

421-39

362

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS

---

U N I C O

Tesis que presenta el alumno  
ANGEL CARRILLO FICHES  
para obtener el título de  
INGENIERO CIVIL

---

ESTUDIO DE LAS FILTRACIONES EN LAS ESTRUCTURAS  
HIDRAULICAS POR MEDIO DE LAS  
REDES DE FLUJO



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE INGENIERIA Y  
CIENCIAS FIS. Y MATEMATICAS  
Esc. Nac. de Ingenieros  
Dirección .  
Núm. 731-1293  
Exp. No. 731/214.2-290

Al Pasante señor  
ANGEL CARRILLO Y FLORES,  
P r e s e n t e .

De conformidad con su solicitud relativa me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el señor Profesor Nabor Carrillo, para que lo desarrolle como tesis en su examen profesional de Ingeniero Civil.

"ESTUDIO DE LAS FILTRACIONES EN LAS ESTRUCTURAS HIDRAULICAS POR MEDIO DE LAS REDES DE FLUJO.

El alumno presentará en el desarrollo de este tema, una breve exposición de la teoría de las redes de flujo, así como de los métodos que existen para analizar el problema".

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
México, D.F., a 3 de diciembre de 1938  
EL DIRECTOR

Ing. Mariano Moctezuma .

## I N T R O D U C C I O N .

Uno de los problemas al cual no se le ha dado la importancia que tiene al tratar de llevar a cabo el proyecto de una estructura hidráulica, es el referente a las filtraciones que se presentan en la estructura o en su cimentación, debido a la permeabilidad de una, de otra o a la de ambas.

Esta importancia radica en el hecho de que las filtraciones influyen en la estabilidad de la estructura, de dos maneras: a saber: que el agua en el interior del material saturado origina fatigas, las cuales intervienen directamente en el cálculo de los taludes del terraplén. Por otra parte, las velocidades del agua pueden llegar a ser lo suficientemente grandes para originar no solo un simple reacomodo de las partículas del material, sino un acarreo de las más pequeñas; éstas, al desalojarse, dejan un espacio mayor para el paso del agua, aumentando el gasto y la velocidad, produciéndose un nuevo acarreo de partículas mayores y así sucesivamente hasta producirse una verdadera tubeificación que ponga en peligro a la estructura.

Estos dos factores son perfectamente controlables con el conocimiento de la red de filtración en la zona saturada y como se verá adelante, es posible estudiar, previamente a la construcción de la obra, el comportamiento del agua, pudiéndose hacer con toda anticipación las modificaciones que se juzgue pertinentes en el proyecto y aun desechar éste en casos excesivamente desfavorables.

Hasta hace poco tiempo, este problema de la filtración

del agua se resolvía de una manera enteramente superficial. Por formulas por demás conocidas, se hallaba el paso de filtración, con el que se fijaba la longitud de la línea de la cimentación en el caso de cortinas de mampostería cimentadas sobre material permeable y en el caso de presas de tierra, bastaba conocer de una manera vaga la llamada línea de saturación. Para nada se tomaba en cuenta el efecto de las presiones del agua infiltrada en la estabilidad de los taludes del terraplén. De manera igualmente ligera se hacía el estudio en las presas de concreto, de la localización de los drenes, de la galería de filtración y del cálculo de la subpresión.

Todos estos métodos aproximados daban tan solo una idea del fenómeno, dando como resultado que al final se hacían gastos inútiles en la construcción de dentellones, drenes o taludes de dimensiones excesivas que no proporcionaban servicio apreciable, y aun se presentaba el caso de que éstas resultaban contraproducentes al ocasionar una distribución de presiones poco favorable .

Esta tesis tiene por objeto hacer ver lo incompleto que estaban hasta ahora los métodos de cálculo de la influencia de las filtraciones, sobre todo en las presas de tierra, y de exponer el estado en que se encuentra el estudio de dichas filtraciones desde el punto de vista teórico y experimental .

## CAPITULO I

## NATURALEZA DE LA FILTRACION

Siempre que se interponga ante una masa de líquido provisto de energía potencial, un obstáculo formado por un material integrado por partículas más o menos ligadas, se verificará el fenómeno de la filtración, esto es, el agua atravesará el material permeable, con mengua de la energía del líquido .

Las velocidades del líquido en la región atravesada, son en general pequeñas, por lo que el agua se mueve con régimen laminar. Los intersticios del material permeable forman pequeños conductos de sección variable, y son tan complejos e innumerables, que sería imposible tratar de estudiar cada uno individualmente, aún imaginándose que existiera un conducto tipo. Por esta razón, en todos los estudios se considera a la masa permeable como el espacio por el cual se mueve el líquido. La zona de filtración queda limitada por los linderos impermeables, la sección del escurrimiento será la encerrada por estos linderos, sin tomar en cuenta la porción de área ocupada por los granos sólidos del material. Esta suposición es válida en vista de que interesan, no las velocidades reales en la zona saturada, sino la velocidad de filtración, que es el volumen de agua que atraviesa en la unidad de tiempo, la unidad de superficie de la materia filtrante.

Con el objeto de hacer ver claramente el fenómeno de la filtración, considérese ( Fig. 1 ) un tubo lleno de arena que conecta dos tanques de agua con distintos niveles. Si la arena es fina y la diferencia de niveles no es grande, no so-

lamente el escurrimiento será laminar, sino que la velocidad con que pase el agua por el tubo será muy pequeña. También — muy pequeña y despreciable será la energía cinética del flujo, por lo que podrá considerarse que la energía efectiva del fluido es totalmente potencial.

En el escurrimiento laminar, la pérdida de energía es — proporcional a la primera potencia de la velocidad media a través de la sección de escurrimiento efectiva. Así mismo; la relación de la velocidad media a través de un hueco a la velocidad efectiva en la sección del tubo, dependerá de las características del material, al cual consideraremos homogéneo. Por lo tanto, la velocidad efectiva del flujo debe ser directamente proporcional a la diferencia de nivel de los tanques e inversamente proporcional a la longitud del tubo. (Cabe decir aquí, que la pérdida de carga del líquido se debe a los choques de las partículas de éste con las del material, y a la fricción de unas con otras.) La fórmula para la velocidad, será la siguiente:

$$V = K i \dots\dots(1)$$

Siendo  $k$  un factor de proporcionalidad, e  $i$  la pendiente o — gradiente hidráulico. Esta ley es la de Darcy.

$k$ , el factor de proporcionalidad, se llama coeficiente de permeabilidad y es una velocidad: la correspondiente a una pendiente unitaria. Este coeficiente de permeabilidad depende de las características del material, pues varía con el número y tamaño de los vacíos del material, o sea de su compacidad, y depende también de la temperatura. Su valor en la práctica se determina experimentalmente.

Si los linderos de la zona de infiltración no son rectos, sino de forma variada, el fenómeno sigue siendo el mismo. Sin embargo, la velocidad efectiva no representará un valor medio en la sección, sino que variará en magnitud y dirección de punto a punto. Conviene aclarar aquí, que el escurrimiento en las estructuras hidráulicas se estudia en su estado de régimen permanente establecido, con el fin de eliminar uno de los factores de variación, el tiempo, ya que en el régimen constante la velocidad en un punto no varía ni en magnitud ni en dirección con el tiempo.

#### RED DE FLUJO

Para la resolución de problemas del tipo de linderos no regulares, es necesaria la determinación de la red de flujo o de filtración. Red de flujo es el esquema formado por las trayectorias del agua en el medio permeable y por las líneas de igual caída de potencial a lo largo de las branquias. Estas líneas equipotenciales marcan, a su vez, los puntos que tienen igual nivel piezométrico.

Para llegar a la determinación de las expresiones matemáticas que definen la red de flujo, será necesario definir ciertos principios hidrodinámicos.

#### PRINCIPIOS HIDRODINAMICOS

Todo partícula de un fluido en movimiento, en un instante dado, tiene una velocidad que varía de punto a punto, observándose en el caso más general de movimiento, que las velocidades de las partículas que pasan por un punto fijo, son distintas. A diferencia de las magnitudes escalares, la velocidad y la aceleración varían en magnitud y dirección, pudién



do ser representadas por vectores, con componentes en la misma dirección.

Línea de corriente es una curva a la cual es tangente en un punto cualquiera el vector velocidad. En un movimiento uniforme del fluido, la magnitud y dirección del vector es constante en un instante dado, a lo largo de una línea de corriente, y estas son equidistantes. En un escurrimiento permanente el vector velocidad no varía ni en magnitud ni en dirección para un punto fijo en el espacio del escurrimiento.

Para poder definir claramente el concepto de red de flujo, es necesario primeramente el concepto de movimiento permanente e irrotacional.

Supongamos un fluido en movimiento, el cual vamos a referir a un sistema de coordenadas X, Y, Z. La variación de la componente de la velocidad en dirección OX,  $u$ , en un incremento  $dt$  de tiempo, es

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \dots\dots(2)$$

Siendo  $u = f(t, x, y, z)$  que es el caso más general de movimiento.

El desalojamiento de una partícula del fluido en un mismo intervalo de tiempo en las tres direcciones es:

$$dx = uit ; dy = vdt ; dz = wdt \dots\dots(3)$$

luego los desalojamientos elementales son proporcionales a las velocidades en las direcciones dadas, lo cual se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Sustituyendo en (2) los valores de (3) y dividiendo entre  $dt$ ,

$$\text{Análoga- } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\text{mente } \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

que nos da la aceleración de la partícula en las tres direcciones OX, OY y OZ.

Igualando este valor de la aceleración con el de la fuerza por unidad de masa, obtendremos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \gamma h)}{\partial x} \dots (4a)$$

siendo  $\rho$ , la densidad de masa;  $\gamma$ , el peso específico del fluido y  $P$ , la presión en el punto considerado.

$$\text{Análogamente: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \gamma h)}{\partial y} \dots (4b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \gamma h)}{\partial z} \dots (4c)$$

que son las tres ecuaciones fundamentales de Euler.

Consideremos ahora en un punto O cualquiera, un volumen elemental del fluido, que supondremos que se mueve con régimen constante, de dimensiones pequeñas pero finitas,  $\delta x, \delta y, \delta z$ , animado de velocidades  $u, v$  y  $w$ . Si como se ha dicho, se considera el movimiento en su aspecto más general, la velocidad variará a lo largo de los lados del cubito.

Estudiemos el movimiento de la cara paralela al plano XY, o sea la MNOP, (Fig 2) y tendremos que las velocidades en los puntos M, N, O y P en las direcciones de X y de Y serán las indicadas en la figura, por lo que puede verse que la cara sufrirá deformaciones desiguales en todos sus puntos.

Este movimiento de la cara puede descomponerse en los siguientes movimientos elementales: uno rígido de translación

en las direcciones OX y OY: una deformación lineal de cada par de lados paralelos; una deformación angular de la superficie - y una rotación.

Vamos a valor cada uno de estos movimientos elementales: La translación en dirección OX y OY será:

$$u dt \quad \text{y} \quad v dt$$

respectivamente;

la deformación lineal será, en dirección OX:

$$\left[ \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) - u \right] dt = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x dt$$

y en dirección de OY:

$$\left[ \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \right) - v \right] dt = \frac{\partial v}{\partial y} \delta y dt$$

o sea la diferencia de los desalojamientos de los extremos de los lados.

La deformación angular estará medida por la variación del ángulo recto del cuadrado, o sea  $(d\alpha + d\beta)$ . Puesto que ésta deformación en un intervalo de tiempo pequeño, es pequeña, puede tomarse el ángulo igual a su tangente, (Fig. 3):

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x dt}{\delta x} \quad ; \quad d\beta = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y} \delta y dt}{\delta y}$$

Haciendo la resta de ambos:

$$d\alpha - d\beta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

La rotación tendrá efecto cuando los desalojamientos angulares sean desiguales en magnitud o del mismo signo, y tendrá por valor:

$$\frac{d\alpha + d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

Ahora bien, podemos considerar el intervalo de tiempo como igual a la unidad, y de ésta manera podremos expresar el movimiento sin hacer intervenir el tiempo.

Nuevamente, los cuatro movimientos podrán expresarse ahora en la siguiente forma:

La traslación, igual a las componentes de la velocidad:  $u, v, y, w$ .

Las deformaciones lineales serán:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

y en forma semejante se modificarán la deformación angular y la rotación.

Ahora bien, puesto que la densidad y el volumen de una partícula de agua debe ser constante a través de la deformación, el cambio total del volumen es nulo (las tres elongaciones no pueden ser a un mismo tiempo del mismo signo). Esto se expresa analíticamente como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz = 0$$

dividiendo entre el volumen elemental, se tendrá:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (5)$$

Esta fórmula es la expresión más general de la condición de continuidad y que expresa matemáticamente que la divergencia del vector velocidad debe ser cero en un escurrimiento en el que la densidad del fluido es constante, o en otra forma, que la velocidad en tres direcciones perpendiculares no puede aumentar o disminuir a la vez.

Por otra parte, la velocidad angular, que denominaremos  $\omega$ , es un vector cuyas componentes en los tres ejes, indican la rotación por unidad de tiempo en planos normales a dichos ejes, estando indicado el sentido de cada rotación por la dirección del vector:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

y  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$

Si este vector tiene un valor finito, el movimiento se denomina rotacional, y si es nulo, el movimiento será irrotacional, obteniéndose las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots (7)$$

Estas ecuaciones nos indican la existencia de un potencial de la velocidad, que llamaremos  $\psi$ , a lo largo del escorrimiento, cuyas derivadas en un punto y en una dirección dada, serán las componentes de la velocidad en esas direcciones

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (8)$$

Esto puede comprobarse fácilmente si se sustituyen en la ecuación (7) los valores de las componentes de la velocidad en función de este potencial:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

$\psi$ , es una función escalar que nos indica que en un instante dado, existen en la masa fluida superficies de igual potencial, siendo el vector velocidad en cualquier punto, normal a dicha superficie, o sea, que es el gradiente de las líneas equipotenciales.

Sustituyendo las ecuaciones (8) en la (5), se tiene que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

que demuestra que la función  $\psi$  satisface la ecuación de Laplace.

## MOVIMIENTO EN UN PLANO.

Podemos imaginarnos un movimiento que se verifique íntegramente en un plano, y que por lo tanto, la velocidad no tenga componente en la dirección normal a dicho plano. Este movimiento se conoce como bidimensional o plano.

Las ecuaciones fundamentales que hemos deducido se reducirán en la siguiente forma:

La expresión de la divergencia será:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots (5')$$

La de irrotacionalidad:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots (6')$$

y finalmente, la ecuación de Laplace será:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots \dots (7')$$

Del concepto de continuidad se deduce fácilmente que el flujo entre dos líneas de corriente es constante.

Podemos considerar una función de corriente, que llamaremos  $\psi$ , cuyas derivadas en las direcciones de los ejes nos darán las componentes de la velocidad en dirección normal a ellos respectivamente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots \dots \dots (10)$$

El concepto físico de esta función de corriente es el siguiente:  $\psi$  está dada en función de  $x$  y  $y$ ; consideremos entonces un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  en el espacio del escurrimiento. Si unimos este punto con una línea a otro punto

to fijo, el flujo que atraviesa ésta es constante cuando el punto P se mueve a lo largo de una línea de corriente, para la cual  $\psi = \text{constante}$ . Ese valor de  $\psi$  nos representará el - flujo a través de la línea que liga los dos puntos.

Ahora bien, si se considera que el movimiento es irrotacional, sustituyendo estos valores en (7') y pasando todo al primer miembro, se tendrá:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

Por lo que la función de corriente debe satisfacer también la ecuación de Laplace.

Si expresamos a las componentes de la velocidad en función de  $\psi$  y de  $\Psi$ , tendremos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y que indican que las líneas equipotenciales y las de corriente se cortan ortogonalmente .

## CAPITULO II

## DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS REDES DE FLUJO.

Una vez exouesta la parte puramente teórica de la red de flujo, procedere a indicar los métodos para la resolución experimental del problema de las filtraciones.

Como dije en un principio, pueden existir tres casos distintos de filtración en las estructuras hidráulicas, a saber:

- a) Presa permeable en cimentación impermeable.
- b) Presa impermeable en cimentación permeable .
- c) Presa y cimentación impermeables.

Estos tres casos pueden combinarse con aquellos en que las permeabilidades en una misma estructura sean distintas.

Los aparatos con que se dispone en los laboratorios, y en especial en el de la Comisión Nacional de Irrigación, para la resolución de estos problemas son los tanques de filtración y los aparatos de las analogías eléctrica y de la membrana.

## TANQUES DE FILTRACION.

Los tanques de filtración son unos recipientes de sección rectangular con paredes de vidrio, (Foto 1) de dimensiones que varian de 3 a 4 metros de longitud por sección de 10 x 50 cms. a 20 x 100 cm .

Supuesto que el flujo es bidimensional, para analizar el fenómeno basta construir una tajada de la cortina o cimentación que se estudia. El material que se emplea en la construc



ción de estos modelos es el de arenas graduadas cuyos coeficientes de permeabilidad han sido brevemente determinados -- por medio de dispositivos denominados permeámetros. Al hacer el estudio en los tanques, no se representa la permeabilidad efectiva del prototipo, puesto que siendo la de esos materiales muy pequeña, la experimentación se haría prácticamente -- imposible por el tiempo requerido para llevarla a cabo; por lo que, basándose en la propiedad del fenómeno de la filtración que es que la red de flujo no depende de la permeabilidad del material que atraviesa, sino únicamente de las condiciones de lindero de la estructura, puede hacerse uso de estas arenas graduadas que tienen coeficientes hasta mil veces mayores que la de los materiales generalmente empleados en la construcción de presas de tierra. Sólo en el caso en que se presenten varias permeabilidades en la estructura, habrá necesidad de que las arenas en el modelo tengan la misma relación de coeficientes que en el prototipo para que quede haber semejanza .

Este método experimental de los tanques de filtración se utiliza especialmente en la determinación de la filtración en presas de tierra. Para hacer este estudio, se construye el modelo a la escala más apropiada a las dimensiones del tanque -- levantando una tajada de la cortina con arenas cuyos coeficientes de permeabilidad como dije ya, estén en la misma relación que los del prototipo. Para evitar en parte la formación de burbujas de aire en el interior del modelo, el material se va colocando en capas horizontales de unos cinco centímetros de altura, estando previamente inundada de agua la zona, y --

procurando dar en todas ellas la misma compacidad con el fin de lograr uniformidad en el modelo.

Una vez terminado éste, se eleva el tirante de agua hasta el nivel máximo de embalse y se mantiene el nivel aguas abajo en la cota correspondiente, que generalmente es la del fondo del cauce. Después se llevan a cabo varios aforos del gasto que está pasando por el modelo hasta asegurarse que el régimen del escurrimiento es permanente, el que se indicará por el hecho que el gasto no cambie en varios aforos.

Con la seguridad de que el modelo está funcionando en las condiciones requeridas, principian las observaciones. Se inyecta pegado a la pared interior del viario del tanque, una materia colorante, como solución de fluoresceína, por medio de unos goteros que se instalan a distintas profundidades. De ésta manera es posible observar las trayectorias del agua a través de la cortina. Primeramente se determinan la línea de corriente más alta del escurrimiento por gravedad y la zona capilar. Esta zona capilar es fácil de ser confundida con el resto de la región saturada, puesto que existe movimiento de agua en ella debido a las fuerzas capilares; pero con un poco de cuidado y con la repetición de varias observaciones puede fijarse con bastante aproximación. Tanto en el extremo superior como en el inferior de la zona capilar existe una línea de presión cero o atmosférica, y entre estas dos, las presiones son menores que la atmosférica. La línea que interesa para el estudio de la filtración, es la de presión cero inferior, ya que el escurrimiento en la zona capilar no satisface

la ecuación de Laplace. Inyectando fluoresceína a distintas alturas en el modelo, se logra un esquema de las trayectorias del agua a través de la presa (Foto 1). Sin embargo, los resultados son puramente cualitativos, pues no es posible cuantificar el gasto a través de las distintas alturas de la cortina ni tampoco conocer las presiones que se producen dentro de ella.

Ultimamente se han obtenido resultados bastante satisfactorios en la propia Comisión Nacional de Irrigación en pruebas llevadas a cabo en un tanque de filtración piezométrico (Foto 2). En este tanque, que tiene la pared posterior de lámina de fierro, se instala una serie de tubos piezométricos que se conectan por medio de unas agujas colocadas horizontalmente en el modelo atravesando la pared metálica del tanque. Las agujas se distribuyen en los vértices de una cuadrícula que cubre toda el área lateral del modelo. En esta forma ha sido posible determinar las presiones en la zona del escurrimiento, con lo que a la vez se han trazado las líneas equipotenciales o de igual nivel piezométrico. Un único inconveniente tiene este método, y es que las observaciones son bastante laboriosas y requieren gran número de ellas.

#### METODO DE PAVLOVSKY.

Antes de exponer la forma de hallar la red de flujo por medio de las analogías, cabe hacer mención de un método no experimental para la determinación de la línea de presión cero, método que ha sido desarrollado por el investigador ruso, Pavlovsky.

Para fijar la línea de depresión, como llama Pavlovsky a la máxima de escurrimiento, hace su autor algunas suposiciones simplificadoras con el fin de llegar al resultado deseado. Sin embargo, parece que estas no afectan la precisión de los resultados, pues afirma su autor que las líneas calculadas han sido comprobadas en los tanques de filtración con un error de 5 por ciento.

Este método es aplicable únicamente a las cortinas homogéneas sobre cimentación impermeable y a las cortinas con co-razón absolutamente impermeable. En este trabajo mencionaré únicamente la primera parte de su teoría, que se refiere a las presas homogéneas, pues las cortinas del segundo tipo casi están en desuso.

La base del razonamiento es el siguiente. Supone a la cortina dividida en tres zonas: (Fig. 4) la primera, comprendida desde el talud aguas arriba hasta un plano vertical que pasa por la intersección del talud con la corona de la presa. En esta zona supone que el escurrimiento es uniforme. La zona 2 la limita por el plano vertical mencionado y otro, también vertical que pasa por el punto donde la línea de depreción sale a la superficie del talud aguas abajo; y la tercera zona, la del talud a partir de este último plano vertical. El problema lo reduce al cálculo del gasto en estas tres zonas a partir de la fórmula de Darcy expuesta en otra parte de este trabajo. Como el gasto en las tres regiones debe ser el mismo, puesto que existe continuidad en el escurrimiento, de ahí establece relaciones entre las diversas magnitudes conocidas.

Las cantidades conocidas de las que parte para sus deduc

ciones son las siguientes: ( Fig. 5 )

D, altura de la cortina; H, altura del tirante de agua; d, altura libre de la corona; b, ancho de la corona;  $m_1$  y  $m_2$  taludes aguas arriba y aguas abajo respectivamente;  $h_0$ , nivel del agua, aguas abajo, y  $b_0$ , ancho de la cortina a la altura de la cota máxima de embalse.

Sus fórmulas las establece para dos casos distintos, que son: cuando el nivel del agua aguas abajo es nulo y cuando no lo es. Claro que el primer caso es uno especial del segundo.

Las ecuaciones generales de Pavlovsky son las siguientes:

$$\begin{array}{l}
 \text{En la primera zona, } \frac{q}{k} = \frac{D-d-h}{m_1} \log\left(\frac{D}{D-h}\right) \\
 \text{En la segunda zona, } \frac{q}{k} = \frac{1}{2} \left\{ h^2 - (a_0^2 + h_0^2) \right\} \\
 \text{En la tercera zona } \frac{q}{k} = \frac{a_0}{m_2} \left( 1 + \log\left(\frac{a_0 + h_0}{a_0}\right) \right) \\
 \text{y además } L = b + m_2 ( D - (a_0 + h_0) )
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \dots(13)$$

Estas cuatro ecuaciones tienen solo cuatro incógnitas, - que son  $h$ ,  $a_0$ ,  $L$  y  $q/k$ .

Finalmente hace algunas operaciones simplificatorias, de tal manera que resume los cálculos a la resolución de una sola ecuación con una incógnita,  $a_0$ :

$$\frac{m_1}{m_2} a_0 A - (D - d - h) E \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{en la que } A = 1 + \log\left(\frac{a_0 + h_0}{a_0}\right)$$

$$h = \sqrt{2a_0 A \left\{ \frac{D}{m_2} + D - (a_0 + h_0) \right\} + (a_0 + h_0)^2}$$

$$E = \log \frac{D}{D-h}$$

La ecuación (14) puede resolverse gráficamente, haciendo

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{m_2} a_0 A &= f_1(a_0) \\ (D-d-h)E &= f_2(a_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

y dando distintos valores a  $a_0$ . La intersección de las dos curvas:  $f_1(a_0)$  y  $f_2(a_0)$  dará el valor correcto de  $a_0$ , con el cual pueden calcularse las demás incógnitas. Una vez conocidos dos puntos singulares que son la altura de ésta en el plano A y en el B, se traza la línea de presión cero.

#### METODO GRAFICO

Como ya quedó demostrado, en una red de flujo las líneas de corriente cortan ortogonalmente a las líneas equipotenciales, y la red puede dividirse en un número infinito de rectángulos.

Supongamos a éstos rectángulos de dimensiones  $dn$  en dirección del escurrimiento y  $ds$  normal al escurrimiento, siendo el espesor de la cortina igual a la unidad de longitud y  $h$  la carga disponible. El gradiente hidráulico valdrá  $dh/dn$  y el área normal al escurrimiento será  $ds$ . El gasto que atraviesa la cara de uno de estos cubitos, será

$$dq = k \frac{dh}{dn} ds$$

Como la red de flujo se encuentra formada por líneas de corriente entre las cuales el gasto es el mismo y equipotenciales entre las que es constante la pérdida de carga, se tendrá que la relación  $ds/dn$  de los rectángulos será constante.

Basándonos en éste principio, puede trazarse gráficamente la red de flujo en cualquier caso que se presente, siem --

METODO EXPERIMENTAL PARA LA DETERMINACION DE LAS REDES DE -  
 FLUJO - ANALOGIA DE LA MEMBRANA

Haciendo uso del aparato de la analogía de la membrana - es posible resolver cualquier problema referente a la distribución de presiones en una zona de filtración en material permeable homogéneo. Es conveniente hacer notar, que la analogía de la membrana es aplicable únicamente a casos en que el material saturado tenga un sólo coeficiente de permeabilidad.

Veamos por qué es aplicable ésta analogía al estudio de las presiones en la zona de filtración.

Supongamos un elemento de una membrana elástica homogénea, sujeta a una tensión uniforme, la cual se deforma de -- cualquier manera. Las fuerzas  $T_{dx}$  y  $T_{dy}$  no estarán entonces en el plano de la figura (Fig. 8A).

La cota de cualquier punto, con respecto a un plano horizontal de referencia estará dada por la función.

$$z = F(x, y)$$

Vamos a demostrar que  $F(x, y)$  es una función armónica siempre que la membrana esté sujeta a tensión simple y que la diferencia de cotas no sea grande.

Consideremos el equilibrio de un pequeño elemento de la membrana ( Fig. 8B). La resultante vertical de las fuerzas - perpendiculares a OY será,

$$F_x = T_{dy} \sin(\alpha + d\alpha) - T_{dy} \sin\alpha$$

y si  $\alpha$  es muy pequeño,  $\sin \alpha \doteq \alpha$  . . .  $F_x = T_{dy} \cdot d\alpha$

e igualmente, si  $\alpha \doteq \tan \alpha$

$$\alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \therefore \quad d\alpha = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$$

$$y \quad F_x = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$$

Análogamente:

$$F_y = T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy$$

Si en la membrana obra una fuerza paralela a CZ de intensidad P por unidad de área,

$$F_x + F_y = P dx dy,$$

Sustituyendo:

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = P dx dy$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{P}{T} \dots \dots \dots (16)$$

que es el caso que se presenta al hacer el estudio por medio de una membrana, del fenómeno elástico de la torsión.

Si  $P = 0$  :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

que es la ecuación de Laplace que rige también el escurrimiento laminar de un fluido.

De aquí se deduce que las curvas de nivel en la membrana deformada, satisfarán la ecuación de Laplace.

Si al hacer el estudio de las filtraciones se obliga a la membrana a que en los linderos de la zona por estudiarse, las cotas de aquella sean proporcionales a los potenciales -- del prototipo, las cotas de las curvas de nivel nos darán el potencial del fluido que se mueve y marcarán las curvas de igual nivel piezométrico. Si en lugar de hacer a las cotas de los linderos proporcionales a los potenciales, se hace que lo sean a las presiones en dichos linderos, las curvas de nivel proporcionarán las líneas de equipresión, que también satisfacen la ecuación de Laplace. Finalmente, si se conocen en el prototipo las líneas de corriente extremas de la zona de es -



currimiento, será posible determinar éstas sujetando a la membrana a una ordenada constante en cada una de las líneas de corriente límites, siendo en este caso las curvas de nivel en la membrana, líneas de corriente.

Como ya dije, ésta analogía es aplicable únicamente a materiales homogéneos, en vista de que las deformaciones de la membrana son proporcionales a una sola permeabilidad y sería necesaria una membrana con dos módulos de elasticidad para hacer el estudio en materiales heterogéneos; lo cual no es práctico de lograr, en vista de que no puede garantizarse la transmisión de fatigas de una zona a otra de diverso espesor, sin que haya puntos de concentración de esfuerzo a lo largo de la línea de separación.

El aparato de la analogía de la membrana (Foto 3) consiste en un tablero cuadrado de madera de unos 120 centímetros por lado, sobre el cual, a unos 20 cm. está un marco cuadrado y graduado de 55 cm. por lado, a lo largo del cual se restira una membrana de hule por medio de una serie de ganchos. La tensión que se proporciona a la membrana es la capaz de producir un alargamiento de  $1/6$  de su longitud original. Como plano de referencia para medir las cotas, se tiene por debajo del marco de la membrana, a una altura variable de unos 15 cm. sobre el tablero, una placa metálica del tamaño del marco de la membrana. También sobre el tablero, y a una altura de unos 30 cm. se apoyan dos barras horizontales, una de ellas graduada sobre las que desliza otra también graduada. Estas tres barras forman un sistema coordenado plano. Para medir las cotas se tiene una aguja

vertical provista de un tornillo micrométrico, la cual puede correr a su vez, sobre la regla móvil.

Para lograr precisión en las experiencias, se hace pasar por la estructura del aparato, una corriente eléctrica, cuyo circuito se cierra al tocar la punta de la aguja la membrana; ésta se barniza previamente con pintura de aluminio y se le espolvorea encima grafito con el fin de hacerla conductora. Como indicador del cierre del circuito, se emplea un foco de luz neón. La corriente que se usa es de 220 volts.

Para producir las deformaciones en los linderos, se emplean perfiles de lámina de fierro de espesor de 1/16 de pulgada.

#### Aplicación a la Presa de "Las Pilas"

La primera experiencia que llevé a cabo en éste aparato fué para determinar la red de flujo en la cimentación de la presa vertedora de "Las Pilas", sobre el río Tehuantepec, Oax.

Esta presa está asentada sobre un material permeable homogéneo de profundidad indefinida.

Para hallar las líneas de corriente, se conocían como tales, el perfil de la cimentación y otro cualquiera a una distancia alejada de la cortina. (Fig. 9)

Manteniendo la membrana horizontal, se deformó con un perfil de la forma de la cimentación, hasta tocar la placa inferior, o sea, se dió una ordenada nula a ésta línea de corriente; el perfil se colocó a las distancias de las orillas de la membrana, según se indica en la figura. (Fig. 9) La diferencia entre el plano del marco de la membrana y la del

perfil fué de 2 cm.

Las líneas de corriente se obtuvieron para una diferencia de cotas de 2 mm. entre una y otra. Así se trazaron ocho tubos de igual gasto. (Plano 1) Los últimos dos tubos quedaron ya dentro de la zona de las distorsiones, zona que se produce debido al lindero rectangular obligado del marco.

Para hallar las líneas equipotenciales se tropezó con la dificultad de que a pesar de que se sabía que tanto el nivel del terreno aguas arriba y aguas abajo eran líneas equipotenciales, no era posible fijar la pendiente o variación del potencial a lo largo de la línea de la base de la cortina. Pero por otra parte, se sabía que la influencia de los dentellones en la distribución de la caída de potencial es únicamente en la región cercana a ellos, y que en el resto se mueve el agua como si la cimentación fuera recta. Por lo tanto, se procedió a hacer la determinación de las líneas como si la cimentación fuera recta (Fig. 10).

Una vez halladas las líneas, se desechó la porción de éstas a partir de la última línea de corriente de forma elíptica, que es la que tienen éstas cuando la cimentación es recta; éste nos indicaba el límite de la zona de influencia de los dentellones: a partir de aquí se trazaron gráficamente hasta tocar la cimentación.

#### Aplicación a cortinas de tierra.

La red de flujo precedentemente dicha, en la región saturada de una masa de tierra no se determina en el operato de la analogía de la membrana, sino que el estudio se limita a la obtención de las líneas de equipresión.

Este estudio fué el que se llevó a cabo en el ensayo preliminar para la determinación de la filtración en la Presa "El Palmito", sobre el Rio Nazas, Dgo.

Para este estudio era necesario que las condiciones de lindero en el modelo fueran tales, que subsistiera el requisito de que la línea de la cimentación, que como se ha recibido varias veces, es línea de corriente, no presentara escurrimiento a través de ella.

En este caso, como ya dije, las ordenadas de los linderos tienen que ser proporcionales a las presiones por lo que las ordenadas en el modelo fueron las siguientes (Fig. 11): una cota constante a lo largo de la línea AB, proporcional al tirante de agua, y que se fijó de 15 mm.; a continuación, una ordenada disminuyendo linealmente hasta cero en el punto C; nula a lo largo de la línea de depresión CD y de ahí creciendo linealmente hasta E, de donde seguiría constante hasta F.

Para llenar la condición de no escurrimiento a lo largo de BE, es necesario que la pendiente transversal de la membrana, esto es, en dirección perpendicular a la línea de la base, sea igual al gradiente de la presión debido a la gravedad. Esto es fácil de comprender si se observa que las líneas equipotenciales deben cortar ortogonalmente a la línea de la base, y que éstas, por lo tanto, en la zona cercana a ella, son verticales. La pendiente transversal de la membrana es entonces proporcional a la ordenada correspondiente al tirante máximo del agua. Luego bastó en nuestro caso, sobre elevar los linderos de un perfil imagen de la cortina, en una can-

tividad igual al producto de la ordenada máxima por la relación de las distancias  $KK'/CC'$  (Fig. 12). El punto  $C'$  tendrá una sobreelevación máxima igual a 15 mm., en los puntos B y D será nula y en los puntos intermedios, proporcionalmente.

Con el fin de lograr una adaptación perfecta de la membrana en todos sus puntos y de tener las ordenadas correctamente, se hace uso de modelos machihembrados que orensén la membrana por arriba y por abajo. Para evitar el movimiento de la lámina de abajo y de dar peso a la de arriba para deformar lo suficiente, se sujetan los perfiles a unos contornos hechos de solera de fierro de 1/4 de pulgada (Foto 4). Generalmente se toma una altura total del modelo de unos 7 cm. A partir de una ordenada cero de 2 cm. se trazan las correspondientes a todos los puntos del lindero de acuerdo con el razonamiento que ya se expuso, concediendo a la ordenada máxima, no más de 3 cm. Arriba de la línea de presiones y a unos 2 mm. se traza otra equidistante a la anterior; dejando la franja de 2 mm. para hacer por ella el corte y dividir a la lámina en el modelo macho y en el hembra. Con una lima se afinan los contornos de ambos modelos hasta lograr una perfecta coincidencia entre uno y otro. Ya recortados los modelos, se les dan los dobleces para que sigan el contorno de la región del escurrimiento de la presa y de su imagen y se soldan al contorno interior de las soleras: una a la parte inferior del modelo macho y la otra a la superior de la hembra. En seguida se asienta el modelo macho sobre la placa metálica del aparato por debajo de la membrana previamente restirada y el modelo hembra se monta sobre éste por encima de la membrana, quedando

do ésta prensada entre ambos modelos. (Fots. 5 y 6)

La exploración en el modelo se hace, como ya indiqué, por medio de la aguja, la cual se puede hacer coincidir con cualquier punto de la membrana. Los resultados obtenidos por mí en las experiencias hechas en el modelo de "El Palmito" pueden verse en la Fig. Cada línea de equipresión, parte de un punto en el paramento aguas arriba de la cortina que tiene una diferencia de cota con el anterior y el posterior igual a la décima parte de la altura del tirante de agua. La intersección de éstas líneas de equipresión con la línea de la cimentación es el punto de partida de las equipotenciales que indican a su vez, en la línea de presión cero, una caída de altura igual también a la décima parte de la carga total.

Un método semejante se aplica para estudiar la distribución de las presiones cuando ocurre un rápido descenso del agua en la presa, presentándose el caso que entonces las filtraciones tienden a salir por ambos paramentos de la cortina. El lindero se coloca a presión constante (cota constante) en todo el perfil de la cortina. La distribución de las presiones es semejante al de la Figura 13

#### ANALOGIA ELECTRICA

La razón física por la cual es aplicable ésta analogía a estudio de las filtraciones es que las funciones de potencial y de corriente son las mismas para cualquier movimiento fluido sea éste líquido, gaseoso, eléctrico o térmico. Por lo tanto, las líneas de corriente eléctrica que se determinen serán líneas de corriente en el movimiento del agua y las de igual ni-

vel piezométrico en ésta, corresponderán a las equipotenciales eléctricas. El estudio se concreta entonces al del caso de una corriente eléctrica a través de un conductor.

Al igual que en el caso de la analogía de la membrana, el modelo se limita por los linderos de la región del escurrimiento. El material permeable se representa por un conductor y los linderos conocidos como equipotenciales o líneas de corriente por electrodos. El fenómeno eléctrico será el de una corriente que al atravesar una resistencia, pierde su potencial.

En general se emplea como conductor en los casos en que se trata de una permeabilidad homogénea, una solución de agua destilada con cloruro de sodio al 2 o 3%. Como se verá más adelante, también se emplean otros materiales que tengan las resistencias necesarias para las diversas permeabilidades que se presenten.

Los electrodos se hacen de lámina de cobre o de fierro de 1/16 pulg. de espesor. En general es más conveniente usar los de cobre, por presentar menor resistencia a la corriente.

El aparato de la analogía eléctrica consiste (Foto 7.) en un recipiente rectangular de paredes de vidrio de 8 cm. de alto por 60 de ancho y 100 de largo, formado por piezas rectangulares soportadas por un bastidor de madera. Este recipiente está apoyado en cuatro tornillos niveladores. El modelo que se construye de material aislante y a escala, si se hace de parafina, se cuele éste dentro del recipiente; si es de piralina, se construye aparte y se coloca en el cajón para

mantenerlo nivelado. En general resultan más económicos los primeros pero de mayor precisión los segundos. Los electrodos metálicos se ajustan verticalmente sobre las paredes del modelo en las partes que se necesiten y que se definirán más adelante.

Para determinar puntos de igual potencial se emplea un dispositivo eléctrico semejante al puente de Whetstone . -- ( Fig.14 ) En la corriente de 110 V. se intercala un banco de focos de 100 w. en paralelo, para bajar el potencial entre -- las terminales del aparato a 60 v. aproximadamente. Como alta resistencia se emplea un alambre de acero del número 30 , de 80 cms. de longitud, colocado sobre una regla graduada en diez partes iguales. (foto ? )

La determinación de una línea equipotencial se hace conectando una terminal de un detector a un punto cualquiera -- del alambre de alta resistencia y a una distancia  $x$  de uno -- de los extremos, que marque una caída de potencial  $E$  hasta -- dicho extremo del alambre; la otra punta del detector se pone en un punto del modelo.

Si la caída total de potencial entre las terminales del alambre es  $E_0$  y la longitud del alambre de alta resistencia --  $L$ , el potencial del punto del alambre de alta resistencia se -- rá:

$$E = E_0 \frac{x}{L},$$

Puntos de un mismo potencial se encuentran explorando el -- electrolito con un punzón conectado al otro extremo del detec -- tor, hasta que éste indique que no hay paso de corriente. En el aparato en uso en la Comisión Nacional de Irrigación se em



plea como detector una bocina de radio y el paso de corriente se indica por un zumbido; cuando cesa este, se sabrá que el punto que se está tocando en el modelo con el detector, tiene el potencial marcado en la resistencia variable. Como la regla está dividida en partes iguales, las equipotenciales marcarán igual caída.

Como ya dije antes para los tanques de filtración, el valor absoluto de las permeabilidades no afecta el escurrimiento; de manera análoga, el valor de la conductibilidad eléctrica del modelo no afecta la distribución de las líneas de corriente y equipotenciales. Únicamente, cuando se trata de representar varias permeabilidades, es necesario que las conductibilidades estén en la misma relación que aquellas.

Al preparar un modelo para obtener equipotenciales, en el cual intervengan varias permeabilidades, se colocarán las resistencias proporcionalmente a las impermeabilidades del prototipo, esto es, en la zona que tenga un coeficiente de permeabilidad mayor, se pondrá la resistencia más grande y así sucesivamente, pero recordando que la relación entre dos cualesquiera de ellas debe ser la misma que entre las dos permeabilidades correspondientes del prototipo.

Para relación de coeficientes no mayor de 5 o 6 se emplea el mismo electrolito con diferentes tirantes, lo que se logra elevando el fondo del modelo en la zona de mayor resistencia, de tal manera que queden los espesores del conductor en la relación de las permeabilidades. Para diferencias mayores entre las distintas zonas, hay necesidad de emplear mate-

riales de conductibilidades diversas, de tal manera, que sin variar el espesor del modelo en las diversas regiones, se logre la relación deseada. Los materiales que he usado en experiencias diversas han sido la arena normal de Ottawa y el polvo de grafito. Con estos materiales se han logrado relaciones desde 10 hasta 50 haciendo cambiar únicamente la proporción de sal en la solución que se usa para saturar dichos materiales, de 2% hasta 0.125%, ya que la rapidez de variación de la conductibilidad eléctrica es mayor en la arena que en el grafito. Para relaciones mayores, digamos por caso, de 96, se combina la relación de la conductibilidad de los materiales con los espesores diversos, siendo la relación final el producto de las dos. Por ejemplo, usando una combinación de arena y grafito saturados con solución al 1% de sal, nos da una relación de 16 y con un desnivel de 1:6 combinado nos da una relación final de 96.

Cuando se usa el desnivel máximo de 5 o 6, existe la circunstancia de que la corriente eléctrica no pasa a lo largo de toda la zona del mayor espesor, sino que queda una región de estancamiento cerca a la línea de frontera de las zonas, lo cual hace variar la resistencia eléctrica dentro de una misma región ( Fig. 15) Para evitar esta inconveniencia se hace necesario instalar una cascada eléctrica, consistente en intercalar en la línea de separación, una placa aisladora (ciralina, por ejemplo) y sobre esta, una serie de alambritos de cobre a distancia de 2 m.m. entre sí, que vayan desde el fondo del espesor pequeño hasta el fondo del espesor grande ( Fig. 16) De esta manera se obliga a la corriente a pasar

únicamente por la cascada y así recorra todo el conductor desde la línea de separación.

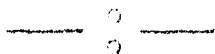
Existe el inconveniente para el empleo de este método,-- de que cuando la línea divisoria de dos zonas va de un electrodo al otro, la cascada se convierte en zona de influencia que desvía a las líneas de corriente cercanas, hacia ella.

Los electrodos en éste modelo se colocan en las fronteras que se conozcan como equipotenciales. Tales líneas son -- por ejemplo: el paramento mojado aguas-arriba y aguas-abajo -- de la cortina en el caso de presas de tierra; en las cimentaciones permeables bajo presas impermeables, la superficie del terreno aguas-arriba y aguas-abajo de la cortina.

Para construir el modelo que se emplee en la determinación de las líneas de corriente, las resistencias se cambian de tal manera que sean inversamente proporcionales a las impermeabilidades; esto es, en la región donde estaba en el modelo anterior la resistencia menor, se pone la mayor e inversamente. Los electrodos se colocan en los linderos conocidos como líneas de corriente y que serán las paredes del modelo que antes eran aisladoras.

Tanto las líneas equipotenciales como las de corriente-- presentan una desviación al refractarse de una zona a otra -- de distinta permeabilidad, siguiendo una ley bien definida . ( Fig. 17) Las líneas de corriente se refractan de tal manera que la tangente de los ángulos que forman con la normal a la línea divisoria, están en razón directa con las permeabilidades. La ley de refracción de las equipotenciales es que

la relación de las cotangentes de los ángulos que forman con la normal es la misma de las permeabilidades. Sin embargo, - esta ley queda afectada por el ángulo que forman los linderos fijos del modelo con respecto a la línea de separación. Por ejemplo (Fig. 13) no puede ser la misma refracción de las líneas en un lindero de la forma A que en otro de la forma B .



#### APLICACION DE LA ANALOGIA ELECTRICA A LA PRESA DE "LA ANGOSTURA".

Recordando lo que digo en la introducción de esta tesis, mencioné la aplicación de las redes de flujo al estudio de la posición de los drenes y a la determinación de la subpresión en las presas de concreto.

Voy a referirme al estudio que se hizo a este respecto para la presa de "La Angostura", presa de sección arco gravedad que construye la Comisión Nacional de Irrigación sobre el Río Bavispe, Son. en el proyecto del Río Yaqui.

Se deseaba conocer la distribución del gasto de filtración en los drenes, para decidir la mejor colocación de estos, a la vez que se conocen las presiones en una sección horizontal de la cortina .

Se escogió para el estudio, (Plano ) una sección horizontal de la cortina ya cercana al fondo del cauce, la cual tiene 60.00 m. y 35.30 m. de radios exterior e interior respectivamente, y una amplitud de 97°.

Los drenes están formados por una serie de tubos verti

cales de concreto poroso, de 8 cm. de diámetro interior, colocados a tres metros del paramento aguas arriba, se deseaba conocer, como ya dije, la mejor separación entre uno y otro.

Se tomo como primera separación la de 3 m. de c. a. c. - Como la red de flujo debería tener una distribución idéntica al rededor de cualquiera de los drenes alejados de los apoyos de la cortina e idéntica tambien entre dos cualesquiera de ellos, se decidió hacer el estudio en un segmento de la sección, limitado por dos cortes radiales separados 6 m. en el arco de los drenes ( Fot.8 A)

El modelo se construyó con fondo y paredes de pirulina a escala 1:50 con altura de las paredes de 2 cm. Para la determinación de las líneas equipotenciales, que en este caso equivaldrían a líneas de igual presión, los drenes se representaron por barras metálicas verticales de 1.5 mm. de diámetro. Un electrodo se colocó en el paramento aguas arriba y el otro en el de aguas abajo. Los drenes se conectaron al electrodo aguas abajo, puesto que en el prototipo estaran conectados con el exterior. Se empleó como conductor un electrolito de agua salada.

De los resultados obtenidos se observó ( Plano ) que la mayor parte de las líneas equipotenciales estaban alojadas aguas arriba de la línea de los centros de los drenes. - Las equipotenciales aguas abajo de los drenes están formadas por una curva cerrada al rededor de los drenes y una ondulada con la dirección general de los paramentos. Es evidente que necesariamente debe existir una línea límite para la cual se

toquen las dos partes integrantes de ella. El punto de intersección de la curva cerrada y de la línea ondulada es un punto singular llamado punto de estancamiento.

Para la determinación de las líneas de corriente se utilizaron como fronteras del modelo las dos secciones radiales, el paramento aguas arriba y la línea equipotencial límite que hemos mencionado. (Foto. 8B) Para dar la forma de esta línea al modelo, se coló parafina, con lo que a la vez se aisló a las barritas de los drenes. Como podrá observarse, de las líneas de corriente, solo una atraviesa la zona de los drenes para salir al paramento aguas abajo, yendo el resto de ellas a concentrarse a los drenes. Necesariamente debe haber un lindero entre el agua que escurre aguas abajo y la que se dirige a los drenes; este lindero es una línea de corriente que va a terminar al punto de estancamiento. Lógicamente, esta línea es teórica, puesto que no existe movimiento a lo largo de ella.

En modelos enteramente semejantes a los descritos, se hizo el estudio para separación de drenes de 6 m. y 2 m. entre uno y otro.

Como conclusión final se obtuvo que los drenes con separación de 6 m. de c. a c. son poco efectivos, pues los diagramas de presión presentan ordenadas de más de 50% de la presión que tendrían con una distribución lineal en caso de no existir drenes. Los de separación de 3m. son casi tan efectivos como los de 2m., por lo que la distribución más económica, dentro de la seguridad, fué la de 3m. entre centro y centro de los drenes.

La subpresión total que obra sobre la sección se obtiene integrado el valor de la presión en todos los puntos del Área, tomando como base la distribución de las líneas de equipresión .

## CAPITULO III

## RESOLUCION ANALITICA DE LAS REDES DE FLUJO

## FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

Número complejo es aquel que está formado por una parte real y otra imaginaria. Si llamamos  $x$  a la parte real e  $iy$  a la parte imaginaria, un número  $z$  se expresa en la forma:

$$z = x + iy$$

siendo  $i = \sqrt{-1}$

Los números reales son por lo tanto una parte de los imaginarios, puesto que pueden considerarse como con parte imaginaria nula. Los números imaginarios son aquellos con parte real nula.

Las cantidades complejas pueden representarse gráficamente en el plano de Argand. (Fig. 19) Sobre el eje OX se lleva la parte real  $x$ ; sobre el eje Oy se lleva el valor de la parte imaginaria,  $y$ . La magnitud del número complejo  $z$  estará dada por el segmento Oz.

Las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  se deducen fácilmente de la figura:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$$

$$\therefore z = r (\cos\theta + i \sin\theta)$$

a  $r$  se le llama módulo y a  $\theta$ , argumento.

Esta expresión para los números complejos es de - - -  
 Demoivre. Existe otra, que es la de Euler:

$$z = re^{i\theta}$$

La suma o resta de números complejos es igual a la suma



o resta de las partes reales y de las partes imaginarias:

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$z_3 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Esto quedará expresado gráficamente por la suma o diferencia vectorial de sus respectivos módulos (Fig. 20)

Para multiplicar o dividir, se toma el producto o cociente de los módulos y la suma o diferencia de los argumentos:

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Como generalización de estas reglas puede decirse que el resultado de cualquier operación con números complejos es otro complejo. Condición análoga existente para las funciones de variable compleja en general, y es que toda función de variable compleja es otro complejo.

Supongamos la función elemental:

$$z = x + iy$$

que puede expresarse, como ya vimos, por medio de las coordenadas en un plano. Supongamos ahora otra función  $W$  tal que

$$W = f(z) = f(x + iy)$$

Ahora bien, de acuerdo con lo que acabamos de establecer:

$$W = \varphi + i\psi = f(z) \dots \dots \quad (18)$$

Esta función, a su vez, puede representarse en el plano  $W$ , en el cual  $\varphi$  es el eje de las reales y  $\psi$  el de las imaginarias.

Es evidente que existen las siguientes relaciones:

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad x = x(\varphi, \psi)$$

$$\psi = \psi(x, y) \quad y = y(\varphi, \psi)$$

Para un punto  $w$  en el plano  $W$  habrá un correspondiente  $z$  en el plano  $Z$ . Luego para un cambio de la función  $W$   $dw$  habrá un correspondiente  $dZ$  en  $Z$ . Estos incrementos deben ser iguales a la suma de las variaciones de las partes reales e imaginarias respectivamente. Por lo tanto:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\varphi + i d\psi}{dx + i dy} \dots \dots \quad (19)$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dw}{dz} \quad \text{puesto que} \quad \frac{dz}{dx} = 1 \\ \frac{dw}{dy} &= \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} = i \frac{dw}{dz} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \frac{dz}{dy} = i \\ \therefore \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{dx} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

y por otra parte:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \frac{dw}{dy} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial y} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$$

Igualmente los segundos miembros de estas dos últimas ecuaciones:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$$

De acuerdo con la condición que existe entre dos expresiones complejas que dice que si estas son iguales, las partes reales son iguales entre si, y las imaginarias también, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (20)$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann que ya vimos en el Cap. I, y que satisfacen la ecuación de Laplace, puesto que si derivamos la primera de las ecuaciones con respecto a  $x$  y la segunda con respecto a  $y$ , y sumamos miembro a miembro de

las dos ecuaciones, tendremos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

De manera análoga llegamos a que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Si tanto  $\phi$  como  $\psi$  satisfacen la ecuación de Laplace, estas pueden representar el potencial de la velocidad y la función de corriente en un escurrimiento plano irrotacional.

De las ecuaciones de Cauchy - Riemann se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} u \text{ y } v, \text{ componentes del} \\ \text{vector velocidad} \end{array}$$

y finalmente se tiene que:

$$\frac{dw}{dz} = u + i v$$

o sea que la velocidad puede expresarse también como un complejo.

#### REPRESENTACION CONFORME.

Si representamos en el plano  $w$  dos familias de líneas equidistantes paralelas a los ejes de las reales y de las imaginarias respectivamente, estas nos fijarán líneas de  $\phi$  constante y  $\psi$  constante. Si hacemos variar a  $w$  de tal manera que  $\phi$  varíe mientras  $\psi$  permanece constante, en el plano  $z$  se tendrá una línea correspondiente a la de  $\psi$  constante en el plano  $w$ . De igual manera se puede hacer para obtener en el plano  $z$  líneas que correspondan a valores constantes de  $\phi$  en el plano  $w$ . Como ya vimos en un principio, las líneas de  $\phi$  y  $\psi$  constantes se cortan ortogonalmente.

Si las líneas de  $\psi$  y  $\Psi$  constante forman una red de flujo que puede ser la de un caso de filtraciones en materiales permeables, y si los incrementos que se fijan para  $\varphi$  y  $\psi$  se hacen iguales, el gasto entre dos líneas de corriente será constante y las equipotenciales nos marcarán incrementos iguales de potencial.

Determinación de la red de flujo en una cimentación recta.

Supongamos la función:

$$Z = \operatorname{cosh} W = \operatorname{cosh} (\psi + i\varphi)$$

Desarrollando el coseno hiperbólico:

$$Z = \operatorname{cosh} \psi \operatorname{cos} \varphi + i \operatorname{senh} \psi \operatorname{sen} \varphi$$

Como  $z = x + iy$

$$x = \operatorname{cosh} \psi \operatorname{cos} \varphi$$

$$y = \operatorname{senh} \psi \operatorname{sen} \varphi$$

Suponiendo a  $\psi$  constante, tendremos:

$$\begin{aligned} x &= k_1 \operatorname{cos} \varphi & (k_1 &= \operatorname{cosh} \psi_0) \\ y &= k_2 \operatorname{sen} \varphi & (k_2 &= \operatorname{senh} \psi_0) \end{aligned}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones y dividiendo entre  $k_1^2$  la primera y entre  $k_2^2$  la segunda:

$$\frac{x^2}{k_1^2} = \operatorname{cos}^2 \varphi$$

$$\frac{y^2}{k_2^2} = \operatorname{sen}^2 \varphi$$

sumando miembro a miembro de las dos ecuaciones:

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} = 1$$

que nos representa en el plano  $z$  una familia de elipses.

Por otra parte, si hacemos a  $\varphi$  constante, tendremos:

$$x = \operatorname{cosh} \psi \cdot C_1$$

$$y = \operatorname{senh} \psi \cdot C_2$$

y finalmente

$$\frac{x^2}{C_1^2} - \frac{y^2}{C_2^2} = 1$$

que representan en el plano  $z$  una familia de hipérbolas.

Dando distintos valores a  $\varphi$  y  $\psi$  se obtienen una red como a la de la Fig. 2ñ que es la del escurrimiento del agua a través de una cimentación permeable.

Red de flujo a la entrada de un depósito ilimitado a un canal.

Finalmente, y aunque fuera del asunto principal a que se refiere este trabajo, mencionaré otra aplicación de la transformación conforme.

Supongamos un depósito de dimensiones muy grandes, v.g. el vaso de una presa, el cual desfoga en un canal. Para conocer las trayectorias que seguirá el agua a la entrada del canal, se establece la siguiente función:

$$\begin{aligned} Z &= w + e^w \\ &= \varphi + i\psi + e^{\varphi + i\psi} \\ &= \varphi + i\psi + e^{\varphi} (\operatorname{cosh} \psi + i \operatorname{senh} \psi) \end{aligned}$$

Separando las partes real e imaginaria, tendremos que:

$$\begin{aligned} x &= \varphi + e^{\varphi} \operatorname{cosh} \psi \\ y &= \psi + e^{\varphi} \operatorname{senh} \psi \end{aligned}$$

Ahora bien, si hacemos a  $\psi = \pi$  tendremos:

$$\begin{aligned} x &= \varphi - e^{\varphi} \\ y &= \pi \end{aligned}$$

o sea, que se tendrá en el plano  $z$  una recta semi infinita, paralela a OX a una distancia  $\pi$  de éste, que termina en la abscisa igual - 1 (cuando  $\varphi = 0$ ).

$$\text{Si } \psi = -\pi \quad \begin{aligned} x &= \varphi + e^\psi \\ y &= -\pi \end{aligned}$$

que es otra recta semi-infinita, imagen de la anterior con respecto al eje OX .

Estas dos líneas definen los linderos del canal. ( Fig. 22  
Haciendo variar a  $\psi$  de  $\pi$  a  $-\pi$  obtendremos el resto de las líneas de corriente.

Haciendo  $\varphi = \text{constante}$ , obtenemos las líneas equipotenciales que nos marquen la caída de éste a lo largo del movimiento

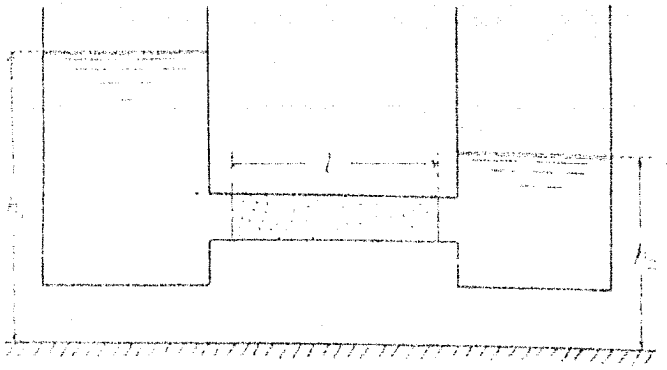


Fig. 1

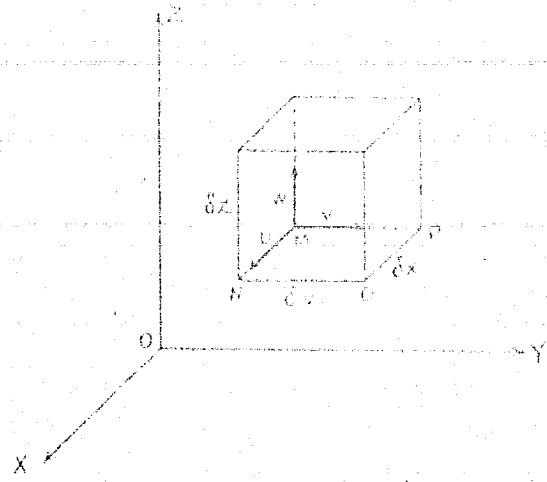


Fig. 2

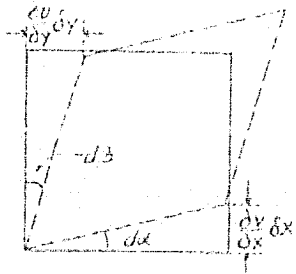


Fig. 3

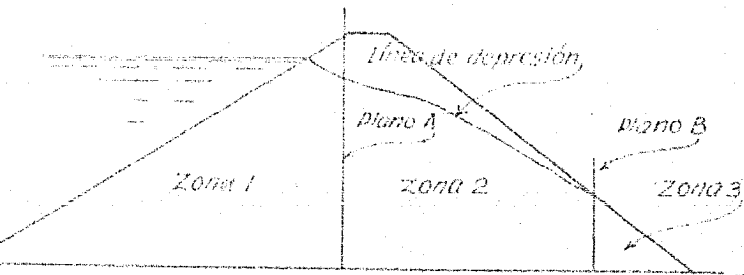
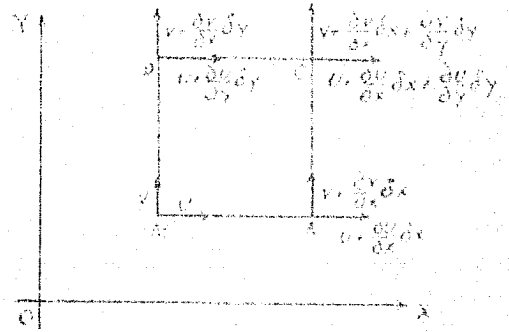


Fig. 4

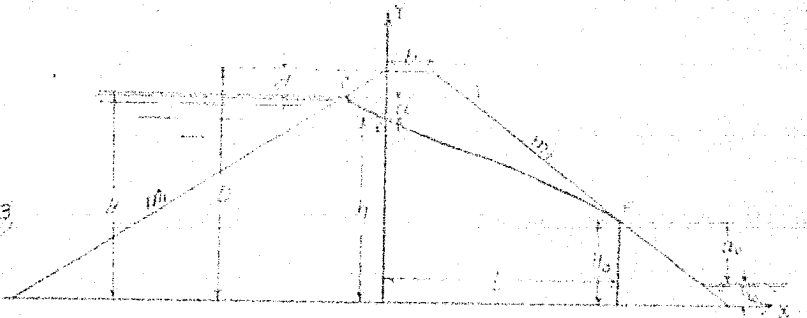


Fig. 5

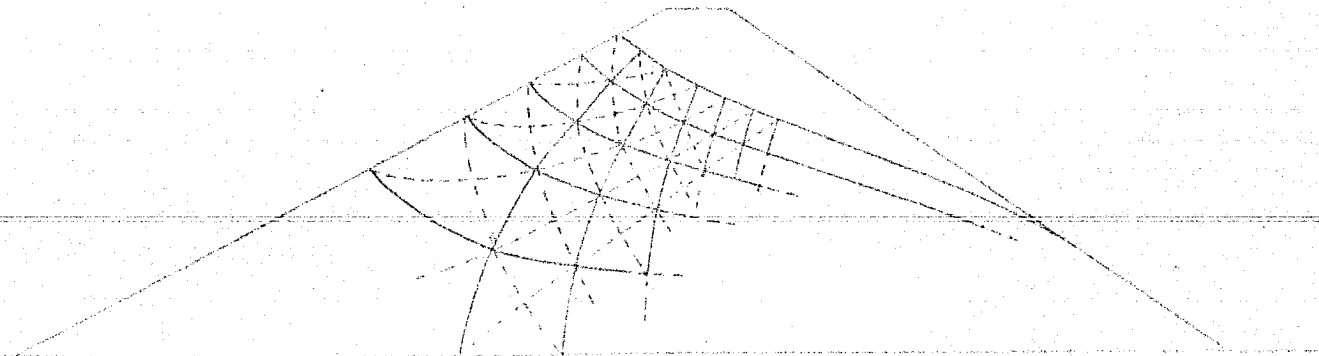
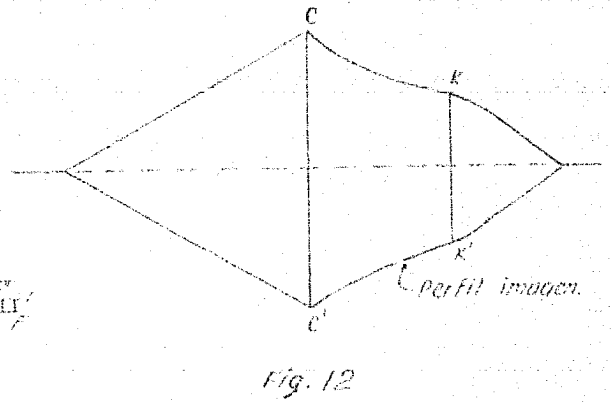
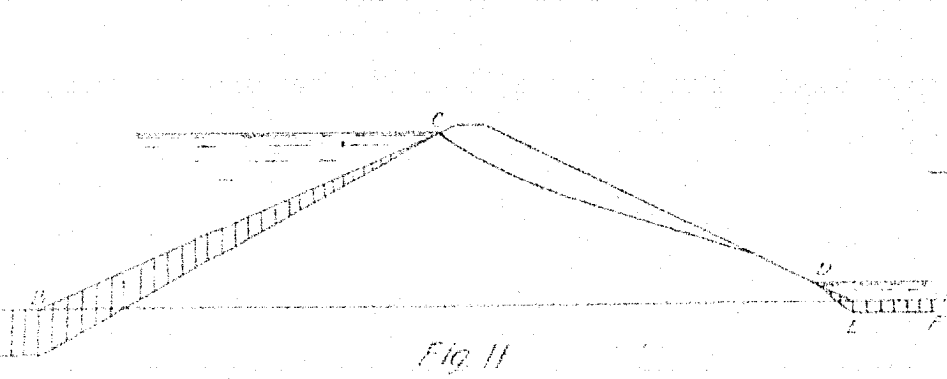
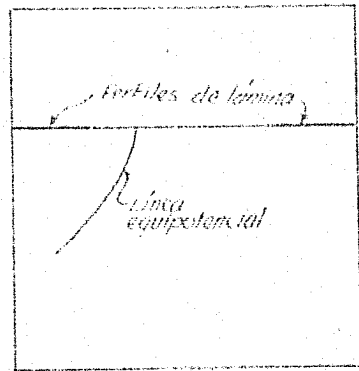
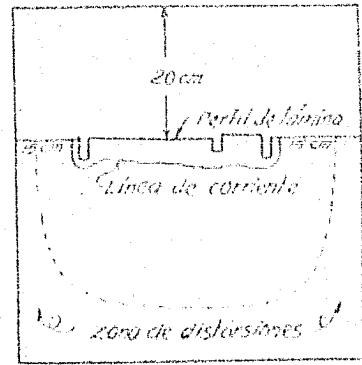
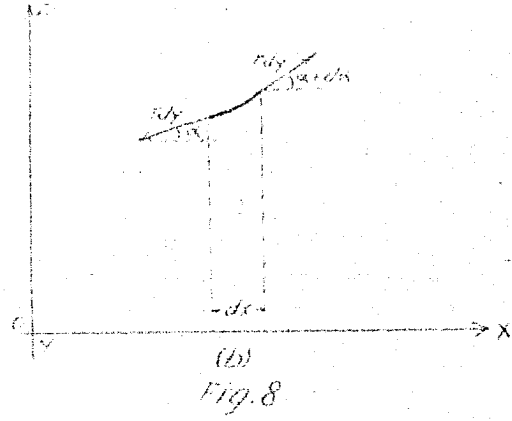
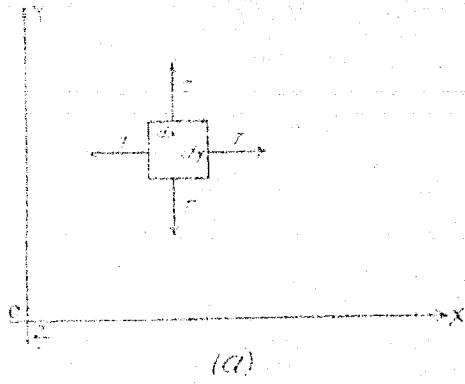
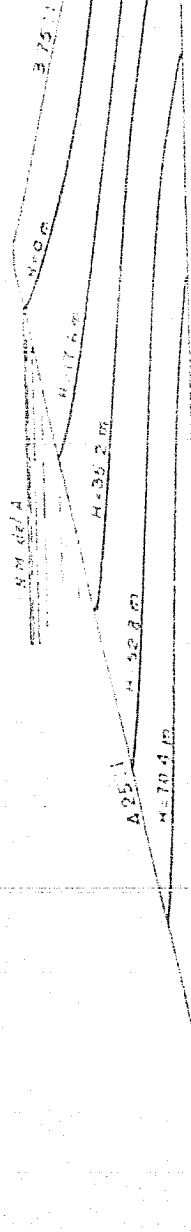


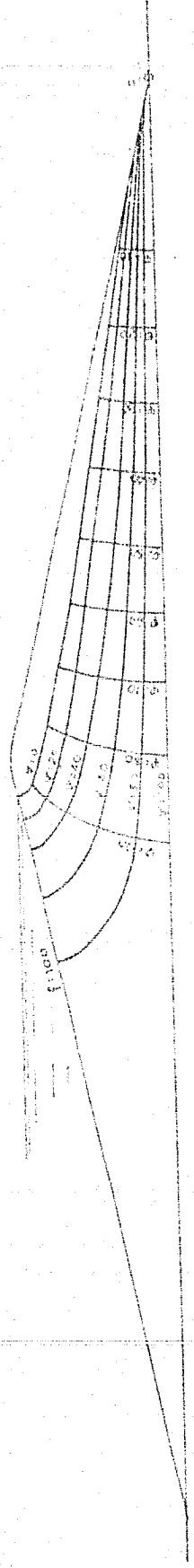
Fig. 6







*Líneas de equipresión en la presa "EL PALMITO".*



*Fig. 7*

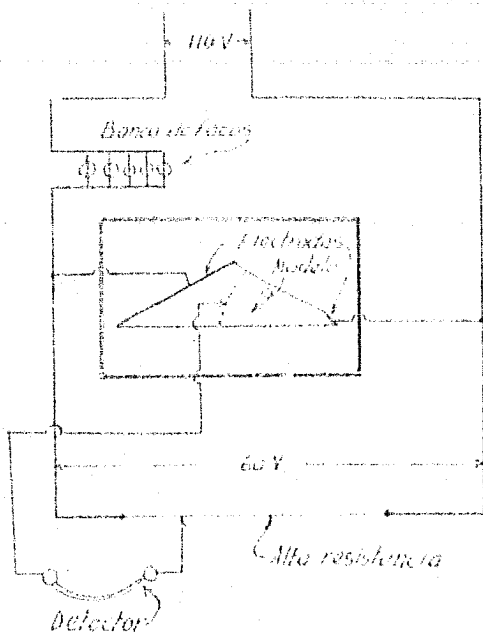
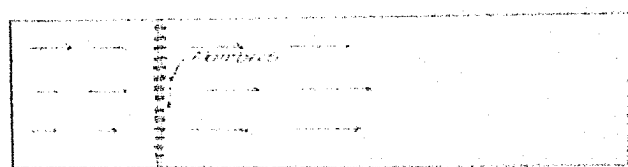
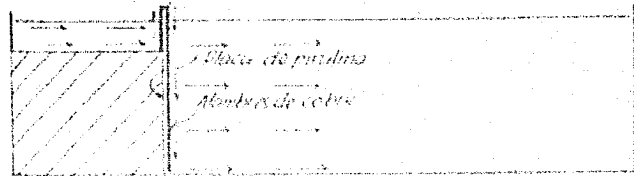


Fig. 14



Fig. 15



PLANTA

Fig. 16

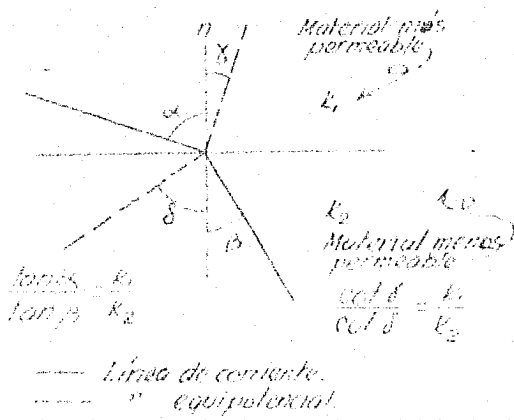


Fig. 17

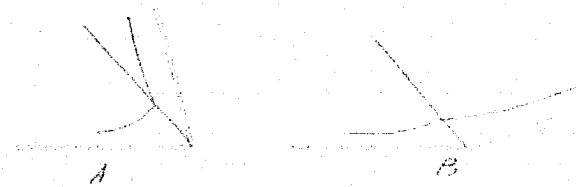


Fig. 18

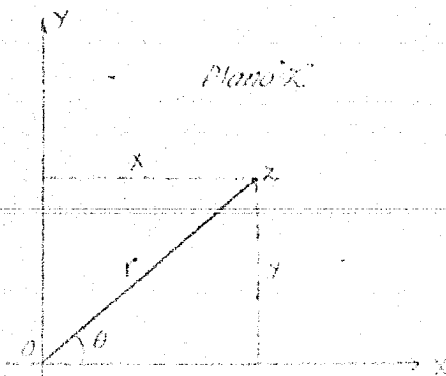


Fig. 19

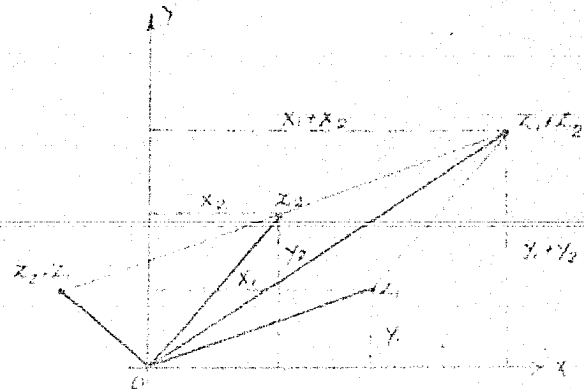


Fig. 20

H. 7015.77

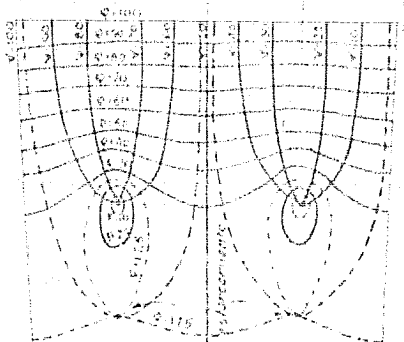
H. 7015.77

H. 0  
H. 15.76

H. 21.03

Presiones a lo largo de la sección A-A.

Presiones a lo largo de la sección B-B.



Red de flujo en una sección horizontal (cota 710) de la cortina de la presa de "LA ANGOSTURA"



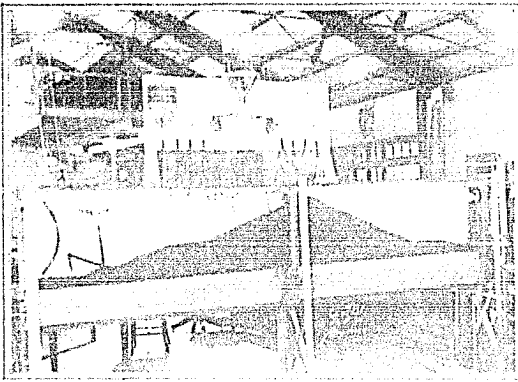


Fig. 1. Workshop of the factory.

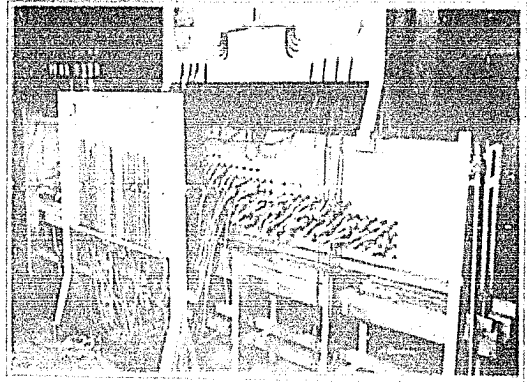


Fig. 2. Machine for processing wool.

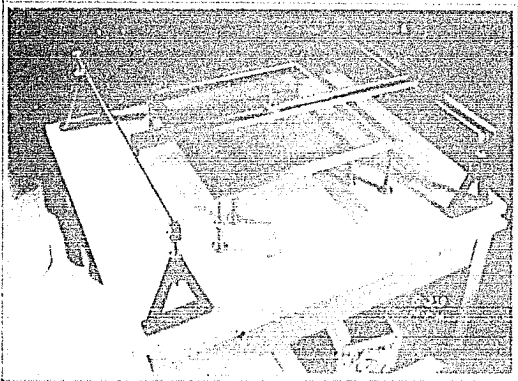


Fig. 3. Machine for processing wool.

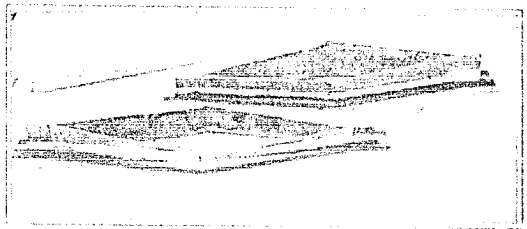


Fig. 4. Machine for processing wool.

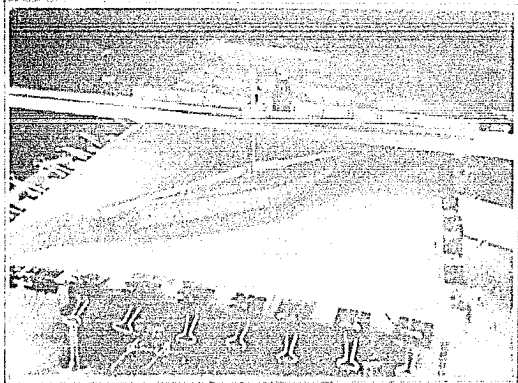


Fig. 5. Machine for processing wool.



Fig. 6. Coat of arms of the factory.

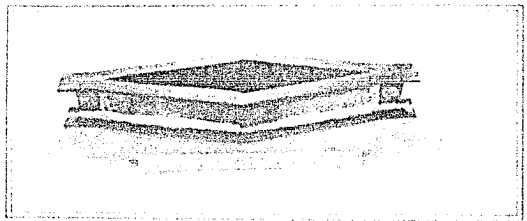


Fig. 7. Machine for processing wool.

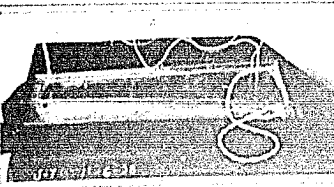


Fig. 8. Machine for processing wool.



Fig. 9. Machine for processing wool.

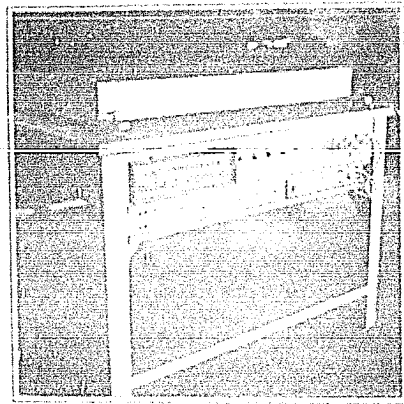
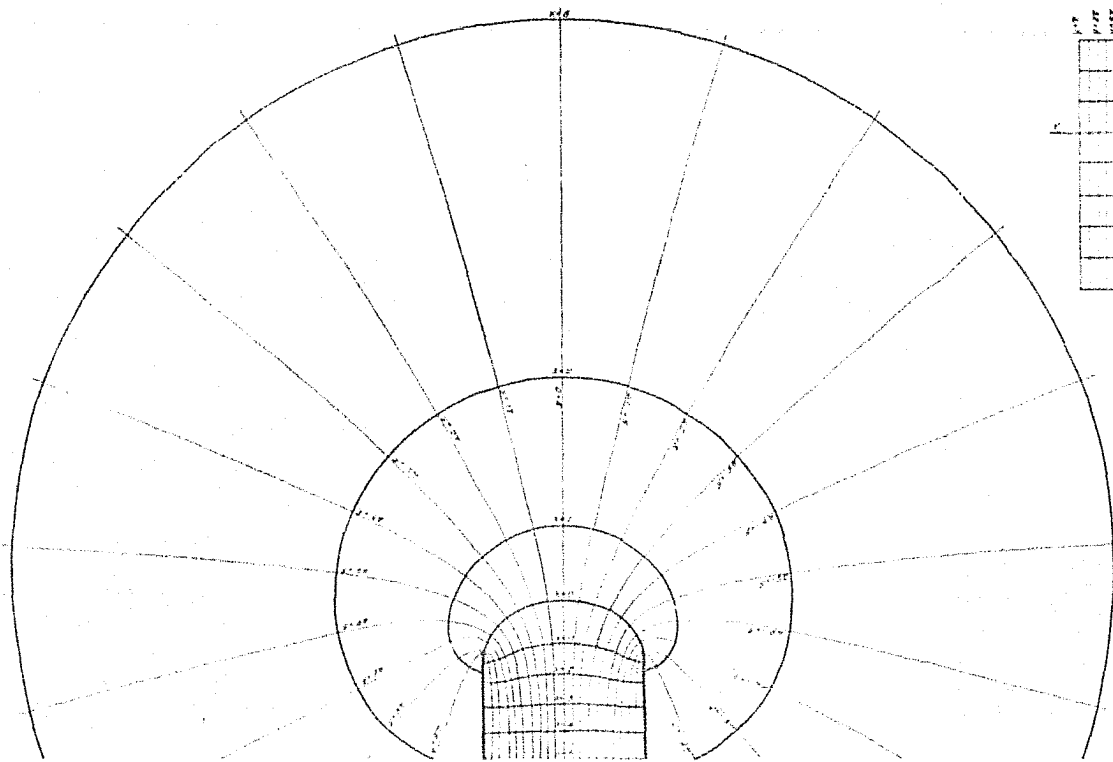


Fig. 10. Machine for processing wool.



1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

PLANO Z

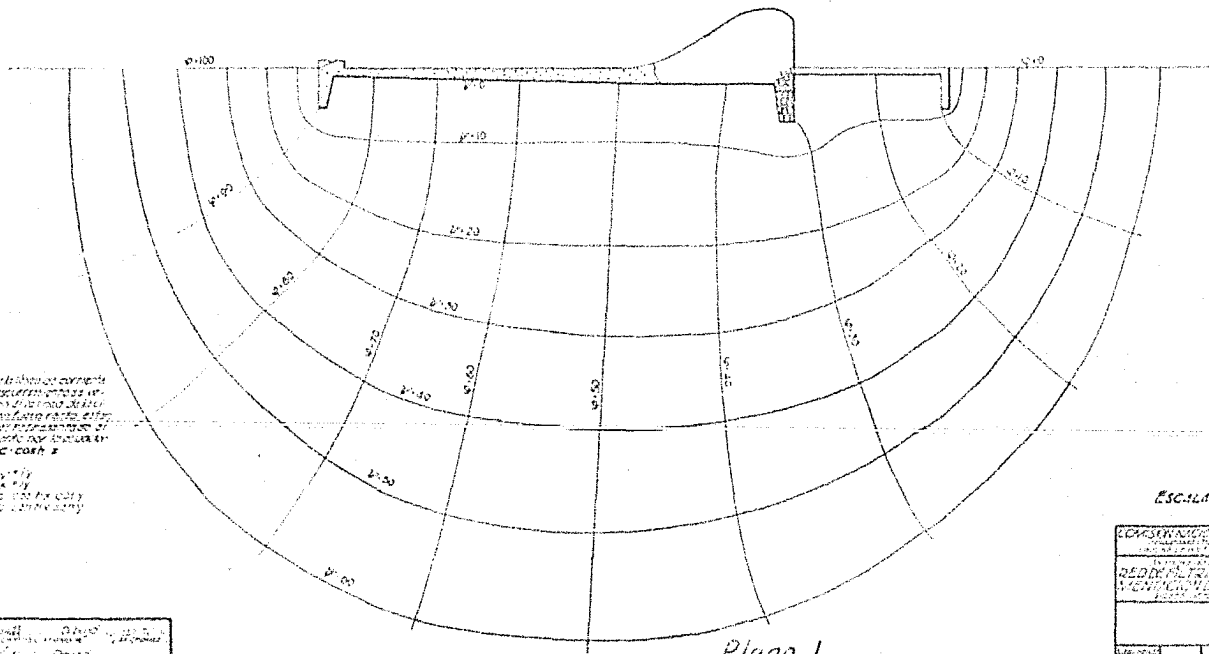
PLANO W  
 TRANSFORMACION CONFORME DEL PLANO Z AL PLANO W MEDIANTE LA FUNCION  $W = Z + c^2$   
 $\bar{w} = x + c^2 \cos y$   
 $\bar{v} = y + c^2 \operatorname{sen} y$

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION  
 DEPARTAMENTO DE INGENIERIA  
 OFICINA GENERAL DE INGENIERIA  
 RED DE FLUJO A LA ENTRADA DE UN  
 CANAL DESDE UN VASO DE DIMENSIONES  
 ILIMITADAS

Fig. 22

Comandante en Jefe: General [illegible]  
 Jefe de Oficina: [illegible]  
 Jefe de Sección: [illegible]

RF-1



Mapa de transformacion conforme  
 de un plano a otro por medio de la  
 funcion  $W = c^2 \cos z$   
 $w = x + iy$   
 $z = u + iv$   
 $w = c^2 \cos z$   
 $u = c^2 \cos x - c^2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$   
 $v = c^2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Escala 1:100

COMISION NACIONAL DE IRRIGACION  
 DEPARTAMENTO DE INGENIERIA  
 OFICINA GENERAL DE INGENIERIA  
 RED DE FLUJO A LA ENTRADA DE UN  
 CANAL DESDE UN VASO DE DIMENSIONES  
 ILIMITADAS

Plano 1

Comandante en Jefe: General [illegible]  
 Jefe de Oficina: [illegible]  
 Jefe de Sección: [illegible]

RF-1