (3.70).

El efecto como vimos tiene su origen en el transporte paralelo de los vectores a lo largo de una variedad, en este caso la superficie de la esfera, por lo que es una fase completamente geométrica, esto queda claro al notar que el ángulo es únicamente la integral de la torsión, no influye la masa de la partícula o su velocidad.

Como comentario final vale la pena notar que β es un ángulo por lo que podemos sumarle o restarle múltiplos de 2π y se obtendría el mismo resultado, así podemos describir a β como:

$$\beta = 2\pi [\cos(\theta) - 1], \quad (3.72)$$

lo importante de la observación anterior es que la expresión (3.72) podemos reconocerla como el negativo del área de la esfera que encierra la curva de θ constante sobre la que nos estamos moviendo, un resultado análogo a lo que vimos en la fase de Pancharatnam y la esfera de Poincaré.

3.3. Fase de Berry

Supongamos que tenemos un sistema cuántico con hamiltoniano $H(T)$, donde T denota una familia de parámetros que pueden variar en el tiempo. Tomemos un estado $|\psi(t)\rangle$, dicho estado deberá satisfacer la ecuación de Schrödinger en virtud de los postulados de la mecánica cuántica [35].

$$H(T)(|\psi(t)\rangle) = i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle, \quad (3.73)$$

dentro de la mecánica cuántica son de particular interés las soluciones propias de la ecuación de Schrödinger que están definidas cuando el hamiltoniano no depende del tiempo, vienen dadas por [35]:

$$H(T)(|\phi_n\rangle) = E_n |\phi_n\rangle, \quad (3.74)$$

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |\phi_n\rangle. \quad (3.75)$$

En general la energía del sistema dependerá del tiempo pues el espectro de H cambiará cuando cambien los parámetros T . Por simplicidad supongamos que el espectro es discreto, y que las energías para cada valor de T se pueden ordenar como $\{E_1(T), E_2(T), E_3(T), \dots\}$; además a cada energía le corresponde una única eigenfunción. Esta eigenfunción por supuesto depende del nivel energético en cuestión pero también de los parámetros T , es decir, se satisface que existe un único estado $|n, T\rangle$ tal que $H(T)(|n, T\rangle) = E_n(T) |n, T\rangle$

Supongamos que perturbamos nuestro hamiltoniano alterando los parámetros T , pero esta perturbación la hacemos "lenta y no muy grande", es decir, adiabática; Para evitar ambigüedad en el significado de adiabático vamos a traducir nuestra suposición en que el estado siempre es eigenestado del hamiltoniano y su nivel energético no cambia, es decir, $H(T) |\psi(t)\rangle = E_n(T) \psi(t)$, obsérvese que la n es la misma para todo tiempo, aunque esto no implica que la energía es constante en todo momento. En virtud del teorema adiabático [26] sabemos que para cada tiempo nuestro estado debe ser eigenfunción del hamiltoniano. Entonces para cualquier tiempo nuestro estado debe verse como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} |n, T(t)\rangle. \quad (3.76)$$

La integral en la exponencial es el término usual para describir la dinámica de un estado estacionario, sin embargo hemos incluido un término adicional, $\gamma(t)$ es la llamada fase de Berry. Ahora veamos que expresión debe tener para satisfacer la ecuación de Schrödinger.

Por un lado podemos aplicar el hamiltoniano al estado, y al ser un operador lineal los escalares salen del hamiltoniano, por lo que obtenemos:

$$H |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} H |n, T(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} E_n |n, T(t)\rangle. \quad (3.77)$$

Por otro lado, tomando la derivada parcial respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle &= i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} \partial_t |n, T(t)\rangle + i\hbar \partial_t (e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)}) |n, T(t)\rangle = \\ &= i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} \partial_t |n, T(t)\rangle + i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} \left(-\frac{i}{\hbar} E(t) + i \frac{d\gamma}{dt}\right) |n, T(t)\rangle = \\ &= i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} \partial_t |n, T(t)\rangle + H |\psi(t)\rangle - \hbar \frac{d\gamma}{dt} |\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Por (3.73) se requiere que (3.77) y (3.78) sean iguales, de lo anterior vemos que esto se satisface si y solo si:

$$\hbar \frac{d\gamma}{dt} |\psi(t)\rangle = i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} \partial_t |n, T(t)\rangle. \quad (3.79)$$

Tomando el producto interior con $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds + i\gamma(t)} |n, T(t)\rangle$ obtenemos que una condición necesaria para satisfacer la ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \langle n, T(t) | \partial_t |n, T(t)\rangle, \quad (3.80)$$

integrando respecto al tiempo obtenemos una expresión para γ :

$$\gamma(t) = i \int_0^t \langle n, T(t) | \partial_t |n, T(t)\rangle dt. \quad (3.81)$$

Al analizar la ecuación (3.79) notamos que el cambio temporal en $\partial_t |n, T(t)\rangle$ se debe únicamente al cambio debido al parámetro, por lo que es tentador aplicar “Regla de la cadena” para cambiar la derivada temporal por una derivada respecto al espacio de parámetros, el problema está en que el espacio de parámetros es hasta este punto un espacio abstracto en el que no hemos introducido alguna noción de derivada, con la ayuda de la geometría diferencial podemos resolver este problema. Supongamos que \mathcal{M} es el espacio de parámetros y tiene estructura de variedad diferencial, para cada punto T en \mathcal{M} podemos obtener la eigenfunción asociada a (3.74), por simplicidad denotemos a dicha función como $|e\rangle$. Para cada punto T podemos construir el siguiente espacio:

$$E(T) = \{\lambda |e\rangle \mid \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (3.82)$$

Con lo anterior podemos construir un haz fibrado donde el espacio base es \mathcal{M} y la fibra es $E(T)$ [31]. En este haz podemos construir un campo vectorial sobre el, que estará descrito en cada punto como un escalar que depende del punto T multiplicando al vector $|e\rangle$, es decir, un campo vectorial se puede ver como:

$$v(T) = \kappa(T) |T\rangle, \quad (3.83)$$

T representa un punto en el espacio de parámetros, como dicho espacio es una variedad podemos asociarle coordenadas locales, supongamos que T se puede representar como (T^1, \dots, T^m) . Para estos campos vectoriales podemos definir una derivada covariante como la proyección de la derivada usual sobre la fibra, es decir [31]:

$$\nabla v = |e\rangle \langle e | dv \rangle = |e\rangle \sum_{j=1}^m \left\langle e \left| \frac{\partial v}{\partial T^j} \right. \right\rangle dT^j, \quad (3.84)$$

con la expresión anterior podemos obtener la forma de la conexión que se requiere para tener esta derivada, para ello basta tomar la derivada covariante de $|e\rangle$:

$$\nabla |e\rangle = |e\rangle \sum_{j=1}^m \left\langle e \left| \frac{\partial e}{\partial T^j} \right. \right\rangle dT^j = \omega(T) |e\rangle, \quad (3.85)$$

donde ω denota a la conexión, y viene dada por:

$$\omega(T) = \sum_{j=1}^m \left\langle e \left| \frac{\partial e}{\partial T^j} \right. \right\rangle dT^j. \quad (3.86)$$

Con esta expresión podemos reescribir (3.81) como una integral de línea sobre el espacio de parámetros:

$$\gamma(t) = i \int_0^t \sum_{j=1}^m \left\langle e \left| \frac{\partial e}{\partial T^j} \right. \right\rangle \frac{dT^j}{dt} dt = i \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^m \left\langle e \left| \frac{\partial e}{\partial T^j} \right. \right\rangle dT^j = i \int_{\mathcal{T}} \omega(T), \quad (3.87)$$

donde \mathcal{T} denota la trayectoria tomada en el espacio de parámetros.

Si nuestros parámetros son sometidos a una perturbación con periodo τ tendremos que al final del período los parámetros volvieron al estado inicial, sin embargo el sistema va a diferir del original por la fase dada por (3.87) que es:

$$\gamma = i \oint \langle n, T | \partial_T | n, T \rangle dT, \quad (3.88)$$

dicha fase se conoce como Fase de Berry. La fase se puede observar con un experimento de interferencia, si se toman dos haces de electrones y el segundo se hace pasar por una sucesión adiabática de perturbaciones del hamiltoniano de tal forma que el estado final corresponde al estado inicial, y se hace interferir con el primer haz se podría observar un patrón de interferencia y de forma indirecta medir la fase.

En este punto es necesario hacer algunas observaciones: La primera es que la construcción del haz fibrado aquí presentada no es la única, otra alternativa consiste en hacer directamente el producto entre la variedad y el grupo $U(1)$, es decir trabajar en el haz fibrado [36]:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M} \times U(1), \quad (3.89)$$

la ventaja de trabajar con este conjunto es que al ser un producto de manera trivial es un haz fibrado, la desventaja es que deducir la forma de la conexión requiere un poco más de desarrollo, sin embargo los dos enfoques son equivalentes.

Una segunda observación es que la conexión ω define de forma natural una forma de curvatura dada por [31]:

$$\theta = d\omega = \langle de | de \rangle, \quad (3.90)$$

si existe una región \mathcal{A} en el espacio de parámetros tal que su frontera corresponda con la curva \mathcal{T} podemos aplicar el Teorema de Stokes [31] en (3.87) para llegar a otra expresión para la Fase de Berry [31]:

$$\gamma = i \int_{\mathcal{A}} \theta = -Im \int_{\mathcal{A}} \sum_{j,k=1}^m \left\langle \frac{\partial e}{\partial T^j} \left| \frac{\partial e}{\partial T^k} \right. \right\rangle dT^j \wedge dT^k, \quad (3.91)$$

esta expresión nos dice que la fase de Berry corresponde a la integral de la curvatura sobre la superficie encerrada por la curva tomada en el espacio de parámetros, este resultado tampoco es nuevo, como vimos en la fase de Pancharatnam y en el péndulo de Foucault la fase era esencialmente el área de la sección de la esfera encerrada por la curva tomada, esta área corresponde a la integral de la curvatura de la esfera sobre la sección encerrada por la trayectoria [34].

Como última observación vale la pena notar que para poder observar la fase de Berry se requiere que la eigenfunción tome valores complejos, si toma valores reales entonces la fase no aparecerá, esto se debe a que la norma de la eigenfunción debe ser la constante 1 pues es una densidad de probabilidad. Si suponemos que la eigenfunción es real, derivamos y obtenemos:

$$0 = \frac{\partial 1}{\partial T} = \frac{\partial \langle e|e \rangle}{\partial T} = \langle e| \partial_T |e \rangle + \langle \partial_T e|e \rangle = 2Re(\langle e| \partial_T |e \rangle), \quad (3.92)$$

si la eigenfunción es real tenemos que el producto interior es igual a su parte real, por lo que:

$$\langle e| \partial_T |e \rangle = 0, \quad (3.93)$$

insertando en la ecuación (3.88) notamos que la fase de Berry es la integral de la constante cero, por lo que la fase es cero. Al observar (3.92) notamos que en el caso general lo que se puede garantizar es que la parte real de $\langle e| \partial_T |e \rangle$ es cero, es decir, es un imaginario puro, al usar este hecho en (3.88) notamos que la fase de Berry siempre es un número real.

Como la fase de Berry requiere que las eigenfunciones tomen valores complejos no es sorpresa que los ejemplos teóricos donde se estudia involucren campos magnéticos [36] pues la interacción de campo magnético obliga a la eigenfunción a tener entradas complejas debido al spin [37].

4 Fase geométrica y campos magnéticos

Ya hemos estudiado el movimiento de una partícula cargada en presencia de campos magnéticos, vimos que bajo hipótesis de adiabaticidad el momento magnético y la variable de acción son invariantes. Por otro lado ya estudiamos ejemplos de fase geométrica y vimos que su origen está en el proceso de transporte paralelo. Ahora toca ver como se relacionan estas dos ideas.

4.1. Fase geométrica en giromovimiento

Como vimos en el capítulo 2 una partícula cargada en presencia de un campo magnético va a seguir una trayectoria similar a una hélice, pero además, se debe considerar que el centro de la hélice no sigue exactamente a las líneas de campo, sufre desviaciones que tienen su origen en las derivas que ya hemos estudiado.

Tratemos de dar una descripción del movimiento un poco mas detallada. Para ello primero debemos buscar un sistema de coordenadas para describir la cinemática; Si consideramos que nuestra partícula se mueve en una variedad, por ejemplo en \mathbb{R}^3 , podemos construir en cada punto el espacio tangente. Así pues, si encontramos 3 vectores base para el espacio tangente en cada punto podemos inducir un juego de coordenadas; por practicidad sería conveniente que dichos vectores fueran ortonormales. Existe un vector que es en cierta forma natural para el problema de una partícula moviéndose en un campo magnético: Si se considera $b(x) = \frac{B(x)}{\|B(x)\|}$ tenemos en cada punto un vector unitario que es paralelo al campo magnético, y la proyección de la velocidad de la partícula en esta dirección en cada punto nos diría que tan cerca o lejanos está el movimiento de seguir una línea de campo; de nuestra experiencia con el giromovimiento hay otra razón para escoger este vector, de (2.46) sabemos que la trayectoria se puede ver como:

$$\vec{r}(t) = \vec{X}(t) + \vec{x}(t), \quad (4.1)$$

con \vec{X} el girocentro y \vec{x} el movimiento perpendicular al campo magnético. Para completar la descripción necesitamos dos vectores que generen el plano perpendicular a b y podremos escribir a \vec{x} en términos de dichos vectores, digamos que dichos vectores son $e_1(x), e_2(x)$. Vale la pena recalcar que dichos vectores pueden,

y en general van a depender de x , nos interesa que sean funciones suaves para poder derivar.

La elección de la base nos da un grado de libertad, pues si $e_1(x), e_2(x)$ son vectores que completan a $b(x)$ a una base bien podríamos construir:

$$f_1(x) = \cos(\phi(x))e_1(x) + \sin(\phi(x))e_2(x), \quad (4.2)$$

$$f_2(x) = -\sin(\phi(x))e_1(x) + \cos(\phi(x))e_2, \quad (4.3)$$

y es directo comprobar que dichos vectores, junto a $b(x)$ también forman una base ortonormal del espacio, a priori no hay una razón aparente para preferir un sistema sobre otro; a las transformaciones como la descrita arriba se les llama Transformaciones rotacionales [8]. Ahora bien, tenemos una gran libertad para escoger los 3 vectores base en cada punto, y en principio no hay una razón física para favorecer un sistema sobre otro; una alternativa sería replicar el proceso que se hizo para el péndulo de Foucault en el capítulo previo, supongamos que el girocentro de la partícula sigue a la trayectoria $\vec{X}(t)$ como en la ecuación (4.1), en cada punto de la trayectoria podemos definir el vector tangente al campo magnético como:

$$b = \frac{B}{\|B\|}, \quad (4.4)$$

este vector es unitario por lo que su norma es la constante 1 a lo largo de toda la trayectoria, si se deriva el cuadrado de su norma se tiene que da 0, es decir:

$$0 = \frac{d\|b\|^2}{dt} = 2b \cdot \frac{db}{dt}, \quad (4.5)$$

de la ecuación anterior vemos que $\frac{db}{dt}$ es un vector ortogonal a b siempre, por lo que definimos el segundo vector de nuestro marco coordenado como:

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{db}{dt} = \frac{1}{\left\| \frac{db}{dt} \right\|} \frac{db}{dt}, \quad (4.6)$$

aunque la notación es muy sugerente hay que tener en claro que κ no es la curvatura usual, y N tampoco es el vector normal que se presenta en la geometría diferencial de curvas [34], la razón es sencilla: N sería el vector normal si b fuera el vector tangente a la curva, pero como ya sabemos las trayectorias de giromovimiento no siguen exactamente a las líneas de campo, por lo que el vector tangente a X no necesariamente es el mismo que b . Finalmente, podemos definir el tercer vector ortogonal como el producto cruz de los primeros dos, es decir:

$$\tilde{B} = b \times N. \quad (4.7)$$

Notamos que b y N siempre son ortogonales por lo que su producto interior es la constante cero, al ser constante su derivada también es cero, de donde se sigue que:

$$0 = \frac{d(b \cdot N)}{dt} = b \cdot \frac{dN}{dt} + \frac{dN}{dt} \cdot b, \quad (4.8)$$

o lo que es equivalente:

$$b \cdot \frac{dN}{dt} = -N \cdot \frac{db}{dt}, \quad (4.9)$$

por el mismo razonamiento se puede concluir que:

$$b \cdot \frac{d\tilde{B}}{dt} = -\tilde{B} \cdot \frac{db}{dt}, \quad (4.10)$$

$$N \cdot \frac{d\tilde{B}}{dt} = -\tilde{B} \cdot \frac{dN}{dt}. \quad (4.11)$$

Como N tiene norma constante podemos replicar (4.5) y deducir que su derivada es un vector ortogonal a el, por lo tanto debe ser combinación lineal de b y de B , es decir:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda_1 b + \lambda_2 \tilde{B}, \quad (4.12)$$

tomando el producto interior con b y usando (4.9) llegamos a:

$$-N \cdot \frac{db}{dt} = b \cdot \frac{dN}{dt} = \lambda_1 b \cdot b, \quad (4.13)$$

tomando (4.6) deducimos:

$$\lambda_1 = -\kappa. \quad (4.14)$$

Podemos tomar la derivada de \tilde{B} , usando su definición (4.7) se obtiene:

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = b \times \frac{dN}{dt} + \frac{db}{dt} \times N = b \times \frac{dN}{dt}, \quad (4.15)$$

donde usamos que el producto cruz de dos vectores paralelos es 0; insertando (4.12) obtenemos:

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = b \times (-\kappa b + \lambda_2 \tilde{B}) = \lambda_2 b \times \tilde{B} = \lambda_2 b \times (b \times N), \quad (4.16)$$

podemos usar que para cualesquiera 3 vectores se cumple $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ [18] para llegar a:

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = -\lambda_2 ((b \cdot b)N - (N \cdot b)b) = -\lambda_2 N, \quad (4.17)$$

de donde vemos que λ_2 se comporta como una "torsión", así pues, la renombramos como τ . Las ecuaciones para las derivadas nos quedan:

$$\frac{db}{dt} = \kappa N, \quad (4.18)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\kappa b + \tau \tilde{B}, \quad (4.19)$$

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = -\tau N. \quad (4.20)$$

Así como se hizo en la sección 3.2 para el péndulo de Foucault podemos obtener las ecuaciones de movimiento que sigue la partícula en el marco de referencia generado por b, N y \tilde{B} , dado que las cuentas son exactamente las mismas lo omitiremos. Aunque este marco de coordenadas tiene cierta belleza matemática por surgir geoméricamente carece de ventaja física alguna, de hecho en general va a ser un marco de referencia no inercial lo que complica la descripción de la dinámica de la partícula cargada. En general para cada punto de la trayectoria podemos describir un marco de coordenadas ortonormal como b, U_1, U_2 donde U_1 y U_2 se obtienen como rotaciones de N y \tilde{B} respectivamente por un ángulo β , es decir:

$$U_1(t) = \cos(\beta(t)) N(t) - \sin(\beta(t)) \tilde{B}(t), \quad (4.21)$$

$$U_2(t) = \sin(\beta(t)) N(t) + \cos(\beta(t)) \tilde{B}(t), \quad (4.22)$$

la expresión anterior es general. De nuestra experiencia con el péndulo de Foucault nos podemos preguntar ¿Cual es el marco de coordenadas que está mas cerca de ser inercial? Al principio la pregunta puede resultar ambigua pues no hay una forma evidente de definir “mas cerca de ser inercial”, sin embargo una manera de medirlo es pedir que la derivada de los vectores U_1 y U_2 no tenga componentes en el plano que ellos generan, es decir que su derivada sea paralela a b ; como vimos en la sección 3.2 esta condición se cumple si y solo si se satisface que:

$$\beta(t) = \int_0^t \tau(\zeta) d\zeta, \quad (4.23)$$

viendo (4.12) y recordando que $\tau = \lambda_2$ vemos que

$$\tau = \tilde{B} \cdot \frac{dN}{dt}, \quad (4.24)$$

por lo que (4.23) nos queda:

$$\beta(t) = \int_0^t \tilde{B} \cdot \frac{dN}{d\zeta} d\zeta \quad (4.25)$$

Como vimos para el péndulo de Foucault la ventaja de tomar marcos que satisfacen (4.23) es que las ecuaciones de movimiento para la partícula se simplifican un poco. Si en el marco de coordenadas U_1, U_2 la proyección de la posición de la partícula en el plano perpendicular al campo magnético viene dada por $\vec{x} = x(t) U_1 + y(t) U_2$ entonces las ecuaciones de movimiento bajo una fuerza externa $\vec{F} = F_x U_1 + F_y U_2$ son:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + m \kappa^2 \cos(\beta) [x \cos \beta + y \sin \beta], \quad (4.26)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y + m\kappa^2 \sin(\beta) [x \cos \beta + y \sin \beta]. \quad (4.27)$$

Las expresiones anteriores son exactas, sin embargo se puede hacer una aproximación “adiabática” si la curvatura es suficientemente pequeña; como vimos en la sección 3.2 podemos formalizar tal condición al pedir que se cumpla la siguiente cota:

$$m\kappa^2 (|x| + |y|) \leq \epsilon_F, \quad (4.28)$$

pero $|x| + |y| \leq 2r_{gc}$ donde r_{gc} es la distancia del vector (x, y) al centro del marco coordenado. Como estamos trabajando en la descripción de giromovimiento de una partícula dicho distancia es el radio de giro, que como vimos en las ecuaciones (2.40) y (2.41) viene dado por:

$$r_{gc} = \frac{mv_{\perp}}{qB_{\parallel}}, \quad (4.29)$$

con v_{\perp} la componente de la velocidad que es perpendicular a b y B_{\parallel} la componente paralela a b . Aquí hay que hacer una pequeña aclaración, el vector b se definió como $\frac{B}{\|B\|}$ así que puede parecer redundante hablar de la componente paralela de B a b , sin embargo hay que tener en cuenta que b es paralelo a B en el centro de giro, y B_{\parallel} se refiere a la componente paralela de B en la posición de la partícula, en general el campo en el girocentro no coincide ni en magnitud ni en dirección con el campo en la posición de la partícula, pero es práctico suponer que son suficientemente cercanos para tratarlos como iguales. Con esto en mente encontramos que una condición suficiente para satisfacer (4.28) es:

$$\kappa^2 \leq \epsilon_F \frac{qB_{\parallel}}{m^2 v_{\perp}}, \quad (4.30)$$

usando (4.18) podemos sustituir el valor de κ y llegar a:

$$\left| \frac{db}{dt} \right| \leq \epsilon_F \frac{qB_{\parallel}}{m^2 v_{\perp}}. \quad (4.31)$$

La expresión anterior nos muestra que lo que se debe hacer “pequeño” es el cambio en la dirección del campo magnético, no necesariamente su magnitud, de hecho al observar la cota anterior vemos que si se mantienen todos los parámetros iguales excepto la magnitud a mayor magnitud del campo magnético mayor es el umbral que tiene $\frac{db}{dt}$ para cambiar y que la aproximación sea válida, es decir, a mayor magnitud del campo magnético mejor es nuestra aproximación. En cualquier caso, si se cumple la condición (4.31) obtenemos que las ecuaciones de movimiento son equivalentes para todo fin práctico al siguiente sistema:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}, \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m'} \quad (4.33)$$

que como discutimos en la sección 3.2 tienen la ventaja de ser las ecuaciones de movimiento que se verían en un marco de referencia inercial en virtud de la segunda Ley de Newton. Para el caso específico de giromovimiento de una partícula en campo magnético las ecuaciones son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB_{\parallel}(t)}{m} \frac{dy}{dt'} \quad (4.34)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB_{\parallel}(t)}{m} \frac{dx}{dt'}. \quad (4.35)$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a las ecuaciones de movimiento que sentiría una partícula en un campo magnético uniforme en el espacio cuya dirección siempre es sobre el eje z pero cuya magnitud puede variar en el tiempo.

En el plano formado por U_1, U_2 podemos introducir coordenadas polares, en tal caso podemos preguntarnos por la dinámica de la coordenada angular para la partícula cargada, recordemos que en coordenadas polares la coordenada angular satisface:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad (4.36)$$

derivando y aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} \sec^2(\theta) = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2}, \quad (4.37)$$

recordando que $x = r_{gc} \cos(\theta)$ obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{r_{gc}^2}. \quad (4.38)$$

Para nuestro caso específico podemos usar (4.34) y (4.35) para sustituir las velocidades, al hacerlo obtenemos la expresión:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{m}{qB_{\parallel}r_{gc}^2} \left(x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{1}{qB_{\parallel}r_{gc}^2} \vec{x} \cdot \vec{F}, \quad (4.39)$$

finalmente podemos volver a usar que el giroradio es $r_{gc} = \frac{mv_{\perp}}{qB_{\parallel}}$ para obtener:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{qB_{\parallel}}{v_{\perp}^2 m^2} \vec{x} \cdot \vec{F}, \quad (4.40)$$

así pues, la coordenada polar para la partícula viene dada por la integral:

$$\theta(t) = \frac{q}{m^2} \int_0^t \frac{B_{\parallel}(\xi)}{v_{\perp}^2(\xi)^2} \vec{x}(\xi) \cdot \vec{F}(\xi) d\xi, \quad (4.41)$$

la expresión anterior nos da la “Fase dinámica” [8] que es el cambio en la coordenada polar que esperamos por la fuerza física a la que esta sometida la partícula. si asumimos que el campo magnético en la posición de la partícula tiene para todo fin práctico la misma dirección que el campo en el girocentro; y también asumimos que la fuerza esta suficientemente cerca de ser radial para que ocurra $\vec{x} \cdot \vec{F} = r_{gc}F$ podemos obtener la expresión:

$$\theta(t) = \frac{q}{m^2} \int_0^t \frac{B}{v_{\perp}^2} r_{gc} F d\zeta = \frac{q}{m^2} \int_0^t \frac{B}{v_{\perp}^2} \frac{v_{\perp} m}{qB} q v_{\perp} B d\zeta = \frac{q}{m} \int_0^t B(\zeta) d\zeta, \quad (4.42)$$

la expresión anterior es como se suele considerar a la fase dinámica [8].

Finalmente podemos volver al marco de coordenadas generado por N, \tilde{B} , en este marco la coordenada angular se ve como la coordenada angular que forma la posición en el marco descrito por U_1, U_2 más el ángulo que hay entre U_1 y N . El primer termino viene descrito por (4.42) mientras que el segundo viene dado por (4.23), así que la coordenada angular en este marco se ve como:

$$\tilde{\theta}(t) = \frac{q}{m} \int_0^t B(\zeta) d\zeta + \int_0^t \tau(\zeta) d\zeta. \quad (4.43)$$

Supongamos que tenemos un campo magnético que no depende del tiempo, tomemos una partícula en una trayectoria tal que su centro de giro forma un circuito cerrado, además supongamos que la velocidad inicial y final del centro de giro son la misma; en tales condiciones los vectores b, N y \tilde{B} iniciales y finales son los mismos, la coordenada angular final viene dada por (4.43), lo primero que notamos es que el segundo término en general no se anula, esto es interesante porque hemos regresado al mismo punto de partida y la coordenada angular no es solamente la parte dinámica que esperaríamos. La segunda propiedad a notar es que la contribución adicional depende de la trayectoria tomada por el centro de giro, no depende ni de la carga ni de la masa de la partícula como el término dinámico, es decir, es un ejemplo de fase geométrica.

Podemos tomar otro escenario, consideremos ahora una partícula que esta sometida a un campo magnético uniforme en el espacio pero que puede variar en el tiempo. Tomemos el caso particular en el que el campo magnético final coincide con el campo inicial, por simplicidad supongamos que es un campo paralelo al eje z ; además supongamos que en el tiempo inicial y final se cumple que $N = \hat{e}_x$, con N definido como en (4.6), en tal caso nuestro marco de coordenadas inicial y final es el formado por los vectores cartesianos. En este escenario aunque volvemos a la configuración inicial el ángulo vuelve a tener la segunda contribución de (4.43), mas interesante en este caso es que el marco de referencia en el que estamos comparando la posición inicial y final es el formado por los ejes cartesianos, que es un marco de referencia inercial, y aun así la fase geométrica vuelve a aparecer demostrando que su naturaleza en este caso se debe al cambio de B . Este escenario ha sido estudiado previamente por Liu y Qin [38] escogiendo otros vectores e_1, e_2 que completan a b para ser un marco de referencia ortonormal en todo tiempo,

aunque las dos descripciones son equivalentes su descripción tiene una ventaja notoria sobre el presentado aquí, en nuestro análisis se supuso que la curvatura era suficientemente pequeña para despreciar los términos asociados a ella en las ecuaciones (4.34) y (4.35), en el trabajo de Lin y Qin esto no se hace al principio y obtienen la expresión de la contribución que estos términos generan en la coordenada polar, aunque rápidamente la desprecian por los mismos motivos que se presentaron aquí.

Finalmente, vale la pena notar que dada una trayectoria del girocentro podemos asociar para cada tiempo un vector b , dado que b es unitario en todo momento por construcción esto nos permite trazar una curva en la esfera unitaria de manera similar a lo que hicimos en la sección 3.2 para el péndulo de Foucault, haciendo el mismo tratamiento de esa sección vemos que la fase geométrica a lo largo de una curva cerrada corresponde al área encerrada en la esfera; esta deducción es aplicable a los dos casos que estudiamos, tanto el campo magnético que no depende del tiempo como el campo magnético homogéneo que sí depende del tiempo, este resultado es bien conocido para ambos casos [8] [38] pero con esta deducción se abarcan los dos casos de forma simultánea. Además aquí es inmediato que τ si es una torsión real, corresponde a la torsión de la curva trazada por $b(t)$ en la esfera unitaria.

4.2. Fase geométrica e invariantes adiabáticos

¿Tiene algún efecto físico esta fase? La respuesta obvia es que al completar un periodo en su movimiento la partícula no llega exactamente al mismo sitio de su plano original, está desfasada. ¿Que implicaciones tiene esto?. Como ya vimos los invariantes adiabáticos son de suma importancia para la física, y por ello se han desarrollado métodos para calcularlos en la práctica. Si tenemos una partícula cuyo centro de guía hace un movimiento periódico podemos aplicar lo que vimos en la sección 1.3 para concluir que su variable de acción se conserva:

$$\tilde{J} = m \int v \cdot ds, \quad (4.44)$$

donde la integral anterior se debe efectuar sobre la trayectoria de la partícula. Aplicando lo que vimos en las secciones 1.4 y 2.3 se pueden encontrar las condiciones apropiadas para garantizar que esta variable de acción sea invariante adiabático, o podemos invocar el principio adiabático y aceptar que su conservación ocurre.

Para calcular su valor se puede tomar como primera aproximación la integral sobre la trayectoria del girocentro [7], pero al hacer esto de forma irremediable tendremos un error. Se pueden corregir estos errores tomando la expansión en términos del radio de Larmor [6]. En la primera corrección aparece un término que es igual a [6]:

$$\tilde{J}_1 = \frac{m^2 v_{\perp}^2}{qB} \int \tau ds, \quad (4.45)$$

este término puede interpretarse fácilmente [7] si tenemos presente que la variable de acción debe definirse sobre la trayectoria de la partícula. Como ya vimos en la sección previa aunque el girocentro haga una curva cerrada la trayectoria de la partícula no necesariamente vuelve a su punto de partida, en particular va a diferir de su posición inicial por un ángulo igual a la fase geométrica, podemos aproximar la contribución que esta diferencia de arco genera en la expresión (4.44) si multiplicamos el valor del integrando por la longitud del arco; y la longitud del arco se puede aproximar por el valor del girorradio por el ángulo en cuestión, es decir, obtenemos que una primera corrección viene dada por la expresión:

$$J_1 = mv_{\perp} r_{gc} \beta, \quad (4.46)$$

con β la fase geométrica, para llegar a la expresión anterior se aproximó el integrando como:

$$v \cdot ds = v_{\perp} r_{gc} d\theta, \quad (4.47)$$

esta aproximación es válida si la componente paralela al campo magnético de la velocidad de la partícula es despreciable para todo fin práctico.

Usando la expresión para el girorradio en (4.46) obtenemos:

$$J_1 = \frac{m^2 v_{\perp}^2}{qB} \beta, \quad (4.48)$$

la expresión anterior es igual a (4.45) que era lo que se buscaba probar.

5 Conclusiones

Se empezó este trabajo con un repaso de la mecánica hamiltoniana y de la teoría de Hamilton-Jacobi, la importancia de esta última radicó en que permite tratar de forma sencilla sistemas con cantidades conservadas. En particular cuando el movimiento es periódico existe una cantidad conservada inmediata; la variable de acción abreviada, que se definió con la ecuación (1.32). Todo lo anterior nos permitió abordar el problema de los invariantes adiabáticos; sistemas que depende de un parámetro y que, cuando se mantiene constante las trayectorias solución son periódicas. Estudiamos 3 escenarios: El oscilador armónico, el péndulo simple y una partícula que gira sobre una mesa sin fricción atada a una cuerda; para los 3 casos encontramos las condiciones necesarias que se deben satisfacer para que la variable de acción se conserve adiabáticamente, es decir que para los fines prácticos es imposible detectar su cambio. Las condiciones encontradas nos permiten formalizar qué se entiende por “perturbar poco”. Estas condiciones dependen del problema en particular, para el caso del oscilador armónico las encontramos en (1.56), (1.57) y (1.58) y en resumen nos indican que la derivada respecto al tiempo de la frecuencia sea suficientemente pequeña, encontramos la cota específica dada por (1.65). En el caso general la conservación de la variable de acción se sigue de “El principio adiabático” pero parafraseando a Arnold [20] “dicho principio no es un teorema ni un postulado de la Física, es un fenómeno que ocurre en la naturaleza y por eso lo aceptamos”, en este trabajo encontramos las condiciones para satisfacer este principio para los 3 problemas particulares que abordamos.

Se hicieron simulaciones en el software Python para someter a prueba la validez de la conservación de la variable de acción, en todas las simulaciones cuantificamos la variación de la variable de acción y notamos que mientras más rápida es la evolución del parámetro mayor es la variación, intuitivamente esto está en concordancia con las condiciones encontradas y sugiere que en el caso general se puede hallar una relación entre la derivada respecto al tiempo del parámetro del sistema y la variación de la acción.

En el capítulo 2 estudiamos la formulación hamiltoniana del campo magnético y el concepto de superficies magnéticas que es relevante para reactores toroidales. Después pasamos a estudiar como es la dinámica de una partícula cargada en presencia de campos magnéticos. Para el caso más sencillo de campo magnético uniforme encontramos que las trayectorias son hélices cuyo eje sigue a las líneas de campo magnético. Esto nos permitió definir las trayectorias de giromovimiento dadas por (2.46) en donde se descompone al movimiento de la partícula como un

movimiento circular mas la trayectoria del centro de la hélice. En los casos siguientes se trató la interacción de la partícula cuando hay un campo eléctrico constante y cuando el campo magnético tiene un gradiente o curvatura, en todos estos casos lo que vimos es que la trayectoria sigue siendo una hélice con la diferencia de que su centro ya no sigue a las líneas de campo, a esta desviación le llamamos “Derivas”. Terminamos el capítulo estudiando los invariantes adiabáticos de una partícula cargada. Estos aparecen porque cuando el campo magnético es constante tenemos un movimiento periódico así que fuimos capaces de utilizar la maquinaria desarrollada en el capítulo previo para concluir que la acción se conserva. Si el campo magnético se perturba “poco” se dedujo que la acción se conserva de forma adiabática completamente análogo a los invariantes adiabáticos con los que se trabajó previamente. Notamos que también existe otro invariante, el llamado “Momento magnético” que viene dado por (2.86) y para este encontramos las condiciones que se deben satisfacer para que también se conserve.

En el capítulo 3 abordamos el tema de la fase geométrica. Para ello se trataron 3 escenarios donde aparece: La fase Pancharatnam en Óptica, la fase de Hannay en mecánica clásica y la fase de Berry en mecánica cuántica. En los 3 casos vimos que el origen de la fase geométrica está en un proceso de transporte a lo largo de un espacio de parámetros, y en los 3 casos vimos que va mas allá de una curiosidad matemática, pues es posible detectarla. Para la fase de Pancharatnam y la de Berry se pueden realizar experimentos de interferencia mientras que para la fase de Hannay se puede realizar el experimento del péndulo de Foucault. Para el péndulo de Foucault se mostró una deducción siguiendo la línea de Kugler [29]. En ella se deduce la existencia de la fase como consecuencia de imponer que el movimiento se restrinja a un plano que puede cambiar en el tiempo. Podemos representar esta descripción geoméricamente; si S se mueve sobre la esfera unitaria entonces el plano en el que se mueve la partícula es siempre el plano tangente a la esfera unitaria que pasa por S . Se pueden dar múltiples coordenadas para el plano y todas son elecciones validas, sin embargo vimos que una elección conveniente es tomar las coordenadas que se obtienen al transportar paralelamente vectores sobre la trayectoria que describe S en la esfera unitaria, la ventaja práctica de esta descripción radica en que las ecuaciones de movimiento para la partícula se simplifican bastante. Mas aún, si la curva que describe $S(t)$ tiene curvatura suficientemente pequeña, las ecuaciones de movimiento eran son mismas que se verían en un marco de referencia inercial; con esto se logró explicar el experimento del péndulo de Foucault. En los 3 casos vimos que la fase geométrica depende del camino y se puede expresar en términos de la torsión, es decir:

$$\beta = \int_0^t \tau dt. \quad (5.1)$$

En el capítulo 4 se aplicó el concepto de fase geométrica en el giromovimiento de una partícula en un campo magnético. En la descripción de giromovimiento la partícula se ve como el movimiento del centro de giro más un movimiento perpendicular al campo magnético en cada punto, visto de esta forma es natural realizar el mismo análisis de Kugler [29] reemplazando al vector tangente S por el vector

b que es un vector unitario paralelo al campo magnético. Con esta descripción se estudió el caso particular de una partícula tal que su centro de giro realiza un movimiento periódico y se notó que aunque el centro de giro regresa a su posición inicial la partícula no necesariamente lo hace, en general esta desfasada como se vio en la expresión (4.43):

$$\theta = \frac{q}{m} \int_B dt + \int_0^t \tau dt. \quad (5.2)$$

El primer término es la fase dinámica que se debe al movimiento helicoidal de la partícula por estar en presencia de un campo magnético. El origen del segundo término está en el proceso de transporte paralelo del plano perpendicular al campo magnético sobre la trayectoria seguida por el centro de giro, es otro ejemplo de fase geométrica ya que solo depende del camino seguido y no le afecta la carga o la masa de la partícula.

Finalmente vimos que si se calcula la variable de acción asociada al movimiento periódico del centro de giro usando la expansión en serie de radio de Larmor [6], va a existir una contribución que es esencialmente la fase geométrica multiplicada por una constante. Esta contribución se puede interpretar fácilmente si nos damos cuenta de que la trayectoria de la partícula no es cerrada, la diferencia de la trayectoria se puede obtener como el radio de giro por el desfase; al considerar el desfase de la fase geométrica obtenemos la expresión (4.48). Esta expresión coincide con la contribución antes mencionada mostrando que la fase geométrica va mas allá de una curiosidad matemática y tiene un impacto físico.

Los resultados mostrados son de interés en la descripción del transporte no colisional de partículas en sistemas de confinamiento magnético, como son: los espejos magnéticos, el tokamak y el stellerator.

A Elementos de análisis matemático y ecuaciones diferenciales

Veamos algunas definiciones y teoremas de análisis matemático y teoría de ecuaciones diferenciales que se usaron en el trabajo.

A.1. Análisis matemático

Definición A.1.1. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial, diremos que la función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma para \mathbb{V} si cumple que [16]:

- $\|v\| \geq 0 \forall v \in \mathbb{V}$
- $\|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v \in \mathbb{V}$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \forall v, w \in \mathbb{V}$

en tal caso diremos que $\|\cdot\|$ es una norma para \mathbb{V} .

El ejemplo mas sencillo es \mathbb{R}^n con la norma euclidiana [39].

Definición A.1.2. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados y sea $f : A \subset V \rightarrow W$, diremos que f es continua si se cumple que [17] $\forall x \in A$ y $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\|_V < \delta$ entonces $\|f(x) - f(y)\|_W < \epsilon$.

Con la definición de continuidad podemos ver otro ejemplo de espacio normado, sea $\mathbb{V} = \mathcal{C}([a, b])$ el conjunto de las funciones continuas del intervalo $[a, b]$ a los números reales; y como norma tomemos [39],:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx, \quad (\text{A.1})$$

es sencillo ver que dicho espacio es normado, vamos a demostrarlo. Primero, dada $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tenemos que $|f(x)| \geq 0 \forall x \in [a, b]$ pues el valor absoluto de cualquier número real es mayor o igual a 0 [17], con lo que queda demostrada la primer propiedad. Veamos que se satisface la tercera, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces por la linealidad de la integral [17] tenemos que:

$$\|\lambda f\| = \int_a^b |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|, \quad (\text{A.2})$$

con lo que queda demostrada la tercera propiedad. Veamos la cuarta, sea $g \in \mathcal{C}([a, b])$, recordemos que el valor absoluto satisface la desigualdad del triángulo para cualquier par de números [17] por lo que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \forall x \in \mathbb{R}$, lo que nos lleva a:

$$\|f + g\| = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| dx = \|f\| + \|g\|, \quad (\text{A.3})$$

quedando demostrada la cuarta propiedad. Por último demostremos la segunda propiedad, si $f(x) = 0$ tenemos que f esta en el espacio vectorial de las continuas por ser constante [40], luego tenemos que:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |0| dx = 0, \quad (\text{A.4})$$

por lo que una de las implicaciones es valida; para ver la otra implicación procedemos por contrapositiva, supongamos que f no es la constante cero, dado que no es la constante 0 existe un punto x_0 en el intervalo $[a, b]$ donde $f(x_0) \neq 0$, en virtud de la continuidad existe $\delta > 0$ tal que si $|z - x_0| \leq \delta$ entonces $|f(z)| > |f(x_0)|$, luego, podemos definir la función g como:

$$g(x) = \begin{cases} |f(x_0)| & \text{si } x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

por construcción $|f| > g$ y también se cumple que $\int_a^b g(x) dx \geq \frac{1}{2}|f(x_0)|\delta > 0$, por lo tanto tenemos que:

$$\int_a^b |f(x)| dx > 0 \text{ si } f \neq 0, \quad (\text{A.6})$$

la contrapositiva de el enunciado anterior nos demuestra la otra implicación que faltaba para demostrar la segunda propiedad para ser espacio normado.

Definición A.1.3. Sea $(V, \|\cdot\|)$ espacio normado y $x \in V$, sea $\epsilon > 0$, se define la ϵ -vecindad de x como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B}_\epsilon(x) = \{z \in V \mid \|z - x\| < \epsilon\} \quad (\text{A.7})$$

Definición A.1.4. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados, $f : V \rightarrow W$; decimos que f es Lipschitz-continua [21] si cumple que $\exists L > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\|_W < L\|x - y\|_V \quad (\text{A.8})$$

Veamos un ejemplo de una función que no es Lipschitz continua, sea $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$, sea $L > 0$, si $L \geq 1$ tomamos $x = \frac{1}{2L^2}$, $y = 0$, usando que $2 > \sqrt{2}$ [17]:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2L}} \right| > L \frac{1}{2L^2} = L|x - y|, \quad (\text{A.9})$$

notamos que $x, y \in [0, 1]$ por lo que no se puede satisfacer la condición para ser Lipschitz continua. Supongamos que $L < 1$, sea $x = 0$ y $y \in (0, 1)$, entonces por ser $L < 1$ tenemos que:

$$L|y - x| = Ly < y < \sqrt{y} = |f(x) - f(y)|, \quad (\text{A.10})$$

en la última desigualdad de usó que si $y \in (0, 1)$ entonces $y < \sqrt{y}$ [17]. Las desigualdades (A.9) y (A.10) muestran que la función f no puede ser Lipschitz, mas aún, al ver la demostración con cuidado podemos notar que en cualquier dominio de la forma $[0, a]$ con $a > 0$ la demostración sigue siendo válida con algunas modificaciones.

A.2. Ecuaciones Diferenciales

Enunciemos el teorema de existencia y unicidad que se usó en la discusión [21]:

Teorema A.11. *Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$, Ω abierto, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, si f es continua y Lipschitz continua respecto de y_0 entonces existe un intervalo cerrado $I = [a, b]$ con $x_0 \in I$ donde existe una solución única al problema de Cauchy siguiente:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (\text{A.12})$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (\text{A.13})$$

Tomemos un ejemplo práctico de la física: El oscilador armónico. En el escenario mas sencillo la energía se conserva por lo que la trayectoria solución se puede encontrar como la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E, \quad (\text{A.14})$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}. \quad (\text{A.15})$$

Es inmediato comprobar que la siguiente expresión es solución:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \phi), \quad (\text{A.16})$$

con ϕ una variable libre que se ajusta dependiendo de las condiciones iniciales. El Teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta solución es única siempre que f sea Lipschitz respecto de x , pero como ya vimos esta condición se rompe si el argumento de la raíz es igual a cero, es decir, si tenemos la siguiente condición inicial no podemos aplicar el teorema:

$$x(0) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega}}. \quad (\text{A.17})$$

Es directo comprobar que para esta condición inicial la trayectoria con la función $x(t)$ igual a constante también es solución, con lo que queda evidenciado que la solución no es única.

B Simulación de los invariantes en python

Para comparar la veracidad de la conservación del invariante adiabático del péndulo se resolvió numéricamente el sistema de ecuaciones asociado a cada sistema en python usando el método de Runge-Kutta de segundo orden [41]. También se resolvieron las ecuaciones de movimiento asumiendo que el invariante se conserva, esto también se hizo con el método de Runge-Kutta de segundo orden.

B.1. Simulación del Oscilador Armónico

Notemos que el sistema resolver cuando se asume conservación del invariante es:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{S_0 \omega(t)}{m\pi} - (x\omega(t))^2}, \quad (\text{B.1})$$

para resolverlo se debe asociar un signo; se sabe que las soluciones del sistema deben ser clase C^∞ por lo que su segunda derivada debe ser continua, así que se asocia el signo que de la menor variación de la curvatura en cada instante con respecto al instante previo. Además, cuando la velocidad se acerca a 0 se tiene que el cambio en la posición es minúsculo, por lo que se queda para fines prácticos en el mismo lugar, esto es una consecuencia de que la ecuación es no lineal y mas específicamente de que la función raíz cuadrada no cumple ser Lipschitz continua en el origen [11] por lo que no se satisface el teorema de existencia y unicidad [11] que se mencionó en el apéndice A, podemos observar que estos puntos de velocidad mínima ocurren cuando la posición alcanza un máximo o mínimo y por tanto la velocidad debería cambiar de signo; para evitar este comportamiento en el que la partícula se queda atascada en un punto se implementó una condición para que la velocidad cambie de signo si su modulo es menor a cierto umbral pues es el comportamiento físico que se espera en estos puntos..

A continuación se muestra el código implementado para el oscilador armónico. La función omega define como cambia la frecuencia del oscilador en el tiempo; la función domega es su derivada numérica. Así pues, se pueden hacer simulaciones asumiendo diferentes funciones para la frecuencia.

```
In [25]: import math#Primero importamos las librerias que se necesitan.  
import numpy as np
```

```

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
deltat=0.0001/6#Para 10 segundos
#deltat=0.0001#Para 1 minuto
#deltat=0.001#Para 10 minutos
#Abajo ponemos el umbral para la velocidad
umbral=6 #Para 10 segundos
#umbral=22#Para 1 minuto
#umbral=220#Para 10 minutos
def omega(x):#Definimos la función que describe la frecuencia
    y=0.25+0.25*math.exp(-x/2)#Para 10segundos
    #y=0.25+0.25*math.exp(-x**2/15)#Para 10segundos
    #y=0.5-x/40#Para 10segundos
    #y=0.5-x/240#Para 1minuto
    #y=0.25+0.25*math.exp(-x**2/400)#Para 1minuto
    #y=0.25+0.25*math.exp(-x/10)#Para 1minuto
    #y=0.25+0.25*math.exp(-x/100)#Para 10minutos
    #y=0.25+0.25*math.exp(-x**2/50000)#Para 10minutos
    #y=0.5-x/2400#Para 10minutos
    return(y)
def domega(x):#Calculamos numericamente la derivada.
    y=(omega(x+deltat)-omega(x-deltat))/0.002
    return(y)

```

```

In [26]: #Codigo para resolver el sistema con Runge-Kutta de segundo orden
X=[0]#En este vector se almacenará la posición
Xdot=[0.1]#Aqui se almacenará la velocidad
TIME=[0]#Aqui va el tiempo en el que estamos
L=[omega(0)]#Aqui se almacena la frecuencia en cada tiempo
for i in range(0,600000): #El tiempo va de 0 a 10 minutos
    k1=Xdot[i]#Primer parametro de RK para la posición
    m1=-X[i]*(omega(i*deltat))**2#Primer parámetro de RK para la velocidad
    m2=-(X[i]+k1*deltat)*(omega((i+1)*deltat))**2#Segundo parámetro de RK
    k2=Xdot[i]+deltat*m1#Segundo parámetro de RK para la posición
    x=X[i]+deltat*(k1+k2)/2#Esta es la nueva posición
    px=Xdot[i]+deltat*(m1+m2)/2#Esta es la nueva velocidad
    X.append(x)
    Xdot.append(px)
    L.append(omega((i+1)*deltat))
    TIME.append((i+1)*deltat)
INVAR=[]#En este vector se almacenará el invariante
P=[]
K=[]
for i in range(0,len(TIME)):
    pot=((X[i]**2)*(omega(i*deltat))**2)/2

```

```

    kin=(Xdot[i]**2)/2#Calculamos la energía cinética
    invar=(pot+kin)*2*math.pi/omega(i*deltat)
    INVAR.append(invar)
    #Ahora imprimimos la variación porcentual del invariante adiabático
    vp=100*(max(INVAR)-min(INVAR))/INVAR[0]
    print("La variación porcentual del invariante fue de ", vp)

```

La variación porcentual del invariante fue de 5.747396930153616

```

In [27]: #Se gráfica el Invariante
plt.plot(TIME,INVAR)
plt.grid()
plt.xlabel('Tiempo[s]')
plt.ylabel('Invariante[J*s]')

```

```

Out [27]: Text(0, 0.5, 'Invariante[J*s]')

```

```

In [28]: #Se grafica la posición
plt.plot(TIME,X)
plt.grid()
plt.xlabel('Tiempo[s]')
plt.ylabel('Posición[m]')

```

```

Out [28]: Text(0, 0.5, 'Posición[m]')

```

```

In [29]: #Se grafica la frecuencia
plt.plot(TIME,L)
plt.grid()
plt.xlabel('Tiempo[s]')
plt.ylabel('Omega[Hz]')

```

```

Out [29]: Text(0, 0.5, 'Omega[Hz]')

```

```

In [30]: #####Ahora vamos a hacer la simulación suponiendo que se conserva
X1=[0]#En este vector se almacenará la posición
Xdot1=[0.1]#Aqui se almacenará la velocidad
TIME1=[0]#Aqui va el tiempo en el que estamos
L1=[omega(0)]#Aqui va la frecuencia
S0=(Xdot1[0]**2+(omega(0)*X1[0])**2)*math.pi/omega(0)#Valor inicial
#s=(Xdot1[0]**2+(omega(0)*X1[0])**2)*math.pi/omega(0)
ac=0
marca=abs(Xdot1[0])/umbral
bandera=0
contador=0
signo=1

```

```

ERR=[0.01]
for i in range(1,600001): #El tiempo va de 0 a 10 minutos
    frec=omega(i*deltat)
    s1=S0*omega(deltat*i)/math.pi-(X1[i-1]*frec)**2#Nuevo valor
    if s1>0:
        v1=np.sqrt(s1)#Valor absoluto de la velocidad
        if v1>marca:#Si la velocidad es suficientemente grande
            ac1=v1-Xdot1[i-1]
            ac2=-v1-Xdot1[i-1]
            ERR.append(s1)
            if abs(ac2-ac)<abs(ac1-ac):#Escogemos el mejor signo
                v1=-v1
        else:#Si la velocidad es muy pequeña se cambia el signo
            v1=-Xdot1[i-1]
            signo=np.sign(v1)
    else:
        v1=-Xdot1[i-1]#Se cambia el signo
        signo=np.sign(v1)
    #Se repite todo lo anterior para obtener el segundo parámetro de RK
    s2=s1=S0*omega(deltat*(i+1))/math.pi-((X1[i-1]+v1*deltat)*frec)**2
    if s2>0:
        v2=np.sqrt(s2)#Valor absoluto de la velocidad
        if v2>marca:
            ac1=v2-Xdot1[i-1]
            ac2=-v2-Xdot1[i-1]
            ERR.append(s1)
            if abs(ac2-ac)<abs(ac1-ac):
                v2=-v2
        else:
            v2=-Xdot1[i-1]
            signo=np.sign(v2)
    else:
        v2=-Xdot1[i-1]
        signo=np.sign(v2)
    v=(v1+v2)/2#Esta es la nueva velocidad
    ac=v-Xdot1[i-1]
    Xdot1.append(v)
    x1=X1[i-1]+deltat*Xdot1[i]#Esta es la nueva posición
    X1.append(x1)
    TIME1.append((i+1)*deltat)

```

```

In [31]: plt.plot(TIME1,X1,"r")
plt.plot(TIME,X,"b")
plt.grid()
plt.xlabel('Tiempo[s]')

```

```
plt.ylabel('Posición[m]')
```

```
Out [31]: Text(0, 0.5, 'Posición[m]')
```

```
In [17]: DIF=[0]#Obtenemos la diferencia entre las dos simulaciones
for i in range(1,len(X)):
    dif=X[i]-X1[i]
    DIF.append(abs(dif))
print("La diferencia porcentual maxima fue de ", 100*max(DIF)/max(X))
```

La diferencia porcentual maxima fue de 14.609813095797554

```
In [ ]: ### plt.plot(TIME,DIF)
plt.grid()
plt.xlabel('Tiempo[s]')
plt.ylabel('Diferencia Posición[m]')
```

Para resolver numéricamente la ecuación (B.1) se implementó una condición para evitar los puntos donde el argumento de la raíz se hace cero pues ahí la función deja de ser Lipschitz y no hay unicidad de la solución como se vio en A.2. Matemáticamente las dos soluciones son validas pero físicamente solo una ocurre, así pues debemos buscar que comportamiento físico debe ocurrir en esos puntos y traducirlo en una condición matemática para la simulación. En este caso la condición fue cambiar el signo de la velocidad cuando se llegue a esos puntos pues corresponden a lugares donde el ángulo llega a un valor crítico para después regresar, este comportamiento es físicamente valido pues nuestro sistema es un oscilador armónico y por tanto debe oscilar, no se puede quedar atascado en un solo lugar.

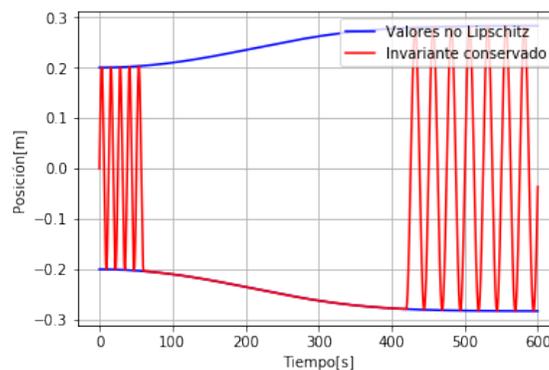


Figura B.1: Simulación sin condición para evitar no unicidad

La condición añadida es fundamental, sin ella el sistema puede quedarse atascado en los puntos donde la solución no es única. En la imagen B.1 se muestra el resultado de correr la simulación sin incluir la condición para evitar puntos de no unicidad.

En la figura B.1 vemos en rojo la simulación suponiendo que ω es una exponencial que cambia a lo largo de 10 minutos sin incluir la condición especial para puntos de no unicidad; en azul están las dos curvas que marcan los puntos donde la solución no es única, podemos observar que existe una región donde la simulación deja de oscilar y se queda atascada en los puntos de no unicidad, este comportamiento no es físico, por ello se incluyó en el código la condición para evitarlo, dicha condición consiste en que el signo de la velocidad va a cambiar si se llega a estar “suficientemente cerca” a alguno de estos puntos pues físicamente esperamos que al alcanzar una amplitud máxima un oscilador cambie de sentido; el término “suficientemente cerca” se traduce en buscar una ϵ tal que si:

$$|\dot{x}(t_i)| \leq \epsilon$$

entonces

$$\dot{x}(t_{i+1}) = -\dot{x}(t_i). \quad (\text{B.2})$$

El valor de ϵ depende del problema particular en cuestión.

B.2. Simulación del péndulo

A continuación mostramos el código para resolver numéricamente el sistema del péndulo, el código es muy similar al asociado al oscilador armónico con la diferencia de que la dependencia temporal viene dada por el cambio en la longitud y no el cambio en la frecuencia.

```
In [32]: import math#Primero importamos las librerias.
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
def long(x):#Definimos la función que describe la longitud
    y=100-x
    return(y)
def dlong(x):#Calculamos numericamente la derivada.
    y=(long(x+0.001)-long(x-0.001))/0.002
    return(y)

In [33]: deltat=0.001#Saltos de tiempo para resolver numericamente la EDO
T=[0]#En este vector se almacenará el tiempo
Tdot=[0.1]#Aqui se almacenará la velocidad angular
TIME=[0]#Aqui va el tiempo en el que estamos
L=[long(0)]#Aqui va la longitud
g=9.81#aceleración gravitacional
for i in range(0,10000): #El tiempo va de 0 a 10 minutos
    k1=(-2*dlong(i*deltat)*Tdot[i]-g*math.sin(T[i]))/long(i*deltat)
    k2=(-2*dlong((i+1)*deltat)*(Tdot[i]+deltat*k1)-g*math.sin(T[i]+Tdot[i]*deltat))/long((i+1)*deltat)
    Tdot[i+1]=Tdot[i]+deltat*(k1+k2)/2#Esta es la nueva velocidad angular
```

```

Tdot.append(vang)
ang=T[i]+deltat*(Tdot[i]+Tdot[i+1])/2#Este es el nuevo ángulo
T.append(ang)
L.append(long((i+1)*deltat))
TIME.append((i+1)*deltat)
INVAR=[] #En este vector se almacenará el invariante
for i in range(0,len(TIME)):
    pot=-g*long(i*deltat)*math.cos(T[i])#Calculamos la energía potencial
    kin=((long(i*deltat)*Tdot[i])**2)/2+(dlong(i*deltat)**2)/2#
    invar=(pot+kin+g*long(i*deltat))*math.sqrt(long(i*deltat))
    INVAR.append(invar)

```

```

In [34]: plt.plot(TIME,INVAR)
         plt.grid()
         plt.xlabel('Tiempo[s]')
         plt.ylabel('Invariante[J*m{1/2}']')

```

```

Out [34]: Text(0, 0.5, 'Invariante[J*m{1/2}']')

```

```

In [35]: plt.plot(TIME,T)
         plt.grid()
         plt.xlabel('Tiempo[s]')
         plt.ylabel('Angulo[rad]')

```

```

Out [35]: Text(0, 0.5, 'Angulo[rad]')

```

```

In [36]: plt.plot(TIME,L)
         plt.grid()
         plt.xlabel('Tiempo[s]')
         plt.ylabel('Longitud[m]')

```

```

Out [36]: Text(0, 0.5, 'Longitud[m]')

```

```

In [ ]:

```


Bibliografía

- [1] R. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasmas*. Imperial College Press, 2014.
- [2] D. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [3] D. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [4] F. Viniegra, *Mecánica Libro 1*. Las prensas de ciencias, 2007.
- [5] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1959.
- [6] R. Hastie, J. Taylor, and F. Haas, "Adiabatic invariants and the equilibrium of magnetically trapped particles," *Annals of Physics.*, no. 41, 1961.
- [7] A. Bhattacharjee, "Geometric phase, rotational transforms, and adiabatic invariants in toroidal magnetic fields," *Physics of Fluids B*, vol. 4, no. 2737, 1992.
- [8] R. Littlejohn, "Phase anholonomy in the classical adiabatic motion of charged particles," *Physical Review A*, vol. 38, no. 12, 1988.
- [9] F. Viniegra, *Mecánica Libro 2*. Las prensas de ciencias, 2021.
- [10] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*. Dover, 1992.
- [11] W. Boyce and B. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [12] T. Apostol, *Calculus II*. Editorial Reverte, 2015.
- [13] H. Pollard, *Introduction to Plasma celestial mechanics*. Prentice Hall, 1966.
- [14] L. Parker, "Adiabatic invariance in simple harmonic motion," *American Journal of Physics*, no. 39, 1971.
- [15] F. Crawford, "Elementary examples of adiabatic invariance," *American Journal of Physics*, no. 58, 1990.
- [16] R. Bartle, *The Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons Inc., 1976.
- [17] T. Apostol, *Calculus I*. Editorial Reverte, 2015.

- [18] A. Ramírez, *Geometría Analítica*. Las prensas de ciencias, 2015.
- [19] L. Landau and E. Lifshitz, *Mecánica*. Editorial Reverté, 1994.
- [20] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [21] V. Arnold, *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, 1978.
- [22] A. Lascurain, *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Las prensas de ciencias, 2017.
- [23] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence, *Linear Algebra*. Prentice-Hall Inc., 1982.
- [24] R. Goldston and P. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Physics Publishing, 1995.
- [25] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [26] M. Berry, "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes," *Proc. R. Soc. Lond. A*, no. 392, 1984.
- [27] S. Pancharatnam, "Generalized theory of interference, and its applications," *The proceedings of the Indian Academy of Sciences A*, vol. 44, no. 5, 1956.
- [28] J. Hannay, "Angle variable anholonomy in adiabatic excursion of an integrable hamiltonian," *Journal of Physics A*, no. 18, 1985.
- [29] M. Kugler, "Motion in noninertial systems: Theory and demonstrations," *American Journal of Physics*, no. 57, 1989.
- [30] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in physics*. World Scientific, 1989.
- [31] T. Frankel, *The geometry of physics*. Cambridge University Press, 2012.
- [32] M. Berry, "Anticipations of the geometric phase," *Physics Today*, no. 43, 1990.
- [33] E. Hecht, *Optica*. Pearson, 2017.
- [34] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves & Surfaces*. Dover Publications, Inc., 2016.
- [35] L. De la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 2006.
- [36] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [37] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2018.
- [38] J. Liu and H. Qin, "Geometric phase of the gyromotion for charged particles in a time-dependent magnetic field," *Physics of Plasmas*, no. 18, 2011.

- [39] M. Clapp, *Análisis Matemático*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.
- [40] F. Casarrubias and A. Tamariz, *Elementos de topología general*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.
- [41] R. Espejel and A. Calles, *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales*. Las prensas de ciencias, 2019.

