UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADOS POR TECNOLOGÍAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

PRESENTA: LEM. GABRIELA CONCEPCIÓN TUT AKÉ

TUTOR PRINCIPAL:

MTRO. VICTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ, FES ACATLÁN

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL:

DRA. MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VIDEGARAY, FES ACATLÁN

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA, FACULTAD DE CIENCIAS

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO, OCTUBRE DE 2023

Bendeciré al Señor en todo tiempo, no cesará mi boca de alabarlo.

Salmo 34: 2

DEDICATORIA

A Dios, porque de él, por él y para él, son todas las cosas.

A mis padres, Justo Pastor y Rosa Argelia, por ser un pilar fundamental para mí, por inculcarme desde siempre, la importancia del estudio y esfuerzo. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y empeño, gracias por su amor incondicional y por creer siempre en mí.

A mis hermanitos, Karina y Joaquín, por su apoyo y paciencia siempre, son el mejor regalo que Dios me pudo dar. Les dedico mi esfuerzo con el anhelo de que pronto pueden alcanzar sus propios objetivos.

A ti Diego, porque formas una parte importante de mi vida, por tu amor, cariño, paciencia, apoyo y consejo. Gracias por todo el tiempo que hemos compartido.

A los miembros de mi Comité Tutoral, que siempre me motivaron, apoyaron, corrigieron, me brindaron su tiempo, paciencia y comprensión.

A todas las personas que me han apoyado a llegar hasta aquí, tengan por seguro, que eso que me han enseñado lo llevo siempre conmigo.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, creador de todas las cosas, el que me ha dado la fortaleza para continuar en todo momento de mi vida.

A la máxima casa de estudios del país, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por permitirme llevar mi formación de estudios de posgrado en sus aulas virtuales.

Mi gratitud infinita a mi tutor principal, Mtro. Víctor José Palencia Gómez, por su paciente guía y generosidad, por ser ejemplo de la calidad humana que siempre debe prevalecer en un docente. Gracias por confiar desde el principio en este trabajo.

A la Mtra. Elena de Oteyza y Oteyza por sus revisiones siempre puntuales, gracias por sus invaluables consejos para mejorar este trabajo.

A la Dra. MariCarmen González Videgaray, por su paciencia y disposición para realizar las observaciones a este trabajo.

Al Dr. Víctor Manuel Ulloa Arellano y a la Mtra. Adriana Dávila Santos por aceptar formar parte de mi jurado y por la revisión de mi trabajo.

A mis profesores de la maestría que me apoyaron con sus conocimientos y experiencias, gracias por contribuir a mi formación integral a lo largo de este proceso.

A la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY), en particular a la Escuela Preparatoria Número Uno por brindarme la oportunidad de ejercer en ella mi labor docente.

A mis alumnos, por su valiosa participación. Gracias por motivarme a seguir preparándome y estar en constante actualización.

Finalmente agradezco a mi familia que siempre ha apoyado cada uno de mis pasos y decisiones.

RESUMEN

Escolarmente el álgebra es concebida como una simple generalización de la aritmética, pero el álgebra no es una extensión, ni histórica ni cognitiva de la aritmética. Para pasar de la aritmética al álgebra se supone un cambio de perspectiva en el estudiante del espacio: la concepción finita e infinita del mismo.

Por lo anterior, se plantea una investigación que analizará el proceso mediante el cual estudiantes de primer grado de preparatoria son introducidos al estudio de la resolución de problemas matemáticos para el desarrollo del pensamiento algebraico haciendo uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (esto con el software GeoGebra).

El estudio analizará las fases propuestas por Santos Trigo (2014) para la resolución de problemas, quien concibe que "los procesos de formulación de problemas, la búsqueda de métodos para resolverlos, los intentos de solución y sus soluciones contribuyen en la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático".

Para lograr el propósito de esta tesis se diseñó un estudio de carácter exploratorio, en donde los estudiantes participantes pertenecen a tres grupos de primer grado de bachillerato. Se diseñaron tres secuencias didácticas, la primera de tipo "tradicional" cómo comúnmente se trabaja en las aulas de clase, la segunda con un diseño basado en la resolución de problemas y la tercera diseñada a partir de la resolución de problemas con apoyo de la tecnología. Este trabajo pretende generar conclusiones válidas y aportar a la disciplina.

ABSTRACT

At school, algebra is conceived as a simple generalization of arithmetic, but algebra is not an extension, neither historical nor cognitive, of arithmetic. To pass from arithmetic to algebra, a change of perspective is assumed in the student of space: the finite and infinite conception of it.

Therefore, an investigation is proposed that will analyze the process by which first grade high school students are introduced to the study of solving mathematical problems for the development of algebraic thinking using Information and Communication Technologies (this with GeoGebra software).

The study will analyze the phases proposed by Santos Trigo (2014) for problem solving, who conceives that "problem formulation processes, the search for methods to solve them, solution attempts and their solutions contribute to the construction and development of mathematical knowledge".

To achieve the purpose of this thesis, an exploratory study was proposed, where the students belong to three groups of first grade of high school. Three didactic sequences were designed, the first of the "traditional" type, how one normally works in the classroom, the second with a design based on problem solving and the third designed based on problem solving with the support of technology. This work aims to generate valid conclusions and contribute to the discipline.

Contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

La matemática tiene un papel fundamental para la humanidad, es una de las actividades humanas más antiguas, que a lo largo de los siglos ha sido empleada con diversos propósitos. La matemática es un lenguaje preciso que favorece el pensamiento lógico, abstracto y racional, por lo que se espera que la matemática sea inculcada en la sociedad, pues, es útil para desenvolverse con éxito dentro de la misma. De ahí, que no se ponga en duda el papel fundamental que la matemática tiene en el currículo educativo del país.

Dada la importancia de la matemática en el desarrollo de la sociedad, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ha preocupado a profesores e investigadores, ya que, existen evidencias referentes a deficiencias en el aprendizaje de ésta. En particular en México, pruebas internacionales como PISA, posicionan al país por debajo de la media de los países que integran la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y pruebas nacionales como PLANEA también constatan esta realidad; por ejemplo en la prueba PLANEA del 2017 aplicada a estudiantes del nivel medio superior, en el área de matemáticas se registró que de los cuatro niveles de desempeño (donde el nivel IV es el deseable), el 66.2% de los participantes se encuentra en el nivel I, el 23.3% en el nivel II, el 8% en el nivel III y sólo el 2.5% en el nivel IV.

Estos resultados han originado un creciente interés por la búsqueda de una solución al deficiente desempeño en matemáticas, en particular, una de las áreas donde se observa gran dificultad en los estudiantes es el álgebra, la cual, forma parte esencial de la matemática escolar, al expresar de manera simbólica y eficiente ideas matemáticas inmersas en otros contextos y en la disciplina matemática.

El aprendizaje del álgebra no es una labor sencilla, las características de ésta, hacen que su aprendizaje no sea sencillo. En Caballero (2010, p. 2) se menciona que “los estudiantes se sienten más cómodos y seguros, al trabajar con objetos concretos, como lo es en aritmética, pero en álgebra, los objetos que se manejan son abstracciones que requieren de un esfuerzo cognitivo significativo por parte del alumno”.

Asimismo, Kieran (2007) menciona que se concibe al álgebra como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas, y esto desprovee al álgebra de un significado.

De esta manera, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha sido motivo de diferentes investigaciones, ya que, escolarmente el álgebra es concebida como una simple generalización de la aritmética, pero el álgebra no es una extensión, ni histórica ni cognitivamente de la aritmética. Para pasar de la aritmética al álgebra se supone un cambio de perspectiva en el estudiante del espacio: la concepción finita e infinita del mismo. Según el Grupo Azarquiel (1993) citado en Serres (2008, p. 176):

> El primer paso para aprender álgebra es adquirir el concepto de variable y en este sentido expresan que éste es un proceso lento, que se desarrolla a largo plazo. Para ellos el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos: generalización y simbolización.

Por lo anterior, se plantea una investigación que analizará el proceso mediante el cual estudiantes de primer grado de preparatoria son introducidos al estudio de la sintaxis algebraica en el contexto de la resolución de problemas haciendo uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC). El estudio analizará las fases propuestas por Santos Trigo (2014) para la resolución de problemas, quien concibe que "los procesos de formulación de problemas, la búsqueda de métodos para resolverlos, los intentos de solución y sus soluciones contribuyen en la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático".

El análisis de las fases se realizará con el fin de reportar cómo los elementos sintácticos de la representación algebraica son usados para resolver el problema matemático y obtener información sobre el fenómeno modelado del problema, además de cuál es el rol de la herramienta tecnológica en ese proceso.

El análisis considera un estudio de caso, a saber, tres grupos de estudiantes de primer grado de bachillerato, sin embargo, pretende generar conclusiones válidas y aportar a la disciplina. Es preciso mencionar que el estudio del álgebra es fundamental, ya que, "el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas." (Godino, Aké & Gonzato, 2012, p. 4)

Un interés particular de esta investigación es analizar el proceso mediante el cual los estudiantes se apropian de la sintaxis algebraica y los aspectos semánticos que el desarrollo de la sintaxis aporta a la resolución de problemas.

Además de lo anterior, y teniendo en cuenta el auge de la investigación y tendencias educativas de los últimos años en relación con el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas, se perfila el uso del software GeoGebra para este estudio, pues posibilita un tránsito flexible entre diferentes registros de representación.

Haciendo frente a las tendencias educativas, es necesario que los docentes incorporen actividades que fomenten el desarrollo del pensamiento matemático, sean significativas para los estudiantes, y ayuden a construir el conocimiento. De esta manera, la resolución de problemas puede aportar al análisis de los aspectos de la sintaxis algebraica mediados por la tecnología, y en su caso, hacer mejorar a los planes de estudio, con el fin de realizar una mejora educativa, haciendo énfasis en el primer grado de bachillerato, cuando se trabaja con el álgebra.

Pregunta de investigación

La resolución de problemas puede posibilitar la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático, si los problemas son adecuados, es decir si permiten la movilización de estrategias por parte de los estudiantes y en el proceso de resolución el estudiante utiliza los conocimientos adquiridos. Así, la pregunta de investigación que se aborda es la siguiente:

> ¿Cómo la resolución de problemas mediada por el uso de la tecnología (GeoGebra) permite la apropiación de la sintaxis algebraica en el nivel bachillerato?

Este estudio busca introducir la sintaxis algebraica y analizar los aspectos semánticos que el desarrollo de esta aporta al proceso de la resolución de problemas.

Hipótesis

Se anticipa que los elementos sintácticos del álgebra permiten hacer explícitas las relaciones entre las variables del problema y profundizar en su entendimiento. Por lo cual, se pretende diseñar una secuencia de actividades que permita analizar los cuatro pasos de la resolución de problemas, a saber, comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución (Polya, 1961 citado en Sosa, 2016), dicha secuencia se aplicará a un grupo de estudiantes de primer grado de bachillerato (Bachillerato General Universitario de la Universidad Autónoma de Yucatán.)

Objetivo del trabajo de investigación

Analizar el proceso de apropiación y el uso de la sintaxis algebraica en procesos de la resolución de problemas mediada por el uso de las tecnologías (GeoGebra), en el nivel bachillerato.

Objetivos específicos:

- Diseñar una secuencia de tareas que posibilite la introducción al uso de la sintaxis algebraica por medio de la resolución de problemas y el uso de GeoGebra.
- Analizar el proceso mediante el cual los estudiantes se hacen competentes en el uso de la sintaxis algebraica, en la resolución de problemas mediados por GeoGebra.

Este estudio, ayuda a reflexionar sobre la práctica docente, ya que, no solamente se debe hacer énfasis en el método que conduce a la respuesta correcta, sino, se debe mostrar que no siempre el primer método es el que conduce a la solución y ante todo problema matemático se necesita de un análisis previo, de esta manera, se pueden contrarrestar algunas de las creencias que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas, por ejemplo, el creer que en las matemáticas hay que memorizar métodos y más, en el trabajo con el álgebra.

Justificación

Polya fue uno de los primeros en realizar investigaciones referentes a la resolución de problemas, él define un problema como "aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata" (Polya, 1961, citado en Chavarría y Alfaro, 2002).

Otra definición de problema es "una tarea en la cual aparecen los siguientes componentes: interés por encontrar una solución, la no existencia de una solución inmediata, diversos caminos de solución y la atención de un individuo para emprender acciones para resolverlo" (Santos, 2014, p.61).

En ese sentido las definiciones anteriores coinciden, en que el estudiante debe emprender una serie de acciones para dar solución a un problema, así Polya desarrolló una metodología para la resolución de problemas, compuesta de cuatro pasos, a saber: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución. De esta manera, dada las dificultades que se han documentado respecto al álgebra escolar, es necesario un análisis del porqué de éstas. La resolución de problemas puede ayudar a identificar procesos cognitivos a los que se enfrentan los estudiantes ante un problema algebraico, en particular el uso de la sintaxis algebraica. Lo anterior, pretende ser analizado a partir del diseño de una secuencia de actividades y aplicación en un grupo de estudiantes de primer grado de bachillerato, las conclusiones servirán a la comunidad, con el fin de reconceptualizar las actividades que se usan en la práctica, para que éstas, sean acordes para poder fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico.

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos que, en resumen, tratan de lo siguiente:

Capítulo 1: Se presenta un panorama de investigaciones previas al problema de investigación, las cuales se consideran como antecedentes. Se expone la contextualización del problema con sus propósitos.

Capítulo 2: Se exponen los referentes curriculares que se tienen en torno al álgebra escolar, establecidos en la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) y el Modelo Educativo de Formación Integral (MEFI).

Capítulo 3: Contiene los fundamentos teóricos que guiaron el estudio, considerando, rutas y raíces del álgebra de acuerdo con Mason y la resolución de problemas propuesta por Santos Trigo.

Capítulo 4: Se presenta una descripción detallada de la metodología que se utilizó en el estudio: tipo de investigación, participantes en el estudio, instrumentos utilizados, análisis de datos y la forma en que se aplicaron.

Capítulo 5. Se realiza un análisis del comportamiento y las respuestas de los alumnos tomando como fundamento el marco teórico, puntualizando avances o cambios en la estructuración de las soluciones dadas por los estudiantes.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

Desde la década de los años 80 hasta la actualidad, diversos trabajos de investigación se han interesado en estudiar la transición hacia el pensamiento algebraico. Autores como por ejemplo Kieran (1981), Kaput (1987), Filloy y Rojano (1989), Herscovics y Linchevsky (1991) y Gallardo (2002) reconocen las dificultades que el estudio del álgebra escolar conlleva y los cambios profundos de pensamiento matemático que los estudiantes requieren para superarlas.

Trabajos como los de Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) y Kieran (1997) han presentado investigaciones y estrategias para la enseñanza del álgebra escolar que ponen de manifiesto diferentes formas de acceder y entender el álgebra.

El estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar ha sido un tema relevante para la investigación en Matemática Educativa. Este hecho ha llevado a diversos autores a proponer posibles “rutas” de enseñanza que ayuden a los estudiantes a superar las dificultades propias que conlleva el manejo de los aspectos sintácticos y semánticos del álgebra. Entre estas rutas, Kieran (1997) indica que el trabajo con las funciones posibilita el entendimiento de las literales de tres formas diferentes: 1) en relación funcional, 2) como incógnita y 3) como número generalizado, así como un tránsito flexible entre distintas representaciones matemáticas: algebraica, tabular y gráfica. La resolución de problemas aprovecha esta diversidad de posibilidades para analizar las acciones que emprende un individuo para resolver un determinado problema matemático (extramatemáticos o intramatemáticos).

De esta manera, la resolución de problemas se encuentra dentro del enfoque cognitivo, debido a que, no atiende a cuestiones sociales, sino a cómo el estudiante interpreta los problemas y las diferentes maneras de cómo resolverlos. Se considera que, los estudiantes deben ser sometidos o familiarizados al quehacer de la matemática, particularmente al medio en el que los matemáticos desarrollan ideas matemáticas. El resolver problemas en matemáticas implica utilizar diferentes representaciones, presentar conjeturas, dar significado a las soluciones, las cuales son habilidades del quehacer matemático.

En esta investigación se recurre a la resolución de problemas como una estrategia para abordar los contenidos escolares del álgebra y, en particular, para la introducción de su sintaxis. Diversos autores han estudiado asuntos en relación con la sintaxis algebraica a nivel escolar, tal es el caso de Filloy, Rojano y Solares (2010) quienes describen el cambio semántico requerido para extender la sintaxis de la resolución de ecuaciones lineales, a ecuaciones donde aparecen incógnitas que necesariamente deben ser expresadas en términos de otra incógnita. Filloy, Puig y Rojano (2008) presentan aspectos teóricos propios de los elementos sintácticos y semánticos del álgebra e introducen la noción de *Sistema Matemático de Signos* para estudiar los pormenores de la apropiación del álgebra.

Otra de las líneas de investigación relacionadas con el álgebra escolar y más desarrolladas en los últimos años es la correspondiente al uso de herramientas tecnológicas digitales (TIC) Artigue (2011) y Rojano (2014) resaltan las posibilidades manipulativas, gráficas, dinámicas y operatorias que los programas de software diseñados para la enseñanza de las matemáticas presentan, y proponen que el uso de las TIC en el aula no sólo puede transformar las maneras en las que tradicionalmente se han enseñado y aprendido las matemáticas, sino que además puede modificar las matemáticas escolares en sí mismas y por ende el currículo.

Los avances de la investigación en lo referente a la implementación de las TIC en el aula ponen de manifiesto que un software como GeoGebra posee potencialidades gráficas y dinámicas que aportan ventajas considerables en el trabajo con funciones, como la posibilidad de hacer uso de diferentes representaciones. Es por ello por lo que para este estudio se analizará el rol que desempeñará GeoGebra en la resolución de problemas.

1.1 PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Para el tránsito de la aritmética al álgebra de igual forma debe considerarse el cambio de una serie de símbolos de las operaciones, por ejemplo, el caso del signo igual. En Serres (2008, p. 178) se menciona:

> El signo igual en aritmética se usa casi siempre con carácter unidireccional: a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado. En este caso el signo igual sirve para conectar el problema con el resultado numérico.
>
> $$Ejemplo: 312 + 405 = 717.$$
>
> En álgebra, el signo igual tiene un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. A veces indica restricciones, como en el caso de las ecuaciones donde las igualdades sólo son ciertas para algunos valores.
>
> $$Ejemplo: \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3 = x - y \end{cases}$$

Conviene mencionar que una ecuación debe ser entendida como un modelo variacional, y en Serres (2008, p. 180) se propone “trabajar en su construcción e iniciar su enseñanza basándose en contextos intramatemáticos de la aritmética y de la geometría, como extramatemáticos de situaciones reales”.

Es por ello por lo que no debe considerarse al álgebra como una generalización de la aritmética, ya que implica más que eso, si bien, guardan relación, por ejemplo, si hay dificultades en las operaciones aritméticas, es posible que también las haya en las operaciones algebraicas también implica otras consideraciones, como las que ya han sido mencionadas.

El álgebra tiene sus propias raíces, las cuales, no necesariamente son deducibles de las relaciones aritméticas. Así, “la existencia de ciertas continuidades entre el álgebra y la aritmética crea conflictos sobre la definición y extensión del álgebra” (García, 2015, p. 14).

Escolarmente, se concibe como una manipulación de símbolos, de ahí que Kieran (1996) caracteriza al álgebra escolar como actividades "meta level", en otras palabras, aquellas actividades que pueden realizarse sin usar álgebra o que se utiliza sólo como una herramienta. El álgebra va más allá, es una manera de pensar y representar situaciones, tiene su propio lenguaje y sintaxis.

1.2 PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

Para pasar de la aritmética al álgebra se supone un cambio de perspectiva en el estudiante del espacio: la concepción finita e infinita del mismo. Según el Grupo Azarquiel (1993) citado en Serres (2008, p. 176):

> El primer paso para aprender álgebra es adquirir el concepto de variable y en este sentido expresan que éste es un proceso lento, que se desarrolla a largo plazo. Para ellos el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos: generalización y simbolización.

En el álgebra escolar, el concepto de variable y el de incógnita, son tomados como sinónimos, sin embargo, es preciso mencionar que no lo son, la incógnita hace referencia a un valor especifico, fijo, que no varía y que cumple ser solución de una ecuación, es decir se ignora algo, pero no del todo, ya que existe una relación que se debe cumplir. Originalmente la incógnita surgió en ejercicios como el que se presenta a continuación

$$\boxed{\ ?\ } + 7 = 12$$

Figura 1. Ejercicio de surgimiento de la incógnita.

Estos ejercicios eran presentados en primaria, para proporcionar un acercamiento al álgebra y la intención que lo genera fue buena, pero lo pedagógico no "encajó" con lo conceptual en matemáticas. El término incógnita debe desaparecer poco a poco del álgebra escolar, lo adecuado es hacer referencia al concepto de variable.

El concepto de variable hace referencia al comportamiento de un modelo, por ejemplo, de la minimización de un costo, construcción de una casa, entre otros, es decir cuantifica y cualifica lo variacional. No solamente considera un valor específico.

Respecto a la generalización, se entiende como aquel proceso que permite identificar en situaciones concretas algún aspecto común y también transferir a una situación propiedades de otra. Por simbolización se entiende aquel proceso que permite expresar de forma generalizada lo común de las situaciones, es decir, expresa la generalización. Para Kaput (1999, p. 6) la generalización consiste en:

> Extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones a lo largo y entre ellos.

La generalización potencializa el estudio de las relaciones y la comprensión de estructuras matemáticas. Es preciso mencionar que un escenario inherente al estudio de la generalización es el trabajo con representaciones figurales y numéricas, a partir de la identificación de patrones. Al respecto se presenta el siguiente ejemplo:

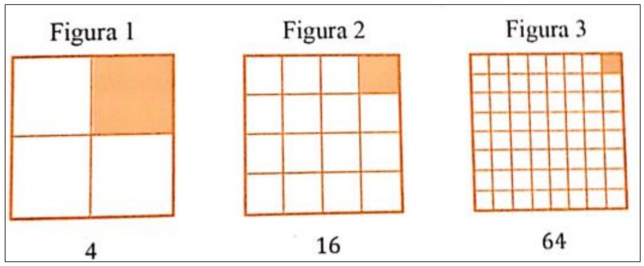


Figura 2. Representación numérica y figural (Aparicio, Sosa, Torres & Gómez, 2018, p.51)

Es posible identificar que cada figura está formada por cuadrados, que se obtienen de dividir en cuatro partes iguales cada cuadrado de la figura anterior. Esto induce a reconocer una regularidad entre las figuras "la cantidad de partes en cada una va aumentando rápidamente al multiplicar sucesivamente la cantidad de elementos de la figura anterior por 4" (Aparicio *et al*, 2018, p.52).

Para el ejemplo existe un patrón numérico, el cual corresponde a las potencias de 4, y con el cual se puede establecer un modelo matemático que determine la cantidad de cuadrados en la figura en la posición n:

$$c = 4^n, n \in \mathbb{N}$$

Al respecto, para lograr que los estudiantes generalicen patrones numéricos, se propone incorporar tareas de movilización de los procesos cognitivos que constituyen la generalización, tales como: "reconocer lo común o invariante, establecer y abstraer un patrón y formular una ley que represente la relación entre las instancias o casos particulares de situaciones progresivas" (Aparicio et al, 2018, p.52).

Estos autores resaltan la concepción de la generalización como un proceso y un producto. Como proceso precisa del establecimiento y la abstracción de un patrón para transitar de lo particular a lo general. Como producto adquiere la forma de ley, fórmula, regla o conclusión general. Puede expresarse de forma verbal, algebraica, geométrica o gráfica, esto dependerá de las herramientas matemáticas con las que cuente el alumno, así como de su maduración cognitiva. Proponen el trabajo con ejercicios del siguiente estilo:

Tarea 1. En la siguiente tabla se muestran cantidades de dinero ahorrada por una persona mensualmente:

No. de mes	1	2	3	5
Ahorro	$10	$40	$160	$2,560

a) Determinar la cantidad de dinero ahorrada en el cuarto y en el sexto mes, si continúa ahorrando de esa manera.
b) Proponer un método general para calcular el ahorro obtenido en cualquier mes.

Tarea 2. Considérese la siguiente secuencia de relaciones numéricas con potencias.

a) $8^5 \times 8^0 = (\quad)$
b) $3^6 \times (\quad) = 3^6$
c) $(\quad) \times 4^0 = 4^7$
d) $(\quad) \times 10^0 = (\quad)$

En cada paréntesis, indíquese las potencias que hagan verdaderas las igualdades en cada relación. Posteriormente, redáctese una conclusión matemática a partir de las igualdades numéricas obtenidas.

1.3 NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN (JUAN GODINO)

Se diferencian tres niveles de razonamiento algebraico elemental que puede utilizarse para reconocer características algebraicas en la resolución de tareas matemáticas (Godino *et al*, 2012, p. 1). Es importante menciona que, el nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, así, dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea se definen distintos niveles de algebrización. Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

- *Generalización*. Generación o inferencia de intensivos.
- *Unitarización*. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
- *Formalización y ostensión*. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
- *Transformación*. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

Así, se presentan los niveles de algebrización (Godino et al, 2012, p. 9) con ejemplos de actividades perteneciente al razonamiento algebraico, propuestos por Kaput (2008).

Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que se refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Ejemplo 1. Calcula el término que falta: $1500 - 925 =$

Para resolver dicho ejercicio se utiliza el algoritmo usual de la sustracción, donde el signo igual expresa el resultado de la operación. Así, se trata de una actividad aritmética.

Ejemplo 2. El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo: El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan; 428 petunias.

En este ejemplo intervienen operaciones aritméticas aplicadas a números particulares y la igualdad representa el resultado de la operación. Si bien, el alumno debe reconocer cuál operación conviene utilizar, los procesos no se consideran parte del razonamiento algebraico.

Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que se refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.

En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

En este nivel se ponen en juego incógnitas, relaciones (ecuaciones) y simbología para cantidades desconocidas.

Ejemplo 1. Continúa la siguiente secuencia: rojo, azul, azul, rojo, azul, azul, …

Un alumno razona de la siguiente manera: Después de un rojo, siempre siguen dos azules y después de dos azules sigue un rojo. El alumno que razona de esta manera reconoce una regla general compatible con el conjunto finito de elementos dados que le permite ir generando sucesivamente los términos de la secuencia. Si el alumno se limita a escribir los términos que siguen en algunos casos, sin expresar alguna regla general la actividad sería de nivel 0.

Ejemplo 2. $a)\ 15 + 11 = 11\ +$ __; $b)\ 10 +$ _ $= 15 + 15;\ c)\ 3x = 672$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación. En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que se asigna un primer nivel de algebrización.

Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Ejemplo 1. Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Juan comienza con n monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n - 4$. Introduce $2n - 4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea, $2(2n - 4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, o sea:

$$2(2n - 4) - 4 = 0; 4n - 8 - 4 = 0; 4n - 12 = 0; n = 3$$

La solución es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax + B = C$.

Nivel consolidado de algebrización

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del *tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.*

<u>Ejemplo 1</u>. *Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?*

Sea T el número de taburetes y S el número de sillas. Como el total de taburetes y sillas deben sumar 6, entonces, $T + S = 6$. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los taburetes y las sillas, esto es, $3T + 4S = 20$. Como de $T + S = 6$ se obtiene que $T = 6 - S$; por tanto,$3(6 - S) + 4S = 20$, de donde $18 + S = 20$, obteniéndose finalmente que $S = 2$. Si $S = 2$, entonces $T = 4$. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

En ese sentido, es necesario favorecer la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y simbolización.

CAPITULO 2. CONTEXTO CURRICULAR

2.1 REFORMA INTEGRAL PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

La Educación Media Superior (EMS) en el sistema educativo mexicano tiene una doble finalidad: la capacitación en el ámbito laboral o dar opciones al alumnado de elegir entre diversas opciones de educación superior. En Alcántara & Zorrilla (2010, p. 40) se menciona que “la educación media superior es de un sólo nivel y, en general, tiene una duración de tres años o menos, dependiendo del plan de estudios. La edad típica de los alumnos oscila entre los 15 y los 17 años”.

Para la EMS en México se consideran tres modelos: bachillerato general o propedéutico, el bachillerato bivalente y la educación profesional técnica. Las características de dichos modelos se presentan a continuación (Alcántara & Zorrilla, 2010, p.46),

- En el caso del bachillerato general o propedéutico, el alumno accede al estudio de las diferentes disciplinas humanísticas, científicas y tecnológicas a fin de contar con una información y experiencia académicas que lo auxilien en la identificación de su campo de estudios profesionales.
- Para el bachillerato bivalente, se combina una formación profesional en el ámbito técnico con los estudios de bachillerato que ofrecen una preparación para los estudios superiores, preferentemente los de índole tecnológico.
- Los estudios de educación profesional técnica permiten la equivalencia con el bachillerato mediante la aprobación de seis cursos complementarios. Los títulos técnicos que ofrecen las opciones tecnológicas son de calidad profesional.

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2013, p.23) menciona que los tres modelos de bachillerato “se ofertan en una multiplicidad considerable de recipientes y en su impartición participa una cantidad muy importante de instancias normativas e instituciones”.

Así, ante la ausencia de una autoridad que estableciera normas y criterios generales para la organización de la EMS, la Subsecretaria de Educación Media Superior (creada en 2005), emprendió una reforma que contemplara un marco de organización común, para articular a las instituciones que ofrecen la EMS.

La RIEMS fue impulsada en el año 2008, siendo la respuesta de la Subsecretaria de Educación Media Superior para (INEE, 2013, p. 27),

> ordenar y articular a las instituciones e instancias que ofrecen este tipo de educación, dotar al nivel de identidad y pertinencia, a la vez que promueva la existencia de distintos tipos de opciones para atender la diversidad de contextos, necesidades e intereses de los jóvenes.

Entre las necesidades y demandas asociadas a la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) se sitúan mejorar la calidad, la cobertura y la equidad. En general se busca responder a las exigencias actuales de la sociedad y atender las características propias del estudiantado (Aparicio, 2012). La RIEMS consta de cuatro ejes de transformación, a saber (INEE, 2013):

Marco Curricular Común con base en competencias. Organizado alrededor de once competencias genéricas que son comunes a todos los subsistemas, así como de otras disciplinares y profesionales que ofrecen un amplio espacio para la diversidad. En paralelo, se ha establecido un perfil básico del egresado, compartido por todas las instituciones, y susceptible de adecuarse a la formación específica que cada institución ofrece, tanto en términos de preparación para el trabajo como en la adquisición de conocimientos disciplinares más complejos.

Definición y regulación de las modalidades de oferta. Se reorganizan y definen formalmente en siete modalidades para ofrecer servicios de educación media superior a poblaciones con distintos intereses, necesidades y contextos: presencial, intensiva, virtual, auto planeada, mixta, certificación por evaluaciones parciales y certificación por examen.

Mecanismos de gestión. La reforma propone:

- Formación y actualización de la planta docente.
- Generación de espacios de orientación educativa y atención a las necesidades de los alumnos (programas de tutorías, por ejemplo).
- Definición de estándares mínimos compartidos, aplicables a las instalaciones y al equipamiento.
- Profesionalización de la gestión escolar.
- Flexibilización para el tránsito entre subsistemas y escuelas.
- Evaluación para la mejora continua.

Certificación nacional complementaria. El Acuerdo 442 establece que “La certificación nacional que se otorgue en el marco del SNB, complementaria a la que emiten las instituciones, contribuirá a que la EMS alcance una mayor cohesión, en tanto que será una evidencia de la integración de sus distintos actores en un Sistema Nacional de Bachillerato”.

En Razo (2018, p. 104) se menciona que “La apuesta de la RIEMS en 2008 no era una tarea sencilla. Impulsaba cambios fundamentales tanto para el sistema educativo nacional como para la noción de escuela, aprendizajes y práctica docente”. En este sentido, se encuentran aspectos positivos en la RIEMS entre ellos: la articulación de los programas de distintas opciones de EMS del país, estar basada en competencias y aprendizajes significativos para la vida, en esta reforma se plasman metas ambiciosas, sin embargo, en México se carece de políticas educativas con una orientación sólida, así, hace falta una definición de etapas para lograr las transformaciones que se proponen en ella, lo cual, no será tarea fácil.

2.2 PERFIL DEL EGRESADO DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

El Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) está compuesto por 11 competencias denominadas genéricas, las cuales son transversales y, por tanto, “no se restringen a un campo específico del saber ni del quehacer profesional y su desarrollo no se limita a un campo disciplinar, asignatura o módulo de estudios". (Subsecretaría de Educación Media Superior, 2008, p.3)

Las principales características de las competencias genéricas son:

- Clave: aplicables en contextos personales, sociales, académicos y laborales amplios. Relevantes a lo largo de su vida.
- Transversales: relevantes a todas las disciplinas académicas, así como actividades extracurriculares y procesos escolares de apoyo a los estudiantes.
- Transferibles: refuerzan la capacidad de adquirir otras competencias.

En particular la competencia número cinco, es relevante para esta investigación, ya que, se menciona la resolución de problemas. Así, esta competencia perteneciente al eje "piensa crítica y reflexivamente" expresa: *Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.*

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
- Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- Construye hipótesis; y, diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

En ese sentido, se menciona que el alumno, al egresar de la Educación Media Superior debe ser capaz de plantear hipótesis y contar con las herramientas para probar la validez de éstas. Una de las herramientas para lograr esta competencia es el uso que hace de las tecnologías de la información y comunicación.

2.3 MODELO EDUCATIVO PARA LA FORMACIÓN INTEGRAL

El trabajo de investigación se desarrollará en la Escuela Preparatoria Uno, de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY). Actualmente, se ubica en la calle 41 S/N Ex Terrenos del Fénix CP 97155 de la ciudad de Mérida, Yucatán, México. Atiende a estudiantes que proceden principalmente de la zona oriente y sur de la Ciudad de Mérida, asimismo aproximadamente 20% de la población estudiantil proviene de municipios del interior del estado. Cuenta con una matrícula de 3600 alumnos aproximadamente, entre 15 y 18 años, distribuidos en dos turnos, matutino y vespertino.

La mayoría de los estudiantes pertenecen a un nivel socioeconómico medio-bajo, sin embargo, cuentan con los recursos necesarios para sus actividades académicas o en su caso optan por solicitar una beca al gobierno del estado o a la UADY. Entre las principales características de los jóvenes de la institución, se encuentra el acceso a una gran cantidad de información, sin embargo, en ocasiones carecen de las herramientas o de las habilidades para procesarla de manera efectiva y extraer lo que será útil o importante.

Una de las principales problemáticas a las que se enfrentan los jóvenes es la deserción escolar, ya sea por falta de recursos o por no acreditar asignaturas, ante esto se promueven programas de orientación y tutoría, para fortalecer su rendimiento académico y asegurar su permanencia en la institución. En particular, en la asignatura de matemáticas, se enfrentan con la falta de motivación, consideran que las matemáticas consisten en memorizar fórmulas, y resolver problemas que no tienen relación con la realidad. Así, es necesario trabajar con actividades que sean atractivas para ellos, dónde pueden aplicar sus conocimientos para solucionar problemas sociales.

De acuerdo con las tendencias educativas y necesidades de la sociedad, la preparatoria Uno concibe un bachillerato centrado en el estudiante, que reconoce la vinculación de la Educación Media Superior con el mercado laboral como una de sus estrategias más apremiantes, con la intención de que una elevada proporción de jóvenes perciba que la educación les brinda la preparación para el nivel superior, pero también las habilidades, competencias y capacidades para una inserción y desempeño laboral exitoso. Ante esto, adopta el Modelo Educativo de Formación Integral (MEFI) (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013) para responder a la Formación Integral del estudiante, por medio de la articulación de seis ejes: educación centrada en el aprendizaje, educación basada en competencias, responsabilidad social, innovación, flexibilidad e internacionalización.

En este sentido, se presenta la Tabla 1, referente a las características y elementos del MEFI.

Modelo Educativo para la Formación Integral	
Características	• El estudiante es el actor principal y su Formación Integral constituye el centro del modelo. • El constructivismo se mantiene como referente pedagógico. • Se promueve la resolución de problemas y el uso de escenarios reales de aprendizaje. • La innovación y flexibilidad se mantienen como ejes y se incorporan otros cuatro. • Se fortalece la innovación como eje del modelo.
Currículo	• El estudiante participa en la construcción de su perfil de egreso. • Se fortalece la diversidad de las modalidades de estudio. • Se promueve la movilidad nacional e internacional de estudiantes y profesores. • La internacionalización se extiende en el currículo, el proceso de enseñanza y aprendizaje, y en la función del profesor y el estudiante. • El currículo se organiza por créditos con base en el Acuerdo 279 de la SEP.
Rol del profesor	• Además de facilitador y tutor, es asesor y gestor. • Se define el perfil del profesor UADY.

Rol del estudiante	• El estudiante sigue siendo el actor principal del proceso de aprendizaje. • Se definen las competencias genéricas que debe desarrollar el estudiante UADY. • Se fortalece la menor actividad presencial y mayor actividad fuera del aula.

Tabla 1. Características y elementos del MEFI (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013)

Lineamientos fundamentales del MEFI

Desde sus orígenes la UADY promueve la formación de estudiantes de educación media superior y profesionales, con vocación para contribuir al desarrollo social y económico del estado, la región y el país. Así, se concibe una educación humanista, donde el estudiante es la razón de ser, de tal manera que, se promueve el crecimiento y desarrollo de seres humanos autónomos, libres, responsables y solidarios, con actitud responsable ante el ambiente, la sociedad y contribuya a la construcción de esta para que sea más justa y democrática. Para lograr lo anterior, se establecen los siguientes lineamientos fundamentales (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013, p.28):

a) Educación centrada en la persona, creando y propiciando ambientes de aprendizaje adecuados para el desarrollo de la autonomía del educando y su adaptabilidad en diversos contextos.

b) El proceso educativo fomenta la autonomía, la creatividad y la confianza en sí mismo; los aprendizajes son preparación para la vida, porque promueven el aprender a aprender, a hacer, a convivir, a ser y a emprender.

c) El aprendizaje es sinónimo de gestionar y construir conocimiento.

d) La educación se centra en la persona que aprende.

e) El profesor facilita y crea escenarios que propician aprendizajes significativos.

f) Los estudiantes se consideran personas únicas e irrepetibles, con necesidades de aprender y crecer.

g) Las actividades de aprendizaje propician el desarrollo de la autonomía del estudiante, la solución creativa a problemas y la capacidad de adaptarse con flexibilidad a las nuevas situaciones propias de una sociedad global en continuo cambio y evolución.

h) Los programas educativos fomentan el desarrollo de las competencias en el estudiante para la profesión y la vida.

i) La evaluación es parte del proceso educativo, es holística y transparente.

j) La flexibilidad crea condiciones que responden a las características y necesidades individuales, académicas y administrativas.

k) La innovación promueve transformaciones académicas, de gestión, y en todos los ámbitos concernientes al proceso educativo.

l) La internacionalización incorpora una dimensión y perspectiva en la Misión y en las funciones sustantivas de la Universidad.

m) La responsabilidad social se traduce en los impactos de las decisiones y actividades de la Universidad en la sociedad y el medio ambiente, mediante una conducta transparente y ética.

Dimensiones y ejes del MEFI

La intención de la Formación Integral es que los egresados de la educación media superior y superior sean ciudadanos con profunda conciencia de sí mismos, social y ecológica, con amplias capacidades para vivir, emprender y participar en un entorno multicultural, así como para aprender a lo largo de su vida.

La UADY concibe la Formación Integral como un proceso continuo que busca el desarrollo de todas las potencialidades del estudiante y su crecimiento personal en las cinco dimensiones que lo integran como ser humano, las cuales se describen a continuación (Universidad Autónoma de México, 2013, p. 30):

- **Física:** cuerpo, sentidos, sexualidad, motricidad, cuidado de la salud física; lo orgánico, la alimentación, el descanso.
- **Emocional:** reconocimiento y manejo adecuado de sentimientos y emociones como tristeza, enojo, felicidad, etcétera.
- **Cognitiva:** creatividad, ideas, imaginación, pensamiento formal y razonamiento lógico.
- **Social:** interacción y convivencia en un ambiente de tolerancia y respeto a los otros.
- **Valoral-actitudinal:** sentido de vida del ser humano, y tipo de relación que se puede establecer con el mundo y el medio ambiente.

Con lo anterior, en la Tabla 2 se describen las implicaciones que tiene la promoción de las cinco dimensiones de la formación integral, en la práctica docente (en matemáticas).

Dimensiones de la formación integral	Implicaciones
Física	Particularmente, en el caso de la asignatura de matemáticas se puede pensar que no existe implicación alguna con la dimensión física, sin embargo, en la práctica, se deben favorecer actividades como medir ciertos objetos (por ejemplo, cuando se trabajan con áreas y perímetros, proponer medir el área del aula de clases, de la cancha de la escuela o de algún otro espacio de la escuela), correr (vinculados con relación entre distancia y tiempo), asimismo, se deben entablar conversaciones con los estudiantes relativas al buen descanso y la correcta alimentación y los beneficios que traen para ellos.
Emocional	Mostrar empatía con las emociones que tienen los estudiantes, motivarlos a expresar sus emociones cuando están tristes, felices, cansados, entre otros, por ejemplo, cuando no realizan correctamente un ejercicio y sienten frustración, pedir que expresen el por qué creen que no obtuvieron la respuesta correcta, esto los ayuda a mejorar en ocasiones futuras.
Cognitiva	En el caso de la asignatura de matemáticas proponer actividades en las cuales los estudiantes desarrollen su creatividad, mejoren un razonamiento lógico,

	el cual les permita construir conocimientos significativos. Favorecer en estas actividades contextos familiares a los estudiantes en los cuales deben establecer ciertas relaciones.
Social	Promover la interacción entre alumnos en actividades recreativas, culturales y deportivas, asimismo en trabajos de la asignatura desarrollados con respeto y tolerancia.
Valoral-actitudinal	Mediante la promoción de la participación de estudiantes en voluntariados, concursos de emprendimiento y en proyectos para cuidar el medio ambiente, e incluso utilizando los conocimientos que han adquirido en la asignatura para dar solución a posibles problemáticas sociales.

Tabla 2. Dimensiones de la formación integral del MEFI (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013)

Es preciso mencionar que, en conjunto con las dimensiones, el MEFI promueve la Formación Integral del estudiante por medio de la interacción de seis ejes: Responsabilidad Social, Flexibilidad, Innovación, Internacionalización, Educación Centrada en el Aprendizaje y Educación Basada en Competencias. Estos ejes son fundamentales porque orientan el trabajo académico y administrativo de la Universidad. Así, en la Tabla 3 se presentan las implicaciones de estos ejes en la práctica.

Ejes del MEFI	Implicaciones
Educación Centrada en el Aprendizaje (ECA)	La ECA implica en la práctica docente promover el papel de guía en el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, y el papel de estos cómo activos en el proceso. Asimismo, promover un aprendizaje significativo, el aprender a aprender, aprender a hacer y el aprender a ser.
Educación Basada en Competencias (EBC)	Implica en la práctica docente ya no sólo considerar conocimientos, si no también, promover el desarrollo de habilidades, actitudes y valores. Considerar a la persona que aprende como un ser humano y cómo tal, para integrarse a la vida social, requiere más que conocimientos.
Responsabilidad Social (RS)	Implica en la práctica docente promover en los estudiantes la responsabilidad y reflexión sobre sus acciones y decisiones, y cómo éstas pueden afectar a la sociedad, al medio ambiente, entre otros. Proponer acciones para contrarrestar problemáticas sociales.
Internacionalización	Implica formar ciudadanos capacitados tanto a nivel nacional como internacional, principalmente favoreciendo lecturas en otros idiomas, consultar programas de estudio de escuelas de bachillerato de otros países, analizar las comparaciones y similitudes entre los mismos.
Flexibilidad	Adaptar actividades y estrategias de aprendizaje de acuerdo con las necesidades de cada grupo, variar en cuanto a recursos didácticos, entre otros.

Innovación	La innovación implica en la práctica docente, favorecer el uso de las TIC, crear diversos escenarios de aprendizaje, el diseño de materiales didácticos, entre otros.

Tabla 3. Ejes del MEFI (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013, p.31)

Perfil de profesor en el MEFI

Para la adecuada consecución del MEFI, es necesario dimensionar el rol del profesor, quien tiene la obligación de crear las condiciones de aprendizaje para el desarrollo de competencias; realizando actividades como facilitador, tutor, asesor, gestor y evaluador de los aprendizajes. En ese sentido, se presenta la Tabla 4 dónde se manifiestan situaciones que describen cada rol en la práctica docente.

Roles	Situaciones
Facilitador	Se considera para el rol del profesor como facilitador, recurrir a escenarios de aprendizaje reales que favorezcan el desarrollo de las competencias dentro y fuera del aula, y apoyar al estudiante en la construcción del conocimiento. Este rol se manifiesta en la planeación y situaciones que se presentan a los alumnos, de acuerdo con el contexto en el que se desarrollan, asimismo, en la disposición de ayudar a los estudiantes, utilizando los recursos pertinentes para propiciar un conocimiento de utilidad en la vida del estudiante.
Tutor	El rol de tutor implica guiar al estudiante en la toma de decisiones académicas, administrativas, personales y profesionales, para favorecer la permanencia y conclusión exitosa de su bachillerato profesional y motivarlos para continuar su formación en el nivel licenciatura. Se manifiesta cuando se motiva a los alumnos a prepararse para presentar las pruebas de desempeño y a entregar de la mejor manera sus actividades de aprendizaje, exhortarlos a concluir sus estudios para poder aspirar a un mejor empleo en un futuro no lejano.
Asesor	Este rol se manifiesta en la práctica cuando se organizan clases extras, algún material de apoyo para las pruebas de desempeño, ejercicios y problemas de repaso, con el fin de ayudar a los alumnos a mejorar y prepararse mejor. Las acciones anteriores pertenecen a este rol, ya que, el profesor apoya al estudiante en relación con dificultades encontradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje y orienta su buen desempeño académico.
Gestor	El rol de gestor implica el acceso a escenarios, recursos y contextos académicos a los que el estudiante por sí solo no podría acceder. Esto se observa en la práctica cuando se proporcionan una serie de nombres de libros que le ayudarían en el curso (enlaces y algunas bibliotecas dónde podrían conseguir el préstamo de un libro). Este rol también se observa cuando se gestiona la impartición de clases asesoría (para reforzamiento en la asignatura) y se crean escenarios que permitan a los estudiantes adquirir el conocimiento.

Evaluador	Este rol se identifica al diseñar la evaluación, proponer criterios y evidencias de desempeño, emitir juicios de valor en diversos momentos y circunstancias, y retroalimentar. Por ejemplo, cuando en la práctica docente, al inicio de cada tema se aplica un diagnóstico, esto, con el fin de evaluar la medida de adquisición de los conocimientos de los temas y sirva como una retroalimentación para reforzar conocimientos y para determinar en qué grado han adquirido los conocimientos los alumnos.

Tabla 4. Roles del profesor en el MEFI (Universidad Autónoma de Yucatán, 2013, p. 49)

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

La resolución de problemas es uno de los objetivos que se pretenden lograr con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El National Council of Teacher of Mathematics (2000, p.55) propone respecto a la resolución de problemas:

> La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo.

Es necesario mencionar que en cada época del desarrollo de la humanidad ha habido necesidades prácticas, por lo que el ser humano, quien por naturaleza es inquieto y curioso, ha buscado encontrar el por qué de las cosas, de esta manera, ha procurado el desarrollo de herramientas que le favorezcan en estas necesidades, estudiando aquello que contribuya a su bienestar. Usualmente los conceptos y resultados matemáticos tienen su origen en el mundo real y encuentran aplicaciones en aspectos prácticos de la vida diaria. Asimismo, se menciona que:

> Los conceptos del álgebra surgieron por la vía de la abstracción, como resultado del análisis y generalización de una inmensa cantidad de experiencia práctica. Cada uno de los conceptos surgió por la combinación de la experiencia práctica y de conceptos abstractos anteriores (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, 1976, p. 35).

En otras palabras, las necesidades prácticas de la vida fueron las que dieron pauta al surgimiento de los conceptos del álgebra. El ambiente en el que se desarrollaron los matemáticos influyó en sus descubrimientos y estudios, al igual que las necesidades de su época, es decir, les sirvió para resolver un problema. De ahí que, en los cursos de álgebra de nivel bachillerato, el dominio de esta área de las matemáticas se manifiesta en la resolución de problemas del entorno cotidiano.

La resolución de problemas como estrategia didáctica fue propuesta por Polya a mediados del siglo pasado, así, es necesario reconocer qué se entiende por resolución de problemas. Polya define un problema como “aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata”. (Polya, 1961, citado en Chavarría y Alfaro, 2002).

Otra definición del término problema es la que otorga Schoenfeld (1985, citado en Cardona, 2007), p. 20) “es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla”.

Asimismo, Santos Trigo (1997) considera que existe una dificultad de definir el término problema, la cual está ligada con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando éste intenta resolver una situación. En otras palabras, significa que una situación puede ser considerada como un problema para algunos alumnos y para otros no.

Resnick y Ford (1990, citados en Cardona, 2007, p. 20) consideran que la resolución de problemas implica que:

> Se debe aplicar alguna estrategia para determinar la meta del problema, la información de que se dispone y; cuál es la información que falta y que permitiría, o bien que se aplicase una estrategia de resolución conocida, o bien, que se invente una nueva solución.

Polya (1965, p.163) hace una diferenciación entre problemas rutinarios y no rutinarios, "se considera dentro de la categoría de problemas rutinarios a todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso sin ninguna originalidad, la traza de algún problema viejo". La definición de Polya considera lo que sucede comúnmente en el aula de clases, cuando un profesor resuelve un problema y al proponer otros a los alumnos, únicamente modifica datos y el alumno se limita a reproducir el proceso de resolución del problema resuelto por el profesor.

Polya distingue cuatro etapas al resolver un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Para cada etapa, el docente desempeña un rol fundamental, al supervisar y guiar el alcance de los alumnos en cada una de éstas.

Polya (1965, p.19) sugiere que el docente dirija cada etapa formulando preguntas clave, propone las siguientes:

> ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente, insuficiente o contradictoria para determinar la incógnita? ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Puede resolver una parte del problema o considerando sólo una parte de la condición? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo? ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

Al respecto Polya considera que la comprensión del problema es una etapa fundamental, donde, el alumno debe ser capaz de comprender la parte verbal del problema, de identificar las incógnitas y los datos, si hay una figura relacionada con el problema se debe dibujar y destacar datos e incógnitas. El docente debe guiar este proceso.

Situándose en la resolución de problemas a través del álgebra, se identifican una serie de conversiones, las cuales son cambios en las representaciones del problema (Duval, 1999). Identifica tres fases: del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, del lenguaje algebraico al lenguaje algebraico y del lenguaje algebraico al lenguaje cotidiano. Sugiere dar énfasis en las etapas de la primera y tercera etapas, pues, considera que es ahí donde los alumnos presentan las mayores dificultades de conversión., por ejemplo, al proponer una ecuación que lleve a la solución de un problema o al darle significado real a una respuesta que se presenta a través de una expresión algebraica.

La resolución de problemas implica que el alumno aplique y adapte diversas estrategias para resolver un problema, al respecto Cardona (2007, p.34) menciona que:

> La diversidad de estrategias con que cuenta un alumno va a depender de su capacidad para conectar sus ideas o conceptos matemáticos con la situación que está resolviendo, cuando los estudiantes pueden conectar sus ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera.

3.1 RUTAS Y RAÍCES HACIA EL ÁLGEBRA (MASON)

Desde la perspectiva de Mason et al (1985) el álgebra no puede considerarse ni enseñarse como un paquete separado que se inicia una vez que se haya terminado la lista de contenidos que corresponden al programa de aritmética o al de geometría, pues, el conocimiento algebraico está enclavado en todo el conocimiento matemático. La construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico.

La formación o construcción de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos sólo tiene lugar si el profesor logra que ellos se involucren en su propio aprendizaje, mediante el diseño y la organización de una variedad de situaciones de enseñanza ubicadas en contextos que les sean significativos; y un contexto significativo no necesariamente hace relación al contexto de las actividades de la vida diaria. Las situaciones del aula de clase deben ser planeadas sobre la base del conocimiento que los alumnos han construido.

Para estos autores el álgebra es un medio potente para comunicar ideas complejas y abstractas, es especialmente adecuado para expresar generalizaciones. Es preciso mencionar que, el álgebra contiene sus propias reglas de manipulación, las cuales tienen que ser aprendidas y manipuladas.

Ahora, al hacer referencia al álgebra escolar, esta recae en un nivel dónde es concebida como un juego de símbolos, dónde se aprenden habilidades aisladas sin ningún propósito claro, de ahí que, para la mayoría de las personas la experiencia algebraica es aburrida, difícil, sin sentido y confusa. Ante esto, Mason et al (1999, p. 3) mencionan:

> Muchas personas se pueden acordar de haber trabajado con la x y la y, con a y b; tal vez de haber manipulado letras y, si se les insiste, tal vez pueden acordarse de que trabajaron en la solución de ecuaciones. Pero aún aquellos que muestran una competencia superficial en el álgebra pueden manifestar sus dudas en relación con el propósito del estudio del álgebra.

Una posible razón de lo anterior es que no se establecen las relaciones explícitas con los cálculos aritméticos. Es preciso enfatizar que el álgebra permite el trabajo de lo particular a lo general, facilitando la formulación de varias generalizaciones. Así Mason et al (1999, p.16) afirman que “la generalidad es la vida de las matemáticas y el álgebra es el lenguaje con el cual se expresa esa generalidad”.

La generalización está presente en diversos contextos, no se restringe a las situaciones numéricas. Así, el aprendizaje humano envuelve la destilación de las experiencias individuales para convertirlas en principios generales más amplios. Expresar la generalidad es, en verdad, la esencia del pensamiento algebraico y una raíz vital del álgebra.

Mason et al (1999) concibieron cuatro raíces para el álgebra:

- Expresión de la generalidad.
- Reordenamiento y manipulación.

- Posibilidades y restricciones.
- Aritmética generalizada.

Es preciso mencionar que, entre éstas no existe ningún orden particular o jerarquía, más bien, constituyen una ruta hacia el álgebra, que proporciona la base para que, el docente pueda forjar una ruta hacia el álgebra que tenga un valor duradero para los alumnos. Por tanto, se presentan las raíces y las características más representativas de las mismas.

RAÍZ 1A. Expresión de la generalidad

El Grupo Azarquiel (1993) menciona que una de las vías por las que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo.

Por su parte Mason (1996) citado en Villa (2006, p.5) afirma que "la generalización es usualmente tomada como una actividad inductivamente empírica en la cual uno acumula muchos ejemplos y detecta el patrón, pero la generalización más poderosa es usualmente bastante diferente".

La generalización sugiere el desarrollo de una serie de habilidades que dan sentido a dicho proceso. En este orden de ideas Mason et al (1999, p.17) recomienda algunos aspectos que deben tenerse en cuenta en el proceso de la generalización, a saber:

- *Ver.* Es la identificación mental de un patrón o una relación, esto ocurre cuando se logra la identificación de un algo común.
- *Decir.* Ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido.
- *Registrar.* Es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo dibujos).

Se destaca que en el álgebra escolar existe un uso prematuro de los símbolos y se sugiere emplear una mayor cantidad de tiempo en los procesos de ver y decir, aunque estos, no parezcan de naturaleza algebraica.

"Ver" un patrón

Mason (1999) citado en Serres (2011, p.130) plantea que "la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en los niños y las niñas desde su ingreso a la escuela. Esta capacidad necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse".
Se propone el trabajo con un patrón como el que sigue y la manera en que puede ser empleado en el trabajo del aula escolar.

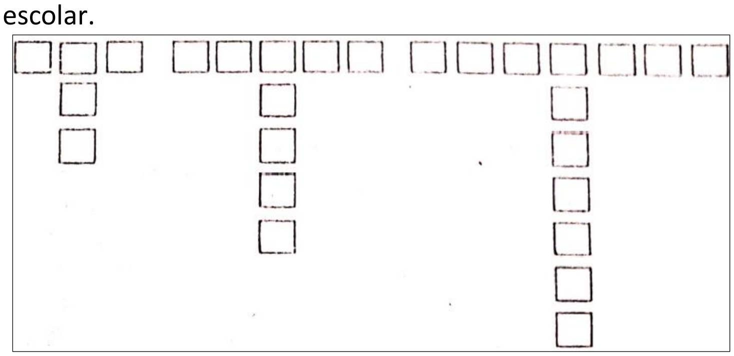


Figura 3. Ejercicio propuesto para el trabajo con patrones geométricos. Mason et al (1999, p. 17)

Mason *(1999)* sugiere iniciar el trabajo desde lo particular, por ejemplo, una actividad a desarrollar utilizando el patrón anterior, es solicitar a los alumnos lo siguiente:

- Dibujar la figura que sigue en la secuencia.
- Describir las figuras como si lo hiciera para alguien que no las ha visto, la descripción debe permitir que la persona pueda dibujar la secuencia.
- Escribir una regla que ayude en la producción de la secuencia que crece.
- ¿Cuántos cuadros se necesitan para la figura número 10, para la figura número 37, etc.?

Esta actividad se centra en observar cómo las figuras crecen, y es razonable hacer preguntas a los alumnos como las siguientes:

- ¿Cómo se mueve usted de la primera figura a la segunda?
- ¿Y desde la segunda a la tercera?
- ¿Qué es común en estos movimientos?

Hay que recordar que la generalidad usualmente surge en respuesta a la pregunta: ¿qué es lo que es igual (o tienen en común) …?

De esta manera el iniciar con casos particulares (por ejemplo, la primera pregunta) permite establecer varias conjeturas, que al final, deben ser probadas para ver si expresa propiedades generales del patrón como un todo. Un punto importante para tener en cuenta es que, pueden surgir muchas expresiones de un mismo patrón, por tanto, no solamente se le debe dar importancia a que el patrón era así, sino también al ver por qué éste era como era, por qué esto siempre sucede, es uno de los aspectos más importantes de percibir la generalidad.

“Decir” cuál es el patrón

Los alumnos con frecuencia encuentran difícil el moverse del “ver” al “decir”, este último, puede tener lugar tanto en voz alta, a otras personas, como en palabras que se dicen “en la mente”. Ante esto, Mason et al (1999, p. 21) enfatiza que “animar a los alumnos a que trabajen en parejas, diciéndose uno al otro lo que ven, haciéndose preguntas, y modificando lo que dicen hasta que se llegue a un acuerdo, produce buenos resultados”.

El trabajo comentado por Mason no necesita ser por un largo periodo de tiempo, la experiencia de discutir las observaciones y percepciones con alguien más es una actividad enriquecedora para los alumnos, permite al alumno darse cuenta de que la expresión que produjo todavía necesita una mayor clarificación.

Esta actividad no es del todo sencilla para los alumnos, pues, no están acostumbrados a explicar patrones con palabras. En un primer intento, encontrarán difícil “decir” cuál es el patrón, por tanto, una sugerencia es que, el alumno pueda llevarse la idea a casa y explicar el patrón a alguien que no ha tenido contacto con éste.

“Registrar” un patrón

El registrar puede involucrar una variedad de formatos, por ejemplo, dibujos, dibujos apoyados con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos, o la mayor parte símbolos con algunas palabras. Mason et al (1999, p.23) menciona que “una de las razones por las que se deben registrar las cosas es debido a que, las ideas en la cabeza tienden a dar vueltas y a ser fugaces”.

En cambio, al hacer un registro en papel, las ideas están quietas y pueden ser discutidas y modificadas. Es preciso que no se exija a los alumnos iniciar con un registro simbólico, pues éste, surgirá cuando los alumnos estén listos, por el contrario, se debe favorecer el trabajo de los alumnos con dibujos apoyados por palabras.

Conclusiones Raíz 1A

El ver, decir y registrar son aspectos importantes de la raíz "expresión de la generalidad", los cuales pueden ser favorecidos a partir del trabajo con patrones. Adquiere importancia en esta raíz, el convencer a alguien el por qué una fórmula es válida, pues existen diferentes formas de decir un patrón.

La expresión de la generalidad representa una ruta crítica hacia el álgebra, se sugiere que el reconocimiento de patrones se desarrolle en todo el ciclo de educación básica. Asimismo, puede ser que al principio los alumnos utilicen un tiempo considerable en el reconocimiento de patrones, cuando se les solicita identificar la generalidad, ahí, es cuando el docente debe ser un guía, con preguntas cómo "qué es lo común o igual en…", en ese sentido, el docente debe tener preparadas preguntas que puede hacer a los alumnos en caso de que, quedaran trancados. Conforme el trabajo con patrones se vuelve más común a los alumnos, se puede solicitar que creen sus propias secuencias y luego, las compartan a sus compañeros para que las trabajen, así, los alumnos sentirán que tienen control sobre las matemáticas y no al contrario.

RAÍZ 1B. Expresión de la generalidad en situaciones de la vida cotidiana.

En matemáticas justificar la búsqueda de generalidades es realmente fácil, ya que, la misma naturaleza de las matemáticas implica hacer declaraciones generales sobre números, figuras, patrones, entre otros. Ahora, la generalidad en situaciones de la vida cotidiana es más difícil de expresar, como menciona Mason et al (1999, p.36) "la idea de motivar a los alumnos a ver y a expresar la generalidad de situaciones de la vida cotidiana se presenta en una forma menos convincente".

Al respecto, estos autores mencionan que, una de las causas de esta situación se debe a que, los contextos para presentar los conceptos matemáticos no han sido los más convenientes. Así, se menciona que "una cosa es encontrar un contexto en el cual una idea matemática encaja, y otra cosa es declarar que la habilidad matemática que se está trabajando es eficiente o representa un método apropiado para solucionar el problema" (Mason et al, 1999, p.36).

Considerando lo anterior, plantean el análisis de una situación problemática, la cual expresa lo siguiente: Judy necesita alquilar un carro para usarlo desde el lunes hasta el viernes, y ha visto el siguiente aviso en un periódico.

Modelo	Tarifa básica diaria más kilómetros recorridos	Tarifa semanal (kilometraje ilimitado incluido)
Chevrolet Swift 1.3	$\$17{,}500\ + \$200\ por\ kilometro$	$\$136{,}000$

Judy piensa que necesita recorrer cerca de 150 kilómetros en total durante los cinco días. ¿Cuál de las dos tarifas es más económica para Judy?

Para dar solución a esta problemática hay dos maneras de abordarla, la solución A en términos del caso específico y la solución B en términos más generales.

- **Solución A**

Usando la tarifa diaria: $\$17{,}500 \times 5 + \$200 \times 150 = \$117{,}500$

Como la tarifa semanal es $\$136{,}000$ es más barato usar la tarifa diaria más el kilometraje recorrido.

- **Solución B**

Considerando x como el número de kilómetros. El costo de usar la tarifa diaria es:

$$17{,}500 \times 5 + 200x$$

Se puede calcular la distancia para la cual los dos costos se hacen iguales (aquí se está respondiendo a una pregunta diferente para resolver el problema original).

$$17{,}500 \times 5 + 200x = 136{,}000$$

$$87{,}500 + 200x = 136{,}000$$

$$200x = 136{,}000 - 87{,}500$$

$$200x = 48{,}500$$

$$x = \frac{48{,}500}{200}$$

$$x = 242.5$$

En este caso, como el kilometraje que recorrerá Judy es menor de 242.5, es más barato usar la tarifa diaria más el kilometraje.

- **Reflexiones respecto a las soluciones.**

La solución A presentó la solución al problema particular de Judy para esa semana, por otra parte, la solución B es una solución algebraica y, por tanto, más general, la cual puede ser empleada para cualquier número de kilometraje. Al trabajar con situaciones de la vida cotidiana es necesario mencionar que las mejores soluciones a estos problemas no necesariamente son aquellos que ofrecen más generalizaciones ni tampoco los que están estéticamente presentados (Mason et al, 1999).

En este problema, Judy sabía el kilometraje que debía recorrer y no necesitaba el álgebra para solucionar un problema que se reduce a una cuestión aritmética. En este caso, para que el álgebra se convierta en la mejor forma de abordar el problema es necesario cambiar el problema, por ejemplo, suponiendo que Judy no estaba segura del kilometraje que tenía que recorrer.

Resumir, estética y comprensión

Existen tres justificaciones de la actividad de generalizar en situaciones de la vida cotidiana (Mason et al, 1999):

- **Resumir.** Es común que en múltiples ocasiones sea necesario procesar datos o tener acceso a ellos, por ejemplo, al recordar horarios de salida de autobuses, suponiendo que cada autobús sale a los 15 y 45 minutos después de la hora exacta, así, al resumir esta información, hora + 15, hora + 45, la información es más fácil de recordar.
- **Estética.** Los patrones aparecen siempre en la naturaleza, en la música, en el arte, en la arquitectura o en los tejidos, por tanto, su observación y exploración resulta satisfactoria, al observar que las matemáticas se encuentran en la naturaleza.
- **Comprensión.** Moverse de lo particular a lo general ayuda a una mejor comprensión, pues, la generalidad soluciona los problemas particulares y se enfoca a contextos más amplios.

¿Cómo impulsar a los alumnos a generalizar situaciones de la vida diaria?

Mason et al (1999) sugieren trabajar las tres etapas mencionadas en la Raíz 1A, a saber, ver, decir y registrar. Menciona que los niños desde temprana edad pueden apreciar que hay relaciones que son la base de muchas relaciones de su vida, así, pueden ver generalidades, por ejemplo, al decir que tres chocolates cuestan tres veces más que uno, entre otros. El profesor puede ayudar a los alumnos motivándolos para que sean más explícitos al identificar factores claves en las situaciones y cómo expresar una regla (no algebraica) que combine estos factores claves.

Para promover el decir generalidades, es importante involucrar a los alumnos en la descripción de casos particulares, la meta en esta etapa es que los alumnos encuentren las palabras que describan la situación de manera coherente.

Ante el registro de la generalidad es preciso propiciar que los alumnos utilicen un registro escrito y sometan éste a un mayor análisis. Considerando que, existen varias formas de registrar: sólo palabras, palabras y símbolos y sólo símbolos, donde las tres se consideran como tareas algebraicas. En esta etapa es recomendable guiar al alumno al tránsito entre diferentes maneras de registrar, por ejemplo, al establecimiento de un diagrama o gráfica que utilice palabras y símbolos, ya que, el uso completo de símbolos debe venir más tarde, cuando los alumnos estén listos para hacerlo y cuando perciban una necesidad de hacerlo.

RAÍZ 2. Reordenamientos y manipulación

Usualmente el álgebra se asocia a la manipulación de ecuaciones para obtener soluciones, sin embargo, antes de profundizar en la solución es necesario que los alumnos sean capaces de manipular estas ecuaciones. Mason et al (1999, p.59) consideran que hay cuatro aspectos relacionados con el reordenamiento y la manipulación que es necesario enfocar:

- Descubrir la posibilidad de manipular expresiones como resultado del encuentro de diferentes expresiones para la misma cosa.
- Darse cuenta de que una expresión es una entidad propia.

- Concebir una expresión algebraica como algo que se ha construido y, que, por lo tanto, se puede deshacer o desbaratar.
- Decidir cómo manipular expresiones y con qué fin.

En ese sentido, estos autores proponen la actividad "piensa en un número" la cual ofrece oportunidades de trabajo en aspectos de reordenamiento y manipulación. Entre sus principales usos se menciona: Ilustrar la construcción como el deshacer de expresiones y orientar eficientemente hacia la solución de ecuaciones, asimismo, revela el valor de estar en la capacidad de reordenar expresiones que, a simple vista, parecen difíciles de usar.

Se presenta el siguiente ejemplo: "piense en un número entero que está entre 1 y 10, adicione 2, multiplique por el número que pensó, adicione 1, saque la raíz cuadrada (probablemente en el contexto se considere la raíz positiva), reste el número que pensó inicialmente, ¿obtuvo 1 como respuesta?

Se propone trabajar esta actividad considerando 4 etapas, en la primera etapa, el docente debe generar interés en el alumno de querer saber cómo se hace, ya que, resulta que al final todos tienen la misma respuesta.

En la etapa 2 se sugiere hacer anotaciones de las instrucciones de la actividad "piensa en un número", dónde se pueden utilizar palabras y símbolos. La etapa 3 por su parte, cuestiona a los alumnos sobre ¿cómo puede estar seguro (a) de que la predicción final siempre será correcta?, se invita a los alumnos a pensar en alguna forma de representar al número inicial desconocido, un ejemplo sería utilizar NUM como la representación de este número desconocido. En esta etapa, el proceso de construcción se va volviendo formal, se pide expresar las instrucciones de la etapa 2, utilizando la representación del número desconocido, así, resulta:

Piense en un número entero que está entre 1 y 10	$\boldsymbol{NUM}$
adicione 2	$NUM + 2$
multiplique por el número que pensó	$NUM(NUM + 2)$
adicione 1	$NUM(NUM + 2) + 1$
saque la raíz cuadrada	$\sqrt{NUM(NUM + 2) + 1}$
reste el número que pensó inicialmente	$\sqrt{NUM(NUM + 2) + 1} - NUM$

Aquí surge la necesidad de simplificar, una forma de trabajar esta necesidad es a partir de ejemplos específicos, para posteriormente encontrar una relación general.

En la etapa 4, para lograr que los alumnos adquieran un dominio sobre la manipulación algebraica se recomienda que sea sobre la base de las generalizaciones de reglas aritméticas. Se propone el uso de diagramas de contenedores con flechas, para representar las operaciones realizadas, pues parece natural invertir el proceso que indican las fechas. Al moverse de izquierda a derecha el alumno construye o desarrolla un cálculo, pero, al moverse de derecha a izquierda deshace el cálculo.

Es preciso mencionar que la actividad “piensa en un número” no es la única que propicia el reordenamiento y manipulación algebraica, asimismo, en la práctica se deben iniciar con actividades no tan complejas para los alumnos y de manera gradual, ir aumentando la complejidad.

RAÍZ 3. Posibilidades y restricciones

Uno de los retos mayores en la enseñanza del álgebra es promover la idea de la “generalidad” que se encuentra detrás de los símbolos. Ante esto, es necesario reflexionar que “el álgebra ha sido definida como el estudio de la letra número 26, del alfabeto” (Mason et al, 1999, p.76).

En este sentido, para desarrollar una percepción algebraica es útil para los alumnos establecer realmente un sentido de lo que una variable como x representa. Esta tarea no es fácil, ni sencilla de detectar o describir, esto se justifica con la idea “las matemáticas en general y el álgebra en particular, no son simplemente una cuestión de obtener respuestas correctas a preguntas que únicamente pueden ser correctas o incorrectas” (Mason et al, 1999, p.76).

Para que el alumno pueda entender lo que se quiere dar a entender con la palabra variable es necesario trabajar con las posibilidades y las restricciones. Se recomienda desarrollar en el aula actividades relativas a la Aritmética creativa, dónde los alumnos utilicen su creatividad, al tener que escoger entre un número de posibilidades, a manera de ejemplo se presenta la siguiente actividad (Mason et al, 1999, p.78):

En cuántas formas diferentes pueden usar paréntesis, y dar los números que falten para completar la siguiente expresión:

$$8 = 24/4 + 2 \times \_\_\_$$

Con este tipo de ejercicios también es necesario trabajar en las restricciones, así, los alumnos deben estar conscientes de que existen restricciones implícitas. De esta forma, la variable puede ser introducida como algo que está sujeto a restricciones, ya que, “la idea de variable depende de una apreciación tanto de las posibilidades de selección como de las restricciones” (Mason et al, 1999, p.85), así, tiene mérito prestarle particular interés a las actividades donde se registre la existencia de posibilidades y restricciones, donde ambas son una forma de expresar la generalidad.

RAÍZ 4. Aritmética generalizada

Frecuentemente el álgebra es concebida y presentada a los alumnos como una aritmética generalizada, “en el sentido de que los estudiantes son orientados a que traten las letras como si fueran números y a menudo, ¡no hay más introducción que esa!” (Mason et al, 1999, p.90).

Escolarmente se espera que, los alumnos que han tenido éxito en la aritmética transfieran sus habilidades al álgebra, dónde ahora los símbolos “representan números”, esto no funciona así. Primero, en aritmética las respuestas son números simples mientras que en álgebra se trata de expresiones.

Al hablar de aritmética generalizada se debe hacer referencia a una actitud hacia la aritmética, “tomando una conciencia global de la forma como los números funcionan como un sistema” (Mason et al, 1999, p.92), así, el éxito del álgebra depende del desarrollo de esta conciencia más general de los números y sus propiedades.

Diferencias entre aritmética y álgebra

Como ya se ha mencionado previamente, el álgebra se introduce con la idea de que se realizará con las letras lo mismo que se hace con los números. Ante esto, existe evidencia que sugiere que los alumnos permanecen confundidos cuando se les presenta esta idea.

A pesar de la relación estrecha entre aritmética y álgebra, ambas tienen hábitos diferentes. La aritmética "trabaja de adentro hacia afuera, calculando primero los valores de los términos que están entre paréntesis, cada paso de simplificación produce un número y el resultado es más ordenado que la expresión inicial" (Mason et al 1999, p.95). Ahora, con las expresiones algebraicas ocurre lo contrario "frecuentemente se requiere la remoción de paréntesis, el resultado es, usualmente más desordenado" (Mason et al 1999, p.95).

En aritmética existe una fuerte idea de que la respuesta debe ser un número sencillo, por eso, cuando llegan a álgebra es poco aceptable para ellos que "dejar un cálculo incompleto" por ejemplo:

$$3c + 4y$$

De igual manera en aritmética se hace énfasis en la respuesta y no en el proceso. En este sentido, "la aritmética generalizada es la esencia del álgebra sólo si es vista como una expresión de la generalidad y no simplemente como una extensión de la aritmética con símbolos numéricos a la aritmética con letras" (Mason et al 1999, p. 102), puede ser útil ver la aritmética como una "álgebra especializada".

Sugerencia para el trabajo en el aula de clase

Para aprender una lengua es necesario un uso constante de esta, algo similar ocurre con el aprendizaje del álgebra. El álgebra es algo útil y "debe ser visto como un lenguaje mediante el cual expresamos pensamientos y nuestro conocimiento de los patrones, en forma sucinta y consecuentemente manipulable" (Mason et al 1999, p. 107). La enseñanza del álgebra lejos de considerarse como un cuerpo de conocimientos debe ser llevada como una herramienta que ayuda para expresar y manipular generalizaciones.

Las raíces presentadas no son impuestas, pero sí se sabe que son necesarias para el desarrollo del pensamiento algebraico. La expresión de la generalidad es una raíz básica, ya que, da significado a los símbolos que posteriormente deben ser manipulables, asimismo, el desarrollo de la idea de variable es fundamental y se sitúa en la frontera entre las posibilidades y restricciones.

La Raíz 1: Expresión de la generalidad, se centraba en la observación y expresión de regularidades, primero en casos particulares y luego para identificar el patrón en general. Esta noción requiere el ejercicio en diversos campos y no sólo en los patrones geométricos. El ver que la generalidad ocurría después de explorar varios ejemplos, lo cual conducía a una expresión verbal y luego a un registro y discusión. Las cuatro raíces descritas con anterioridad son esenciales, pero en la Raíz 1 hay que colocar un énfasis considerable, ya que, "es el corazón del lenguaje algebraico" (Mason et al 1999, p. 124).

3.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (SANTOS TRIGO)

En el estudio de las matemáticas es necesario que los alumnos aprendan a formular preguntas y a buscar distintos caminos que les permitan dar solución a dichas preguntas, ya que, el estudio de las matemáticas va más allá de la memorización de reglas que permitan resolver determinados problemas. En ese sentido, la resolución de problemas es una actividad fundamental en el desarrollo de las matemáticas, "se reconoce que los procesos de formulación de problemas, la búsqueda de métodos para resolverlos, los intentos de solución y sus soluciones contribuyen directamente en la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático "(Santos Trigo, 2007) citado en Santos Trigo (2014, p.17).

Desde el enfoque de Santos Trigo se considera que resolver problemas es diferente de realizar ejercicios, ya que, son actividades con propósitos diferentes. En el entorno escolar usualmente se toman como sinónimos, sin embargo, es preciso enfatizar que un ejercicio promueve el aprendizaje de alguna técnica, fórmula o procedimiento. Por otra parte, al abordar un problema no sólo se pretende encontrar una solución, sino establecer relaciones matemáticas para generar estrategias de resolución, las cuales conduzcan a obtener nuevos conocimientos.

Santos Trigo (2014, p.18) manifiesta que,

> La resolución de problemas es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones (problemas o conceptos) matemáticos, como modelo didáctico se manifiesta a partir de las dinámicas de clase, los problemas y las formas de evaluar los desarrollos cognitivos de los estudiantes.

Es preciso mencionar que cada individuo tiene características específicas que le hacen enfrentar de manera diferente el proceso de resolución de problemas. Para lograr que los estudiantes desarrollen habilidades para la resolución de problemas es necesario plantearles situaciones acordes a la definición de problema, para no caer en una situación rutinaria, la cual no represente un problema para los estudiantes.

De esta manera destaca el rol del profesor, ya que, debe considerar actividades que de manera gradual guíen y orienten a los alumnos en el desarrollo de recursos y estrategias de la resolución de problemas. En la resolución de problemas el objetivo final no es que los alumnos encuentren una respuesta, sino, identificar y comparar diversas maneras de representar, explorar, resolver y extender el problema. Así, una forma de promover y caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes consiste en analizar el comportamiento y las competencias de los alumnos a partir de un conjunto de dimensiones interconectadas (Santos Trigo, 2011, p.23):

a) El conocimiento, o recursos básicos, que incluye definiciones, hechos, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema.
b) Las estrategias cognitivas o heurísticas, que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etcétera.
c) Las estrategias metacognitivas, que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿qué necesito?, ¿cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿qué estoy haciendo?, ¿por qué lo hago?, ¿a dónde voy?).

d) Las creencias y componentes afectivos, que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, así como la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

En la perspectiva de la resolución de problemas las actividades deben ayudar a los alumnos a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas y favorecer la construcción de estrategias de monitoreo, las cuales permitan a los alumnos aprender cuándo emplear una determinada estrategia de resolución.

Siempre que se tiene un problema desconocido, cada individuo accede a sus recursos, conocimientos previos definidos y con los que está familiarizado, utiliza estrategias que resultan naturales para resolverlo, por otro lado, un experto en resolución de problemas utiliza heurísticas generales como las siguientes (Santos Trigo, 2007, p.35):

- Búsqueda de analogías con sistemas que entiende mejor.
- Exploración de la existencia de analogías falsas dentro de la analogía.
- Hacer referencia a los modelos intuitivos mentales para tratar de entender cómo se comportaría el sistema.
- Investigación de los sistemas que se quiere alcanzar con casos extremos (tender a cero o a infinito).
- Construcción de problemas más simples con la misma estructura, con la idea de importar la solución al problema original.

Alguien experto en la resolución de problemas matemáticos generalmente tiene pocas complicaciones para acceder y utilizar las heurísticas, pero para un estudiante esto puede representar otro problema. En este sentido, para motivar el aprendizaje de los estudiantes es necesario que se les planteen problemas o actividades que les resulten interesantes, dónde los estudiantes puedan generar diversas cuestiones sobre los problemas.

A manera de ejemplo se presenta la siguiente imagen, la cual dio la pauta para generar reflexiones matemáticas que a primera instancia no logran observarse.

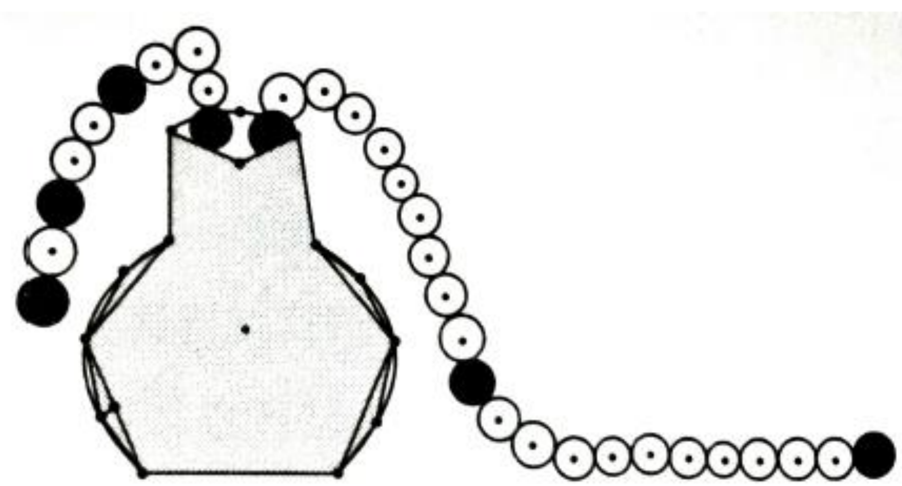


Figura 4. Imagen propuesta para generar reflexiones matemáticas. Santos Trigo (2007, p.41)

La imagen fue presentada a cuatro estudiantes avanzados de la licenciatura en matemáticas, solicitando que respondieran las siguientes dos preguntas:

- Analice cuidadosamente el dibujo que se muestra en la hoja anexa. A partir de dicho análisis, escriba las preguntas que desde su punto de vista puedan formularse matemáticamente a partir de la figura.
- ¿Cuántas bolitas tiene el collar?

Las respuestas que los cuatro estudiantes E1, E2, E3 y E4 dieron a las dos preguntas anteriores se presentan en la siguiente tabla:

Estudiante	Preguntas	¿Cuántas bolitas tiene el collar?
E_1	1. ¿Qué figuras observas? 2. ¿Qué secuencias tienen las bolitas blancas? 3. ¿Qué cantidad de bolitas están adentro del jarrón? 4. ¿Cuántas bolitas blancas hay? 5. ¿Hay rectas paralelas? 6. ¿Hay ángulos iguales? 7. ¿Cuántos triángulos hay? 8. ¿Hay triángulos congruentes o semejantes? 9. ¿Qué puntos están a la misma distancia del punto P?	66 Blancas: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ $=55$ Negras: $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ $+1=11$
E_2	1. ¿Existe un patrón entre las bolitas blancas y las negras? 2. ¿Cuál es la forma del jarrón? 3. ¿Cuál es la capacidad (volumen) del jarrón? 4. ¿Tienen las bolitas blancas el mismo tamaño? 5. ¿Cuál es el tamaño del orificio por dónde entran las bolitas?	66 1 bolita negra-1 bolita blanca 1 bolita negra-2 bolitas blancas 1 bolita negra-3 bolitas blancas 1 bolita negra-4 bolitas blancas 1 bolita negra-5 bolitas blancas 1 bolita negra-6 bolitas blancas 1 bolita negra-7 bolitas blancas 1 bolita negra-8 bolitas blancas 1 bolita negra-9 bolitas blancas 1 bolita negra-10 bolitas blancas 1 bolita negra-11 bolitas blancas
E_3	1. ¿Qué sucesión siguen las bolitas blancas? 2. ¿Cuántas bolitas blancas tiene el collar? 3. ¿Cuántas bolitas negras tiene el collar? 4. ¿Cuál es la forma que se muestra en la parte más ancha del jarrón?	66 Bolitas blancas: $1+2+3+\cdots+9+10=\frac{(n+1)n}{2}=55$ Bolitas negras: 11 $55+11=66$
	1. ¿Cuántas bolas blancas hay dentro del jarrón? 2. ¿Cuántas bolas negras hay dentro del jarrón?	Negras: Blancas: 1 1 1 2 1 3

E_4	3. ¿Cuál es el perímetro de una cara del jarrón? 4. ¿Cuál es el área de una cara del jarrón? 5. ¿Cuál es el área superficial del jarrón? 6. ¿Cuál es el volumen del jarrón? 7. ¿Cuántos radios distintos se ven en las bolitas? 8. ¿Cuál es el perímetro del arco izquierdo y del arco derecho?, ¿son iguales?, ¿cuál es el mayor? 9. ¿Cuál es la recta que pasa por A y B? 10. ¿Cuál es la distancia AB? 11. ¿Cuál es la recta que pasa por A y O? 12. ¿Cuál es la distancia AO? 13. ¿Cuál es la recta que pasa por B y O? 14. ¿Cuál es la distancia BO? 15. ¿Es la misma la recta AB y AO? 16. ¿Es la misma la recta AB y BO? 17. ¿Cuántos ángulos hay en la cara del jarrón? 18. ¿Cuántos ángulos obtusos hay? 19. ¿Cuántos ángulos agudos hay? 20. Sin salirte del perímetro, ¿Cuál es la distancia más corta del punto A al punto B? 21. ¿Cuál es la distancia por arriba? 22. ¿Cuál es la distancia por abajo? 23. Tomando el radio mayor para todas las bolitas, ¿Cuál es el volumen total? 24. ¿Todas las bolas caben dentro del jarrón? 25. Si sobra espacio, ¿Cuántas bolas más cabrían? 26. ¿Cuál es el volumen total que sobra por el espacio entre bola y bola?	1 4 ⋮ ⋮ 1 10 1 $$\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{n(n+1)}{2}, para\ n = 10$$ $$\frac{10(10+1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = \frac{110}{2} = 55$$ $$11 + 55 = 66$$

Tabla 5. Respuestas otorgadas por los estudiantes respecto al ejercicio propuesto para generar reflexiones matemáticas.

Santos Trigo menciona que la actividad tuvo una duración de aproximadamente una hora, los estudiantes E_2 y E_3 tuvieron dificultad para entender lo que debían hacer en la primera cuestión, los estudiantes E_1 y E_4 no mostraron dificultades en entender la primera pregunta, las dudas que tenían eran referentes a si la manera en que redactaba sus cuestiones estaba correcta. En la columna de preguntas se puede observar las diferentes preguntas que expresaron matemáticamente los estudiantes. Para la segunda cuestión, los cuatro estudiantes lograron brindar una respuesta a la cuestión, no representó dificultad para ellos, pero, nuevamente utilizaron diferentes estrategias para llegar a la respuesta correcta. Con las respuestas obtenidas se puede concluir que los estudiantes están en un nivel de desarrollo del pensamiento matemático distinto.

Definición de problema

Las concepciones que se tienen de un problema son esenciales para que los estudiantes trabajen con numerosas situaciones que necesiten ser analizadas y permitan la evaluación de diversas estrategias en las diferentes etapas de resolución.

Para Santos Trigo (2014, p. 61) un problema es “una tarea en la cual aparecen los siguientes componentes: interés por encontrar una solución, la no existencia de una solución inmediata, diversos caminos de solución y la atención de un individuo para emprender acciones para resolverlo”.

Este autor identifica como objetivos de la resolución de problemas que los estudiantes lleguen a:

- Entender los propósitos y el uso del conocimiento que están aprendiendo.
- Aprender activamente utilizando un conocimiento y no pasivamente sólo recibiéndolo.
- Aprender las diferentes condiciones bajo las cuales sus conocimientos pueden ser aplicados.
- Aprender cuándo utilizar cierta estrategia y cuándo no utilizarla.
- Aprender en contextos múltiples. Esto induce una abstracción de los conocimientos ligada a sus usos, ayuda a que los estudiantes enfoquen su atención a la estructura profunda de la situación o problema.

Santos Trigo concibe que los estudiantes aprenden matemáticas sólo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas. En ese sentido “cuando los estudiantes encuentran un ambiente en el salón de clases que les permita pensar y razonar acerca de las matemáticas y comunicar sus resultados a otros con base en argumentos, se enfrentan a la necesidad de organizar y presentar sus ideas en forma convincente” (Santos Trigo, 1997) citado en Cardona (2007, p. 25).

La resolución de problemas desempeña un papel fundamental en el proceso educativo, es un objetivo fundamental de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y además una estrategia para desarrollar habilidades de pensamiento. Santos Trigo (1997) hace destacar un dinamismo en las aulas de clases con ambientes similares con los que se desenvuelven los matemáticos; en ellos los alumnos tienen que conjeturar, argumentar, verificar resultados, relacionar las matemáticas con otras disciplinas. Propone la discusión en grupos pequeños y las presentaciones individuales como variantes efectivas en la resolución de problemas.

Preguntas acerca de la resolución de un problema

Santos Trigo (2014, p.102) propone algunas cuestiones que pueden servir para detectar dificultades para avanzar y evaluar en la resolución de un problema:

- ¿Piensas que el problema va a ser difícil para ti? Explica por qué.
- ¿Tienes alguna dificultad para entender alguna parte del problema? Explica qué es lo que no entiendes.
- ¿Tiene el problema alguna información que no es necesaria? Explica.

- ¿Has resuelto algún problema similar a éste antes? Describe ese problema.
- ¿Puedes dibujar algún diagrama que ilustre el problema?
- ¿Qué estrategias podrían ayudar a resolver el problema?

Después de resolver el problema, las siguientes preguntas pueden ser de utilidad:

- ¿Escribiste la respuesta completa?
- ¿Tu respuesta tiene sentido con respecto a las condiciones del problema?
- ¿Qué estrategias utilizaste? Explica su uso.
- ¿Piensas que tu solución es correcta? Explica.
- ¿Fue el problema fácil o difícil para ti? Explica.
- ¿Podrías haber resuelto el problema en otra forma? Explica cómo lo harías sin necesidad de que lo resuelvas otra vez.

Las preguntas pueden cambiar de orden y realizarles algún ajuste, lo que es importante es que los alumnos hablen del proceso empleado al resolver un determinado problema, donde exista una reflexión sobre los diversos métodos que existen para resolver un problema.

En este sentido, se presenta el marco teórico sugerido por Santos Trigo para la resolución de problemas (Santos Trigo, 2007, p. 67).

Perspectiva	**Resolución de problemas**
Visión matemática	Las matemáticas como una ciencia de los patrones. Una relación directa entre la práctica de desarrollar la disciplina y el aprendizaje de los estudiantes. Pensar matemáticamente incluye la formulación de preguntas, conjeturas y el empleo de distintos argumentos.
Tipo de problemas	Problemas no rutinarios con diferentes tipos de dificultad: desde aquellos que se resuelven en un tiempo límite hasta aquellos que se trabajan durante largos periodos. Transformación de un problema de rutina en un problema no rutinario a través de un proceso que involucra el planteamiento de preguntas.
Procesos de aprendizaje	Dimensiones relacionadas con competencias de resolución de problemas: recursos básicos, estrategias cognitivas (heurísticas), estrategias metacognitivas (monitoreo y autocontrol) y sistemas de creencias y afectivos.
Ambientes de instrucción	El salón de clases visto como un microcosmo matemático. Creación de comunidades matemáticas de aprendizaje. Los estudiantes participan en pequeños grupos de discusión y discusiones plenarias, y el profesor actúa como monitor y guía.
Formas de evaluar	Procesos de solución de problemas no rutinarios. Las competencias matemáticas incluyen procesos relacionados con el uso de representaciones, la formulación de preguntas y conjeturas, el uso de distintos argumentos, procesos de monitoreo y la comunicación de resultados.

Tabla 6. Marco teórico sugerido por Santos Trigo para la resolución de problemas.

La resolución de problemas y el empleo de la tecnología

Santos Trigo sugiere el desarrollo de un marco conceptual que promueva la utilización de herramientas tecnológicas, en lugar del lápiz y papel. Es preciso señalar el papel que tienen las distintas herramientas digitales en la resolución de problemas, pues "no solo facilitan la aplicación de las estrategias, sino también potencian o extienden el repertorio de las heurísticas y formas de exploración" (Santos Trigo, 2014, p.24).

Se reconoce que diversas herramientas pueden ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar conocimiento matemático. Por ejemplo, el uso del software dinámico favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos o del problema (Santos Trigo & Reyes Rodríguez, 2001) citados en (Santos Trigo, 2014, p. 24).

En este sentido, Díaz Barriga (2013, p. 6) indica que "es relativamente fácil reconocer que estas tecnologías han cambiado la manera de pensar y las habilidades de los alumnos, reconocer que el trabajo escolar ya no puede limitarse a la clase frontal, al libro, pizarrón y cuaderno".

En los últimos años, la tecnología ha sido un factor para mejorar aspectos de la comunicación y la forma de presentar e interactuar diversos tipos de información. Hace algunos años los avances tecnológicos eran costosos y complicados, hoy en día, son más accesibles en cuanto al costo y en el manejo y aplicación. Es preciso mencionar que "en las propuestas recientes del currículum matemático de nivel preuniversitario se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen distintas herramientas computacionales en el estudio de la disciplina" (NCTM, 2000) citado en Santos Trigo (2014, p. 132).

Ante la variedad de herramientas disponibles, resulta necesario identificar las ventajas que un software puede ofrecer a los estudiantes durante la compresión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas. Enfatizando en las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que presenten los estudiantes como resultado de usar estas herramientas en sus experiencias de aprendizaje. En este sentido es necesario reflexionar lo siguiente (Santos, 2014, p. 133:

- ¿Qué herramientas pueden favorecer el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes?
- ¿Qué resulta relevante en el proceso de aprender matemáticas en ambientes donde los estudiantes utilizan sistemáticamente algunas herramientas?
- ¿Qué formas de razonamiento desarrollan los estudiantes al emplear sistemáticamente herramientas tecnológicas en la resolución de problemas?

Los softwares brindan a los estudiantes la oportunidad de mover componentes dentro de la misma figura o construcción, "un aspecto importante al representar un problema o situación con la ayuda del software dinámico es que los estudiantes tienen la oportunidad de formular preguntas acerca del comportamiento de algunos elementos de la construcción" (Santos, 2014, p. 134).

Al utilizar un software dinámico los estudiantes son "quienes experimentan, realizan construcciones, calculan medidas, buscan relaciones, plantean conjeturas, buscan evidencia para verificar resultados y, eventualmente, plantean demostraciones formales de algunas conjeturas" (Santos, 2014, p. 150).

Estrategias utilizadas frecuentemente en la resolución de problemas

Santos Trigo (2007) citado en Moreno (2014, p.77) muestra algunos métodos y estrategias utilizados frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos, los cuales se presentan a continuación.

1. **El método de los dos caminos.**

El objetivo de este método es expresar el problema dado por medio de dos expresiones algebraicas e igualarlas.

En el siguiente problema se aplica esta estrategia.

Problema. *Dado el cuadrado $ABCD$, de lado a, se inscribe en él el triángulo isósceles ΔBCE, donde E es el punto medio de AD. Pruebe que la suma de las áreas de los triángulos ΔABE y ΔCDE es el área total del triángulo ΔBCE.*

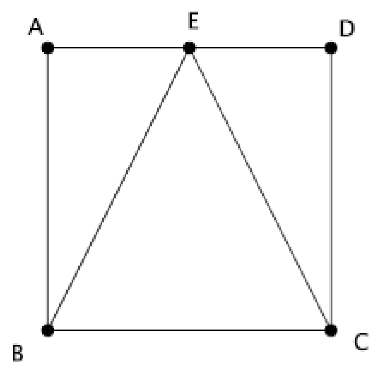


Figura 5. Cuadrado ABCD.

Se puede expresar el área del cuadrado y de los triángulos de la siguiente manera:

$$\acute{A}rea\ de\ ABCD = a^2, \quad \acute{A}rea\ de\ \Delta ABE = \frac{a^2}{4}\ \text{ y }\ \acute{A}rea\ de\ \Delta CDE = \frac{a^2}{4}$$

$$El\ \text{área}\ de\ \Delta BCE\ es: \acute{A}rea\ de\ ABCD - \acute{A}rea\ de\ \Delta ABE - \acute{A}rea\ de\ \Delta CDE$$

Expresamos el área de ΔBCE como $\frac{ah}{2}$ e igualemos las expresiones anteriores del área:

$$\frac{ah}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{ah}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

Así, queda demostrado el requerimiento del problema.

2. **El método de cancelación.**

Este método consiste en reordenar los términos de un problema dado de forma que algunos se eliminen.

Un ejemplo de esto se puede encontrar en las sumas telescópicas, como la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

3. El método de casos especiales.

En este método se consideran casos que sean más fáciles de determinar.

Por ejemplo, resolver la siguiente desigualdad:

$$|5x-8|\geq 6$$

Se trata de una desigualdad de un valor absoluto, es necesario considerar dos casos y resolverlos uno por uno para encontrar la solución.

Caso 1:	Caso 2:
$5x-8\leq -6$ $5x\leq -6+8$ $5x\leq 2$ $x\leq \frac{2}{5}$ $x\in\left(-\infty,\frac{2}{5}\right]$	$6\leq 5x-8$ $6+8\leq 5x$ $14\leq 5x$ $\frac{14}{5}\leq x$ $x\in\left[\frac{14}{5},\infty\right)$

Así, la solución de la desigualdad es:

$$x\in\left(-\infty,\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{14}{5},\infty\right)$$

4. Reducción de un problema a casos más simples.

La idea de esta estrategia es considerar casos más simples que se deriven del problema original. Estos casos ayudan a atacar el problema por partes, para considerar las soluciones parciales como un todo, y así obtener la solución del problema.

Encontrar el resultado de la siguiente operación algebraica:

$$(x-4)^5$$

Para resolver esta operación se pueden considerar casos más simples como:

$$(x-4)^2=x^2-8x+16$$

$$(x-4)^3=x^3-12x^2+48x-64$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$(x-4)^5=(x^2-8x+16)(x^3-12x^2+48x-64)$$

$$(x-4)^5=x^5-20x^4+160x^3-640x^2+1280x-1024$$

5. Sumar cero.

Cuando un problema se debe expresar de cierta forma es conveniente sumar y restar el mismo número (sumar cero), así como multiplicar y dividir por la misma expresión (multiplicar por uno). Se presenta el siguiente ejemplo que hace uso del método.

Encontrar el centro y la longitud del radio de una circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$$

Para resolver este problema se procede a completar los trinomios cuadrados perfectos

$$x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 - 8y + 4^2 - 4^2 = -21$$

Lo cual implica

$$x^2 + 6x + 3^2 + y^2 - 8y + 4^2 = -21 + 3^2 + 4^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -21 + 9 + 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

De aquí se obtiene que el centro tiene por coordenadas $C(-3, 4)$ y el radio es de 2 unidades.

6. **Dibujar una figura o diagrama cuando es posible.**

Una representación gráfica puede ser útil en la identificación de componentes importantes del problema y también puede sugerir algunas estrategias para resolverlo. En el siguiente problema se hace un ejemplo de esta estrategia.

Problema. *Un recipiente de forma semiesférica de radio 20 cm contiene agua hasta llenar 8 cm. ¿Hasta qué ángulo se puede inclinar el recipiente sin que se derrame el agua?*

Se puede comenzar con el bosquejo del recipiente, por lo cual se podría realizar lo siguiente:

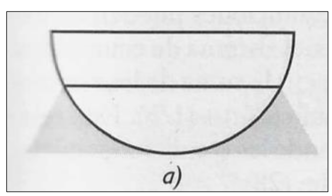


Figura 6. Elaboración del bosquejo del recipiente.

Posteriormente se puede realizar el bosquejo b) que representa la inclinación máxima del recipiente, sin que se derrame el agua (esto se aprecia en la figura 7). En el bosquejo c) se colocan las medidas conocidas, por lo cual se forma un triángulo rectángulo y se podría aplicar una razón trigonométrica para encontrar el ángulo solicitado.

$$Sen\ \alpha = \frac{12}{20}$$

$$\alpha = Sen^{-1}\left(\frac{12}{20}\right)$$

$$\alpha = 36.86°$$

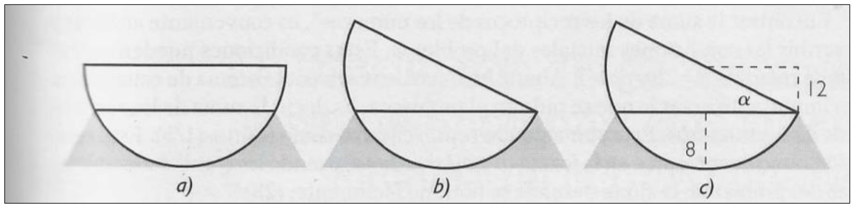


Figura 7. Bosquejo que representa la inclinación máxima del recipiente sin que se derrame el agua.

Realizar el diagrama facilitó la comprensión y solución del problema, ya que si solo se imaginaba, el problema habría sido concebido de una manera diferente y tal vez no se llegaría a la solución.

7. El método de sustitución.

Otra estrategia importante en la resolución de problemas es la transformación de la expresión de un problema a una forma más fácil de operar. Se presenta el siguiente ejemplo:

¿Para qué valores de x se satisface la siguiente ecuación?

$$9x^4 + 12x^3 + 4x^2 = 0$$

Se considera lo siguiente:

$$x^4 = (x^2)^2,\ \ x^3 = (x^2)(x)\ \text{ y }\ x^2 = (x)(x)$$

Sustituyendo $a = x^2$ y $b = x$, se obtiene la siguiente transformación de la ecuación original

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = 0$$

Factorizando

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$$

$$(3a + 2b)^2 = 0 \Rightarrow (3x^2 + 2x)^2 \Rightarrow \big(x(3x + 2)\big)^2 = 0$$

Así, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -\frac{2}{3}\ y\ x_4 = -\frac{2}{3}$.

8. Correspondencia de condiciones iniciales.

Existen problemas en donde el análisis de los datos puede sugerir un camino eficiente para resolver el problema. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

Problema. *María tiene una granja y quiere saber cuántos gansos y cuántos cerditos tiene; contó 48 patas y 22 cabezas. ¿Cuántos gansos y cerdos tiene?*

Si alguien intenta resolver el problema, lo primero que hace es dibujar cabezas con patitas, de tal manera que se representen a los animales en cuestión. Esta estrategia llevaría tiempo si se tratara de una cantidad considerable de patas y cabezas, ya que, hay que ir “jugando” hasta coincidir en el número de patas y de cabezas que se ha indicado, lo cual daría como resultado lo siguiente:

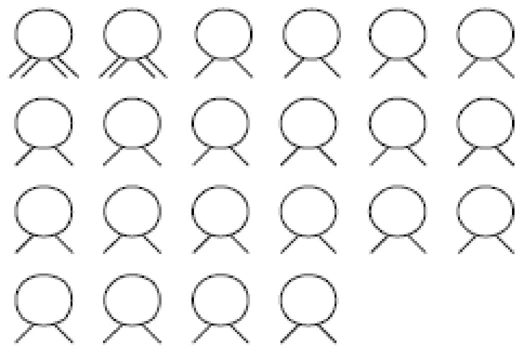


Figura 8. Estrategia empleada para la resolución del problema de los gansos y cerdos.

De la figura anterior se observa que el total de gansos es 20 y el total de cerditos es 2.

Si se considera la correspondencia de condiciones iniciales, la información del problema se puede expresar algebraicamente como:

$$2x + 4y = 48$$

$$x + y = 22$$

Donde x es el total de gansos y y representa el total de cerditos.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que $x = 20$ y $y = 2$, es decir, María tiene 20 gansos y 2 cerditos. Si bien se llega a la misma solución, este método permite analizar el problema de una manera diferente y resolverlo rápidamente.

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

4.1 TIPO DE ESTUDIO

Para el desarrollo de la investigación se propone una metodología cualitativa de tipo exploratoria que posea un enfoque en el diseño, aplicación y reestructuración de la secuencia de tareas. En ese sentido, es importante mencionar que:

> Los estudios exploratorios en pocas ocasiones constituyen un fin en sí mismos, "por lo general determinan tendencias, identifican relaciones potenciales entre variables y establecen el tono de investigaciones posteriores más rigurosas" (Dankhe, 1986, p.412) citado en Hernández, Fernández & Baptista (1991, p.59). Se caracterizan por ser más flexibles en su metodología en comparación con los estudios descriptivos o explicativos, y son más amplios y dispersos que estos otros dos tipos. Asimismo, implican un mayor "riesgo" y requieren gran paciencia, serenidad y receptividad por parte del investigador. (Hernández et al, 1991, p.59)

Para la exploración, una parte esencial fue seleccionar a los sujetos de estudio. El estudio se restringió a tres grupos de estudiantes del segundo semestre de bachillerato de la Preparatoria Número Uno (UADY), los grupos estuvieron conformados por 34, 37 y 41 alumnos. Esta decisión estuvo fundamentada en el hecho de que se diseñaron tres secuencias didácticas diferentes y, por tanto, en cada grupo se aplicaría una de esas secuencias.

4.2 ETAPAS DEL ESTUDIO

El estudio se realizó en dos etapas: diseño y ejecución. La etapa de diseño consideró la elaboración de un diagnóstico y tres secuencias didácticas, el diagnóstico evalúa conocimientos que son antecedentes a la resolución de problemas que involucren ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Se diseñaron tres secuencias didácticas, dado que en la investigación intervienen dos variables: enfoque de la resolución de problemas y el uso de la tecnología. La primera secuencia didáctica llamada “tradicional” considera los ejercicios y problemas que cotidianamente se utilizan en la institución educativa para la impartición del contenido. La segunda secuencia didáctica considera el enfoque de la resolución de problemas y la tercera secuencia didáctica el enfoque de la resolución de problemas mediados por tecnología.

Con la etapa de ejecución se pretende analizar el avance, logros y dificultades de los alumnos en el proceso de la construcción de sus conocimientos algebraicos, en particular con el estudio de “problemas sobre ecuaciones de segundo grado con una incógnita”, realizando una comparación entre las tres secuencias didácticas.

4.3 METODOLOGÍA DE LAS SESIONES DE TRABAJO

La etapa de ejecución se realizó en el horario normal de la clase de matemáticas de cada grupo, en la modalidad presencial. La etapa de ejecución abarcó dos sesiones de 80 minutos, en la primera sesión cada alumno resolvió de manera individual la actividad diagnóstica y durante la segunda sesión se trabajó la secuencia didáctica asignada.

a) Instrumentos empleados en la recolección de la información

Para cada grupo de estudiantes del segundo semestre se diseñó una secuencia didáctica, en donde se plantean diferentes enfoques para la introducción del contenido algebraico, con esto se generan ambientes de discusión y reflexión a nivel equipo y posteriormente a nivel de todo el grupo. Asimismo, con cada grupo se aplicó un instrumento de diagnóstico para determinar el nivel de conocimientos que los estudiantes presentan respecto a las ecuaciones cuadráticas, es preciso recalcar que se aplicó el mismo instrumento de diagnóstico en cada uno de los grupos.

• Etapa diagnóstica

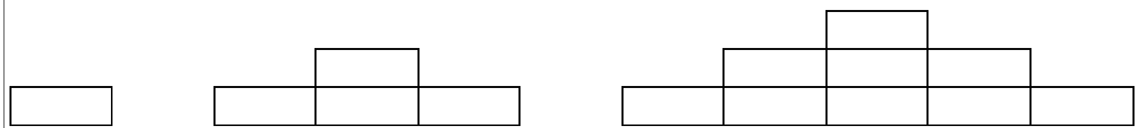
La etapa diagnóstica tuvo por objetivo determinar las habilidades de pensamiento algebraico que han adquirido los estudiantes de primer grado de bachillerato. Para tal efecto se diseñó una actividad diagnóstica conformada por ejercicios orientados para evaluar una habilidad especifica cada uno. La actividad diagnóstica contiene 5 ejercicios con varios incisos cada uno, conformando un total de 17 reactivos. Para el diseño de las actividades se consideraron algunas sugerencias y actividades propuestas por Mason (1985).

EJERCICIO UNO

En el ejercicio uno se presentan dos secuencias de figuras para evaluar habilidades aritméticas y algebraicas a la vez, y ver si el alumno es capaz de reconocer un patrón numérico y proponer una regla general que lo represente.

Ejercicio Uno. Contesta las dos cuestiones solicitadas en cada una de las siguientes sucesiones:

Sucesión 1



- ¿Cuántos rectángulos hay en la figura que se encuentra en la posición 10?
- ¿Cuántos rectángulos tiene la figura que se encuentra en la posición n?

Figura 9. Sucesión 1 del ejercicio uno, propuesta para la actividad diagnóstica.

Para la primera sucesión se realizan dos cuestiones, la primera cuestión se puede resolver de manera aritmética, considerando que la secuencia para el número de rectángulos en cada posición es 1,4,9 y así sucesivamente. Al analizar el patrón se puede observar lo siguiente:

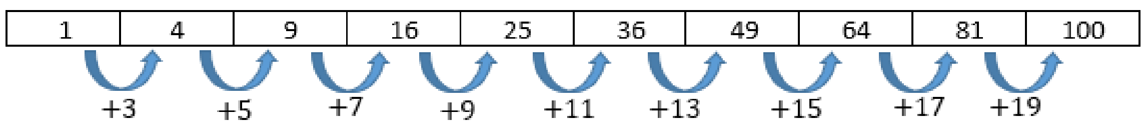


Figura 10. Estrategia empleada para el análisis del patrón numérico.

Por lo tanto, en la posición 10 se tienen 100 rectángulos. Otra estrategia para encontrar el número de rectángulos en la posición solicitada es, observar que el número de rectángulos en cada posición equivale al número de posición elevado al cuadrado. Lo anterior se presenta en la siguiente tabla:

Número de posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de rectángulos	$(1)^2$	$(2)^2$	$(3)^2$	$(4)^2$	$(5)^2$	$(6)^2$	$(7)^2$	$(8)^2$	$(9)^2$	$(10)^2$

Tabla 7. Estrategia empleada para el análisis del patrón numérico.

Con esta estrategia también se llega a la solución correcta para la primera cuestión.

Para dar respuesta a la segunda cuestión se necesita expresar de manera algebraica la relación que se observa, en este caso, basándonos en la segunda tabla elaborada es posible expresar la relación como n^2, considerando n como el número de posición.

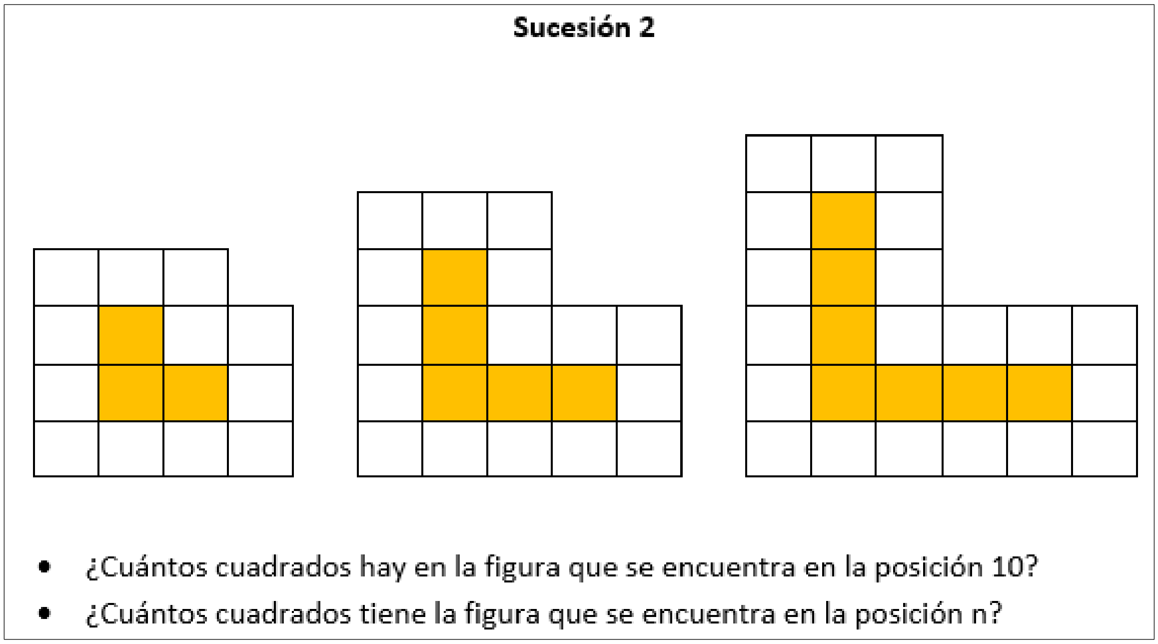


Figura 11. Sucesión 2 del ejercicio uno, propuesta para la actividad diagnóstica.

Para la segunda sucesión también se realizan dos cuestiones, la primera hace referencia a la parte aritmética y la segunda a la parte de generalización mediante la representación simbólica.

En este caso para la pregunta uno se observa que la figura uno tiene 15 cuadrados, la figura 2 tiene 21 cuadrados, la figura tres tiene 27 cuadrados.

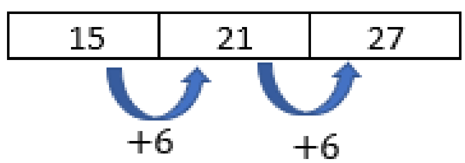


Figura 12. Análisis del comportamiento de la sucesión.

Se observa que la diferencia entre cada figura es de 6, por lo tanto, el número de cuadrados que se encuentran en la posición 10 se puede obtener sumando 6 a cada posición anterior, de la siguiente manera:

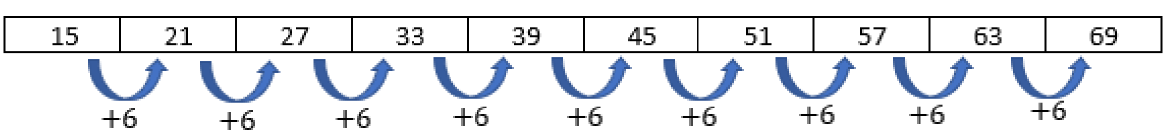


Figura 13. Estrategia empleada para el análisis del patrón numérico.

Por lo tanto, en la posición 10 hay 69 cuadrados.

Para responde a la cuestión número dos se puede realizar lo siguiente:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 15 + (n-1)(6)$$

$$a_n = 15 + 6n - 6$$

$$a_n = 6n + 9$$

Por lo tanto, en la posición n la figura tiene $6n + 9$ cuadrados.

EJERCICIO DOS

El ejercicio dos tiene como objetivo determinar si los alumnos pueden operar de manera simbólica (sin un contexto de por medio) las diferentes expresiones.

Ejercicio Dos. Escribe de forma simplificada el resultado de las siguientes operaciones.

- $2a + (-3a) =$
- $5b(b) + 4a - a =$
- $2x - c(c^2) =$
- $(a + b) + (a - b) =$

Figura 14. Ejercicio dos de la actividad diagnóstica.

Para resolver este ejercicio, se utilizan las propiedades para operar expresiones algebraicas, las soluciones correctas a dichos ejercicios se presentan a continuación:

- $2a + (-3a)$

Se aplica la regla de los signos (multiplicación) para poder eliminar el paréntesis

$$2a - 3a$$

Posteriormente, se restan ambos valores numéricos y se deja el signo del mayor valor absoluto, en este caso la solución es $-a$.

- $5b(b) + 4a - a$

Se realiza la multiplicación para eliminar el paréntesis, en este caso se aplica la multiplicación de potencias de la misma base (se conserva la base y se suman los exponentes).

$$5b^2 + 4a - a$$

Luego, para simplificar $4a - a$, se realiza la resta obteniendo $3a$. Dado que son bases diferentes a y b, el resultado de simplificar la expresión es $5b^2 + 3a$.

- $2x - c(c^2)$

Se realiza la multiplicación para eliminar el paréntesis, se aplica la multiplicación de potencias de la misma base, considerando también la regla de los signos para la multiplicación.

$$2x - c^3$$

Al tener expresiones con diferentes bases, no se pueden simplificar más, por tanto, el resultado es $2x - c^3$.

- $(a + b) + (a - b)$

Se realiza la eliminación de los paréntesis, en el caso del primer paréntesis se multiplica todo por 1 y resulta

$$a + b + (a - b)$$

Para la eliminación del segundo paréntesis también se multiplica todo por 1 y resulta

$$a + b + a - b$$

Posteriormente se pueden agrupar y simplificar las expresiones con la misma base, por tanto, el resultado es $2a$.

EJERCICIO TRES

Con el ejercicio tres se pretende que los alumnos representen de manera simbólica algunas expresiones dadas en el lenguaje natural.

Ejercicio Tres. Exprese de manera simbólica los siguientes enunciados.

- La suma de dos números cualesquiera
- El doble de un número más el mismo número, disminuido en 20
- El producto de dos números distintos cualesquiera
- El doble de un número, menos cuatro
- Dos veces un número cualquiera, menos cinco

Figura 15. Ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

Las soluciones correctas a cada uno de los enunciados son (la variable asignada por los alumnos puede variar):

- La suma de dos números cualesquiera

Se puede expresar como $a + b$

- El doble de un número más el mismo número, disminuido en 20

Se puede expresar como $(2b + b) - 20$

- El producto de dos números distintos cualesquiera

Se puede expresar como ab o $(a)(b)$

- El doble de un número, menos cuatro

Se puede expresar como $2x - 4$

- Dos veces un número cualquiera, menos cinco

Se puede expresar como $2a - 5$

EJERCICIO CUATRO

En el ejercicio cuatro se pretende identificar si los alumnos son capaces de resolver una ecuación cuadrática.

Ejercicio Cuatro. Resuelve correctamente la siguiente ecuación.

$$x(x+3) = 5x + 3$$

Figura 16. Ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

Para resolver la ecuación cuadrática primero es necesario simplificar la expresión e igualarla a cero. Se presenta el procedimiento para simplificar.

$$x^2 + 3x = 5x + 3$$

$$x^2 + 3x - \mathbf{5x} - \mathbf{3} = 5x - \mathbf{5x} + 3 - \mathbf{3}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Una vez que la ecuación cuadrática está simplificada e igualada a cero se puede resolver haciendo uso de la factorización o de la fórmula general. Se presentan ambos métodos.

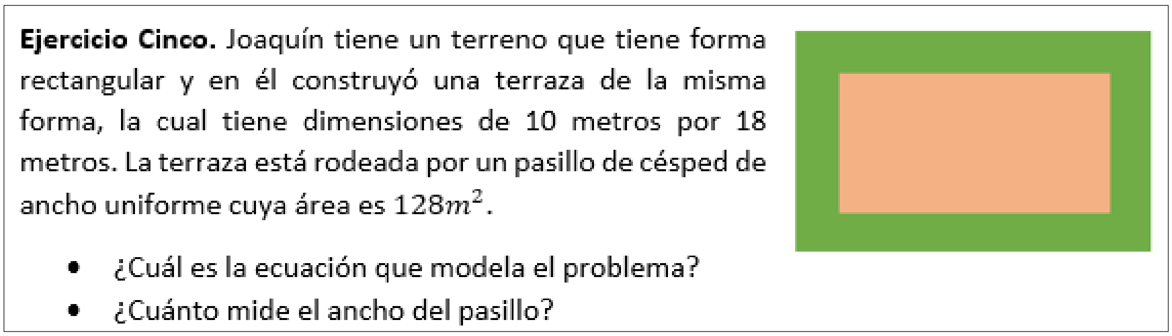
Factorización	**Fórmula general**
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3$
$(x-3)(x+1) = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x - 3 = 0 \quad x + 1 = 0$	$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$
$x - 3 + \mathbf{3} = 0 + \mathbf{3} \quad x + 1 - \mathbf{1} = 0 - \mathbf{1}$	$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$
$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$	$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$
	$x = \frac{2 \pm 4}{2}$

	$x_1 = \frac{2+4}{2} \qquad x_2 = \frac{2-4}{2}$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -1$

Tabla 8. Estrategias empleadas para resolver el ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

EJERCICIO CINCO

En el ejercicio cinco se presenta una situación en contexto, dónde los alumnos tienen que modelar dicha situación, relacionando las variables mediante una expresión cuadrática.


Ejercicio Cinco. Joaquín tiene un terreno que tiene forma rectangular y en él construyó una terraza de la misma forma, la cual tiene dimensiones de 10 metros por 18 metros. La terraza está rodeada por un pasillo de césped de ancho uniforme cuya área es $128m^2$.

- ¿Cuál es la ecuación que modela el problema?
- ¿Cuánto mide el ancho del pasillo?

Figura 17. Ejercicio cinco de la actividad diagnóstica.

Este ejercicio implica la movilización de diversas estrategias y de plantear una ecuación cuadrática, de acuerdo con los datos que se presentan en la redacción de éste. Conviene colocar la información que se posee en la figura proporcionada para que, de esta manera se pueda ir analizando una estrategia a seguir para la resolución de la problemática.

El pasillo de césped tiene un ancho uniforme, dado que, es un valor desconocido se puede representar con la variable x.

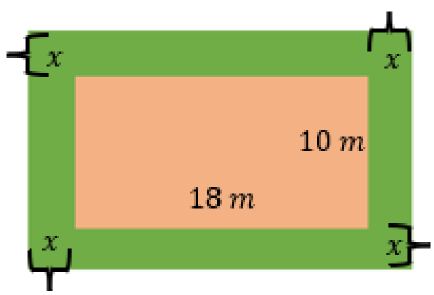


Figura 18. Análisis de los datos del ejercicio cinco.

Se puede determinar el área de la terraza, ya que, se conocen las dimensiones de ésta, 10 metros por 18 metros, al tener forma rectangular el área equivale a multiplicar la medida de la base por la medida de la altura, en este caso se obtiene $180\ m^2$.

La primera pregunta que se realiza es, ¿cuál es la ecuación que modela el problema? y la segunda pregunta ¿cuánto mide el ancho del pasillo?

Para el planteamiento de la ecuación se debe considerar que se quiere encontrar el ancho del pasillo. Adicionalmente, hay un dato que también sirve para el planteamiento de la ecuación, el área del pasillo de césped es de $128\ m^2$.

Las medidas de los lados del terreno (considerando terraza y pasillo de césped), están dadas por $18 + 2x$ y $10 + 2x$. Por lo tanto, el área total del terreno equivale a la multiplicación de las medidas $(18 + 2x)(10 + 2x)$. En ese sentido esta área total es equivalente a la suma de las áreas de la terraza y el pasillo de césped. Por tanto, la ecuación está dada por

$$(18 + 2x)(10 + 2x) = 180 + 128$$

Se procede a realizar las multiplicaciones correspondientes para posteriormente simplificar la ecuación.

$$180 + 36x + 20x + 4x^2 = 308$$

$$4x^2 + 56x + 180 = 308$$

$$4x^2 + 56x + 180 - \mathbf{308} = 308 - \mathbf{308}$$

$$4x^2 + 56x - 128 = 0$$

Dividiendo la ecuación entre 4

$$x^2 + 14x - 32 = 0$$

La ecuación se puede resolver por factorización o usando la fórmula general, se presentan ambos procedimientos.

Factorización	**Fórmula general**
$x^2 + 14x - 32 = 0$ $(x + 16)(x - 2) = 0$ $x + 16 = 0 \quad x - 2 = 0$ $x + 16 - \mathbf{16} = 0 - \mathbf{16} \quad x - 2 + \mathbf{2} = 0 + \mathbf{2}$ $x_1 = -16 \quad x_2 = 2$	$a = 1, \quad b = 14, \quad c = -32$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4(1)(-32)}}{2(1)}$ $x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2}$ $x = \frac{-14 \pm \sqrt{324}}{2}$ $x = \frac{-14 \pm 18}{2}$ $x_1 = \frac{-14 + 18}{2} \quad x_2 = \frac{-14 - 18}{2}$

	$x_1 = 2 \quad x_2 = -16$

Tabla 9. Estrategias empleadas para resolver el ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

La interpretación de las soluciones tiene un papel fundamental, ya que, se obtuvieron dos valores, sin embargo, de acuerdo con el contexto del problema, se pide encontrar el ancho de un pasillo y, por ende, no es posible que la medida sea un valor negativo. Ante esto la solución al problema es que el ancho del pasillo de césped mide 2 metros.

Un aspecto esencial de la resolución de problemas es la comprobación de la respuesta, verificando que cumpla la ecuación previamente planteada. En este sentido se obtiene:

$$(18 + 2x)(10 + 2x) = 180 + 128$$

Sabiendo que el ancho del pasillo es de 2 metros, es decir $x = 2$, se tiene que:

$$\big(18 + 2(2)\big)\big(10 + 2(2)\big)$$

$$= (18 + 4)(10 + 4)$$

$$= (22)(14)$$

$$= 308$$

Se observa que el valor $x = 2$ cumple la ecuación, por lo tanto, es la solución lógica al problema.

La prueba diagnóstica se presenta en el Anexo Uno.

- ### Secuencia didáctica uno

Esta secuencia puede consultarse en el Anexo dos, la secuencia consta de tres momentos. Es importante resaltar que esta secuencia se denomina “tradicional”, ya que, considera la manera común en la que se trabaja la resolución de ecuaciones cuadráticas en el aula de clases. Es preciso mencionar que antes de aplicar la secuencia didáctica se aplicaron los ejercicios de diagnóstico. Posterior a la resolución de la actividad diagnóstica que cada equipo realizó se subió a la plataforma de trabajo las soluciones correctas de los ejercicios.

- ✓ *Momento Uno*. El docente comienza la sesión cuestionando a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación?, luego enfatiza en las ecuaciones cuadráticas y la manera de resolverlas, se propone el trabajo con un problema en contexto, el cual se trabaja de manera grupal. Si bien se trabaja con un problema en contexto, este problema es hipotético.
- ✓ *Momento Dos*. Se propone el trabajo en equipos de cuatro personas (esto dependerá de la cantidad de alumnos), se brinda a los estudiantes dos problemas hipotéticos que necesitan resolver haciendo uso de una ecuación cuadrática. El docente guía este proceso de aplicación.
- ✓ *Momento Tres*. Se realiza la retroalimentación de los problemas trabajados durante el momento dos y los alumnos de manera individual realizan la resolución de un problema similar a los trabajados previamente. De manera individual los alumnos contestan la actividad de autoevaluación, la cual consistió en un formulario (Anexo Cinco), mediante la plataforma institucional (UADY virtual) se les proporcionó a los alumnos el enlace correspondiente.

El problema en contexto propuesto para el Momento Uno es el siguiente:

El auditorio de una escuela cuenta con las siguientes dimensiones: el largo es 4 metros más que el ancho. Por cuestiones de remodelación, se añaden 4 metros más de ancho y 8 metros más de largo con lo cual el área original se triplica. Con la información anterior, determina las dimensiones originales del auditorio.

Para la resolución de la situación se consideran los siguientes aspectos:

- La definición de la(s) incógnita(s).

En este caso se solicita encontrar las dimensiones originales del auditorio, las cuales pueden ser definidas como sigue:

$$Medida\ del\ ancho: x$$

$$Medida\ del\ largo: x+4$$

- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.

Para el planteamiento del problema es necesario considerar los siguientes aspectos:

$$\acute{A}rea\ original\ del\ auditorio: (x)(x+4)\ \rightarrow x^2+4x$$

$$Medida\ del\ ancho\ (modificada): x+4 \rightarrow x+4$$

$$Medida\ del\ largo\ (modificada): x+4+8 \rightarrow x+12$$

Considerando la redacción "*Por cuestiones de remodelación, se añaden 4 metros más de ancho y 8 metros más de largo con lo cual el área original se triplica.*"

Se puede interpretar que el planteamiento de la ecuación queda como:

$$(x+4)(x+12) = 3(x^2+4x)$$

- La resolución de la ecuación que representa el problema.

En la resolución de la ecuación es necesario multiplicar y simplificar los términos semejantes que se tengan.

$$x^2+16x+48 = 3x^2+12x$$

$$3x^2+12x-x^2-16x-48 = 0$$

$$2x^2-4x-48 = 0$$

$$x^2-2x-24 = 0$$

Se obtiene una ecuación cuadrática, la cual puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x-6)(x+4) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x - 6 + \mathbf{6} = 0 + \mathbf{6} \quad x + 4 - \mathbf{4} = 0 - \mathbf{4}$$

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -4$$

- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para la interpretación de resultados es necesario considerar que se está trabajando con dimensiones, por lo tanto, las medidas no pueden tomar valores negativos. En este caso se descarta el -4 y se considera el 6 como solución a la medida del ancho y el largo como 10. Así, las dimensiones originales del auditorio son 6 metros de ancho y 10 metros de largo.

Para comprobar las soluciones se tiene que el área original del auditorio es de $60\,m^2$, si las dimensiones se modifican el ancho quedaría como 10 metros y el largo como 18 metros, por tanto, el área modificada es de $180\,m^2$. Se cumple la condición que dice que si las dimensiones se modifican el área original se triplica.

Respecto a los problemas del momento dos se esperaba que los alumnos llegaran a las siguientes soluciones:

Problema Uno. La banqueta que rodea un jardín rectangular es de 3 metros de ancho. El jardín tiene 10 metros más de largo que de ancho. Si el área del jardín con la banqueta es de $1{,}496\,m^2$, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?

Para resolver el problema es necesario realizar un bosquejo del jardín.

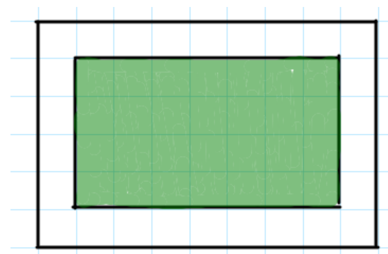


Figura 19. Bosquejo del jardín, problema uno del desarrollo (secuencia didáctica uno).

- La definición de la(s) incógnita(s).

En este caso se solicita encontrar las dimensiones del jardín, las cuales pueden ser definidas como sigue:

$$Medida\ del\ ancho\ del\ jardín: x$$

$$Medida\ del\ largo\ del\ jardín: x + 10$$

Con base en la información que presenta el problema es posible plantear el siguiente bosquejo:

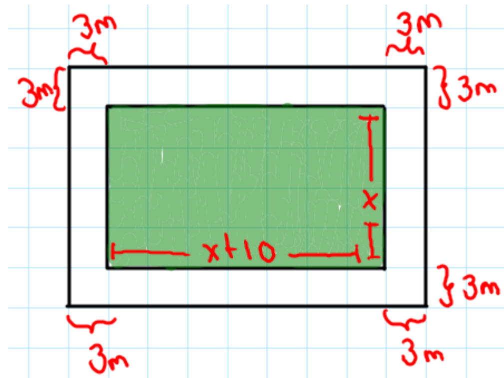


Figura 20. Bosquejo para plantear la información del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica uno).

- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.

Para el planteamiento del problema es necesario considerar los siguientes aspectos:

$$Área\ del\ jardín\ con\ la\ banqueta: (x+3+3)(x+10+3+3) \rightarrow (x+6)(x+16)$$

$$Área\ del\ jardín\ con\ la\ banqueta: x^2+22x+96$$

Se sabe que el área del jardín con la banqueta equivale a 1,496 m^2. Por lo tanto, la ecuación queda planteada de la siguiente manera:

$$x^2+22x+96=1496$$

- La resolución de la ecuación que representa el problema.

En la resolución de la ecuación es necesario igualarla a cero, para posteriormente resolverla.

$$x^2+22x+96=1496$$

$$x^2+22x+96-1496=1496-1496$$

$$x^2+22x-1400=0$$

$$(x-28)(x+50)=0$$

$$x-28=0 \quad x+50=0$$

$$x-28+\mathbf{28}=0+\mathbf{28} \quad x+50-\mathbf{50}=0-\mathbf{50}$$

$$x_1=28 \quad x_2=-50$$

- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para la interpretación de resultados es necesario considerar que se está trabajando con dimensiones, por lo tanto, las medidas no pueden tomar valores negativos. En este caso se descarta el -50 y se considera el 28 como solución a la medida del ancho del jardín y el largo de éste como 38. Así, las dimensiones del jardín son de 28 metros de ancho y 38 metros de largo.

Para comprobar las soluciones se tiene que, las dimensiones del jardín con la banqueta serían de 34 metros de ancho y 44 metros de largo. Con un área total de $1496\ m^2$, lo cual coincide con el valor proporcionado como dato del problema.

Problema Dos. Marina compró cierto número de pasteles por $200 para vender en el mercado. En su camino se le aplastaron 8 en el camión, por lo que tuvo que vender cada uno de los restantes a $3.50 más de lo que le costó cada uno, obteniendo una ganancia de $115. ¿Cuántos pasteles compró y a qué precio?

- La definición de la(s) incógnita(s).

En este caso se solicita encontrar el número de pasteles que compró Marina y el precio de cada uno, se puede definir lo siguiente:

$$Número\ de\ pasteles: x$$

$$Precio\ de\ cada\ pastel: \frac{200}{x}$$

Se menciona que se le aplastaron algunos pasteles y les tuvo que subir el precio, lo anterior puede definirse de la siguiente manera:

$$Se\ le\ aplastaron\ 8\ pasteles: x-8$$

$$Cada\ pastel\ costaría\ \$3.5\ más: \frac{200}{x}+3.5$$

- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.

Para el planteamiento del problema es necesario considerar la situación hipotética que se menciona "en su camino se le aplastaron 8 en el camión, por lo que tuvo que vender cada uno de los restantes a $3.50 más de lo que le costó cada uno, obteniendo una ganancia de $115". Por lo tanto, el planteamiento de la ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$\left(\frac{200}{x}+3.5\right)(x-8)=200+115$$

Es importante considerar que Marina invirtió $200 en comprar los pasteles, pero como recibe $115 de ganancia implica que el total de ingresos por la venta de los pasteles (al nuevo precio) fue de $315.

- La resolución de la ecuación que representa el problema.

En la resolución de la ecuación es necesario simplificarla y dejarla en la forma $ax^2+bx+c=0$, para después igualarla a cero y posteriormente resolverla.

$$\frac{200x}{x} - \frac{1600}{x} + 3.5x - 28 = 315$$

$$200 - \frac{1600}{x} + 3.5x - 28 = 315$$

Multiplicando toda la ecuación por x

$$200x - \frac{1600x}{x} + 3.5x^2 - 28x = 315x$$

$$200x - 1600 + 3.5x^2 - 28x = 315x$$

Igualando a cero

$$200x - 1600 + 3.5x^2 - 28x - 315x = 0$$

$$3.5x^2 - 143x - 1600 = 0$$

Resolviendo la ecuación mediante la fórmula general, se tiene:

$$a = 3.5, \qquad b = -143, \qquad c = -1600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-143) \pm \sqrt{(-143)^2 - 4(3.5)(-1600)}}{2(3.5)}$$

$$x = \frac{143 \pm \sqrt{20{,}449 + 22{,}400}}{7}$$

$$x = \frac{143 \pm \sqrt{42{,}849}}{7}$$

$$x = \frac{143 \pm 207}{7}$$

$$x_1 = \frac{143 + 207}{7} \qquad x_2 = \frac{143 - 207}{7}$$

$$x_1 = 50 \quad x_2 = -\frac{64}{7}$$

- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para la interpretación de resultados es necesario considerar que se está trabajando con un número de pasteles, por lo tanto, la solución no puede tomar valores negativos. En este caso se descarta el $-\frac{64}{7}$ y se considera el 50 como solución al número de pasteles que compró para vender. Para saber el precio de cada pastel basta con dividir $\frac{200}{50} = 4$, por lo tanto, cada pastel costó $4.

Con estos datos se obtiene que, al aplastarse 8 pasteles, se quedó con 42 pasteles. Los vendió a $3.5 más de lo que había costado originalmente, es decir, los vendió en $7.5. Obtuvo un total de $315 de ingresos y cómo había invertido $200 la ganancia de Marina fue de $115.

El problema propuesto para el momento tres es el siguiente:

El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica. Determina las dimensiones del terreno.

La resolución esperada del mismo es la siguiente:

- La definición de la(s) incógnita(s).

En este caso se solicita encontrar las dimensiones del terreno, las cuales pueden ser definidas como sigue:

$$Medida\ del\ ancho: x$$

$$Medida\ del\ largo: 2x$$

- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.

Para el planteamiento del problema es necesario considerar los siguientes aspectos:

$$Área\ original\ del\ terreno: (x)(2x)\ \rightarrow 2x^2$$

$$Medida\ del\ ancho\ (modificada): x + 6$$

$$Medida\ del\ largo\ (modificada): 2x + 40$$

Considerando la redacción "*Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica*".

Se puede interpretar que el planteamiento de la ecuación queda como:

$$(x + 6)(2x + 40) = 2(2x^2)$$

- La resolución de la ecuación que representa el problema.

En la resolución de la ecuación es necesario multiplicar y simplificar los términos semejantes que se tengan.

$$2x^2 + 40x + 12x + 240 = 4x^2$$

$$2x^2 + 40x + 12x + 240 - 4x^2 = 0$$

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por -1, para que, el término cuadrático quede con signo positivo.

$$2x^2 - 52x - 240 = 0$$

La ecuación puede ser dividida entre 2 para obtener una ecuación equivalente

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$

Se obtiene una ecuación cuadrática, la cual puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$

$$(x - 30)(x + 4) = 0$$

$$x - 30 = 0 \quad x + 4 = 0$$

$$x - 30 + \mathbf{30} = 0 + \mathbf{30} \quad x + 4 - \mathbf{4} = 0 - \mathbf{4}$$

$$x_1 = 30 \quad x_2 = -4$$

- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para la interpretación de resultados es necesario considerar que se está trabajando con dimensiones, por lo tanto, las medidas no pueden tomar valores negativos. En este caso se descarta el -4 y se considera el 30 como solución a la medida del ancho y el largo como 60. Así, las dimensiones originales del terreno son 30 metros de ancho y 60 metros de largo.

Para comprobar las soluciones se tiene que el área original del terreno es de $1800\, m^2$, si las dimensiones se modifican el ancho quedaría como 36 metros y el largo como 100 metros, por tanto, el área modificada es de $3600\, m^2$. Se cumple la condición que dice que si las dimensiones se modifican el área original se duplica.

- ### Secuencia didáctica dos

Esta secuencia puede consultarse en el Anexo tres, la secuencia consta de tres momentos. La secuencia tiene el objetivo de promover una conceptualización de la resolución de una ecuación cuadrática en diferentes registros de representación, numérico, algebraico y gráfico, mediante la resolución de problemas. Aquí se toman varias ideas de Santos Trigo (2014), para el diseño de la situación que realmente pueda ser considerada con un problema y permita la movilización de diferentes saberes algebraicos por parte de los alumnos.

- ✓ *Momento Uno*. El docente comienza la sesión cuestionando a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación?, luego se pregunta por la diferencia entre un modelo de variación lineal y uno de variación cuadrática. Con esta segunda pregunta se pretende obtener ideas referentes a que la variación de un modelo lineal es constante, en tanto que el cuadrático varía linealmente. Posteriormente se enfatiza en las ecuaciones cuadráticas y la manera de resolverlas.

- ✓ *Momento Dos*. Se propone el trabajo en equipos de cuatro personas, se brinda a los estudiantes dos problemas que necesitan resolver haciendo uso de una ecuación cuadrática. Es preciso mencionar que estos problemas fueron elaborados considerando el contexto en el que viven los estudiantes, además estos problemas no presentan una resolución inmediata, implican un análisis mayor y la movilización de diversas estrategias para dar solución. El docente guía este proceso de resolución, está al pendiente de las dudas y comentarios de cada equipo de trabajo.
- ✓ *Momento Tres*. Se realiza la retroalimentación de los problemas trabajados durante el momento dos y los alumnos de manera individual diseñan una situación que implique el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática. De manera individual los alumnos contestan la actividad de autoevaluación, la cual consistió en un formulario (Anexo Cinco), mediante la plataforma institucional (UADY virtual) se les proporcionó a los alumnos el enlace correspondiente.

Para el Momento Dos se presentan dos problemas, los cuales aparecen en contexto extra matemático. El problema uno es el siguiente:

Problema 1. En los pueblos de Yucatán se cuentan muchas historias interesantes y divertidas. Una de ellas cuenta la historia de dos campesinos, Juan y Marcelino, quienes caminaban por un sacbé (camino blanco), se encontraban desesperados ya que no habían logrado vender los zapotes y pitahayas que habían sembrado en sus terrenos.

Era tanta la desesperación de los campesinos que, al pasar cerca de una pirámide maya, Juan comenzó a hablar al Alux, cuidador de dicha pirámide. Juan dijo “Alux, Aluxito, apiádate de mí, hoy no fue un buen día, te pido que multipliques por el mismo número la cantidad de dinero que traigo en mi sabucán, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Marcelino, aquí presente, que ya estoy viendo que le ha ido peor que a mí”.

El Alux, conmovido por la pasión que Juan ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos, Juan emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a Marcelino. Tan contento y emocionado se puso Marcelino, que pidió a Juan que repitiera su súplica al Alux.

Entonces Juan, realiza una nueva petición al Alux, “Alux, Aluxito, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré trescientos pesos a mi compadre Marcelino”.

De nueva cuenta el Alux se conmueve y vuelve a conceder la petición, Marcelino inmediatamente recibe trescientos pesos. Más tarda en recibirlo, que en pedirle a Juan que repita otra petición.

Impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el Alux, Juan repite su petición, “Alux, Aluxito, por última vez, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré doscientos pesos a Marcelino”.

Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, "¿cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre".

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿cuál es la explicación a lo sucedido?, ¿por qué se quedó sin dinero?
b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio?

En este problema se encuentran los siguientes elementos:

Recursos

- **Datos.** El dinero que trae Juan en su sabucán, el dinero que pide en cada uno de los deseos concedidos por el Alux y el dinero que entrega a Marcelino (la primera vez \$200, la segunda vez \$300 y la tercera vez \$200).
- **Comprensión.** Se quiere encontrar la cantidad de dinero que tenía Juan, en este caso esa es la incógnita.

Heurísticas

El problema puede ser resuelto de la siguiente manera:

Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿cuál es la explicación a lo sucedido?, ¿por qué se quedó sin dinero?, ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio?

Solución

Llámese x a la cantidad de dinero que tenía Juan en su sabucán antes de pedirle al Alux. Entonces se tiene:

Si Juan le pide al Alux que multiplique por el mismo número la cantidad que tiene, entonces tendrá x^2, al entregarle a Marcelino 200 pesos, le quedan $x^2 - 200$.

Si el Alux le da una cantidad igual a la que trae ahora en el sabucán, entonces tiene

$$2(x^2 - 200)$$

Al entregarle 300 pesos a Marcelino, le quedan

$$2(x^2 - 200) - 300$$

Si el Alux le da una cantidad igual a la que trae ahora en el sabucán, entonces tiene

$$2(2(x^2 - 200) - 300)$$

Al entregarle 200 pesos a Marcelino, le quedan

$$2(2(x^2-200)-300)-200$$

Como no le quedó nada a Juan, entonces

$$2(2(x^2-200)-300)-200=0$$

De donde

$$2(2x^2-400-300)-200=0$$

$$2(2x^2-700)-200=0$$

$$4x^2-1400-200=0$$

$$4x^2-1600=0$$

$$x^2-400=0$$

$$(x-20)(x+20)=0$$

De donde

$$x-20=0 \qquad \text{o} \qquad x+20=0$$

Es decir,

$$x=20 \qquad \text{o} \qquad x=-20$$

Sólo la solución positiva es solución del problema.

Por lo tanto, Juan se quedó sin dinero ya que, daba más dinero del que traía. Al pedir la primera vez obtiene $(20)^2=400$, pero entrega 200 a Marcelino, por lo que, se queda con 200. Luego, pide el doble de lo que tenía, es decir, $2(200)=400$ y entrega 300 a Marcelino, por lo cual se queda únicamente con 100. Con la última petición pide el doble de lo que tenía, $2(100)=200$, pero le da a Marcelino 200, por lo cual se queda con cero pesos.

Al inicio Juan traía $20 pesos.

Control

Es necesario definir la heurística que se empleará para resolver el problema, para así planificar los pasos que se seguirán para dar solución a la problemática. La redacción del problema es extensa por lo cual conviene tomar nota o remarcar los datos que se mencionan en el mismo.

Sistema de creencias

Por las características del problema es posible que los alumnos consideren que la solución de éste requiere el planteamiento de una ecuación. Asimismo, el contexto manejado en el problema permite "atrapar" al estudiante, ya que, mencionan palabras propias del lugar dónde viven, en este caso Yucatán.

Problema 2. Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Yucatán trata de la herencia de un viejo artesano de hamacas, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir su herencia entre sus tres hijas.

El viejo artesano reunió a sus hijas y les dijo: "Hijas mías, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Me quiero marchar con la certeza de que los asuntos terrenales han quedado arreglados a mi entera satisfacción. Así que, en vista de que su madre ya murió, y yo ya no tengo más por quién preocuparme que no sea por ustedes, la próxima semana les repartiré la única herencia que les voy a dejar. Saben que tengo un terreno, voy a darles a cada una un pedazo de este. Mi compadre Pancho irá a medir el terreno dentro de tres días. Vengan, dentro de cuatro días a la misma hora para hacer la repartición".

Las hijas, melancólicas, se despiden del padre, prometiendo que a los cuatro días regresarían. La hija mayor se retira del lugar pensando que como es la hija mayor, le tocó acompañar a su padre muchos años, mientras sus hermanas menores se quedaban en casa, por tanto, debe corresponderle la mayor parte. Así que, pasada la medianoche fue hasta dónde se encontraba el terreno y cambia el cercado de este, tomando 270 metros cuadrados.

No es de extrañar que la hija de en medio pensará que a ella le correspondería recibir la mayor parte, ya que, le tocaba cuidar a su hermana menor. Convencida de su argumento, va al terreno de su papá, cambia el cercado de este y toma 162 metros cuadrados.

Finalmente, la hermana menor, llega a la conclusión de que ella, precisamente por el hecho de ser la menor, debe de quedar más protegida que sus hermanas mayores. Va hacia dónde se encuentra el terreno de su padre y sin que nadie la vea, cambia el cercado del este, tomando 81 metros cuadrados.

Es preciso mencionar que, las hijas no tomaron el mismo de terreno. De esta manera, cuando Don Pancho va a medir el terreno se encuentra con que este mide 2187 metros cuadrados. Transcurridos los cuatro días, llegan las hijas al cuarto del padre, quien comenta que los terrenos serán distribuidos de la siguiente manera:

- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo largo, lo que cambia es el ancho.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo ancho sea 10 metros más que de largo.
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo ancho sea de 5 metros más que de largo.
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo ancho sea 15 metros menos que el largo.

a) ¿Cuál era el área original del terreno?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

Recursos

- **Datos.** El número de hijas del artesano, el área que cada hija va tomando, el área que mide Don Pancho, la parte que le toca a cada hija al momento de la repartición.

- **Comprensión.** Se quiere encontrar el área original del terreno y las dimensiones del terreno que tocó a cada hija.

Heurísticas

El problema puede ser resuelto de la siguiente manera:

- **Solución**

En esta primera solución se aborda el problema de manera directa, es decir, identificando cuál es la medida desconocida, en este caso, el largo del terreno, esto se representa con una incógnita y se deben establecer las relaciones entre los datos proporcionados a lo largo de la redacción del problema.

Llámese x a la medida del largo del terreno. Entonces se tiene:

$$\text{Área del terreno de la hija menor: } (x)(x+10)$$

$$\text{Área del terreno de la hija de en medio: } (x)(x+5)$$

$$\text{Área del terreno de la hija mayor: } (x)(x-15)$$

Se sabe que Don Pancho al medir el área del terreno obtiene 2187 metros cuadrados, sin embargo, las hijas del artesano ya habían tomado cierta parte del área de éste, la mayor tomó 270 metros cuadrados, la de en medio 162 metros cuadrados y la más pequeña tomó 81 metros cuadrados. Por tanto, el área original del terreno se puede representar de la siguiente manera:

$$2187 + 270 + 162 + 81 = 2700$$

Por lo tanto, el área original del terreno es de 2700 metros cuadrados, contestando así el inciso a) de la problemática.

Ahora para encontrar las medidas del terreno que le corresponde a cada hija se puede plantear la siguiente igualdad:

$$(x)(x+10) + (x)(x+5) + (x)(x-15) = 2187$$

Resolviendo la ecuación

$$x^2 + 10x + x^2 + 5x + x^2 - 15x = 2187$$

$$3x^2 = 2187$$

$$x^2 = \frac{2187}{3}$$

$$x^2 = 729$$

$$|x| = \sqrt{729}$$

$$|x| = 27$$

De donde

$$x = 27 \text{ o } x = -27$$

Como x representa una longitud, entonces sólo el caso positivo es solución del problema.

En este sentido, el largo del terreno de cada hija fue de 27 metros, referente al ancho las medidas quedarían de la siguiente forma:

Área del terreno de la hija menor: $(27)(27 + 10)$

Área del terreno de la hija de en medio: $(27)(27 + 5)$

Área del terreno de la hija mayor: $(27)(27 - 15)$

Contestando a la segunda se tiene que las dimensiones de los terrenos que tocaron a cada hija son las siguientes:

Área del terreno de la hija menor: $(27)(37)$

Área del terreno de la hija de en medio: $(27)(32)$

Área del terreno de la hija mayor: $(27)(12)$

Para responder a la pregunta tres ¿cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?, es necesario multiplicar las dimensiones de los terrenos de las hijas.

Área del terreno de la hija menor: $999\ m^2$

Área del terreno de la hija de en medio: $864\ m^2$

Área del terreno de la hija mayor: $324\ m^2$

Adicional a esto hay que recordar que cada hija ya había tomado una parte del terreno, por lo cual al área determinada previamente hay que sumarle el área que cada una ya había tomado.

Área del terreno que realmente le tocó a la hija menor:

$$999\ m^2 + 81 m^2 = 1080\ m^2$$

Área del terreno que realmente le tocó a la hija de en medio:

$$864\ m^2 + 162\ m^2 = 1026\ m^2$$

Área del terreno que realmente le tocó a la hija mayor:

$$324\ m^2 + 270\ m^2 = 594\ m^2$$

Así, la respuesta a la pregunta c) es: a la hija mayor le correspondió $594\ m^2$, a la hija de en medio $1026\ m^2$ y a la hija menor $1080\ m^2$.

Control

Es necesario definir la heurística que se empleará para resolver el problema, para así planificar los pasos que se seguirán para dar solución a la problemática. Resulta conveniente tomar nota o remarcar los datos que se mencionan en el mismo.

Sistema de creencias

Por las características del problema es posible que los alumnos consideren que la solución de éste requiere el planteamiento de una ecuación, dado que, se mencionan palabras que hacen alusión al planteamiento de una incógnita.

Para el Momento Tres se solicita al alumno plantear una problemática que implique el uso de una ecuación cuadrática de segundo grado y la solución correspondiente.

- Secuencia didáctica tres.

La secuencia consta de tres momentos, se puede consultar en el Anexo Cuatro. Esta secuencia tiene el objetivo de promover la resolución de problemas de ecuaciones cuadráticas a partir del uso de la tecnología, en este caso GeoGebra. Se pretende que con el uso de estas tecnologías el alumno pueda manipular y experimentar, haciendo fructífera su experiencia de aprendizaje.

- ✓ *Momento Uno*. El docente comienza la sesión cuestionando a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación?, luego se pregunta por la diferencia entre un modelo de variación lineal y uno de variación cuadrática. Con esta segunda pregunta se pretende obtener ideas referentes a que la variación de un modelo lineal es constante, en tanto que el cuadrático varía linealmente. Posteriormente se enfatiza en las ecuaciones cuadráticas y la manera de resolverlas.
- ✓ *Momento Dos*. Se propone el trabajo en equipos de cuatro personas, se brinda a los estudiantes dos problemas que necesitan resolver haciendo uso de una ecuación cuadrática. Es preciso mencionar que estos problemas fueron elaborados considerando el contexto en el que viven los estudiantes, además estos problemas no presentan una resolución inmediata, implican un análisis mayor y la movilización de diversas estrategias para dar la solución. Previamente se compartió con los alumnos un archivo de GeoGebra, el cual se solicitó descargarlo en el celular (previamente debieron descargar la aplicación), este archivo será de utilidad para la resolución de las problemáticas. El docente guía este proceso de resolución, está al pendiente de las dudas y comentarios de cada equipo de trabajo.
- ✓ *Momento Tres*. Se realiza la retroalimentación de los problemas trabajados durante el momento dos y los alumnos de manera individual diseñan una situación que implique el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática. Se solicita la comprobación de manera gráfica, con el objetivo de analizar qué representa gráficamente las soluciones de una ecuación cuadrática. De manera individual los alumnos contestan la actividad de

autoevaluación, la cual consistió en un formulario (Anexo Cinco), mediante la plataforma institucional (UADY virtual), se les proporcionó a los alumnos el enlace correspondiente.

Es preciso mencionar que en esta secuencia didáctica se trabajan los mismos problemas que en la secuencia didáctica dos, con la diferencia de que en los problemas del Momento Dos se agrega la siguiente cuestión:

Tomando como base la herramienta tecnológica, ¿qué representa gráficamente la solución encontrada?

Previamente a la aplicación de la secuencia didáctica, se solicita a los alumnos descargar la aplicación GeoGebra en sus teléfonos celulares para poder abrir el archivo que se les compartió en el espacio correspondiente de la plataforma UADY VIRTUAL.

Al abrir el archivo los alumnos visualizarían una pantalla como la que sigue:

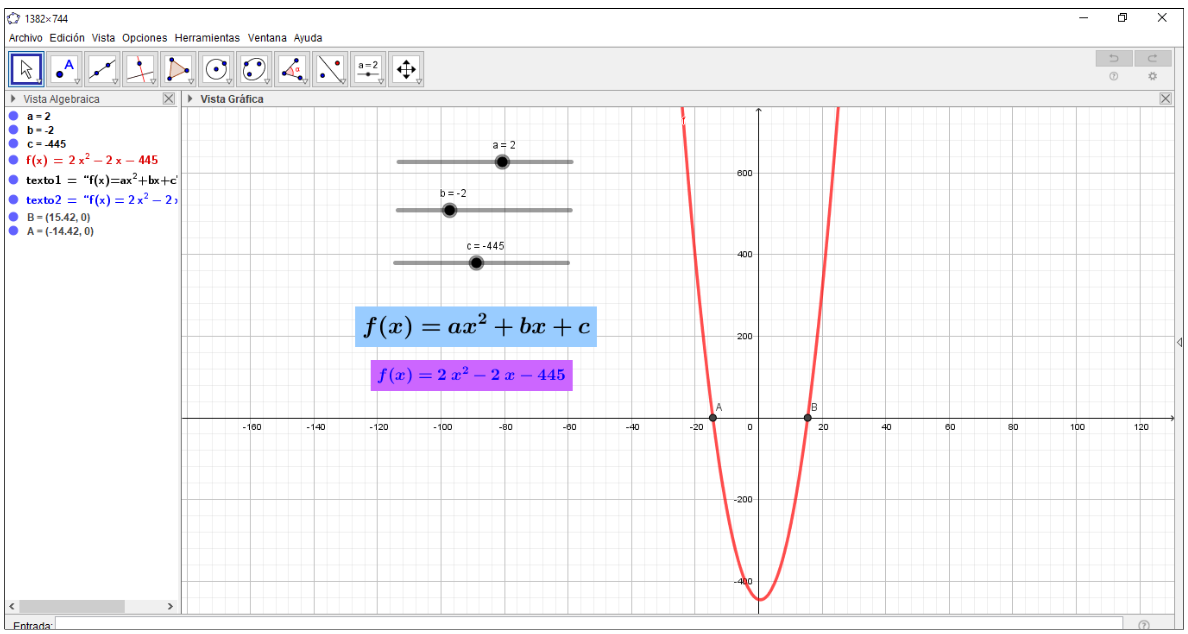


Figura 21. Visualización del archivo de GeoGebra para la secuencia didáctica tres.

El archivo presenta la representación gráfica de una ecuación cuadrática, tiene deslizadores por lo cual los alumnos pueden ir manipulando los valores de acuerdo con las ecuaciones que vayan construyendo.

Con esta experimentación tecnológica se tiene como objetivo que el alumno pueda realizar un tránsito entre los diferentes registros de representación de la ecuación cuadrática, por ejemplo, al analizar que las intersecciones con el eje x representan las raíces que son soluciones de la ecuación cuadrática.

b) Procedimiento del análisis

Se realizará un análisis de tipo cualitativo del desempeño de los alumnos en cada una de las sesiones de trabajo, con el objeto de identificar evidencias de habilidades de pensamiento algebraico que iban incorporando en sus estructuras mentales de conocimiento con el uso de la secuencia didáctica. Se prestará particular atención a las estrategias empleadas para resolver los ejercicios y/o problemas pero también a las dificultades que se presentaron en la búsqueda de las soluciones. Se insertarán evidencias realizadas por los alumnos para un mayor fundamento y claridad al análisis.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los análisis de las respuestas que los estudiantes dieron al diagnóstico y a la secuencia didáctica correspondiente.

Es preciso mencionar que en el estudio participaron tres grupos de estudiantes del segundo semestre de bachillerato, los participantes en cada grupo fueron: 34, 37 y 41 alumnos. Con el primer grupo se aplicó la primera secuencia didáctica, con el segundo grupo se aplicó la segunda secuencia didáctica y con el tercer grupo se aplicó la tercera secuencia didáctica.

5.1 RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO

La actividad diagnóstica fue respondida en total por 112 alumnos, de manera individual con una duración máxima de 80 minutos. Hay que recordar que la actividad diagnóstica está compuesta por 7 ejercicios.

Los participantes en cada grupo fueron: 34, 37 y 41 alumnos, para grupo 1, 2 y 3 respectivamente.

Para cada ejercicio se presentará el total de alumnos que lograron llegar a la solución correcta, asimismo se presentarán algunas evidencias de las respuestas dadas.

EJERCICIO UNO

El ejercicio 1 estuvo compuesto por dos sucesiones, a su vez para cada sucesión se realizaron dos cuestiones. En este sentido, la tabla siguiente presenta los resultados obtenidos. Al mencionar Sucesión 1 a) se hace referencia a la primera pregunta de la sucesión uno, con Sucesión 1 b) se hace referencia a la segunda pregunta de la sucesión uno, aplicando lo mismo para la sucesión 2. El SI de la tabla hace referencia a si el alumno pudo resolver correctamente la cuestión solicitada y el NO, hace referencia a que el alumno no logró llegar a la solución correcta. Por ejemplo, se observa que del grupo 1 fueron 31 alumnos los que lograron resolver correctamente la primera cuestión de la sucesión 1.

	Ejercicio 1							
	Sucesión 1 a)		**Sucesión 1 b)**		**Sucesión 2 a)**		**Sucesión 2 b)**	
	SÍ	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**NO**	**SÍ**	**NO**
Grupo 1	**31**	**3**	**29**	**5**	**26**	**8**	**25**	**9**
Grupo 2	**30**	**7**	**16**	**21**	**26**	**11**	**19**	**18**
Grupo 3	**31**	**10**	**26**	**15**	**14**	**27**	**8**	**33**

Tabla 10. Resultados del ejercicio 1 de la actividad diagnóstica.

Algunas de las estrategias encontradas para resolver la secuencia 1 son las siguientes:

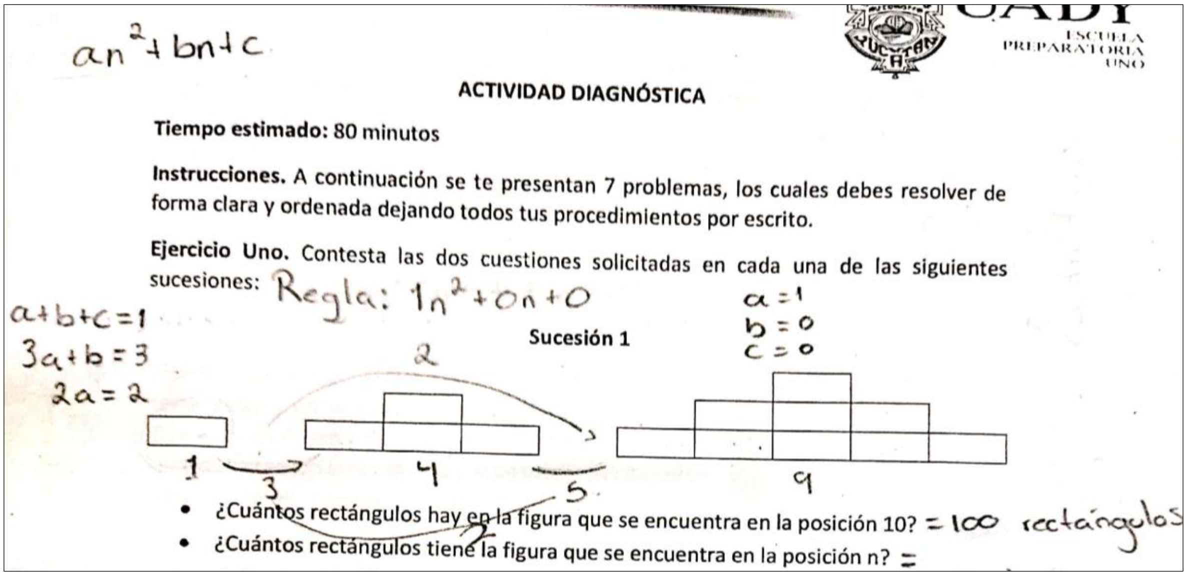


Figura 22. Estrategia uno, empleada para resolver la sucesión uno de la actividad diagnóstica.

En el caso de la imagen anterior se puede observar como el estudiante determinó las primeras diferencias de la sucesión, en este caso 3, 5 y 9, posteriormente se observa cómo obtiene la segunda diferencia entre 3 y 5, la cual es 2. El estudiante coloca estas primeras y segundas diferencias y el primer término de la sucesión para formar tres relaciones algebraicas, las cuales tienen a las variables a, b y c. Al final expresa la regla en términos de una ecuación cuadrática, mostrando los tres términos de ésta, pero el término lineal y el independiente corresponden al valor de cero.

Otra de las estrategias empleadas en la resolución de la primera sucesión es la que sigue

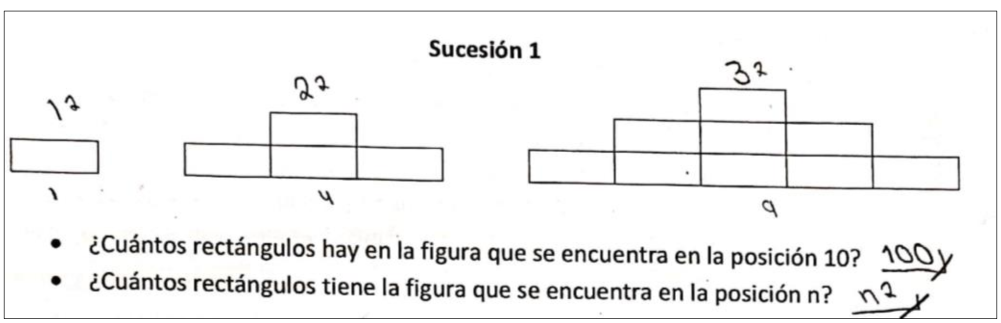


Figura 23. Estrategia dos, empleada para resolver la sucesión uno de la actividad diagnóstica.

En este caso, la estrategia empleada implicó menos manipulación algebraica pero un análisis para señalar que las posiciones son las que se elevan al cuadrado para obtener el número de rectángulos que conforman cada figura. Al percatarse de esta relación, determinar la posición n fue más directa.

Para la segunda sucesión, se observó que algunos alumnos también determinaron las primeras diferencias entre cada número de la sucesión, obteniendo de esta de manera, 6. Lo anterior se presenta en la siguiente imagen.

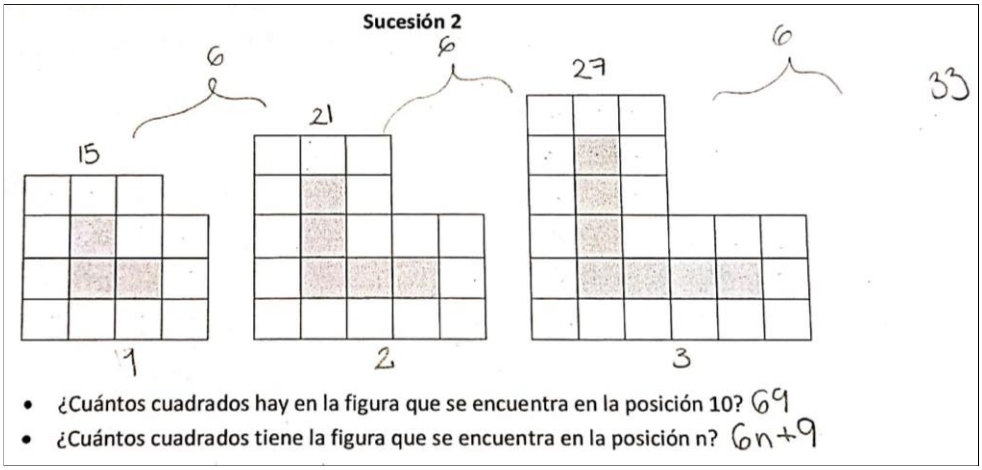


Figura 24. Estrategia uno, empleada para resolver la sucesión dos de la actividad diagnóstica.

De igual manera, al percatarse de esta relación, algunos alumnos fueron determinando las posiciones de manera aritmética.

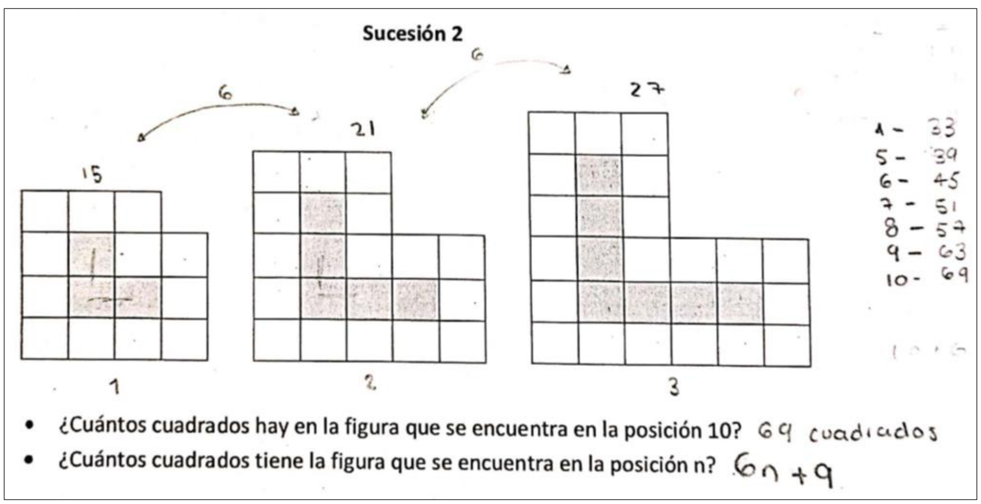


Figura 25. Estrategia dos, empleada para resolver la sucesión dos de la actividad diagnóstica.

Del análisis de las respuestas otorgadas por los alumnos se obtuvo lo siguiente:

Grupo 1. De los 31 alumnos que respondieron correctamente la primera pregunta de la sucesión uno se tiene que, 13 utilizaron un procedimiento algebraico y 18 un procedimiento aritmético. En la pregunta dos de la sucesión uno se tiene que, 13 utilizaron estrategias algebraicas y 16 estrategias aritméticas para llegar a la respuesta correcta. Respecto a la secuencia didáctica dos, se tiene que en la primera pregunta 12 emplearon un procedimiento algebraico y 14 un procedimiento aritmético. Ahora, en la segunda pregunta de la sucesión dos se tiene 12 emplearon un procedimiento algebraico y 13 un procedimiento aritmético. Con esta información es posible determinar que el grupo 1 presenta más afinidad en el manejo aritmético, aunque esto se afirma solo con lo observado con el trabajo con las sucesiones.

Grupo 2. De los 30 alumnos que respondieron correctamente la primera pregunta de la sucesión uno se tiene que, 14 utilizaron un procedimiento algebraico y 16 un procedimiento aritmético. En la pregunta dos de la sucesión uno se tiene que, 9 utilizaron estrategias algebraicas y 7 estrategias aritméticas para llegar a la respuesta correcta. Respecto a la secuencia didáctica dos, se tiene que en la primera pregunta 10 emplearon un procedimiento algebraico y 16 un procedimiento aritmético. Ahora, en la segunda pregunta de la sucesión dos se tiene 9 emplearon un procedimiento algebraico y 10 un procedimiento aritmético. Con esta información es posible determinar que el grupo 2 presenta más afinidad en el manejo aritmético, aunque esto se afirma solo con lo observado con el trabajo con las sucesiones.

Grupo 3. De los 31 alumnos que respondieron correctamente la primera pregunta de la sucesión uno, se tiene que, 14 utilizaron un procedimiento algebraico y 17 un procedimiento aritmético. En la pregunta dos de la sucesión uno se tiene que, 11 utilizaron estrategias algebraicas y 15 estrategias aritméticas para llegar a la respuesta correcta. Respecto a la secuencia didáctica dos, se tiene que en la primera pregunta 6 emplearon un procedimiento algebraico y 8 un procedimiento aritmético. Ahora, en la segunda pregunta de la sucesión dos se tiene 3 emplearon un procedimiento algebraico y 5 un procedimiento aritmético. Con esta información es posible determinar que el grupo 3 presenta más afinidad en el manejo aritmético, aunque esto se afirma solo con lo observado con el trabajo con las sucesiones.

Por lo tanto, con el trabajo realizado con los tres grupos para dar respuesta a las cuestiones planeadas se encontró una afinidad de los alumnos hacia el trabajo con procedimientos más aritméticos para llegar a las soluciones.

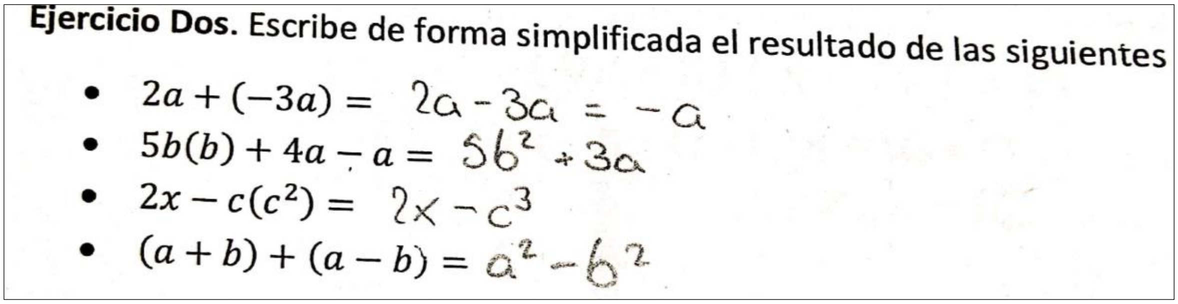
EJERCICIO DOS

El ejercicio 2 estuvo compuesto por cuatro operaciones algebraicas que los alumnos debían responder. Las operaciones algebraicas involucradas hacían referencia a la suma, resta y multiplicación de expresiones de la misma base. El SÍ de la tabla hace referencia a si el alumno pudo resolver correctamente la cuestión solicitada y el NO, hace referencia a que el alumno no logró llegar a la solución correcta. Por ejemplo, se observa que del grupo 1 fueron 31 alumnos los que lograron resolver correctamente la primera operación del ejercicio 2.

	Ejercicio 2							
	Operación 1		Operación 2		Operación 3		Operación 4	
	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Grupo 1	31	3	30	4	33	1	25	9
Grupo 2	31	6	25	12	31	6	19	18
Grupo 3	16	25	27	14	23	18	10	31

Tabla 11. Resultados del ejercicio 2 de la actividad diagnóstica.

A continuación, se presentan algunas estrategias y errores encontradas en los procedimientos de los alumnos.

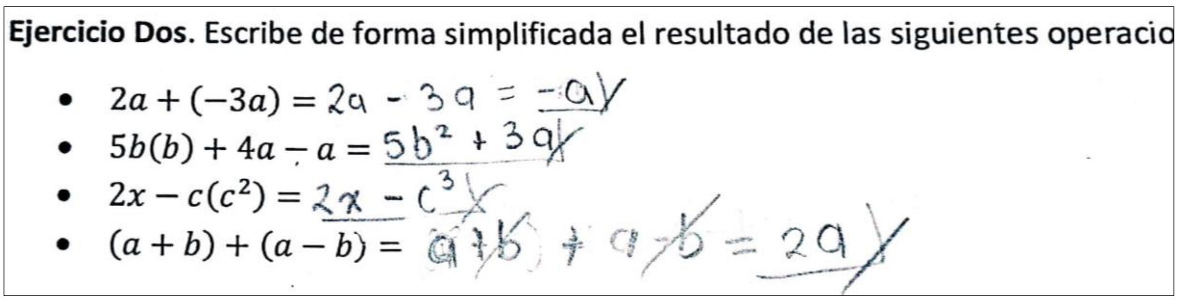


Ejercicio Dos. Escribe de forma simplificada el resultado de las siguientes

- $2a+(-3a)=$ $2a-3a=-a$
- $5b(b)+4a-a=$ $5b^2+3a$
- $2x-c(c^2)=$ $2x-c^3$
- $(a+b)+(a-b)=$ a^2-b^2

Figura 26. Análisis de las respuestas del ejercicio dos de la actividad diagnóstica.

En la imagen anterior se observa la resolución correcta de los primeros tres ejercicios, pero en el último ejercicio hay un error, se interpreta como si se tratarán de binomios conjugados, aquí, el alumno ignora el signo de + que se encuentra en medio de cada paréntesis.

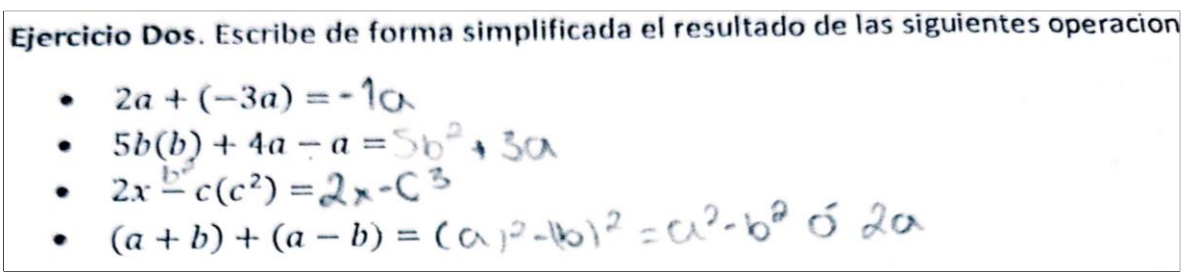


Ejercicio Dos. Escribe de forma simplificada el resultado de las siguientes operacio

- $2a+(-3a)=$ $2a-3a=-a$
- $5b(b)+4a-a=$ $5b^2+3a$
- $2x-c(c^2)=$ $2x-c^3$
- $(a+b)+(a-b)=$ $a+\cancel{b}+a-\cancel{b}=2a$

Figura 27. Análisis de las respuestas del ejercicio dos de la actividad diagnóstica.

La imagen anterior muestra la resolución correcta de las cuatro operaciones, en este caso, el alumno consideró el signo de + que separa a los paréntesis de la operación 4, así, eliminó los paréntesis y posteriormente realizó la operación correspondiente.



Ejercicio Dos. Escribe de forma simplificada el resultado de las siguientes operacion

- $2a+(-3a)=$ $-1a$
- $5b(b)+4a-a=$ $5b^2+3a$
- $2x \overset{b^2}{-} c(c^2)=$ $2x-C^3$
- $(a+b)+(a-b)=$ $(a)^2-(b)^2=a^2-b^2$ ó $2a$

Figura 28. Análisis de las respuestas del ejercicio dos de la actividad diagnóstica.

Otro alumno colocó dos soluciones posibles a la operación 4, una interpretando la operación como una multiplicación de binomios conjugados y la otra como una suma.

Del análisis de las respuestas otorgadas por los alumnos se obtuvo lo siguiente:

Grupo 1. Se observa que la gran mayoría de los 34 alumnos del grupo 1 lograron resolver las cuatro operaciones que conforman el ejercicio 2, dónde la operación 4 fue la que respondió una menor cantidad de alumnos, respondiendo correctamente 73.52%.

Grupo 2. Se observa que la gran mayoría de los alumnos del grupo 2 lograron resolver correctamente las operaciones 1 y 3, la operación 2 fue resuelta por 67.56% y la operación 4 fue la que causó una mayor dificultad, ya que, fue resuelta solo por 51.35%.

Grupo 3. Se observa que en comparación con los grupos 1 y 2, el grupo 3 presenta un menor número de alumnos que resolvieron correctamente los ejercicios, en particular en la operación 1 solo 39.02% resolvió correctamente y en la operación 4 solo 32.35%.

Con el análisis realizado se observa que en el grupo 1 una mayor cantidad de alumnos resolvió correctamente el ejercicio 2, el grupo 3 fue el que presentó una menor cantidad de alumnos que resolvió correctamente el ejercicio 2. Se concluye que la operación 4 implicó una mayor confusión por parte de los alumnos, en este caso, pudo ser por los paréntesis que llevaban a pensar a los alumnos de que se trataba de una multiplicación de binomios conjugados.

EJERCICIO TRES

El ejercicio tres se compuso por cinco enunciados del lenguaje común que debían ser traducidos al lenguaje algebraico. El SÍ de la tabla hace referencia a que el alumno pudo resolver correctamente la cuestión solicitada y el NO, hace referencia a que el alumno no logró llegar a la solución correcta. Por ejemplo, se observa que del grupo 1 fueron 33 alumnos los que lograron traducir correctamente el enunciado 1 al lenguaje algebraico.

	Ejercicio 3									
	Enunciado 1		Enunciado 2		Enunciado 3		Enunciado 4		Enunciado 5	
	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Grupo 1	33	1	4	30	28	6	26	8	31	3
Grupo 2	23	14	32	5	24	13	18	19	21	16
Grupo 3	33	8	2	39	32	9	23	18	31	10

Tabla 12. Resultados del ejercicio 3 de la actividad diagnóstica.

Del análisis de las respuestas otorgadas por los alumnos se obtuvo lo siguiente:

Grupo 1. La mayoría de los alumnos logró traducir correctamente los enunciados 1, 3, 4 y 5 al lenguaje algebraico. Se observa que solo 13.33% de los alumnos lograron traducir correctamente el enunciado 2.

Grupo 2. Los enunciados 1, 2,3 y 5 fueron respondidos correctamente por más de la mitad de los alumnos del grupo, sin embargo, el enunciado 4 fue respondido solo por 48.64%.

Grupo 3. La mayoría de los alumnos lograron traducir correctamente los enunciados 1, 3 y 5 al lenguaje algebraico. Se observa que solo 4.87% y 56.09% de los alumnos lograron traducir correctamente los enunciados 2 y 4, respectivamente.

Con lo analizado en los tres grupos se concluye que los enunciados 2 y 4 son los que causaron una mayor dificultad en los estudiantes. Se presentan a continuación algunos de los errores más comunes encontrados.

Enunciado Dos

En la figura de abajo se observa uno de los principales errores cometidos por los alumnos, el enunciado propuesto sería solución si el enunciado proporcionado fuese “el doble de un número más el mismo número disminuido en 20”. En este caso el ignorar la coma del enunciado proporcionó dicho error.

Figura 29. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

En la figura de abajo se observa que la respuesta proporcionada por el estudiante sería correcta si el enunciado fuese “el doble de un número más, el mismo número disminuido en 20”. En este caso los alumnos consideraron la coma, pero no en el lugar indicado por el enunciado original.

Figura 30. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

Respecto a la imagen de abajo se puede interpretar que con la expresión presentada el alumno da traducción al enunciado “el doble de un número menos 20”, de esta manera ignoró la parte del enunciado original donde se dice que se suma el mismo número.

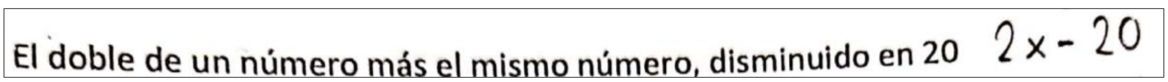


Figura 31. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

Enunciado Cuatro

La mayoría de los estudiantes que lograron traducir el enunciado cuatro al lenguaje algebraico lo expresaron como $2x - 4$, sin embargo, también hubo alumnos que emplearon una variable diferente de x para plantear el enunciado. En este sentido, se presenta el siguiente planteamiento:

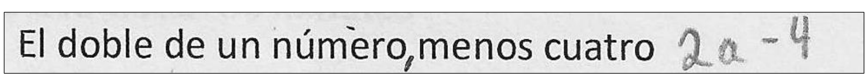


Figura 32. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

En la imagen de abajo se observa un error común, el cual fue interpretar el enunciado como “el cuadrado de un número, disminuido en 4”.

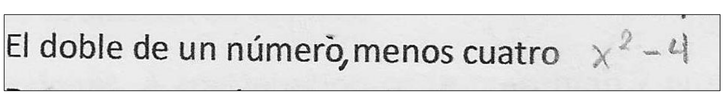


Figura 33. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

Otro error encontrado al traducir el enunciado cuatro al lenguaje algebraico fue el dar como traducción la expresión $2(x - 4)$, esta expresión sería correcta si el enunciado fuese “el doble, de un número menos cuatro”, en este caso el estudiante añadió una coma al enunciado original. Este error se señala en la figura de abajo.

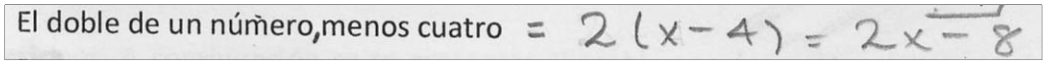


Figura 34. Análisis de las respuestas del ejercicio tres de la actividad diagnóstica.

EJERCICIO CUATRO

El ejercicio 4 estuvo compuesto por una ecuación cuadrática, la cual implicaba la reducción de términos algebraicos y la igualación a cero de ésta. El ejercicio no indicaba algún método en específico a seguir para la resolución de la ecuación.

El SÍ de la tabla hace referencia a que el alumno pudo resolver correctamente la cuestión solicitada y el NO, hace referencia a que el alumno no logró llegar a la solución correcta. Por ejemplo, se observa que del grupo 1 fueron 21 alumnos los que lograron resolver correctamente la ecuación cuadrática. Aunado a esto, se agregó un apartado en la tabla dónde se especifica el número de alumnos que lograron reducir e igualar a cero la ecuación y de igual manera el número de alumnos que no lograron esto. Por ejemplo 31 alumnos del grupo 1 lograron reducir e igualar a cero la ecuación, considerando el dato mencionado con anterioridad se sabe que, de esos 31 alumnos, fueron 21 alumnos los que lograron encontrar los valores que son solución de la ecuación.

	Ejercicio 4			
	SÍ	**NO**	**Logró simplificar e igualar a cero la ecuación**	**No simplificó ni igualó a cero la ecuación**
Grupo 1	21	13	31	3
Grupo 2	25	12	30	7
Grupo 3	16	25	26	15

Tabla 13. Resultados del ejercicio 4 de la actividad diagnóstica.

Del análisis de las respuestas otorgadas por los alumnos se obtuvo lo siguiente:

Grupo 1. Se puede observar que 91.17% logró reducir e igualar a cero la ecuación cuadrática y de estos 61.76% logró obtener las soluciones correctas de la ecuación.

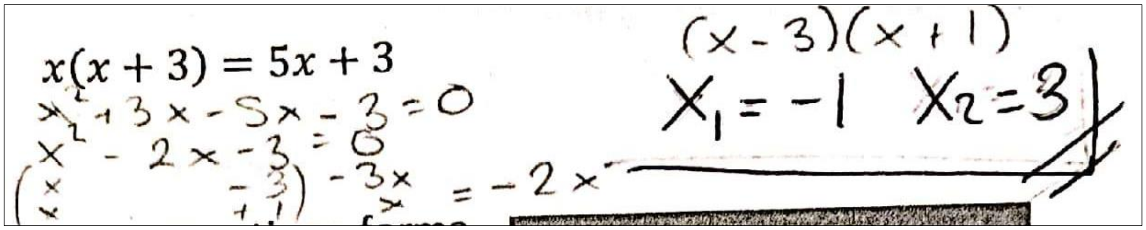
Grupo 2. Se puede observar que 81.08% logró reducir e igualar a cero la ecuación cuadrática y de estos 67.56% logró obtener las soluciones correctas de la ecuación.

Grupo 3. Se puede observar que 63.41% logró reducir e igualar a cero la ecuación cuadrática y de estos 39.02% logró obtener las soluciones correctas de la ecuación.

Con lo analizado en los tres grupos se concluye que en los grupos 1 y 2 más de la mitad del número de alumnos lograron responder correctamente lo solicitado, el grupo 3 es el que muestra un menor número de alumnos que logró resolver correctamente la ecuación cuadrática. Estos resultados probablemente se relacionen con los que se obtengan en el ejercicio cinco, donde se presentaba una problemática que los estudiantes debían modelar con una ecuación cuadrática.

Se presentan a continuación las dos estrategias que utilizaron los alumnos para dar solución a la ecuación cuadrática.

- Primera estrategia empleada



$x(x+3) = 5x + 3$

$x^2 + 3x - 5x - 3 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

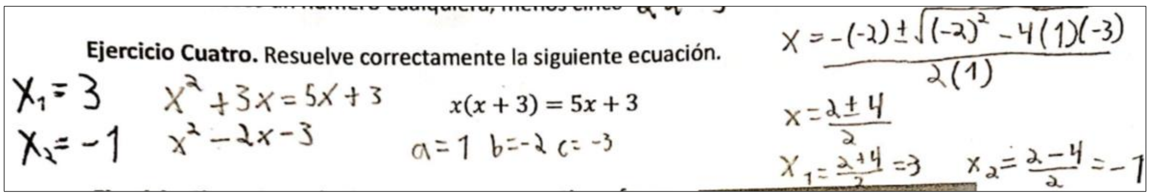
$(x - 3)(x + 1)$

$-3x + x = -2x$

$X_1 = -1 \quad X_2 = 3$

Figura 35. Estrategia empleada (factorización) en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

- Segunda estrategia empleada



Ejercicio Cuatro. Resuelve correctamente la siguiente ecuación.

$x(x+3) = 5x + 3$

$x^2 + 3x = 5x + 3$

$x^2 - 2x - 3$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$

$X = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$

$x = \frac{2 \pm 4}{2}$

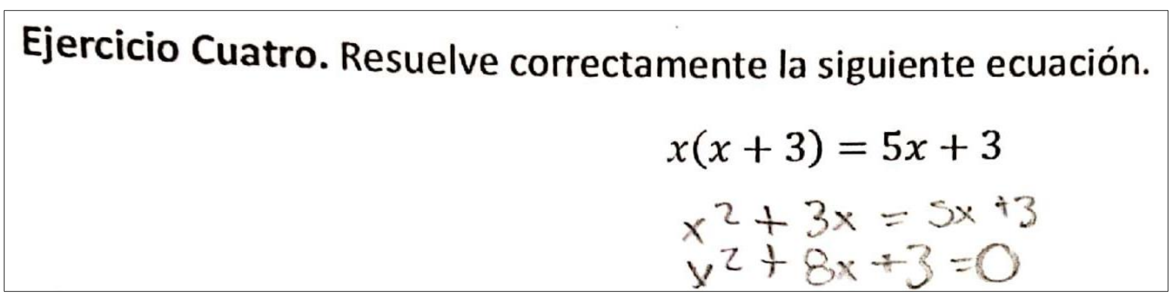
$X_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

$X_1 = 3$

$X_2 = -1$

Figura 36. Estrategia empleada (fórmula general) en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

En cuanto a los errores más comunes encontrados se tiene la reducción incorrecta de los términos algebraicos. Esto posiblemente se debe a las técnicas que los estudiantes aprenden al resolver ecuaciones algebraicas, por ejemplo, “si un número está sumando pasa restando o si un número está dividiendo pasa multiplicando”. El aprender estas reglas de manera memorística sin un fundamento del por qué se cumplen y que es lo que realmente ocurre, propicia este tipo de errores. Esto se puede observar en las figuras 37 y 38.



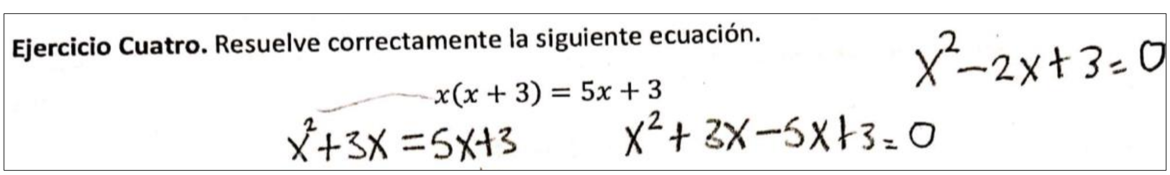
Ejercicio Cuatro. Resuelve correctamente la siguiente ecuación.

$x(x+3) = 5x + 3$

$x^2 + 3x = 5x + 3$

$x^2 + 8x + 3 = 0$

Figura 37. Reducción incorrecta de términos algebraicos en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.



Ejercicio Cuatro. Resuelve correctamente la siguiente ecuación.

$x(x+3) = 5x + 3$

$x^2 + 3x = 5x + 3$

$x^2 + 3x - 5x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 3 = 0$

Figura 38. Reducción incorrecta de términos algebraicos en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

Otro error común fue equivocarse al momento de utilizar la fórmula general para llegar al resultado. Por ejemplo, en la figura 39 el alumno logra reducir correctamente los términos algebraicos e igualar a cero la ecuación, pero en el procedimiento de resolución de la fórmula general comete un error que le impide llegar al resultado.

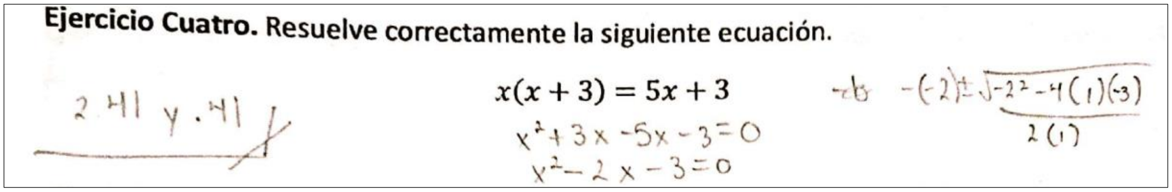


Figura 39. Error en el proceso de resolución de la fórmula general en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

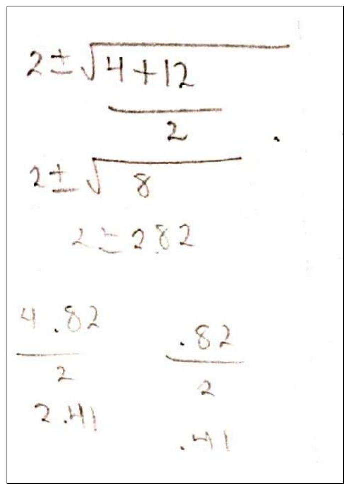


Figura 40. Error en el proceso de resolución de la fórmula general en la solución del ejercicio cuatro de la actividad diagnóstica.

EJERCICIO CINCO

El ejercicio cinco se compuso por una problemática que implicaba el planteamiento de una ecuación cuadrática y su posterior resolución. Justamente se hacían dos preguntas, la primera pregunta referente al planteamiento de la ecuación (¿cuál es la ecuación que modela el problema?) y la segunda pregunta referente a encontrar el valor que cumple ser solución de esta ecuación (¿cuánto mide el ancho del pasillo?).

El SÍ de la tabla hace referencia a que el alumno pudo plantear correctamente la ecuación que modela la situación y el NO, hace referencia a que el alumno no logró plantear la ecuación. Por ejemplo, se observa que del grupo 1 fueron 23 alumnos los que lograron plantear correctamente la ecuación cuadrática que modela la situación.

	Ejercicio 5			
	Pregunta Uno		**Pregunta Dos**	
	SÍ	**NO**	**SÍ**	**NO**
Grupo 1	23	11	28	6
Grupo 2	26	11	28	9
Grupo 3	20	21	21	20

Tabla 14. Resultados del ejercicio 5 de la actividad diagnóstica.

Del análisis de las respuestas otorgadas por los alumnos se obtuvo lo siguiente:

Grupo 1. Se puede observar que 67.64% logró plantear la ecuación que modela el problema y 83.25% logró encontrar la solución al problema. Es preciso mencionar que algunos alumnos no plantearon la ecuación, pero emplearon un procedimiento algebraico que les permitió llegar a la solución del problema.

Grupo 2. Se puede observar que 70.27% logró plantear la ecuación que modela el problema y 75.67% logró encontrar la solución al problema. Es preciso mencionar que algunos alumnos no plantearon la ecuación, pero emplearon un procedimiento algebraico que les permitió llegar a la solución del problema.

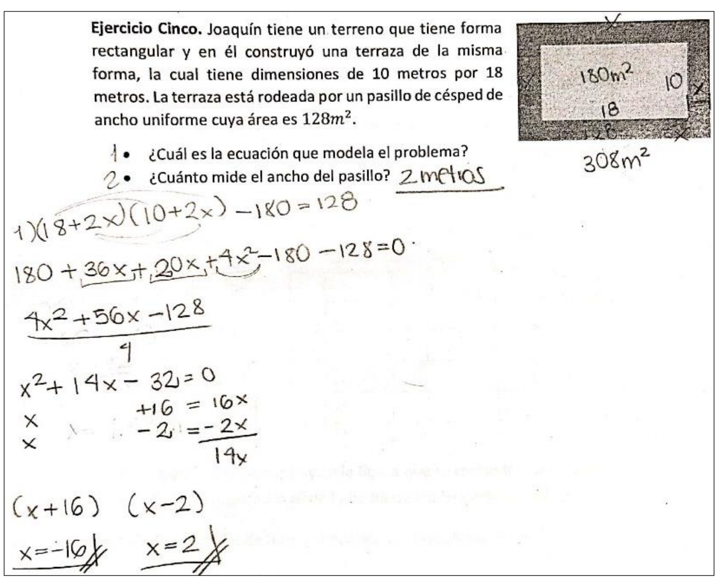
Grupo 3. Se puede observar que solo 48.78% logró plantear la ecuación que modela el problema y 51.21% logró encontrar la solución al problema. Es preciso mencionar que algunos alumnos no plantearon la ecuación, pero emplearon un procedimiento algebraico que les permitió llegar a la solución del problema.

Con lo analizado en los tres grupos se concluye que en los grupos 1 y 2 más de la mitad del número de alumnos lograron responder correctamente lo solicitado, el grupo 3 es el que muestra un menor número de alumnos que logró resolver correctamente el ejercicio cinco.

Se presentan a continuación las dos estrategias que utilizaron los alumnos para dar solución a la problemática planteada.

- Primera estrategia

Se observa en la figura 41 que cómo tal no se escribe que "x" representa la medida del ancho del pasillo, sin embargo, en la imagen se observa cómo se marcó la x en el pasillo. De igual manera, se observa la simplificación que se realiza de la ecuación. La estrategia empleada para la resolución de la ecuación cuadrática fue la factorización.



Ejercicio Cinco. Joaquín tiene un terreno que tiene forma rectangular y en él construyó una terraza de la misma forma, la cual tiene dimensiones de 10 metros por 18 metros. La terraza está rodeada por un pasillo de césped de ancho uniforme cuya área es $128m^2$.

1 • ¿Cuál es la ecuación que modela el problema?

2 • ¿Cuánto mide el ancho del pasillo? 2 metros

$1)(18+2x)(10+2x)-180=128$

$180+36x+20x+4x^2-180-128=0$

$\frac{4x^2+56x-128}{4}$

$x^2+14x-32=0$

$x \quad +16 = 16x$

$x \quad -2 = -2x$

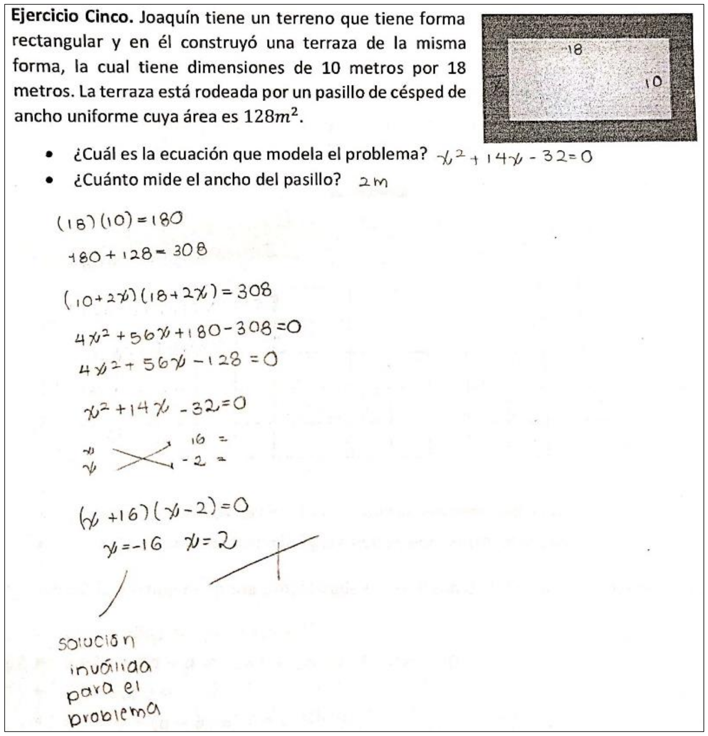
$14x$

$(x+16)\ (x-2)$

$x=-16 \quad x=2$

Figura 41. Empleo de la factorización para resolver la ecuación cuadrática en el ejercicio cinco de la actividad diagnóstica.

En la figura 42 se sigue empleando la misma estrategia de resolución, lo que se rescata aquí es que se colocó "solución inválida para el problema", haciendo referencia a que el valor negativo para fines del problema no tiene cabida lógica.



Ejercicio Cinco. Joaquín tiene un terreno que tiene forma rectangular y en él construyó una terraza de la misma forma, la cual tiene dimensiones de 10 metros por 18 metros. La terraza está rodeada por un pasillo de césped de ancho uniforme cuya área es $128m^2$.

- ¿Cuál es la ecuación que modela el problema? $x^2+14x-32=0$
- ¿Cuánto mide el ancho del pasillo? 2m

$(18)(10)=180$

$180+128=308$

$(10+2x)(18+2x)=308$

$4x^2+56x+180-308=0$

$4x^2+56x-128=0$

$x^2+14x-32=0$

$x \quad 16$
$x \quad -2$

$(x+16)(x-2)=0$

$x=-16 \quad x=2$

solución inválida para el problema

Figura 42. Empleo de la factorización para resolver la ecuación cuadrática en el ejercicio cinco de la actividad diagnóstica.

- Segunda estrategia

Se observa en la figura 43 que se define que "x" representa la medida del ancho del pasillo. De igual manera, se observa la simplificación que se realiza de la ecuación. La estrategia empleada para la resolución de la ecuación cuadrática fue la fórmula general.

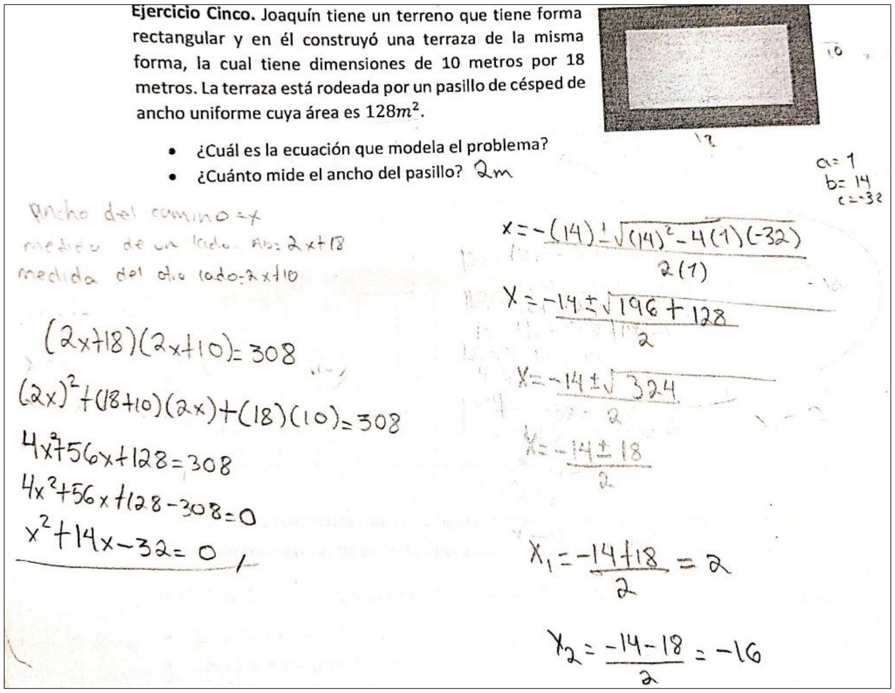


Figura 43. Empleo de la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática en el ejercicio cinco de la actividad diagnóstica.

- Tercera estrategia

Se observó en algunos casos, que los alumnos no lograron plantear correctamente la ecuación que modela la situación, sin embargo, realizaron un trabajo aritmético que les permitió llegar a la solución esperada, esto se puede observar en la figura 44.

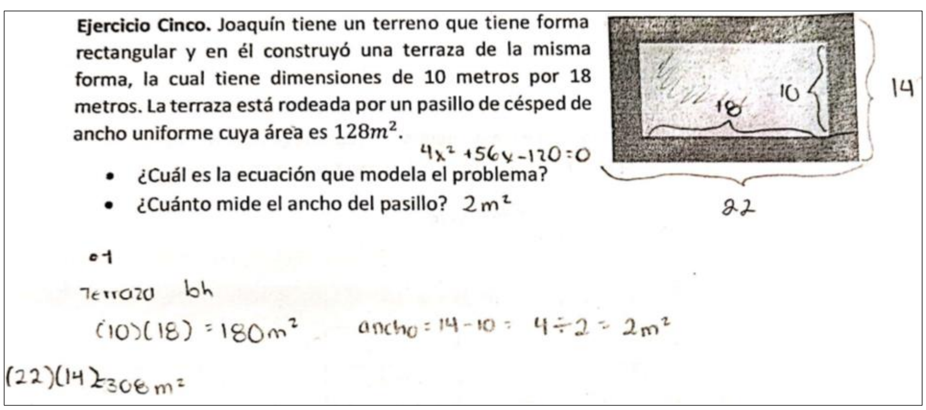


Figura 44. Empleo de procedimientos algebraicos para llegar a la solución de la problemática cinco de la actividad diagnóstica.

5.2 APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA "TRADICIONAL"

Esta secuencia didáctica fue aplicada al grupo uno de estudiantes, el cual está conformado por 34 alumnos. El inicio de la aplicación de la secuencia didáctica se realizó de manera grupal, cuestionando a los alumnos sobre qué es una ecuación, las características de una ecuación cuadrática y los métodos de resolución que conocen para resolver estas ecuaciones.

Respecto a la primera pregunta ¿qué es una ecuación?, cinco alumnos externaron una opinión y comentaron lo siguiente:

- Es una igualdad.
- Son letras y números.
- Son las “x” y las “y”
- Es una balanza, en ambos lados de la ecuación debe haber lo mismo.
- Es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Después de la participación de los alumnos, con el apoyo de una presentación con diapositivas se presentó la siguiente definición:

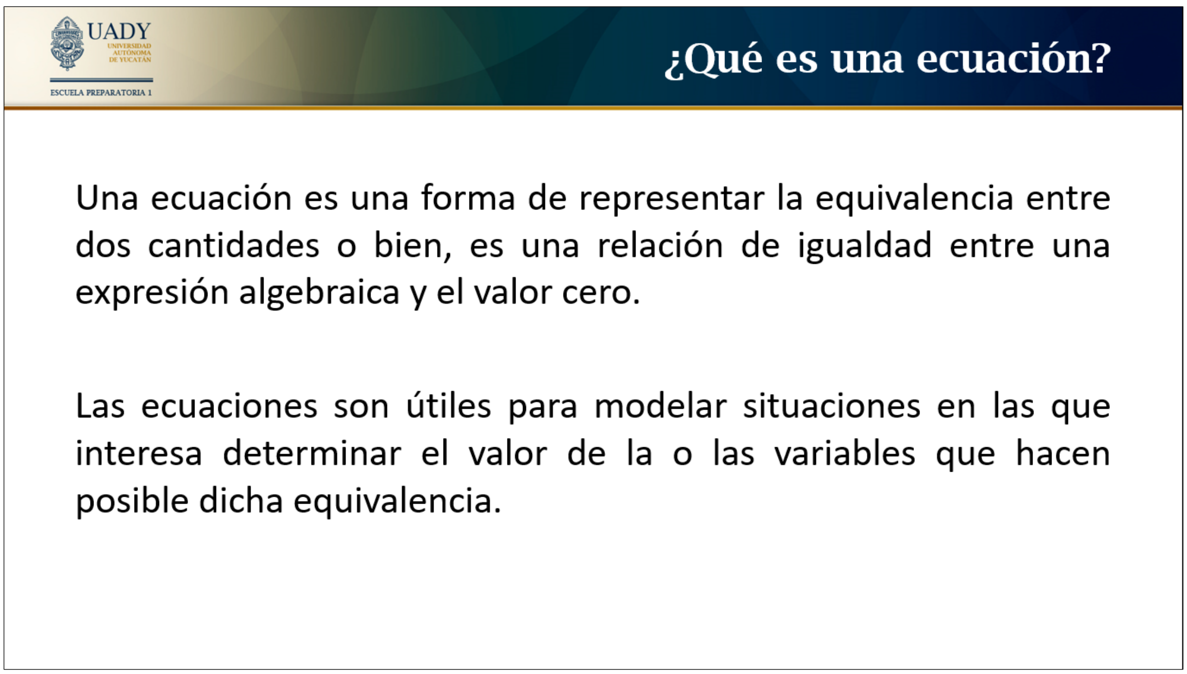


Figura 45. Definición de ecuación (grupo uno).

Posteriormente se preguntó sobre las características de una ecuación cuadrática, los estudiantes coincidieron con la siguiente idea “una ecuación de segundo grado es aquella ecuación dónde el mayor exponente de su variable es 2”. Al término de la participación de los alumnos se presentó la siguiente diapositiva:

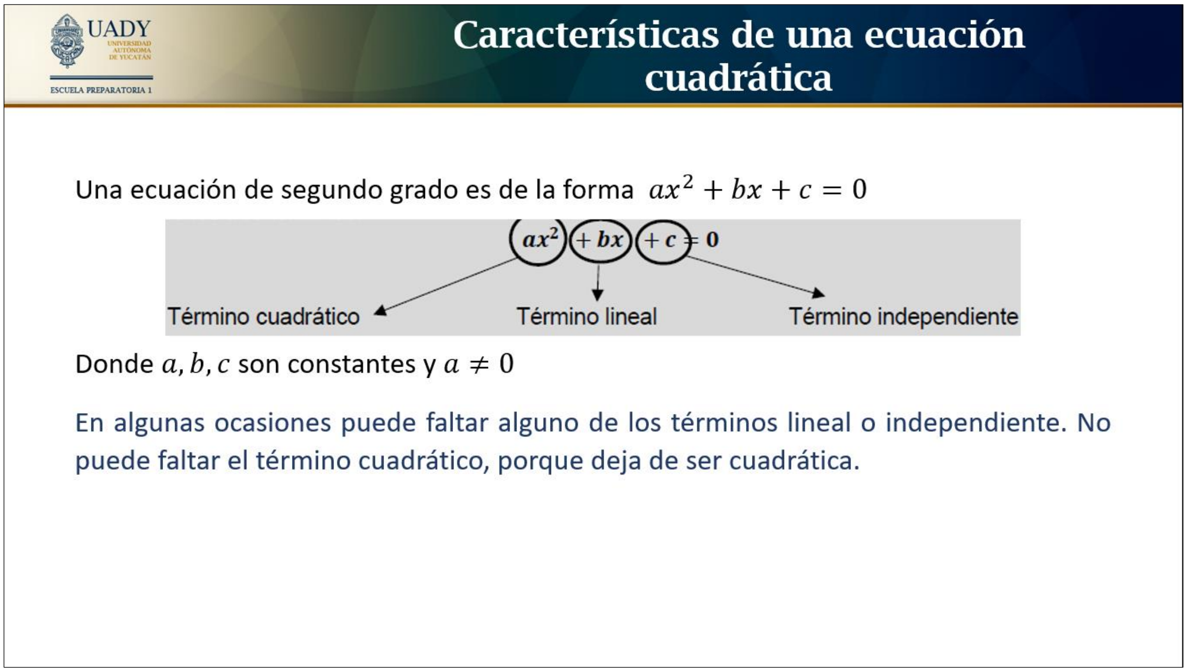


Figura 46. Características de una ecuación cuadrática (grupo uno).

Después de recordar las características de una ecuación cuadrática se procedió a cuestionar a los alumnos sobre los métodos que conocían para resolver una ecuación cuadrática. Los alumnos mencionaron el método de factorización y la aplicación de la fórmula general. Se les presentaron dos diapositivas, la primera haciendo referencia a lo que significa resolver una ecuación cuadrática y la segunda, para presentar los métodos que pueden emplear para resolver la ecuación cuadrática.

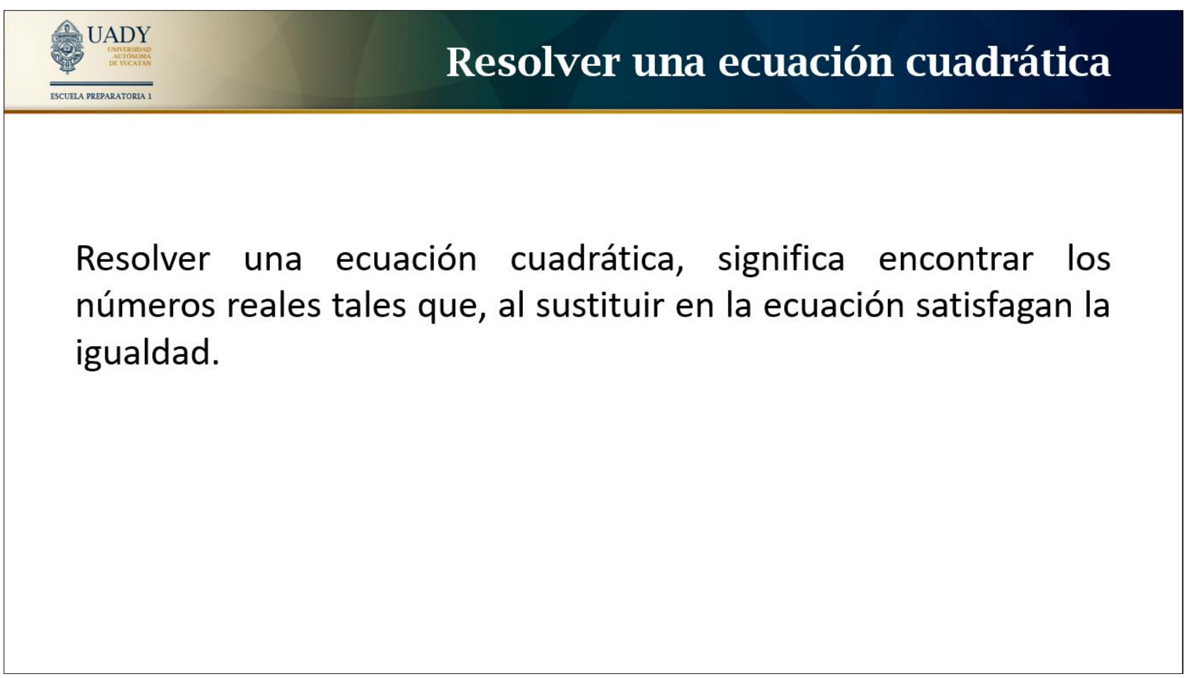


Figura 47. Qué significa resolver una ecuación cuadrática (grupo uno).

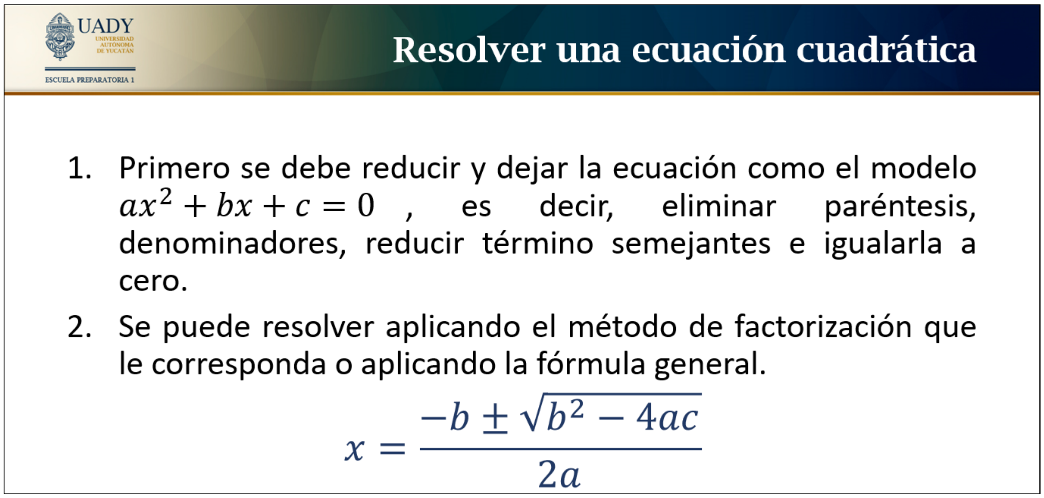


Figura 48. Cómo resolver una ecuación cuadrática (grupo uno).

Después de esta recuperación de ideas, se procedió a presentar un problema en contexto, dónde se recordó que en la resolución se deben seguir los siguientes pasos:

- La definición de la(s) incógnita(s).
- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.
- La resolución clara de la ecuación que representa el problema.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

Es preciso mencionar que la resolución del problema fue de manera grupal, escuchando las ideas que brindan los alumnos. Se empleó una tableta y la resolución se iba realizando de manera sincrónica. La resolución del problema se presenta a continuación, tal y como se elaboró con los alumnos.

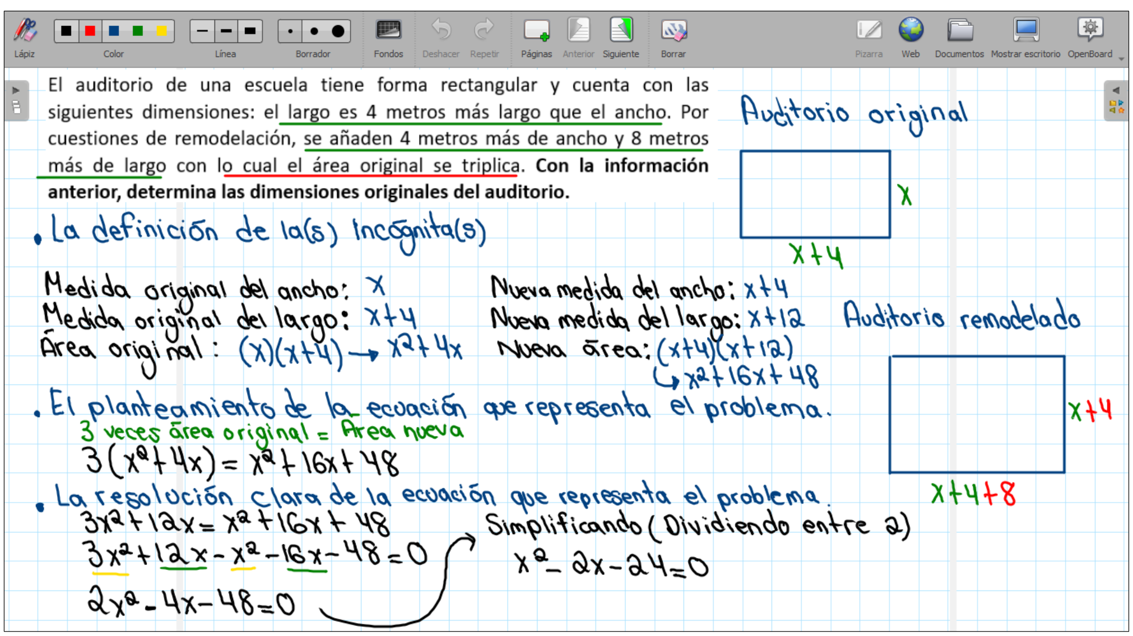


Figura 49. Resolución del problema en contexto del inicio (grupo uno).

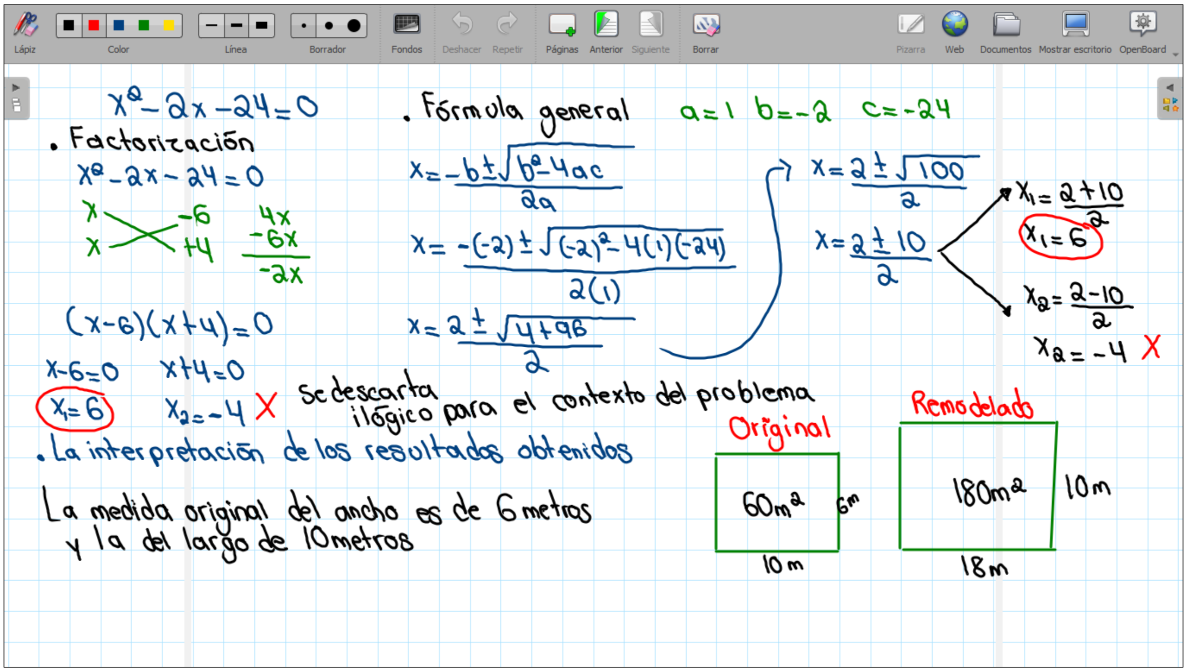


Figura 50. Resolución del problema en contexto del inicio (grupo uno).

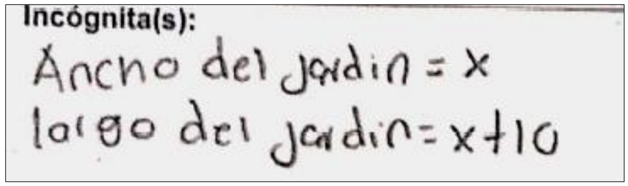
Como se puede observar se emplearon colores diferentes para resaltar las partes esenciales en la resolución de la problemática, lo cual sirviera para guiar a los alumnos.

En el procedimiento se mostró la resolución de la ecuación cuadrática haciendo uso del método de factorización correspondiente y de la fórmula general, se enfatizó que en los problemas que se les presentarían a continuación tenían libertad de decidir el método a emplear. Los alumnos comentaron que el valor negativo que satisface la ecuación no tenía lógica en el contexto del problema, al final, algunos alumnos comentaron que era necesario realizar la comprobación de los datos a los que se llegó, por ello, se determinaron las medidas del auditorio original y las de auditorio remodelado.

Para dar paso al desarrollo de la sesión se solicitó a los alumnos que se formaran en grupos de 4 integrantes. Se formaron en total ocho equipos de trabajo, seis equipos de 4 alumnos y dos equipos de 5 alumnos. Se presentará el análisis de las respuestas que cada equipo realizó a los dos problemas del desarrollo, considerando los siguientes pasos en la resolución de los problemas:

- La definición de la(s) incógnita(s).
- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.
- La resolución clara de la ecuación que representa el problema.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para fines de nomenclatura se representarán a los equipos con las nomenclaturas E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8, haciendo referencia al equipo 1, equipo 2 y así sucesivamente hasta llegar al equipo 8. Respecto al problema número uno del desarrollo se observa lo siguiente en cuánto al planteamiento de la(s) incógnita(s):

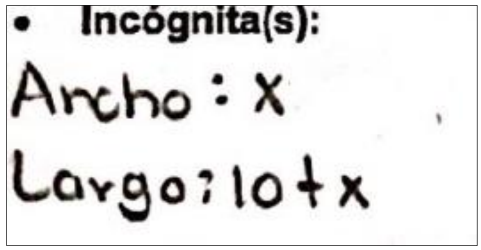


Incógnita(s):

Ancho del jardin = x

largo del jardin = x+10

Figura 51. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E1.

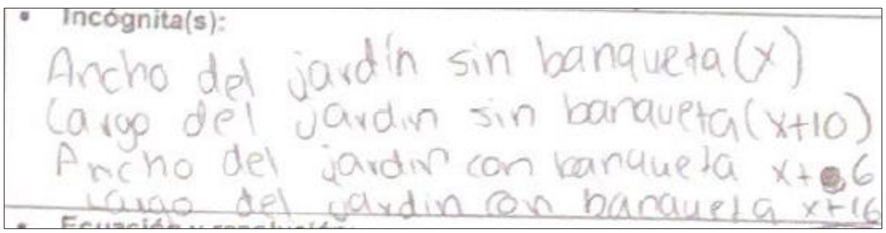


- **Incógnita(s):**

Ancho : x

Largo : 10 + x

Figura 52. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E2.



- **Incógnita(s):**

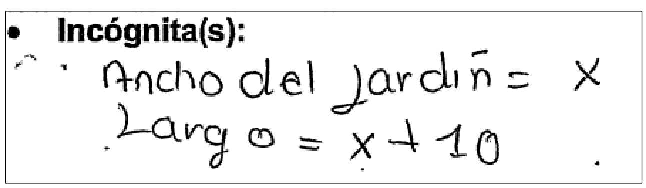
Ancho del jardín sin banqueta (x)

Largo del jardin sin banqueta (x+10)

Ancho del jardin con banqueta x+6

Largo del jardin con banqueta x+16

Figura 53. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E3.

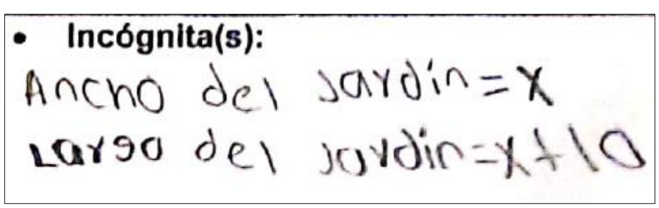


- **Incógnita(s):**

Ancho del jardín = x

Largo = x + 10

Figura 54. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E4.



- **Incógnita(s):**

Ancho del jardín = x

Largo del jardin = x+10

Figura 55. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E5.

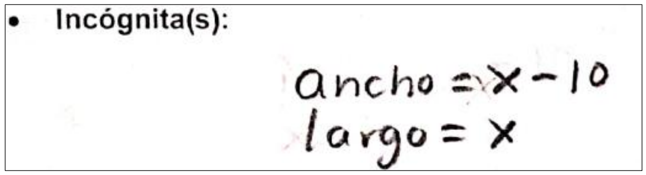


Figura 56. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E6.

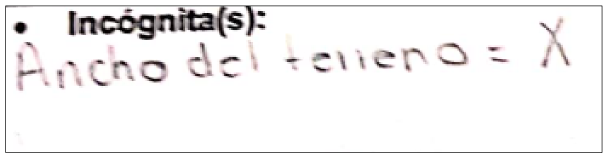


Figura 57. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E7.

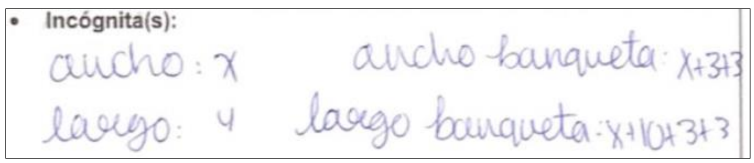


Figura 58. Definición de incógnitas para el problema uno (secuencia didáctica uno), E8.

Se puede observar que siete de los equipos lograron definir las incógnitas solicitadas en el problema, en este caso la medida del largo y la del ancho. En el procedimiento del E7 se observa que no definieron la incógnita de la medida del largo, sin embargo, para el planteamiento de la ecuación si lo realizaron, esto, se presentará posteriormente. Algo que es importante señalar es que ningún equipo empleó “medida del ancho y medida del largo”, esto, se puede deber a las prácticas de resolución de ecuaciones que traen arraigadas, por ejemplo, si hablamos de edades de personas en lugar de colocar “edad de Juanito: x” simplemente colocan “Juanito: x”.

Ahora, se presentarán las ecuaciones planteadas por cada uno de los equipos y posteriormente se realiza el análisis de lo observado en estos planteamientos.

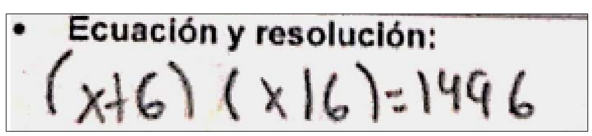


Figura 59. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E1.

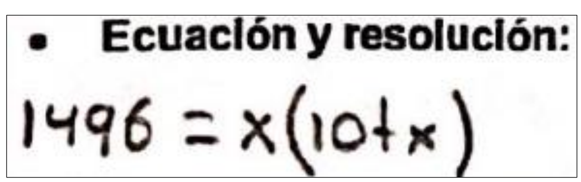


Figura 60. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E2.

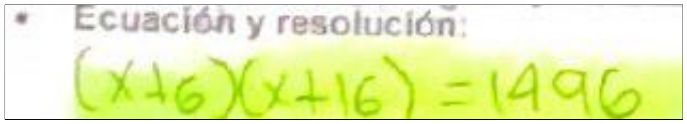


Figura 61. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E3.

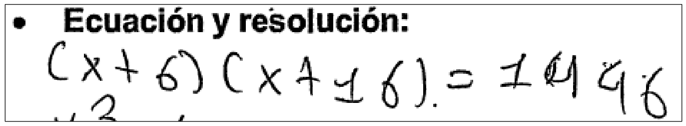


Figura 62. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E4.

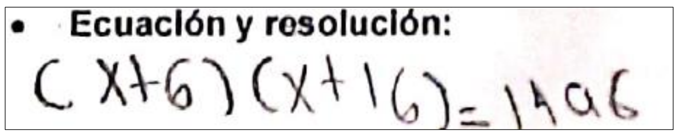


Figura 63. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E5.

Figura 64. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E6.

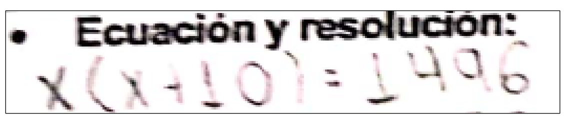


Figura 65. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E7.

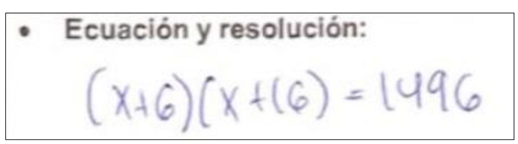


Figura 66. Planteamiento de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E8.

Con el análisis de los planteamientos realizados por los equipos se puede observar que de los ocho equipos fueron cinco equipos los que plantearon la ecuación correctamente. Los otros tres equipos, E2, E6 y E7 no consideraron que los $1496\ m^2$ corresponden al área del jardín con la banqueta, en este caso, consideraron que representa únicamente el área del jardín. Es preciso mencionar que en los procedimientos del E1 se observa que cuando representan el largo del jardín con la banqueta falta el signo de más ("+"), sin embargo, debió ser un descuido de ellos, pues logran resolver la ecuación correctamente, esto se analizará posteriormente.

En cuanto a las resoluciones brindadas a cada una de las ecuaciones propuestas se observan las siguientes aportaciones de cada equipo de trabajo.

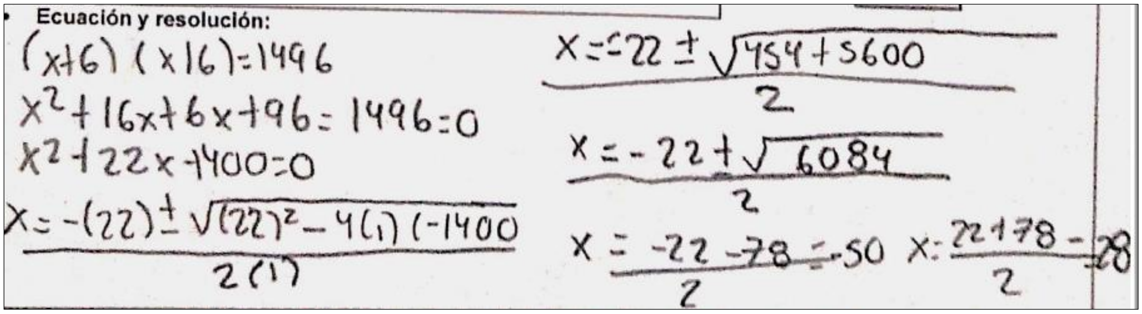


Figura 67. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E1.

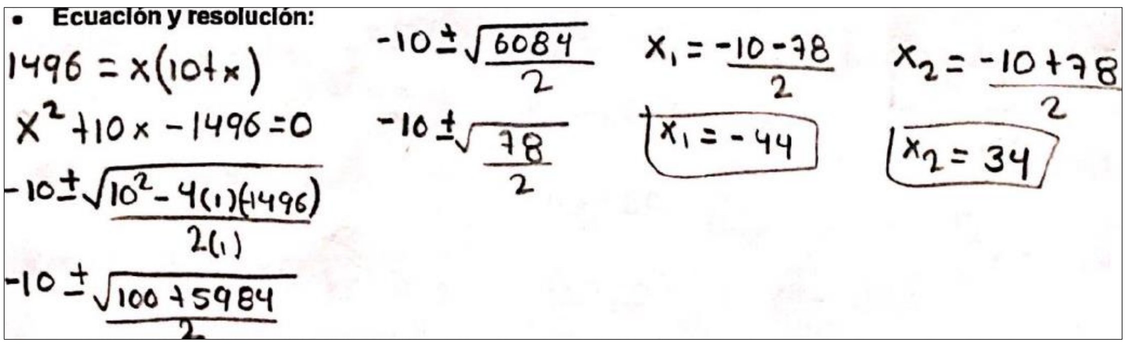


Figura 68. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E2.

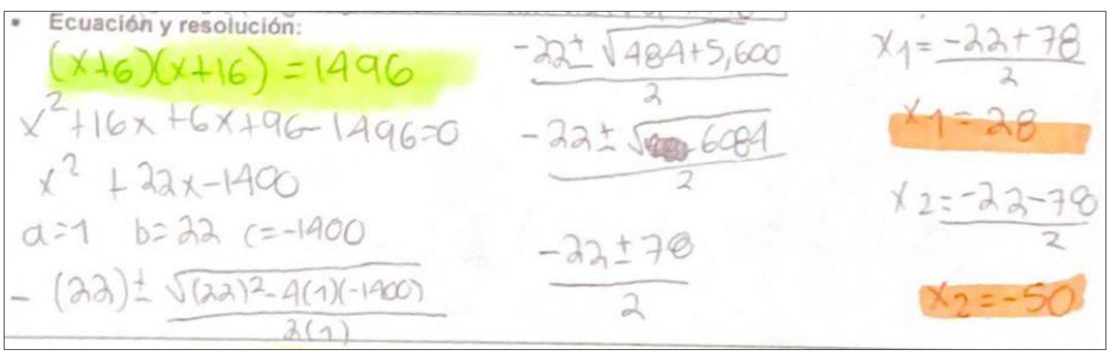
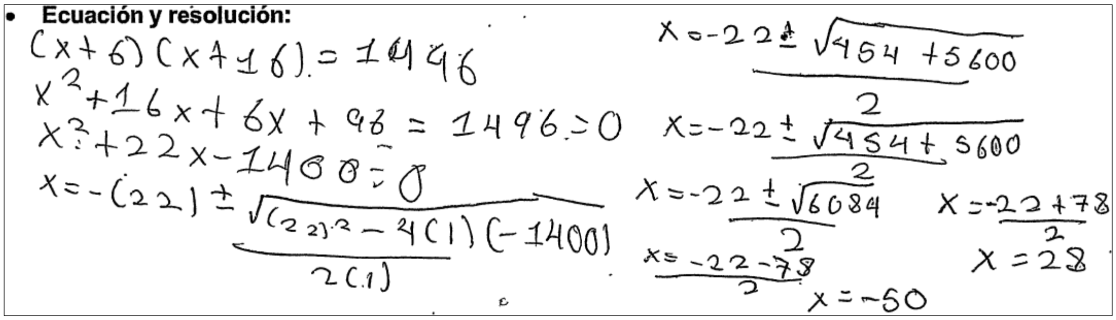


Figura 69. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E3.



• Ecuación y resolución:

$(x+6)(x+16) = 1496$

$x^2+16x+6x+96 = 1496 = 0$

$x^2+22x-1400=0$

$x = \frac{-(22) \pm \sqrt{(22)^2 - 4(1)(-1400)}}{2(1)}$

$x = \frac{-22 \pm \sqrt{454+5600}}{2}$

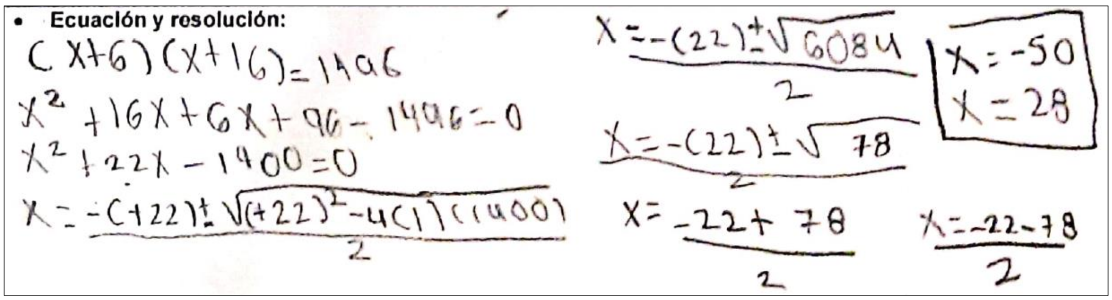
$x = \frac{-22 \pm \sqrt{454+5600}}{2}$

$x = \frac{-22 \pm \sqrt{6084}}{2}$

$x = \frac{-22+78}{2}$ $x = 28$

$x = \frac{-22-78}{2}$ $x = -50$

Figura 70. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E4.



• Ecuación y resolución:

$(x+6)(x+16)=1496$

$x^2+16x+6x+96-1496=0$

$x^2+22x-1400=0$

$x = \frac{-(+22) \pm \sqrt{(+22)^2-4(1)(1400)}}{2}$

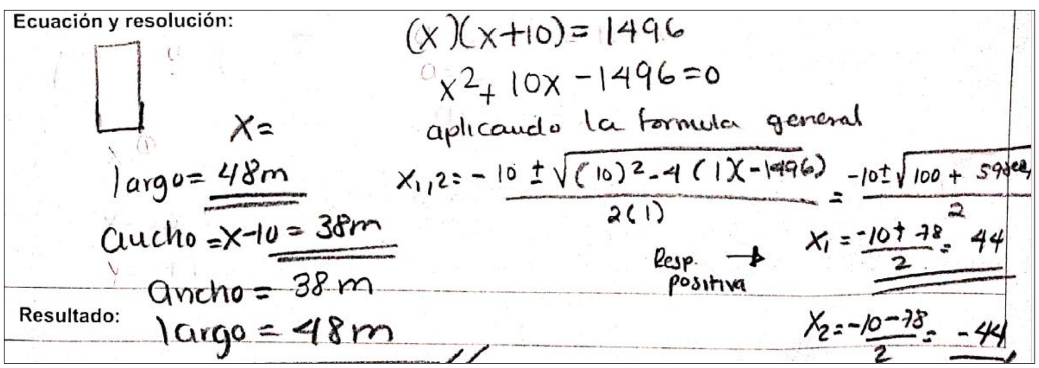
$x = \frac{-(22) \pm \sqrt{6084}}{2}$

$x = \frac{-(22) \pm \sqrt{78}}{2}$

$x = \frac{-22+78}{2}$ $x = \frac{-22-78}{2}$

$\boxed{x=-50 \quad x=28}$

Figura 71. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E5.



Ecuación y resolución:

$(x)(x+10)=1496$

$x^2+10x-1496=0$

aplicando la formula general

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2-4(1)(-1496)}}{2(1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+5984}}{2}$

x=

largo = 48m

ancho = x−10 = 38m

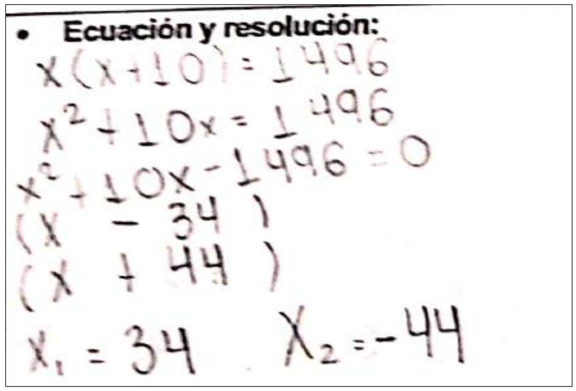
Resp. positiva → $x_1 = \frac{-10+78}{2} = 44$

$x_2 = \frac{-10-78}{2} = -44$

Resultado: ancho = 38 m

largo = 48m

Figura 72. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E6.



- **Ecuación y resolución:**

$x(x+10)=1496$

$x^2+10x=1496$

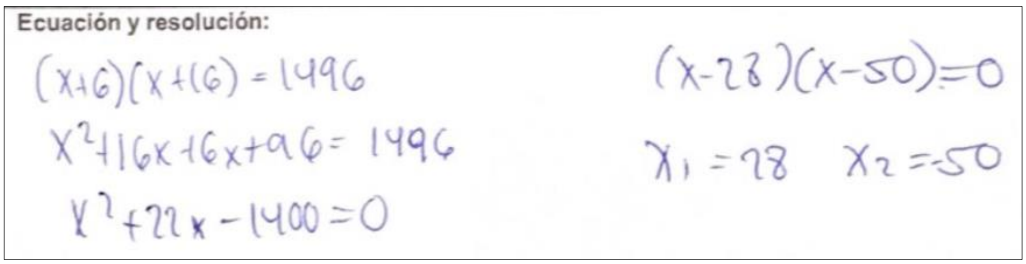
$x^2+10x-1496=0$

$(x-34)$

$(x+44)$

$x_1=34 \quad x_2=-44$

Figura 73. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E7.



Ecuación y resolución:

$(x+6)(x+16)=1496$

$x^2+16x+6x+96=1496$

$x^2+22x-1400=0$

$(x-28)(x-50)=0$

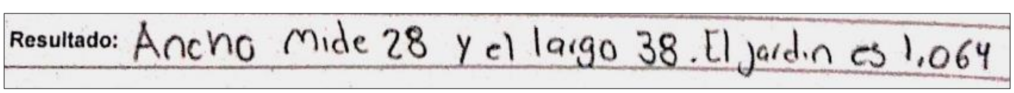
$x_1=28 \quad x_2=-50$

Figura 74. Resolución de la ecuación para el problema uno (secuencia didáctica uno), E8.

Es importante señalar los métodos empleados como solución de la ecuación cuadrática, 2 optaron por emplear algún método de factorización y los otros 6 equipos optaron por emplear la fórmula general. Respecto a E1, E3, E4, E5 y E8 todos llegaron a las soluciones correctas de la ecuación, solo E8 optó por emplear alguna técnica de factorización, los demás optaron por la fórmula general.

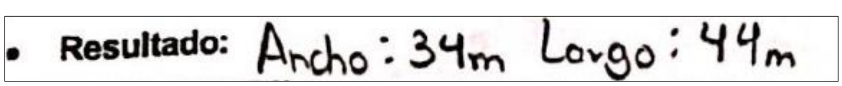
Claro está que, E2, E6 y E7 ya no llegarían a las soluciones correctas del problema (desde el planteamiento tuvieron algún error), pero es preciso mencionar que el E6 optó por emplear una técnica de factorización y los otros dos por la fórmula general. Al tener el mismo planteamiento de ecuaciones se esperaría que estos tres equipos llegaran a las mismas respuestas, sin embargo, no fue así. El E6 tuvo un error al momento de resolver la fórmula general, por ello no llegaron a las mismas respuestas.

Otro punto importante respecto a la resolución del problema es la interpretación de las soluciones. Se presentan a continuación las aportaciones de los equipos respecto a este punto.



Resultado: Ancho mide 28 y el largo 38. El jardin es 1,064

Figura 75. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E1.



- **Resultado:** Ancho: 34m Largo: 44m

Figura 76. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E2.

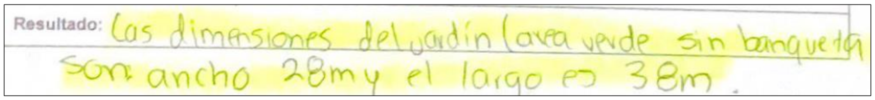

Resultado: Las dimensiones del jardín (area verde sin banqueta son ancho 28m y el largo es 38m.

Figura 77. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E3.

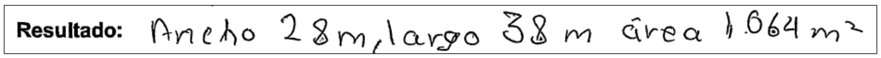

Resultado: Ancho 28m, largo 38 m área 1.064 m^2

Figura 78. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E4.

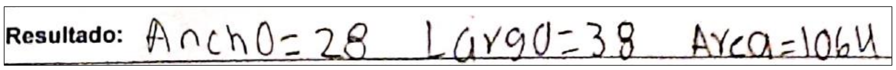

Resultado: Ancho=28 Largo=38 Area=1064

Figura 79. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E5.

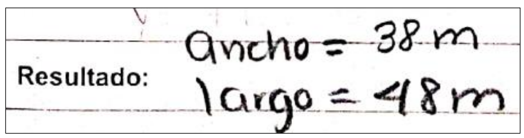

Resultado: ancho = 38 m
largo = 48m

Figura 80. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E6.

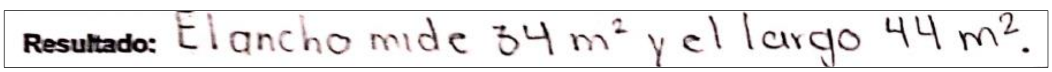

Resultado: El ancho mide 34 m^2 y el largo 44 m^2.

Figura 81. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E7.

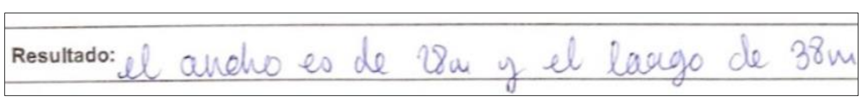

Resultado: el ancho es de 28m y el largo de 38m

Figura 82. Interpretación de la solución del problema uno (secuencia didáctica uno), E8.

Se observa que los equipos E1, E3, E4, E5 y E8 llegaron a la interpretación correcta de las soluciones para el problema uno, los otros equipos E2, E6 y E7 no llegaron a la solución correcta, ya que, desde el inicio plantearon de manera incorrecta las ecuaciones. Se observa que 62.5% de los equipos logró llegar a la solución correcta del problema número uno.

Respecto al problema número dos del desarrollo se observa lo siguiente en cuanto al planteamiento de la(s) incógnita(s):

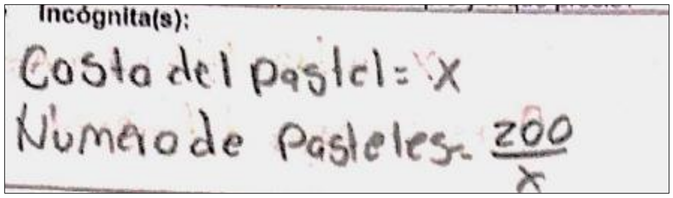


Figura 83. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E1.

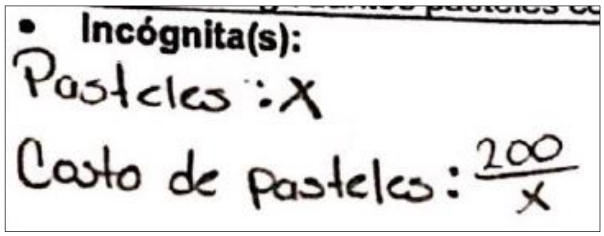


Figura 84. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E2.

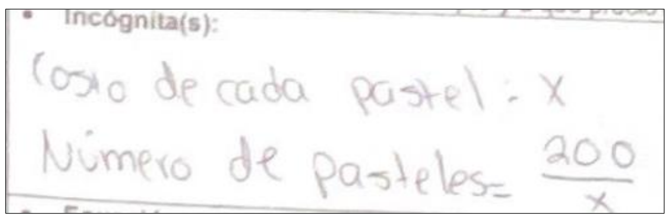


Figura 85. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E3.

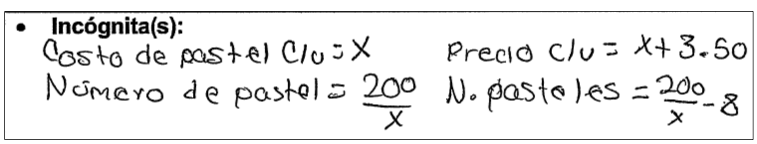


Figura 86. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E4.

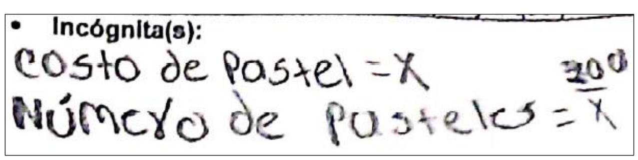


Figura 87. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E5.

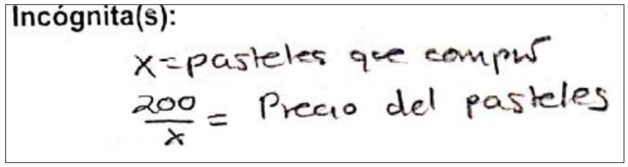


Figura 88. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E6.

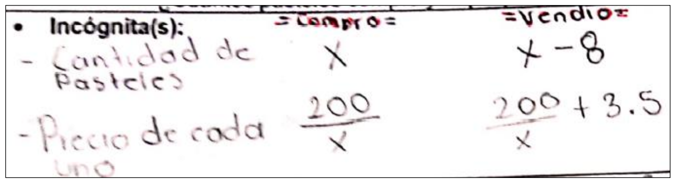


Figura 89. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E7.

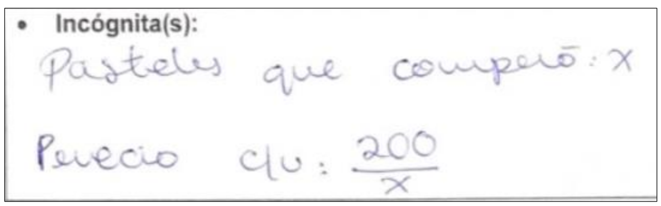


Figura 90. Definición de incógnitas para el problema dos (secuencia didáctica uno), E8.

Se puede observar que los ocho equipos lograron definir las incógnitas solicitadas en el problema, en este caso el número de pasteles que compró y el precio de cada uno. Para los equipos E1, E3, E4 y E5 consideraron como incógnita x al costo del pastel y los equipos E2, E5, E6, E7 y E8 consideraron como incógnita x al número de pasteles que se compraron.

Ahora, se presentarán las ecuaciones planteadas por cada uno de los equipos y posteriormente se realiza el análisis de lo observado en estos planteamientos.

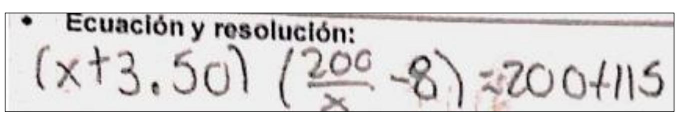


Figura 91. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E1.

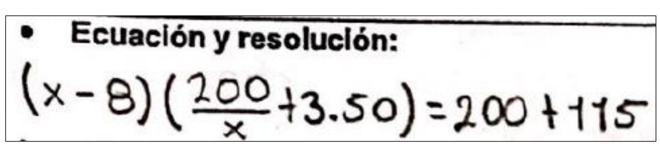


Figura 92. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E2.

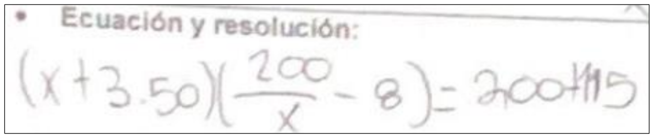


Figura 93. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E3.

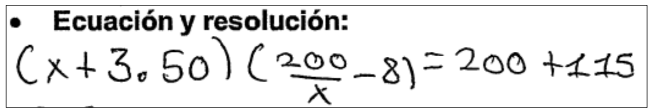


Figura 94. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E4.

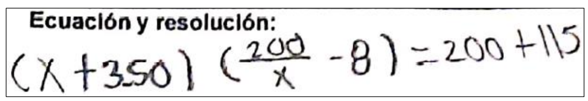


Figura 95. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E5.

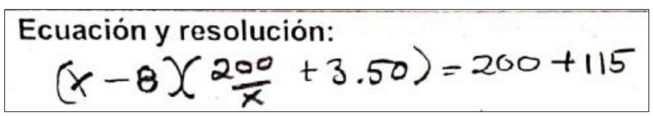


Figura 96. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E6.

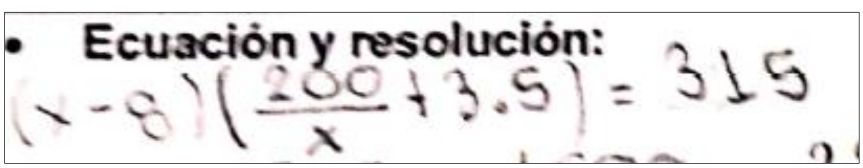


Figura 97. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E7.

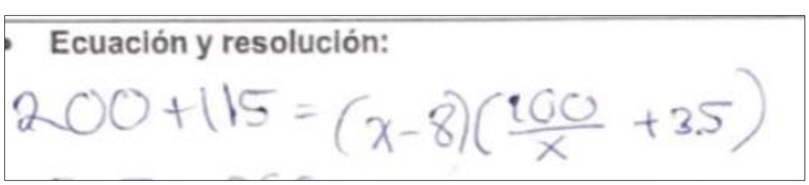


Figura 98. Planteamiento de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E8.

Con el análisis de los planteamientos realizados por los equipos se puede observar que los 8 equipos plantearon correctamente la ecuación que representa la situación. Es importante mencionar que, son dos ecuaciones diferentes las que se plantearon, esto por el planteamiento de x como la incógnita que representa el número de pasteles o el precio de cada pastel.

En cuanto a las resoluciones brindadas a cada una de las ecuaciones propuestas se observan las siguientes aportaciones de cada equipo de trabajo.

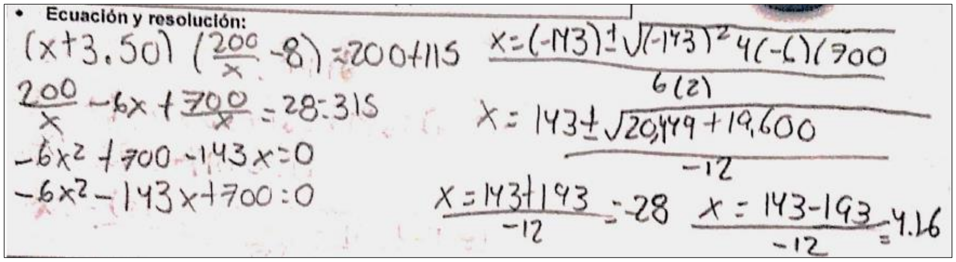


Figura 99. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E1.

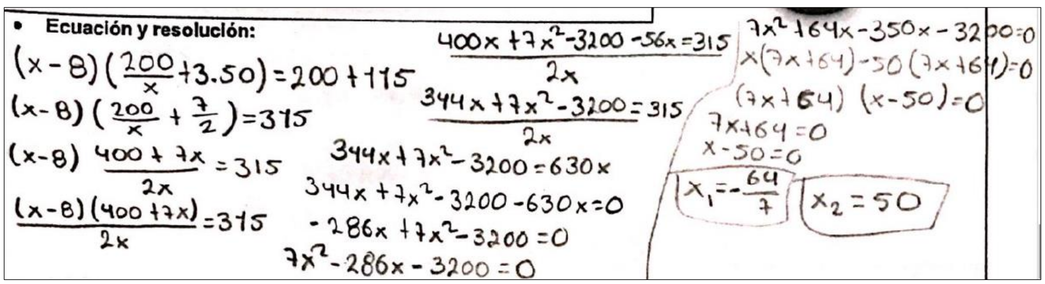


Figura 100. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E2.

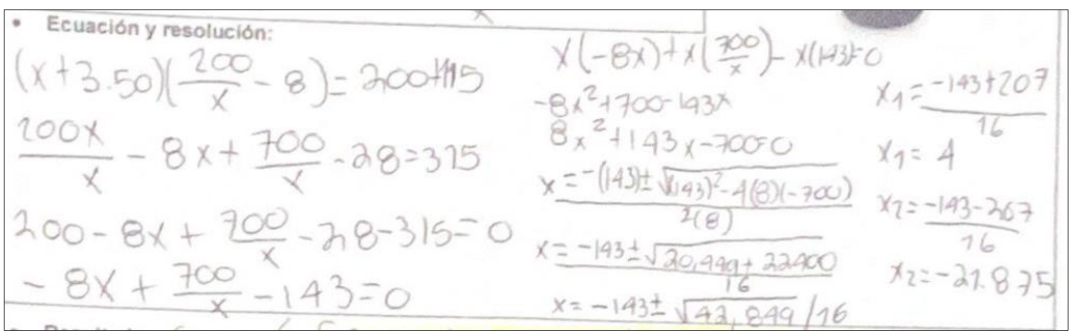


Figura 101. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E3.

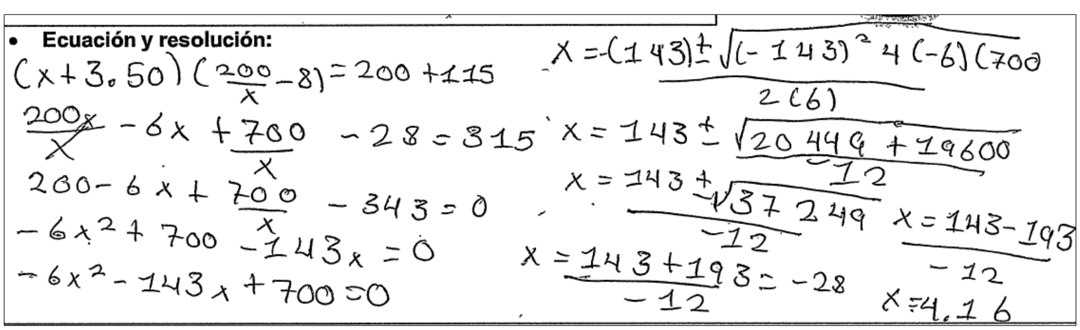


Figura 102. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E4.

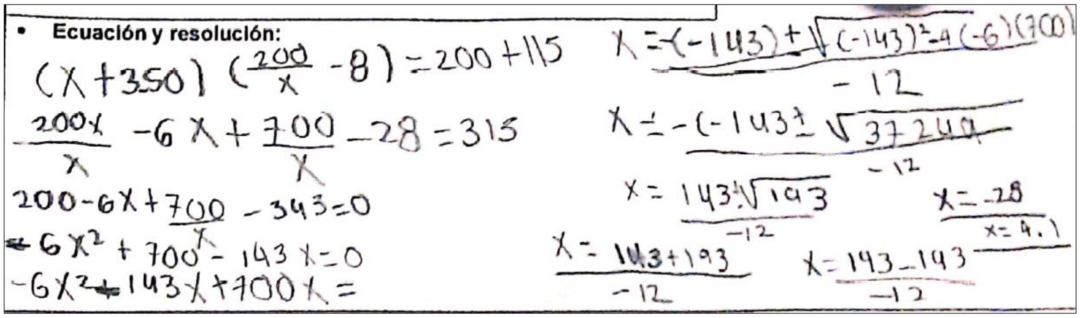


Figura 103. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E5.

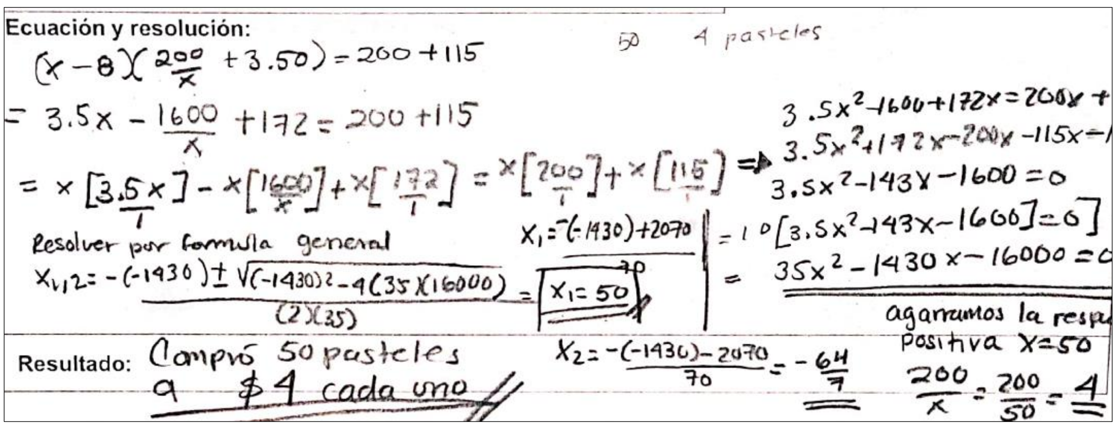


Figura 104. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E6.

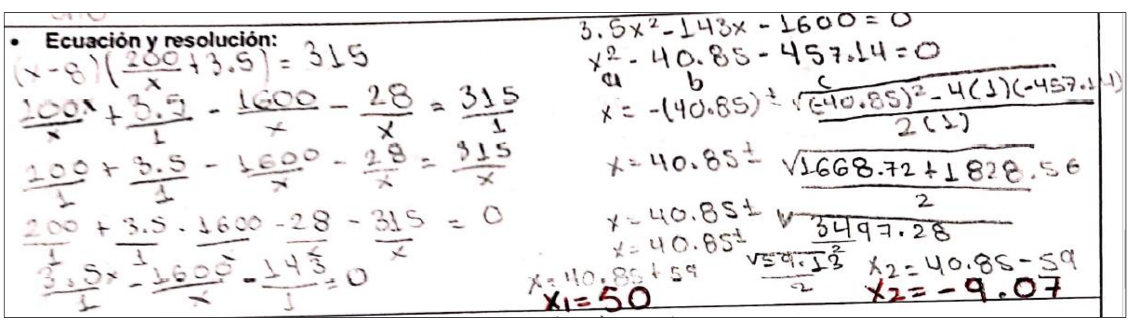
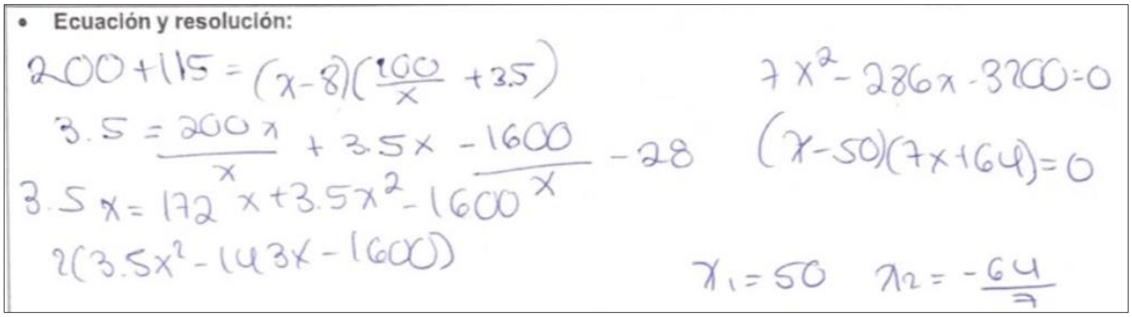


Figura 105. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E7.



- Ecuación y resolución:

$200+115=(x-8)(\frac{200}{x}+3.5)$

$3.5=\frac{200x}{x}+3.5x-\frac{1600}{x}-28$

$3.5x=172x+3.5x^2-1600$

$2(3.5x^2-143x-1600)$

$7x^2-286x-3200=0$

$(x-50)(7x+64)=0$

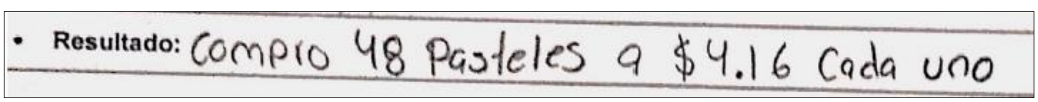
$x_1=50 \quad x_2=-\frac{64}{7}$

Figura 106. Resolución de la ecuación para el problema dos (secuencia didáctica uno), E8.

Es importante señalar los métodos empleados para encontrar la solución de la ecuación cuadrática, un equipo optó por emplear alguna técnica de factorización, a saber, el equipo E8. Los otros siete equipos optaron por emplear la fórmula general. De los ocho equipos en total, cuatro lograron llegar a la solución correcta de la ecuación, en este caso, los equipos E2, E3, E6 y E8. Solo el E8 utilizó la técnica de factorización para llegar a la respuesta correcta, los otros tres equipos emplearon la fórmula general.

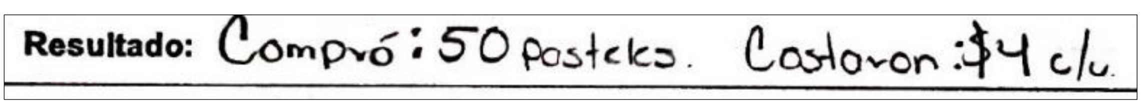
Los equipos E1, E4 y E5 se equivocaron al momento de realizar las multiplicaciones correspondientes para eliminar los paréntesis de las ecuaciones, por tanto, la ecuación cuadrática a la que llegaron no fue la correcta. El equipo E7 si logró realizar las multiplicaciones adecuadamente, llegó a la ecuación correcta, sin embargo, el coeficiente del término cuadrático quedó con punto decimal y optó por dividir toda la ecuación entre 3.5, sin embargo, tanto el término lineal como el independiente quedaron con valores decimales aproximados. Al final si llegaron a las respuestas correctas, pero, aproximaron los valores.

Otro punto importante respecto a la resolución del problema es la interpretación de las soluciones. Se presentan a continuación las aportaciones de los equipos respecto a este punto.



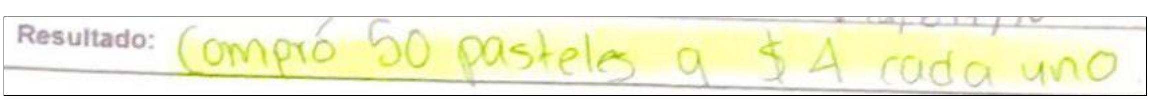
- Resultado: Compro 48 Pasteles a $4.16 Cada uno

Figura 107. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E1.



Resultado: Compró: 50 pasteles. Costaron: $4 c/u.

Figura 108. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E2.



Resultado: Compró 50 pasteles a $4 cada uno

Figura 109. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E3.

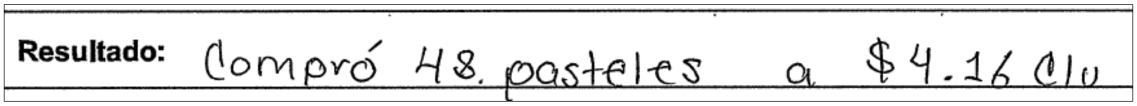

Resultado: Compró 48. pasteles a $4.16 c/u

Figura 110. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E4.

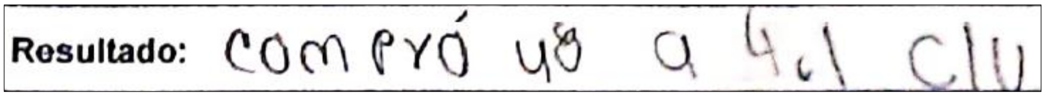

Resultado: compró 48 a 4.1 c/u

Figura 111. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E5.

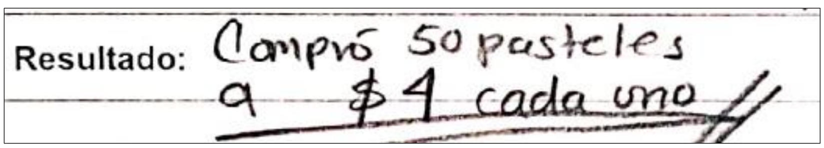

Resultado: Compró 50 pasteles a $4 cada uno

Figura 112. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E6.

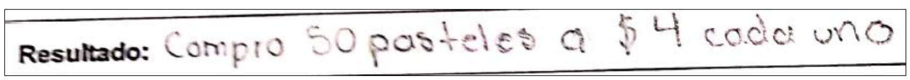

Resultado: Compro 50 pasteles a $4 cada uno

Figura 113. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E7.

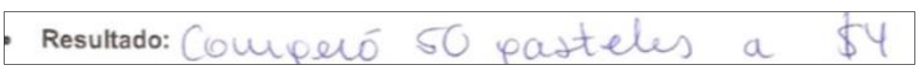

Resultado: Compró 50 pasteles a $4

Figura 114. Interpretación de la solución del problema dos (secuencia didáctica uno), E8.

Se observa que los equipos E2, E3, E6, E7 y E8 llegaron a la interpretación correcta de las soluciones para el problema dos, los otros equipos E1, E4 y E5 no llegaron a la solución correcta, ya que se equivocaron al momento de realizar las operaciones correspondientes para simplificar e igualar a cero la ecuación. El E7 si llegó a la respuesta correcta, sin embargo, las soluciones de la ecuación cuadrática fueron aproximadas, con punto decimal y posteriormente, tuvieron que redondear al valor entero más próximo. Se observa que 62.5% de los equipos logró llegar a la solución correcta del problema número dos.

En ese sentido, se observa una coincidencia en la cantidad de equipos que respondieron correctamente tanto el problema uno como el problema dos. Es preciso mencionar que durante el desarrollo de la sesión se estuvo recorriendo el aula, pasando con cada equipo de trabajo, preguntando si existía alguna duda o pregunta, la duda principal fue en cuánto al método que debían emplear para resolver la ecuación cuadrática, del resto, un equipo tuvo dudas respecto a una cuestión de redacción. La mayoría de los equipos comentó que no había dudas, se notaban trabajando en la resolución de los problemas.

Al término del tiempo destinado para la resolución de los ejercicios se realizó la retroalimentación de los dos problemas del desarrollo, para ello se proyectó la pizarra digital y ahí escuchando las aportaciones de cada equipo se fue realizando de manera sincrónica la resolución de cada ejercicio.

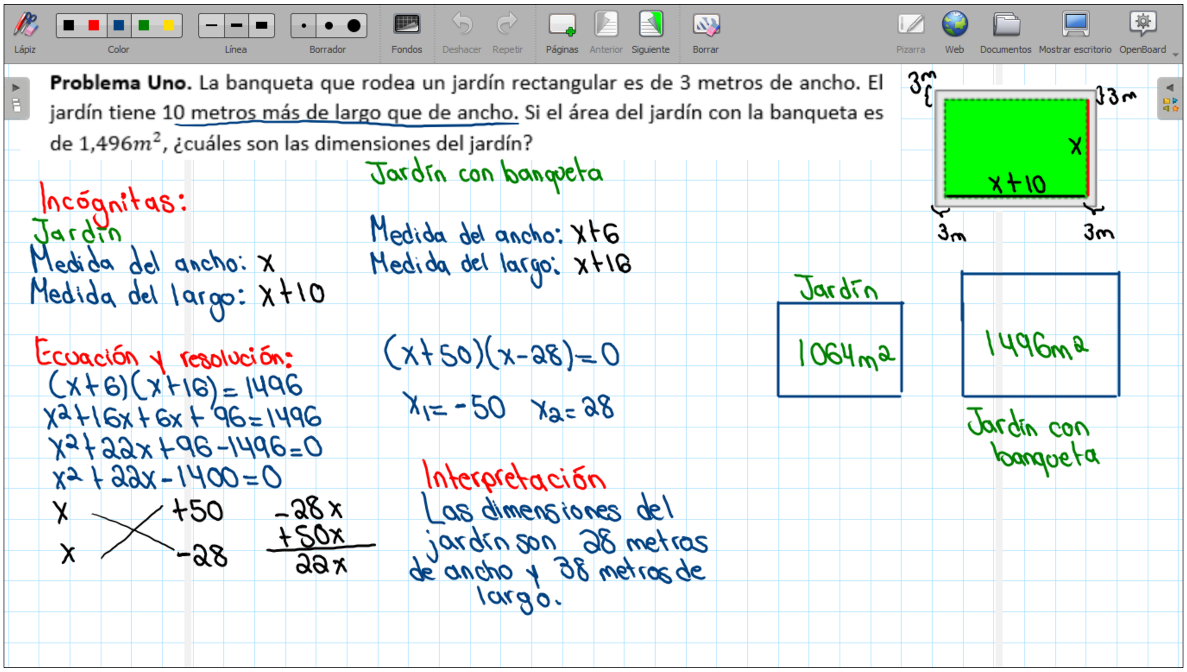


Figura 115. Retroalimentación del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica uno).

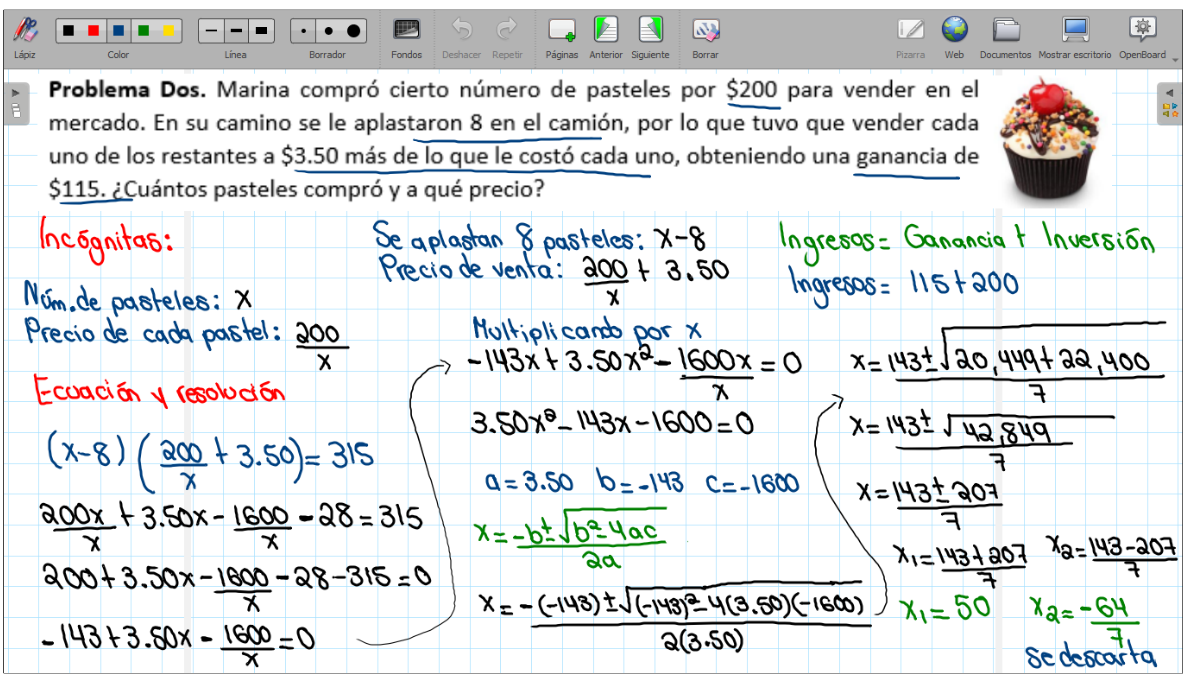


Figura 116. Retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica uno).

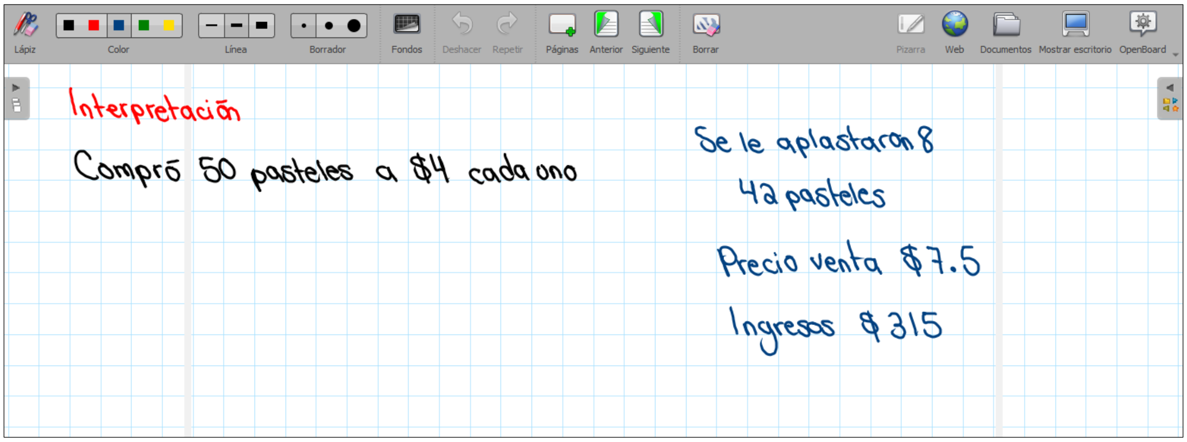


Figura 117. Retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica uno).

Al término de la retroalimentación se procedió a proyectar el problema de cierre, se pidió a los alumnos copiar el problema en hojas en blanco y resolverlo, la modalidad de resolución fue de manera individual.

Fueron 34 alumnos que debían resolver de manera individual dicho problema. De los 34 alumnos, 22 alumnos lograron resolver correctamente el problema, para resolver la ecuación cuadrática 6 optaron por emplear la técnica de factorización correspondiente y los otros 16 emplearon la fórmula general. Se presenta a continuación un ejemplo de resolución correcta del problema, empleando cada uno de estos métodos.

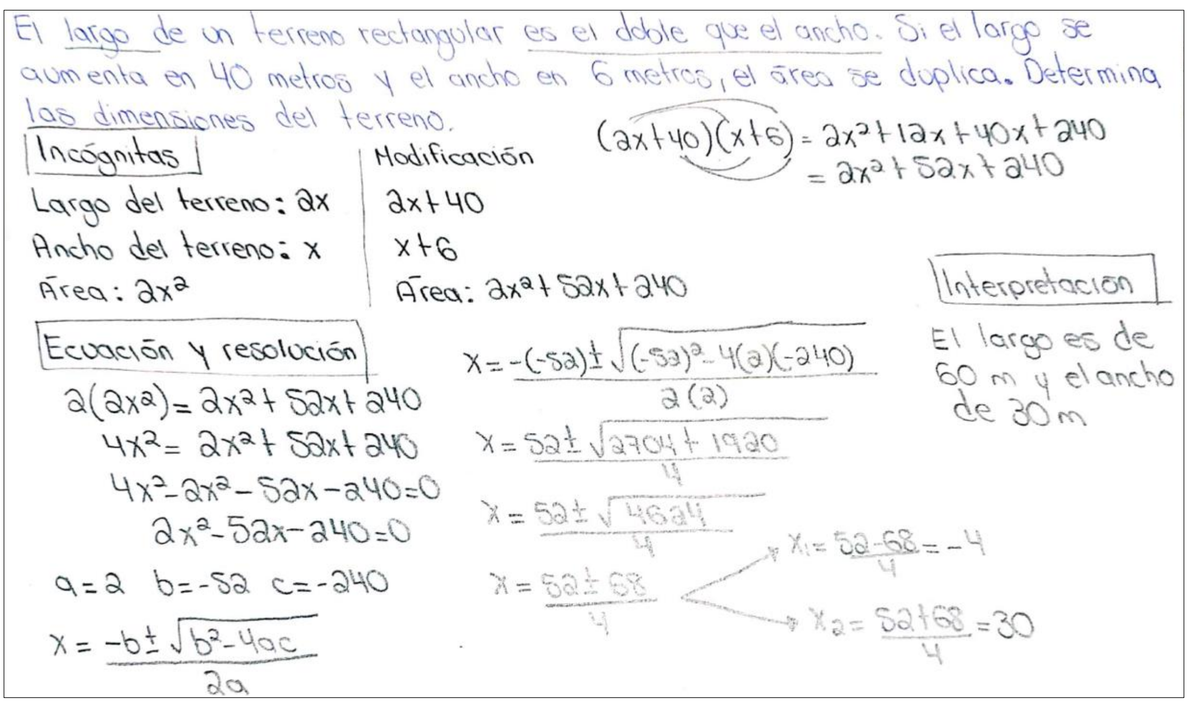
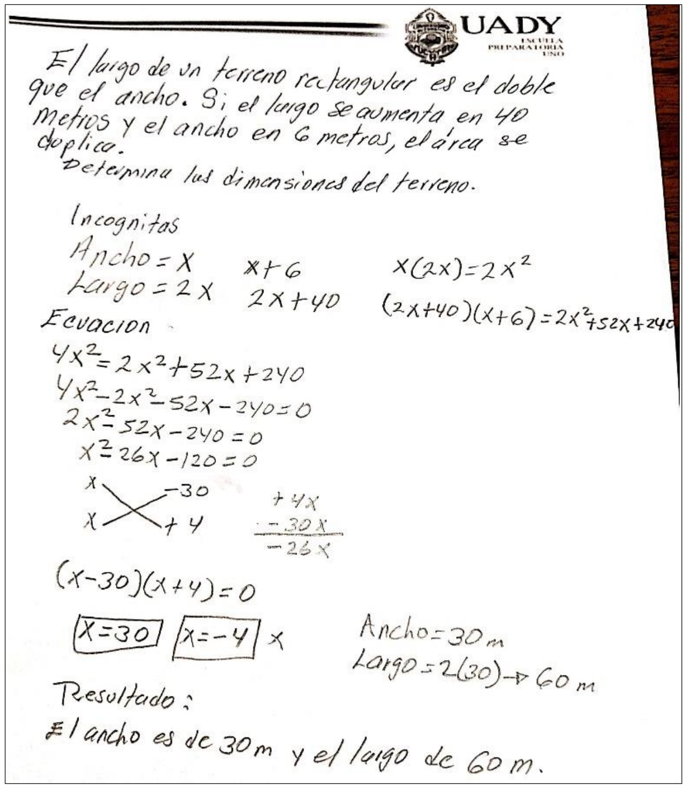


Figura 118. Resolución correcta del problema de cierre, empleando la fórmula general (secuencia didáctica uno).



UADY ESCUELA PREPARATORIA UNO

El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica.
Determina las dimensiones del terreno.

Incognitas

Ancho $= x$ $\quad x+6 \quad x(2x)=2x^2$

Largo $= 2x$ $\quad 2x+40 \quad (2x+40)(x+6)=2x^2+52x+240$

Ecuacion

$4x^2=2x^2+52x+240$

$4x^2-2x^2-52x-240=0$

$2x^2-52x-240=0$

$x^2-26x-120=0$

$x \quad -30$

$x \quad +4$

$+4x$

$-30x$

$-26x$

$(x-30)(x+4)=0$

$\boxed{x=30}$ $\boxed{x=-4}$ x

Ancho $=30$ m

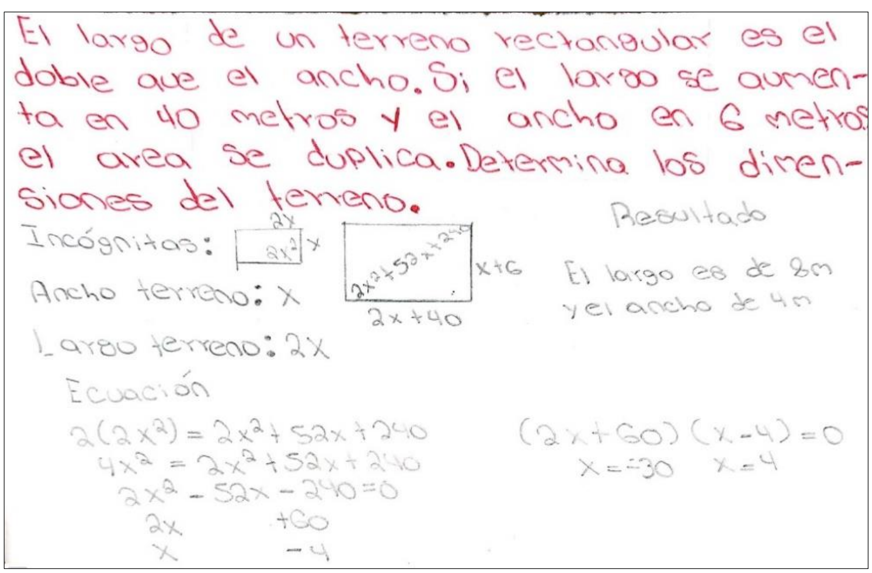
Largo $=2(30) \rightarrow 60$ m

Resultado:

El ancho es de 30m y el largo de 60 m.

Figura 119. Resolución correcta del problema de cierre, empleando la técnica de factorización (secuencia didáctica uno).

Entre los principales errores cometidos por los alumnos se encuentra el equivocarse al momento de resolver la ecuación cuadrática, definieron bien las incógnitas, plantearon la ecuación, pero se equivocaron al momento de resolver la ecuación, en este caso, usando la técnica de factorización.



El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros el area se duplica. Determina los dimensiones del terreno.

Incógnitas: $2x$ $2x^2$ x $\quad 2x^2+52x+240 \quad x+6 \quad 2x+40$

Ancho terreno: x

Largo terreno: $2x$

Resultado

El largo es de 8m y el ancho de 4m

Ecuación

$2(2x^2)=2x^2+52x+240$

$4x^2=2x^2+52x+240$

$2x^2-52x-240=0$

$2x \quad +60$

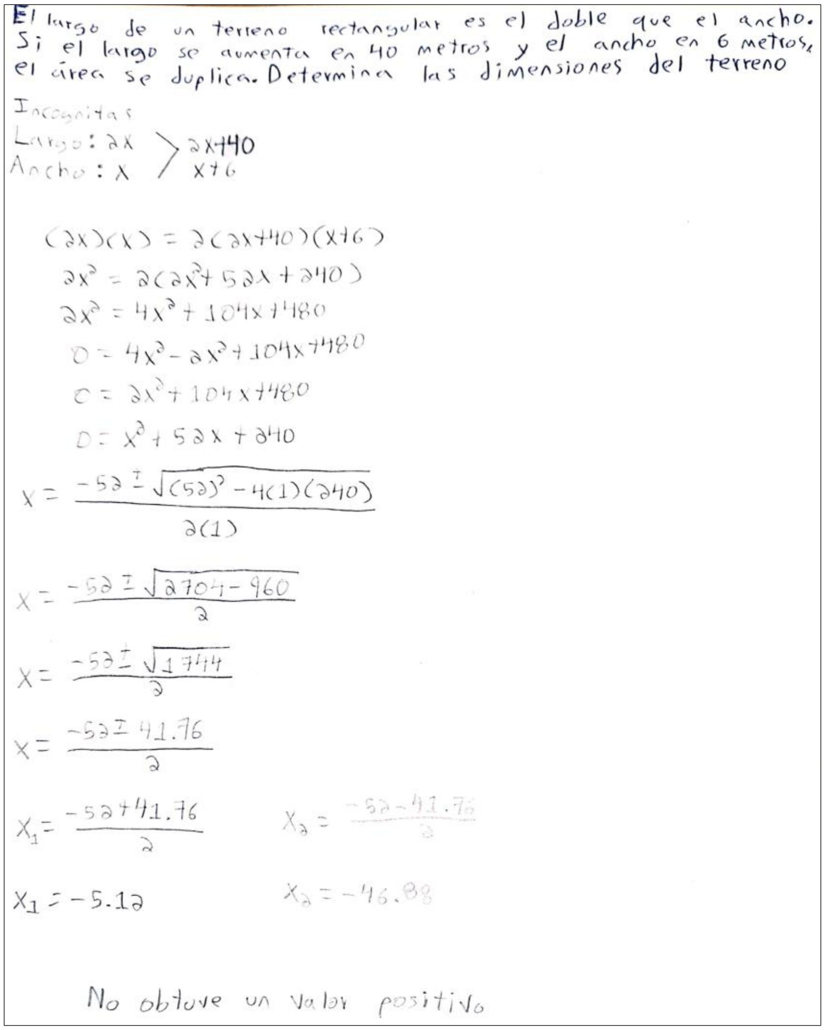
$x \quad -4$

$(2x+60)(x-4)=0$

$x=-30 \quad x=4$

Figura 120. Resolución incorrecta del problema de cierre, empleando la técnica de factorización (secuencia didáctica uno).

Otro de los errores comunes fue el equivocarse al momento de plantear la ecuación que modela el problema, en este caso el problema menciona "el área se duplica", haciendo referencia al área original, pero, algunos estudiantes duplicaron el área modificada, obtuvieron una ecuación cuadrática la resolvieron, llegaron a resultados negativos y se percataron de que, de acuerdo con el contexto del problema, los resultados no debían ser negativos.



El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica. Determina las dimensiones del terreno

Incognitas

Largo: $2x$ → $2x+40$

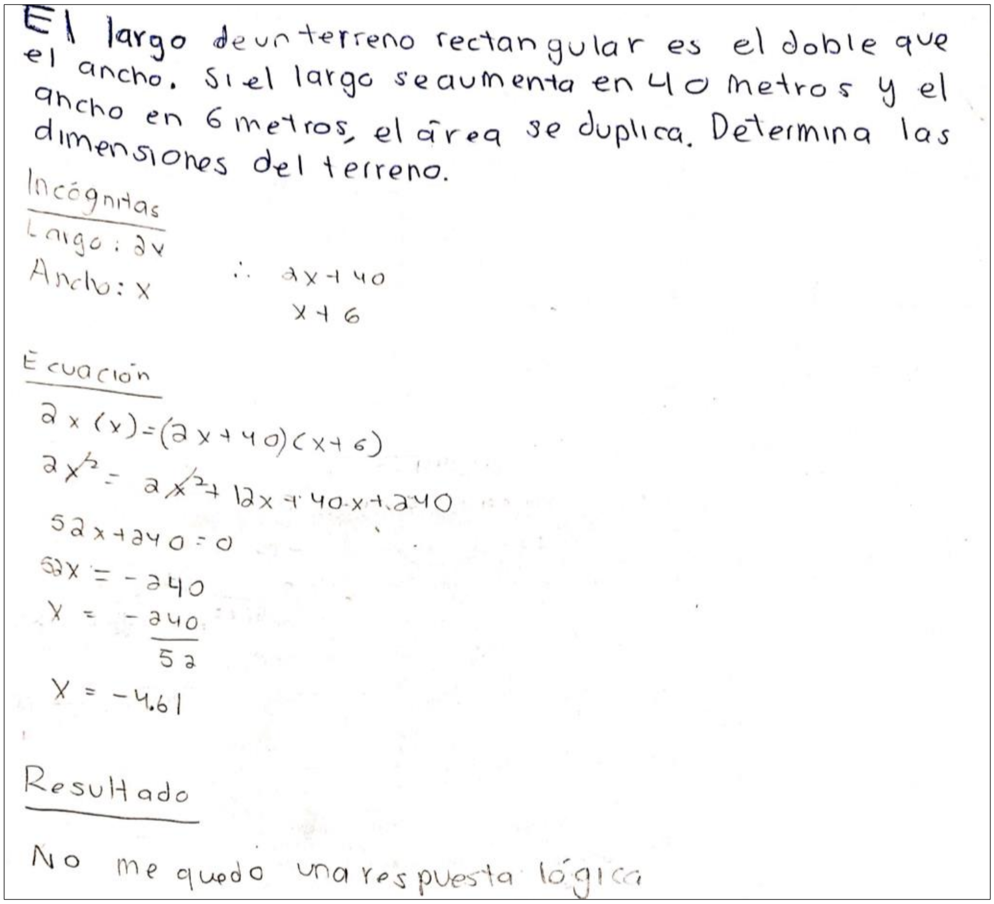
Ancho: x → $x+6$

$$(2x)(x) = 2(2x+40)(x+6)$$
$$2x^2 = 2(2x^2+52x+240)$$
$$2x^2 = 4x^2+104x+480$$
$$0 = 4x^2-2x^2+104x+480$$
$$0 = 2x^2+104x+480$$
$$0 = x^2+52x+240$$
$$x = \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2-4(1)(240)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-52 \pm \sqrt{2704-960}}{2}$$
$$x = \frac{-52 \pm \sqrt{1744}}{2}$$
$$x = \frac{-52 \pm 41.76}{2}$$
$$x_1 = \frac{-52+41.76}{2} \qquad x_2 = \frac{-52-41.76}{2}$$
$$x_1 = -5.12 \qquad x_2 = -46.88$$

No obtuve un valor positivo

Figura 121. Resolución incorrecta del problema de cierre, error en el planteamiento de la ecuación (secuencia didáctica uno).

Otra equivocación que se encontró en las soluciones de los alumnos fue equivocarse al momento de igualar a cero su ecuación, fue común que no llegaran a una ecuación cuadrática, algunos llegaron a una ecuación lineal, cuyo resultado fue negativo y no era lógico para el contexto del problema.



El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica. Determina las dimensiones del terreno.

Incógnitas

Largo: $2x$

Ancho: x $\quad\therefore\ 2x+40$

$x+6$

Ecuación

$2x(x)=(2x+40)(x+6)$

$\cancel{2x^2} = \cancel{2x^2}+12x+40x+240$

$52x+240=0$

$52x=-240$

$x=\dfrac{-240}{52}$

$x=-4.61$

Resultado

No me quedo una respuesta lógica

Figura 122. Resolución incorrecta del problema de cierre, error en la resolución de la ecuación (secuencia didáctica uno).

Es preciso mencionar que los 34 alumnos lograron plantear correctamente las incógnitas, los que no llegaron a la solución correcta cometieron un error en el planteamiento de la ecuación o en la resolución de la ecuación cuadrática.

Durante la resolución del ejercicio de cierre los alumnos no recibieron ninguna ayuda de parte del docente, posteriormente a que se terminara con el tiempo destinado a la resolución del problema se procedió a brindar la retroalimentación del problema. Para la retroalimentación del problema se utilizó la pizarra digital, dónde se escucharon las ideas empleadas por los alumnos para resolver el problema. Se presenta a continuación la retroalimentación elaborada en conjunto con los alumnos.

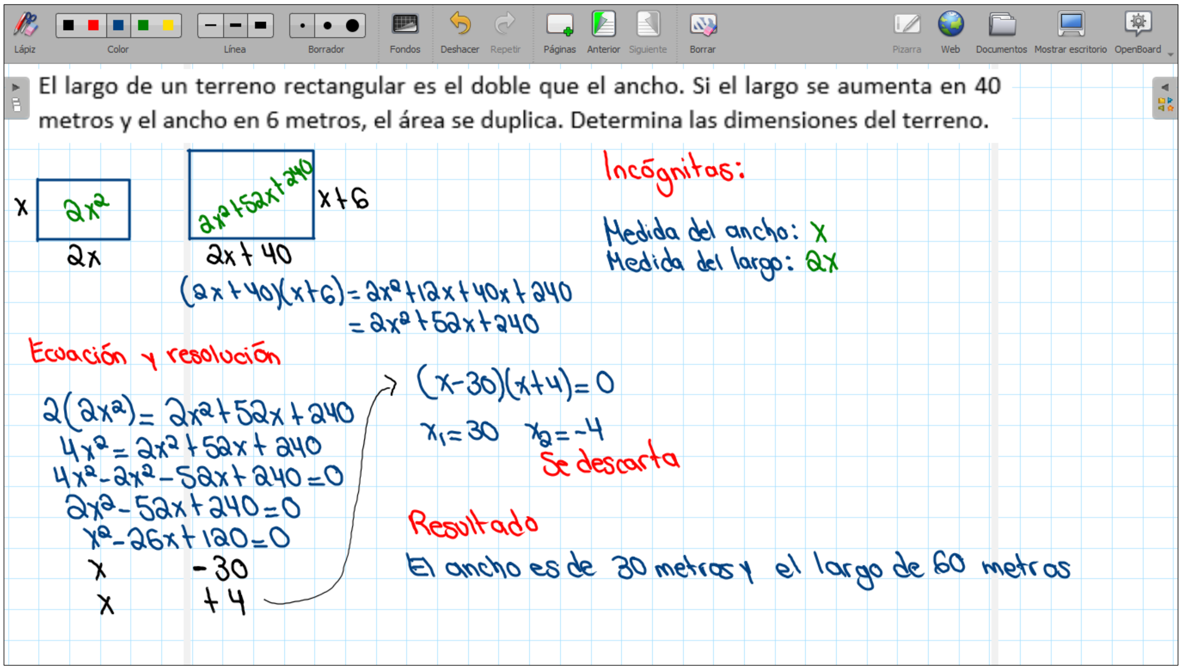


Figura 123. Retroalimentación del problema de cierre (secuencia didáctica uno).

Al término de la retroalimentación, por medio de la plataforma de trabajo institucional (UADY virtual) se le proporcionó a cada alumno el enlace para responder la autoevaluación correspondiente a la aplicación de la actividad diagnóstica y la secuencia didáctica uno.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN SOBRE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS

Este cuestionario constó de 11 preguntas. Fue un cuestionario en línea, por lo cual fue una actividad a distancia, sin presión de tiempo. Se les recalcó la importancia de realizar dicha actividad. Se presentan a continuación los resultados obtenidos con el grupo uno.

1. Grupo al que perteneces.

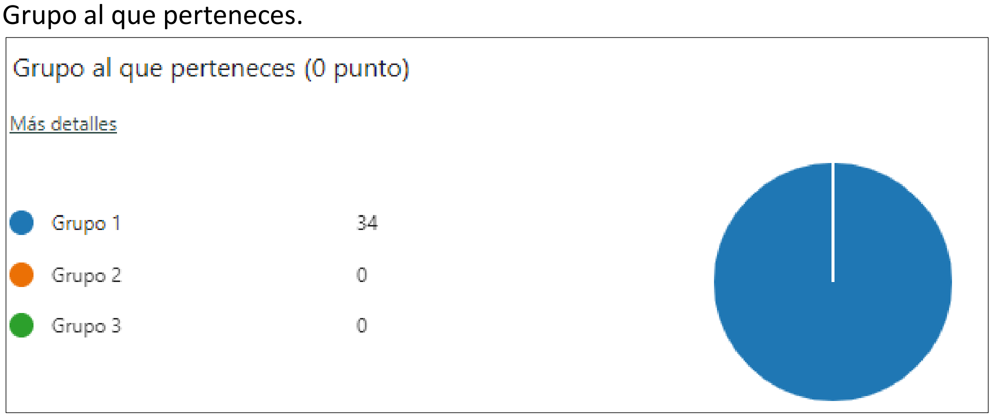


Figura 124. Pregunta uno del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Con esto se observa que todo el grupo uno respondió el cuestionario de autoevaluación, los 34 alumnos que conforman el grupo.

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

34 Respuestas

7	anonymous	Resolver los problemas aplicativos
8	anonymous	No entendía como sacar las fórmulas para las figuras
9	anonymous	Se me dificultó resolver las ecuaciones cuadrática
10	anonymous	No logré resolver el problema aplicativo del diagnóstico
11	anonymous	Resolver el último problema, el aplicativo
12	anonymous	El resolver una ecuación cuadrática
13	anonymous	Recordar cómo resolver todo, me tomó un tiempo considerable.
14	anonymous	Logré resolver todo correctamente
15	anonymous	Para resolver el problema de aplicación

Figura 125. Pregunta dos del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

La figura 125 muestra algunas de las respuestas brindadas por los alumnos, de acuerdo con las estadísticas, 11 alumnos respondieron "resolver problemas aplicativos", como una dificultad al resolver la actividad diagnóstica. Siendo ésta la principal dificultad mencionada.

3. ¿Lograste superarlas?

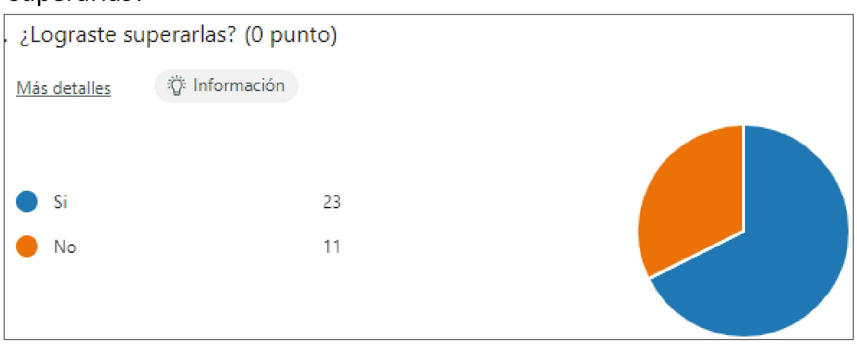


Figura 126. Pregunta tres del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Se observa que fueron 23 alumnos los que comentaron que superaron las dificultades descritas en la pregunta 2 y los que dijeron no superaron las dificultades fueron 11 alumnos.

4. Para los que contestaron Sí a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

4. ¿Cómo lo hiciste?

23 Respuestas

10	anonymous	La retroalimentación de la profa ayudó bastante
11	anonymous	Con la explicación y recordatorio que se realizó
12	anonymous	En la retroalimentación se comentó la factorización y la fórmula general.
13	anonymous	Con la retroalimentación que se realizó ya fue más entendible.
14	anonymous	Siempre he tenido una habilidad para las matemáticas, más para el álgebra
15	anonymous	Presté atención a las retroalimentaciones
16	anonymous	Con el apoyo de la profesora y mis compañeros
17	anonymous	Checando la retroalimentación. Esto se vio en la secundaria pero ya se me olvidó
18	anonymous	Con la retroalimentación pude ver los errores que cometí

Figura 127. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó Sí en la pregunta 3 (grupo uno).

Con las respuestas de estos 23 alumnos se destaca el hecho de que mencionaran que la retroalimentación les ayudó, pero algunos comentan que otro factor que les apoyó es que tienen facilidad hacia las matemáticas.

5. Para los que respondieron que No a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

5. ¿Qué aspectos influyeron para que no lo lograras?

11 Respuestas

4	anonymous	Por más que leía no sabía bien como plantear las ecuaciones
5	anonymous	Creo que necesitaba más tiempo, porque no soy muy hábil con las matemáticas
6	anonymous	Es que ya puedo plantear incógnitas pero sigo sin comprender bien porque no planteo bien mis ecuaciones.
7	anonymous	Es que si me ayudó la explicación pero cuando trabajo con un problema me bloqueo
8	anonymous	Si lo recordé pero me equivoqué en las actividades que pusieron después
9	anonymous	Me equivocaba en algo y ya no llegaba a la solución correcta.
10	anonymous	Es difícil traducir lo que se dice en la redacción a las incógnitas

Figura 128. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó No en la pregunta 3 (grupo uno).

Con las respuestas de estos 11 alumnos se destacan aspectos como falta de tiempo, dificultad para plantear las ecuaciones en los problemas aplicativos, dificultad para traducir del lenguaje natural al algebraico.

6. Respecto a las actividades de la secuencia didáctica, ¿Cuántos problemas del desarrollo lograron resolver como equipo?

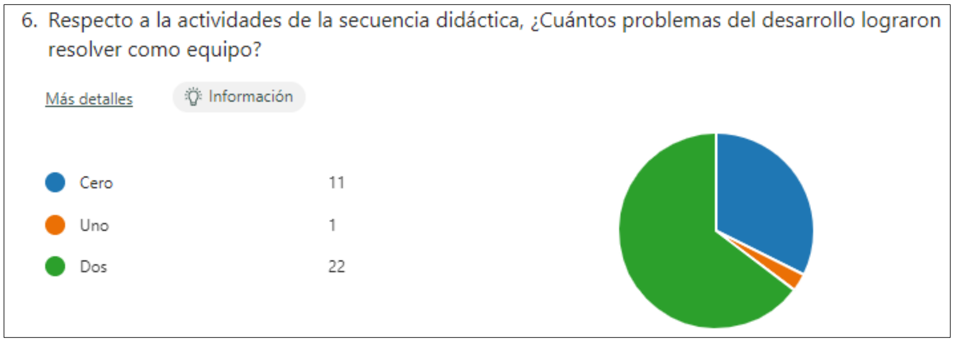
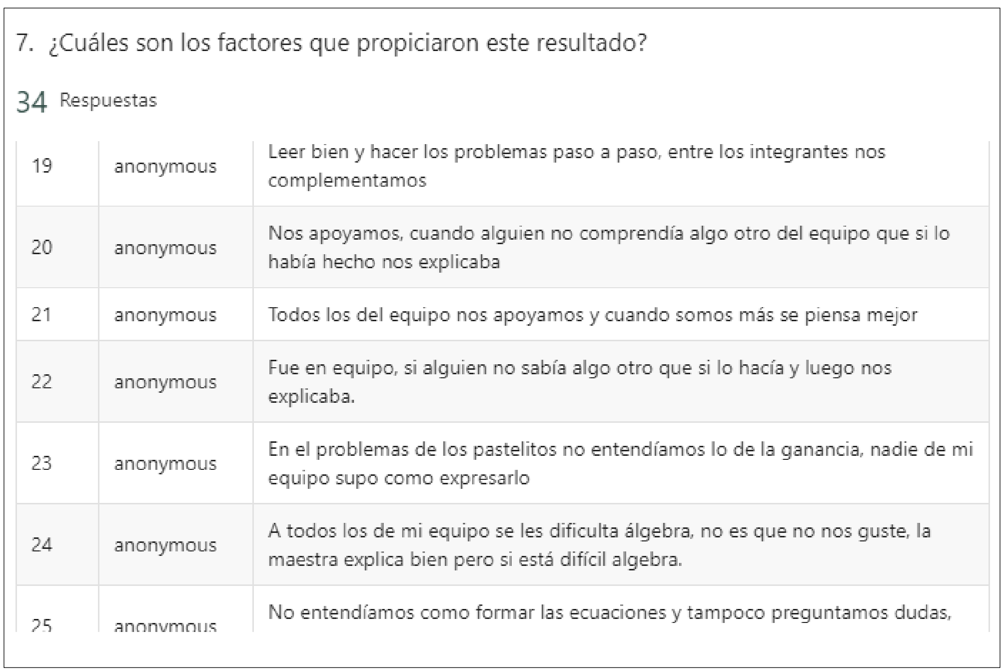


Figura 129. Pregunta cinco del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Se observa que la mayoría con sus equipos pudo resolver los dos problemas proporcionados, lo grave es que haya equipos que resolvieron cero problemas correctamente.

7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?



7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?

34 Respuestas

19	anonymous	Leer bien y hacer los problemas paso a paso, entre los integrantes nos complementamos
20	anonymous	Nos apoyamos, cuando alguien no comprendía algo otro del equipo que si lo había hecho nos explicaba
21	anonymous	Todos los del equipo nos apoyamos y cuando somos más se piensa mejor
22	anonymous	Fue en equipo, si alguien no sabía algo otro que si lo hacía y luego nos explicaba.
23	anonymous	En el problemas de los pastelitos no entendíamos lo de la ganancia, nadie de mi equipo supo como expresarlo
24	anonymous	A todos los de mi equipo se les dificulta álgebra, no es que no nos guste, la maestra explica bien pero si está difícil algebra.
25	anonymous	No entendíamos como formar las ecuaciones y tampoco preguntamos dudas,

Figura 130. Pregunta seis del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Se encuentra como respuestas que un factor que les permitió resolver los dos problemas correctamente fue que trabajaran en equipo, de esta manera, se complementaban entre compañeros. Otros comentarios hacen referencia a que todos los integrantes del equipo se les dificulta el álgebra y por ello cometieron algún error.

8. ¿Lograste resolver correctamente el problema de cierre?

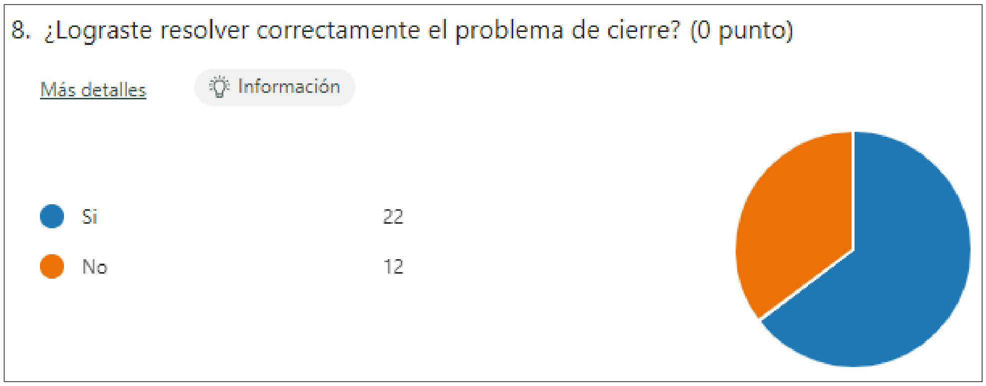


Figura 131. Pregunta siete del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Se observa que 22 alumnos lograron resolver de manera individual el problema de cierre y 12 no lograron resolverlo correctamente. Se observa una coincidencia aproximada en resultados trabajando por equipo y de manera individual.

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

34 Respuestas

18	anonymous	Era un problema similar a los que ya habíamos resuelto
19	anonymous	Era un problema no tan complejo, con lo que ya habíamos trabajado fue más sencillo
20	anonymous	Me costó trabajo pero si lo logré resolver, me ayudó el trabajo que ya habíamos hecho en las sesiones de antes.
21	anonymous	Que los problemas sean similares entre sí
22	anonymous	Me costó trabajo pero si pude, me acordé de los ejemplos de problemas que ya habíamos retroalimentado entre todos
23	anonymous	Definí mis incógnitas pero no supe como plantear la ecuación
24	anonymous	Solo pude plantear las incógnitas, como dije se me dificulta mucho el álgebra
25	anonymous	De por si es difícil para mi, si definía mis incógnitas pero de ahí no pasé.

Figura 132. Pregunta ocho del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Se presentan algunos comentarios que los alumnos realizaron con respecto a los factores que propiciaron este resultado. Algunos de los comentarios se refieren a que el problema de cierre era similar a los ya trabajados y les permitió resolverlo con facilidad, otros comentarios son referentes a que definieron las incógnitas, pero ya no supieron plantear la ecuación, externan que se les dificulta el álgebra.

10. ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?

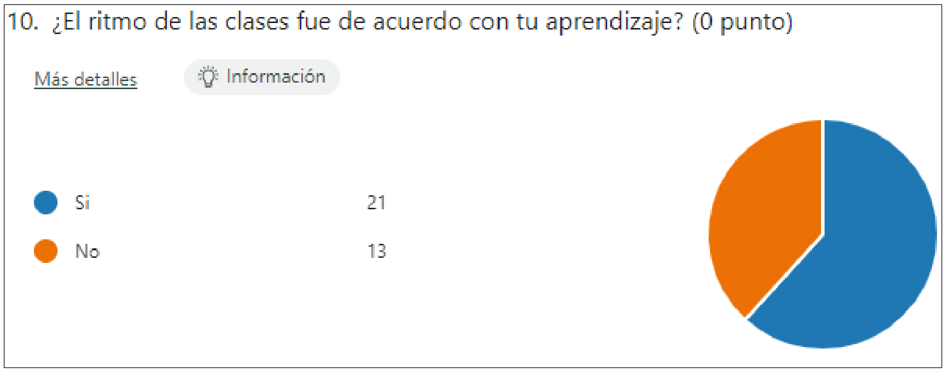


Figura 133. Pregunta nueve del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Para la pregunta nueve, 21 alumnos consideran que el ritmo de clases fue adecuado para su aprendizaje y 13 alumnos consideran que el ritmo de clases no estuvo de acuerdo con su aprendizaje. Con respecto a esta pregunta no se profundizó más, sin embargo, en la pregunta 11 algunos alumnos externaron comentarios al respecto.

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

34 Respuestas

11	anonymous	La actividad de diagnóstico tenía ejercicios interesantes
12	anonymous	Me gustó cómo se trabajó en las dos sesiones, entendible cada explicación
13	anonymous	La actividad diagnóstica tiene actividades interesantes
14	anonymous	Me gustó cómo se organizaron las sesiones y que tuviéramos una autoevaluación
15	anonymous	Son interesantes las actividades pero sentí que avanzábamos rápido, brindar más tiempo
16	anonymous	Me gustó que todo fuera cómo en orden, en el diagnóstico se comenzó de los fácil a lo más difícil
17	anonymous	El trabajo diagnóstico y el trabajar en equipos, ayudó a qué se pudiera resolver todo.

Figura 134. Pregunta diez del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Un comentario que se destaca en la pregunta diez es el que la actividad de diagnóstico resultó interesante para los alumnos, principalmente los ejercicios de encontrar las fórmulas para cualquier posición de una secuencia de figuras.

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

34 Respuestas

22	anonymous	Poner más ejercicios para practicar, en el cierre poner ejercicios como los del diagnóstico para saber si no quedó claro y lo podemos resolver.
23	anonymous	Dar más tiempo y apoyar a los que se nos dificulta matemáticas
24	anonymous	El tiempo, dar más tiempo para las actividades y realizar más de ejemplo.
25	anonymous	Algunos necesitamos más tiempo, estaba medido el tiempo y algunos no somos tan rápidos para resolver problemas.
26	anonymous	Más tiempo y que no sea siempre lo mismo con los problemas, no le busco sentido, nunca voy a utilizar las ecuaciones fuera de la escuela.
27	anonymous	Es que es algo difícil, los problemas son como falsos, no les encuentro chiste.
28	anonymous	Sigo diciendo que para que me sirve resolver esos problemas, siempre es lo mismo. Poner problemas que tengan más relación con nosotros.

Figura 135. Pregunta once del cuestionario de autoevaluación (grupo uno).

Entre las principales sugerencias que los alumnos tienen se encuentra que los problemas no sean los mismos de siempre, comentarios como “son falsos” o “no le encuentro chiste” se pueden observar. De igual manera comentan que es necesario proporcionar más problemas para practicar y también la cuestión del tiempo.

Lo anterior puede deberse a que los problemas empleados son los que por lo regular se encuentran en textos de matemáticas, problemas que resultan ser sin sentido para los alumnos.

5.3 APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta secuencia didáctica fue aplicada al grupo dos de estudiantes, el cual está conformado por 37 alumnos. El inicio de la aplicación de la secuencia didáctica se realizó de manera grupal, cuestionando a los alumnos sobre lo que es una ecuación, las características de una ecuación cuadrática y los métodos de resolución que conocen para resolver estas ecuaciones.

Respecto a la primera pregunta ¿qué es una ecuación?, tres alumnos externaron una opinión y comentaron lo siguiente:

- Es una igualdad entre letras y números.
- Relación de incógnitas.
- Es una igualdad algebraica.

Después de la participación de los alumnos, con el apoyo de una presentación con diapositivas se presentó la siguiente definición:

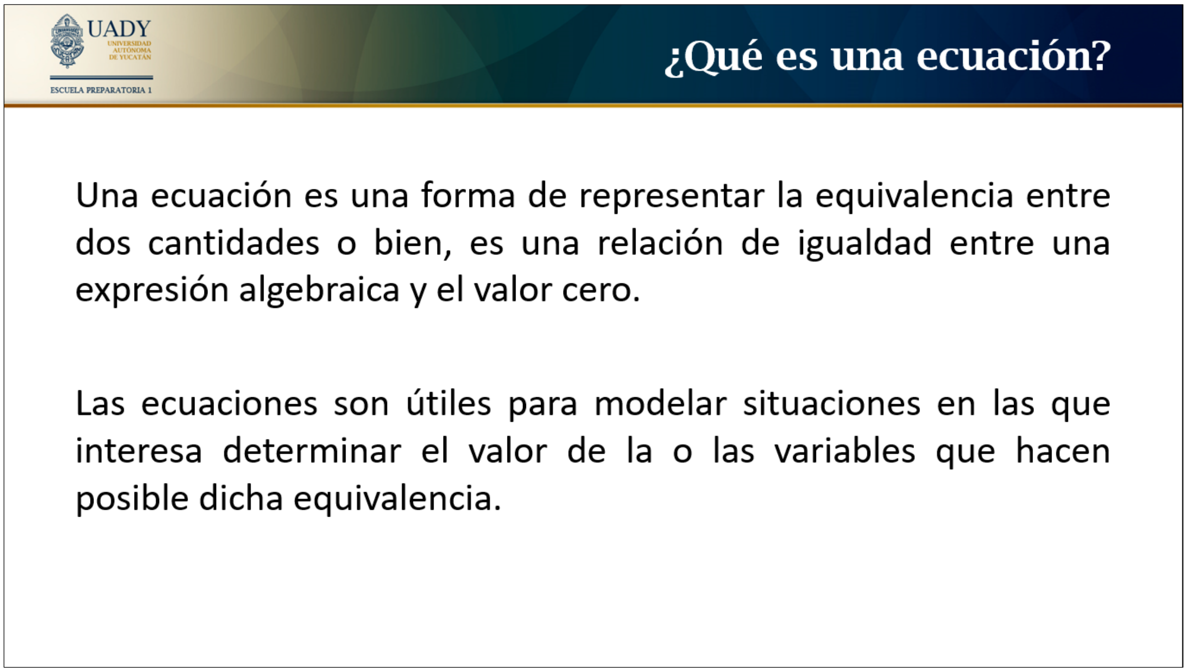


Figura 136. Definición de ecuación (grupo dos).

Posteriormente se mencionó que se han trabajado ecuaciones lineales y cuadráticas, por lo cual conviene realizar un recordatorio de ambas. Se cuestiona a los alumnos con la pregunta, ¿cuál es la diferencia entre ambos modelos?

Los estudiantes externaron sus opiniones y coincidieron en los siguientes aspectos:

- En una ecuación lineal el mayor exponente de su variable es de grado 1 y en una ecuación cuadrática el mayor exponente de su variable es de grado 2.
- Tienen diferentes gráficas, una ecuación lineal genera una línea recta y una ecuación cuadrática genera una parábola.

Las opiniones de los alumnos fueron correctas, sin embargo, nadie mencionó la característica de la variación de los valores que dan lugar a los modelos lineales y cuadráticos. Al término de la participación de los alumnos se presentaron las siguientes diapositivas:

UADY
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
ESCUELA PREPARATORIA 1

¿Cuál es la diferencia entre un modelo lineal y un modelo cuadrático?

Algebraicamente

Modelo lineal	Modelo cuadrático
$y = ax + b$	$y = ax^2 + bx + c$

Figura 137. Diferencias algebraicas entre un modelo lineal y uno cuadrático (grupo dos).

UADY
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
ESCUELA PREPARATORIA 1

¿Cuál es la diferencia entre un modelo lineal y un modelo cuadrático?

Gráficamente

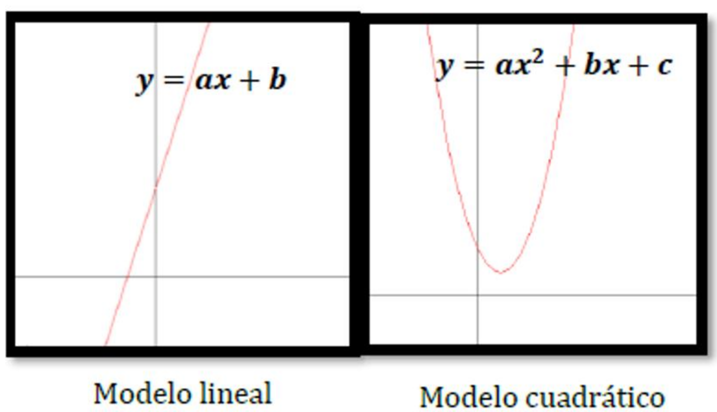


Figura 138. Diferencias gráficas entre un modelo lineal y uno cuadrático (grupo dos).

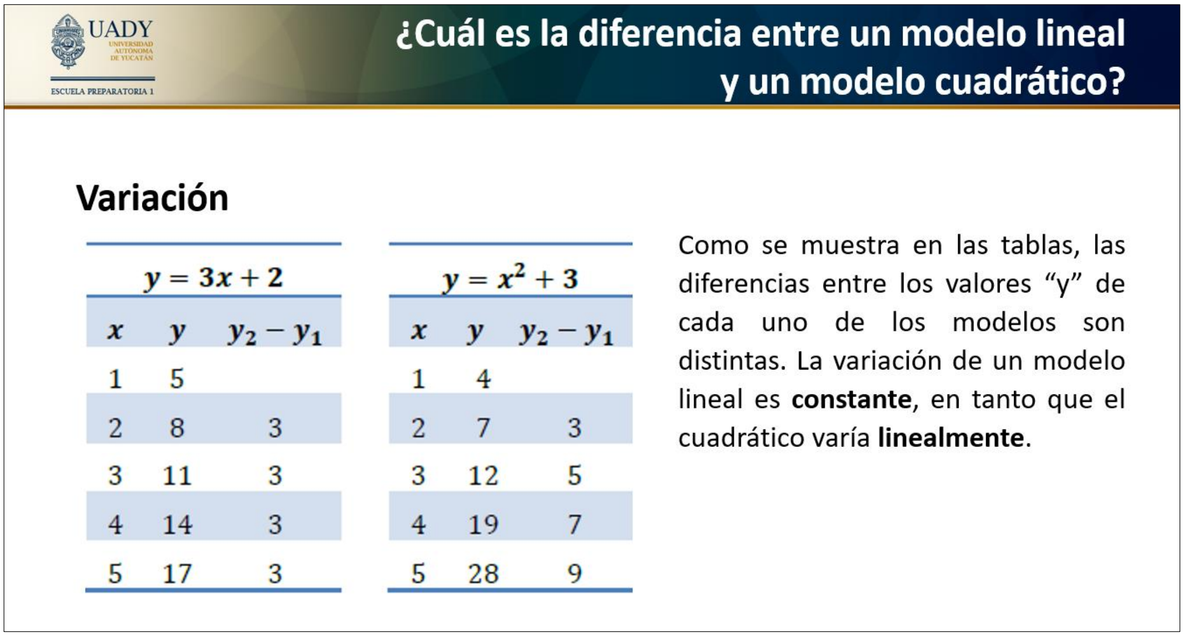


Figura 139. Variación de un modelo lineal y uno cuadrático (grupo dos).

Respecto a la variación de un modelo lineal y cuadrático se realizó un énfasis mayor, dado que, los alumnos mencionaban que por lo regular no se analiza como varían las coordenadas que dan lugar a la gráfica y para algunos de ellos, fue algo nuevo y para otros un recordatorio que habían trabajado en algún momento, pero no con tanta profundidad.

Posteriormente, se enfatizó en las características de una ecuación cuadrática, dado que, la actividad planeada para el desarrollo y cierre de la sesión, era referente a la ecuación cuadrática. Como apoyo se utilizó la siguiente diapositiva:

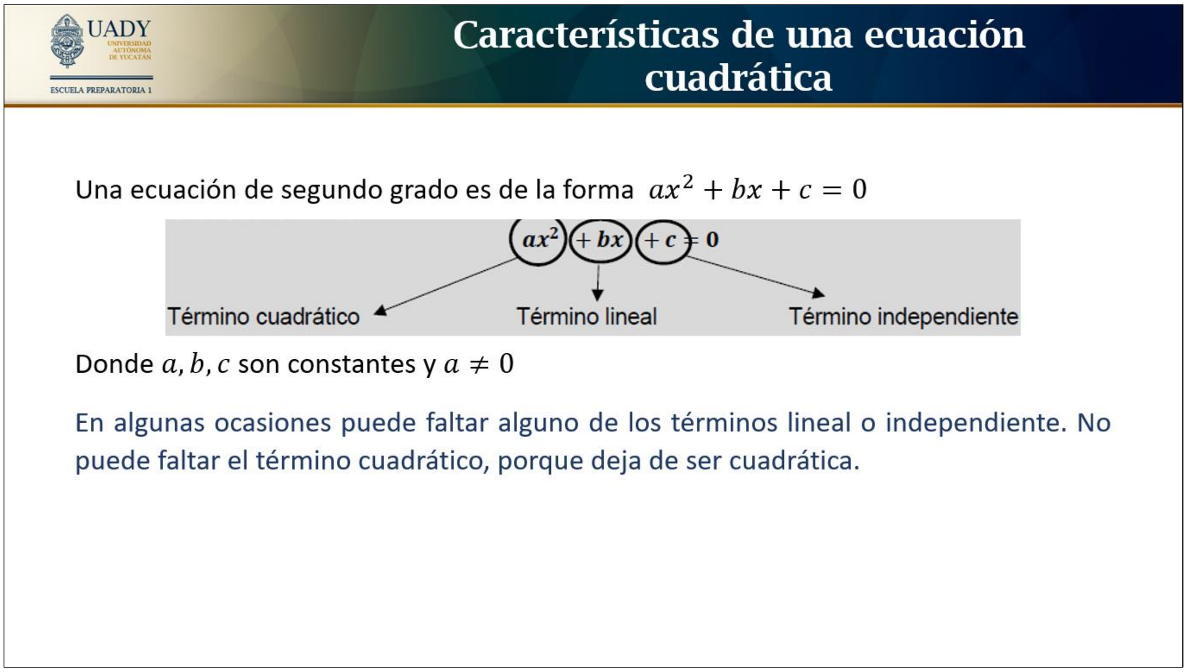


Figura 140. Características de una ecuación cuadrática (grupo dos).

Después de recordar las características de una ecuación cuadrática se procedió a cuestionar a los alumnos sobre los métodos que conocían para resolver una ecuación cuadrática. Los alumnos mencionaron el método de factorización y la aplicación de la fórmula general. Se les presentaron dos diapositivas, la primera haciendo referencia a lo que significa resolver una ecuación cuadrática y la segunda, para presentar los métodos que pueden emplear para resolver la ecuación cuadrática.

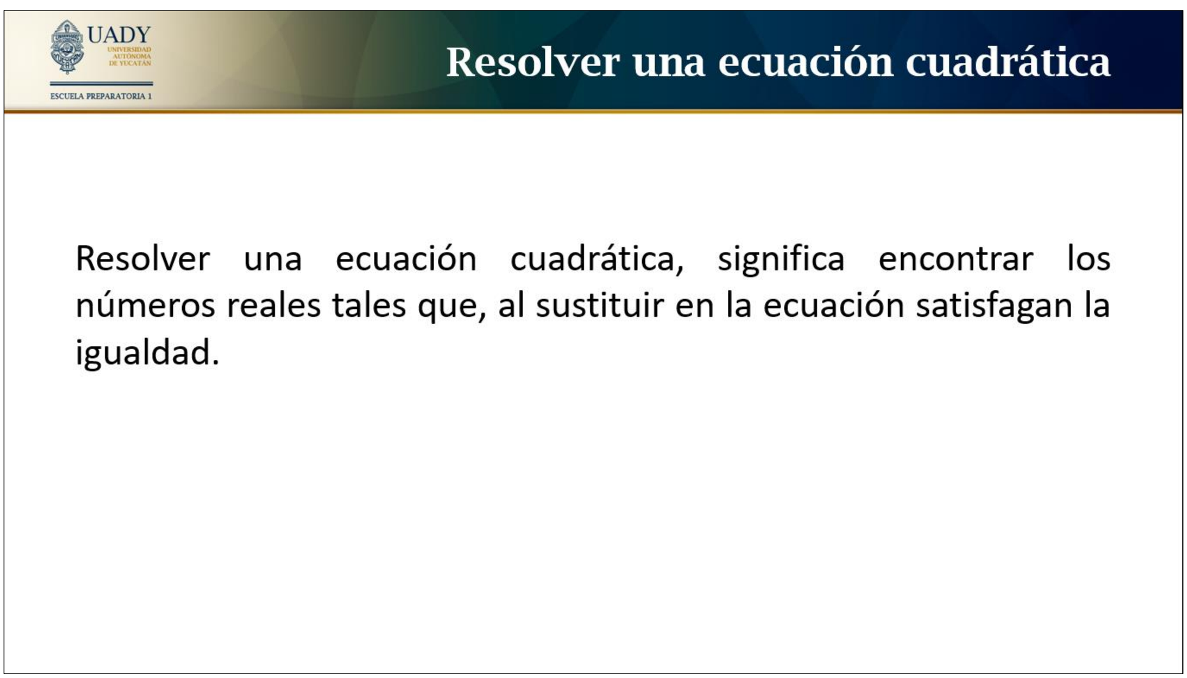


Figura 141. Qué significa resolver una ecuación cuadrática (grupo dos).

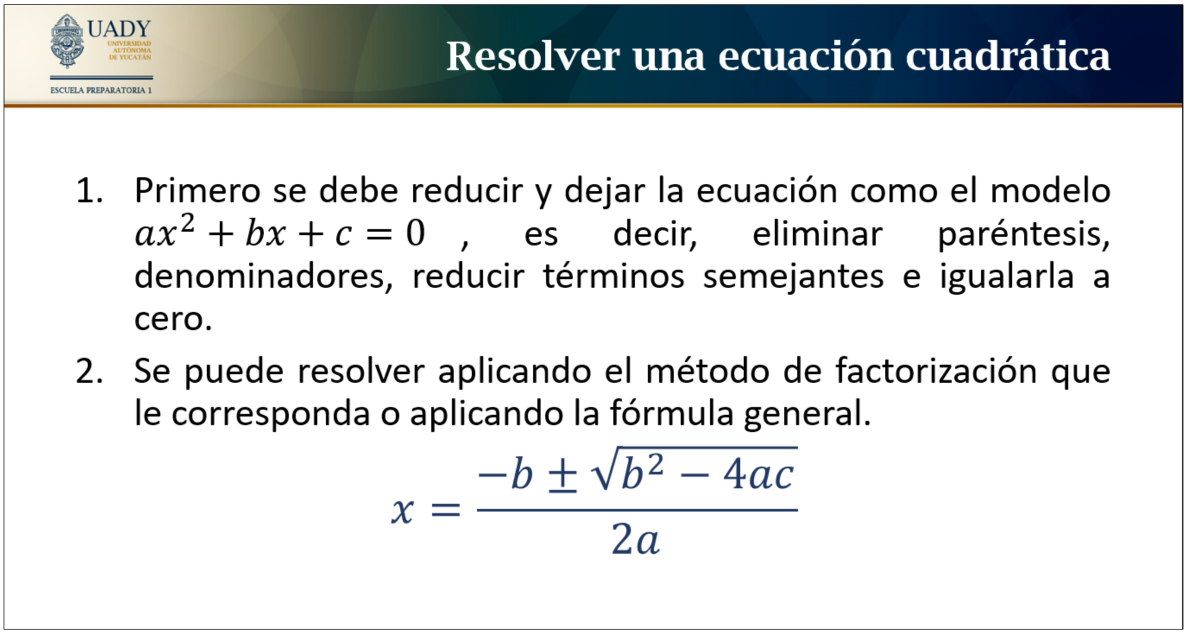


Figura 142. Cómo resolver una ecuación cuadrática (grupo dos).

Después de la recuperación de ideas, se procedió a recodar algunos "pasos" que pueden ayudar a resolver un problema en contexto, se recordaron los siguientes pasos:

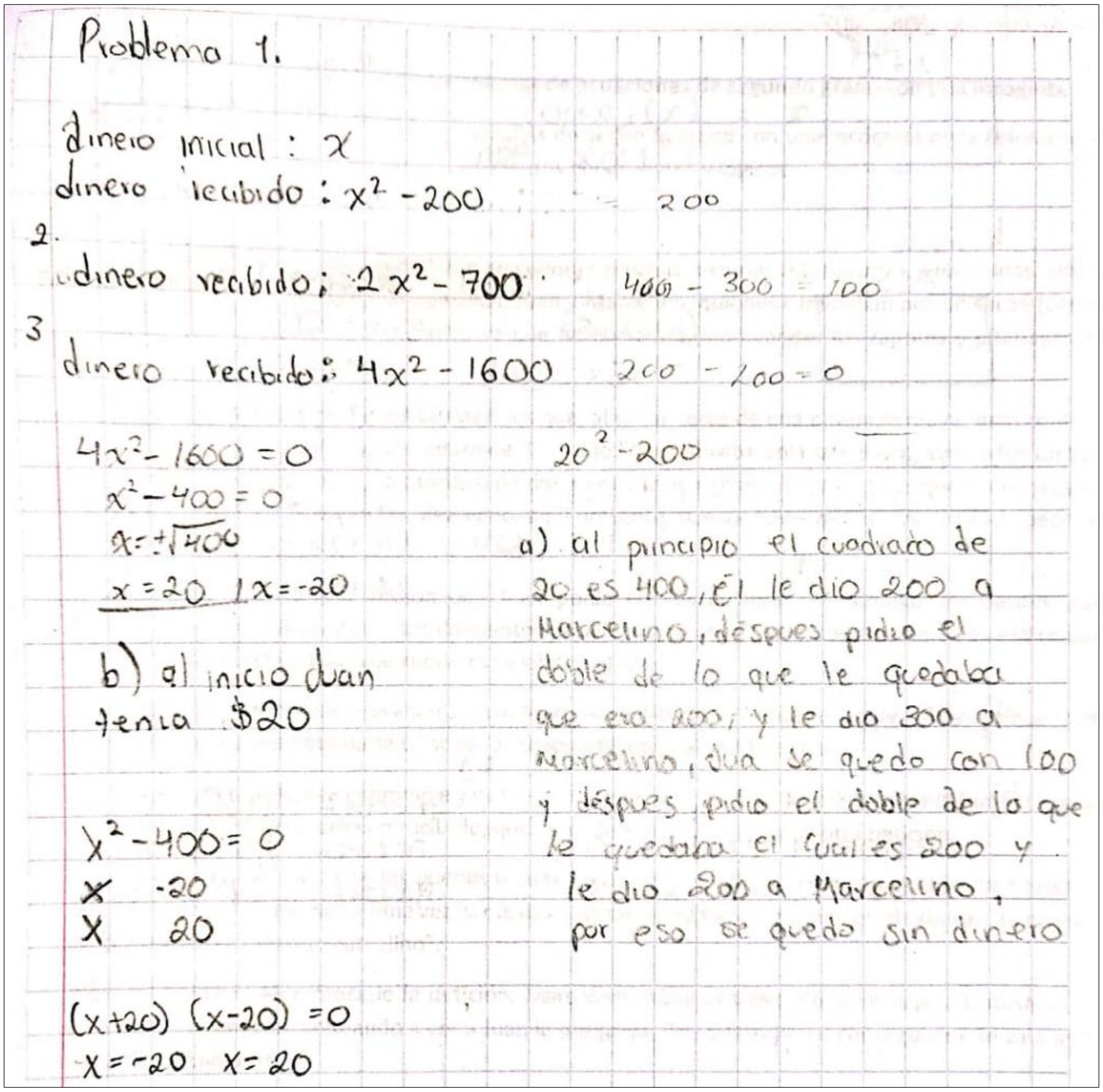
- La definición de la(s) incógnita(s).
- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.
- La resolución clara de la ecuación que representa el problema.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

Únicamente se recordaron, ya que, no se resolvió algún problema en contexto a manera de ejemplo.

Para dar paso al desarrollo de la sesión se solicitó a los alumnos que se formaran en grupos de 4 integrantes, se formaron en total 9 equipos de trabajo, 8 equipos de 4 alumnos y 1 equipo de 5 alumnos. Se presentará el análisis de las respuestas que cada equipo realizó a los dos problemas del desarrollo, considerando los pasos previamente descritos durante el inicio de la sesión.

Para fines de nomenclatura se representarán a los equipos con las nomenclaturas E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E9 haciendo referencia al equipo 1, equipo 2 y así sucesivamente hasta llegar al equipo 9. Se analizará primero el problema uno, en el cual se pedía contestar dos preguntas, la primera ¿cuál es la explicación a lo sucedido, por qué Juan se quedó sin dinero? y la segunda pregunta ¿cuánto dinero tenía Juan al inicio?

Respecto al problema número uno del desarrollo el E1 realizó lo siguiente:


Problema 1.

dinero inicial : x
dinero recibido : $x^2 - 200$ 200
2.
dinero recibido: $2x^2 - 700$ 400 - 300 = 100
3
dinero recibido: $4x^2 - 1600$ 200 - 200 = 0

$4x^2 - 1600 = 0$ $20^2 - 200$
$x^2 - 400 = 0$
$x = \pm\sqrt{400}$
$x = 20$ / $x = -20$

a) al principio el cuadrado de 20 es 400, él le dio 200 a Marcelino, después pidio el doble de lo que le quedaba que era 200, y le dio 300 a Marcelino, Jua se quedo con 100 y después pidio el doble de lo que le quedaba el cual es 200 y le dio 200 a Marcelino, por eso se quedo sin dinero

b) al inicio Juan tenia \$20

$x^2 - 400 = 0$
x -20
x 20

$(x+20)(x-20) = 0$
$x = -20$ $x = 20$

Figura 143. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E1.

Se puede observar que el E1 contestó correctamente ambas preguntas. Para la primera pregunta, se describió por qué se quedó sin dinero Juan, es posible apreciar que primero encontraron la cantidad que traía Juan al inicio y teniendo ese valor, fue posible responder la primera pregunta.

El E1 definió su incógnita principal x como “dinero inicial” y con base en esto, fue posible plantear con lo que se fue quedando Juan después de cada petición al Alux, considerando también la cantidad que entregaba a Marcelino. Este equipo plantea una ecuación cuadrática, la resuelve correctamente, por la lógica del contexto solo consideran como solución el valor positivo. Se puede observar que comprobaron de manera aritmética con el valor obtenido, de esta manera también el argumento que utilizan para justificar la primera pregunta es de carácter aritmético.

Respecto al problema número uno del desarrollo el E2 realizó lo siguiente:

Problema 1. En los pueblos de Yucatán se cuentan muchas historias interesantes y divertidas. Una de ellas cuenta la historia de dos campesinos, Juan y Marcelino, quienes caminaban por un sacbé (camino blanco), se encontraban desesperados ya que no habían logrado vender los zapotes y pitahayas que habían sembrado en sus terrenos.

Era tanta la desesperación de los campesinos que, al pasar cerca de una pirámide maya, Juan comenzó a hablar al Alux, cuidador de dicha pirámide. Juan dijo "Alux, Aluxito, apiádate de mí, hoy no fue un buen día, si me das el cuadrado de la cantidad de dinero que traigo en mí sabucán, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Marcelino, aquí presente, que ya estoy viendo que le ha ido peor que a mí".

El Alux, conmovido por la pasión que Juan ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos, Juan emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a Marcelino. Tan contento y emocionado se puso Marcelino, que pidió a Juan que repitiera su súplica al Alux.

Entonces Juan, realiza una nueva petición al Alux, "Alux, Aluxito, si me das el doble del dinero que traigo en el sabucán, te prometo darle trescientos pesos a mi compadre Marcelino".

De nueva cuenta el Alux se conmueve y vuelve a conceder la petición, Marcelino inmediatamente recibe trescientos pesos. Más tarda en recibirlo, que en pedirle a Juan que repita otra petición.

Impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el Alux, Juan repite su petición, "Alux, Aluxito, por última vez, si me das el doble del dinero que traigo en el sabucán, te prometo darle doscientos pesos a Marcelino".

Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, "¿Cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre".

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero? Pues porque de por sí no tenía mucho dinero al inicio, solo \$20, pero cuando se lo elevaron al cuadrado fue más que suficiente para que pueda regalarle dinero a Marcelino

b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio? \$20

Problema 2. Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Yucatán trata de la herencia de un viejo artesano de hamacas, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir su herencia entre sus tres hijas.

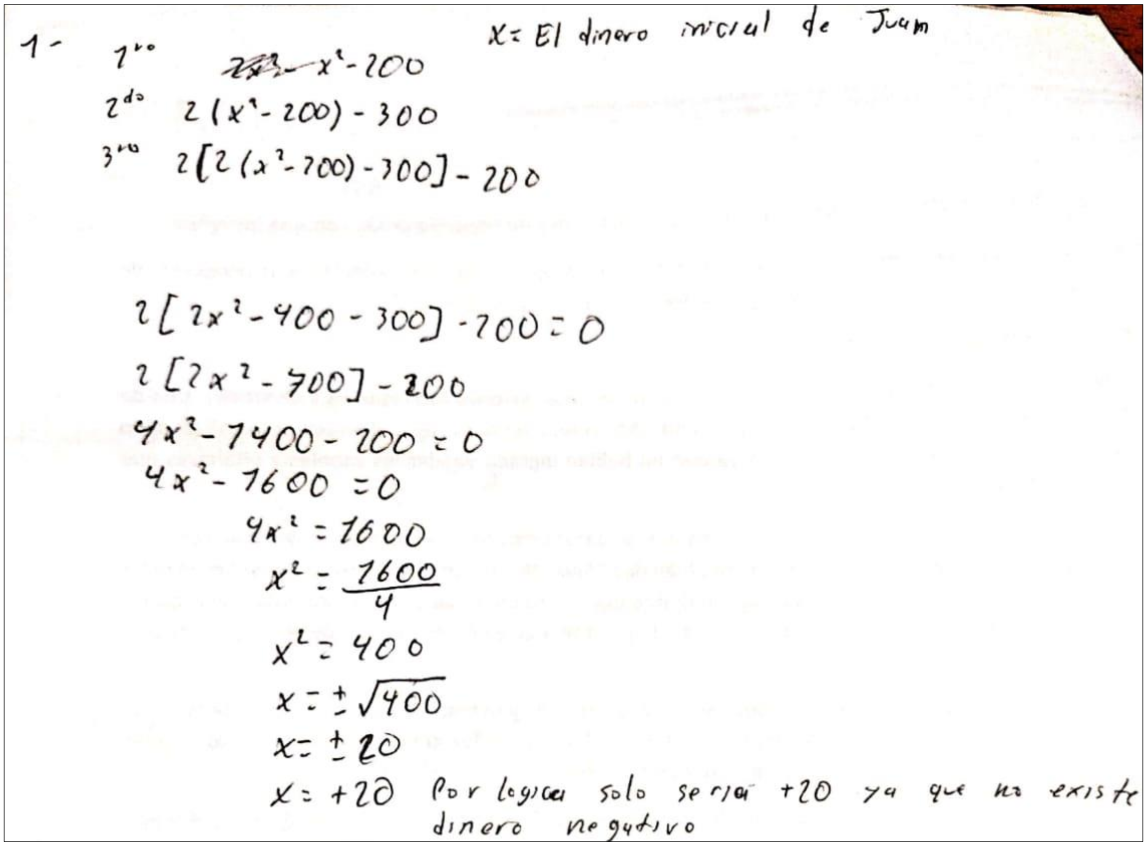
El viejo artesano reunió a sus hijas y les dijo: "Hijas mías, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Me quiero marchar con la

Figura 144. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E2.

Se puede observar que el E2 contestó ambas preguntas, respecto a la primera pregunta el argumento que otorgaron no es del todo claro, mencionan "pues porque de por sí no tenía mucho dinero al inicio, solo \$20, pero cuando se lo elevaron al cuadrado fue más que suficiente para regalarle dinero a Marcelino". Por la idea expresada, la última parte del argumento quedaría mejor como "fue insuficiente para regalarle dinero a Marcelino", aunado a esto, el argumento menciona únicamente cuando la cantidad se elevó al cuadrado, pero, realmente fueron tres las peticiones que Juan realizó al Alux.

Es preciso mencionar que este equipo fue de los que presentó más dificultades para resolver el problema, de hecho, llegaron a la solución probando con diversos valores, su procedimiento fue de carácter aritmético, durante la sesión se observó que probaban con varios números para que se cumpliera el enunciado del problema, sin embargo, borraron el procedimiento que hicieron, con las diversas pruebas que realizaron. Esto tal vez, porque escuchaban que otros equipos estaban realizando procedimientos de tipo algebraico.

El E3 realizó lo siguiente respecto al problema número uno del desarrollo:



1- $x =$ El dinero inicial de Juan

1ro $\cancel{2x}$ $x^2 - 200$

2do $2(x^2-200)-300$

3ro $2[2(x^2-200)-300]-200$

$2[2x^2-400-300]-200=0$

$2[2x^2-700]-200$

$4x^2-1400-200=0$

$4x^2-1600=0$

$4x^2=1600$

$x^2=\frac{1600}{4}$

$x^2=400$

$x=\pm\sqrt{400}$

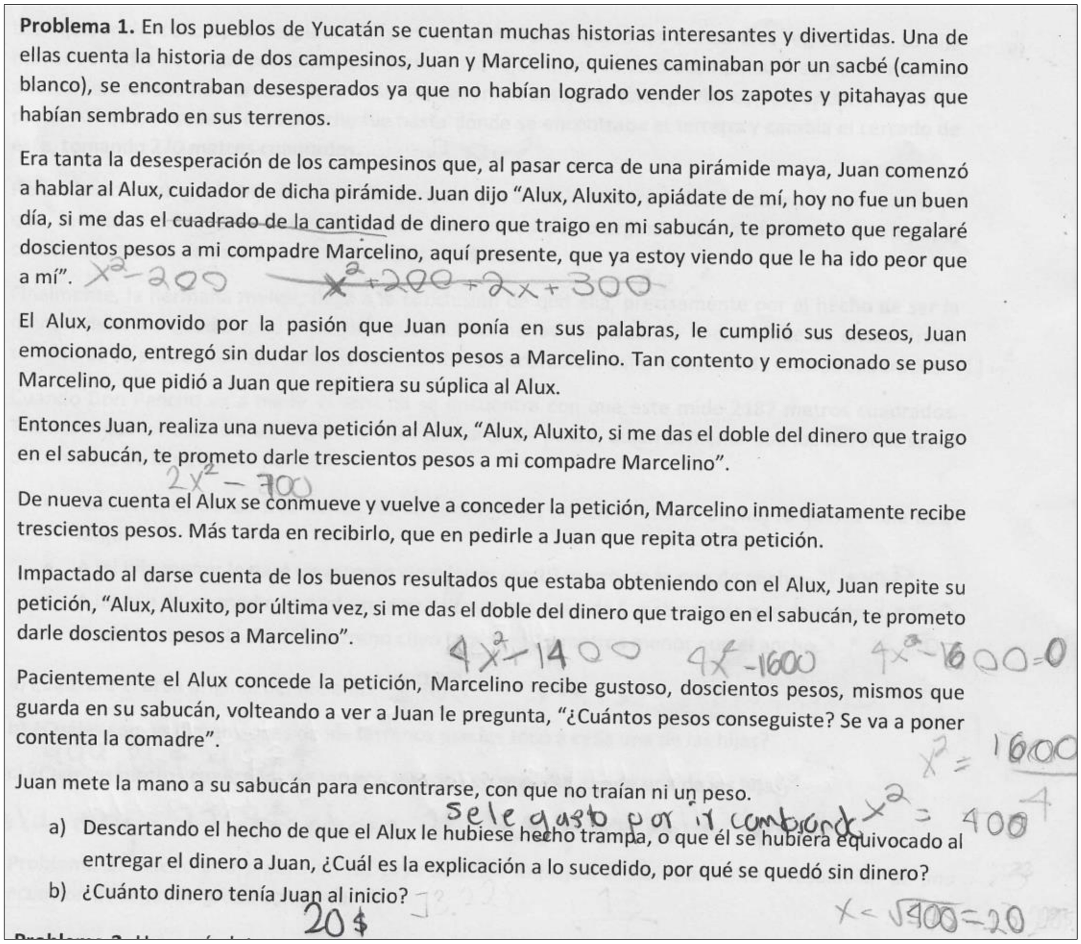
$x=\pm 20$

$x=+20$ Por logica solo seria +20 ya que no existe dinero negativo

Figura 145. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E3.

El E3 solo determinó el dinero que Juan tenía al inicio, no presentó una justificación del por qué se quedó sin dinero, a pesar de las múltiples peticiones al Alux. Este equipo definió a su incógnita principal x como el dinero inicial de Juan. Definieron algebraicamente cada una de las peticiones que fue realizando Juan, igualaron a cero la expresión algebraica, fueron simplificando y resolvieron la ecuación cuadrática. Es preciso mencionar que obtuvieron dos soluciones para la ecuación cuadrática, un valor positivo y otro valor negativo, justifican diciendo que por lógica tomarían el valor positivo, ya que, no existe dinero negativo.

El E4 realizó lo siguiente respecto al problema número uno del desarrollo:



Problema 1. En los pueblos de Yucatán se cuentan muchas historias interesantes y divertidas. Una de ellas cuenta la historia de dos campesinos, Juan y Marcelino, quienes caminaban por un sacbé (camino blanco), se encontraban desesperados ya que no habían logrado vender los zapotes y pitahayas que habían sembrado en sus terrenos.

Era tanta la desesperación de los campesinos que, al pasar cerca de una pirámide maya, Juan comenzó a hablar al Alux, cuidador de dicha pirámide. Juan dijo “Alux, Aluxito, apiádate de mí, hoy no fue un buen día, si me das el cuadrado de la cantidad de dinero que traigo en mi sabucán, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Marcelino, aquí presente, que ya estoy viendo que le ha ido peor que a mí”. x^2-200 $\cancel{x^2+200}+2x+300$

El Alux, conmovido por la pasión que Juan ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos, Juan emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a Marcelino. Tan contento y emocionado se puso Marcelino, que pidió a Juan que repitiera su súplica al Alux.

Entonces Juan, realiza una nueva petición al Alux, “Alux, Aluxito, si me das el doble del dinero que traigo en el sabucán, te prometo darle trescientos pesos a mi compadre Marcelino”.

$2x^2-700$

De nueva cuenta el Alux se conmueve y vuelve a conceder la petición, Marcelino inmediatamente recibe trescientos pesos. Más tarda en recibirlo, que en pedirle a Juan que repita otra petición.

Impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el Alux, Juan repite su petición, “Alux, Aluxito, por última vez, si me das el doble del dinero que traigo en el sabucán, te prometo darle doscientos pesos a Marcelino”.

$4x^2-1400$ $4x^2-1600$ $4x^2-1600=0$

Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, “¿Cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre”.

$x^2=\frac{1600}{4}$

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

sele gasto por ir cambiand $x^2=400$

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?

b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio? 20 $ $x=\sqrt{400}=20$

Figura 146. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E4.

Como se observa en la figura, el E4 contestó ambas cuestiones planteadas, utilizó un procedimiento algebraico, no se observa la definición de incógnitas, pero se deduce que x representa el dinero inicial que tenía Juan. Después de cada oración dónde Juan le pedía dinero al Alux, fueron colocando la representación algebraica, al final igualaron a cero la expresión cuadrática y resolvieron la ecuación, encontrado como solución 20, de ahí que colocaron como respuesta a la segunda cuestión \$20. Respecto a la primera cuestión referente al por qué de que se haya quedado sin dinero Juan, argumentaron “se le gastó por ir cambiando”, no dieron una justificación más completa.

Respecto al problema número uno del desarrollo el E5 realizó lo siguiente:

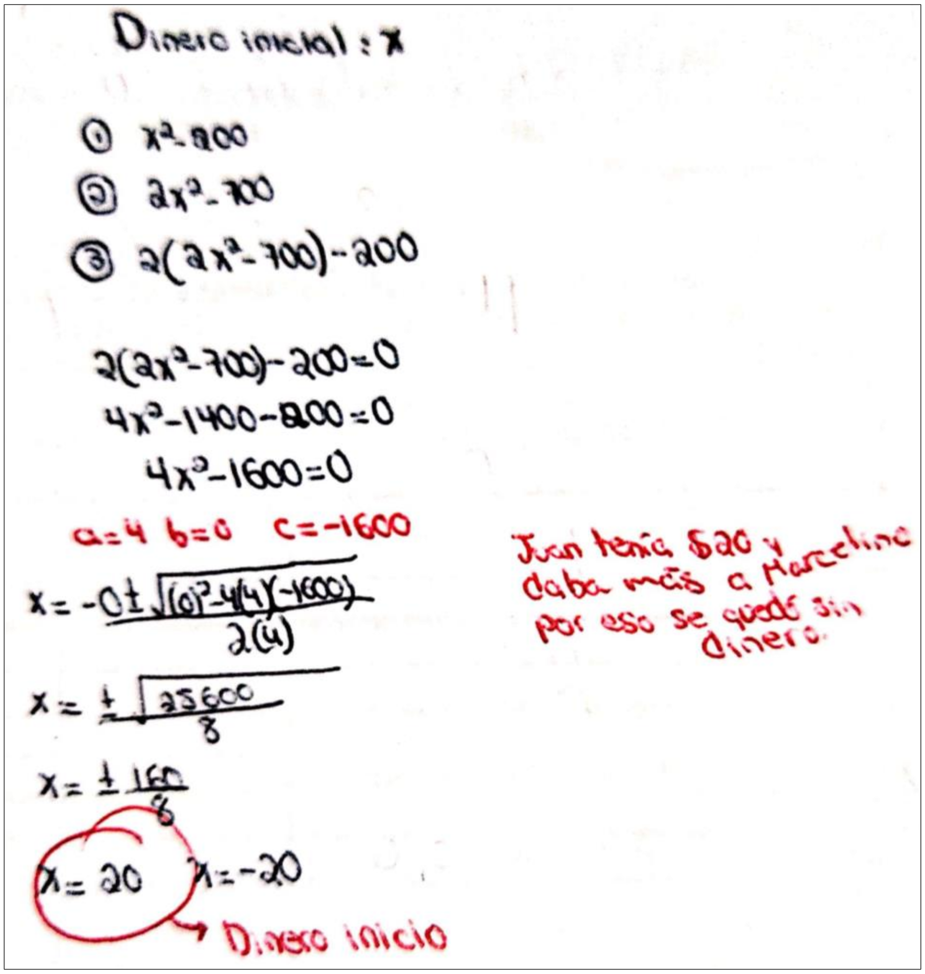
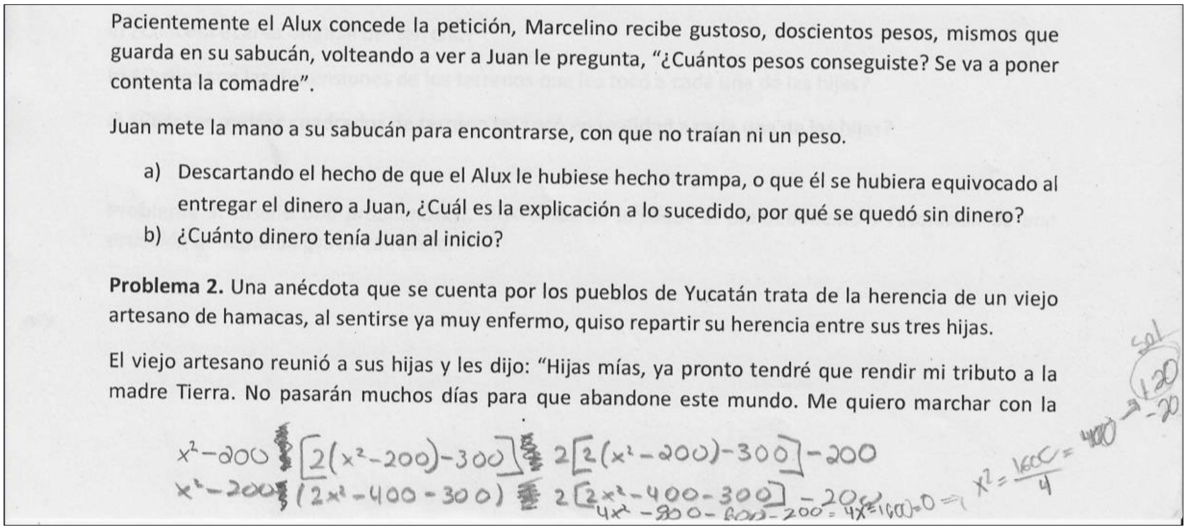


Figura 147. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E5.

El E5 respondió correctamente ambas cuestiones, definieron su incógnita principal como x, la cuál representa el dinero inicial de Juan, cada petición realizada al Alux la definieron algebraicamente, al final plantearon la ecuación cuadrática y fueron simplificando hasta resolver dicha ecuación. Es precio mencionar que a pesar de que la ecuación cuadrática era sencilla para resolver, el equipo optó por emplear la fórmula general (lo cual no es incorrecto, solo que las soluciones a la ecuación cuadrática pudieron ser más directas de encontrar). La justificación principal que dan al que Juan se haya quedado sin dinero es que "daba más a Marcelino por eso se quedó sin dinero".

El E6 realizó lo siguiente respecto al problema uno del desarrollo:


Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, "¿Cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre".

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿Cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?
b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio?

Problema 2. Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Yucatán trata de la herencia de un viejo artesano de hamacas, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir su herencia entre sus tres hijas.

El viejo artesano reunió a sus hijas y les dijo: "Hijas mías, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Me quiero marchar con la

$x^2-200 \quad [2(x^2-200)-300] \quad 2[2(x^2-200)-300]-200$

$x^2-200 \quad (2x^2-400-300) \quad 2[2x^2-400-300]-200$

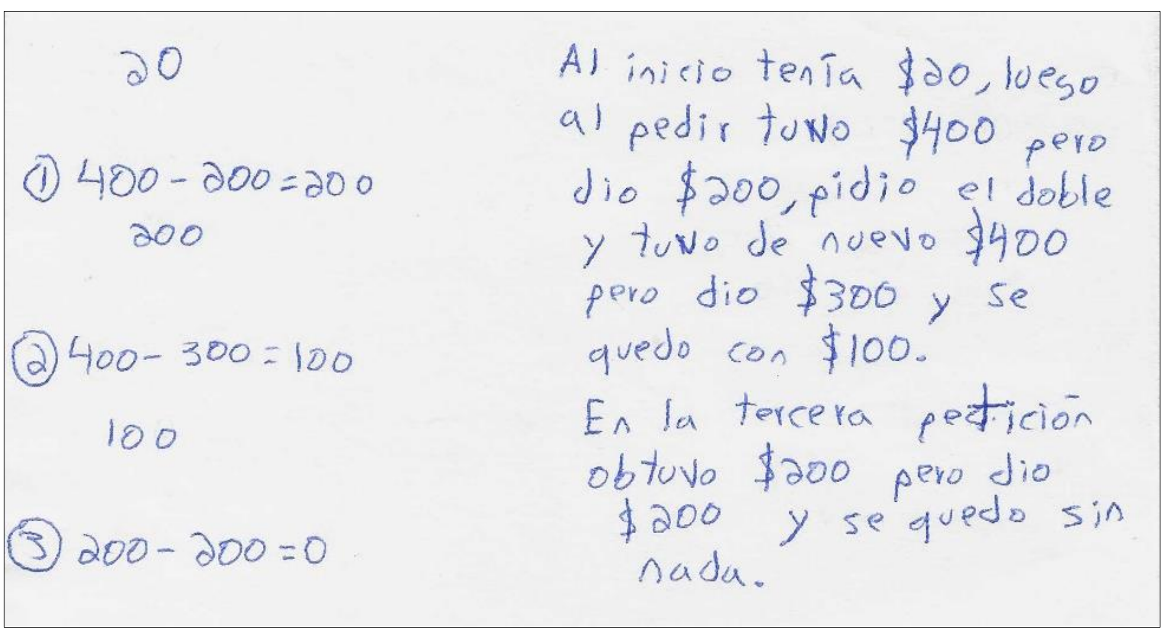
$4x^2-800-600-200=4x^2-1600=0 \Rightarrow x^2=\frac{1600}{4}=400 \to \pm 20$

sol $+20$, -20

Figura 148. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E6.

El E6 solo respondió la segunda cuestión, la que hace referencia al dinero inicial que tenía Juan. Se observa que utilizaron un método algebraico, no se observa la definición de incógnitas, pero se asume que x representa el dinero inicial de Juan. Se intuye que intentaron sumar las expresiones algebraicas que representaban cada una de las peticiones de Juan hacia el Alux, al final evitaron sumarlas y dejaron la expresión final igualada a cero. Resolvieron la ecuación, encontrando dos soluciones, una positiva y otra negativa, encerraron el valor positivo y lo marcaron como "sol", haciendo referencia a la solución. No justificaron el por qué Juan se había quedado sin dinero a pesar de las peticiones.

El E7 realizó lo siguiente respecto al problema uno del desarrollo:


20

1 $400-200=200$

200

2 $400-300=100$

100

3 $200-200=0$

Al inicio tenía \$20, luego al pedir tuvo \$400 pero dio \$200, pidio el doble y tuvo de nuevo \$400 pero dio \$300 y se quedo con \$100.
En la tercera petición obtuvo \$200 pero dio \$200 y se quedo sin nada.

Figura 149. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E7.

El E7 respondió ambas cuestiones planteadas, es preciso mencionar que para la resolución emplearon un procedimiento meramente aritmético. La justificación que dan al por qué Juan se quedó sin dinero es recapitular con el dinero que tenía inicialmente, cada una de las peticiones al Alux y el dinero entregado a Marcelino. Es probable que hayan probado con varios números hasta encontrar el que cumplía ser solución, sin embargo, en su procedimiento no mostraron este análisis con otros números.

El E8 realizó lo siguiente para resolver el problema uno del desarrollo:

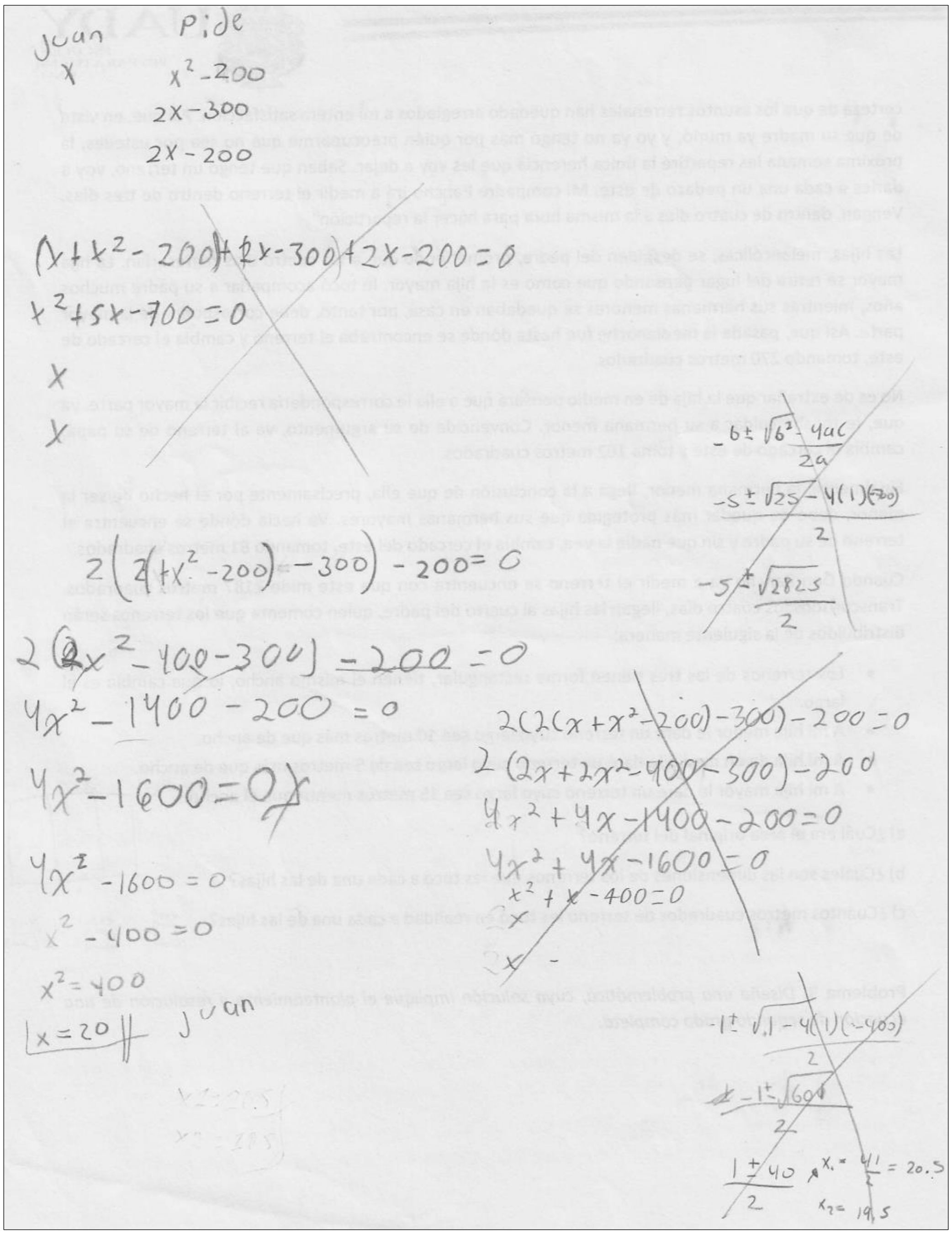


Figura 150. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E8.

El E8 únicamente encontró la cantidad de dinero que tenía Juan al inicio, no dio una justificación del por qué se quedó sin dinero. Se observa que realizaron procedimientos de carácter algebraico, aparentemente realizaron tres procedimientos para encontrar la solución. Marcaron como incorrectos dos de los procedimientos, definieron como x la cantidad inicial de dinero que tenía Juan. Definieron de manera incorrecta las peticiones que Juan realizaba al Alux, fue hasta el tercer procedimiento que llegaron a una ecuación cuadrática que al resolverla brindaba un valor lógico a la situación. Con los otros dos procedimientos habían llegado a soluciones decimales, que seguramente al comprobar no cumplían los requerimientos del problema. Al final encontraron que al inicio Juan tenía $20.

El E9 realizó como procedimiento al problema uno el desarrollo lo siguiente:

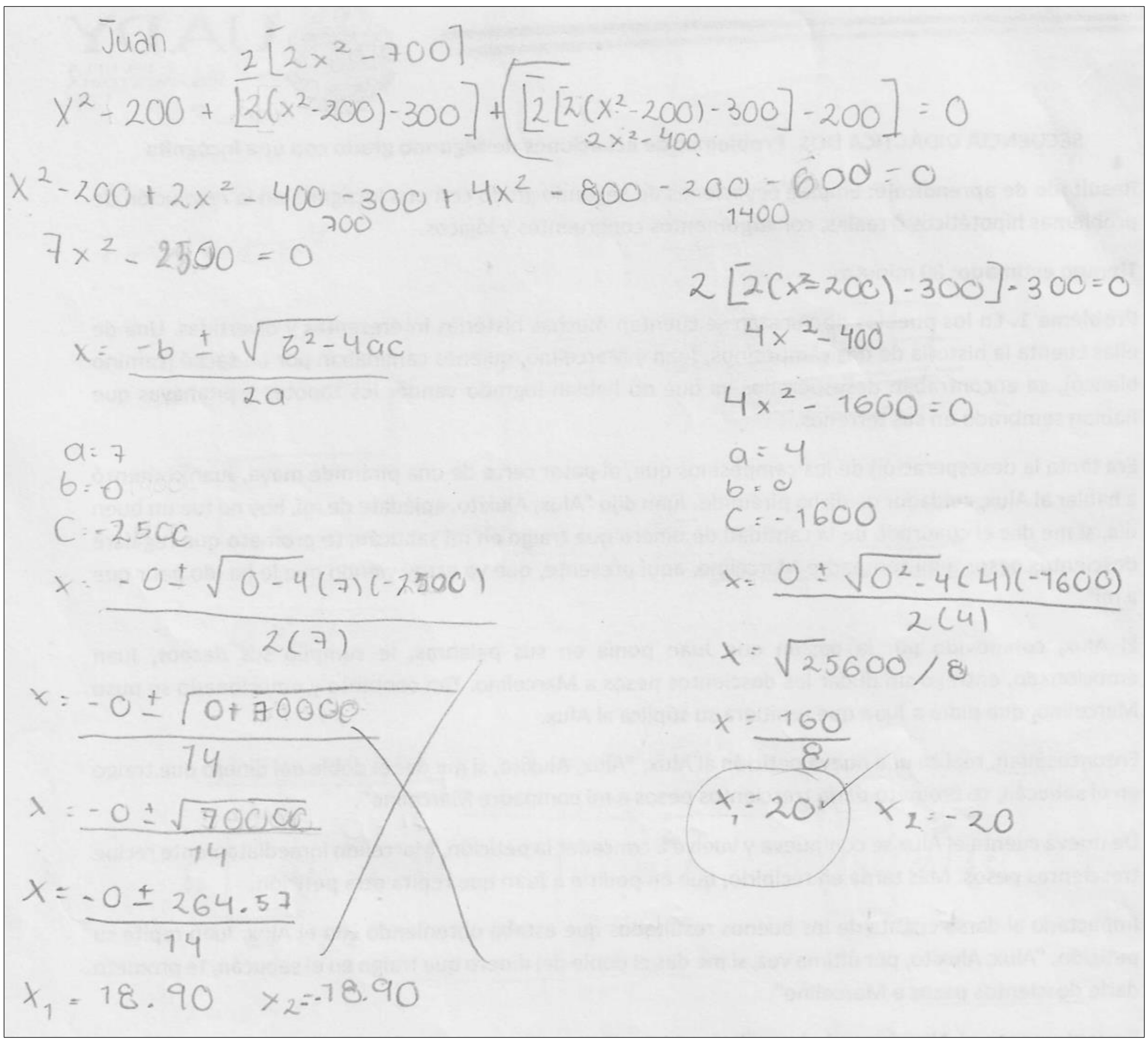


Figura 151. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos), E9.

El E9 encontró la cantidad de dinero inicial que tenía Juan, pero no justificó el por qué se quedó sin dinero a pesar de haber hecho las peticiones al Alux. Se observa que utilizaron un procedimiento algebraico, se observan dos procedimientos, en el primero sumaron las expresiones algebraicas que representaban cada una de las peticiones, plantearon la ecuación y la resolvieron, sin embargo, llegaron a soluciones decimales, las cuales, al comprobar de acuerdo con el contexto de la situación, no cumplían con lo indicado. Al final plantean una nueva ecuación, la cual representa correctamente la situación planteada y la resuelven, obteniendo de esta manera, que la cantidad inicial que tenía Juan era de $20.

Se observa que todos los equipos lograron responder correctamente la segunda pregunta, referente al dinero inicial que tenía Juan, esto representa 100% de los equipos participantes, los equipos E2 y E7 emplearon un procedimiento aritmético para llegar a dicha solución, esto representa 22.22% y los otros siete equipos emplearon estrategias de tipo algebraico para llegar a la solución, representando así 77.78%. Respecto a la justificación del por qué Juan se había quedado sin dinero a pesar de las múltiples peticiones al Alux, únicamente los equipos E1, E2, E3, E4, E5 y E7 brindaron una argumentación para lo ocurrido, representando así 66.66% del total de los equipos, los otros tres equipos no respondieron la pregunta uno.

Ahora, se presentarán los procedimientos realizados por cada uno de los equipos para el problema dos del desarrollo. En el problema dos del desarrollo se solicitaba responder tres preguntas:

- ¿Cuál era el área original del terreno?
- ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?
- ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

Al respecto, el E1 realizó lo siguiente:

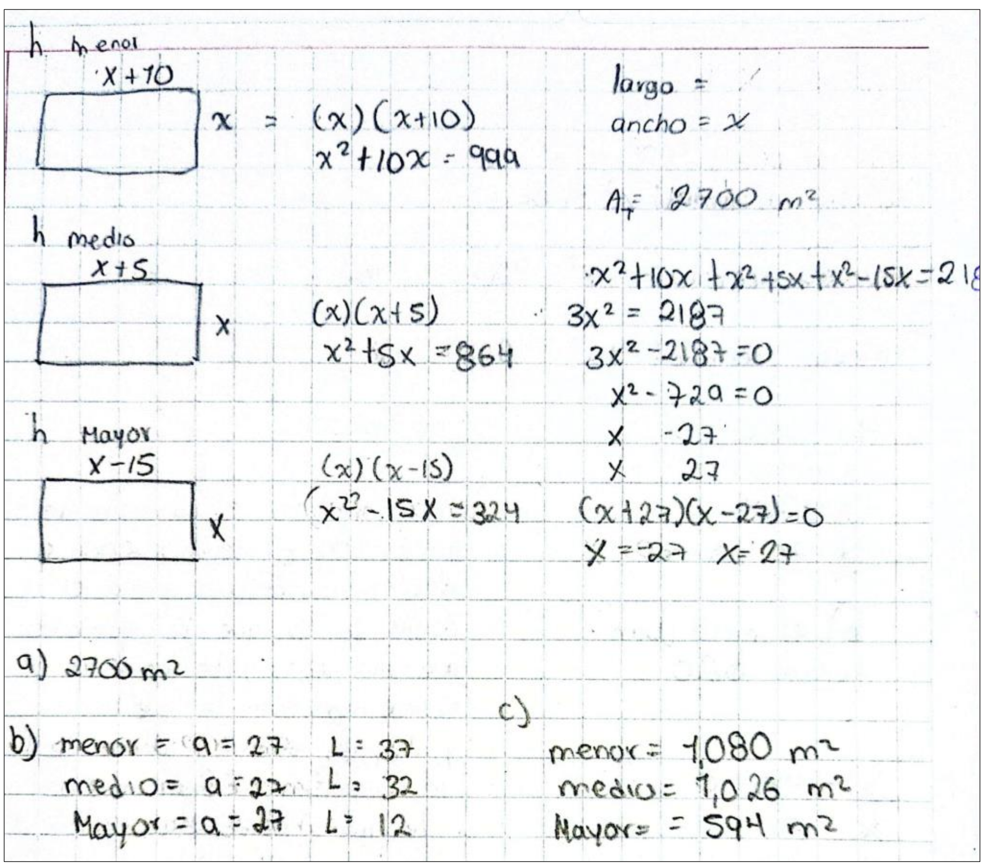
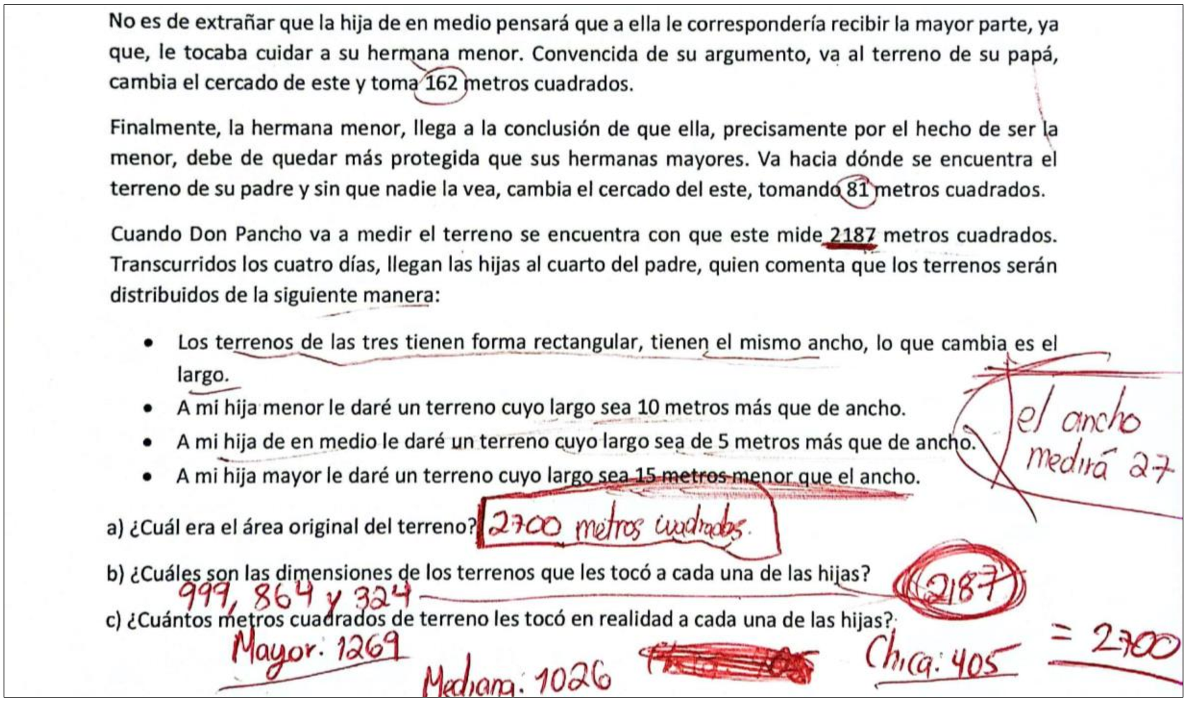


Figura 152. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E1.

Se puede observar que el E1 contestó correctamente las tres preguntas planteadas. El E1 definió su incógnita principal x como “ancho” y con base a esto, fue posible representar las dimensiones de los terrenos de cada una de las hijas. Con esto, lograron plantear la ecuación algebraica, la resuelven (por la lógica del contexto solo consideran como solución el valor positivo) y una vez teniendo la medida del ancho, pudieron responder cada una de las cuestiones solicitadas.

Respecto al problema número uno del desarrollo el E2 realizó lo siguiente:


No es de extrañar que la hija de en medio pensará que a ella le correspondería recibir la mayor parte, ya que, le tocaba cuidar a su hermana menor. Convencida de su argumento, va al terreno de su papá, cambia el cercado de este y toma 162 metros cuadrados.

Finalmente, la hermana menor, llega a la conclusión de que ella, precisamente por el hecho de ser la menor, debe de quedar más protegida que sus hermanas mayores. Va hacia dónde se encuentra el terreno de su padre y sin que nadie la vea, cambia el cercado del este, tomando 81 metros cuadrados.

Cuando Don Pancho va a medir el terreno se encuentra con que este mide 2187 metros cuadrados. Transcurridos los cuatro días, llegan las hijas al cuarto del padre, quien comenta que los terrenos serán distribuidos de la siguiente manera:

- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo ancho, lo que cambia es el largo.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo largo sea 10 metros más que de ancho.
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo largo sea de 5 metros más que de ancho.
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo largo sea 15 metros menor que el ancho.

el ancho medirá 27

a) ¿Cuál era el área original del terreno? 2700 metros cuadrados.

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas? 2187

999, 864 y 324

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

Mayor: 1269 Mediana: 1026 Chica: 405 = 2700

Figura 153. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E2.

Se puede observar que el E2 contestó las tres preguntas solicitadas, como se mencionó al analizar la resolución del problema uno del desarrollo, este equipo para resolver los problemas probaba con diversos valores, su procedimiento fue de carácter aritmético, sin embargo, no anexaron el procedimiento que hicieron, con las diversas pruebas que realizaron.

El E2 logró responder correctamente la pregunta uno. Al responder la pregunta dos, no brindan las dimensiones solicitadas, es decir, el largo y ancho del terreno brindado a cada una de las hijas, sin embargo, se observa que encontraron la medida del ancho del terreno, la cual es de 27 metros. Como respuesta a la pregunta dos, brindan el área que se le otorgó a cada hija. Claro que, para dar esta área, era necesario conocer cuáles son las medidas de cada terreno, por lo cual, se deduce que las encontraron pero no las colocaron de manera explícita. De igual manera se observa que las medidas de área que recibió la hija mayor y la menor están al revés.

En la pregunta tres, brindan el área del terreno que recibió cada una de las hijas, sin embargo, solo determinan de manera correcta el área de terreno que recibe la hija de en medio. El de la hija mayor y el de la hija menor, son incorrectas, esto se debe al error que cometieron en la solución de la pregunta dos.

Respecto al problema dos del desarrollo el E3 realizó lo siguiente:

Se puede observar que el E3 contestó las tres preguntas planteadas. El E3 definió su incógnita principal x como “área original del terreno” y con base a esto, fue restando el área que cada hija ya había tomado previamente, con esto, plantea la ecuación que le permite determinar el área original del terreno.

Para responder la segunda pregunta, define nuevamente x como “ancho del terreno”, con esto fue posible representar las dimensiones de los terrenos de cada una de las hijas. Es preciso mencionar que cuando definen algebraicamente las dimensiones de los terrenos de cada una de las hijas, invierten el de la hija mayor con el de la menor. A pesar del error anterior, lograron plantear la ecuación algebraica, la resuelven y encuentran la medida del ancho, sin embargo, solo las dimensiones del terreno de la hija de en medio son correctas, las dimensiones de los terrenos de las hijas mayor y menor se encuentran invertidas. Con el error anterior, al contestar la pregunta tres, solo responden correctamente la medida de área que recibió la hija de en medio.

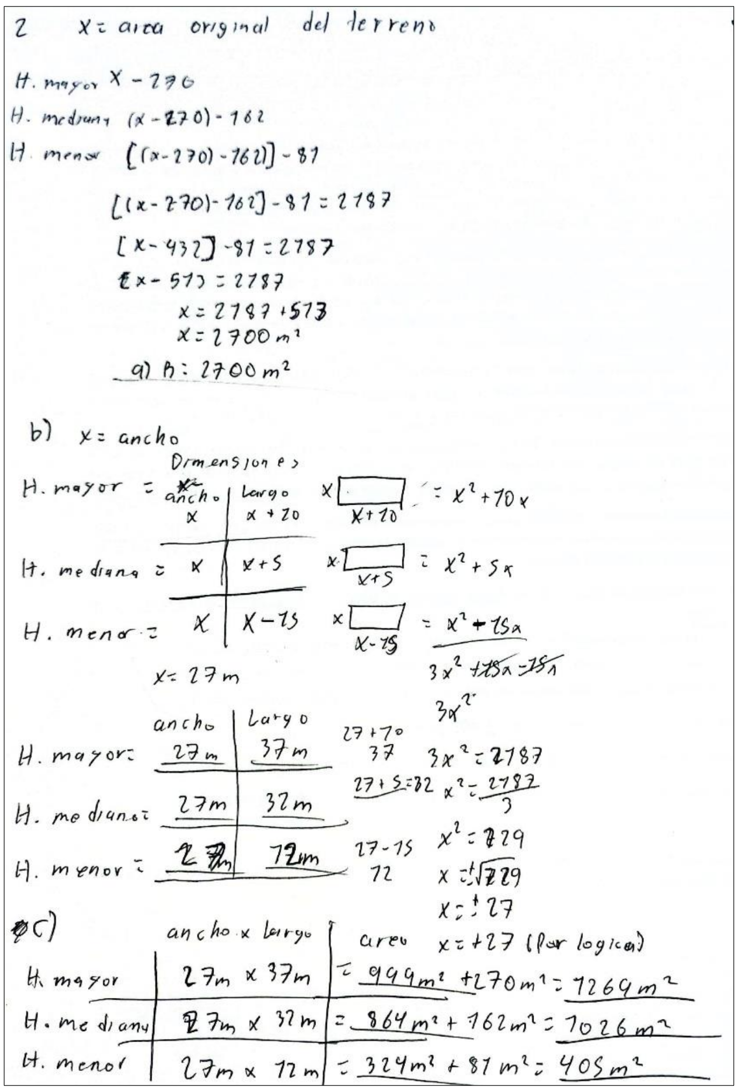


Figura 154. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E3.

El E4 realizó lo siguiente respecto al problema número dos del desarrollo:

PREPARATORIA UNO

BxA

certeza de que los asuntos terrenales han quedado arreglados a mi entera satisfacción. Así que, en vista de que su madre ya murió, y yo ya no tengo más por quién preocuparme que no sea por ustedes, la próxima semana les repartiré la única herencia que les voy a dejar. Saben que tengo un terreno, voy a darles a cada una un pedazo de este. Mi compadre Pancho irá a medir el terreno dentro de tres días. Vengan, dentro de cuatro días a la misma hora para hacer la repartición".

Las hijas, melancólicas, se despiden del padre, prometiendo que a los cuatro días regresarían. La hija mayor se retira del lugar pensando que como es la hija mayor, le tocó acompañar a su padre muchos años, mientras sus hermanas menores se quedaban en casa, por tanto, debe corresponderle la mayor parte. Así que, pasada la medianoche fue hasta dónde se encontraba el terreno y cambia el cercado de este, tomando 270 metros cuadrados. 270m²

No es de extrañar que la hija de en medio pensará que a ella le correspondería recibir la mayor parte, ya que, le tocaba cuidar a su hermana menor. Convencida de su argumento, va al terreno de su papá, cambia el cercado de este y toma 162 metros cuadrados.

162 m²

Finalmente, la hermana menor, llega a la conclusión de que ella, precisamente por el hecho de ser la menor, debe de quedar más protegida que sus hermanas mayores. Va hacia dónde se encuentra el terreno de su padre y sin que nadie la vea, cambia el cercado del este, tomando 81 metros cuadrados. 81 m²

Cuando Don Pancho va a medir el terreno se encuentra con que este mide 2187 metros cuadrados. Transcurridos los cuatro días, llegan las hijas al cuarto del padre, quien comenta que los terrenos serán distribuidos de la siguiente manera:

- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo ancho, lo que cambia es el largo.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo largo sea 10 metros más que de ancho. $x \cdot x+10$
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo largo sea de 5 metros más que de ancho. $x \cdot x+5$
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo largo sea 15 metros menor que el ancho. $x \cdot x+15$

a) ¿Cuál era el área original del terreno? 2700 $x \cdot x+10 + x \cdot x+5 + x \cdot x+15 = 2187$

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?

999, 864 y 324

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

A la mayor 1269m² mediana 1026m² y la chica 405m²

Figura 155. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E4.

Como tal no se observa que hallan definido explícitamente lo que representa la incógnita x, sin embargo, por lo que escriben se deduce que la incógnita x representa la medida del ancho del terreno. Algebraicamente definen las dimensiones de los terrenos de cada hija, las van sumando y forman una ecuación, igualando a 2187, sin embargo, el proceso de solución de la ecuación no se aprecia. Responden correctamente la primera pregunta.

Respecto a la pregunta dos, la responden, pero no brindan las dimensiones de cada terreno, lo que brindan es el área que le corresponde a cada hija. Aquí se observa que invirtieron las medidas del área que le corresponden a la hija mayor y a la menor, esto afectó en la solución de la pregunta tres, para la cual solo el área de terreno que le corresponde a la hija de en medio es correcta.

Las aportaciones del E5 en cuánto al problema dos del desarrollo son las siguientes:

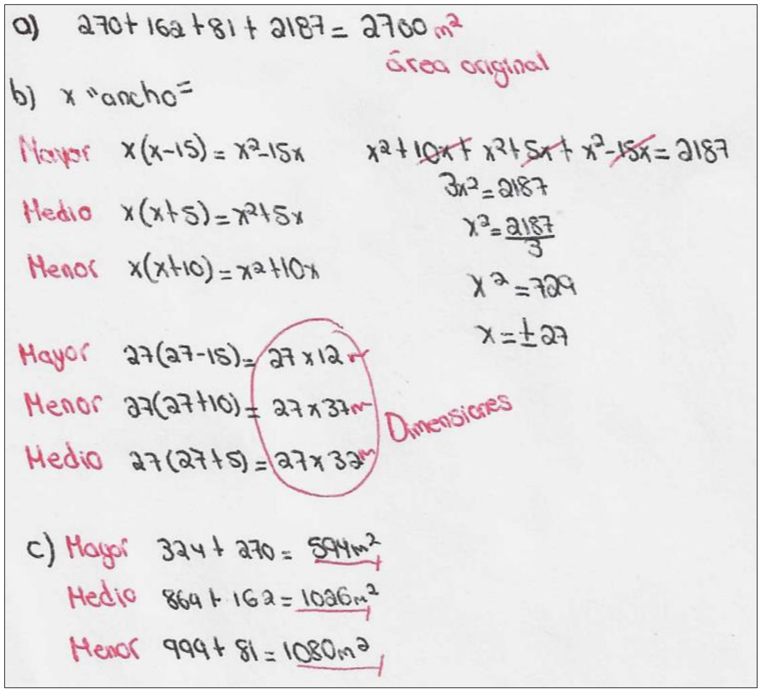


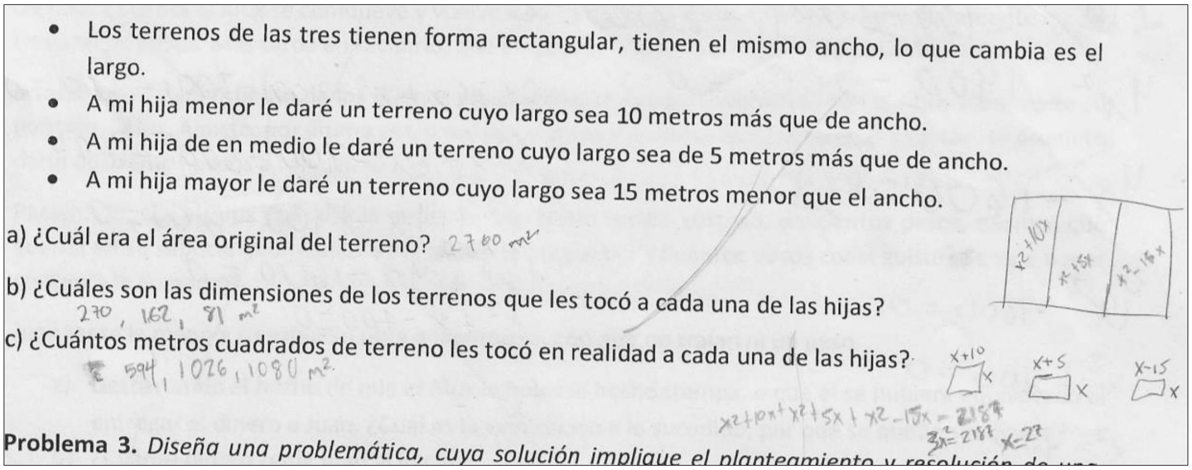
Figura 156. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E5.

El E5 respondió las tres cuestiones planteadas, utilizaron un procedimiento de tipo algebraico en su mayoría. Para responder la primera cuestión sumaron las áreas que cada una de las hijas tomó previamente, lo sumaron con los $2187\ m^2$ que Don Pancho contó cuando midió el terreno y obtuvieron la respuesta correcta.

Para la segunda pregunta, definieron la incógnita x como el ancho, haciendo referencia al ancho del terreno. Con esto, definieron de manera algebraica cada una de las dimensiones de los terrenos, plantean una ecuación y encuentran el ancho del terreno. Se observa que al resolver la ecuación cuadrática consideran la solución positiva y la negativa, sin embargo, cuando se tienen que expresar las dimensiones de cada terreno, únicamente consideran como solución el valor positivo. Las dimensiones son correctas.

Teniendo como antecedente las respuestas del inciso b), determinan el área de cada terreno y a esto, suman el área que previamente cada hija había tomado, por lo cual, expresan de manera correcta, el área que realmente le tocó a cada hija.

El E6 realizó lo siguiente respecto al problema dos del desarrollo:



- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo ancho, lo que cambia es el largo.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo largo sea 10 metros más que de ancho.
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo largo sea de 5 metros más que de ancho.
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo largo sea 15 metros menor que el ancho.

a) ¿Cuál era el área original del terreno? 2700 m^2

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?
270, 162, 81 m^2

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?
594, 1026, 1080 m^2

x^2+10x x^2+5x x^2-15x

$x+10$ x $x+5$ x $x-15$ x

$x^2+10x+x^2+5x+x^2-15x = 2187$

$3x^2 = 2187$

$x = 27$

Problema 3. *Diseña una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resolución de una*

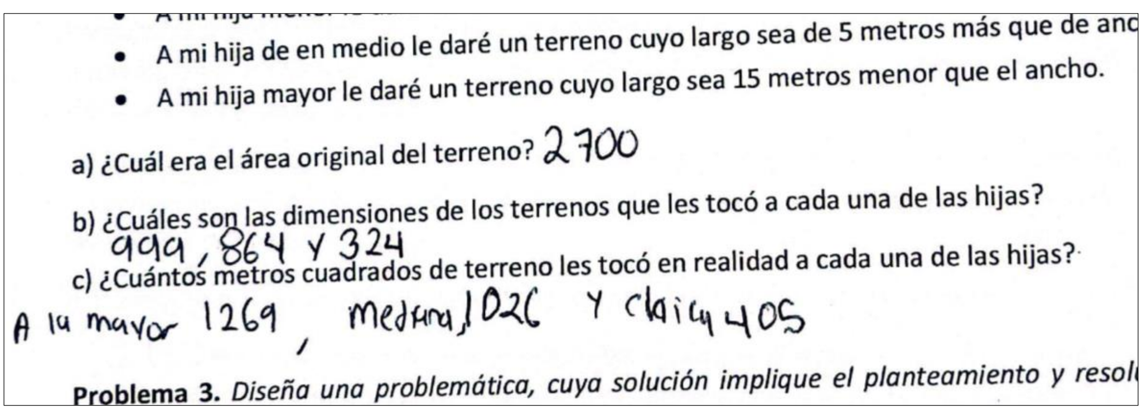
Figura 157. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E6.

Respondieron las tres preguntas planteadas, utilizaron un procedimiento que se inclina más por lo algebraico, sin embargo, en la solución del problema no se encuentra explícitamente que representa la incógnita x en el problema (se deduce que representa la medida del ancho del terreno). Para la primera pregunta no se observa el procedimiento, pero si la respuesta correcta. Hay que recordar que esta pregunta se podría contestar realizando una operación aritmética, en este caso, una suma.

Para responder la pregunta dos se observa que definen correctamente las dimensiones de los terrenos que corresponden a cada una de las hijas, se auxilian de una representación geométrica para la comprensión de lo que se solicita en ese inciso. Plantean una ecuación cuadrática, la resuelven y se observa que consideran como solución únicamente al valor positivo. Al momento de dar la respuesta a la pregunta dos, no responden lo que se indica, en este caso las dimensiones, lo que dan como respuesta es el área que le corresponde a cada hija, sin embargo, para dar el área, debieron conocer las dimensiones.

El E6 respondió correctamente la pregunta tres, brindando como solución el área que en realidad le tocó a cada una de las hijas, para responder esto, tomaron los datos que ya habían determinado previamente en la cuestión dos.

Respecto al problema dos del desarrollo el E7 realizó lo siguiente:



- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo largo sea de 5 metros más que de anc
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo largo sea 15 metros menor que el ancho.

a) ¿Cuál era el área original del terreno? 2700

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?
999, 864 y 324

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?
A la mayor 1269, mediana 1026 y chica 405

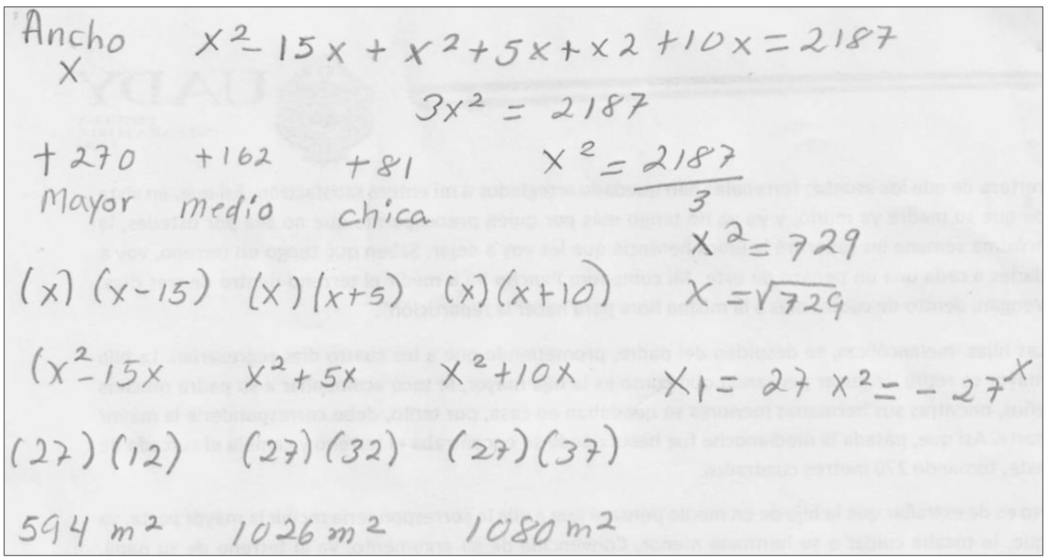
Problema 3. *Diseña una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resol*

Figura 158. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E7.

Este equipo respondió las tres preguntas solicitadas, sin embargo, de estas solo la primera es correcta y las otras dos, no fueron correctas en su totalidad. El E7 utilizó un procedimiento de tipo aritmético, probando valores que cumplieran con lo establecido. Se observa que al igual como pasó con otros equipos, determinan correctamente la respuesta a la pregunta uno, pero para la pregunta dos, invierten las áreas correspondientes a los terrenos de las hijas mayor y menor. Aunado a esto, no dan las dimensiones solicitadas, es decir, el largo y al ancho.

Este error afecta el resultado de la tercera pregunta, en la cual, solo el área que tocó en realidad a la hija de en medio es correcta.

El E8 realizó lo siguiente respecto al problema número dos del desarrollo:



Ancho x

$x^2 - 15x + x^2 + 5x + x2 + 10x = 2187$

$3x^2 = 2187$

$x^2 = \frac{2187}{3}$

$x^2 = 729$

$x = \sqrt{729}$

$x_1 = 27 \quad x_2 = -27$

Mayor	medio	chica
$+270$	$+162$	$+81$
$(x)(x-15)$	$(x)(x+5)$	$(x)(x+10)$
$x^2 - 15x$	$x^2 + 5x$	$x^2 + 10x$
$(27)(12)$	$(27)(32)$	$(27)(37)$
$594\ m^2$	$1026\ m^2$	$1080\ m^2$

Figura 159. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E8.

La solución que brinda este equipo es de tipo algebraica, se observa que definen la medida del ancho como x. Plantean una ecuación cuadrática y encuentran que el valor del ancho del terreno es de 27 metros. Con esto, determinan las dimensiones de cada uno de los tres terrenos, las dimensiones son correctas, posteriormente para determinar el área que realmente le correspondió a cada hija, suman las medidas de las áreas que había tomado cada una de manera previa.

Lo que no se observa en la solución es la medida original del terreno, aunque con la respuesta de la pregunta tres, al sumar estas medidas, se llegaba al área original del terreno, sin embargo, esto no es explícito.

Las aportaciones del E9 en cuánto al problema dos del desarrollo son las siguientes:

El E9 respondió las tres cuestiones solicitadas. Para responder la pregunta uno se observa que realizan una suma de las áreas de los terrenos que cada hija había ya tomado y el área que Don Pancho obtuvo al medir todo el terreno, la solución a la que llegan es correcta. Para responder a la pregunta dos, se observa que plantean una ecuación cuadrática, dónde si bien no externan que representa a, se deduce que representa la medida del ancho del terreno.

Encuentran la medida del ancho del terreno y con ayuda de representaciones geométricas se observa que encuentran las dimensiones de cada terreno. Por lo cual, responden correctamente la pregunta dos.

La pregunta tres la responden de manera correcta, en los procedimientos que realizan en la parte trasera de la hoja de trabajo no se observa que coloquen la solución, sin embargo, en la parte de frente, al colocar sus respuestas finales, se aprecia que respondieron correctamente esta pregunta.

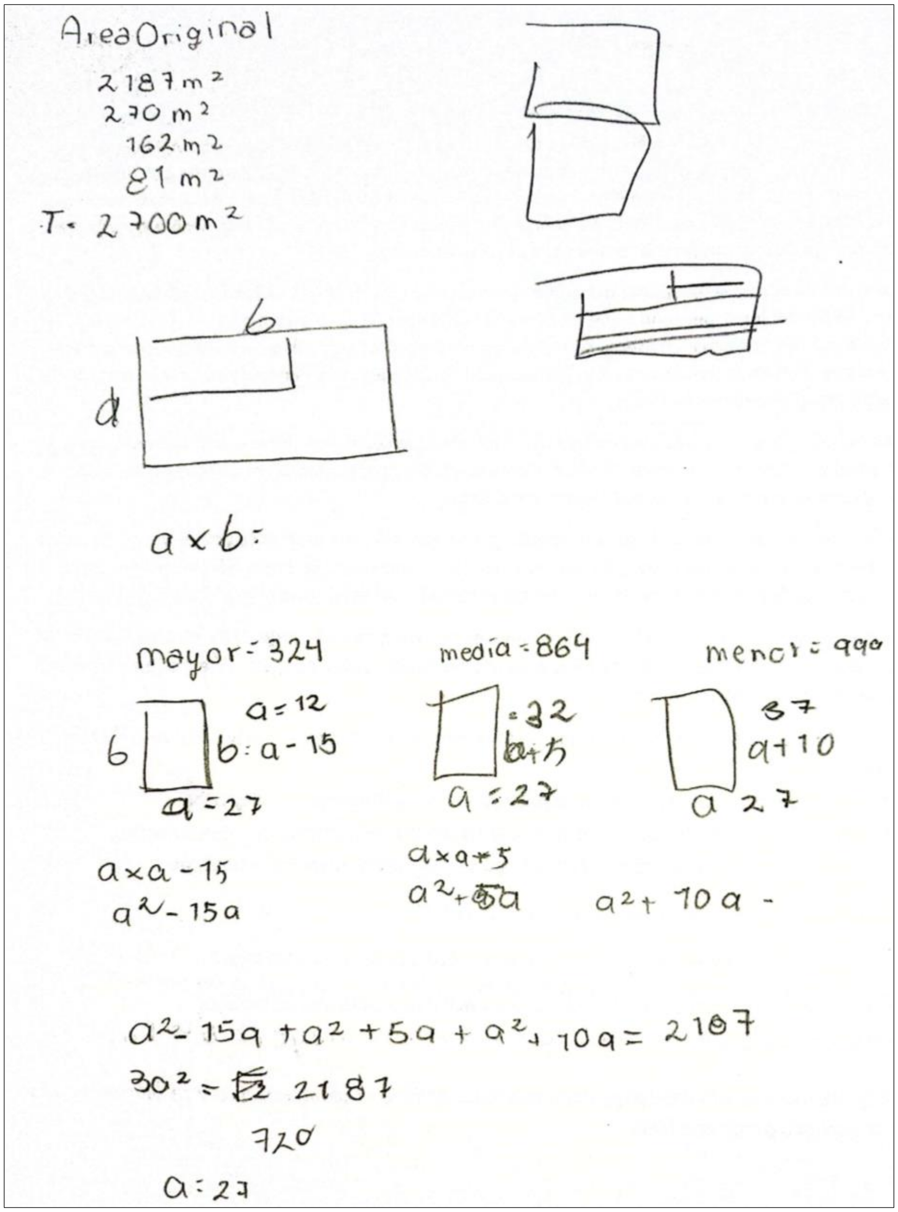
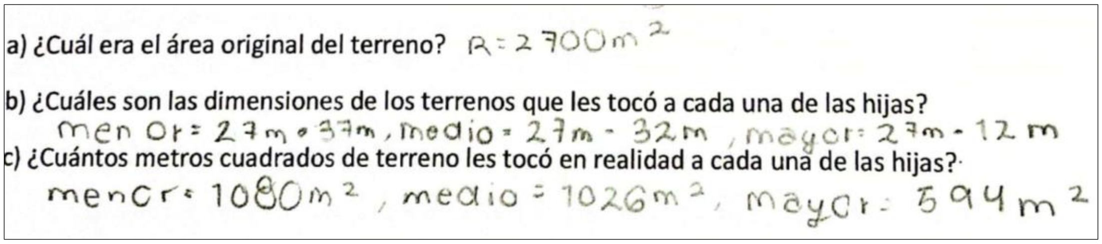


Figura 160. Parte uno de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E9.



a) ¿Cuál era el área original del terreno? R= 2700m²

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?

menor= 27m · 37m, medio= 27m - 32m, mayor= 27m - 12m

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

menor= 1080m², medio = 1026m², mayor= 594m²

Figura 161. Parte dos de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos), E9.

Se observa que todos los equipos respondieron el problema dos del desarrollo, el cual estuvo dividido en tres preguntas. De los nueve equipos, siete equipos emplearon un procedimiento algebraico (esto representa 77.77%) y dos equipos un procedimiento de tipo aritmético (esto representa 22.22%). La primera pregunta, referente a cuál era la medida del terreno original fue respondida correctamente por ocho equipos, esto representa 88.88%, solo el E8 no lo expresó explícitamente, sin embargo, tuvo que haberlo encontrado pues se relaciona con la solución de las otras dos cuestiones.

Respecto a la pregunta dos, la cual cuestionaba las dimensiones de los terrenos que cada hija recibió, cuatro equipos respondieron lo esperado, esto representa 44.44%. Un equipo (representa 11.11%) en lugar de brindar las medidas de cada terreno, brindó el área de estos, sin embargo, para encontrar estas áreas era necesario conocer las dimensiones de cada terreno. Los otros cuatro equipos restantes, lo cual representa 44.44% invirtieron las áreas de los terrenos correspondientes a las hijas mayor y menor, aunado a esto, brindaban las áreas no las dimensiones de los terrenos. Solo el área del terreno que le corresponde a la hija de en medio fue correcta.

Para la pregunta tres, referente a las áreas que en realidad le tocaron a cada una de las hijas, cinco equipos respondieron correctamente, es decir, 55.55%. Los otros cuatro equipos 44.44% solo coincidieron con el área real que le correspondió a la hija de en medio, ya que, el invertir las áreas desde la pregunta dos afectó al resultado de la última cuestión.

En general, fueron cuatro equipos (44.44%) que respondieron correctamente las tres cuestiones que planteaba el problema dos, es preciso mencionar que, de estos cuatro equipos, tres de ellos realizaron una representación geométrica de la situación, esto, en combinación con el planteamiento algebraico les permitió llegar a las respuestas esperadas.

En ese sentido, se observa una coincidencia en la cantidad de equipos que utilizaron un procedimiento aritmético y uno algebraico en la resolución del problema uno y dos del desarrollo. Durante el desarrollo de la sesión se estuvo recorriendo el aula, pasando con cada equipo de trabajo, preguntando si existía alguna duda o pregunta, hubo más dudas para la solución del problema uno que para el problema dos, sin embargo, una mayor cantidad de equipos llegó a las respuestas esperadas en el problema uno. Para el problema uno, la mayoría de las dudas estuvieron en torno a las múltiples peticiones que se habían realizado y para el problema dos, cuestiones de si la interpretación del problema era correcta, de acuerdo con lo que habían leído.

Al término del tiempo destinado para la resolución de los ejercicios se realizó la retroalimentación de los dos problemas del desarrollo, para ello se proyectó la pizarra digital y ahí escuchando las aportaciones de cada equipo se fue realizando de manera sincrónica la resolución de cada ejercicio. Se presenta a continuación la resolución completa de cada problema.

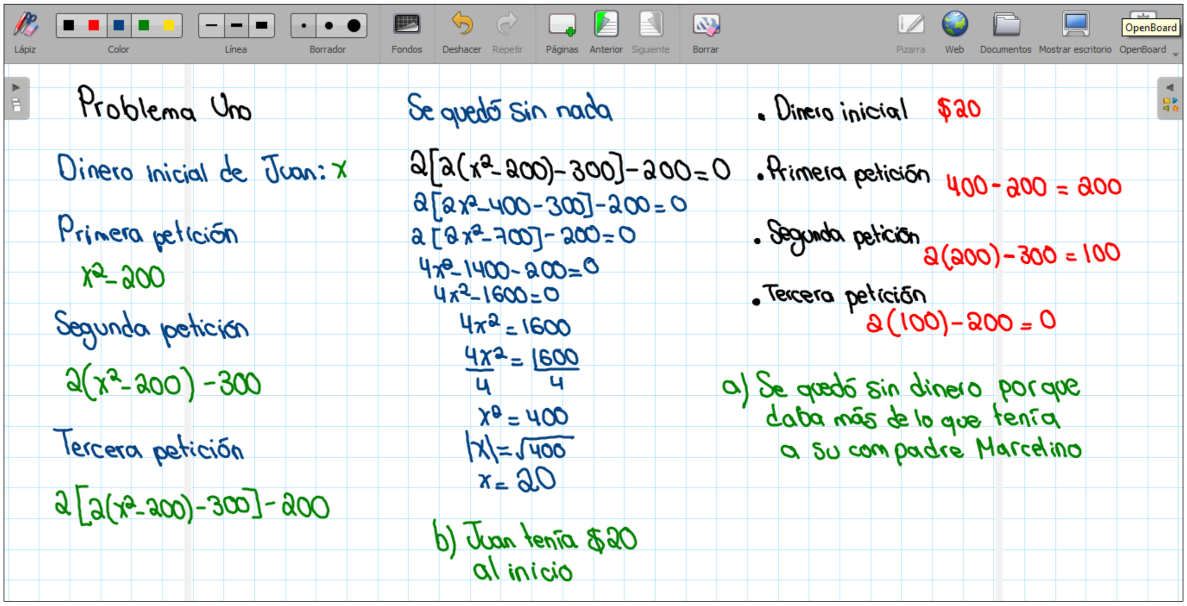


Figura 162. Retroalimentación del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica dos).

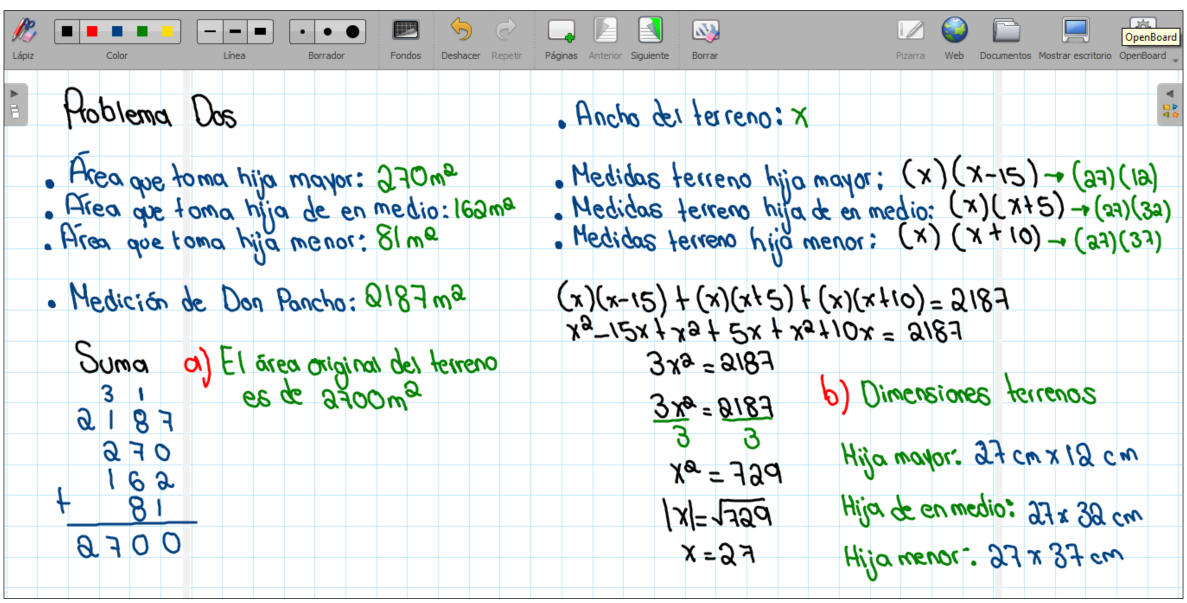


Figura 163. Parte uno de la retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos).

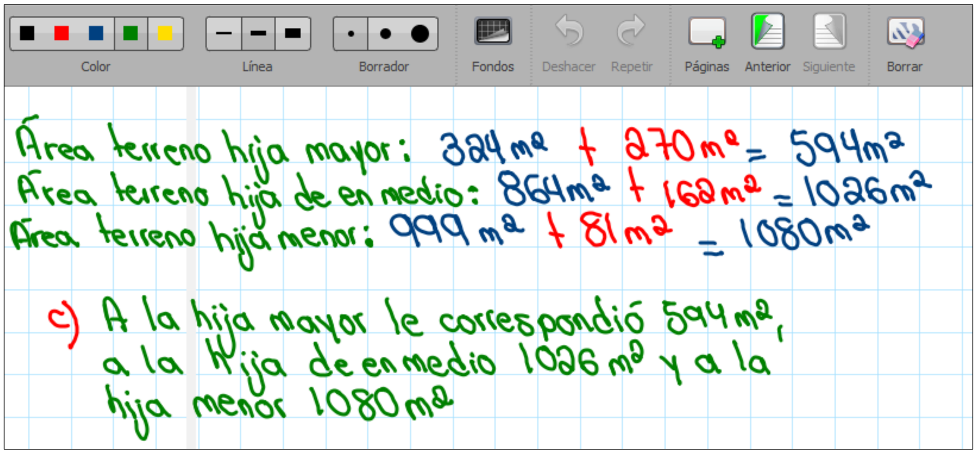


Figura 164. Parte dos de la retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica dos).

Al término de la retroalimentación se procedió a continuar con la actividad de cierre, la cual consistió en el diseño de una problemática, cuya solución implicó el planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado completa. La modalidad de resolución fue de manera individual.

Fueron 37 alumnos que debían resolver de manera individual dicho problema. De los 37 alumnos, 26 alumnos lograron plantear correctamente una situación problemática que propiciaba el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática. Durante el planteamiento de la problemática de cierre los alumnos no recibieron alguna ayuda de parte del docente.

En general, las problemáticas planteadas por los alumnos se pueden agrupar en cuatro apartados, a saber, áreas, edades, números y problemas variados. De los 26 alumnos, 10 plantearon problemáticas relacionadas con áreas, 8 alumnos relativas a edades, 6 alumnos relacionados con números y 2 alumnos realizaron problemáticas variadas.

Se presentan a continuación cinco de las problemáticas planteadas, uno de áreas, uno de edades, uno de números y los dos de problemas variados.

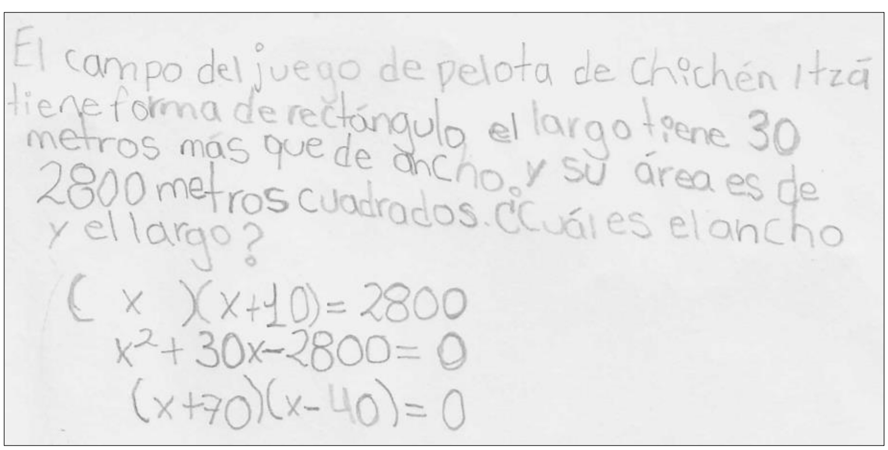
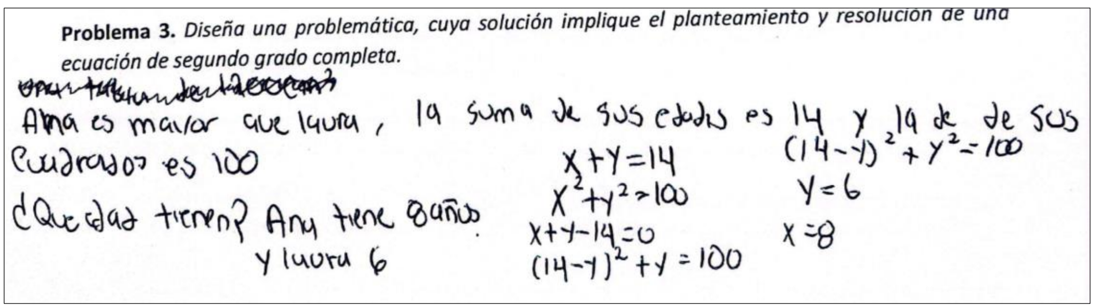


Figura 165. Problemática planteada relativa a áreas (secuencia didáctica dos).

Los 10 alumnos que plantearon problemáticas relativas a áreas se basaron en encontrar las medidas de los lados de una figura rectangular, algunos le pusieron contexto, como en el ejemplo de la figura 165 y otros solo mencionan que "se tiene un rectángulo cuyo largo es el…". En el ejemplo que se presenta se observa que el alumno planteó la ecuación cuadrática que representa el problema, factoriza, pero no interpreta los resultados de acuerdo con el contexto del problema. Asimismo, se observa que no define qué representa la incógnita x, sin embargo, se asume que es la medida del ancho, de igual manera, se observa que cuando plantea la ecuación hay un error, ya que, coloca $(x)(x+10)=2800$ cuando lo correcto era colocar $(x)(x+30)=2800$. Posteriormente si coloca la ecuación correcta, tal vez el error lo realizó de manera inconsciente.

Respecto a los 8 alumnos que plantearon problemáticas relacionadas con edades se presenta el ejemplo de la figura 166, en general, estos problemas se basaban en las edades de dos personas, se daban algunos datos que implicaban el trabajo con los cuadrados de las edades y al final, se solicitaba encontrar las edades de estas dos personas. En el ejemplo presentado se observa que no se realiza la definición de incógnitas, al principio trabajan con dos incógnitas, para posteriormente plantear la ecuación cuadrática en términos de una sola incógnita. Se resuelve la ecuación cuadrática y también se interpretan los resultados de acuerdo con el contexto del problema.


Problema 3. *Diseña una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado completa.*

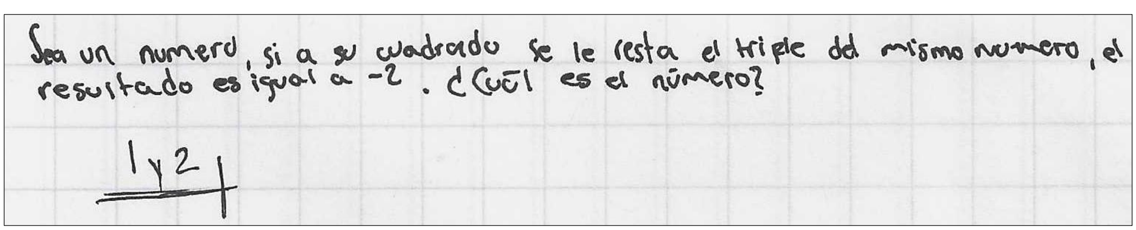
Ana es mayor que laura, la suma de sus edades es 14 y la de de sus cuadrados es 100

¿Que edad tienen? Ana tiene 8 años y laura 6

$x+y=14$
$x^2+y^2=100$
$x+y-14=0$
$(14-y)^2+y=100$
$(14-y)^2+y^2=100$
$y=6$
$x=8$

Figura 166. Problemática planteada relativa a edades (secuencia didáctica dos).

Para las problemáticas relativas a números, 6 fueron los alumnos que plantearon este tipo de problemáticas. Básicamente mencionaban que se tenía cierto número y que al elevarlo al cuadrado y ya sea sumarle o restarle el mismo número, se obtenía cierto número. Se presenta como ejemplo la figura 167, dónde el alumno presenta los resultados que cumplen ser solución de la ecuación, sin embargo, no plantea la ecuación cuadrática. De acuerdo con el problema, si consideramos que y representa al número que se quiere encontrar, la ecuación cuadrática quedaría planteada de la siguiente manera $y^2-3y=-2$, si se resuelve efectivamente los números 1 y 2 cumplen ser solución.


Sea un numero, si a su cuadrado se le resta el triple del mismo numero, el resultado es igual a -2. ¿Cuál es el número?

1 y 2

Figura 167. Problemática planteada relativa a números (secuencia didáctica dos).

Dos alumnos de todo el grupo participante realizaron el planteamiento de dos problemas que se consideran variados, los cuales se pueden observar en las figuras 168 y 169. El alumno de la figura 168 planteó un problema que implicaba el manejo de una ecuación cuadrática para encontrar las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Para plantear dicha ecuación, se utilizó el Teorema de Pitágoras, el alumno realiza la representación de un triángulo rectángulo y ahí coloca los datos x, $x+1$ y $x+2$, sin embargo, no define qué representa x, se interpreta con ayuda del triángulo que representa la medida de la hipotenusa, se resuelve la ecuación y se construye un triángulo (el cuál no parece rectángulo) donde coloca las medidas encontradas para los lados de éste. Este problema resulta interesante, ya que, se observa que el alumno hace uso de más herramientas matemáticas para plantear la ecuación cuadrática.

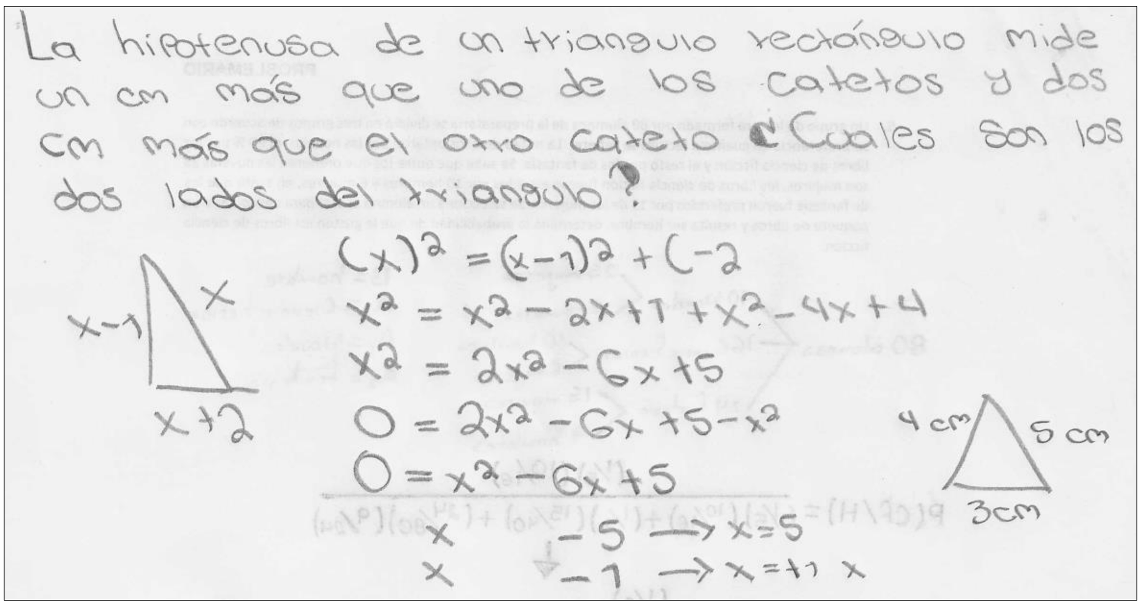
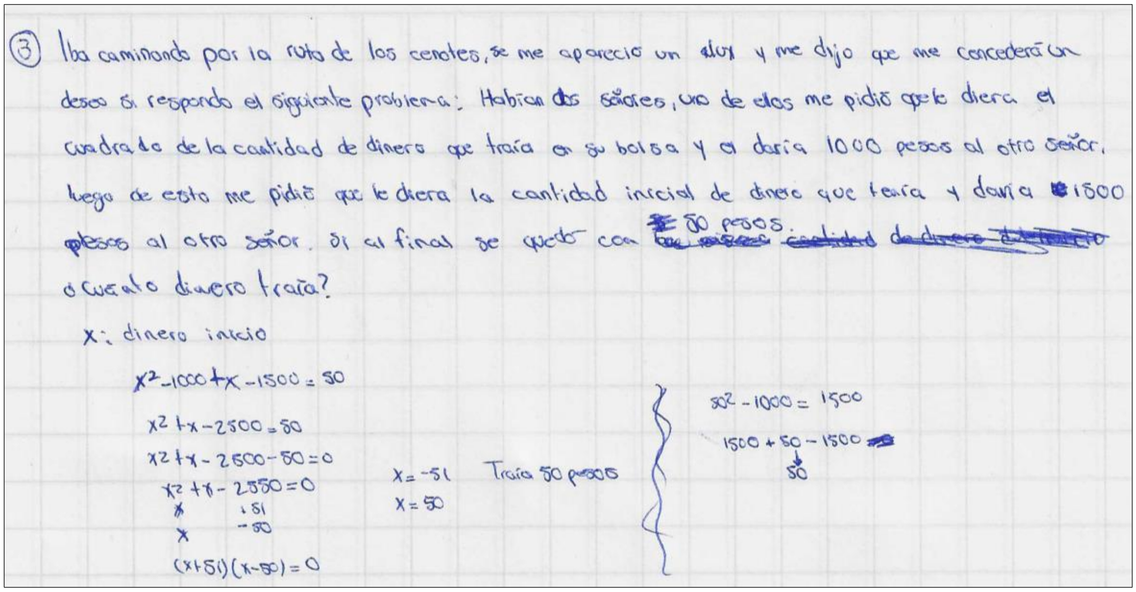


Figura 168. Primera problemática variada (secuencia didáctica dos).

El alumno de la figura 169 planteó una situación similar al contexto que se les planteó en el problema dos del desarrollo, menciona a un Alux y también una serie de peticiones que se le realiza. En este caso, el alumno define que x representa el dinero inicial que tenía esta persona, plantea la ecuación cuadrática de acuerdo con las dos peticiones que se realizan, resuelve la ecuación empleando la factorización y también interpreta de manera verbal la cantidad de dinero que tenía esta persona al inicio, en este caso, $50 pesos.

Se observa que el alumno comprueba que este valor realmente es solución del problema, ya que aritméticamente realiza las peticiones realizadas, para encontrar que al final la persona se quedó con $50 pesos, es decir, la misma cantidad de dinero que traía al inicio, antes de las peticiones que realiza al alux.

Estas dos problemáticas planteadas son interesantes, ya que, en el contexto escolar no es común que se trabajen, generalmente los problemas que implican la construcción de una ecuación cuadrática que se trabajan en la escuela son relacionados principalmente con áreas, edades y números. Asimismo, la actividad de cierre pareció interesar al alumnado, pues se invirtió lo que usualmente se les pide, no se les pidió resolver un problema ya planteado, se les pidió que ellos plantearan un problema que se pudiera modelar con una ecuación cuadrática. Esto, implica la movilización de varias herramientas cognitivas, es necesario conocer las características de una ecuación cuadrática para poder movilizar las herramientas matemáticas que poseen y plantear estos problemas.


③ Iba caminando por la ruta de los cenotes, se me apareció un dios y me dijo que me concedería un deseo si respondo el siguiente problema: Habían dos señores, uno de ellos me pidió que le diera el cuadrado de la cantidad de dinero que traía en su bolsa y el daría 1000 pesos al otro señor, luego de esto me pidió que le diera la cantidad inicial de dinero que tenía y daría 1500 pesos al otro señor, si al final se quedó con 50 pesos. ~~la cantidad de dinero~~ ¿Cuánto dinero traía?

x: dinero inicio

$x^2 - 1000 + x - 1500 = 50$

$x^2 + x - 2500 = 50$

$x^2 + x - 2500 - 50 = 0$

$x^2 + x - 2550 = 0$

$x \quad +51$

$x \quad -50$

$(x+51)(x-50) = 0$

$x = -51$ $x = 50$ Traía 50 pesos

$50^2 - 1000 = 1500$

$1500 + 50 - 1500$

50

Figura 169. Segunda problemática variada (secuencia didáctica dos).

Al término de la entrega de lo que realizaron en el problema 3, por medio de la plataforma de trabajo institucional (UADY virtual) se le proporcionó a cada alumno el enlace para responder la autoevaluación correspondiente a la aplicación de la actividad diagnóstica y la secuencia didáctica dos.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN SOBRE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS

Este cuestionario constó de 11 preguntas, fue el mismo que se aplicó con el grupo uno de trabajo. Fue un cuestionario en línea, por lo cual fue una actividad a distancia, sin presión de tiempo. Se les recalcó la importancia de realizar dicha actividad. Se presentan a continuación los resultados obtenidos con el grupo dos.

1. Grupo al que perteneces.

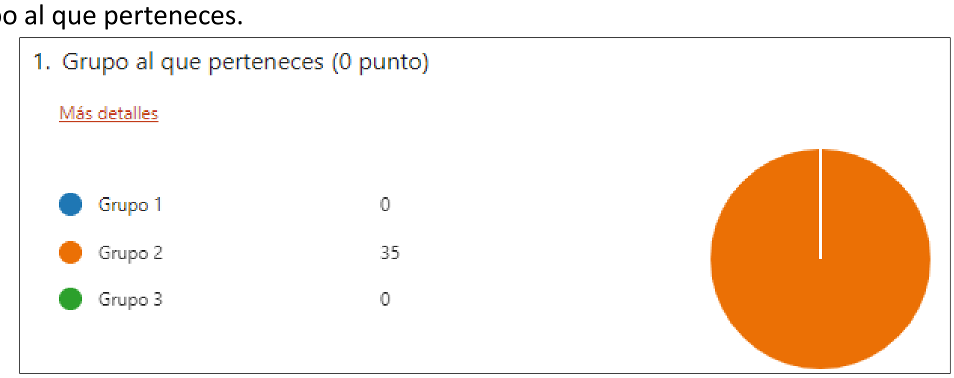


Figura 170. Pregunta uno del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Con esto se observa que casi todo el grupo dos respondió el cuestionario de autoevaluación, 35 alumnos de los 37 que conforman el grupo respondieron la actividad de autoevaluación.

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

35 Respuestas

23	anonymous	Traducir los problemas en forma de ecuaciones
24	anonymous	Plantear la ecuación de la problemática aplicativa
25	anonymous	Casi no tuve, solo me equivoqué en la traducción de un enunciado al lenguaje algebraico
26	anonymous	Resolver la operación 4 de los ejercicios, era suma no multiplicación
27	anonymous	Traducir enunciados y resolver una operación algebraica
28	anonymous	Se me dificultó el planteamiento del último problema
29	anonymous	La traducción de los enunciados y resolver el problema
30	anonymous	Se me dificultó traducir los enunciados
31	anonymous	Se me dificultó encontrar la regla para una de las sucesiones

Figura 171. Pregunta dos del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

La figura 171 muestra algunas de las respuestas brindadas por los alumnos, de acuerdo con las estadísticas, 28 alumnos respondieron "traducir del lenguaje verbal al algebraico", como una dificultad al resolver la actividad diagnóstica. Siendo ésta la principal dificultad mencionada.

3. ¿Lograste superarlas?

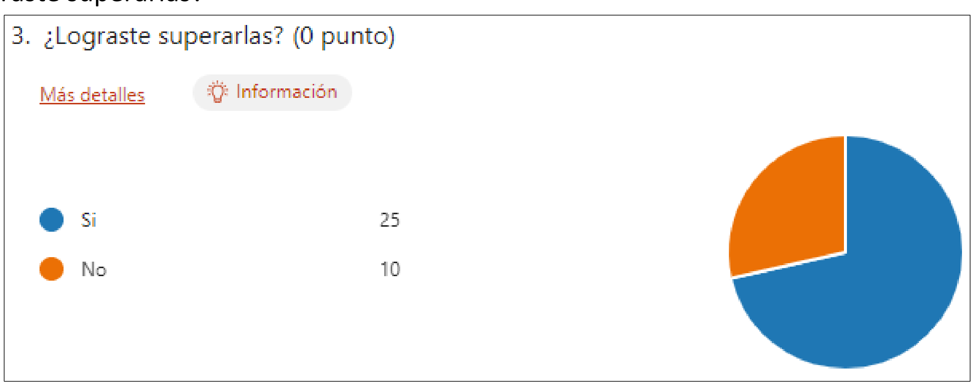


Figura 172. Pregunta tres del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Se observa que fueron 25 alumnos los que comentaron que superaron las dificultades descritas en la pregunta 2 y los que dijeron no superaron las dificultades fueron 10 alumnos.

4. Para los que contestaron Sí a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

4. ¿Cómo lo hiciste?

25 Respuestas

9	anonymous	Los ejemplos de las maestra y el que yo prestara atención
10	anonymous	Con las explicaciones de la profesora y mis conocimientos previos
11	anonymous	Conocimientos previos y guía de la maestra
12	anonymous	Con mis conocimientos previos, la guía y ayuda que dio la maestra
13	anonymous	La retro y escuchando las participaciones de mis compañeros
14	anonymous	Me dí cuenta de mi error cuando dieron las respuestas correctas
15	anonymous	Prestando atención a las resoluciones correctas
16	anonymous	Con la explicación, mis conocimientos previos y preguntando dudas a la mtra.
17	anonymous	Practicando, en la siguiente sesión fue más fácil plantear los problemas

Figura 173. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó Sí en la pregunta 3 (grupo dos).

Con las respuestas de estos 25 alumnos se destaca el hecho de que mencionaran que la retroalimentación les ayudó, pero algunos comentan que otro factor que les apoyó fueron los conocimientos previos con los que contaban y también preguntando sus dudas.

5. Para los que respondieron que No a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

5. ¿Qué aspectos influyeron para que no lo lograras?

10 Respuestas

3	anonymous	Se me dificulto mucho, necesitaba mas tiempo
4	anonymous	Me confundo siempre en los signos
5	anonymous	Puedo resolver las ecuaciones, pero se me dificulta plantearlas
6	anonymous	Puedo resolver la ecuación si me la da, pero plantearla es difícil.
7	anonymous	Mi avance es lento, creo que además no tengo los conocimientos necesarios
8	anonymous	Se me dificulta muchísimo el definir mis incógnitas y plantear mi ecuación
9	anonymous	No comprendo como colocar la ecuación, se me dificulta traducir las palabras al álgebra
10	anonymous	El tiempo, con más práctica creo que si lo logro

Figura 174. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó No en la pregunta 3 (grupo dos).

Con las respuestas de estos 10 alumnos se destacan aspectos como falta de tiempo, dificultad para plantear las ecuaciones en los problemas aplicativos, esto por la dificultad para traducir del lenguaje natural al algebraico.

6. Respecto a las actividades de la secuencia didáctica, ¿cuántos problemas del desarrollo lograron resolver como equipo?

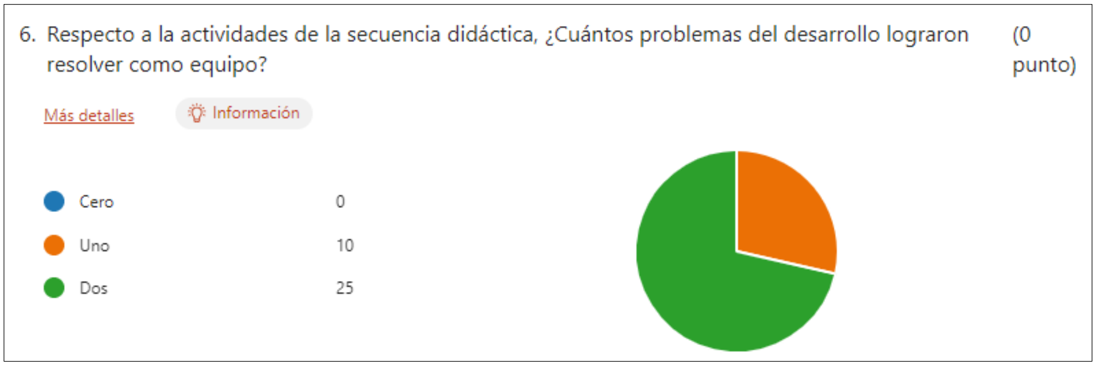


Figura 175. Pregunta cinco del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Se observa que la mayoría con sus equipos pudo resolver los dos problemas proporcionados, 10 alumnos externaron que con su equipo solo lograron resolver correctamente un problema.

7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?

7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?

35 Respuestas

6	anonymous	La guia de la profa y el que fue en equipo, todos ayudamos
7	anonymous	En el equipo todos daban su punto de vista, todos checabamos los resultados
8	anonymous	Nos confundimos en el problema dos, es que es raro que la hija mayor reciba menos
9	anonymous	Los problemas implicaban mucho analisis pero todos apoyamos en el equipo
10	anonymous	Los ejemplos realizados me sirvieron de guía
11	anonymous	El problema del alux estuvo complicado de plantear con álgebra
12	anonymous	En el problema dos invertimos unos resultados y ya no llegamos a la respuesta
13	anonymous	Todos nos apoyamos y prestamos atención durante las clases

Figura 176. Pregunta seis del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Se encuentra como respuestas que un factor que les permitió resolver los dos problemas correctamente fue que trabajaran en equipo, además de la guía dada por la profesora a través de las retroalimentaciones previas, de esta manera, se complementaban entre compañeros. Otros comentarios hacen referencia a que cometieron un error al invertir unos resultados en el problema dos y eso les afectó para no llegar a la respuesta correcta.

8. ¿Lograste resolver el problema de cierre?

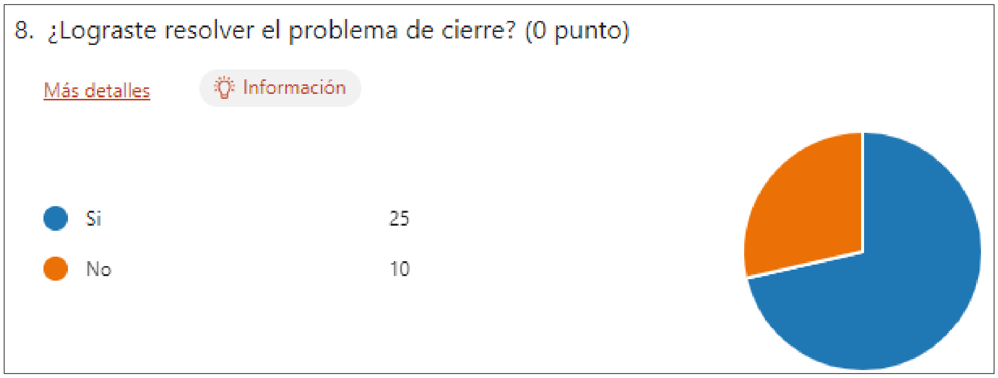


Figura 177. Pregunta siete del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Se observa que 25 alumnos lograron resolver de manera individual el problema de cierre y 10 no lograron resolverlo correctamente. Se observa una coincidencia aproximada en resultados trabajando por equipo y de manera individual. Hay que recordar que, de acuerdo con los trabajos recibidos, los que plantearon un problema que implicaba una ecuación cuadrática fueron 26 alumnos.

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

35 Respuestas

15	anonymous	Ya tenía la experiencia previa con los problemas del desarrollo
16	anonymous	Me basé en lo que ya había hecho previamente, con los dos problemas
17	anonymous	Creo que con más tiempo si lo lograba
18	anonymous	Todo lo que ya se había trabajo me sirvió mucho
19	anonymous	Me basé de lo que ya había trabajado en clases
20	anonymous	Fue un conjunto de lo que ya había trabajo, lo que ya sabía pero también la experiencia previa
21	anonymous	Me sirvió la experiencia previa con los dos problemas
22	anonymous	Me basé en la idea del problema que resolvimos en el desarrollo, el del alux
23	anonymous	Necesitaba más tiempo para pensar en el problema

Figura 178. Pregunta ocho del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Se presentan algunos comentarios que los alumnos realizaron con respecto a los factores que propiciaron este resultado. Algunos de los comentarios se refieren que para resolver la actividad de cierre utilizaron la experiencia previa que tenían con los problemas del desarrollo, respecto a los que no lograron realizar la actividad de cierre comentan principalmente que con más tiempo posiblemente lograrían el planteamiento.

10. ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?

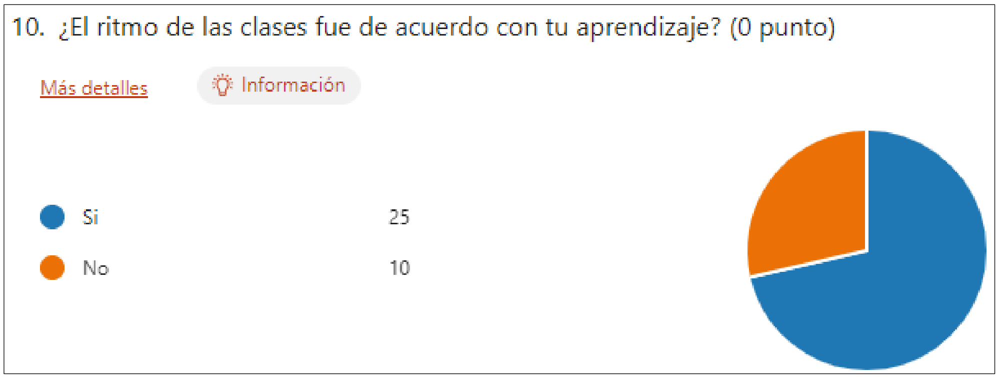


Figura 179. Pregunta nueve del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Para la pregunta nueve, 25 alumnos consideran que el ritmo de clases fue adecuado para su aprendizaje y 10 alumnos consideran que el ritmo de clases no estuvo de acuerdo con su aprendizaje. Con respecto a esta pregunta no se profundizó más, sin embargo, en la pregunta 11 algunos alumnos externaron algunos comentarios al respecto.

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

35 Respuestas

14	anonymous	Si me gustaron las historias de los problemas pero necesito más apoyo
15	anonymous	Los problemas nunca los había visto, son como que originales pero implican matemáticas
16	anonymous	Me gustó mucho plantear mi propio problema, hice uno de áreas y también de los viejito del terreno y el alux fueron interesantes
17	anonymous	Me parecieron atractivos los problemas de la sesión dos, del alux y el del viejito
18	anonymous	Los problemas fueron llamativos, no es el tipo de áreas o el típico de edades.
19	anonymous	Me gustaron mucho estas dos clases, siempre me han gustado pero fueron mejores
20	anonymous	Problemas tipo historias que te enganchaban y era un tipo reto el poder resolverlas

Figura 180. Pregunta diez del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Los comentarios que se destacan en la pregunta diez hacen referencia a que los problemas resultaron interesantes para los alumnos, mencionan los problemas del desarrollo, a saber, el del alux y el del señor que reparte su terreno con sus hijas. Se destaca de igual manera que comentan que no son los típicos problemas que aparecen en sus materiales de trabajo, mencionan que los "enganchaban", al ser originales. Se observa que otros comentarios hacen referencia a que los problemas era interesantes, pero necesitaban más apoyo para resolverlos.

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

35 Respuestas

15	anonymous	Crear problemas así, para trabajar con las ecuaciones lineales y los sistemas
16	anonymous	Crear más problemas así, a mi me gustaron no son los típicos que ponen en el material de trabajo
17	anonymous	Un poco más de tiempo, yo no soy muy rápida, pero la profesora siempre explica bien, yo soy la que no es buena en matemáticas
18	anonymous	Más problemas así, hacen que vea que las matemáticas no son aburridas
19	anonymous	Implementar más actividades así, fue muy dinámica la clase
20	anonymous	Incluir estas actividades en el material de trabajo de la prepa.
21	anonymous	Todo adecuado, me gustaría que en las clases de matemáticas podamos crear nuestros propios problemas

Figura 181. Pregunta once del cuestionario de autoevaluación (grupo dos).

Entre las principales sugerencias que los alumnos tienen se encuentra el crear más problemas como los presentados en las actividades del desarrollo, esto hace que para ellos las matemáticas no se vean como algo aburrido, comentan que este tipo de problemas se debería anexar al material de trabajo e incluso implementarlo en otros temas como lo son las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones. De igual manera comentan que es necesario proporcionar más tiempo, ya que, no todos avanzan al mismo ritmo y algunos alumnos requieren más apoyo para lograr lo que se solicita.

Otro comentario que se destaca es que querían una tercera sesión donde se pudieran compartir y analizar los problemas creados en el momento de cierre, el crear su propio problema también se les hizo una actividad interesante.

5.4 APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Esta secuencia didáctica fue aplicada al grupo tres de estudiantes, el cual originalmente estaba conformado por 41 alumnos (quienes respondieron la actividad diagnóstica), sin embargo, tres de ellos no asistieron a la sesión posterior, dónde se trabajaría la secuencia didáctica, por tanto, el grupo quedó compuesto por 38 alumnos.

El inicio de la aplicación de la secuencia didáctica se realizó de manera grupal, el docente inició la sesión mencionando que diversas cosas en la vida están sujetas a condiciones, por ejemplo, el construir una casa estará sujeta al tamaño del terreno, al diseño de la casa, a la cantidad de dinero, entre muchas otras cosas. Para algunos de estos casos, las matemáticas también son útiles para calcular y tomar decisiones.

Posteriormente se cuestionó a los alumnos sobre lo que es una ecuación, las características de una ecuación cuadrática y los métodos de resolución que conocen para resolver estas ecuaciones.

Respecto a la primera pregunta ¿qué es una ecuación?, cuatro alumnos externaron una opinión y comentaron lo siguiente:

- Es una igualdad dónde hay un valor desconocido.
- Es encontrar el valor de la incógnita.
- Es una relación de igualdad.
- Relación entre dos cantidades.

Después de la participación de los alumnos, con el apoyo de una presentación con diapositivas se presentó la siguiente definición:

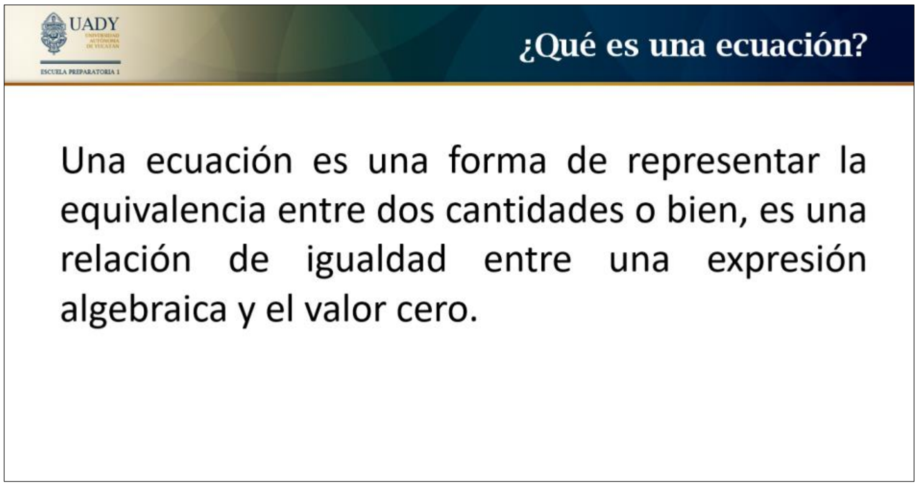


Figura 182. Definición de ecuación (grupo tres).

El docente enfatizó en que las ecuaciones son útiles para modelar situaciones en las que interesa determinar el valor de la o las variables que hacen posible dicha equivalencia.

Posteriormente se mencionó que se han trabajado con modelos de ecuaciones lineales y cuadráticas, por lo cual conviene realizar un recordatorio de ambos. Se cuestionó a los alumnos con la pregunta, ¿cuál es la diferencia entre ambos modelos?, para apoyar en la solución de esta pregunta se presentó la siguiente dispositiva:

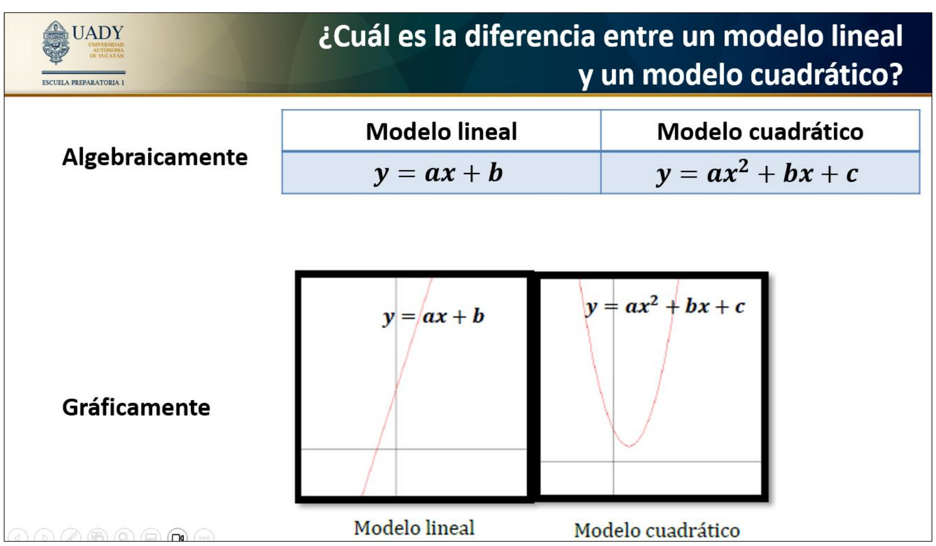


Figura 183. Diferencias algebraicas y geométricas entre un modelo lineal y uno cuadrático.

Los estudiantes externaron sus opiniones y coincidieron en los siguientes aspectos:

- Algebraicamente en una ecuación lineal el mayor exponente de su variable es de grado 1 y en una ecuación cuadrática es de grado 2.
- Gráficamente, un modelo lineal genera una línea recta y uno cuadrático genera una parábola.
- Dependiendo de cómo varían los datos puede cambiar la orientación de las gráficas.

Las opiniones de los alumnos fueron correctas, sin embargo, para la parte de la variación de los valores que dan lugar a los modelos lineales y cuadráticos, faltó una mayor profundidad. Al término de la participación de los alumnos se presentó la siguiente diapositiva:

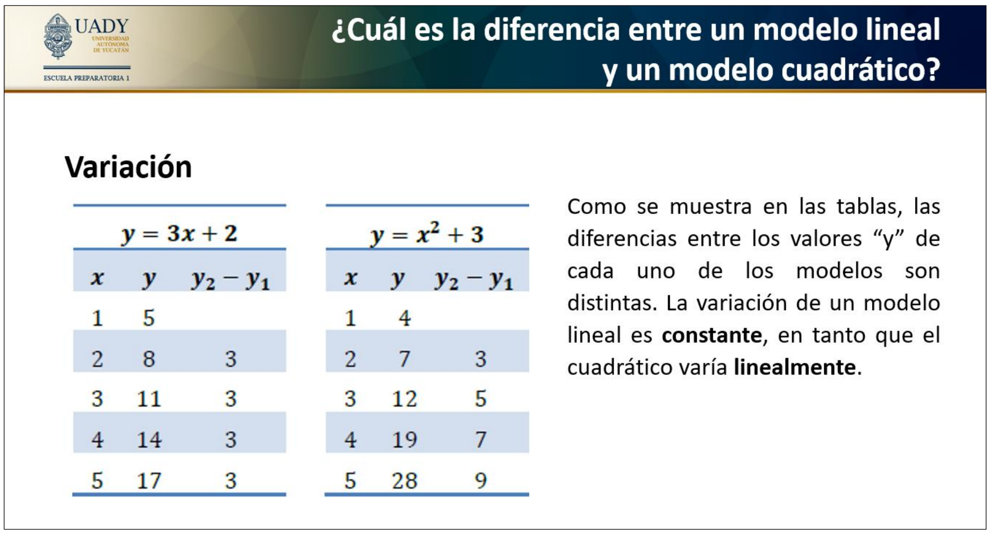


Figura 184. Variación de un modelo lineal y uno cuadrático (grupo tres).

Respecto a la variación de un modelo lineal y cuadrático se enfatizó en que la variación del modelo lineal es constante, puede variar aumentando o disminuyendo el mismo valor de y para cada valor de x. En cuanto al modelo cuadrático varía linealmente. Dado que habían comentado que "dependiendo de cómo varían los datos puede cambiar la orientación de las gráficas", se enfatizó en qué efectivamente de estas variaciones depende la ubicación y posición gráfica. Algunos alumnos mencionaron que nunca habían trabajado la variación de estos modelos.

Posteriormente, se profundizó en las características de una ecuación cuadrática. Como apoyo se utilizó la siguiente diapositiva:

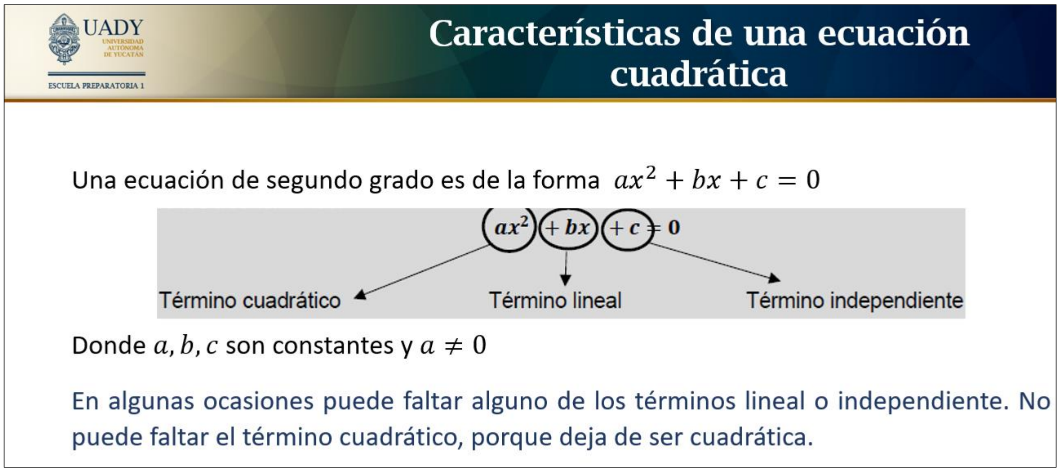


Figura 185. Características de una ecuación cuadrática (grupo tres).

Después de esto, se procedió a cuestionar a los alumnos sobre los métodos que conocían para resolver una ecuación cuadrática. Los alumnos mencionaron el método de factorización y la aplicación de la fórmula general. Se les presentó la siguiente diapositiva, la cual hacía referencia a lo que significa resolver una ecuación cuadrática y presentaba los métodos que se pueden emplear para resolverla.

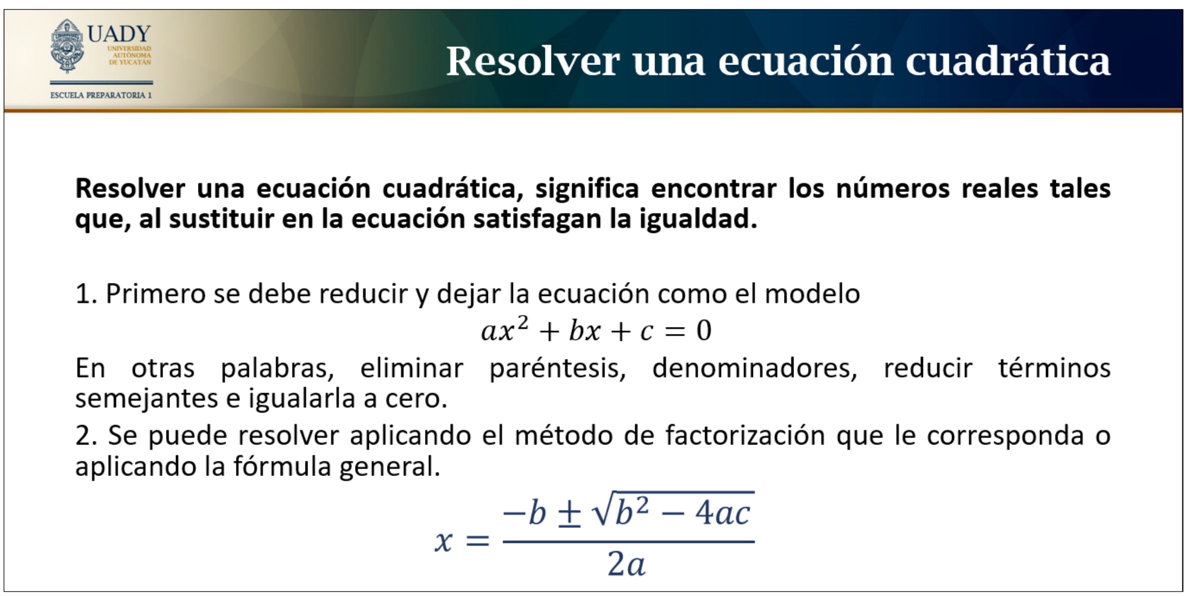


Figura 186. Qué significa resolver una ecuación cuadrática y los métodos que existen para resolverla (grupo tres).

Después de la recuperación de ideas, se procedió a recodar algunos "pasos" que pueden ayudar a resolver un problema en contexto, se recordaron los siguientes pasos:

- La definición de la(s) incógnita(s).
- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.
- La resolución de la ecuación que representa el problema.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

Para dar paso al desarrollo de la sesión se solicitó a los alumnos que se formaran en grupos de 4 integrantes, se formaron en total 9 equipos de trabajo, 7 equipos de 4 alumnos y 2 equipos de 5 alumnos. Se presentará el análisis de las respuestas que cada equipo realizó a los dos problemas del desarrollo, considerando los pasos previamente descritos durante el inicio de la sesión.

Se comentó a los alumnos que en la plataforma de trabajo (UADY VIRTUAL) se compartió el enlace para descargar un archivo de GeoGebra que les servirá de apoyo para realizar las actividades. Dicho enlace fue el siguiente:

https://drive.google.com/file/d/1b_41Wn6DuQZYp4CgzkbFA6NzsqEfSls0/view?usp=sharing

Se le pidió a un alumno de cada equipo descargar dicho archivo, no sin antes descargar la aplicación móvil de GeoGebra. Es preciso mencionar que en este archivo los alumnos no debían programar o elaborar algo nuevo, realmente bastaba con mover los parámetros una vez que tuvieran las ecuaciones que representan cada problema y qué observarán la relación entre el modelo algebraico y el modelo geométrico.

Para fines de nomenclatura se representarán a los equipos con las nomenclaturas E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E9 haciendo referencia al equipo 1, equipo 2 y así sucesivamente hasta llegar al equipo 9. Se analizará primero el problema uno, en el cual se pedía contestar tres preguntas, la primera ¿cuál es la explicación a lo sucedido, por qué Juan se quedó sin dinero?, la segunda pregunta ¿cuánto dinero tenía Juan al inicio? y la tercera pregunta, tomando como base la herramienta tecnológica, ¿qué representa gráficamente la solución encontrada?

Respecto al problema número uno del desarrollo el E1 realizó lo siguiente:

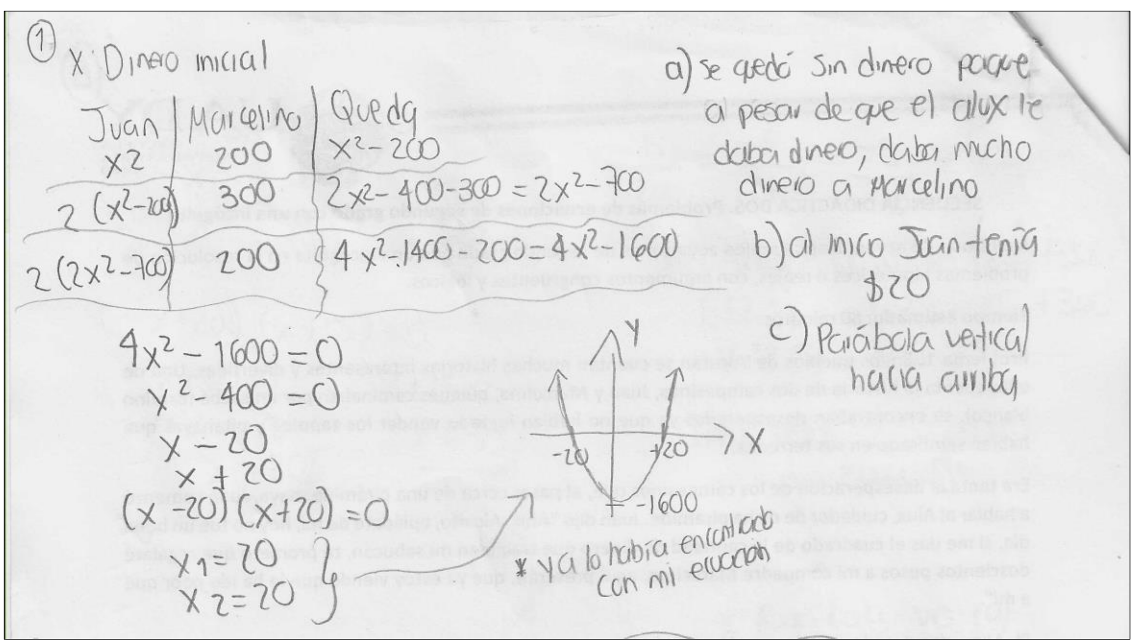
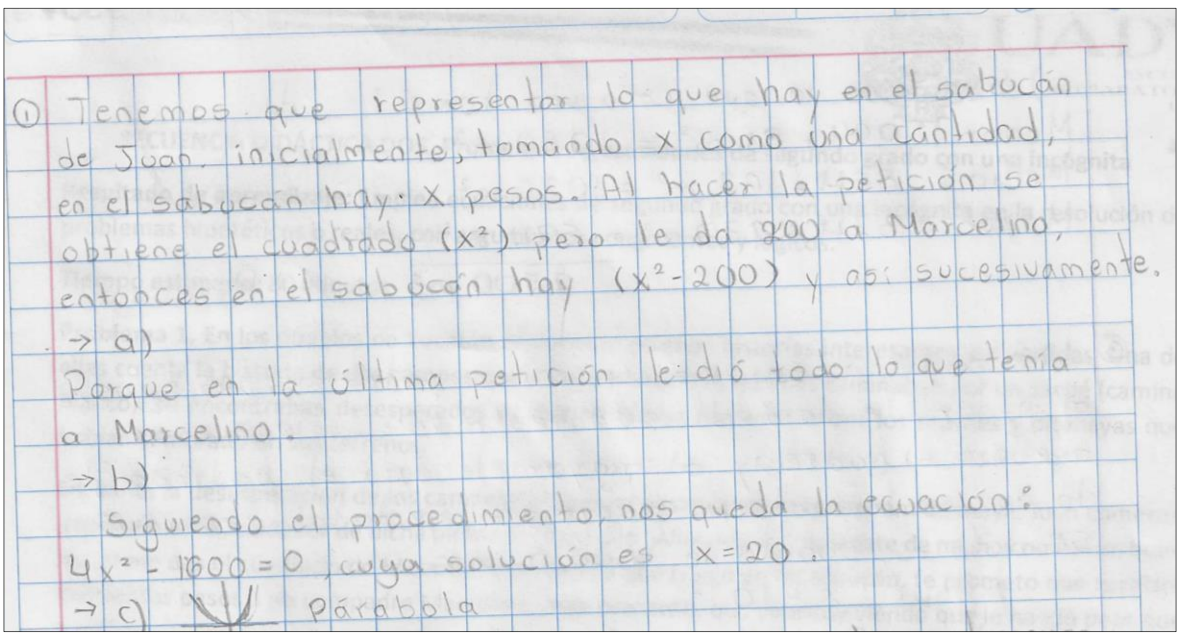


Figura 187. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E1.

Se observa que el E1 respondió las tres preguntas planteadas en la problemática número uno. Definen x como el dinero inicial y a partir de esto, plantean de manera algebraica cada una de las tres peticiones que Juan realiza al Alux. Al final obtienen una ecuación cuadrática, la cual resuelven por factorización (en particular con una diferencia de cuadrados), las soluciones a las que llegan son $x_1 = 20$ y $x_2 = 20$, probablemente olvidaron colocar el signo negativo a x_1, ya que, la factorización que realizan si es correcta.

Se observa que encuentran el dinero inicial que traía Juan, el cual era $20 y comentan que se había quedado sin dinero porque le daba mucho a Marcelino. Para responder a la última pregunta el equipo realizó la representación gráfica de la ecuación que encontraron (con ayuda del archivo que se les había compartido previamente), la cual identificaron como una parábola vertical que abre hacia arriba, en el dibujo que realizaron señalan tres coordenadas, dos de ellas son las intersecciones con el eje x y la otra es la coordenada del valor mínimo. El equipo comentó (no de manera explícita) que ya habían encontrado las intersecciones con el eje x al momento de resolver la ecuación de manera algebraica.

El E2 realizó lo siguiente en cuanto a la problemática número uno:

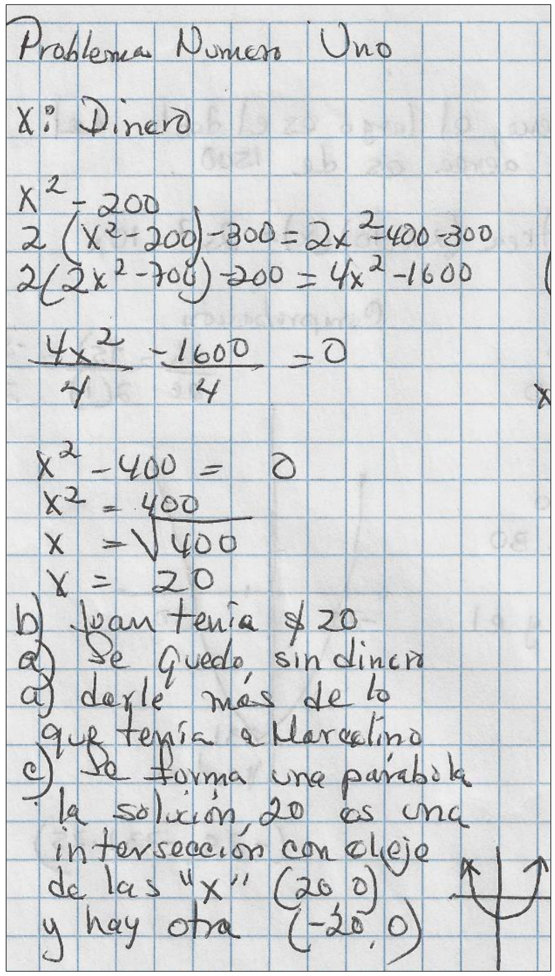


① Tenemos que representar lo que hay en el sabucán de Juan inicialmente, tomando x como una cantidad, en el sabucán hay x pesos. Al hacer la petición se obtiene el cuadrado (x^2) pero le da 200 a Marcelino, entonces en el sabucán hay (x^2-200) y así sucesivamente.
→ a)
Porque en la última petición le dió todo lo que tenía a Marcelino.
→ b)
Siguiendo el procedimiento nos queda la ecuación:
$4x^2 - 1600 = 0$, cuya solución es $x = 20$.
→ c) Parábola

Figura 188. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E2.

Este equipo respondió las tres cuestiones planteadas, se observa que emplearon una estrategia de tipo algebraica y van redactando lo que fueron realizando para llegar a la solución correcta. Representan x como la cantidad de dinero que tiene al inicio Juan en su sabucán, comentan que formaron una ecuación $4x^2 - 1600 = 0$ cuya solución es 20, por lo cual, representa la cantidad de dinero inicial que traía Juan y con esto responden la segunda pregunta. Respecto a la pregunta uno, el argumento que dan es que “en la última petición le dio todo lo que tenía a Marcelino”. Para la última pregunta solo realizan el bosquejo de una parábola y escribieron dicho nombre, no profundizaron más en cuánto a lo que representa gráficamente la solución.

Para el problema uno, el E3 realizó lo siguiente:



Problema Numero Uno

X: Dinero

$X^2 - 200$

$2(X^2-200)-300 = 2x^2-400-300$

$2(2x^2-700)-200 = 4x^2-1600$

$\frac{4x^2}{4} - \frac{1600}{4} = 0$

$x^2 - 400 = 0$

$x^2 = 400$

$x = \sqrt{400}$

$x = 20$

b) Juan tenía $20

a) Se quedo sin dinero

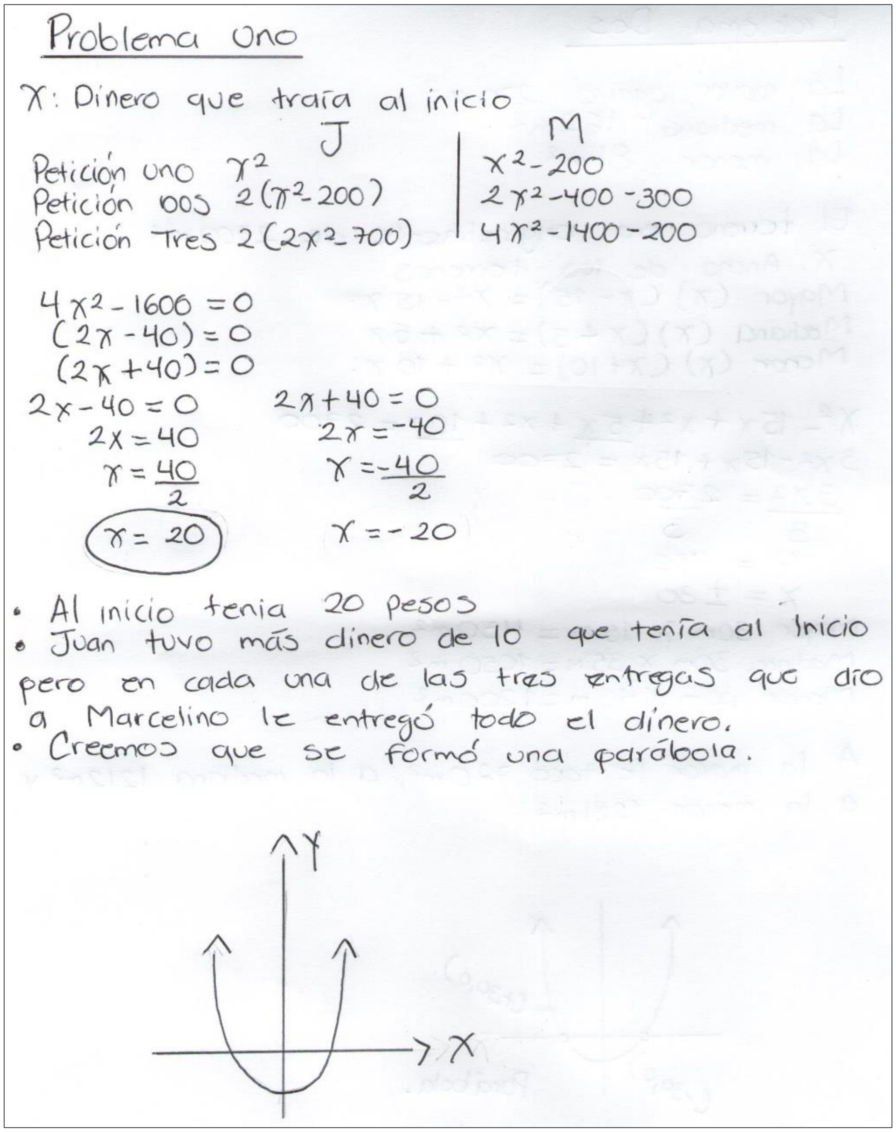
a) darle más de lo que tenía a Marcelino

c) Se forma una parábola la solución 20 es una intersección con el eje de las "x" (20 0) y hay otra (-20, 0)

Figura 189. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E3.

El E3 respondió las tres preguntas planteadas, la estrategia empleada fue de tipo algebraica. Se observa que definen la incógnita x como dinero y plantean una ecuación cuadrática, la resuelven por despeje directo, solo consideran una solución a esta ecuación, el valor positivo. Responden la primera pregunta de manera correcta, considerando que Juan traía $20 al inicio, para la segunda pregunta argumentan que "se quedó sin dinero al darle más de lo que tenía a Marcelino". La respuesta que dan a la tercera pregunta resulta interesante, expresan que se forma una parábola y relacionan que la solución encontrada al momento de resolver la ecuación es una intersección con el eje x, en este caso la coordenada $(20, 0)$, pero también mencionan que hay otra intersección, la coordenada $(-20, 0)$.

El E4 realizó lo siguiente respecto a la problemática uno:



Problema uno

X: Dinero que traía al inicio

	J	M
Petición uno	x^2	x^2-200
Petición Dos	$2(x^2-200)$	$2x^2-400-300$
Petición Tres	$2(2x^2-700)$	$4x^2-1400-200$

$$4x^2-1600=0$$
$$(2x-40)=0$$
$$(2x+40)=0$$

$2x-40=0$ $\quad$ $2x+40=0$

$2x=40$ $\quad$ $2x=-40$

$x=\frac{40}{2}$ $\quad$ $x=\frac{-40}{2}$

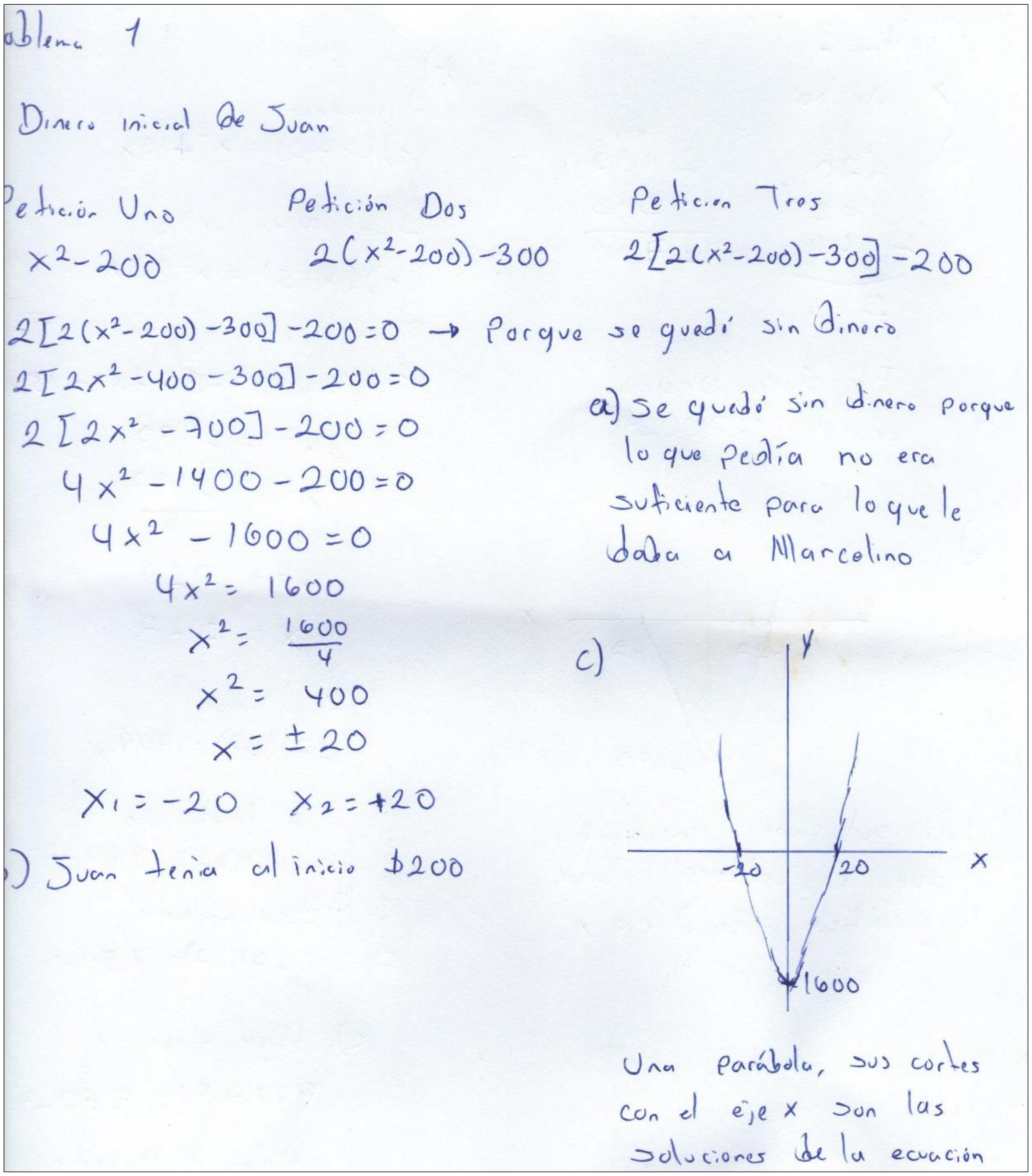
$x=20$ $\quad$ $x=-20$

- Al inicio tenia 20 pesos
- Juan tuvo más dinero de lo que tenía al Inicio pero en cada una de las tres entregas que dio a Marcelino le entregó todo el dinero.
- Creemos que se formó una parábola.

Figura 190. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E4.

El E4 realizó una estrategia de tipo algebraica, definieron x como el dinero que traía al inicio (en este caso, se supone que hacen referencia al dinero de Juan). Plantearon cada una de las peticiones de manera algebraica, plantearon una ecuación cuadrática, no la simplificaron, la resolvieron utilizando la factorización por diferencia de cuadrados. Encontraron las dos soluciones, 20 y -20, para la primera pregunta la respuesta fue que “Juan tuvo más dinero de lo que tenía al inicio, pero en cada una de las tres entregas que dio a Marcelino le entregó todo el dinero”. Para la segunda pregunta la respuesta fue que Juan tenía 20 pesos, para la última pregunta respondieron que, con ayuda de la herramienta tecnológica, observaron una parábola, realizaron el bosquejo de ésta, sin profundizar en lo que representa gráficamente la solución de la ecuación cuadrática.

El E5 realizó lo siguiente para el problema uno:


blema 1

Dinero inicial de Juan

Petición Uno: x^2-200

Petición Dos: $2(x^2-200)-300$

Petición Tres: $2[2(x^2-200)-300]-200$

$2[2(x^2-200)-300]-200=0$ → Porque se quedó sin dinero

$2[2x^2-400-300]-200=0$

$2[2x^2-700]-200=0$

$4x^2-1400-200=0$

$4x^2-1600=0$

$4x^2=1600$

$x^2=\frac{1600}{4}$

$x^2=400$

$x=\pm 20$

$x_1=-20 \quad x_2=+20$

) Juan tenia al inicio \$200

a) Se quedó sin dinero porque lo que pedía no era suficiente para lo que le daba a Marcelino

c)

Una parábola, sus cortes con el eje x son las soluciones de la ecuación

Figura 191. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E5.

El E5 empleó una estrategia de tipo algebraica. Definen x como el dinero inicial de Juan. Van planteando de manera algebraica cada una de las peticiones y forman una ecuación cuadrática, justifican el igualar a cero esta ecuación con el argumento de que se quedó sin dinero. Para la primera pregunta la respuesta que dan es que “se quedó sin dinero porque lo que pedía no era suficiente para lo que le daba a Marcelino”. Para la segunda pregunta, al momento de resolver la ecuación cuadrática, encuentran dos valores soluciones -20 y 20, sin embargo, al expresar la respuesta a esta pregunta colocan que Juan tenían al inicio \$20. Para la última pregunta, dibujan un bosquejo de la parábola, expresan que los cortes con el eje x son las soluciones de la ecuación.

Ahora, el E6 realizó lo siguiente en torno a la problemática número uno:

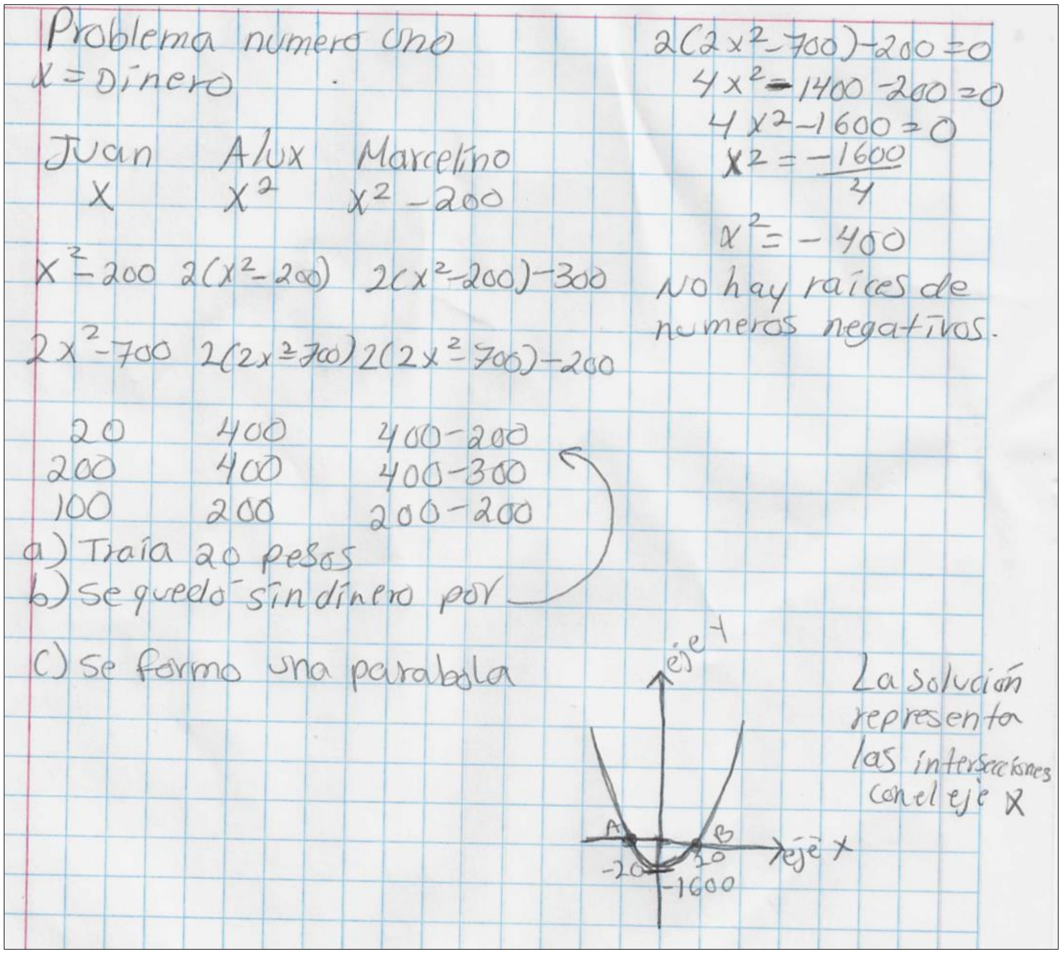
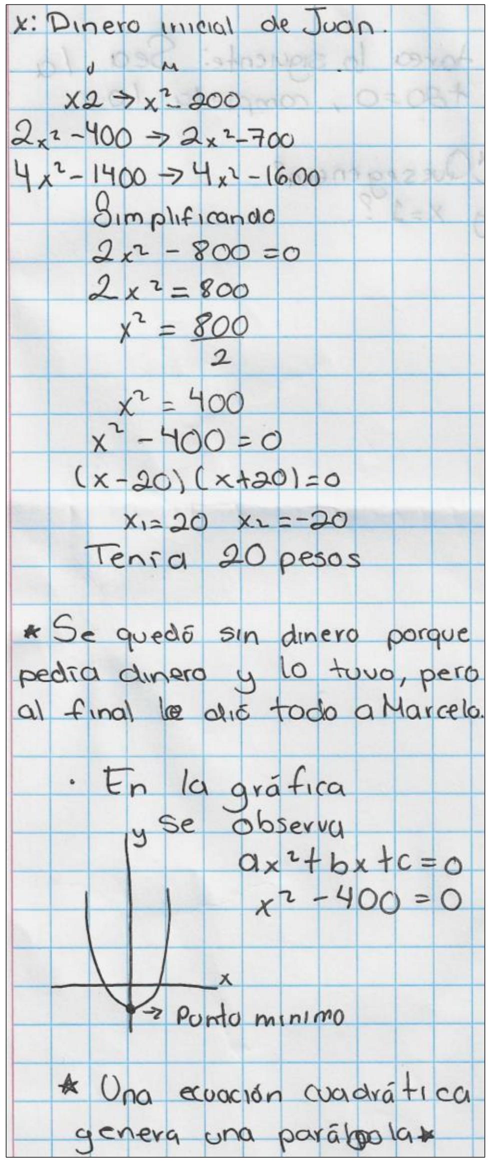


Figura 192. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E6.

Se observa que el E6 empleó una estrategia de tipo algebraica, definiendo x como dinero, con base en esto van planteando cada una de las peticiones que realiza Juan al Alux. Es importante señalar que este equipo también empleó una estrategia de tipo aritmética para comprobar la solución que dan a la pregunta uno, la cual es que traía $20 pesos. Para la segunda pregunta, la justificación que dan es que se quedó sin dinero y señalaron el procedimiento aritmético que ya habían desarrollado. Este equipo si bien planteó una ecuación cuadrática se equivocaron al momento de resolverla, y al quedarles un número negativo justifican que no tiene solución, ya que, "no hay raíces de números negativos".

Ante esto, se infiere que llegaron a la solución correcta por el uso de la estrategia aritmética, para la pregunta c) señalan que la solución encontrada representa las intersecciones con el eje x, realizan el bosquejo de una parábola, señalando también el nombre de este lugar geométrico. Llegaron a esto, ya que, la ecuación cuadrática planteada si es correcta, nada más, se equivocaron al momento de resolverla.

El E7 realizó lo siguiente en cuanto al problema uno:



x: Dinero inicial de Juan.

J M

$x2 \rightarrow x^2-200$

$2x^2-400 \rightarrow 2x^2-700$

$4x^2-1400 \rightarrow 4x^2-1600$

Simplificando

$2x^2-800=0$

$2x^2=800$

$x^2=\frac{800}{2}$

$x^2=400$

$x^2-400=0$

$(x-20)(x+20)=0$

$x_1=20 \quad x_2=-20$

Tenía 20 pesos

* Se quedó sin dinero porque pedía dinero y lo tuvo, pero al final le dió todo a Marcelo.

· En la gráfica se observa

$ax^2+bx+c=0$

$x^2-400=0$

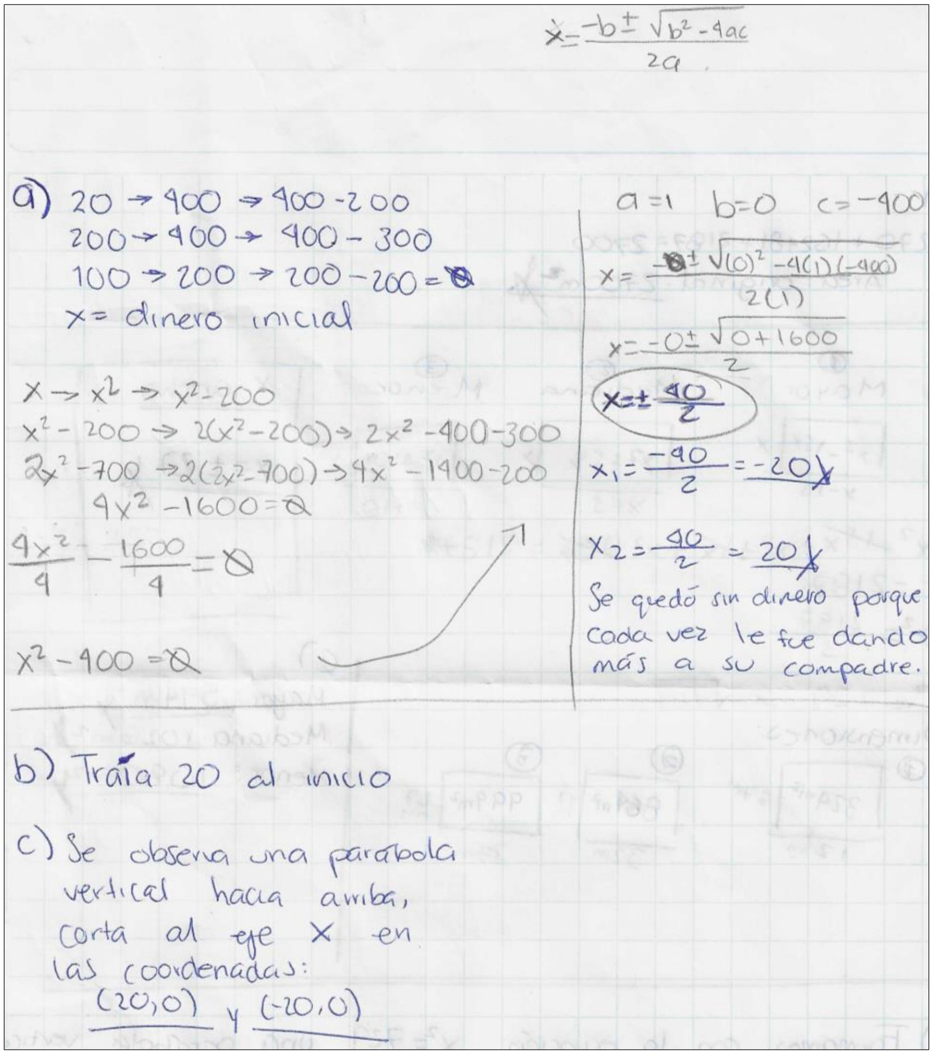
* Una ecuación cuadrática genera una parábola *

Figura 193. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E7.

Para responder a la primera pregunta el E7 se justificó con el siguiente argumento “se quedó sin dinero porque pedía dinero y lo tuvo, pero al final le dio todo a Marcelino”. Para responder a la segunda pregunta el E7 definió la incógnita x como el dinero inicial de Juan, con esto fueron planteando cada una de las peticiones, al final plantearon una ecuación cuadrática, la simplificaron y resolvieron mediante la factorización por diferencia de cuadrados. Al resolver la ecuación cuadrática obtuvieron dos soluciones, pero, únicamente consideraron como solución (de acuerdo con el contexto del problema) al valor positivo, contestando correctamente a la segunda pregunta.

Para responder a la tercera pregunta el equipo realizó el bosquejo de una parábola, señalaron que una ecuación cuadrática genera una parábola, señalaron el punto mínimo de ésta, pero no comentaron nada respecto a cómo las soluciones encontradas de manera algebraica se observaban de manera geométrica con la gráfica realizada.

La solución que propuso el E8 para el problema uno es la siguiente:



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) $20 \rightarrow 400 \rightarrow 400 - 200$
$200 \rightarrow 400 \rightarrow 400 - 300$
$100 \rightarrow 200 \rightarrow 200 - 200 = 0$
x = dinero inicial

$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 - 200$
$x^2 - 200 \rightarrow 2(x^2 - 200) \rightarrow 2x^2 - 400 - 300$
$2x^2 - 700 \rightarrow 2(2x^2 - 700) \rightarrow 4x^2 - 1400 - 200$
$4x^2 - 1600 = 0$
$\frac{4x^2}{4} - \frac{1600}{4} = 0$
$x^2 - 400 = 0$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -400$
$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-400)}}{2(1)}$
$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 + 1600}}{2}$
$x = \pm \frac{40}{2}$
$x_1 = \frac{-40}{2} = -20$
$x_2 = \frac{40}{2} = 20$
Se quedó sin dinero porque cada vez le fue dando más a su compadre.

b) Traía 20 al inicio

c) Se observa una parábola vertical hacia arriba, corta al eje X en las coordenadas: (20,0) y (-20,0)

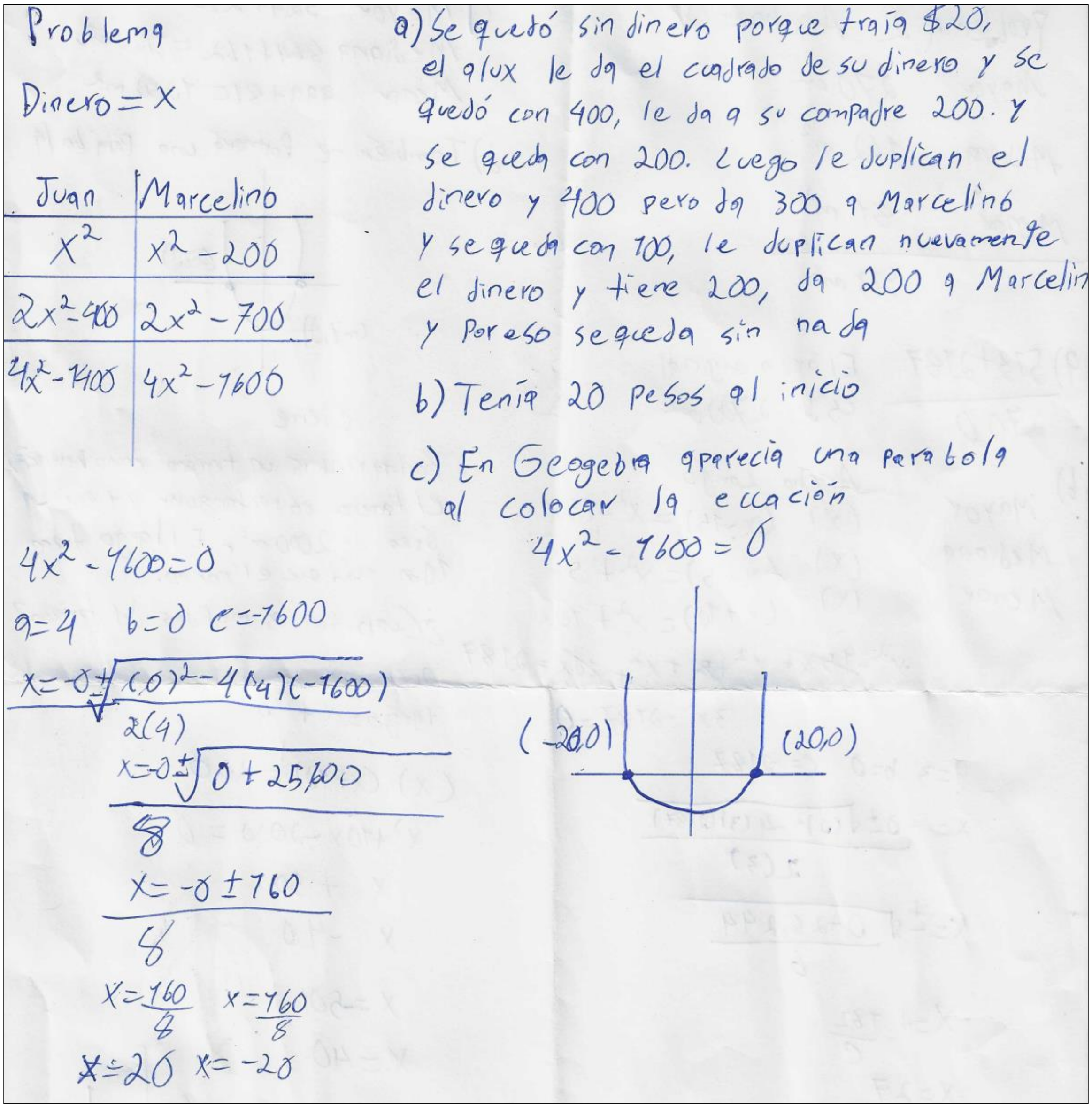
Figura 194. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E8.

Para responder a la primera pregunta el E8 presenta un procedimiento aritmético, dónde se observa que van representando el dinero inicial de Juan, lo que obtiene al realizar las peticiones al Alux y con lo que se queda al darle cierto dinero a Marcelino. Siempre para responder a la primera pregunta el E8 escribió “se quedó sin dinero porque cada vez le fue dando más a su compadre”.

Al responder a la segunda pregunta realizaron un procedimiento algebraico (adicional al procedimiento aritmético que habían realizado al inicio), definen x como el dinero inicial y plantean una ecuación cuadrática que representa la situación, posteriormente la resuelven haciendo uso de la fórmula general, obteniendo como soluciones, -20 y 20. Para brindar la solución a la segunda pregunta solo consideran al valor positivo, contestando que Juan traía $20 al inicio.

Para la tercera pregunta el E8 escribió que observan una parábola vertical que abre hacia arriba y brindan las coordenadas donde la parábola corta al eje de las x, no lo expresan de manera explícita, pero se observa que realizan un análisis entre las soluciones de la ecuación cuadrática (que habían encontrado de manera algebraica) y la representación gráfica de ésta.

Finalmente, el E9 realizó lo siguiente para dar solución al problema uno:


Problema

Dinero = X

Juan	Marcelino
x^2	x^2-200
$2x^2-400$	$2x^2-700$
$4x^2-1400$	$4x^2-1600$

$4x^2-1600=0$

$a=4 \quad b=0 \quad c=-1600$

$x=\frac{-0\pm\sqrt{(0)^2-4(4)(-1600)}}{2(4)}$

$x=\frac{-0\pm\sqrt{0+25600}}{8}$

$x=\frac{-0\pm 160}{8}$

$x=\frac{160}{8} \quad x=\frac{-160}{8}$

$x=20 \quad x=-20$

a) Se quedó sin dinero porque traía \$20, el alux le da el cuadrado de su dinero y se quedó con 400, le da a su compadre 200. Y se queda con 200. Luego le duplican el dinero y 400 pero da 300 a Marcelino y se queda con 100, le duplican nuevamente el dinero y tiene 200, da 200 a Marcelino y por eso se queda sin nada

b) Tenía 20 pesos al inicio

c) En Geogebra aparecía una parabola al colocar la ecuación $4x^2-1600=0$

Figura 195. Resolución del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres), E9.

El E9 responde las tres cuestiones planteadas, para la primera pregunta el equipo describe que Juan se quedó sin dinero porque traía \$20 pesos al inicio y con base en esto, van comentado con cuánto dinero se queda después de cada petición y de las entregas de dinero que le realiza a Marcelino, todo esto es lo que toman como justificación para decir que Juan se quedó sin dinero. Para responder a la segunda pregunta utilizan un procedimiento algebraico, definen x como el dinero inicial de Juan y plantean de manera simbólica cada una de las tres peticiones, logran formar una ecuación cuadrática.

La resolución de la ecuación cuadrática la realizan haciendo uso de la fórmula general, encuentran dos valores, uno positivo y uno negativo, como respuesta de la segunda pregunta solo consideran el valor positivo. Para la tercera pregunta comentan que se generó una parábola, elaboran el bosquejo de ésta y se observa como brindan las coordenadas de las intersecciones de la parábola con el eje x, pero no realizan un análisis mayor.

Se observa que todos los equipos lograron responder correctamente la segunda pregunta, referente al dinero inicial que tenía Juan, esto representa 100% de los equipos participantes. Para llegar a la solución todos los equipos emplearon un procedimiento de tipo algebraico, tres equipos E6, E8 y E9 adicionalmente realizaron un procedimiento aritmético para verificar sus resultados. Respecto a la justificación del por qué Juan se había quedado sin dinero a pesar de las múltiples peticiones al Alux, todos los equipos brindaron una argumentación válida, representando así 100% del total de equipos. Para responder a la pregunta tres, los equipos se auxiliaron de un archivo de GeoGebra el cuál permitía el trazado de la representación gráfica de una parábola.

Tres equipos, E3, E5 y E6 lograron identificar que las soluciones encontradas de manera algebraica al momento de resolver la ecuación cuadrática representan las abscisas de las coordenadas de intersección de la parábola con el eje x, representando así 33.33% de los equipos. Los equipos E1, E8 y E9 que representan 33.33% del total de equipos señalaron cuáles eran las coordenadas de intersección con el eje x pero de manera explícita no comentaron que previamente ya habían encontrado los valores de las abscisas al resolver de manera algebraica a la ecuación cuadrática.

Los equipos E2, E4 y E7 representan 33.33% del total de los equipos realizaron el bosquejo de una parábola y señalaron el nombre de ésta pero no realizaron un análisis mayor.

Se podría comentar que 66.66% de los equipos lograron realizar un análisis y encontrar una relación entre las soluciones de una ecuación cuadrática y cómo éstas se pueden observar de manera gráfica. 33.33% de los equipos le faltó un análisis mayor, identificaron que se forma una parábola, pero no analizaron lo que representan las soluciones. En general fueron seis equipos (66.66%) los que lograron responden correctamente a las cuatro cuestiones planteadas.

Ahora, se presentarán los procedimientos realizados por cada uno de los equipos para el problema dos del desarrollo. En el problema dos del desarrollo se solicitaba responder cuatro preguntas:

- ¿Cuál era el área original del terreno?
- ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?
- ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?
- Tomando como base la herramienta tecnológica, ¿qué representa gráficamente la solución encontrada?

Al respecto, el E1 realizó lo siguiente:

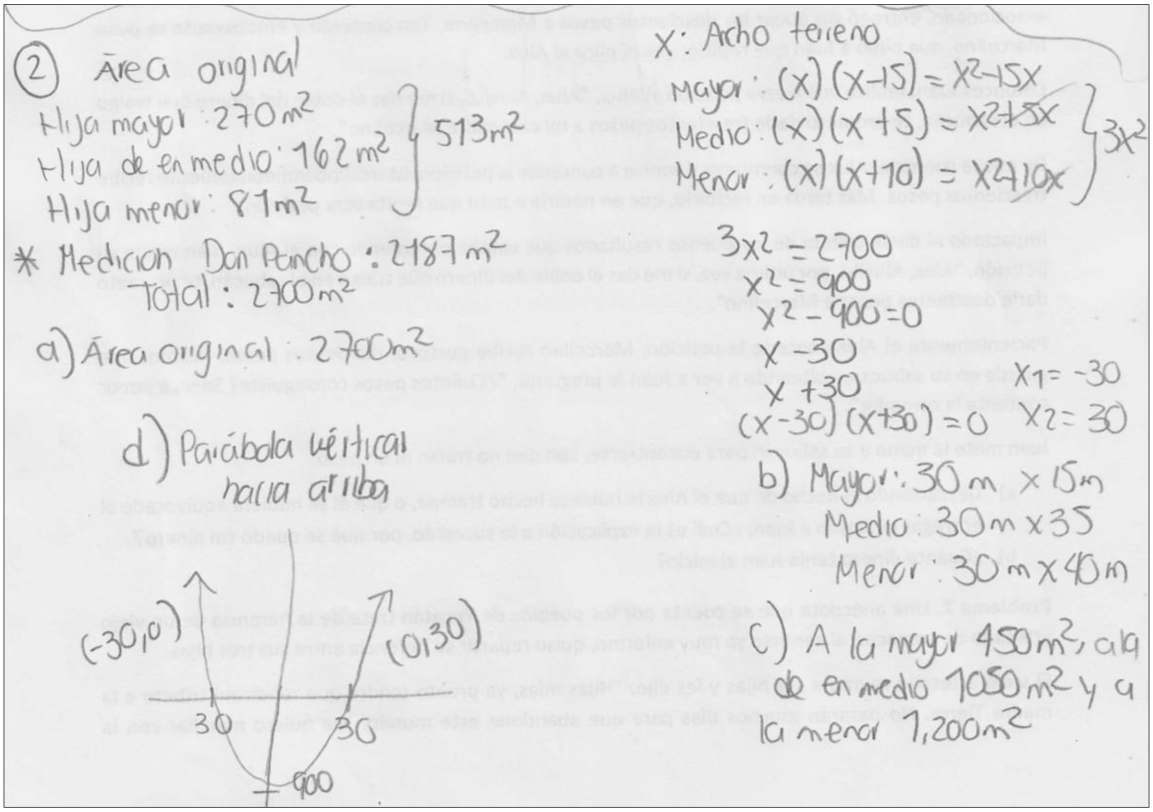


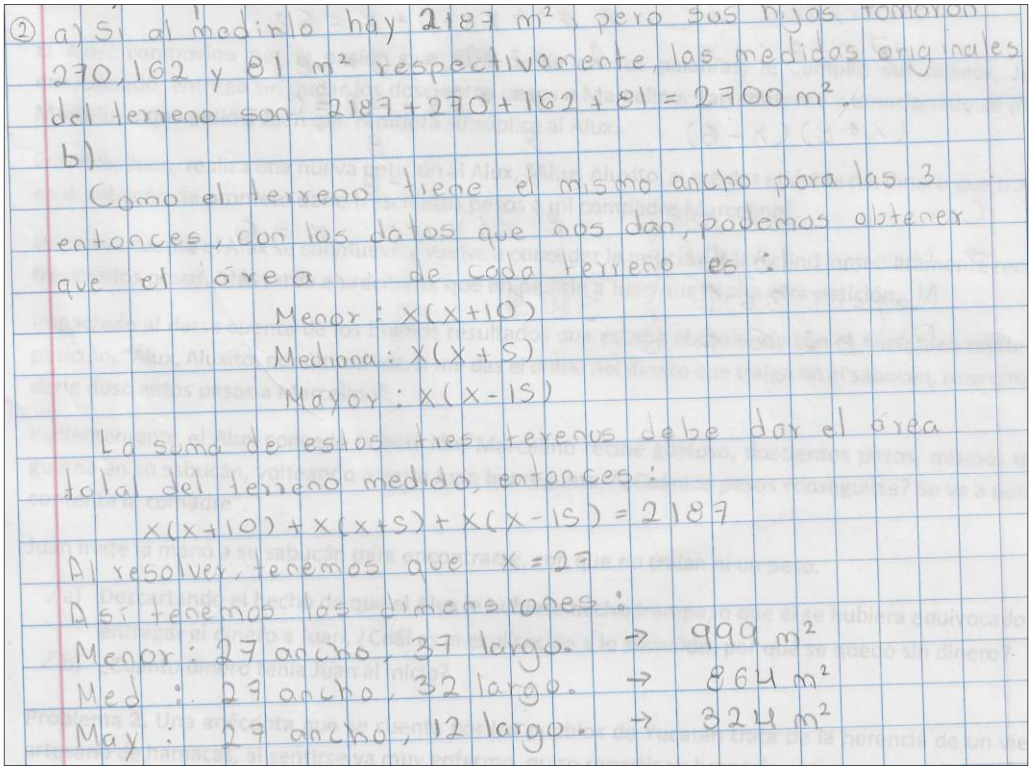
Figura 196. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E1.

Para dar respuesta a la pregunta número uno el equipo suma cada una de las áreas de los terrenos que cada hija había tomado previamente, a esto, le suman la cantidad de metros cuadrados que midió Don Pancho, obteniendo que el área original mide $2700\ m^2$, se aprecia una estrategia de tipo aritmética. Para dar respuesta a la segunda pregunta emplean una estrategia de tipo algebraica, plantean las dimensiones de cada terreno que corresponde a cada hija, lo cual es correcto, sin embargo, se equivocan al momento de igual la ecuación, ésta debió igualarse a 2187 pero la igualan a 2700.

Al momento de resolver la ecuación cuadrática obtienen dos resultados, consideran únicamente como solución el valor positivo, sin embargo, por el error cometido previamente no responden correctamente las preguntas dos y tres. Para la pregunta número cuatro comentan que se formó una parábola vertical que abre hacia arriba, realizan el bosquejo, pero no profundizan en lo que representa gráficamente las soluciones encontradas para la ecuación cuadrática.

Respecto al problema dos del desarrollo, el E2 para responder a la pregunta número uno realizó una estrategia aritmética, en este caso, sumaron las medidas de las áreas del terreno que cada hija había tomado previamente con la medición que realiza Don Pancho, obteniendo así la respuesta correcta a esta pregunta. Para la pregunta dos este equipo utilizó una estrategia algebraica, plantearon las dimensiones de los terrenos, no se observa el planteamiento de lo que representa la incógnita principal, en este caso x. Posteriormente construyen una ecuación cuadrática, la resuelven considerando una única solución, en este caso el valor positivo, es preciso mencionar que no se aprecia el método empleado para dar solución a esta ecuación cuadrática.

Encuentran que el ancho de los terrenos es de 27 metros y con base en esto, brindan las dimensiones que corresponden a cada terreno de las hijas, así como las áreas correspondientes, lo cual es correcto. Es preciso mencionar que este equipo para las soluciones describía mediante la redacción los procedimientos y soluciones encontradas, esto se puede apreciar en la figura 197.



② a) Si al medirlo hay 2187 m^2 pero sus hijos tomaron 270, 162 y 81 m^2 respectivamente las medidas originales del terreno son: $2187 + 270 + 162 + 81 = 2700\ m^2$.

b) Como el terreno tiene el mismo ancho para las 3 entonces, con los datos que nos dan, podemos obtener que el área de cada terreno es:

Menor: $x(x+10)$
Mediana: $x(x+5)$
Mayor: $x(x-15)$

La suma de estos tres terrenos debe dar el área total del terreno medido, entonces:

$x(x+10) + x(x+5) + x(x-15) = 2187$

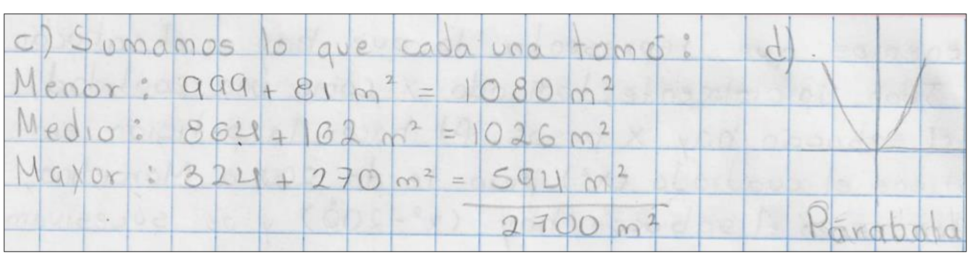
Al resolver, tenemos que $x = 27$

Así tenemos las dimensiones:

Menor: 27 ancho, 37 largo. → 999 m^2
Med: 27 ancho, 32 largo. → 864 m^2
May: 27 ancho, 12 largo. → 324 m^2

Figura 197. Parte uno de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E2.

Para responder a la pregunta tres este equipo utilizó las medidas de las áreas de los terrenos de cada hija (esto lo habían determinado en la pregunta dos), a esto le suman el área que cada una ya había tomado al inicio, obteniendo así el área que en realidad le tocó a cada una. Al sumar comprueban que realmente se correspondan los $2700\ m^2$ del terreno original. Para la pregunta cuatro no se observa que profundicen y realicen un análisis, lo único que colocan es el bosquejo de una parábola, colocando el nombre de ésta. Lo anterior se puede observar en la figura 198.

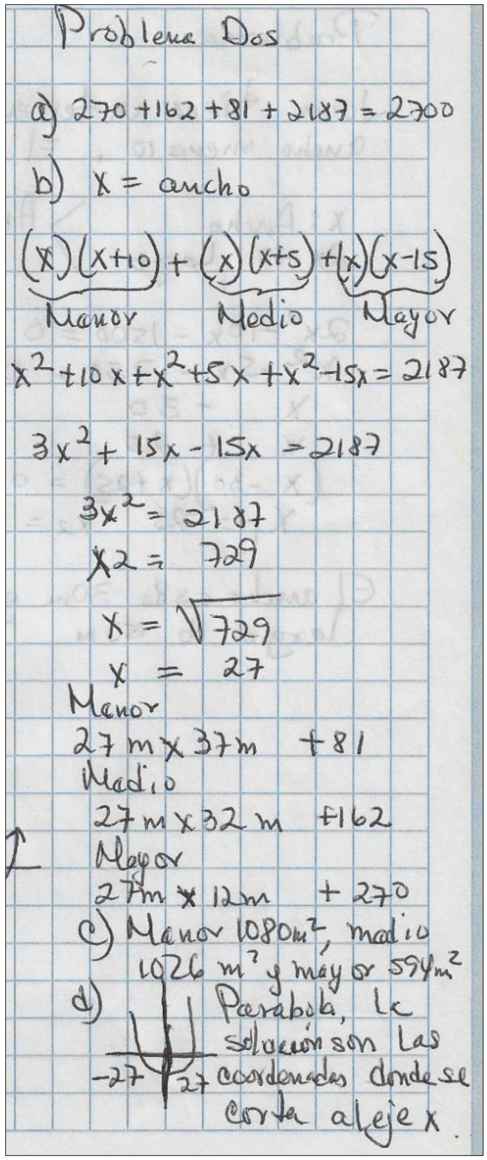


c) Sumamos lo que cada una tomó:
Menor: $999 + 81\ m^2 = 1080\ m^2$
Medio: $864 + 162\ m^2 = 1026\ m^2$
Mayor: $324 + 270\ m^2 = 594\ m^2$
$2700\ m^2$

d) Parábola

Figura 198. Parte dos de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E2.

La aportación que realiza el E3 para el problema dos del desarrollo es la siguiente:



Problema Dos

a) $270 + 162 + 81 + 2187 = 2700$

b) x = ancho

$$\underbrace{(x)(x+10)}_{\text{Menor}} + \underbrace{(x)(x+5)}_{\text{Medio}} + \underbrace{(x)(x-15)}_{\text{Mayor}}$$

$$x^2 + 10x + x^2 + 5x + x^2 - 15x = 2187$$

$$3x^2 + 15x - 15x = 2187$$

$$3x^2 = 2187$$

$$x2 = 729$$

$$x = \sqrt{729}$$

$$x = 27$$

Menor

27 m x 37 m + 81

Medio

27 m x 32 m +162

Mayor

27m x 12m + 270

c) Menor 1080m², medio 1026 m² y mayor 594m²

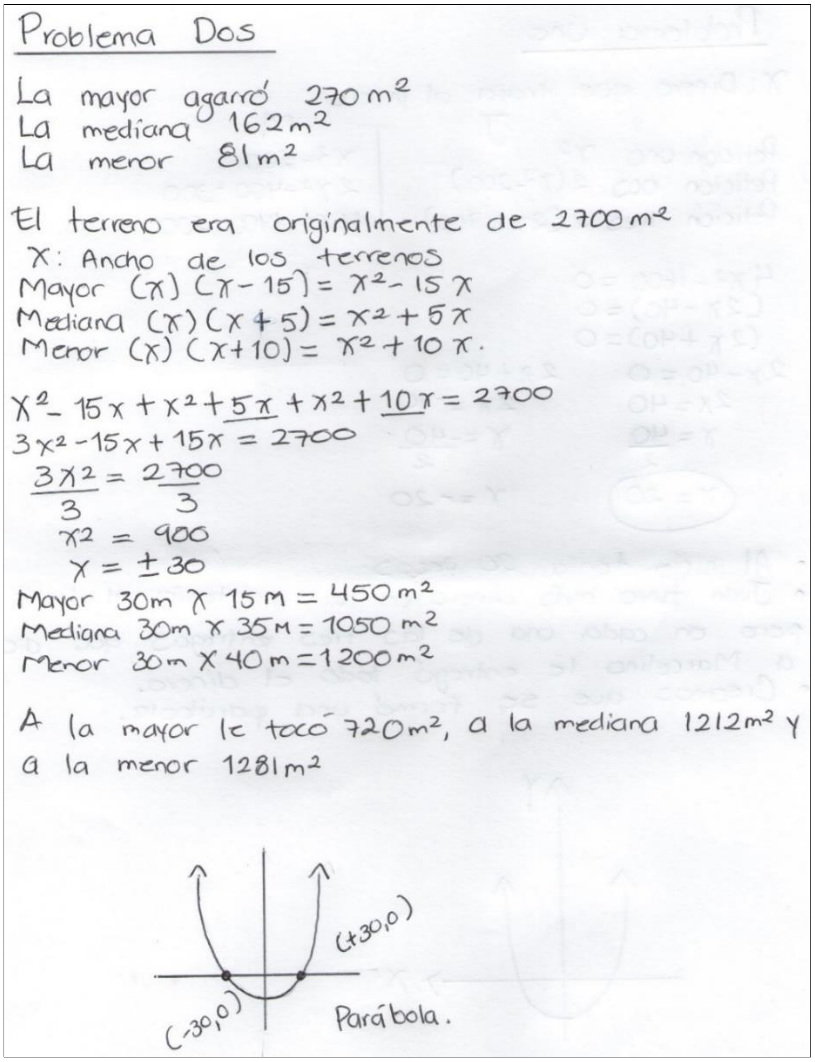
d) Parábola, la solución son las coordenadas donde se corta al eje x.

Figura 199. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E3.

Para responder la primera pregunta el E3 realizó una suma de las medidas de las áreas tomadas previamente por cada una de las hijas y del área obtenida con la medición de Don Pancho, obteniendo así la respuesta correcta. Para dar solución a la segunda pregunta, definieron como x al ancho de los terrenos, de manera algebraica plantearon las dimensiones de cada uno de los terrenos, formaron una ecuación cuadrática y la resolvieron mediante un despeje directo, la única solución encontrada fue 27. Con este valor encontraron de manera correcta las dimensiones de los terrenos y para la tercera pregunta, determinaron las áreas de los terrenos que correspondió a cada una de las hijas y le agregaron el área que cada una ya había tomado antes, así, obtuvieron la respuesta esperada a esta pregunta.

Para la última pregunta realizan un análisis, determinan que se formó una parábola, realizan el bosquejo de ésta y comentan que las soluciones de la ecuación cuadrática son las coordenadas donde se corta al eje x.

Ahora, en la figura 200 se puede apreciar la solución que el E4 brinda para el problema dos del desarrollo:


Problema Dos

La mayor agarró $270\ m^2$
La mediana $162\ m^2$
La menor $81\ m^2$

El terreno era originalmente de $2700\ m^2$
x: Ancho de los terrenos
Mayor $(x)(x-15) = x^2 - 15x$
Mediana $(x)(x+5) = x^2 + 5x$
Menor $(x)(x+10) = x^2 + 10x$.

$x^2 - 15x + x^2 + \underline{5x} + x^2 + \underline{10x} = 2700$
$3x^2 - 15x + 15x = 2700$
$\frac{3x^2}{3} = \frac{2700}{3}$
$x^2 = 900$
$x = \pm 30$
Mayor $30m \times 15\ m = 450\ m^2$
Mediana $30m \times 35m = 1050\ m^2$
Menor $30m \times 40\ m = 1200\ m^2$

A la mayor le tocó $720 m^2$, a la mediana $1212 m^2$ y a la menor $1281 m^2$

Figura 200. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E4.

Para la pregunta número uno este equipo realiza una suma, considerando el área que se obtuvo de la medición realizada por Don Pancho y el área que cada hija había tomado antes de esta medición, por lo cual obtienen que el área original del terreno es de $2700\ m^2$. Para responder a la segunda pregunta definen x como el ancho de los terrenos, de manera algebraica representan las dimensiones de cada uno de los terrenos de las hijas, plantean una ecuación cuadrática, pero se equivocan ya que, la igualan a 2700 cuando debió ser a 2187. La ecuación cuadrática la resuelven mediante un despeje directo, consideran dos soluciones, una positiva y una negativa, por el contexto del problema consideran como respuesta el valor positivo, sin embargo, por el error cometido ya no responden correctamente la pregunta dos. La respuesta a la pregunta tres al estar relacionada con la pregunta dos, resultó ser incorrecta, de hecho, cuando se suman las medidas dadas por el E4 se observó que se obtiene un área mayor al área original, sin embargo, no observan esta situación.

Para la pregunta cuatro se observa que solo realizaron el bosquejo de la parábola, colocaron el nombre de ésta y las coordenadas de intersección con el eje x, sin embargo, no profundizaron más.

El E5 realizó lo siguiente para responder el problema dos del desarrollo:

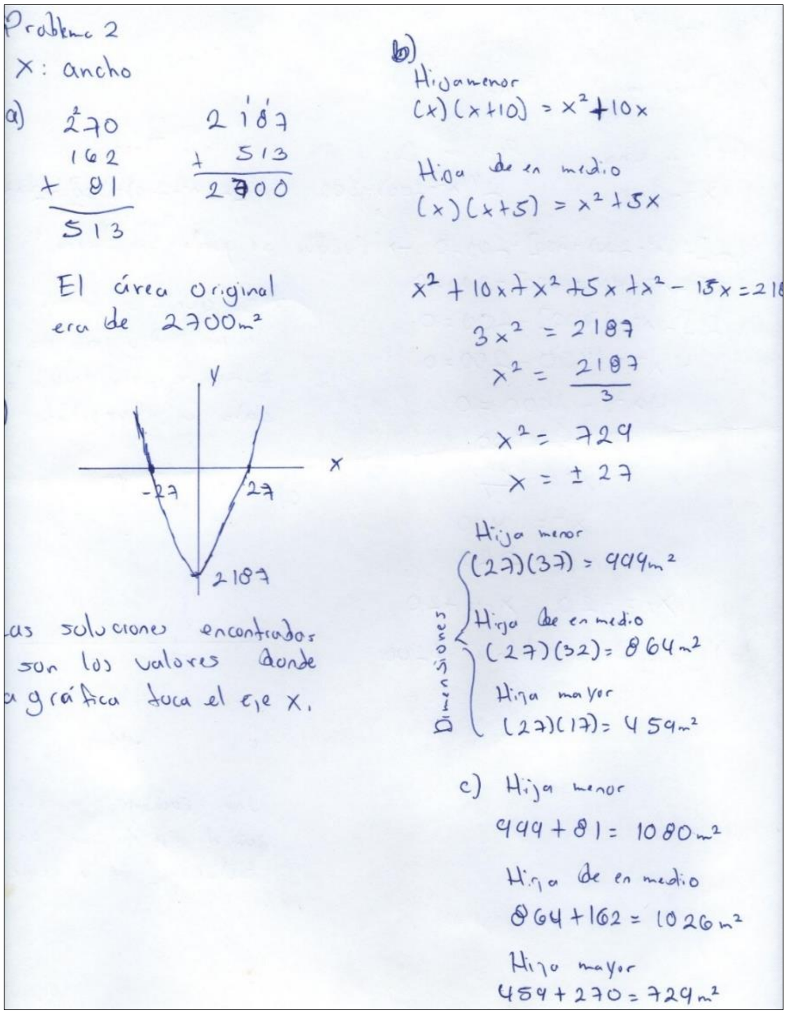


Figura 201. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E5.

Para responder a la pregunta uno el E5 realiza la suma de las áreas que cada hija había tomado previamente a la medición, obteniendo 513 m^2, lo suman con el área que obtuvo Don Pancho de la medición que realiza, por lo cual la respuesta que dan a la primera pregunta es que el área del terreno original mide $2700\, m^2$. Para la pregunta dos, plantean de manera algebraica las dimensiones de cada terreno (no se aprecian las dimensiones del terreno de la hija mayor), plantean correctamente la ecuación cuadrática y la resuelven por un despeje directo, consideran como soluciones de la ecuación cuadrática al 27 y -27.

Responden a la pregunta dos, considerando como medida del ancho de los terrenos 27 metros, las dimensiones de los terrenos de las hijas menor y mediana son correctas, pero, las dimensiones del terreno correspondiente a la hija mayor son incorrectos, debieron ser $27\, m \times 12\, m$ pero la respuesta que da este equipo es $27\, m \times 17\, m$. Este error afecta en la solución de la pregunta tres, brindan correctamente el área que en realidad correspondió a las hijas menor y mediana, pero el de la hija mayor es incorrecto, incluso con la suma de las medidas de estas áreas era posible observar que se pasaba de la medida del área original del terreno.

En cuanto a la pregunta cuatro este equipo si realiza un análisis de lo que representan gráficamente las soluciones de la ecuación cuadrática. Realizan el bosquejo de una parábola y comentan que "las soluciones encontradas son los valores donde la gráfica toca al eje x".

A continuación, se presenta la solución que el E6 realizó para el problema dos del desarrollo:

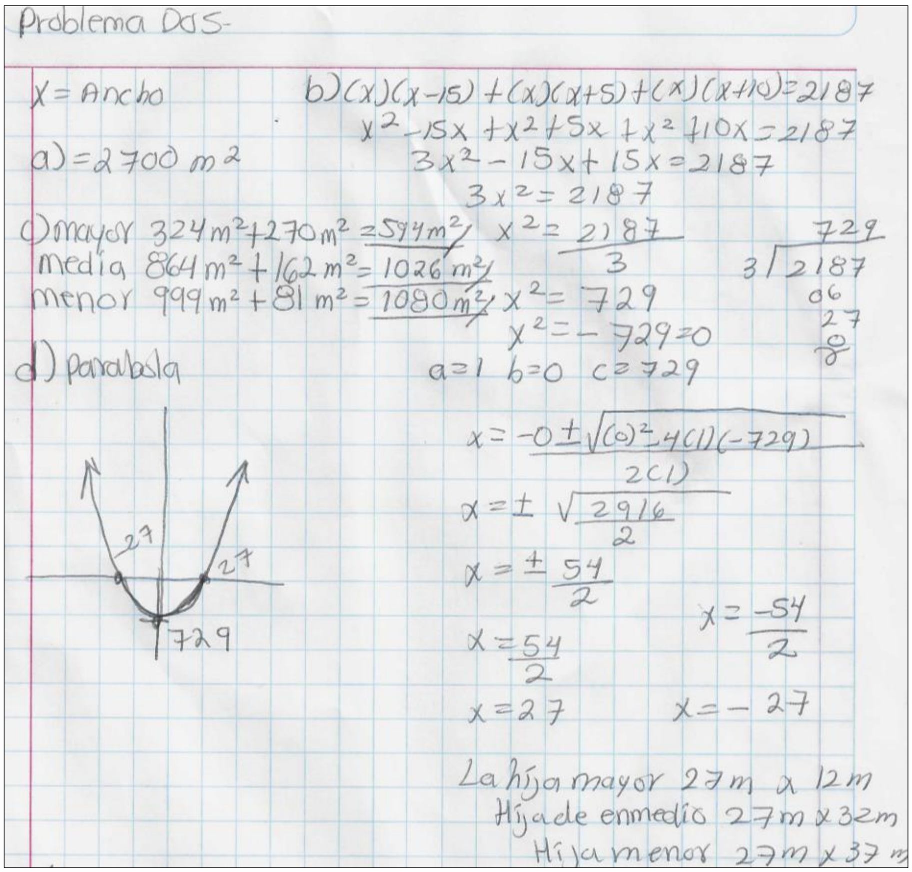
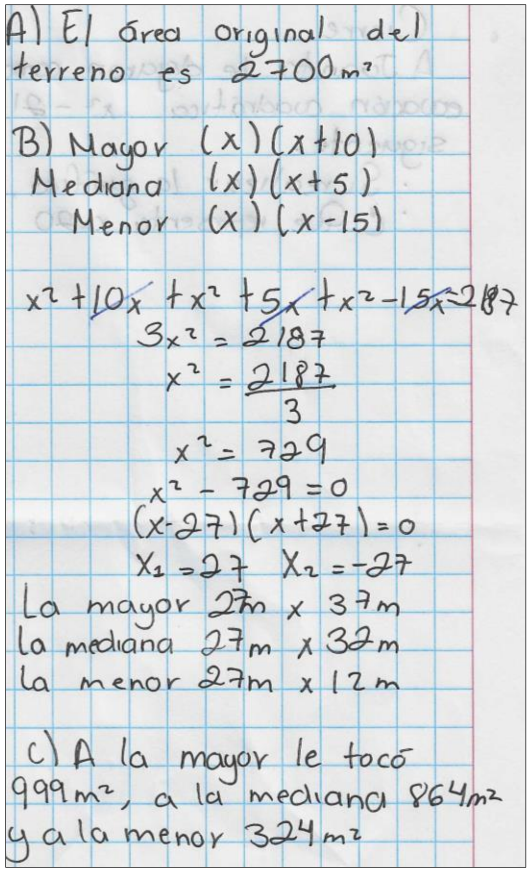


Figura 202. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E6.

Para la pregunta uno el equipo brinda la solución correcta, en este caso $2700\ m^2$, sin embargo, no brinda el procedimiento para obtener dicha respuesta, se infiere que se trató de un procedimiento aritmético. Para dar respuesta a la pregunta dos definen x como el ancho de los terrenos, de manera algebraica expresan las dimensiones de cada uno de los terrenos de las hijas, forman una ecuación cuadrática, la cual es correcta y la resuelven haciendo uso del método de la fórmula general, encuentran dos soluciones, 27 y -27.

Brindan las dimensiones de cada uno de los terrenos, considerando como ancho de cada terreno 27 metros, por lo cual la respuesta de la pregunta dos es correcta. La respuesta que el equipo da a la tercera pregunta es correcta, determinan las áreas del terreno de cada una de las hijas y le suman lo que cada una había tomado previo a la medición de Don Pancho. Para la pregunta cuatro, realizan el bosquejo de la parábola, colocan el nombre de ésta pero no realizan un análisis de lo que representan gráficamente las soluciones de la ecuación cuadrática que previamente ya habían resuelto.

Para el problema dos del desarrollo el equipo E7 realizó lo siguiente:



A) El área original del terreno es $2700 m^2$

B) Mayor $(x)(x+10)$
Mediana $(x)(x+5)$
Menor $(x)(x-15)$

$$x^2 + \cancel{10x} + x^2 + \cancel{5x} + x^2 - \cancel{15x} = 2187$$
$$3x^2 = 2187$$
$$x^2 = \frac{2187}{3}$$
$$x^2 = 729$$
$$x^2 - 729 = 0$$
$$(x-27)(x+27) = 0$$
$$X_1 = 27 \quad X_2 = -27$$

La mayor 27m x 37m
la mediana 27m x 32m
la menor 27m x 12m

c) A la mayor le tocó $999 m^2$, a la mediana $864 m^2$ y a la menor $324 m^2$

Figura 203. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E7.

El E7 responde a la primera pregunta de manera correcta, no se observa el procedimiento empleado, posiblemente emplearon una suma como la gran mayoría de los otros equipos. Para responder a la segunda pregunta plantean de manera algebraica las dimensiones de cada uno de los terrenos que corresponden a las hijas. No escriben lo que representa la incógnita x, pero se asume que la consideran como la medida del ancho de los terrenos. Plantean una ecuación cuadrática, la simplifican y la resuelven mediante la factorización por diferencia de cuadrados, encuentran dos valores como solución, pero únicamente consideran que el valor positivo es la solución de acuerdo con el contexto del problema. Al momento de expresar los resultados de la segunda pregunta, invierten las medidas de los terrenos de las hijas mayor y menor, por lo cual, solo determinan de manera correcta las dimensiones del terreno de la hija de en medio.

Este error cometido les afecta al momento de responder la tercera pregunta y además para responder a esta pregunta no consideran que cada hija ya había tomado cierta parte del terreno, esto, antes de la medición realizada por Don Pancho. Por lo cual, la tercera pregunta es respondida de manera incorrecta. Este equipo no responde a la última pregunta, posiblemente un factor que les afectó fue el tiempo, sin embargo, basándonos en el análisis gráfico de las soluciones que brindaron al problema uno del desarrollo posiblemente el equipo realizaría algo similar para este problema.

El E8 realizó lo siguiente para el problema dos del desarrollo:

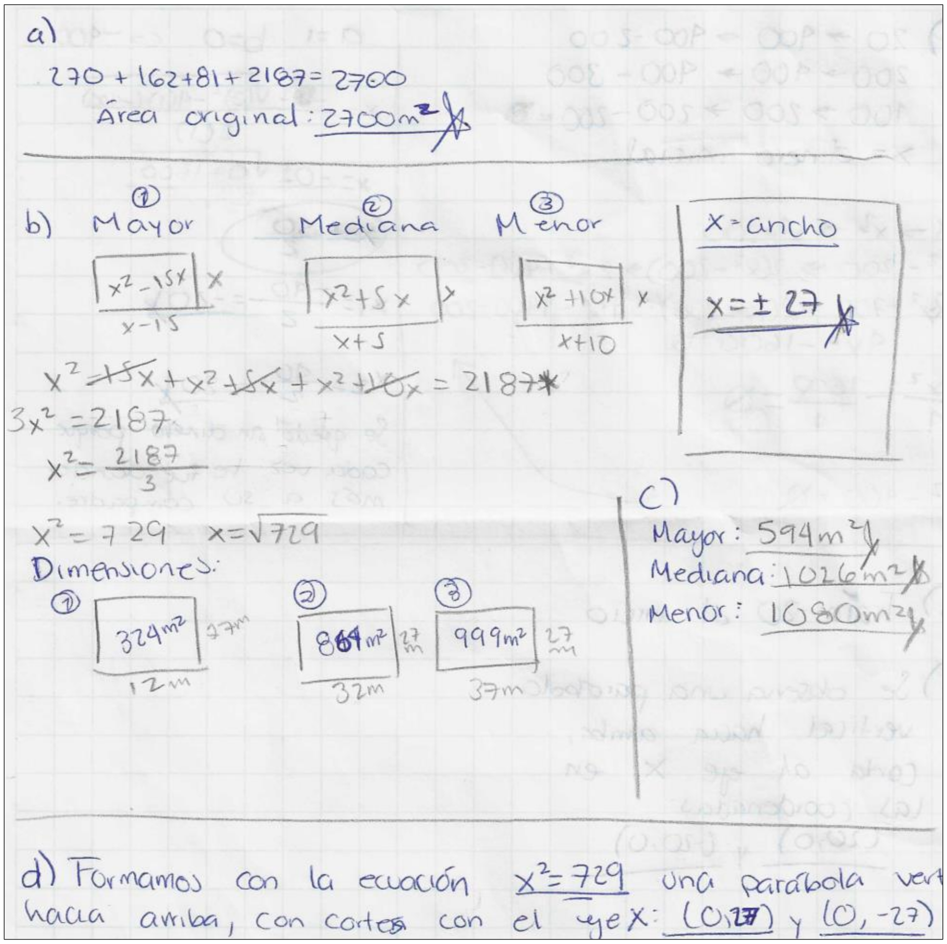
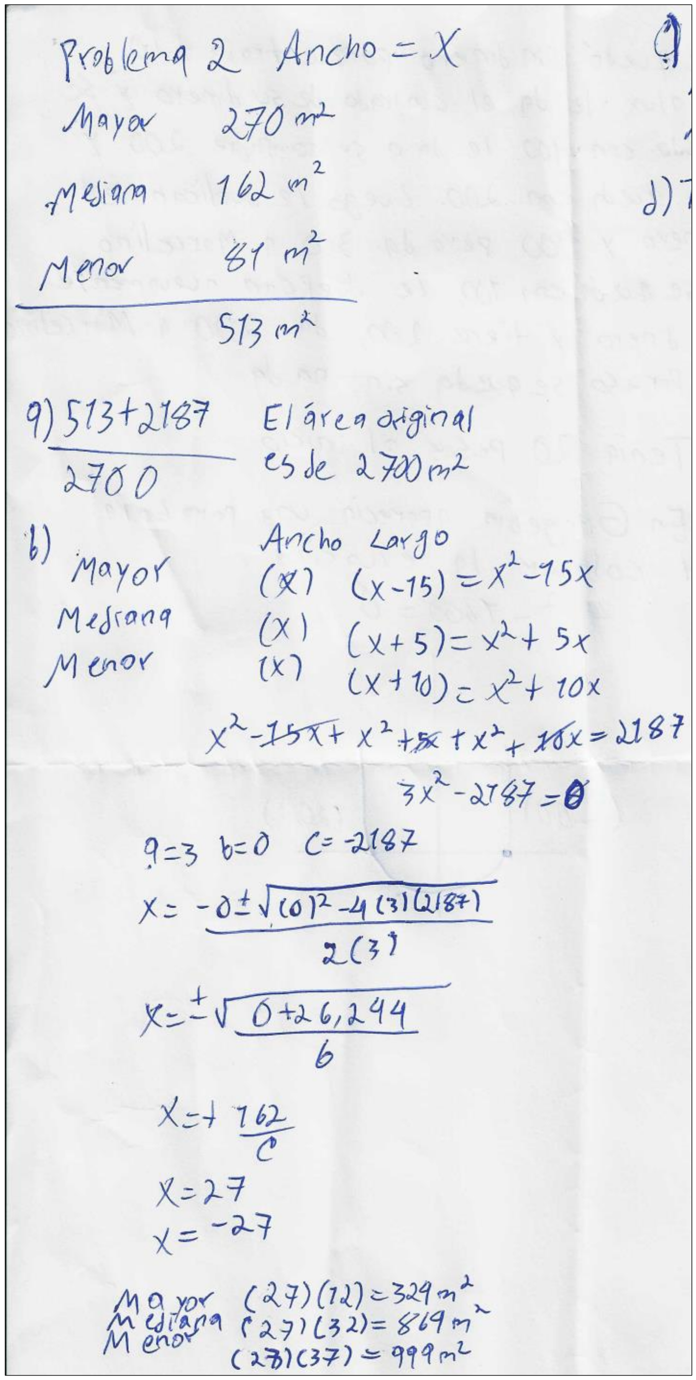


Figura 204. Resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E8.

El E8 emplea una estrategia de tipo aritmética para responder a la primera cuestión, de hecho, plantean la suma que realizaron para llegar a la solución correcta. Para responder a la segunda definen a la incógnita x como ancho, hacen unas representaciones geométricas de los terrenos de las tres hijas, definen de manera algebraica las dimensiones, así como el área de cada terreno. Luego plantean una ecuación cuadrática y la resuelven mediante un despeje directo, encuentran dos soluciones, pero solo consideran la solución positiva como un valor que satisface las condiciones de la problemática.

Para brindar la respuesta a la segunda cuestión realizan nuevamente representaciones geométricas de los tres terrenos. La tercera pregunta se relaciona con los datos obtenidos en la segunda cuestión, consideran además las áreas que cada hija tomó antes de la repartición que realizó el papá, responden de manera correcta a esta tercera pregunta. Para la última pregunta no realizan el bosquejo de alguna parábola, pero sí señalan que con la ecuación cuadrática formaron una parábola vertical que abre hacia arriba, señalan las coordenadas de corte con el eje x, no lo escriben, pero posiblemente sí encontraron la relación entre las soluciones encontradas de manera algebraica con la representación gráfica realizada.

Se presenta a continuación la resolución que el E9 dio al problema dos del desarrollo:



Problema 2 Ancho = X

Mayor $270\ m^2$

Mediana $162\ m^2$

Menor $81\ m^2$

$513\ m^2$

a) $513 + 2187 = 2700$ El área original es de $2700\ m^2$

b) Ancho Largo

Mayor (x) $(x-15) = x^2 - 15x$

Mediana (x) $(x+5) = x^2 + 5x$

Menor (x) $(x+10) = x^2 + 10x$

$x^2 \cancel{-15x} + x^2 \cancel{+5x} + x^2 + \cancel{10x} = 2187$

$3x^2 - 2187 = 0$

$a=3$ $b=0$ $c=-2187$

$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(3)(2187)}}{2(3)}$

$x = \frac{\pm\sqrt{0 + 26{,}244}}{6}$

$x = \pm \frac{162}{6}$

$x = 27$

$x = -27$

Mayor $(27)(12) = 324\ m^2$

Mediana $(27)(32) = 864\ m^2$

Menor $(27)(37) = 999\ m^2$

Figura 205. Parte uno de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E9.

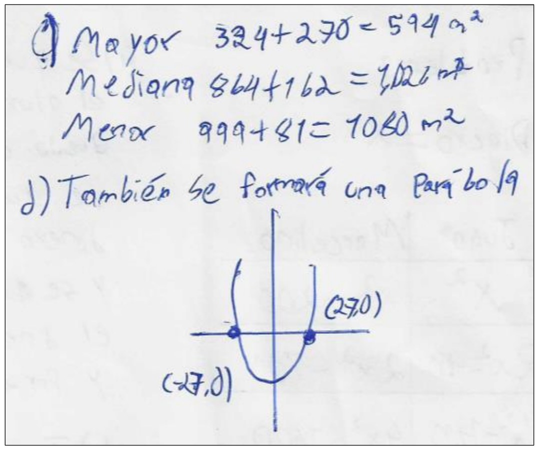


Figura 206. Parte dos de la resolución del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres), E9.

Para el problema dos del desarrollo el E9 respondió la primera pregunta haciendo uso de una estrategia de tipo aritmética, sumaron las áreas que previamente a la medición de Don Pancho cada una de las hijas había tomado, a esto le suman lo que obtuvo Don Pancho de la medición y obtuvieron que el área original del terreno es de $2700\ m^2$. Para responder a la segunda cuestión el equipo realiza una estrategia algebraica, definen x como el ancho de los terrenos y representan las dimensiones de cada uno de los terrenos, forman una ecuación cuadrática y la resuelven por medio de la fórmula general.

Al resolver la ecuación encuentran dos valores que son solución de la ecuación, -27 y 27, sin embargo, al momento de expresar las dimensiones de los terrenos solo consideran el valor positivo, así responden de manera correcta a la segunda cuestión. Para la tercera pregunta, la cual hace referencia al área que realmente le tocó a cada una de las hijas, suman a las áreas que determinaron en la segunda pregunta lo que cada hija había tomado al inicio del problema y de esta manera, obtienen la respuesta correcta a esta tercera pregunta.

Para la última pregunta, señalan que "también se forma una parábola", al igual que como lo hicieron con la primera problemática brindan las coordenadas de las intersecciones de la parábola con el eje x, pero no realizan un análisis mayor.

Se observa que todos los equipos respondieron el problema dos del desarrollo, el cual estuvo dividido en cuatro preguntas. De los nueve equipos, todos emplearon un procedimiento de tipo algebraico (esto representa 100%). La primera pregunta, referente a cuál era la medida del terreno original fue respondida correctamente por los nueve equipos, esto representa al 100%.

Respecto a la pregunta dos, la cual cuestionaba las dimensiones de los terrenos que cada hija recibió, cinco equipos respondieron lo esperado, esto representa 55.55%. Dos equipos, lo cual representa 22.22% invirtieron las áreas de los terrenos correspondientes a las hijas mayor y menor por lo cual solo las dimensiones del terreno que le corresponde a la hija de en medio fueron correctas. Los otros dos equipos restantes (22.22%), plantearon de manera incorrecta la ecuación cuadrática.

Para la pregunta tres, referente a las áreas que en realidad le tocaron a cada una de las hijas, cinco equipos respondieron correctamente, es decir, 55.55%. Un equipo 11.11% solo coincidió con el área real que le correspondió a la hija de en medio, ya que, el invertir las áreas desde la pregunta dos afectó al resultado de la última cuestión. Los otros tres equipos (33.33%) no respondieron correctamente a la pregunta tres, ya que, dos de ellos desde el inicio plantearon de manera incorrecta la ecuación cuadrática y un equipo no consideró que cada hija ya había tomado cierta parte del terreno previo a la medición realizada por Don Pancho.

Para la última pregunta, dos equipos, E3 y E5 lograron identificar que las soluciones encontradas de manera algebraica al momento de resolver la ecuación cuadrática representan las abscisas de las coordenadas de intersección de la parábola con el eje x, representando así 22.22%. Los equipos E1, E4, E6, E8 y E9 que representan 55.55% del total de equipos señalaron cuáles eran las coordenadas de intersección con el eje x pero de manera explícita no comentaron que previamente ya habían encontrado los valores de las abscisas al resolver de manera algebraica a la ecuación cuadrática.

Los equipos E2 y E7 representan 22.22% del total de los equipos no realizaron un análisis de lo que representan gráficamente las soluciones que satisfacen a una ecuación cuadrática. El E2 realizó el bosquejo de una parábola y señalaron el nombre de ésta pero no realizaron un análisis mayor. El E7 no respondió a la pregunta cuatro.

Se podría comentar que 77.77% de los equipos lograron realizar un análisis y encontrar una relación entre las soluciones de una ecuación cuadrática y cómo éstas se pueden observar de manera gráfica. 22.22% de los equipos le faltó un análisis mayor, identifican que se forma una parábola, pero no analizaron lo que representan las soluciones.

En general, fueron cuatro equipos (44.44%) que respondieron correctamente las cuatro cuestiones que planteaba el problema dos. Es preciso mencionar que para este grupo de trabajo en su totalidad los equipos emplearon estrategias de tipo algebraicas para dar solución a las problemáticas.

Durante el desarrollo de la sesión se estuvo recorriendo el aula, pasando con cada equipo de trabajo, preguntando si existía alguna duda o pregunta, hubo más dudas para la solución del problema dos que para el problema uno. Para el problema dos se tenían dudas respecto a si la interpretación del problema era correcta, de acuerdo con lo que habían leído.

Al término del tiempo destinado para la resolución de los ejercicios se realizó la retroalimentación de los dos problemas del desarrollo, para ello se proyectó la pizarra digital y ahí escuchando las aportaciones de cada equipo se fue realizando de manera sincrónica la resolución de cada ejercicio. Se presenta a continuación la resolución completa de cada problema.

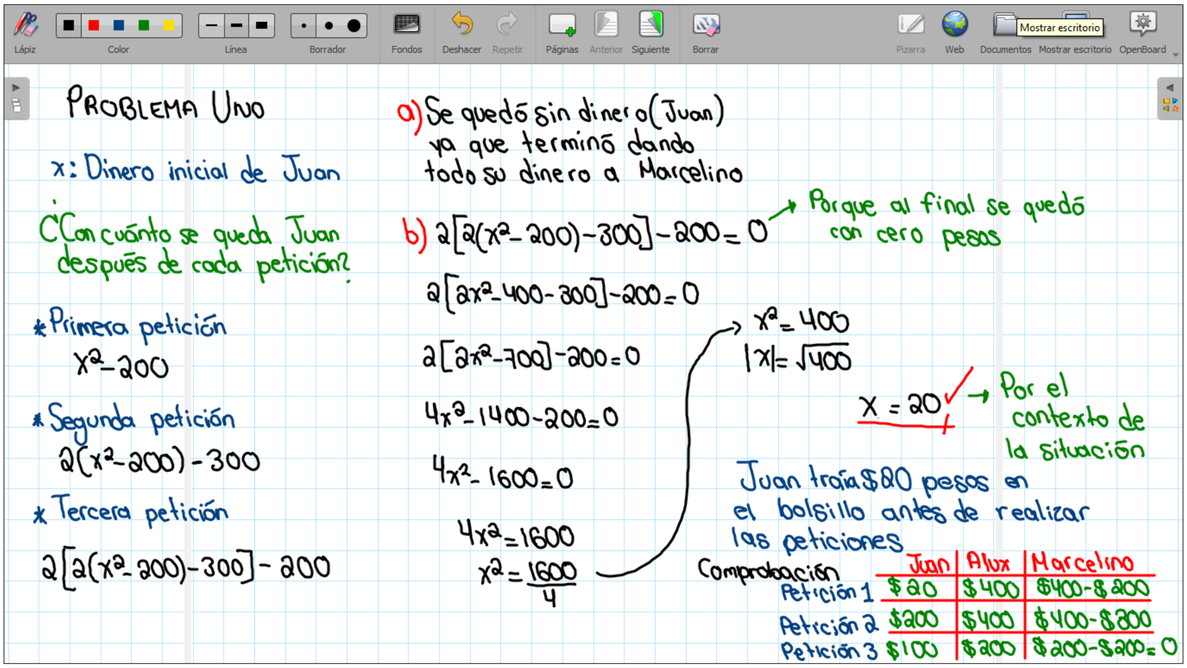


Figura 207. Parte uno de la retroalimentación del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres).

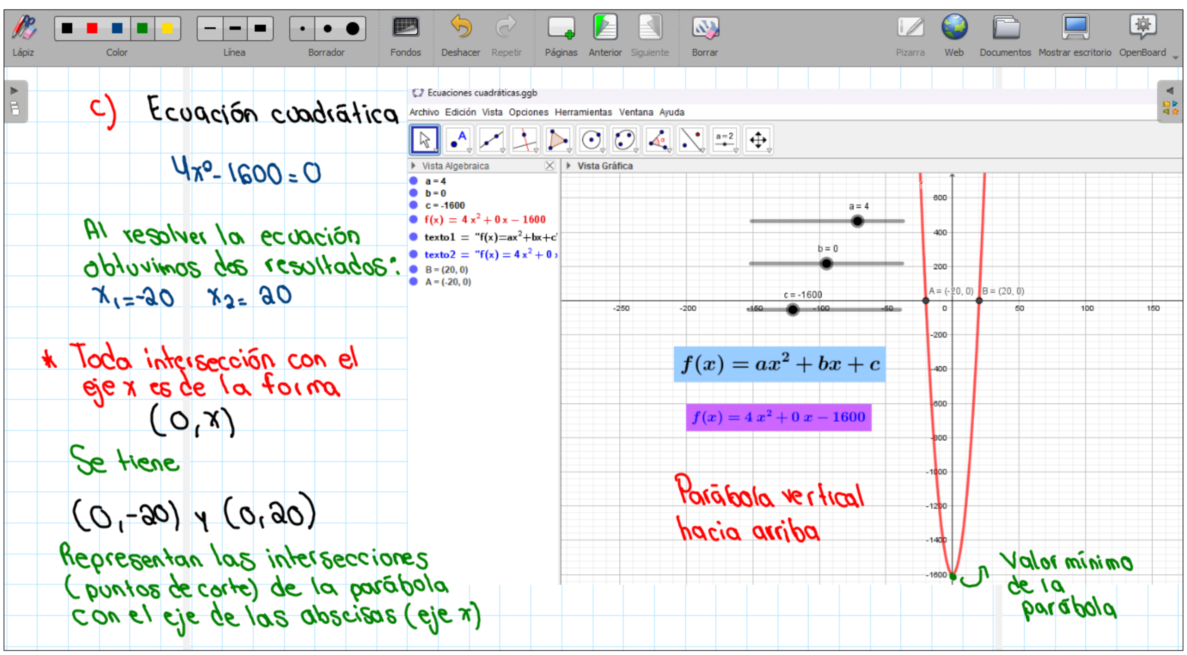


Figura 208. Parte dos de la retroalimentación del problema uno del desarrollo (secuencia didáctica tres).

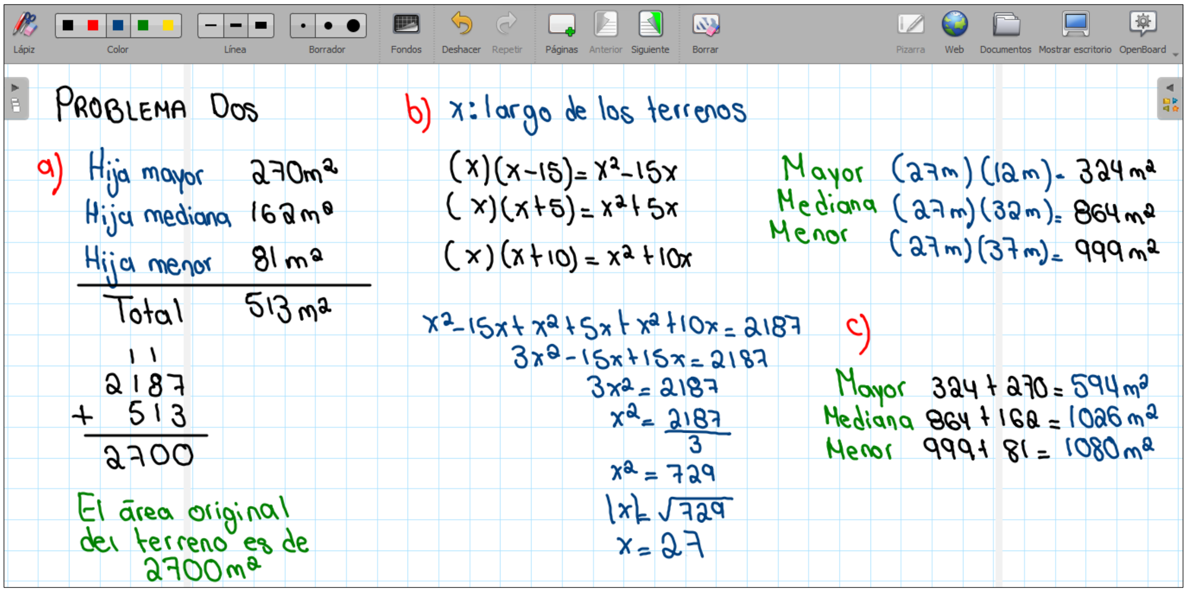


Figura 209. Parte uno de la retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres).

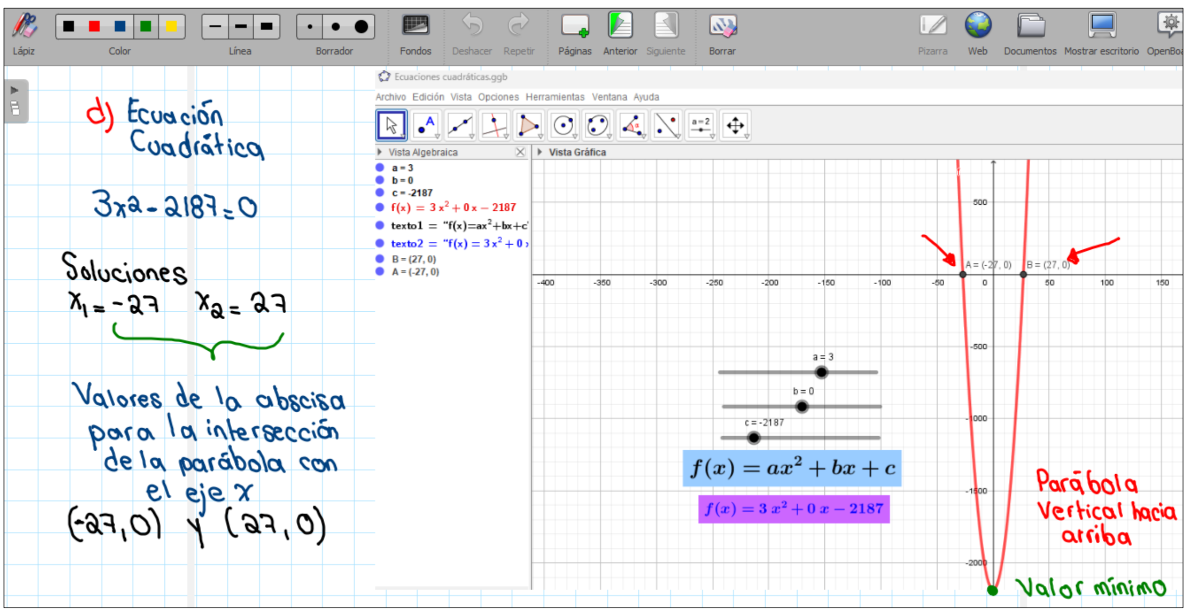


Figura 210. Parte dos de la retroalimentación del problema dos del desarrollo (secuencia didáctica tres).

Al término de la retroalimentación se procedió a continuar con la actividad de cierre, la cual consistió en el diseño de una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado completa, incluyendo el análisis gráfico de las soluciones. La modalidad de resolución fue de manera individual.

Fueron 38 alumnos que debían resolver de manera individual dicho problema. De los 38 alumnos, 30 alumnos lograron plantear correctamente una situación problemática que propiciaba el planteamiento de una ecuación cuadrática, la resolución de ésta y el análisis gráfico de las soluciones. Durante el planteamiento de la problemática de cierre los alumnos no recibieron ninguna ayuda de parte del docente.

En general, las problemáticas planteadas por los alumnos se pueden agrupar en cinco apartados, a saber, edades, áreas, números, dinero y problemas variados. De los 30 alumnos, 5 plantearon problemáticas relacionadas con edades, 11 alumnos relativas a áreas, 4 alumnos relacionados con números, 4 alumnos relacionados a dinero y 6 alumnos realizaron problemáticas variadas.

Se presentan a continuación siete de las problemáticas planteadas, uno de edades, uno de áreas, uno de número, uno de dinero y tres de problemas variados.

Fueron cinco alumnos los que plantearon una situación que involucraba edades, en este caso, la estructura del problema era mencionar a dos personas, la relación entre sus edades y a partir de esto se podría plantear una ecuación cuadrática, se solicitaba determinar las edades de ambas personas. En la figura 210 se presenta un ejemplo de este tipo de problemática, en este caso se mencionan dos personas Juan y Carlos, la relación entre sus edades y se menciona que el producto de sus edades es igual a 8, lo cual da lugar a una ecuación cuadrática. En este ejemplo se plantea la ecuación cuadrática, no se aprecia la definición de las incógnitas, la ecuación se resuelve haciendo uso de la factorización, la cual es correcta, se realiza un bosquejo de la parábola que representa la ecuación cuadrática, se ubican correctamente las intersecciones con el eje x, sin embargo, se observa que determinaron de manera incorrecta la coordenada del punto mínimo de la parábola.

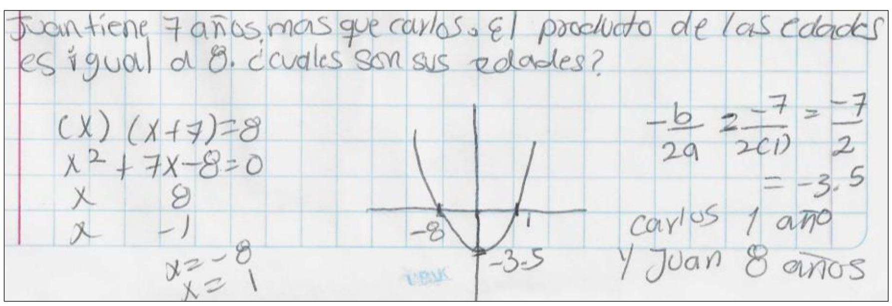


Figura 211. Problemática planteada relativa a edades (secuencia didáctica tres).

Para las problemáticas relativas a áreas fueron once alumnos los que plantearon este tipo de situaciones. La estructura de estas problemáticas consistía en mencionar el largo y ancho de un terreno rectangular (aunque algunos no lo mencionaban explícitamente), se proporcionaba el área del terreno y se solicitaba encontrar las dimensiones de éste. En la figura 211 se presenta un ejemplo de una problemática relativa a áreas, en este caso se menciona que el largo mide el doble de la medida del ancho, menos 10 (no lo menciona, pero se deduce que hace referencia a metros). Se realiza la definición de incógnitas, se plantea la ecuación cuadrática, se reduce y posteriormente se resuelve haciendo uso de la factorización, la interpretación de la solución es correcta y se presenta el bosquejo de la parábola que representa gráficamente la ecuación cuadrática, se colocan correctamente las intersecciones con el eje x pero hay un error en el punto mínimo de la parábola.

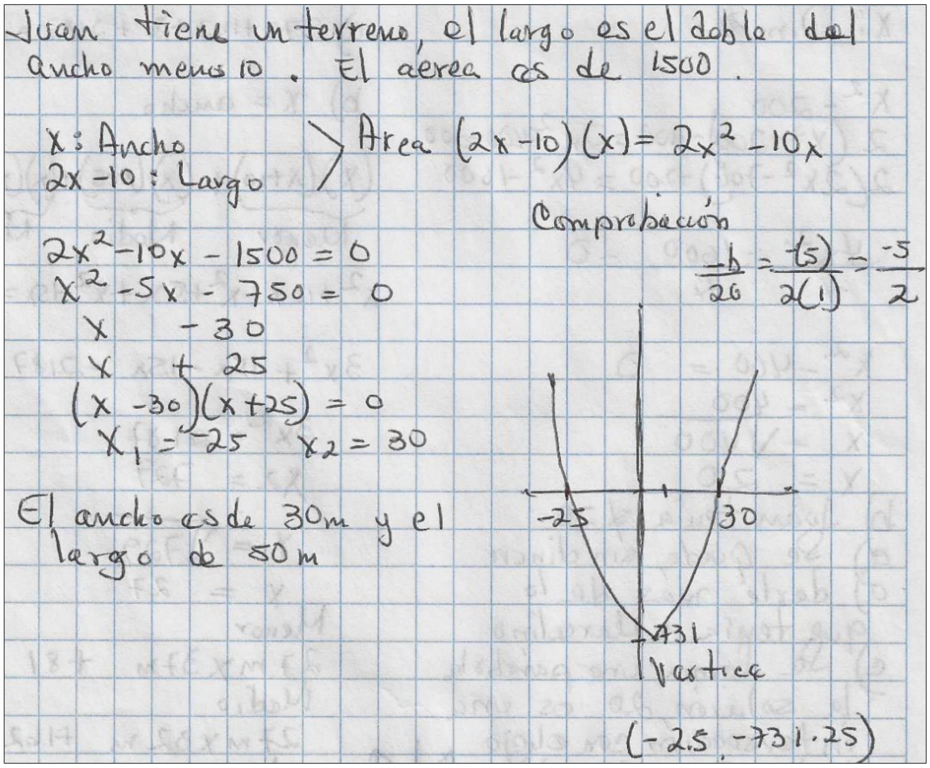


Figura 212. Problemática planteada relativa a áreas (secuencia didáctica tres).

Se presenta a continuación un ejemplo referente a una problemática que involucraba números.

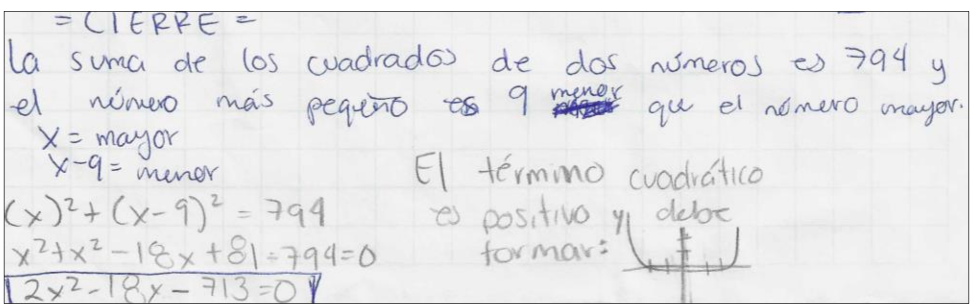


Figura 213. Problemática planteada relativa a números (secuencia didáctica tres).

Fueron cuatro los alumnos los que plantearon una situación que involucraba números, la problemática se basaba en dos números y las relaciones que guardaban entre sí, estas relaciones facilitaban el planteamiento de una ecuación cuadrática. En el ejemplo de la figura 212, se observa que se definen las incógnitas, se plantea la ecuación cuadrática pero no se resuelve, se señala que como el término cuadrática es positivo se debe formar una parábola y se realiza el bosquejo de una parábola vertical que abre hacia arriba.

Se presenta a continuación un ejemplo de la problemática relativa a dinero.

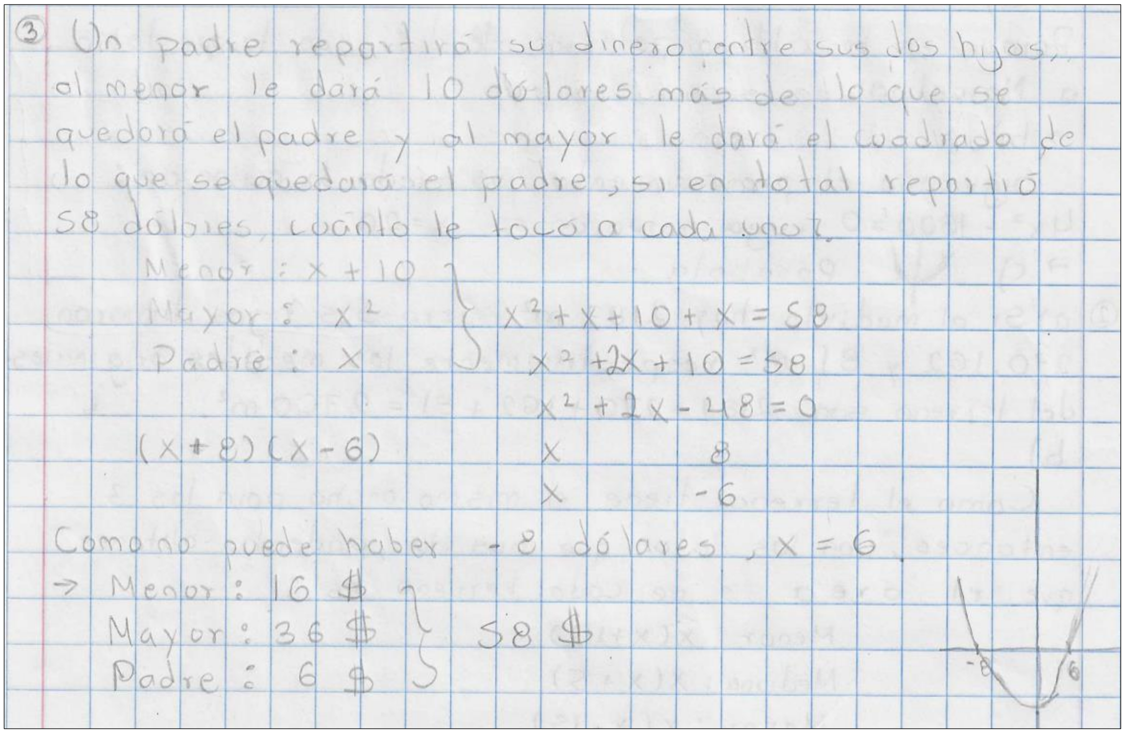


Figura 214. Problemática planteada relativa a dinero (secuencia didáctica tres).

Fueron cuatro alumnos los que plantearon una problemática referente a dinero. La estructura de este tipo de problemática se basaba en mencionar por lo regular a dos personas y la relación entre las cantidades de dinero que poseen, esto, propiciaba el planteamiento de una ecuación cuadrática y se solicitaba determinar la cantidad de dinero que posee cada persona. En la figura 213 se puede observar un ejemplo de problemática relativa a dinero, algo interesante es que este alumno fue el único que considero tres personas en el contexto de la situación, define sus incógnitas, plantea la ecuación y la resuelve correctamente haciendo uso de la técnica de factorización. Para la interpretación de los resultados explica que no se puede hablar de una cantidad negativa de dinero, coloca el dinero que le corresponde a cada persona y realiza el bosquejo de la parábola que modela la ecuación cuadrática planteada, en la parábola se observa que señala correctamente las intersecciones con el eje x, no señala la coordenada del punto mínimo.

En cuanto a las problemáticas de tipo variadas fueron seis los alumnos que plantearon este tipo de problemáticas. En la figura 214 se presenta un ejemplo de este tipo de problemática, ésta resulta interesante, ya que, el alumno emplea una ecuación cuadrática donde el coeficiente del término cuadrático es negativo. En este problema la ecuación cuadrática ya se brinda planteada, se menciona que modela la ganancia de una pequeña empresa, dónde la variable x representa el número de unidades, se pregunta que cuándo la ganancia será cero.

Para la solución se deduce que emplea el software de GeoGebra (incluso lo señalan), traza el bosquejo de la parábola vertical que abre hacia abajo, así como las intersecciones de ésta con el eje de las abscisas. Es preciso mencionar que brinda la solución lógica de acuerdo con el contexto del problema, pues no tiene lógica colocar un número de unidades negativas.

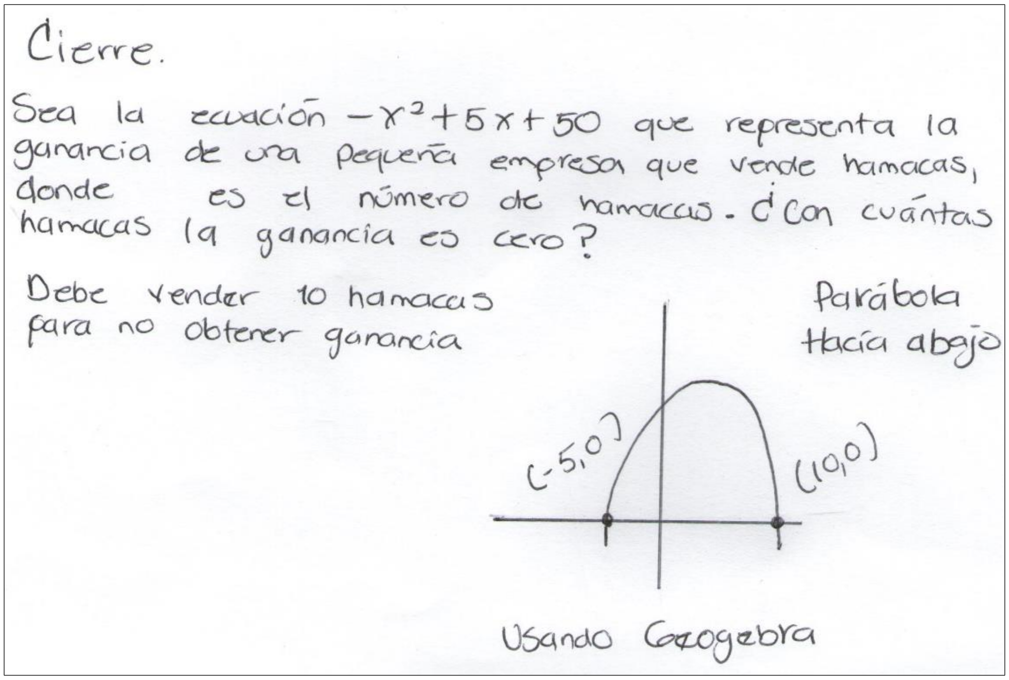


Figura 215. Primer ejemplo de problemática variada (secuencia didáctica tres).

Otro ejemplo de problemática variada se puede observar en la figura 215, en realidad no es una problemática es una situación que trabaja lo intramatemático, este estudiante realiza el bosquejo de una parábola vertical que abre hacia arriba, en los ejes coordenados se aprecian los valores dónde la parábola corta al eje de las abscisas, de igual manera se observa el valor del punto mínimo. Con base en este bosquejo se realiza la cuestión ¿cuál es la ecuación cuadrática que representa?, en este caso se observa un procedimiento algebraico para encontrar la ecuación cuadrática, la ecuación encontrada no es cuadrática completa, sin embargo, el ejercicio planteado resultó interesante.

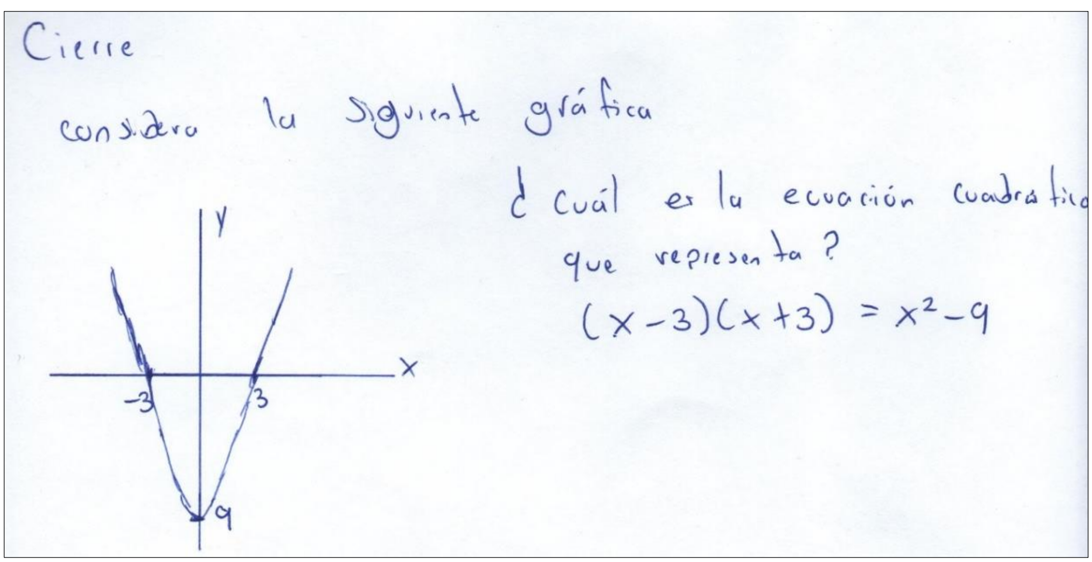


Figura 216. Segundo ejemplo de problemática variada (secuencia didáctica tres).

En la figura 216 se puede observar un último ejemplo de problemática variada que plantearon los alumnos, en este caso no resuelven la problemática, pero es interesante el planteamiento realizado. El planteamiento de esta situación implica el trabajo con una ecuación cuadrática (la ecuación ya está planteada), se realizan dos cuestiones, la primera hace referencia a qué si se realiza la gráfica qué se genera y la segunda, brinda dos valores de x, y se pregunta qué representan. Es preciso mencionar que estos valores brindados son los que se obtienen al resolver la ecuación cuadrática.

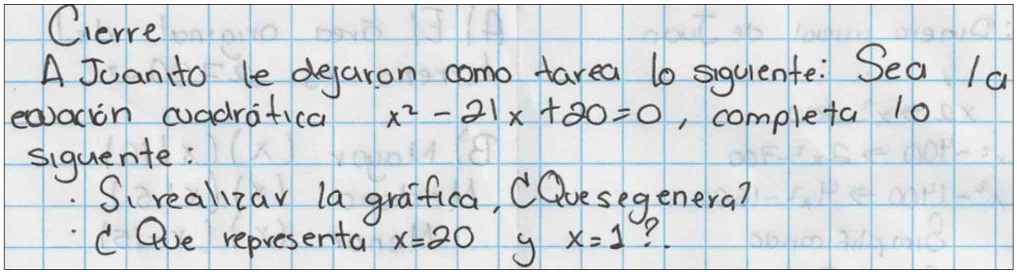


Figura 217. Tercer ejemplo de problemática variada (secuencia didáctica tres).

Estas problemáticas planteadas (variadas) son interesantes, ya que, en el contexto escolar no es común que se trabajen, con lo planteado se deduce que los alumnos realizaron un análisis de la relación que existe entre la solución algebraica de una ecuación cuadrática y cómo esto se puede observar de manera gráfica.

La actividad de cierre pareció interesar al alumnado, pues se invirtió lo que usualmente se les pide, no se les pidió resolver un problema ya planteado, se les pidió que ellos plantearan un problema que se pudiera modelar con una ecuación cuadrática y que además pudieran realizan un análisis geométrico de las soluciones. Esto, implica la movilización de varias herramientas cognitivas, es necesario conocer las características de una ecuación cuadrática para poder movilizar las herramientas matemáticas que poseen y plantear estos problemas.

Al término de la entrega de lo que realizaron durante el momento de cierre, por medio de la plataforma de trabajo institucional (UADY virtual) se le proporcionó a cada alumno el enlace para responder la autoevaluación correspondiente a la aplicación de la actividad diagnóstica y la secuencia didáctica tres.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN SOBRE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS

Este cuestionario constó de 11 preguntas, fue el mismo que se aplicó con el grupo uno y dos de trabajo. Fue un cuestionario en línea, por lo cual fue una actividad a distancia, sin presión de tiempo. Se les recalcó la importancia de realizar dicha actividad. Se presentan a continuación los resultados obtenidos con el grupo tres.

1. Grupo al que perteneces.

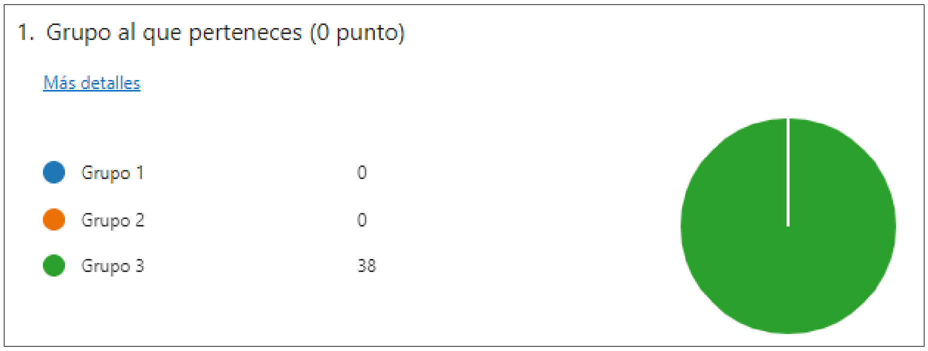


Figura 218. Pregunta uno del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

El grupo tres se conformó por 41 alumnos, quienes respondieron la actividad diagnóstica, pero para la sesión de la aplicación de la secuencia didáctica acudieron 38 alumnos, se observa que estos 38 alumnos respondieron la actividad de autoevaluación.

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

2. ¿Cuáles fueron las dificultades a las que te enfrentaste al realizar las actividades del diagnóstico?

38 Respuestas

23	anonymous	En las operaciones de simplificación de expresiones
24	anonymous	Dificultades para responder el problema aplicativo
25	anonymous	Se me complicó los ejercicios de sucesiones y de simplificar las expresiones
26	anonymous	Me equiviqué en el ejercicio 4 de resolver la ecuación
27	anonymous	En las operaciones que tenían parentesis, creí que eran multiplicación
28	anonymous	No logré terminar el último problema
29	anonymous	Casi todo, en los últimos dos ejercicios no los resolví
30	anonymous	Tuve problemas para resolver el problema del terreno
31	anonymous	En el ejercicios tres dónde debiamos expresar de manera simbolica los enunciados

Figura 219. Pregunta dos del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

La figura 218 muestra algunas de las respuestas brindadas por los alumnos, con las respuestas dadas se puede observar que las dificultades fueron diversas, pero la dificultad que tuvo la mayor frecuencia fue la referente a dificultades en torno al problema aplicativo.

3. ¿Lograste superarlas?

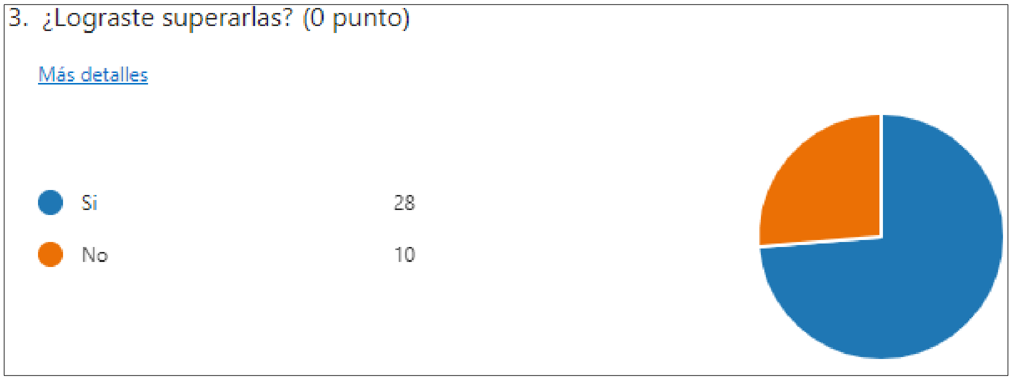


Figura 220. Pregunta tres del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Se observa que fueron 28 alumnos los que comentaron que superaron las dificultades descritas en la pregunta 2 y los que dijeron no superaron las dificultades fueron 10 alumnos.

4. Para los que contestaron Sí a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

4. ¿Cómo lo hiciste?

28 Respuestas

13	anonymous	Con la explicación de la maestra
14	anonymous	Escuchando la retro de la actividad diagnóstica, si mejoré durante el trabajo en equipo
15	anonymous	Escuchando la retro y cómo lo resolvieron mis compañeros
16	anonymous	Escuchando la retro y las estrategias sugeridas por la profra
17	anonymous	Con la explicación pude ver los errores cometidos para no repetirlos
18	anonymous	Con la guía de la profesora, la retro de las actividades y las participaciones de mis compañeros
19	anonymous	Cuando explicaron las respuestas correctas vi que me equivoqué en un signo
20	anonymous	Prestar atención cuando dieron la retroalimentación y pregunté mis dudas

Figura 221. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó Sí en la pregunta 3 (grupo tres).

Con las respuestas de estos 28 alumnos se destaca el hecho de que mencionaran que la retroalimentación les ayudó, algunos mencionaron que les ayudó la guía dada por la profesora y también les ayudó el hecho de que preguntaran sus dudas.

5. Para los que respondieron que No a la pregunta 3 se presentaron los siguientes resultados:

5. ¿Qué aspectos influyeron para que no lo lograras?

10 Respuestas

1	anonymous	Me cuestan mucho las matemáticas
2	anonymous	Se me complicó mucho los problemas, a mi de por si me cuesta trabajo mate
3	anonymous	Los problemas aplicativos se me complican mucho
4	anonymous	Trabajando en equipo si puedo pero individual me cuesta
5	anonymous	La explicación fue correcta pero siempre se me complica plantear la ecuación de un problema
6	anonymous	Puedo resolver una ecuación si me la dan pero plantearla se me complica
7	anonymous	La explicación ayudó pero cuando trato de hacerlo solo siento que me bloqueo
8	anonymous	Que se trabajara algunos cosas solos y también el tiempo

Figura 222. Pregunta cuatro del cuestionario de autoevaluación, si se contestó No en la pregunta 3 (grupo tres).

Con las respuestas de estos 10 alumnos se destacan aspectos como dificultad para plantear las ecuaciones en los problemas aplicativos, que trabajan mejor en equipo que de manera individual, el tiempo y que se les complica mucho el entendimiento de las matemáticas.

6. Respecto a las actividades de la secuencia didáctica, ¿cuántos problemas del desarrollo lograron resolver como equipo?

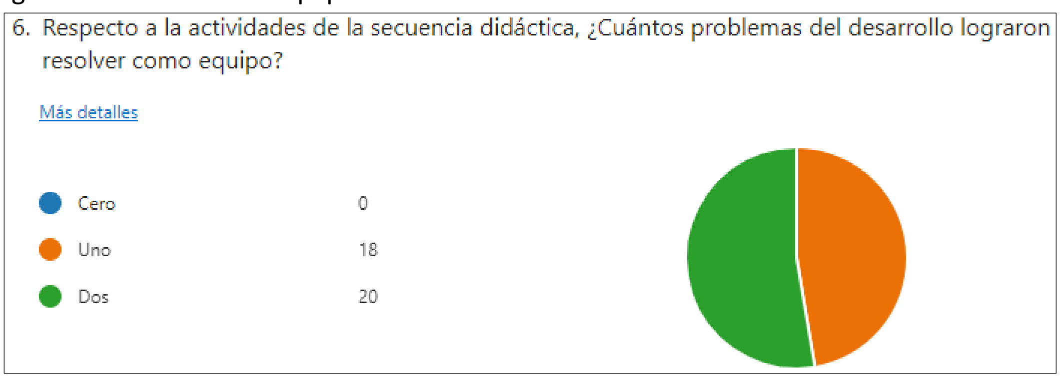


Figura 223. Pregunta cinco del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Se observa que la mayoría de los alumnos con sus equipos pudo resolver los dos problemas proporcionados, 18 alumnos externaron que con su equipo solo lograron resolver correctamente un problema, ningún alumno colocó que no hayan podido resolver ningún problema.

7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?

7. ¿Cuáles son los factores que propiciaron este resultado?

38 Respuestas

14	anonymous	Preguntar a la profa, todos dar idea y leer bien
15	anonymous	No planteamos correctamente la ecuación del segundo problema
16	anonymous	Problemas interesantes, leer a detalle y plantear la ecuación correctamente
17	anonymous	Preguntar dudas y apoyarnos como equipo
18	anonymous	La práctica, el apoyo de mis compañeros y de la mtra
19	anonymous	Invertimos unos datos en el problema dos y ya no llegamos a la solución
20	anonymous	Tuve un buen equipo, todos trabajamos y preguntamos dudas cuando las tuvimos
21	anonymous	Pero no faltó observar bien que representaban las soluciones, solo colocamos que se trataban de parábolas

Figura 224. Pregunta seis del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Se encuentra como respuestas que un factor que les permitió resolver los dos problemas correctamente fue que trabajaran en equipo, además de la guía dada por la profesora a través de las retroalimentaciones previas y el preguntar las dudas de manera oportuna. Otros comentarios hacen referencia a que cometieron un error al invertir unos resultados en el problema dos y eso les afectó para no llegar a la respuesta correcta. De igual manera se observan comentarios referentes a que no plantearon de manera correcta la ecuación del segundo problema y faltó más análisis de lo que representaba las soluciones de manera gráfica.

8. ¿Lograste resolver el problema de cierre?

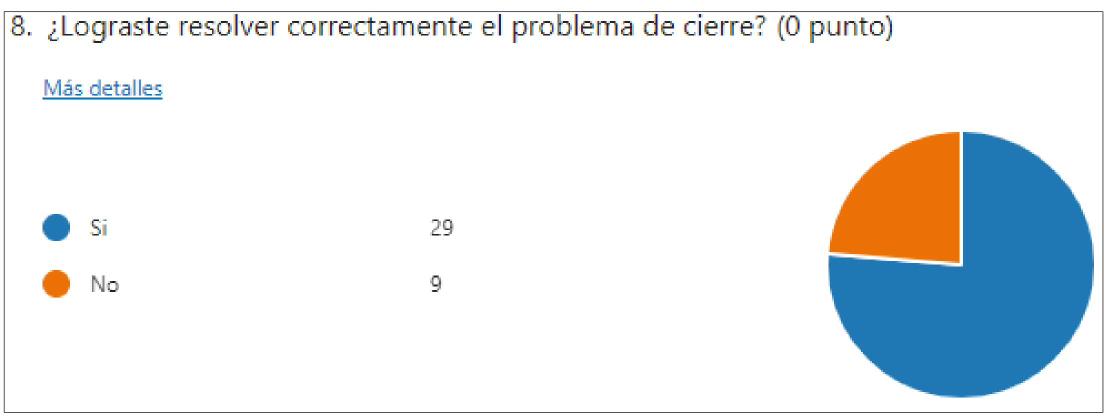


Figura 225. Pregunta siete del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Se observa que 29 alumnos lograron resolver de manera individual el problema de cierre y 9 no lograron resolverlo correctamente. Se observa una coincidencia aproximada en resultados trabajando por equipo y de manera individual. Hay que recordar que, de acuerdo con los trabajos recibidos, los que plantearon un problema que implicaba una ecuación cuadrática fueron 30 alumnos.

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

9. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?

38 Respuestas

15	anonymous	Creo que el tiempo, no logré concentrarme
16	anonymous	Ya tenía la práctica previa realizada con las retros
17	anonymous	La idea de diseñar mi problema me motivó
18	anonymous	Me puse las pilas, siento que si mejoré
19	anonymous	Se me complica trabajar con problemas aplicativos
20	anonymous	Me pareció interesante el pensar en un problema, me gustó crear el mio
21	anonymous	La explicación de la retro de los problemas del desarrollo me ayudó mucho
22	anonymous	Se me complica pensar en un problema de aplicación
23	anonymous	El trabajo que ya había realizado y las explicaciones que ya nos habían dado

Figura 226. Pregunta ocho del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Se presentan algunos comentarios que los alumnos realizaron con respecto a los factores que propiciaron el que lograran o no resolver la actividad de cierre. Algunos de los comentarios se refieren a que para resolver la actividad de cierre utilizaron la experiencia previa que tenían con los problemas del desarrollo y con las retroalimentaciones dadas, el diseñar su propio problema les motivó bastante, respecto a los que no lograron realizar la actividad de cierre comentan principalmente que con más tiempo posiblemente lograrían el planteamiento y también se observan comentarios referentes a qué se les complica pensar en un problema de aplicación.

10. ¿El ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?

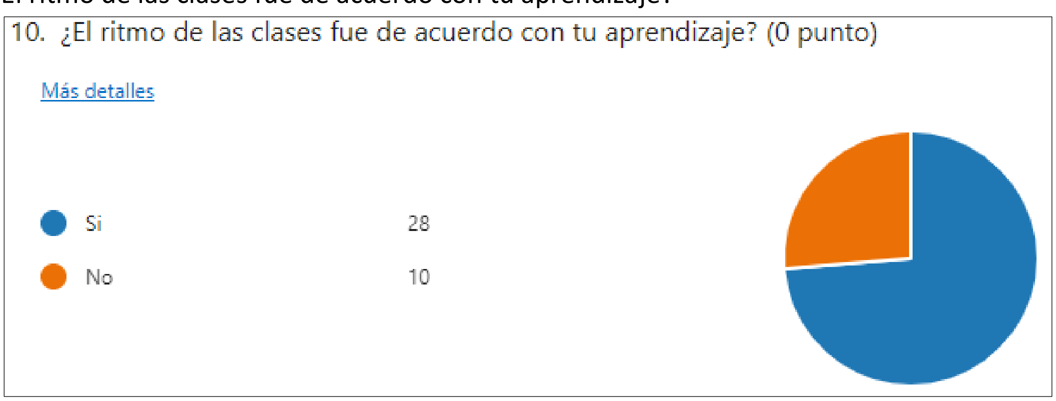


Figura 227. Pregunta nueve del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Para la pregunta nueve, 28 alumnos consideran que el ritmo de clases fue adecuado para su aprendizaje y 10 alumnos consideran que el ritmo de clases no estuvo de acuerdo con su aprendizaje. Con respecto a esta pregunta no se profundizó más, sin embargo, en la pregunta 11 y 12 algunos alumnos externaron comentarios al respecto.

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

11. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?

38 Respuestas

8	anonymous	Los problemas fueron diferentes y el uso de la aplicación para graficar
9	anonymous	Me gustó trabajar en equipo y trabajar con la aplicación y los problemas
10	anonymous	El problema del alux fue muy único, no se parecen a los de la descripción de ADAS
11	anonymous	El problema del alux y el del anciana fueron interesantes y divertidos, además usar la aplicación de Geogebra
12	anonymous	Los problemas fueron interesantes pero un poco difíciles para mi
13	anonymous	Buenos problemas y que bueno que utilizamos GeoGebra
14	anonymous	El uso de la aplicación para graficar y analizar la relación con las soluciones encontradas

Figura 228. Pregunta diez del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Los comentarios que se destacan en la pregunta diez hacen referencia a que los problemas resultaron interesantes para los alumnos, mencionan los problemas del desarrollo, a saber, el del Alux y el del anciano que reparte su terreno con sus hijas. Se destaca de igual manera que comentan que estos problemas no se parecen a los que se encuentran en sus materiales de trabajo, mencionan también la parte de utilizar la aplicación GeoGebra para graficar. Se observa que otros comentarios hacen referencia que los problemas era interesantes pero difíciles para ellos.

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

12. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

38 Respuestas

20	anonymous	Que otros temas de matemáticas como las ecuaciones lineales se trabajen con problemas así
21	anonymous	Me gustó la dinámica de trabajo en clase, ojalá se repitiera
22	anonymous	Un poco más de tiempo para resolver las actividades
23	anonymous	Me gustó todo, hubiese sido provechoso que se dijera si los problemas que planteamos son correctos.
24	anonymous	Que lo de crear tu propio problema se pueda realizar con otros temas de matemáticas
25	anonymous	Un poco más de tiempo para resolver los problemas
26	anonymous	Un espacio para compartir los problemas del cierre que realizamos

Figura 229. Pregunta once del cuestionario de autoevaluación (grupo tres).

Entre las principales sugerencias que los alumnos tienen se encuentra el crear más problemas como los presentados en las actividades del desarrollo, esto hace que para ellos las matemáticas no se vean como algo aburrido, comentan que este tipo de problemas se debería anexar al material de trabajo e incluso implementarlo en otros temas como lo son las ecuaciones lineales. Comentan que el crear tu propio problema se pueda realizar con otros contenidos del área de matemáticas y también que se promueva el uso de aplicaciones tecnológicas que apoyen el aprendizaje de las matemáticas. De igual manera comentan que es necesario proporcionar más tiempo, ya que, no todos avanzan al mismo ritmo y algunos alumnos requieren más apoyo para lograr lo que se solicita.

Otro comentario que se destaca sugiere un espacio donde se pudieran compartir y analizar los problemas creados en el momento de cierre, el crear su propio problema también se les hizo una actividad interesante.

5.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Se realizará una comparación de los resultados encontrados después de la aplicación de las tres secuencias didácticas. Se comenzará por los resultados encontrados al momento de la aplicación de la actividad diagnóstica, esta actividad estuvo compuesta por cinco ejercicios y/o problemas.

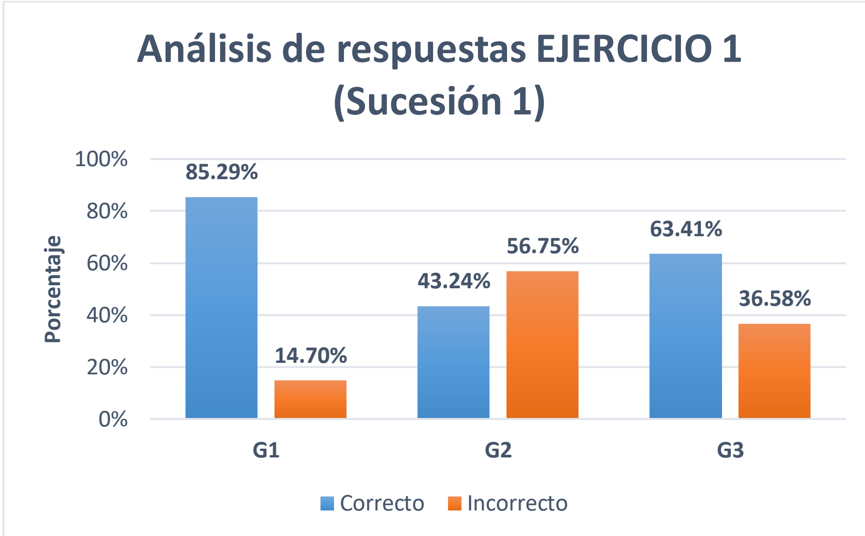
La actividad diagnóstica fue la misma que se aplicó a los tres grupos de estudio. El grupo uno (G1) estuvo compuesto por 34 alumnos, el grupo dos (G2) por 37 alumnos y el grupo tres (G3) por 41 alumnos.

Actividad diagnóstica

EJERCICIO 1. Estuvo compuesto por dos sucesiones que implicaban el análisis de patrones.

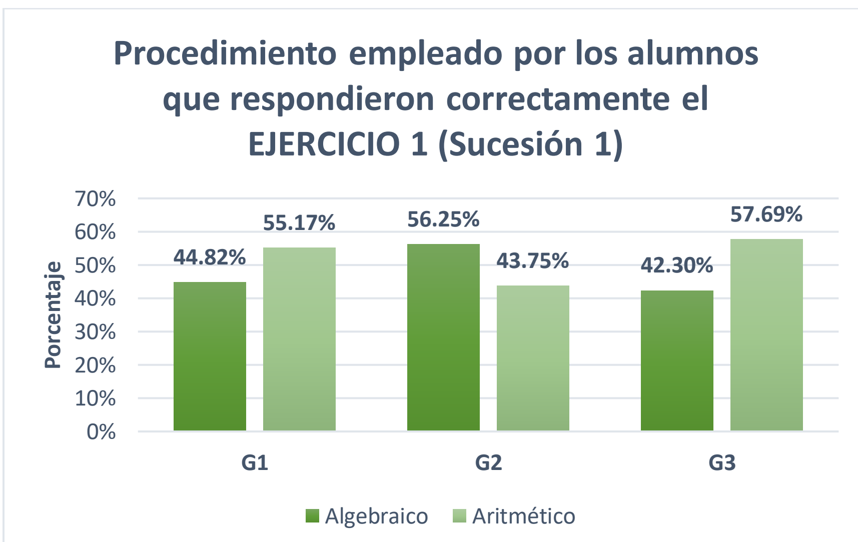
SUCESIÓN 1

Al respecto se presenta el porcentaje de alumnos de cada grupo que lograron responder correctamente a la sucesión 1.



Gráfica 1. Análisis de respuestas EJERCICIO 1 (Sucesión 1).

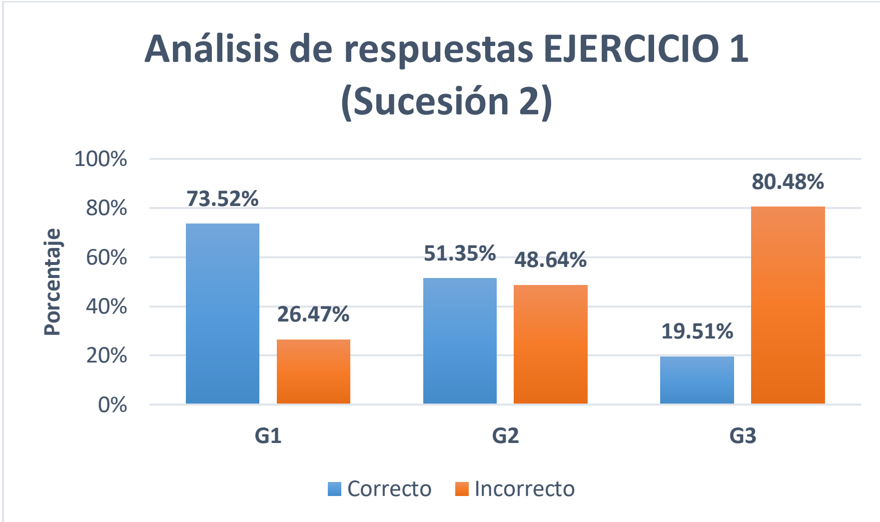
Con la gráfica 1 se puede observar que el G1 fue el que presentó un mayor porcentaje de alumnos que lograron responder correctamente a la sucesión 1 y el G2 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a esta sucesión.



Gráfica 2. Procedimiento empleado por los alumnos que respondieron correctamente el EJERCICIO 1 (Sucesión 1).

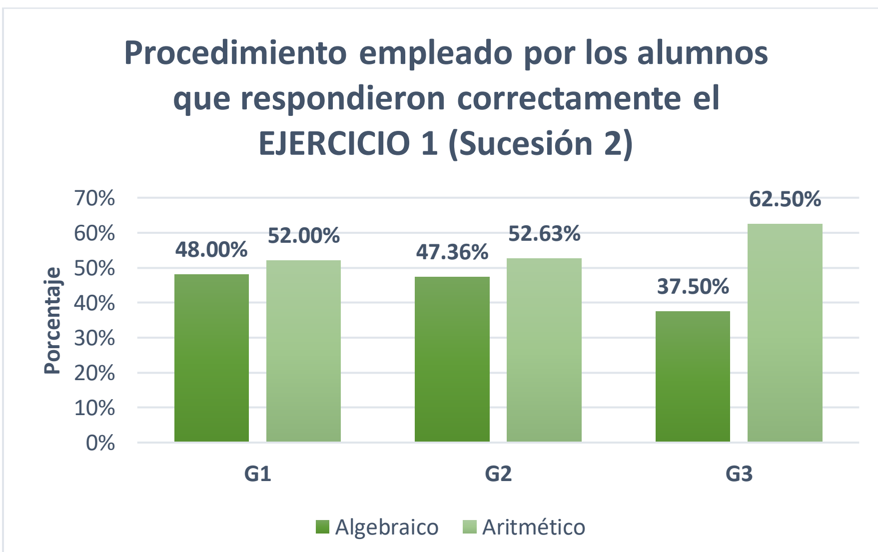
En la gráfica 2 se presenta el tipo de procedimiento (algebraico o aritmético) empleado por los alumnos que respondieron correctamente a la sucesión 1. Se observa que el G2 presentó una tendencia mayor a realizar procedimientos de tipo algebraico y el G3 fue el que presentó una mayor tendencia a los procedimientos de tipo aritmético. En el caso del G1 fue el que presentó un mayor número de alumnos que respondieron correctamente a la sucesión 1 y se observa una mayor tendencia hacia los procedimientos aritméticos.

SUCESIÓN 2



Gráfica 3. Análisis de respuestas EJERCICIO 1 (Sucesión 2).

Con la gráfica 3 se puede observar que el G1 fue el que presentó un mayor porcentaje de alumnos que lograron responder correctamente a la sucesión 2 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a esta sucesión.



Gráfica 4. Procedimiento empleado por los alumnos que respondieron correctamente el EJERCICIO 1 (Sucesión 2).

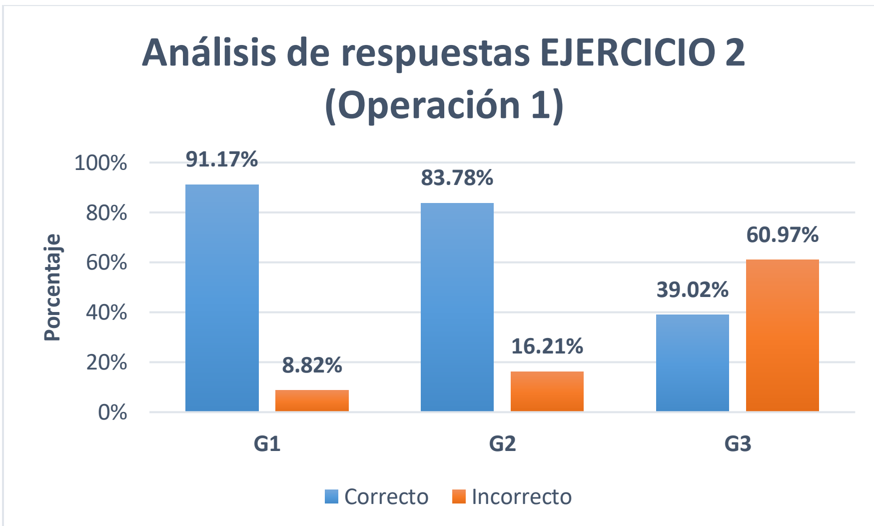
En la gráfica 4 se presenta el tipo de procedimiento (algebraico o aritmético) empleado por los alumnos que respondieron correctamente a la sucesión 2. Se observa que el G1 presentó una tendencia mayor a realizar procedimientos de tipo algebraico (el G2 también obtuvo datos similares a los del G1) y el G3 fue el que presentó una mayor tendencia a los procedimientos de tipo aritmético.

Conclusión Ejercicio 1: El G1 fue el que obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a ambas sucesiones y el G3 obtuvo un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente ambas sucesiones. El G1 mostró una mayor tendencia a emplear procedimientos de tipo algebraico y el G3 mostró una mayor tendencia a los procedimientos aritméticos.

EJERCICIO 2. Estuvo compuesto por cuatro operaciones algebraicas que los alumnos debían responder.

OPERACIÓN 1

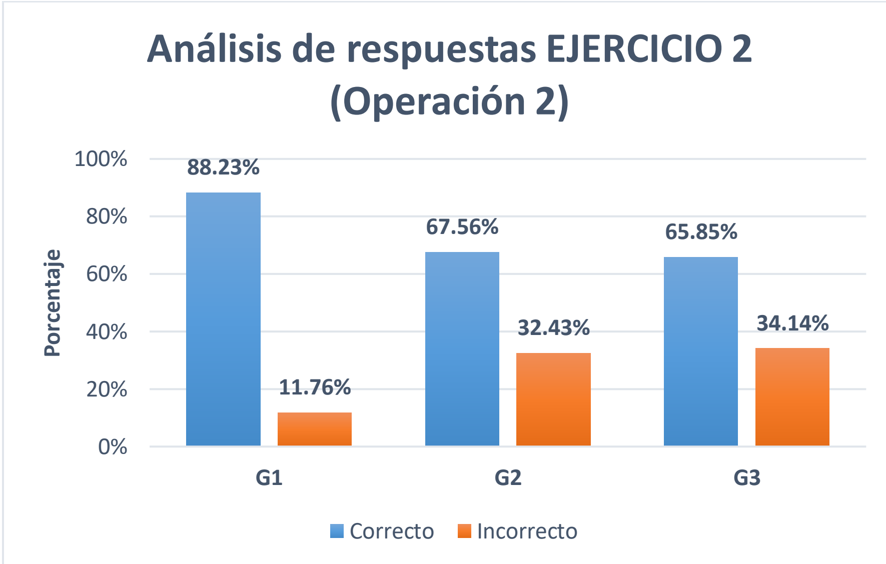
Con la gráfica 5 se puede observar que la operación 1 del ejercicio 2 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 5. Análisis de respuestas EJERCICIO 2 (Operación 1).

OPERACIÓN 2

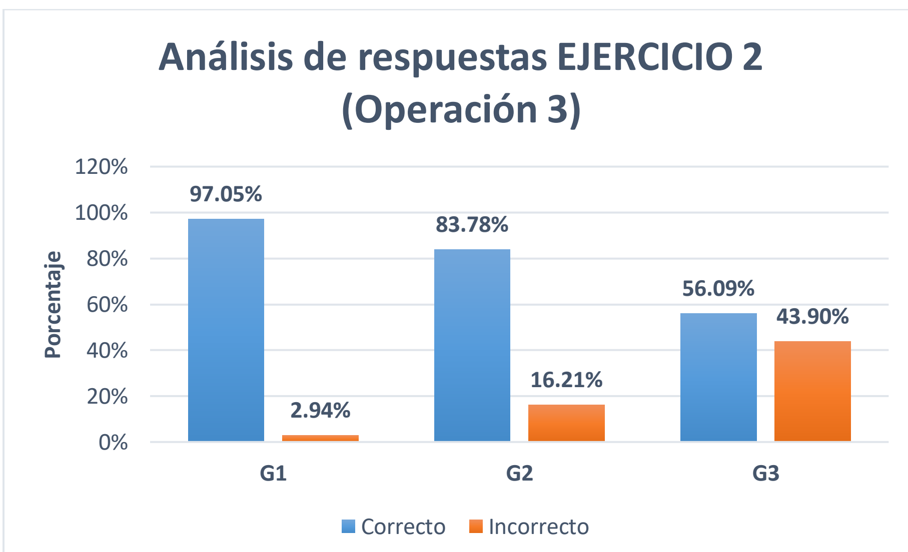
En la gráfica 6 se puede observar que la operación 2 del ejercicio 2 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 6. Análisis de respuestas EJERCICIO 2 (Operación 2).

OPERACIÓN 3

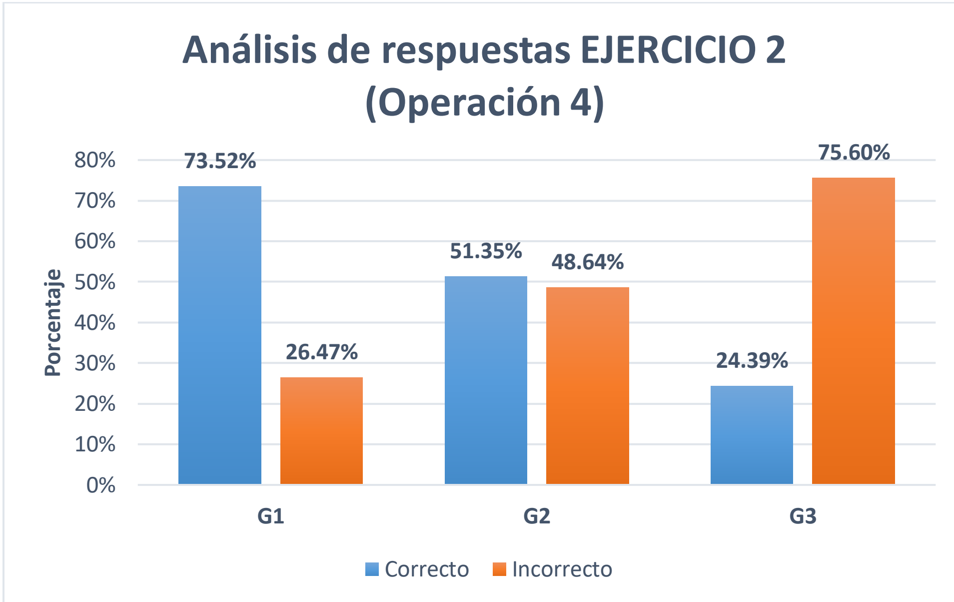
Con la gráfica 7 se puede observar que la operación 3 del ejercicio 2 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 7. Análisis de respuestas EJERCICIO 2 (Operación 3).

OPERACIÓN 4

En la gráfica 8 se puede observar que la operación 4 del ejercicio 2 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



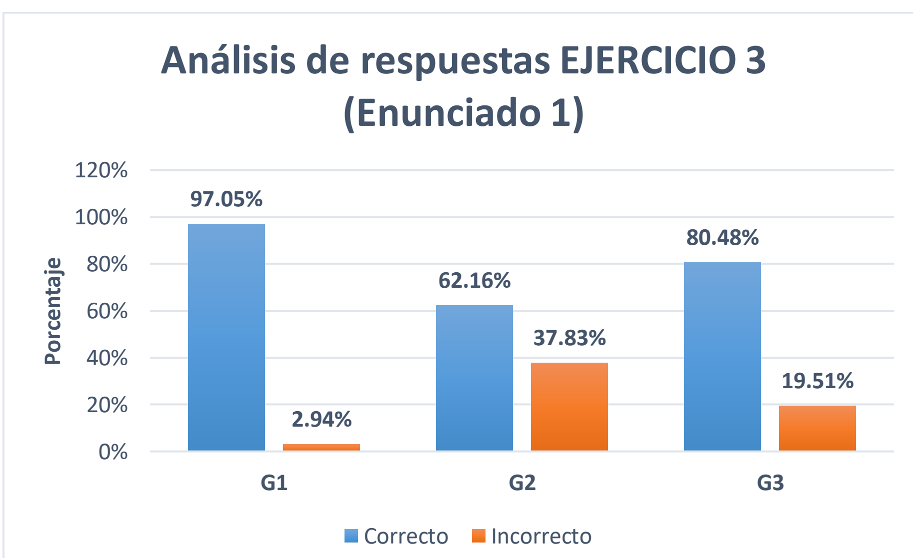
Gráfica 8. Análisis de respuestas EJERCICIO 2 (Operación 4).

Conclusión Ejercicio 2: El G1 fue el que obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente las cuatro operaciones y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.

EJERCICIO 3. Se compuso por cinco enunciados del lenguaje común que debían ser traducidos al lenguaje algebraico.

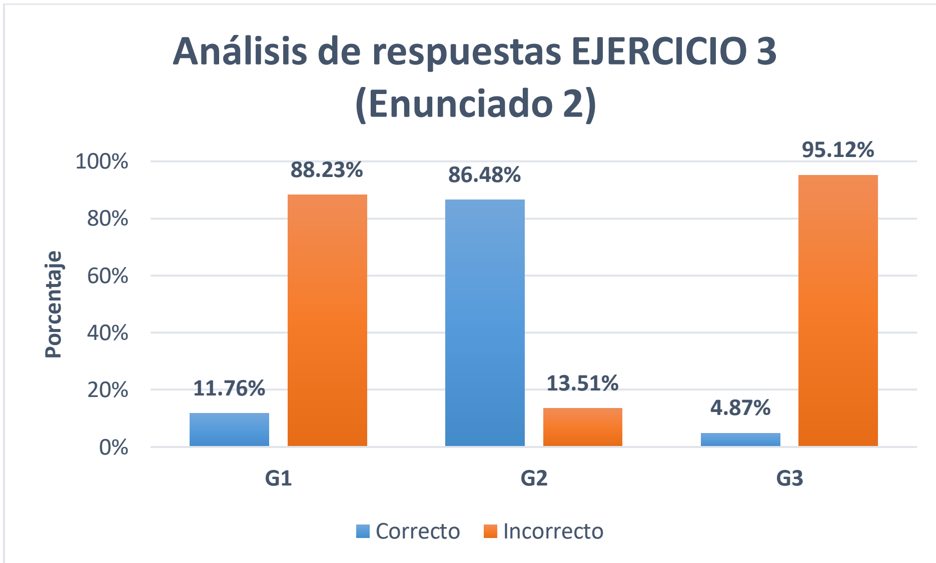
ENUNCIADO 1

Con la gráfica 9 se puede observar que el enunciado 1 del ejercicio 3 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G2 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 9. Análisis de respuestas EJERCICIO 3 (Enunciado 1).

ENUNCIADO 2

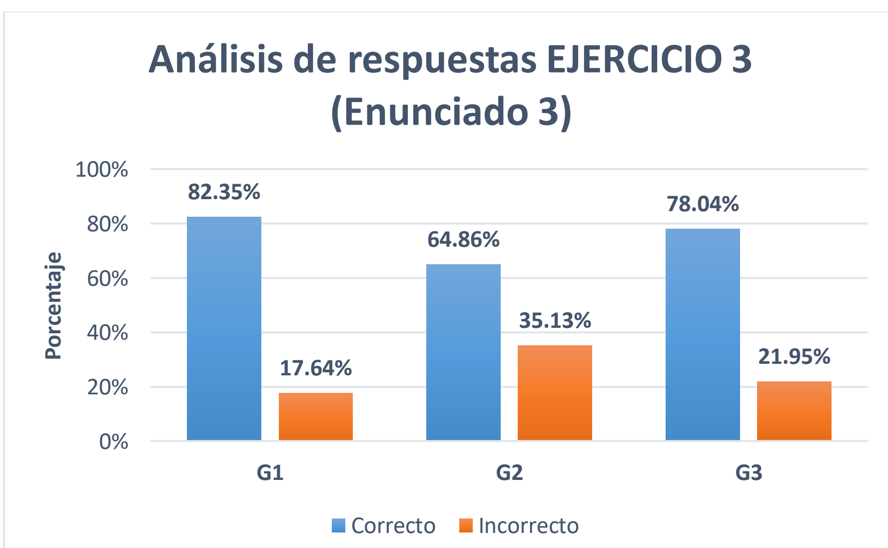


Gráfica 10. Análisis de respuestas EJERCICIO 3 (Enunciado 2).

En la gráfica 10 se puede observar que el enunciado 2 del ejercicio 3 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G2 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.

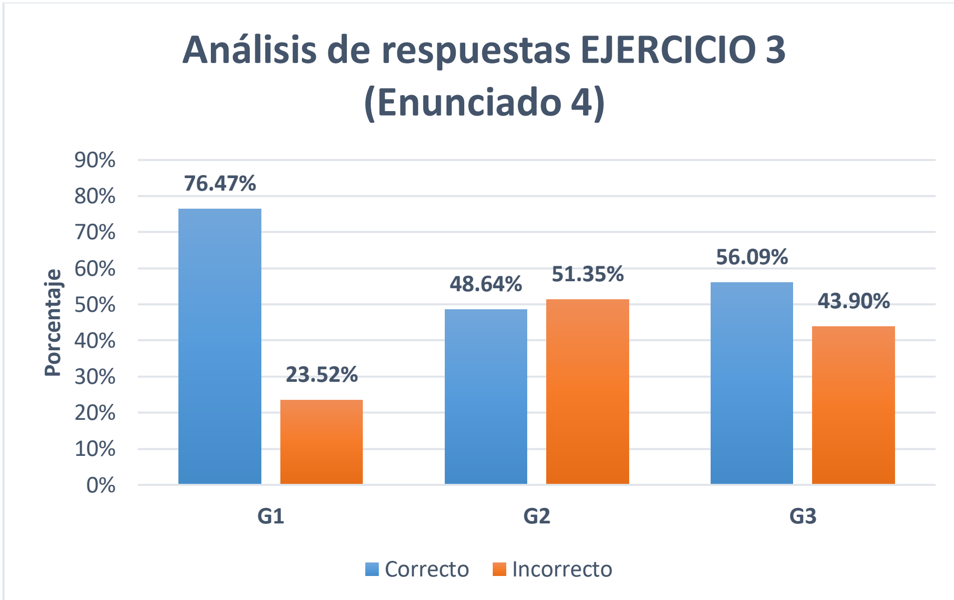
ENUNCIADO 3

Con la gráfica 11 se puede observar que el enunciado 3 del ejercicio 3 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 11. Análisis de respuestas EJERCICIO 3 (Enunciado 3).

ENUNCIADO 4

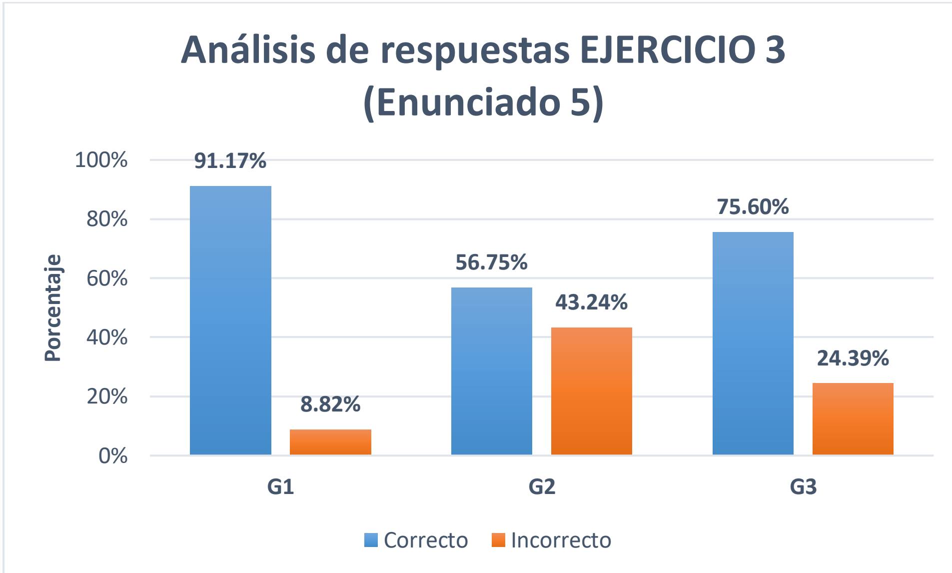


Gráfica 12. Análisis de respuestas EJERCICIO 3 (Enunciado 4).

En la gráfica 12 se puede observar que el enunciado 4 del ejercicio 3 fue respondido correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G2 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente. Se observa que este enunciado fue uno de los que causó dificultad a la gran mayoría de alumnos.

ENUNCIADO 5

Con la gráfica 13 se puede observar que el enunciado 5 del ejercicio 3 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G2 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



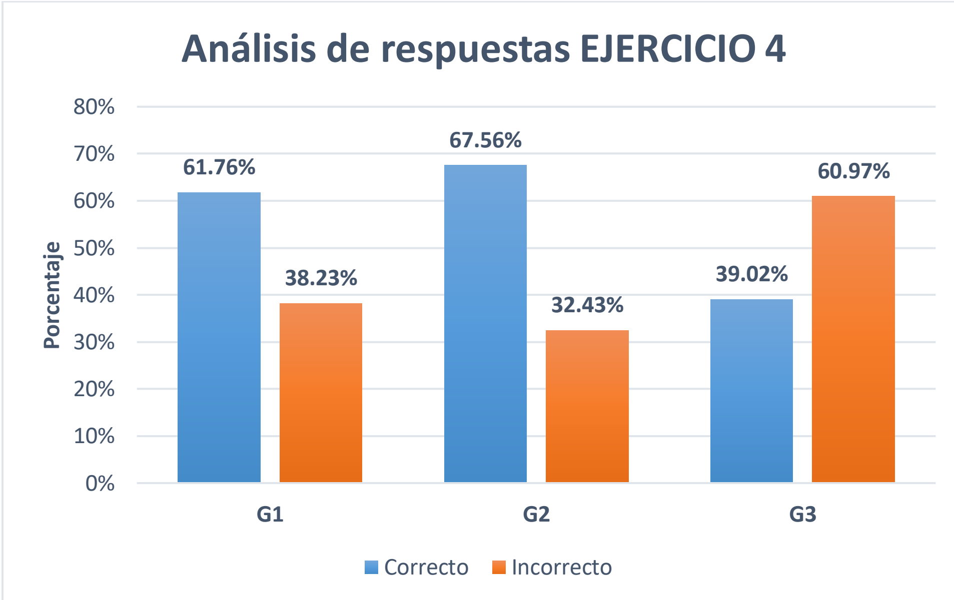
Gráfica 13. Análisis de respuestas EJERCICIO 3 (Enunciado 5).

Conclusión Ejercicio 3: El G1 fue el que obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente los enunciados, esto en cuatro de los cinco enunciados (excepto en el enunciado 2). El G2 obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente el enunciado 2. El G3 obtuvo el menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente el enunciado 2, el G2 obtuvo el menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente los enunciados 1, 3, 4 y 5.

Los enunciados 2 y 4 son los que causaron dificultad a la mayoría de los alumnos que conformaban los tres grupos.

EJERCICIO 4. Estuvo compuesto por una ecuación cuadrática, la cual implicaba la reducción de términos algebraicos y la igualación a cero de ésta.

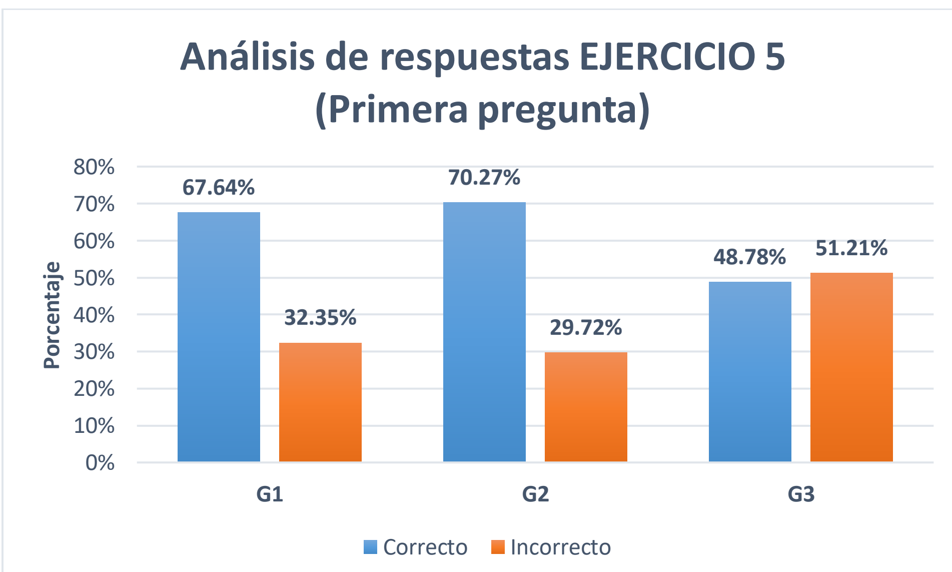
Con la gráfica 14 se puede observar que el ejercicio 4 fue respondido correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G2 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.



Gráfica 14. Análisis de respuestas EJERCICIO 4.

EJERCICIO 5. Se compuso por una problemática que implicaba el planteamiento de una ecuación cuadrática y su posterior resolución. Justamente se hacían dos preguntas, la primera pregunta referente al planteamiento de la ecuación y la segunda pregunta referente a encontrar el valor que cumple ser solución de esta ecuación.

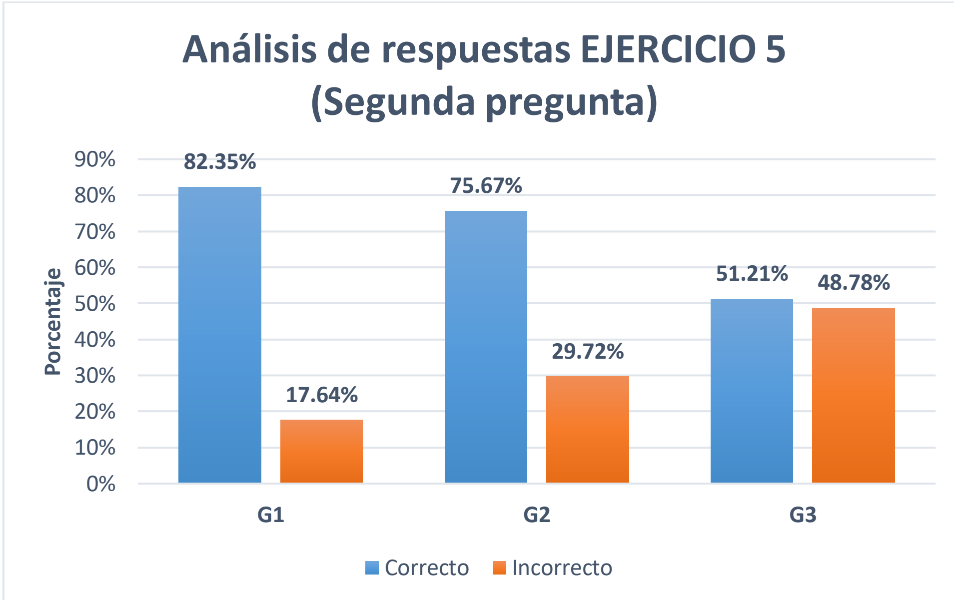
PRIMERA PREGUNTA



Gráfica 15. Análisis de respuestas EJERCICIO 5 (Primera pregunta).

Con la gráfica 15 se puede observar que la primera pregunta del ejercicio 5 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G2 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.

SEGUNDA PREGUNTA



Gráfica 16. Análisis de respuestas EJERCICIO 5 (Segunda pregunta).

En la gráfica 16 se puede observar que la segunda pregunta del ejercicio 5 fue respondida correctamente por un porcentaje mayor de alumnos del G1 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente.

Conclusión Ejercicio 5: El G2 fue el que obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente la primera pregunta del ejercicio 5, el G1 fue el que obtuvo el mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente la segunda pregunta del ejercicio 5 y el G3 fue el que presentó un menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente ambas cuestiones.

Conclusión respecto a la resolución del diagnóstico: En la mayoría de los ejercicios que conforman la actividad diagnóstica el G1 fue el que presentó un mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente los ejercicios, en segunda posición se encontraría el G2 y por último el G3 que en la gran mayoría de los ejercicios presentó el menor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a estos ejercicios.

AUTOEVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LAS TRES SECUENCIAS DIDÁCTICAS

Se aplicaron tres secuencias didácticas diferentes, al G1 le correspondió la llamada “secuencia didáctica tradicional”, al G2 la “secuencia didáctica basada en la resolución de problemas” y al G3 la “secuencia didáctica basada en la resolución de problemas (haciendo uso de la herramienta GeoGebra)”. Las secuencias didácticas tuvieron en el inicio de la sesión una recuperación de saberes relativos a las ecuaciones cuadráticas, posteriormente durante el desarrollo de la sesión se trabajó por equipos y resolvieron dos problemas. Para el momento de cierre, luego de la retroalimentación de los ejercicios del desarrollo, de manera individual se solicitó resolver un problema (para el caso del G1) y plantear un problema (G2 y G3), en ambos casos relativos a las ecuaciones cuadráticas.

Es preciso mencionar que durante la aplicación de la secuencia didáctica con el G3 se utilizó la herramienta GeoGebra, a pesar de que fueron los mismos problemas del desarrollo que se trabajaron con el G2.

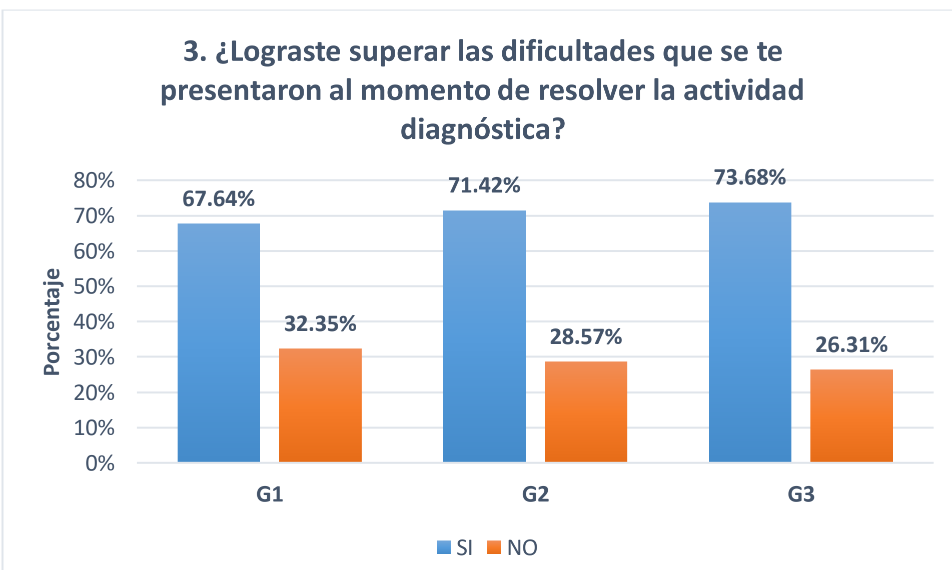
Los tres grupos respondieron una actividad de autoevaluación al término de la aplicación de la secuencia didáctica. Se realizará el análisis de cuatro de las preguntas cuyas respuestas eran cerradas y posteriormente se realiza un análisis cualitativo de las otras cuestiones que conformaron la autoevaluación.

Análisis cuantitativo de las respuestas del cuestionario de autoevaluación

La primera pregunta por analizar es la 3, ¿lograste superar las dificultades que se te presentaron al momento de resolver la actividad diagnóstica?, la respuesta a esta pregunta podía ser un Sí o un No, si respondían Sí la pregunta 4 les decía ¿cómo lo hiciste? y en caso de responder No la pregunta 4 les decía ¿qué aspectos influyeron para que no lo lograras?

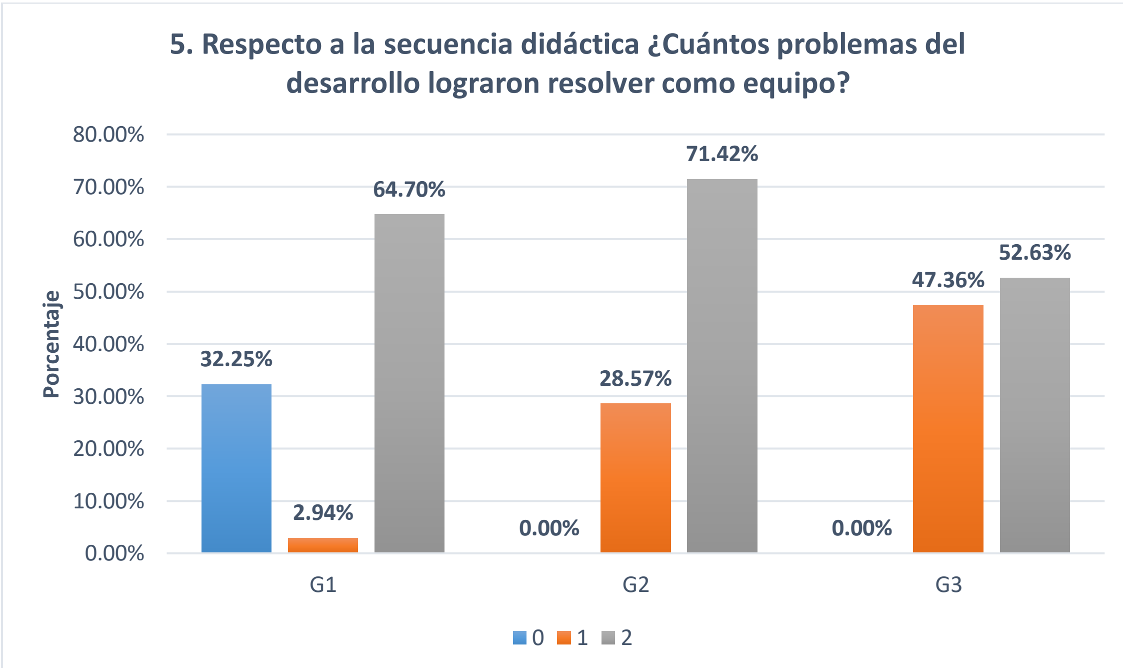
Los alumnos que respondieron Sí lo hicieron considerando que en la aplicación de la secuencia didáctica correspondiente ya no cometieron los mismos errores y los que respondieron que No lo hicieron considerando que seguían con las mismas dificultades al momento de resolver la secuencia didáctica correspondiente.

Con la gráfica 17 se puede observar que el G3 obtuvo un mayor porcentaje de alumnos 73.68% que respondieron que sí lograron superar las dificultades que se les presentaron al momento de resolver la actividad diagnóstica. Seguidamente se encontró el G2 con 71.42% del porcentaje de alumnos que respondieron que sí lograron superar estas dificultades y finalmente el G1 obtuvo el menor porcentaje de alumnos que respondieron de manera afirmativa respecto a si superaron las dificultades que se les presentaron al momento de resolver la actividad diagnóstica, esto con 67.64%.



Gráfica 17. Análisis de respuestas del cuestionario de autoevaluación (Tercera pregunta).

De igual manera se analizará la pregunta 5 la cual decía ¿cuántos problemas del desarrollo lograron resolver como equipo? Esto en referencia a la secuencia didáctica que les correspondió. Las tres secuencias didácticas estuvieron compuestas por dos problemas, por lo cual, las posibles respuestas a esta pregunta eran 0, 1 o 2.



Gráfica 18. Análisis de respuestas del cuestionario de autoevaluación (Quinta pregunta).

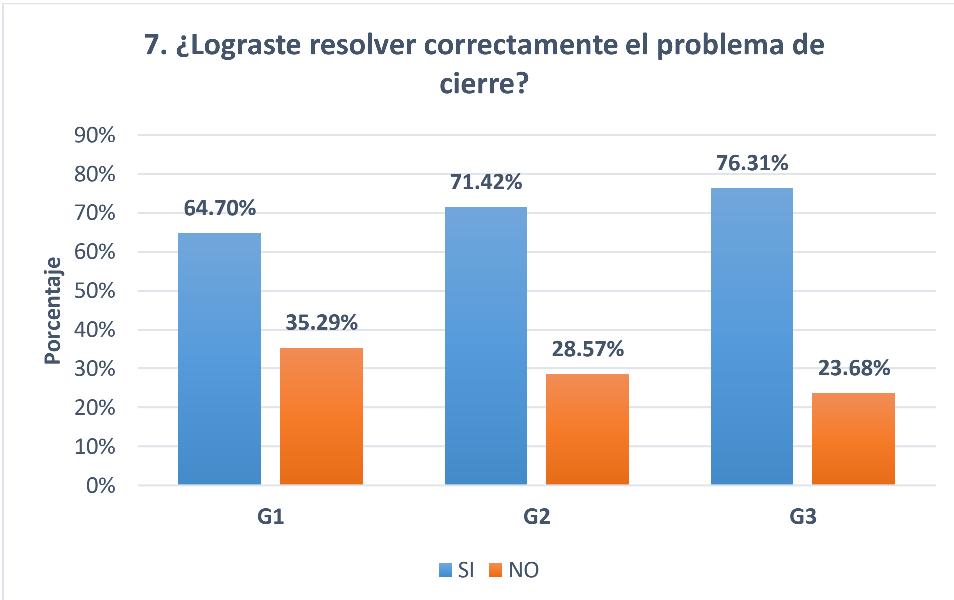
En la gráfica 18 se puede observar que el G2 fue el que obtuvo un mayor porcentaje de alumnos que lograron resolver correctamente los dos problemas, esto con 71.42%. Le sigue el G1 con 64.70% de alumnos y finalmente el G3 con 52.63% de alumnos que respondieron correctamente los dos problemas del desarrollo. Respecto al porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a un problema el G3 obtuvo el mayor porcentaje esto es 47.36%, le siguió el G2 con 28.57% de alumnos y luego el G1 con 2.94% de alumnos.

Respecto al porcentaje de alumnos que no lograron responder correctamente ningún problema solo el G1 obtuvo 32.25%, el G2 y el G3 no obtuvieron alumnos que no lograran resolver ningún problema. El G2 y G3 trabajaron los mismos problemas del desarrollo con la diferencia de que el G3 empleó la aplicación GeoGebra e incluso algunos de alumnos comentaban que no respondieron correctamente los dos problemas porque les faltaron un análisis más profundo al momento de analizar las soluciones de una ecuación cuadrática de manera gráfica.

Otra pregunta que tenía una respuesta cerrada era la 7, ¿lograste resolver correctamente el problema de cierre?, los alumnos respondían con un Sí o un No. Para los tres grupos la actividad de cierre fue realizada de manera individual, con el G1 se pedía resolver un problema dado y con el G2 y G3 se solicitaba que cada alumno elaborara una problemática que implicara el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática.

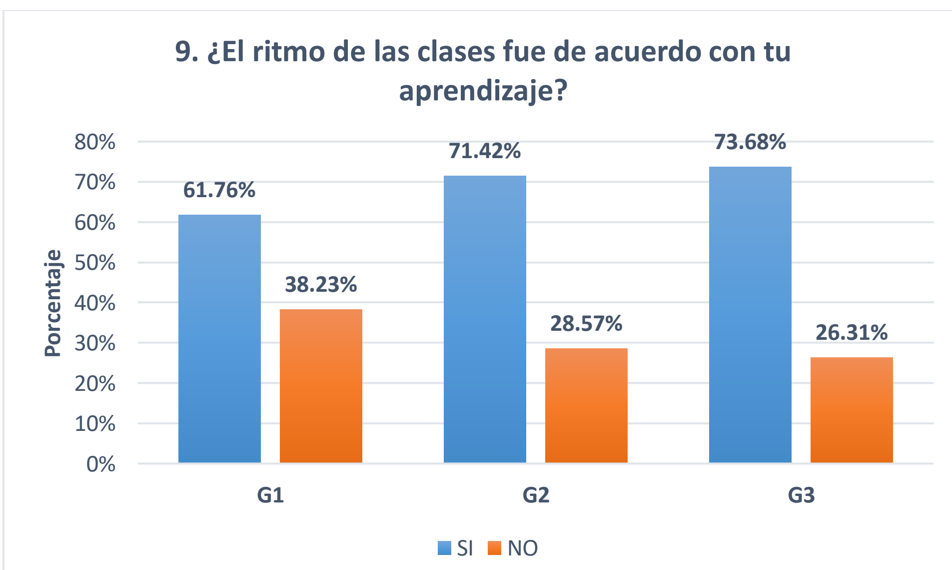
Con la gráfica 19 se puede observar que el G3 obtuvo 76.31% de alumnos que lograron responder correctamente el problema de cierre, le siguió el G2 con 71.42% de alumnos y luego el G1 con

64.70% de alumnos que respondieron correctamente el problema de cierre. Es preciso mencionar que en el caso del G1 recibieron la retroalimentación de cómo debía resolverse correctamente el problema de cierre, pero para el G2 y G3 los alumnos no recibieron la retroalimentación de que si el problema que plantearon estaba correcto, sí se realizó el análisis pero este fue posterior a la sesión de clase y los alumnos ya no supieron sus resultados. Con los datos brindados por los alumnos se observa que sí existió coincidencia en números para el G2 y el G3.



Gráfica 19. Análisis de respuestas del cuestionario de autoevaluación (Séptima pregunta).

La última pregunta que tenía una respuesta cerrada era la 9, ¿el ritmo de las clases fue de acuerdo con tu aprendizaje?, para lo cual había dos opciones de respuestas, Sí o No. En la gráfica 20 se presenta el análisis de las respuestas obtenidas con la pregunta 9.



Gráfica 20. Análisis de respuestas del cuestionario de autoevaluación (Novena pregunta).

Se observa que el G3 fue el que presentó un mayor porcentaje de alumnos que respondieron que el ritmo de las clases fue de acuerdo con su aprendizaje, esto es 73.68%. Le siguió el G2 con 71.42% de alumnos y finalmente el G1 con 61.76%.

Con el análisis de las respuestas brindadas a estas cuatro preguntas (3, 5, 7 y 9) se puede observar que el G3 fue el que obtuvo los mayores porcentajes (excepto en la pregunta 5), le siguió el G2 y en último lugar el G1. Es preciso mencionar que el G3 presentó una mejoría, ya que, al resolver la actividad diagnóstica este grupo fue el que obtuvo los menores porcentajes de alumnos que lograron responder correctamente los ejercicios.

Análisis cualitativo de las respuestas del cuestionario de autoevaluación

Se realizará el análisis cualitativo de las respuestas que en su mayoría los alumnos de cada uno de los tres grupos dieron a las preguntas 9 y 10. Las cuales, respectivamente, mencionaban lo siguiente:

- Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?
- ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?

En el caso del G1 en su mayoría las respuestas que dieron los alumnos a la pregunta 9 fueron en torno a que los ejercicios propuestos durante la actividad de diagnóstico les parecieron interesantes, destacan el trabajo en equipo y el que se consideraran los conocimientos previos con los que contaban. Para la pregunta 10 la mayoría de los alumnos señaló el que los problemas de la secuencia didáctica les parecieron ilógicos, que se coloquen problemas de álgebra diferentes a los típicos, colocar problemas más reales y con situaciones comunes a ellos. Los alumnos igual señalan que sería pertinente colocar ejercicios como los que trabajaron en el diagnóstico en el cuaderno de trabajo que resuelven en la escuela a lo largo del semestre.

Para el G2 los comentarios más frecuentes en torno a la pregunta 9 fueron que los problemas del desarrollo les parecieron interesantes, llamativos, implicaban una historia y no fueron como los problemas que por lo general se encuentran en los libros de álgebra. De igual manera destacaron que existiera una actividad diagnóstica y que al final de la secuencia didáctica se les pidiera crear su propio problema, comentan que fue algo innovador. En cuanto a la pregunta 10 los principales comentarios fueron que las actividades realizadas en la secuencia didáctica se deberían incluir en el material de trabajo de la escuela, crear más problemas de este estilo, promover la creación por parte de los alumnos de problemáticas con otros contenidos de matemáticas. Los alumnos mencionaron que era necesaria una sesión de clase más, donde se pudieran analizar los problemas que cada alumno creo en el momento de cierre, esto se relaciona con comentarios relativos a destinar más tiempo para resolver las actividades.

El G3 respecto a la pregunta 9 colocó como comentarios que los problemas del desarrollo fueron diferentes a los que comúnmente trabajan en las aulas de clases, les gustó trabajar en equipo y que además manejaran la aplicación GeoGebra, ya que les permitió realizar un análisis de la relación de las soluciones de una ecuación cuadrática de manera algebraica pero también de manera gráfica. Destacaron también que les gustó diseñar su propio problema, pues es algo que por lo regular no se solicita durante las clases regulares. Algunos alumnos mencionaron que la actividad diagnóstica les ayudó a recordar conceptos previos que ya habían trabajado con anterioridad.

Respecto a la pregunta 10, el G3 en su mayoría comentó que esperan que la actividad y el tipo de problemas se pueda replicar e incluso abordar de esta manera otros contenidos matemáticos, de igual manera se comentó que la aplicación GeoGebra les pareció interesante y que les gustaría que se empleara más seguida durante las clases regulares, así como también emplear otras aplicaciones o herramientas que permitan el aprendizaje de las matemáticas. Señalaron que hubiese sido enriquecedor tener una sesión adicional para que se compartieran todos los problemas que diseñaron durante el cierre de la sesión y se señalara si lo que hicieron es correcto.

CONCLUSIONES

Esta sección de la tesis está estructurada en dos apartados:

1. En el primero de ellos se hace una síntesis breve de la temática estudiada y de los referentes teóricos que guiaron el trabajo.
2. En el segundo se exponen los principales resultados obtenidos al aplicar las secuencias didácticas relativas a la resolución de problemas matemáticos en los tres grupos de estudio.

Tema y referentes teóricos

En este trabajo se ha abordado el tema de la resolución de problemas matemáticos para el desarrollo del pensamiento algebraico mediado por tecnología, siendo el propósito del trabajo analizar las estrategias y procedimientos que utilizan los alumnos para resolver problemas matemáticos no rutinarios.

Para lograr el propósito de esta tesis se diseñó un estudio de carácter exploratorio, en donde los estudiantes participantes pertenecen a tres grupos de primer grado de bachillerato. Se diseñaron tres secuencias didácticas, la primera de tipo “tradicional” como comúnmente se trabaja en las aulas de clase, la segunda con un diseño basado en la resolución de problemas y la tercera diseñada a partir de la resolución de problemas con apoyo de la tecnología.

Como se analizó en el Capítulo 3, la temática de la resolución de problemas no es algo nuevo, se puede abordar desde distintas perspectivas, de las cuales consideramos dos:

a) La primera centrada en las estrategias generales de resolución de problemas matemáticos, dónde el trabajo de George Polya es representativo. Del análisis de este trabajo se destaca que este autor considera que un problema es una situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo concebido pero que no es alcanzable de forma inmediata. Polya hace una diferenciación entre problemas rutinarios y no rutinarios, dónde los primeros son definidos como aquellos que se pueden resolver sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto o ya sea siguiendo paso a paso sin ninguna originalidad.
La aportación principal de este autor consiste en proponer rutas estructuradas para resolver un problema de matemáticas, distingue cuatro etapas al resolver un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

b) La segunda, interesada en conocer cómo es que se dan los procesos cognitivos cuando un individuo se enfrenta a la tarea de resolver un problema. Por lo cual se revisaron los trabajos de Luz Manuel Santos Trigo, este autor considera que un problema es una tarea en la cual aparecen los siguientes componentes: interés por encontrar una solución, la no existencia de una solución inmediata, diversos caminos de solución y la atención de un individuo para emprender acciones para resolverlo.

La preocupación de este autor se encuentra dirigida hacia cómo sucede y qué elementos intervienen a la hora en que se resuelven problemas matemáticos. Considera que al abordar un problema no sólo se pretende encontrar una solución, sino establecer relaciones matemáticas para generar estrategias de resolución, las cuales conduzcan a obtener nuevos conocimientos. Asimismo, en su trabajo reconoce que al utilizar un software dinámico los estudiantes plantean conjeturas, buscan evidencia para verificar resultados y, eventualmente, plantean demostraciones formales de algunas conjeturas.

Los resultados

A continuación, se presenta, tomando los elementos previamente descritos, un análisis de lo encontrado en los procesos de solución que emplearon los estudiantes que participaron en el estudio.

La gama de recursos que utilizó la gran mayoría de los estudiantes de los tres grupos participantes es suficiente para los requerimientos de cada uno de los problemas, en otras palabras, identificaron los datos proporcionados y mostraron en su mayoría un manejo adecuado de los procedimientos aritméticos y algebraicos. De igual manera la actividad diagnóstica les permitió recordar conocimientos previos, que la resolución de las secuencias didácticas implicaba.

Durante la aplicación de la actividad diagnóstica se dio indicio de que el G1 presentaba un avance mayor al G2 y al G3 (siendo éste el que presentó un menor desempeño).

En cuando a la resolución de las secuencias didácticas, la mayoría de los alumnos empleó las estrategias esperadas, fuesen exitosas o no. A pesar de contar con lo ya mencionado, algo que pudo haber impedido que llegarán a la solución esperada fue la falta de comprensión del problema en cuestión. Para el caso de las secuencias didácticas dos y tres se considera que se debió a la falta de familiaridad con el tipo de problema, ya que, son problemas que escolarmente no se trabajan en las aulas de clases. Aunado a esto, en algunos casos la propia redacción del problema confundió a los alumnos, como en el caso del problema del señor que repartía su herencia entre sus hijas (por el orden en el que se dieron algunos datos del problema).

En el caso de la secuencia didáctica uno los alumnos expresaron que los problemas se les hicieron poco motivadores y que no le encontraban lógica a lo que le solicitaban. Para las secuencias didácticas dos y tres, los problemas fueron motivadores e interesantes para los alumnos, pero sí comentaban que les hubiese gustado una sesión adicional para compartir los resultados trabajados en el apartado de cierre (donde diseñaron sus propios problemas).

Después de la aplicación de las secuencias didácticas, con los datos obtenidos se observó que el G3 fue el que presentó un mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente y un avance mayor a lo que se había apreciado durante la aplicación del diagnóstico. Lo anterior da muestra de que, si los problemas son adecuados, es decir, si permiten la movilización de estrategias por parte de los estudiantes y en el proceso de resolución, el estudiante utiliza los conocimientos adquiridos, se favorece significativamente la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático.

Realmente el G3 con la aplicación de la actividad diagnóstica fue el que mostró un menor desempeño, pero con la secuencia didáctica elaborada se logró observar una mejora en los procedimientos y razonamientos matemáticos empleados por estos alumnos. Por otra parte, el G1, fue el que comenzó con un mejor desempeño durante el trabajo con la actividad diagnóstica, pero con la aplicación de la secuencia didáctica "tradicional" los alumnos denotaban la mecanización de los problemas, ya que, trabajaron con los problemas que son típicos del contexto escolar.

En el caso del G2, su desempeño durante la actividad diagnóstica fue menor al del G1, pero mayor al del G3. Los alumnos mostraron un avance mayor al G1 durante el trabajo con la resolución de la secuencia didáctica dos. Los alumnos comentaban estar motivados para resolver los problemas planteados, en este caso, lo faltante fue el transitar en algún otro registro de representación semiótica para favorecer la aprehensión del objeto matemático.

La secuencia didáctica tres, diseñada bajo el enfoque de la resolución de problemas mediados por tecnología favoreció la apropiación de la sintaxis algebraica, en este caso de las ecuaciones algebraicas de segundo grado, los estudiantes denotaban el uso de procedimientos algebraicos para la resolución de estas ecuaciones. El emplear problemas que no son rutinarios para los alumnos implicó un reto, pero mostraban una actitud motivadora por querer resolverlos.

Adicional a esto, la aplicación GeoGebra empleada durante la resolución de la última secuencia didáctica influyó positiva y significativamente en el tránsito de las representaciones semióticas de una ecuación cuadrática, del registro algebraico al registro gráfico. En este sentido, es importante resaltar que el tránsito entre estos registros favorece la aprehensión de los objetos matemáticos, esto avalado por la propuesta de Duval (1999) quién declara que no hay noesis sin semiosis.

Estas representaciones semióticas (favorecidas en la secuencia didáctica tres) y las actividades cognitivas asociadas a estas resultan favorables y permiten al estudiante buscar la comprensión conceptual y procedimental de los objetos matemáticos en lugar de mecanizar el aprendizaje con problemas y/o ejercicios carentes de significado.

En conclusión, la secuencia didáctica tres si ayudó significativamente en el desarrollo del pensamiento algebraico de estos alumnos de primer grado de bachillerato, en particular con el trabajo con las ecuaciones de segundo grado. Los problemas no rutinarios motivaron el que los alumnos quisieran resolverlos y el trabajo con el software favoreció el tránsito del registro algebraico al gráfico, lo cual, resulta esencial para la aprehensión de los objetos matemáticos.

Así, las prácticas docentes deben orientarse a favorecer diversos registros de representación semiótica de los objetos matemáticos, para favorecer el aprendizaje por parte de los alumnos. La resolución de problemas bajo el enfoque planteado por Santos Trigo (2014), puede ser una herramienta que permita analizar los procedimientos de los alumnos al enfrentarse a verdaderos problemas matemáticos, en los cuales se favorece el análisis y comprensión por encima de la mecanización de procesos.

El enfoque de la resolución de problemas permite que los alumnos formulen sus preguntas, identifiquen sus conjeturas, encuentren maneras de sustentarlas y puedan comunicar sus resultados. Va más allá de una clase "tradicional", va más allá de la aplicación de una serie de reglas o fórmulas, este enfoque refleja en gran parte lo que significa aprender la disciplina matemática, desarrollar una forman de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas. Incluso el permitir a los alumnos diseñar un problema matemáticas, es una actividad que los motiva, ya que, pocas veces en el entorno escolar se les pide realizar alguna actividad de este tipo.

Es importante resaltar el papel que juega la tecnología pues no solo extiende los razonamientos que aparecen con el uso de lápiz y papel, sino permite favorecer el análisis de nuevas relaciones y plantear argumentos que permitan sustentarlas. Por lo tanto, el uso de la resolución de problemas en conjunto con la tecnología puede favorecer el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático, tal y como se trabajó en la secuencia didáctica tres.

Reflexiones derivadas del estudio

Este trabajo se cierra planteando una posible continuación y complemento de esta tesis, dónde sería interesante analizar las estrategias que los profesores emplean al momento de resolver problemas matemáticos no rutinarios y cómo esto impacta en la práctica docente que desarrollan.

COMENTARIOS FINALES

Finalmente, en este apartado se plantean algunas reflexiones personales sobre la experiencia vivida durante la realización de la tesis, así como los posibles estudios que podrían ser continuación de este trabajo.

Al desarrollar este trabajo se tenía cierta idea sobre la resolución de problemas, la cual se fue modificando a medida que se profundizó en los referentes teóricos. Escolarmente se piensa que resolver problemas matemáticos significa enfrentarse a una gran cantidad de ejercicios que son similares a los que el profesor resuelve durante la sesión de clases, sin embargo, esto no quiere decir que los alumnos sepan cómo y cuándo utilizarlas.

Al inicio de este trabajo sí se consideraba que un problema no era lo mismo que un ejercicio, pero no se tenía tanta certeza de cómo diseñar los problemas para que realmente no fueran rutinarios y en realidad cumplieran las especificaciones para ser considerados como verdaderos problemas.

Después del diseño y aplicación de las secuencias didácticas un aspecto en el que se centró la atención fue el análisis de resultados. El percibir diversas estrategias de resolución de los problemas, así como los obstáculos a los que se enfrentaron los estudiantes en el proceso de resolución fue interesante para los resultados que esperábamos.

De igual manera el leer los comentarios positivos que los alumnos daban a las secuencias didácticas dos y tres fue motivador, como en todo hubo comentarios de mejora, uno de ellos fue el factor tiempo, considerar una sesión adicional de retroalimentación de los problemas que los alumnos diseñaron de manera individual. De manera personal se considera que, la aplicación GeoGebra se pudo explotar aún más para apoyar la solución de la secuencia didáctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFÍA

Alcántara, A. & Zorrilla, J. (2010). *Globalización y educación media superior en México. Perfiles educativos XXXII (127),* p. 38-57.

Aleksandrov, A. (1976). Visión general de la matemática. En A. Aleksandrov, A. Kolmogorov y M. Laurentiev (Eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado* (pp.17-89). Madrid: Alianza editorial, S.A.

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. & Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica.* Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8, págs. 13-33. Costa Rica.

Cardona, M. (2007). *Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado CIIE a través de la resolución de problemas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Honduras.

Chavarría, J. y Alfaro, C. (2002). Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld. *CIEMAC IV (5)*,1-4.

Díaz Barriga, A. (2013). *TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. RIES, Revista Iberoaméricana de Educación Superior 4(10)*, 3-21.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo.* Colombia: Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*. *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Springer, N.Y. USA.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2010). Problems Dealing With Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 171-192.

Godino, J., Aké, L. & Gonzato, M. (2012). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* I, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN).

Grupo Azarquiel. (1993*). Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Herscovics, R., & Linchevsky, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. In Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 196-202).

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2013). *La educación Media Superior en México Informe 2010-2011.* México: INEE.

Kaput, J. (1987). PME XI algebra papers: A representational framework. In Proceedings of the 11th PME International Conference (Vol. 1, pp. 345-354).

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 317-326.

Kieran, C. (1997). Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions. En T. Nunez, & P. Bryant (Edits.), *Learning and Teaching Mathematics An International Perspective* (pp. 133-158). East Sussex, UK: Psychology Press. East Sussex, UK: Psychology Press.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (Vol.2, p. 2707-762). Charlotte, N. C: Information Age Publlishing, Inc. y NCTM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/ Rutas hacia el álgebra.* (Cecilia Agudelo, trad.). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (obra publicada en 1985).

Moreno, A. (2014). *Estrategias de resolución de problemas matemáticos. Un estudio exploratorio.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad de Sonora.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Principios y estándares para la educación matemática* (primera edición). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (vigésimo primera reimpresión). México: Trillas.

Razo, A. (2018). La Reforma Integral de la Educación Media Superior en el aula. *Perfiles Educativos XI (159)*, p. 90-106.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática. Prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 11-30.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolucion de problemas matematicos*. Fundamentos cognitivos (1era edición). México: Trillas.

Santos Trigo, L. M. (2014). *La resolucion de problemas matematicos*. Fundamentos cognitivos (2da edición). México: Trillas.

Serres, Y. (2008). Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del álgebra. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las* *matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp.175-191). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Ediciones Díaz de Santos.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens, Revista Universitaria de Investigación 12(1),* 122-142.

Sosa, L. (2016. *Enfoques cognitivos sobre problemas de aprendizaje matemático*. Notas del curso Teorías en Matemática Educativa. Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecno Lógicas 16(1),* 139-151.

MESOGRAFÍA

Planea, Resultados nacionales 2017. Educación Media Superior. Recuperado el 15 de mayo de 2020 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2008). *Competencias genéricas y el perfil del egresado de la Educación Media Superior.* México, recuperado el 21 de septiembre de 2020 de http://ofmx.com.mx/documentos/pdf/Competencias_genericas_perfil_egresado.pdf

Universidad Autónoma de Yucatán. (2013). *Modelo Educativo para la Formación Integral (Educación Media Superior).* Recuperado el 5 de mayo de 2020 de http://www.diie.dgda.uady.mx/media/file/MEFI%20EMS.%20Digital.pdf

ANEXOS

ANEXO UNO

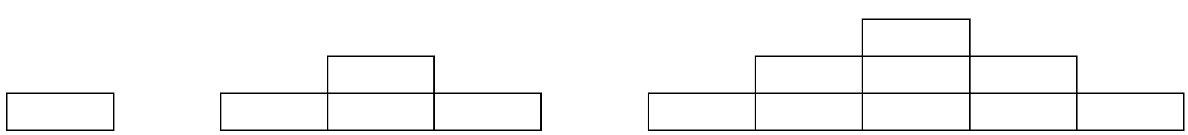
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

Tiempo estimado: 80 minutos

Instrucciones. A continuación, se te presentan 5 problemas, los cuales debes resolver de forma clara y ordenada dejando todos tus procedimientos por escrito.

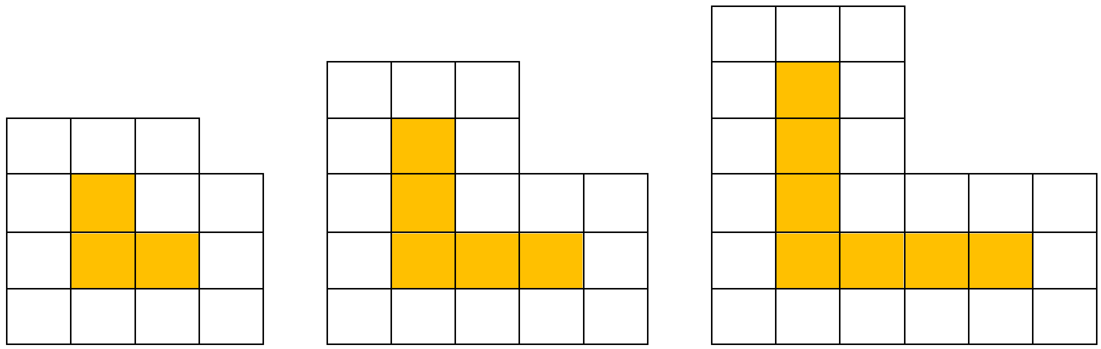
Ejercicio Uno. Contesta las dos cuestiones solicitadas en cada una de las siguientes sucesiones:

Sucesión 1



- ¿Cuántos rectángulos hay en la figura que se encuentra en la posición 10?
- ¿Cuántos rectángulos tiene la figura que se encuentra en la posición n?

Sucesión 2



- ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que se encuentra en la posición 10?
- ¿Cuántos cuadrados tiene la figura que se encuentra en la posición n?

Ejercicio Dos. Escribe de forma simplificada el resultado de las siguientes operaciones.

- $2a + (-3a) =$
- $5b(b) + 4a - a =$
- $2x - c(c^2) =$
- $(a + b) + (a - b) =$

Ejercicio Tres. Exprese de manera simbólica los siguientes enunciados.

- La suma de dos números cualesquiera
- El doble de un número más el mismo número, disminuido en 20
- El producto de dos números distintos cualesquiera
- El doble de un número, menos cuatro
- Dos veces un número cualquiera, menos cinco

Ejercicio Cuatro. Resuelve correctamente la siguiente ecuación.

$$x(x + 3) = 5x + 3$$

Ejercicio Cinco. Joaquín tiene un terreno que tiene forma rectangular y en él construyó una terraza de la misma forma, la cual tiene dimensiones de 10 metros por 18 metros. La terraza está rodeada por un pasillo de césped de ancho uniforme cuya área es $128\ m^2$.

- ¿Cuál es la ecuación que modela el problema?
- ¿Cuánto mide el ancho del pasillo?

ANEXO DOS

SECUENCIA DIDÁCTICA UNO. Problemas de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resultado de aprendizaje: Emplea ecuaciones de segundo grado con una incógnita en la resolución de problemas hipotéticos o reales, con argumentos congruentes y lógicos.

Tiempo estimado: 80 minutos

Inicio (20 puntos)

El docente inicia la sesión mencionando que diversas cosas en la vida están sujetas a condiciones, por ejemplo, el construir una casa estará sujeta al tamaño del terreno, al diseño de la casa, a la cantidad de dinero, entre muchas otras cosas. Para algunos de estos casos, las matemáticas también son útiles para calcular y tomar decisiones.

El docente cuestiona a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación? Posteriormente recuerda que una ecuación es una forma de representar la equivalencia entre dos cantidades o bien, que es una relación de igualdad entre una expresión algebraica y el valor cero. Menciona que las ecuaciones son útiles para modelar situaciones en las que interesa determinar el valor de la o las variables que hacen posible dicha equivalencia.

Se mencionar el resultado de aprendizaje de la sesión y se recuerda que una ecuación de segundo grado es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$

El docente cuestiona a los alumnos respecto a los métodos que conocen para resolver una ecuación de segundo grado.

Se enfatiza en que dos métodos de resolución más comunes para una ecuación cuadrática son el método de factorización y el método de la fórmula general. Es importante resaltar que la solución de una ecuación cuadrática son aquellos valores específicos de la variable o incógnita que cumplen la relación de equivalencia. En este caso, puede haber desde 0, 1 o hasta 2 soluciones.

Se propone para trabajo grupal la siguiente situación:

El auditorio de una escuela tiene forma rectangular y cuenta con las siguientes dimensiones: el largo es 4 metros más que el ancho. Por cuestiones de remodelación, se añaden 4 metros más de ancho y 8 metros más de largo con lo cual el área original se triplica. Con la información anterior, determina las dimensiones originales del auditorio.

Para la resolución de la situación se consideran los siguientes aspectos:

- La definición de la(s) incógnita(s).
- El planteamiento de la ecuación que representa el problema.
- La resolución de la ecuación que representa el problema.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

Al término de esta resolución, el docente informa a los alumnos que trabajarán en grupos de 4 integrantes, para resolver dos problemas relativos a ecuaciones cuadráticas.

Desarrollo (30 minutos)

Se propone la resolución de los siguientes problemas:

Problema Uno. La banqueta que rodea un jardín rectangular es de 3 metros de ancho. El jardín tiene 10 metros más de largo que de ancho. Si el área del jardín con la banqueta es de $1{,}496\ m^2$, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?

Problema Dos. Marina compró cierto número de pasteles por $200 para vender en el mercado. En su camino se le aplastaron 8 en el camión, por lo que tuvo que vender cada uno de los restantes a $3.50 más de lo que le costó cada uno, obteniendo una ganancia de $115. ¿Cuántos pasteles compró y a qué precio?

El docente supervisa el trabajo en cada sala de trabajo, fungiendo como un guía, quien resuelve las dudas de los alumnos y encamina el trabajo en caso de observar alguna dificultad respecto a la resolución.

Cierre (30 minutos)

Al término del tiempo destinado al trabajo en los equipos, se realiza la retroalimentación de las problemáticas planteadas, con la participación de los equipos. Se enfatiza en el uso de las ecuaciones de segundo grado en situaciones cotidianas y cómo se realiza el proceso de resolución.

Se propone la resolución (de manera individual) de la siguiente problemática:

El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 metros y el ancho en 6 metros, el área se duplica. Determina las dimensiones del terreno.

Se solicita responder la autoevaluación.

ANEXO TRES

SECUENCIA DIDÁCTICA DOS. Problemas de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resultado de aprendizaje: Emplea ecuaciones de segundo grado con una incógnita en la resolución de problemas hipotéticos o reales, con argumentos congruentes y lógicos.

Tiempo estimado: 80 minutos

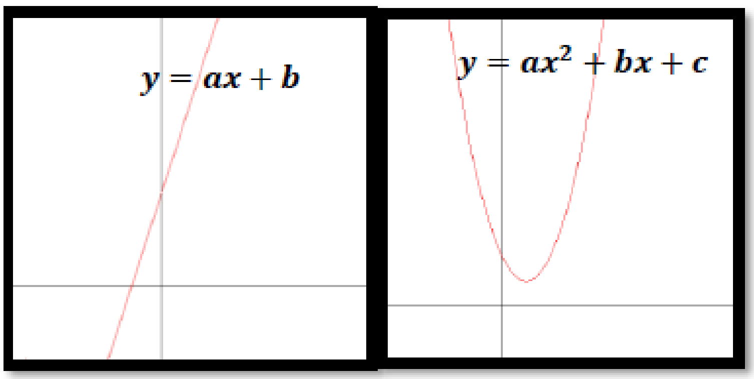
Inicio (15 puntos)

El docente inicia la sesión mencionando que diversas cosas en la vida están sujetas a condiciones, por ejemplo, el construir una casa estará sujeta al tamaño del terreno, al diseño de la casa, a la cantidad de dinero, entre muchas otras cosas. Para algunos de estos casos, las matemáticas también son útiles para calcular y tomar decisiones.

El docente cuestiona a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación? Posteriormente recuerda que una ecuación es una forma de representar la equivalencia entre dos cantidades o bien, que es una relación de igualdad entre una expresión algebraica y el valor cero. Menciona que las ecuaciones son útiles para modelar situaciones en las que interesa determinar el valor de la o las variables que hacen posible dicha equivalencia.

Se menciona que se han trabajado ecuaciones lineales y cuadráticas, por lo cual conviene realizar un recordatorio de ambas. Se cuestiona al alumno con la pregunta, ¿cuál es la diferencia entre ambos modelos?

Modelo lineal	Modelo cuadrático
$y = ax + b$	$y = ax^2 + bx + c$



Modelo lineal Modelo cuadrático

Al respecto, dos diferencias inmediatas se pueden identificar al observar sus representaciones algebraicas y gráficas correspondientes. Sin embargo, la diferencia que conviene resaltar es la de su variación. Para mostrar este aspecto se presenta el siguiente ejemplo:

Considere las siguientes tablas

$y = 3x + 2$		
x	y	$y_2 - y_1$
1	5	
2	8	3
3	11	3
4	14	3
5	17	3

$y = x^2 + 3$		
x	y	$y_2 - y_1$
1	4	
2	7	3
3	12	5
4	19	7
5	28	9

Como se muestra en las tablas, las diferencias entre los valores “y” de cada uno de los modelos son distintas. La variación de un modelo lineal es constante, en tanto que el cuadrático varía linealmente.

El docente cuestiona a los alumnos respecto a los métodos que conocen para resolver una ecuación de segundo grado.

Se enfatiza en que dos métodos de resolución más comunes para una ecuación cuadrática son el método de factorización y el método de la fórmula general.

Desarrollo (35 minutos)

El docente informa a los alumnos que trabajarán en grupos de 4 integrantes, para resolver dos problemas relativos a ecuaciones cuadráticas.

Se propone la resolución de los siguientes problemas:

Problema 1. En los pueblos de Yucatán se cuentan muchas historias interesantes y divertidas. Una de ellas cuenta la historia de dos campesinos, Juan y Marcelino, quienes caminaban por un sacbé (camino blanco), se encontraban desesperados ya que no habían logrado vender los zapotes y pitahayas que habían sembrado en sus terrenos.

Era tanta la desesperación de los campesinos que, al pasar cerca de una pirámide maya, Juan comenzó a hablar al Alux, cuidador de dicha pirámide. Juan dijo "Alux, Aluxito, apiádate de mí, hoy no fue un buen día, te pido que multipliques por el mismo número la cantidad de dinero que traigo en mi sabucán, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Marcelino, aquí presente, que ya estoy viendo que le ha ido peor que a mí".

El Alux, conmovido por la pasión que Juan ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos, Juan emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a Marcelino. Tan contento y emocionado se puso Marcelino, que pidió a Juan que repitiera su súplica al Alux.

Entonces Juan, realiza una nueva petición al Alux, "Alux, Aluxito, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré trescientos pesos a mi compadre Marcelino".

De nueva cuenta el Alux se conmueve y vuelve a conceder la petición, Marcelino inmediatamente recibe trescientos pesos. Más tarda en recibirlo, que en pedirle a Juan que repita otra petición.

Impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el Alux, Juan repite su petición, "Alux, Aluxito, por última vez, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré doscientos pesos a Marcelino".

Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, "¿cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre".

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?
b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio?

Problema 2. Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Yucatán trata de la herencia de un viejo artesano de hamacas, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir su herencia entre sus tres hijas.

El viejo artesano reunió a sus hijas y les dijo: “Hijas mías, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Me quiero marchar con la certeza de que los asuntos terrenales han quedado arreglados a mi entera satisfacción. Así que, en vista de que su madre ya murió, y yo ya no tengo más por quién preocuparme que no sea por ustedes, la próxima semana les repartiré la única herencia que les voy a dejar. Saben que tengo un terreno, voy a darles a cada una un pedazo de este. Mi compadre Pancho irá a medir el terreno dentro de tres días. Vengan, dentro de cuatro días a la misma hora para hacer la repartición”.

Las hijas, melancólicas, se despiden del padre, prometiendo que a los cuatro días regresarían. La hija mayor se retira del lugar pensando que como es la hija mayor, le tocó acompañar a su padre muchos años, mientras sus hermanas menores se quedaban en casa, por tanto, debe corresponderle la mayor parte. Así que, pasada la medianoche fue hasta dónde se encontraba el terreno y cambia el cercado de este, tomando 270 metros cuadrados.

No es de extrañar que la hija de en medio pensará que a ella le correspondería recibir la mayor parte, ya que, le tocaba cuidar a su hermana menor. Convencida de su argumento, va al terreno de su papá, cambia el cercado de este y toma 162 metros cuadrados.

Finalmente, la hermana menor, llega a la conclusión de que ella, precisamente por el hecho de ser la menor, debe de quedar más protegida que sus hermanas mayores. Va hacia dónde se encuentra el terreno de su padre y sin que nadie la vea, cambia el cercado del este, tomando 81 metros cuadrados.

Es preciso mencionar que, las hijas no tomaron el mismo de terreno. De esta manera, cuando Don Pancho va a medir el terreno se encuentra con que este mide 2187 metros cuadrados. Transcurridos los cuatro días, llegan las hijas al cuarto del padre, quien comenta que los terrenos serán distribuidos de la siguiente manera:

- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo largo, lo que cambia es el ancho.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo ancho sea 10 metros más que de largo.
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo ancho sea de 5 metros más que de largo.
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo ancho sea 15 metros menos que el largo.

a) ¿Cuál era el área original del terreno?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

El docente supervisa el trabajo en cada equipo, fungiendo como un guía, quien resuelve dudas de los alumnos y encamina el trabajo en caso de observar alguna dificultad respecto a la resolución.

Cierre (30 minutos)

Se realiza la retroalimentación de las problemáticas planteadas, con la participación de los equipos. Se enfatiza en el uso de las ecuaciones de segundo grado en situaciones cotidianas, así como en el proceso de planteamiento y de resolución que realizaron al trabajar con las problemáticas planteadas.

Se propone la resolución (de manera individual) de la siguiente problemática:

Diseña una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado completa.

Se solicita responder la autoevaluación.

ANEXO CUATRO

SECUENCIA DIDÁCTICA TRES. Problemas de ecuaciones de segundo grado con una incógnita (haciendo uso de la herramienta GeoGebra)

Resultado de aprendizaje: Emplea ecuaciones de segundo grado con una incógnita en la resolución de problemas hipotéticos o reales, con argumentos congruentes y lógicos.

Tiempo estimado: 80 minutos

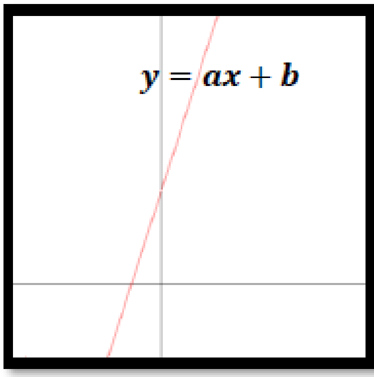
Inicio (15 puntos)

El docente inicia la sesión mencionando que diversas cosas en la vida están sujetas a condiciones, por ejemplo, el construir una casa estará sujeta al tamaño del terreno, al diseño de la casa, a la cantidad de dinero, entre muchas otras cosas. Para algunos de estos casos, las matemáticas también son útiles para calcular y tomar decisiones.

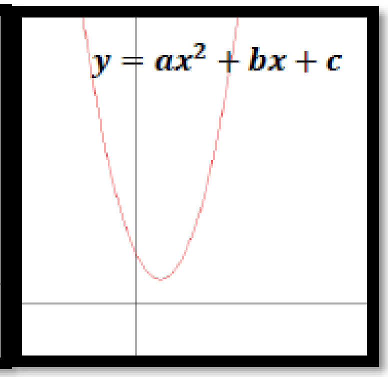
El docente cuestiona a los alumnos con la pregunta ¿qué es una ecuación? Posteriormente recuerda que una ecuación es una forma de representar la equivalencia entre dos cantidades o bien, que es una relación de igualdad entre una expresión algebraica y el valor cero. Menciona que las ecuaciones son útiles para modelar situaciones en las que interesa determinar el valor de la o las variables que hacen posible dicha equivalencia.

Se menciona que se ha trabajado ecuaciones lineales y cuadráticas, por lo cual conviene realizar un recordatorio de ambas. Se cuestiona al alumno con la pregunta: ¿cuál es la diferencia entre ambos modelos?

Modelo lineal	Modelo cuadrático
$\boldsymbol{y = ax + b}$	$y = ax^2 + bx + c$



Modelo lineal



Modelo cuadrático

Al respecto, dos diferencias inmediatas se pueden identificar al observar sus representaciones algebraicas y gráficas correspondientes. Sin embargo, la diferencia que conviene resaltar es la de su variación. Para mostrar este aspecto se presenta el siguiente ejemplo:

Considere las siguientes tablas

$y = 3x + 2$		
x	y	$y_2 - y_1$
1	5	
2	8	3
3	11	3
4	14	3
5	17	3

$y = x^2 + 3$		
x	y	$y_2 - y_1$
1	4	
2	7	3
3	12	5
4	19	7
5	28	9

Como se muestra en las tablas, las diferencias entre los valores "y" de cada uno de los modelos son distintas. La variación de un modelo lineal es constante, en tanto que el cuadrático varía linealmente.

El docente cuestiona a los alumnos respecto a los métodos que conocen para resolver una ecuación de segundo grado. Se enfatiza en que dos métodos de resolución más comunes para una ecuación cuadrática son el método de factorización y el método de la fórmula general.

Desarrollo (35 minutos)

El docente informa a los alumnos que trabajarán en grupos de 4 integrantes, para resolver dos problemas relativos a ecuaciones cuadráticas.

El docente comenta a los alumnos que en la plataforma de trabajo (UADY VIRTUAL) se compartió el enlace para descargar el archivo de GeoGebra con el que estarán trabajando. El enlace al archivo es el siguiente:

https://drive.google.com/file/d/1b_41Wn6DuQZYp4CgzkbFA6NzsqEfSls0/view?usp=sharing

Se propone la resolución de los siguientes problemas:

Problema 1. En los pueblos de Yucatán se cuentan muchas historias interesantes y divertidas. Una de ellas cuenta la historia de dos campesinos, Juan y Marcelino, quienes caminaban por un sacbé (camino blanco), se encontraban desesperados ya que no habían logrado vender los zapotes y pitahayas que habían sembrado en sus terrenos.

Era tanta la desesperación de los campesinos que, al pasar cerca de una pirámide maya, Juan comenzó a hablar al Alux, cuidador de dicha pirámide. Juan dijo "Alux, Aluxito, apiádate de mí, hoy no fue un buen día, te pido que multipliques por el mismo número la cantidad de dinero que traigo en mi sabucán, te prometo que regalaré doscientos pesos a mi compadre Marcelino, aquí presente, que ya estoy viendo que le ha ido peor que a mí".

El Alux, conmovido por la pasión que Juan ponía en sus palabras, le cumplió sus deseos, Juan emocionado, entregó sin dudar los doscientos pesos a Marcelino. Tan contento y emocionado se puso Marcelino, que pidió a Juan que repitiera su súplica al Alux.

Entonces Juan, realiza una nueva petición al Alux, "Alux, Aluxito, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré trescientos pesos a mi compadre Marcelino".

De nueva cuenta el Alux se conmueve y vuelve a conceder la petición, Marcelino inmediatamente recibe trescientos pesos. Más tarda en recibirlo, que en pedirle a Juan que repita otra petición.

Impactado al darse cuenta de los buenos resultados que estaba obteniendo con el Alux, Juan repite su petición, "Alux, Aluxito, por última vez, te pido que me des una cantidad de dinero igual a la que traigo ahora en mi sabucán, te prometo que daré doscientos pesos a Marcelino".

Pacientemente el Alux concede la petición, Marcelino recibe gustoso, doscientos pesos, mismos que guarda en su sabucán, volteando a ver a Juan le pregunta, "¿cuántos pesos conseguiste? Se va a poner contenta la comadre".

Juan mete la mano a su sabucán para encontrarse, con que no traían ni un peso.

a) Descartando el hecho de que el Alux le hubiese hecho trampa, o que él se hubiera equivocado al entregar el dinero a Juan, ¿cuál es la explicación a lo sucedido, por qué se quedó sin dinero?
b) ¿Cuánto dinero tenía Juan al inicio?
c) Tomando como base la herramienta tecnológica, ¿qué representa gráficamente la solución encontrada?

Problema 2. Una anécdota que se cuenta por los pueblos de Yucatán trata de la herencia de un viejo artesano de hamacas, al sentirse ya muy enfermo, quiso repartir su herencia entre sus tres hijas.

El viejo artesano reunió a sus hijas y les dijo: "Hijas mías, ya pronto tendré que rendir mi tributo a la madre Tierra. No pasarán muchos días para que abandone este mundo. Me quiero marchar con la certeza de que los asuntos terrenales han quedado arreglados a mi entera satisfacción. Así que, en vista de que su madre ya murió, y yo ya no tengo más por quién preocuparme que no sea por ustedes, la próxima semana les repartiré la única herencia que les voy a dejar. Saben que tengo un terreno, voy a darles a cada una un pedazo de este. Mi compadre Pancho irá a medir el terreno dentro de tres días. Vengan, dentro de cuatro días a la misma hora para hacer la repartición".

Las hijas, melancólicas, se despiden del padre, prometiendo que a los cuatro días regresarían. La hija mayor se retira del lugar pensando que como es la hija mayor, le tocó acompañar a su padre muchos años, mientras sus hermanas menores se quedaban en casa, por tanto, debe corresponderle la mayor parte. Así que, pasada la medianoche fue hasta dónde se encontraba el terreno y cambia el cercado de este, tomando 270 metros cuadrados.

No es de extrañar que la hija de en medio pensará que a ella le correspondería recibir la mayor parte, ya que, le tocaba cuidar a su hermana menor. Convencida de su argumento, va al terreno de su papá, cambia el cercado de este y toma 162 metros cuadrados.

Finalmente, la hermana menor, llega a la conclusión de que ella, precisamente por el hecho de ser la menor, debe de quedar más protegida que sus hermanas mayores. Va hacia dónde se encuentra el terreno de su padre y sin que nadie la vea, cambia el cercado del este, tomando 81 metros cuadrados.

Es preciso mencionar que, las hijas no tomaron el mismo de terreno. De esta manera, cuando Don Pancho va a medir el terreno se encuentra con que este mide 2187 metros cuadrados. Transcurridos los cuatro días, llegan las hijas al cuarto del padre, quien comenta que los terrenos serán distribuidos de la siguiente manera:

- Los terrenos de las tres tienen forma rectangular, tienen el mismo ancho, lo que cambia es el largo.
- A mi hija menor le daré un terreno cuyo largo sea 10 metros más que de ancho.
- A mi hija de en medio le daré un terreno cuyo largo sea de 5 metros más que de ancho.
- A mi hija mayor le daré un terreno cuyo largo sea 15 metros menos que el ancho.

a) ¿Cuál era el área original del terreno?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de los terrenos que les tocó a cada una de las hijas?

c) ¿Cuántos metros cuadrados de terreno les tocó en realidad a cada una de las hijas?

d) Tomando como base la herramienta tecnológica, ¿qué representa gráficamente la solución encontrada?

El docente supervisa el trabajo en cada equipo, fungiendo como un guía, quien resuelve las dudas de los alumnos y encamina el trabajo en caso de observar alguna dificultad respecto a la resolución.

Cierre (30 minutos)

Se realiza la retroalimentación de las problemáticas planteadas, con la participación de los equipos. Se enfatiza en el uso de las ecuaciones de segundo grado en situaciones cotidianas, así como en el proceso de planteamiento y de resolución que realizaron al trabajar con las problemáticas planteadas.

Se propone la resolución (de manera individual) de la siguiente problemática:

Diseña una problemática, cuya solución implique el planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado completa. Para la solución incluye el análisis gráfico de la misma.

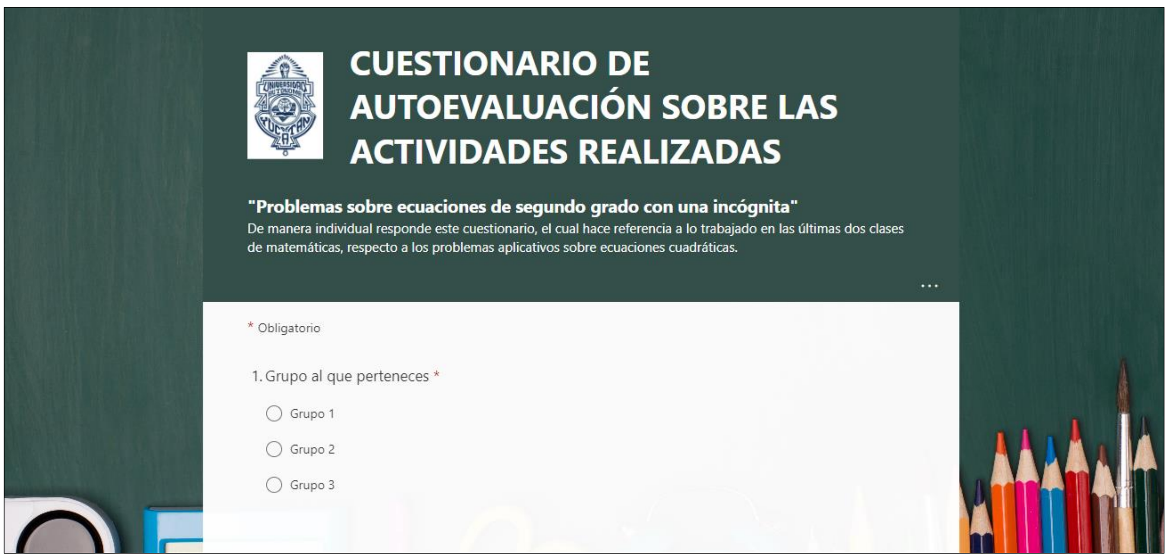
Se solicita responder la autoevaluación.

ANEXO CINCO

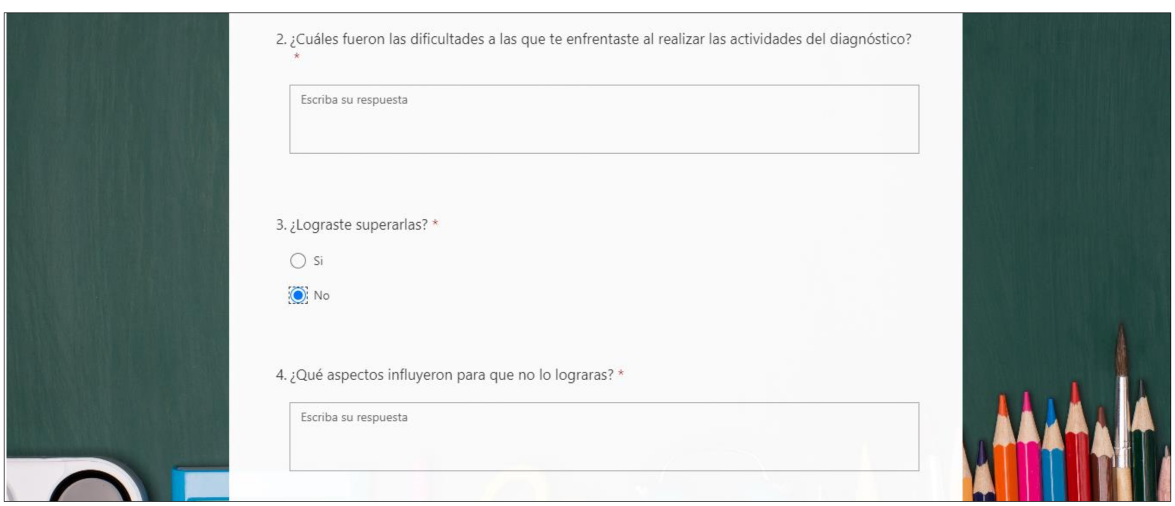
ACTIVIDAD DE AUTOEVALUACIÓN. Mediante el llenado de un formulario.

Se presentan las capturas de pantalla de cómo se veía la interfaz del formulario, dado que, el formulario ya no está visible, pues estuvo habilitado únicamente por un periodo de tiempo.

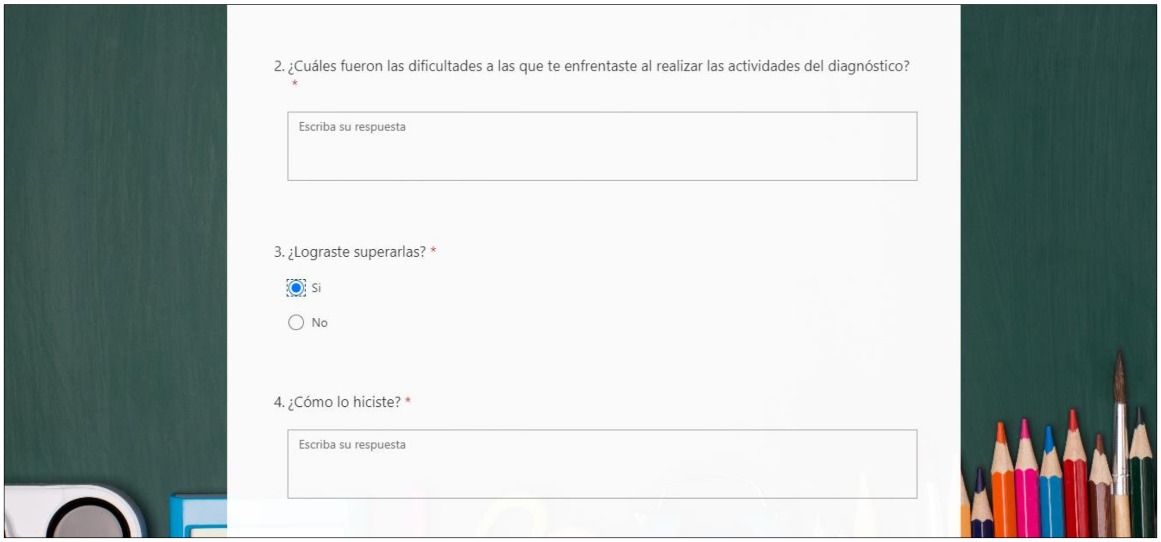
Primeramente, se solicita especificar el grupo al que pertenecen, desde que se comenzó a trabajar con los alumnos se les especificó cuál era el grupo asignado.



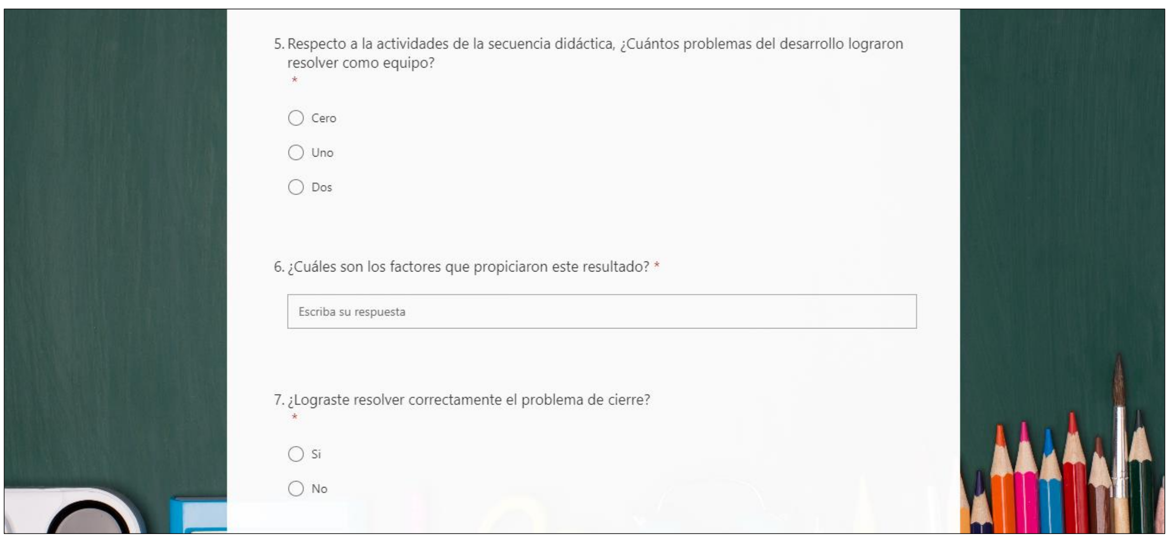
Posteriormente se pregunta sobre las dificultades que se encontró al realizar la actividad diagnóstica y en la pregunta tres si las superó o no. Si el alumno respondía que no, la pregunta 4 decía ¿qué aspectos influyeron para que no lo lograra?



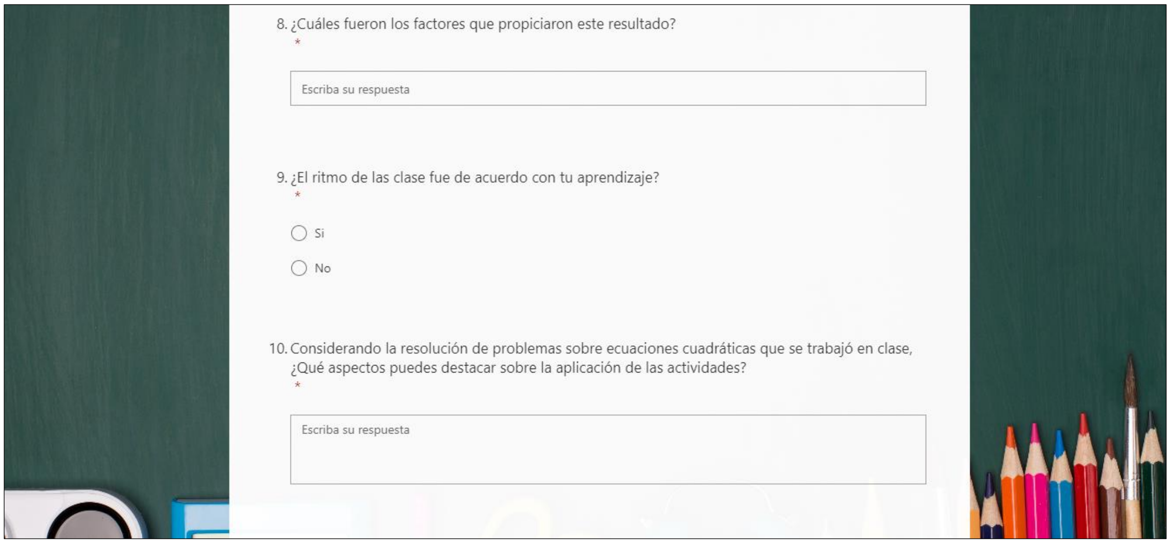
Si el alumno respondía que sí a la pregunta 3, la pregunta 4 decía ¿cómo lo hiciste?



Posteriormente se realizan preguntas referentes a la secuencia didáctica aplicada, número de problemas que resolvieron en equipo, los factores que propiciaron este resultado y si logró resolver el problema de cierre.



En la pregunta 8 se cuestionan las razones por que las que pudo, o no, resolver el problema del cierre, en la pregunta 9 se cuestiona sobre si el ritmo de la clase fue de acuerdo con su aprendizaje.



8. ¿Cuáles fueron los factores que propiciaron este resultado?
*

Escriba su respuesta

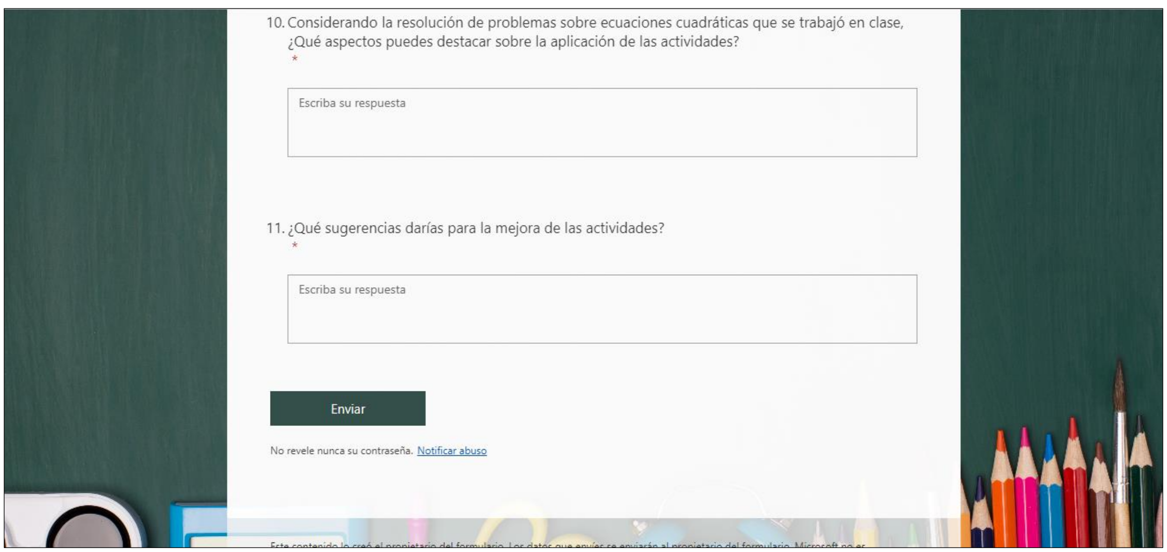
9. ¿El ritmo de las clase fue de acuerdo con tu aprendizaje?
*

- Si
- No

10. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?
*

Escriba su respuesta

En la pregunta 10, se preguntas sobre los aspectos que puede destacar con la aplicación de las actividades y finalmente, en la pregunta 11 las sugerencias que tiene para la mejora de las actividades.



10. Considerando la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas que se trabajó en clase, ¿Qué aspectos puedes destacar sobre la aplicación de las actividades?
*

Escriba su respuesta

11. ¿Qué sugerencias darías para la mejora de las actividades?
*

Escriba su respuesta

Enviar

No revele nunca su contraseña. Notificar abuso