



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COSMOGRAFÍA PARA MODELOS DE GRAVEDAD
MODIFICADA $F(R)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ALAN NICOLÁS ORTEGA

TUTOR

DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno:

Nicolás
Ortega
Alan
55 84 97 16 45
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
309127565

2.Datos del tutor:

Dra. Celia del Carmen
Escamilla
Rivera

3.Datos del sinodal 1:

Dr. Hernando
Quevedo
Cubillos

4.Datos del sinodal 2:

Dr. Ángel
Sánchez
Cecilio

5.Datos del sinodal 3:

Dr. Sergio
Mendoza
Ramos

6.Datos del sinodal 4:

Dr. José Octavio
Valenzuela
Tijerino

7.Datos del trabajo escrito:

Cosmografía para modelos de gravedad modificada $f(R)$
59 p.
2023

Dedico esta tesis a mis padres, que siempre me apoyaron y confiaron en mi, aunque tardara un poco más de lo planeado.

A Tito, que siempre estuvo molestando.

A mi universidad y a mi facultad, que se convirtió en un segundo hogar por mucho tiempo y me enseñó tanto.

A mis amigos, Diana, Luis, Iván, Miguel, Nacho, Jorge, Aurora, Itzel, Andrés y Antonio, que durante todo el trayecto me acompañaron, aconsejaron e hicieron de este un mejor viaje. Y por supuesto, a Ingrid, por esto y mucho más.

A mi tutora, Celia, por su apoyo, paciencia y guía.

Resumen

El objetivo de este trabajo fue estudiar tres modelos de gravedad tipo $f(R)$ viables a nivel cosmológico y que satisfacen las constricciones a nivel sistema solar, el modelo de Hu-Sawicki, el modelo de Starobinsky y el modelo Exponencial, el estudio se hizo a nivel cosmográfico y en comparación con el modelo cosmológico estandar.

Para esto, se partió con un breve desarrollo de la relatividad general y una muestra del panorama actual del modelo Λ CDM, haciendo énfasis en los problemas ligados al sector oscuro. Como alternativa, se planteó el estudio de las teorías de gravedad modificada tipo $f(R)$, enfocado en tres modelos específicos, con su respectivo desarrollo cosmográfico. La conexión entre la cosmografía y los modelos $f(R)$ se hizo mediante una parametrización de ecuación de estado de tipo geométrico, la parametrización JJE.

Los resultados obtenidos muestran que solo los modelos de Hu-Sawicki y Exponencial logran reproducir la aceleración cósmica observada actualmente, y de estos, solo hu-Sawicki se aproximó a la cosmografía de Λ CDM. Estos resultados podrían proporcionar una metodología para encontrar constricciones de cantidades cinemáticas asociadas directamente con cotas observacionales dinámicas.

Igualmente, se podrán explorar desviaciones del modelo cosmológico estandar a corrimientos al rojo altos, lo cual sería un indicador para poder identificar si modelos cosmológicos derivados de teorías $f(R)$ lograrían explicar regiones en el universo donde Λ CDM tiene problemas con su restricción.

Índice general

Resumen	III
1. Introducción	1
2. Relatividad General	3
2.1. El Principio de Equivalencia	3
2.2. Formulación de la Relatividad General	5
2.2.1. Ecuaciones de Einstein	7
2.3. Exitos y Perspectivas de la Relatividad General	9
3. Cosmología Estándar	10
3.1. Universo en Expansión	10
3.2. Principio Cosmológico y la métrica de FLRW	12
3.3. Ecuaciones de Friedmann	13
3.4. Modelo Cosmológico Estándar	19
3.5. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar	21
3.6. Cosmografía	22
4. Gravedad Modificada	25
4.1. Teorema de Lovelock	25
4.2. Gravedad tipo $f(R)$	27
4.2.1. Ecuaciones de campo para $f(R)$	27
4.3. Modelos en Gravedad tipo $f(R)$	31
4.3.1. Modelo de Hu-Sawicki.	32
4.3.2. Modelo de Starobinsky.	32
4.3.3. Modelo Exponencial.	33
5. Análisis de la Cosmografía de $f(R)$	34
5.1. Ecuación de Estado para Gravedad Modificada	34
5.2. Resultados: Análisis cosmográfico de $f(R)$	36
6. Conclusiones	43
Apéndice A. Notación Tensorial	46
Bibliografía	54

1 Introducción

La comprensión de la gravedad ha sido un desafío fundamental en el ámbito de la física desde los tiempos de Newton. La teoría de la gravedad de Einstein, la Relatividad General, ha demostrado ser una descripción excepcionalmente precisa de la gravitación a escalas cosmológicas y en el sistema solar [1] [2]. Sin embargo, a medida que se han realizado observaciones más detalladas y se han explorado fenómenos a escalas más pequeñas, han surgido discrepancias y desafíos que plantean interrogantes sobre la validez completa de la Relatividad General en todas las escalas.

Algunos de los problemas de la Relatividad General surgen en el ámbito cosmológico, ya que esta teoría no logra explicar algunos fenómenos como la expansión acelerada actual del universo, la rotación de las galaxias o la formación de estructuras. Para intentar explicar estos problemas se proponen dos entidades físicas, la energía oscura y la materia oscura, el problema con estas dos cantidades es que se desconoce su naturaleza [3].

La gravedad modificada ha surgido como un enfoque prometedor para abordar estos problemas. Una de las clases más estudiadas de teorías de gravedad modificada es la gravedad tipo $f(R)$, en la cual se propone una modificación en las ecuaciones de campo de Einstein al reemplazar el escalar de curvatura R por una función arbitraria $f(R)$. Estas teorías han atraído la atención de la comunidad científica debido a su capacidad para explicar fenómenos observacionales, como la expansión acelerada del universo temprano, así como la expansión actual, esto, sin necesidad de recurrir a la introducción de energía y materia oscura [4].

Dentro de los modelos de gravedad $f(R)$, el modelo de Starobinsky ha demostrado ser altamente influyente [5]. Este modelo presenta una función $f(R)$ específica que genera una acción gravitatoria que contiene un término adicional cuadrático en el escalar de curvatura R . Este término adicional da lugar a una expansión cósmica inflacionaria temprana en el universo primordial, resolviendo así problemas cosmológicos fundamentales.

Además, el modelo de Hu-Sawicki [6], ha ganado prominencia en el estudio de la gravedad $f(R)$. Este modelo utiliza una función $f(R)$ diferente que reproduce la expansión acelerada del universo observada sin la necesidad de introducir la energía oscura adicional. El modelo de Hu-Sawicki ha demostrado ser consistente con diversas

observaciones cosmológicas y ha proporcionado valiosas perspectivas en la comprensión de la estructura a gran escala del universo.

Otro modelo importante dentro del contexto de la gravedad tipo $f(R)$ es el modelo Exponencial [7]. En este modelo, la función $f(R)$ incluye un término exponencial que modifica las ecuaciones de campo. Esta elección particular de $f(R)$ permite generar una expansión acelerada del universo sin la necesidad de invocar la energía oscura. El modelo exponencial ha sido estudiado en detalle y ha demostrado ser prometedor en la explicación de fenómenos cosmológicos y astrofísicos.

Dadas las contribuciones a nivel cosmológico realizadas por este tipo de modelos $f(R)$, el objetivo de este trabajo de investigación es explorar a fondo la teoría de la gravedad $f(R)$ y examinar los modelos de Starobinsky, Hu-Sawicki y el modelo exponencial en relación con las observaciones cosmológicas y astrofísicas. Además, se utilizará la cosmografía como herramienta para limitar y evaluar la validez de estos modelos. La cosmografía, que se basa en mediciones precisas de la geometría y la dinámica del universo a diferentes escalas, proporciona una forma poderosa de poner a prueba las teorías de gravedad modificada y establecer límites en los parámetros de los modelos $f(R)$.

Mediante el análisis detallado de los modelos de gravedad $f(R)$ mencionados y la comparación con las observaciones cosmológicas, este trabajo contribuirá a nuestro entendimiento de la validez y la viabilidad de la gravedad $f(R)$ como una alternativa a la Relatividad General. Además, se espera que los resultados obtenidos aporten información valiosa para la comprensión de los límites característicos de cada modelo cosmológico derivado de teorías viables tipo $f(R)$ y así lograr constricciones cosmológicas en base a futuras observables.

2 Relatividad General

A una escala local, galáctica o incluso en todo el universo, la interacción dominante es la gravitacional, por lo que resulta adecuado utilizar la Relatividad General (RG) para el estudio de la Cosmología. La Relatividad General surge como una generalización de la Relatividad Especial (RE) con el objetivo de incluir a todos los sistemas de referencia, tanto los inerciales como los no inerciales [2] [8] [9] [10].

La Relatividad Especial fue publicada en 1905, cuando Albert Einstein postuló que: i) la velocidad de luz era constante para todos los sistemas de referencia inerciales y que ii) en estos mismos sistemas, las leyes de la física serían iguales.

De estos postulados surgió una nueva forma de entender al espacio y al tiempo, ya que para satisfacer la invariancia de la velocidad de la luz, el espacio y el tiempo perderían su carácter absoluto, y más aún, ahora ambas ideas formarían parte de una sola entidad absoluta, el espacio-tiempo. Estas ideas se desarrollan matemáticamente con las transformaciones de Lorentz, que nos permiten describir la física entre dos sistemas de referencia inerciales, notemos que, gracias al segundo postulado, ninguno de los dos sistemas, ni algún otro sistema inercial, será privilegiado respecto a los demás. La nueva teoría cosechó algunos éxitos, como la explicación a los resultados del experimento de Michaelson y Morley, y probar la invariancia de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, se encontraba restringida a los sistemas de referencia inerciales y se deseaba incluir a los sistemas acelerados y a la gravedad.

Después de 10 años, Einstein encontró la forma de generalizar su primer teoría, utilizando, según sus palabras, "la idea más feliz de su vida"¹.

2.1. El Principio de Equivalencia

Cuando Galileo se encontraba realizando sus experimentos y formulando sus teorías sobre el movimiento y la caída de los cuerpos, concluyó que dos masas, no necesariamente iguales, soltadas desde la misma altura, llegarían al suelo en el mismo instante. Este resultado parece ir un poco en contra de nuestra intuición y en su tiempo, en contra de las dominantes ideas de Aristóteles, sin embargo, desembocó en lo que hoy conocemos como principio de equivalencia débil, idea que después de ser madurada en la mente de Einstein dió como fruto la relatividad general.

¹<https://www.cyd.conacyt.gob.mx/?p=articuloid=35>

De acuerdo a su desarrollo, podemos enunciar tres principios de equivalencia [4] [11]:

Principio de Equivalencia Débil: Toda partícula de prueba, sin carga y en caída libre sigue la misma trayectoria una vez fijadas las condiciones iniciales (el movimiento de las partículas en caída libre es universal).

O visto de otra manera [12]: La masa inercial y la masa gravitacional son siempre iguales.

Aquí, la masa inercial (m_i) hace referencia a la masa vista como una oposición al movimiento y una constante de proporcionalidad que iguala a la fuerza con la aceleración (segunda ley de Newton), y la masa gravitacional (m_g), es la responsable de que aparezca una fuerza de atracción entre dos cuerpos que la posean (ley de gravitación universal). Razón que nos lleva de nuevo a Galileo y el porqué una pluma y una roca, soltadas desde la misma altura caen con la misma rapidez, la pluma con poca m_i , es fácilmente acelerada, sin embargo, su m_g también es baja, así que la fuerza gravitacional entre la tierra y la pluma será poca, o al menos, menor que la fuerza entre la tierra y la roca, que tiene una m_g mayor que la de la pluma, pero por esto mismo, su m_i será mayor (respecto a la pluma) y costará más acelerarla. Como consecuencia de este principio, habrá un balance y la aceleración experimentada por la roca y la pluma será la misma.

Podemos interpretar este principio de una manera que resultará más provechosa y nos guiará a una versión más completa, veámoslo desde otro ángulo. Imaginemos un experimento con dos personas, cada una dentro de una caja completamente cerrada y sin ninguna forma de saber que pasa en el exterior. La primera caja se dejará simplemente en la superficie de la tierra, pero la segunda se encontrará en el espacio, fuera de cualquier interacción gravitacional apreciable y moviéndose con una aceleración igual a la experimentada en la superficie terrestre, además, ninguno de los dos participantes del experimento sabe dentro de cuál caja se encuentra. Ya en el interior, cada una de las personas tendrá una manzana en la mano y procederá a soltarla, sorprendentemente los dos objetos experimentarán la misma trayectoria, caerán al suelo de la caja. Tenemos el mismo resultado para dos escenarios aparentemente distintos, una consecuencia de la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria.

Principio de Equivalencia de Einstein: El principio de equivalencia débil es correcto y además, en cualquier sistema de referencia en caída libre se debe recobrar, localmente, la Relatividad Especial, independientemente de la posición o velocidad.

Este resultado es la primera extensión realizada por Einstein al principio de equivalencia, para ejemplificarlo retomaremos nuestro experimento con cajas [12], la diferencia es que ahora nuestros participantes tendrán dos manzanas, una en cada mano. Al soltarlas, el observador dentro de la caja en tierra notará que las manzanas caen,

pero se acercan ligeramente entre ellas, ya que sus trayectorias no son paralelas (apuntan al centro de la tierra), el de la caja acelerada en el espacio también nota que caen, pero estas sí lo hacen de forma paralela. Aquí ya apreciamos una diferencia en los dos casos, razón por la que el principio se estipula para experimentos no gravitacionales (relatividad especial).

Principio de Equivalencia Fuerte: El principio de equivalencia débil es correcto incluso para objetos muy masivos, no necesariamente partículas de prueba, y además, en cualquier sistema en caída libre se debe recobrar, localmente, la Relatividad Especial, independientemente de la posición o velocidad.

Podemos considerar al principio de equivalencia fuerte como la idea genial que le permitió a Einstein construir su teoría de la gravedad, estableciendo condiciones para la igualdad entre experimentos gravitacionales y no gravitacionales.

Esto cambió por completo la forma en la que se entendía el origen de la aceleración de los objetos en caída libre, pasó de una fuerza a atracción al de deformación. Esta deformación o curvatura del espacio-tiempo guiará a la materia por trayectorias geodésicas, o en palabras de Wheeler: La materia le dice al espacio como curvarse y el espacio le dice a la materia como moverse.

Con el principio de equivalencia se tenía la idea fundamental para generalizar la relatividad especial, pero aún era necesario el formalismo matemático que sustentara la teoría.

2.2. Formulación de la Relatividad General

En esta sección se enunciarán los postulados y conceptos geométricos útiles para la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein, sin embargo, para un desarrollo más formal de esta sección, en el apéndice A encontramos los conceptos matemáticos necesarios.

Para comenzar, se necesita una descripción del espacio-tiempo [13] [14], con lo que se postula:

Postulado 1. El espacio-tiempo se encuentra descrito por (\mathcal{M}, g) , donde \mathcal{M} es una variedad 4-dimensional y g una métrica Lorentziana sobre \mathcal{M} .

Como la gravedad está relacionada con la curvatura del espacio-tiempo, nos resultará conveniente introducir una entidad matemática que nos permita describir la curvatura de la variedad, esta entidad es el tensor de Riemann, que en función de sus componentes queda descrito por ²:

²Los índices griegos tomarán los valores 0,1,2,3 y se utilizarán para denotar tanto a la coordenada temporal (0) como a las tres coordenadas espaciales (1,2,3).

$$R_{\alpha\mu\nu}^{\beta} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}, \quad (2.1)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ son los llamados simbolos de Christoffel y juegan el papel de la conexión. Y quedan definidos de la siguiente forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \quad (2.2)$$

con $g_{\mu\nu}$ las componentes del tensor métrico. A partir del tensor de Riemann se definirá el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}, \quad (2.3)$$

y a su vez, con ayuda del tensor métrico, podemos contraer los índices del tensor de Ricci para definir el escalar de Ricci o escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Un punto importante para la formulación de la teoría es que el espacio (o matemáticamente, una variedad, ver definición 14 del apéndice), debe ser libre de torsión, resultado del siguiente teorema:

Teorema 1 (Teorema Fundamnetal de la Geometría Riemanniana). Dada una variedad Riemanniana (\mathcal{M}, g) , existe una única conexión simétrica $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ que es compatible con la métrica g , la conexión de Levi-Civita.

La relación entre la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ definida en 2.2 y la métrica g se dará al imponer que la derivada covariante de la métrica sea nula

$$\nabla_{\gamma}g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.5)$$

donde la derivada covariante se define de la siguiente forma

$$\nabla_{\gamma}T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \partial_{\gamma}T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha_1}T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\sigma, \dots, \alpha_r} + \dots + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha_r}T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \sigma} - \Gamma_{\gamma\beta_1}^{\sigma}T_{\sigma, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} - \dots - \Gamma_{\gamma\beta_s}^{\sigma}T_{\beta_1, \dots, \sigma}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}. \quad (2.6)$$

Existe tambien un postulado fundamental sobre la conservación de la energía.

Postulado 2. Existe un tensor métrico $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi) = T_{\nu\mu}$, que es función de los campos de materia ϕ y sus derivadas tal que:

$$1. T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{sobre } \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \iff \phi_i = 0 \quad \text{para todo } i \quad \text{sobre } \mathcal{U}. \quad (2.7)$$

$$2. \nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Como último postulado, se muestran las ecuaciones de campo, las cuales nos relacionan la curvatura del espacio-tiempo, con el contenido de materia-energía en él.

Postulado 3. La métrica sobre la variedad llamada espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura (definidos previamente), $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento y $\kappa = 8\pi G/c^4$, con G la constante de gravitación y c , la velocidad de la luz, podemos reducir la constante κ usando unidades naturales, es decir, $G = 1$ y $c = 1$, obteniendo así $\kappa = 8\pi$.

Con esto podemos definir al tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

En la ecuación 2.9 notamos que de lado izquierdo de la igualdad tenemos información geométrica de la variedad (espacio-tiempo), y del lado derecho aparece el contenido de materia-energía que deforma dicho espacio, pero a su vez, ese espacio dictará la forma de moverse de la materia a través de él. Este movimiento es descrito por su trayectoria, denotada como $x^\alpha(\lambda)$, con λ un parámetro. Por ejemplo, en una partícula donde no se ejerce una fuerza, esta va a obedecer la ecuación de una geodésica

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.11)$$

expresión que será válida tanto para partículas con masa, como sin masa.

2.2.1. Ecuaciones de Einstein

En este apartado se deducen las ecuaciones de campo de Einstein desde un punto de vista más general y formal, aplicando el principio variacional y partiendo desde la acción de Einstein-Hilbert (E-H) [2].

Definimos la acción de Einstein-Hilbert (sin constante cosmológica) como:

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) - \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (2.12)$$

recordemos que $\kappa = 8\pi$, dada en unidades naturales, g es el determinante de la métrica, $R_{\alpha\beta}$ el escalar de Ricci y $g^{\alpha\beta}$ el inverso del tensor métrico. En el segundo término del lado derecho de la igualdad aparece la densidad Lagrangiana asociada al componente materia-energía del sistema, denotada por \mathcal{L}_M .

Para obtener las ecuaciones de movimiento debemos extremizar la acción (principio variacional), es decir $\delta S = 0$. Al realizarlo sobre la acción de E-H:

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} R + \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (2.13)$$

donde

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.14)$$

Para simplificar la expresión 2.13, recurrimos al siguiente par de resultados:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{g g^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2.15)$$

y

$$\delta(g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}) = \delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} = 0, \quad (2.16)$$

$$\delta g^{\alpha\eta} = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\eta} \implies \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}. \quad (2.17)$$

Al aplicarlos en 2.13, obtenemos:

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0. \quad (2.18)$$

La variación que nos hace falta es la del tensor de Ricci (en el segundo término), antes de calcularlo debemos expresarlo como en la definición 2.3, es decir, en términos del tensor de Riemann 2.1:

$$\frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = \left(\frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\gamma} - \frac{\delta \Gamma_{\eta\beta}^{\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\eta\beta}^{\gamma} \frac{\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}}{\delta g_{\mu\nu}} - \left(\frac{\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\beta} + \frac{\delta \Gamma_{\eta\gamma}^{\alpha}}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} + \Gamma_{\eta\gamma}^{\alpha} \frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.19)$$

y donde

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta;\gamma}^{\gamma} = \delta \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} + \Gamma_{\eta\gamma}^{\gamma} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \delta \Gamma_{\alpha\eta}^{\gamma}, \quad (2.20)$$

$$\delta \Gamma_{\alpha\gamma;\beta}^{\gamma} = \delta \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\eta\beta}^{\gamma} \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \delta \Gamma_{\eta\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \delta \Gamma_{\alpha\eta}^{\gamma}. \quad (2.21)$$

Ahora, al conmutar la derivada covariante con la métrica

$$g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta;\gamma}^{\gamma} = D_{\gamma}(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}) = D_{\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \right). \quad (2.22)$$

Aplicamos esto en 2.21 y combinado con 2.19, obteniendo

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} &= D_{\gamma}(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}) - D_{\beta}(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}) \\ &= D_{\gamma}(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - g^{\alpha\gamma} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Este resultado nos dice que el tercer término en 2.18 es nulo. Como ultimo paso, debemos observar que para que la variación de la acción 2.18 sea cero, se debe cumplir

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

que son las ecuaciones de Einstein 2.9 y donde $T^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M$.

2.3. Exitos y Perspectivas de la Relatividad General

Toda teoría científica debe ser capaz de describir fenómenos aún no observados en la naturaleza o incluso aclarar algunos que con las teorías previas parecían incongruentes o inexplicables, y la Relatividad General no es la excepción.

Dentro de sus primeros éxitos encontramos la explicación del perihelio de Mercurio [15], la gravitación universal newtoniana predecía que la órbita de Mercurio debía variar 532 segundos de arco por siglo, contrario a los 575 segundos de arco por siglo dichos por las observaciones. Al utilizar la relatividad general, Einstein logró conciliar estos valores, encontrando los 43 segundos de arco por siglo faltantes a la teoría.

El siguiente éxito ocurrió cuando se intentó probar la teoría, tratando de observar un fenómeno que atacaría una de las ideas fundamentales y novedosas, la curvatura del espacio (espacio-tiempo) en presencia de materia (materia-energía). Los astrónomos ingleses Dyson y Eddington sabían que en 1919 habría un eclipse solar visible desde Africa, el objetivo era observar las estrellas cercanas al sol en el momento de máxima oscuridad para que su luz no las opaque. Desde la isla de Principe observaron y encontraron que la posición de las estrellas estaba ligeramente desplazada respecto a la posición que debían tener en ese momento, esto indicaba que la luz proveniente de esas estrellas seguía una trayectoria distinta a la habitual al pasar cerca del sol, demostrando así que bajo la presencia de materia, el espacio se curvará [16].

Al compararla con la gravitación newtoniana, la nueva teoría no sólo nos dió una descripción más precisa de los movimientos causados por la gravedad, si no que nos proporcionó el mecanismo que da origen a la interacción misma, la cual perdió el apelativo de fuerza y se definió como una consecuencia de la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de materia y energía, deformación que servirá de guía para el movimiento de los cuerpos.

A pesar de este y otros éxitos cosechados por la teoría como la predicción y posterior detección de ondas gravitacionales y objetos astrofísicos como agujeros negros, la relatividad general tiene el problema de ser incompatible a la hora de intentar describir un campo gravitacional en la mecánica cuántica, y este es un gran problema ya que son las dos teorías mas importantes en la física moderna y fallan al explicar el mismo fenómeno, por este motivo, la teoría se puede denominar cuando menos incompleta. Actualmente existen varios caminos que intentan solucionar el problema de cuantizar la gravedad, sin embargo no se tiene por el momento la evidencia experimental u observacional que apoye fuertemente a alguno de los contendientes.

Un problema más a la teoría surge en el ambito cosmológico, pero este será desarrollado en el siguiente capítulo y nos llevará a proponer alternativas para extender o, en nuestro caso, modificar las ecuaciones de campo de Einstein.

3 Cosmología Estándar

3.1. Universo en Expansión

Las ecuaciones de campo de Einstein, al explicar y describir los fenómenos del tipo gravitacional, permitieron estudiar las trayectorias de cuerpos celestes con una precisión que no se tenía con la teoría de Newton, se predijeron regiones del espacio donde el campo gravitacional fuera tan intenso que ni la luz podría escapar de él y dotaron a una disciplina como la cosmología con una base matemática muy poderosa que culminó con el nacimiento de modelos descriptivos del origen, evolución y posibles finales del universo.

A principios del siglo XX, el astrónomo estadounidense, Edwin Hubble, al observar algunas galaxias encontró que estas presentaban cierto corrimiento al rojo, es decir, se están alejando de nosotros y de esto dedujo que el universo se encuentra en expansión [17], y no solo eso, también encontró que existe una relación lineal entre la distancia y el corrimiento al rojo (figura 3.1), de donde derivó la ley de Hubble-Lemaitre ¹

$$z \approx H_0 d, \tag{3.1}$$

donde z es el corrimiento al rojo, d es la distancia al objeto y H_0 la constante de Hubble, originalmente estimada por Hubble en $H_0 \approx 500 \text{ km/sMpc}$ [12], y como se verá más adelante, experimentos recientes estiman un valor más pequeño para dicha constante.

Este descubrimiento fue un cambio de paradigma en la cosmología, se pasó de un universo estático a uno dinámico, si ahora se tiene un universo en expansión, quiere decir que en el pasado era más pequeño, y quizá tuvo un origen en una región del espacio infinitamente pequeña, caliente y densa, para posteriormente expandirse y convertirse en el universo que observamos, a esto se le conoce como teoría del Big Bang o de la Gran Explosión.

Este modelo nos permite contar una breve historia del universo, a la que dividiremos en tres etapas. La primera, que va de $t = 0$ a $t \approx 10^{-10} \text{ s}$, aún se mantiene casi completamente desconocida y es la que actualmente presenta mayor interés y es

¹En la actualidad se le denomina así porque se encontraron escritos que demuestran que el sacerdote y astrónomo belga, Georges Lemaitre, había descubierto la expansión del universo un par de años antes de la publicación de Hubble.

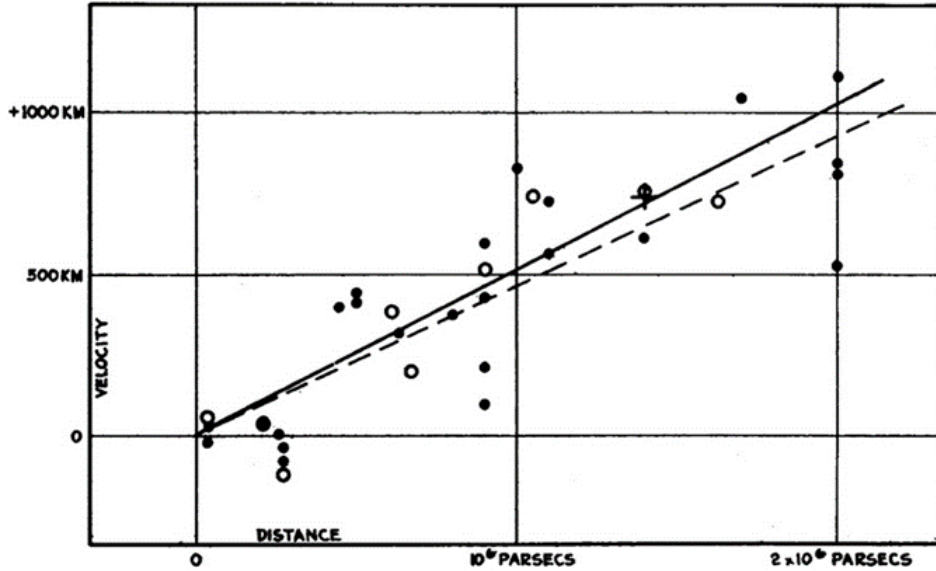


Figura 3.1: Diagrama original de Hubble de la relación velocidad-distancia, publicado en 1929 [17].

la más activa en investigación. Se cree, que en tiempos menores al tiempo de Planck $t = 10^{-43} s$ había una armonía entre la relatividad general y la mecánica cuántica. De este periodo hasta $t = 10^{-36} s$, probablemente las cuatro interacciones básicas de la naturaleza (interacciones nucleares fuerte y débil, interacción electromagnética e interacción gravitacional) se comportaban como una sola. Para $t = 10^{-34} s$, la presencia del campo del inflatón se volvió importante y generó una expansión exponencial en las dimensiones del universo, se estima que en solo $10^{32} s$ se expandió 10^{26} veces su tamaño previo, este periodo es conocido como fase inflacionaria. Posterior a la expansión, toda la energía acumulada en este periodo de liberó en forma de radiación altamente energética, lo que elevó la temperatura del universo hasta aproximadamente $10^{26} K$, a esto se le denominó el recalentamiento. Después de la infación, el universo, aunque más lentamente, continuó su expansión, provocando su enfriamiento, es este periodo dominaba la radiación antes mencionada. Previo a $t = 10^{-10} s$, ocurrió un desequilibrio termodinámico más una falta a las conservaciones de la carga eléctrica, materia y paridad, ocasionando un dominio de la materia sobre la antimateria, a esto se le conoce como bariogénesis.

Situada entre $t = 10^{-10} s$ y $t \approx 200 s$, tenemos la segunda etapa, aquí el dominio fue de la radiación (generada por partículas ultrarrelativistas). La bariogénesis dió origen a todo un conjunto de partículas sin masa, sin embargo, cuando la temperatura disminuyó ($10^{15} K$), se activó el llamado mecanismo de Higgs, dándole las masas que conocemos a todas las partículas elementales. A los $10^{-4} s$ después de la gran explosión, la temperatura ya era de $10^{12} K$, condiciones que permitieron la combinación de los quarks para formar hadrones. Para $t = 1 s$ ya había suficiente distancia entre las partículas, lo que dejó libres a los neutrinos. De este punto, al final de la segunda etapa, ocurrió la nucleosíntesis, es decir, se formaron los núcleos de los elementos más

ligeros, recordemos que ya existe el protón y el neutrón (hadrones), y que a su vez generaron una radiación que dominó los primeros 10,000 años.

Una vez pasaron esos 10,000 años dio inicio la tercera etapa, la cual se extiende hasta nuestros días, aproximadamente en $t = 13.7 \times 10^9$ años y que conocemos mucho mejor gracias a todas las observaciones. Al inicio de este periodo, la cantidad de materia había aumentado y la temperatura de la radiación había disminuido ($10^4 K$), alcanzando así el llamado equilibrio materia-radiación, desde este punto, el dominio de la materia llegó, provocando un ligero aumento en la velocidad de expansión del universo. A los 380,000 años, se alcanzó un punto clave y que hoy en día es fundamental para las investigaciones, la recombinación. En aquel momento se formaron los primeros átomos de hidrógeno, la materia ya era eléctricamente neutra y los fotones pudieron viajar libremente, esta radiación es llamada radiación cósmica de fondo, en inglés, Cosmic Microwave Background Radiation, abreviada como CMBR, o simplemente CMB. La importancia de esta radiación es que esta compuesta de los fotones más antiguos que se pueden detectar. Aunque existía ya esta radiación, no fue hasta 150×10^6 años después que mediante la acumulación de hidrógeno por interacciones gravitacionales aparecieron fuentes de luz, las primeras estrellas, motivo por el que a este intervalo de tiempo se le conoce como época oscura. Cuando el universo ya tenía una edad de 10^9 años, las estrellas se concentraron en galaxias. Y cuando tenía aproximadamente la mitad de la edad que tiene actualmente, la densidad de materia disminuyó a tal grado que un nuevo componente comenzó a dominar, y que está acelerando la expansión del universo, la llamada energía oscura [2] [18] [19].

3.2. Principio Cosmológico y la métrica de FLRW

En algunas investigaciones como [20], se ha observado que a partir de ciertas escalas, la materia (galaxias) se distribuye en estructuras con forma de filamento que forman una especie de red, tal como se muestra en la figura 3.2².

Basándonos en evidencias observaciones [21] podemos decir que a grandes escalas³, el universo es homogéneo e isótropo, la homogeneidad nos dice que cualquiera dos puntos del universo lucen de la misma manera y tienen las mismas propiedades y la isotropía nos indica que el universo tiene las mismas propiedades sin importar la dirección en que se esté observando, a estas condiciones es a lo que se conoce como el principio cosmológico.

La cosmología estándar supone al principio cosmológico como verdadero y lo toma como punto de partida, derivando directamente en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), con un elemento de línea dado por:

²<https://mapoftheuniverse.net/>

³Definimos la gran escala del universo a escalas mayores de 100 Mpc.

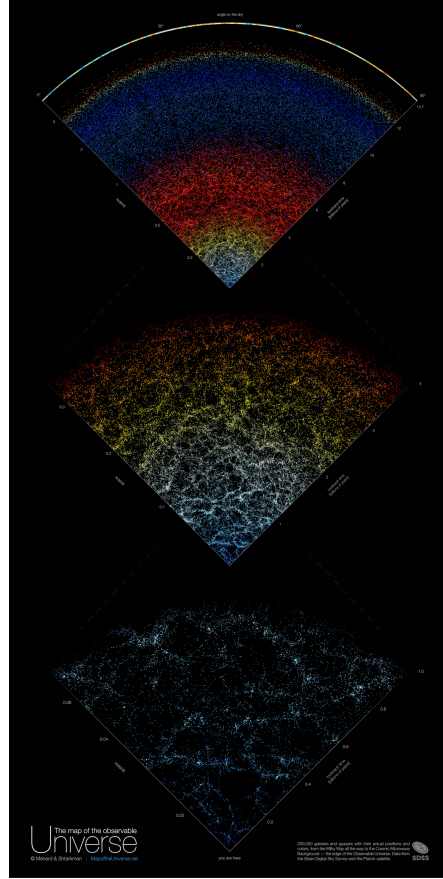


Figura 3.2: Estructura del universo observable a distintas escalas. De arriba hacia abajo: Corrimiento al rojo de 0 a 5, de 0 a 0.3 y de 0 a 0.06, imagen tomada de "The Map of the Observable Universe".

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (3.2)$$

con r, θ, ϕ las coordenadas esféricas comóviles. Notemos que la métrica depende solamente de la curvatura del espacio k y del factor de escala $a(t)$, y que a su vez, este depende del tiempo cosmológico. La constante k puede tomar tres valores, $k = 0$ para una geometría del universo plana, $k = -1$ para una geometría hiperbólica, dando un universo abierto y $k = 1$ para una geometría esférica y un universo cerrado. Podemos ver en la figura 3.3 la evolución del factor de escala respecto al tiempo, considerando los tres tipos de curvatura.

3.3. Ecuaciones de Friedmann

Con la métrica de FLRW podemos obtener la dinámica del universo, sin embargo, falta otro ingrediente importante para poder resolver las ecuaciones de campo de

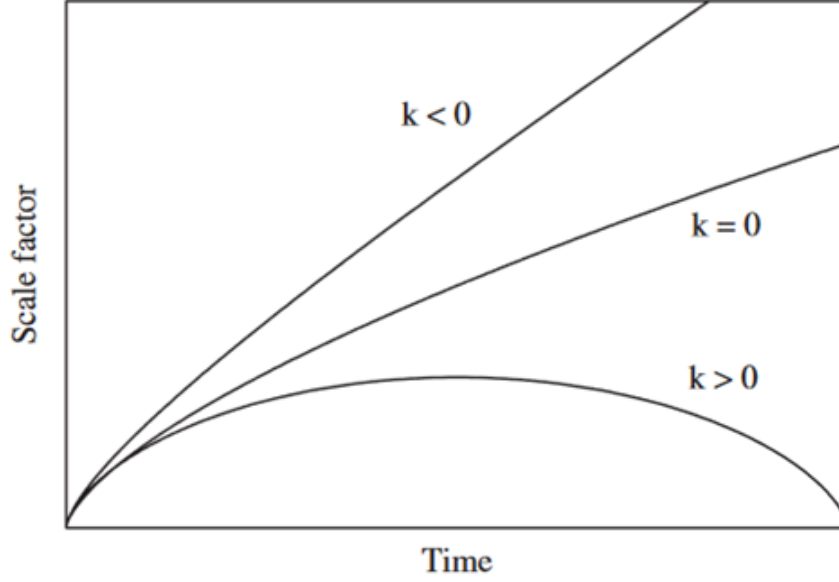


Figura 3.3: Se muestran tres posibles formas en las que puede evolucionar el universo, dependiendo del signo de k . Para $k > 0$ (línea inferior) la curvatura es positiva, lo que nos lleva a un universo cerrado, en este la expansión se detiene en algún punto para después contraerse. Si $k = 0$ (línea central), tenemos un universo plano y para $k < 0$ (línea superior) la curvatura será negativa, esto implica un universo abierto, en estos últimos dos casos la expansión no se detiene. Figura tomada de [22].

Einstein 2.9, y es el que conforma el lado derecho de las ecuaciones, que recordemos es la parte física de las mismas, el contenido de materia-energía. Al tener un universo no vacío, se hace la propuesta de modelar al universo como un fluido perfecto ⁴. El tensor de energía-momento asociado al fluido perfecto será

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

con P la presión del fluido, ρ la densidad de energía, ambas cantidades medidas desde un sistema comóvil y U_μ la 4-velocidad, definida como $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$, así, podemos escribir al tensor de energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

la traza será

$$T^\mu{}_\mu = -\rho + 3P, \quad (3.5)$$

y su ecuación de conservación:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \implies \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (3.6)$$

⁴El fluido perfecto es aquel que no tiene viscosidad, presenta la misma densidad en todas partes y es estacionario.

Vamos a definir al parámetro de Hubble, denotado por H , de la siguiente manera $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Podemos reescribir entonces la ecuación 3.6 de la siguiente forma

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (3.7)$$

la cual resulta válida para cualquier componente del universo como la radiación o la materia bariónica ⁵.

Para proceder con el lado izquierdo de las ecuaciones de campo 2.9, necesitamos calcular tanto al tensor de Ricci como al escalar de curvatura, definidos por 2.3 y 2.4, correspondientes a la métrica de FLRW. Tenemos que los componentes no nulos del tensor de Ricci son:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.8)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (3.9)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (3.10)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (3.11)$$

con los que podemos obtener el escalar de curvatura:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (3.12)$$

Para resolver las ecuaciones de Einstein tomaremos dos casos, lo que nos llevará a un sistema de dos ecuaciones. El primer caso corresponde al del componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$, que llamaremos componente temporal, obteniendo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P), \quad (3.13)$$

también conocida como ecuación de aceleración.

El segundo caso es para las componentes $(\mu, \nu) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$, que llamaremos componentes espaciales, resultando en:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi(\rho - P), \quad (3.14)$$

combinando estas últimas dos expresiones obtenemos:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho - P) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.15)$$

Al par de ecuaciones 3.15 y 3.13 son a las que denominaremos como ecuaciones de Friedmann. Y estas ecuaciones nos serán de utilidad para describir la dinámica

⁵La materia llamada bariónica es la constituida por bariones (los quarks que forman al protón y al neutrón) y leptones (específicamente electrones)

del universo a escalas donde sea válido el principio cosmológico. El problema con este sistema de ecuaciones es que tenemos solo dos ecuaciones independientes, y tres variables por determinar $a(t)$, $\rho(t)$ y $P(t)$. Como solución para cerrar el sistema de ecuaciones, se propone una ecuación de estado que nos permite relacionar la presión (P) y la densidad (ρ) (del fluido con el que modelamos al universo), y definida como:

$$\omega = \frac{P}{\rho}. \quad (3.16)$$

Con esta última expresión podemos resolver la ecuación 3.7 y así obtener

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (3.17)$$

con $\rho_0 = \rho(t=0)$, la densidad a tiempo presente.

Con este resultado en un espacio plano, $k=0$, aplicado en las ecuaciones de Friedmann 3.153.13, obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+\omega)}} \implies a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+\omega)} \quad (3.18)$$

Ahora vamos a considerar y analizar algunos fluidos con importancia cosmológica (materia bariónica, radiación y energía oscura), los cuales tienen asociada una ω constante y nos proporcionan una solución directa a la ecuación 3.7 dada por 3.17.

Caso 1. Universo dominado por materia.

Consideraremos únicamente materia no relativista, para aproximarse a un universo lleno de polvo, o a uno dominado por la interacción gravitacional de galaxias, con esto, $P_m = 0$ y a su vez, $\omega = 0$, al aplicarlo en la ecuación de continuidad obtenemos

$$\rho_m(a) = \frac{\rho_{m,0}}{a^3} \rightarrow \rho_m \propto \frac{1}{a^3}, \quad (3.19)$$

podemos sustituir este resultado en la ecuación de Friedmann, además de considerar $k=0$, resultando en

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3a}, \quad (3.20)$$

y que al resolverla obtenemos una expresión para el factor de escala en función del tiempo

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.21)$$

y a la densidad en función del tiempo

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (3.22)$$

Con el valor de $a(t)$ podemos también obtener el parámetro de Hubble

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (3.23)$$

Un universo de este tipo estaría en una expansión eterna pero cada vez más lenta.

Caso 2. Universo dominado por radiación.

Un universo dominado por radiación es similar al caso de nuestro universo temprano. A diferencia del caso anterior, aquí existe una presión de radiación (la energía estaba principalmente en los fotones y otro tipo de partículas relativistas), descrita por

$$P = \frac{\rho c^2}{3}, \quad (3.24)$$

esto nos lleva directamente a que $\omega = \frac{1}{3}$. Con esto, podemos calcular los mismos parámetros que en el caso de materia

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.25)$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}, \quad (3.26)$$

$$H = \frac{1}{2t}, \quad (3.27)$$

que son el factor de escala, la densidad y el parámetro de Hubble. Como en el caso de un universo dominado por materia, tendríamos una expansión cada vez más lenta.

Caso 3. Universo dominado por energía oscura.

Este tercer tipo de componente podemos considerarlo distinto, ya que a diferencia de los primeros, este es un componente que no ha sido detectado. Se propuso para explicar la expansión acelerada del universo actual, aceleración que gracias a las observaciones, se sabe no existió siempre y tuvo un inicio. Para comenzar, imaginemos que nuestra ecuación de estado es negativa, es decir, $\omega < 0$, esto implicaría que el fluido presentaría una presión negativa lo que llevaría a que la materia se aleje entre sí, y esto resulta adecuado para intentar modelar la expansión acelerada del universo.

Si consideramos que $P = -\rho$, es decir, $\omega = -1$, este será un caso límite para $a(t)$, según la ecuación 3.18, cuyas soluciones son [12]:

$$\rho = \rho_0, \quad (3.28)$$

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\kappa\rho_0}{3}}t}. \quad (3.29)$$

Estas soluciones nos dicen que tenemos una densidad constante, es decir, que aunque el espacio esté aumentando su tamaño, esta no se diluye, esto parece una violación a la conservación de la energía. Sin embargo, un punto fuerte es que la densidad de energía no disminuye y esto nos lleva a un crecimiento exponencial del universo [12].

Existen modelos para intentar parametrizar la ecuación de estado que modele la expansión acelerada del universo (mas adelante se usará la ecuación de estado propuesta en [23]), así que buscaremos una función que dependa de esa ecuación de estado, para esto, partiremos de 3.17 y obtendremos

$$f(a) = e^{-3 \int_a^1 (1+\omega(a')) d \ln a'}. \quad (3.30)$$

Pero antes de continuar con esta función, vamos a relacionar el parametro de Hubble con los parámetros de densidad (de materia, radiación y energía oscura) y los parámetros de densidad adimensional.

Comencemos con la densidad total del universo, definida como la suma de la densidad debida a la materia (ρ_m), la densidad por la radiación (ρ_{rad}) y la densidad de la energía oscura (ρ_Λ).

$$\rho = \rho_m + \rho_{rad} + \rho_\Lambda. \quad (3.31)$$

Ahora, regresando a la ecuación de Friedmann y considerando un universo plano, es decir, $k = 0$, la ecuación 3.15 queda:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.32)$$

de esta última ecuación definimos la densidad crítica

$$\rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H(t)^2. \quad (3.33)$$

Así, podemos definir el parámetro de densidad adimensional de la siguiente forma

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.34)$$

Entonces, podemos escribir el parámetro de densidad adimensional del universo:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda = 1, \quad (3.35)$$

donde Ω_m corresponde al término de la densidad asociado a la materia, Ω_{rad} es el asociado a la radiación y Ω_Λ es el correspondiente a la energía oscura.

Para relacionar estos parámetros con la constante de Hubble, nos ayudaremos de la ecuación 3.15, que quedará escrita como sigue

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_\Lambda e^{-3 \int_a^1 (1+\omega(a')) d \ln a'} \right). \quad (3.36)$$

Mas adelante se trabajará expresiones dependientes del corrimiento al rojo, denotado por z , así que lo definiremos en términos del factor de escala

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (3.37)$$

Entonces reescribiremos la expresión 3.36 ahora en términos del corrimiento al rojo

$$H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda e^{-3 \int_0^z (1+\omega(z'))/(1+z') d \ln z'} \right). \quad (3.38)$$

Si denotamos de la siguiente forma

$$f(z) = \exp \left(3 \int \frac{1 + \omega(z)}{1 + z} dz \right), \quad (3.39)$$

nuestra última expresión queda

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda f(z) \right). \quad (3.40)$$

Como el término de radiación es muy pequeño, podemos despreciarlo, entonces la densidad adimensional total estará expresada solamente por las contribuciones de la materia y la energía oscura. Podemos escribir entonces al al parámetro de energía oscura en términos de el de materia de la siguiente forma

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m. \quad (3.41)$$

Finalmente, obtenemos la expresion simplificada de 3.38

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)f(z)]. \quad (3.42)$$

3.4. Modelo Cosmológico Estándar

El modelo del Big Bang resultó muy exitoso y surgía naturalmente de la expansión del universo deducida del corrimiento al rojo presente en la mayoría de las galaxias observadas. Otro de sus aciertos, fue la CMB, predicha por Gamow, Alpher y Bethe en 1948 [24] [25] y detectada por Penzias y Wilson en 1965 [26]. Futuras investigaciones, como la misión COBE (Cosmic Background Explorer), o los satélites WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) o Planck, fueron refinando y mejorando las observaciones del CMB y sus anisotropías (Figura 3.4⁶). Estas anisotropías fueron detectadas desde la década de los años 70 y fueron un tropiezo para la teoría, ya que esto entraba en conflicto a la hora de intentar explicar la formación de galaxias.

Este problema fue de la mano con lo siguiente, para 1933, el astrónomo suizo, Fritz Zwicky propuso lo que hoy conocemos como materia oscura [27] [28], la motivación

⁶<https://www.mso.anu.edu.au/charley/papers/CMBLineveaver2014.pdf>

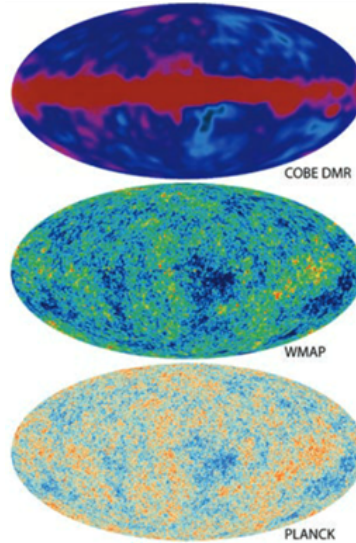


Figura 3.4: Observaciones del CMB por distintas misiones, de arriba a abajo: COBE, WMAP, Planck.

fue que al observar el cúmulo de Coma y tratar de estimar su masa por medio de su influencia gravitacional en las galaxias vecinas y después comparar el resultado con el obtenido a partir del número estimado de galaxias en el cúmulo y su brillo total, encontró que por el primer método había aproximadamente 400 veces más masa que por el segundo, esto lo llevó a la idea de que debía existir materia que no detectamos (por radiación de algún tipo), pero que tiene presencia gravitacional.

Para los años 70 apareció nueva evidencia que fortalecía la idea de Zwicky, esta vez fue la astrónoma Vera Rubin, quien al medir la curva de velocidad de rotación en galaxias espirales, encontró que las estrellas de dichas galaxias orbitaban aproximadamente a la misma velocidad, esto sin importar la distancia radial [29] [30], esto nuevamente implicaba que existía más masa de la que corresponde a la materia que sí podemos detectar.

Ajeno a este, en 1998, dos investigaciones, el Supernova Cosmology Project [31] y el Supernova Search Team [32], que a partir de observaciones a supernovas tipo Ia, encontraron que el universo no solo se está expandiendo, sino que además lo hace de forma acelerada. Recordemos que para este punto solo consideramos como componentes del universo a la radiación y a la materia, que a su vez, podemos dividir en dos tipos, la materia bariónica u ordinaria y la materia oscura, pero dada la nueva dinámica observada debe existir un ingrediente más que está causando la aceleración.

Al retomar la ecuación de estado 3.16, notamos que depende tanto de la densidad como de la presión. La densidad será siempre positiva, pero la presión, al considerarla negativa, generaría el efecto de repulsión observado, llevándonos a proponer una ecuación de estado con valor negativo $\omega < 0$.

Los dos nuevos ingredientes oscuros, sumados al modelo prevo del Big Bang, dan origen a nuestro modelo cosmológico estandar, también llamado Λ CDM. La letra griega Λ es la famosa constante cosmológica que Einstein introdujo en las ecuaciones de la relatividad general 2.9, tomando la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

se utiliza a la constante cosmológica como un equivalente del fluido que genera la expansión acelerada. Cold Dark Matter (materia oscura fría) o abreviado CDM, es un tipo de materia oscura que se adecúa para explicar los fenómenos previamente mencionados, su nombre radica en que debe estar compuesta por partículas con velocidades mucho menores a las de la luz. Un resultado más de este modelo es que, de la materia total en el universo, aproximada mente el 68 % corresponde a la energía oscura, el 32 % a la materia (oscura 27 % + bariónica 5 %) y solo un aproximado del 0.01 % a la radiación, esto según los resultados de observaciones de supernovas tipo Ia [12].

3.5. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar

Para concretar, la relatividad general logra, tanto explicar el origen, como darnos una excelente descripción de la gravedad, sumado al principio cosmológico (métrica de FLRW) y la suposición de que podemos modelar al universo como un fluido perfecto nos da una teoría cosmológica mas que satisfactoria, con una buena cantidad de exitos, sin embargo, no carece de problemas. Si bien, la incorporación de materia y energía oscuras, nos permiten explicar algunas cuestiones como la rotación no Kepleriana de las galaxias o la expansión acelerada del universo actual, respctivamente, la realidad es que aún no se tiene una comprensión de estos dos componentes físicos.

Dada la naturaleza de lo que denominamos como materia oscura, no podemos detectarla con nuestros usuales métodos que involucran a la radiación electromagnética emitida por los cuerpos, solo suponemos que existe por su presencia gravitacional, así que se tienen algunos candidatos para el puesto [12], como los Axiones, materia oscura ultra ligera [33], agujeros negros primordiales, neutrinos, MACHOs (del inglés de objetos de halo masivos y compactos) o los WIMPs (del inglés de partícula masiva con interacción débil).

Existen otros problemas que surgen al considerar al modelo Λ CDM, por ejemplo, el llamado problema del horizonte, este consiste en que cuando observamos dos regiones del universo que estan causalmente desconectadas, estas presentan las mismas propiedades (homogeneidad e isotropía) y esto parece contradecir la teoría de la relatividad, ya que estas regiones que no tuvieron contacto alguno, no deberian tener las mismas propiedades físicas. Otro problema es el de la planitud, este se cuestiona principalmente el por qué la evidencia observacional nos dice que la curvatura espacial es muy próxima a cero. Un tercer problema es el de la ausencia de monopolos magnéticos

en la naturaleza [22] [34]. Estos últimos problemas se logran explicar agregando al modelo Λ CDM un campo escalar, conocido como inflación. Este mecanismo consiste básicamente en una expansión exponencial del universo, ocurrida instantes después al Big Bang [35] [36].

Un problema más surge en al estudiar la expansión acelerada del universo actual y comparar la medición de H_0 , utilizando supernovas tipo IA, con la inferencia de esta misma constante, realizada mediante observaciones en el espectro del CMB. Como resultado de esta comparación, se obtienen distintos valores para H_0 , este problema es conocido como la tensión de Hubble [37]. Como tratamiento a este problema, se desarrolló un método que nos permite reconstruir la dinámica de expansión acelerada del universo actual y que es independiente de los modelos, método que se presentará en la siguiente sección.

3.6. Cosmografía

Como se mencionó brevemente al final de la sección anterior, era necesario un método que no dependiera de algún modelo, es decir, un modelo que no dependa de una ecuación de estado para la energía oscura.

Para el desarrollo de la cosmografía [38] [39] [40] se requiere como única hipótesis el principio cosmológico, en otras palabras, es necesario que el universo sea homogéneo e isótropo a grandes escalas. Recordemos que la métrica de FLRW, definida por 3.2 es una consecuencia de suponer válido el principio cosmológico, y que esta depende solamente de la curvatura espacial k y del factor de escala $a(t)$. Entonces, al ser la dinámica del universo el objeto de estudio, será necesario darle un tratamiento especial al factor de escala.

La técnica fundamental en cosmografía consiste en expandir mediante una serie de Taylor al factor de escala $a(t)$ al tiempo presente t_0 (o z_0 , como se utilizará mas adelante). Con lo que el factor de escala se escribirá de la siguiente forma:

$$a(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n a}{dt^n} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^n, \quad (3.44)$$

y los coeficientes de esta expresión serán los llamados parámetros cosmográficos, de los cuales solo nombraremos a los primeros cuatro, que son, el parámetro de Hubble (H), parámetro de desaceleración (q), jerk (j) y snap (s), definidos a continuación:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (3.45)$$

$$q = -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-2} = -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{1}{H^2}, \quad (3.46)$$

$$j = \frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-3} = \frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} \frac{1}{H^3}, \quad (3.47)$$

$$s = \frac{1}{a} \frac{d^4 a}{dt^4} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-4} = \frac{1}{a} \frac{d^4 a}{dt^4} \frac{1}{H^4}, \quad (3.48)$$

Definidos de esta forma, los parámetros de desaceleración, jerk y snap serán adimensionales. Además, podemos escribir el factor de escala de la siguiente forma [39]:

$$a(t) = a_0 \left\{ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + O([t - t_0]^5) \right\}. \quad (3.49)$$

Estos parámetros cosmográficos nos van a brindar información sobre la cinemática del universo. El parámetro de Hubble, representa la tasa actual de expansión del universo. Y está expresado en unidades de kilómetros por segundo por megapársec (km/s/Mpc).

El parámetro de desaceleración, q , caracteriza la aceleración o desaceleración de la expansión del universo. Un valor de $q < 0$ indica una expansión acelerada, mientras que $q > 0$ implica una desaceleración.

El parámetro jerk, j , está relacionado con la tercera derivada del factor de escala y se utiliza para cuantificar la variación de la aceleración cósmica en el tiempo. Representa la tasa de cambio de la aceleración del universo. Un valor de $j=1$ indica una aceleración constante, mientras que valores mayores o menores que 1 indican una aceleración que varía con el tiempo.

El parámetro snap, s , está relacionado con la cuarta derivada del factor de escala y se utiliza para cuantificar la variación de la desaceleración cósmica en el tiempo. Representa la tasa de cambio de la variación de la aceleración del universo. El parámetro snap captura información adicional sobre la evolución de la expansión cósmica más allá de lo que se puede obtener solo con el parámetro jerk.

La expansión en serie realizada fue al rededor de $z = 0$, provocando divergencias en la expansión para $z > 1$, por este motivo resultará conveniente hacer un cambio de variable en z .

Tal como se plantea en [38], aplicamos la regla de la cadena $d/dt = -(1+z)H(z)d/dz$ en los parámetros cosmográficos definidos previamente, además de considerar una expresión genérica para la ecuación de estado cosmológica y así obtener:

$$q(z) = -1 + \frac{1}{2}(1+z) \frac{(H(z)^2)'}{H(z)^2}, \quad (3.50)$$

$$j(z) = \frac{1}{2}(1+z)^2 \frac{(H(z)^2)''}{H(z)^2} - (1+z) \frac{(H(z)^2)'}{H(z)^2} + 1, \quad (3.51)$$

$$s(z) = -\frac{1}{6}(1+z)^3 \frac{(H(z)^2)'''}{H(z)^2} + \frac{1}{2}(1+z)^2 \frac{(H(z)^2)''}{H(z)^2} + (1+z) \frac{(H(z)^2)'}{H(z)^2} - 1. \quad (3.52)$$

Estas expresiones resultarán útiles mas adelante por su dependencia de $H(z)^2$, que a su vez, como podemos ver en la ecuación 3.42, dependen de una ecuación de estado.

4 Gravedad Modificada

Como se vió en los capítulos anteriores, la Relatividad General presenta ciertos problemas, específicamente, aquí nos interesará tratar el problema relacionado con la cosmología, recordemos que el modelo Λ CDM, se basa en la existencia de dos entidades físicas, la materia y energía oscura, además del principio cosmológico, pero fundamentalmente, considera a la Relatividad General como la teoría para describir las interacciones de tipo gravitacional.

Otra opción para poder explicar las observaciones astrofísicas y cosmológicas, es hacer una modificación a las ecuaciones de Einstein, una modificación meramente geométrica, esto en lugar de suponer la existencia de otro tipo de materia y energía.

Dentro de las teorías modificadas destacan aquellas que tienen derivadas de cuarto orden, estas generalizan la acción de Einstein-Hilbert 2.12, añadiendo invariantes del escalar de curvatura a la acción, o generalizando a una función que dependa de R . Para este trabajo consideraremos la segunda opción, la que, por el teorema de Lovelock (sección 4.1), nos conducirá a las ecuaciones de campo de cuarto orden. Estas teorías son denominadas como gravedad tipo $f(R)$, cuyo estudio radica desde las décadas de los 60, 70 y 80 del siglo pasado por las revelaciones de que la cuantificación de los campos de materia en un espacio-tiempo no cuantificado puede conducir a tales teorías [41], que las teorías $f(R)$ de la gravedad pueden tener propiedades de renormalización mejoradas [42] y que pueden conducir a un periodo de expansión acelerada al principio de la historia del Universo [43]. Recientemente, han despertado un interés considerable como posible explicación de la expansión acelerada del Universo observada actualmente [4].

4.1. Teorema de Lovelock

Como preliminar, suponemos que el único campo implicado en la acción gravitatoria es el tensor métrico, además, si podemos escribir a la acción en términos de este tensor solamente, entonces:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}). \quad (4.1)$$

Si esta acción contiene hasta segundas derivadas del tensor métrico, entonces al extremarla respecto a la métrica obtenemos la expresión de Euler-Lagrange

$$E^{\mu\nu}[\mathcal{L}] = \frac{d}{dx^\rho} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} - \frac{d}{dx^\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}} \right) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (4.2)$$

y la ecuación de Euler-Lagrange es $E^{\mu\nu}(\mathcal{L}) = 0$, con esto podemos enunciar el teorema de la siguiente forma:

La única ecuación de Euler-Lagrange de segundo orden que se puede obtener de un espacio 4-dimensional partiendo de una densidad escalar de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu})$ es

$$E^{\mu\nu} = \alpha\sqrt{-g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right] + \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

donde α y λ son constantes, $R^{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R es el escalar de curvatura.

Este resultado nos permite limitar las teorías que se pueden construir apartir del tensor métrico, lo que nos dice en otras palabras es que para una teoría gravitacional en un espacio riemanniano de cuatro dimensiones, las ecuaciones de Einstein (con o sin constante cosmológica) son las únicas ecuaciones de campo de segundo orden o menos que se pueden obtener apartir de un principio de acción que involucre solo al tensor métrico y a sus derivadas.

El interés en este teorema es el siguiente, si deseamos construir una teoría gravitacional con ecuaciones de campo distintas a las ecuaciones de Einstein, se debe cumplir con alguno de los siguientes puntos:

1. Considerar mas campos, además de la métrica, en la densidad Lagrangiana.
2. Derivadas de orden superior a dos de la métrica en las ecuaciones de campo.
3. Trabajar con un espacio-tiempo de dimensión distinta a cuatro.
4. No localidad.

Como comentario adicional, cabe resaltar que la acción de Einstein-Hilbert no es la única acción construida apartir del tensor métrico que deriva en las ecuaciones de Einstein, ya que para cuatro dimensiones o menos se cuenta con una acción más general de la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R - 2\lambda\sqrt{-g} + \beta\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\rho\lambda} + \gamma\sqrt{-g}(R^2 - 4R_\nu^\mu R_\mu^\nu + R_{\rho\lambda}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{\rho\lambda}), \quad (4.4)$$

con β y γ constantes. Y los ultimos dos términos de la expresión:

$$E^{\mu\nu}[\epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}R_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}R_{\gamma\delta\rho\lambda}] = 0 \quad (4.5)$$

$$E^{\mu\nu}[\sqrt{-g}(R^2 - 4R_{\beta}^{\alpha}R_{\alpha}^{\beta} + R_{\rho\lambda}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{\rho\lambda})] = 0 \quad (4.6)$$

donde la acción $E^{\mu\nu}$ sobre cualquier función de denota como en la ecuación 4.2. La primera de estas ecuaciones es válida en cualquier número de dimensiones y la segunda solo es válida en cuatro dimensiones [44] [45] [8].

4.2. Gravedad tipo $f(R)$

Basándonos en el resultado anterior, una forma de modificar la Relatividad General es permitir que las ecuaciones de campo tengan derivadas superiores al segundo orden, sin embargo, el hacer este tipo de modificaciones trae algunos problemas, específicamente, puede causar inestabilidades en la teoría como los grados de libertad fantasma (revisar [46] para mas detalle).

Sabemos que los fantasmas pueden aparecer en teorías gravitacionales en derivadas superiores [47] [48], dentro de este tipo de problemas, encontramos las inestabilidades de Ostrogradski, esta establece que los lagrangianos que contienen segundas derivadas, y son no lineales en esas segundas derivadas, son genéricamente inestables. En apariencia es un resultado problemático para las teorías tipo $f(R)$, que sólo son lineales en las derivadas de segundo orden de la métrica en el caso de la Relatividad General, sin embargo, podemos ver que en $f(R)$ no se producen estas inestabilidades.

Podemos considerar esta modificación como una generalización de la Relatividad General, ya que la acción ahora será una función mas general del escalar de curvatura (en lugar de solo depender de R), y al hacer la variación de esta nueva acción nos llevará a las ecuaciones de cuarto orden. Estas teorías, llamadas comunmente teorías de gravedad modificada $f(R)$ son motivo de interés porque nos conducen a un periodo de expansión acelerada en el universo temprano [43] y recientemente utilizadas para una posible explicación de la expansión acelerada actual del universo.

4.2.1. Ecuaciones de campo para $f(R)$

En esta sección derivaremos las ecuaciones de campo generales para los modelos de gravedad tipo $f(R)$ [49] [50] [51]. Comenzaremos con una función arbitraria $f(R)$, en el vacío y utilizando el formalismo métrico. Para definir la acción, partiremos de la de Einstein-Hilbert y generalizaremos R a una función $f(R)$:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (4.7)$$

Lo que buscamos, es obtener las ecuaciones de campo generalizadas, comenzamos realizando la variación a la acción:

$$\delta S = \delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = 0. \quad (4.8)$$

De la ecuación anterior vemos que la variación a la acción debe realizarse en cada uno de los términos relativos a la métrica y a la curvatura:

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g} f(R)) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta(f(R)) + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) f(R), \quad (4.9)$$

donde:

$$\delta \sqrt{-g} = \delta[(-g^{-1})^{-1/2}] = -\left(\frac{1}{2}\right) (-g^{-1})^{-3/2} \delta(-g) = -\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

y:

$$\delta f(R) = \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = f'(R) \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Utilizamos estos dos últimos resultados en la ecuación 4.2.1:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} (f'(R) \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + \int d^4x f(R) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\right), \quad (4.12)$$

reagrupando términos:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} [f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R)] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Para calcular estas integrales en el marco de referencia inercial, usamos lo siguiente:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} \partial_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) \equiv \partial_\sigma W^\sigma, \quad (4.14)$$

donde $W^\sigma = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu$, con esto podemos reescribir la segunda integral como:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \partial_\sigma W^\sigma, \quad (4.15)$$

e integrando por partes:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\sigma} [\sqrt{-g} f'(R) W^\sigma] - \int d^4x \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] W^\sigma. \quad (4.16)$$

Notamos que la primera integral de el lado derecho de la igualdad es una divergencia total y podemos despreciarla suponiendo que los campos tienden a cero en infinito, teniendo así:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = - \int d^4x \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] W^\sigma. \quad (4.17)$$

Procedemos a calcular el factor W^σ del último término de la expresión anterior, haciendo primero:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \delta \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right] \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} [\partial_\mu (\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu (\delta g_{\mu\alpha}) - \partial_\alpha (\delta g_{\mu\nu})], \quad (4.19)$$

y el marco inercial local es:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.20)$$

al igual que en el caso anterior:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \partial_\mu (\delta g_{\nu\alpha}). \quad (4.21)$$

Al combinar las ecuaciones 4.20 y 4.21, obtenemos:

$$g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [-\partial_\mu (g_{\alpha\nu} \delta g^{\alpha\sigma}) - \partial_\nu (g_{\mu\alpha} \delta g^{\sigma\alpha}) - g^{\sigma\alpha} \partial_\alpha (\delta g_{\mu\nu})] \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{2} \partial^\sigma (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu (g_{\alpha\mu} \delta g^{\nu\alpha}) = -\frac{1}{2} \partial^\sigma (g_{\nu\alpha} \delta g^{\nu\alpha}), \quad (4.23)$$

entonces:

$$W^\sigma = \partial^\sigma (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\sigma\nu}). \quad (4.24)$$

Usando esta ecuación podemos escribir:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (4.25)$$

$$= \int d^4x \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] [\partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\sigma\nu}) - \partial^\sigma (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})], \quad (4.26)$$

integrando por partes y descartando las divergencias totales, obtenemos:

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

$$= \int d^4x g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] \delta g^{\mu\nu} - \int d^4x g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] \delta g^{\sigma\nu}, \quad (4.28)$$

entonces, la variación de la acción queda:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = \int d^4x \sqrt{-g} [f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \quad (4.29)$$

$$+ \int d^4x [g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma (\sqrt{-g} f'(R)) - g_{\sigma\nu} \partial^\mu \partial_\sigma (\sqrt{-g} f'(R))] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

La desaparición de la variación implica las ecuaciones de campo extendidas de cuarto orden en el vacío:

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = 0. \quad (4.31)$$

La prima denota la derivada respecto a R .

Notemos que al hacer $f(R)=R$, recuperamos las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.32)$$

Ahora, para el caso donde tenemos un universo no vacío, utilizamos la siguiente acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (4.33)$$

para el primer término, se hará algo idéntico al caso de un universo vacío, el segundo término es igual al que se ocupó en la deducción de las ecuaciones de Einstein del capítulo 2, obteniendo así las ecuaciones de campo extendidas en un universo no vacío

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Podemos obtener la traza multiplicando la ecuación 4.34 por la métrica $g^{\mu\nu}$

$$f'(R) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square f'(R) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

$$f'(R) R - \frac{4}{2} f(R) - [\square - 4\square] f'(R) = \kappa T, \quad (4.36)$$

obteniendo así

$$f'(R) R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T, \quad (4.37)$$

donde T es la traza del tensor de energía-momento, y recordemos que tiene la forma $T = -\rho_m + 3P_m$ (3.5), con ρ_m y P_m la densidad de energía y la presión de materia, respectivamente.

Podemos reescribir las ecuaciones de campo extendidas de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left[f''(R) \nabla_\mu \nabla_\nu R + f'''(R) (\nabla_\mu R) (\nabla_\nu R) - \frac{g_{\mu\nu}}{6} (Rf'(R) + f(R) + 2\kappa T) + \kappa T_{\mu\nu} \right], \quad (4.38)$$

recordemos que $G_{\mu\nu}$ está definido por 2.10.

Si utilizamos la métrica de FLRW en las ecuaciones de campo extendidas 4.38 podemos obtener un conjunto de ecuaciones análogas a las ecuaciones de Friedmann para las teorías $f(R)$:

$$H^2 = -\frac{1}{f''(R)} \left[f''(R) H \dot{R} - \frac{1}{6} (Rf'(R) - f(R)) \right] - \frac{\kappa T_t^t}{3f'(R)}, \quad (4.39)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{f'(R)} \left[f''(R) H \dot{R} + \frac{f(R)}{6} + \frac{\kappa T_t^t}{3} \right], \quad (4.40)$$

(con T_t^t la componente temporal del tensor de energía-momento) además de una ecuación diferencial de segundo orden para R .

$$\ddot{R} = -3H\dot{R} - \frac{1}{3f''(R)} \left[3f'''(R)\dot{R}^2 + 2f(R) - Rf'(R) + \kappa T \right]. \quad (4.41)$$

4.3. Modelos en Gravedad tipo $f(R)$

La necesidad de poder explicar la observada expansión actual del universo es una de las principales motivaciones para estudiar y desarrollar los modelos de gravedad modificada $f(R)$. Un ejemplo de esto es la teoría de Carroll, Duvvuri, Trodden y Turner [52], donde proponen la función

$$f(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n}, \quad (4.42)$$

con μ una constante. Si se tiene una evolución tipo ley de potencia, la ecuación de estado efectiva para tiempos tardíos viene dada por [52]

$$w = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)}. \quad (4.43)$$

Si se toma el valor $n = 1$, se consigue una ecuación de estado con valor $w = -2/3$, lo que corresponde a una expansión acelerada. Esto va de acuerdo a la solución de una ley de potencias para una teoría con $f(R) \propto R^{-n}$. Sin embargo, estudios posteriores mostraron que esta teoría posee numerosas deficiencias que la hacen inviable [53] [54] [55].

Algunas de estas deficiencias son de origen cosmológico y otras a cuestiones de estabilidad, en general, muchos de estos problemas tienen su origen en el valor de la

masa efectiva que se considera muy pequeño para la validez gravitacional en escalas del sistema solar.

Se han intentado construir modelos que no presenten estos problemas pero que sigan reproduciendo la expansión acelerada del universo actual, para este trabajo se consideraron los tres siguientes.

4.3.1. Modelo de Hu-Sawicki.

Propuesto en 2007 [6], donde se elige la siguiente función $f(R)$

$$f(R) = R - R_{HS} \frac{c_1 \left(\frac{R}{R_{HS}}\right)^n}{c_2 \left(\frac{R}{R_{HS}}\right)^n + 1}, \quad (4.44)$$

con $n > 0$ y basándose en las siguientes tres condiciones que satisfacen algunas propiedades observacionales deseadas:

1. Cosmológicamente, el modelo debe poder imitar Λ CDM para altos corrimientos al rojo, donde se está bien probado gracias al CMB.
2. Se debe lograr una expansión con aceleración para un corrimiento al rojo bajo y un historial de expansión cercano a Λ CDM, pero sin una verdadera constante cosmológica.
3. Debe ser una parametrización con suficientes grados de libertad para abarcar una gama amplia de fenómenos con corrimiento al rojo bajo que sean aceptables desde el punto de las observaciones.

Con el propósito de restringir desviaciones a la relatividad general con test del sistema solar y cosmológicos, se deberá incluir la fenomenología de Λ CDM como caso límite.

Requisitos que sugieren las siguientes condiciones

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = \text{constante},$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = 0.$$

4.3.2. Modelo de Starobinsky.

Modelo propuesto por Alexei Starobinsky en 2007 [5], en este nos presenta la siguiente función:

$$f(R) = R + \lambda R_S \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_S^2} \right)^{-q} - 1 \right], \quad (4.45)$$

con $q, \lambda > 0$ y R_S del orden de la constante cosmológica efectiva actualmente observada. Se logró construir un modelo de energía oscura viable en gravedad $f(R)$ utilizando una función no analítica en $R = 0$, además se logró con una función que satisface la condición $f(0) = 0$, lo que significa que la constante cosmológica desaparece en un espacio-tiempo plano. Por otro lado, la energía oscura se comporta como una constante cosmológica efectiva para R grande si $F(R) = f - R \rightarrow \text{cte}$ cuando $R \rightarrow \infty$. Este modelo pasó las pruebas gravitacionales en el sistema solar si el parámetro q es lo suficientemente grande, $q \geq 2$ parece una condición suficiente pero no necesaria.

4.3.3. Modelo Exponencial.

Propuesto en 2009 por Eric V. Linder en [7], con la siguiente función

$$f(R) = R + \beta R_E (1 - e^{-\frac{R}{R_E}}), \quad (4.46)$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. Se deseaba evitar incluir una constante cosmológica implícita, para esto se requería que el límite de curvatura bajo desapareciera, es decir, $f(0) = 0$.
2. Para altas curvaturas, como en el universo temprano, se deseaba que el término de modificación fuera insignificante en comparación con el término habitual lineal en R , por lo que era requerido que

$$f(R \gg 1)/R \rightarrow 0.$$

3. Con el fin de satisfacer las condiciones de alta curvatura local como en galaxias o en el sistema solar, la gravedad deberá ser muy cercana a la relatividad general, para esto la función tiene una dependencia al escalar de curvatura.

Todos los parámetros presentes en las ecuaciones 4.44, 4.45, 4.46 deben ser restringidos por las observaciones.

5 Análisis de la Cosmografía de $f(R)$

En el presente capítulo se desarrollará la cosmografía asociada a la teoría tipo $f(R)$, específicamente, veremos como tres modelos particulares nos proporcionan una cosmología viable de acuerdo a las observaciones. Para ello, emplearemos las ecuaciones 3.46, 3.47, 3.48, siendo respectivamente el parámetro de desaceleración q , el parámetro jerk j y el parámetro snap s , descritas en la sección de cosmografía del capítulo 3, esto con la finalidad de analizar las constricciones fenomenológicas a los parámetros cosmográficos derivados para estos tres modelos.

5.1. Ecuación de Estado para Gravedad Modificada

Gracias a las ecuaciones de campo extendidas para gravedad tipo $f(R)$ 4.34, y a las ecuaciones 4.41, 4.39 y 4.40, desarrolladas en el capítulo anterior, tenemos una ecuación de estado para energía oscura geométrica en $f(R)$:

$$\omega_X = \frac{3H^2 - 3\kappa P - R}{3(3H^2 - \kappa\rho)}, \quad (5.1)$$

donde P es la presión, ρ la densidad y recordemos que el escalar de Ricci está dado por $R = 6(\dot{H} + 2H)$.

Así como en [23], en este trabajo se utilizaron modelos que nos arrojan una evolución acelerada, con $\omega_X \approx 1$. Estos tres modelos son los mencionados en el capítulo anterior, el modelo de Hu-Sawicki 4.44, el de Starobinsky 4.45 y el modelo Exponencial 4.46, cuyas ecuaciones tienen parámetros que deben restringirse mediante observaciones tardías.

Se han propuesto parametrizaciones de la ecuación de estado para un universo acelerado con dos o más parámetros [56], estos motivados ya sea por campos escalares y su dinámica o por la reconstrucción de los datos de BAO, [57] [58], respectivamente. Además, los resultados mostrados en [59] indican un universo con energía oscura dinámica, si en posteriores estudios prevalece esta tendencia, será necesaria una ecuación de estado para el mecanismo de aceleración.

Nuestra ecuación de estado de interés y de posterior uso, denominada como parametrización JJE (Jaime-Jaber-Escamilla), fue propuesta en [23] con el fin de im-

plementar una cosmología de $f(R)$ y dependiente de cuatro parámetros. Esta parametrización se basó en los resultados numéricos obtenidos en la integración de las ecuaciones de campo en $f(R)$. La integración numérica se realizó utilizando un integrador Runge-Kutta de cuarto orden, las condiciones iniciales se fijan en el pasado, para algún z donde $\Omega_M(z)$ es muy cercano a 1, el valor de la EoS para la energía oscura simétrica es $\Omega_X = -1$ a este valor del corrimiento al rojo. La integración se hizo sobre tres modelos 4.44, 4.45, 4.46, los parámetros utilizados se encuentran en la tabla 5.1 y finalmente se obtuvo la ecuación de estado paramétrica JJE:

$$\omega(z) = -1 + \frac{\omega_0}{1 + \omega_1 z^{\omega_2}} \cos(\omega_3 + z), \quad (5.2)$$

donde ω_i son parámetros libres y z es el corrimiento al rojo definido de la forma habitual.

f(R) model	$\Omega_M(z = 0)$	Valores de los parámetros
Hu-Sawicki	0.20	$c_2 = 2.78 \times 10^{-5}$
	0.25	$c_2 = 7.98 \times 10^{-5}$
	0.30	$c_2 = 1.95 \times 10^{-4}$
Starobinsky	0.20	$\lambda = 1.15, R_S = 1$
	0.25	$\lambda = 1.0, R_S = 1$
	0.30	$\lambda = 0.9, R_S = 1$
Exponencial	0.20	$\beta = 0.5, R_E = 5$
	0.25	$\beta = 0.8, R_E = 5$
	0.30	$\beta = 0.6, R_E = 6$

Tabla 5.1: [23] Para el modelo de Hu-Sawicki se calcularon tres casos, los valores para c_2 al tomar $R_{HS} = 1$ y $f_R^0 = 0.01$ y el valor correspondiente Ω_m^0 , c_1 está dado por $c_1 = c_2 6(1 - \Omega_m^0)/\Omega_m^0$, ver [6] para una explicación mas detallada. En el modelo de Starobinsky se tomó $n = 2$ para los tres casos.

En las figuras [5.1-5.3] se muestra la evolución de los tres modelos $f(R)$ en estudio, usando la ecuación de estado propuesta en 5.2.

Notemos que en 5.2, tiene un valor actual dado $\omega(z = 0) = \omega_0 \cos(\omega_3) - 1$, que puede recuperar $\omega = -1$ para $z \gg 1$, y permite oscilaciones dinámicas en el intervalo de corrimientos al rojo de los sondeos actuales y futuros [60] [61] [62] [63] [64]. Según la solución numérica de las ecuaciones de campo, podemos recuperar la evolución de los tres modelos de gravedad tipo $f(R)$, con una precisión del 0.5% para Hu-Sawicki y Starobinsky, y 0.8% para el modelo Exponencial. Valores razonables, ya que la precisión estimada de futuros experimentos proporcionan una significancia estadística del 1% para $z < 1$ en esta parametrización.

En [65] se trabaja con la parametrización JJE con valores fijos y que logran superar test del sistema solar [23] [66], por si mismas, estas pruebas pueden imponer

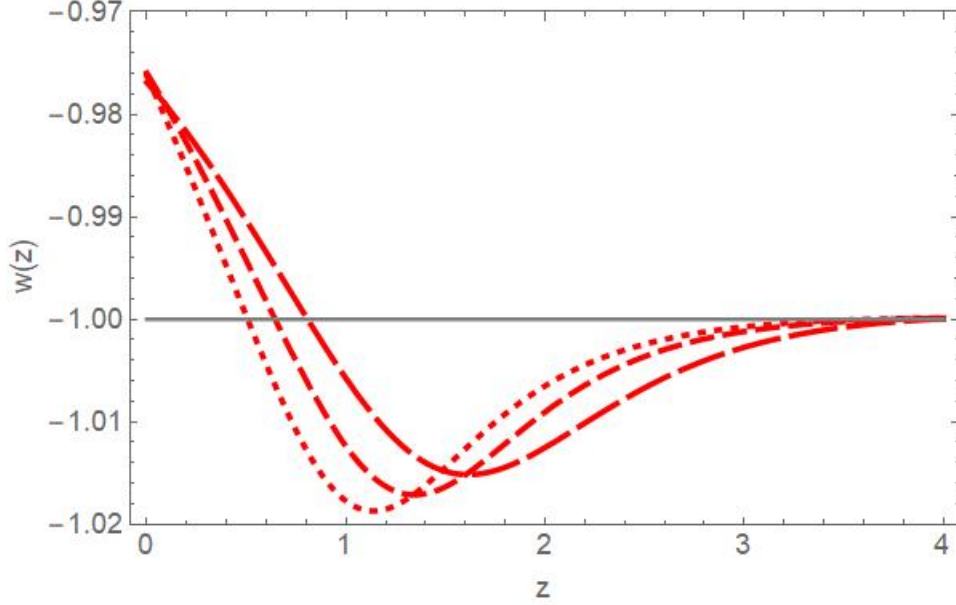


Figura 5.1: Ecuación de estado para el modelo de Hu-Sawicki con diferentes valores de Ω_m^0 . a) En rayas largas, $\Omega_m^0 = 0.20$, b) En rayas cortas, $\Omega_m^0 = 0.25$ y c) En puntos, $\Omega_m^0 = 0.30$.

restricciones débiles en estos modelos, ya que el grado de libertad escalar adicional está ligado a la predicción de alta curvatura a lo largo de más de 25 ordenes de magnitud en densidad, en toda la corona solar. Esto requiere un halo galáctico suficientemente grande para mantener la galaxia en alta curvatura en presencia de la baja curvatura del fondo cosmológico. Así, reescribiendo 5.2, se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega(z) = -1 + \frac{\omega_a}{1 + \omega_b z^p} \cos(\alpha \nu(z)), \quad (5.3)$$

con $\nu(z) = 2\pi/(\sqrt{\eta}z + 1)^{1/2}$ y ω_a , ω_b , α , η y p son constantes.

Para que la ecuación 5.3 sea consistente con las observaciones a nivel del sistema solar se consideran los siguientes valores $\omega_b = 0.03$, $\alpha = 1$ y $\eta = 6$, esto de acuerdo a los valores para cada modelo tipo $f(R)$ descritos en [67] [6] [7]. Se consideraron además los valores $p = \{3, 4, 11\}$ que concuerdan con los casos cosmológicos viables [23].

5.2. Resultados: Análisis cosmográfico de $f(R)$

Un análisis de tipo cosmográfico nos proporciona una forma general para comparar las soluciones de los modelos con las observaciones cosmológicas. Esta comparación se hace entre un conjunto de parámetros cosmológicos y los valores predichos de los mismos parámetros obtenidos de algún modelo en específico. De aquí podemos aceptar o no algún modelo, dependiendo del resultado de la comparación. En nuestro caso, el modelo a comparar es el modelo Λ CDM, y para hacerlo, se considerará un conjunto de parámetros construidos a partir de las derivadas de orden superior del factor de

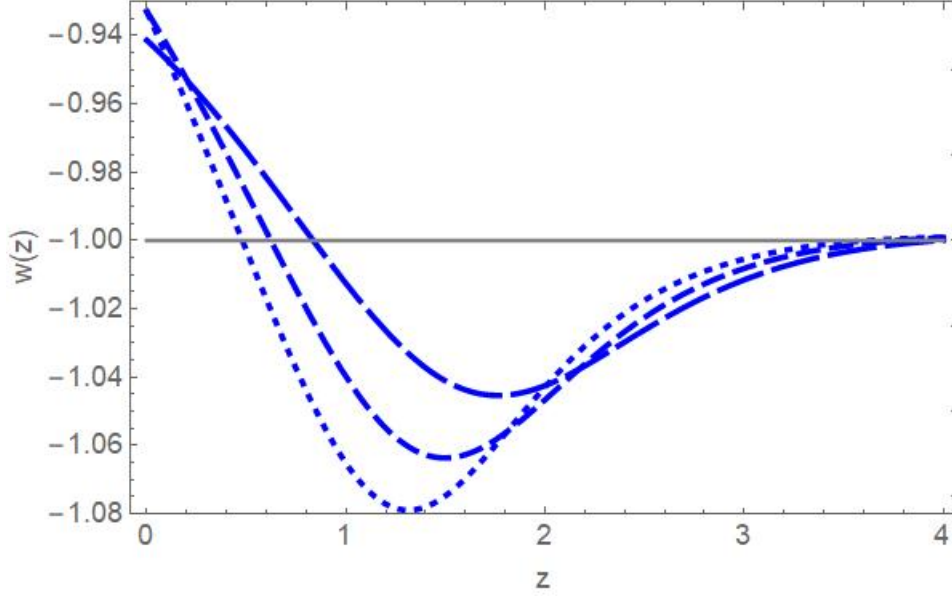


Figura 5.2: Ecuación de estado para el modelo de Starobinsky con diferentes valores de Ω_m^0 . a) En rayas largas, $\Omega_m^0 = 0.20$, b) En rayas cortas, $\Omega_m^0 = 0.25$ y c) En puntos, $\Omega_m^0 = 0.30$.

escala, específicamente, los parámetros de desaceleración, jerk y snap.

Para desarrollar la cosmografía de nuestros tres modelos, utilizaremos las ecuaciones 3.50, 3.51 y 3.52, que corresponden al parámetro de desaceleración ($q(z)$), el parámetro jerk ($j(z)$) y snap ($s(z)$), respectivamente. Dichas ecuaciones sabemos que dependen de $H(z)^2$ y sus derivadas, y a su vez, $H(z)^2$ 3.42 depende de Ω_M y una función $f(z)$ 3.39. La construcción de esta función parte de una propuesta de parametrización de energía oscura con una ecuación de estado, que en este caso será la parametrización JJE 5.2, motivada principalmente porque con una sola parametrización se logran reproducir tres modelos distintos de $f(R)$.

En el modelo de Hu-Sawicki, como para el de Starobinsky, se tomó una aproximación que se ajusta a observaciones en el sistema solar de la parametrización JJE, definida en 5.3, haciendo $\cos(\nu(z)) = 2\pi/(\sqrt{6}z + 1)^{1/2}$, aproximación utilizada para el cálculo de la integral de la ecuación 3.39. Para el caso del modelo exponencial, esta aproximación resultó en valores complejos de los parámetros cosmográficos, motivando así la aproximación de segundo orden al rededor de $z = 0$: $\cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{6}+1}}\right) \approx 1 - 3\pi^2 z^2$ en la ecuación 5.3.

Para el cálculo de las derivadas de la ecuación 3.42, su correspondiente sustitución en las ecuaciones 3.50, 3.51, 3.52, y su posterior graficación, se utilizó el software *Wolfram Mathematica 12*.

A continuación se muestran los valores correspondientes a cada modelo $f(R)$ de las constantes que definen su respectiva ecuación de estado.

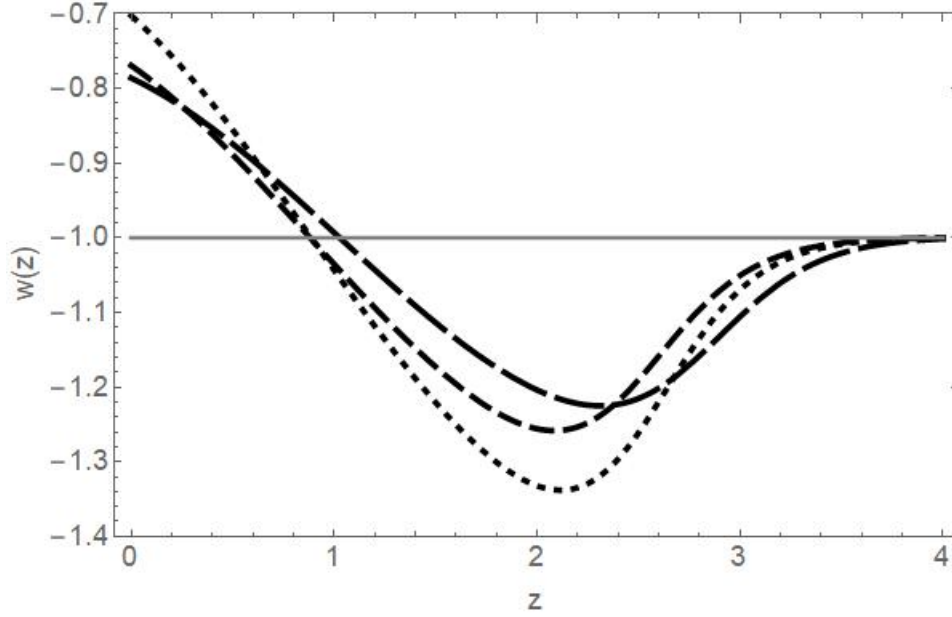


Figura 5.3: Ecuación de estado para el modelo Exponencial con diferentes valores de Ω_m^0 . a) En rayas largas, $\Omega_m^0 = 0.20$, b) En rayas cortas, $\Omega_m^0 = 0.25$ y c) En puntos, $\Omega_m^0 = 0.30$.

	Ω_m	ω_a	ω_b	p
Hu-Sawicki	0.3	0.049	0.3	4
Starobinsky	0.3	0.145	0.3	5
Exponencial	0.3	0.384	0.3	11

Tabla 5.2: Valores de las constantes de la ecuación de estado asociada a cada modelo $f(R)$.

Al hacer la cosmografía, es decir, obtener los parámetros de desaceleración, jerk y snap en función del corrimiento al rojo, de nuestros tres modelos de estudio, utilizando las ecuaciones 3.50, 3.51, 3.52 y los valores de la tabla 5.2, obtenemos las gráficas 5.4, 5.5 y 5.6.

En la figura 4 se muestra el comportamiento del parámetro de desaceleración en función del corrimiento al rojo, en el intervalo $0 \leq z \leq 10$. En rojo tenemos al modelo de Hu-Sawicki, aquí la ecuación 3.50 evaluada en $z = 0$ toma el valor de $q_0 = -404$, siendo positiva para z mayor a 1.737 y tendiendo a $q = 0.45$ para z superiores a 6. El azul representa al modelo de Starobinsky, nuestra ecuación que describe al parámetro q , evaluada en $z = 0$ resulta en $q_0 = 0.369$, siendo negativa en el intervalo $0.3715 < z < 7.981$, positiva en z mayor a 7.981 y con una tendencia a $q = 0.5$ para corrimientos al rojo mayores al último valor mencionado. En color negro tenemos al modelo exponencial, para el cuál la ecuación 3.50 toma el valor $q_0 = -0.424$ en $z = 0$, siendo negativa en todo su dominio, es decir, para todo el intervalo de corrimiento al rojo y se aproxima a $q = -1$ en z superiores a 3.

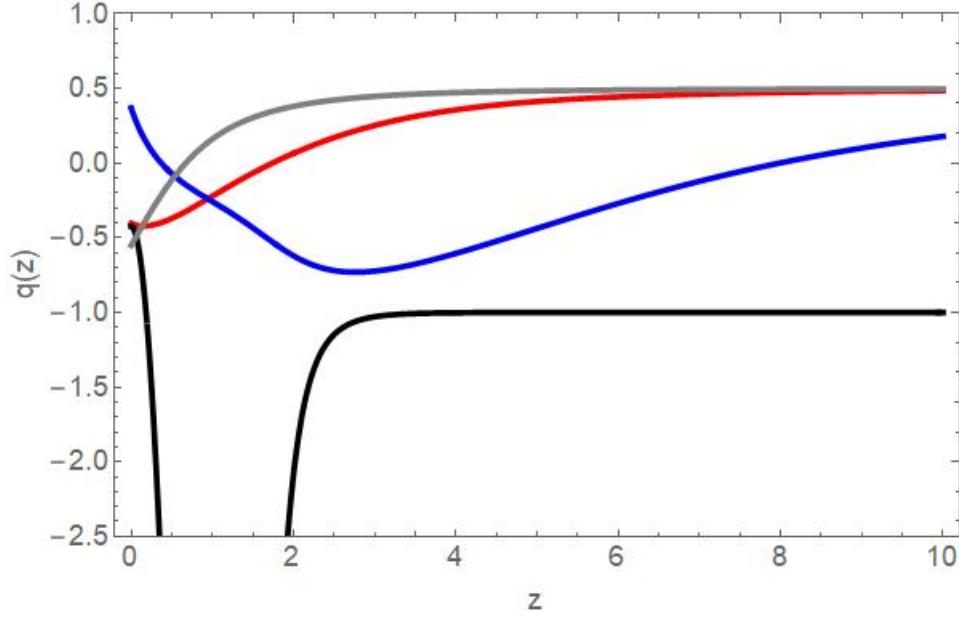


Figura 5.4: Parámetro de desaceleración en términos del corrimiento al rojo, $q(z)$. Hu-Sawicki (rojo), Starobinsky (azul), Exponencial (negro) y Λ CDM (gris). Se utilizó la ecuación 3.50, en el intervalo $0 \leq z \leq 10$.

En la figura 5 representamos al parámetro jerk, en el mismo intervalo de corrimiento al rojo que el caso anterior y mismo código de color para los modelos $f(R)$. Con modelo de Hu-Sawicki, la ecuación 3.51 evaluada en $z = 0$ tomó el valor $j_0 = -0.3279$, volviéndose positiva en z mayores a 0.2018 y se aproxima al valor de $q = 1$ en z superior a 4. De Starobinsky resultó $j_0 = -1.0015$ al ser evaluada en $z = 0$, siendo positiva para z mayor a 2.4951 y aproximándose a $q = 1$ para z mayor a 4. Nuestra ecuación para el parámetro jerk utilizada evaluada en $z = 0$ en el modelo exponencial presentó el valor $j_0 = -0.064448$ y al igual que los dos modelos previos, el valor del parámetro j se aproximó a 1 en z mayor a 4.

En la figura 6 se grafica el parámetro snap, nuevamente en el mismo intervalo de corrimiento al rojo que en los dos parámetros anteriores, al igual que el mismo código de color. De Hu-Sawicki se obtuvo $s_0 = -0.5619$ al evaluar la ecuación 3.52 en $z = 0$, tomando un valor positivo en z mayor a 0.2985 y aproximándose a $s = 4$ para z mayor a 6. Con Starobinsky $s_0 = 3.27147$, volviéndose negativa en el intervalo $1.4828 \leq z \leq 3.98$, y positiva para z mayor a 3.98, aproximándose a $s = 4$ en z superior a 10. En el modelo exponencial $s_0 = 11.6341$, además, en este caso se presentaron tres cambios de signo, en $z = 0.627164$, $z = 2$ y $z = 3.24743$, para ser $s < 0$ en z mayor a este último valor y aproximarse a $s = -1$.

En la tabla 5.3 se condensan los valores numéricos sobre los parámetros cosmo-gráficos de los modelos $f(R)$ explicados en los párrafos previos.

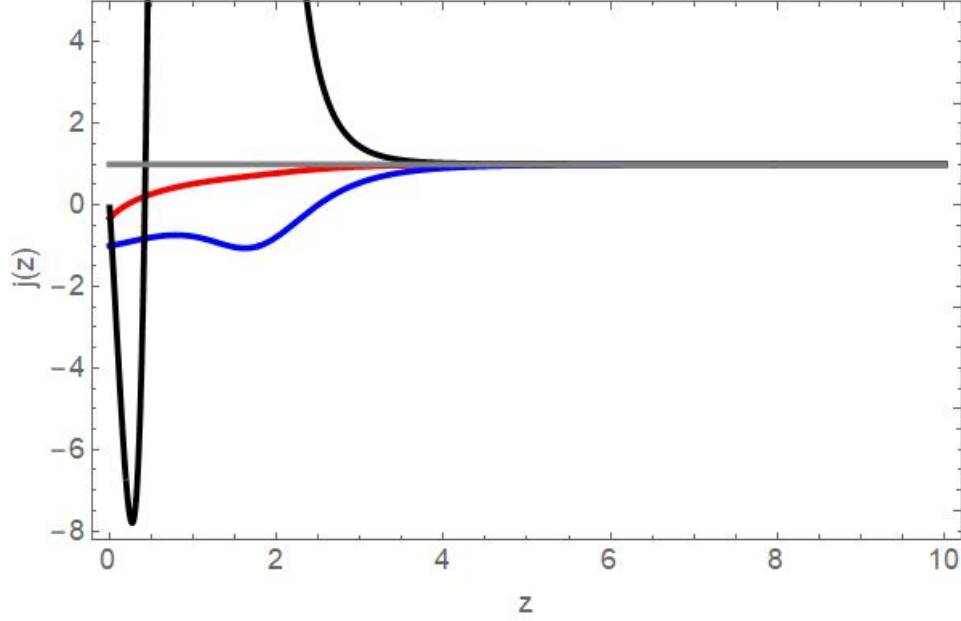


Figura 5.5: Parámetro jerk en términos del corrimiento al rojo, $j(z)$. Hu-Sawicki (rojo), Starobinsky (azul), Exponencial (negro) y Λ CDM (gris). Se utilizó la ecuación 3.51, en el intervalo $0 \leq z \leq 10$.

	q_0	$q(z), z \rightarrow 10$	j_0	$j(z), z \rightarrow 10$	s_0	$s(z), z \rightarrow 10$
Hu-Sawicki	-0.404	0.45	-0.3279	1	-0.5619	4
Starobinsky	0.369	0.5	-1.0015	1	3.2714	4
Exponencial	-0.424	-1	-0.0644	1	11.6341	-1

Tabla 5.3: Valores de q_0 , j_0 , s_0 , además de $q(z)$, $j(z)$ y $s(z)$ a un corrimiento al rojo $z=10$, para los modelos Hu-Sawicki, Starobinsky y Exponencial.

Del modelo Exponencial observamos que cuando z es mayor a 3 en la ecuación 3.50, esta se aproxima a -1 , valor que corresponde al primer término de dicha ecuación, esto nos lleva a que para corrimientos al rojo mayores a 3, el segundo término: $\frac{(1+z)}{2} \frac{[H(z)^2]'}{[H(z)^2]}$, deberá aproximarse a cero, es decir, $[H(z)^2]' = 0$. En los parámetros jerk y snap ocurre algo similar. La ecuación 3.51 se aproxima a 1 en z mayor a 4 y la ec. 3.52 tenderá a -1 en el mismo intervalo de corrimiento al rojo. De aquí que los factores $[H(z)^2]'''$, $[H(z)^2]''$ y $[H(z)^2]'$ serán igual a cero en las ecuaciones mencionadas.

Sin embargo, para los modelos de Starobinsky y Hu-Sawicki, este comportamiento solo aparece en el parámetro jerk, en ambos casos, cuando el corrimiento al rojo es mayor a 4, el valor de la ecuación 3.51 se aproxima rápidamente a 1, nuevamente podemos decir que tanto $[H(z)^2]''$ y $[H(z)^2]'$ son iguales a cero.

Con estos resultados, notamos que los modelos de Hu-Sawicki y exponencial pre-

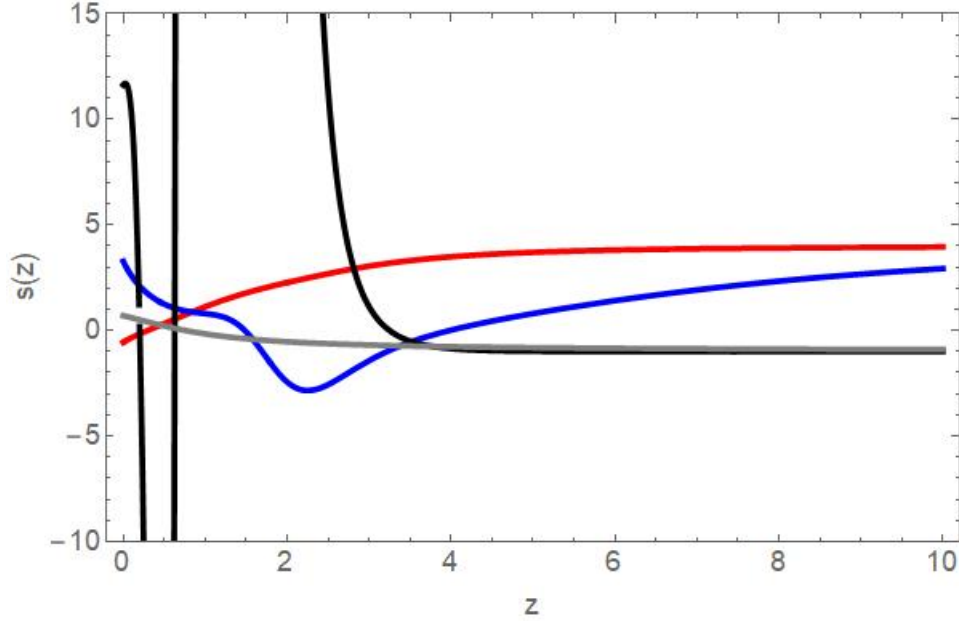


Figura 5.6: Parámetro de snap en términos del corrimiento al rojo, $s(z)$. Hu-Sawicki (rojo), Starobinsky (azul), Exponencial (negro) y Λ CDM (gris). Se utilizó la ecuación 3.52, en el intervalo $0 \leq z \leq 10$.

sentan un valor actual negativo del parámetro de desaceleración lo que corresponde a un universo en aceleración, y coincide con lo esperado, sin embargo, el valor de q_0 correspondiente al modelo de Starobinsky es positivo, lo cual representa a un universo en desaceleración. Al comparar con Λ CDM, el modelo más aproximado es Hu-Sawicki, ya que tiene un valor actual negativo y también tiene un cambio de signo y se vuelve positivo para corrimientos al rojo superiores, es decir que hay un valor de z donde el universo comienza su expansión acelerada.

Respecto al parámetro j , 5.5, los tres modelos presentan un valor actual negativo, sin embargo, todos convergen al valor de $q = 1$ en valores menores a $z = 4$, lo cual se ajusta perfectamente al modelo cosmológico estándar, y dicho valor de q representa que la aceleración del universo comenzó en algún momento preciso, es decir, existe un valor del corrimiento al rojo donde hay una transición en la dinámica del universo.

Para el parámetro s , 5.6, solo el modelo exponencial, en $z > 3$ se aproxima al modelo Λ CDM, los otros dos, que ya se habían ajustado en el parámetro anterior, ahora se vuelven positivos y se alejan del modelo estándar. Este resultado nos puede dar una idea de donde truncar la serie cosmográfica y calcular solamente el parámetro de desaceleración y el jerk, que físicamente representan la aceleración del universo y la tasa de cambio de la aceleración, respectivamente.

Sin embargo para dar un mejor resultado, será necesario utilizar observaciones astrofísicas para desarrollar la serie cosmográfica y comparar con las predicciones

teóricas.

6 Conclusiones

El objetivo de este trabajo de tesis fue estudiar modelos de gravedad tipo $f(R)$, los cuales son viables a nivel cosmológico. En general, dichos modelos, como son: el modelo de Hu-Sawicki (4.44), el modelo de Starobinsky (4.45) y el modelo Exponencial (4.46) logran cumplir las constricciones a nivel solar [65], así como la descripción de una cosmografía a nivel local.

En la Introducción, se realizó una revisión del estado de arte de esta teoría $f(R)$, así como de los modelos involucrados a nivel cosmológico. En el Capítulo 3, se comenzó planteando las bases de la Relatividad General, así como su construcción teórica. Instrumentos matemáticos dentro de la misma son proporcionados en el Apéndice A de este trabajo.

Sin embargo, con los grandes éxitos a nivel observacional de la teoría de la Relatividad General, devinieron algunos problemas aunados a su descripción a escalas cosmológicas, usualmente asociados a las simetrías consideradas para describir al universo observable. Es así, como en el Capítulo 4, describimos la cosmología estándar, la cual requiere la maximización del Principio Cosmológico, así como de las componentes del sector oscuro: la energía oscura y la materia oscura. Dentro de los esfuerzos por explicar el sector oscuro desde primeros principios, se ha propuesto versiones alternativas de la Relatividad General. Claro que, dichas propuestas, también se han encaminado en la dirección de encontrar una compatibilidad entre esta teoría gravitacional y la mecánica cuántica. Sin embargo, cabe señalar que aún existen diversas propuestas para explicar las componentes del sector oscuro, así como las diferentes escalas, aún no hemos llegado a una respuesta unívoca.

Estos hechos han motivado a buscar soluciones desde primeros principios, i.e. a nivel Lagrangiano. Es así como en el Capítulo 5 introducimos el Teorema de Lovelock, el cual nos permite estudiar mediante 5 postulados, las propiedades de las ecuaciones de campo de la Relatividad General. Bajo estos postulados, podemos optar por realizar modificaciones que nos lleven a un conjunto nuevo de ecuaciones de campo que nos permitan explicar la dinámica del sector oscuro. En particular, en este trabajo nos situamos en el postulado asociado a las ecuaciones de orden superior en la métrica. Bajo estas condiciones, es posible proponer funciones que dependan del escalar de Ricci al estilo $f(R)$, las cuales, bajo ciertas simetrías y un análisis fenomenológico, son posibles de restringir con observaciones cosmológicas. Cabe señalar, como se describió

en dicho Capítulo, estas teorías $f(R)$ resultan ser aquellas que no presentan inestabilidades a escalas locales.

Para obtener ecuaciones de campo de cuarto orden, se inicia con una generalización de la acción de Einstein-Hilbert, la cual consta de sustituir el escalar de Ricci, R , por una función más general $f(R)$. Después se procede a hacer la variación de dicha acción para finalmente obtener las nuevas ecuaciones de campo de cuarto orden.

Con los modelos de gravedad tipo $f(R)$ seleccionados se obtienen escenarios de expansión cosmológica acelerada en época tardía sin la necesidad de incorporar una constante cosmológica, la cual posee problemas de orden de magnitud [12].

Aunque la dinámica de estos modelos derivados de una teoría $f(R)$ ha sido explorada ampliamente en la literatura, la cinemática de dichos modelos contempla escenarios en los que es posible emplear los parámetros cosmográficos para que sean constreñidos por las observaciones locales, e.g Supernovas tipo IA. Sin embargo, debido a la complejidad en la convergencia de la serie de Taylor asociada a la cosmografía de estos modelos, es necesario explorar la posibilidad de describir mediante una ecuación de estado $w(z)$, una cinemática que posee la menor cantidad de grados de libertad de los modelos en cuestión. Para ello se empleó la parametrización JJE 5.2, que nos proporciona una ecuación de estado que depende del corrimiento al rojo y de cuatro parámetros libres con valores específicos para cada uno de los modelos. Tomamos esta parametrización para utilizarla en la expresión 3.42, que es una ecuación de Friedmann $H^2(z)$. La motivación de esta parametrización consiste en asociar la dinámica de la energía oscura con la cinemática de los modelos tipo $f(R)$. Estudios asociados a este escenario han sido denominados como cosmografía inversa [68]. Uno de los objetivos de este trabajo fue explorar esta cosmografía inversa ahora en modelos $f(R)$. Con base a esta metodología, se estudiaron los parámetros cosmográficos asociados a la parametrización JJE, la cual nos permite describir los 3 modelos de $f(R)$ bajo las cotas presentadas en la Tabla 5.1.

El modelo de Hu-Sawicki 4.44, presentó un valor de q_0 negativo 5.3, que es lo esperado para un universo con expansión acelerada tardía, sus parámetros q y j (figuras 5.4 y 5.5, respectivamente) se ajustan asintóticamente a Λ CDM, para $z > 6$ y $z > 4$, respectivamente.

El modelo de Starobinsky 4.45 presentó un valor positivo en q_0 5.3, lo que se parece más a un modelo de quintaesencia, y para corrimientos al rojo mayores tiende a $q = 0.5$, pero al igual que el modelo anterior, el parámetro j (figura 5.5) se ajusta a Λ CDM en corrimientos al rojo $z > 4$.

El modelo Exponencial 4.46, al igual que Hu-Sawicki, presenta una expansión acelerada tardía, sin embargo para corrimientos al rojo mayores, su parámetro q (figura 5.4) no se aproxima al modelo estándar. Al igual que en los dos modelos previos, el comportamiento del parámetro j es el mismo.

Observamos en la figura 5.5, que los tres modelos, para $z > 4$, se aproximan al valor $j = 1$, este valor nos dice que para algún z , el universo comenzó con la expansión acelerada que observamos actualmente. Sin embargo, para el parámetro de desaceleración, q , hay discrepancias entre las observaciones locales, es decir, aceleración cosmológica actual y el valor positivo de q_0 obtenido en el modelo de Starobinsky, lo que querría decir, un universo que desacelera en la actualidad.

Sobre el parámetro s (figura 5.6), solo el modelo exponencial sigue un comportamiento asintótico a Λ CDM en $z > 3.5$, sin embargo, los otros dos modelos no presentan el mismo tipo de comportamiento asintótico. Esto nos da información de que el parámetro jerk resulta adecuado para truncar la serie cosmográfica.

Con los resultados obtenidos, solo los modelos Exponencial y Hu-Sawicki logran reproducir la aceleración cósmica actual, y de estos dos, siendo Hu-Sawicki es el que se aproxima de mejor manera a la cosmografía de Λ CDM. Recordemos que las teorías $f(R)$ se basan en primeros principios y los modelos se construyen de manera que se logren reproducir las observaciones, tanto astrofísicas como cosmológicas.

Los resultados discutidos en este trabajo podrían proporcionar una metodología para encontrar constricciones de cantidades cinemáticas asociadas directamente con cotas observaciones dinámicas. Así mismo, explorar desviaciones del modelo estándar de la cosmología a corrimientos al rojo más altos en la evolución de Hubble, lo cual sería un indicador para identificar si modelos cosmológicos derivados de teorías $f(R)$ lograrían explicar regiones en el universo donde Λ CDM sufre de problemas en su construcción.

A Notación Tensorial

En esta sección se presentan algunas definiciones y resultados necesarios para la formulación de la Relatividad General.

Definición 1. Espacio Vectorial [69].

Un espacio vectorial V sobre un campo F consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones (llamadas adición y multiplicación por escalares, respectivamente), tal que para cualquier par de elementos x y y en V exista un elemento único $x + y$ en V , y para cada elemento a en F y cada elemento x en V exista un elemento único ax en V , de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

- a) Para toda x, y en V , $x + y = y + x$ (conmutatividad de la adición).
- b) Para toda x, y, z en V , $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad de la adición).
- c) Existe un elemento en V llamado 0 tal que $x + 0 = x$, para toda x en V .
- d) Para cada elemento x en V , existe un elemento y en V tal que $x + y = 0$.
- e) Para cada elemento x en V , $1x = x$.
- f) Para cada par a, b de elementos en F y cada elemento x en V , $(ab)x = a(bx)$.
- g) Para cada elemento a en F y cada par de elementos x, y en V , $a(x+y) = ax+ay$.
- h) Para cada par de elementos a, b en F y cada elemento x en V , $(a+b)x = ax+bx$.

Definición 2. Subespacio Vectorial.

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V . Entonces, W es un subespacio de V si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- a) $0 \in W$.
- b) $x + y \in W$ siempre que $x \in W$ y $y \in W$.
- c) $ax \in W$ siempre que $a \in F$ y $x \in W$.

Definición 3. Combinación Lineal.

Sea V un espacio vectorial y S un conjunto no vacío de V . Se dice que un vector x de V es una combinación lineal de elementos de S , si existe un número finito de elementos y_1, y_2, \dots, y_n en S y escalares a_1, a_2, \dots, a_n en F tales que $x = a_1y_1 + \dots + a_ny_n$. En este caso, decimos que x es una combinación lineal de y_1, \dots, y_n .

Definición 4. Dependencia e Independencia Lineal.

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe un número finito de vectores distintos x_1, \dots, x_n en S y escalares a_1, \dots, a_n en F , no todos cero, tales que $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. También podemos describir esta situación diciendo que los elementos de S son linealmente dependientes.

Se dice que un subconjunto S de un espacio vectorial, que no es linealmente dependiente, es linealmente independiente. Como anteriormente, describiremos a menudo esta situación diciendo que los elementos de S son linealmente independientes.

Definición 5. Base de un Espacio Vectorial.

Una base β para un espacio vectorial V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera a V . (Si β es una base de V , diremos a menudo que los elementos de β forman una base de V .)

Definición 6. Transformación Lineal.

Sean V y W espacios vectoriales. Una función $T : V \rightarrow W$ se llama transformación lineal de V en W si para toda $x, y \in V$ y $c \in F$ tenemos que

$$\text{a) } T(x + y) = T(x) + T(y).$$

$$\text{b) } T(cx) = cT(x).$$

Definición 7. Espacio Dual.

Para un espacio vectorial V sobre F , definimos al espacio dual de V como el espacio vectorial $\mathcal{L}(V, F)$, denotado por V^* . Por tanto, V^* es el espacio vectorial que consta de todas las funciones lineales en V .

Definición 8. Producto Interior.

Sea V un espacio vectorial sobre F . Un producto interior en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores x y y en V un escalar en F , representado como (x, y) , tal que para toda x, y y z en V y toda c en F se tiene que:

$$\text{a) } (x + z, y) = (x, y) + (z, y).$$

$$\text{b) } (cx, y) = c(x, y).$$

$$\text{c) } \overline{(x, y)} = (y, x), \text{ donde la barra indica conjugación compleja.}$$

d) $(x, x) > 0$ si $x \neq 0$.

Por ejemplo, si $V = F^n$. Para $x = (a_1, \dots, a_n)$ y $y = (b_1, \dots, b_n)$ defínase

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i},$$

(x, y) satisface las cuatro condiciones del producto interior y se denomina producto ordinario en F^n o simplemente, producto punto.

Definición 9. Convención de Suma de Einstein (para vectores).

Esta convención se utiliza para facilitar la escritura y cálculo entre vectores. Podemos ejemplificarlo con el producto punto entre los vectores $A = (A_1, A_2, A_3)$ y $B = (B^1, B^2, B^3)$, entonces

$$A \cdot B = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = \sum_{i=1}^3 A_i B^i,$$

el convenio nos dice que si tenemos índices repetidos, esto indica una suma, entonces, el producto punto quedaría:

$$\sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_i B^i.$$

A los índices repetidos, que son donde se realiza la suma, se les conoce como índices mudos, en caso de existir otro(s) índice(s) y que no esté(n) repetido(s), los llamaremos índices libres.

Definición 10. Vectores Base.

Decimos que los vectores base en un sistema de coordenadas, son tangentes a las líneas coordenadas, así podemos escribir a los vectores base de la siguiente manera:

$$e_\alpha = \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Con esta definición y el convenio de sumas de Einstein, podemos escribir un vector en función de los vectores base de algún sistema coordinado: $V = V^\alpha e_\alpha$.

Definición 11. Espacio Métrico [70].

Un espacio métrico consta de un conjunto X y de una función $d : X \times X \rightarrow R^+$, llamada métrica, o distancia que satisface los siguientes axiomas:

- a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- b) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$.
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

Definición 12. Espacio Topológico.

Sea X un conjunto. Una topología en X es una familia \mathcal{A} de subconjuntos en X , llamados abiertos, tal que cumple los siguientes dos axiomas

- a) Si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{I} arbitrario, entonces $\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$.
- b) Si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{I} finito, entonces $\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$.

A la pareja (X, \mathcal{A}) se le denomina espacio topológico.

Definición 13. Espacio Topológico de Husdorff [71].

Denotado por χ , llamamos así aun espacio que cumple la propiedad:

- a) si cuando x, y son dos puntos distintos en χ , \exists un abierto que contiene a solo uno de ellos.
- b) si cuando x, y so dos puntos distintos en χ , \exists un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$.
- c) si cuando $u, v \in \chi$ son dos puntos distintos, \exists abiertos disjuntos $U, V \in \chi$ tales que $u \in U, v \in V$.

En otras palabras, un espacio es de Hausdorff si y solo si puntos distintos en el espacio tienen entornos disjuntos.

Definición 14. Variedad Diferenciable [72].

Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de mapeos inyectivos $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tal que:

- a) $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
- b) para cualquier par α, β , con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y los mapeos $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ son diferenciables.
- c) La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es maximal respecto a las condiciones 1 y 2.

El par (U_α, x_α) (o el mapeo x_α) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una parametrización (o sistema de coordenadas) de M en p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ se denomina entonces vecindad de coordenadas en p . Podemos también denotar a la parametrización de la siguiente forma:

$$x^a = x^a(u), a = 1, 2, \dots, n.$$

Definición 15. Subvariedad.

Sea A de dimensión m , tal que $A \subset M$ y $m < n$, la parametrización se escribe como sigue

$$x^a = x^a(u^1, \dots, u^m), a = 1, 2, \dots, n.$$

Para el caso $m = n - 1$ denominaremos la siguiente parametrización como una hipersuperficie

$$x^a = x^a(u^1, \dots, u^{n-1}), a = 1, 2, \dots, n$$

Definición 16. Vector Tangente [72].

Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es llamada una curva (diferenciable) en M . Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de funciones sobre M que son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : D \rightarrow R$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}, f \in D.$$

Definición 17. Espacio Tangente.

El espacio tangente en un punto p sobre la variedad M , denotado T_pM es el conjunto asociado a cada punto de una variedad diferenciable, el cual está formado por el conjunto de todos los vectores tangentes a ese punto, la dimension del espacio tangente debe ser la misma que la de la variedad. A la unión de todos los espacios tangentes lo denominamos haz tangente.

Definición 18. Espacio Cotangente.

Definimos al espacio dual de T_pM , también llamado espacio cotangente de la siguiente forma

$$T_p^*M = \{f : T_pM \rightarrow R\},$$

con f una función lineal. A los elementos del espacio cotangente los denominamos 1-formas o covectores. Podemos ver esto como

$$(\omega^\alpha, V) = (\omega^\alpha, V^\beta e_\alpha) = V^\beta (\omega^\alpha, e_\alpha) = V^\beta (dx^\alpha, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = V^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = V^\beta \delta_\beta^\alpha = V^\alpha.$$

Definición 19. Tensor.

Este concepto fue clave para la formulación de la relatividad general, ya que los tensores nos permiten pasar de un sistema de referencia a otro y seguir siendo invariantes. Los tensores son funciones $S(a, b)$, donde a son covectores (1-formas) y b son vectores, los cuales son mapeados a los reales. Sea

$$S : \overbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}^{n\text{-veces}} \times \overbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}^{m\text{-veces}} \rightarrow R,$$

un mapeo multilinear. Decimos que S es un tensor de rango (m, n) .

Definición 20. Producto Tensorial.

Sea S un tensor de rango (μ, ν) y T un tensor de rango (α, β) , definimos al producto tensorial como

$$U = S \otimes T.$$

$$U : T_\alpha M^{\mu+\alpha} \times T_\alpha^* M^{\nu+\beta} \rightarrow R.$$

donde U es un tensor de rango $(\mu + \alpha, \nu + \beta)$.

Definición 21. Transformación entre Tensores [38].

Este tipo de transformaciones tiene su utilidad a la hora de pasar de un sistema de referencia a otro y tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} X'^\alpha &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} X^\beta, \\ X'^{\alpha\beta} &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} X^{\gamma\delta}, \\ X'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} X_{\gamma\delta}, \end{aligned}$$

llamamos tensores contravariantes a las expresiones con índices en la parte superior y tensores covariantes a las que tienen índices en la parte inferior.

Definición 22. Transformación de Coordenadas.

A la transformación la denotaremos por

$$\Lambda_{\beta'}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}.$$

Particularmente tenemos la transformación de los vectores base de un sistema coordenado a otro

$$e_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^\beta e_\beta.$$

En general, la transformación de cualquier vector de un sistema de referencia a otro será

$$V^{\alpha'} = \Lambda_{\beta'}^{\alpha'} V_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} V^\beta.$$

Definición 23. Métrica.

Sea $T^{(0,2)}$ el espacio de tensores de rango $(0, 2)$, definimos la métrica g sobre M de la siguiente manera

$$g : M \rightarrow T^{(0,2)},$$

$$p \mapsto (\cdot, \cdot),$$

y puede ser escrita como $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, con $g_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu)$.

Si la métrica, además de cumplir con las propiedades del producto interior, es positiva definida, se llamará métrica riemanniana, en caso de no hacerlo, será una métrica pseudoriemanniana.

Definición 24. Contracción de Índices.

El manejo de índices, o como se le dice comunmente, subida y bajada de índices, se suele utilizar en relatividad y se logra gracias a la métrica. Por ejemplo para bajar un índice, digamos de T^μ , se hace de la siguiente manera (con ayuda del convenio de sumas de Einstein)

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu,$$

o para subir el índice de T_μ

$$T^\mu = g^{\mu\nu} T_\nu,$$

con $g^{\mu\nu}$ la inversa de la métrica.

Definición 25. Variedad Riemanniana.

Sea (M, g) una variedad con una métrica. Si la métrica es riemanniana, denominaremos a la variedad como variedad riemanniana. En caso de que la métrica sea pseudoriemanniana, tendremos una variedad pseudoriemanniana o variedad lorentziana.

Definición 26. Derivada Covariante.

La derivada usual al aplicarse a un tensor, no siempre da como resultado otro tensor, para eso se construye la derivada covariante, al estar trabajando entre varios sistemas de referencia y conociendo la necesidad e importancia de la derivada, es necesario tener una que siempre de como resultado otro tensor. Definimos la derivada covariante (tanto para vectores covariantes como contravariantes):

$$\nabla_\gamma X_\alpha = \partial_\gamma X_\alpha - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta X_\beta,$$

$$\nabla_\gamma X^\alpha = \partial_\gamma X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta,$$

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ se define como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\phi}{\partial x'^\gamma} \Gamma_{\epsilon\phi}^\delta - \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\delta \partial x^\gamma}.$$

Definición 27. Conexión de Levi-Civita.

Para la formulación de la relatividad general, Einstein trabajó con un espacio curvo, pero sin torsión. Con estas condiciones existe una única métrica que cumple

$$\nabla g = 0,$$

y esta es llamada conexión de Levi-Civita, podemos determinar sus coeficientes de la siguiente manera

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}),$$

(las comas en los subíndices denotan la derivada usual) también llamados, símbolos de Christoffel.

Definición 28. Tensor de Riemann.

Definimos de la siguiente forma al tensor de curvatura o tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = \partial_c\Gamma_{bd}^a - \partial_d\Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e\Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e\Gamma_{ed}^a,$$

y cuyos coeficientes satisfacen

$$R_{\alpha[\mu\nu;\sigma]}^{\beta} = 0,$$

a esta relación se le conoce como identidad de Bianchi (el ; denota la derivada covariante). Y poseen las siguientes simetrías

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}.$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}.$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Definición 29. Tensor de Ricci y Escalar de Ricci.

Partiendo del tensor de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$, definimos al tensor de Ricci haciendo la contracción de índices

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha},$$

ahora, con ayuda de la métrica, contraemos los índices del tensor de Ricci para obtener el escalar de curvatura o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Definición 30. Tensor de Einstein.

Definimos al tensor de Einstein con ayuda de los últimos dos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

y satisface la propiedad

$$G_{\mu\nu;\nu} = 0.$$

Bibliografía

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- [2] S. Ramos-Sánchez, *Relatividad para Futuros Físicos*. Las Prensas de Ciencias, 2018.
- [3] L. G. Jaime, L. Patino, and M. Salgado, “f(R) Cosmology revisited,” 6 2012.
- [4] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified Gravity and Cosmology,” *Phys. Rept.*, vol. 513, pp. 1–189, 2012.
- [5] A. A. Starobinsky, “Disappearing cosmological constant in f(R) gravity,” *JETP Lett.*, vol. 86, pp. 157–163, 2007.
- [6] W. Hu and I. Sawicki, “Models of f(R) Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 064004, 2007.
- [7] E. V. Linder, “Exponential Gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 123528, 2009.
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [9] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 7 2019.
- [10] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 1985.
- [11] G. Rave Franco, “Análisis de sistemas dinámicos en teorías teleparalelas a la gravedad,” 2021.
- [12] C. Escamilla Rivera and del Vecchy Barrón C., *Cosmología de Precisión*. Prensas de Ciencias, 2022.
- [13] A. Guarnizo, “Cosmological Models in Modified f(R) Gravity Theories,” other thesis, 11 2012.
- [14] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. 2003.
- [15] A. Einstein, “Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1915, pp. 831–839, 1915.

- [16] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 220, pp. 291–333, 1920.
- [17] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 15, pp. 168–173, 1929.
- [18] P. M., “Introduction to cosmology, Lecture 7, Thermal History of the Universe,”
- [19] K. M., “Lecture Week 3, Thermal History of the Universe,”
- [20] V. Springel *et al.*, “Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution,” *Nature*, vol. 435, pp. 629–636, 2005.
- [21] O. Lahav, “Observational tests for the cosmological principle and world models,” *NATO Sci. Ser. C*, vol. 565, pp. 131–142, 2001.
- [22] A. R. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. 1998.
- [23] L. G. Jaime, M. Jaber, and C. Escamilla-Rivera, “New parametrized equation of state for dark energy surveys,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 8, p. 083530, 2018.
- [24] G. Gamow, “The Evolution of the Universe,” *Nature*, vol. 162, no. 4122, pp. 680–682, 1948.
- [25] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, “The origin of chemical elements,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 803–804, 1948.
- [26] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s,” *Astrophys. J.*, vol. 142, pp. 419–421, 1965.
- [27] F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helv. Phys. Acta*, vol. 6, pp. 110–127, 1933.
- [28] F. Zwicky, “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae,” *Astrophys. J.*, vol. 86, pp. 217–246, 1937.
- [29] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” *Astrophys. J.*, vol. 159, pp. 379–403, 1970.
- [30] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr., and N. Thonnard, “Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa through Sc,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 225, pp. L107–L111, 1978.
- [31] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999.

- [32] A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, vol. 116, pp. 1009–1038, 1998.
- [33] L. A. Ureña López, V. H. Robles, and T. Matos, “Mass discrepancy-acceleration relation: A universal maximum dark matter acceleration and implications for the ultralight scalar dark matter model,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 4, p. 043005, 2017.
- [34] S. Weinberg, *Cosmology*. 2008.
- [35] A. H. Guth, “Inflation,” 11 1992.
- [36] A. H. Guth, *The inflationary universe: The quest for a new theory of cosmic origins*. 1997.
- [37] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess, “Tensions between the Early and the Late Universe,” *Nature Astron.*, vol. 3, p. 891, 7 2019.
- [38] C. Zamora Muñoz, “Cosmografía para Modelos de la Energía Oscura Dinámica,” 2021.
- [39] M. Visser, “Cosmography: Cosmology without the Einstein equations,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 37, pp. 1541–1548, 2005.
- [40] S. Capozziello, R. D’Agostino, and O. Luongo, “Extended Gravity Cosmography,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 28, no. 10, p. 1930016, 2019.
- [41] R. Utiyama and B. S. DeWitt, “Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields,” *J. Math. Phys.*, vol. 3, pp. 608–618, 1962.
- [42] K. S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 16, pp. 953–969, 1977.
- [43] A. A. Starobinsky, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,” *Phys. Lett. B*, vol. 91, pp. 99–102, 1980.
- [44] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 498–501, 1971.
- [45] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor,” *J. Math. Phys.*, vol. 13, pp. 874–876, 1972.
- [46] R. P. Woodard, “Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 720, pp. 403–433, 2007.
- [47] K. S. Stelle, “Classical Gravity with Higher Derivatives,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 9, pp. 353–371, 1978.

- [48] G. Calcagni, S. Tsujikawa, and M. Sami, “Dark energy and cosmological solutions in second-order string gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 22, pp. 3977–4006, 2005.
- [49] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f(R) theories,” *Living Rev. Rel.*, vol. 13, p. 3, 2010.
- [50] L. G. Jaime, L. Patino, and M. Salgado, “Robust approach to f(R) gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 024039, 2011.
- [51] V. Faraoni and S. Capozziello, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Dordrecht: Springer, 2011.
- [52] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner, “Is cosmic speed - up due to new gravitational physics?,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 043528, 2004.
- [53] G. J. Olmo, “Post-Newtonian constraints on f(R) cosmologies in metric and Palatini formalism,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 083505, 2005.
- [54] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, “Are f(R) dark energy models cosmologically viable?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 131302, 2007.
- [55] M. Fairbairn and S. Rydbeck, “Expansion history and f(R) modified gravity,” *JCAP*, vol. 12, p. 005, 2007.
- [56] C. Escamilla-Rivera, “Status on bidimensional dark energy parameterizations using SNe Ia JLA and BAO datasets,” *Galaxies*, vol. 4, no. 3, p. 8, 2016.
- [57] M. Jaber and A. de la Macorra, “Probing a Steep EoS for Dark Energy with latest observations,” *Astropart. Phys.*, vol. 97, pp. 130–135, 2018.
- [58] Y. Wang *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: tomographic BAO analysis of DR12 combined sample in configuration space,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 469, no. 3, pp. 3762–3774, 2017.
- [59] G.-B. Zhao *et al.*, “Dynamical dark energy in light of the latest observations,” *Nature Astron.*, vol. 1, no. 9, pp. 627–632, 2017.
- [60] S. de la Torre *et al.*, “The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS). Gravity test from the combination of redshift-space distortions and galaxy-galaxy lensing at $0.5 < z < 1.2$,” *Astron. Astrophys.*, vol. 608, p. A44, 2017.
- [61] D. J. Schlegel *et al.*, “Astro2020 APC White Paper: The MegaMapper: a $z > 2$ Spectroscopic Instrument for the Study of Inflation and Dark Energy,” *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol. 51, no. 7, p. 229, 2019.
- [62] J. D. Bowman, A. E. E. Rogers, R. A. Monsalve, T. J. Mozdzen, and N. Mahesh, “An absorption profile centred at 78 megahertz in the sky-averaged spectrum,” *Nature*, vol. 555, no. 7694, pp. 67–70, 2018.

- [63] R. Abbott *et al.*, “GW190412: Observation of a Binary-Black-Hole Coalescence with Asymmetric Masses,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 4, p. 043015, 2020.
- [64] M. Corman, C. Escamilla-Rivera, and M. A. Hendry, “Constraining extra dimensions on cosmological scales with LISA future gravitational wave siren data,” *JCAP*, vol. 02, p. 005, 2021.
- [65] C. Escamilla-Rivera, A. Hernández-Almada, M. A. García-Aspeitia, and V. Motta, “Linear perturbations spectra for dynamical dark energy inspired by modified gravity,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 30, no. 10, p. 2150077, 2021.
- [66] S. Capozziello and S. Tsujikawa, “Solar system and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by chameleon approach,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 107501, 2008.
- [67] S. D. Odintsov, D. Sáez-Chillón Gómez, and G. S. Sharov, “Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history?,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 12, p. 862, 2017.
- [68] C. Z. Munõz and C. Escamilla-Rivera, “Inverse Cosmography: testing the effectiveness of cosmographic polynomials using machine learning,” *JCAP*, vol. 12, p. 007, 2020.
- [69] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence, *Algebra Lineal*. 1982.
- [70] C. Prieto, *Topología Básica*. 2013.
- [71] C. Ivorra Castillo, *Topología*. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf>.
- [72] M. d. Carmo, *Riemannian Geometry*. 1992.