UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El teorema de los números pentagonales, de las particiones a las funciones generadoras

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Javier Rendón Romero

TUTOR

Mat. Julio César Guevara Bravo

Ciudad Universitaria, CDMX, 2023.

Datos del alumno
Javier Rendón Romero Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 312268158
Datos del tutor
Mat. Julio César Guevara Bravo
Datos del sinodal 1
M. en D. Tania Azucena Chicalote Jiménez
Datos del sinodal 2
Dra. María del Pilar Piñones Contreras
Datos del sinodal 3
M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez
Datos del sinodal 4
Mat. Gabriela Cervantes Piza
Datos del trabajo escrito
El teorema de los números pentagonales, de las particiones a las funciones generadoras 68 pag 2023

Agradecimientos

A mis padres, Clementina y Javier, quienes me han impulsado, apoyado, escuchado, motivado y acompañado a lo largo de este camino, brindándome sus enseñanzas, consejos y amor incondicionalmente. Sin ustedes, no sería quien soy y no hubiera alcanzado esta meta tan importante. Este gran logro también es de ustedes.

A mi UNAM, la institución a la que desde niño anhelé ingresar y a la que orgullosamente pertenezco; que me ha brindado grandes experiencias y aprendizajes, que me ha permitido crecer como estudiante y ser humano y que me ha permitido conocer grandes personas.

A mi tutor, Julio César Guevara Bravo, quien, primero como profesor, me transmitió la pasión por la docencia y por la teoría de números y, posteriormente como asesor de mi tesis, me guió, orientó y apoyó en todo momento. Gracias por su paciencia y confianza.

A Jessy, mi novia, quien me ha motivado e inspirado a no abandonar mis metas y sueños, a no rendirme y siempre mirar hacia adelante en busca de más. Gracias por tu amor, cariño, apoyo y por compartir conmigo este logro.

A mi familia, que ha estado incondicionalmente conmigo y con mis padres. Gracias por acompañarme en este camino, apoyarme e impulsarme. Gracias por nunca dejar de creer en mí y sobre todo por demostrarme el verdadero significado de la familia.

A mis amigos y compañeros de viaje, quienes con su amistad, apoyo, confianza, compañía y ocurrencias han sido parte importante en mi proceso como estudiante y en mi vida personal. Gracias por mostrarme el significado y valor de una amistad.

A mis maestros, que a lo largo de mi trayectoria académica han dejado huella en mí, no sólo con conocimientos, sino con su humanismo, mostrándome la incansable pero gratificante y noble labor que es la docencia, motivándome a nunca abandonar esta pasión.

A cada uno de ustedes, ¡GRACIAS! ¡GOYA, UNIVERSIDAD!

Índice general

Introducción.

La teoría de particiones[1], como un área de estudio, se empezó a crear como un auxiliar en el estudio de los juegos de azar, en particular para el juego de dados. Fue a mediados del siglo XVIII que logró obtener su consolidación y tener vida propia dentro de la naciente Teoría de los Números. Son pocos los temas donde tenemos el día “exacto” en el que podemos decir que inició una disciplina científica. Éste es el caso del estudio de las particiones. Se puede decir que todo se originó con una carta de 1740 donde Philippe Naudé preguntó a Euler sobre las particiones de un entero con sumandos diferentes y por las que tienen sumandos repetidos y diferentes. Euler abordó los problemas que le propuso a través de las funciones generadoras.

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^j)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}$$

La reciente teoría de particiones, que desde su gestación conocemos a su creador, logró aportar propiedades de los enteros que en los contextos de la matemática griega y en la de sus posteriores herederos -Fermat, Mersenne, Descartes, entre otros- no se conocían. Estas propiedades fueron de carácter aditivo, es decir, representar enteros como suma de otros enteros que pertenecen a conjuntos con características determinadas. La teoría de particiones tiene la característica de que construyó una base teórica en pocos años, aportó teoremas que son fundamentales para el estudio actual de las formas aditivas de los enteros. Lo más sobresaliente es que con el mismo padre de las particiones y funciones generadoras se avanzó tan rápido que ciertos resultados fueron posteriormente retomados para seguir construyendo la teoría, así como para terminar de justificar en su totalidad algunas de las demostraciones. Y uno de estos casos fue el **Teorema[2] de los Números Pentagonales**[3].

Este trabajo de tesis expone el teorema de los pentagonales y presenta las primeras demostraciones, que fueron las que Euler publicó en diferentes trabajos. Se presentarán diversas demostraciones que se conocieron en los años posteriores a Euler, hasta llegar a los diagramas de Ferrers en los primeros años del siglo XX. La tesis está dividida en tres capítulos, bajo la siguiente estructura:

El capítulo 1 es una introducción, tanto histórica como matemática, que presenta los antecedentes y las primeras ideas que Euler compartió con Nicolas Bernoulli, Christian Goldbach, entre otros, a través de diversas comunicaciones que mantuvo con ellos de manera sostenida.

[1]Por **partición** de un entero positivo n debemos de entender su representación como suma de otros enteros, donde los sumandos de la partición se pueden requerir todos diferentes o algunos repetidos. Por ejemplo, una de las particiones de 22 es 1+3+7+11, mientras que otra es 1+1+2+2+5+11.

[2]Aquí damos una idea de lo que es este teorema. Euler señala que ha observado que para el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j) = (1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)....$, si se expande por multiplicación, se obtiene la serie $1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+....$, donde cada uno de los sumandos tiene una potencia n, cuyos exponentes tienen la forma $\frac{3x^2\pm x}{2}$.

[3]Retomaremos la definición de número pentagonal en la sección 1.4., pero es oportuno adelantar que, dado $n\in\mathbb{Z}^+$, el n-ésimo **número pentagonal** p_n es de la forma $p_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$.

En el capítulo 2 se presenta la base matemática que creó para abordar el problema de las particiones, refiriéndonos a las funciones generadoras. Con esta base, presentamos las demostraciones del propio Euler y de personajes como Legendre y Jacobi, culminando con una visión diferente, que es la de los diagramas de Ferrers.

En el tercer y último capítulo, se presentan algunos resultados donde se puede aplicar el teorema de los números pentagonales, como es el caso de calcular funciones aritméticas.

A través de los tres capítulos se podrá encontrar cómo se construyeron los primeros elementos eulerianos de las particiones, donde se verá que dichas aportaciones estaban aún llenas de procesos muy heurísticos. En ellos, se expone la evolución teórica de las formas de demostrar este teorema, llevándonos por una ruta que parte del corte heurístico y llega a la formalidad que hoy acostumbramos, por ejemplo, de la teoría de Jacobi con su triple producto escalar.

Antecedentes.

Desde que se tiene registro del uso de las operaciones aritméticas, se ha planteado, intrínsecamente, la idea de representar a un número como suma de otros. Esto generalmente lo hacemos cuando sumamos una cantidad determinada de números (o números predeterminados) y se obtiene otro número que será diferente de los sumandos anteriores, es decir, partimos de sumar una cantidad finita de enteros positivos para obtener otro entero positivo.

Por ejemplo, sumamos los enteros 2, 5, 9, 23 y 67 y obtenemos el 106

$$2 + 5 + 9 + 23 + 67 = 106.$$

Así, llegamos a una representación del 106 como suma de otros enteros positivos, que no es otra cosa sino una *partición* del 106.

Hasta el siglo XVIII, prácticamente no se tuvo el interés por el proceso contrario, es decir, por encontrar cómo se puede representar un entero determinado como suma de otros enteros positivos y, más aún, cuántas representaciones tendría si restringimos la cantidad de sumandos en la partición.

0.1. Así inició el camino.

A partir de este momento, ya no son un elemento complementario o coincidente de las teorías de la probabilidad o el cálculo combinatorio [4], ya que las particiones empezaron a establecerse como un paradigma en las matemáticas, con resultados sorprendentes y plenamente vigentes hasta la actualidad. El personaje que se encargó de llevarlas por este camino de la consolidación fue uno de los matemáticos más importantes y que más aportaron a esta ciencia: **Leonhard Euler**.

0.2. Los problemas que le plantea Philippe Naudé a Euler.

Con base en la reconstrucción histórica, ahora se conoce que el interés de Euler por el tema de las particiones surgió a partir de la carta que Philippe Naudé (1684-1747) le escribió con fecha 4 de septiembre de 1740. Entre los temas que aborda en la carta, le plantea la duda sobre cómo encontrar el número de formas diferentes en que un entero positivo m se puede expresar como la suma de n sumandos naturales diferentes. Además, también le planteó el caso en el que la partición pudiera tener también sumandos repetidos.

Desde el día que Euler recibió la carta y la leyó, reflexionó las preguntas y se interesó de manera personal en este tema de lo aditivo. El fruto de su trabajo se manifestó directamente en los artículos que escribió sobre el tema. Generalmente, cuando respondía preguntas, no lo hacía exclusivamente hacia lo que se le preguntaba, sino que además, con gran frecuencia, se adentraba más allá de lo que se le exigía y empezaba a plantearse nuevos cuestionamientos (o iban surgiendo en el trayecto por necesidad del propio desarrollo), para poder obtener mayor

[4] Dentro de esas teorías, que para esa época eran recientes, ya habían publicado importantes trabajos personajes como Jacob Bernoulli [2005], con el Ars Conjectandi, publicado en 1713, o Pierre Rémond de Montmort [1708], con su Essay d'analyse sur les Jeux de Hazard, publicado en 1708.

información. Su manera de abordar los temas lo llevó a desarrollar verdaderos paradigmas, que dieron lugar a nuevas teorías en las ciencias matemáticas. En este contexto, podemos ver que, con base en las preguntas de Naudé, las particiones empezaron a tener personalidad propia. Y todo esto de la mano de Euler.

Se conocen, en un primer periodo, hasta 1770, cuatro artículos en donde directamente Euler desarrolló sus ideas acerca de las particiones, que son los siguientes:

1. La primera respuesta a las interrogantes de Philippe Naudé se encuentra en el documento[5] E158, originalmente presentado el 6 de abril de 1741, pero publicado hasta 1751, con el título *Observationes analyticae variae de combinationibus* (Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones).

2. En el documento con clasificación E101 y publicado en 1748, con el título *Introductio in analysin infinitorum* (Introducción al Análisis de infinitos), se encuentra, en el capítulo XVI, otra versión de lo publicado en el artículo enunciado en el inciso anterior. Este capítulo de la *Introductio* tiene como título *De las particiones de números*. Cabe señalar que este trabajo aparece en segundo lugar de la cronología, aunque se publicó antes que el mencionado anteriormente.

3. En 1750, retoma el tema y aporta más progresos en su escrito E191, que apareció publicado en 1753, con el título *De Partitione numerorum* (De las Particiones de números).

4. Pasó un largo periodo para que apareciera su artículo E394, que fue presentado en 1768 y publicado en 1770, con el título *De Partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas* (Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados).

Ya se mencionó que el inicio quedó establecido con los problemas de Philippe Naudé y que Euler se adentró lo suficiente como para darle un lugar propio, dentro de la matemática, a las particiones. Del cúmulo de resultados interesantes que creó en los primeros años de este nuevo paradigma, uno de los más sobresalientes en las particiones fue el denominado ***Teorema de los Números Pentagonales***, teorema que debe su nombre a que su resultado contiene ese tipo particular de números -los pentagonales-, entre los cuales se encuentran el $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, ...,$ por citar solo algunos (los primeros para ser más precisos). Antes de mencionar y profundizar en este gran resultado, su significado y algunas consecuencias, bosquejaremos los antecedentes de este teorema.

0.3. Los antecedentes del *Teorema de los números pentagonales*

La primera vez que el teorema de los pentagonales fue mencionado dentro de la correspondencia de Euler, sucedió en una carta que Daniel Bernoulli le escribió el 28 de enero de 1741. En ella, Bernoulli discute una serie de problemas que en apariencia Euler le había planteado en comunicaciones previas. Particularmente, Daniel menciona el siguiente problema:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\ldots = 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{12}}-\frac{1}{n^{15}}+etc. \qquad (0.1)$$

Este resultado, asegura,

> "de transformar la expresión, se obtiene fácilmente por inducción si uno multiplica varios factores de la expresión dada. El resto de la serie, en la que se ven los números primos, no lo hago. Esto se puede mostrar en una investigación muy agradable, junto con un pasatiempo tranquilo y la resistencia de trabajo pertinente, tres cosas de las cuales carezco".

[5] A partir de esta cita nos referiremos a los trabajos de Euler con base en la clasificación desarrollada por Gustav Eneström que lista todos los artículos escritos por Euler de 1 a 866. Para el caso del artículo señalado es el E-158. Los artículos completos se pueden consultar en: eulerarchive.maa.org

La igualdad anterior contiene a los números pentagonales que hemos mencionado, presentándose en su desarrollo irreducible, es decir, a partir de una función se obtuvo este conjunto particular de números en los exponentes de los denominadores de cada término. Esto es un ejemplo del desarrollo de lo que ahora se conoce como *función generadora*[6], ya que, tras desarrollar la función, arroja esos valores particulares. Es probable que Euler haya mencionado el problema de expandir este producto infinito en una serie infinita en su última carta que data del 15 de septiembre de 1740.

Por otra parte, el primer documento donde Euler menciona el teorema es en sus *Observationes analyticae variae de combinationibus* (Observaciones analíticas sobre combinaciones) [Euler 1741]. En éste, Euler introduce la función generadora de las particiones de un entero positivo (donde no importa la repetición), que es la siguiente:

$$\prod_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-n^x}\right) = 1 + n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + etc \tag{0.2}$$

En este documento, Leonhard asevera que

> "aquí, al final de esta disertación, se debe hacer una observación notable que, sin embargo, no he podido demostrar con rigor geométrico. He observado para este producto infinito: $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ *etc.*, si se expande por multiplicación, se obtiene la serie $1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+etc.$, donde cada uno de estos ocurre como una potencia de n, de la cual los exponentes están contenidos en la forma $\frac{3x^2\pm x}{2}$. Y si x es un número impar, las potencias de n, que son $\frac{3x^2\pm x}{2}$, tendrán el coeficiente -1; y si x es un número par, entonces las potencias $\frac{3x^2\pm x}{2}$ tendrán el coeficiente $+1$" [en Euler 1741, pp. 24, 25].

Euler observa además que la serie de la función generadora de particiones y la serie recién mencionada son únicas, al ser las expansiones de la serie de productos infinitos recíprocos.

Nos saltan a la vista varias situaciones: la primera es que los signos negativos y positivos se alternan cada par de términos (sin tomar en cuenta el 1), es decir, dos términos negativos, seguidos de dos positivos, y así de manera sucesiva. Además, sólo aparecen ciertas potencias, las cuales, tienen como característica que su coeficiente es $+1$ o -1, comportamiento que incluso se aprecia de igual manera en la función generadora (0.1). Para este momento, identifica la forma de los términos resultantes, sin embargo, desconoce qué propiedad tiene el polinomio para que aparezcan este particular conjunto de números.

Tiempo más tarde, vuelve a hacer mención del polinomio irreducible en una carta dirigida a Nicolás Bernoulli el 1 de septiembre de 1742. Euler nuevamente hace notar que los coeficientes que hay en la serie $1+n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+11n^6+etc.$, representan el número de maneras diferentes en que el exponente de ese término se puede escribir como suma de enteros positivos diferentes o con repetición. En esta comunicación, también menciona que:

> "esta serie, además, surge de la división, cuando la unidad es dividida por $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ *etc.*, cuyo producto, si es expandido, arroja la expresión
>
> $$1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}+etc.$$
>
> donde no he podido penetrar en la forma precisa en que proceden los exponentes, aunque por inducción, he llegado a la conclusión de que no se producirán otros exponentes, a menos que estén contenidos en la fórmula $\frac{3x^2\pm x}{2}$; y esto es tal que las potencias de n tienen el signo $+$ si los exponentes surgen con un número par sustituido por x".

Es para resaltar que, por lo que menciona, ya tiene una justificación sobre la forma de estos números (o al menos de que aparecen esos números que se rigen por esa forma), pero en ningún momento la muestra, por lo que no se puede precisar, hasta este momento, la formalidad (o nivel de formalidad) de su justificación de los exponentes.

A ello, Bernoulli responde poco menos de dos meses después, el día 24 de octubre, donde discute el teorema de los números pentagonales. Observa que

> "en la expansión de la serie

[6] La definición formal se enuncia en la pág. 13 de este texto.

$$n^0 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} + etc.$$

que has encontrado, que es igual al producto $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ *etc.*, las diferencias de los exponentes progresan como $1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, etc.$, cuyos números, tomados alternativamente, son de la serie $1, 3, 5, 7, 9, etc.$ y de la serie $1, 2, 3, 4, 5, etc.$, cuyas propiedades tal vez puedan demostrarse a partir de la naturaleza de ella, no sólo a través de la inducción; pero en este asunto, no soy ahora libre de preguntar".

Euler le responde a Bernoulli el 10 de noviembre de 1742, y esta carta es la última que se conoce donde se aborda el teorema de los números pentagonales. En ella, se incluye una primera idea para demostrar el teorema, que consiste básicamente en usar una noción aún primigenia de inducción. Euler adjunta sus ideas primarias y, sobre ellas, Bernoulli trabaja de forma más detallada para justificar todo de la mejor manera posible.

Un personaje que entraría en el quehacer matemático de Euler, y en especial con el teorema de los números pentagonales, fue Christian Goldbach. Se conocieron en 1727 durante su estancia en la Academia de Ciencias en San Petersburgo, cuando Euler era un joven de 20 años, mientras que Goldbach era 17 años mayor que él y ocupaba el cargo de Secretario de la Academia de Ciencias. El primer acercamiento sobre este tema se dio el 15 de octubre de 1743 y, a partir de ahí, siguieron escribiendo sobre el teorema de los números pentagonales durante varios años.

En particular, en una carta que data de abril de 1747, Euler le comenta que ha encontrado un "orden maravilloso" en los números que representan la suma de los divisores de los números naturales. Para ello, dado un natural n, denota como $\int n$ a la suma de los divisores de este número (que es la definición de lo que hoy conocemos como la función $\sigma(n)$) y nos brinda algunos ejemplos de ello para la mejor comprensión de la idea:

$\int 1 = 1$

$\int 2 = 1 + 2 = 3$

$\int 3 = 1 + 3 = 4$

$\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$

$\int 5 = 1 + 5 = 6$

$\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

$\int 7 = 1 + 7 = 8$

$\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$

$\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$

$\int 11 = 1 + 11 = 12$

$\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$

etc.

Acto seguido, hace notar que:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \dots \qquad (0.3)$$ [7]

destacando (nuevamente) que los signos $+$ y $-$ se alternan por pares. Es aquí donde una vez más aparecen los mencionados números pentagonales, sólo que ahora en un problema distinto (al menos aparentemente por ahora).

De regreso a lo anterior, hace notar que, evidentemente, cuando se llega a un número negativo, nos detenemos, o le damos el valor de 0, además que se toma $\int 0 = n$. Por consecuencia, procede a mostrar nuevamente ejemplos para ver que efectivamente coinciden los valores bajo la regla establecida con los que calculó previamente.

$n = 1$; $\int 1 = \int 0 = 1$

$n = 2$; $\int 2 = \int 1 + \int 0 = 1 + 2 = 3$

$n = 3$; $\int 3 = \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4$

[7] La demostración de esta igualdad se encuentra en la sección final "La presencia del teorema de los números pentagonales"

$n = 4$; $\int 4 = \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7$

$n = 5$; $\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0 = 7 + 4 - 5 = 6$

$n = 6$; $\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 = 6 + 7 - 1 = 12$

$n = 7$; $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$

$n = 8$; $\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$

$n = 9$; $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$

$n = 10$; $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$

$n = 11$; $\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$

$n = 12$; $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

etc.

Cabe resaltar que para este tiempo, Euler sigue sin justificar la forma de los números $\frac{3x^2 \pm x}{2}$, a pesar de que ya tenía elementos clave. Un año antes, en una comunicación con Goldbach, había afirmado "todavía no he podido exponer la regla observada en la naturaleza de este asunto" [en Juškevič y Winter 1965, pp 266-268], pero para este momento, asevera que la razón de este orden no es mucho menos obvia, al decir que uno no ve lo que tienen los números $1, 2, 5, 7, 12, 15, \ldots$ en relación con los divisores de los naturales y su suma. Para este momento, afirma que no puede jactarse de tener una demostración rigurosa de ello, pero no duda de su certeza, asegurando que "no podría dudar de la verdad, porque hasta más de 300 esta regla siempre ha llegado" [en Juškevič y Winter 1965, pp 266-268].

De ahí, le comunica a Goldbach que derivó este teorema de la expresión que había sido objeto de las comunicaciones con Bernoulli, que hemos mencionado previamente, que es el siguiente producto polinómico (denotado por la letra $\mathcal{S}$):

$$\mathcal{S} = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7)etc. \tag{0.4}$$

Asegura que, siendo $\mathcal{S}$ correcta con los números que resultan de arriba, "correcta como no lo dudo, sin que me falte una demostración rigurosa" [en Juškevič y Winter 1965, pp 267], se puede obtener lo deseado. Agrega también que "uno ve que lo mismo no es tan obvio y que, sin duda, todavía debe haber cosas hermosas escondidas en él" [en Juškevič y Winter 1965, pp 267], de lo que se puede deducir que tiene la esencia de la demostración, con la claridad de que el resultado es cierto y que puede abrir una puerta para una gran cantidad de resultados.

Aproximadamente 3 años después, en junio de 1750, Goldbach recibe una carta más de Euler donde vuelve a abordar este tema. En ella, le recuerda lo que había hallado sobre el cálculo de $\int n$ y ahora se enfoca en la demostración de $\mathcal{S}$. Menciona que "desde entonces también he encontrado la demostración de este teorema"[8]:

Inicia con la mención del siguiente lema:

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)(1 - \delta)(1 - \epsilon) \ldots = 1 - \alpha - \beta(1 - \alpha) - \gamma(1 - \alpha)(1 - \beta) - \delta(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) - \ldots \tag{0.5}$$

Luego, hace las sustituciones $\alpha = x$, $\beta = x^2$, $\gamma = x^3$, $\delta = x^4$, etc., para que lo anterior quede como...

[8]Esta idea es desarrollada de manera más formal y con mayor detalle en el siguiente capítulo.

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)-\ldots \quad (0.6)$$

Posteriormente, toma $A = 1-x+x(1-x)(1-x^2)+x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3)+\ldots$, y reescribe la expresión $\mathcal{S}$ como $\mathcal{S} = 1-x-Axx$. De esta manera Euler procede a realizar un procedimiento iterativo, en el que desarrolla el factor común de cada expresión, para obtener así términos irreducibles. Con ello, le muestra a Goldbach que existe un comportamiento recursivo al desarrollar $\mathcal{S}$ y los binomios $(1-x^n)$ bajo esta forma, a través de expresiones del siguiente tipo:

$\mathcal{S} = 1-x-Ax^2$		$\mathcal{S} = 1-x-Ax^2$
$A = 1-x^3-Bx^5$		$Ax^2 = x^2(1-x^3)-Bx^7$
$B = 1-x^5-Cx^8$	o	$Bx^7 = x^7(1-x^5)-Cx^{15}$
$C = 1-x^7-Dx^{11}$		$Cx^{15} = x^{15}(1-x^7)-Dx^{26}$
$D = 1-x^9-Ex^{14}$		$Dx^{26} = x^{26}(1-x^9)-Ex^{40}$
etc.		etc.

Así, al ir sustituyendo recursivamente, lo que queda es lo siguiente:

$$\mathcal{S} = 1-x-x^2(1-x^3)+x^7(1-x^5)-x^{15}(1-x^7)+x^{26}(1-x^9)-etc.$$

$$\therefore \mathcal{S} = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-etc. \quad (0.7)$$

En un artículo escrito en el año de 1754, pero publicado 6 años después, divulga estas ideas ya bien fundamentadas y de manera más formal. En él, con título *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*, se encuentra cómo llegó al polinomio resultante de $\mathcal{S}$ -que lo presentó en su carta de 1750-, incluyendo los lemas previos, además de la demostración del teorema sobre $\int n$. Recordemos que, previo a ésta, ya menciona que la forma de estos particulares números que se encuentran en ambos casos son los números pentagonales, no mencionándolos bajo este nombre, pero sí bajo su forma, aunque no la justifica. Fue hasta 1780, que con el artículo *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ *etc. in seriem simplicem* justifica de cierta manera la fórmula de estos números, además de incluir otras dos formas alternas pero muy parecidas en espíritu a la del otro artículo sobre la demostración de $\mathcal{S}$.

Su intriga sobre este problema parece que cada vez crecía más. Esto se nota durante el mismo año de 1747, específicamente el 30 de diciembre, Euler le escribe a Jean le Rond d'Alembert. En esta correspondencia, le comenta que se había enterado por medio del Presidente de la Academia de Berlín de ese entonces, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, que pretendía abandonar sus investigaciones matemáticas por algún tiempo por motivos de salud. En la carta le dice que

> "si en su tiempo libre desea hacer una investigación que no requiera mucho esfuerzo, tomaré la libertad de proponer la expresión $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ *etc.*, que al expandirse por multiplicación, da la serie $1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+etc.$, lo que me parece muy notable debido a la ley que fácilmente descubrimos en ella, pero no veo cómo esta ley puede deducirse sin la inducción de la expresión propuesta".

A ello, d'Alembert le contesta poco menos de un mes después, el 20 de enero de 1748, donde comenta que

> "con respecto a la serie de la que has hablado, es muy peculiar, y he reflexionado sobre ella durante un tiempo, pero solo veo la inducción para demostrarla. Al final, nadie es más profundo y mejor versado en estos asuntos que tú".

Capítulo 1

El Teorema de los Números Pentagonales de Euler.

Como vimos a lo largo del capítulo anterior, Euler estaba intrigado en el teorema de los números pentagonales y el por qué de la aparición de ese peculiar tipo de números en los exponentes. Si bien ya tenía una idea bastante clara sobre cómo iban apareciendo término a término, la realidad es que hasta ese momento no había plasmado de manera formal sus ideas y desarrollos.

A lo largo de este capítulo, exploraremos distintas demostraciones de este teorema, empezando con las demostraciones de Euler, por ser las primeras cronológicamente hablando y por la riqueza que contienen en cuanto al desarrollo matemático. Posteriormente, exploramos algunas otras demostraciones bajo diferentes perspectivas, que varían por la manera de ser trabajadas, personajes con perfiles distintos y bajo diversas interpretaciones que le dan. Cada una es especial, aporta algo distinto y nos muestra las diferentes maneras de abordar el problema y lo que significa en distintos contextos.

1.1. Las particiones y las funciones generadoras.

Antes de empezar con el teorema, es necesario que formalicemos ciertos conceptos y que veamos algunas ideas previas.

DEFINICIÓN 1. Dada una sucesión de enteros $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, y si se encuentra una función tipo polinomial que tenga en sus coeficientes a la sucesión dada, entonces decimos que esta función polinomial es la **función generadora** de la sucesión, y está dada por la expresión

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Veamos dos ejemplos sobre funciones generadoras. En un primer caso, la función

$$G(x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots + 2^n x^n + \ldots .$$

donde los coeficientes de las potencias de x son las potencias del número 2.

Otro ejemplo es la siguiente función generadora:

$$G(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + \ldots$$

donde los coeficientes del polinomio resultante son los números de Fibonacci.

Las funciones generadoras fueron formalmente introducidas en 1748 por Euler en su *Introductio in analysin infinitorum*, utilizándolas como medio para encontrar propiedades importantes de las particiones. Más adelante veremos una parte de este tema en el *Analysin* donde, a través de sencillas divisiones polinomiales, obtiene sucesiones de gran importancia y relevancia.

El poder de las funciones generadoras es enorme. Por lo mencionado en la definición formal, su valor radica en que el desarrollo de expresiones polinómicas arroja sucesiones de interés particular, las cuales se encuentran en los coeficientes. Pero este tipo de funciones adquiere aún mayor relevancia por los casos en que sus exponentes también se involucran en la explicación de las sucesiones, o cuando ellos contienen en sí mismos una sucesión (que es el caso que más nos interesa).

El ejemplo más sencillo consta del producto de binomios, donde el primer término de cada uno de ellos es la unidad y el segundo una potencia de la forma x^n, es decir,

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1+x^j) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots \tag{1.1}$$

Si se desarrolla una parte del producto y se aplican propiedades de exponentes, obtenemos lo siguiente:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+x^3)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10})(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\ \dots$$

Podríamos analizar en múltiples ocasiones lo anterior y quizás no notemos algo destacado o que nos muestre algún hecho relevante. Sin embargo, si desarrollamos el mismo producto, sólo que esta vez sin agrupar las potencias similares, es decir, dejando las operaciones expresadas sin aplicar las propiedades de los exponentes, obtenemos las particiones de todos los números naturales, es decir, las distintas formas en que podemos representar un número natural como suma de otros. He ahí el papel fundamental del 1 en cada uno de los binomios: para obtener las particiones de un sólo natural y todas las diferentes maneras de combinar los números. Cabe destacar que, por la forma de esta función generadora, las particiones tienen como características principales la no repetición de los sumandos y la indistinción del orden de estos.

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1+x^j) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+x^{1+2})(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+x^{1+2}+x^3+x^{1+3}+x^{2+3}+x^{1+2+3})(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\dots$$

$$= (1+x+x^2+x^3+x^{1+2}+x^4+x^{1+3}+x^{1+4}+x^{2+3}+x^{1+2+3}+x^{2+4}+x^{1+2+4}+x^{3+4}+$$
$$+x^{1+3+4}+x^{2+3+4}+x^{1+2+3+4})(1+x^5)(1+x^6)\dots$$

$$= [1+(x)+(x^2)+(x^3+x^{1+2})+(x^4+x^{1+3})+(x^5+x^{1+4}+x^{2+3})+(x^{1+5}+x^{2+4}+x^{1+2+3})+$$
$$+(x^{2+5}+x^{3+4}+x^{1+2+4})+(x^{3+5}+x^{1+2+5}+x^{1+3+4})+(x^{4+5}+x^{2+3+4}+x^{1+3+5})+$$
$$+(x^{1+4+5}+x^{2+3+5}+x^{1+2+3+4})+(x^{2+4+5}+x^{1+2+3+5})+(x^{3+4+5}+x^{1+2+4+5})+(x^{1+3+4+5})+$$
$$+(x^{2+3+4+5})+(x^{1+2+3+4+5})](1+x^6)(1+x^7)\dots$$

Ahora, observemos del desarrollo anterior, la expresión en la que multiplicamos únicamente hasta el binomio $(1+x^4)$, es decir,

$$(1+x+x^2+x^3+x^{1+2}+x^4+x^{1+3}+x^{1+4}+x^{2+3}+x^{1+2+3}+x^{2+4}+x^{1+2+4}+x^{3+4}+x^{1+3+4}+$$

$$+x^{2+3+4}+x^{1+2+3+4})(1+x^5)(1+x^6)\dots$$

Por el hecho de haber multiplicado hasta $(1+x^4)$, el sumando más grande que puede contener cualquier partición es 4. Además, el número más grande para el que aparece la partición es 10, donde precisamente sus sumandos están dados por 1, 2, 3 y 4, o dicho de otra forma, todos los naturales menores o iguales que 4.

Si ahora pensamos en el caso general en que hacemos la multiplicación y desarrollo hasta el binomio $(1+x^n)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, la función generadora nos arrojaría particiones donde los sumandos se encuentran en el conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ y los números para los que se arrojan sus particiones se encuentran en el conjunto $\{1,2,3,...,\frac{n(n+1)}{2}\}$, por el hecho de que el número más grande para el que se obtiene la partición de mayor extensión está dada por la suma de los primeros n números naturales.

En este punto, las preguntas empiezan a surgir y la curiosidad aumenta. Al cuestionarnos más sobre este asunto de las particiones, una pregunta que podría derivarnos de lo anterior es si existirá una función que nos brinde aún más información, más detallada, que nos muestre de cuántas formas podemos representar un natural y con cuántos sumandos. Para ello analicemos la siguiente función desarrollando algunos factores.

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1+zx^j) = (1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)\dots \tag{1.2}$$

$$= (1+zx+zx^2+z^2x^3)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)\dots$$

$$= (1+zx+zx^2+zx^3+z^2x^3++z^2x^4+z^2x^5+z^3x^6)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)\dots$$

$$= (1+zx+zx^2+zx^3+z^2x^3+zx^4+z^2x^4+2z^2x^5+z^2x^6+z^3x^6+z^2x^7+z^3x^7+z^3x^8+z^3x^9+z^4x^{10})$$

$$(1+zx^5)(1+zx^6)\dots$$

$$= (1+zx+zx^2+zx^3+z^2x^3+zx^4+z^2x^4+zx^5+2z^2x^5+2z^2x^6+z^3x^6+2z^2x^7+z^3x^7+z^2x^8+$$

$$+2z^3x^8+z^2x^9+2z^3x^9+2z^3x^{10}+z^4x^{10}+z^3x^{11}+z^4x^{11}+z^3x^{12}+z^4x^{12}+z^4x^{13}+z^4x^{14}+z^5x^{15})$$

$$(1+zx^5)(1+zx^6)\dots$$

La información que nos arroja es semejante a la de la función (1.1) (se podría ver mejor si, al igual que en el ejemplo derivado de la función (1.1), dejamos expresada la propiedad de los exponentes y, con ello, la partición explícita). Pero, además, a través de una especie de contador, representado por la letra z, nos muestra de mejor forma cómo es cada partición, es decir, dado un sumando de la función, que es de la forma Cz^mx^n, con $C,n,m\in\mathbb{Z}^+$, podemos conocer la cantidad C de representaciones con m sumandos que tiene el número natural n.

De forma análoga a lo hecho anteriormente, si ahora pensamos en el caso general en que hacemos la multiplicación y desarrollo hasta el binomio $(1+zx^n)$, con $n\in\mathbb{Z}^+$, la función generadora nos arrojaría las siguientes particularidades:

- La cantidad de particiones con un sumando es de $C_1^n = n$, donde cada partición es cada número natural que es igual o menor a n.
- La cantidad de particiones con m sumandos, donde $m\in\{2,3,...,n-1\}$, es de C_m^n.
- La cantidad de particiones con n sumandos es de $C_n^n = 1$ y está dada por $1+2+3+\ldots+n$, que equivale a la partición del entero $\frac{n(n+1)}{2}$, siendo además el entero más grande para el que se obtiene una partición.

Ambas funciones son interesantes y sorprendentes, ya que una pequeña expresión nos arroja un polinomio que, si bien es infinito, contiene información poderosa sobre las particiones de los números naturales, más allá de que sería un proceso complicado conocer la representación de un natural suficientemente grande. Pero lo valioso es que está ahí.

1.2. Construir el polinomio.

Regresemos a la función generadora (1.1). Una de las preguntas que nos puede llegar a la mente es sobre el caso del producto de los conjugados de cada binomio, es decir, de binomios de la forma $(1-x^j)$. con $j \in \mathbb{Z}^+$. En primera instancia, podríamos pensar que algunos términos del polinomio resultante se eliminarán a causa del cambio de signos negativos, pero la verdadera pregunta es: **¿qué términos sobreviven?** Si bien Euler ya sabía lo que sucedía con el polinomio, como hemos mencionado a lo largo de este trabajo, no es sino en el artículo *A demonstration of a theorem on the order observed in the sums of divisors*[1] (una demostración de un teorema sobre el orden observado en las sumas de divisores) donde brinda un desarrollo más detallado y realiza observaciones que permiten derivar los términos irreducibles, dados por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} := \prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1-x^j) &= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots \\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots \end{aligned} \tag{1.3}$$

En el análisis del caso del producto de binomios con signo positivo, vimos que su desarrollo muestra la cantidad de particiones que se tienen de los números enteros positivos, e incluso, si hacemos el desarrollo explícito, paso por paso, apreciamos de mejor forma la estructura de las particiones. En este caso, con los binomios que tienen signo negativo, el análisis intuitivamente es similar: igualmente debe representar particiones de enteros positivos. Sin embargo, la presencia de signos menos implica la eliminación de ciertos términos. Para ello, veamos una parte del desarrollo de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}&\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1-x^j) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots \\ &= (1-x-x^2+x^{1+2})(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots \\ &= (1-x-x^2+x^{1+2}-x^3+x^{1+3}+x^{2+3}-x^{1+2+3})(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots \\ &= (1-x-x^2+x^{1+2}-x^3+x^{1+3}+x^{2+3}-x^{1+2+3}-x^4+x^{1+4}+x^{2+4}-x^{1+2+4}+x^{3+4}-x^{1+3+4}- \\ &\quad -x^{2+3+4}+x^{1+2+3+4})(1-x^5)(1-x^6)\ldots \\ &= 1+(-x)+(-x^2)+(-x^3+x^{1+2})+(-x^4+x^{1+3})+(-x^5+x^{1+4}+x^{2+3})+ \\ &\quad +(-x^6+x^{1+5}+x^{2+4}-x^{1+2+3})+(-x^7+x^{1+6}+x^{2+5}+x^{3+4}-x^{1+2+4})+ \\ &\quad +(-x^8+x^{1+7}+x^{2+6}+x^{3+5}-x^{1+2+5}-x^{1+3+4})+\ldots\end{aligned}$$

Hasta aquí, con el desarrollo realizado, aún no mostramos la simplificación de la expresión, sólo realizamos la multiplicación de los binomios, se deja explícita la suma de los exponentes para cada término y se muestra así la partición que representa. Es importante señalar que por las propiedades que se presentan en la multiplicación de términos de la forma x^k, se tendrán dos casos generales:

[1] Publicado originalmente como *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*, Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae 5, (1760), 75-83.

- Si se multiplica una cantidad par de potencias de x, es decir, de x^k el término del polinomio será de la forma $x^{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{2t}}$, éste representará la partición de un entero positivo con cantidad par de sumandos, que se refleja en la potencia y tendrá signo positivo pues el coeficiente será $(-1)^{2t}$.

- Si se multiplica una cantidad impar de potencias de x, es decir, de x^k el término del polinomio será de la forma $x^{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{2t+1}}$. Caso contrario al anterior, representará la partición de un entero positivo con cantidad impar de sumandos que se ve en la potencia, y tendrá signo negativo, ya que el coeficiente será $(-1)^{2t+1}$.

De esta forma, tenemos en el polinomio resultante $\mathcal{S}$, en donde si el término representa una partición con una cantidad par de sumandos, entonces tendrá coeficiente 1; mientras que, si tiene una cantidad impar de sumandos, entonces tendrá coeficiente -1. Con esta observación, si hacemos una simplificación de términos, tendremos que algunos se eliminan. Visualicemos este hecho:

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c}
=1 & & & \cancel{+x^{1+2}} & \cancel{+x^{1+3}} & \cancel{+x^{1+4}}+x^{2+3} & \cancel{+x^{1+5}+x^{2+4}} & \cancel{+x^{1+6}+x^{2+5}}+x^{3+4} & \ldots \\
 & -x & -x^2 & \cancel{-x^3} & \cancel{-x^4} & \cancel{-x^5} & \cancel{-x^6-x^{1+2+3}} & \cancel{-x^7-x^{1+2+4}} & \ldots \\
 & & & & & & & & \\
=1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & \ldots
\end{array}
$$

Para las potencias x^k que no sobreviven, como en los casos de las particiones que representan al 3, 4 y 6 en la tabla, la cantidad de particiones con cantidad par de sumandos es la misma con respecto a las particiones con cantidad impar de sumandos, y, a sabiendas de que, para el primer caso, están representadas en una potencia con signo negativo, y en el otro caso, con un signo positivo, entonces la suma es cero. Por el lado contrario, en los casos en que sobrevive un término irreducible (ya sea con signo positivo o negativo), como se tiene con las particiones que representan al 1, 2, 5 y 7 en la tabla, existe un excedente de una partición con cantidad par o impar de sumandos.

En términos más algebraicos y formales, decimos que los coeficientes del polinomio resultante de $\mathcal{S}$ son ± 1 ó 0, y que los exponentes son de la forma $\frac{n(3n\pm 1)}{2}$. Ya mencionamos la relación entre las particiones con cantidad par de sumandos y las de cantidad impar, por lo que podemos establecer lo que posteriormente será un teorema[2]. Veamos la notación que sigue:

· $p_e(n)$ la cantidad de particiones de un entero positivo n con la característica de que los sumandos de cada una son diferentes, y la cantidad de sumandos es una cantidad par.

· $p_o(n)$ la cantidad de particiones de un entero positivo n en donde los sumandos de cada una son diferentes, pero ahora la cantidad de sumandos en cada partición es una cantidad impar.

Entonces

$$
p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \\ & \\ (-1)^k & \text{si } n = \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \end{cases} \tag{1.4}
$$

Para demostrar lo que resultaba de su desarrollo, Euler recurrió a una forma en la que involucra un procedimiento sucesivo a través del que elimina términos hasta encontrar uno a uno los términos irreducibles.

En primera instancia, dada la siguiente expresión

$$1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \ldots$$

Se factoriza el binomio $(1-x)$ en los primeros sumandos y tenemos que:

[2] El teorema se formaliza en el apartado de Ferrers y la intuición de las formas.

$= (1-x)(1-x^2) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \ldots$

Ahora, se factoriza de la misma manera el producto de los binomios $(1-x)(1-x^2)$:

$= (1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \ldots$

Se factoriza el producto de los binomios $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$:

$= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \ldots$

Observando el patrón, en cada paso factorizamos el producto de los primeros n binomios, que corresponde a $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)$. Si se hace de forma continua, llegamos a nuestra función $\mathcal{S}$:

$$= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ldots = \prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1-x^j)$$

Así, $\mathcal{S} = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \ldots$

Al ver a $\mathcal{S}$ de esta forma, el m-ésimo sumando sólo difiere del anterior por el término $x(1-x^{m-1})$, es decir, que los términos de un sumando están contenidos en el del siguiente. Utilizando esta situación es como Euler plantea su demostración, que consiste básicamente en factorizar la menor potencia de x a partir del sumando que ya no es irreducible, para luego desarrollar el factor común que está contenido en toda la parte a trabajar y eliminar esos factores de la forma $(1-x^m)$, para así obtener más términos irreducibles en cada paso.

Entonces, para el primer paso o primera iteración, la suma original se puede escribir como:

$\mathcal{S} = 1 - x - A_1x^2$,

donde $A_1 = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + x^3(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \ldots$

o $A_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{j-1}[(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^j)]$.

Ahora, desarrollamos el factor $(1-x)$.

$$\begin{array}{cccccccc} = & & -x & -x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^2)(1-x^3) & -x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) & -\ldots \\ & 1 & +x(1-x^2) & +x^2(1-x^2)(1-x^3) & +x^3(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) & +x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & +\ldots \end{array}$$

Acto seguido, descomponemos el último factor que es de la forma $(1-x^n)$, para poder eliminar términos:

$$\begin{array}{cccccc} = & & \cancel{-x} & \cancel{-x^2(1-x^2)} & \cancel{-x^3(1-x^2)(1-x^3)} & -\ldots \\ & 1 & \cancel{+x} - x^2 & \cancel{+x^2(1-x^2)} + x^2(1-x^2)(-x^3) & \cancel{+x^3(1-x^2)(1-x^3)} + x^3(1-x^2)(1-x^3)(-x^4) & +\ldots \end{array}$$

En términos generales, para $m \in \mathbb{Z}^+$, sucede lo siguiente:

$$A_1 = \ldots + x^{m-1}(1-x)\ldots(1-x^m) + x^m(1-x)\ldots(1-x^{m+1}) + x^{m+1}(1-x)\ldots(1-x^{m+2}) + \ldots$$

$$\begin{array}{cccccc} = & \ldots & +x^{m-1}(1-x^2)\ldots(1-x^m) & +x^m(1-x^2)\ldots(1-x^{m+1}) & +x^{m+1}(1-x^2)\ldots(1-x^m)(1-x^{m+2}) & +\ldots \\ & \ldots & -x^m(1-x^2)\ldots(1-x^m) & -x^{m+1}(1-x^2)\ldots(1-x^{m+1}) & -x^{m+2}(1-x^2)\ldots(1-x^m)(1-x^{m+2}) & -\ldots \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
= & \dots & +x^{m-1}(1-x^2)...(1-x^m) & \cancel{+x^m(1-x^2)...(1-x^m)} & \cancel{+x^{m+1}(1-x^2)...(1-x^m)(1-x^{m+1})} & +\dots \\
 & \dots & & -x^{2m+1}(1-x^2)...(1-x^m) & -x^{2m+3}(1-x^2)...(1-x^m)(1-x^{m+1}) & -\dots \\
 & \dots & \cancel{-x^m(1-x^2)...(1-x^m)} & \cancel{-x^{m+1}(1-x^2)...(1-x^m)(1-x^{m+1})} & -x^{m+2}(1-x^2)...(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^{m+2}) & +\dots
\end{array}
$$

$$= \dots - x^{2m-1}(1-x^2)...(1-x^{m-1}) - x^{2m+1}(1-x^2)...(1-x^m) - x^{2m+3}(1-x^2)...(1-x^{m+1}) - \dots$$

Entonces, se tiene que $A_1 = 1 - x^3 - x^5(1-x^2) - x^7(1-x^2)(1-x^3) - x^9(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$

De aquí que la primera conclusión derivada de la forma de A_1 es que los términos que sobrevivirán no serán consecutivos, es decir, que salvo los términos x y x^2, no se vuelven a tener términos x^m y x^{m+1}. Además, obtuvimos dos términos irreducibles, que en este caso son la unidad y x^3 (los cuales deben multiplicarse por x^2, que fue factorizado inicialmente en $\mathcal{S}$), mientras que el resto de la expresión contiene un factor común (para este paso es $(1-x^2)$) y, al igual que en $\mathcal{S}$, los términos de un factor se encuentran contenidos en el siguiente. Es así que la función que generamos es similar a la original y esto da lugar a que se puede hacer un proceso iterativo.

Si ahora trabajamos con la función A_1, podemos escribirla de la forma

$$A_1 = 1 - x^3 - A_2 x^5,$$

donde $A_2 = 1 - x^2 + x^2(1-x^2)(1-x^3) + x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \dots$.

o $A_2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{2j-2}[(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{j+1})]$.

Con un proceso análogo al paso anterior, desarrollamos con base en el factor $(1-x^2)$ de la manera conveniente:

$$
\begin{array}{cccccc}
= & -x^2 & -x^4(1-x^3) & -x^6(1-x^3)(1-x^4) & -x^8(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & -\dots \\
1 & +x^2(1-x^3) & +x^4(1-x^3)(1-x^4) & +x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & +x^8(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & +\dots
\end{array}
$$

Ahora, descomponemos el último factor, que es de la forma $(1-x^{n+1})$, para eliminar términos:

$$
\begin{array}{ccccc}
= & \cancel{-x^2} & \cancel{-x^4(1-x^3)} & \cancel{-x^6(1-x^3)(1-x^4)} & -\dots \\
1 & \cancel{+x^2} - x^5 & \cancel{+x^4(1-x^3)} + x^4(1-x^3)(-x^4) & \cancel{+x^6(1-x^3)(1-x^4)} + x^6(1-x^3)(1-x^4)(-x^5) & +\dots
\end{array}
$$

Nuevamente, observemos lo que sucede de forma general para $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$A_2 = \dots + x^{2m-2}(1-x^2)...(1-x^{m+1}) + x^{2m}(1-x^2)...(1-x^{m+2}) + x^{2m+2}(1-x^2)...(1-x^{m+3}) + \dots$$

$$
\begin{array}{cccccc}
= & \dots & +x^{2m-2}(1-x^3)...(1-x^{m+1}) & +x^{2m}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2}) & +x^{2m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & +\dots \\
 & \dots & -x^{2m}(1-x^3)...(1-x^{m+1}) & -x^{2m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2}) & -x^{2m+4}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & -\dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
= & \dots & +x^{2m-2}(1-x^3)...(1-x^{m+1}) & \cancel{+x^{2m}(1-x^3)...(1-x^{m+1})} & \cancel{+x^{2m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})} & +\dots \\
 & \dots & & -x^{3m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1}) & -x^{3m+5}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2}) & -\dots \\
 & \dots & \cancel{-x^{2m}(1-x^3)...(1-x^{m+1})} & \cancel{-x^{2m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})} & -x^{2m+4}(1-x^3)...(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & +\dots
\end{array}
$$

$$= \ldots - x^{3m-1}(1-x^3)...(1-x^m) - x^{3m+2}(1-x^3)...(1-x^{m+1}) - x^{3m+5}(1-x^3)...(1-x^{m+2}) - \ldots$$

Entonces, se tiene que $A_2 = 1 - x^5 - x^8(1-x^3) - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - x^{14}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \ldots$

De aquí, se haría una vez más el procedimiento, donde en este caso se verá que

$A_2 = 1 - x^5 - A_3x^8$

de donde $A_3 = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \ldots$

o $A_3 = \sum_{j \in \mathbb{N}} x^{3j-3}[(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^{j+2})]$.

Para este paso, lo que toca es desarrollar el factor $(1-x^3)$ de forma similar a la que se hizo en los pasos anteriores:

$$\begin{array}{llllll} = & -x^3 & -x^6(1-x^4) & -x^9(1-x^4)(1-x^5) & -x^{12}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & -\ldots \\ 1 & +x^3(1-x^4) & +x^6(1-x^4)(1-x^5) & +x^9(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & +x^{12}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) & +\ldots \end{array}$$

Ahora descomponemos el último factor que es de la forma $(1-x^{n+2})$, para poder eliminar términos:

$$\begin{array}{lllll} = & \cancel{-x^3} & \cancel{-x^6(1-x^4)} & \cancel{-x^9(1-x^4)(1-x^5)} & -\ldots \\ 1 & \cancel{+x^3-x^7} & \cancel{+x^6(1-x^4)} + x^6(1-x^4)(-x^5) & \cancel{+x^9(1-x^4)(1-x^5)} + x^9(1-x^4)(1-x^5)(-x^6) & +\ldots \end{array}$$

Nuevamente observemos lo que sucede de forma general dado $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$A_3 = \ldots + x^{3m-3}(1-x^3)...(1-x^{m+2}) + x^{3m}(1-x^3)...(1-x^{m+3}) + x^{3m+3}(1-x^3)...(1-x^{m+4}) + \ldots$$

$$\begin{array}{llllll} = & \ldots & +x^{3m-3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2}) & +x^{3m}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & +x^{3m+3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})(1-x^{m+4}) & +\ldots \\ & \ldots & -x^{3m}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2}) & -x^{3m+3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & -x^{3m+6}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})(1-x^{m+4}) & -\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} = & \ldots & +x^{3m-3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2}) & \cancel{+x^{3m}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})} & \cancel{+x^{3m+3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})} & +\ldots \\ & \ldots & & -x^{4m+3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2}) & -x^{4m+7}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3}) & -\ldots \\ & \ldots & \cancel{-x^{3m}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})} & \cancel{-x^{3m+3}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})} & -x^{3m+6}(1-x^4)\ldots(1-x^{m+2})(1-x^{m+3})(1-x^{m+4}) & +\ldots \end{array}$$

$$= \ldots - x^{4m-1}(1-x^4)...(1-x^{m+1}) - x^{4m+3}(1-x^4)...(1-x^{m+2}) - x^{4m+7}(1-x^4)...(1-x^{m+3}) - \ldots$$

Entonces, se tiene que $A_3 = 1 - x^7 - x^{11}(1-x^4) - x^{15}(1-x^4)(1-x^5) - x^{19}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) - \ldots$

Podríamos continuar con el proceso de manera infinita, pero desde aquí se aprecia claramente la idea de Euler y se pueden observar ciertos patrones que se repiten. Si denotamos al polinomio que se obteniene en cada paso n, tenemos que:

$A_0 = \mathcal{S} = 1 - x - A_1x^2$

$A_n = 1 - x^{2n+1} - A_{n+1}x^{3n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

de donde $A_{n+1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{(n+1)j-(n+1)}[(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{j+n})]\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Además, en el desarrollo de los factores también se tiene un patrón. En forma general, si $m \in \mathbb{Z}^+$, se desarrolla el factor $(1-x^n)$:

$$A_n = \ldots + x^{nm-n}(1-x^n)...(1-x^{m+(n-1)}) + x^{nm}(1-x^n)...(1-x^{m+n}) + x^{3m+3}(1-x^n)...(1-x^{m+(n+1)}) + \ldots$$

$$\begin{array}{cccccc} = & \ldots & +x^{nm-n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)}) & +x^{nm}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+n}) & +x^{nm+n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n+1)}) & +\ldots \\ & \ldots & -x^{nm}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)}) & -x^{nm+n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+n}) & -x^{nm+2n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n+1)}) & -\ldots \end{array}$$

Luego, desarrollamos el factor final:

$$\begin{array}{cccccc} = & \ldots & +x^{nm-n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)}) & \cancel{+x^{nm}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)})} & \cancel{+x^{nm+n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+n})} & +\ldots \\ & \ldots & & -x^{(n+1)m+n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)}) & -x^{(n+1)m+(2n+1)}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+n}) & -\ldots \\ & \ldots & \cancel{-x^{nm}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n-1)})} & \cancel{-x^{nm+n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+n})} & -x^{nm+2n}(1-x^{n+1})\ldots(1-x^{m+(n+1)}) & +\ldots \end{array}$$

$$= \ldots - x^{(n+1)m-1}(1-x^{n+1})...(1-x^{m+(n-2)}) - x^{(n+1)m+n}(1-x^{n+1})...(1-x^{m+(n-1)})) - x^{(n+1)m+(2n+1)}(1-x^{n+1})...(1-x^{m+n}) - \ldots$$

En el procedimiento se ve cómo se obtienenen los coeficientes cero de ciertos términos en el desarrollo, y es como consecuencia de la repetición de términos de un sumando en el siguiente, además de deducir la regla que siguien los exponentes de los términos que sobreviven. Para ello, veamos cómo quedan las funciones que utiliza Euler para entender por qué permanecen los términos que afirma.

Función	Sustitución	$\mathcal{S} =$
$A_0 = 1 - x - A_1x^2$	$A_0 = 1 - x - A_1x^2$	$1 - x - A_1x^2$
$A_1 = 1 - x^3 - A_2x^5$	$A_1x^2 = x^2(1-x^3) - A_2x^7$	$1 - x - x^2 + x^5 + A_2x^7$
$A_2 = 1 - x^5 - A_3x^8$	$A_2x^7 = x^7(1-x^5) - A_3x^{15}$	$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - A_3x^{15}$
$A_3 = 1 - x^7 - A_4x^{11}$	$A_3x^{15} = x^{15}(1-x^7) - A_4x^{26}$	$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + A_4x^{26}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Apoyándonos en la tabla, podemos notar cómo todos los términos que se obtienenen involucran siempre los términos que se van factorizando, por el hecho de que la función A_n depende de la función A_{n+1}. Como en cada función de este tipo se tienen dos valores independientes (1 y $-x^j$), entonces se podrán obtener dos secuencias intercaladas en los exponentes, las cuales se apreciarán de la siguiente forma: si hablamos de que cada término de $\mathcal{S}$ ocupa cierta posición, fijando la posición 0 para la unidad, entonces tenemos lo siguiente:

- Posiciones impares. Para la posición $2n-1$, el coeficiente es $(-1)^n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, mientras que el exponente de x está dado por la suma de los exponentes de los términos dependientes de $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ y le añadimos el valor del exponente del término dependiente de A_{n-1}. Es decir, dado que el exponente en la primera posición es 1, el incremento para la posición $2n+1$ es de $3n+1$.

- Posiciones pares. La posición $2n$ posee el coeficiente $(-1)^n$, donde de igual manera $n \in \mathbb{Z}^+$, mientras que el exponente de x está dado por la suma de los exponentes de los términos dependientes de $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Es decir, dado que el exponente en la segunda posición es 2, el incremento para la posición $2n+2$ es de $3n+2$.

La alternancia de los signos por cada par de términos se debe a la forma como se multiplica. Al tener dos términos independientes con los que se hará el producto de forma sucesiva para posteriormente sumarse, el signo se verá afectado por el hecho de que en cada función se han ido factorizando signos negativos.

De regreso al tema de los coeficientes, si bien bajo este marco teórico se puede justificar por qué se obtienen coeficientes ± 1 en los términos que destacan en el resultado final para $\mathcal{S}$, Euler no puede justificar con ello por qué el resto de los coeficientes distintos a la unidad forzosamente se anulan (quedan coeficientes cero). Al descomponer cada factor sólo le permite mostrar cómo obtiene términos irreducibles, que son los que le ayudarán a encontrar cómo escogerá cada A_j, pero no muestra a qué se debe que estos no sean eliminados.

1.3. Todo es cuestión de perspectivas.

Después de observar la forma en que Euler desarrolló el polinomio $\mathcal{S}$, y cómo factorizó y construyó las sucesivas funciones A_n para eliminar cada uno de los factores $(1-x^n)$, quizás pensamos en otras formas de hacer el desarrollo, respetando y apegándonos a la esencia del que Euler realizó. Esto se aprecia de forma más clara prácticamente desde el inicio del desarrollo, tras mostrar que

$$\mathcal{S} = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$$

Euler seguramente pensó que, con factorizar desde un inicio lo más que pudiese y en cada paso, podría apreciar de forma más clara lo que sucede y sobre todo el por qué. En otro artículo publicado en la Academia de San Petersburgo, el 14 de agosto de 1775, con título *expansion of the infinite product* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$*etc. into a simple series*[3] (Expansión del producto infinito $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$*etc.* en una serie simple), aborda $\mathcal{S}$ de una forma ligeramente distinta, aunque básicamente el procedimiento y, en general, las reglas que predominan en el desarrollo, continúan. Para ello, decide ahora omitir las factorizaciones que realizó antes de determinar las A_n, salvo la factorización del signo (para obtener los signos por pares), lo cual da lugar a que obtenga explícitamente los términos finales (los irreducibles) de $\mathcal{S}$. Es decir, en primera instancia hace

$$\mathcal{S} = 1 - x - A_1,$$

donde $A_1 = x^2(1-x) + x^3(1-x)(1-x^2) + x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \dots$

o $A_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{j+1}[(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{j-1})]$.

Ahora, se desarrolla el factor $(1-x)$.

$$\begin{array}{cllllll} = & x^2 & +x^3(1-x^2) & +x^4(1-x^2)(1-x^3) & +x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) & +x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & +\dots \\ & -x^3 & -x^4(1-x^2) & -x^5(1-x^2)(1-x^3) & -x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) & -x^7(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & +\dots \end{array}$$

Descomponemos el último factor, que es de la forma $(1-x^n)$, para poder eliminar términos:

$$\begin{array}{clllll} = & x^2 & \cancel{+x^3} + x^3(-x^2) & \cancel{+x^4(1-x^2)} + x^4(1-x^2)(-x^3) & \cancel{+x^5(1-x^2)(1-x^3)} + x^5(1-x^2)(1-x^3)(-x^4) & +\dots \\ & \cancel{-x^3} & \cancel{-x^4(1-x^2)} & \cancel{-x^5(1-x^2)(1-x^3)} & \cancel{-x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} & -\dots \end{array}$$

Entonces, se tiene que $A_1 = x^2 - x^5 - x^7(1-x^2) - x^9(1-x^2)(1-x^3) - x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$

Para el siguiente paso, procedemos a hacer

$$A_1 = x^2 - x^5 - A_2,$$

[3]Aunque publicado originalmente como *Evolutio producti infiniti product* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$*etc. in seriem pimplicem*, Acta academiae scientiarum Petropolitanae 1780 (1783), part I, 47-55.

donde $A_2 = x^7(1-x^2) + x^9(1-x^2)(1-x^3) + x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \dots$

o $A_2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} x^{2j+5}[(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{j+1})]$.

Desarrollamos el factor $(1-x^2)$.

$$\begin{array}{cllllll} = & x^7 & +x^9(1-x^3) & +x^{11}(1-x^3)(1-x^4) & +x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & +x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & +\dots \\ & -x^9 & -x^{11}(1-x^3) & -x^{13}(1-x^3)(1-x^4) & -x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) & -x^{17}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & +\dots \end{array}$$

Descomponemos el último factor, que es de la forma $(1-x^n)$, para poder eliminar términos:

$$\begin{array}{clllll} = & x^7 & \cancel{+x^9} + x^9(-x^3) & \cancel{+x^{11}(1-x^3)} + x^{11}(1-x^3)(-x^4) & \cancel{+x^{13}(1-x^3)(1-x^4)} + x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(-x^5) & +\dots \\ & \cancel{-x^9} & \cancel{-x^{11}(1-x^3)} & \cancel{-x^{13}(1-x^3)(1-x^4)} & \cancel{-x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} & -\dots \end{array}$$

Entonces, se tiene que $A_2 = x^7 - x^{12} - x^{15}(1-x^3) - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \dots$

Para la siguiente iteración, sigue el proceso análogo, para

$A_2 = x^7 - x^{12} - A_3$,

donde $A_3 = x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \dots$

o $A_3 = \sum_{j \in \mathbb{N}} x^{3j+12}[(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^{j+2})]$.

Desarrollamos el factor $(1-x^3)$.

$$\begin{array}{cllllll} = & x^{15} & +x^{18}(1-x^4) & +x^{21}(1-x^4)(1-x^5) & +x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & +x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) & +\dots \\ & -x^{18} & -x^{21}(1-x^4) & -x^{24}(1-x^4)(1-x^5) & -x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) & -x^{30}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) & +\dots \end{array}$$

Descomponemos el último factor, que es de la forma $(1-x^n)$, para poder eliminar términos:

$$\begin{array}{clllll} = & x^{15} & \cancel{+x^{18}} + x^{18}(-x^4) & \cancel{+x^{21}(1-x^4)} + x^{21}(1-x^4)(-x^5) & \cancel{+x^{24}(1-x^4)(1-x^5)} + x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(-x^6) & +\dots \\ & \cancel{-x^{18}} & \cancel{-x^{21}(1-x^4)} & \cancel{-x^{24}(1-x^4)(1-x^5)} & \cancel{-x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)} & -\dots \end{array}$$

Entonces, se tiene que $A_3 = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1-x^4) - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) - \dots$

Como vemos, en cada paso se obtienen dos términos irreducibles de forma explícita, sin necesidad de recurrir a una sustitución final de A_n, lo cual aligera el proceso. La lógica a seguir es similar, y nuevamente podemos observar un proceso general. Si denotamos al polinomio que obtenemos en el paso n, tenemos que:

$A_0 = \mathcal{S} = 1 - x - A_1$

$A_n = x^{\frac{3n^2+n}{2}} - x^{\frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2}} - A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

de donde $A_{n+1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} x^{(n+1)j + \frac{3(n+1)^2+(n+1)}{2}}[(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{j+n})], \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

En esta forma general que construimos, por el hecho de que los términos irreducibles aparecen directamente, ya se encuentra la fórmula de los números pentagonales (forma que no se justifica). Así que al hacer el proceso de manera indeterminada, se llega a la forma final de $\mathcal{S}$.

Posteriormente, Euler observa los primeros exponentes de los primeros términos de cada A_n y motivado por lo que hizo en el primer intento, trata de encontrar una forma de justificar que existe una recursión o una progresión aritmética.[4] Fue así que observó las particiones de estos números como sigue:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & 2 & = & 2 & & & & \\
a_2 & 7 & = & 3+4 & = & 3+1+3 & = & 3+1+1+2 \\
a_3 & 15 & = & 4+11 & = & 4+2+9 & = & 4+2+2+7 \\
a_4 & 26 & = & 5+21 & = & 5+3+18 & = & 5+3+3+15 \\
a_5 & 40 & = & 6+34 & = & 6+4+30 & = & 6+4+4+26 \\
a_6 & 57 & = & 7+50 & = & 7+5+45 & = & 7+5+5+40
\end{array}$$

$\dots$

Observamos que, salvo el primer número a_1, que corresponde al exponente 2, los siguientes serán escritos como una partición de 2 términos. Para ello, el primer sumando de a_n será igual a $n+1$, con $n \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{1\}$, dejando fijo al 2 como su propia partición.

Para obtener las particiones siguientes, el segundo término de la partición anterior será descompuesto de nueva cuenta en dos términos, donde el primero de esta nueva partición será $n-1$ para a_n, es decir, se tomarán los enteros positivos, por lo que los dos primeros términos de la partición son $(n+1)$ y $(n-1)$. También notemos que los terceros sumandos en cada partición, es decir, $3, 9, 18, 30, 45, \dots$, equivalen al triple de los números triangulares, que son $1, 3, 6, 10, 15, \dots$, lo cual es otro indicio de la presencia de una progresión aritmética.

Para la siguiente columna de particiones, de nueva cuenta realizamos el paso anterior, es decir, creamos una partición de 4 sumandos, donde el tercero de la anterior será descompuesto en dos términos y que el primero de ellos sea nuevamente $(n-1)$. De esta forma, cada a_n consta de 4 sumandos: el primero $(n+1)$, el segundo y tercero $(n-1)$ y el último el respectivo número faltante que, resulta ser a_{n-1}. Con ello, nuevamente se confirma la presencia de una progresión aritmética, que de ninguna forma son solamente números al azar (si es que cabía ese pensamiento en la mente de Euler). Es evidente que tenía ya la idea de ello, y buscó la forma de mostrarlo de la manera más clara y explícita posible, aunque esto no sea una demostración formal.

Con base en este planteamiento, podemos pensar en hallar esa expresión que nos dé la forma de esos números. Para ello, Euler observó las diferencias entre ellos, que son $5, 8, 11, 14, 17, \dots$, de donde a su vez, la diferencia de estas diferencias es 3, por lo que la fórmula es de grado 2. Como además el primer número es el 2, entonces lo primero que se tiene es que se escribirá como $2 + \underline{\qquad\qquad}$.

Ahora, como la primer diferencia es 5, para poder reflejarla, escribiremos la expresión como $2+5(n-1)+\underline{\qquad\qquad}$. Después, para expresar la diferencia de las diferencias, que es de 3 y que se aplicará a partir de la segunda diferencia, la fórmula quedaría como $2+5(n-1)+3(n-2)$.

Si analizamos lo obtenido, se tiene que para $n=1$, en el tercer sumando de la fórmula, nos arroja un valor de -3, lo cual no es lo que deseamos, ya que buscamos que ese tercer sumando tome valores a partir de $n=3$, y para que los dos anteriores valores de n sean cero, lo modificamos y lo escribimos como $3(n-1)(n-2)$. Finalmente, como este nuevo término que se le multiplica a la diferencia de 3 altera el sumando, que ahora se está multiplicando por dos factores, eliminamos el problema dividiéndolo sobre 2.

Por lo tanto, la fórmula quedaría de la siguiente forma: $2+5(n-1)+\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2}$.

Simplificando lo anterior:

[4] Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ en la que cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad fija d, llamada *diferencia*.

$$2+5(n-1)+\frac{3(n-1)(n-2)}{2}=\frac{4+10(n-1)+3(n-1)(n-2)}{2}=\frac{4+10n-10+3n^2-6n-3n+6}{2}$$

Por lo tanto, la forma de los números $2, 7, 15, 26, 40, 57, \ldots$, que son los exponentes de los términos impares de S (a partir del tercero), son de la forma $\frac{3n^2+n}{2}$.

Además, como lo mencionó Euler en una comunicación previa[5], los números $1, 2, 5, 7, 12, 15, \ldots$ tienen sus diferencias de forma alternante, es decir, la diferencia la conforman las dos series alternadas que se presentan:

	1		2		5		7		12		15		22		26		35		40		51		57		etc.
Dif.		**1**		3		**2**		5		**3**		7		**4**		9		**5**		11		**6**		etc.

Con esta observación, Euler se pudo centrar en los números que le faltaban caracterizar. Si bien el conjunto $1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots$, también tiene la característica de que la diferencia de sus diferencias es 3 (dado que sus diferencias son $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$), notó además que la diferencia de cada número de la otra serie alternada $(2, 7, 15, 26, 40, 57, \ldots)$ con respecto a la que le precede es de $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, es decir, la serie alternada de las diferencias dentro del conjunto de números sobrevivientes es la de los enteros positivos, difiriendo n respecto al n-ésimo número.

Dado lo anterior, a la forma encontrada de la primer serie alternante, que es $\frac{3n^2+n}{2}$, se le debe restar n para obtener la forma de los números de la otra serie, para así encontrar que la fórmula de estos números es $\frac{3n^2-n}{2}$, es decir, sólo difieren en el signo.

Es interesante apreciar que, al cambiar ligeramente el proceso, Euler seguramente pudo observar algunas otras características (u observarlas de mejor manera) del desarrollo en el polinomio, que le permitieron complementar lo realizado en el procedimiento anterior. Esta segunda forma de hacerlo, que podríamos pensar que es el método que se nos haría más sencillo por el hecho de no tener que sustituir infinitamente las A_n, muestra mejor lo que sucedía, pero sobre todo, le ayudó a reafirmar que esos números que sobrevivían bajo los exponentes no eran "azarosos". Fue por ello que buscó abordar posteriormente esos números de otra forma, bajo particiones.

Hasta ahora, pareciera que pudo resolver o tener mejor respuesta a casi todas las preguntas, salvo una: ¿por qué sólo sobreviven esos números en los exponentes? Euler recurrió a otra forma de abordar el problema. En el mismo artículo ya citado, en otro apartado, con el título *Another investigation of the same series*, procedió a expandir el término que sólo contiene un factor de la forma $(1-x^n)$ cada vez que se obtiene una A_n. De aquí a lo que queda, el proceso es análogo, luego de generar la respectiva A_n con el resto del polinomio que no tiene términos irreducibles, se desarrolla el factor que afecta a todos sus términos, finalmente se simplifica y así sucesivamente.

En los primeros pasos, así se vería el otro procedimiento:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)-x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-\ldots\\ &= 1-x-x^2+x^3-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)-x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-\ldots\end{aligned}$$

Hacemos

$$\mathcal{S}=1-x-x^2+A_1$$

donde $A_1=x^3-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)-x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-\ldots$

o $A_1=x^3-\sum_{j\in\mathbb{N}}x^{j+2}[(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{j+1})]$.

[5]Se puede consultar el trabajo: [Euler, 1783]

Después de descomponer el binomio $(1-x)$ en cada término y de desarrollar el último binomio de igual forma, se obtiene que:

$$A_1 = x^5 + x^7(1-x^2) + x^9(1-x^2)(1-x^3) + x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \dots$$

$$= x^5 + x^7 - x^9 + x^9(1-x^2)(1-x^3) + x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \dots$$

Llegamos a la segunda iteración, donde hacemos

$A_1 = x^5 + x^7 - A_2$

con $A_2 = x^9 - x^9(1-x^2)(1-x^3) - x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$

o $A_2 = x^9 - \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{2j+7}[(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{j+2})]$.

Después de descomponer el binomio $(1-x^2)$ en cada término y de desarrollar el último binomio de igual forma, se obtiene que:

$$A_2 = x^{12} + x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \dots$$

$$= x^{12} + x^{15} - x^{18} + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \dots$$

Análogamente, en la tercera iteración, hacemos

$A_2 = x^{12} + x^{15} - A_3$

con $A_3 = x^{18} - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \dots$

o $A_3 = x^{18} - \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{3j+15}[(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^{j+3})]$.

Después de descomponer el binomio $(1-x^3)$ en cada término y de desarrollar el último binomio de igual forma, se obtiene que:

$$A_3 = x^{22} + x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5) + x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \dots$$

Para esta parte del proceso, ya se puede encontrar un patrón de cómo se comporta el desarrollo del procedimiento para obtener términos irreducibles. Luego de denotar al polinomio que obtenemos en el paso n, tenemos que:

$A_0 = \mathcal{S} = 1 - x - x^2 + A_1$

$A_{n-1} = x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}} - A_n, \quad \forall (n-1) \in \mathbb{Z}^+$

de donde $A_n = x^{n+\frac{3n^2+n}{2}} - \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{nj+\frac{3n^2+n}{2}}[(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{j+n})], \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nuevamente, en esta forma general que construimos, por el hecho de que los términos irreducibles aparecen directamente, ya se encuentra la fórmula de los números pentagonales. Así que, haciendo el proceso indefinidamente, se llega a la forma de $\mathcal{S}$.

Aquí lo novedoso que muestra Euler se encuentra en las A_n, particularmente en sus primeros términos respectivamente. Observemos que se tiene lo siguiente:

$$A_1 = x^3 - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - x^5(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$$

$$A_2 = x^9 - x^9(1-x^2)(1-x^3) - x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \dots$$

$$A_3 = x^{18} - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \dots$$

$$A_4 = x^{30} - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) - \dots$$

$$\dots$$

$$A_n = x^{n+\frac{3n^2+n}{2}} - \sum_{j\in\mathbb{N}} x^{nj+\frac{3n^2+n}{2}}[(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{j+n})], \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Los exponentes de los primeros términos de cada una de las A_n, que ya son parte de los términos irreducibles, son $3, 9, 18, 30, 45, \dots$, es decir, $3(1), 3(3), 3(6), 3(10), 3(15), \dots$, por lo que, para cada A_n, el primer sumando es el triple del n-ésimo número triangular, es decir, $\frac{3n^2+3n}{2}$, hecho que ya había notado en la forma anterior de análisis, pero que bajo esta perspectiva, se observa de manera más explícita.

Ahora, notemos que el primer término de A_1 se obtuvo luego de la multiplicación previa del factor $(1-x)$, el primer término de A_2 se obtuvo luego de la multiplicación previa del factor $(1-x^2)$ y así sucesivamente, es decir, el primer término de A_n se obtuvo luego de la descomposición previa del término que sólo poseía el factor $(1-x^n)$, como se aprecia mejor en la forma general, por lo que a la expresión deducida en el párrafo anterior se le debe restar la diferencia de n, para que así obtengamos $\frac{3n^2+n}{2}$, mientras que los números pentagonales restantes se obtienen de la misma forma que en el procedimiento anterior.

Ahora, estos términos siguen potencias de x precedidas por la misma diferencia n, por lo que al restar el número n de nueva cuenta, se formarán las potencias de la otra serie, que son, por tanto, de la forma $\frac{3n^2-n}{2}$.

De lo hecho, en términos generales, en los tres procedimientos realizados por Euler, su idea de cómo abordar el problema es básicamente la misma, con un proceso prácticamente idéntico que difería únicamente en detalles, como la forma de factorizar o desarrollar ciertos términos en otros pasos. La esencia es la misma, sólo que replanteando el problema ligeramente distinto. En el inicio, aparentemente buscó la forma de simplificar el proceso, lo cual le arrojó una especie de algoritmo, además de que pudo observar el comportamiento en cada paso. Posteriormente, ya con una idea muy sólida, decidió no enfocarse tanto en factorizar todo, lo que le generaría una forma más explícita de obtener los términos irreducibles, a diferencia del anterior, donde al final tenía que sustituir de una forma recursiva los polinomios que iba formando. Finalmente, en su última investigación de $\mathcal{S}$, logró obtener una forma más comprensible y un tanto más formal de deducir la forma de los números pentagonales, en contraste con su segunda forma de abordar el problema, donde lo hizo de una forma más intuitiva, con la construcción y argumentación de esos números.

Queda la impresión también de que buscó replantear las formas para confirmar sus hipótesis y buscar una manera más explícita y clara de ver el comportamiento y la forma de los exponentes sobrevivientes, para así extraer más propiedades (si es que existían). Sin embargo, la única pregunta que no pudo resolver de ninguna de estas maneras es por qué sólo sobreviven los números pentagonales.

1.4. La progresión de los números pentagonales.

Es indudable que los dos últimos análisis mostrados en la sección anterior le permitieron a Euler encontrar propiedades de los exponentes que le mostraron de mejor forma cómo se construyen los exponentes de los términos irreducibles del polinomio $\mathcal{S}$. Sin embargo, el análisis de estos números, al igual que la demostración del teorema en cuestión, siguen sin tener el rigor matemático deseado, más allá de que a la vista de todos no queda duda alguna de lo observado. Por esta razón, en esta sección mostraremos de mejor manera la construcción de los números pentagonales -es decir, los exponentes-. Para ello, es importante retomar algunas observaciones hechas por Euler.

Recordamos que en el primer artículo, tras cada paso en el desarrollo de cada binomio, pudo obtener lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - x & -A_1x^2 \\
A_1 &= 1 - x^3 & -A_2x^5 \\
A_2 &= 1 - x^5 & -A_3x^8 \\
A_3 &= 1 - x^7 & -A_4x^{11} \\
A_4 &= 1 - x^9 & -A_5x^{14} \\
&\dots & \dots
\end{aligned}
$$

Los exponentes en la primer columna, de los binomios de la forma $1 - x^m$ son los números impares positivos, mientras que los exponentes en la segunda columna, que son las expresiones de la forma $-A_jx^k$, son el resultado de sumar el exponente impar de la primer columna más el orden del renglón, es decir, de sumar el exponente m del binomio $1 - x^m$ más el sucesor del subíndice A_i, que es $i + 1$. Por ejemplo, en A_4, que se encuentra en el renglón 5, 9 es el impar correspondiente al orden quinto (quinto renglón), de donde $9 + 5 = 14$, que es la suma del impar correspondiente más $i + 1$, que para este caso es $i = 4$.

De manera general, el i-ésimo renglón de la tabla es:

$$A_n = A_{i-1} = 1 - x^{2n-1} - A_{n-1}x^{(2n-1)+n}$$

$$A_n = A_{i-1} = 1 - x^{2n-1} - A_{n-1}x^{3n-1}.$$

Con base en ello, el siguiente término es:

$$A_{n+1} = A_i = 1 - x^{2(n+1)-1} - A_nx^{2(n+1)-1+(n+1)}$$

$$A_{n+1} = A_i = 1 - x^{2(n+1)-1} - A_nx^{3(n+1)-1}.$$

Bajo esta forma, los primeros términos, a partir de $n = 1$, se verían de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - x^{2n-1} - A_1x^{3n-1} \\
A_1 &= 1 - x^{2(n+1)-1} - A_2x^{3(n+1)-1} \\
A_2 &= 1 - x^{2(n+2)-1} - A_3x^{3(n+2)-1} \\
A_3 &= 1 - x^{2(n+3)-1} - A_4x^{3(n+3)-1} \\
&\dots \\
A_k &= 1 - x^{2(n+k)-1} - A_{k+1}x^{3(n+k)-1}.
\end{aligned}
$$

De forma semejante, con base en el primer artículo de Euler tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - x & -A_1x^2 \\
A_1x^2 &= x^2(1 - x^3) & -A_2x^7 \\
A_2x^7 &= x^7(1 - x^5) & -A_3x^{15} \\
A_3x^{15} &= x^{15}(1 - x^7) & -A_4x^{26} \\
A_4x^{26} &= x^{26}(1 - x^9) & -A_5x^{40} \\
&\dots & \dots
\end{aligned}
$$

De lo anterior se tiene que:

$$s = 1 - x^{2n-1} - A_1 x^{3n-1}$$

$$A_1 x^{3n-1} = (1 - x^{2(n+1)-1})x^{3n-1} - A_2 x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)}$$

$$A_2 x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)} = (1 - x^{2(n+2)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1} - A_3 x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)}$$

$$\ldots$$

De estas identidades, tomemos únicamente los términos que corresponden a la primera columna en la forma tabular:

$$(1 - x^{2(n+1)-1})x^{3n-1}$$

$$(1 - x^{2(n+2)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)}$$

$$(1 - x^{2(n+3)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)}$$

$$\ldots$$

Cabe destacar que de estos productos se extraen los términos irreducibles del polinomio $\mathcal{S}$, donde aparecen los números pentagonales, dos en cada multiplicación para cada paso. Siendo así, en el desarrollo se puede ver que los exponentes de los primeros términos irreducibles obtenidos en cada paso atienden a una suma con términos de la forma $3n-1, 3(n+1)-1, 3(n+2)-1, etc.$, por lo que la regla que surge de ello está dada por la suma que sigue:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1).$$

Si desarrollamos esta suma obtenemos la fórmula para estos números.

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \left(\sum_{i=1}^{n} 3i\right) - n = 3\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - n = 3\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2+3n-2n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

Ya obtuvimos la forma de uno de los dos conjuntos de números asociados a los números pentagonales que aparecen en el polinomio resultante, sin embargo, aún falta conocer la forma de los exponentes de los otros términos irreducibles obtenidos en las potencias. Para esto, analizamos nuevamente la última tabla y las respectivas igualdades en términos generales. Por su estructura, se puede notar que los exponentes están formados de manera similar al caso anterior, sólo que con un sumando menor, más el número impar correspondiente al renglón de la tabla, que está dado por $2n-1$. La regla es la siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}(3i-1)\right) + (2n-1) = \frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2} + (2n-1) = \frac{3n^2-5n+2}{2} + (2n-1) = \frac{3n^2-n}{2}$$

Así, hemos obtenido la fórmula de los números pentagonales y, en este caso, de ambas series alternantes, quedando estructuradas ambas en la fórmula $\frac{3n^2 \pm n}{2}$.

Por otra parte, es importante destacar que este tipo de números, en particular los del signo negativo, tienen un significado geométrico. Veamos la definición que sigue:

DEFINICIÓN 2. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, el n-ésimo **número pentagonal** p_n es de la forma $p_n = \frac{3n^2-n}{2}$.

El concepto de número pentagonal se encuadra, desde el punto de vista de la geometría, en un patrón de puntos que conforman el contorno de pentágonos regulares que se anidan, cuyos lados contienen de 1 a n puntos y tienen el mismo número de puntos igualmente espaciados, donde comparten un vértice en común, como se observa en la Figura 3.1. Por esto, en la definición solamente tomamos la fórmula de los números en el caso negativo, ya que el caso positivo forma parte de una generalización.

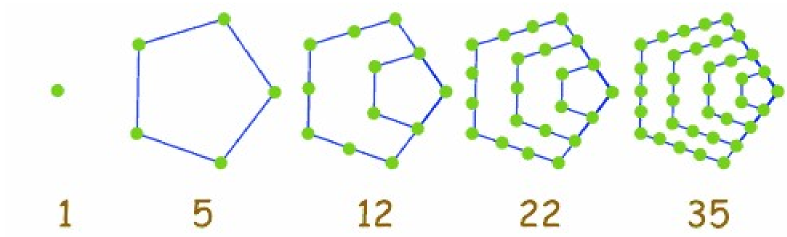


Figura 3.1. La progresión de los números pentagonales desde una perspectiva geométrica.

Los números pentagonales son sólo una de las categorías de los llamados *números figurados*, que incluyen a los números que se pueden representar por un conjunto de puntos equidistantes y que forman una figura geométrica regular. En este caso, forman un polígono regular, por lo que, a su vez, los números pentagonales son un tipo de *números poligonales*.

La importancia de observarlos, tanto de manera geométrica como de las progresiones que los forma, nos permite ver cómo se construyen con base en la idea original diofantina. Previo a observar algunas maneras de construirlos recordemos nuevamente la definición:

DEFINICIÓN 3. Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en la que cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad fija d, llamada *diferencia*.

Existen progresiones aritméticas muy conocidas. Veamos cómo se construyen las dos más conocidas para ver lo que sucede con los números pentagonales.

En el primer caso, consideremos la progresión de números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ Ésta puede ser representada como $1 + 1m$, con $m \in \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$ (agregamos el 1 en el producto porque, visualmente, nos será útil más adelante). Si sumamos términos consecutivos de esta progresión obtenemos:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$\ldots$$

De manera figurada, las sumas son formaciones triangulares, las cuales conocemos como **números triangulares** y se denotan como T_n, como se observa en la Figura 3.2.

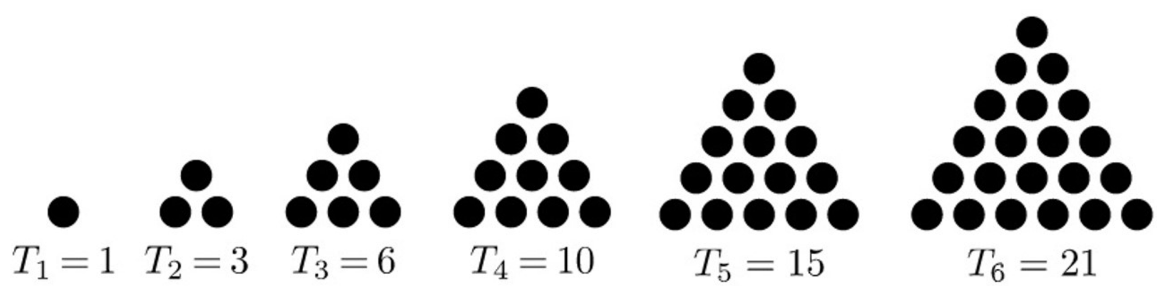


Figura 3.2. Los primeros seis números triangulares en su representación geométrica, donde dado un triangular, el siguiente se obtiene agregando la cantidad de puntos de la fila anterior más 1 debajo de ella.

Para encontrar el k-ésimo triangular, hacemos lo siguiente:

$$1+2+3+\ldots+k=(1+1(0))+(1+1(1))+(1+1(2))+\ldots+(1+1(k-1))$$

$$=k+1(1+2+3+\ldots+(k-1))$$

$$=k+1\frac{(k-1)k}{2}=k+\frac{k^2-k}{2}$$

$$=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$$

Por lo tanto obtenemos el número triangular $T_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Ahora, si tomamos la progresión $1,3,5,7,9\ldots$, ésta se puede representar como $1+2m$, con $m\in\mathcal{Z}^+\cup\{0\}$. Sumando números consecutivos de la progresión, tenemos que:

$$1=1$$

$$1+3=4$$

$$1+3+5=9$$

$$\ldots$$

De manera figurada, como se observa en la Figura 3.3., las sumas son formaciones de cuadrados, que conocemos como **números cuadrados** y se denotan como C_n.

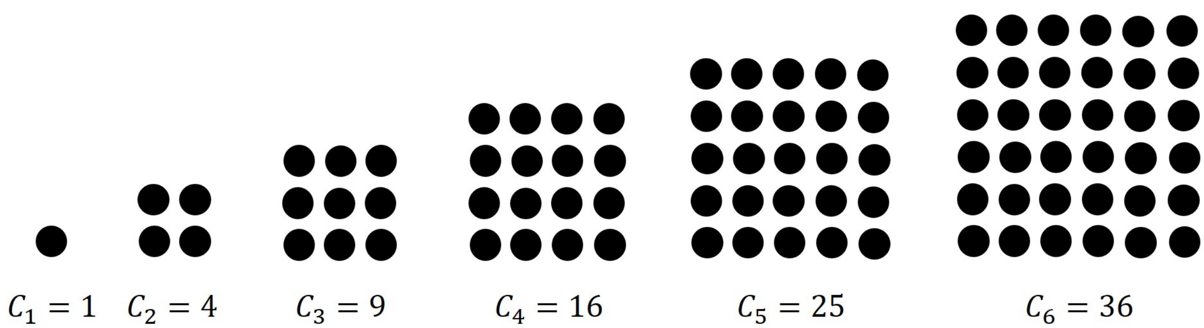


Figura 3.3. Los primeros seis números cuadrados en su representación geométrica, donde dado un cuadrado, el siguiente se obtiene agregando la cantidad de puntos de la fila anterior, tanto abajo, como a la derecha, más 1.

Para encontrar el k-ésimo cuadrado, hacemos lo siguiente:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=(1+2(0))+(1+2(1))+(1+2(2))+\ldots+(1+2(k-1))$$

$$=k+2(1+2+3+\ldots+(k-1))$$

$$=k+2\frac{(k-1)k}{2}=k+(k-1)(k)$$

$$=k^2$$

De esta forma obtenemos que el número cuadrado C_k es de la forma k^2.

Revisar las dos progresiones aritméticas anteriores nos da lugar a que ahora, de forma análoga, tomando el conjunto numérico que nos atañe, que es $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$, se representa por $1+3m$, con $m \in \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$. Si tomamos la suma de números consecutivos de esta progresión tenemos:

$$1 = 1$$

$$1 + 4 = 5$$

$$1 + 4 + 7 = 12$$

$$\ldots$$

Para encontrar el k-ésimo pentagonal, hacemos lo siguiente:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3k-2) = (1+3(0)) + (1+3(1)) + (1+3(2)) + \ldots + (1+3(k-1))$$

$$= k + 3(1+2+3+\ldots+(k-1))$$

$$= k + 3\frac{(k-1)k}{2} = k + \frac{3k^2-3k}{2}$$

$$= \frac{3k^2-k}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}$$

Por lo tanto, el k-ésimo número pentagonal es $P_k = \dfrac{k(3k-1)}{2}$.

Como se aprecia, existe un proceso análogo en las tres progresiones que se detallaron, de lo cual, podemos hacer una generalización. Para ello, la progresión $1 + km$, con $m, k \in \mathcal{Z}^+ \cup \{0\}$, genera los términos $1, 1+1m, 1+2m, 1+3m, \ldots, 1+(k-1)m$. Sumando estos, nos queda que:

$$1 + (1+1(m)) + (1+2(m)) + (1+3(m)) + \ldots + (1+(k-1)m)$$

$$= k + m(1+2+3+\ldots+(k-1))$$

$$= k + m\frac{(k-1)k}{2}.$$

Así, el k-ésimo poligonal de orden m está dado por la fórmula

$$Q_k(m) = k + m\frac{(k-1)k}{2}$$

Desarrollemos esta expresión:

$$Q_k(m) = k + m\frac{(k-1)k}{2} = \frac{2k+m(k-1)k}{2} = \frac{2k+mk^2-mk}{2}$$

$$\Longrightarrow Q_k(m) = \frac{mk^2-(m-2)k}{2}$$

Con esta generalización, se obtienen los números triangulares si se toma $m = 1$; para $m = 2$, obtenemos un número cuadrado; si tomamos $m = 3$, entonces tenemos un número pentagonal, etcétera. Así, podemos concluir que si definimos $p = m+2$, donde p representa el número de lados del polígono, tendríamos que $m = p-2$. Al sustituir en la fórmula del k-ésimo poligonal de orden m, obtenemos la expresión del k-ésimo poligonal de p lados:

$$L_k(p) = \frac{(p-2)k^2-(p-4)k}{2}$$

Ahora, veamos algunas relaciones geométricas que se pueden establecer con las progresiones aritméticas.

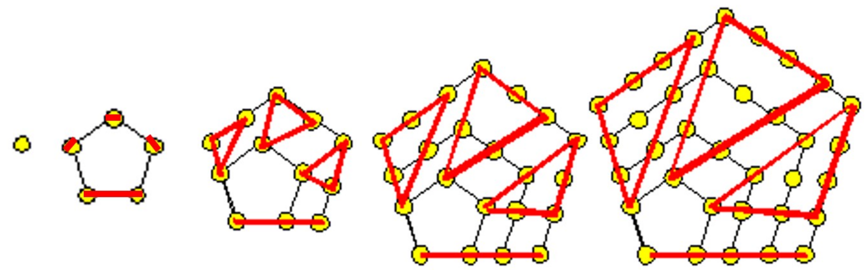


Figura 3.4. Se unen los puntos de la base del pentágono, mientras que el resto se unen de tal forma que se unan tres triángulos.

Al realizar los trazos resaltados de color rojo, como se aprecia en la Figura 3.4., se distinguen algunos puntos de otros. Notemos como se señalan en cada uno de los casos tres triángulos, lo cual corresponde a tres números triangulares para cada caso (observación que Euler hizo en sus otros dos análisis del polinomio $\mathcal{S}$), sólo que de un orden menor, mientras que los puntos restantes forman parte de una recta, particularmente del lado del pentágono, que son justamente n puntos. De esta manera, la fórmula se escribiría como:

$$P_n = 3T_{n-1} + n = 3\frac{(n-1)(n)}{2} + n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

El visualizar a los números pentagonales de manera gráfica, nos permite encontrar varias características interesantes de este tipo de números y cómo construirlos. Mostraremos otra manera de visualizar este tipo de números con base en otros números más conocidos, partiendo de la observación gráfica anterior. Para ello, veamos el siguiente desarrollo:

$$P_n = 3T_{n-1} + n = T_{n-1} + 2T_{n-1} + n = T_{n-1} + (n-1)(n) + n = T_{n-1} + n^2 = T_{n-1} + C_n$$

Por lo tanto, un número pentagonal lo podemos expresar como la suma del número triangular de orden menor más el n-ésimo número cuadrado, como se observa en la Figura 3.5.

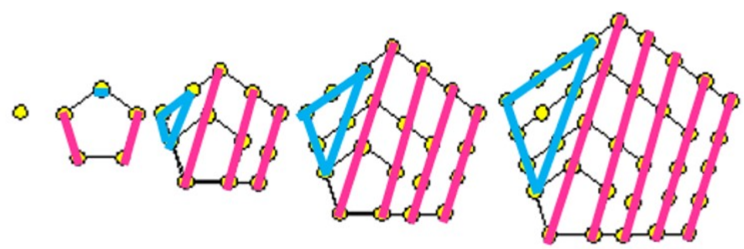


Figura 3.5. Se unen los puntos conforme a columnas, empezando por la derecha, tantas veces según el número de vértices de la base.

1.5. El perfil del Análisis de los Infinitamente Pequeños de Euler.

En esta sección, analizamos las funciones generadoras que darían lugar al teorema de los pentagonales, pero desde el contexto de la gran obra de Euler, la *Introductio in analysin infinitorum*.[6] Consideramos que por la importancia de esta obra es adecuado mostrar de qué manera Euler presentó los resutados sobre particiones, que parcialmente había publicado o presentado a sus amistades a través de la correspondencia.

[6] Éste es un trabajo que consta de dos volúmenes. Fue escrito en latín y publicado en 1748.

El segundo volumen es donde aborda el tema de las particiones. Ahí, comienza con la mención de aquellas que tienen sumandos distintos y que representan a un número entero positivo cualquiera. En particular, presenta lo que sucede con la siguiente expresión:

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}(1+zx^j)=(1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)(1+zx^8)\ldots \tag{1.5}$$

$$=(1+zx+zx^2+z^2x^3)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)(1+zx^8)\ldots$$

$$=(1+zx+zx^2+zx^3+z^2x^3++z^2x^4+z^2x^5+z^3x^6)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)(1+zx^8)\ldots$$

Esta expresión ya había sido mencionada anteriormente en este trabajo. Recordemos que si deseamos conocer de cuántas maneras se puede expresar el número n como suma de m enteros distintos, ubicamos dentro del polinomio resultante el término rz^mx^n, cuyo coeficiente r nos indica el número de particiones con los m enteros que deseamos.

Además, si a z se le asigna el valor de 1, entonces el polinomio queda como

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)\ldots$$

de donde cada término resultante Cx^n representa que n tiene C particiones distintas, cada una con sumandos distintos.

Posteriormente, Euler expone las particiones de un número sin distinción entre los sumandos, es decir, sin limitarnos a que estos tengan que ser distintos entre sí. Para ello, observemos el despliegue de la siguiente función generadora que, a la vez, es una progresión geométrica.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+x^{1+1+1+1}+\ldots \tag{1.6}$$

Se puede interpretar que en el desarrollo de la serie el exponente de x aumenta de 1 en 1. En cuestión de particiones, se observa que cada entero positivo en las potencias de x se puede expresar sólo como suma de unidades e, intrínsecamente, está la repetición en los elementos de la partición.

Por otro lado,

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots=1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+x^{2+2+2+2}+\ldots \tag{1.7}$$

Esta función generadora es similar, sin embargo, el polinomio resultante tiene en sus exponentes sólo a los múltiplos de 2. Del lado derecho de la igualdad, se observa que las potencias representan particiones que sólo tienen en los sumandos al 2.

Observemos lo que sucede si multiplicamos ambas funciones (1.6) y (1.7):

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}=(1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\ldots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\ldots)$$
$$=1+x^1+x^1+x^{1+1}+x^2+x^{1+1+1}+x^{1+2}+x^{1+1+1+1}+x^{1+1+2}+x^{2+2}+\ldots$$

$$=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+\ldots$$

En este caso, se obtiene una nueva función generadora de carácter multiplicativa donde, al desarrollar el producto, bajo su forma de series geométricas, se generan en los exponentes las particiones de los enteros positivos, donde los sumandos únicamente pueden ser 1 y 2, con la posibilidad de que se pueden repetir.

De esta manera, si generalizamos la función generadora, resulta que:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^n}$$

$$=(1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\dots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\dots)\dots(1+x^n+x^{n+n}+x^{n+n+n}+\dots)$$

$$=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+\dots$$

$$\therefore P(x)=1+x+2x^2+3x^3+3x^4+6x^5+11x^6+\dots$$

De esto resulta que si operamos con el conjunto de funciones racionales que representan a las particiones con elementos repetidos e iguales, obtenemos la función generadora que nos arroja las particiones de un número entero positivo, donde se consideran las repeticiones. Así, cada término resultante C_nx^n representa las C_n particiones distintas con a lo más n sumandos, las cuales, pueden tener repetición o sólo sumandos distintos entre ellos.

Por ejemplo, para el término C_4x^4, las particiones que se tienen del número 4 son:

Particiones del 4: $\mid 4 \mid 1+3 \mid 2+2 \mid 1+1+2 \mid 1+1+1+1+1 \mid$

Por tanto, $C_4=5$.

De manera similar, si queremos una función generadora que nos indique la cantidad de particiones que existen para un entero positivo con una cantidad particular de sumandos, empleamos una z que multiplique a la potencia de x, como sigue:

$$\frac{1}{1-zx^k}=1+zx^k+zx^{2k}+zx^{3k}+zx^{4k}+\dots=1+zx^k+zx^{k+k}+zx^{k+k+k}+zx^{k+k+k+k}+\dots$$

La generalización de lo anterior da lugar a la siguiente función generadora:

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}^+}\frac{1}{(1-zx^j)}=\frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)(1-zx^3)(1-zx^4)(1-zx^5)(1-zx^6)(1-zx^7)(1-zx^8)\dots}\tag{1.8}$$

Esto nos permite conocer de cuántas maneras se puede expresar al número n como suma de m términos, sin importar que haya coincidencias entre estos. Ahora, podemos ubicar dentro del polinomio resultante el término z^mx^n, que estará acompañado por un coeficiente, que es el que nos indica el número que deseamos. Bajo esta perspectiva, si tomamos a $z=1$, entonces se tiene la función generadora sin el contador, donde únicamente se contemplan las particiones totales.

Para tener más claridad de lo que sucede, haremos un análisis que posteriormente veremos reflejado en el trabajo de Legendre para demostrar el teorema de los números pentagonales. En primer lugar, Euler toma al polinomio que permite conocer la cantidad de particiones que existen con cierto número de sumandos que no se repiten y lo iguala a un polinomio resultante, es decir, muestra que al desarrollar el polinomio

$$(1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)(1+zx^6)(1+zx^7)(1+zx^8)\dots$$

obtendremos uno de la forma

$$1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\dots+A_nz^n+\dots$$

Es decir, tenemos la siguiente expresión:

$$(1+zx)(1+zx^2)(1+zx^3)(1+zx^4)(1+zx^5)\dots=1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\dots+A_nz^n+\dots\tag{1.9}$$

El objetivo será conocer el valor de cada A_i. Para ello, hace notar que si sustituimos xz en vez de z, resulta que

$$1+A_1(xz)+A_2(xz)^2+A_3(xz)^3++\dots+A_n(xz)^n+\dots=(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\dots(1+x^nz)\dots$$

Sustituimos en (1.9) para obtener:

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \ldots + A_nz^n + \ldots = (1 + xz)(1 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + A_3(xz)^3 + \ldots + A_n(xz)^n + \ldots)$$

$$= (1 + A_1xz + A_2x^2z^2 + A_3x^3z^3 + \ldots + A_nx^nz^n + \ldots) + (xz + A_1x^2z^2 + A_2x^3z^3 + \ldots + A_nx^{n+1}z^{n+1} + \ldots)$$

$$\Longrightarrow 1 + A_1z + A_2z^2 + \ldots + A_nz^n + \ldots = 1 + (A_1x + x)z + (A_2x^2 + A_1x^2)z^2 + \ldots + (A_nx^n + A_{n-1}x^n)z^n + \ldots.$$

Si igualamos los coeficientes con respecto a las potencias correspondientes de z, obtendremos los valores de cada A_i, que serían:

$$A_1 = \frac{x}{1-x} \qquad A_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} \qquad A_3 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$\ldots$

$$A_n = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}$$

Veamos un ejemplo sencillo que ayudará a comprender la posterior generalización. Para A_2, sabemos que representa las particiones que se tienen para un número con 2 sumandos distintos. Por otra parte, notemos que:

$$A_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = x^3 \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

Si observamos el multiplicando del lado derecho, podemos notar que nos representa las distintas particiones para un número cualquiera m, donde los sumandos son 1 y 2. Como se tiene el factor x^3, entonces se genera un polinomio irreducible de la forma

$$x^3 + x^{1+3} + x^{1+1+3} + x^{2+3} + x^{1+1+1+3} + x^{1+2+3} + x^{1+1+1+1+3} + x^{1+1+2+3} + x^{2+2+3} + \ldots = x^3P(x)$$

En consecuencia, el polinomio irreducible contiene las particiones de los enteros positivos que contienen al 1 y 2 como sumandos, con repetición posible, y además, contienen al 3 forzosamente en una ocasión.

Una segunda interpretación, que es la que observa Euler, es que A_2 representa las particiones mencionadas para el entero $m + 3$, es decir, cada partición se "recorre" 3 unidades.

Por lo tanto, lo que tenemos en general es que A_n, por la forma en que se definió y por ser el coeficiente de A_nz^n, representa el número de particiones para cualquier entero positivo m con n sumandos, todos ellos distintos. Por otro lado,

$$A_n = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)} = x^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}$$

A_n además representa las particiones que se tienen para el número $m+\frac{n(n+1)}{2}$, donde los sumandos son $1, 2, 3, \ldots, n$, sin importar que se repitan (bajo la otra interpretación, representa las particiones que forzosamente contienen al entero $\frac{n(n+1)}{2}$ una vez como sumando).

Bajo esta observación, Euler establece lo anterior en el siguiente teorema.

TEOREMA 1. El número de formas distintas en que un entero positivo m se puede expresar como suma de los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$, es igual al número de formas distintas en que el número $m + \frac{n(n+1)}{2}$ puede ser expresado como suma de n números distintos.

Si bien llegamos a un resultado, ahora veamos el análisis desde el punto de vista contrario, es decir, partiendo de la expresión que sí admite repetición en los sumandos de las particiones. Para ello, haremos un proceso similar. Si desarrollamos

$$\frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)(1-zx^3)(1-zx^4)(1-zx^5)(1-zx^6)(1-zx^7)(1-zx^8)\dots}$$

obtendremos una expresión de la forma

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + \dots + A_nz^n + \dots$$

Es decir, tenemos la siguiente expresión:

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + \dots + A_nz^n + \dots = \frac{1}{(1-zx)(1-zx^2)(1-zx^3)(1-zx^4)(1-zx^5)\dots} \tag{1.10}$$

El objetivo nuevamente será conocer el valor de cada A_i.

Por lo hecho anteriormente, al sustituir xz en vez de z, resulta que

$$1 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + A_3(xz)^3 + \dots + A_n(xz)^n + \dots = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)\dots(1-x^nz)\dots}$$

Si sustituimos en (1.10), queda:

$$1 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_nz^n + \dots = \frac{1}{(1-xz)} \cdot (1 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + \dots + A_n(xz)^n + \dots)$$

La expresión racional que se encuentra del lado derecho de la igualdad la pasamos al lado izquierdo multiplicando, para obtener lo siguiente:

$$1 + (A_1x)z + (A_2x^2)z^2 + \dots + (A_nx^n)z^n + \dots = (1-xz)(1 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_nz^n + \dots)$$

$$= (1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots + A_nz^n + \dots) - (xz + A_1xz^2 + A_2xz^3 + A_3xz^4 + \dots + A_nxz^{n+1} + \dots)$$

$$= 1 + (A_1 - x)z + (A_2 - A_1x)z^2 + (A_3 - A_2x)z^3 + \dots + (A_n - A_{n-1}x)z^n + \dots$$

Si igualamos los coeficientes con respecto a las potencias correspondientes de z, obtendremos los valores de cada A_i, que serían:

$$A_1 = \frac{x}{1-x} \qquad A_2 = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \qquad A_3 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$\dots$

$$A_n = \frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)}$$

La forma de las A_i difiere solamente en los exponentes de los numeradores de las A_i con las que se trabajó en la forma anterior, es decir, en lugar de tener $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$, ahora se tiene x^n. De esta forma, si se sigue un procedimiento análogo al anterior, o con el ajuste debido con respecto a ello, el teorema que se deriva es el que sigue:

TEOREMA 2. El número de formas distintas en que un entero positivo m se puede expresar como suma de los enteros $1, 2, 3, \dots, n$, es igual al número de formas distintas en que el número $m + n$ puede ser expresado como suma de n números.

Ahora, veamos otra propiedad que podemos derivar, en esta ocasión, sólo observando las particiones donde son válidas las repeticiones. Dado

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} \tag{1.11}$$

sabemos que al desarrollar esta función racional, se obtiene un polinomio, donde cada término es de la forma Mx^m, y el coeficiente indica las distintas maneras en que m se puede expresar como suma de los números $1,2,3,\dots,n$.

Por otra parte, si tomamos

$$\frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} \tag{1.12}$$

y desarrollamos la expresión hasta obtener el polinomio final, cada término tiene la forma Nx^m, donde N representa las distintas formas en que el número $m-n$ se puede expresar como suma de los números $1,2,3,\dots,m$. Si a la expresión (1.12) le restamos la expresión (1.11), obtenemos que:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} - \frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)}$$

$$= \frac{(1-x^n)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^{n-1})}$$

Notemos que cada término del polinomio resultante es de la forma $(M-N)x^m$, donde $N-M$ indica el número de formas distintas en que cada entero positivo m puede expresarse como suma de los números $1,2,3,\dots,n-1$. De esta forma, podemos concluir que si conocemos de cuántas maneras m puede ser expresado como suma de los enteros $1,2,3,\dots,n-1$, y de cuántas formas $m-n$ puede verse como suma de los números $1,2,3,\dots,n$, entonces obtenemos por adición el número de maneras distintas en que m puede expresarse como suma de los enteros positivos $1,2,3,\dots,n$.

1.6. Desde la visión de Legendre.

Después de estudiar diversas formas en que Euler abordó el problema, no hay duda de que todas tienen una esencia particular en el alma del desarrollo. A pesar de ello, es imposible no pensar en los otros personajes que tomaron el problema y trabajaron con él bajo otras perspectivas, inclusive de forma indirecta. Es aquí donde llegamos para mencionar a Adrien-Marie Legendre, destacado matemático francés de la segunda mitad del siglo XVIII y primera mitad del siglo XIX. En su famosa obra *Théorie des nombres* (Teoría de números), deduce el polinomio irreducible del teorema de los números pentagonales partiendo de otro polinomio, pero, sin alejarse de una esencia similar en el desarrollo y obtención de los términos respecto al trabajo de Euler.

Para ello, empecemos tomando el polinomio que arroja las particiones de un entero positivo cualquiera y que además muestra la cantidad de sumandos, los cuales no se repiten entre ellos, es decir,

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\dots(1+x^nz)\dots$$

Al desarrollarla por completo, nos arrojará un polinomio irreducible que será de la forma general

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + \dots + A_nz^n + \dots$$

Igualamos ambas expresiones, resultando lo siguiente:

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots + A_nz^n + \dots = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots(1+x^nz)\dots \tag{1.13}$$

Por otra parte, si sustituimos xz en vez de z, llegamos a:

$$1 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + A_3(xz)^3 + \ldots + A_n(xz)^n + \ldots = (1 + x^2z)(1 + x^3z)\ldots(1 + x^nz)\ldots \tag{1.14}$$

Esta expresión es prácticamente idéntica a (1.13) al comparar el lado derecho de ambas igualdades, difiriendo únicamente por el primer término $(1 + xz)$. De esta forma, si sustituimos (1.14) en (1.13), obtenemos que:

$$1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \ldots + A_nz^n + \ldots = (1 + xz)(1 + A_1(xz) + A_2(xz)^2 + A_3(xz)^3 + \ldots + A_n(xz)^n + \ldots)$$

$$= (1 + A_1xz + A_2x^2z^2 + \ldots + A_nx^nz^n + \ldots) + (xz + A_1x^2z^2 + A_2x^3z^3 + \ldots + A_nx^{n+1}z^{n+1} + \ldots)$$

$$\Longrightarrow 1 + A_1z + A_2z^2 + \ldots + A_nz^n + \ldots = 1 + (A_1x + x)z + (A_2x^2 + A_1x^2)z^2 + \ldots + (A_nx^n + A_{n-1}x^n)z^n + \ldots$$

El objetivo ahora es encontrar el valor de cada A_i, que representa las particiones que se tienen para un número con i sumandos, por ser parte del término A_iz^i. Para ello, igualamos los coeficientes con respecto a las potencias correspondientes de z y hallamos el valor de cada una.

$$A_1 = A_1x + x \qquad A_1 - A_1x = x \qquad A_1(1-x) = x \qquad \Longrightarrow A_1 = \frac{x}{1-x}$$

$$A_2 = A_2x^2 + A_1x^2 \qquad A_2 - A_2x^2 = A_1x^2 \qquad A_2(1-x^2) = A_1x^2$$

$$A_2(1-x^2) = \frac{x}{1-x}\cdot x^2 = \frac{x^3}{1-x} \qquad \Longrightarrow A_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$A_3 = A_3x^3 + A_2x^3 \qquad A_3 - A_3x^3 = A_2x^3 \qquad A_3(1-x^3) = A_2x^3$$

$$A_3(1-x^3) = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}\cdot xx^2 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} \qquad \Longrightarrow A_3 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$\ldots$$

Notemos que la forma de obtener cada uno de los valores de A_i es recursiva. Con base en ello, para el $n-$ésimo término se llega a que:

$$A_n = A_nx^n + A_{n-1}x^n \qquad A_n - A_nx^n = A_{n-1}x^n \qquad A_n(1-x^n) = A_{n-1}x^n$$

$$A_n(1-x^n) = \frac{xx^2x^3\ldots x^{n-1}\cdot x^n}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{n-1})} = \frac{x^{1+2+3+\ldots+n}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{n-1})}$$

$$\therefore A_n = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}$$

Es así que la expresión (1.13) queda como:

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots(1+x^nz)\ldots = 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots + \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}z^n + \ldots$$

Ahora, si le asignamos el valor de -1 a z, obtenemos la expresión de nuestro interés:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots = 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} + \ldots \tag{1.15}$$

Tomemos la parte derecha de (1.15) y extraigamos el primer término irreducible obtenido, que es 1, y trabajemos con el resto del polinomio, es decir, con las expresiones fraccionarias. El objetivo a partir de ahora será obtener el polinomio resultante, o dicho de otra manera, todos los términos irreducibles. Por ello, se buscará desarrollar la expresión anterior de tal forma que los factores que se encuentran en el denominador de cada término vayan desapareciendo. Para lograr el cometido, descompondremos cada sumando a su vez en dos, de la siguiente forma:

· Escribimos a $\dfrac{x}{1-x}$ como $x + \dfrac{x^2}{1-x}$

· Escribimos a $\dfrac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$ como $\dfrac{x^3}{1-x} + \dfrac{x^5}{(1-x)(1-x^2)}$

· Escribimos a $\dfrac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ como $\dfrac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + \dfrac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

...

· Escribimos a $\dfrac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)\dots(1-x^n)}$ como $\dfrac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)\dots(1-x^{n-1})} + \dfrac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x)\dots(1-x^n)}$

Reemplazamos estas expresiones en el lado derecho de (1.15) y nos queda lo siguiente:

$$= -x - \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^5}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} + \dots$$

$$+ \frac{x^3}{1-x} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} + \dots$$

Ahora, factorizamos por pares las fracciones con denominador común:

$$= -x - \frac{x^2(1-x)}{(1-x)} + \frac{x^5(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^9(1-x)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}(1-x)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} + \dots$$

$$= -x - x^2 + \frac{x^5}{(1-x^2)} - \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} + \dots$$

Después de este primer paso, logramos eliminar el factor que predominaba en los términos del polinomio, que era $(1-x)$ y obtuvimos un par de términos irreducibles, que son $-x$ y $-x^2$. Sustituimos esta expresión en (1.15).

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)\dots = 1 - x - x^2 + \frac{x^5}{(1-x^2)} - \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} + \dots \quad (1.16)$$

Continuamos con el desarrollo, haciendo algo similar a lo realizado en el paso previo. Tomamos los términos que no son irreducibles del lado derecho de (1.16) y escribimos cada uno como suma de dos términos, para así posteriormente asociar adecuadamente, obtener el factor $1 - x^2$ en cada uno de ellos y, de esta forma, poder eliminarlo.

· Escribimos a $\dfrac{x^5}{1-x^2}$ como $x^5 + \dfrac{x^7}{1-x^2}$

· Escribimos a $\dfrac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)}$ como $\dfrac{x^9}{(1-x^2)} + \dfrac{x^{12}}{(1-x^2)(1-x^3)}$

· Escribimos a $\dfrac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ como $\dfrac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)} + \dfrac{x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$

...

· Escribimos a $\dfrac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x^2)\dots(1-x^n)}$ como $\dfrac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x^2)\dots(1-x^{n-1})} + \dfrac{x^{\frac{n(n+5)}{2}}}{(1-x^2)\dots(1-x^n)}$

Sustituimos estas expresiones en el lado derecho de (1.16):

$$+x^5 + \frac{x^7}{1-x^2} - \frac{x^{12}}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{18}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+5)}{2}}}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} + \dots$$

$$-\frac{x^9}{1-x^2} - \frac{x^{14}}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{20}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} + \dots$$

Factorizamos por pares las fracciones con denominador común:

$$= +x^5 + \frac{x^7(1-x^2)}{(1-x^2)} - \frac{x^{12}(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{18}(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+5)}{2}}(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)} + \dots$$

$$= +x^5 + x^7 - \frac{x^{12}}{(1-x^3)} + \frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)} - \frac{x^{25}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+5)}{2}}}{(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n)} + \dots$$

Sustituimos esto que hemos obtenido en (1.16).

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)\dots = 1-x-x^2+x^5+x^7-\frac{x^{12}}{(1-x^3)}+\frac{x^{18}}{(1-x^3)(1-x^4)}+\dots+(-1)^n\frac{x^{\frac{n(n+5)}{2}}}{(1-x^3)\dots(1-x^n)}+\dots \quad (1.17)$$

Nuevamente, nos quedan dos términos irreducibles más, que son $+x^5$ y $+x^7$, los cuales, añadimos a los previamente acumulados, para ahora tener $1-x-x^2+x^5+x^7$. Si continuamos este procedimiento de forma infinita, obtenemos el polinomio irreducible, luego de que en cada paso, cada término de la forma $(1-x^n)$ se elimina.

A continuación, mostramos los números que aparecen en los exponentes en cada uno de los pasos en la siguiente tabla.

Enteros positivos n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_1	$\underline{1}$	3	6	10	15	21	28	36	45	...
A_2	$\underline{\underline{2}}$	$\underline{5}$	9	14	20	27	35	44	54	...
A_3		$\underline{\underline{7}}$	$\underline{12}$	18	25	33	42	52	63	...
A_4			$\underline{\underline{15}}$	$\underline{22}$	30	39	49	60	72	...
A_5				$\underline{\underline{26}}$	$\underline{35}$	45	56	68	81	...
A_6					$\underline{\underline{40}}$	$\underline{51}$	63	76	90	...
A_7						$\underline{\underline{57}}$	$\underline{70}$	84	99	...
...							...	...	...	

Vimos en las expresiones (1.15), (1.16) y (1.17) que los exponentes que iban quedando, de forma respectiva, fueron $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+3)}{2}$, $\frac{n(n+5)}{2}$, etc. La forma general de estas expresiones es $\frac{n(n+1)}{2} + n(i-1)$, lo cual se justifica si observamos los números de la fila A_i, donde si tomamos una columna cualquiera n, la diferencia entre el término de A_i y el de A_{i+1} es precisamente n. Además, la diferencia entre cada término de A_i tiene la forma de un número pentagonal.

Ahora, para obtener la forma de los exponentes de los términos irreducibles de nuestro polinomio, que se encuentran resaltados en la tabla, los analizamos de dos formas:

- Números que tienen un subrayado simple. Notemos que todos ellos se encuentran en la fila A_k columna k, entonces son de la forma
$$\frac{k(k+1)}{2} + k(k-1) = \frac{3k^2-k}{2}$$
- Números que tienen un subrayado doble. Notemos que todos ellos se encuentran en la fila A_{k+1} columna k, entonces son de la forma
$$\frac{k(k+1)}{2} + k((k+1)-1) = \frac{k(k+1)}{2} + k^2 = \frac{3k^2+k}{2}.$$

Finalmente, los signos de las potencias de x quedan determinados igualmente por el número k. Como en cada iteración van apareciendo dos términos irreducibles, los cuales están multiplicados originalmente por z^n, que para nuestro caso toma el valor $z = -1$, entonces se obtiene la alternancia por pares entre signos positivos y negativos.

Apoyándonos en la tabla para ver esto de forma más clara, supongamos que estamos en la columna k. Sin pérdida de generalidad, supongamos que k es par, entonces es de la forma $2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces, parte de la expresión final es:

$$\begin{aligned}&\ldots + (-1)^{2m} \cdot \frac{3k^2-k}{2} + (-1)^{2m} \cdot \frac{3k^2+k}{2} + (-1)^{2m+1} \cdot \frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2} + (-1)^{2m+1} \cdot \frac{3(k+1)^2+(k+1)}{2} + \ldots \\ &= \ldots + \frac{3k^2-k}{2} + \frac{3k^2+k}{2} - \frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2} - \frac{3(k+1)^2+(k+1)}{2} + \ldots\end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio que se obtiene es

$$\prod_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left[\frac{3j^2-j}{2} + \frac{3j^2+j}{2}\right] = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$$

Este procedimiento desarrollado por Legendre, el cual parte de las ideas básicas de Euler plasmadas en el libro *Introduction to Analysis of the Infinite*, se relaciona mucho con los previos que desarrolló el propio Leonhard. La esencia en todos ellos es la misma: descomponer factores para desaparecerlos posteriormente. Todos son de la forma $(1 - x^n)$, y en cada paso, recurre a una forma particular de descomponer lo que se tiene en el momento y poder reducir la expresión que se tiene. Ésta en particular, se asemeja al segundo y tercer procedimiento que mostramos de Euler, donde también obteniene de forma explícita los términos irreducibles.

Si ahora pensamos en las ventajas que nos muestra este método, la forma en que explica por qué los números sobrevivientes son los hoy llamados números pentagonales es un poco menos intuitiva y más convincente, aunque sigue sin ser una demostración formal de por qué los demás enteros positivos no aparecen. El hecho de que use las distintas progresiones aritméticas que se generan a lo largo del proceso y que de ahí note la posición relativa que ubica los números de los exponentes ayuda a formular de mejor manera el por qué de la expresión matemática de estos números.

Como vimos, Legendre mostró una equivalencia para $\mathcal{S}$ dada por

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}$$

para así mostrar que el polinomio resultante de $\mathcal{S}$ es $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$

Lo interesante de que retoma el trabajo de Euler en cuestión de particiones para enfocarlo en el teorema de los números pentagonales (que recordemos que también está relacionado con las particiones) es que ellas siguen presentes en el propio desarrollo de manera clara. El desarrollo explícito de la expresión anterior, queda como

$$= 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} + \ldots$$

Se puede apreciar que cada sumando representa a las particiones que pueden tener elementos repetidos o distintos, pero, dado el numerador en cada uno de ellos, esas particiones contienen un sumando que es un número triangular. Por ejemplo, el cuarto elemento que se está sumando, se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = x^6 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} =$$

$$= x^6(1 + x + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \ldots)(1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \ldots)(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \ldots)$$

$$= x^6 + x^{1+6} + x^{1+1+6} + x^{2+6} + x^{1+1+1+6} + x^{1+2+6} + x^{3+6} + x^{1+1+1+1+6} + x^{1+1+2+6} + x^{2+2+6} + x^{1+3+6} + \ldots$$

Por tanto, todas las particiones tienen al número triangular 6. De esta forma, al sumar cada uno de los términos de la expresión, se tienen particiones que están formadas al menos por un número triangular.

La presencia de los números triangulares dentro de los exponentes del polinomio resultante del teorema de los números pentagonales ya ha sido visualizada, no sólo con este procedimiento de Legendre, sino también en el significado gráfico, como números figurados. Aunado a ello, también se puede corroborar esta afirmación desde la generación de los números pentagonales como progresiones aritméticas. Para ello, recordemos que, como se vio en la página 26, en la sección *1.4. "La progresión de los números pentagonales"*, la expresión de los números $\frac{n(3n\pm1)}{2}$ se obtiene de dos maneras:

· Los pentagonales de la forma $\frac{n(3n+1)}{2}$ se obtienen de

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = 3\frac{n(n+1)}{2} - n = 3T_n - n$$

Si tomamos, por ejemplo, $n = 4$, el número pentagonal correspondiente sería $\frac{4(3(4)+1)}{2} = 26$, mientras que

$$3T_n - n = 3(1+2+3+4) - 4 = 3(10) - 4 = 26$$

· Los pentagonales de la forma $\frac{n(3n-1)}{2}$ se obtienen de

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} 3i - 1\right] + (2n-1) = \left[\frac{3(n-1)(n)}{2} - (n-1)\right] + (2n-1) = \left[\frac{(3n^2 - 2n - 3n + 2)}{2}\right] + \frac{(4n-2)}{2}$$

$$= \frac{(3n^2 - 3n)}{2} + \frac{4n - 2n}{2} = \frac{3(n-1)(n)}{2} + \frac{2n}{2} = 3T_{n-1} + n$$

Si tomamos, por ejemplo, $n = 5$, el número pentagonal correspondiente sería $\frac{5(3(5)-1)}{2} = 35$, mientras que

$$3T_{n-1} + n = 3(1+2+3+4) + 5 = 3(10) + 5 = 35$$

1.7. Una forma moderna y compacta del teorema de los números pentagonales.

Como ya se vio, existe una recurrencia y un comportamiento muy característico al buscar y obtener los términos irreducibles del polinomio $\mathcal{S}$. Dado lo conocido, George Andrews, matemático estadounidense, decidió hacer un análisis del desarrollo desde un punto de vista más actual y puramente algebraico, mostrando la recurrencia de una forma mucho más compacta. En *Mathematics Magazine, Vol. 5, No. 5*, publicada en Noviembre de 1983 por la *Mathematical Association of America*, planteó el problema a partir de la definición de una función de dos variables dada por:

$$f(x,q) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq)(1-xq^2)(1-xq^3)\dots(1-xq^{n-1})x^{n+1}q^n \tag{1.18}$$

Si asignamos el valor $x = 1$ tenemos que:

$$f(1,q) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots(1-q^{n-1})q^n$$

$$= 1 - q - (1-q)q^2 - (1-q)(1-q^2)q^3 - \dots - (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots(1-q^{n-1})q^n - \dots$$

Si se parte de un caso particular de esta función, se obtiene una expresión que igualmente fue observada por Euler en la pág. 14, en la sección *1.2. "Construir el polinomio"*, por lo que el teorema de los números pentagonales se deriva con base en la condición de x. Así, tenemos que:

$$f(1,q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

Regresemos a (1.18), que es la función ($f(x,q)$. Andrews hace un breve desarrollo y operaciones que parecen estar apegadas y reflejan en todo momento lo que hace Euler en sus diversas publicaciones, como se vio en la misma sección mencionada. Primero, desarrollamos la suma para el caso $n = 1$ y después reajustamos su índice:

$$f(x,q) = 1 - x^2q - \sum_{n=2}^{\infty}(1-xq)(1-xq^2)(1-xq^3)\dots(1-xq^{n-1})x^{n+1}q^n$$

$$= 1 - x^2q - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq)(1-xq^2)(1-xq^3)\dots(1-xq^{n})x^{n+2}q^{n+1}$$

Ahora, desarrollamos el primer binomio $(1-xq)$ y partimos la suma de esta manera:

$$= 1 - x^2q - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)(1-xq^3)\dots(1-xq^{n})x^{n+2}q^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)(1-xq^3)\dots(1-xq^{n})x^{n+3}q^{n+2}$$

Nuevamente, para la primera suma, desarrollamos el término resultante de $n = 1$ y reajustamos el índice de la suma:

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 - \sum_{n=2}^{\infty}(1-xq^2)\dots(1-xq^{n})x^{n+2}q^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)\dots(1-xq^{n})x^{n+3}q^{n+2}$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)\dots(1-xq^{n+1})x^{n+3}q^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)\dots(1-xq^{n})x^{n+3}q^{n+2}$$

Factorizamos ambas sumas y desarrollamos el término común:

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)(1-xq^3)(1-xq^4)\dots(1-xq^n)x^{n+3}q^{n+2}\left[(1-xq^{n+1})-1\right]$$
$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)(1-xq^3)(1-xq^4)\dots(1-xq^n)x^{n+4}q^{2n+3}$$

Para la suma y el término anterior, igualmente factorizamos por término común:

$$= 1 - x^2q - x^3q^2\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-xq^2)(1-xq^3)(1-xq^4)\dots(1-xq^n)x^{n+1}q^{2n+1}\right]$$

La suma que al momento tenemos, tras el desarrollo, es muy similar a la que en un inicio se tenía para $f(x,q)$, sólo que, en lugar de x, se tiene la expresión xq, entonces

$$= 1 - x^2q - x^3q^2\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-(xq)q)(1-(xq)q^2)(1-(xq)q^3)\dots(1-(xq)q^{n-1})(xq)^{n+1}q^{n}\right]$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2f(xq,q)$$

$$\Longrightarrow f(x,q) = 1 - x^2q - x^3q^2f(xq,q)$$

Si observamos con cuidado, no sólo se aprecia, como menciona Andrews en su artículo, "cómo en cada etapa las cosas parecen encajar mágicamente en el momento justo", sino que además se ve la forma empírica en que Euler hacía el desarrollo de $\mathcal{S}$ y la forma audaz de comparar y eliminar términos, mostrando además la manera repetitiva en que lo hacía, pero de una manera algebraicamente más formal. El resto de la prueba de Euler es casi mecánica, por lo que, continuando de esta forma repetida y recursiva, encontramos que:

$$f(x,q) = 1 - x^2q - x^3q^2f(xq,q) = 1 - x^2q - x^3q^2\left[1-(xq)^2q-(xq)^3q^2f(xq^2,q)\right]$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7f(xq^2,q)$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7\left[1-x^2q^5-x^3q^8f(xq^3,q)\right]$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7 - x^8q^{12} - x^9q^{15}f(xq^3,q)$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7 - x^8q^{12} - x^9q^{15}\left[1-x^2q^7-x^3q^{11}f(xq^4,q)\right]$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7 - x^8q^{12} - x^9q^{15} + x^{11}q^{22} + x^{12}q^{26}f(xq^4,q)$$

$$= 1 - x^2q - x^3q^2 + x^5q^5 + x^6q^7 - x^8q^{12} - x^9q^{15} + x^{11}q^{22} + x^{12}q^{26}\left[1-x^2q^9-x^3q^{14}f(xq^5,q)\right]$$

$$= \dots$$

Dada esta recurrencia, Andrews establece la siguiente expresión:

$$f(x,q) = 1 + \left[\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\left(x^{3j-1}q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j}q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\right)\right] + (-1)^n x^{3n-1}q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + (-1)^n x^{3n}q^{\frac{n(3n+1)}{2}}f(xq^n,q) \quad (1.19)$$

Comprobemos que esta expresión dada por Andrews es cierta, realizando inducción matemática sobre n.

Demostración:

· Base $n = 1$. Para la suma que está dentro del paréntesis, como el límitee superior es mayor que el límite inferior, ya que la suma correría desde $j = 1$ hasta 0, entonces su valor es 0, por lo que si sustituimos en el resto de la expresión $f(x, q)$, queda lo siguiente:

$f(x,q) = 1 + (-1)^1 x^2 q + (-1)^1 x^3 q^2 f(xq,q) = 1 - x^2 q - x^3 q^2 f(xq,q)$, lo cual es cierto por lo que hicimos anteriormente.

· Hipótesis de inducción. Supongamos que es válido para $n = k$, es decir,

$$f(x,q) = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} + (-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} f(xq^k, q)$$

P.D. Es válida para $n = k + 1$.

· Paso inductivo. Partimos de la hipótesis de inducción. Como $f(x,q) = 1 - x^2 q - x^3 q^2 f(xq,q)$, entonces sustituimos en $f(xq^k, q)$:

$$f(x,q) = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} + (-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} f(xq^k, q)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} +$$
$$+ (-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} \left[1 - x^2 q^{2k} q - x^3 q^{3k} q^2 f(xq^k q, q) \right]$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} +$$
$$+ (-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} \left[1 - x^2 q^{2k+1} - x^3 q^{3k+2} f(xq^{k+1}, q) \right]$$

Desarrollamos la multiplicación de $(-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}}$ con lo que se encuentra entre corchetes:

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$
$$+ (-1)^k x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} - (-1)^k x^{3k+2} q^{\frac{k(3k+1)}{2} + (2k+1)} - (-1)^k x^{3k+3} q^{\frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2)} f(xq^{k+1}, q)$$

Factorizamos $(-1)^k$ en los dos términos posteriores a la suma y desarrollamos lo que sigue:

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) + (-1)^k \left(x^{3k-1} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{3k} q^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right)$$
$$+ (-1)^{k+1} x^{3(k+1)-1} q^{\frac{k(3k)+k+4k+2}{2}} + (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} q^{\frac{k(3k)+k+6k+4}{2}} f(xq^{k+1}, q)$$

Dado el término posterior a la suma, reajustamos el último término de ella, hasta k, es decir, $(k + 1) - 1$, y reescribimos lo demás:

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right)$$
$$+ (-1)^{k+1} x^{3(k+1)-1} q^{\frac{k(3k)+2k+3k+2}{2}} + (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} q^{\frac{k(3k)+4k+3k+4}{2}} f(xq^{k+1}, q)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{(k+1)-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right)$$
$$+ (-1)^{k+1} x^{3(k+1)-1} q^{\frac{3k(k+1)+2(k+1)}{2}} + (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} q^{\frac{3k(k+1)+4(k+1)}{2}} f(xq^{k+1}, q)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{(k+1)-1} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right)$$
$$+ (-1)^{k+1} x^{3(k+1)-1} q^{\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}} + (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} q^{\frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}} f(xq^{k+1}, q)$$

Así, tras desarrollar la hipótesis de inducción y obtener esta expresión se cumple para $n = k + 1$.

Finalmente, si hacemos que $n \to \infty$, llegamos a que

$$f(x, q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right)$$

■

Podemos notar que, en los exponentes de q, aparece la forma de los números pentagonales. Con esto, se puede verificar que es el tipo de números que aparecen en el desarrollo del polinomio planteado por Andrews. Pero recordemos que esto sucede para la función definida por $f(x, q)$, que es una función más “general" (lo cual es un resultado aún más sorprendente y donde podríamos ahondar mucho más).

Regresemos a lo que nos atañe. Recordemos que el polinomio $\mathcal{S}$ aparece cuando tomamos $x = 1$. Si hacemos la sustitución en este último resultado encontrado, obtenemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^n) = f(1, q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}$$

De esta manera, se redescubre la prueba de Euler de una forma más sencilla en apariencia, pero sobre todo, de una manera que da lugar a comprender más cómo es que se obtiene cada término irreducible que deriva en los que contienen los números pentagonales. Se ha llegado a la esencia de las pruebas de Euler en sus diversos trabajos (de su teorema), pero adquiriendo un rigor algebraico mucho mayor. Se tiene una prueba que, si bien el teorema de los números pentagonales es sólo un caso particular de $f(x, q)$, muestra que el alma, la simpleza y belleza de las demostraciones de Euler, se presenta en una infinidad de funciones.

Por otro lado, Andrews hace notar que si ahora le damos el valor de -1 a x, nos queda que:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + q)(1 + q^2) \dots (1 + q^{n-1})(-1)^n q^n = f(-1, q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(x^{3j-1} q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + x^{3j} q^{\frac{j(3j+1)}{2}} \right)$$

De aquí se puede extraer una conclusión importante en cuestión de la teoría de particiones, que enunciaremos formalmente de la siguiente manera:

TEOREMA 3 (Teorema de Legendre). El producto $(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3) \dots (1 + q^{n-1})q^n$ representa, al desarrollarse, las distintas particiones de un entero positivo N en sumandos distintos donde el sumando más grande es n y el entero más grande para el que arroja su partición es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Es así que al hacer el desarrollo de la serie del producto de polinomios, se obtiene un término de la forma $\pm q^N$, donde el signo positivo se presenta si el sumando más grande es par, mientras que tiene signo negativo si el sumando mayor es impar. Con esta observación, fue que Nathan Jacob Fine derivó el siguiente teorema poco más de 118 años después de lo descubierto por Legendre.

TEOREMA 4. Sea n un entero positivo, $\pi_e(n)$ el número de particiones de n con sumandos distintos donde el más grande de ellos es par y $\pi_o(n)$ el número de particiones de n con sumandos distintos donde el más grande de ellos es impar, entonces:

$$\pi_e(n) - \pi_o(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \dfrac{3k^2+k}{2} \\ -1 & \text{si } n = \dfrac{3k^2-k}{2} \\ 0 & \text{si } n \neq \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \end{cases}$$

Visualicemos esto de mejor manera con un ejemplo. Tomemos el entero $n = 12$. Para este número, clasifiquemos sus particiones con distintos sumandos según la paridad del sumando más grande.

$\pi_e(12)$	$\pi_o(12)$
12	$11+1$
$10+2$	$9+3$
$8+4$	$9+2+1$
$8+3+1$	$7+5$
$6+5+1$	$7+4+1$
$6+4+2$	$7+3+2$
$6+3+2+1$	$5+4+3$
	$5+4+2+1$

Después de hacer el conteo, resulta que $\pi_e(12) - \pi_o(12) = 7 - 8 = -1$, mismo valor que se obtiene si aplicamos este teorema, dado que el 12 se puede expresar como $\frac{3[3(3)-1]}{2}$.

1.8. El triple producto de Jacobi y el teorema de los pentagonales.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1852), matemático nacido en Prusia, publicó y demostró en 1829, en el trabajo *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, un resultado que actualmente se le conoce como: **el triple producto de Jacobi**[7].

La finalidad de esta sección no es hacer una exposición de este resultado de Jacobi, más bien, lo requerimos para demostrar de otra manera el teorema de los números pentagonales. Para adentrarnos en el resultado de Jacobi, tendríamos que involucrarnos en las funciones elípticas y elementos de análisis complejo, lo cual está fuera del objetivo de este trabajo.

Esta identidad de Jacobi no es nada explícita si se trata de identificar qué es lo que representa, sin embargo, lo que sí es más accesible es observar algunas de sus aplicaciones o derivaciones y, entre ellas se encuentra posiblemente la demostración más corta y directa del teorema de los números pentagonales.

El enunciado del triple producto es el siguiente:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} z^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + zq^{2j-1})(1 + z^{-1}q^{2j-1})(1 - q^{2j}) \tag{1.20}$$

[7]La justificación del triple producto se encuentra en el apéndice A de este trabajo.

donde q y z son valores en el campo de los números complejos. Para poder decir que esta expresión se cumple, debemos condicionar a que $|q| < 1$, para así asegurar su convergencia. Si observamos el lado izquierdo de la igualdad, donde se encuentra la suma, lo primero que nos llega a la mente son las particiones, ya que el exponente de z^j representa la cantidad de sumandos para cada partición en las que se puede representar j^2, que es un número cuadrado. Si desarrollamos el lado derecho de la igualdad nos queda lo siguiente:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} z^j = \ldots + q^{(-n)^2} z^{\sum_{i=1}^{n} -2i+1} + \ldots + q^9 z^{-1-3-5} + q^4 z^{-1-3} + q^1 z^{-1} +$$
$$+1 + q^1 z^1 + q^4 z^{1+3} + q^9 z^{1+3+5} + \ldots + q^{n^2} z^{\sum_{i=1}^{n} 2i-1} + \ldots$$

Los únicos números para los que sobreviven las particiones son los números cuadrados, para los cuales solamente queda una sola partición. Intuitivamente, estas particiones sobrevivientes de los números resultantes tienen en sus sumandos únicamente números impares consecutivos, iniciando desde el primer impar. Por otra parte, para los demás números que no son cuadrados, las particiones se "eliminan entre sí".

Como refleja lo anterior, esta identidad es poderosa en la teoría de números, ya que nos puede dar la forma de representar gran cantidad de tipos de números en particular. Veamos algunos ejemplos:

· Si tomamos $z = 1$ en el Triple Producto de Jacobi, entonces obtendremos una representación de los cuadrados, dada por la siguiente función generadora, representada en el lado derecho de la igualdad que sigue:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{2j-1})^2 (1 - q^{2j})$$

· Si ahora hacemos $z = q$ y se toma $q^{1/2}$ en vez de q, entonces queda lo siguiente:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (q^{1/2})^{j^2} q^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q(q^{1/2})^{2j-1})(1 + q^{-1}(q^{1/2})^{2j-1})(1 - (q^{1/2})^{2j})$$
$$= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + qq^{\frac{2j-1}{2}})(1 + q^{-1} q^{\frac{2j-1}{2}})(1 - q^j) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^{\frac{2j+1}{2}})(1 + q^{\frac{2j-3}{2}})(1 - q^j)$$
$$\therefore \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{\frac{j(j+1)}{2}} = 2 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j)^2 (1 - q^j)$$

Los números obtenidos en este caso son los *números triangulares*. Así, bajo el producto del lado derecho de la igualdad tenemos una función generadora para los números triangulares.

De regreso al tema de nuestro interés, bajo un procedimiento análogo, enunciamos el teorema de los números pentagonales de Euler como un corolario del triple producto de Jacobi:

COROLARIO 1. $(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \ldots (1 - q^n) \ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \ldots$

Demostración:

Dado el triple producto de Jacobi, reemplazamos q por $q^{3/2}$ y z por $-q^{-1/2}$.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (q^{3/2})^{j^2} (-q^{-1/2})^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + (-q^{-1/2})(q^{3/2})^{2j-1})(1 + (-q^{-1/2})^{-1}(q^{3/2})^{2j-1})(1 - (q^{3/2})^{2j})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty} (q^{3/2})^{j^2} (-1)^j (q^{-1/2})^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - (q^{-1/2})(q^{3/2})^{2j-1})(1 - (q^{-1/2})^{-1}(q^{3/2})^{2j-1})(1 - (q^{3/2})^{2j})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{3j^2-j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{\frac{6j-3-1}{2}})(1-q^{\frac{6j-3+1}{2}})(1-q^{\frac{6j}{2}})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{3j^2-j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{3j-2})(1-q^{3j-1})(1-q^{3j})$$

Las sucesiones que se tienen del lado derecho de la igualdad, que son $\{3j-2\}_{j=1}^{\infty}$, $\{3j-1\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{3j\}_{j=1}^{\infty}$, conjuntan a todas las clases residuales del número 3, por lo que ellas representan a todos los enteros positivos.

$$\therefore \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{3j^2-j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)$$

■

La manera como consideramos a q y a z para sustituirlos en el producto de Jacobi es fundamental para obtener en el lado derecho de la igualdad, que es donde se encuentra la potencial suma que dará lugar a la forma de los exponentes, que es lo que se desea conocer del polinomio resultante. Para ver esto de una mejor forma retomaremos la definición de número poligonal que se abordó de manera más amplia en la sección 1.4. Es la siguiente.

DEFINICIÓN 4. Sea $l \geqslant 3$ el número de lados de un polígono y n un entero positivo. El n-ésimo *número poligonal* es de la forma $\dfrac{(l-2)n^2-(l-4)n}{2}$.

Dado este concepto, veamos cómo se puede obtener las particiones de este tipo de números, gracias nuevamente al triple producto de Jacobi. Si sustituimos $q^{\frac{l-2}{2}}$ en vez de q y $-q^{-\frac{l-4}{2}}$ en vez de z, tenemos que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(q^{\frac{l-2}{2}})^{j^2}(-q^{-\frac{l-4}{2}})^j = \prod_{j=1}^{\infty}(1+(-q^{-\frac{l-4}{2}})(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j-1})(1+(-q^{-\frac{l-4}{2}})^{-1}(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j-1})(1-(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(q^{\frac{l-2}{2}})^{j^2}(-1)^j(q^{-\frac{l-4}{2}})^j = \prod_{j=1}^{\infty}(1-(q^{-\frac{l-4}{2}})(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j-1})(1-(q^{-\frac{l-4}{2}})^{-1}(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j-1})(1-(q^{\frac{l-2}{2}})^{2j})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{(l-2)j^2-(l-4)j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{\frac{(2j-1)(l-2)-(l-4)}{2}})(1-q^{\frac{(2j-1)(l-2)+(l-4)}{2}})(1-q^{\frac{2j(l-2)}{2}})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{(l-2)j^2-(l-4)j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{\frac{(2j-1)(l-2)-(l-4)}{2}})(1-q^{\frac{(2j-1)(l-2)+(l-4)}{2}})(1-q^{j(l-2)})$$

Con esto podemos notar que el teorema de los números pentagonales resulta ser un caso particular si se toma $l=5$. Por lo tanto

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{3j^2-j}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)$$

Concluir de esta manera es sin duda el camino más corto y compacto por el que se puede demostrar el teorema de Euler que hemos trabajado, al derivarse de simples sustituciones en una identidad dada. Pero no se puede negar que en esta demostración se pierde la esencia del trabajo de Leonhard, en el cual se tiene la recurrencia, la infinidad de sucesiones de números, la forma de ir obteniendo términos irreducibles, de analizar la forma de estos, el por qué sólo sobreviven estos números y no otros, y por qué los que quedan lo hacen solamente con coeficientes ± 1, para llegar finalmente al polinomio irreducible resultante, que se seguía respetando y era la base de otras demostraciones. El trabajo con base en lo hecho por Jacobi es una forma de abordar el problema de manera muy distinta, desaparece todo rastro de intuición y de inspección para llegar al resultado final, quita todo detalle de lo ocurrido en el proceso y el comportamiento del polinomio original conforme avanzan las iteraciones, ya que se parte de una expresión general para obtener lo que se quiere como un simple caso particular, donde, a partir de la suma donde los exponentes son los números pentagonales, se muestra que se obtienen a partir de, quizás, uno de los productos de polinomios que primeramente se nos vendrían a la mente, por lo que sólo desde esta perspectiva podemos pensar que los números pentagonales se obtienen de la forma más armónica y concreta.

Aquí se parte del final al inicio, a diferencia de las formas previas. Si bien podemos señalar que la ventaja más importante (y quizás la única) que se gana así es la formalidad de la demostración, se pierden todas las ventajas que aporta Euler y que se van dando en el proceso de inspección.

Por otro lado, podemos señalar que la ventaja más importante (y quizás la única) que se gana así es la formalidad de la demostración, dado que se pierden todas las ventajas que aporta Euler y que se van dando en el proceso de inspección.

Para terminar esta parte, veamos otros resultados interesantes que se derivan del triple producto de Jacobi. El siguiente teorema nos mostrará lo que sucede con $\mathcal{S}^3$.

TEOREMA 4. Sea $|q| < 1$, entonces $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)^3 = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)q^{\frac{j(j+1)}{2}}$.

<u>Demostración:</u>

Dado el triple producto de Jacobi, si reemplazamos q por $q^{1/2}$ y z por $zq^{1/2}$, entonces lo que nos queda es:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(q^{1/2})^{j^2}(zq^{1/2})^j = \prod_{j=1}^{\infty}(1+(zq^{1/2})(q^{1/2})^{2j-1})(1+(zq^{1/2})^{-1}(q^{1/2})^{2j-1})(1-(q^{1/2})^{2j})$$

$$\implies \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1+zq^j)(1+z^{-1}q^{j-1})(1-q^j)$$

$$\implies \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} = (1+z^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+zq^j)(1+z^{-1}q^j)$$

$$\implies \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} q^{\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} = (1+z^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+zq^j)(1+z^{-1}q^j)$$

$$\implies \sum_{j=0}^{\infty}(z^j+z^{-j-1}) q^{\frac{j(j+1)}{2}} = (1+z^{-1})\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+zq^j)(1+z^{-1}q^j)$$

$$\implies \sum_{j=0}^{\infty}(z^j)\left(\frac{1+z^{-(2j+1)}}{1+z^{-1}}\right) q^{\frac{j(j+1)}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+zq^j)(1+z^{-1}q^j)$$

Finalmente, si tomamos el límite $z \to -1$, obtenemos lo deseado.

$$\therefore \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)^3 = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)q^{\frac{j(j+1)}{2}}$$

■

TEOREMA 5. Sea $|q| < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1-q^j}{1+q^j}$.

Demostración:

Dado el triple producto de Jacobi, si le damos a z el valor de -1, entonces tenemos que:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2}(-1)^j = \prod_{j=1}^{\infty}(1+(-1)q^{2j-1})(1+(-1)^{-1}q^{2j-1})(1-q^{2j})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j-1})(1-q^{2j-1})(1-q^{2j}) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j})(1-q^{2j-1})^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j}) \prod_{j\geqslant 1, impar}(1-q^j) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^j)^2}{(1-q^{2j})^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^j)^2}{(1-q^{2j})} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^j)^2}{(1-q^j)(1+q^j)}$$

$$\therefore \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{j^2} = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1-q^j}{1+q^j}$$

■

1.9. Ferrers y la intuición de las formas.

El teorema de los números pentagonales de Euler siempre nos condujo por la vía algebraica, por lo que los números de este tipo ya no se contemplaron de la manera figurada como en el contexto diofantino. Fue su representación algebraica la base del paradigma euleriano, como lo pudimos observar en secciones anteriores. Por otro lado, sabemos la estrecha relación entre los pentagonales y las particiones con una cantidad par o impar de sumandos de un entero positivo. Pensar que es posible desarrollar resultados matemáticos avanzados con el uso de elementos figurados como parte de la fundamentación del paradigma, en principio, es totalmente desechado, pero, a continuación, mostraremos otra manera de plantear el problema del teorema de los pentagonales bajo esta perspectiva.

Norman Ferrers (1829-1903) fue un matemático británico, quien planteó la representación de una partición de n a través de un diagrama que está formado de una matriz de puntos, con tantas filas como sumandos no nulos que tiene la partición de n. En cada fila, se encuentran tantos puntos como el valor que tiene cada sumando. A estas representaciones se les conoce como **diagramas de Ferrers** y a continuación presentamos la definición formal.

DEFINICIÓN 6. Dada la partición de un entero positivo n como $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m$, el **diagrama de Ferrers** asociado a la partición, es un arreglo geométrico con n vértices repartidos en m filas, donde la fila k tiene n_k vértices, con $k \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

La forma estándar de la gráfica para esta representación es con un orden descendente (o no ascendente) y con una alineación a la izquierda, teniendo así la fila más larga del diagrama de Ferrers en la parte superior, además de la columna con más vértices primero.

Figuras 5.1 y 5.2. Una partición del número 13 es $6+5+2$, que está dada por el diagrama de Ferrers de la figura 5.1, mientras que la figura 5.2 representa el diagrama de Ferrers para la partición $5+5+2+1$.

Esta representación de los sumandos ayuda a visualizar las particiones y puede proporcionarnos otras vías de modelación. En este contexto, si redistribuimos los vértices de otra manera, damos lugar a una partición distinta para el mismo número. En palabras formales, dada una partición con su respectivo diagrama de Ferrers, si transponemos sus vértices, es decir, intercambiamos las filas por las columnas a partir del orden original, generamos su **diagrama de Ferrers conjugado**, que es un arreglo equivalente a interpretar el diagrama verticalmente.

Para los ejemplos dados previamente, aquí mostramos los respectivos diagramas de Ferrers conjugados para las dos particiones del número 13:

Figuras 5.3 y 5.4. El diagrama conjugado de Ferrers de la partición $6+5+2$ está dado por $3+3+2+2+2+1$, que se muestra en la figura 5.3, mientras que la partición $4+3+2+2+2$ dada por el diagrama 5.4, representa al diagrama conjugado de $5+5+2+1$.

Para ver la utilidad de este concepto/operación, veamos las propiedades que siguen:

PROPIEDAD 1. El número k que indica la cantidad de sumandos de una partición de un entero positivo n, es a la vez el sumando más grande del diagrama conjugado de n.

<u>Demostración:</u>

Dado el diagrama de Ferrers de n con k sumandos, procedemos a tomar su conjugado (ver Figura 5.5). De esta forma, como k representa la cantidad de filas del diagrama original, ahora, para el diagrama conjugado representa al número de vértices de la primera fila, que es equivalente al sumando con la mayor cantidad de vértices. Es evidente que esta operación es reversible, por lo que se cumple la propiedad.

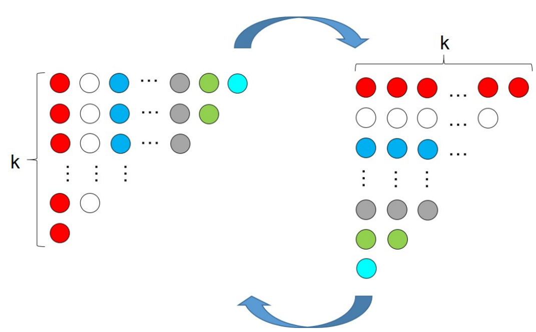


Figura 5.5. Existe una correspondencia uno a uno entre una partición del entero n con su conjugado, entonces, existe la misma cardinalidad.

■

PROPIEDAD 2. Sea $n > k$, una partición de un entero positivo n en k sumandos es equivalente a otra partición del entero $n-k$ en a lo más k sumandos.

<u>Demostración:</u>

Dado el diagrama de Ferrers de n con k sumandos, procedemos a eliminar todos los vértices de la primer columna (k en total), que es la que se encuentra más a la izquierda. Es así que se obtiene el diagrama de Ferrers para el entero $n-k$ (ver Figuras 5.6 y 5.7). Notemos que tenemos dos casos:

- Si el diagrama de n tiene m sumandos de valor 1, entonces estos se verán eliminados, ya que se encontrarían en la primer columna, por lo que después de quitarlos, restarán $k-m$ sumandos para el entero $n-k$.

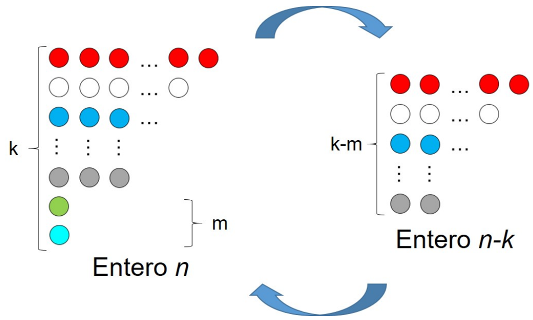


Figura 5.6. El proceso es reversible, por lo que para cada partición que tenga sumandos 1, se cumple la propiedad.

- Si el diagrama de n no tiene sumandos de valor 1, entonces, al hacer la eliminación de la columna, la cantidad de filas no cambiaría (Figura 5.7), ya que al menos cada fila tendría un vértice. De esta forma, el entero $n-k$ constará de k sumandos igualmente.

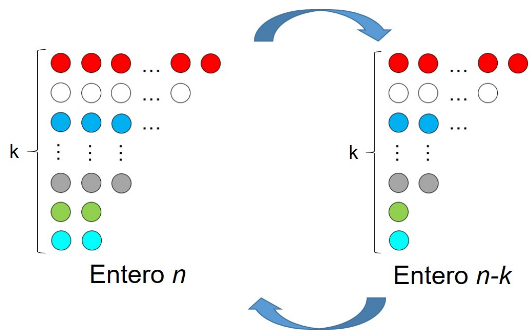


Figura 5.7. En este caso, tambien la correspondencia es uno a uno, por lo que la igualdad de cardinalidad se cumple.

■

Dentro de los diagramas conjugados, existen casos particulares en que el diagrama de Ferrers es igual a su diagrama conjugado. A este tipo de arreglos de le llama **diagrama de Ferrers autoconjugado**. La definición alternativa y formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 7. Dado el diagrama de Ferrers de un entero positivo n, se considera que es **autoconjugado** si la cantidad de vértices de su fila i es igual a la cantidad de vértices en su columna j, es decir, la cantidad de vértices en la fila i es igual a la cantidad de vértices en la columna j.

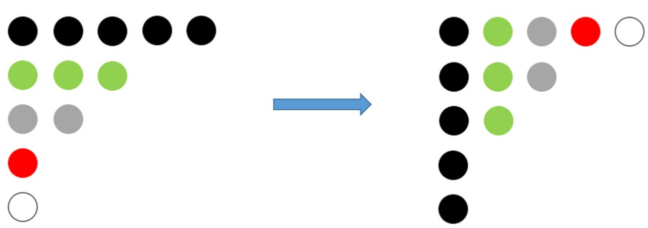


Figura 5.8. La partición $5+3+2+1+1$ del número 12 es un ejemplo de un diagrama de Ferrer autoconjugado.

Veamos a continuación un teorema relacionado con este concepto:

TEOREMA 5. La cantidad de particiones para un entero positivo n, donde cada sumando es impar, es igual a la cantidad de particiones del mismo número cuyos diagramas de Ferrers son autoconjugados.

Demostración:

Dado un diagrama de Ferrers autoconjugado de n con k sumandos, denotemos como (i, j) al vértice que se encuentra en la fila i y columna j. Ahora, procedemos a tomar los vértices (i, j) tales que $i > j$ y los trasladamos a la derecha del último vértice de la fila j según corresponda, es decir, estos vértices quedarán en la posición $(j, b_j + i - 1)$, donde b_j es el número de la columna en la que se encuentra el vértice más a la derecha de la fila j (ver Figura 5.9).

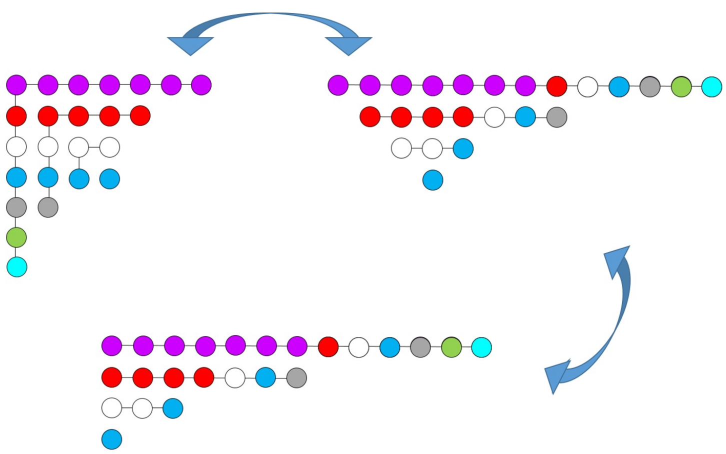


Figura 5.9. Después de hacer el proceso dado de traslado de vértices, la nueva partición para n tendrá $\frac{k+1}{2}$ sumandos, donde cada uno será impar. Este proceso es reversible, por lo que ambas cardinalidades coinciden.

Así, como originalmente la cantidad de vértices en la fila m es igual a la cantidad de vértices en la columna m, entonces, al momento de hacer el proceso previo, se tendrán dos veces la misma cantidad de vértices para el nuevo arreglo en la fila j, por lo que este número es par. Pero, con esto estamos contando dos veces los respectivos vértices de la diagonal (de la forma (j, j)), entonces la cantidad de vértices para cada sumando del nuevo diagrama es impar.

$\blacksquare$

Previo a los siguientes resultados enunciamos la siguiente notación:

Sea n un entero positivo, $p_k(n)$ representa la cantidad de particiones de n donde ninguno de sus sumandos excede a k

Sea n un entero positivo, $p(n, k)$ representa el número de particiones de n con exactamente k sumandos.

Sea n un entero positivo, $p_m(n, k)$ representa la cantidad de particiones de n, cada una con k sumandos donde ninguno de ellos excede a m.

TEOREMA 6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a > b > c$, entonces $p_c(a - c, b - 1) = p_b(a - b, c - 1)$, es decir, la cantidad de particiones del entero $a - c$ en $b - 1$ sumandos donde ninguno de ellos excede de c equivale a la cantidad de particiones del entero $a - b$ en $c - 1$ sumandos donde ninguno de ellos excede de b.

Demostración:

Sea el entero positivo $a - c$, sin pérdida de generalidad, consideremos el diagrama de Ferrers de una partición de $a - c$ con $b - 1$ sumandos, donde ninguno de ellos se excede de c (ver Figura 5.10). Enseguida, procedemos a adjuntarle una nueva fila de longitud c, la cual se debe colocar en la parte superior del diagrama, como se observa en la Figura 5.11.

Figuras 5.10. y 5.11. Tras agregar c vértices al diagrama de Ferrers original, nos resulta el diagrama de Ferrers que representa una partición del entero a en b partes, donde el sumando más grande de ellos es c.

Ahora, se toma el diagrama conjugado de éste para obtener la representación de una partición de a en c partes, de las cuales, ninguna excede a b, como se observa en la Figura 5.12. Finalmente, si le quitamos la fila superior a este conjugado, nos queda el diagrama de Ferrers de una partición del entero $a-b$ con $c-1$ filas, es decir, $c-1$ sumandos, donde ninguno es más grande que b (ver Figura 5.13). Por lo tanto $p_c(a-c, b-1) = p_b(a-b, c-1)$.

Figuras 5.12 y 5.13. Como no existe ninguna restricción dentro del proceso, entonces todas las operaciones son reversibles, por lo que la cardinalidad de ambos tipos de particiones es igual.

■

TEOREMA 7. Sean n, k enteros positivos tales que $n \geqslant k$, entonces $p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$, es decir, la cantidad de particiones del entero n en k sumandos es igual al número de particiones del entero $n-1$ en $k-1$ sumandos más el número de particiones del entero $n-k$ en k sumandos.

<u>Demostración:</u>

Consideremos una partición de n con k sumandos. Notemos que sólo se puede estar en uno y sólo uno de los siguientes casos:

- Contiene a 1 como sumando. Quitamos el sumando que contiene a la unidad. De esta forma, nos queda una partición con $k-1$ sumandos para el entero $n-1$.

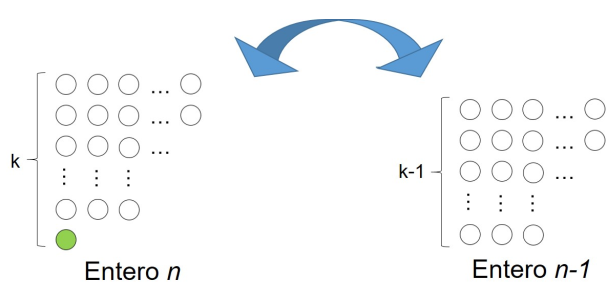


Figura 5.14. Esta operación es reversible, por lo que se tienen exactamente $p(n-1, k-1)$ particiones de n en esta clase.

- No contiene a 1 como sumando. Eliminamos los vértices de la primera columna del diagrama asociado a la partición, que son k en total. Por ende, obtenemos una partición con k sumandos para el entero $n - k$.

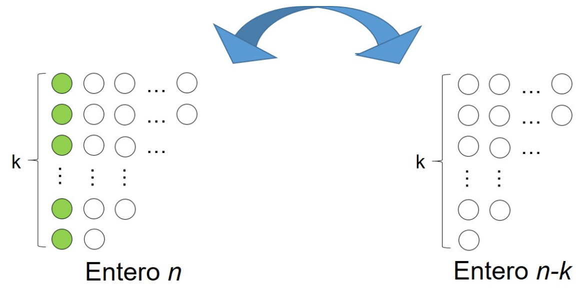


Figura 5.15. Como también es reversible esta operación, entonces se tienen exactamente $p(n-k,k)$ particiones de n.

$\therefore\ p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$

■

Para exponer una de las aplicaciones más sobresalientes de los diagramas de Ferrers, lo cual es el objetivo principal en este trabajo, requerimos definir algunos elementos. Llamamos *diagonal* al segmento de recta más largo de 45° que conecta el último vértice del primer renglón de un diagrama de Ferrers con otros puntos hacia esa dirección, o de manera equivalente, la recta "más a la derecha con dirección de noreste a suroeste".

Además, definimos dos operaciones A y B para estos diagramas, las cuales buscarán preservar la forma estándar de los diagramas de Ferrers y la diferencia entre sus sumandos:

• La operación A mueve los vértices de la última fila a una recta paralela a la diagonal, pasando a formar la nueva diagonal para el diagrama resultante, como se observa en la Figura 5.16.

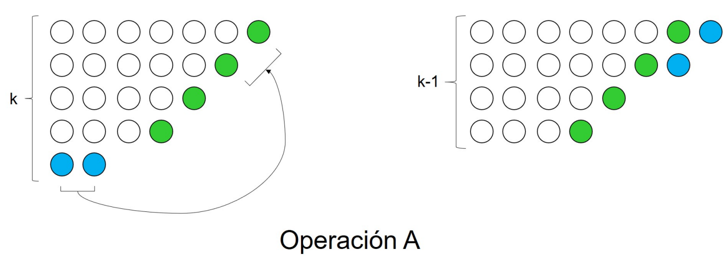


Figura 5.16. Al mover los vértices de la última fila, se obtendrá otra partición del número pero con un sumando menos.

• La operación B remueve los vértices de la diagonal y los coloca como un nuevo renglón, que se ubicará en la parte inferior, pasando a ser la última fila del diagrama que resulta, como se observa en la Figura 5.17.

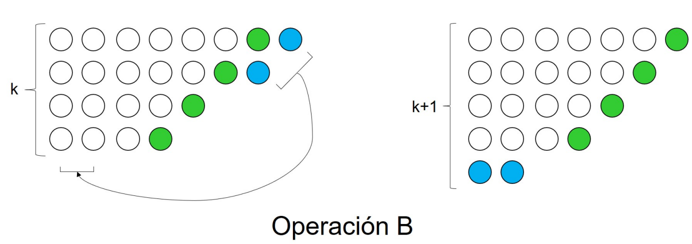
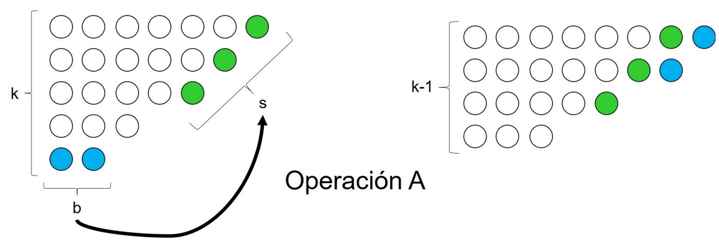
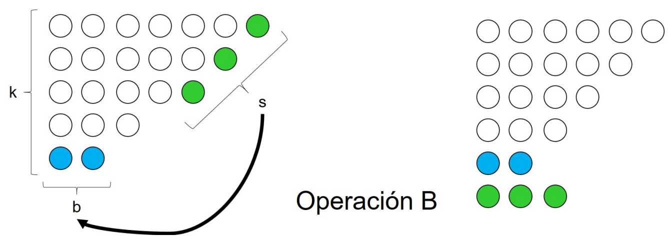


Figura 5.17. La operación B es la operación inversa de la operación A.

Tomando en cuenta que las funciones son *permisibles* si al aplicarlas, el diagrama resultante disminuye o aumenta una fila respectivamente, consideremos un entero positivo n y una partición de este con k sumandos distintos, que tendrá b vértices en la fila inferior y s vértices en la diagonal. Si comparamos b y s, tenemos los siguientes casos:

• Si $b < s$, entonces $b \leqslant s - 1$, es decir, la cantidad de vértices del sumando menor no puede exceder a la cantidad de vértices de la diagonal menos 1, por lo que podemos aplicar la operación A, pero no B, ya que el diagrama resultante no sería estándar. Así, esta nueva partición, como se observa en la Figura 5.18, tendría un sumando menos.

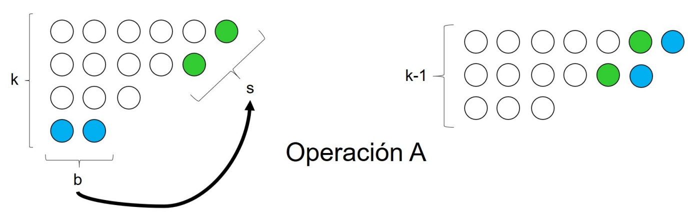


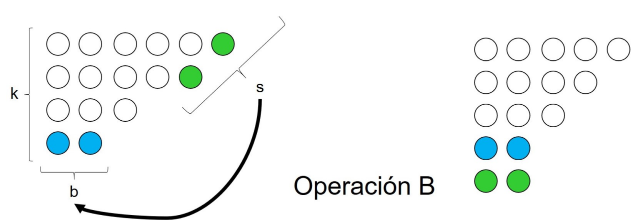


Figuras 5.18. y 5.19. La operación A es permisible pero B no lo es, dado que el primer sumando tendría más vértices que el segundo.

• Si $b = s$, entonces tenemos dos subcasos:

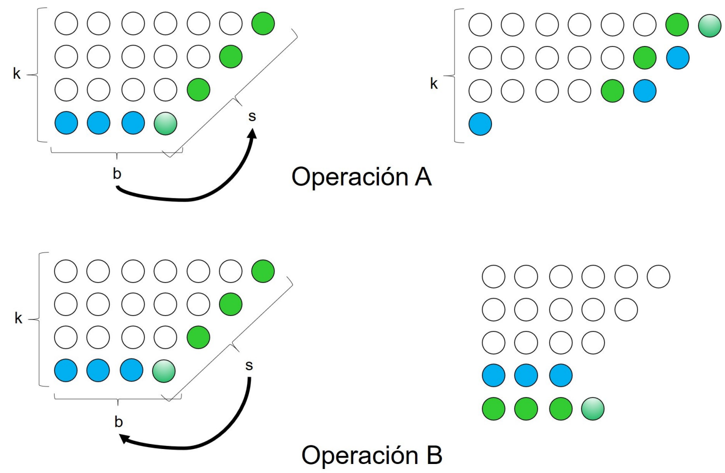
- Si $b < k$, entonces A es permisible, mientras que B no lo es. Así, igual que en el caso anterior, la nueva partición tendrá un sumando menos.





Figuras 5.20. y 5.21. Como el número de vértices del sumando más pequeño es menor que el número de sumandos, entonces la operación A es permisible, mientras que B no lo es, ya que los primeros dos sumandos tendrían la misma cantidad de vértices.

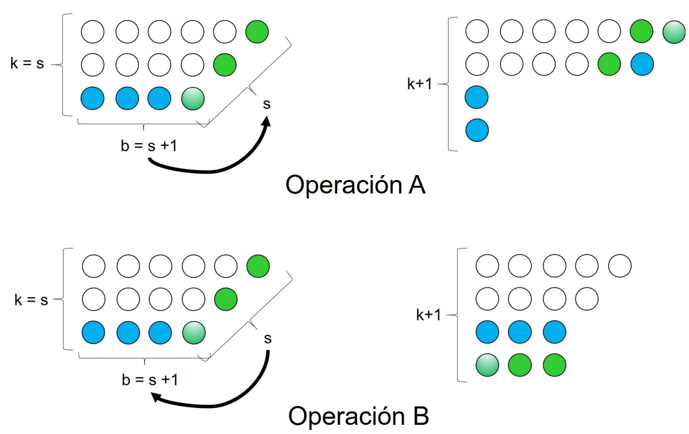
- Si $b = k$ entonces la base y diagonal se intersectan (ver Figuras 5.22. y 5.23.). Notemos que no podemos aplicar A, ya que nos resultaría una partición con la misma cantidad de sumandos, por lo que no sería permisible; mientras que tampoco podemos aplicar B porque el resultado no sería una representación estándar.



Figuras 5.22. y 5.23. Como coincide la cantidad de vértices del sumando menor, de vértices de la diagonal y de sumandos, entonces el último vértice forma parte de ambos elementos. Así, bajo la operación A, no se podrá eliminar la última fila, mientras que bajo la operación B, el primer sumando tendría más vértices que el segundo.

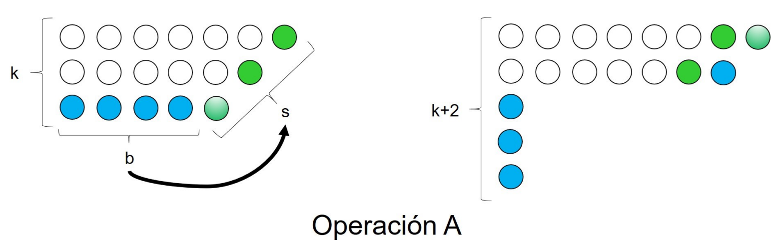
- Si $b > s$, nuevamente tenemos dos subcasos:

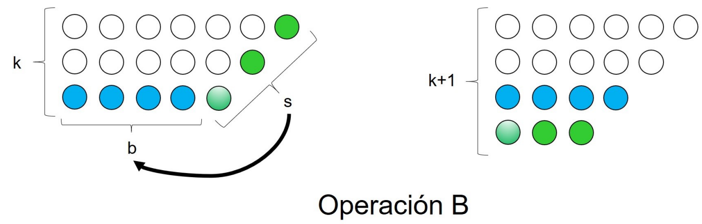
  - Si $b = s+1$, entonces $s = k$ y nuevamente la base y la diagonal se intersectan. Si aplicáramos A, nos resultaría una partición con dos sumandos repetidos (ambos 1), mientras que si aplicamos B, sucedería lo mismo que en el subcaso anterior. Por lo tanto, ninguna de las funciones A y B son permisibles.



Figuras 5.24. y 5.25. La cantidad de sumandos coincide con la cantidad de vértices de la diagonal, mientras que el sumando menor tiene un vértice más. Así, al aplicar cualquiera de las operaciones A o B, se tendrán dos sumandos iguales.

  - Si $b > s+1$, entonces $k < b$. Así, A no es permisible, puesto que no quedaría una gráfica estándar, no obstante, B si lo es, por lo que esta nueva partición resultante tendría un sumando más.





Figuras 5.26. y 5.27. La cantidad de sumandos coincide con la cantidad de vértices de la diagonal, mientras que el sumando menor tiene, al menos, dos vértices más. Así, al aplicar la operación A, se tendría al uno como sumando en tres ocasiones, mientras que al aplicar la operación B, el nuevo sumando tendría un vértice menos, lo cual la hace permisible.

Como vimos, hay dos casos en los que no se puede aplicar ninguna de las operaciones que definimos. Analicemos ambos y veamos qué números son los que se encuentran en ellos:

• Si $b = s = k$, entonces n tiene k sumandos y el primero es precisamente k, por lo que es de la forma

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (2k-1) = \frac{(2k-1)(2k)}{2} - \frac{(k-1)(k)}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}$$

• Si $s = k$ y $b = s + 1$, entonces n tiene k sumandos, donde el primero es $k + 1$, por lo que n es de la forma

$$n = (k+1) + (k+2) + (k+3) + \ldots + (2k) = \frac{(2k)(2k+1)}{2} - \frac{(k)(k+1)}{2} = \frac{3k^2 + k}{2}$$

En resumen, se hizo lo siguiente:

Se mostró una biyección entre los diagramas de Ferrers de un entero positivo n con un número par de sumandos, todos ellos distintos, con los diagramas de Ferrers de un entero positivo n con un número impar de sumandos, por lo que la cardinalidad es igual. Esto fue posible gracias a la admisibilidad de las funciones A y B según el caso. De esta manera, dada una partición de n en k sumandos distintos, podemos hacer una correspondencia uno a uno con una partición del mismo número pero con $k-1$ o $k+1$ sumandos distintos.

Recordamos que

$$\mathcal{S} := \prod_{j \in \mathbb{Z}^+} (1 - x^j)$$

Si visualizamos estas particiones trabajadas con Ferrers en el polinomio s, tendríamos que, dada una partición con un número impar de sumandos, que sería de la forma $x^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}$, se puede llegar a una con un número par de sumandos, que sería de la forma $x^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{k\pm1}}$ (el ± 1 según el caso). Como el signo es determinado por la cantidad de sumandos, entonces se tendría uno de ellos con signo positivo y el otro con signo negativo, por lo que ambos no aparecen en el polinomio irreducible (o lo hacen con coeficiente cero).

Por lo visto en el punto anterior, se tiene que no sobrevivirán los enteros positivos para los que no se puede tener esa biyección, para sus respectivos diagramas de Ferrers. Según lo que vimos, estos son los casos excepcionales, que son los llamados números pentagonales. Esto se debe a que, para este tipo de números, se tiene una partición extra, ya sea en sumandos pares o impares según el caso.

- Si k es par en $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, entonces se tiene una partición extra con cantidad par de sumandos. Así, esta partición quedaría representada en el término irreducible de s como $x^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}$ con signo positivo.

- Si k es impar en $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, entonces se tiene una partición extra con cantidad impar de sumandos. Así, esta partición quedaría representada en el término irreducible de s como $x^{n_1+n_2+n_3+\dots+n_k}$ con signo negativo.

Es así como F. Franklin demostró el teorema de los números pentagonales de Euler con ayuda de la teoría de los diagramas de Ferrers. Simplifiquemos lo hecho en un teorema con mayor formalidad.

TEOREMA 8. Sea n un entero positivo, $p_e(n)$ el número de particiones de n con un número par de sumandos distintos y $p_o(n)$ el número de particiones de n con un número impar de sumandos distintos, entonces:

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \\ (-1)^k & \text{si } n = \dfrac{3k^2 \pm k}{2} \end{cases}$$

De aquí, podemos reescribir el polinomio $\mathcal{S}$ como:

$$\prod_{j \in \mathbb{Z}^+} (1 - x^j) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))\, x^n \tag{1.21}$$

Podemos concluir que esta manera de demostrar el teorema de Euler es de fácil exposición, muy ingeniosa y con un gran alcance. Es el único proceso que no ha recurrido directamente al polinomio: ha transitado solamente con las particiones y ha mostrado cómo pasar de unas particiones a otras. Siendo rigoristas, quizás esta no es tan estricta como la que proviene del triple producto de Jacobi, pero sin dudas es la más amena de entender y de explicar el teorema, al no meterse con ningún procedimiento de recursividad. Por lo anterior, tampoco cuenta con el espíritu de Euler que se encuentra en sus formas de llegar al polinomio irreducible, tras no trabajar con la expresión polinómica, pero sin duda alguna, su gran ventaja es que se enfoca y trabaja en el verdadero núcleo del por qué el polinomio resultante es ese, es decir, las particiones, algo que quizás Euler no podía visualizar esquemáticamente de forma tan clara. Además, el hecho de manejar las particiones con diagramas vuelve todo el proceso más digerible, lo cual permite quizás no abarcar tanta notación y lenguaje matemático y mostrar que no se necesita tanto nivel de abstracción y complejidad para hacer más sencillo el problema y sin quitar formalismo.

Haciendo un balance entre el rigor y entendimiento respecto a la esencia y fondo del polinomio, e inclusive en lo ingenioso que es la forma de demostración, consideramos que es el mejor procedimiento a nivel general y más balanceado en todos estos aspectos.

Capítulo 2

La presencia del teorema de los números pentagonales.

A lo largo de este trabajo, exploramos que el teorema de los números pentagonales se gestó a partir del estudio de las particiones. Además, mostramos que existen varias formas de demostrar el teorema y cada una se nutre de paradigmas matemáticos que exhiben que no necesariamente se tiene que apegar con una interpretación vinculada a las particiones. Para terminar este trabajo de tesis, ahora mostramos que una de las formas más notables de usar nuevamente el teorema de los números pentagonales en el ámbito de las particiones es la propiedad recurrente para la forma de expresar las particiones de un número -con sumandos tanto diferentes como repetidos-, como se enuncia a continuación.

TEOREMA 9. Sea n un número entero positivo y $p(n)$ las particiones de un entero n, que admiten repetición en los sumandos, entonces

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \ldots$$

donde $p(k) = 0$ si $k < 0$ y $p(0) = 1$

Demostración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} = \frac{1}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n\right)\left[1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots + (-1)^k\left(q^{\frac{3k^2-k}{2}} + q^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots\right] = 1$$

$$\Longrightarrow \left[p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + \ldots + p(k)q^k + \ldots\right] \cdot$$
$$\left[1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots + (-1)^k\left(q^{\frac{3k^2-k}{2}} + q^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots\right] = 1$$

$$\Longrightarrow p(0) + (p(1) - p(0))q + (p(2) - p(1) - p(0))q^2 + (p(3) - p(2) - p(1))q^3 + \ldots +$$
$$+\left[p(n) - p(n-1) - p(n-2) + \ldots + (-1)^k\left(p(n - \tfrac{3k^2-k}{2}) + p(n - \tfrac{3k^2+k}{2})\right) + \ldots\right] q^n + \ldots = 1$$

Igualamos los coeficientes para cada término q^k.

$\cdot\ p(0) = p(1)$

$\cdot\ p(2) = p(1) + p(0)$

$\cdot\ p(3) = p(2) + p(1)$

$\dots$

$\cdot\ p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \ldots + (-1)^{k+1}\left(p(n - \frac{3k^2-k}{2}) + p(n - \frac{3k^2+k}{2})\right)$

$\therefore p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \ldots$

$\blacksquare$

Otro ejemplo de cómo interviene el teorema de los pentagonales está dado por el mismo Euler y también vinculado a procesos recursivos es el de la suma de los divisores de un número natural, lo que ahora conocemos como la función sigma. Para esto, veremos dos formas de demostrarse, ambas similares, pero desde ópticas distintas.

La primera forma es extraída de una comunicación con Goldbach[1]. En ella, Euler a partir de su expresión original, que denota por $\mathcal{S}$, es decir,

$$\mathcal{S} = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)etc.$$

nos muestra dos expresiones, de las cuales omite detalle de su aparición, al ser obvia su procedencia. Aún así, aquí mostraremos lo que realiza[2]. Primero, comienza con la expresión equivalente

$$\mathcal{S} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.$$

Posteriormente, prosigue con tomar el logaritmo, para tener que:

$$ln(\mathcal{S}) = ln\left[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots\right]$$

Después, realiza dos acciones distintas para la misma expresión. Por una parte, aplica solamente propiedades del logaritmo, mientras que por la otra, abusa de la certeza que tiene de la validez del teorema de los números pentagonales, para tener las expresiones siguientes:

$\cdot\ ln(\mathcal{S}) = ln(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{11} - x^{15} + x^{22} + \ldots)$

$\cdot\ ln(\mathcal{S}) = ln(1-x) + ln(1-x^2) + ln(1-x^3) + ln(1-x^4) + ln(1-x^5) + ln(1-x^6) + \ldots$

Ahora, para ambos casos, aplica derivación, obteniendo que:

$\cdot\ \dfrac{d\mathcal{S}}{\mathcal{S}} = \dfrac{-1dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.}$

$\cdot\ \dfrac{d\mathcal{S}}{\mathcal{S}} = -\dfrac{1dx}{1-x} - \dfrac{2xdx}{1-x^2} - \dfrac{3x^2dx}{1-x^3} - \dfrac{4x^3dx}{1-x^4} - \dfrac{5x^4dx}{1-x^5} - etc.$

[1]Ver página 6

[2]Euler abusa del teorema de los números pentagonales, asumiendo que se cumple (de lo que no tiene duda, pero que para ese momento, no presenta aún una demostración apegada a la formalidad).

Se factoriza el signo negativo en ambas derivaciones y se igualan ambos resultados, llegando a que:

$$\frac{1+2x-5x^4-7x^6+12x^{11}+15x^{14}-etc.}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+etc.}=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^3}+\frac{4x^3}{1-x^4}+\frac{5x^4}{1-x^5}+etc.$$

Si observamos el lado derecho de la igualdad, tenemos una infinidad de progresiones geométricas. Euler desarrolló cada una de las fracciones y las acomodó de la siguiente forma:

1	$+x$	$+x^2$	$+x^3$	$+x^4$	$+x^5$	$+x^6$	$+x^7$	$+x^8$	$+x^9$	$+x^{10}$	$+x^{11}$	$+etc.$
	$+2x$		$+2x^3$		$+2x^5$		$+2x^7$		$+2x^9$		$+2x^{11}$	$+etc.$
		$+3x^2$			$+3x^5$			$+3x^8$			$+3x^{11}$	$+etc.$
			$+4x^3$				$+4x^7$				$+4x^{11}$	$+etc.$
				$+5x^4$					$+5x^9$			$+etc.$
					$+6x^5$						$+6x^{11}$	$+etc.$
						$+7x^6$						$+etc.$
							$+8x^7$	$+9x^8$	$+10x^9$	$+11x^{10}$	$+12x^{11}$	$+etc.$
$+etc.$												

Notemos que en cada columna se encuentran como coeficientes los respectivos divisores del entero n, donde n es la columna, multiplicados cada uno por el factor x^{n-1}. Euler agrupó con respecto a este hecho, para llegar a la siguiente expresión:

$$1+\int 2x+\int 3x^2+\int 4x^3+\int 5x^4+\ldots=\frac{1+2x-5x^4-7x^6+12x^{11}+15x^{14}-22x^{21}-26x^{25}+etc.}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+etc.}$$

Si ahora se multiplica esta igualdad por el denominador de la parte derecha y se acomodan los términos de acuerdo con las potencias de x de un sólo lado de la igualdad, se tiene lo siguiente:

$0=$	$x\int 1$	$+x^2\int 2$	$+x^3\int 3$	$+x^4\int 4$	$+x^5\int 5$	$+x^6\int 6$	$+x^7\int 7$	$+x^8\int 8$	$+x^9\int 9$	$+x^{10}\int 10$	$+etc.$
		$-\int 1$	$-\int 2$	$-\int 3$	$-\int 4$	$-\int 5$	$-\int 6$	$-\int 7$	$-\int 8$	$-\int 9$	
			$-\int 1$	$-\int 2$	$-\int 3$	$-\int 4$	$-\int 5$	$-\int 6$	$-\int 7$	$-\int 8$	
						$+\int 1$	$+\int 2$	$+\int 3$	$+\int 4$	$+\int 5$	
								$+\int 1$	$+\int 2$	$+\int 3$	
										$\vdots$	
	-1	-2	$*$	$*$	$+5$	$*$	$+7$	$*$	$*$	$*$	$+etc.$

Dado que los coeficientes de las potencias de x fueron igualados a 0, se tiene que:

$\int 1 = 1$

$\int 2 = \int 1 + 2$

$\int 3 = \int 2 + \int 1$

$\int 4 = \int 3 + \int 2$

$\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5$

$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$

$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7$

$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$

$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$

$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$

etc.

Con este proceso, obtiene el resultado que se desea, es decir, que

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \ldots$$

Esta demostración de Euler apela a la forma de demostrar que ha expuesto en todo lo referente a particiones y al teorema de los números pentagonales, por lo que sigue acudiendo a la recurrencia. Para la segunda forma de mostrar esta importante consecuencia, nos basaremos en el trabajo publicado en el *Demonstratio theorematis*, pero con una visión más moderna. Es por eso que empezaremos desde la construcción de la función generadora para la suma de divisores para la posterior justificación de su teorema, pero ya bajo la actual notación y matemática.

DEFINICIÓN 7. Sea n un número entero positivo, $\sigma(n)$ representa la suma de los divisores positivos de n.

En el artículo, se propone la construcción de la siguiente serie:

$$\mathcal{Z} := x\sigma(1) + x^2\sigma(2) + x^3\sigma(3) + x^4\sigma(4) + \ldots + x^k\sigma(k) + \ldots$$

Si desarrollamos cada una de las $\sigma(k)$ y agrupamos con respecto a las potencias de x, reescribiríamos a $\mathcal{Z}$ como:

$$\mathcal{Z} = 1(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) + 2(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots) + 3(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots) + \ldots +$$

$$+k(x^k + x^{2k} + x^{3k} + x^{4k} + \ldots) + \ldots$$

Podemos notar que en cada término de $\mathcal{Z}$, se encuentra el coeficiente k multiplicado por las potencias de x donde sus exponentes son múltiplos de k. Este factor es a su vez también una serie para cada uno de ellos, más específicamente una serie geométrica. Así, podemos nuevamente reescribir a $\mathcal{Z}$ como:

$$\mathcal{Z} = 1\left(\frac{x}{1-x}\right) + 2\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + 3\left(\frac{x^3}{1-x^3}\right) + \ldots + k\left(\frac{x^k}{1-x^k}\right) + \ldots$$

$$\therefore \mathcal{Z} := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$$

Dado esto, ya podemos establecer el teorema.

TEOREMA 10. Sea n un número entero positivo, entonces

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2)\sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) + \ldots$$

donde $\sigma(k) = 0$ si $k < 0$ y $\sigma(0) = k$.

<u>Demostración:</u>

Dada la función $\mathcal{Z}$, y como $\mathcal{Z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$, entonces $\frac{\mathcal{Z}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$.

Ahora, integramos de ambos lados de la igualdad con respecto a x.

$$\int \frac{\mathcal{Z}dx}{x} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} dx$$

Usamos el cambio de variable $u = 1 - x^n$, por lo que $du = -nx^{n-1}\ dx$.

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathcal{Z}dx}{x} = -\int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du}{u} = -\sum_{n=1}^{\infty} ln(u)$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathcal{Z}dx}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} ln(1-x^n) = -ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathcal{Z}dx}{x} = -ln\left[1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots + (-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots\right]$$

Ahora, procedemos a derivar ambos lados de la igualdad.

$$\Longrightarrow \frac{\mathcal{Z}}{x} = -\frac{-1 - 2x + 5x^4 + 7x^6 + \ldots + (-1)^k\left(\frac{3k^2-k}{2}x^{\frac{3k^2-k}{2}-1} + \frac{3k^2+k}{2}x^{\frac{3k^2+k}{2}-1}\right) + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \ldots + (-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{Z} = -\frac{-x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 + \ldots + (-1)^k\left(\frac{3k^2-k}{2}x^{\frac{3k^2-k}{2}} + \frac{3k^2+k}{2}x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \ldots + (-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots}$$

$$\Longrightarrow (x\sigma(1) + x^2\sigma(2) + x^3\sigma(3) + \ldots + x^k\sigma(k) + \ldots)\cdot$$

$$\left(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + \ldots + (-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots\right)$$

$$= x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} + \ldots + (-1)^{k+1}\left(\frac{3k^2-k}{2}x^{\frac{3k^2-k}{2}} + \frac{3k^2+k}{2}x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots$$

$$\Longrightarrow \sigma(1)x + (\sigma(2) - \sigma(1))x^2 + (\sigma(3) - \sigma(2) - \sigma(1))x^3 + (\sigma(4) - \sigma(3) - \sigma(2))x^4) + \ldots$$

$$= x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} + \ldots + (-1)^{k+1}\left(\frac{3k^2-k}{2}x^{\frac{3k^2-k}{2}} + \frac{3k^2+k}{2}x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right) + \ldots$$

Al igualar los coeficientes para cada término x^k, tendremos que:

$\cdot\ \sigma(1) = 1$

$\cdot\ \sigma(2) = \sigma(1) + 2 = \sigma(1) + \sigma(0)$

$\cdot\ \sigma(3) = \sigma(2) + \sigma(1)$

$\cdot\ \sigma(4) = \sigma(3) + \sigma(2)$

$\ldots$

$\cdot\ \sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \ldots + (-1)^{k-1}\left(\sigma(n - \frac{3k^2-k}{2}) + \sigma(n - \frac{3k^2+k}{2})\right)$

$$\therefore \sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2)\sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) + \ldots$$

■

Lo último que se presentó, la función particiones y la de suma de divisores, nos permite percibir que el teorema de los números pentagonales ya pudo adquirir una dimensión superior, y por otro lado, se redondea, de alguna forma, todo el desarrollo iniciado a partir de Euler, quien en sus esbozos e inicios, desde sus primeras comunicaciones con distintos personajes, tenía en mente el enfoque del teorema dentro de un contexto de las particiones.

A lo largo de todo el tiempo de maduración de cómo se dieron los resultados, son notorios los distintos alcances y el análisis desde diversas perspectivas. A pesar de ello, el teorema nunca perdió la esencia de su origen, que fueron las particiones. Este problema, en particular, es un fiel reflejo de cómo se van consolidando los paradigmas de las matemáticas, dentro de un marco de la evolución de la ciencia. Paso a paso se va logrando un formalismo excepcional para llegar a una afirmación que comenzó con esbozos muy intuitivos.

Gracias a la propia evolución de las matemáticas, de los nuevos conceptos desarrollados y descubiertos; las distintas épocas, personajes y visiones, así como el rigor de estas en las pruebas que se requerían para considerar como válida una demostración,.el problema pudo ser abordado de tal modo que tuvo más alcances y se encontraron dentro de estos desarrollos diferentes propiedades, no sólo para el propio caso del teorema, sino también para otros resultados y campos.

Podríamos decir que la demostración más ajena del problema es la atribuida a Jacobi y su triple producto, al no verse el teorema como el punto principal, sino como un caso particular. Sin embargo, esto nos deja como muestra que un problema se puede apreciar y demostrar desde diferentes ramas de las matemáticas y no que éste tenga que ser el punto de partida, y que el lugar que ocupe en el proceso matemático pueda ser un corolario o algo semejante.

Apéndice A

El triple producto de Jacobi.

Sean $q, z \in \mathbb{C}$ tal que $|q| < 1$, la identidad del triple producto de Jacobi está dada por

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} z^j = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + zq^{2j-1})(1 + z^{-1}q^{2j-1})(1 - q^{2j})$$

Enseguida presentamos la ruta básica de la demostración. Para ello, establecemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $(q)_0 = 1$ y $(q)_n = \prod_{j=1}^{n}(1 - q^j)$, el **coeficiente q-binomial** o **coeficiente de Gauss** está dado por la función racional

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}$$

Esta expresión es la q-análoga del coeficiente binomial para el caso cuando $n \to 1$, ya que

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \lim_{q\to 1} \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} = \lim_{q\to 1} \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q^{n-1})(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{k-1})(1-q^k)\cdot(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-k-1})(1-q^{n-k})}$$

Como para la serie geométrica $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$, se tiene que

$$(1 - q^n) = (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1})(1 - q)$$

sustituimos para cada término que se multiplica. Observemos, antes de eso, que tendremos n términos de $(1 - q)$ en el numerador como en el denominador (k y $n - k$), por lo que, estos no los incluimos al sustituir.

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1+q+\ldots+q^{n-1})\ldots(1+q+q^2)(1+q)}{(1+q+\ldots+q^{k-1})\ldots(1+q+q^2)(1+q)(1)\cdot(1+q+\ldots+q^{n-k-1})\ldots(1+q+q^2)(1+q)}$$

En cada término donde aparece q, se tendrá que el límite en él tiende a 1, por lo que, quedará lo siguiente:

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(n)\ldots(3)(2)(1)}{(k)\ldots(3)(2)(1)\cdot(n-k)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Los q-análogos tienen propiedades análogas a las de los coeficientes binomiales, donde $\binom{n}{k}$ son enteros y $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ son polinomios en términos de q.

Igualmente, se puede establecer el resultado q-análogo al del teorema del binomio, es decir, a la igualdad

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

donde $n \geqslant 1$, que se enuncia de la siguiente manera:

TEOREMA. Sea $n \in \mathbb{Z}$, x y q variables independientes, entonces

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k$$

Al sustituir el coeficiente análogo, reescribimos el enunciado del teorema como

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \tag{A.1}$$

Si hacemos que $n \to \infty$, se deduce que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q)_k} x^k$$

Con base en este resultado, se obtiene que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(q)_m} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^{k-1})} \tag{A.2}$$

Si retomamos (A.1) y reemplazamos q por q^2, la expresión queda como

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{2k-2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)}}{(q^2)_k} x^k \tag{A.3}$$

Y ahora, sustituimos x por xq, llegamos a que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{2k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q^2)_k} x^k \tag{A.4}$$

Aquí ya aparece uno de los factores del triple producto, que es el que se encuentra del lado izquierdo de la igualdad.

Ahora, del recíproco de $(q^2)_k = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-(q^2)^j\right)$, se obtiene que

$$\frac{1}{(q^2)_k} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})} \cdot \frac{(1-q^{2k+2})(1-q^{2k+4})(1-q^{2k+6})\dots}{(1-q^{2k+2})(1-q^{2k+4})(1-q^{2k+6})\dots} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-q^{2m+2k}}{1-q^{2m}}$$

Así, al sustituir esta igualdad de $\frac{1}{(q^2)_k}$ en (A.4), se tiene que:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{2k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-q^{2m+2k}}{1-q^{2m}} q^{k^2} x^k$$

$$\implies \prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1}) = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2m}}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k$$

Considerando que para $k<0$, $\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})=0$, podemos reescribir lo anterior como

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k})q^{k^2}x^k \tag{A.5}$$

Notemos que en el lado izquierdo de esta igualdad, ya aparece un segundo factor del triple producto.

Ahora, si regresamos a (A.3) y sustituimos x por $-q^{2k+2}$, nos queda que

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2k+2}q^{2m-2}) = \sum_{l=0}^{n}\frac{q^{l(l-1)}}{(q^2)_l}\left(-q^{(2k+2)(l)}\right)$$

$$\implies \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m+2k}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{q^{l^2+l+2kl}}{(q^2)_l}$$

Y sustituyendo esta igualdad en (A.5), llegamos a que:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}x^k\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{q^{l^2+l+2kl}}{(q^2)_l} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-q)^l q^{(k+l)^2}}{(q^2)_l}x^k\cdot\frac{x^l}{x^l}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{(k+l)^2}x^{k+l}\right)\frac{(-\frac{q}{x})^l}{(q^2)_l}$$

$$\implies \prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-q}{x}\right)^l}{(q^2)_l}\right) \tag{A.6}$$

Retomemos a (A.2) para sustituir q en vez de q^2, para posteriormente reemplazar x por $-\frac{q}{x}$, resultando que

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-q}{x}\right)^l}{(q^2)_l} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^{-1}q^{2m-1})}$$

Reemplazando en (A.6), obtenemos que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1-q^{2k}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}x^k\right)\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^{-1}q^{2m-1})}\right)$$

Finalmente, si unificamos la notación de los índices, tanto de los productos como de la suma, además de multiplicar por $\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^{-1}q^{2m-1})}$, nos queda el triple producto de Jacobi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}z^k = \prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^{2k-1})(1+x^{-1}q^{2k-1})(1-q^{2k})$$

Bibliografía

[1] Andrews, George E. (1976). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications Vol 2. The Theory of Partitions. Massachussetts: Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Andrews, George E. (1983). Euler's Pentagonal Number Theorem. Mathematics Magazine, Vol. 56 No. 5, 279-284.

[3] Andrews, George E. (1971). Number Theory. Estados Unidos: W. B. Saunders Company.

[4] Apostol, Tom M. (1976). Introduction to Analytic Number Theory. Estados Unidos: Springer-Verlag.

[5] Chan, Heng Huat. (2020). Theta functions, elliptic functions and π. National University of Singapore: De Gruyter.

[6] Euler, Leonhard. (1741). Various analytical observations about combinations (E158). *Comentarios de la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo*. Traducción de Jordan Bell. pp. 24-25.

[7] Euler, Leonhard. (1760). A demonstration of a theorem on the orden observed in the sums of the divisors (E244). Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae, pp. 75-83.

[8] Euler, Leonhard. (1783) De Mirabilis Propietatibus Numerorum Pentagonalium. Publicado en: Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae. Pp. 56-75. Existe una traducción al inglés de Jordan Bell, "On the remarkable properties of the pentagonal numbers" 2005.

[9] Euler, Leonhard. (1783). Expansion of the infinite product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ etc. into a simple series. Acta Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae, pp. 47-55.

[10] Euler, Leonhard. (1988). Introduction to Analysis of the Infinite Book I. New York: Springer-Verlag. (traducción John D. Blanton).

[11] Franklin, F. (1881). Sur le developpement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.... Comptes Rendus, 82, pp. 448-450.

[12] Hardy, G. H.(1975). An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Oxford University Press.

[13] Grosswald, Emil. (1984). Topics from the Theory of Numbers. Pennsylvania: Birkhäuser.

[14] Gupta, Hansraj. (1980). Selected Topics in Number Theory. Inglaterra: Abacus Press.

[15] Juškevič, A. P. y Winter, E. 1965. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764. Berlin: Akademie-Verlag.

[16] Legendre, Adrien-Marie. (1830). Théorie des nombres Tome II. París: Chez Firmin Didot Frères, Libraires.

[17] Lewis, R. P. (Agosto-Septiembre 2024). A Combinatorial Proof of the Triple Product Identity. The American Mathematical Monthly, Vol. 91, No. 7, 420-423.

[18] Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning, Induction and Analogy in Mathematics: Princeton.

[19] Tattersall, James J. (1999). Elementary Number Theory in Nine Chapters. New York: Cambridge University Press.