Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Análisis espectral de procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Emiliano Labastida Oropeza

TUTOR

Manuel Domínguez de la Iglesia

Cd. Mx. 2023

Índice general

Agradecimientos

Primero que nada me gustaría agradecer a mis padres a quienes me han dado todo su amor y apoyo durante toda mi vida, sin ellos, sin sus enseñanzas, jamás habría podido lograr todo lo que he logrado hasta ahora. También por supuesto a mis abuelas, a quienes siempre he admirado como personas y quienes me escucharon y alentaron cuando más lo necesitaba. A mi hermano Cristóbal, por que siempre encuentra la manera de hacernos reir a todos en el hogar y quien siempre me inspira a ser más fuerte independiente.

Asímismo, me gustaría también dedicar algunas palabras de agradecimiento a mis amigos Gerardo y a Daniel, en quienes se que siempre puedo confiar para todo y sé que siempre van a estar a mi lado para enfrentar todos los retos de la vida que lleguen, así como a todos las demás amistades que he formado a través de los años y con quienes he crecido y convivido, con quienes he reído y llorado, gracias por todos los momentos que hemos pasado juntos y ojalá formemos muchos más momentos.

Una de las personas con quien también estoy sumamente agradecido es con mi asesor de tesis, el Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia, a quien conocí en el tercer semestre de mi carrera y fue un excelente profesor, tanto así que es por sus clases que hoy tengo ese amor y curiodidad por la probabilidad y la estadística que tengo hoy en día y más aún, como mi asesor de tesis siempre me apoyó, orientó y presionó lo justo para poder terminarla y se que sin él jamás lo habría logrado.

Por supuesto a mi sinodales por su paciencia e interés, además de tomarse el tiempo de revisar mi tesis y apoyarme con sus correciones y asesoramiento.

A la UNAM, que por 7 años, bachillerato y universidad, me dió muchas oportunidades de crecimiento y de desarrollo profesional y personal, donde además conocí a muchas personas magníficas que aún me acompañan hoy en día.

Finalmente, por supuesto también a las becas de PAPIIT y del CONACYT que con el apoyo económico que me proporcionaron pude dedicar tiempo a mi titulación y nos ayudaron a salir de varios problemas económicos que tuvimos mi familia y yo en esos tiempos.

Introducción

La conexión entre procesos estocásticos, funciones especiales y polinomios ortogonales data de la década de 1930, cuando N.Wiener y despúes K. Itō estudiaron la conexión entre los polinomios de Hermite y la teoría de integración con respecto al movimiento Browniano. En la década de 1950 muchos autores como M. Kac, E. Hille, W. Feller, H.P. McKean, J.F. Barrett, S. Karlin y J. McGregor [15–22] establecieron una conexión importante entre las funciones de probabilidad de transición de procesos de difusión, procesos de nacimiento y muerte a tiempo continuo y cadenas de nacimiento y muerte a tiempo discreto (en este orden) mediante una representación espectral. En los años siguientes se desarrollaron aún más estas relaciones, encontrando conexiones con otros procesos estocásticos como matrices aleatorias, sistemas de Sheffer, procesos de Lévy, teoría de integración estocástica o el método de Stein.

El objetivo de esta tesis es estudiar los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal [18] mediante el uso del análisis espectral, así como introducir sus principales propiedades y teoremas, además de fórmulas explícitas para poder calcular sus funciones generadoras y probabilidades. Al final también daremos algunos resultados sobre procesos de nacimiento y muerte con crecimiento cuadrático. Con esta finalidad se seccionó la tesis en tres capítulos.

El Capítulo 1 está dedicado a preliminares, donde introduciremos herramientas, definiciones y teoremas esenciales para la comprensión del análisis que se realizará a lo largo del texto. Algunos de los teoremas más importantes que veremos aquí son el Teorema de Favard y el Teorema de Markov, así como aquel que resulta en la llamada fórmula de representación de Karlin-McGregor. Comenzaremos este capítulo con una introducción a los polinomios ortogonales, donde enunciaremos las principales propiedades y fórmulas de las familias clásicas de polinomios ortogonales y de los polinomios continuos duales de Hahn. Después hablaremos de los procesos de nacimiento y muerte, donde presentaremos la fórmula de representación de Karlin-McGregor junto con su demostración. Definiremos también los conceptos de recurrencia y absorción, junto con teoremas que permiten identificar estas propiedades. En esta sección introduciremos también los conceptos de polinomios asociados y polinomios duales. En la tercera sección de este capítulo hablaremos brevemente acerca de las funciones hipergeométricas confluentes, particularmente de la función de Tricomi y de la función del cilindro parabólico que serán de utilidad en el Capítulo 3. Finalmente utilizaremos una última sección para platicar brevemente sobre la relación que existe entre los procesos de nacimiento y muerte y la teoría de colas, y mencionaremos además como ajustar modelos de colas de nacimiento y muerte a datos.

En el Capítulo 2 realizaremos un análisis espectral de los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal. Para esto, nos centraremos en los modelos propuestos por S. Karlin y J. McGregor en [18], los cuales están asociados a polinomios de Laguerre y de Meixner. Estos procesos de nacimiento y muerte se caracterizan por tener tasas de nacimiento y muerte con crecimiento lineal y son útiles para modelar, por ejemplo, la reproducción biológica y el crecimiento de una población o el balance de una cuenta bancaria. Comenzaremos por determinar las relaciones de recurrencia, tasas de nacimiento y muerte, operadores infinitesimales y coeficientes potenciales de los modelos, para después estudiar su recurrencia junto con otras propiedades particulares de algunos de estos modelos. Lo siguiente será calcular sus funciones generadoras y probabilidades de forma explícita, mediante manipulaciones de la función generadora correspondiente. Otros conceptos interesantes que estudiaremos serán el número de transiciones hasta la absorción y la distribución de recurrencia y los procesos asociados. Finalizaremos este capítulo con una breve discusión del modelo de Ehrenfest, que tiene la peculiaridad de tener coeficientes lineales, pero su espacio de estados es finito.

En el Capítulo 3 realizaremos un análisis espectral de otros procesos de nacimiento y muerte, particularmente revisaremos otros procesos con crecimiento lineal y algunos procesos de nacimiento y muerte con crecimiento cuadrático, para dar un panorama más completo. Estudiaremos primero los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal basados en dos nuevos modelos propuestos por M. Ismail, J. Letessier y G. Valent en [11]. Para estos nuevos modelos buscaremos primero determinar funciones generadoras para poder encontrar después sus medidas espectrales mediante las transformadas de Laplace y de Stieltjes. Finalizaremos el estudio de estos modelos encontrando representaciones explícitas de sus funciones generadoras, junto con algunos resultados importantes que encontraron R. Askey y J. Wimp en [2]. Y para terminar el estudio de otros procesos con crecimiento lineal, discutiremos brevemente cuatro modelos más propuestos por M. Ismail, J. Letessier y G. Valent en [11], dos de los cuales resultan estar conectados a polinomios de Meixner asociados y dos a polinomios de Charlier asociados. En cuanto a los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento cuadrático, tomaremos como referencia los dos modelos propuestos por M. Ismail, J. Letessier y G. Valent en [12]. Estos modelos proveen dos generalizaciones de los polinomios continuos duales de Hahn. Para estos modelos determinaremos primero sus funciones generadoras, para después encontrar sus medidas espectrales mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes y finalmente encontrar fórmulas explícitas para los polinomios así como unas fórmulas de transformación para los mismos.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo presentaremos las definiciones y teoremas esenciales a aplicar a lo largo de la presente tesis. Comenzaremos con una breve introducción a los polinomios ortogonales, enunciando primero algunas definiciones importantes y después introduciremos a las familias clásicas de polinomios ortogonales (tanto de variable continua como de variable discreta) y mencionaremos algunas de sus propiedades más importantes. Veremos que en el caso cuando la variable es continua surgen las familias de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (para estos últimos nos enfocaremos en los casos particulares de los polinomios ultraesféricos y de Chebychev), mientras que cuando la variable es discreta surgen las familias de polinomios de Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn. Otros polinomios importantes que aparecerán a lo largo del trabajo (y que introduciremos también en este capítulo) son los polinomios continuos duales de Hahn, que no pertenecen a las familias clásicas de polinomios ortogonales.

Después hablaremos sobre los procesos de nacimiento y muerte, donde trataremos algunas de sus principales propiedades y clasificaciones, además de mencionar a los k-ésimos polinomios asociados y finalmente una sección para introducir las propiedades de recurrencia y absorción.

Dedicaremos también una sección de este capítulo a las funciones hipergeométricas confluentes, particularmente a la función de Tricomi y a la función del cilindro parabólico, donde nuevamente mencionaremos algunas de las propiedades más importantes y a utilizar en los siguientes capítulos.

Finalizaremos el capítulo con alugnos ejemplos de modelos de colas de nacimiento y muerte acompañados de algunos resultados relevantes de los mismos, además de mencionar como ajustar modelos de colas de nacimiento y muerte a datos, esto siguiendo los pasos de W. Whitt en [34] y R.W. Wolff en [35], al final de este capítulo se incluye también una tabla con los resultados obtenidos por O.J. Otonritse basados en medidas de desempeño estable ([27]) para los modelos $M/M/1$, $M/M/s$, $M/M/1/k$ y $M/M/s/k$. Este capítulo está basado en las referencias [3, 4, 8, 17, 18, 27, 30, 31, 34, 35].

1.1. Polinomios Ortogonales

La *función Gamma* (denotada como $\Gamma(z)$) es una función valuada en los números complejos que extiende el dominio de la función factorial. Se define mediante la representación integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dz, \quad \mathrm{Re}(z) > 0,$$

que integrando por partes nos da la ecuación funcional

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

La cual puede ser reescrita como

$$(z)_n \Gamma(z) = \Gamma(z+n), \quad n \geq 0,$$

donde $(z)_n$ es el *símbolo de Pochhammer*

$$(z)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ \\ z(z+1)\cdots(z+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Una *serie hipergeométrica* $\sum_{n=0}^\infty c_n$ es una serie para la que $c_0 = 1$ y que satisface

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

con $P(n)$ y $Q(n)$ polinomios. En este caso, a c_n se le conoce como un *término hipérgeométrico*. Si además los polinomios están completamente factorizados, la tasa de progresión puede ser reescrita como

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)},$$

donde el factor $n+1$ en el denominador aparece por cuestiones históricas de notación. A partir de esto se define la *función hipergeométrica generalizada* como

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!},$$

cuando $q = 0$, utilizaremos la notación

$${}_pF_0\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ - \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n = \sum_{n=0}^\infty (a_1)_n \cdots (a_p)_n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

La *transformada de Stieltjes* (también conocida como transformada de Cauchy) de una medida ψ definida en $\mathbb{R}$ se define como la función valuada en los números complejos:

$$B(z,\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{x-z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Existe una fórmula, llamada la *fórmula de inversión de Perron-Stieltjes*, que nos permite calcular la medida ψ si tenemos información sobre la transformada de Stieltjes correspondiente. Existen varias versiones, pero la que utilizaremos es la siguiente:

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{x+z} \Leftrightarrow \psi(x_2) - \psi(x_1) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \frac{F(-x-i\varepsilon) - F(-x+i\varepsilon)}{2\pi i} dx.$$

Para definir los polinomios ortogonales consideramos ψ una medida de Borel positiva en $\mathbb{R}$ con soporte infinito y asumimos que los momentos

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\psi(x), \quad n \geq 0,$$

existen y son finitos. Normalizamos la medida de tal forma que $\mu_0 = 1$, para tener una medida de probabilidad. Por el *teorema de descomposición de Lebesgue* cualquier medida de Borel en la recta real puede descomponerse en tres medidas, tales que

$$\psi = \psi_c + \psi_d + \psi_{sc},$$

donde ψ_c es absolutamente continua, ψ_d es discreta y ψ_{sc} es singularmente continua. Para fines del presente escrito, se considerarán únicamente medidas de Borel positivas en $\mathbb{R}$ con solamente una parte absolutamente continua, solamente una parte discreta, o una combinación de estas dos.

Asociada a esta medida ψ podemos considerar un espacio de Hilbert L^2_ψ con el producto interno

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi(x),$$

de todas las funciones reales medibles f tales que $(f,f)_\psi = ||f||^2_\psi < \infty$. Si el soporte de la medida está dado por $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$, entonces este espacio será escrito como $L^2_\psi(\mathcal{S})$.

Decimos que $(p_n(x))_n$ es una *secuencia de polinomios* si cada elemento es un polinomio de grado exactamente n en la variable real x. Una secuencia de polinomios es *mónica* si el coeficiente líder de cada polinomio es exactamente 1. Una secuencia de polinomios $(p_n)_n$ es *ortogonal* con respecto a una medida de Borel ψ si

$$(p_n, p_m)_\psi = \int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\psi(x) = d_n^2\delta_{nm},$$

donde $d_n^2 = ||p_n||_\psi^2 > 0$. Si la norma es siempre idénticamente 1, decimos que la secuencia de polinomios es *ortonormal* y la denotamos como $(P_n)_n$. Cuando trabajemos con una secuencia de polinomios ortogonales mónicos, se utilizará la notación $(\widehat{P_n})_n$ y denotaremos sus normas como $||\widehat{P_n}||_\psi^2 = \zeta_n$.

Podemos utilizar el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt* para ver que toda familia de polinomios ortogonales satisface una *relación de recurrencia de tres términos* de la forma

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) = b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad p_{-1} = 0,$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\psi}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\psi}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\psi}{(p_n, p_n)_\psi}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\psi}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\psi}.$$

Nótese que el coeficiente b_n es siempre real. Más aún, para la familia ortonormal $P_n(x)$ tenemos que, comparando los coeficientes de x^{n+1} en la relación de recurrencia de tres términos, $a_n = h_n/h_{n+1} = \sqrt{\zeta_{n+1}/\zeta_n} > 0$, y que $c_n = (xP_n, P_{n-1})_\psi = (P_n, xP_{n-1})_\psi = a_{n-1}$. Por lo tanto, la secuencia de polinomios ortonormales $(P_n)_n$ satisface una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x), \quad a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Para la familia mónica $(\widehat{P}_n)_n$ la relación de recurrencia de tres términos está dada por

$$x\widehat{P}_n(x) = \widehat{P}_{n+1}(x) + \alpha_n\widehat{P}_n(x) + \beta_n\widehat{P}_{n-1}(x), \quad \widehat{P}_0(x) = 1, \quad \widehat{P}_1(x) = x - \alpha_0, \tag{1.3}$$

donde $\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\beta_n > 0$ para $n \geq 1$. Las relaciones entre estos coeficientes y los coeficientes de la familia ortonormal están dadas por

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}}, \quad \alpha_n = b_n, \quad \beta_n = \frac{\zeta_n}{\zeta_{n-1}}.$$

Observése que $\zeta_n = \beta_n \cdots \beta_1$.

Proposición 1.1*[8, Proposición 1.8.]* Los ceros o raíces de los polinomios mónicos $\widehat{P}_n$ generados por la relación de recurrencia (1.3) son todos reales y simples. Más aún, los ceros de $\widehat{P}_{n+1}$ y $\widehat{P}_n$ se entrelazan. Si todos los polinomios son ortogonales con respecto a una medida ψ, entonces estos ceros están en el intervalo cerrado más pequeño que contiene a $\mathrm{supp}(\psi)$ para toda $n \geq 1$.

Otra forma de escribir la relación de recurrencia (1.2) es en forma matricial. Denotando el vector columna de polinomios ortonormales como $P(x) = (P_0(x), P_1(x), ...)^T$, tenemos entonces que $xP(x) = JP(x)$, donde J es la matriz tridiagonal simétrica

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

conocida como la *matriz de Jacobi*.

El teorema de Favard (también conocido como teorema espectral para polinomios ortogonales) nos dice que para una familia de polinomios ortogonales definida por (1.2), entonces existe una medida positiva para la que son ortogonales. De manera formal:

Teorema 1.2*[8, Teorema 1.17.](Teorema de Favard)* Sea J un operador de Jacobi acotado. Entonces existe una medida de probabilidad única ψ con soporte en un intervalo real compacto tal que para todo polinomio P, el mapeo $U : P(J)e_0 \to P$ se extiende a un operador unitario $\ell^2(\mathbb{N}_0) \to L^2_\psi$ tal que $UJ = MU$, donde $M : L^2_\psi \to L^2_\psi$ es un operador multiplicativo $(Mf)(x) = xf(x)$. Más aún, la secuencia $P_n = Ue_n$ es un conjunto de polinomios ortonormales con respecto a ψ. Por lo tanto, el operador J puede ser diagonalizado de la siguiente forma:

$$(UJU^{-1}f)(x) = (Mf)(x) = xf(x), \qquad f \in L^2_\psi.$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [8]. Es importante mencionar que este teorema también es válido cuando el operador de Jacobi J no es acotado.

Las potencias de la matriz de Jacobi J pueden ser calculadas utilizando las propiedades de ortogonalidad. Observamos primero que la relación $xP(x) = JP(x)$ implica que $x^n P(x) = J^n P(x)$. Por lo tanto, multiplicando por $P^T(x)$ a derecha, integrando respecto a la medida ψ y observando la entrada (i, j) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} x^n P_i(x) P_j(x) d\psi(x) = \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} J^n_{ik} P_k(x) P_j(x) d\psi(x) = J^n_{ij}.$$

A partir de esto podemos observar que los momentos $(\mu_n)_n$ de la medida ψ pueden ser calculados a partir de J^n_{00}. En general, los coeficientes diagonales J^n_{ii} son los momentos de la medida $d\psi_i(x) = P_i^2(x) d\psi(x)$.

1.1.1. Familias Clásicas de Polinomios Ortogonales de Variable Continua

Existen algunas familias especiales de polinomios ortogonales conocidas como *clásicas*, que además de ser ortogonales en un intervalo $\mathcal{S} = (a, b)$ (y por lo tanto eigenfunciones de un operador de Jacobi) también son eigenfunciones de un operador diferencial de segundo orden en la variable continua x de la forma

$$\mathcal{D} = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x),$$

donde $p(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $q(x)$, $r(x)$ son funciones reales.

S. Bochner [5] resolvió como caracterizar a todas las familias de polinomios ortogonales que son eigenfunciones de un operador diferencial del *problema de Sturm-Liouville* usual con condiciones de frontera separadas tal que $p, \psi > 0$ en (a, b). Tras normalizaciones (mapeos afines sobre una recta o multiplicaciones por constantes), el problema puede reducirse a 5 casos, dependiendo del grado y las raíces del polinomio p (siempre es un polinomio de grado a lo más 2).

Caso I. p constante. El operador $\mathcal{D}$ es en este caso

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}, \quad \text{en} \quad L^2_\psi(\mathbb{R}), \quad \psi(x) = e^{-x^2}.$$

De este caso resultan polinomios ortogonales con respecto a la medida e^{-x^2}, conocidos como *polinomios de Hermite*, están denotados por $H_n(x)$ y satisfacen $\mathcal{D}H_n = -2nH_n$. El intervalo de ortogonalidad es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. Esta medida, una vez normalizada, corresponde a la distribución *normal* o *Gaussiana*.

Caso II. p lineal. El operador $\mathcal{D}$ es en este caso

$$\mathcal{D} = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{d}{dx}, \quad \text{en} \quad L^2_\psi(\mathbb{R}^+), \quad \psi(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1.$$

De este caso resultan polinomios ortogonales con respecto a la medida $x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$, conocidos como *polinomios de Laguerre*, están denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$ y satisfacen $\mathcal{D}L_n^{(\alpha)} = -nL_n^{(\alpha)}$. El intervalo de ortogonalidad es $\mathcal{S} = [0, \infty)$. Esta medida, una vez normalizada, corresponde a la *distribución Gamma*, y para el caso particular cuando $\alpha = 0$, a la *distribución Exponencial*.

Caso III. p cuadrática con raíces reales distintas. El operador $\mathcal{D}$ es en este caso

$$\mathcal{D} = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [\beta - \alpha - x(\alpha + \beta + 2)]\frac{d}{dx},$$

$$\text{en} \quad L^2_\psi(-1, 1), \quad \psi(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \quad \alpha,\ \beta > -1.$$

De este caso resultan polinomios ortogonales con respecto a la medida $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha, \beta > -1$, conocidos como *polinomios de Jacobi*, están denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ y satisfacen $\mathcal{D}P_n^{(\alpha,\beta)} = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}$. El intervalo de ortogonalidad es $\mathcal{S} = (-1,1)$. Estos polinomios también pueden ser definidos en cualquier otro intervalo acotado $[a,b]$, en particular, tomando $a=0$, $b=1$, la medida normalizada corresponde a la *distribución Beta*.

Caso IV. p cuadrática con raíces complejas distintas. El operador $\mathcal{D}$ es en este caso

$$\mathcal{D} = (1+x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [2x(1-a)+b]\frac{d}{dx},$$

$$\text{en} \quad L^2_{\psi}(\mathbb{R}), \quad \psi(x) = (1+x^2)^{-a}e^{b\ \arctan(x)}, \quad a > \frac{1}{2}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

En este caso no es posible tener una secuencia de polinomios ortogonales de todos los grados, por lo que habrá una cantidad finita de polinomios ortogonales $p_n(x;a,b)$ llamados los *polinomios de Romanovski*. Pueden ser construidos $n < 2a-1$ polinomios ortogonales respecto a la medida $(1+x^2)^{-a}e^{b\ \arctan(x)}$. El intervalo de ortogonalidad es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. En el caso particular cuando $b=0$, la medida se reduce a la *distribución t-Student*.

Caso V. p cuadrática con una raíz doble. El operador $\mathcal{D}$ es en este caso

$$\mathcal{D} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + [x(2-a)+b]\frac{d}{dx}, \quad \text{en} \quad L^2_{\psi}(\mathbb{R}^+), \quad \psi(x) = x^{-a}e^{-\frac{b}{x}}, \quad \alpha > 1,\ b \geq 0.$$

En este caso nuevamente solo habrá una cantidad finita de polinomios $y_n(x;a,b)$ ortogonales respecto a la medida $x^{-a}e^{-b/x}$. Existen dos casos especiales de soluciones polinómicas, pero no son ortogonales con respecto a la medida con soporte en la recta real. Cuando $b=1$ y $a=2-\alpha$, tenemos que $y_n(x;2-\alpha,1) = B_n(x;\alpha,\beta)$ son los llamados *polinomios de Bessel*, los cuales son ortogonales en el círculo unitario, pero no en ningún intervalo real.

A las familias de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi se les conoce como *familias clásicas de polinomios ortogonales de variable continua.*

A continuación daremos algunas propiedades adicionales de algunas familias clásicas que se usarán en este texto.

Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre pueden definirse en términos de la función hipergeométrica como

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ \alpha+1\end{matrix};x\right), \quad n \geq 0,$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer.

La matriz de Jacobi (con eigenvalor $-x$) está dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha-1 & 1 & & & \\ \alpha+1 & -\alpha-3 & 2 & & \\ & \alpha+2 & -\alpha-5 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sus normas están dadas por

$$||L_n^{(\alpha)}||_\psi^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Obsérvese que $L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}$. Si denotamos

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} L_n^\alpha\left(\frac{x}{\kappa}\right),$$

se tiene que $\psi_n(0) \equiv 1$. Estos polinomios nuevos satisfacen la relación de recurrencia

$$-x\psi_n(x) = n\kappa\psi_{n-1} - \kappa(2n+\alpha+1)\psi_n + \kappa(n+\alpha+1)\psi_{n+1}, \tag{1.4}$$

con $\psi_{-1} \equiv 0$ y $\psi_0 \equiv 1$ $(\alpha > -1)$, $n \geq 0$ y son ortogonales con respecto a una función de densidad definida sobre el eje real positivo dada por

$$\rho(x) = ce^{-\frac{x}{\kappa}}x^\alpha, \tag{1.5}$$

donde c es la constante de normalización $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\kappa^\alpha}$.

Algunas funciones generadoras importantes asociadas a sistemas de polinomios de Laguerre son

$$\sum_{n=0}^\infty L_n^{(\alpha)}(x)s^n = (1-s)^{-\alpha-1}e^{\frac{xs}{s-1}}. \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n^{(\alpha)}(x)\omega^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = e^\omega(x\omega)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x\omega}), \tag{1.7}$$

donde J_α representa la función de Bessel usual de orden α.

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden definirse en términos de la función hipergeométrica como

$$H_n(x) = (2x)^n {}_2F_0\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2} \\ - \end{matrix}; -\frac{1}{x^2}\right), \qquad n \geq 0.$$

El coeficiente líder es 2^n y tienen la relación de simetría $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. Sus normas están dadas por

$$||H_n||_\psi^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}, \qquad n \geq 0.$$

La función generadora de los polinomios de Hermite es

$$G(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{s^n}{n!} = e^{2xs-s^2}.$$

La relación de recurrencia de tres términos está dada por

$$xH_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \qquad H_{-1} = 0, \quad H_0 = 1.$$

Polinomios Ultraesféricos y de Chebychev

Los polinomios ultraesféricos o de Gegenbauer son un caso particular de los polinomios de Jacobi, cuando $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ y se denotan como $C_n^\lambda(x)$.

Pueden definirse en términos de la función hipergeométrica como

$$\begin{aligned} C_n^\lambda &= \binom{n+2\lambda-1}{n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+2\lambda \\ \lambda+\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= 2^n \binom{n+\lambda-1}{n} (x-1)^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -n-\lambda+\frac{1}{2} \\ -2n-2\lambda+1 \end{matrix}; \frac{2}{1-x}\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

La relación de recurrencia está dada por

$$xC_n^\lambda(x) = \frac{n+1}{2(n+\lambda)} C_{n+1}^\lambda(x) + \frac{n+2\lambda-1}{2(n+\lambda)} C_{n-1}^\lambda(x), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$C_0^\lambda(x) = 1, \quad C_1^\lambda(x) = 2\lambda x.$$

Algunas funciones generadoras importantes asociadas a los polinomios ultraesféricos son

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2\lambda)} C_n^\lambda(x)\omega^n = 2^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-2x\omega+\omega^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - x\omega + (1-2x\omega+\omega^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}-\lambda},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)\omega^n = (1-2x\omega+\omega^2)^{-\lambda},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^\lambda(x)}{C_n^\lambda(1)} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} C_n^\lambda \omega^n.$$

Un polinomio trigonométrico en θ de grado m tiene la forma

$$g(\theta) = a_0 + a_1\cos(\theta) + b_1\sin(\theta) + \cdots + a_m\cos(m\theta) + b_m\sin(m\theta),$$

con coeficientes complejos arbitrarios.

Las funciones $\cos(m\theta)$ y $\frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ son polinomios en $\cos(\theta) = x$, de grado m y se les conoce como los polinomios de Chebychev de primera y segunda especie respectivamente. Estos polinomios son un caso particular de los polinomios ultraesféricos, los de primera especie se dan cuando $\lambda = 0$ y los de segunda especie cuando $\lambda = 1$

Los polinomios de Chebychev de primera especie se denotan como

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta), \qquad n \geq 0. \tag{1.9}$$

Y los de segunda especie como

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad x = \cos(\theta), \qquad n \geq 0. \tag{1.10}$$

1.1.2. Familias Clásicas de Polinomios Ortogonales de Variable Discreta

De manera análoga a cuando se tiene una variable continua, existen familias clásicas de polinomios ortogonales de variable discreta. Estos resultan del estudio de medidas discretas ψ con puntos de masa en los números enteros $n \in \mathbb{Z}$ y saltos de magnitud $\psi_n = \psi(\{n\}) > 0$. La mayor parte de los resultados para variables continuas pueden extenderse naturalmente, el cambio radica en el rol del operador diferencial, el cual será reemplazado por un operador en diferencias de segundo orden que actúa sobre la variable (discreta) de los polinomios.

Sea $\psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una secuencia de números reales no negativos y considérese el espacio de Hilbert $\ell^2_\psi(\mathbb{Z})$ con el producto interno

$$(f, g)_\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(n)\psi_n,$$

de todas las secuencias $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $(f, f)_\psi = ||f||^2_\psi < \infty$. Si la secuencia está definida en un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{Z}$, entonces este espacio será denotado por $\ell^2_\psi(\mathcal{S})$. Usualmente normalizamos la medida discreta ψ de tal forma que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n = 1$, i.e., es una medida de probabilidad.

Para poder categorizar a las familias de polinomios ortogonales de variable discreta primero debemos reemplazar el concepto de derivada para dar sentido a las variables discretas. Con este fin se definen los *operadores de desplazamiento*

$$\mathfrak{s}_m f(x) = f(x+m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

para llegar a un operador diferencial de segundo orden genérico de la forma

$$\mathcal{D} = p_1 \mathfrak{s}_1 + p_0 \mathfrak{s}_0 + p_{-1} \mathfrak{s}_{-1},$$

donde p_1, p_1 y p_0 son funciones reales.

Existen cuatro casos interesantes, dependiendo de los grados de $p_{\pm 1}$ y si el soporte es finito o infinito.

Caso I. Uno de $p_{\pm 1}$ tiene grado 0 y el otro tiene grado 1. De este caso resulta

$$\psi_x = \frac{a^x}{x!} \psi_0, \quad a > 0,\ x = 0, 1, 2, ...$$

Como $\sum_{x=0}^{\infty} \psi_x = \psi_0 e^a$, normalizamos tomando $\psi_0 = e^{-a}$, con lo cual se obtiene la *distribución de Poisson*

$$\psi_x = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad a > 0,\ x = 0, 1, 2, ...,$$

y a los polinomios ortogonales correspondientes se les conoce como *polinomios de Charlier*, los cuales son denotados por $C_n(x; a)$.

Caso II. $p_{\pm 1}$ de grado 1 con soporte infinito. De este caso resulta

$$\psi_x = \frac{(\beta)_x}{x!} \gamma^x \psi_0, \quad \beta > 0,\ 0 < \gamma < 1, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

Como $\sum_{x=0}^{\infty} \psi_x = \psi_0 (1-\gamma)^{-\beta}$, normalizamos tomando $\psi_0 = (1-\gamma)^{\beta}$, con lo cual se obtiene la *distribución de Pascal*

$$\psi_x = \binom{\beta + x - 1}{x} \gamma^x (1-\gamma)^{\beta}, \quad \beta > 0,\ 0 < \gamma < 1, \quad x = 0, 1, 2, ...,$$

y a los polinomios ortogonales correspondientes se les conoce como *polinomios de Meixner*, los cuales son denotados por $M_n(x; \beta, \gamma)$.

Caso III. $p_{\pm 1}$ de grado 1 con soporte finito. De este caso resulta

$$\psi_x = \binom{N}{x} \left(\frac{p}{q}\right)^x \psi_0, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1, \quad x = 0, 1, 2, ..., N.$$

Como $\sum_{x=0}^{\infty} \psi_x = \psi_0 q^{-N}$ normalizamos tomando $\psi_0 = q^N$, con lo cual se obtiene la *distribución binomial*

$$\psi_x = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1, \quad x = 0, 1, 2, ..., N,$$

y a los polinomios ortogonales correspondientes se les conoce como *polinomios de Krawtchouk*, los cuales son denotados como $K_n(x;p,N)$.

Caso IV. Uno de $p_{\pm 1}$ tiene grado 2. De este caso resulta

$$\psi_x = \binom{N}{x}\frac{(\alpha+1)_x(\beta+1)_{N-x}\psi_0}{(\beta+1)_n}.$$

Como $\sum_{x=0}^{\infty}\psi_x = \psi_0\frac{(\alpha+\beta+2)_N}{(\beta+1)_N}$ normalizamos tomando $\psi_0 = \frac{(\beta+1)_N}{(\alpha+\beta+2)_N}$, con lo cual se obtiene la *distribución hipergeométrica negativa*

$$\psi_x = \frac{\binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}}{\binom{\alpha+\beta+N+1}{N}},$$

y a los polinomios ortogonales correspondientes se les conoce como *polinomios de Hahn*, los cuales son denotados como $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$. Si se toman $\alpha = -\tilde{\alpha}-1$ y $\beta = -\tilde{\beta}-1$, obtenemos la *distribución hipergeométrica estándar*

$$\psi_x = \frac{\binom{\tilde{\alpha}}{x}\binom{\tilde{\beta}}{N-x}}{\binom{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}{N}}.$$

A las familias de polinomios de Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn se les conoce como *familias clásicas de polinomios ortogonales de variable discreta*.

A coontinuación daremos algunas propiedades adicionales de algunas familias clásicas que se usarán en este texto.

Polinomios de Meixner

Los polinomios de Meixner pueden definirse en términos de la función hipergeométrica como

$$M_n(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,-x\\ \beta\end{matrix};1-\frac{1}{\gamma}\right),$$

para $\beta > 0$ y $0 < \gamma < 1$ y fijando $M_{-1}\equiv 0$. Estos polinomios son ortogonales respecto a una función con saltos en $x = 0,1,2,....$ Específicamente

$$\sum_{x=0}^{\infty} M_m(x)M_n(x)\rho_x = \frac{n!}{(\beta)_n\gamma^n}\delta_{m,n}, \tag{1.11}$$

donde

$$\rho_x = (1-\gamma)^\beta\frac{(\beta)_x}{x!}\gamma^x. \tag{1.12}$$

Además satisfacen la relación de recurrencia

$$-x\frac{(1-\gamma)}{\gamma}M_n(x) = \frac{n}{\gamma}M_{n-1}(x) - \left(n + \frac{n}{\gamma} + \beta\right) M_n(x) + (n+\beta)M_{n+1}(x), \tag{1.13}$$

y la relación de dualidad

$$M_n(x;\beta,\gamma) = M_x(n;\beta,\gamma), \quad x,n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

Una función generadora importante basada en el polinomio M_n es

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(x)\frac{(\beta)_n}{n!}s^n = \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^x (1-s)^{-x-\beta}, \tag{1.15}$$

que converge al menos para $|s| < \gamma$.

Polinomios de Krawtchouk

El soporte de la medida es $\{0, 1, ..., N\}$. La medida y los coeficientes $p_{\pm 1}$ están dados por

$$p_1(x) = p(N-x), \quad p_{-1}(x) = qx, \quad \psi_x = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad p,\ q > 0, \quad p+q = 1.$$

Los polinomios de Krawtchouk pueden definirse mediante la función hipergeométrica como

$$K_n(x;p,N) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ -N \end{array}; \frac{1}{p}\right), \quad n = 0, 1, 2, ..., N.$$

Para $n = 0, 1, ..., N$ satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden

$$p(N-x)K_n(x+1;p,N) - [p(N-x)+xq]K_n(x;p,N) + xqK_n(x-1;p,N) = -nK_n(x;p,N).$$

Una función generadora de los polinomios de Krawtchouk es

$$G(x,t;p,N) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} K_n(x;p,N)t^n = \left(1-\frac{qt}{p}\right)^x (1+t)^{N-x}.$$

La relación de recurrencia de tres términos está determinada por ($K_{-1}(x;p,N) = 0,\ K_0(x;p,N) = 1$)

$$p(N-n)K_{n+1}(x;p,N) - [p(N-n)+nq]K_n(x;p,N) + nqK_{n-1}(x;p,N) = -xK_n(x;p,N).$$

Satisfacen la relación de dualidad

$$K_n(x;p,N) = K_x(n;p,N), \quad x,n \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Polinomios de Charlier

El soporte de la medida es $\mathbb{N}_0$. La medida y los coeficientes $p_{\pm 1}$ están dados por

$$p_1(x) = 1, \qquad p_{-1}(x) = \frac{x}{a}, \qquad \psi(x) = e^{-a}\frac{a^x}{x!}, \qquad a > 0.$$

Por lo que $\psi^{(k)} = \psi$. Los polinomios de Charlier pueden definirse en términos de la función hipergeométrica como

$$C_n(x;a) = {}_2F_0\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ - \end{array}; -\frac{1}{a}\right), \qquad n \geq 0.$$

El coeficiente líder es $(-a)^{-n}$. La función generadora de los polinomios de Charlier es

$$G(x,t;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x;a)}{n!} t^n = e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^x.$$

La relación de recurrencia de tres términos está dada por

$$-xC_n(x;a) = aC_{n+1}(x;a) - (n+1)C_n(x;a) + nC_{n+1}(x;a), \qquad x \geq 0.$$

1.1.3. Polinomios continuos duales de Hahn

Además de las familias clásicas de polinomios ortogonales, existen otras familias que también son eigenfunciones de un operador en diferencias de segundo orden de la forma

$$a(x)p_n(\lambda(x+1)) + b(x)p_n(\lambda(x)) + c(x)p_n(\lambda(x-1)) = -\lambda_n p_n(\lambda(x)),$$

donde $\lambda(x)$ no es necesariamente una función lineal real, así que el soporte de la medida no se distribuye uniformemente, como en el caso de las familias clásicas discretas. Estas familias son los polinomios duales de Hahn, los polinomios de Racah, los polinomios de Wilson, los polinomios continuos de Hahn y los polinomios continuos duales de Hahn, estos últimos apareciendo en el último capítulo del presente escrito.

Los polinomios continuos duales de Hahn están definidos por

$$\frac{S_n(x^2;a,b,c)}{(a+b)_n(a+c)_n} = {}_3F_2\left(\begin{array}{c} -n, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c \end{array}; 1\right),$$

donde a, b, c tienen partes reales positivas. Si alguno de estos parámetros no es real, entonces alguno de los otros dos parámetros es su conjugado complejo. Los polinomios continuos duales de Hahn son ortogonales con respecto a la medida

$$\psi(x) = \left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2, \quad x \in [0,\infty).$$

Y verifican la relación de recurrencia

$$-(a^2+x^2)\widehat{S}_n(x^2) = A_n\widehat{S}_{n+1}(x^2) - (A_n+C_n)\widehat{S}_n(x^2) + C_n\widehat{S}_{n-1}(x^2),$$

con

$$\widehat{S}_n(x^2) = \frac{S_n(x^2)}{(a+b)_n(a+c)_n},$$

y

$$A_n = (n+a+b)(n+a+c), \qquad C_n = n(n+b+c-1).$$

1.2. Representación espectral de procesos de nacimiento y muerte

1.2.1. Algunas definiciones y teoremas importantes

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{X_t,\ t \geq 0\}$ una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}$, el cual puede ser finito, infinito o doblemente infinito. Recordemos la propiedad de Markov,

$$\mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = i, X_\tau, 0 \leq \tau \leq s) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = i) = P_{ij}(s,t), \quad 0 < s < t.$$

Asumiremos que las cadenas de Markov son **homogéneas** en el tiempo y por lo tanto que las probabilidades anteriores dependen únicamente de la diferencia de tiempo $t-s$, i.e., $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s)$. En este caso escribimos $P_{ij}(t)$ y se denominan **funciones de probabilidad de transición**. Estas probabilidades pueden ser escritas en la llamada **matriz de probabilidades de transición**

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Como estamos trabajando en tiempo continuo, siempre podremos estudiar a $P(t)$ mediante relaciones diferenciales respecto a t. Particularmente, nos concentraremos en como evoluciona el proceso infinitesimalmente a lo largo del tiempo.

La matriz de transición $P(t)$ posee las siguientes propiedades:

1. $P_{ij}(t) \geq 0\ \forall\ i, j \in \mathcal{S}$ y $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, la delta de Kronecker.
2. $\sum_{j\in\mathcal{S}} P_{ij}(t) \leq 1\ \forall\ t \geq 0,\ i \in \mathcal{S}$. Se dice que el proceso $P_{ij}(t)$ es **honesto** si $\sum_{j\in\mathcal{S}} P_{ij}(t) = 1$ y **deshonesto** en caso contrario.

3. Para $i, j \in \mathcal{S}$ y para todo $s, t \geq 0$, se tienen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{ik}(s) P_{kj}(t).$$

Asumiremos siempre que las funciones de transición son **estándar**, i.e., tienen la propiedad

4. $\lim_{t \downarrow 0} P_{ii}(t) = 1$, para todo $i \in \mathcal{S}$, y por lo tanto $P_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ cuando $t \downarrow 0$, para todo $i, j \in \mathcal{S}$.

Nos concentraremos en los procesos que sean **estables**, es decir, que sus probabilidades de transición $P_{ii}(t)$ tienen derivadas finitas de cualquier orden en $t = 0$ para cualquier $i \in \mathcal{S}$. La siguiente proposición prueba que $P_{ij}(t)$ con las propiedades enunciadas anteriormente será diferenciable siempre para $t \geq 0$.

Proposición 1.3. Sea $P_{ij}(t)$ una función de transición que satisface las propiedades $1. - 4.$. Entonces, para $i \in \mathcal{S}$, tenemos que

1. $-P'_{ii}(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = q_i$ (puede ser $+\infty$).

2. Si $q_i < \infty$ entonces $P'_{ij}(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij} < \infty$, para todo $j \neq i$.

La demostración a esta proposición puede encontrarse en [8, Proposición 1.2.2].

Notemos que por definición q_i, $q_{ij} \geq 0$. Decimos que un estado $i \in \mathcal{S}$ es **estable** si $q_i < \infty$ e **instantáneo** si $q_i = \infty$. El proceso será estable si todos sus estados son estables. Un estado i es **absorbente** si $q_i = 0$, en cuyo caso $P_{ii}(t) = 1$ para todo $t \geq 0$. Observemos que $q_{ij} \geq 0$, mientras que $q_{ii} = -q_i \leq 0$. Llamaremos a la matriz $\mathcal{A} = (a_{ij})$ la matriz del operador infinitesimal del proceso donde

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \neq j, \\ -q_i & i = j. \end{cases}$$

En otras palabras

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = P'(0).$$

Las entradas de la diagonal principal son todas no positivas o posiblemente infinitas, mientras que las entradas fuera de la diagonal son finitas y no negativas. La suma de cada fila es no positiva, i.e., $\sum_{j \in \mathcal{S}} a_{ij} \leq 0$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Si las entradas de la diagonal son finitas, diremos que $\mathcal{A}$ es **estable**. Adicionalmente, si la suma de las filas es 0, i.e., $\sum_{j \in \mathcal{S}} a_{ij} = 0$, entonces $\mathcal{A}$ es **conservativa**.

A diferencia de las cadenas de Markov a tiempo discreto, el elemento mínimo de un semigrupo $\{P(t),\ t \geq 0\}$ está representado por $\mathcal{A}$.

Hablaremos ahora de las **distribuciones de primer tiempo de llegada**, definidas como

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_\tau = j \text{ para algunos } \tau,\ 0 < \tau \leq 1 | X_0 = i), \quad i \neq j,$$

$$F_{ii}(t) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} \neq i,\ X_{\tau_2} = i \text{ para algún } \tau_1, \tau_2, 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t | X_0 = i).$$

Para extender muchas de las definiciones para cadenas de Markov a tiempo discreto a las de tiempo continuo se utiliza la **transformada de Laplace** de las funciones de transición $P_{ij}(t)$.

$$\widehat{P}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt, \qquad \lambda > 0, \qquad i, j \in \mathcal{S}.$$

A esta función se le conoce también como **función resolvente**, y satisface las siguientes propiedades:

1. $\widehat{P}_{ij}(\lambda) \geq 0$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
2. $\lambda \sum_{j \in \mathcal{S}} \widehat{P}_{ij}(\lambda) \leq 1$, para todo $i \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
3. $\widehat{P}_{ij}(\lambda) - \widehat{P}_{ij}(\mu) + (\lambda - \mu) \sum_{k \in \mathcal{S}} \widehat{P}_{ik}(\lambda) \widehat{P}_{kj}(\mu) = 0\ \forall\ i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda, \mu > 0$.
4. $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \widehat{P}_{ii}(\lambda) = 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$, y por lo tanto $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \widehat{P}_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}$.

Análogamente, si llamamos $\widehat{F}_{ij}(\lambda)$ a la transformada de Laplace de las distribuciones $F_{ij}(t)$, entonces

$$\widehat{F}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{ij}(t).$$

Y tenemos las siguientes relaciones:

$$\widehat{P}_{ii}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q_i} + \widehat{P}_{ii}(\lambda) \widehat{F}_{ii}(\lambda),$$

$$\widehat{P}_{ij}(\lambda) = \widehat{P}_{jj}(\lambda) \widehat{F}_{ij}(\lambda), \quad i \neq j.$$

Definición 1.1. Utilizando la notación anterior tenemos:

- Un estado $i \in \mathcal{S}$ es **recurrente** si $\int_0^\infty P_{ii}(t) dt = \infty$ y **transitoria** en caso contrario. En términos de las distribuciones $F_{ii}(t)$, debemos tener que $\int_0^\infty dF_{ii}(t) = 1$, o equivalentemente $\lim_{\lambda \downarrow 0} \widehat{F}_{ii}(\lambda) = 1$.

- Un estado recurrente $i \in \mathcal{S}$ es **positivo recurrente** (o ergódico) si $\lim_{t\to\infty} P_{ii}(t) > 0$ y **nulo recurrente** en caso contrario. En términos de las distribuciones $F_{ii}(t)$, debemos tener que $\int_0^\infty t dF_{ii}(t) < \infty$, o equivalentemente $\lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\lambda}\widehat{F}_{ii}(\lambda) < \infty$.

Se dice que un vector $\pi = (\pi_i)_{i\in\mathcal{S}}$ es **estacionario** (o invariante) para la cadena de Markov continua si

$$\pi_j \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i P_{ij}(t) = \pi_j, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathcal{S}.$$

En caso que dicho vector pueda normalizarse a un vector de probabilidad ($\sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i = 1$), decimos que π es una **distribución estacionaria** (o invariante) de la cadena de Markov a tiempo continuo. La existencia de la distribución estacionaria es equivalente a la irreducibilidad y recurrencia positiva.

Debido a la dificultad para calcular $P(t)$ explícitamente, se suele calcular el vector estacionario mediante la matriz del operador infinitesimal $\mathcal{A}$, verificando que $\pi\mathcal{A} = 0$ y con componentes no negativas para obtener un candidato.

Un proceso de nacimiento y muerte es una cadena de Markov a tiempo continuo $X(t)$ cuyo espacio de estados es los enteros no negativos y cuya matriz de probabilidades de transición

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}\left(X(t) = j | X(0) = i\right),$$

satisface las condiciones (cuando $t \to 0^+$)

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda_i t + o(t), & \text{si} \quad j = i+1, \\ \\ \mu_i t + o(t), & \text{si} \quad j = i-1, \\ \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i), & \text{si} \quad j = i, \end{cases}$$

donde $\lambda_i > 0$ para $i \geq 0$, $\mu_i > 0$ para $i \geq 1$ y $\mu_0 \geq 0$. Al par $\{\lambda_n, \mu_n\}$ se le denomina las tasas de nacimiento y muerte.

El operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte general es de la forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\mu_0) & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Esta matriz determina un sistema de polinomios mediante la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$
\begin{aligned}
&Q_0(x) = 1,\\
&-xQ_0(x) = -(\lambda_0 + \mu_0)Q_0(x) + \lambda_0 Q_1(x),\\
&-xQ_n(x) = \mu_n Q_{n-1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \lambda_n Q_{n+1}(x).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Es importante notar que $\mathcal{A}$ es una matriz de Jacobi y por lo tanto, por el Teorema de Favard, existe una medida de probabilidad ψ tal que los polinomios definidos en (1.17) son ortogonales respecto a ψ.

Además $\mathcal{A}$ será conservativa si y solo si $\mu_0 = 0$. En caso que $\mu_0 > 0$, se estará permitiendo que se pueda pasar del estado 0 a un estado absorbente con probabilidad $\frac{\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}$, al cual denotaremos como -1.

La ecuación de retroceso de Kolmogorov está dada por

$$
\begin{aligned}
P'_{0,j}(t) &= -(\lambda_0 + \mu_0)P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t), \quad P_{ij}(0) = \delta_{ij},\\
P'_{i,j}(t) = \lambda_{i,j}(t) &= \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{i,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t), \quad i \geq 1.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Por su parte, la ecuación de evolución de Kolmogorov está dada por

$$
\begin{aligned}
P'_{i,0}(t) &= -(\lambda_0 + \mu_0)P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t), \quad P_{ij}(0) = \delta_{ij},\\
P'_{i,j}(t) &= \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t), \quad j \geq 1.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Definimos ahora los **coeficientes potenciales** como

$$
\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}, \quad n \geq 1.
$$

Estos coeficientes potenciales satisfacen las ecuaciones de simetría

$$
\pi_n\lambda_n = \pi_{n+1}\mu_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{1.20}
$$

como resultado de buscar un vector π que haga que la cadena sea **reversible**, i.e., $\pi_i P_{ij}(t) = \pi_j P_{ji}(t)$ para todo $t \geq 0$. Si $\mathcal{A}$ es conservativa entonces $\pi\mathcal{A} = 0$, y por lo tanto π es un vector estacionario (o invariante) del proceso de nacimiento y muerte, el cual se convertirá en una distribución si $\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n < \infty$.

1.2.2. Fórmula de representación de Karlin-McGregor

Ahora enunciaremos la fórmula de representación de Karlin-McGregor de las funciones de probabilidad de transición de los procesos en términos de polinomios ortogonales respecto a una medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[0, \infty)$.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ estable. Una función de transición $P_{ij}(t)$ es una **$\mathcal{A}$-función** si $\mathcal{A}$ es la matriz del operador infinitesimal de la función de probabilidad de transición $P(t)$, i.e., $P'(0) = \mathcal{A}$.

Decimos que una función de transición $f_{ij}(t)$ es la **$\mathcal{A}$-función mínima** si $f_{ij}(t) \leq P_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $t \geq 0$, donde $P_{ij}(t)$ es cualquier otra $\mathcal{A}$-función no negativa.

Además, decimos que la matriz del operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es débilmente simétrica si existe un vector $m = (m_i)_{i=0}^{N}$ tal que $m_i q_{ij} = m_j q_{ji}$ para toda $i,\ j \in \mathcal{S}$. Esto es equivalente a $m_i P_{ij}(t) = m_j P_{ji}(t)$ para toda $t \geq 0$, donde $P_{ij}(t)$ es la $\mathcal{A}$-función mínima.

Teorema 1.4. *[8, Teorema 3.8]* Sea $f_{ij}(t)$ la $\mathcal{A}$-función mínima. Entonces para cada $i, j\ \in \mathbb{N}_0$ existe una medida signada finita γ_{ij} (la cual es una medida de probabilidad si $i = j$) con soporte en $[0, \infty)$ tal que

$$f_{ij}(t) = \sqrt{\frac{\pi_j}{\pi_i}} \int_0^{\infty} e^{-tx} d\gamma_{ij}(x).$$

Teorema 1.5. *[8, Teorema 3.9]* Sea $\mathcal{A}$ la matriz del operador infinitesimal asociada a un proceso de nacimiento y muerte y $P_{ij}(t)$ una $\mathcal{A}$-función débilmente simétrica (como puede ser la mínima) que es una solución de ambas ecuaciones de Kolmogorov. Entonces existe una medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[0, \infty)$ tal que tenemos la representacion integral

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x), \qquad i, j \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0, \tag{1.21}$$

A esta fórmula se la conoce como **fórmula de representación de Karlin-McGregor para procesos de nacimiento y muerte**.

Demostración. Del teorema anterior obtenemos la representación

$$P_{00}(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\psi(x), \quad t \geq 0, \tag{1.22}$$

donde ψ es una medida de probabilidad con soporte en $[0, \infty)$. Para probar (1.21) utilizaremos inducción dos veces, primero sobre el índice i (cuando $j = 0$) y la segunda vez para probarlo en general. Observemos que cuando $i = j = 0$ obtenemos (1.22). Asumiremos (1.21) como cierta para todo $k \leq i$ con i fija. Entonces

$$P'_{i,0}(t) = -\int_0^{\infty} x e^{-tx} Q_i(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Utilizando la ecuación de retroceso de Kolgomorov (1.18) para $j = 0$ y relación de recurrencia (1.17), obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_i P_{i+1,0}(t) &= P'_{i,0}(t) - \mu_i P_{i-1,0}(t) + (\lambda_i + \mu_i) P_{i,0}(t) \\
&= \int_0^\infty e^{-tx}[-xQ_i(x) - \mu_i Q_{i-1}(x) + (\lambda_i + \mu_i) Q_i(x)] Q_0(x) d\psi(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-tx} \lambda_i Q_{i+1} Q_0(x) d\psi(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cancelando λ_i, obtenemos que

$$P_{i+1,0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_{i+1}(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Ahora probaremos el caso general por inducción sobre j. Se cumple para $j = 0$. Asumimos (1.21) como cierta para toda $k \leq j$ con j fija. Entonces

$$P'_{i,j} = -\pi_j \int_0^\infty x e^{-tx} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

Utilizando nuevamente la ecuación de retroceso de Kolmogorov (1.18), la ecuación de simetría (1.20) y la relación de recurrencia (1.17), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_{j+1} P_{i,j+1} &= P'_{i,j}(t) - \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + (\lambda_j + \mu_j) P_{i,j}(t) \\
&= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)[-xQ_j(x)\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1} Q_{j-1}(x) + (\lambda_j + \mu_j)\pi_j Q_j(x)] d\psi(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)[-xQ_j(x)\pi_j - \mu_j \pi_j Q_{j-1}(x) + (\lambda_j \mu_j)\pi_j Q_j(x)] d\psi(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x) \lambda_j \pi_j Q_{j+1}(x) d\psi(x) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x) \mu_{j+1} \pi_{j+1} Q_{j+1}(x) d\psi(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, eliminando μ_{j+1}, resulta

$$P_{i,j+1}(t) = \pi_{j+1} \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x) Q_{j+1}(x) d\psi(x).$$

□

Para cadenas de nacimiento y muerte tenemos un resultado análogo:

Teorema 1.6 *[8, Teorema 2.5]* Sea $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$ una cadena de nacimiento y muerte a tiempo discreto con matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix}
r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix},$$

entonces existe una única distribución positiva regular ψ con soporte en el intervalo $[-1,1]$ tal que para toda i, j, n, tenemos la representación integral

$$P_{ij}^{(n)} = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x). \tag{1.23}$$

Notemos que P es una matriz de Jacobi y por lo tanto, por el Teorema de Favard, existe una medida de ortogonalidad ψ.

A esta fórmula se la conoce como la **fórmula de representación de Karlin-McGregor para cadenas de nacimiento y muerte a tiempo discreto**.

1.2.3. k-ésimos polinomios asociados

Tiempo discreto

Para cualquier $k \geq 0$ consideramos la k-ésima cadena de nacimiento y muerte a tiempo discreto $\{X_n^{(k)},\ n = 0,1,2,...\}$ cuya matriz de probabilidades de transición está definida a partir de la matriz de probabilidades de transición original P, eliminando las primeras $k+1$ filas y columnas, i.e.,

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} r_0 & p_0 & & & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & q_k & r_k & p_k & & & \\ \hline & & & q_{k+1} & r_{k+1} & p_{k+1} & & \\ & & & & q_{k+2} & r_{k+2} & p_{k+2} & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right).$$

Esta nueva cadena de nacimiento y muerte tiene una probabilidad de absorción en el primer estado de probabilidad q_{k+1}. Definimos la secuencia de polinomios $(Q_n^{(k)})_n$ usando la siguiente relación de recurrencia

$$xQ_n^{(k)}(x) = \delta_{n,k} + p_n Q_{n+1}^{(k)}(x) + r_n Q_n^{(k)}(x) + q_n Q_{n-1}^{(k)}(x).$$

Los polinomios $(Q_n^{(k)}(x))_n$ tienen grados $n-k-1$ si $n > k$ y satisfacen $Q_n^{(k)}(x) = 0$ para $0 \leq n \leq k$. Más aún

$$Q_{k+1}^{(k)}(x) = -\frac{1}{p_k}.$$

A estos polinomios se les suele conocer como **k-ésimos polinomios asociados** y pueden ser escritos como

$$Q_n^{(k)}(x) = -\pi_k \int_{-1}^{1} Q_k(y) \frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y - x} d\psi(y).$$

Para toda $k \geq 0$ obtenemos una nueva cadena de nacimiento y muerte, como $P^{(k)}$ es una matriz de Jacobi, sabemos que existe una medida de probabilidad única $\psi^{(k)}$ asociada a la k-ésima cadena de nacimiento y muerte $\{X_n^{(k)}, n = 0, 1, 2, ...\}$.

Tiempo continuo

Para cualquier $k \geq 0$ consideramos al **k-ésimo proceso de nacimiento-muerte** $\{X_t^{(k)},\ t \geq 0\}$, aquel cuya matriz del operador infinitesimal está definida a partir de la matriz del operador infinitesimal original $\mathcal{A}$ eliminando las primeras $k+1$ filas y columnas de $\mathcal{A}$, i.e.,

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -\mu_0-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & & & & \\ \mu_1 & -\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \mu_k & -\mu_k-\lambda_k & & \lambda_k & & & \\ \hline & & & \mu_{k+1} & & -\mu_{k+1}-\lambda_{k+1} & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & & \mu_{k+2} & -\mu_{k+2}-\lambda_{k+2} & \lambda_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

Este nuevo proceso de nacimiento y muerte tiene tasas de nacimiento y muerte $\{(\lambda_{n+k+1}, \mu_{n+k+1}),\ n \geq 0\}$ y no es conservativo pues $\mu_{k+1} > 0$. Nuevamente, al ser $\mathcal{A}^{(k)}$ una matriz de Jacobi, existe una medida de ortogonalidad asociada al k-ésimo proceso de nacimiento y muerte asociado, la cual denotaremos como $\psi^{(k)}$. Definimos la secuencia de polinomios $(Q_n^{(k)})_n$ usando la siguiente relación de recurrencia

$$-xQ_n^{(k)}(x) = \delta_{n,k} + \lambda_n Q_{n+1}^{(k)}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n^{(k)}(x) + \mu_n Q_{n-1}^{(k)}(x). \qquad (1.24)$$

Los polinomios $(Q_n^{(k)})_n$ tienen grados $n-k-1$ si $n > k$ y satisfacen $Q_n^{(k)}(x) = 0$ para $0 \leq n \leq k$. Más aún

$$Q_{k+1}^{(k)}(x) = -\frac{1}{\lambda_k}.$$

Estos polinomios pueden ser escritos también como

$$Q_n^{(k)}(x) = -\pi_k \int_0^\infty Q_k(y)\frac{Q_n(y) - Q_n(x)}{y - x} d\psi(y).$$

Para cada $k \geq 0$ tendremos un nuevo proceso de nacimiento y muerte con medida espectral $\psi^{(k)}$.

Utilizando la representación de Karlin-McGregor se obtienen las siguientes relaciones:

$$F_{i,-1}(t) = \mu_0 \int_0^t P_{i,0}(s)ds = \mu_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{x} Q_i(x) d\psi(x),$$

$$F_{10}(t) = \mu_1 \int_0^t P_{00}^{(0)}(s)ds = \mu_1 \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x),$$

donde $P_{ij}^{(0)}(t) = P_{ij}^{(0)}(t, \psi^{(0)})$ es la función de transición del 0-ésimo proceso de nacimiento y muerte asociado $\{X_t^{(0)},\ t \geq 0\}$. La transformada de Laplace de la fórmula anterior nos da

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{10}(\lambda) &= \mu_1 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{x} d\psi^{(0)}(x) \right) \\ &= \mu_1 \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\int_0^\infty (e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+x)t}) dt \right) d\psi^{(0)}(x) = \mu_1 \int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{\lambda + x}.\end{aligned}$$

Teorema 1.7 *[8, Teorema 1.11.](Teorema de Markov)* Sea ψ una medida positiva definida en el intervalo acotado $[a,b]$ y consideremos los polinomios ortogonales correspondientes $P_n(x)$ y los polinomios 0-asociados $P_n^{(0)}(x)$. Tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n^{(0)}(z)}{P_n(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z-x}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [a,b],$$

y la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.

La prueba a este teorema puede consultarse en [1, Sección 5.5].

Existe una interpretación de este teorema en términos de fracciones continuas, y que será utilizada en el tercer capítulo, dada por

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z-x} = \cfrac{1}{z - b_0 - \cfrac{a_0^2}{z - b_1 - \cfrac{a_1^2}{z - b_2 - \cfrac{a_2^2}{z - b_3 - \cdots}}}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [a,b],$$

donde los n-ésimos denominadores parciales, $P_n(z)$ satisfacen

$$P_n(z) = (z - b_n)P_{n-1}(z) - a_n P_{n-2}(z), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

$$P_{-1}(z) = 0, \qquad P_0(z) = 1.$$

Por su parte, los numeradores parciales, $q_n(x)$, satisfacen la recurrencia

$$q_n(z) = (z - b_n)q_{n-1}(z) - a_n q_{n-2}(z), \qquad n = 2, 3, ...$$

$$q_{-1}(z) = 1, \qquad q_0(z) = 0, \qquad q_1(z) = a_0.$$

Puede verificarse entonces por inducción que $a_0^{-1}q_n(z)$ es un polinomio mónico de grado $n-1$, que es independiente de a_0. Por lo tanto

$$P_n^{(0)}(z) = a_0^{-1}q_{n+1}(z), \qquad n \geq -1.$$

Esto puede ser consultado a mayor detalle en [6].

Esta fórmula puede interpretarse como un método alternativo para calcular la transformada de Stieltjes de una medida de probabilidad ψ y poder calcular después la medida mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes.

1.2.4. Recurrencia y absorción

Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso de nacimiento y muerte irreducible con un conjunto de tasas de nacimiento y muerte $\{\lambda_n, \mu_n\}$, por lo que todos los estados pertenecen a la misma clase de comunicación. Para estudiar la recurrencia solo es necesario estudiar un único estado, particularmente podemos tomar el estado 0.

Teorema 1.8.[*8, Teorema 3.42.*] Sea $\mu_0 = 0$ (i.e., $\mathcal{A}$ es conservativa). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El proceso de nacimiento y muerte es recurrente.
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = \infty.$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty.$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{\mu_1}$, donde $\psi^{(0)}$ es la medida espectral del 0-ésimo proceso de nacimiento y muerte asociado.

También los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El proceso de nacimiento y muerte es recurrente positivo.
2. La medida espectral ψ tiene un salto finito en $x = 0$ de tamaño $\psi(\{0\}) = \left(\sum_{n=0}^\infty \pi_n\right)^{-1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty.$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{\mu_1}$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi^{(0)}(x)}{x^2} < \infty.$

Que un proceso de nacimiento y muerte sea **transitorio** ($\mu_0 = 0$) es equivalente a que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \infty$. Este tipo de procesos tienden a ∞ con probabilidad 1, por lo que el estado ∞ es un estado absorbente permanente. Existen dos tipos de procesos de nacimiento y muerte transitorios. El caso cuando para algún $t > 0$ y algún $i \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) < 1,$$

en cuyo caso se le llama de tipo 1, y de tipo 2 cuando esto no se satisface. Que un proceso sea de tipo 2 es equivalente a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} = \infty.$$

A los procesos de tipo 1 se les conoce también como **fuertemente transitorios** y a los de tipo 2 como **débilmente transitorios**.

Cuando $\mu_0 > 0$ es necesario considerar además de los estados $0, 1, 2, \ldots$, un estado con índice -1. Cuando la partícula se encuentra en el estado 0 y ocurre una transición, la partícula se mueve al estado 1 con probabilidad $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0}$ y al estado -1 con probabilidad $\frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}$. Cuando se llega al estado -1, la partícula permanece en dicho estado de ahí en adelante. Al evento de llegar al estado -1 se le conoce como **absorción** a -1.

Para $i \geq 0$, sea $G_i(t)$ la probilidad de que la absorción a -1 ocurra antes del tiempo t dado que en $t = 0$ la partícula está en el estado i. Entonces

$$G_i(t) = \mu_0 \int_0^t P_{i0}(\tau) d\tau = \mu_0 \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) d\psi(x).$$

Teorema 1.9 [*17, Teorema 10.*] Si el estado inicial es i, la probabilidad de que se de la absorción a -1 eventualmente es

$$\int_0^{\infty} dG_i(t) = \mu_0 \int_0^{\infty} \frac{Q_i(x)}{x} d\psi(x) = 1 - \frac{Q_i(0)}{\lim_{n\to\infty} Q_n(0)}$$

$$= \frac{\mu_0 \displaystyle\sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{1 + \mu_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}.$$

Esto es o igual a 1 para cada i o menor que 1 para cada i dependiendo de si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}$ diverge o converge. La fórmula

$$\int_0^{\infty} t^n dG_i(t) = n! \mu_0 \int_0^{\infty} \frac{Q_i(x)}{x^{n+1}} d\psi(x),$$

es válida siempre que cualquiera de las dos integrales exista. En particular

$$\int_0^\infty t dG_i(t) = \frac{1}{\mu_0}\sum_{k=0}^\infty \pi_k + \sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\lambda_j\pi_j}\sum_{r=j+1}^\infty \pi_r,$$

siempre que algún miembro sea finito.

Definición 1.2. Sea $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un proceso de nacimiento y muerte con $\mu_0 > 0$.

- Decimos que la absorción al estado -1 es **segura** si la probabilidad de absorción eventual es igual a 1, i.e.

  $$\mathbb{P}(T_{-1} < \infty | X_0 = i) = 1, \qquad \forall\ i \in \mathbb{N}_0,$$

  donde $T_j = \inf\{t \geq 0 : X_t = j\}$, $j \in \mathbb{N}_0$ es el **tiempo de primer paso** del proceso de nacimiento y muerte al estado j.

  Si adicionalmente, el tiempo esperado de absorción al estado es finito, i.e., $\mathbb{E}(T_{-1}|X_0 = i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, entonces la absorción a -1 es **ergódica**.

- Decimos que la absorción a -1 es **transitoria** si no es segura, i.e.,

  $$\mathbb{P}(T_{-1} < \infty | X_0 = i) < 1, \qquad \text{para algún} \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Teorema 1.10.[*8, Teorema 3.51.*] Sea $\mu_0 > 0$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La absorción a -1 es segura.
2. $\mu_0 \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = 1$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$.
4. $Q_n(0) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

y también los siguientes son equivalentes:

1. La absorción a -1 es ergódica.
2. $\mu_0 \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} = 1$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x^2} < \infty$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty$.

En el caso cuando la absorción a 0 no sea segura, podemos determinar condiciones para la existencia de los momentos de la distribución condicional de la absorción. De hecho, podemos dar una evaluación explícita para dichos momentos. Asumiendo por simplicidad que el estado inicial es 0, la distribución condicional de la absorción es

$$\frac{\mu_0 \displaystyle\int_0^t P_{00}(s)ds}{\mu_0 \displaystyle\int_0^\infty P_{00}(s)ds} = \left[\frac{1 + \mu_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}} \right] \int_0^\infty \left[\frac{1 - e^{-xt}}{x} \right] d\psi(x).$$

El r-ésimo momento, si es que existe, puede calcularse como en [17]

$$\int_0^\infty x^r d\psi(x) = r! \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x^{r+1}} \frac{\left(1 + \mu_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}}. \tag{1.25}$$

1.2.5. Polinomios duales

Sean $(Q_n)_n$ los polinomios generados por la relación de recurrencia de tres términos (1.17), revisaremos primero el caso cuando es posible que se de la absorción al estado -1, i.e., $\mu_0 > 0$ y después cuando $\mu_0 = 0$.

Caso $\mu_0 > 0$: En este caso la relación de recurrencia de tres términos puede reescribirse (utilizando las ecuaciones de simetría) como

$$\begin{aligned}
&Q_0(x) = 1, \\
&-xQ_0(x)\pi_0 = \lambda_0\pi_0[Q_1(x) - Q_0(x)] - \mu_0, \\
&-xQ_n(x)\pi_n = \lambda_n\pi_n[Q_{n+1}(x) - Q_n(x)] - \lambda_{n-1}\pi_{n-1}[Q_n(x) - Q_{n-1}(x)], \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

Definimos entonces a los **polinomios duales** como

$$Q_0^d(x) = 1, \quad Q_{n+1}^d(x) = \frac{\lambda_n \pi_n}{\mu_0}[Q_{n+1}(x) - Q_n(x)], \quad n \geq 0. \tag{1.26}$$

Y tenemos entonces que

$$Q_{n+1}^d(x) = 1 - \frac{x}{\mu_0} \sum_{j=0}^{n} Q_j(x)\pi_j.$$

Por lo que $Q_n^d(0) = 1$, $n \geq 0$. Utilizando la definición de $Q_n^d(x)$, resolviendo nuevamente la ecuación de recurrencia y evaluando en $x = 0$ obtenemos que

$$Q_n(0) = 1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}.$$

También podemos escribir Q_n en términos de Q_n^d como

$$Q_n(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu_0}{\lambda_k \pi_k} Q_{k+1}^d(x).$$

Al igual que el polinomio original, $Q_n^d(x)$ tiene ceros simples denotados por $x_{n,i}^d$, $i = 1, 2, ..., n$, que satisfacen la propiedad de entrelazado (Proposición 1.1)

$$0 < x_{n,i}^d < x_{n,i} < x_{n,i+1}^d < x_{n,i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Tenemos además que

$$0 \leq \xi_i^d \leq \xi_i \leq \xi_{i+1}^d < \infty, \quad i \geq 1,$$

donde $\xi_i^d = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}^d$ y $\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}$.

Los polinomios duales satisfacen además la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$Q_0^d(x) = 1, \quad -xQ_0^d(x) = \mu_0 Q_1^d(x) - \mu_0 Q_0^d(x),$$

$$-xQ_{n+1}^d(x) = \mu_{n+1} Q_{n+2}^d(x) - (\mu_{n+1} + \lambda_n) Q_{n+1}^d(x) + \lambda_n Q_n^d(x), \quad n \geq 0.$$

Por lo que la matriz de Jacobi asociada está dada por

$$\mathcal{A}^d = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_0 & -(\lambda_0 + \mu_1) & \mu_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \mu_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.11*[8, Teorema 3.11.]* Sea $\mu_0 > 0$. Entonces existe al menos una medida de probabilidad ψ^d con soporte en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^\infty Q_n^d(x) Q_m^d(x) d\psi^d(x) = \frac{\delta_{nm}}{\pi_n^d}. \tag{1.27}$$

Si ψ^d es dicha medida, entonces $d\psi(x) = \frac{x d\psi^d(x)}{\mu_0}$ es una solución del problema de momentos de Stieltjes original para el que

$$\mu_0 \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} \leq 1. \tag{1.28}$$

Inversamente, si ψ es una solución del problema de momentos de Stieltjes original tal que (1.28) es válida, entonces la medida de probabilidad ψ^d está dada por

$$d\psi^d(x) = \mu_0 \frac{d\psi(x)}{x} \mathbf{1}_{(0,\infty)} + \left(1 - \mu_0 \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x}\right) \delta_0(x), \tag{1.29}$$

donde $\mathbf{1}_A$ es la función indicadora, y satisface (1.27).

Demostración. La demostración a este teorema puede ser consultada en [8].

La medida de probabilidad ψ^d en (1.29) es conocida generalmente como una transformación de Geronimus de la medida ψ, mientras que la medida ψ es una transformación de Christoffel de la medida ψ^d.

Para procesos de nacimiento y muerte, los polinomios duales $(Q_n^d)_n$ son siempre polinomios de nacimiento y muerte, por lo que llamaremos a estos procesos **procesos de nacimiento y muerte duales** y serán denotados por $\{X_t^d,\ t \geq 0\}$. Observemos que $\mathcal{A}^d$ es conservativa ($\mu_0^d = 0$) y las tasas de nacimiento y muerte duales son $\{(\lambda_n^d, \mu_n^d),\ n \geq 0\}$ donde $\lambda_n^d = \mu_n$, $\mu_{n+1}^d = \lambda_n$, mientras que los coefientes potenciales están dados por

$$\pi_0^d = 1, \quad \pi_n^d = \frac{\mu_0}{\mu_n \pi_n}, \quad n \geq 1.$$

Y tenemos además que

$$\frac{1}{\lambda_n^d \pi_n^d} = \frac{\pi_n}{\mu_0}.$$

Caso $\mu_0 = 0$: En este caso el polinomio $Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$ es siempre un múltiplo del polinomio $-x$. Definimos entonces a los **polinomios duales** como

$$Q_n^d(x) = \frac{\lambda_n \pi_n}{-x}[Q_{n+1}(x) - Q_n(x)], \quad n \geq 0.$$

Ahora tenemos las relaciones

$$Q_n^d(x) = \sum_{k=0}^{n} \pi_n Q_n(x), \quad Q_n(x) = 1 - x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} Q_k^d(x), \quad n \geq 0.$$

Por lo que $Q_n(0) = 1$, $n \geq 0$, y $Q_n^d(0) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k$, $n \geq 0$. Al igual que en el caso anterior $Q_n^d(x)$ tiene n ceros simples denotados por $x_{n,i}^d$, $i = 1, 2, ..., n$, que satisfacen la propiedad de entrelazado

$$0 < x_{n,i}^d < x_{n,i} < x_{n,i+1}^d < x_{n,i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

y además

$$0 \leq \xi_i^d \leq \xi_i \leq \xi_{i+1}^d < \infty, \quad i \geq 1,$$

donde $\xi_i^d = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}^d$. Estos polinomios duales satisfacen la relación de recurrencia de tres términos

$$Q_0^d(x) = 1, \quad -xQ_0^d(x) = \mu_1 Q_1^d(x) - (\lambda_0 + \mu_1) Q_0^d(x),$$

$$-xQ_n^d(x) = \mu_{n+1}Q_{n+1}^d(x) - (\lambda_n + \mu_{n+1})Q_n^d(x) + \lambda_n Q_{n+1}^d(x), \quad n \geq 1.$$

Por lo que la matriz de Jacobi asociada es

$$\mathcal{A}^d = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\mu_1) & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_1+\mu_2) & \mu_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_2+\mu_3) & \mu_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Observemos que esta matriz A^d no es conservativa ($\mu_0^d > 0$). Las tasas de nacimiento y muerte duales están dadas por $\lambda_n^d = \mu_{n+1}$, $\mu_n^d = \lambda_n$, mientras que los coeficientes potenciales son

$$\pi_0^d = 1, \quad \pi_n^d = \frac{\lambda_0}{\lambda_n \pi_n}, \quad n \geq 1.$$

Y tenemos además que

$$\frac{1}{\lambda_n^d \pi_n^d} = \frac{\pi_{n+1}}{\lambda_0}.$$

Teorema 1.12 *[8, Teorema 3.14.]* Sea $\mu_0 = 0$. Entonces existe al menos una medida de probabilidad ψ^d con soporte en $[0,\infty)$ tal que

$$\int_0^\infty Q_n^d(x)Q_m^d(x)d\psi^d(x) = \frac{\delta_{nm}}{\pi_n^d}, \qquad \text{y} \qquad \lambda_0 \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x} \leq 1.$$

Si ψ^d es dicha medida, entonces

$$d\psi(x) = \lambda_0 \frac{d\psi^d(x)}{x}\mathbf{1}_{(0,\infty)} + \left(1 - \lambda 0 \int_0^\infty \frac{d\psi^d(x)}{x}\right)\delta_0(x),$$

es una solución del problema de momentos de Stieltjes original. Inversamente, si ψ es la medida espectral del problema de momentos original, entonces $d\psi^d(x) = \frac{xd\psi(x)}{\lambda_0}$ define una medida de probabilidad que satisface las condiciones anteriores.

1.3. Funciones hipergeométricas confluentes

Tomando $z = \frac{x}{b}$ en la serie hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!},$$

donde asumimos que a y c no son enteros negativos y son distintas a cero, obtenemos una serie de potencias en x cuyo radio de convergencia es $|b|$ y que define una función analítica con singularidades en $x = 0, b$ y ∞. Cuando $b \to \infty$, el caso límite definirá una función completa cuya singularidad en $x = \infty$ es una *confluencia* de dos singularidades de $F\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right)$. De esta forma llegamos a la serie de Kummer

$$1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots .$$

Que en notación de la función hipergeométrica generalizada sería ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; x\right)$, denotada por algunos autores como $\Phi(a, c; x)$ o $M(a, c, x)$.

La serie de Kummer satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c - x)\frac{dy}{dx} - ay = 0. \tag{1.30}$$

Realizando la sustitución

$$y = x^{-\frac{c}{2}}e^{\frac{x}{2}}z, \qquad a = \frac{1}{2} - k + \mu, \qquad c = 1 + 2\mu,$$

reduce (1.30) a la forma estándar de la ecuación de Whittaker

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right)z = 0.$$

A estas dos ecuaciones se las conoce como *ecuaciones hipergeométricas confluentes*, y a cualquier solución de alguna de ellas se le conoce como *función hipergeométrica confluente*. Dos de estas funciones son la función de Tricomi y la función del cilindro parabólico.

1.3.1. Función de Tricomi

La función Ψ de Tricomi fue introducida por él mismo en 1927, quien la denota como G. Esta función está definida como

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}dt, \qquad \mathrm{Re}(a) > 0. \tag{1.31}$$

y tiene la siguiente relación con la función ${}_2F_0$

$${}_2F_0\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ - \end{matrix}; -\frac{1}{x}\right) = x^{\alpha}\Psi(\alpha, \alpha - \beta + 1; x).$$

$\Psi(c, \alpha; x)$ es una función multivaluada de x. Algunas relaciones elementales de la función Ψ son

(1) $\Psi(a-1, c; x) - (2a - c + x)\Psi(a, c; x) + a(a - c + 1)\Psi(a+1, c; x) = 0,$

(2) $(c - a - 1)\Psi(a, c-1; x) - (c - 1 + x)\Psi(a, c; x) + x\Psi(a, c+1; x) = 0,$

(3) $\Psi(a, c; x) - a\Psi(a+1, c; x) - \Psi(a, c-1; x) = 0,$

(4) $(c-a)\Psi(a,c;x) - x\Psi(a,c+1;x) + \Psi(a-1,c;x) = 0,$

(5) $(a+x)\Psi(a,c;x) + a(c-a-1)\Psi(a+1,c;x) - x\Psi(a,c+1;x) = 0,$

(6) $(a-1+x)\Psi(a,c;x) - \Psi(a-1,c;x) + (a-c+1)\Psi(a,c-1;x) = 0.$

1.3.2. Función del cilindro parabólico

A las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right) y = 0,$$

se les conoce como *funciones del cilindro parabólico* o funciones de Weber-Hermite. Pueden expresarse en términos de otras funciones hipergeométricas confluentes, por ejemplo, en términos de la función de Tricomi como

$$\begin{aligned} D_v(x) &= 2^{\frac{1}{2}v} e^{-\frac{1}{4}x^2} \Psi\left(-\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} x\Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}v, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}x^2\right). \end{aligned}$$

Un caso particular de esta, cuando $v = n$ es un entero no negativo, resulta en los polinomios de Hermite

$$H_n\left(2^{-\frac{1}{2}}x\right) = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} D_n(x) = 2^{x-\frac{1}{2}} x\Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}x^2\right).$$

1.4. Aplicación a Teoría de Colas

Utilizando la notación de Kendall para teoría de colas, llamaremos a los modelos de la forma $A/S/c/K$, donde A denota el tiempo entre llegadas a la cola, S la distribución del tiempo de servicio (para estos dos valores utilizaremos siempre M, de Markoviano, i.e., con tiempos exponenciales entre llegadas), c el número de servidores en el nodo y K la capacidad de la cola. Esta notación puede extenderse a $A/S/c/K/N/D$, donde N denota el el tamaño de la población de trabajos a ser servidos y D la disciplina de la cola.

Modelo $M/M/1/N$

En este caso los tiempos de llegada y de servicio de la cola son exponenciales con parámetro constante $(\lambda+\mu)^{-1} > 0$, hay un único servidor y la capacidad de la cola es $N < \infty$. Las tasas de nacimiento y muerte son constantes $\lambda,\ \mu > 0$, el estado de espacios es finito , $\mathcal{S} = \{0, 1, ..., N\}$ y el operador infinitesimal está dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ & & & \mu & -\lambda-\mu \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}$ es no conservativa y sus coeficientes potenciales son

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \quad j = 0, 1, ..., N.$$

La relación de recurrencia de tres términos está dada por $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ y

$$Q_1(x) = -(x-\lambda-\mu)/\lambda, \quad -xQ_n(x) = \lambda Q_{n+1}(x) - (\lambda+\mu)Q_n(x) + \mu Q_{n-1}(x), \quad n = 1, ..., N-1.$$

La medida espectral está dada por

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2}{N+2} \sin^2\left(\pi \frac{k+1}{N+2}\right) \delta_{x_{N+1,k}}(x), \quad k = 0, 1, .., N.$$

Y la representación de Karlin-McGregor por

$$P_{ij}(t) = \frac{2e^{-(\lambda+\mu)t}}{(N+2)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{i-j}} \sum_{k=0}^{N} e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos(\pi\frac{k+1}{N+2})} \sin\left(\pi \frac{(i+1)(k+1)}{N+2}\right) \sin\left(\pi \frac{(j+1)(k+1)}{N+2}\right).$$

El caso cuando la cola $M/M/1/N$ es conservativa puede consultarse en [32]

Modelo $M/M/1$

En este caso tenemos tasas de nacimiento y muerte constantes λ, $\mu > 0$ y el operador infinitesimal será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & \\ & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

El proceso de nacimiento y muerte que modela la cola $M/M/1$ tiene un único servidor, pero la cola puede ser infinitamente larga.

Definiendo $\sigma_\pm = \left(\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\mu}\right)^2$, el soporte de ortogonalidad de la medida espectral ψ será $[\sigma_-, \sigma_+]$, que es un intervalo acotado y contenido en $[0, \infty)$. Además, la medida espectral puede escribirse como

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{(x-\sigma_-)(\sigma_+-x)}}{2\pi\lambda\mu}m, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+].$$

Los polinomios generados por la relación de recurrencia de tres términos están dados por

$$Q_n(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{\lambda = \mu - x}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),$$

donde $(U_n)_n$ son los polinomios de Chebychev de segunda clase. La fórmula de Karlin-McGregor puede escribirse como

$$P_{ij}(t) = \frac{2e^{-(\lambda+\mu)t}}{\pi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{i-j}} \int_0^\pi e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos(\theta)} \sin((i+1)\theta)\sin((j+1)\theta)d\theta,$$

considerando $x = \lambda + \mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cos(\theta)$.

Modelo $M/M/\infty$

En este caso asumimos que hay servidores infinitos. Este ejemplo fue estudiado por primera vez en [19]. Las tasas de nacimiento y muerte están dadas por

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu n, \quad n \geq 0, \quad \lambda,\ \mu > 0.$$

El operador infinitesimal es

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes potenciales están dados por

$$\pi_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}, \quad j \geq 0.$$

Considerando $a = \lambda/\mu$, la relación de recurrencia de los polinomios $Q_n(x)$ es

$$aQ_{n+1}(x) - (a+n)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) = -\frac{x}{\mu}Q_n(x).$$

Por lo que

$$Q_n(x) = C_n\left(\frac{x}{\mu}; \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

donde $C_n(x;a)$ son los polinomios de Charlier. Por lo tanto, la medida espectral está dada por

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a}a^n}{n!}\delta_{x_n}, \quad x_n = \mu n.$$

Y la representación de Karlin-McGregor será entonces

$$P_{ij}(t) = \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\mu n} Q_i(\mu n) Q_j(\mu n) \frac{e^{-a}a^n}{n!}.$$

Modelo $M/M/k$

En este caso tenemos una cola con k servidores ($k < \infty$). Este ejemplo fue estudiado por primera vez bajo el contexto de polinomios ortogonales en [19]. Las tasas de nacimiento y muerte son

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{sí} \quad n \leq k \\ k\mu, & \text{sí} \quad n > k \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu > 0.$$

Los primeros k polinomios son los mismos que para el modelo $M/M/\infty$, i.e., los polinomios de Charlier

$$Q_n(x) = C_n\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Cuando $n \geq k$ los polinomios $Q_n(x)$ pueden escribirse como

$$Q_{n+k}(x) = \left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^{n/2}\left[Q_k(x)U_n\left(\frac{\lambda + k\mu - x}{2\sqrt{k\lambda\mu}}\right) - \sqrt{\frac{k\mu}{\lambda}}Q_{k-1}^{(0)}(x)U_{n-1}\left(\frac{\lambda + k\mu - x}{2\sqrt{k\lambda\mu}}\right)\right],$$

donde $U_n(x)$ son los polinomios de Chevychev de segunda especie y $Q_n^{(0)}(x)$ son los 0-ésimos polinomios asociados.

En [8] puede encontrarse un análisis más profundo de como llegar a estos resultados, además de ejemplos de trayectorias para diferentes valores de λ y μ para el modelo $M/M/\infty$.

Por otra parte, en las secciones 6,7 y 8 de [19] se encuentra un análisis espectral de algunas distribuciones de probabilidad de varias cantidades aleatorias asociadas a estos procesos, como la distribución del tiempo de espera de un cliente que llega en el tiempo t, la distribución de la longitud de un periodo ocupado, entre otros problemas probabílísticos.

Otro tipo de modelo de colas de nacimiento y muerte es el que considera E. van Doorn en [33], quien contempla un modelo con tasas $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$, $n \geq 0$, y $\mu_n = \mu$, $n \geq 1$, que sirve como un modelo de colas donde los clientes potenciales se desalientan por la longitud de la cola.

1.4.1. Ajustar modelos de colas de nacimiento y muerte a datos

Si consideramos un sistema de colas cuyas llegadas y salidas ocurren una a la vez. Sea $X(S)$ el número de clientes en el sistema al tiempo s. Consideramos además un modelo de nacimiento y muerte que se ajuste a los datos recolectados sobre el intervalo $[0,t]$, con $\overline{\lambda}_i$ y $\overline{\mu}_i$ estimadores de sus tasas de nacimiento y muerte respectivamente basados en promedios de la muestra sobre el intervalo de tiempo $[0,t]$ y $\alpha_i(t)$ estimadores naturales directos de la distribución estacionaria basados en promedios de la muestra sobre el intervalo de tiempo $[0,t]$. Sean además:

- $A_i(t)$ el número de llegadas durante el intervalo $[0,t]$ cuando el sistema está en el estado i,
- $D_i(t)$ el número de salidas durante el intervalo $[0,t]$ cuando el sistema está en el estado i,
- $T_i(t)$ el tiempo total durante el intervalo $[0,t]$ que el sistema está en el estado i, i.e., $T_i(t) \equiv \int_0^t 1_{X(S)=i}\, ds, \quad t \geq 0$.

Entonces

$$\overline{\lambda}_i \equiv \frac{A_i(t)}{T_i(t)}, \qquad \overline{\mu}_i \equiv \frac{D_i(t)}{T_i(t)}, \qquad \overline{\alpha}_i \equiv \frac{T_i(t)}{t}, \qquad t \geq 0. \tag{1.32}$$

Generalmente esta forma de estimaciones no resulta en un proceso de nacimiento y muerte irreducible, pues el estado inicial y el final pueden ser transitorios. Considerando el caso en que el proceso sea irreducible este tendrá la ditribución única estacionaria

$$\overline{\alpha}_i^e \equiv \frac{\overline{\pi}_i(t)}{\sum_{j=1}^m \overline{\pi}_j(t)}, \quad 0 \leq i \leq m, \tag{1.33}$$

Equivalentemente, $\overline{\alpha}_i^e(t)$ es el vector de probabilidades único que satisface la ecuación de balance general asociada al proceso de nacimiento y muerte, i.e.,

$$\overline{\alpha}_i^e(t)\overline{\lambda}_i(t) = \overline{\alpha}_{i+1}^e(t)\overline{\mu}_{i+1}(t), \quad \forall i,\ 0 \leq i \leq m. \tag{1.34}$$

Para la comparación estocástica entre las distribuciones estacionarias ajustadas (1.33) y la distribución empírica directa (1.32) utilizamos el concepto de *orden estocástico del cociente de probabilidad* (LR, por sus siglas en ingles) para funciones de probabilidad. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias, cada una tomando valores en los enteros no negativos, con funciones de probabilidad $p_i(k) = P(X_i = k)$. Diremos que X_1 es estocásticamente menor o igual que X_2 en el orden LR, y escribiremos $X_1 \leq_{LR} X_2$ o $p_1 \leq_{LR} p_2$, si

$$\frac{p_1(k+1)}{p_1(k)} \leq \frac{p_2(k+1)}{p_2(k)} \quad \text{para todo entero } k \tag{1.35}$$

La relación entre $\overline{\alpha}_i$ y $\overline{\alpha}_i^e$ está dada entonces por el siguiente teorema:

Teorema 1.13 *[34, Teorema 1.]* (Comparación estocástica entre dos distribuciones estacionarias): Considerando un segmento de la trayectoria de la muestra sobre un intervalo $[0, t]$ de un proceso estocástico con un número finito de transiciones, de las cuales todas son ± 1. Supongamos que se ajusta un proceso de nacimiento y muerte a estos datos, como en (1.32), y que es irreducible con un espacio de estados $0, ..., m$. Para $i_0 \equiv X(0)$ y $i_t \equiv X(t)$, existen tres alternativas mutuamente excluyentes:

- Si $i_0 = i_t$, entonces $\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}^e(t)$;
- Si $i_0 < i_t$, entonces $\overline{\alpha}(t) \geq_{LR} \overline{\alpha}^e(t)$;
- Si $i_0 > i_t$, entonces $\overline{\alpha}(t) \leq_{LR} \overline{\alpha}^e(t)$.

La demostración a este teorema puede ser consultada en [34].

Es importante verificar que el modelo que estemos ajustando satisfazca las hipótesis de estacionariedad en el tiempo y de la propiedad de Markov. La primera de estas puede verificarse tomando una cantidad representativa de funciones reales valuadas en los reales f sobre subintervalos $[t_1, t_2]$, con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$, extendiendo los estadísticos a $\overline{\lambda_i}(t)$, $\overline{\mu_i}(t)$, $\overline{\alpha_i}(t)$ y $\overline{\lambda_i^e}(t)$ a estadísticos asociados como funciones de la tripleta (f, t_1, t_2) y verificando que estos sean aproximadamente constantes.

Por otra parte, para verificar la propiedad de Markov definimos a $X_k^{(i)}$ como el tiempo permanecido en el estado i tras haber llegado a este estado a partir de cualquier otro, a $J_k^{(i)} = +1$ si la transición al final del intervalo es uno más, o $J_k^{(i)} = -1$ en caso contrario y a $Y_k^{(i)}$ como como el tiempo transcurrido fuera del estado i inmediatamente después del intervalo $X_k^{(i)}$, la secuencia de vectores $\{X_k^{(i)}, J_k^{(i)}, Y_k^{(i)} : k \geq 1\}$ deberían ser vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos.

Es adecuado además evaluar la eficiencia de los estimadores mediante la varianza muestral e intervalos de confianza. Para esto hay dos métodos recomendados, el primero se basa en promedios de tiempo simples, mientras que el segundo método consiste en observar únicamente en el tiempo total transcurrido en el estado i, esto concatenando las variables $X_k^{(i)}$. Esto puede consultarse a mayor en detalle en [34].

Algunos problemas que pueden surgir con esta metodología es que a pesar de ser común tener conjuntos de datos grandes, puede que no tengamos suficentes datos para ajustar un modelo general, esto también puede deberse a que en ocasiones es necesario reducir la cantidad de datos disponibles para obtener intervalos en los que el sistema sea aproximadamente estacionario. Incluso para un sistema que sea aproximadamente estacionario sobre un intervalo largo, el tener $2m$ parámetros para $m+1$ estados puede resultar en un modelo con demasiados parámetros. Sí el estado de espacios es grande los datos pueden resultar en estimadores poco confiables para las tasas. En ocasiones será importante combinar datos sobre múltiples subintervalos y ajustar un modelo más restrictivo. Las referencias [23] y [26] pueden usarse como guía para entender y solventar estos problemas.

Otros autores estudian modelos de colas como procesos de nacimiento y muerte desde otras perspectivas como O.J. Otonritse en [27], quien revisa los modelos $M/M/1$, $M/M/s$, $M/M/1/k$ y $M/M/s/k$ basandose en las llamadas *medidas de desempeño estable*, considerando

- N: El número promedio de personas en el sistema cuando se da la llegada,
- λ: la tasa de llegada,
- μ: la tasa promedio de servicio,
- ρ: factor de utilización del sistema,
- L_s: cantidad esperada de clientes en un sistema,
- L_q: cantidad esperada de clientes en la cola,
- W_s: tiempo de espera en el sistema,
- W_q: tiempo de espera anticipado en la cola.

Entonces se obtienen los siguientes valores para los modelos mencionados

	$p_0(t)$	$p_n(t)$	L	L_q	W	W_q
$M/M/1$	$1-\frac{\lambda}{\mu}$, $1-\rho$, $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$	$1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$, $(1-\rho)\rho^n$, $\frac{\rho}{1-\rho}$	λW, $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$, $\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu-\lambda}$, $\frac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$, $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
$M/M/s$	$\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)}{n!}\frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1}$, $\rho=\frac{\lambda}{(s\mu)}$	$\frac{(s\rho)^n}{n!}p_0,\ n<s$, $\frac{\rho^n s^s}{s!},\ n\geq s$, $\rho=\frac{\lambda}{(sp)}<1$	λW, $\frac{\lambda}{\mu}+\lambda W_q$, $\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}p_0$	λW_q, $L-\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}p_0$	$\frac{L}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}+W_q$, $\frac{1}{\mu}+\frac{\rho(s\rho)^s}{\lambda s!(1-\rho)^2}p_0$	$\frac{L_q}{\lambda}$, $W-\frac{1}{\mu}$, $\frac{\rho(s\rho)^s}{\lambda s!(1-\rho^2)}p_0$
$M/M/1/k$	$\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}$, $\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$, $\frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}}$	$\rho\frac{1-(k+1)\rho^k+kp^{k+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})}$, $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$	$L-(1-p_0)$, $\lambda(1-p_k)W_q$	$\frac{1}{\mu}(L+1)$, $\frac{L}{\lambda(1-p_k)}$	$\frac{1}{\mu}L$, $W-\frac{1}{\mu}$
$M/M/s/k$	$\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^n}{n!}+$ $\frac{(s\rho)^s}{s!}\left(\frac{1-\rho^{k-s+1}}{1-\rho}\right)\Big]^{-1}$	$\frac{(s\rho)^n}{n!}p_0,\ n<s$, $\frac{\rho^n s^s}{s!}p_0,\ s\leq n\geq k$, $\rho=\frac{\lambda}{(s\mu)}$	$p_0\frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}\{1-$ $[1+(1-\rho)(k-$ $s)]\rho^{k-1}\}$	$L_q+\frac{\lambda}{\mu}(1-p_k)$	$L_q+\frac{1}{\mu}$	$\frac{L_q}{\lambda(1-p_k)}$

Capítulo 2

Procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal

Este capítulo estará dedicado al estudio de los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal. Decimos que un proceso de nacimiento y muerte tiene crecimiento lineal si $\lambda_n = \lambda n + a$ y $\mu_n = \mu n + b$ con $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$ y $\mu > 0$. Estos procesos ocurren de manera natural en el estudio de la reproducción biológica y el crecimiento de poblaciones.

Si el estado del sistema n describe el tamaño de la población, entonces la tasa de crecimiento instantánea promedio es $\lambda n + a$. De forma similar, la probabilidad de que el estado del proceso decrezca en 1 después de un pequeño periodo de tiempo es $(\mu n + b)t + o(t)$. El factor λn representa el crecimiento de la población dado el tamaño actual de la población. El segundo factor a puede ser interpretado como el incremento del estado del sistema debido a una fuente externa. Las dos componentes μn y b, que forman la tasa de muerte tienen un significado análogo.

Los procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal representan la formulación más elemental de modelos probabilísticos para describir el crecimiento biológico.

Comenzaremos el capítulo derivando las relaciones de recurrencia de los modelos conectados a polinomios de Meixner y de Laguerre y a partir de estos derivando algunos valores importantes como son el operador infintesimal, los coeficientes potenciales, las tasas de nacimiento y muerte entre otros. El siguiente paso será estudiar algunas propiedades importantes de cada uno, principalmente en cuanto a absorción y recurrencia. En este capítulo encontraremos además formulaciones explícitas para las funciones generadoras y las probabilidades de cada uno de los modelos. Estudiaremos después el número de transiciones hasta la absorción para unos procesos con crecimiento lineal especiales con estado absorbente (-1), determinando su relación con los polinomios ultraesféricos y de Chebychev para determinar así una fórmula explícita para calcular esta variable. Analizaremos también los casos de los **procesos 0-asociados**, donde el estado 0 se convierte en un estado absorbente, de cada uno de los modelos, determinando sus probabiliades de transición, funciones generadoras y medidas espectrales. Finalizaremos con un breve estudio del modelo continuo de Ehrenfest, donde veremos su relación con los polinomios de Krawtchouk y algunas propiedades de este modelo. Este capítulo está basado en las referencias [8, 18].

2.1. Procesos con crecimiento lineal asociados a polinomios de Meixner

En esta sección determinaremos los modelos de crecimiento lineal para los cuales los sistemas de polinomios correspondientes están constituidos por los polinomios de Meixner. Existen cuatro procesos con crecimiento lineal conectados con polinomios de Meixner. De estos, dos poseen un estado -1 absorbente y los otros dos tienen una barrera reflectante en 0.

Comenzaremos derivando las 4 relaciones de recurrencia que corresponden a procesos conectados a polinomios de Meixner. Para esto aplicaremos ciertas renormalizaciones de M_n y transformaciones afines a x y calcularemos las relaciones de recurrencia de los nuevos polinomios a partir de (1.13).

Caso I. Para $\lambda < \mu$, definimos

$$\phi_n^{(1)} = M_n\left(\frac{x}{\mu-\lambda}; \beta, \frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{2.1}$$

Entonces de (1.13) tenemos que

$$-\left(\frac{x}{\mu-\lambda}\right)\left(\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}}\right)\phi_n^{(1)} = \frac{n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\phi_{n-1}^{(1)} - \left(n + \frac{n}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \beta\right)\phi_n^{(1)} + (n+\beta)\phi_{n+1}^{(1)}.$$

Simplificando

$$-\left(\frac{x}{\mu-\lambda}\right)\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\right)\phi_n^{(1)} = \frac{n\mu}{\lambda}\phi_{n-1}^{(1)} - \left(n + \frac{n\mu}{\lambda} + \beta\right)\phi_n^{(1)} + (n+\beta)\phi_{n+1}^{(1)}$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{x}{\lambda}\right)\phi_n^{(1)} = \frac{n\mu}{\lambda}\phi_{n-1}^{(1)} - \left(n + \frac{n\mu}{\lambda} + \beta\right)\phi_n^{(1)} + (n+\beta)\phi_{n+1}^{(1)}.$$

Y finalmente, multiplicando por λ, obtenemos la siguiente expresión

$$-x\phi_n^{(1)} = n\mu\phi_{n-1}^{(1)} - (n\lambda + n\mu + \beta\lambda)\,\phi_n^{(1)} + \lambda(n+\beta)\phi_{n+1}^{(1)}.$$

De (1.12) tenemos además que

$$\rho_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta} \frac{(\beta)_n}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Igualando ahora $\frac{x}{\mu-\lambda} = n$ obtenemos los puntos donde se concentran las masas de $\rho(x)$

$$n = \frac{x}{\mu - \lambda} \Leftrightarrow x = (\mu - \lambda)n.$$

En resumen, los polinomios $\phi_n^{(1)}$ constituyen un sistema de polinomios ortogonales con respecto a una medida discreta $\rho(x)$ que concentra masas $\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta} \frac{(\beta)_n}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ en los puntos $(\mu - \lambda)n$ para $n = 0, 1, 2, ...$ Notemos además que de la relación de recurrencia de tres términos obtenida y al estar trabajando con procesos con crecimiento lineal, podemos ver que el proceso con tasas de nacimiento $\lambda_n = \lambda(n + \beta)$ y tasas de muerte $\mu_n = n\mu$ para $n \geq 0$, donde $\lambda < \mu$ está asociado al sistema de polinomios $\phi_n^{(1)}$ (donde β es un parámetro arbitrario positivo). Además el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda\beta & \lambda\beta & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -[\lambda(\beta+1)+\mu] & \lambda(\beta+1) & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -[\lambda(\beta+2)+2\mu] & \lambda(\beta+2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calcularemos además π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$

$$\begin{aligned} \pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} &= \frac{\lambda\beta\lambda(\beta+1)\lambda(\beta+2)\cdots\lambda(\beta+n-1)}{\mu(2\mu)(3\mu)\cdots(n\mu)} \\ &= \frac{\lambda^n\beta(1+\beta)(2+\beta)\cdots(n-1+\beta)}{n!\mu^n} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{n!}. \end{aligned}$$

Donde $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ denota el símbolo de Pochhammer.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n\pi_n} &= \frac{1}{(\lambda(n+\beta))}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n} \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{n!}{(n+\beta)(\beta)_n} \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{n!}{(\beta)_{n+1}}. \end{aligned}$$

Llamaremos F a este proceso de nacimiento y muerte.

Caso II. Multiplicando $\phi_n^{(1)}(x)$ por el factor $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ y trasladando la variable x adecuadamente, para $\lambda < \mu$ llegamos al conjunto de polinomios

$$\phi_n^{(2)}(x) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n M_n\left(\frac{x}{\mu-\lambda} - \beta; \beta, \frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{2.2}$$

Por lo que sustituyendo en (1.13) tenemos que

$$\begin{aligned} -\left(\frac{x-\beta(\mu-\lambda)}{\lambda}\right)\phi_n^{(2)} = \left(\frac{n\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}\phi_{n-1}^{(2)} - \left(n + \frac{n\mu}{\lambda} + \beta\right)\phi_n^{(2)} \\ +(n+\beta)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n+1}\phi_{n+1}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{x-\beta(\mu-\lambda)}{\lambda}\right)\phi_n^{(2)} = n\phi_{n-1}^{(2)} - \left(n + \frac{n\mu}{\lambda} + \beta\right)\phi_n^{(2)} + (n+\beta)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\phi_{n+1}^{(2)}$$

$$\Leftrightarrow -(x-\beta(\mu-\lambda))\phi_n^{(2)} = n\lambda\phi_{n-1}^{(2)} - (n\lambda + n\mu + \beta\lambda)\phi_n^{(2)} + (n+\beta)\mu\phi_{n+1}^{(2)}.$$

Por lo tanto, podemos ver que satisface

$$-x\phi_n^{(2)}(x) = n\lambda\phi_{n-1}^{(2)}(x) - (n\mu + n\lambda + \beta\mu)\phi_n^{(2)}(x) + (n+\beta)\mu\phi_{n+1}^{(2)}(x),$$

para $n \geq 0$, con $\lambda < \mu$.

Es fácil darse cuenta que como resultado de la transformación anterior, esencialmente se intercambiaron los parámetros λ y μ. La tasa de nacimiento está dada por $(n+\beta)\mu$ y la tasa de muerte es $n\lambda$. Por lo que el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\beta\mu & \beta\mu & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & -[\mu(\beta+1)+\lambda] & \mu(\beta+1) & 0 & \cdots \\ 0 & 2\lambda & -[\mu(\beta+2)+2\lambda] & \mu(\beta+2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

De (1.12), tenemos además que los polinomios correspondientes $\phi_n^{(2)}(x)$ son ortogonales con respecto a una medida conformada por masas discretas

$$\rho_n = (1-\gamma)^\beta \frac{(\beta)_n \gamma^n}{n!}, \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Igualando $n = \frac{x}{\mu-\lambda} - \beta$ vemos que están localizadas en los puntos $(n+\beta)(\mu-\lambda)$, para $n = 0, 1, 2, ...$

Finalmente, calculamos π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$:

$$\pi_n = \frac{\beta\mu(1+\beta)\mu(2+\beta)\mu\cdots(n-1+\beta)\mu}{\lambda(2\lambda)(3\lambda)\cdots(n\lambda)} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)^n}{n!}.$$

Donde nuevamente $(a)_k$ denota el símbolo de Pochhammer. Por otra parte, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda_n\pi_n} = \frac{1}{(n+\beta)\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{\mu(\beta)_{n+1}}.$$

Los dos casos que acabamos de encontrar están relacionados con procesos de nacimiento y muerte para los cuales el estado 0 es una barrera reflectante. Mediante normalizaciones adicionales de los polinomios de Meixner podemos obtener dos casos adicionales de procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal para los que existe un estado absorbente -1.

Llamaremos E a este proceso de nacimiento y muerte.

Caso III. Los polinomios

$$\phi_n^{(3)}(x) = \frac{(\beta)_n}{n!} M_n\left(\frac{x}{\mu-\lambda} - \beta + 1; \beta; \frac{\lambda}{\mu}\right), \tag{2.3}$$

satisfacen

$$-x\phi_n^{(3)} = (n+\beta-1)\mu\phi_{n-1}^{(3)} - \left[(n+\beta-1)\mu + (n+1)\lambda\right]\phi_n^{(3)} + (n+1)\lambda\phi_{n+1}^{(3)},$$

pues sustituyendo en (1.13) tenemos que

$$-[x-(\beta+1)(\mu-\lambda)]\phi_n^{(3)} = \left[\frac{n\mu\left(\frac{(\beta)_n}{n!}\right)}{\frac{(\beta)_{n-1}}{(n-1)!}}\right]\phi_{n-1}^{(3)} - (n\lambda+n\mu+\beta\lambda)\phi_n^{(3)} + (n+\beta)\lambda\left[\frac{\left(\frac{(\beta)_n}{n!}\right)}{\left(\frac{(\beta)_{n+1}}{(n+1)!}\right)}\right]\phi_{n+1}^{(3)}$$

$$\Leftrightarrow -[x-(\beta+1)(\mu-\lambda)]\phi_n^{(3)} = \mu(n+\beta+1)\phi_{n-1}^{(3)} - (n\lambda+n\mu+\beta\lambda)\phi_n^{(3)} + (n+1)\lambda\phi_{n+1}^{(3)}$$

$$\Leftrightarrow -x\phi_n^{(3)} = \mu(n+\beta+1)\phi_{n-1}^{(3)} - [(n+\beta-1)\mu + (n+1)\lambda]\phi_n^{(3)} + (n+1)\lambda\phi_{n+1}^{(3)}.$$

Por lo que la tasa de nacimiento está dada por $(n+1)\lambda$ y la tasa de muerte por $(n+\beta-1)\mu$, para $\beta \geq 1$ y $n \geq 0$. Tenemos entonces que el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -[\lambda+\mu(\beta-1)] & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \beta\mu & -[\beta\mu+2\lambda] & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu(\beta+1) & -[\mu(\beta+1)+3\lambda] & 3\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Por (1.12), los polinomios $\phi_n^{(3)}(x)$ son ortogonales con respecto a una medida conformada por masas discretas ρ_n localizadas en los puntos

$$n = \frac{x}{\mu-\lambda} - \beta + 1 \Leftrightarrow x = (\mu-\lambda)(n+\beta-1), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Finalmente, calculamos π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$:

$$\pi_n = \frac{\lambda(2\lambda)(3\lambda)\cdots(n\lambda)}{(\beta\mu)(1+\beta)\mu(2+\beta)\mu\cdots(n+\beta-1)\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n}.$$

Con $(a)_k$ denotando el símbolo de Pochhammer. Por otra parte

$$\frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{(n+1)\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{n!} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\lambda(n+1)!}.$$

Llamaremos C a este proceso de nacimiento y muerte.

Caso IV. Los polinomios

$$\phi_n^{(4)}(x) = \frac{(\beta)_n}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n M_n\left(\frac{x}{\mu-\lambda} - 1; \beta; \frac{\lambda}{\mu}\right), \tag{2.4}$$

satisfacen

$$-x\phi_n^{(4)} = (n+\beta-1)\lambda\phi_{n-1}^{(4)} - [(n+\beta-1)\lambda + (n+1)\mu]\phi_n^{(4)} + (n+1)\mu\phi_{n+1}^{(4)},$$

pues sustiyuendo en (1.13) tenemos que

$$-[x-(\mu-\lambda)]\phi_n^{(4)} = n\mu\left[\frac{\left(\frac{(\beta)_n}{n!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\left(\frac{(\beta)_{n-1}}{(n-1)!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}}\right]\phi_{n-1}^{(4)} - (n\lambda + n\mu + \beta\lambda)\phi_n^{(4)}$$
$$+(n+\beta)\lambda\left[\frac{\left(\frac{(\beta)_n}{n!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\left(\frac{(\beta)_{n+1}}{(n+1)!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}}\right]\phi_{n+1}^{(4)}$$

$$\Leftrightarrow -x\phi_n^{(4)} = \mu\left[\frac{(\beta+n-1)\lambda}{\mu}\right]\phi_{n-1}^{(4)} - (n\lambda+n\mu+\beta\lambda+\mu-\lambda)\phi_n^{(4)} + (n+\beta)\lambda\left[\frac{(n+1)\mu}{(n+\beta)\lambda}\right]\phi_{n+1}^{(4)}$$

$$\Leftrightarrow -x\phi_n^{(4)} = (n+\beta-1)\lambda\phi_{n-1}^{(4)} - [(n+\beta-1)\lambda + (n+1)\mu]\phi_n^{(4)} + (n+1)\mu\phi_{n+1}^{(4)}.$$

Por lo que la tasa de nacimiento está dada por $(n+1)\mu$ y la tasa de muerte por $(n+\beta-1)\lambda$, para $\beta \geq 1$. Tenemos entonces que el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -[\mu+\lambda(\beta-1)] & \mu & 0 & 0 & \cdots \\ \beta\lambda & -[\beta\lambda+2\mu] & 2\mu & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda(\beta+1) & -[\lambda(\beta+1)+3\mu] & 3\mu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Por (1.12), los polinomios $\phi_n^{(4)}(x)$ son ortogonales respecto a una medida conformada por masas discretas ρ_n localizadas en los puntos

$$n = \frac{x}{\mu-\lambda} - 1 \Leftrightarrow x = (\mu-\lambda)(n+1), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Finalmente, calculamos π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$:

$$\pi_n = \frac{\mu(2\mu)(3\mu)\cdots(n\mu)}{(\beta\lambda)(1+\beta)\lambda(2+\beta)\lambda\cdots(n+\beta-1)\lambda} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n}.$$

Por otra parte

$$\frac{1}{\lambda_n\pi_n} = \frac{1}{(n+1)\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{n!} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\mu(n+1)!}.$$

Llamaremos D a este proceso de nacimiento y muerte.

En la siguiente tabla resumimos los resultados obtenidos de estos 4 procesos:

Proceso	Tasa de Nacimiento	Tasa de Muerte	Estado Cero	Sistema de Polinomios	Medida Espectral	π_n	$\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$
C	$(n+1)\lambda$	$(n+\beta-1)\mu$, $\beta \geq 1$	Si $\beta > 1$, entonces existe un estado absorbente en -1, $\mu_0 = (\beta-1)\mu$	$\phi_n^{(3)}(x)$	Masas ρ_n localizadas en $(\mu-\lambda)(n+\beta-1)$, $n = 0, 1, 2, ...$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n}$	$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\lambda(n+1)!}$
D	$(n+1)\mu$	$(n+\beta-1)\lambda$, $\beta \geq 1$	Si $\beta > 1$, entonces existe un estado absorbente en -1, $\mu_0 = (\beta-1)\lambda$	$\phi_n^{(4)}(x)$	Masas ρ_n localizadas en $(\mu-\lambda)(n+1)$, $n = 0, 1, 2, ...$	$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{n!}{(\beta)_n}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\mu(n+1)!}$
E	$(n+\beta)\mu$, $\beta > 0$	$n\lambda$	El estado cero es una barrera reflectante ($\mu_0 = 0$)	$\phi_n^{(2)}(x)$	Masas ρ_n localizadas en $(\mu-\lambda)(n+\beta)$, $n = 0, 1, 2, ...$	$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{n!}$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{\mu(\beta)_{n+1}}$
F	$(n+\beta)\lambda$, $\beta > 0$	$n\mu$	El estado cero es una barrera reflectante ($\mu_0 = 0$)	$\phi_n^{(1)}(x)$	Masas ρ_n localizadas en $n(\mu-\lambda)$, $n = 0, 1, 2, ...$	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{n!}$	$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{n!}{(\beta)_{n+1}}$

Puede probarse fácilmente que de esta forma hemos obtenido todos los posibles modelos con crecimiento lineal asociados a los polinomios de Meixner clásicos. Enunciaremos ahora consecuencias cualitativas respecto a los procesos C, D, E y F. Algunos de estos resultados requieren conocimiento del crecimiento asintótico de π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$. La relación asintótica $\frac{(\beta)_n}{n!} \sim \Gamma(\beta) n^{\beta-1}$ es muy útil para esta conexión.

Proceso C.

Veamos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$. Para esto utilizaremos la relación asintótica previamente enunciada

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\lambda(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\lambda(n)!(n+1)} \\ &\sim \frac{\Gamma(\beta)}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{n^{\beta-1}}{n+1}\end{aligned}$$

Mediante el criterio comparación (notando que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge) se puede demostrar que el segundo factor es divergente. Por lo que al multiplicar cada entrada por $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n > 1$, la serie divergerá también, i.e.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty.$$

Esto nos dice que la absorción al estado -1 ocurre con certeza en un tiempo finito. Más aún, por (1.25), como existen las integrales $\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{x^{n+1}}$ para cada n, todos los momentos de la distribución del tiempo hasta la absorción del estado inicial prescrito son finitos.

Proceso D.

En este caso la absorción al estado -1 no es un evento seguro pues

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} < \infty.$$

En efecto, pues de manera análoga al caso anterior

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{(\beta)_n}{\mu(n+1)!} \\ &\sim \frac{\Gamma(\beta)}{\mu} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n^{\beta-1}}{n+1}\end{aligned}$$

Utilizando ahora el criterio de la razón podemos ver que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^{\beta-1}}{n+2}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{n^{\beta-1}}{n+1}}\right| = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Por lo que la serie converge.

Por otra parte, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\pi_k}=\infty$, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\pi_k}\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\frac{1}{n^{\beta-1}}\Gamma(\beta)\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{(k+1)^{\beta-2}}{\mu} > C\sum\frac{1}{n}=\infty.$$

Con lo cual concluimos que $\lim_{t\to\infty}\sum_j P_{ij}(t)>0$, es decir, aunque la partícula estudiada que se mueve de forma aleatoria no se absorbe con certeza en el estado -1, existe una probabilidad positiva de que esta misma no se desvíe al infinito.

Proceso E.

Ahora tenemos al estado 0 como una barrera reflectante. Veamos primero que $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}<\infty$. En efecto, pues

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n} &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{n!}{\mu(\beta)_{n+1}}\\ &\sim \frac{1}{\mu\Gamma(\beta)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{(n+1)^\beta},\end{aligned}$$

que nuevamente, notando que $\frac{1}{(n+1)^\beta}<1$ y que $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ converge, por el criterio de comparación, entonces

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}\sim\frac{1}{\mu\Gamma(\beta)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{(n+1)^\beta}<\infty.$$

Por lo que, por el Teorema 1.8., todos los estados del proceso son transitorios. Además tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\pi_k}=\infty$, pues

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\pi_k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\frac{(\beta)_n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{k!}{\mu(\beta)_{k+1}}\\ &\sim\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n n^{\beta-1}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{(k+1)^\beta}=\infty.\end{aligned}$$

Por lo que el proceso es débilmente transitorio, es decir, $\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)=1$ para todo $t\geq 0$.

Proceso F.

Este proceso es recurrente, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}=\infty,$$

por lo que al ser $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n>1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n(n+1)^{-\beta}=\infty,$$

y además sabemos que para el proceso F

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\frac{n!}{\lambda(\beta)_{n+1}}\\&\sim\frac{1}{\lambda\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n(n+1)^{-\beta}.\end{aligned}$$

Y todos sus estados tienen una distribución del tiempo de recurrencia con un número infinito de momentos. Además, podemos notar a partir de la representación de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(x)=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta}\pi_j\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-(\mu-\lambda)nt}\frac{(\beta)_n}{n!}\phi_n^{(1)}(i)\phi_n^{(1)}(j),$$

y tomando $t\to\infty$ que el radio de convergencia de las probabilidades de transición, $P_{ik}(t)$ a las probabilidades limitantes $\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta}\pi_k$ es del orden de magnitud $e^{-(\mu-\lambda)t}$.

2.2. Procesos con crecimiento lineal asociados a polinomios de Laguerre

Caso I. Existen dos procesos distintos asociados a sistemas de polinomios de Laguerre. El primero es aquel cuyos polinomios están dados por

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\kappa}\right),$$

de tal manera que $\psi_n(0)=1$, con $n\geq 0$, donde $L_n^{(\alpha)}$ son los polinomios de Laguerre definidos en el Capítulo 1. Dicho proceso no tiene un estado absorbente y satisface la relación de recurrencia

$$-x\psi_n=n\kappa\psi_{n-1}-(2n\kappa+(\alpha+1)\kappa)\psi_n+(n\kappa+(1+\alpha)\kappa)\psi_{n+1}.$$

Por lo que su tasa de nacimiento está dada por $(n+1+\alpha)\kappa$ y su tasa de muerte por $n\kappa$. Tenemos entonces que el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\alpha+1)\kappa & (\alpha+1)\kappa & 0 & 0 & \cdots \\ \kappa & -(\alpha+3)\kappa & (\alpha+2)\kappa & 0 & \cdots \\ 0 & 2\kappa & -(\alpha+5)\kappa & (\alpha+3)\kappa & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculamos además π_n y $\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$:

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{(1+\alpha)\kappa(2+\alpha)\kappa \cdots (n+\alpha)\kappa}{\kappa(2\kappa)(3\kappa)\cdots(n\kappa)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Por lo que

$$\frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{n!}{(\alpha+1)_n (n+\alpha+1)\lambda} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}}.$$

<u>Caso II.</u> El otro proceso es aquel cuyo sistema de polinomios es $l_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\kappa}\right)$, el cual tiene un estado absorbente en -1. Encontramos su relación de recurrencia a partir de (1.4)

$$-xl_n^{(\alpha)} = n\kappa \left[\frac{\left(\frac{(n+\alpha)!}{n!\alpha!}\right)}{\left(\frac{(n-1+\alpha)!}{(n-1)!\alpha!}\right)} \right] l_{n-1}^{(\alpha)} - (2n+\alpha+1)\kappa l_n^{(\alpha)} + (n+1+\alpha)\kappa \left[\frac{\left(\frac{(n+\alpha)!}{n!\alpha!}\right)}{\left(\frac{(n+1+\alpha)!}{(n+1)!\alpha!}\right)} \right] l_{n+1}^{(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow -xl_n^{(\alpha)} = n\kappa \left[\frac{(n+\alpha)!(n-1)!\alpha!}{n!\alpha!(n-1+\alpha)!} \right] l_{n-1}^{(\alpha)} - (2n+\alpha+1)\kappa l_n^{(\alpha)} + (n+1+\alpha)\kappa \left[\frac{(n+\alpha)!(n+1)!\alpha!}{n!\alpha!(n+1+\alpha)!} \right] l_{n+1}^{(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow -xl_n^{(\alpha)} = \kappa(n+\alpha) l_{n-1}^{(\alpha)} - (2n+\alpha+1)\kappa l_n^{(\alpha)} + \kappa(n+1) l_{n+1}^{(\alpha)}.$$

Y por ende tenemos que su tasa de nacimiento está dada por $(n+1)\kappa$ y su tasa de muerte por $(n+\alpha)\kappa$. Tenemos entonces que el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ será

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\alpha+1)\kappa & \kappa & 0 & 0 & \cdots \\ (\alpha+1)\kappa & -(\alpha+3)\kappa & 2\kappa & 0 & \cdots \\ 0 & (\alpha+2)\kappa & -(\alpha+5)\kappa & 3\kappa & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora π_n y $\frac{1}{\pi_n \lambda_n}$:

$$\pi_n = \frac{\kappa(2\kappa)(3\kappa)\cdots(n\kappa)}{(1+\alpha)\kappa(2+\alpha)\kappa\cdots(n+\alpha)\kappa}$$

$$= \frac{n!}{(\alpha+1)_n} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha}.$$

Por lo que

$$\frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{\lambda(\alpha+1)_n}{(n+1)!} \sim \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Es importante recordar que la medida espectral de ambos procesos está dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\kappa^\alpha} e^{-\frac{x}{\kappa}} x^\alpha, \quad \alpha > -1, \quad x > 0,$$

Llamaremos A y B a los procesos de nacimiento y muerte asociados a las familias de polinomios de Laguerre $l_n^{(\alpha)}(x)$ y $\psi_n(x)$ respectivamente. En la siguiente tabla resumimos los resultados de estos dos procesos

Proceso	Tasa de nacimiento λ_n, $n > 0$	Tasa de muerte μ_n, $n \geq 0$	Sistema de polinomios	Medida espectral	π_n	$\frac{1}{\lambda_n \pi_n}$
A (existe un estado absorbente -1 cuando $\alpha > 0$) definido para todo $\alpha \geq 0$	$(n+1)\kappa$	$(n+\alpha)\kappa$	$l_n^{(\alpha)}(x)$	$ce^{-\frac{x}{\kappa}}x^{\alpha}$	$\frac{n!}{(\alpha+1)_n} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha}}$	$\frac{\lambda(\alpha+1)_n}{(n+1)!} \sim \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}$
B (0 es estado reflectante), $\alpha > 1$	$(n+1+\alpha)\kappa$	$n+\kappa$	$\frac{L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\kappa}\right)}{\binom{n+\alpha}{n}}$	$ce^{-\frac{x}{\kappa}}x^{\alpha}$	$\frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sim \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$	$\frac{n!}{\lambda(\alpha+1)_{n+1}} \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n^{1+\alpha}}$

Estudiaremos ahora algunas particularidades de estos procesos.

Proceso A.

Tenemos que la serie $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}\sim\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}$ claramente diverge para todo $\alpha>0$, por lo cual, por el Teorema 1.10., inferimos que -1 es un estado absorbente. Observamos también que

$$\int_0^\infty \frac{d\rho(x)}{x^{n+1}}<\infty\Leftrightarrow\int_0^\infty\frac{n!e^{-\frac{x}{\kappa}}x^\alpha}{\Gamma(n+\alpha+1)x^{n+1}}dx<\infty$$

$$\Leftrightarrow\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int e^{-\frac{x}{\kappa}}x^{(\alpha-n-1)}dx<\infty\Leftrightarrow\alpha>n.$$

Es decir, el n-ésimo momento de la distribución del tiempo de absorción es finito si y solo si $\alpha>n$. En particular, si $0<\alpha\leq 1$, el tiempo esperado de absorción es infinito y es finito si $\alpha>1$. Esto pues $\sum_{n\geq 0}\pi_n\sim\Gamma(\alpha+1)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^\alpha}$.

Proceso B.

Para este proceso tenemos que

$$\sum_{n\geq 0}\pi_n\sim\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n\geq 0}n\alpha=\infty,\qquad\forall\ \alpha>-1.$$

Y

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}\sim\Gamma(1+\alpha)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^{1+\alpha}}=\infty,\qquad\forall\ -1<\alpha\leq 0.$$

Por lo que, por el Teorema 1.8, deducimos que el proceso es recurrente nulo. Por otra parte si $\alpha>0$, entonces $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}<\infty$, por lo que bajo esta circunstancia el proceso será transitorio. Sin embargo

$$\sum_{n=0}^\infty\pi_n\sum_{r=n}^\infty\frac{1}{\lambda_r\pi_r}\sim\sum_{n=0}^\infty n^\alpha\sum_{r=n}^\infty\frac{1}{r^{1+\alpha}}$$

$$=\sum_{n=0}^\infty n^\alpha\sum_{r=0}^\infty\frac{1}{(r+n)^{1+\alpha}}=\sum_{n\geq 0}n^\alpha\zeta(1+\alpha)=\infty,$$

donde ζ es la función zeta de Riemann. Y por lo tanto el proceso es débilmente transitorio. Esto podríamos comprobarlo también observando que si fuera fuertemente transitorio, entonces la medida espectral del proceso tendría que ser discreta, lo cual claramente no es posible para nuestro proceso B.

2.3. Funciones generadoras y representaciones explícitas de probabilidades

En esta sección obtendremos expresiones explícitas para las probabilidades de transición de los procesos introducidos en las secciones anteriores. El acercamiento clásico para calcular dichas fórmulas consistía en resolver una ecuación diferencial parcial de primer orden para la función generadora de las probabilidades de transición. Sin embargo, aquí utilizaremos el método empleado por Karlin y McGregor en 1958 [18], mediante el cual las representaciones y fórmulas explícitas buscadas para las probabilidades de transición resultan de simples manipulaciones de las funciones generadoras correspondientes para los polinomios apropiados. Comenzaremos con el proceso F.

<u>Proceso F.</u>

Por el Teorema 1.5. tenemos que

$$P_{0j}(t) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_j(x) d\rho(x), \tag{2.5}$$

donde Q_n es el sistema de polinomios $\phi_n^{(1)}$ y $\rho(x)$ es la medida espectral (1.12). Sustituyendo por los valores calculados previamente tenemos que

$$P_{0j}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \pi_j \sum_{n=0}^\infty e^{-(\mu-\lambda)nt} \phi_j^{(1)}(n;\beta,\gamma) \frac{(\beta)_n}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

Utilizando la identidad $\phi_j(n;\beta,\gamma) = \phi_n(j;\beta,\gamma)$ y (1.15) llegamos a

$$\begin{aligned} P_{0j}(t) &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \pi_j \sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n^{(1)}(j;\beta,\gamma) \sigma^n \\ &= \pi_j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \left(1 - \frac{\mu\sigma}{\lambda}\right)^j (1-\sigma)^{-j-\beta}, \end{aligned}$$

donde

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Buscaremos ahora una fórmula explícita para $P_{ij}(t)$. Para esto será necesario evaluar una serie de la forma

$$M_{ij} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(i)\phi_n(j) s^n. \tag{2.6}$$

Construimos para esto la siguiente serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j}{j!} z^j M_{ij}.$$

para la cual, cambiando el orden de las sumas y utilizando (1.15) obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j}{j!} z^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(i)\phi_n(j)s^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \phi_n(i) \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)^n (1-s)^{-n-\beta}.$$

Utilizando nuevamente (1.15) la expresión se reduce a

$$= \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} \left[1 - \frac{1 - \frac{s}{\gamma^2}}{1 - \frac{s}{\gamma}} z\right]^i \left[1 - \frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 - s} z\right]^{-i-\beta}.$$

A partir de esto expandimos en potencias de z y determinando el coeficiente de z^j (que asumiendo $i \leq j$) obtenemos

$$\frac{j!}{(\beta)_j} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1 - \frac{s}{\gamma^2}}{1 - \frac{s}{\gamma}}\right)^k \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 - s}\right)^{j-k}, \tag{2.7}$$

salvo por un factor $\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta}$. Ahora, para aplicar esto a nuestro proceso F observamos que

$$P_{ij}(t) = (1-\gamma)^\beta \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n^{(1)}(i)\phi_n^{(1)}(j), \tag{2.8}$$

donde

$$\gamma = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Por lo que identificando (2.6) en (2.8) obtenemos, mediante (2.7) que para $i \leq j$

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) =& (1-\gamma)^\beta \pi_j \frac{j!}{(\beta)_j} \left(1 - \frac{\sigma}{\gamma}\right)^i (1-\sigma)^{-i-\beta} \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1 - \frac{\sigma}{\gamma^2}}{1 - \frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k \left(\frac{1 - \frac{\sigma}{\gamma}}{1 - \sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

La fórmula para $P_{ij}(t)$ cuando $i > j$ se obtiene de la relación $P_{ij}(t) = \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{ji}(t)$.

Obtendremos ahora de manera análoga las fórmulas explícitas para las probabilidades de transición de los procesos C, D y E.

Proceso C.

Calculamos $P_{0j}(t)$

$$\begin{aligned}
P_{0j}(t) &= \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_j(x) d\rho(x) \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \pi_j \sum_{n=0}^\infty e^{-(\mu-\lambda)(n+\beta-1)t} \phi_j(n;\beta,\gamma) \frac{(\beta)_n}{n!} \\
&= (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)(\beta-1)t} \pi_j \sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(j;\beta,\gamma) \sigma^n \\
&= \pi_j (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)(\beta-1)t} \left(1 - \frac{\mu\sigma}{\lambda}\right)^j (1-\sigma)^{-j-\beta},
\end{aligned}$$

recordando que $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}$ y $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$.

Para calcular $P_{ij}(t)$, construimos nuevamente la serie

$$\sum_{j=0}^\infty \frac{(\beta)_j}{j!} z^j M_{ij},$$

con

$$M_{ij} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(i) \phi_n(j) s^n,$$

la cual utilizando (1.15) dos veces e intercambiando los órdenes de suma, se reduce a

$$\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} \left[1 - \frac{1 - \frac{s}{\gamma^2}}{1 - \frac{s}{\gamma}} z\right]^i \left[1 - \frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1-s} z\right]^{-i-\beta}.$$

Y expandiendo en potencias de z y determinando el coeficiente de z^j obtenemos

$$\frac{(\beta)_i}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1 - \frac{s}{\gamma^2}}{1 - \frac{s}{\gamma}}\right)^k \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1-s}\right)^{j-k},$$

salvo por el factor $\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta}$. Aplicamos esto al proceso C, notando que

$$P_{ij}(t) = (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)(\beta-1)t} \pi_j \sum_{n=0}^\infty \sigma^n \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n^3(i) \phi_n^{(3)}(j).$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t) =& (1-\gamma)^{\beta}\pi_j \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^{i} (1-s)^{-i-\beta} e^{-(\mu-\lambda)(\beta-1)t} \frac{(\beta)_i}{i!} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^{k} \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}.
\end{aligned}
$$

Proceso D.

Calculamos $P_{0j}(t)$

$$
\begin{aligned}
P_{0j}(t) &= \pi_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_j(x) d\rho(x) \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)(n+1)t} \phi_j(n;\beta,\gamma) \frac{(\beta)_n}{n!} \\
&= (1-\gamma)^{\beta} e^{-(\mu-\lambda)t} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(j;\beta,\gamma) \sigma^n \\
&= \pi_j (1-\gamma)^{\beta} e^{-(\mu-\lambda)t} \left(1-\frac{\mu\sigma}{\lambda}\right)^{j} (1-\sigma)^{-j-\beta},
\end{aligned}
$$

recordando que $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t}$ y $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$.

Para calcular $P_{ij}(t)$, construimos nuevamente la serie

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j}{j!} z^j M_{ij},
$$

con

$$
M_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n(i)\phi_n(j) s^n,
$$

la cual utilizando (1.15) dos veces e intercambiando los órdenes de suma, se reduce a

$$
\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j} \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^{i} (1-s)^{-i-\beta} \left[1-\frac{1-\frac{s}{\gamma^2}}{1-\frac{s}{\gamma}} z\right]^{i} \left[1-\frac{1-\frac{s}{\gamma}}{1-s} z\right]^{-i-\beta}.
$$

Expandiendo en potencias de z y determinando el coeficiente de z^j obtenemos

$$
\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j} \frac{(\beta)_i}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{s}{\gamma^2}}{1-\frac{s}{\gamma}}\right)^{k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{1-\frac{s}{\gamma}}{1-s}\right)^{j-k},
$$

salvo por el factor $\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta}$. Aplicamos esto al proceso D, notando que

$$P_{ij}(t) = (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)t}\pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n^{(4)}(i)\phi_n^{(4)}(j).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) =&(1-\gamma)^\beta \pi_j \frac{(\beta)_i}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j}\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} e^{-(\mu-\lambda)t} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty}\binom{i}{k}(-1)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

Proceso E.

Calculamos $P_{0j}(t)$

$$\begin{aligned} P_{0j}(t) &= \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_j(x) d\rho(x) \\ &= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)(n+\beta)t} \phi_j(n;\beta,\gamma)\frac{(\beta)_n}{n!} \\ &= (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)\beta t}\pi_j \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}\phi_n(j;\beta,\gamma)\sigma^n \\ &= \pi_j (1-\gamma)^\beta e^{-(\mu-\lambda)\beta t}\left(1-\frac{\mu\sigma}{\lambda}\right)^j (1-\sigma)^{-j-\beta}, \end{aligned}$$

recordando que $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)t}$ y $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$.

Para calcular $P_{ij}(t)$, construimos nuevamente la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\beta)_j}{j!} z^j M_{ij},$$

con

$$M_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}\phi_n(i)\phi_n(j)s^n,$$

la cual utilizando (1.15) dos veces e intercambiando los órdenes de suma, se reduce a

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j}\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta}\left[1-\frac{1-\frac{s}{\gamma^2}}{1-\frac{s}{\gamma}}z\right]^i \left[1-\frac{1-\frac{s}{\gamma}}{1-s}z\right]^{-i-\beta}.$$

Expandiendo en potencias de z y determinando el coeficiente de z^j obtenemos

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j} \frac{j!}{(\beta)_j} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{s}{\gamma^2}}{1-\frac{s}{\gamma}}\right)^k \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{1-\frac{s}{\gamma}}{1-s}\right)^{j-k},$$

salvo por el factor $\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta}$. Aplicamos esto al proceso E, notando que

$$P_{ij}(t) = (1-\gamma)^{\beta} e^{-(\mu-\lambda)\beta t} \pi_j \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \frac{(\beta)_n}{n!} \phi_n^{(2)}(i) \phi_n^{(2)}(j).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) = &\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j} (1-\gamma)^{\beta} \pi_j \frac{j!}{(\beta)_j} \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} e^{-(\mu-\lambda)\beta t} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

En resumen, las fórmulas para las probabilidades de transición de los procesos son las siguientes:

Para $i \leq j$, $\quad \sigma = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)t} \quad$ y $\quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu}$.

Proceso C.

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) = &(1-\gamma)^{-\beta} \pi_j \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} e^{-(\mu-\lambda)(\beta-1)t} \frac{(\beta)_i}{i!} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

Proceso D.

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) = &(1-\gamma)^{-\beta} \pi_j \frac{(\beta)_i}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j} \left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i (1-s)^{-i-\beta} e^{-(\mu-\lambda)t} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (-1)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k \left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k} \frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

Proceso E.

$$\begin{aligned}P_{ij}(t) = &\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+j}(1-\gamma)^{-\beta}\pi_j\frac{j!}{(\beta)_j}\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)^i(1-s)^{-i-\beta}e^{-(\mu-\lambda)\beta t}\\ &\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i}{k}(-1)^k\left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k\left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k}\frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}.\end{aligned}$$

Proceso F.

$$\begin{aligned}P_{ij}(t) =&(1-\gamma)^{-\beta}\pi_j\frac{j!}{(\beta)_j}\left(1-\frac{\sigma}{\gamma}\right)^i(1-\sigma)^{-i-\beta}\\ &\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i}{k}(-1)^k\left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma^2}}{1-\frac{\sigma}{\gamma}}\right)^k\left(\frac{1-\frac{\sigma}{\gamma}}{1-\sigma}\right)^{j-k}\frac{(i+\beta)_{j-k}}{(j-k)!}.\end{aligned}$$

Ahora calcularemos las expresiones explícitas para las probabilidades de transición de los procesos A y B. Para el proceso A:

Proceso A.

Utilizando la representación de Karlin-McGregor tenemos

$$\begin{aligned}P_{0j}(t) &= \frac{\pi_j}{\kappa^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-xt}L_j^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\kappa}\right)x^\alpha e^{-\frac{x}{\kappa}}dx \qquad (2.9)\\ &= \frac{\pi_j}{\Gamma(\alpha+1)}\mathscr{L}(y^\alpha L_j^{(\alpha)}(y)).\end{aligned}$$

evaluada en $s=\kappa t+1$ (donde $\mathscr{L}$ es la transformada de Laplace). Es importante observar que $\mathscr{L}(L_j^{(\alpha)}(y)) = \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)^j$ y $\mathscr{L}(y^\alpha) = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}$ [7], por lo que utilizando el teorema de convolución para transformadas de Laplace, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\pi_j}{\Gamma(\alpha+1)}\mathscr{L}\left(y^\alpha L_j^{(\alpha)}(y)\right) &= \left(\frac{\pi_j\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{(\kappa t+1)^{\alpha+1}j!}\right)\left(\frac{\kappa t}{\kappa t+1}\right)^j\\ &= \frac{\pi_j\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{j!}\right)\frac{(\kappa t)^j}{(1+\kappa t)^{\alpha+j+1}} = \frac{(\kappa t)^j}{(1+\kappa t)^{\alpha+j+1}}.\end{aligned}$$

Además, por (1.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}P_{ij}(t)s^i &= \frac{\pi_j}{\Gamma(\alpha+1)}(1-s)^{-\alpha-1}\int_0^\infty e^{-x\kappa t}e^{\frac{xs}{s-1}}x^\alpha L_j^{(\alpha)}(x)dx\\ &= \frac{\pi_j}{\Gamma(\alpha+1)}(1-s)^{-\alpha-1}\int_0^\infty e^{-(\kappa t+1-\frac{s}{s-1})x}x^\alpha L_j^{(\alpha)}(x)dx,\end{aligned}$$

lo cual ahora se reduce a

$$\frac{(\kappa t)^j}{(1+\kappa t)^{\alpha+j+1}}\left[1+\frac{1-\kappa t}{\kappa t}s\right]^j\left[1-\frac{\kappa t}{1+\kappa t}s\right]^{-(\alpha+j+1)}.$$

Por lo que para $i \leq j$, expandiendo las potencias de s y determinando los coeficientes de s^i

$$P_{ij}(t)=\frac{(\kappa t)^j}{(1+\kappa t)^{\alpha+j+1}}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\left(\frac{1-\kappa t}{\kappa t}\right)^k\frac{(\kappa t)^{i-k}}{(1+\kappa t)^{i-k}}\frac{(\alpha+j+1)_{i-k}}{(i-k)!}. \quad (2.10)$$

Proceso B.

Análogamente a lo realizado para el proceso A, para el proceso B obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)s^j=\frac{(\kappa t)^i}{(1+\kappa t)^{\alpha+i+1}}\left[1+\frac{1-\kappa t}{\kappa t}s\right]^i\left[1-\frac{\kappa t}{1+\kappa t}s\right]^{-(\alpha+i+1)},$$

y entonces para $i \leq j$, expandiendo las potencias de s y determinando los coeficientes de s^j

$$P_{ij}(t)=\frac{(\kappa t)^i}{(1+\kappa t)^{\alpha+i+1}}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\left(\frac{1-\kappa t}{\kappa t}\right)^k\frac{(\kappa t)^{j-k}}{(1+\kappa t)^{j-k}}\frac{(\alpha+i+1)_{j-k}}{(j-k)!}.$$

2.4. Número de transiciones hasta la absorción

Otro concepto muy interesante de estudiar en relación a los procesos con crecimiento lineal es el número de transiciones hacia la derecha que transcurren antes de una absorción definitiva (asumiendo que la absorción es cierta), lo cual denotaremos mediante la variable aleatoria N. Esto puede ser utilizado para medir, por ejemplo, la intensidad de una epidemia si el estado del sistema describe el número de personas actualmente infectadas. Sea R_i^n la probabilidad de que la partícula sea absorbida en la n-ésima transición dado que la partícula se encuentre inicialmente en el estado i, entonces

$$R_i^n=\mathbb{P}(N=n|X_0=i), \quad i\geq 0, \quad n\geq 1.$$

Para encontrar entonces las probabilidades relevantes de la variable aleatoria habrá que determinar completamente a R_i^n. Las cantidades R_i^n satisfacen las relaciones de recurrencia

$$R_0^n=p_0R_1^{n-1},$$

$$R_i^n=q_iR_{i-1}^{n-1}+p_iR_{i+1}^{n-1},$$

donde $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ y $q_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$.

En particular, los valores de p_n y q_n correspondientes al proceso A son

$$p_n = \frac{n+1}{2n+\alpha+1}, \qquad \text{y} \qquad q_n = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+1}.$$

Consideremos ahora el sistema de polinomios

$$xT_n^{\alpha}(x) = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+1}T_{n-1}^{\alpha}(x) + \frac{n+1}{2n+\alpha+1}T_{n+1}^{\alpha}(x),$$

y $T_0 = 1$, $T_1 = (1+\alpha)x$, los cuales son ortogonales respecto a alguna medida con soporte en $[-1,1]$. Identificamos a estos polinomios como los **polinomios ultraesféricos**, C_n^{λ} de orden $\lambda = \frac{1+\alpha}{2}$ normalizados de tal forma que $C_n^{\lambda}(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n}$, definidos en (1.8).

$$T_n^{\alpha}(x) = C_n^{\frac{1+\alpha}{2}}(x).$$

Utilizando entonces la fórmula de Karlin-McGregor para caminatas aleatorias (1.23) tenemos que

$$\begin{aligned} R_i^M &= q_0 \int_{-1}^{1} x^{M-1} C_i^{\frac{1+\alpha}{2}}(x) d\alpha(x) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)^2}\right)\frac{1}{2^{\alpha+1}}\int_{-1}^{1} x^{M-1} C_i^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Otro proceso con crecimiento lineal al cual se le puede aplicar una modificación de la fórmula (2.11) es el caso cuando $\lambda_n = (n+1)\lambda$ y $\mu_n = (n+1)\mu$, $n \geq 0$. Tenemos entonces $p_n = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = p$ y $q_n = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = q$.

Los polinomios asociados $U_n(x) = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^n T_n^1\left(\frac{x}{\sqrt{4pq}}\right)$ satisfacen

$$xU_n(x) = pU_{n+1}(x) + qU_{n-1}(x), \qquad n \geq 0.$$

donde

$$U_0(x) \equiv 1, \qquad U_{-1}(x) \equiv 0.$$

Notemos que estos polinomios son los polinomios de Chebychev de segunda especie, definidos en (1.10). Por lo tanto, para $\lambda_n = (n+1)\lambda$ y $\mu_n = (n+1)\mu$, utilizando nuevamente la fórmula de Karlin-McGregor para caminatas aleatorias (1.23), tenemos que

$$R_i^M = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{3}{2})}\right)\int_{-1}^{1} x^{M-1}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^i C_i^1\left(\frac{x}{\sqrt{4pq}}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx. \tag{2.12}$$

2.5. Distribución de recurrencia y procesos asociados

Si regresamos a revisar los resultados presentados en las tablas 1 y 2 del presente escrito, es claro que no todos los procesos con crecimiento lineal están directamente relacionados a sistemas de polinomios de Meixner y Laguerre clásicos. Sin embargo, es posible encontrar la medida espectral de los modelos restantes mediante el estudio del concepto de los **procesos k-asociados**. Mediante este mismo análisis podemos derivar expresiones aproximadas para las distribuciones de tiempo de recurrencia asociadas a los procesos A a F.

Dado un proceso de nacimiento y muerte con matriz infinitesimal $\mathcal{A}$ (1.16), obtenemos un nuevo proceso deteniendo el proceso dado cuando se alcance el estado 0. Para este nuevo proceso el estado 0 se habrá convertido en un estado absorbente, y si ignoramos este estado el proceso será un proceso de nacimiento y muerte con parámetro μ_0 positivo.

El proceso original y el nuevo tienen la misma distribución para el tiempo de espera en cualquier estado $i \geq 1$. Más aún, ambos procesos tienen la misma distribución posterior a la salida para el estado $i \geq 1$. Por consecuencia, la matriz infinitesimal del proceso nuevo (con un estado 0 ignorado) será

$$\mathcal{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

la cual es obtenida eliminando la fila cero y la columna cero de (1.16). Los polinomios definidos mediante

$$\begin{aligned} &Q_0^{(0)}(x) = 0, \quad Q_1^{(0)}(x) = -\tfrac{1}{\lambda_0}, \\ &-xQ_n^{(0)} = \mu_n Q_{n-1}^{(0)}(x) - (\lambda_n+\mu_n)Q_n^{(0)}(x) + \lambda_n Q_{n+1}^{(0)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

son los polinomios 0-asociados del sistema $\{Q_n(x)\}$ definidos en el Capítulo 1. Podemos notar que, salvo por un factor constante $-\frac{1}{\lambda_0}$, son los mismos polinomios pertenecientes al nuevo proceso de nacimiento y muerte. Por lo tanto, la matriz de transición de probabilidades $\left(\widetilde{P}_{ij}(t)\right)$, $i,\ j \geq 1$, del nuevo proceso está dada por

$$\widetilde{P}_{ij}(t) = \frac{\mu_1}{\lambda_0}\pi_j \int_0^\infty e^{-xt}\left[-\lambda_0 Q_i^{(0)}(x)\right]\left[[-\lambda_0 Q_j^{(0)}(x\right] d\alpha(x),$$

donde α es la medida espectral del 0-ésimo proceso de nacimiento y muerte.

Karlin y McGregor probaron en [17] que las transformadas de Stieltjes (1.1) de las medidas espectrales ψ y α de los procesos,

$$B(s) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x-s}\ , \quad C(s) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(x)}{x-s}\ , \tag{2.13}$$

están relacionadas mediante la identidad

$$B(s) = \frac{1}{\lambda_0 + \mu_0 - s - \lambda_0\mu_1 C(s)}. \tag{2.14}$$

Recordamos que podemos calcular estas medidas mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes:

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\psi(z)}{x+z} \Leftrightarrow \psi(x_2) - \psi(x_1) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \frac{F(-x-i\varepsilon) - F(-x+i\varepsilon)}{2\pi i} dx.$$

Una vez que ha sido calculada la función $B(s)$ o $C(s)$, podemos calcular también las medidas ψ y α mediante fórmulas conocidas para invertir la transformada de Stieltjes.

Si ψ es una distribución discreta con masas $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ...$ localizadas en los puntos $0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n \to \infty$, entonces

$$B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{x_n - s},$$

es una **función meromorfa** cuyos polos son simples y están localizados en los puntos x_n. En cada uno de los intervalos (x_n, x_{n+1}), $B(s)$ es estrictamente creciente de $-\infty$ a ∞, pues

$$B(x_n^+) = -\infty, \qquad B(x_{n+1}^-) = +\infty,$$

y

$$B'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{(x_n - s)^2} \geq 0 \quad \text{en } (x_n, x_{n+1}),$$

esto último pues ρ_n está definida sobre el eje real positivo. Y como consecuencia, por el teorema de Bolzano, tiene exactamente un cero simple y_n en dicho intervalo. Por lo tanto

$$C(s) = \left(\lambda_0 + \mu_0 - s - \frac{1}{B(s)}\right) \frac{1}{\lambda_0\mu_1}$$

es una función meromorfa cuyos únicos polos son los ceros de $B(s)$. La medida α es también una distribución discreta con saltos de magnitud

$$\gamma_n = \alpha(\{y_n\}) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \mathrm{Im}(C(y_n + i\varepsilon))$$

$$= \frac{1}{\lambda_0\mu_1} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \mathrm{Im}\left(\frac{1}{B(y_n+i\varepsilon)} + \mu_0 + \lambda_0 - y_n - i\varepsilon\right),$$

y que utilizando la regla de L'Hopital resulta

$$\gamma_n = -\frac{1}{B'(y_n)}\frac{1}{\lambda_0\mu_1},$$

localizados en y_n que se entrelazan estrictamente con x_n, i.e.,

$$0 \leq x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ...$$

Por lo tanto

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \delta_{y_n}(x).$$

A continuación calcularemos $B(s)$ para los procesos C a F, recordando que $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$:

Proceso C.

$$B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{x_n - s} = (1-\gamma)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \frac{\gamma^n}{(n+\beta-1)(\mu-\lambda)-s}.$$

Proceso D.

$$B(s) = (1-\gamma)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \frac{\gamma^n}{(n+1)(\mu-\lambda)-s}.$$

Proceso E.

$$(2.15)$$

$$B(s) = (1-\gamma)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \frac{\gamma^n}{(n+\beta)(\mu-\lambda)-s}.$$

Proceso F.

$$B(s) = (1-\gamma)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \frac{\gamma^n}{n(\mu-\lambda)-s}.$$

En cualquier situación práctica se requiere de la ayuda de computadoras para computar los ceros y_n de $B(s)$. Solo es necesario estudiar con más detalle una de las cuatro funciones $B(s)$. Esto se debe a que (observando (2.15)) una vez encontrando los ceros de $B(s)$ de alguno de los cuatro procesos, podemos encontrar los de los demás $B(s)$ mediante traslaciones.

Una propiedad especial que comparten los ceros y_n es la desigualdad $y_{n-1} <$

$y_n - (\mu - \lambda)$.

Estudiaremos ahora como la medida espectral α nos permite encontrar la distribución del tiempo de recurrencia. Nos concentraremos para esto en el proceso F. Supongamos que queremos calcular $F_{10}(t)$, que representa la función de distribución de tiempo de primer paso del estado 1 al estado 0, definida en la segunda sección del Capítulo 1. La solución a este problema está dada en términos de la medida espectral $\alpha(x)$ por

$$F_{10}(t) = \mu_1 \int_0^t d\xi \int_0^\infty e^{-x\xi} d\alpha(x) \tag{2.16}$$

$$= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 - e^{-y_n t}}{y_n} \right] \gamma_n.$$

Como y_n tiende a ∞ y $0 \leq \gamma_n, \sum \gamma_n = 1$, se puede obtener una buena aproximación tomando una cantidad finita adecuada de términos.

Ahora veremos como a partir de α podemos generar otros casos de crecimiento lineal distintos a los estudiados hasta ahora (tablas 1 y 2). Restringiendo nuevamente nuestra atención al proceso F, sabemos que la medida espectral α tiene tasas de nacimiento y muerte dadas por $\lambda_n = (n + 1 + \beta)\lambda$, $\mu_n = (n + 1)\mu$, $n \geq 0$. Con esto en mente construimos la medida

$$\theta(x) = \begin{cases} \mu \dfrac{d\alpha(x)}{x}, & x > 0, \\ 1 - \mu \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\alpha(x)}{x,} & x = 0_+. \end{cases} \tag{2.17}$$

cuyos polinomios ortogonales son $\frac{\lambda_n \pi_n}{\lambda_0} [Q_{n+1}(x) - Q_n(x)]$, que son los polinomios duales (1.26), donde $Q_n(x)$ es el sistema de polinomios asociado a $\alpha(x)$.

Las tasas de nacimiento y de muerte correspondientes a la medida espectral $\theta(x)$ son $\lambda_n = (n + 1)\mu$, $n \geq 0$, $\mu_n = (n + \beta)\lambda$, $n > 1$, $\mu_0 = 0$.

Aplicando transformaciones similares a la **medida espectral 0-asociada** de los procesos C a F obtenemos procesos con crecimiento lineal con λ distinta de μ. Es importante recalcar que ninguno de los cuatro procesos adicionales puede ser obtenido con una representación en términos únicamente de funciones elementales conocidas o sistemas clásicos reconocibles de funciones. Las representaciones mediante series en términos de ceros y_n deben considerarse como la expresión más simple de las fórmulas vinculadas a los procesos relacionados con crecimiento lineal.

Para cerrar esta sección discutiremos algunas cualidades del **proceso 0-asociado** al proceso B. Debemos invertir la ecuación fundamental (2.14) que relaciona la transformada de Stieltjes de ψ y la medida espectral de α del proceso relacionado. El mecanismo de inversión cuando ψ tiene densidad continua positiva ha sido discutido anteriormente en la Proposición **A** de [17], donde se prueba que

$$\alpha'(\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\left(\text{V.P. } \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi'(x)}{x-\xi}dx\right)^2 + [\psi'(\xi)]^2}, \quad \xi \geq 0, \tag{2.18}$$

donde V.P. denota el **valor principal**.

Para el caso particular de $d\psi(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}e^{-\xi}\xi^\beta d\xi$

$$\text{V.P.} \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x-y} = -\frac{(\pi\cot(\pi)\beta)}{\Gamma(\beta+1)}e^{-y}y^\beta - e^{-y}\int_0^1 e^{yt}t^{-\beta-1}dt,$$

para $-1 < \beta < 0$ y entonces (2.18) se convierte en

$$\alpha'(\xi) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}e^{-\xi}\xi^\beta}{\left(\frac{\pi\cot(\pi)\beta e^{-\xi}\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + e^{-\xi}\int_0^1 e^{\xi t}t^{-\beta-1}dt\right)^2 + \frac{1}{\Gamma^2(\beta+1)}e^{-2\xi}\xi^{2\beta}}. \tag{2.19}$$

Con la ayuda de la evaluación explícita de $\alpha(\xi)$ dada por (2.19), podemos escribir ahora la distribución de primer tiempo de paso $F_{10}(t)$ del proceso B. De hecho,

$$F_{10} = \int_0^\infty \left[\frac{1-e^{-xt}}{x}\right]\alpha'(x)dx. \tag{2.20}$$

2.6. Modelo de Ehrenfest continuo y los polinomios de Krawtchouk

Para esta última sección de nuestro segundo capítulo introduciremos brevemente el proceso continuo clásico de Ehrenfest y determinaremos su sistema de polinomios ortogonales y su medida espectral. Este modelo tiene también coeficientes lineales, pero se diferencia de los modelos trabajados hasta ahora en que el espacio de estados es finito.

El modelo de Ehrenfest es un proceso de nacimiento y muerte para el cual $\lambda_n = (N-n)p$, $\mu_n = nq$, $0 \leq n \leq N$, $(0 < p < 1,\ q = 1-p)$ tal que los estados -1 y $N+1$ funcionan como barreras reflectantes. Identificamos el sistema de polinomios como los **polinomios clásicos de Krawtchouk** definidos en el Capítulo 1.

$$Q_n(x) = \binom{N}{n}^{-1} p^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{N-x}{n-k}\binom{x}{k}p^{n-k}q^k, \tag{2.21}$$

donde x es la variable discreta que corre sobre los enteros $0, 1, 2, ..., N$, con relación de recurrencia

$$-xQ_n(x;p,N) = p(N-n)Q_{n+1}(x;p,N) - [p(N-n)+nq]Q_n(x;p,N) + nqQ_{n-1}(x;p,N),$$

y medida

$$\psi(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}.$$

Su función generadora cumple la relación

$$\sum_{k=0}^{N} \pi_k Q_k(x)\omega^k = (1-\omega)^x \left(1 + \frac{p}{q}\omega\right)^{N-x}, \tag{2.22}$$

con coeficientes potenciales

$$\pi_k = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

Por lo que a partir de la representación de Karlin-McGregor obtenemos que

$$\sum_{s=0}^{N} P_{r,s}(t)\omega^s = \sum_{s=0}^{N} \left[\pi_s \sum_{x=0}^{N} e^{-xt} Q_r(x) Q_s(x) \binom{N}{x} p^x q^{N-x}\right] \omega^s.$$

Y aplicando dos veces la relación (2.22)

$$= [pe^{-t}(1-\omega) + (q+p\omega)]^{N-r}[(q+p\omega) - q(1-\omega)e^{-t}]^r.$$

Otra forma de expresar $P_{r,s}(t)$ es de la siguiente manera

$$P_{r,s}(t) = \binom{N}{s} \left(\frac{p}{q}\right)^s \int_0^\infty e^{-xt} Q_r(x) Q_s(x) d\psi(x).$$

Notemos que al estar trabajando con una medida de ortogonalidad que es discreta y finita, i.e., es una colección de deltas de Dirac soportadas en un conjunto finito de puntos, entonces la integral anterior es esencialmente una serie finita. Las probabilidades de absorción y la recurrencia pueden calcularse utilizando la técnica del **proceso 0-asociado**.

Capítulo 3

Otros procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal y cuadrático

En este capítulo estudiaremos otros procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal y otros con crecimiento cuadrático. En particular estudiaremos dos nuevos modelos con crecimiento lineal, los cuales son:

Modelo I: $\lambda_n = n + \alpha + c + 1, \quad \mu_n = n + c, \quad n \geq 0,$

Modelo II: $\lambda_n = n + \alpha + c + 1, \quad \mu_n = n + c + 1, \quad n \geq 0, \ \mu_0 = 0.$

Notemos que al trabajar con estos modelos estamos estudiando los c-ésimos polinomios asociados con crecimiento lineal de forma general, recordando que para todo $c \geq 0$, estos polinomios están conectados al proceso cuya matriz del operador infinitesimal surge al eliminar las primeras $c+1$ filas y columnas de la matriz del operador infinitesimal original $\mathcal{A}$, i.e.,

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
-\mu_0-\lambda_0 & \lambda_0 & & & & & & & \\
\mu_1 & -\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & \mu_c & -\mu_c-\lambda_c & & \lambda_c & & & \\
\hline
 & & & \mu_{c+1} & & -\mu_{c+1}-\lambda_{c+1} & \lambda_{c+1} & & \\
 & & & & & \mu_{c+2} & -\mu_{c+2}-\lambda_{c+2} & \lambda_{c+2} & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right).$$

Este nuevo proceso de nacimiento y muerte tiene tasas de nacimiento y muerte

$\{\lambda_{n+c+1}, \mu_{n+c+1},\ n \geq 0\}$.

Para estos modelos, en lugar de trabajar con los polinomios $\{Q_n(x)\}$ definidos en (1.17), nos resultará más conveniente trabajar con los polinomios $\{F_n(x)\}$

$$F_n(x) = \pi_n Q_n(x),$$

que satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^\infty F_n(x)F_m(x)d\psi(x) = \pi_n \delta_{mn}, \tag{3.1}$$

y están generados por

$$F_0(x) = 1, \quad F_1(x) = \frac{(\lambda_0\mu_0 - x)}{\mu_1},$$

$$-xF_n(x) = \mu_{n+1}F_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)F_n(x) + \lambda_{n-1}F_{n-1}(x). \tag{3.2}$$

En el Modelo I, los polinomios F_n son los c-ésimos polinomios asociados de Laguerre a los que denotaremos como $L_n^{(\alpha)}(x;c)$.

Es importante mencionar que estos modelos lineales son asintóticamente simétricos, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 1.$$

Para finalizar la primera sección de este capítulo nos fijaremos en dos modelos adicionales donde se presentan los polinomios de Meixner asociados y los casos confluentes donde se presentan los polinomios de Charlier asociados.

En la segunda sección estudiaremos dos modelos de polinomios asociados a procesos de nacimiento y muerte con tasas cuadráticas

$$\lambda_n = (n+a)(n+b), \quad n \geq 0, \quad \mu_n = (n+\alpha)(n+\beta), \quad n > 0, \quad \mu_0 = 0 \quad \text{o} \quad \mu_0 = \alpha\beta.$$

Cuando $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ los polinomios se reducen a los polinomios duales de Hahn mencionados en el Capítulo 1. El caso cuando $ab = 0$, puede consultarse a mayor detalle en [24]. Llamaremos a estos polinomios los *polinomios continuos duales asociados de Hahn*.

Este capítulo está basado en las referencias [11, 12].

3.1. Otros procesos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal

En esta sección calcularemos primero las medidas espectrales de los dos modelos de nacimiento y muerte con crecimiento lineal introducidos anteriormente mediante el uso de funciones generadoras. Derivaremos además una fórmula explícita para los polinomios $F_n(x)$ de ambos modelos y veremos como puede obtenerse la medida espectral de uno de los modelos a partir de la del otro modelo. Finalizaremos esta sección con un estudio de los polinomios de Meixner asociados, los cuales se presentan cuando

$$\lambda_n = c(n+\gamma+\beta), \quad \mu_n = n+\gamma, \quad n \geq 0,$$

$$\lambda_n = c(n+\gamma+\beta), \quad \mu_{n+1} = n+\gamma+1, \quad n \geq 0,\ \mu_0 = 0,$$

y las transformadas de Stieltjes de las medidas espectrales de estos casos.

3.1.1. Funciones generadoras

Denotaremos por $\mathcal{P}_m(t,\omega)$ a la función generadora de $P_{mn}(t)$, es decir,

$$\mathcal{P}_m(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n P_{mn}(t).$$

Esta función $\mathcal{P}(t,\omega)$ es una función analítica de ω en $|\omega| \leq 1$, pues la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}(t)$ es convergente y todos sus términos son no negativos. Más aún, de la representación de Karlin-McGregor (1.21) y la relación de ortogonalidad de los polinomios $F_n(x)$ (3.1) tenemos que

$$\pi_m \mathcal{P}_m(t,\omega) = \int_0^{\infty} e^{-tx} F_m(x) F(x,\omega) d\psi(x), \tag{3.3}$$

donde

$$F(x,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n F_n(x).$$

Asumiremos ahora que λ_n y μ_{n+1} son funciones polinómicas de n, $n \geq 0$ y

$$\tilde{\mu}_0 = \lim_{n\to 0} \mu_n.$$

La ecuación de evolución de Kolmogorov es

$$P'_{m,n}(t) = \mu_{n+1} P_{m,n+1}(t) - (\lambda_n+\mu_n) P_{m,n}(t) + \lambda_{n-1} P_{m,n-1}(t), \quad n \geq 0, \tag{3.4}$$

donde $\lambda_{-1} P_{m,-1}(t)$ puede interpretarse como igual a cero. Sea

$$\delta = \omega \frac{\partial}{\partial \omega},$$

multiplicando entonces (3.4) por ω^n y sumando desde $n = 0$ hasta ∞ la ecuación resultante, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n P'_{m,n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n+1} P_{m,n+1}(t)\omega^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n-1} P_{m,n-1}(t)\omega^n$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n + \mu_n) P_{m,n}(t)\omega^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta t}\mathcal{P}_m(t,\omega) = \frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1}\mu_{n+1}P_{m,n+1}(t) + \omega \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n-1}\lambda_{n-1}P_{m,n-1}(t)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n (\lambda_n + \mu_n) P_{m,n}(t)$$

$$= \left[\frac{1}{\omega}\mu(\delta) + \omega\lambda(\delta) - \lambda(\delta) - \mu(\delta)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n P_{m,n}(t) + \left[(\omega - 1)\frac{1}{\omega}\tilde{\mu}_0 - \mu_0\right] P_{m,0}(t)$$

$$= (1-\omega)\left[\frac{1}{\omega}\mu(\delta) - \lambda(\delta)\right]\mathcal{P}_m(t,\omega) + \left[\tilde{\mu}_0 \frac{(\omega-1)}{\omega} - \mu_0\right] P_{m,0}(t), \tag{3.5}$$

donde $\lambda(\delta)$, $\mu(\delta)$ son los polinomios λ_δ y μ_δ respectivamente.

La fórmula de Karlin-McGregor y la representación integral (3.3) establecen entonces la ecuación diferencial

$$\left[(1-\omega)\left\{\frac{1}{\omega}\mu(\delta) - \lambda(\delta)\right\} + x\right] F(x,\omega) = \mu_0 + \tilde{\mu}_0 \frac{(1-\omega)}{\omega}. \tag{3.6}$$

La normalización $\int_0^\infty d\psi(x) = 1$ y la ortogonalidad de los polinomios F_n con respecto a $d\psi$ nos dan la condición de frontera

$$\int_0^\infty F(x,\omega) d\psi(x) = 1, \tag{3.7}$$

que es una ecuación integral involucrando a $d\psi$. Para simplificar las cuentas definiremos un parámetro auxiliar η (que nos ayudará a estudiar ambos modelos simultáneamente) como

$$\eta = 0 \quad \text{en el modelo I}, \qquad \eta = 1 \quad \text{en el modelo II}.$$

Resolveremos ahora la ecuación diferencial (3.6) cuando λ_n y μ_n son polinomios en n de grado 1 y $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$. En este caso, la ecuación diferencial se reduce a

$$\omega(1-\omega)^2\frac{\partial F}{\partial\omega} + [(1-\omega)\{c-(c+\alpha+1)\omega\} + x\omega]\, F = c(1-\omega)^\eta.$$

Cuya solución es (apreciando que es una ecuación lineal de primer orden)

$$F(x,\omega) = \omega^{-c}(1-\omega)^{-\alpha-1}e^{-\frac{x}{1-\omega}}\left[C + c\int_\alpha^\omega (1-u)^{\eta+\alpha-1}u^{c-1}e^{\frac{x}{1-u}}du\right], \quad (3.8)$$

para algunas constantes α y C, con $0 < \alpha < 1$. Además, cuando $c \geq 0$, la condición de frontera $F(x,0) = 1$ implica que

$$F(x,\omega) = c\omega^{-c}(1-\omega)^{-\alpha-1}e^{-\frac{x\omega}{1-\omega}}\int_0^\omega u^{c-1}(1-u)^{\eta+\alpha-1}e^{\frac{xu}{1-u}}du. \quad (3.9)$$

Realizamos ahora dos cambios de variable

$$u = \frac{t}{1+t} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{\omega}{1-\omega}.$$

Con lo que (3.9) se convierte en

$$F\left(x, \frac{z}{1+z}\right) = c\left(\frac{z}{z+1}\right)^{-c}(z+1)^{\alpha+1}e^{-xz}\int_0^z\left(\frac{t}{1+t}\right)^{c-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{n+\alpha-1}e^{xt}dt$$

$$\Leftrightarrow F\left(x, \frac{z}{1+z}\right) = cz^{-c}(1+z)^{c+\alpha+1}\int_0^z t^{c-1}(1+t)^{-\alpha-c-\eta}e^{x(t-z)}dt. \quad (3.10)$$

Integrando ambos lados de la ecuación y restringiendo al caso cuando consideramos la condición de frontera (3.7) tenemos que

$$z^c(1+z)^{-c-\alpha-1} = c\int_0^\infty\left\{\int_0^z t^{c-1}(1+t)^{-\alpha-c-\eta}e^{-x(z-t)}dt\right\}d\psi.$$

Es fácil apreciar que la integral interna de la ecuación anterior es una convolución de dos funciones, por lo que aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (bajo el teorema de convolución para transformadas de Laplace) obtenemos

$$\int_0^\infty z^c(1+z)^{-c-\alpha-1}e^{-xz}dz = c\mathscr{L}\left(t^{c-1}(1+t)^{-\alpha-c-\eta}\right)\int_0^\infty \mathscr{L}\left(e^{-x\mu}\right)d\psi.$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\Gamma(c+1)}\int_0^\infty t^c(1+t)^{-c-\alpha-1}e^{-\rho t}dt\right]\left[\frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^\infty t^{c-1}(1+t)^{-\alpha-c-\eta}e^{-\rho t}dt\right]^{-1}$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+1)}c\int_0^\infty\frac{d\psi(x)}{x+\rho}$$

Notando que ambas integrales del lado izquierdo de la ecuación son funciones de Tricomi, la expresión se reduce a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x+\rho} = \frac{\Psi(c+1, 1-\alpha; \rho)}{\Psi(c, 1-\alpha-\eta; \rho)}, \tag{3.11}$$

donde $\Psi(a, c; x)$ es la función de Tricomi definida en (1.31).

Asumimos ahora que las tasas de nacimiento λ_n y μ_{n+1} son siempre positivas para $n \geq 0$ y que μ_0 es no negativa. Esto obliga a que $c \geq 0$, $c+\alpha+1 > 0$ en el modelo I, mientras que para el modelo II solamente será necesario que $c > -1$, $c+\alpha+1 > 0$. Notemos que cuando $-1 > c > 0$ la representación integral (3.10) no es válida. Sin embargo, regresando a la ecuación (3.9), podemos reescribir a cu^{c-1} como $\frac{\partial}{\partial u} u^c$y después de integrar por partes obtenemos

$$\begin{aligned} F(x,\omega) = &\left[\omega^{-c}(1-\omega)^{-\alpha} - \omega^{-c-1}(1-\omega)^{-\alpha}\right] e^{-\frac{x}{1-\omega}} \\ &\times \left[C + c\int_a^\omega \alpha u^c(1-u)^{\alpha+1} + u^c(1-u)^\alpha e^{-\frac{x}{1-u}} du\right]. \end{aligned}$$

Cuando $c \geq 0$, la condición de frontera $F(x, 0) = 1$ implica que

$$\begin{aligned} F(x,\omega) = c &\left[\omega^{-c}(1-\omega)^{-\alpha} - \omega^{-c-1}(1-\omega)^{-\alpha}\right] e^{-\frac{x\omega}{1-\omega}} \\ &\times \int_0^\omega \alpha u^c(1-u)^{\alpha+1} + u^c(1-u)^\alpha e^{-\frac{xu}{1-u}} du. \end{aligned}$$

Tomando $u = \frac{t}{1+t}$ y $z = \frac{\omega}{1-\omega}$ tenemos que

$$\begin{aligned} F\left(x\frac{z}{1+z}\right) =& c\left[z^{-c}(1+z)^{\alpha+c} - z^{-c-1}(1+z)^{\alpha+c+1}\right] \\ &\times \int_0^\infty \left\{\int_0^z \left[\alpha t^c(1+t)^{-\alpha-c-1} + t^c(1+t)^{-\alpha-c}\right] e^{-x(z-t)} dt\right\} d\psi, \end{aligned}$$

que bajo la condición de frontera (3.7) se convierte en

$$z^c(1+z)^{-\alpha-c} - z^{c+1}(1+z)^{-\alpha-c-1} = c\int_0^\infty \left\{\int_0^z \left[\alpha t^c(1+t)^{-\alpha-c-1} + t^c(1+t)^{-\alpha-c}\right] e^{-x(z-t)} dt\right\} d\psi.$$

Y finalmente aplicando transformada de Laplace y simplificando obtenemos la expresión

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x+\rho} = \frac{\Psi(c+1, 2-\alpha; \rho) - (c+1)\Psi(c+2, 2-\alpha; \rho)}{\alpha\Psi(c+1, 1-\alpha; \rho) + \rho\Psi(c+1, 2-\alpha; \rho)}.$$

Cuando $c < 0$, podemos reducir el lado derecho de esta expresión al lado derecho de (3.11) mediante las relaciones:

$$(c-a-1)\Psi(a,c-1;x)-(c-1+x)\Psi(a,c;x)+x\Psi(a,c+1;x)=0,$$

y

$$\Psi(a,c;x)-a\Psi(a+1,c;x)-\Psi(a,c-1;x)=0.$$

El siguiente teorema nos permite evaluar las medidas espectrales de los dos modelos.

Teorema 3.1 *[11, Teorema 2.1.]* Sean $L_n^{(\alpha)}(x;c)$ y $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x;c)$ los polinomios F_n de los modelos I y II respectivamente, y sean ψ_1 y ψ_2 sus medidas espectrales, respectivamente. Entonces

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi_j(x)}{x+p}=\frac{\Psi(c+1,1-\alpha;p)}{\Psi(c,2-\alpha-j;p)}$, $j=1,2.$

Más aún, las medidas espectrales ψ_j, $j=1,2$, son absolutamente continuas y

(2) $\displaystyle\psi_1'(x)=x^\alpha e^{-x}\frac{|\Psi(c,1-\alpha,xe^{-i\pi})|^{-2}}{\Gamma(c+1)\Gamma(1+c+\alpha)}$,

(3) $\displaystyle\psi_2'(x)=x^\alpha e^{-x}\frac{|\Psi(c,-\alpha,xe^{-i\pi})|^{-2}}{\Gamma(c+1)\Gamma(1+c+\alpha)}$,

(4) $\displaystyle\int_0^\infty P_{n,j}(x)P_{m,j}(x)d\psi_j(x)=\frac{(\alpha+c+1)_n}{(c+1)_n}\delta_{m,n}$, $j=1,2,$

$P_{n,1}(x)=L_n^{(\alpha)}(x;c)$, $P_{n,2}(x)=\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x;c)$.

Demostración. Notemos que la demostración de la primera parte del teorema corresponde a lo estudiado anteriormente en este capítulo. Las medidas espectrales $d\psi_1$ y $d\psi_2$ pueden ser calculadas a partir de la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes enunciada en el Capítulo 1

$$F(\rho)=\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{x+\rho} \qquad \text{si y solo si}$$
$$\psi(x_2)-\psi(x_1)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{x_1}^{x_2}\frac{F(-x-i\varepsilon)-F(-x+i\varepsilon)}{2\pi i}dx.$$

Los detalles para calcular la medida ψ_2 pueden encontrarse en Ismail y Kelker [10], así como en Goovaerts, D'Hooge y De Pril [9], la medida ψ_1 puede ser evaluada similarmente.

Para la relación de ortogonalidad (4), podemos observar que dado un conjunto de polinomios generados por

$$-xp_n(x)=b_np_{n+1}(x)-(b_n+d_n)p_n(x)+d_np_{n-1}(x),$$

con $b_{n-1} > 0$, $d_n > 0$, $n = 1, 2, ...,$ $d_0 \geq 0$, $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$, como lo son los polinomios $F_n(x)$, es ortogonal respecto a una medida $d\mu(x)$ cuyo soporte esté en $[0, \infty)$. Si

$$\int_0^\infty [p_n(x)]^2 d\mu(x) = \frac{1}{\pi_n}, \quad \pi_0 = 1,$$

(lo cual se cumple como consecuencia de los enunciados (2) y (3) de este teorema) entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una medida única con soporte en $[0, \infty)$ es la divergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n [p_n(0)]^2,$$

En el caso estudiado,

$$\pi_n = \frac{(c+1)_n}{(c+\alpha+1)_n}.$$

Con lo que se concluye la demostración.

$\square$

3.1.2. Representación explícita

Buscaremos ahora determinar una fórmula explícita para los polinomios $F_n(x)$. Partiendo de la ecuación (3.10), reescribimos primero $e^{x(t-z)}$ como su expansión en serie de Taylor, i.e.,

$$F\left(x, \frac{z}{1+z}\right) = c(1+z)^{c+\alpha+1} \int_0^1 t^{c-1}(1+zt)^{-\alpha-c-\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[xz(t-1)^m]}{m!} dt.$$

Múltiplicamos por $\frac{\Gamma(m+c+1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(m+c+1)\Gamma(c+1)}$ para obtener así la representación integral de la función hipergeométrica

$$F\left(x, \frac{z}{1+z}\right) = \Gamma(c+1)(1+z)^{c+\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-xz)^m}{\Gamma(c+m+1)} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha+\eta+c, c \\ m+c+1 \end{array} ; -z \right),$$

notando que la representación integral de la función hipergeométrica está dada por ([25])

$$F(A, B; C; Z) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} A, B \\ C \end{array} ; z \right) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\Gamma(C-B)} \int_0^1 t^{B-1}(1-t)^{C-B-1}(1-zt)^{-A} dt.$$

Aplicamos ahora la transformación de Pfaff-Kummer ([25])

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} A, B \\ C \end{matrix} ; z\right) = (1-z)^{-A} {}_2F_1\left(\begin{matrix} A, C-B \\ C \end{matrix} ; \frac{z}{z-1}\right),
$$

y sustituimos $z = \frac{\omega}{1-\omega}$ para obtener

$$
F(x,\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x\omega)^m}{(c+1)_m} (1-\omega)^{-m-\alpha-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c, m+1-\alpha-\eta \\ m+c+1 \end{matrix} ; \omega\right).
$$

Por lo que aplicando el teorema del binomio de Newton y reescribiendo la función hipergeométrica a su forma usual (la dada en su definición) obtenemos

$$
F(x,\omega) = \sum_{j,m,k=0}^{\infty} \frac{(-x)^m (\alpha+1+m)_j (c)_k (m+1-\alpha-\eta)_k}{(c+1)_m j! (m+c+1)_k k!} \omega^{m+j+k}.
$$

Lo que establece la representación explícita

$$
\begin{aligned}
F_n(x) = F_n(x;\alpha,c;\eta) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-n)_m x^m}{(c+1)_m (\alpha+1)_m} \\
\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} m-n, m+1-\alpha-\eta, c \\ -\alpha-n, c+m+1 \end{matrix} ; 1\right).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Cuando α es un entero tenemos que

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix} m-n, m+1-\alpha-\eta, c \\ -\alpha-n, c+m+1 \end{matrix} ; 1\right) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(n-m)_k (m+1-\alpha-\eta)_k (c)_k}{(-\alpha-n)_k (c+m+1)_k k!}.
$$

Cuando $\eta = 0$ (modelo I), es posible obtener la expresión (3.12) usando información detallada de las dos soluciones linealmente independientes de la relación de recurrencia de tres términos de los F_n, como lo hicieron Askey y Wimp en [2].

Los polinomios de Hermite asociados $H_n(x;c)$, están generados por

$$
H_{n+1}(x;c) = 2xH_n(x;c) - 2(n+c)H_{n-1}(x;c), \qquad n > 0, \tag{3.13}
$$

con $H_0(x;c) = 1$ y $H_1(x;c) = 2x$.

Su relación de ortogonalidad está dada en el siguiente teorema:

Teorema 3.2 *[2, Teorema 4.]* Si $c > -1$, entonces

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(x;c) H_m(x;c)}{|D_{-c}(ix\sqrt{2})|^2} = 2^n \sqrt{\pi} \Gamma(n+c+1) \delta_{m,n},
$$

donde D_v es la función de cilindro parabólico definida en el Capítulo 1.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [2]. En el mismo artículo Askey y Wimp observan también las siguientes relaciones entre los polinomios de Laguerre y de Hermite asociados

$$H_{2n+1}(x;c) = 2x\sigma_n L_n^{(\frac{1}{2})}\left(x^2; \frac{c}{2}\right),$$

$$H_{2n}(x;c) = \sigma_n \left[L_n^{(-\frac{1}{2})}\left(x^2; \frac{c}{2}\right) - \frac{c}{c+2} L_{n-1}^{(-\frac{1}{2})}\left(x^2; 1+\frac{c}{2}\right)\right],$$

con

$$\sigma_n = (-4)^n \left(1+\frac{c}{2}\right)_n .$$

Askey y Wimp explican que los polinomios de Hermite asociados, $H_{2n}(x;c)$, no pueden interpretarse simplemente como un múltiplo de los polinomios de Laguerre asociados, $L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2;c)$, pues cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $-1 < c < 0$, los polinomios de Laguerre asociados no son ortogonales en $[0, \infty)$, dado que existe un punto de masa fuera del intervalo. Sin embargo, como probaron Ismail, Letessier y Valent ([11]), lo único que falta por considerar son los polinomios $\mathcal{L}_n$. Observemos que cuando $j = 2$, la parte (4) del Teorema 3.1 es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}\mathcal{L}_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2;c)\mathcal{L}_m^{(-\frac{1}{2})}(x^2;c)dx}{\left|\Psi\left(c, \frac{1}{2}; -x^2\right)\right|^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+c+n\right)\Gamma(c+1)}{(c+1)_n}\delta_{m,n}.$$

Entonces la expresión de la función de cilindro parabólico como función de Tricomi, i.e.

$$D_{2v}(2x) = 2^v e^{-x^2}\Psi\left(-v, \frac{1}{2}; 2x^2\right),$$

la fórmula de duplicación de la función Gamma ([25])

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

y la unicidad de los polinomios ortogonales, establecen

$$H_{2n}(x;c) = \sigma_n \mathcal{L}_n^{(-\frac{1}{2})}\left(x^2; \frac{c}{2}\right),$$

recordando que

$$\sigma_n = (-4)^n \left(1+\frac{c}{2}\right)_n .$$

Esto último puede ser probado de forma alternativa utilizando las relaciones de recurrencia de tres términos (3.2) y (3.13).

3.1.3. Polinomios de Meixner y Charlier asociados

Ahora estudiaremos los casos cuando se presentan los polinomios de Meixner asociados, i.e.,

Caso a) $\lambda_n = c(n+\gamma+\beta), \qquad \mu_n = n+\gamma, \qquad n \geq 0,$

Caso b) $\lambda_n = c(n+\gamma+\beta), \qquad \mu_{n+1} = n+\gamma+1, \qquad n \geq 0,\ \mu_0 = 0.$

Para esto definiremos nuevamente un parámetro auxiliar η como:

$$\eta = 0 \text{ en el caso a)}, \qquad \eta = 1 \text{ en el caso b)}.$$

y sea

$$M_n^\gamma(x; b, c, \eta) := F_n\left(\frac{x}{1-c}\right), \qquad \eta = 0, 1.$$

Entonces las funciones generadoras

$$F_\eta(x,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n M_n^\gamma(x;\beta,c,\eta),$$

están dadas por (de (3.10))

$$F_\eta(x,\omega) = \gamma\omega^{-\gamma}(1-c\omega)^{-\beta-x}(1-\omega)^x \int_0^\omega u^{\gamma-1}(1-cu)^{\beta+x-1}(1-u)^{\eta-x-1}du, \tag{3.14}$$

donde $\gamma \geq 0$. El método de Darboux ([31]) establece que si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

son analíticas en $|z| < r$, y que $f(z) - g(z)$ es continua en $|z| = r$, entonces $f_n = g_n + o(r^{-n})$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, los valores asintóticos de los coeficientes en la expansión en serie de Taylor de la función $f(z)$ analítica en una vecindad de $z = 0$ están determinados por el término principal de la parte singular de $f(z)$ en las singularidades más cercanas al origen.

Aplicando entonces el método de Darboux a (3.14), obtenemos que

$$n^{x+1} M_n^\gamma(x;\beta,c,\eta) \sim (1-c)^{-\beta-x} \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\eta-x)}{\Gamma(\gamma+\eta-x)\Gamma(-x)} {}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma, 1-\beta-x \\ \eta+\gamma-x\end{matrix}; c\right). \tag{3.15}$$

Los numeradores de la fracción continua asociada con cualquiera de los dos conjuntos de polinomios son $-\frac{1}{\gamma+1} M_n^{\gamma+1}(x;\beta,c,0)$. Es fácil notar que como estamos asumiendo que $\lambda_n > 0$ y $\mu_{n+1} > 0$ para $n \geq 0$ y $\mu_0 \geq 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_{n-1}\mu_n)^{-\frac{1}{2}}=\infty,$$

por lo que bajo los criterios de Carleman [29], podemos afirmar que el problema de momentos está determinado en ambos casos ($\eta = 0, 1$), es decir, ambas medidas espectrales son únicas. Sean $\{M_n^{\gamma}(x;\beta,c,x)\}$ ortogonales con respecto a la medida $d\zeta_\eta(x)$. Entonces por (3.15) y el Teorema de Markov (Teorema 1.7) obtenemos

$$\int_0^{\infty}\frac{d\zeta_\eta(x+u)}{x+u}=(\gamma+x)^{1-\eta}(x)^{-\eta}\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+\gamma,1+x-\beta\\ \gamma+1+x\end{matrix};c\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma,1+x-\beta\\ \eta+\gamma+x\end{matrix};c\right)}.$$

Esta última relación prueba que el espectro de ambos procesos es discreto y está localizado en los ceros de

$$\frac{\Gamma(\eta-x)}{\Gamma(-x)\Gamma(\gamma+\eta-x)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma,1-\beta-x\\ \eta+\gamma-x\end{matrix};c\right).$$

De forma análoga, se pueden estudiar los casos

Caso c) $\quad \lambda_n = a, \quad \mu_n = n+\gamma, \quad n\geq 0,$

Caso d) $\quad \lambda_n = a, \quad \mu_{n+1} = n+\gamma+1, \quad n\geq 0,\ \mu_0=0.$

Definimos ahora $\eta = 0$ en el caso c) y $\eta = 1$ en el caso d), y encontramos que el espectro del proceso correspondiente consiste en los ceros de

$$\frac{\Gamma(\eta-x)}{\Gamma(-x)\Gamma(\gamma+\eta-x)}{}_1F_1\left(\begin{matrix}\gamma\\ \gamma+\eta-x\end{matrix};-a\right).$$

Si $d\zeta_\eta$ son las medidas espectrales de los procesos correspondientes, entonces

$$\int_0^{\infty}\frac{d\zeta_\eta(u)}{x+u}=(\gamma+x)^{1-\eta}x^{-\eta}\frac{{}_1F_1\left(\begin{matrix}\gamma+1\\ \gamma+1+x\end{matrix};-a\right)}{{}_1F_1\left(\begin{matrix}\gamma\\ \eta+\gamma+x\end{matrix};-a\right)}.$$

Los polinomios de Charlier asociados son ortogonales con respecto a la medida discreta $d\zeta_\eta(u)$.

3.2. Otros procesos de nacimiento y muerte con crecimiento cuadrático

En esta sección encontraremos primero las funciones generadoras de los polinomios asociados a los dos modelos con tasas cuadráticas dados por

$$\lambda_n = (n+a)(n+b), \quad n \geq 0, \quad \mu_n = (n+\alpha)(n+\beta), \quad n > 0,$$

y de los polinomios del numerador de la fracción continua correspondiente (teorema de Markov). Utilizaremos nuevamente el método de Darboux a estas funciones generadoras para determinar el término principal de la expansión asintótica de los polinomios. Posteriormente determinaremos la fracción continua cuyos denominadores son los polinomios continuos duales asociados de Hahn. Veremos también que la medida espectral es única, por lo que la fracción continua será la transformada de Stieltjes de la medida espectral. Con esto en mente, invertiremos la transformada de Stieltjes y obtendremos la medida espectral. Finalmente, calcularemos las representaciones explícitas de los polinomios y utilizaremos la simetría de los polinomios en los parámetros α y β para obtener fórmulas de transformación involucrando sumas dobles.

3.2.1. Funciones generadoras

Como mencionamos previamente, estudiaremos dos casos distintos dependiendo de si μ_0 se anula o no ($\mu_0 = 0$ o $\mu_0 = \alpha\beta$). Al igual que cuando estudiamos los modelos con crecimiento lineal, definiremos una variable auxiliar η para hacer una distinción entre los casos y será como sigue:

$$\text{Caso I: } \eta = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu_0 = 0,$$

$$\text{Caso II: } \eta = 1 \quad \text{cuando} \quad \mu_0 = \alpha\beta.$$

Sean $\{P_n(x)\}$, o equivalentemente $\{P_n(x; a, b, \alpha, \beta)\}$ los polinomios ortogonales correspondientes que satisfacen la relación de recurrencia de tres términos

$$-xP_n(x) = \mu_{n+1}P_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(x) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(x), \tag{3.16}$$

con condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = \frac{(\lambda_0 + \mu_0 - x)}{\mu_1},$$

y denotamos a su función generadora como

$$G(x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\omega^n.$$

Multiplicando la relación de recurrencia (3.16) por ω^{n+1} y aplicando las condiciones iniciales obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \omega(1-\omega)^2 G''(x,\omega) + (1-\omega)\left[1+\alpha+\beta-(a+b+1)\omega\right] G'(x,\omega) \\ + \left[x + (\omega - 1)(ab - \frac{\alpha\beta}{\omega})\right] G = \alpha\beta\frac{(1-\omega)^\eta}{\omega}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $'$ denota la derivada con respecto a ω. Observemos que se presentan tres singularidades de la ecuación diferencial anterior, estas son $\omega = 0, 1, \infty$, todas son puntos singulares regulares. Esto implica que si H es una solución de la ecuación homogénea (3.16), podemos encontrar parametros r y v tales que la función $F(\omega) = \omega^{-r}(1-\omega)^{-v}H(\omega)$ satisfaga la ecuación diferencial hipergeométrica

$$\omega(1-\omega)F''(\omega) + \left[C - (1+A+B)\omega\right] F'(\omega) - ABF = 0.$$

Elegimos entonces

$$r = -\beta, \qquad v = \gamma - (\gamma^2 - x)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{con } \gamma = \frac{1+\alpha+\beta-a-b}{2},$$

y encontramos que

$$A = -(\gamma^2 - x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1+\alpha-\beta+b-a}{2}, \qquad B = A + a - b, \qquad C = 1 + \alpha - \beta.$$

Dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea (3.17) están dadas por

$$G_1^{\alpha,\beta}(\omega) = \omega^{-\beta}(1-\omega)^{\gamma-(\gamma^2-x)^{\frac{1}{2}}}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} A, B \\ c \end{matrix} ; \omega \right),$$

$$G_2^{\alpha,\beta}(\omega) = G_1^{\beta,\alpha}(\omega).$$

El Wronskiano de G_1 y G_2 es $C_1\omega^{-\alpha-\beta-1}(1-\omega)^{\alpha+\beta-a-b}$, donde C_1 es una constante. Por lo tanto, la solución de (3.17), que es analítica en $\omega = 0$ y $G(x, 0) = 1$, está dada por

$$G(x,\omega) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\int_0^\omega u^{\alpha+\beta-1}(1-u)^{\eta-2\gamma-1}\left[G_1^{\alpha,\beta}(\omega)G_2^{\alpha,\beta}(u) - G_1^{\alpha,\beta}(u)G_2^{\alpha,\beta}(\omega)\right] du. \tag{3.18}$$

Ahora determinaremos el término principal de la expansión asintótica de $P_n(x)$ mediante el método asintótico de Darboux. Primero observamos que las funciones hipergeométricas que aparecen en (3.18) están definidas siempre que sus argumentos sean igual a 1 si $\mathrm{Re}\{(\gamma^2 - x)^{\frac{1}{2}}\} > 0$. Por lo que en este caso

$$(1-\omega)^{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-x}}G(x,\omega),$$

es una función analítica de ω en $|\omega| \leq 1$. Sea $\mathscr{A}$ el límite de la función anterior cuando $\omega \to 1$. El exponente más pequeño de $(1-\omega)$ en la expansión de $G(x,\omega)$ alrededor de $\omega = 1$ es $\gamma - (\gamma^2 - x)^{\frac{1}{2}}$. Aplicamos ahora el método de Darboux. Por lo tanto, el término dominante en la expansión asintótica de $P_n(x)$ es igual al coeficiente de ω^n en $\mathscr{A}(1-\omega)^{\gamma-\sqrt{\gamma^2-x}}$. Utilizamos ahora el teorema del binomio de Newton para encontrar que el coeficiente previamente mencionado es

$$\mathscr{A}\frac{\Gamma(n-\gamma+\sqrt{\gamma^2-x})}{\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)}\Gamma(n+1) \sim \frac{^{-\gamma-1+\sqrt{\gamma^2-x}}}{\Gamma(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-x})}.$$

Esto establece la fórmula asintótica

$$\begin{aligned}P_n(x) \approx & \frac{\alpha\beta n^{-1-\gamma-(\gamma^2-x)^{\frac{1}{2}}}}{(\beta-\alpha)\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)}\int_0^1 (1-u)^{\eta-\gamma-1-\sqrt{\gamma^2-x}} \\ & \times \left[u^{\alpha-1}\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma(2\sqrt{\gamma^2-x})}{\Gamma(1-A)\Gamma(1-B)}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} A+\beta-\alpha, B+\beta-\alpha \\ 1+\alpha-\beta \end{array};u\right)\right. \\ & \left. - u^{\beta-1}\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(2\sqrt{\gamma^2-x})}{\Gamma(1-A')\Gamma(1-B')}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} A'+\alpha-\beta, B+\alpha-\beta \\ 1+\beta-\alpha \end{array};u\right)\right],\end{aligned}$$

donde A' y B' son A y B con α y β intercambiados respectivamente.

Cuando $x \notin \mathbb{R}$, el integrando de la fórmula asintótica anterior puede simplificarse considerablemente mediante la relación ([3])

$$\begin{aligned}(1-z)^{h-f-g}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} h-f, h-g \\ 1+h-f-g \end{array};1-z\right) = & \frac{\Gamma(1+h-f-g)\Gamma(1-h)}{\Gamma(1-f)\Gamma(1-g)}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} f,g \\ h \end{array};z\right) \\ & + \frac{\Gamma(1+h-f-g)\Gamma(h-1)}{\Gamma(h-f)\Gamma(h-g)}z^{1-h}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} 1+f-h, 1+g-h \\ 2-h \end{array};z\right),\end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$P_n(x) \approx \frac{\alpha\beta n^{-1-\gamma-\sqrt{\gamma^2-x}}}{(\beta-\alpha)\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\eta-1-\gamma+\sqrt{\gamma^2-x}}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} 1-A, 1-B \\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x} \end{array};1-u\right)du.$$

Aplicamos ahora la representación integral de tipo Euler para la función hipergeométrica generalizada ([25])

$${}_3F_2\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(b_2)}{\Gamma(b_2-a_3)\Gamma(a_3)}\int_0^1 t^{a_3-1}(1-t)^{b_2-a_3-1}{}_2F_1\left(\begin{array}{c} a_1, a_2 \\ b_1 \end{array};zt\right)dt, \tag{3.19}$$

para obtener la relación asintótica

$$P_n(x) \approx \frac{\alpha\beta n^{\sqrt{\gamma^2-x}-1-\gamma}\Gamma(\beta)\Gamma(\eta-\gamma+\sqrt{\gamma^2-x})}{2\sqrt{\gamma^2-x}\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}\gamma)\Gamma\left(\eta+\sqrt{\gamma^2-x}+\frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2}\right)}{}_3F_2\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{array};1\right), \tag{3.20}$$

donde

$$a_1 = \frac{1+a-b+\beta-\alpha}{2} + \sqrt{\gamma^2 - x},$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma^2 - x} + \frac{1+b-a+\beta-\alpha}{2},$$

$$a_3 = \sqrt{\gamma^2 - x} + \eta + \frac{a+b-\alpha-\beta-1}{2},$$

$$b_1 = 1 + 2\sqrt{\gamma^2 - x},$$

$$b_2 = \sqrt{\gamma^2 - x} + \eta + \frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2},$$

cuando $n \to \infty$ y con x fija con $\mathrm{Im}(x) \neq 0$.

3.2.2. Medidas espectrales

Los polinomios ortonormales $\{\omega_n(x)\}$ están dados por

$$\omega_n(x) = \left[\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}\right]^{\frac{1}{2}} P_n(x).$$

Por lo que, recordando que el símbolo de Pochhammer puede escribirse como

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}, \quad n \geq 1,$$

y la relación asintótica

$$\frac{(z)_n}{n!} \sim \Gamma(z) n^{z-1},$$

los polinomios ortonormales resultan en este caso

$$\omega_n(x) = \left[\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(2+\alpha)(2+\beta)\cdots(n+\alpha)(n+\beta)}{ab(a+1)(b+1)(a+2)(b+2)\cdots(n-1+a)(n-1+b)}\right]^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

$$\approx \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} n^{\alpha+\beta+2-a-b} P_n(x).$$

A partir de esto y (3.20) podemos observar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n(x)|^2 = \infty,$$

para algún complejo x. Por lo que acorde al Teorema 2.9 en [29], el problema de momentos correspondiente está determinado, i.e., la medida espectral es única.

Si denotamos por $\{q_n(x)\}$ a los numeradores de la fracción continua cuyos denominadores son los $P_n(x)$, satisfacen la relación de recurrencia (3.16) con condiciones iniciales

$$q_0(x) = 0, \qquad q_1(x) = -\frac{1}{\mu_1}.$$

Claramente q_n es un polinomio de grado $n-1$. Denotamos ahora al soporte de la medida espectral $d\psi$ como σ. El hecho de estar determinado el problema de momentos asegura la convergencia uniforme de $\frac{q_n(x)}{P_n(x)}$ a $\int_\sigma (x-t)^{-1}d\psi(x)$ en subconjuntos compactos del corte con el plano x complejo a lo largo de σ. Exhibiremos ahora la dependencia de los polinomios en los parámetros involucrados, por lo que utilizaremos la notación $P_n(x;a,b,\alpha,\beta)$ y una notación análoga para los polinomios $q_n(x)$. De la relación de recurrencia (3.16) y las condiciones iniciales de los $q_n(x)$ podemos ver que

$$q_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta) = -\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}P_{n-1}(x;a+1,b+1,\alpha+1,\beta+1,0). \quad (3.21)$$

Sea

$$X_\eta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)}{P_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)},$$

tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 3.3 *[12, Teorema 1.]* Las funciones $X_\eta(x)$ están dadas por

$$X_\eta(x) = \frac{\alpha^{-1}{}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1-A, 1-B+, \sqrt{\gamma^2-x}-\gamma \\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x}, b-A+1 \end{array}; 1\right)}{\left[\gamma-\sqrt{\gamma^2-x}+\beta(\eta-1)\right]{}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1-A, 1-B+, \sqrt{\gamma^2-x}-\gamma+\eta \\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x}, b-A+\eta \end{array}; 1\right)},$$

donde

$$A = -(\gamma^2-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1+\alpha-\beta+b-a}{2} \qquad \text{y} \qquad B = A+a-b.$$

Demostración. De (3.21) y (3.20) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{q_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)}{P_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)}\\
&\approx \frac{\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right](\alpha+1)(\beta+1)(n-1)^{\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma-1}\Gamma(\beta-1)\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)}{2\sqrt{\gamma^2-x}\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)\Gamma\left(\sqrt{\gamma^2-x}+\frac{a+b+\beta-\alpha+1}{2}\right)}\\
&\times {}_3F_2\left(\begin{array}{c}1-A,1-B+,\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma\\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x},b-A+1\end{array};1\right)\\
&\times\left[\frac{\alpha\beta n^{\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma+\eta)}{2\sqrt{\gamma^2-x}\Gamma(\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma)\Gamma\left(\sqrt{\gamma^2-x}+\frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2}+\eta\right)}\right.\\
&\left.\times {}_3F_2\left(\begin{array}{c}1-A,1-B+,\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma+\eta\\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x},b-A+\eta\end{array};1\right)\right]^{-1},
\end{aligned}
$$

entonces simplificando y tomando el límite

$$
\begin{aligned}
X_\eta(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{q_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)}{P_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta)}\\
&= \frac{\alpha^{-1}{}_3F_2\left(\begin{array}{c}1-A,1-B+,\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma\\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x},b-A+1\end{array};1\right)}{\left[\gamma-\sqrt{\gamma^2-x}+\beta(\eta-1)\right]{}_3F_2\left(\begin{array}{c}1-A,1-B+,\sqrt{\gamma^2-x}-\gamma+\eta\\ 1+2\sqrt{\gamma^2-x},b-A+\eta\end{array};1\right)}.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente paso es invertir las transformadas de Stieltjes $X_\eta(x)$ y encontrar las medidas $d\psi$ de forma explícita mediante la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{x-t}=F(x),\qquad x\notin \operatorname{supp}\{\psi\},$$

si y solo si

$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t_1}^{t_2}\frac{F(t-i\varepsilon)-F(t+i\varepsilon)}{2\pi i}dt. \tag{3.22}$$

Antes de ocupar dicha fórmula de inversión demostraremos el siguiente teorema, el cual utilizaremos en la inversión de las transformadas de Stieltjes de las medidas $d\psi(x)$.

Teorema 3.4 *[12, Lema 2.]* Supongamos que $\mathrm{Re}\{d-a-b\}>0$ y $\mathrm{Re}\{a+b+c-d-e\}>0$. Entonces

$$\lim_{z\to 1^-}(1-z)^{a+b+c-d-e}{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};z\right)=\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(a+b+c-d-e)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}.$$

Demostración. Aplicamos la transformación de Pfaff-Kummer ([25])

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right)=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,c-b \\ c \end{matrix};\frac{z}{z-1}\right),$$

a la función hipergeométrica ${}_2F_1$ en (3.19) y sustituimos a t por $1-t$ para obtener

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};z\right)&=\frac{\Gamma(e)(1-z)^{d-a-b}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)}\int_0^1 t^{e-c-1}(1-t)^{c-1}\\ &\times\left[1-\frac{zt}{z-1}\right]^{d-a-b}{}_2F_1\left(\begin{matrix} d-a,d-b \\ d \end{matrix};z(1-t)\right)dt\end{aligned}$$

$$=\frac{\Gamma(e)(1-z)^{d-a-b}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d-a)_n(d-b)_n}{n!(d)_n}z^n\int_0^1 t^{e-c-1}(1-t)^{n+c-1}\left(1-\frac{zt}{z-1}\right)^{d-a-b}dt.$$

Utilizamos ahora la representación integral de Euler para una función hipergeométrica ${}_2F_1$ con $a_1=b_1$ con lo que resulta

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};z\right)=\frac{\Gamma(e)(1-z)^{d-a-b}}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d-a)_n(d-b)_n}{n!(d)_n}z^n{}_2F_1\left(\begin{matrix} e-c,a+b-d \\ e+n \end{matrix};\frac{z}{z-1}\right).$$

Aplicamos nuevamente la transformación de Pfaff-Kummer a la función hipergeométrica ${}_2F_1$ en la suma de la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned}(1-z)^{a+b+c-d-e}{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};z\right)&=\frac{\Gamma(e)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d-a)_n(d-b)_n\Gamma(n+c)}{n!(d)_n\Gamma(e+n)}\\ &\times{}_2F_1\left(\begin{matrix} e-c,n+d+e-a-b \\ e+n \end{matrix};z\right).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Tomamos el límite $z\to 1^-$ y utilizamos el teorema de Gauss ([25])

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha,\beta \\ \gamma \end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},\qquad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0,$$

y el resultado es que el lado derecho de la expresión (3.23) se reduce a

$$\frac{\Gamma(e)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d-a)_n (d-b)_n \Gamma(a+b+c-d-e)}{n!(d)_n \Gamma(a+b-d)},$$

lo cual puede ser sumado mediante el teorema de Gauss para obtener

$$\lim_{n\to 1^-} (1-z)^{a+b+c-d-e} {}_3F_2\left(\begin{array}{c} a,b,c \\ d,e \end{array} ; z \right) = \frac{\Gamma(e)\Gamma(d)\Gamma(a+b+c-d-e)}{\Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

□

Ahora discutiremos la inversión de las transformadas de Stieltjes $X_\eta(x)$, $\eta = 0, 1$, y encontraremos las medidas con respecto a las que los polinomios son ortogonales. Sea

$$X_\eta(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x-t} d\psi(t;\eta).$$

Entonces de (3.22) tenemos que

$$2\pi i \psi'(t;\eta) = X_\eta(t - i0^+) - X_\eta(t + i0^+). \tag{3.24}$$

De esta expresión podemos ver que ψ' se anula idénticamente en $(-\infty, \gamma^2)$ pues $X_\eta(x)$ es una función univaluada en el plano complejo cortado a lo largo de $(-\infty, \gamma^2)$. Sean

$$D = -i\sqrt{t-\gamma^2} + \frac{1}{2}(1+a+b+\beta-\alpha), \qquad E = i\sqrt{t-\gamma^2} + \frac{1}{2}(1+a+b+\beta-\alpha).$$

Como

$$\sqrt{\gamma^2 - t \pm i0^+} = \pm i\sqrt{t-\gamma^2}, \qquad t \in [\gamma^2, \infty),$$

entonces del Teorema 3.3

$$\begin{aligned} X_0(t-i0^+) - X_0(t+i0^+) = {} & \frac{{}_3F_2\left(\begin{array}{c} D-a, D-b, D-\alpha-1 \\ 1-2i\sqrt{t-\gamma^2}, D \end{array} ; 1 \right)}{\alpha(D-1)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} D-a, D-b, D-\alpha-1 \\ 1-2i\sqrt{t-\gamma^2}, D-1 \end{array} ; 1 \right)} \\ & - \frac{{}_3F_2\left(\begin{array}{c} E-a, E-b, E-\alpha-1 \\ 1+2i\sqrt{t-\gamma^2}, E \end{array} ; 1 \right)}{\alpha(E-1)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} E-a, E-b, E-\alpha-1 \\ 1+2i\sqrt{t-\gamma^2}, E-1 \end{array} ; 1 \right)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aplicamos la igualdad ([30])

$$\begin{aligned}
&(1-z)^{a+b+c-d-e}{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};z\right) \\
&= \frac{e-1}{e-d}{}_3F_2\left(\begin{matrix} d-a,d-b,d-c \\ d,1+d-e \end{matrix};z\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a,e-b,e-c \\ e-1,1+e-d \end{matrix};z\right) \\
&+ \frac{d-1}{d-e}{}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a,e-b,e-c \\ e,1+e-d \end{matrix};z\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} d-a,d-b,d-c \\ d-1,1+d-e \end{matrix};z\right),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

para obtener

$$\begin{aligned}
&\alpha\left[t-\gamma^2+\left(\frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt{t-\gamma^2}}X_0(t-i0)-X_0(t+i0)= \\
&\lim_{z\to 1^-}\frac{(1-z)^{a+b+\beta+1-D-E}{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,\beta+1 \\ D,E \end{matrix};z\right)}{\left|{}_3F_2\left(\begin{matrix} D-a,D-b,D-\alpha-1 \\ 1-2i\sqrt{t-\gamma^2},D-1 \end{matrix};z\right)\right|^2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Del Teorema 3.4 podemos ver que el numerador del lado derecho de la ecuación se reduce a

$$\frac{\Gamma(E)\Gamma(D)\Gamma(a+b+\beta+1-D-E)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(a)\Gamma(a)}=\frac{\Gamma(E)\Gamma(D)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(a)\Gamma(b)},$$

por lo que de (3.24), tras simplificar un poco obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5 *[12, Teorema 3.]* La función de peso $\psi'(t;0)$ tiene soporte en $[\gamma^2,\infty)$ y está dada por

$$\begin{aligned}
\psi'(t;0) &= \frac{\Gamma(\alpha)\sqrt{t-\gamma^2}}{\pi\alpha\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\beta+1)} \\
&\times\left|\frac{\Gamma\left(i\sqrt{t-\gamma^2}+\frac{a+b-1+\beta-\alpha}{2}\right)}{{}_3F_2\left(\begin{matrix} i\sqrt{t-\gamma^2}+\frac{a-b+1+\beta-\alpha}{2}, i\sqrt{t-\gamma^2}+\frac{b-a+1+\beta-\alpha}{2}, i\sqrt{t-\gamma^2}+\frac{a+b-1-\alpha-\beta}{2} \\ 1+2i\sqrt{t-\gamma^2}, i\sqrt{t-\gamma^2}+\frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2} \end{matrix};1\right)}\right|^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Los polinomios de Hahn duales permanecen invariantes si se intercambian a y b, o si se intercambian α y β. Por lo tanto $\psi'(t;\eta)$ también debe ser invariante bajo dichas operaciones. El lado derecho de (3.28) es simétrico en a y b pero no aparenta serlo en α y β. No obstante podemos reescribir dicha ecuación a la forma más simétrica

$$
\begin{aligned}
&\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\psi'(t;0)\\
&= \sqrt{t-\gamma^2}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3+\alpha+\beta-a-b}{2}+i\sqrt{t-\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2}+i\sqrt{t-\gamma^2}\right)}{\Gamma(1+2i\sqrt{t-\gamma^2})}\right|^2\\
&\times\left|{}_3F_2\left(\begin{array}{c} a-1, b-1, \frac{1+\alpha+\beta-a-b}{2}+i\sqrt{t-\gamma^2} \\ \frac{a+b+\alpha-\beta-1}{2}+i\sqrt{t-\gamma^2}, \frac{a+b+\beta-\alpha-1}{2}+i\sqrt{t-\gamma^2}\end{array};1\right)\right|^2,
\end{aligned}
$$

para $t \in [\gamma^2, \infty)$. Esta igualdad se obtiene a partir de la transformación

$$
{}_3F_2\left(\begin{array}{c} A, B, C \\ D, E \end{array};1\right) = \frac{\Gamma(E)\Gamma(S)}{\Gamma(E-C)\Gamma(S+C)}\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} D-A, D-B, C \\ D, S+C \end{array};1\right),
$$

con $S = D+E-A-B-C$.

Hasta ahora únicamente hemos calculado la medida cuando $\eta = 0$. Podemos lidiar con el caso cuando $\eta = 1$ ($\mu_0 = 0$) de forma similar. Para ello utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 3.6 *[12, Lema 4.]* Las funciones hipergeométricas ${}_3F_2$ satisfacen la relación contigua

$$
Z\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z+1 \\ U, V \end{array};1\right) = (V-1)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z \\ U, V-1 \end{array};1\right) + (1+Z-V)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z \\ U, V \end{array};1\right). \tag{3.29}
$$

Demostración. Por la definición de la función hipergeométrica sabemos que

$$
Z\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z+1 \\ U, V \end{array};1\right) = Z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X)_n(Y)_n(Z+1)_n}{(U)_n(V)_n}\frac{1^n}{n!},
$$

como

$$
Z(Z+1)_n = (Z)_n(Z+n) = (Z)_n\left[(Z-V+1)+(V+n-1)\right],
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X)_n(Y)_n(Z+1)_n}{(U)_n(V)_n n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X)_n(Y)_n(Z)_n}{(U)_n(V)_n n!}\left[(Z-V+1)+(V+n-1)\right]\\
&= (V-1)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z \\ U, V-1 \end{array};1\right) + (1+Z-V)\,{}_3F_2\left(\begin{array}{c} X, Y, Z \\ U, V \end{array};1\right).
\end{aligned}
$$

□

Notemos que no es posible utilizar directamente el Teorema 3.6. Sean entonces

$$X = \frac{a-b+\beta-\alpha+1}{2} - i\sqrt{t-\gamma^2}, \qquad Y = \frac{1+b-a+\beta-\alpha}{2} - i\sqrt{t-\gamma^2},$$

$$U = 1 - 2i\sqrt{t-\gamma^2},$$

$$V = \frac{1+a+b-\beta-\alpha}{2} - i\sqrt{t-\gamma^2}, \qquad Z = \frac{a+b-1-\beta-\alpha}{2} - i\sqrt{t-\gamma^2}.$$

Del Teorema 3.3 y (3.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\alpha\left|\gamma - i\sqrt{t-\gamma^2}\right|^2 [X_1(t+i0) - X_1(t-i0)] \left|{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z+1 \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right)\right|^2 \\
&= Z\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z+1 \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \\ \overline{U}, \overline{V} \end{matrix}\ ;1\right) \\
&- \overline{Z}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z+1} \\ \overline{U}, \overline{V} \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right),
\end{aligned}$$

que utilizando el Teorema 3.6 se convierte en

$$\begin{aligned}
&(V-1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V-1 \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \\ \overline{U}, \overline{V} \end{matrix}\ ;1\right) + (1+Z-V)\left|{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right)\right|^2 \\
-&(\overline{V}-1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \\ \overline{U}, \overline{V}-1 \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right) + (1+\overline{Z}-\overline{V})\left|{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right)\right|^2,
\end{aligned}$$

y que al ser $1+Z-V$ un real, se simplifica a

$$\begin{aligned}
&(V-1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V-1 \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \\ \overline{U}, \overline{V} \end{matrix}\ ;1\right) \\
&- (\overline{V}-1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \\ \overline{U}, \overline{V}-1 \end{matrix}\ ;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} X, Y, Z \\ U, V \end{matrix}\ ;1\right).
\end{aligned}$$

Puede observarse que esta cantidad apareció previamente en la inversión de $X_0(x)$ y fue simplificada mediante (3.26). Esto nos permite encontrar el componente absolutamente continuo de la medida $d\psi(t;1)$. Al combinar este resultado con (3.28) obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.7 *[12, Teorema 5.]* Sea $\gamma = \frac{1+\alpha+\beta-a-b}{2}$. Las funciones de peso $\psi'(t;\eta)$, para $\eta = 0, 1$, están dadas por

$$\psi'(t,\eta) = \frac{t^{-\eta}\sqrt{t-\gamma^2}\left|\Gamma(1-\eta+\gamma+i\sqrt{t-\gamma^2})\right|^2}{\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\left|\Gamma(1+2i\sqrt{t-\gamma^2})\right|}$$
$$\times\left|\frac{\Gamma\left(\eta+\alpha-\gamma-i\sqrt{t-\gamma^2}\right)\Gamma\left(\eta+\beta-\gamma+i\sqrt{t-\gamma^2}\right)}{{}_3F_2\left(\begin{matrix}\eta+\alpha-1, b+\eta-1, \eta-\gamma+i\sqrt{t-\gamma^2}\\ n+\alpha-\gamma+i\sqrt{t-\gamma^2}, \eta+\beta-\gamma+i\sqrt{t-\gamma^2}\end{matrix};1\right)}\right|^2. \tag{3.30}$$

con $t \in (\gamma^2, \infty)$.

Los saltos aislados de ψ coinciden con los polos de sus transformadas de Stieltjes. Ismail, Letessier y Valent [12] conjeturan que las funciones que aparecen en los denominadores de $X_\eta(x)$, $\eta = 0, 1$, no se anulan para valores reales de x si α y β son positivos cuando $\mu_0 = \alpha\beta$, o $\alpha > -1$ y $\beta > -1$ cuando $\mu_0 = 0$.

3.2.3. Representaciones explícitas y fórmulas de transformación

Primero derivaremos la fórmula explícita

$$P_n(x; a, b, \alpha, \beta, \eta) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\gamma+a-i\sqrt{x-\gamma^2})_j(\gamma+b-i\sqrt{x-\gamma^2})_j(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})_{n-j}}{(n-j)!(\alpha+1)_j(\beta+1)_j}$$
$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma-\eta-i\sqrt{x-\gamma^2}\\ \gamma+a-i\sqrt{x-\gamma^2}, \gamma+b-i\sqrt{x-\gamma^2}\end{matrix};1\right). \tag{3.31}$$

Para ello realizamos la sustitución

$$G(x,\omega) = \omega^{-\beta}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F(x,\omega), \tag{3.32}$$

en (3.17). Para esto vemos que las derivadas resultan

$$G'(x,\omega) = (-\beta)\omega^{-\beta-1}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F(x,\omega)$$
$$+(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}-1}\omega^{-\beta}F(x,\omega)+\omega^{-\beta}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F'(x,\omega),$$

y

$$
\begin{aligned}
&G''(x,)\omega = (-\beta)(-\beta-1)\omega^{-\beta-2}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F(x,\omega)\\
&+(-\beta)\omega^{-\beta-1}(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}-1}F(x,\omega)\\
&+(-\beta)\omega^{-\beta-1}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F'(x,\omega)\\
&+(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2}+1)(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}-2}\omega^{-\beta}F(x,\omega)\\
&+(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}-1}(-\beta)\omega^{-\beta-1}F(x,\omega)\\
&+(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}\omega^{-\beta}F'(x,\omega)\\
&+(-\beta)\omega^{-\beta-1}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F'(x,\omega)+\omega^{-\beta}(-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}-1}F'(x,\omega)\\
&+\omega^{-\beta}(1-\omega)^{\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2}}F''(x,\omega),
\end{aligned}
$$

por lo que sustituyendo en (3.17) y simplificando obtenemos que la función $F(x,\omega)$ saitsface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$
\omega(1-\omega)F''(x,\omega)+\left[C-(1+A+B)\omega\right]F'(x,\omega)-ABF(x,\omega)=\alpha\beta\omega^{\beta-1}(1-\omega)^{\eta-\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2}}, \tag{3.33}
$$

donde $'$ denota a la derivada respecto a ω, y recordando que

$$
A=-\sqrt{\gamma^2-x}+\frac{1+\alpha-\beta+b-a}{2},\qquad B=A+a-b,\qquad C=1+\alpha-\beta.
$$

Resolveremos ahora la ecuación diferencial (3.33) utilizando el método de Frobenius. Claramente,

$$
F(x,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\omega^{n+\beta},
$$

con $c_0=1$. Igualando los coeficientes de varias potencias de ω, obtenemos la relación de recurrencia de dos términos

$$
\begin{aligned}
(\alpha+n+1)(\beta+n+1)c_{n+1}-(n+\alpha+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})(n+b+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})c_n&\\
=\frac{\alpha\beta(\gamma-\eta-i\sqrt{x-\gamma^2})_{n+1}}{(n+1)!}&,
\end{aligned}
$$

cuya solución, dada la condición inicial $c_0=1$ es

$$
c_n=\frac{(a+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_n(b+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k(\gamma-\eta-i\sqrt{x-\gamma^2})_k}{k!(a+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_k(b+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_k},
$$

que junto a (3.32) establecen (3.31).

Observemos que cuando α o β se anulan, los polinomios se reducen a los polinomios continuos duales de Hahn y (3.31) provee una representación de dichos polinomios en términos de funciones hipergeométricas ${}_3F_2$. Notemos que además (3.31) sigue siendo válida si cambiamos los signos de todas las raíces cuadradas involucradas, pues el lado izquierdo de la ecuación es un polinomio real en x.

Podemos obtener una representación interesante de los polinomios continuos duales asociados de Hahn si cambiamos las variables de (3.17) como sigue. Sea

$$G(x,\omega) = \omega^{-\beta}(1-\omega)^{\beta-a}P(x,z), \qquad \text{con } \omega = \frac{z}{1+z}.$$

Derivando y sustituyendo en (3.17) resulta que $P(x,z)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} z(1+z)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} &+ [1+\alpha-\beta+(2+a-b+\alpha-\beta)z]\,\frac{\partial P}{\partial z} \\ &+ [(a-\beta)(a-b+1)+x]\,P = \alpha\beta z^{\beta-1}(1+z)^{1-\alpha-\eta}. \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el método de Frobenius tomando

$$P(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{n+\beta},$$

con lo que resulta que los h_n satisfacen la relación de recurrencia de dos términos

$$\begin{aligned} &h_n = (n+\beta+1)(n+\alpha+1)h_{n+1} \\ &+ [(n+\beta)(n+a-b+\alpha+1)+(a-\beta)(\alpha-b+1)+x]\,h_n = \alpha\beta(-1)^{n+1}\frac{(a+\eta-1)_{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

cuya solución, sujeta a $h_0 = 1$, es

$$\begin{aligned} &(-1)^n \frac{(a+\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})_n(a+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n} \\ &\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k(a+\eta-1)_k}{k!(\alpha+\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})_k(\alpha+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_k}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Y por lo tanto

$$G(x,\omega) = (1-\omega)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} h_k\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^k = \sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(a+k)_j}{j!}h_k\omega^{k+j}.$$

Reemplazando a $(a+k)_j$ por $\frac{(a)_{k+j}}{(a)_k}$ resulta la siguiente fórmula explícita

$$P_n(x;a,b,\alpha,\beta,\eta) = \frac{(a)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(a+\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})_k(a+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_k}{(a)_k(\alpha+1)_k(\beta+1)_k}$$
$$\times\sum_{j=0}^{k}\frac{(\alpha)_j(\beta)_j(a+\eta-1)_j}{j!(a+\gamma+i\sqrt{x-\gamma^2})_j(a+\gamma-i\sqrt{x-\gamma^2})_j}. \tag{3.35}$$

Cuando α o β se anulan, el lado derecho de (3.35) se reduce a la representación familiar de los polinomios continuos duales de Hahn en términos de ${}_3F_2$.

Además, es posible observar que el lado derecho de (3.35) es invariante si intercambiamos α y β. Por otra parte, las λ_n y μ_n son simétricas en a y b. Por lo tanto, los polinomios P_n también deben ser simétricos en a y b.

Teorema 3.8 *[12, Teorema 6.]* El lado derecho de la expresión (3.35) es una función simétrica de a y b, con $\gamma = \frac{1+\alpha+\beta-a-b}{2}$.

Este teorema es una generalización de la transformación de Whipple ([30]) a una serie doble.

Bibliografía

[1] Andrews, G. E., Askey, R. & Roy, R. (1999). *Special Functions*. Cambridge University Press.

[2] Askey, R. & Wimp, J. (1984). *Associated Laguerre and Hermite Polynomials*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 96, 15-37.

[3] Bateman, H. (1981). *Higher Transcendental Functions. Volume I*. Krieger Publishing Company.

[4] Bateman, H. (1981). *Higher Transcendental Functions. Volume II*. Krieger Publishing Company.

[5] Bochner, S. (1929). *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*. Math Z, 29, 730–736.

[6] Chihara, T.S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach.

[7] Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer.

[8] Domínguez de la Iglesia, M. (2021). *Orthogonal Polynomials in the Spectral Analysis of Markov Processes. Birth-death models and diffusion*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 181. Cambridge University Press.

[9] Goovaerts, M.J., D'Hooge, L. & De Pril, N. (1978). *On the Infinite Divisibility of the Ratio of Two Gamma-distributed Variables*. Stochastic Processes and their Applications, 7, 291-297.

[10] Ismail, M. & Kelker, D. (1979). *Special Functions, Stieltjes Transforms and Infinite Divisibility*. SIAM Journal on Mathematical Analysis., 10(5), 884-901.

[11] Ismail, M., Letessier, J. & Valent G. (1988). *Linear Birth and Death Models and Associated Laguerre and Meixner Polynomials*. Journal of Approximation Theory, 55, 337-348.

[12] Ismail, M., Letessier, J. & Valent, G. (1989). *Quadratic Birth and Death Processes and Associated Continuous Dual Hahn Polynomials*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 20(3), 727-737.

[13] Karlin, S. & McGregor, J. (1958). *Many server queueing processes with Poisson input and exponential service times*. Pacific Journal of Mathematics, 8(1), 87–118.

[14] Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. (2ª ed.) Moscú: Editorial Mir.

[15] Karlin, S. & McGregor, J. (1955). *Representation of a Class of Stochastic Processes*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 41, 387-391.

[16] Karlin, S. & McGregor, J. (1957). *The Differential Equations of Birth and Death Processes, and the Stieltjes Moment Problem*. Transactions of the American Mathematical Society, 85, 489-546.

[17] Karlin, S. & McGregor, J. (1957). *The Classification of Birth and Death Processes*. Transactions of the American Mathematical Society, 86, 366-400.

[18] Karlin, S. & McGregor, J. (1958). *Linear growth, Birth and Death Processes* (Informe técnico nro. 3). Universidad de Stanford.

[19] Karlin, S. & McGregor, J. (1958). *Many Server Queueing Processes with Poisson Input and Exponential Service Times*. Pacific Journal of Mathematics, 8, 87-118.

[20] Karlin, S. & McGregor, J. (1959). *Random Walks*. Illinois Journal of Mathematics, 3, 66-81.

[21] Karlin, S. & McGregor, J. (1959). *Coincidence Probabilities*. Pacific Journal of Mathematics, 9, 1141-1164.

[22] Karlin, S. & McGregor, J. (1959). *Classical Diffusion Processes and Total Positivity*. Illinois Journal of Mathematics, 3, 66-81.

[23] Keiding, N. (1975). *Maximum Likelihood Estimation in the Birth-and-Death Process*. The Annals of Statistics, 3(2), 363-372.

[24] Letessier, J. & Valent, G. (1986). *Dual Birth and Death Processes and Orthogonal Polynomials*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 46(3), 393-405.

[25] Rainville, E. (1960). *Special Functions*. The Macmillan Company, New York.

[26] Ross, J.V., Taimre, T. & Pollett, P.K. (2007). *Estimation for queues from queue length data*. Queueing Systems, 55, 131–138.

[27] Okoro, O.J. (2013). *On Markovian Queueing Model as Birth-Death Process.* Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, 13(11), 21-40.

[28] Sharma, O.P. & Gupta, U.C. (1982). *Transient behaviour of an M/M/1/N queue.* Stochastic Processes and their Applications, 13 , 327–331.

[29] Shohat, J.A. & Tamarkin, J.D. (1943). *The Problem of Moments.* American Mathematical Society.

[30] Slater, L.J. (1966). *Generalized Hypergeometric Functions.* Cambridge University Press.

[31] Szegö, G. (1939). *Orthogonal Polynomials.* (4ª ed.) American Mathematical Society.

[32] van Assche, W., Parthasarathy, P.R. & Lenin, R.B. (1999). *Spectral representation of four finite birth and death processes.* Math. Scientist, 24 , 105–112.

[33] van Doorn, E.A. (1981). *The transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length.* Advances in Applied Probability, 18(2), 499–506.

[34] Whitt, W. (2012). *Fitting birth-and-death queueing models to data.* Statistics and Probability Letters, 82, 998-1004.

[35] Wolff, R.W. (1965). *Problems of Statistical Inference for Birth and Death Queueing Models.* Operations Research, 13(3), 343-357.