



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS HAMILTONIANOS Y SU
INTEGRABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

VÍCTOR EMMANUEL HERNÁNDEZ LÓPEZ

TUTOR

DR. PIERRE MICHEL BAYARD

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Ahora que gracias a Dios al fin terminé mi tesis, quiero agradecer en primer lugar a mi familia, especialmente mis padres, a quienes está dedicado este trabajo. Nada de lo que he logrado hasta ahora habría sido posible sin todo el apoyo que he recibido de su parte.

También agradezco a mi tutor, el Doctor Pierre Bayard, por todo el apoyo y la paciencia que me ha brindado como profesor y en la elaboración de esta tesis, los cursos que tuve la suerte de cursar con él han sido cruciales en mi formación como matemático.

Gracias también a mis sinodales, en orden alfabético, la Dra. Angélica Jaurez, el Dr. Federico Sánchez, el Dr. Pablo Suárez y el Dr. Vinicio Gómez, no solo por haber aceptado ser mis sinodales y por los valiosos comentarios que hicieron para mejorar el presente trabajo, sino también por el trato siempre amable que tuvieron conmigo.

Por último quiero agradecer a todos los profesores que he tenido a lo largo de la carrera, que de una manera u otra han influido en mi formación, especialmente a la profesora Leticia Sandoval, diría que sus cursos de cálculo evitaron que desertara de la carrera en tercer semestre. A mis amigos, en el orden en que los conocí, Yael, Sergei, Carlos y Luis, que hicieron mucho más llevadera la vida en la facultad.

Gracias a todos ellos.

A. M. D. G.

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	V
1. Variedades simplécticas	1
1.1. Espacios vectoriales simplécticos	1
1.2. Definición de variedad simpléctica	4
1.3. Ejemplos de variedades simplécticas	6
1.3.1. El haz cotangente	6
1.3.2. El espacio de rectas	7
1.3.3. Las superficies	8
2. Sistemas hamiltonianos	9
2.1. Campos de vectores hamiltonianos	9
2.2. Ejemplos de sistemas hamiltonianos	12
2.2.1. El oscilador armónico	13
2.2.2. Rotaciones sobre la esfera	13
2.2.3. El péndulo simple	14
2.2.4. El péndulo esférico	15
2.2.5. El sólido con un punto fijo	17
3. Sistemas completamente integrables	19
3.1. Definición de sistema integrable	19
3.2. Más ejemplos de sistemas completamente integrables	21
3.2.1. Oscilador armónico, rotaciones de la esfera y péndulo simple	21
3.2.2. El péndulo esférico	22
3.2.3. El sólido con un punto fijo	23
4. Los flujos geodésicos	26
4.1. Definición de flujo geodésico	26
4.2. Geodésicas en variedades riemannianas	27
4.3. Geodésicas de una hipersuperficie	30

4.3.1.	Variedad de características	30
4.3.2.	Diagrama de Melrose	35
4.3.3.	Geodésicas de una superficie de revolución	37
4.3.4.	Geodésicas de las cuádricas	39
A.	El teorema de Darboux	47
B.	Nociones de mecánica	50
B.1.	Sistemas Lagrangianos	50
B.1.1.	Ecuaciones de Euler-Lagrange	50
B.1.2.	Transformada de Legendre	51
B.1.3.	Equivalencia de las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Hamilton	52
B.2.	Movimiento de cuerpos rígidos con un punto fijo	52
B.2.1.	Movimiento en un sistema de coordenadas móvil	53
B.2.2.	Ecuaciones diferenciales del sistema en el espacio fase reducido	56
	Bibliografía	59

Introducción

La formulación de la mecánica por medio de coordenadas generalizadas y momentos generalizados como variables de estado recibe el nombre de “formulación hamiltoniana” y su lenguaje es el de la geometría simpléctica. Esta formulación es útil para entender la evolución de un sistema, especialmente cuando este sistema tiene simetrías y cantidades conservadas. En un sistema hamiltoniano la energía total del sistema se conserva a lo largo del tiempo.

Algunos sistemas hamiltonianos, llamados completamente integrables pueden resolverse por medio de funciones que representan cantidades conservadas a lo largo del movimiento. Tales funciones se llaman “integrales primeras” y permiten deducir propiedades importantes del movimiento.

El objetivo del presente trabajo es introducir los conceptos básicos del estudio de los sistemas integrables, siguiendo fuertemente el trabajo de Michèle Audin [Aud01]. Esta tesis está dividida en cuatro capítulos y dos apéndices organizados de la siguiente manera:

- El primer capítulo trata sobre las variedades simplécticas, fundamentales para el estudio de los sistemas hamiltonianos que se hará en los capítulos posteriores, revisando algunos ejemplos que también serán de utilidad a lo largo del trabajo, principalmente el espacio de las rectas y el haz cotangente.
- En el segundo capítulo se define la noción de campo de vectores hamiltoniano sobre una variedad simpléctica, así como su sistema hamiltoniano asociado. También se muestran algunos ejemplos clásicos de la mecánica, tales como el oscilador armónico y el péndulo simple.
- A continuación, en el capítulo tres, se introduce la definición de sistema completamente integrable, son sistemas hamiltonianos que tienen “tantas cantidades conservadas como es posible”, lo que permite dar solución completa a estos sistemas. Se muestra después que los ejemplos revisados en el capítulo anterior son completamente integrables.
- El último capítulo se dedica completamente al estudio de un caso especial entre los sistemas integrables: el flujo geodésico sobre un elipsoide de \mathbb{R}^n . Para esto nos

apoyaremos en dos teoremas clásicos para familias de cuádricas homofocales, a saber, los teoremas de Jacobi y de Chasles, así como del diagrama hexagonal de Melrose, que nos permite “traducir” la geometría diferencial de una subvariedad en una variedad riemanniana a la geometría simpléctica de un par de hipersuperficies en una variedad simpléctica.

- El apéndice A se ocupa en mostrar el teorema de Darboux, un resultado interesante de la geometría simpléctica que tiene como consecuencia que, a diferencia de la geometría riemanniana, localmente todas las variedades simplécticas son iguales.
- Por último, en el apéndice B se mencionan brevemente algunos resultados y conceptos de mecánica que se usaron a lo largo de la tesis, especialmente en los capítulos 2 y 3.

Aunque la referencia principal fue el trabajo de Audin, en algunas secciones se introducen brevemente resultados sin prueba siguiendo a otros autores (principalmente Arnold [Arn89]), que ayudan a explicar con más detalle los resultados principales y mejorar la comprensión de los mismos. Al principio de cada sección se mencionan las referencias que fueron utilizadas en ella.

Capítulo 1

Variedades simplécticas

En este capítulo se introducen las nociones básicas de geometría simpléctica que se usarán a lo largo del trabajo, siguiendo la referencia principal [Aud01] y el libro de Cannas da Silva [Can08].

1.1. Espacios vectoriales simplécticos

Definición 1.1.1. Una *forma bilineal alternante* sobre un espacio vectorial real E de dimensión finita es una función $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\omega(\lambda x + z, y) = \lambda \omega(x, y) + \omega(z, y)$
2. $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$

para todo $x, y, z \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \omega(x, \cdot). \end{aligned}$$

Diremos que la forma bilineal ω es **no degenerada** si φ es un isomorfismo, es decir, si $\ker \varphi = \{0\}$. Esto es equivalente a decir que si $x \in E$ es tal que $\omega(x, y) = 0$ para todo $y \in E$ entonces $x = 0$. Al conjunto $\ker \varphi$ también le llamamos el **kernel de ω** .

Ejemplo 1.1.1. Sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, la forma alternante

$$\omega((x, y, z), (x', y', z')) = xy' - yx'$$

es degenerada, ya que $(0, 0, 1) \in \ker \omega$.

A lo largo de este trabajo estaremos interesados en formas bilineales alternantes no degeneradas, pues serán la herramienta básica para la geometría simpléctica.

Observación 1.1.1. Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y B^* la base dual de B , la matriz asociada a la aplicación φ en las bases B, B^* coincide con la matriz de la forma bilineal $\omega, (\omega(e_i, e_j))_{i,j}$. Esto implica que la forma ω es no degenerada si y solo si el determinante de esta matriz es no nulo.

Definición 1.1.2. Un espacio vectorial simpléctico es un espacio vectorial real de dimensión finita equipado con una forma bilineal alternante no degenerada ω , a esta forma se le llama **forma simpléctica**.

Ejemplo 1.1.2. El ejemplo más importante es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, junto con la forma

$$\omega_0((q, p), (q', p')) = \langle p, q' \rangle - \langle p', q \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual de \mathbb{R}^n .

Proposición 1.1.1. Si ω es una forma simpléctica sobre el espacio vectorial E de dimensión finita, entonces la dimensión de E es necesariamente par. Más aún, existe una base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ tal que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ y

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0.$$

A esta base se le llama **base simpléctica** de E .

Demostración. Consideremos $e_1 \in E$. Como ω es no degenerada, existe f_1 tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Normalizando e_1 podemos suponer que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

Si denotamos por W al plano generado por e_1 y f_1 y W° su complemento ortogonal bajo ω ¹, es decir,

$$W^\circ = \{x \in E : \omega(x, w) = 0 \quad \forall w \in W\},$$

para $x \in E$, $\omega(x, e_1) = a$ y $\omega(x, f_1) = b$, tenemos que

$$\omega(x + af_1 - be_1, e_1) = \omega(x, e_1) + a\omega(f_1, e_1) = a - a = 0.$$

Análogamente $\omega(x + af_1 - be_1, f_1) = 0$ y entonces $x + af_1 - be_1 \in W^\circ$. Por tanto,

$$x = \underbrace{be_1 - af_1}_{\in W} + \underbrace{x + af_1 - be_1}_{\in W^\circ}$$

y $E = W + W^\circ$.

Veamos que la intersección de estos subespacios es $\{0\}$: si $x \in W \cap W^\circ$, tenemos que $x = ce_1 + df_1$ y además

$$0 = \omega(x, e_1) = d\omega(f_1, e_1) \quad \text{y} \quad 0 = \omega(x, f_1) = c\omega(e_1, f_1).$$

¹Seguimos la notación de Audin [Aud01], otros autores pueden denotarlo como $orth_\omega(W)$ o W^\perp .

Entonces $c = d = 0$, y $x = 0$. Se concluye que $E = W \oplus W^\circ$ y en consecuencia la forma ω restringida a W° es no degenerada: en caso contrario, existiría $u \in W^\circ \setminus \{0\}$ tal que $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in W^\circ$ y como todo $x \in E$ se escribe de manera única como $x = w + v$, con $w \in W$ y $v \in W^\circ$, tenemos que

$$\omega(u, x) = \omega(u, w) + \omega(u, v) = 0$$

para todo $x \in E$, lo que contradice que ω sea no degenerada sobre E .

Esto también muestra que la dimensión de E es necesariamente par, ya que una forma simpléctica sobre un espacio de dimensión 1 es degenerada, pues como un solo vector x genera todo el espacio, para todo y tenemos que $y = \lambda x$ y por tanto $\omega(x, y) = \lambda \omega(x, x) = 0$.

Repitiendo el proceso sobre W° obtenemos e_2 y f_2 , y así sucesivamente hasta obtener los $2n$ vectores de la base deseada. \square

Observación 1.1.2. *De manera similar puede probarse que si F es un subespacio del espacio vectorial simpléctico E tal que ω es no degenerada sobre F se tiene que*

$$E = F \oplus F^\circ.$$

En una base simpléctica, la matriz de la forma bilineal ω es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.1.3. *Si (e_1, \dots, e_n) es una base ortonormal de \mathbb{R}^n , la base*

$$((0, e_1), \dots, (0, e_n), (e_1, 0), \dots, (e_n, 0))$$

es una base simpléctica de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con la forma ω_0 del ejemplo 1.1.2.

El grupo simpléctico

El conjunto de los automorfismos g de E tales que

$$\omega(gX, gY) = \omega(X, Y) \quad \forall X, Y \in E \quad (1.1)$$

forma un grupo bajo la composición, pues si dos automorfismos h y g cumplen (1.1),

$$\omega((hg)X, (hg)Y) = \omega(h(gX), h(gY)) = \omega(gX, gY) = \omega(X, Y)$$

y además la aplicación identidad cumple la propiedad, solo resta probar que si g cumple (1.1), también g^{-1} lo hace. Como g es automorfismo, es sobreyectiva y para todo $X \in E$ existe $X' \in E$ tal que $gX' = X$ y tenemos

$$\omega(g^{-1}X, g^{-1}Y) = \omega(g^{-1}gX', g^{-1}gY') = \omega(X', Y'),$$

pero como g cumple (1.1), se sigue que

$$\omega(g^{-1}X, g^{-1}Y) = \omega(gX', gY') = \omega(X, Y).$$

Este grupo recibe el nombre de **grupo simpléctico** y se denota por $Sp(2n; \mathbb{R})$. Como en una base simpléctica $\omega(X, Y)$ se escribe $X^t J Y$, la igualdad $\omega(X, Y) = \omega(gX, gY)$ es equivalente a que para todo $X, Y \in E$:

$$\begin{aligned} X^t J Y &= (gX)^t J (gY) \\ &= X^t (g^t J g) Y \end{aligned}$$

de donde $Sp(2n; \mathbb{R})$ se identifica con las matrices g tales que

$$g^t J g = J.$$

Subespacios isótropos y lagrangianos

Un subespacio F de E es **isótropo** si está contenido en su ortogonal simpléctico, dicho de otra forma, si $F \subset F^\circ$. Decimos también que F° es **co-isótropo**.

Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \varphi_F : E &\longrightarrow F^* \\ x &\longmapsto \omega(x, \cdot)|_F. \end{aligned}$$

Notemos que $\ker \varphi_F = F^\circ$, y además φ_F es sobreyectiva, es decir, $\text{Im } \varphi_F = F^*$. Recordemos que el teorema de la dimensión enuncia que toda aplicación lineal $T : E \rightarrow F$, donde E tiene dimensión finita, se cumple que $\dim E = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$. Aplicando este resultado a φ_F tenemos que

$$\dim E = \dim(\ker \varphi_F) + \dim(\text{Im } \varphi_F),$$

y como $\dim F^* = \dim F$:

$$\dim E = \dim F^\circ + \dim F.$$

Si F es un subespacio isótropo, esta ecuación implica que $\dim F \leq \frac{1}{2} \dim E$. Si se da la igualdad se dirá que F es un **subespacio lagrangiano**.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con la forma ω_0 del ejemplo 1.1.2, los subespacios $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ son lagrangianos.

1.2. Definición de variedad simpléctica

Para llegar a la definición de variedad simpléctica partiremos de una variedad diferenciable W cualquiera. Primero equiparemos cada uno de sus espacios tangentes con

una estructura simpléctica, es decir, sobre W se toma una 2-forma diferencial² ω que a cada $x \in W$ le asigna la forma bilineal alternante ω_x sobre T_xW .

Pediremos además que cada ω_x sea no degenerada, esto es equivalente a pedir que

$$(\omega^{\wedge n})_x = \underbrace{\omega_x \wedge \omega_x \wedge \cdots \wedge \omega_x}_{n \text{ veces}} \neq 0$$

para todo $x \in W$, es decir, que $\omega^{\wedge n}$ sea una forma volumen:

Si ω_x es no degenerada para todo $x \in W$, existe una base simpléctica sobre T_xW , $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$. En esta base tenemos que

$$\omega_x = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$$

y entonces

$$(\omega^{\wedge n})_x = e_1^* \wedge f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge f_n^*.$$

Se concluye que $\omega^{\wedge n}$ es una forma volumen. Por otra parte, si ω_x fuera degenerada entonces existe $u_1 \in T_xW$ tal que $\omega_x(u_1, \cdot) = 0$. Si completamos $\{u_1\}$ a una base de T_xW , $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$, tenemos que

$$(\omega^{\wedge n})_x = (\omega^{\wedge n})_x(u_1, \dots, u_{2n})u_1^* \wedge \cdots \wedge u_{2n}^*.$$

Por la definición del producto exterior tenemos que

$$(\omega^{\wedge n})_x(u_1, \dots, u_{2n}) = 0,$$

y $\omega^{\wedge n}$ no es forma volumen.

En particular, si dotamos a W de una 2-forma diferencial no degenerada ω , existe una forma volumen sobre W dada por $\omega^{\wedge n}$ y por tanto W es orientable.

Notemos que la forma simpléctica constante ω_0 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ presentada en el ejemplo 1.1.2 al principio del capítulo es exacta:

$$\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i = d \left(\sum_i p_i dq_i \right).$$

Sin embargo, este no es el caso sobre una variedad compacta:

Proposición 1.2.1. *Sobre una variedad compacta, no existe una 2-forma que sea no degenerada y exacta.*

²Ver el capítulo 7 de Spivak [Spi99], así como el capítulo 9 de [CM85], para una discusión completa sobre las formas diferenciales.

Demostración. Si W una variedad compacta y ω es una 2-forma no degenerada tal que $\omega = d\alpha$, ya vimos que $\omega^{\wedge n}$ es una forma volumen y entonces W es orientable. La forma $\omega^{\wedge n}$ también es exacta, pues $\omega^{\wedge n} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)})$. Podemos aplicar el teorema de Stokes³: para para una variedad con frontera, de dimensión n , compacta y orientada, la integral de una $(n-1)$ -forma diferencial α sobre la frontera de la variedad es igual a la integral de la n -forma $d\alpha$ sobre toda la variedad.

En nuestro caso, dado que W no tiene frontera, tenemos que

$$\int_W \omega^{\wedge n} = \int_W d(\alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)}) = \int_{\partial W} \alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = \int_{\emptyset} \alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = 0.$$

Esto no es posible, pues $\omega^{\wedge n}$ es una forma volumen, por tanto, no existe tal forma ω . \square

Aunque ω puede no ser exacta, el lema de Poincaré⁴ afirma que toda forma diferencial cerrada es “localmente exacta”: si la p -forma α es tal que $d\alpha = 0$, para cada punto existe una vecindad U y una $(p-1)$ -forma η tales que $\alpha = d\eta$ sobre U . Esta condición es suficiente para definir una variedad simpléctica:

Definición 1.2.1. Una *variedad simpléctica* es un par (W, ω) donde W es una variedad diferenciable y ω una 2-forma diferenciable cerrada no degenerada, llamada **forma simpléctica**.

1.3. Ejemplos de variedades simplécticas

1.3.1. El haz cotangente

Si V es una variedad, consideramos su haz cotangente y la proyección

$$\pi : T^*V \longrightarrow V.$$

Sobre T^*V existe una 1-forma diferencial canónica α , llamada **forma de Liouville**, definida por:

$$\alpha_{(x,\varphi)}(X) = \varphi(d\pi_{(x,\varphi)}(X))$$

donde $x \in V$, $\varphi \in T_x^*V$ y $X \in T_{(x,\varphi)}(T^*V)$. Tomamos $\omega = d\alpha$, como es una forma exacta es cerrada. Si (q_1, \dots, q_n) es un sistema coordenado en V y (p_1, \dots, p_n) sus coordenadas “duales”, $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ es un sistema coordenado en T^*V donde $\alpha = \sum p_i dq_i$, ya que

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_{i=1}^n \alpha \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) dp_i,$$

³Ver Spivak [Spi99]

⁴Ver Curtis [CM85].

con

$$\begin{aligned}\alpha_{(x,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(x,\varphi)\right) &= \varphi\left(d\pi_{(x,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(x,\varphi)\right)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{\partial \pi}{\partial q_i}(x,\varphi)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial q_i}(x)\right) \\ &= p_i(\varphi)\end{aligned}$$

y

$$\alpha_{(x,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}(x,\varphi)\right) = \varphi\left(d\pi_{(x,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}(x,\varphi)\right)\right) = \varphi\left(\frac{\partial \pi}{\partial p_i}(x,\varphi)\right) = \varphi(0) = 0.$$

Por tanto:

$$\alpha = \sum_i p_i dq_i \quad \text{y} \quad \omega = d\alpha = \sum_i dp_i \wedge dq_i,$$

de donde se deduce que ω es no degenerada (ya que $\omega^{\wedge n}$ es una forma volumen) y T^*V una variedad simpléctica. Decimos que ω es la forma simpléctica canónica sobre el haz cotangente.

Observación 1.3.1. *La variedad simpléctica $T^*\mathbb{R}^n$ con la forma canónica ω se identifica con $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \omega_0)$, donde ω_0 es la forma constante del ejemplo 1.1.2.*

1.3.2. El espacio de rectas

El espacio \mathcal{D}_n de rectas afines orientadas de \mathbb{R}^{n+1} es una variedad simpléctica de dimensión $2n$, este espacio se identifica con

$$\left\{ (p, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \|p\|^2 = 1 \text{ y } \langle p, u \rangle = 0 \right\},$$

visto como el conjunto (p, u) , de rectas que pasan por u y tienen dirección p . Esta variedad es simpléctica como subvariedad⁵ de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ o como el haz cotangente a la esfera \mathbb{S}^n : para una subvariedad riemanniana V de \mathbb{R}^{n+1} los espacios TV y T^*V se identifican mediante el difeomorfismo

$$\begin{aligned}\phi : TV &\longrightarrow T^*V \\ (x, v) &\longmapsto (x, \langle v, \cdot \rangle).\end{aligned}$$

⁵Es decir, la restricción de forma simpléctica de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ a esta subvariedad es no degenerada, i.e., es de nuevo una forma simpléctica

Si α es la forma de Liouville sobre $T^*\mathbb{S}^n$,

$$(\phi^*\alpha)_{(x,v)}(X) = \alpha_{\phi(x,v)}(d\phi_{(x,v)}(X)) = \langle v, d(\pi \circ \phi)_{(x,v)}(X) \rangle.$$

Notando que $\pi \circ \phi$ es la proyección de $T\mathbb{S}^n$ sobre \mathbb{S}^n , y que $T\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, la forma $\phi^*\alpha$ coincide con la forma de Liouville sobre $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ restringida a $T\mathbb{S}^n$. Entonces $\omega = d(\phi^*\alpha)$ es cerrada y como ϕ es difeomorfismo ω es no degenerada sobre $T\mathbb{S}^n$, por tanto \mathcal{D}_n es una variedad simpléctica.

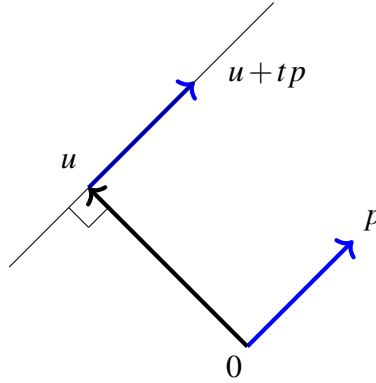


Figura 1.1: El espacio de rectas

1.3.3. Las superficies

Sobre una superficie W (es decir, una variedad de dimensión 2), toda 2-forma diferencial es cerrada, ya que la dimensión del espacio de las 3-formas sobre una variedad de dimensión 2 es $\binom{2}{3} = 0$. Más aún, una 2-forma en W es no degenerada si y solo si es una forma de área. Esto implica que todas las superficies orientables pueden ser vistas como variedades simplécticas. Si ω es una forma simpléctica sobre una superficie W , todas las formas simplécticas sobre W son de la forma $f\omega$, con f una función C^∞ que no se anula. Además todas las formas $f\omega$ son formas de área para una métrica adecuada sobre W .

Ejemplo 1.3.1. La esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene como espacio tangente en un punto v al plano v^\perp y la forma

$$\omega_v(X, Y) = \langle v, X \times Y \rangle$$

es una forma volumen (es el volumen del paralelogramo generado por los vectores $\{v, X, Y\}$). Por tanto (\mathbb{S}^2, ω) es una variedad simpléctica.

Capítulo 2

Sistemas hamiltonianos

En este capítulo se da la definición de un campo de vectores hamiltoniano, así como su sistema hamiltoniano asociado y se revisan algunos ejemplos clásicos.

2.1. Campos de vectores hamiltonianos

Definición 2.1.1. Si $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ sobre la variedad simpléctica (W, ω) , se define su **campo hamiltoniano asociado** X_H mediante la relación

$$\omega_x(Y, X_H(x)) = dH_x(Y) \quad \forall Y \in T_x W$$

(o equivalentemente, $i_{X_H} \omega = -dH$)¹.

Observación 2.1.1. Como ω es simpléctica, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : T_x W &\longrightarrow (T_x W)^* \\ Y &\longmapsto i_Y \omega_x \end{aligned}$$

es un isomorfismo para todo $x \in W$. El campo hamiltoniano asociado a la función H siempre existe y es único, está definido por $X_H(x) = \varphi^{-1}(-dH_x)$.

Dado que ω es no degenerada, el campo X_H se anula exactamente en los puntos críticos de la función H : $dH_x = 0$ si y solo si $\omega_x(Y, X_H(x)) = 0$ para todo $Y \in T_x W$, lo que ocurre si y solo si $X_H(x) = 0$.

La definición de X_H y la antisimetría de las formas ω_x implican que la función H es constante sobre las curvas integrales γ del campo X_H . Si $x = \gamma(t)$ se tiene

$$(H \circ \gamma)'(t) = dH_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dH_x(X_H(x)) = \omega_x(X_H(x), X_H(x)) = 0,$$

lo que también puede escribirse como $X_H \cdot H = 0$

¹ $i_{X_H} \omega$ es la 1-forma definida por $i_{X_H} \omega_x(Y) = \omega_x(X_H, Y)$.

Notemos además que si W es compacta todo campo hamiltoniano sobre W tiene un cero. La función H asociada al campo alcanza su máximo y su mínimo, por tanto, existe $w \in W$ tal que w es punto crítico de H , es decir, $dH_w = 0$ y para todo $Y \in T_w W$ se tiene $\omega(Y, X_H(w)) = dH_w(Y) = 0$. Como ω es no degenerada, concluimos que $X_H(w) = 0$.

Observación 2.1.2. Si $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ sobre la variedad simpléctica W y V una subvariedad simpléctica de W , por la observación 1.1.2 sabemos que para cada punto $x \in V$

$$T_x W = T_x V \oplus (T_x V)^\circ.$$

El campo hamiltoniano asociado a $H|_V$ es la proyección de $X_H(x)$ sobre $T_x V$ dada por esta descomposición, pues si $X_H(x) = X' + Y'$, con $X' \in T_x V$ y $Y' \in (T_x V)^\circ$, tenemos que

$$\begin{aligned} -d(H|_V)_x &= -dH_x|_{T_x V} = i_{X_H(x)} \omega_x|_{T_x V} = i_{X'+Y'} \omega_x|_{T_x V} \\ &= i_{X'} \omega_x|_{T_x V} + \underbrace{i_{Y'} \omega_x|_{T_x V}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ Y' \in (T_x V)^\circ}} \\ &= i_{X'} \omega_x|_{T_x V}. \end{aligned}$$

Y como esta relación caracteriza al campo hamiltoniano, se sigue la afirmación.

El corchete de Poisson

Definición 2.1.2. Si $f, g \in C^\infty(W)$, definimos su **corchete de Poisson**, denotado $\{f, g\}$, por la fórmula

$$\{f, g\} = X_f \cdot g = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g).$$

De la antisimetría de ω se sigue que $\{f, g\} = -\{g, f\}$. El corchete de Poisson satisface la identidad de Leibniz:

$$\{f, gh\} = d(gh)(X_f) = dg(X_f)h + gdh(X_f) = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

por tanto es una derivación en cada una de sus variables.

Proposición 2.1.1. Si X y Y son dos campos sobre la variedad simpléctica (W, ω) tales que las formas $i_X \omega$ y $i_Y \omega$ son cerradas (se dice que los campos son **localmente hamiltonianos**), se tiene que su corchete de Lie $[X, Y]^2$ es un campo **globalmente hamiltoniano**, es decir, la forma $i_{[X, Y]} \omega$ es exacta.

Observación 2.1.3. Si X es un campo completamente hamiltoniano, existe $f \in C^\infty(W)$ tal que $i_X \omega = df$, esto es, X es el campo hamiltoniano asociado a la función $-f$.

²El corchete de Lie está definido por su acción sobre funciones C^∞ : $[X, Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$

Demostración de la proposición. Usaremos la fórmula

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X,$$

donde \mathcal{L}_X denota la derivada de Lie en la dirección del campo X , así como la fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]} \omega &= \mathcal{L}_X i_Y \omega - i_Y \mathcal{L}_X \omega \\ &= di_X i_Y \omega + i_X \underbrace{di_Y \omega}_{=0} - i_Y \underbrace{di_X \omega}_{=0} - i_Y i_X \underbrace{d\omega}_{=0} \\ &= di_X i_Y \omega = d\omega(Y, X), \end{aligned}$$

y como ω es una 2-forma diferencial, $\omega(Y, X) \in C^\infty(W)$ □

Para el caso particular de dos campos hamiltonianos X_f y X_g , asociados a las funciones f y g respectivamente, se sigue de la demostración que

$$i_{[X_f, X_g]} \omega = d\omega(X_g, X_f) = -d\{f, g\},$$

esto es

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}},$$

de donde se sigue que

$$[X_f, X_g] \cdot h = \{\{f, g\}, h\}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.1.2. *El corchete de Poisson satisface la identidad de Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Demostración. De la definición del corchete de Lie

$$[X_f, X_g] \cdot h = X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h)$$

y de la igualdad (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) \\ &= X_f \cdot \{g, h\} - X_g \cdot \{f, h\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}, \end{aligned}$$

y por la anti simetría del corchete de Poisson concluimos que

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}.$$

□

Ejemplo 2.1.1. Consideremos una función H sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con la forma canónica $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$. Los vectores tangentes Y se escriben (Y_q, Y_p) , con $Y_q, Y_p \in \mathbb{R}^n$ y así

$$dH(Y) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}, Y_q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, Y_p \right\rangle,$$

donde $\frac{\partial H}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$. Por otra parte, si $X_H = (X_q, X_p)$,

$$\omega_0(Y, X_H) = \omega_0((Y_q, Y_p), (X_q, X_p)) = \langle X_q, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_q \rangle,$$

y como $\omega_0(Y, X_H(x)) = dH(Y)$ para todo vector tangente Y , obtenemos que

$$\begin{cases} X_q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ X_p = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Si g es otra función, tenemos que

$$\{f, g\} = \omega_0 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial p}, -\frac{\partial f}{\partial q} \right), \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial p} \right) \right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial g}{\partial q} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial g}{\partial p} \right\rangle,$$

esto es

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right). \quad (2.2)$$

2.2. Ejemplos de sistemas hamiltonianos

Definición 2.2.1. (Sistema hamiltoniano.) Un **sistema hamiltoniano** es un sistema de ecuaciones diferenciales asociado a un campo vectorial hamiltoniano. Es decir:

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t))$$

para cierta función $H \in C^\infty(W)$, a la que llamaremos **función hamiltoniana del sistema** o simplemente **hamiltoniano**.

Por ejemplo, si H es una función sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, del ejemplo 2.1.1 se sigue que el sistema hamiltoniano asociado es

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

con $q = (q_1, \dots, q_n)$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$.

2.2.1. El oscilador armónico

Este sistema describe, entre otras cosas, el alargamiento de un resorte de longitud l_0 que tiene un extremo fijo. Al estirar el resorte a una longitud l la posición del extremo no fijo es $q = l - l_0$. Si consideramos que el resorte no tiene amortiguamiento, existe una constante $a > 0$, llamada **constante de elasticidad**, tal que la ecuación diferencial del sistema es $\ddot{q} = -aq$.

Tomando $a = 1$, e introduciendo la variable dual $p = \dot{q}$, la ecuación es equivalente al sistema

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q$$

sobre la variedad simpléctica $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siguiendo las ecuaciones de Hamilton e integrando el sistema respecto de p y de q obtenemos que el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2.$$

Las soluciones están dadas por $q = A \cos(t + t_0)$, $p = -A \sin(t + t_0)$. Sus trayectorias coinciden con las curvas de nivel de H , que son círculos centrados en el origen.

Para el caso general el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}aq^2,$$

su sistema hamiltoniano asociado es $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -aq$ y sus soluciones son de la forma $q = A \cos(\sqrt{a}t + t_0)$ y $p = -\sqrt{a}A \sin(\sqrt{a}t + t_0)$, cuyas trayectorias son elipses centrados en el origen cuyo eje mayor es el eje q cuando $a < 1$ y el eje p cuando $a > 1$, como lo muestran las figuras siguientes:

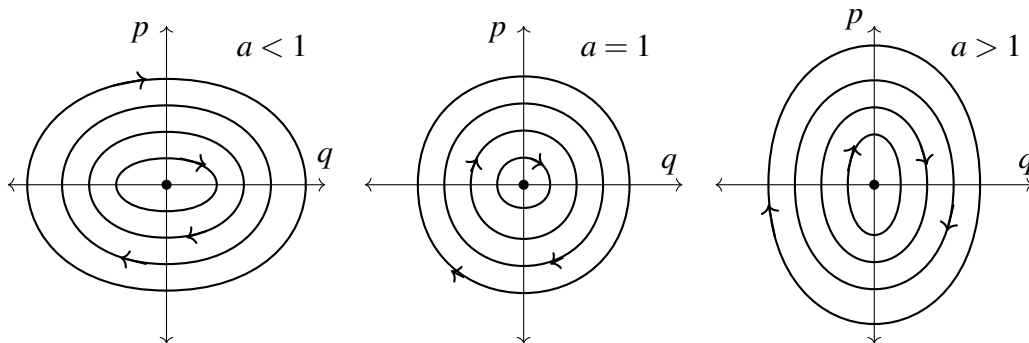


Figura 2.1: Curvas integrales del oscilador armónico para distintos valores de $a > 0$

2.2.2. Rotaciones sobre la esfera

En el ejemplo de la sección 1.3.3 vimos que la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, con la forma

$$\omega_v(X, Y) = \langle v, X \times Y \rangle,$$

es una variedad simpléctica. Si consideremos el hamiltoniano $H(x, y, z) = z$, obtenemos que las trayectorias de X_H son las curvas de nivel de H , es decir, círculos obtenidos de intersecar la esfera con planos horizontales. Si e_3 es el tercer vector de la base de \mathbb{R}^3 , tenemos que $H(v) = \langle v, e_3 \rangle$. El campo hamiltoniano es el campo X tangente a \mathbb{S}^2 , tal que para todo $Y \in T_v\mathbb{S}^2 = v^\perp$

$$\langle v, X \times Y \rangle = -dH_v(Y) = -\langle Y, e_3 \rangle,$$

es decir,

$$\langle Y, v \times X \rangle + \langle Y, e_3 \rangle = \langle Y, v \times X + e_3 \rangle = 0$$

para todo $Y \in v^\perp$. Esto equivale a decir que $v \times X + e_3$ es colineal a v , y por tanto

$$(v \times X + e_3) \times v = 0,$$

es decir

$$(v \times X) \times v = -e_3 \times v,$$

de donde

$$\langle v, v \rangle X - \langle X, v \rangle v = v \times e_3$$

y por lo tanto

$$X = v \times e_3.$$

Obtuvimos que el campo hamiltoniano es $X_H(v) = v \times e_3$.

2.2.3. El péndulo simple

Este sistema mecánico está formado por una partícula con masa m sujeta a una cuerda rígida de longitud l sin peso, cuyo extremo opuesto está fijo. El sistema está dentro de un campo gravitacional con aceleración de la gravedad constante igual a g y supondremos que la partícula se mueve dentro un plano vertical.

Si denotamos por θ el ángulo que forma la cuerda con la vertical (i.e. la dirección de la gravedad), la ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula es

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta).$$

Tomando unidades adecuadas podemos suponer que $m = l = g = 1$.

El espacio de configuraciones del sistema es \mathbb{S}^1 y su espacio de fases ³ es el haz cotangente $T^*\mathbb{S}^1$, que se identifica con $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Usamos la variable q , tal que $\theta = q \pmod{2\pi}$, y la variable dual $p = \dot{q}$. La ecuación diferencial es entonces equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin(q), \end{cases}$$

³Ver el apéndice B.1.3.

cuyo hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \frac{1}{2}p^2 - \cos \theta,$$

que corresponde a la energía total del péndulo simple, $\frac{1}{2}p^2$ es la energía cinética y $-\cos \theta$ la energía potencial.

La figura siguiente ilustra la formulación del sistema así como sus curvas integrales, cuya imagen coincide con las curvas de nivel del hamiltoniano H

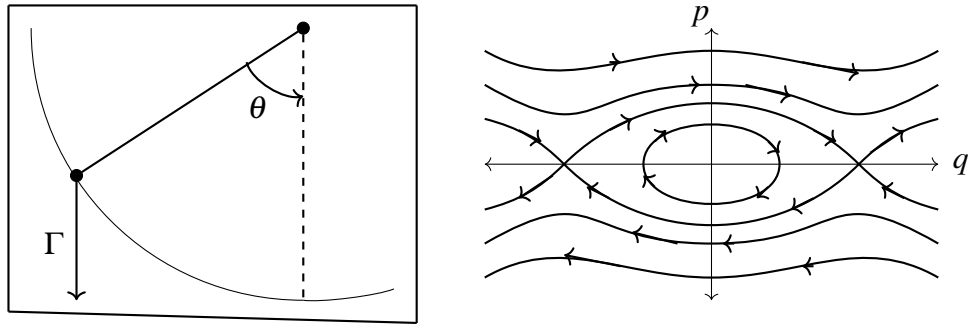


Figura 2.2: El sistema del péndulo simple y sus curvas integrales a la derecha. Dependiendo de la energía que sea aplicada al inicio del movimiento, la trayectoria será cerrada (significa que el péndulo no alcanza a dar la vuelta completa) o no (en este caso el péndulo dará vueltas completas alrededor del punto fijo).

2.2.4. El péndulo esférico

Es un péndulo que ya no está restringido a moverse dentro de un plano, es decir, se mueve sobre la esfera centrada en el extremo fijo de la cuerda. El espacio de configuraciones del sistema es la esfera unitaria \mathbb{S}^2 y se describe por el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \langle \Gamma, q \rangle \tag{2.3}$$

donde p y q son dos vectores de \mathbb{R}^3 y Γ es el campo gravitacional vertical.

El espacio de fases se identifica con

$$T\mathbb{S}^2 = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|q\|^2 = 1 \text{ y } \langle q, p \rangle = 0 \right\},$$

equipado con la restricción de la forma simpléctica de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Escribimos el campo hamiltoniano asociado a H como (Y, X) , es tangente a $T\mathbb{S}^2$ y sabemos que está definido unívocamente por la relación

$$dH_{(q,p)}(\eta, \xi) = \omega((\eta, \xi), (Y, X)) = \langle \xi, Y \rangle - \langle \eta, X \rangle \tag{2.4}$$

para todo vector (η, ξ) tangente a $T\mathbb{S}^2$. Por otra parte, tomando la diferencial de H en la definición (2.3) tenemos que

$$dH_{(q,p)}(\eta, \xi) = \langle p, \xi \rangle - \langle \Gamma, \eta \rangle. \quad (2.5)$$

El hecho de que (Y, X) sea tangente a $T\mathbb{S}^2$ en (q, p) se expresa por las condiciones

$$\langle Y, q \rangle = 0 \quad (2.6)$$

$$\langle Y, p \rangle + \langle q, X \rangle = 0 \quad (2.7)$$

(la ecuación del haz tangente es $F(q, p) = 0$, con $F(q, p) = (\langle q, q \rangle - 1, \langle q, p \rangle)$, y tenemos que $T_{(q,p)}(T\mathbb{S}^2) = \ker dF_{(q,p)}$).

Como (2.4) y (2.5) se cumplen para todo (η, ξ) , tomando $\eta = 0$, tenemos que

$$\langle \xi, Y \rangle = \langle p, \xi \rangle$$

para todo ξ , de ahí se deduce que $Y = p$. Análogamente, tomando $\xi = 0$, tenemos que

$$\langle \eta, X \rangle = \langle \Gamma, \eta \rangle,$$

es decir, $\langle \eta, X - \Gamma \rangle = 0$ para todo $\eta \in T_q\mathbb{S}^2$. Por tanto, $X - \Gamma = \lambda q$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X = \Gamma + \lambda q$. Sustituyendo X y Y en (2.7), tenemos

$$\|p\|^2 + \langle q, \Gamma + \lambda q \rangle = 0.$$

Despejando tenemos que $\lambda = -(\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)$ y

$$X = \Gamma - (\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)q.$$

Entonces el campo hamiltoniano es

$$(Y, X) = \left(p, \Gamma - (\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)q \right)$$

y su sistema hamiltoniano asociado es

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \Gamma - (\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)q. \end{cases} \quad (2.8)$$

Observación 2.2.1. *El campo hamiltoniano de H sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es, de acuerdo al ejemplo 2.1.1, $X_H(q, p) = (p, \Gamma)$. Como $T\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es subvariedad simpléctica, tenemos por las cuentas anteriores y la ecuación 2.6 que*

$$X_H(q, p) = \left(p, \Gamma - (\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)q \right) + \left(0, (\langle q, \Gamma \rangle + \|p\|^2)q \right)$$

es la descomposición única de X_H en sus componentes tangente y ortogonal a $T\mathbb{S}^2$. La observación 2.1.2 nos confirma que el sistema 2.8 es en efecto el sistema asociado a $H|_{T\mathbb{S}^2}$.

2.2.5. El sólido con un punto fijo

Este sistema, desarrollado a detalle en el apéndice B.2, consiste en un sólido con centro de gravedad G , que tiene un punto fijo O , en un campo gravitacional constante, con constante de gravitación igual a 1.

Para describir las ecuaciones de movimiento, es conveniente utilizar un marco fijo en el cuerpo (o un marco móvil) además del marco en el que se encuentra el cuerpo (marco absoluto). Si las letras minúsculas denotan vectores en el marco absoluto y sus correspondientes letras mayúsculas denotan al mismo vector en el marco móvil, el campo gravitacional γ se convierte en un vector Γ que depende del tiempo. De la misma forma un punto Q se representa en el marco absoluto como un vector $q(t)$ cuya evolución a lo largo del tiempo está dada por

$$q(t) = R(t)Q,$$

donde $R(t)$ es la rotación que describe el marco móvil visto desde el marco absoluto.

La velocidad angular, denotada ω , es el único vector en \mathbb{R}^3 tal que

$$\dot{q} = \omega \times q.$$

El momento angular m de una partícula con masa μ está definido por

$$m = q \times \mu \dot{q} = \mu q \times (\omega \times q).$$

Podemos usar los vectores Γ y M en el marco móvil como coordenadas del espacio fase. El vector Γ ya no es constante, pero sigue siendo unitario y además la cantidad $\langle \Gamma, M \rangle$ se conserva, pues es el momento respecto de la dirección del campo gravitacional. Se sigue que el movimiento del sólido se restringe bien a la subvariedad

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ y } \langle \Gamma, M \rangle = a \right\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

W_a es simpléctica con la forma ⁴

$$\omega_{(\Gamma, M)}((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = \langle \xi \times M + \Gamma \times \eta, \xi' \rangle + \langle \Gamma \times \xi, \eta' \rangle$$

y es una elección conveniente del espacio fase.

Si L denota al vector \overrightarrow{GO} , la energía total del sistema es:

$$H(\Gamma, M) = \underbrace{\frac{1}{2} \langle M, \Omega \rangle}_{\text{cinética}} + \underbrace{\langle \Gamma, L \rangle}_{\text{potencial}}$$

⁴Esta afirmación se detalla en el apéndice B.2.2.

y aplicando las leyes de la mecánica⁵ tenemos que el sistema hamiltoniano asociado a H que describe el movimiento del sólido sobre W_a es

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega \\ \dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times L. \end{cases} \quad (2.9)$$

⁵Ver el apéndice B.2.2 para la deducción explícita de las fórmulas.

Capítulo 3

Sistemas completamente integrables

Se estudia el concepto de sistema completamente integrable y se revisa la integrabilidad de los ejemplos del capítulo anterior.

3.1. Definición de sistema integrable

Definición 3.1.1. Una *integral primera* de un campo de vectores X es una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X.f = df(X) = 0.$$

En otras palabras, f es constante a lo largo de las curvas integrales de X .

Observación 3.1.1. Una función hamiltoniana H siempre es integral primera de su campo hamiltoniano asociado X_H .

En general, para un campo hamiltoniano X_H , que una función f sea integral primera del campo es equivalente a la condición $\{H, f\} = 0$.

Definición 3.1.2. Si f_1, \dots, f_k son integrales primeras del sistema X_H , decimos que están en *involución* si $\{f_i, f_j\} = 0$, para todo $i, j = 1 \dots, k$, es decir, si cada una es constante sobre las curvas integrales del campo hamiltoniano que define la otra.

En cada punto $x \in W$ el subespacio de $T_x W$ generado por los campos hamiltonianos de las integrales primeras en involución es isótropo, pues si f es una integral primera

$$\omega(X_f, X_g) = \{f, g\} = 0$$

para cualquier otra integral primera g , por tanto la dimensión de este espacio es a lo más $\frac{1}{2} \dim W$.

Por último, notemos que los vectores X_{f_i} son independientes en x si y solo si las formas lineales $(df_i)_x$ son independientes: si existen escalares a_1, \dots, a_k tales que

$$\sum_{i=1}^k a_i X_{f_i}(x) = 0,$$

entonces para todo $Y \in T_x W$

$$\begin{aligned} \omega \left(Y, \sum_{i=1}^k a_i X_{f_i}(x) \right) &= \sum_{i=1}^k a_i \omega(Y, X_{f_i}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x(Y) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x \right) (Y). \end{aligned}$$

Considerando que $\omega \left(Y, \sum_{i=1}^k a_i X_{f_i}(x) \right) = 0$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x = 0.$$

Si las formas $(df_i)_x$ son independientes, tenemos que $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, y entonces los vectores $X_{f_i}(x)$ son independientes.

Por otra parte, si

$$\sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x = 0,$$

tenemos que para todo $Y \in T_x W$

$$0 = \left(\sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x \right) (Y) = \sum_{i=1}^k a_i (df_i)_x(Y) = \omega \left(Y, \sum_{i=1}^k a_i X_{f_i}(x) \right),$$

y como ω es no degenerada, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k a_i X_{f_i}(x) = 0.$$

Por tanto, si los vectores $X_{f_i}(x)$ son independientes, $a_1 = \dots = a_k = 0$ y entonces las formas $(df_i)_x$ también lo son.

Definición 3.1.3. *El campo hamiltoniano X_H sobre la variedad simpléctica W de dimensión $2n$ se dice **completamente integrable** si sobre un abierto denso de W tiene n integrales primeras independientes en involución, o lo que es lo mismo, si para todo x en un abierto denso el subespacio de $T_x W$ generado por los campos hamiltonianos de estas n integrales primeras es lagrangiano.*

Ejemplo 3.1.1. En $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con la forma simpléctica canónica, todo hamiltoniano que depende sólo de las coordenadas p_i , i.e.

$$H = H(p_1, \dots, p_n)$$

es completamente integrable: de la fórmula (2.2) en el ejemplo 2.1.1 obtenemos que

$$\{p_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

para toda $i = 1, \dots, n$, ya que H no depende de las coordenadas q_i y también

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Las funciones p_1, \dots, p_n son n integrales primeras en involución y son independientes en cada punto ya que el conjunto $\{dp_1, \dots, dp_n\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

3.2. Más ejemplos de sistemas completamente integrales

3.2.1. Oscilador armónico, rotaciones de la esfera y péndulo simple

El oscilador armónico visto en 2.2.1, es un sistema hamiltoniano sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, su función hamiltoniana es

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}aq^2, \quad a > 0. \quad (3.1)$$

El sistema de las rotaciones sobre la esfera de 2.2.2 es hamiltoniano sobre la esfera \mathbb{S}^2 y el hamiltoniano de este sistema es

$$H(x, y, z) = z. \quad (3.2)$$

Por último, el péndulo simple revisado en 2.2.3 es hamiltoniano sobre $T^*\mathbb{S}^1$ y tiene hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q. \quad (3.3)$$

Estos tres ejemplos son sistemas hamiltonianos sobre variedades simplécticas de dimensión 2. La observación 3.1.1 y la definición 3.1.3 implican inmediatamente que estos sistemas son completamente integrables, y las funciones (3.1), (3.2) y (3.3), respectivamente, son integrales primeras de estos sistemas

Más generalmente, cualquier sistema hamiltoniano sobre una superficie es completamente integrable.

3.2.2. El péndulo esférico

El sistema revisado en 2.2.4 es invariante bajo rotaciones alrededor del eje vertical. Esto nos permite encontrar una segunda integral primera: es el momento respecto del eje vertical

$$K(q, p) = \langle q \times p, \Gamma \rangle.$$

Podemos mostrar de manera geométrica que $\{H, K\}$ se anula: por propiedades del triple producto escalar, tenemos que

$$K(q, p) = \langle p \times \Gamma, q \rangle = \langle -q \times \Gamma, p \rangle,$$

de donde

$$\frac{\partial K}{\partial q}(q, p) = p \times \Gamma \quad \text{y} \quad \frac{\partial K}{\partial p}(q, p) = -q \times \Gamma.$$

Recordando que el espacio de fases es TS^2 con la restricción de la forma simpléctica de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, tenemos que el campo hamiltoniano asociado a K es

$$X_K(q, p) = (-q \wedge \Gamma, -p \wedge \Gamma).$$

El flujo de este campo es el de las rotaciones alrededor del eje vertical

$$\varphi_t(q, p) = (R(t)q, R(t)p),$$

donde $R(t) \in SO(3)$ es la rotación por un ángulo t alrededor del eje vertical: para $p, q \in \mathbb{R}^3$, tenemos $q(t) = R(t)q$, $p(t) = R(t)p$ y

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \dot{R}(t)q = \dot{R}(t)R(t)^t q(t) \\ \dot{p}(t) &= \dot{R}(t)p = \dot{R}(t)R(t)^t p(t). \end{aligned}$$

La aplicación $\dot{R}(t)R(t)^t$ es anti-simétrica, es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se identifica con el elemento $\Gamma = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ mediante el producto vectorial. Así

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \Gamma \times q(t) \\ \dot{p}(t) &= \Gamma \times p(t), \end{aligned}$$

esto es, la curva $\gamma = (q, p)$ es curva integral de X_K .

Este flujo preserva la subvariedad $T\mathbb{S}^2: \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|R_t q\| = \|q\| = 1 \quad \text{y} \quad \langle R_t q, R_t p \rangle = \langle q, p \rangle = 0.$$

También preserva $H = \frac{1}{2}\|p\|^2 - \langle \Gamma, q \rangle$, pues deja invariante el vector vertical Γ , que es el eje de rotación. Derivando en $t = 0$ la relación $H(x) = H(\varphi_t(x))$, para $x = (q, p)$ punto fijo de $T\mathbb{S}^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\varphi_t(x)) \\ &= dH_{\varphi_0(x)} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x) \right) \\ &= dH_x(X_K(x)) \\ &= \{K, H\}. \end{aligned}$$

Y como $H(x)$ no depende de t , se obtiene que el corchete de Poisson $\{H, K\}$ se anula. Por tanto el péndulo esférico es un sistema completamente integrable.

3.2.3. El sólido con un punto fijo

Es el sistema introducido en la sección 2.2.5 y que se analiza a detalle en el apéndice B.2. El hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}\langle M, \Gamma \rangle + \frac{1}{2}\langle \Gamma, L \rangle$ y tiene asociado el campo hamiltoniano

$$X_H = (\dot{\Gamma}, \dot{M}) = (\Gamma \times \Omega, M \times \Omega + \Gamma \times L)$$

sobre la variedad simpléctica

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ y } \langle \Gamma, M \rangle = a \right\}$$

de dimensión 4. Hay tres casos donde este sistema es completamente integrable, en los cuales podemos encontrar una integral primera adicional al Hamiltoniano H , a saber:

Sólido de Euler-Poinsot

Así se llama el sistema en el que el centro de masa G coincide con el punto fijo O , por tanto $L = \overrightarrow{GO} = 0$ y entonces $X_H = (\Gamma \times \Omega, M \times \Omega)$. Tenemos que la función $K(\Gamma, M) = \frac{1}{2}\|M\|^2$ es una integral primera del sistema, pues $dK_{(\Gamma, M)}(X, Y) = \langle M, Y \rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= dK_{(\Gamma, M)}(X_H) \\ &= dK_{(\Gamma, M)}(\dot{\Gamma}, \dot{M}) \\ &= \langle M, \dot{M} \rangle \\ &= \langle M, M \times \Omega \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

El trompo de Lagrange

En este caso, el sólido gira alrededor del eje de revolución, $L = \overrightarrow{GO}$, es simétrico respecto a este eje y existe una base ortonormal donde la matriz de inercia es la matriz diagonal

$$I = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

y el tercer elemento de esta base ortonormal es paralelo al eje de rotación $L = (0, 0, L_3)$. Con un cambio de unidades podemos suponer que $l = 1$, en consecuencia

$$M = I(\Omega) = (\Omega_1, \Omega_2, m\Omega_3).$$

Tenemos entonces que

$$M - \Omega = (0, 0, (m-1)\Omega_3). \quad (3.4)$$

Por tanto, $M - \Omega$ es paralelo al eje de rotación L . El momento $K(\Gamma, M) = \langle M, L \rangle$ respecto al eje de rotación es una integral primera del sistema:

$$dK_{(\Gamma, M)}(X, Y) = \langle Y, L \rangle.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= dK_{(\Gamma, M)}(\Gamma \times \Omega, M \times \Omega + \Gamma \times L) \\ &= \langle M \times \Omega + \Gamma \times L, L \rangle \\ &= \langle M \times \Omega, L \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que, de (3.4),

$$M = \Omega + \frac{(m-1)\Omega_3}{L_3}L$$

donde L_3 no es cero, pues si lo fuera estaríamos en el caso de Euler-Poinsot. Se concluye que el sistema es completamente integrable.

El trompo de Kowalevski.

Consideramos de nuevo que el sólido gira alrededor del eje L , en el cuál existe una base ortonormal tal que la matriz de inercia en esta base es la matriz diagonal

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el primer elemento de esta base es paralelo a L . En esta misma base escribimos

$$M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que la función

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2$$

es una integral primera. Dado que

$$u = 2p, \quad v = 2q, \quad w = r$$

tenemos que

$$\dot{u} = 2\dot{p}, \quad \dot{v} = 2\dot{q}, \quad \dot{w} = \dot{r}.$$

Por tanto, tenemos que

$$(DK)^t = \begin{pmatrix} 2p^2 - 2q^2 + 2\gamma_1 \\ 4pq + 2\gamma_2 \\ 0 \\ 4p^3 - 4pq^2 + 4p\gamma_1 + 8pq^2 + 4q\gamma_2 \\ -4qp^2 + 4q^3 - 4q\gamma_1 + 8qp^2 + 4p\gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_H = \begin{pmatrix} \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \gamma_1 q - \gamma_2 p \\ \frac{qr}{2} \\ \frac{-pr - \gamma_3}{2} \\ \frac{2}{\gamma_2} \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} dK(X_H) &= DK \cdot X_H \\ &= 2p^2 r \gamma_2 - 2q^2 r \gamma_2 + 2r \gamma_1 \gamma_2 - 2p^2 q \gamma_3 + 2q^3 \gamma_3 - 2q \gamma_1 \gamma_3 \\ &\quad + 4p^2 q \gamma_3 - 4pqr \gamma_1 + 2p \gamma_2 \gamma_3 - 2r \gamma_1 \gamma_2 \\ &\quad + 2p^3 qr - 2q^3 rp + 2pqr \gamma_1 + 4pq^3 r + 2q^2 r \gamma_2 \\ &\quad + 2p^3 qr - 2q^3 pr + pqr \gamma_1 - 4p^3 qr - 2p^2 r \gamma_2 \\ &\quad + 2p^2 q \gamma_3 - 2q^3 \gamma_3 + 2q \gamma_1 \gamma_3 - 4p^2 q \gamma_3 - 2p \gamma_2 \gamma_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\{H, K\} = dK(X_H)$, tenemos que K es integral primera del sistema y este último es completamente integrable.

Un desarrollo completo de estos tres casos puede encontrarse en los libros de Libermann [LM87] y Audin [Aud96]. El caso de Kowalevski se estudia a profundidad en el artículo de Richter [RDW97]. Un resumen histórico de el problema del sólido con punto fijo, así como el trabajo de Kowalevski en este y otros problemas, puede encontrarse en Audin [Aud11].

Capítulo 4

Los flujos geodésicos

Se abordan brevemente nociones de geodésicas en variedades riemannianas, foliaciones y otros temas útiles para dar la definición de flujo geodésico así como explorar algunos ejemplos.

4.1. Definición de flujo geodésico

Para esta subsección se consultó, además de la referencia principal Audin [Aud01], la tesis de Hildebrandsson [Hil21].

Consideramos una variedad riemanniana V . La métrica g de la variedad define una función $L : TV \rightarrow \mathbb{R}$, el lagrangiano, de la manera siguiente

$$L(q, \xi) = \frac{1}{2}g_q(\xi, \xi) \quad q \in V, \xi \in T_qV.$$

Tomando $p = \frac{\partial L}{\partial \xi} \in T_q^*V$ (es la forma lineal $g_q(\xi, \cdot)$), veremos que las geodésicas de V , que corresponden a puntos extremos del operador de energía de una curva, están dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange ¹, que se escriben $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Si $(q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ es el sistema coordenado usual de TV , $(g_{ij})_{ij}$ la matriz de g en estas coordenadas y $(g^{ij})_{ij}$ su inversa, las componentes de p se escriben

$$p_j = \sum_i g_{ij}(q)\xi_i, \tag{4.1}$$

de la misma forma

$$\xi_j = \sum_i g^{ij}(q)p_i \tag{4.2}$$

para $j = 1, \dots, n$.

¹Ver el apéndice B.1.1

El hamiltoniano es la función sobre T^*V definida por la transformada de Legendre de L ²:

$$H(q, p) = p \cdot \xi - L(q, \xi) = g_q(\xi, \xi) - \frac{1}{2}g_q(\xi, \xi) = \frac{1}{2}g_q(\xi, \xi) \quad (4.3)$$

que ponemos en términos de p con ayuda de las ecuaciones (4.1) y (4.2)

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \frac{1}{2}g_q(\xi, \xi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j p_j \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(q) p_i p_j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considerando la forma simpléctica $d\alpha$, con α la forma de Liouville sobre el haz cotangente, el sistema hamiltoniano asociado a H es

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j g^{ij} p_j \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g^{jk}}{\partial q_i} p_j p_k. \end{cases} \quad (4.5)$$

Este sistema es equivalente al definido por las ecuaciones de Euler-Lagrange³ y mostraremos que corresponde al **flujo geodésico** de la variedad (V, g) .

4.2. Geodésicas en variedades riemannianas

Definición 4.2.1. Sea $\gamma: I \rightarrow V$ una curva de clase C^2 sobre una variedad riemanniana (V, g) . γ es una geodésica si

$$\frac{D}{dt} \gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante de Levi-Civita a lo largo de la curva γ .

En una carta

$$\varphi = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

la geodésica γ tiene coordenadas

$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n),$$

²Ver el apéndice B.1.2.

³Ver el apéndice B.1.3

con $\gamma_i = q_i \circ \gamma$. El campo $\dot{\gamma}$ se escribe:

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

La ecuación $\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0$ nos da el sistema de n ecuaciones de segundo orden no lineales

$$\dot{\gamma}_i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

donde Γ_{ij}^k denota los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita ∇ de (V, g) , definidos por la relación

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

El sistema (4.6) son las ecuaciones de las geodésicas en la carta φ .

Definición 4.2.2. La energía de una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow (V, g)$ está dada por el operador E definido como

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Por el teorema B.1.1, tenemos que $\gamma: [a, b] \rightarrow (V, g)$ es punto crítico del funcional E si y solo si cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_i}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Teorema 4.2.1. El flujo geodésico de la variedad riemanniana (V, g) , es decir, las soluciones del sistema (4.6), coincide exactamente con el flujo definido por el sistema (4.5). En otras palabras, la curva γ es punto crítico del funcional E si y solo si γ es geodésica.

Demostración. Supongamos que la curva γ cumple las ecuaciones de Hamilton (4.5), entonces cumple las ecuaciones (4.7). En una carta podemos escribir a L como

$$L(q, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) \xi_i \xi_j.$$

Deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi_l}(q, \xi) &= \sum_{k=1}^n g_{lk}(q) \xi_k, \\ \frac{\partial L}{\partial q_l}(q, \xi) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}(q) \xi_i \xi_j \end{aligned}$$

y, si q y ξ son funciones de t ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_l} (q, \xi) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n g_{lk}(q) \xi_k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{d\xi_k}{dt} g_{lk}(q) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} (q) \frac{dq_j}{dt} \xi_k.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para $(\gamma, \dot{\gamma})$ se escriben

$$\sum_{k=1}^n \ddot{\gamma}_k g_{lk}(\gamma(t)) + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0.$$

En el segundo sumando, si renombramos algunos índices y los reordenamos, tenemos que

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j$$

y por tanto

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j.$$

Así, las ecuaciones se reducen a

$$\sum_{k=1}^n g_{lk}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} (\gamma(t)) + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} (\gamma(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} (\gamma(t)) \right) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0.$$

Y multiplicando por la matriz $(g^{ij})_{ij}$, tenemos

$$\ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} (\gamma(t)) + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} (\gamma(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} (\gamma(t)) \right) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0.$$

Recordando la fórmula para los símbolos de Christoffel ⁴,

$$\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} (\gamma(t)) + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} (\gamma(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} (\gamma(t)) \right),$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan ser

$$\ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

las mismas ecuaciones de (4.6). Es decir, las geodésicas son puntos críticos del funcional E . \square

⁴ver [Spi99]

4.3. Geodésicas de una hipersuperficie

4.3.1. Variedad de características

La mayor parte de esta sección está basada en el capítulo 5 de Souriau [Sou97] y los apéndices 3 y 4 de Libermann [LM87]. Tabachnikov [Tab95] y Arnold [AN01] también fueron usados como referencia. Para las nociones básicas de formas diferenciables se puede consultar Curtis [CM85].

Distribuciones y foliaciones

Definición 4.3.1. Si V es una variedad diferenciable de dimensión n , una **distribución de grado k** es una aplicación $x \mapsto E_x$, que a cada punto x de V le asigna un subespacio vectorial $E_x \subset T_x V$ de dimensión constante k .

La distribución es diferenciable si para cada punto x existe una familia X_1, \dots, X_k de campos vectoriales C^∞ , definidos en una vecindad U de x , tales que $X_1(x), \dots, X_k(x)$ son base del espacio E_x .

Definición 4.3.2. Si $x \mapsto E_x$ es una distribución diferenciable sobre la variedad V , una **variedad integral** de la distribución es una variedad W tal que

1. W es una subvariedad de V ,
2. en cada punto x de W , $T_x W = E_x$.

A la distribución $x \mapsto E_x$ se le llama **foliación** de V si cada uno de los puntos de V pertenece a una variedad integral.

Será útil el siguiente resultado, cuya prueba se encuentra en el capítulo 5 de Souriau [Sou97]: si V es una variedad de dimensión n y $x \mapsto E_x$ es una foliación de V (con $\dim(E_x) = k$), entonces existen parametrizaciones de V

$$(t, z) \in U \times W \longmapsto x \in V \quad (4.8)$$

para $U \subset \mathbb{R}^k$, $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ conexos y tal que, para z constante, la aplicación $t \mapsto x$ es parametrización de una variedad integral de la foliación.

En esta nueva estructura diferenciable de V , las componentes conexas (disjuntas) se llaman **hojas** de la foliación y forman una partición de V . Cada variedad integral conexa de la foliación es un conjunto abierto de una hoja.

Cociente de una variedad por una foliación

Definición 4.3.3. Si $x \mapsto E_x$ es una foliación de la variedad V de dimensión n , con $\dim(E_x) = k$, diremos que una variedad U inmersa inyectivamente en V es **transversal** a la foliación si en cada punto x de U su espacio tangente es complementario a E_x . La dimensión de U es necesariamente $n - k$.

Observación 4.3.1. Si en la parametrización (4.8) dejamos fijo a , podemos construir una variedad transversal a la foliación en cada punto de V .

Definición 4.3.4. La foliación $x \mapsto E_x$ es **seccionable** si para cada punto de V existe una variedad transversal U que interseca a cada hoja de la foliación en a lo más un punto. A U se le llama **sección transversal** de la foliación.

Para cualquier foliación las parametrizaciones descritas en (4.8) nos permiten cubrir a V con abiertos sobre los cuales esta foliación es seccionable.

Si la foliación $x \mapsto E_x$ es seccionable, denotaremos por $P(x)$ a la hoja que pasa por el punto x de V . Las aplicaciones $P \circ \phi$, con ϕ una parametrización de la sección transversal forman un atlas del conjunto de hojas V' (fig 4.1). Entonces V' tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n - k$ y se llama **variedad cociente de V por la foliación**.

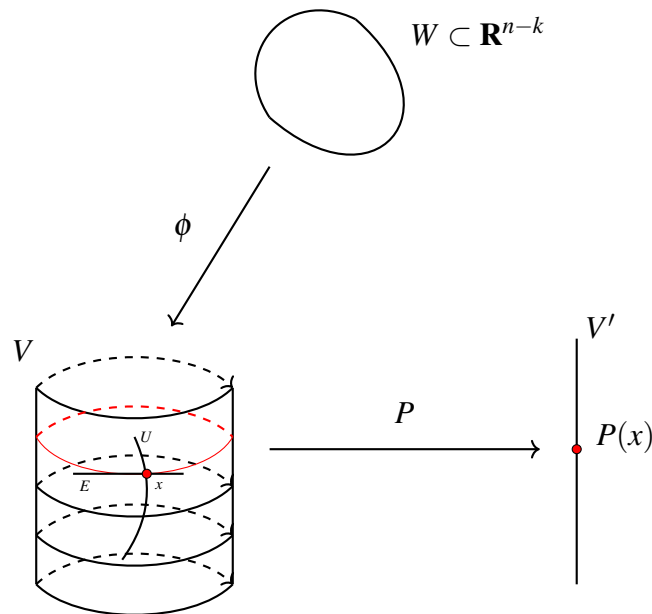


Figura 4.1: Estructura diferenciable de la variedad cociente V'

Esta estructura diferenciable puede ser sólo local, ya que aunque V sea un espacio Hausdorff, puede ocurrir que V' no lo sea.

Invariantes integrales y foliación característica

Definición 4.3.5. Si $x \mapsto E_x$ es una foliación seccionable y φ es una forma diferencial de grado p sobre V , diremos que φ es un **invariante integral** de la foliación si existe φ' sobre la variedad cociente V' tal que

$$\varphi = P^* \varphi',$$

donde P es la proyección de V sobre V' .

Si φ es un invariante integral de la foliación, $d\varphi$ también lo es, pues $P^* \circ d = d \circ P^*$. Se puede probar que la condición

$$E_x \subset \ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$$

es equivalente a que φ sea invariante integral de la foliación $x \mapsto E_x$, donde

$$\ker(\varphi_x) = \{v \in T_x V : i_v \varphi_x = 0\}.$$

Si φ es una p -forma sobre V tal que para cada $x \in V$ $\ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$ tiene dimensión constante y mayor o igual a 1, definimos $E_x = \ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$. Las distribuciones $x \mapsto \ker(\varphi_x)$ y $x \mapsto \ker(d\varphi_x)$ son diferenciables, por tanto la distribución $x \mapsto E_x = \ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$ es diferenciable⁵. Más aún, el teorema de Frobenius⁶ enuncia que una distribución $x \mapsto E_x$ es una foliación si y solo si para cualesquiera dos campos de vectores X, Y tales que $X(x), Y(x) \in E_x$ para toda x en un abierto, entonces $[X, Y](x) \in E_x$ en ese mismo abierto. Sean entonces X, Y campos vectoriales tales que localmente $X, Y \in E$. Tenemos

$$i_X \varphi = i_Y \varphi = i_X d\varphi = i_Y d\varphi = 0.$$

Por la fórmula de Cartan ($\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$) se tiene que

$$\mathcal{L}_X \varphi = \mathcal{L}_X d\varphi = 0.$$

De la fórmula $i_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X$ se sigue que

$$i_{[X, Y]} \varphi = \mathcal{L}_X i_Y \varphi - i_Y \mathcal{L}_X \varphi = 0$$

y

$$i_{[X, Y]} d\varphi = \mathcal{L}_X i_Y d\varphi - i_Y \mathcal{L}_X d\varphi = 0.$$

Es decir, $[X, Y] \in E$, y por el teorema de Frobenius concluimos que la distribución $x \mapsto E_x$ es una foliación.

⁵La prueba de estas afirmaciones puede encontrarse en el capítulo 9 de Curtis [CM85].

⁶Ver el capítulo 5 de Souriau [Sou97].

Definición 4.3.6. Si φ es una p -forma sobre V tal que para cada $x \in V$ $\ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$ tiene dimensión constante y mayor o igual a 1, decimos que la foliación

$$x \mapsto \ker(\varphi_x) \cap \ker(d\varphi_x)$$

es la **foliación característica** de la p -forma φ .

Observación 4.3.2. Se obtiene directamente de la definición que φ es un invariante integral de la foliación característica: existe φ' tal que $\varphi = P^*\varphi'$. Se tiene además que $\ker(\varphi') \cap \ker(d\varphi') = \{0\}$.

Variedad de características de una forma simpléctica

Consideremos ahora el caso particular de una variedad simpléctica (V, ω) . Dada una hipersuperficie Q de V , la restricción de ω a Q ya no es no degenerada (la hipersuperficie tiene dimensión impar), para todo $x \in Q$, $\dim(T_x Q \cap (T_x Q)^\circ) \geq 1$. Tenemos además que $\dim(T_x V) = \dim(T_x Q) + \dim(T_x Q)^\circ$, de donde se concluye que $\dim(T_x Q)^\circ = 1$. Así, $(T_x Q)^\circ = T_x Q \cap (T_x Q)^\circ \subset T_x Q$ y el kernel de la restricción de ω a Q tiene dimensión constante igual a 1.

Como ω es una forma cerrada, la foliación característica de la restricción de ω a Q es $x \mapsto \ker(\omega_x)$, las líneas integrales de esta foliación se llaman **líneas características de Q** , o simplemente **características de Q** .

La variedad Q' , cociente de Q por esta foliación se llama **variedad de características de Q** , y por la observación 4.3.2 tenemos que existe una 2-forma ω' sobre Q' tal que $\omega = P^*\omega'$. ω' es automáticamente cerrada y no degenerada ($\ker(\omega') = \{0\}$). Dicho de otra forma, (Q', ω') es una variedad simpléctica.

Observación 4.3.3. Si una función f es constante en una hipersuperficie Q (pero no globalmente constante), digamos, $f(x) = k$ para todo $x \in Q$ y algún $k \in \mathbb{R}$, Q tiene por ecuación $f(x) - k = 0$. Como Q es subvariedad la aplicación df_x es suprayectiva para cada x en Q y se tiene que $df_x \neq 0$. Dado que el espacio tangente a Q en x es el kernel de la aplicación df_x , denotando por X_f al campo hamiltoniano asociado a f , tenemos por la definición de X_f y la antisimetría de ω que $df_x(X_f(x)) = 0$, se sigue que X_f es tangente a Q . Notemos además que para todo $v \in T_x Q$

$$\omega(X_f(x), v) = -df_x(v) = 0,$$

de donde se deduce que el campo hamiltoniano $X_f(x)$ genera la dirección característica de $T_x Q$ y entonces es tangente a Q a lo largo de sus líneas características.

Ejemplo 4.3.1. Si V es una variedad riemanniana y $S(T^*V)$ es la hipersuperficie de T^*V que consiste de los covectores unitarios, las características de esta hipersuperficie se identifican con las líneas geodésicas orientadas no parametrizadas de V : la función

H definida en la ecuación (4.3) de la sección 4.1 es constante sobre $S(T^*V)$ y por la observación 4.3.3, las características se identifican con las curvas integrales de X_H , es decir, las geodésicas de V .

En el caso $V = \mathbb{R}^{n+1}$, las geodésicas son líneas rectas. La restricción de la forma simpléctica de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ al espacio de las rectas, permite identificar variedad de características de $S(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ con el espacio de rectas \mathcal{D}_n .

Ejemplo 4.3.2. Si Q es una hipersuperficie de V , y $j : Q \hookrightarrow V$ la inclusión, consideremos el haz inducido

$$j^*T^*V = \{(q', (q, p)) \in Q \times T^*V : j(q') = \underbrace{\pi(q, p)}_q\},$$

donde $\pi : T^*V \rightarrow V$ es la proyección. Este espacio consiste de los covectores de V cuyo punto base está en Q , es decir, identificando Q con $j(Q)$, es el conjunto

$$\{(q, p) \in T^*V : q \in Q, p \in T_q^*V\}$$

y es una hipersuperficie de T^*V .

Como Q es subvariedad de V , existe una carta $\phi : U \subset V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi(U \cap Q) = W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$$

y si $\phi = (q_1, \dots, q_n)$, las coordenadas canónicas de T^*V son $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, por tanto $(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n)$ son coordenadas de j^*T^*V . En estas coordenadas la inclusión $i : j^*T^*V \hookrightarrow T^*V$ se escribe

$$(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n) \mapsto (q_1, \dots, q_{n-1}, 0, p_1, \dots, p_n),$$

mientras que la forma canónica ω sobre T^*V es

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

y su restricción a j^*T^*V , que es $i^*\omega$, cumple que

$$i^*\omega_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j} \right) = i^*\omega_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j} \right) = 0$$

y

$$i^*\omega_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_j} \right) = \delta_{ij}$$

para $i, j = 1, \dots, n-1$. Como $\frac{\partial i}{\partial q_n} = 0$, para todo $X \in T_{(q,p)}j^*T^*V$ se tiene que

$$i^*\omega_{(q,p)} \left(\frac{\partial}{\partial q_n}, X \right) = \omega_{((q,0),p)} \left(\frac{\partial i}{\partial q_n}, di_{(q,p)}(X) \right) = 0,$$

de donde se deduce que

$$i^* \omega = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i.$$

De esta expresión se sigue que la dirección característica de $i^* \omega$ en un punto (q, p) es la generada por el vector tangente $\frac{\partial}{\partial p_n}(q, p)$, entonces su línea característica se queda dentro de T_q^*V y es transversal al subespacio de T_q^*V generado por las formas lineales $dq_1 \dots dq_{n-1}$ (ver Figura 4.2).

Si N denota la variedad de características de j^*T^*V , consideremos la aplicación $\varphi : N \rightarrow T^*Q$ que envía a la característica que pasa por (q, p) al elemento (q, j^*p) , donde $j^*p = p \circ dj$ es la restricción de la forma lineal p a T_qQ . En coordenadas locales φ se escribe

$$(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) \mapsto (q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}),$$

de donde se sigue que φ está bien definida, pues los puntos de la línea característica solo varían en su última coordenada p_n , el resto permanecen fijas.

Más aún, si η denota la forma simpléctica canónica sobre T^*Q , la aplicación φ es un difeomorfismo tal que $\varphi^* \eta$ coincide con la forma simpléctica sobre N . Se deduce que la variedad de características de j^*T^*V coincide con T^*Q .

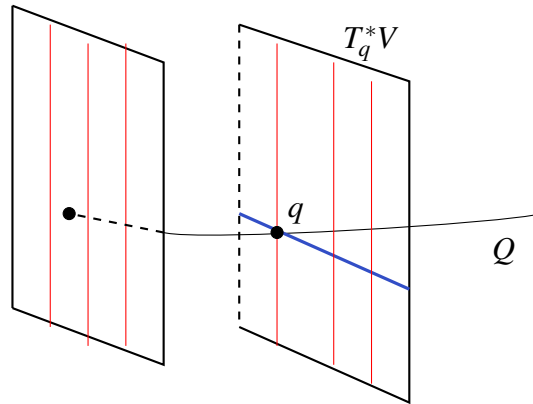


Figura 4.2: Líneas características de j^*T^*V (en rojo), transversales al subespacio generado por $dq_1 \dots dq_{n-1}$ (en azul).

4.3.2. Diagrama de Melrose

Consideremos una hipersuperficie $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con la métrica inducida por la métrica euclidiana. Para estudiar el flujo geodésico sobre Q podemos apoyarnos de un sistema sobre el espacio de rectas introducido en la sección 1.3.2. Para esto usaremos

el diagrama hexagonal de Melrose (introducido en Melrose [Mel76]), reproducido a continuación:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T^*\mathbb{R}^{n+1} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 j^*T^*\mathbb{R}^{n+1} & & & & S(T^*\mathbb{R}^{n+1}) \\
 \downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
 T^*Q & & X & & \mathcal{D}_n \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & & \Sigma & &
 \end{array} \tag{4.9}$$

La explicación es la siguiente:

- La primera línea contiene la variedad simpléctica ambiente, $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ con su forma simpléctica estándar.
- En la siguiente línea están dos hipersuperficies:
 - * $j^*T^*\mathbb{R}^{n+1}$, el haz inducido por la inclusión $j : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.
 - * $S(T^*\mathbb{R}^{n+1})$, el haz cotangente unitario de \mathbb{R}^{n+1} .
- La siguiente contiene a X , la intersección (transversal) de ambas hipersuperficies: los covectores unitarios de \mathbb{R}^{n+1} basados en Q .
- Después aparecen los espacios de características de las hipersuperficies, vistas en los ejemplos 1 y 2 de la subsección anterior. Son, respectivamente:
 - * El haz cotangente a Q .
 - * El espacio \mathcal{D}_n de las rectas de \mathbb{R}^{n+1} .
- En la última línea está Σ , el haz cotangente unitario de Q , hipersuperficie de T^*Q :

$$\Sigma = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : q \in Q, p \in T_q^*Q, \|p\|^2 = 1\},$$

su espacio de características es el espacio de geodésicas de Q .

La aplicación $\Sigma \rightarrow \mathcal{D}_n$ manda (q, p) a la recta que pasa por q con dirección p . Podemos describir a Σ como hipersuperficie de las dos variedades simplécticas T^*Q y \mathcal{D}_n y como subvariedad de codimensión 3 de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ (de donde provienen todas las estructuras simplécticas utilizadas). Por tanto las características de Σ son las mismas cuando se le considera:

- como el espacio de rectas tangentes a Q , subvariedad de \mathcal{D}_n .
- como el haz unitario de T^*Q .

Dicho de otra manera: toda característica del espacio de rectas tangentes a Q está formada por rectas tangentes a una geodésica de Q . Más aún, podemos considerar el flujo geodésico de Q como un sistema hamiltoniano sobre la variedad simpléctica \mathcal{D}_n .

4.3.3. Geodésicas de una superficie de revolución

Consideramos una superficie de revolución en \mathbb{R}^3 , con parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : (a, b) \times \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, \theta) &\longmapsto (f(s) \cos(\theta), f(s) \sin(\theta), g(s)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si la curva meridional ($\varphi(s, \theta)$, con θ fijo) está parametrizada por la longitud de arco s , es decir, $\left\| \frac{\partial}{\partial s} \right\|^2 = f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$, en estas coordenadas la matriz de la métrica y su inversa en cada punto (s, θ) son, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(s)^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/f(s)^2 \end{pmatrix}$$

Un vector tangente ξ se escribe

$$\xi = \sigma \frac{\partial}{\partial s} + \tau \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R},$$

entonces el lagrangiano es

$$L((s, \theta), (\sigma, \tau)) = \frac{1}{2} (\sigma^2 + f(s)^2 \tau^2).$$

Siguiendo la ecuación (4.1) las variables duales p_s y p_θ están relacionadas con σ y τ por las ecuaciones

$$p_s = g_{11}(s, \theta) \sigma = \sigma$$

y

$$p_\theta = g_{22}(s, \theta) \tau = f(s)^2 \tau.$$

Por la ecuación (4.4) el hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H((s, \theta), (p_s, p_\theta)) &= \frac{1}{2} (g^{11}(s, \theta) p_s^2 + g^{22}(s, \theta) p_\theta^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(p_s^2 + \frac{1}{f(s)^2} p_\theta^2 \right). \end{aligned}$$

Y las ecuaciones de Hamilton nos dicen que las ecuaciones de las geodésicas satisfacen el sistema (ver el sistema (4.5))

$$\begin{cases} \dot{s} = p_s \\ \dot{\theta} = \frac{1}{f(s)^2} p_\theta \\ \dot{p}_s = \frac{f'(s)}{f(s)^3} p_\theta^2 \\ \dot{p}_\theta = 0. \end{cases}$$

Podemos ver que p_θ es una integral primera: como H no depende de θ , $\dot{p}_\theta = 0$, es decir, p_θ es constante a lo largo de las curvas integrales de H .

Podemos probar esto de una manera geométrica usando el teorema de Clairaut:

Teorema 4.3.1. (Clairaut) *Si c es una geodésica en una superficie de revolución, $r(t)$ es la distancia del punto $c(t)$ al eje de revolución y $\alpha(t)$ es el ángulo orientado entre el vector tangente a la curva meridional y $c'(t)$, entonces se satisface la ecuación*

$$r(t) \sin \alpha(t) = K$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$.

Consideremos una geodésica c , imagen de una curva $(s(t), \theta(t))$ bajo la parametrización (4.10) y el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{1}{|f(s)|} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$$

como base ortonormal de cada plano tangente a la superficie de revolución. Si $\alpha(t)$ es el ángulo entre $c'(t)$ y el vector tangente al meridiano $\frac{\partial}{\partial s}$, notando que la distancia entre $c(t)$ y el eje z está dada por $f(s(t))$, deducimos que

$$\sin \alpha(t) = \frac{f(s(t)) \tau}{\|c'(t)\|}.$$

Como c es geodésica, $\|c'\| = 1$ y el teorema de Clairaut nos asegura que

$$f(s(t)) \sin \alpha(t) = K$$

para alguna constante K . Sustituyendo $\sin \alpha$ tenemos que

$$\underbrace{f(s(t))^2 \tau}_{p_\theta(t)} = K,$$

es decir $p_\theta = 0$.

La función p_θ recibe el nombre de **integral de Clairaut**, que como en el caso del péndulo esférico, resulta ser un momento respecto al eje de revolución.

4.3.4. Geodésicas de las cuádricas

Cuádricas en el espacio proyectivo y cuádricas duales

Para estudiar el flujo geodésico sobre una cuádrica es útil considerar el sistema de su cuádricas homofocales, así como su haz de cuádricas duales, por lo que se revisarán todas estas nociones brevemente. Una referencia importante de esta subsección y la siguiente es el artículo de Knörrer [Knö80], así como Tabachnikov [Tab95] y Arnold [Arn89].

Sea $P^n(\mathbb{R})$ el espacio proyectivo real de dimensión n , a un punto x en $P^n(\mathbb{R})$ con coordenadas homogéneas $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ se le asocia el hiperplano x^* dado por la ecuación $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1} = 0$, que al tomar coordenadas homogéneas tales que $y_{n+1} = 1$ se transforma en la ecuación cartesiana $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = -1$, suponiendo que $x_{n+1} \neq 0$.

La correspondencia $x \mapsto x^*$ identifica a $P^n(\mathbb{R})$ con su espacio proyectivo dual, cuyos puntos son los hiperplanos de $P^n(\mathbb{R})$. Para un subespacio vectorial $V \subset P^n(\mathbb{R})$, definimos

$$V^* = \bigcap_{x \in V} x^*,$$

que es un subespacio vectorial de $P^n(\mathbb{R})$ tal que $\dim V + \dim V^* = n$.

Una cuádrica no singular Q en $P^n(\mathbb{R})$ consiste de los puntos x con coordenadas homogéneas $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n : x_{n+1})$ tales que

$$\langle A^{-1}x, x \rangle = x^T A^{-1}x = 0$$

para una matriz A de orden $n + 1$, simétrica y no singular. Esto puede escribirse de la forma

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = x_{n+1}^2, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.11)$$

donde hemos supuesto que A es la matriz diagonal $(a_1, \dots, a_n, -1)$, pues es simétrica. Considerando coordenadas homogéneas tales que $x_{n+1} = 1$, obtenemos de (4.11) que la ecuación cartesiana de Q define un elipsoide de \mathbb{R}^n , a saber,

$$\langle A_0^{-1}x, x \rangle = \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1,$$

donde A_0 es la matriz diagonal (a_1, \dots, a_n) y x es un punto de \mathbb{R}^n .

La cuádrica dual de Q , denotada Q^* , consiste del conjunto de hiperplanos x^* de $P^n(\mathbb{R})$ tangentes a Q , se puede probar que las coordenadas homogéneas de estos hiperplanos satisfacen la ecuación

$$\langle Ax, x \rangle = x^T Ax = 0, \quad (4.12)$$

donde, aplicando la dualidad, a cada hiperplano x^* le corresponden las mismas coordenadas homogéneas de x . Así, la cuádrica dual puede verse como el conjunto de los puntos x duales a los hiperplanos que cumplen la ecuación (4.12), es decir, que satisfacen la ecuación

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = x_{n+1}^2. \quad (4.13)$$

Igual que en (4.11), obtenemos de (4.13) que la ecuación cartesiana de Q^* es

$$\langle A_0x, x \rangle = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1,$$

es decir, una cuádrica en \mathbb{R}^n .

Familias homofocales y haces de cuádricas

Si A es una matriz de orden n , simétrica, definida positiva y no singular, tenemos el elipsoide Q en \mathbb{R}^n de ecuación

$$\langle A^{-1}x, x \rangle = \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1.$$

La familia de cuádricas

$$\begin{aligned} \langle (A - zId)^{-1}x, x \rangle &= 1, & z \in \mathbb{R} \\ & z \neq a_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

se llama **familia homofocal** de Q , que corresponde al valor $z = 0$. Para el caso $n = 2$, esta familia consiste de cónicas cuyos focos coinciden con los de la elipse original, de ahí el nombre de homofocal. Para dimensiones mayores la característica más importante de esta familia es que su familia de cuádricas duales, dadas por las ecuaciones $\langle (A - zId)x, x \rangle = 1$, satisface las ecuaciones lineales en z

$$(a_1 - z)x_1^2 + (a_2 - z)x_2^2 + \cdots + (a_n - z)x_n^2 = 1,$$

i.e., es un **haz de cuádricas**.

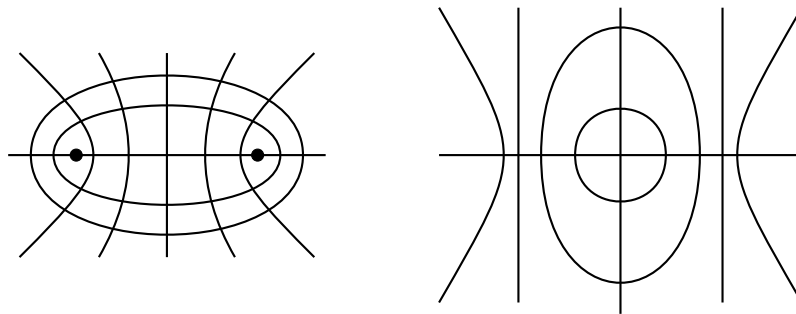


Figura 4.3: Familia de cónicas homofocales y el haz de cuádricas duales

Flujo geodésico sobre el elipsoide

Consideremos ahora un elipsoide Q_0 en \mathbb{R}^{n+1} definido por la ecuación

$$f(x) = \langle A^{-1}x, x \rangle - 1 = 0.$$

Sea $t \mapsto x(t)$, una geodésica en esta hipersuperficie y $y(t) = \dot{x}(t)$ su vector tangente. Decir que x es una geodésica es equivalente a decir que su vector de aceleración $\dot{y}(t)$ no tiene componente tangente, es decir que

$$\dot{y}(t) = \lambda \operatorname{grad}_{x(t)} f,$$

con $\operatorname{grad}_x f = 2A^{-1}x$.

Podemos obtener el valor de λ derivando la relación $\langle A^{-1}x, y \rangle = 0$ (pues y es tangente al elipsoide):

$$0 = \langle A^{-1}\dot{x}, y \rangle + \langle A^{-1}x, \dot{y} \rangle = \langle A^{-1}y, y \rangle + \lambda \langle A^{-1}x, A^{-1}x \rangle.$$

Por tanto, las geodésicas cumplen el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\langle A^{-1}y, y \rangle}{\|A^{-1}x\|^2} A^{-1}x. \end{cases}$$

La familia de cuádricas homofocales al elipsoide está dada por

$$f_z(x) = \langle (A - zId)^{-1}x, x \rangle - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{R}$$

y f_0 es la ecuación del elipsoide original Q_0 .

Se puede mostrar de manera geométrica, con ayuda de dos teoremas clásicos sobre familias homofocales, que este sistema es completamente integrable. Estos teoremas son los teoremas de Jacobi y Chasles que pueden encontrarse en Audin [Aud01], Tabachnikov [Tab95] y Arnold [Arn89]. A continuación los enunciados de estos teoremas con sus respectivas pruebas:

Teorema 4.3.2. (Jacobi). *Un punto genérico en un espacio $(n+1)$ -dimensional está contenido en exactamente $n+1$ cuádricas homofocales a un elipsoide dado. Estas cuádricas son ortogonales dos a dos en el punto de intersección.*

Demostración. Consideremos $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ un punto genérico, probaremos la proposición dual: todo hiperplano afín de \mathbb{R}^{n+1} que no pasa por el origen es tangente a n cuádricas del haz y los vectores que van del origen a los puntos de tangencia son ortogonales dos a dos.

El hiperplano dual a y es $y^* = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle = -1\}$ y la ecuación de las cuádricas del haz es

$$\langle (A - zId)x, x \rangle = 1.$$

Consideremos la forma cuadrática

$$B(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle x, y \rangle^2, \quad (4.14)$$

que puede ser expresada como $B(x) = \langle Px, x \rangle$ para cierto endomorfismo simétrico P . Consideramos z un valor propio de P con recta propia l y denotemos por E a la forma cuadrática $x \mapsto \langle x, x \rangle$, tenemos que la aplicación lineal $P - zId$ se anula sobre l . Esto implica que tanto la forma cuadrática $B - zE$ como su forma polar $(x, h) \mapsto \langle (P - zId)x, h \rangle$ se anulan sobre l .

Si denotamos por x_0 a la intersección de y^* con la recta l y usamos la definición de B en (4.14) tenemos que

$$0 = (B - zE)x_0 = \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle x_0, y \rangle^2 - \langle zx_0, x_0 \rangle = \langle (A - zId)x_0, x_0 \rangle - 1,$$

de donde

$$\langle (A - zId)x_0, x_0 \rangle = 1.$$

Es decir, x_0 está sobre la cuádrica de ecuación $\langle (A - zId)x, x \rangle = 1$, y como la forma polar de $B - zId$ se anula sobre l tenemos que

$$0 = \langle Ax_0, h \rangle - \langle x_0, y \rangle \langle h, y \rangle - \langle zx_0, h \rangle = \langle (A - zId)x_0, h \rangle + \langle h, y \rangle.$$

Se sigue que para todo $h \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\langle (A - zId)x_0, h \rangle = 0$ si y solo si $\langle h, y \rangle = 0$, es decir, el plano tangente a la cuádrica en x_0 coincide con el plano y^* trasladado al origen, o dicho de otra forma, y^* es tangente a la cuádrica en x_0 . En conclusión, los puntos de tangencia de las cuádricas del haz con el hiperplano dual a y son los vectores propios de la forma cuadrática B , y dado que todas las formas cuadráticas reales tienen n vectores propios independientes y ortogonales, el teorema queda demostrado. \square

Teorema 4.3.3. (Chasles). *Una recta genérica en un espacio $(n + 1)$ -dimensional es tangente a n cuádricas distintas de la familia homofocal. Los hiperplanos tangentes a estas cuádricas en los puntos de tangencia son ortogonales dos a dos.*

Demostración. Consideremos una recta l y proyectamos las cuádricas de la familia sobre el hiperplano l^\perp a lo largo de un haz de rectas paralelas a l . Tomemos ahora el “contorno aparente” de las cuádricas, es decir, las imágenes de los puntos donde una cuádrica es tangente a una de las rectas del haz.

Utilizamos la dualidad para probar que los contornos aparentes de las cuádricas forman una familia homofocal: la dualidad transforma la proyección de una cuádrica sobre l^\perp en la intersección de su cuádrica dual con el mismo hiperplano. Si \mathbb{R}^{n+1} tiene

coordenadas (x_1, \dots, x_{n+1}) , con un cambio de coordenadas adecuado podemos suponer que l es paralela al eje x_{n+1} y entonces $l^\perp = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Las cuádricas del haz tienen ecuación

$$\langle (A - zId)x, x \rangle = 1, \quad z \in \mathbb{R},$$

los puntos sobre l^\perp se escriben $(w, 0)$ con $w \in \mathbb{R}^n$ y entonces los puntos de intersección del haz con l^\perp cumplen la ecuación

$$\left\langle \overline{(A - zId)}w, w \right\rangle = 1,$$

donde \overline{A} denota a la matriz de orden n que resulta de eliminar el $n + 1$ -ésimo renglón y la $n + 1$ -ésima columna de la matriz A . Este conjunto es un haz de cuádricas y por tanto se sigue que su familia dual es homofocal.

Volviendo a la familia homofocal, aplicamos el teorema de Jacobi al punto de intersección de l y l^\perp : este punto está sobre n cuádricas de la familia de contornos aparentes, las preimágenes de estas cuádricas bajo la proyección son cuádricas tangentes a l y se sigue el resultado. \square

Volviendo a las geodésicas del elipsoide, notemos que la recta $u + tp$ es tangente a la cuádrica Q_z de ecuación $f_z = 0$ si y solo si la ecuación

$$f_z(u + tp) = 0 \tag{4.15}$$

tiene una raíz doble; es decir, una raíz t_0 que anule a f_z (bajo una reparametrización podemos suponer que $t_0 = 0$ y entonces u es un punto de Q_z) y a su derivada

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_z(u + tp) = d(f_z)_u(p) = \langle \text{grad}_u f, p \rangle = 0$$

(entonces p es ortogonal a $\text{grad}_u f$ y por tanto tangente a Q_z en u).

Tenemos que (4.15) es una ecuación de segundo grado en t :

$$\begin{aligned} f_z(u + tp) &= \langle (A - zId)^{-1}(u + tp), u + tp \rangle - 1 \\ &= \langle (A - zId)^{-1}u, u \rangle + \langle (A - zId)^{-1}u, tp \rangle \\ &\quad + \langle (A - zId)^{-1}tp, u \rangle + \langle (A - zId)^{-1}tp, tp \rangle - 1 \\ &= \langle (A - zId)^{-1}p, p \rangle t^2 + 2 \langle (A - zId)^{-1}p, u \rangle t \\ &\quad + \langle (A - zId)^{-1}u, u \rangle - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces tener una raíz doble es equivalente a que su discriminante se anule:

$$\langle (A - zId)^{-1}u, p \rangle^2 - (\langle (A - zId)^{-1}p, p \rangle) (\langle (A - zId)^{-1}u, u \rangle - 1) = 0.$$

Por tanto, en este caso, el espacio Σ del diagrama (4.9), visto como el espacio de rectas tangentes a Q_z , es la hipersuperficie de \mathcal{D}_n de ecuación $\Psi_z(u, p) = 0$, con

$$\Psi_z(u, p) = \langle (A - zId)^{-1}u, p \rangle^2 - (\langle (A - zId)^{-1}p, p \rangle) (\langle (A - zId)^{-1}u, u \rangle - 1).$$

Como la matriz A es simétrica, supondremos que es diagonal y por tanto la matriz $A - zId$, al ser la resta de dos matrices diagonales, es también diagonal:

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$$

y

$$A - zId = (\alpha_1 - z, \dots, \alpha_{n+1} - z),$$

y entonces

$$(A - zId)^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha_1 - z}, \dots, \frac{1}{\alpha_{n+1} - z} \right).$$

Si

$$u^t = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \quad y \quad p^t = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1}),$$

entonces $\Psi_z(u, p)$ se escribe

$$\begin{aligned} \Psi_z(u, p) &= \left(\sum_i \frac{u_i p_i}{\alpha_i - z} \right)^2 - \left(\sum_i \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} \right) \left(\sum_i \frac{u_i^2}{\alpha_i - z} - 1 \right) \\ &= \sum_i \frac{u_i^2 p_i^2}{(\alpha_i - z)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{u_i u_j p_i p_j}{(\alpha_i - z)(\alpha_j - z)} \\ &\quad - \left(\sum_i \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} \right) \left(\sum_i \frac{u_i^2}{\alpha_i - z} \right) + \sum_i \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} \\ &= \sum_i \frac{u_i^2 p_i^2}{(\alpha_i - z)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{u_i u_j p_i p_j}{(\alpha_i - z)(\alpha_j - z)} - \sum_i \frac{p_i^2 u_i^2}{(\alpha_i - z)^2} + \sum_i \frac{p_i^2}{\alpha_i - z} \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \frac{p_i^2 u_j^2}{(\alpha_i - z)(\alpha_j - z)}, \end{aligned}$$

lo que se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_z(u, p) &= \sum_{i \neq j} \frac{u_i u_j p_i p_j (\prod_{k \neq i, j} (\alpha_k - z))}{\prod_k (\alpha_k - z)} + \sum_i \frac{p_i^2 (\prod_{k \neq i} (\alpha_k - z))}{\prod_k (\alpha_k - z)} \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \frac{p_i^2 u_j^2 (\prod_{k \neq i, j} (\alpha_k - z))}{\prod_k (\alpha_k - z)}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\Psi_z(u, p) = \frac{Q_{u,p}(z)}{\prod_k (\alpha_k - z)},$$

donde $Q_{u,p}(z)$ es un polinomio de grado n en z .

Por tanto, la condición de que la recta (u, p) sea tangente a la cuádrica Q_z es equivalente a que z sea raíz de un polinomio $Q_{u,p}$ de grado n . El teorema de Chasles nos asegura que todas las raíces de este polinomio son reales y distintas.

Consideremos $Q(u, p, z) = Q_{u,p}(z)$ para u, p fijos. Esta función se anula si y solo si z es raíz del polinomio $Q_{u,p}$. Sean z_1, \dots, z_n las raíces de este polinomio, entonces $Q(u, p, z_i) = 0$ para cada i , y como las n raíces son distintas, cada una es raíz simple de Q , es decir:

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(u, p, z_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos localmente las funciones

$$z_1(u, p), \dots, z_n(u, p)$$

que definen las n cuádricas a las que la recta $u + tp$ es tangente.

Si consideramos el sistema hamiltoniano que describe las geodésicas de la hipersuperficie Q_0 como un sistema sobre el espacio de rectas \mathcal{D}_n , las funciones z_1, \dots, z_n definen localmente funciones sobre este espacio.

Para probar que estas funciones están en involución, consideremos el campo hamiltoniano X_i asociado a la función z_i . Si fijamos $\xi_i \in \mathbb{R}$, la hipersuperficie de nivel $z_i^{-1}(\{\xi_i\}) \subset \mathcal{D}_n$ consiste de las rectas tangentes a la cuádrica Q_{ξ_i} , es decir, el espacio Σ del diagrama de Melrose (4.9). Por la observación 4.3.3, el campo X_i es tangente a $z_i^{-1}(\{\xi_i\})$ a lo largo de sus características. El diagrama de Melrose muestra que cada línea característica de Σ consiste de rectas tangentes a una misma geodésica de Q_{ξ_i} .

Consideremos una geodésica γ de Q_{ξ_i} y la recta l tangente a esta cuádrica en el punto $\gamma(t)$, tenemos que l está generada por la dirección $\gamma'(t)$. Consideremos además las $n - 1$ cuádricas Q_{ξ_j} , $j \neq i$, tangentes a l (i.e. $\xi_j = z_j(l)$). Tomando un incremento infinitesimal a lo largo de γ desde $\gamma(t)$ tenemos que

$$\gamma(t + \varepsilon) = \gamma(t) + \gamma'(t)\varepsilon + \|\varepsilon\| o(\varepsilon),$$

con $o(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se tiene entonces que

$$\gamma'(t + \varepsilon) = \gamma'(t) + \gamma''(t)\varepsilon + \|\varepsilon\| o(\varepsilon),$$

de donde se deduce que la recta l' tangente a Q_{ξ_i} en $\gamma(t + \varepsilon)$ se encuentra, salvo términos de orden superior, dentro del plano generado por la recta l y el vector $\gamma''(t)$, normal a Q_{ξ_i} en $\gamma(t)$, pues γ es geodésica.

Por el teorema de Chasles sabemos que las cuádricas Q_{ξ_j} , $j = 1, \dots, n$, son ortogonales dos a dos en los puntos de tangencia con l , esto significa que el vector normal $\gamma''(t)$ está en el hiperplano tangente a Q_{ξ_j} en el punto de tangencia para toda $j \neq i$. Esto implica que la recta l' es tangente a Q_{ξ_j} para toda j , y se concluye por tanto que las rectas tangentes a Q_{ξ_i} a lo largo de γ siguen siendo tangentes a las cuádricas Q_{ξ_j} , las mismas cuádricas que eran tangentes a la recta original l . Dicho de otra forma, las funciones z_j son constantes a lo largo de las líneas integrales de X_i y por tanto $\{z_i, z_j\} = 0$ para toda $j = 1, \dots, n$.

Para nuestro elipsoide original alguna de las funciones debe ser idénticamente 0, supongamos que es z_n . Como para toda j las curvas integrales de X_j corresponden a rectas (u, p) tangentes a Q_{ξ_j} tales que $\|p\| = 1$, tenemos que la función $H(u, p) = \frac{1}{2}g_u(p, p)$ de (4.3) es constante a lo largo de estas curvas integrales, esto significa que $\{H, z_j\} = 0$. Tenemos que las funciones H, z_1, \dots, z_{n-1} son n integrales primeras en involución y son independientes porque al considerarlas como funciones sobre el haz cotangente unitario de Q_0 , X_H es tangente a este elipsoide a lo largo de sus geodésicas, y como las cuádricas Q_{ξ_j} ($j = 1, \dots, n-1$) son ortogonales a Q_0 en los puntos de intersección con la recta generada por X_H , los campos X_H, X_1, \dots, X_{n-1} son independientes y el sistema es completamente integrable.

Apéndice A

El teorema de Darboux

Este teorema afirma que todas las variedades simplécticas son localmente difeomorfos, más aún, el difeomorfismo local preserva la estructura simpléctica. La noción precisa es la siguiente:

Definición A.0.1. *Un **simplectomorfismo** entre dos variedades simplécticas (W_1, ω_1) y (W_2, ω_2) es un difeomorfismo $f : W_1 \rightarrow W_2$ tal que $f^* \omega_2 = \omega_1$. Se dice también W_1 y W_2 son **simplectomorfas**.*

También será de utilidad el lema de Poincaré, cuya prueba puede encontrarse en Curtis [CM85].

Proposición A.0.1. *(Lema de Poincaré). Sea ω una p -forma diferencial sobre una variedad W tal que $d\omega = 0$. Para cualquier punto $x \in W$ existe una vecindad U de x y una $(p-1)$ -forma α sobre U tal que $d\alpha = \omega$ sobre U .*

Por último necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema A.0.1. *Si ω_0 y ω_1 son dos formas simplécticas en W que coinciden en x , entonces existe una vecindad U_0 de x en W y una aplicación C^∞*

$$\psi : (U_0, x) \rightarrow (W, x)$$

tal que $\psi^ \omega_1 = \omega_0$. En otras palabras, (W, ω_0) y (W, ω_1) son localmente simplectomorfas.*

Demostración. Consideremos, para $t \in [0, 1]$, la 2-forma dependiente del tiempo $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Por la linealidad de la derivada exterior tenemos que ω_t es cerrada. Como ω_0 y ω_1 coinciden en x , $(\omega_t)_x = (\omega_0)_x$ y entonces es no degenerada en x . Por la observación 1.1.1 esto implica que el determinante

$$\det \left((\omega_t)_x (\partial_i(x), \partial_j(x))_{i,j} \right)$$

no se anula, donde los vectores $\partial_i(x)$ son los vectores coordenados en $T_x W$. Si definimos la función

$$f(t, x) = \det \left((\omega_t)_x (\partial_i(x), \partial_j(x))_{i,j} \right),$$

tenemos que f no se anula en (t, x) y por tanto existe una vecindad $U_{t,x}$ de x en W , y una vecindad $V_{t,x}$ de t en $[0, 1]$ tal que ω es no degenerada para cada punto de $V_{t,x} \times U_{t,x}$. La colección $\{V_{t,x} : t \in [0, 1]\}$ es una cubierta abierta de $[0, 1]$, y por compacidad, existen $V_{1,x}, \dots, V_{k,x}$ que cubren todo $[0, 1]$ ($V_{i,x}$ denota a la vecindad $V_{t,x}$).

Si $\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^k U_{i,x}$, tenemos que la forma ω_t es no degenerada sobre \mathcal{O} para todo $t \in [0, 1]$. Como $\omega_0 - \omega_1$ es cerrada, por el lema de Poincaré existe una vecindad de x y una 1-forma α tal que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. De nuevo por el lema de Poincaré podemos tomar una función f definida en una vecindad de x tal que $df = \alpha$. En particular tenemos que $(\alpha - df)_x = 0$ y $d(\alpha - df) = \omega_0 - \omega_1$. Por tanto podemos suponer que $\alpha_x = 0$, sustituyendo α por $\alpha - df$ si es necesario.

Definimos los campos de vectores X_t , que dependen del tiempo, por la relación

$$i_{X_t} \omega_t = \alpha.$$

Como $(\omega_t)_x (X_t(x), \cdot) = \alpha_x = 0$ y ω_t es simpléctica, $X_t(x) = 0$ para toda t , es decir, el flujo ϕ_t de X_t fija a x . Usando la fórmula de Cartan $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_t &= \phi_t^* \left(\frac{d\omega_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right) \\ &= \phi_t^* \left(\frac{d}{dt} (\omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)) + \underbrace{d i_{X_t} \omega_t}_{\alpha} + i_{X_t} \underbrace{d\omega_t}_0 \right) \\ &= \phi_t^* (\omega_1 - \omega_0 + d\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se concluye que la forma $\phi_t^* \omega_t$ no depende de t y entonces es igual a ω_0 para todo t en $[0, 1]$. $\psi = \phi_1$ es la aplicación deseada. \square

Observación A.0.1. *La aplicación ψ resulta ser un difeomorfismo local, ya que $\omega_0^{\wedge n}$ y $\omega_1^{\wedge n}$ son formas volumen y $\omega_0^{\wedge n} = \psi^* \omega_1^{\wedge n}$. Tenemos que*

$$(\psi^* \omega_1^{\wedge n})_x (\partial_1(x), \dots, \partial_n(x)) = (\omega_0^{\wedge n})_x (\partial_1(x), \dots, \partial_n(x)) \neq 0.$$

Por tanto $(\omega_1^{\wedge n})_{\psi(x)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \right) \neq 0$, y como la dimensión de las formas lineales alternantes de grado n sobre un espacio vectorial de dimensión n es 1, $(\omega_1^{\wedge n})_x$ es un múltiplo del determinante, entonces la matriz $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_i$ es invertible y ψ es un difeomorfismo local.

El teorema A.0.1 nos permite probar el teorema de Darboux:

Teorema A.0.2. (Darboux). *Para cada punto x de una variedad simpléctica (W, ω) existen coordenadas locales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ alrededor de x en las cuales*

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i.$$

Demostración. Tomemos una vecindad U de 0 en \mathbb{R}^{2n} y $f : U \rightarrow W$ una parametrización alrededor de x . Sobre U consideramos dos formas simplécticas:

- la forma $f^* \omega$
- y la forma constante $(f^* \omega)_0$.

Ambas formas valen lo mismo en 0 y por el teorema A.0.1 existe una vecindad U_0 de 0 y $\psi : U_0 \rightarrow U$ tal que $\psi^*(f^* \omega) = (f^* \omega)_0$.

En las coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de una base simpléctica para $(f^* \omega)_0$, se tiene que $(f^* \omega)_0 = \sum dq_i \wedge dp_i$ y por tanto

$$(f \circ \psi)^* \omega = \sum dq_i \wedge dp_i.$$

□

Observación A.0.2. *El teorema de Darboux muestra que no existe ningún invariante local en variedades simplécticas, a diferencia de la geometría riemanniana, donde la curvatura permite distinguir localmente entre dos variedades.*

Apéndice B

Nociones de mecánica

B.1. Sistemas Lagrangianos

En esta sección se presentan los conceptos de mecánica utilizados a lo largo del trabajo, las pruebas de los resultados aquí enunciados pueden encontrarse en Arnold [Arn89] y Spivak [Spi10], así como Libermann [LM87].

Para describir las propiedades de un cuerpo en términos matemáticos usamos un conjunto S , cuyos elementos son los puntos del cuerpo que está siendo estudiado. Una **configuración** de este cuerpo en el espacio euclidiano orientado 3–dimensional E (el espacio físico) es una aplicación $\varphi : S \rightarrow E$. El punto $\varphi(z) \in E$ puede interpretarse como el lugar ocupado por el punto $z \in S$ cuando el cuerpo se encuentra en configuración φ . Definimos el **espacio de configuraciones** del sistema, denotado por C , como el conjunto de todas las configuraciones posibles del sistema. Este espacio tiene estructura de variedad diferenciable y se identifica con el conjunto de puntos en E que pueden ser alcanzados mediante una configuración $\varphi \in C$.

El **espacio de estados cinemáticos** del sistema es el haz tangente TC al espacio de configuraciones. Si $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ es un sistema coordenado de TC , q_i se llaman **coordenadas generalizadas** y \dot{q}_i son las **velocidades generalizadas** del sistema. Un sistema lagrangiano se compone de una variedad C (el espacio de configuraciones) y una función $L : TC \rightarrow \mathbb{R}$, llamada **función lagrangiana**. Una elección usual para la función lagrangiana es $L = T - V$, la diferencia entre la energía cinética y la potencial del sistema.

B.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para una curva sobre el espacio de configuraciones $\gamma : (a, b) \rightarrow C$, definimos el funcional:

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$$

donde L es la función lagrangiana del sistema. Φ es la **acción lagrangiana del sistema**. Un extremo del funcional Φ es una curva γ tal que $d\Phi_\gamma = 0$.

Teorema B.1.1. Si $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ es un sistema coordinado de TC, la curva γ es un extremo del funcional Φ si y solo si las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

se cumplen a lo largo de γ . Las ecuaciones (B.1) se llaman **Ecuaciones de Euler-Lagrange**.

Teorema B.1.2. (Principio de Hamilton). Las soluciones $\gamma: (a, b) \rightarrow C$ del sistema lagrangiano coinciden con los extremos del funcional

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L dt,$$

con $L = T - V$ la función lagrangiana, T la energía cinética y V la energía potencial del sistema.

La prueba de los teoremas B.1.1 y B.1.2 se puede encontrar en el capítulo 3 de Arnold [Arn89].

B.1.2. Transformada de Legendre

Supongamos que f es una función convexa de clase C^2 sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, es decir, $f'' > 0$ sobre I y f' es monótona creciente con valores en $f'(I)$. Para $p \in f'(I)$ existe un único punto en I tal que la recta tangente a f en ese punto tiene pendiente p . Si y_p es la intersección de esta recta tangente con el eje y , definimos $g(p) = -y_p$. Obtenemos una nueva función $g: f'(I) \rightarrow \mathbb{R}$, la **transformada de Legendre de f** , denotada $\mathcal{L}f$. Si $\bar{x} \in I$ es el único punto tal que $f'(\bar{x}) = p$, la recta tangente a f en $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ tiene ecuación

$$y - f(\bar{x}) = p(x - \bar{x}).$$

Su intersección con el eje y se da en $x = 0$, y por tanto $g(p)$ se escribe:

$$g(p) = p\bar{x} - f(\bar{x}). \quad (\text{B.2})$$

El caso de varias variables

Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa (i.e. la matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ es positiva definida en cada punto), la transformada de Legendre g de f respecto de la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ tiene variable $p = (p_1, \dots, p_n)$, donde

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

para un único $\bar{x} \in U$. Definimos $g(p)$ como el negativo de la altura de la intersección entre el eje y y el hiperplano tangente a f en \bar{x} . Análogamente a (B.2) tenemos

$$g(p) = \langle p, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}).$$

Observación B.1.1. *La transformada de Legendre es involutiva, es decir*

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f.$$

B.1.3. Equivalencia de las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Hamilton

Si $L : TC \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lagrangiana convexa respecto del argumento $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, definimos los **momentos generalizados** como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$.

Teorema B.1.3. *El sistema (B.1) de las n ecuaciones de Lagrange es equivalente al siguiente sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden:*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L) = H : T^*C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\longmapsto \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

es el **hamiltoniano** del sistema, y cumple que $H = T + V$ con T la energía cinética y V la potencial, es decir, H es la energía total del sistema. T^*C es el **espacio de fases** del sistema. Las ecuaciones (B.3) son las **ecuaciones de Hamilton**.

Si $q(t)$ cumple las ecuaciones de Lagrange, $(q(t), p(t))$ cumple las ecuaciones de Hamilton.

B.2. Movimiento de cuerpos rígidos con un punto fijo

En esta sección se describe el sistema mecánico definido en 2.2.5. Todo el desarrollo está basado en Audin [Aud96], Arnold [Arn89], Richter [RDW97] y Sussman [SW14].

B.2.1. Movimiento en un sistema de coordenadas móvil

En el caso de un cuerpo sólido S con punto fijo O , sujeto a un campo gravitacional constante γ , podemos considerar S como un subconjunto del espacio euclidiano orientado E , y si suponemos que S contiene por lo menos 3 puntos no colineales, las posibles configuraciones del sistema son restricciones a S de isometrías de E en sí mismo que dejan fijo a O . Tomando a O como origen en E podemos identificar este último con el espacio vectorial euclidiano \mathbb{R}^3 y entonces el espacio de configuraciones se identifica con el conjunto C de isometrías lineales $E \rightarrow E$ que preservan orientación, es decir, $SO(E)$, que bajo la elección de una base ortonormal en E se puede identificar con $SO(3)$.

Ángulos de Euler

Un conjunto de coordenadas adecuado para este espacio de configuraciones son los ángulos de Euler (φ, θ, ψ) , ilustrados en la figura B.1. Usaremos un marco móvil (con coordenadas ligadas al cuerpo) y un marco absoluto, ambos con origen en O . La notación es la siguiente:

1. x_1, x_2, x_3 son los vectores de una base ortonormal positivamente orientada en el marco absoluto.
2. $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ son los vectores de una base ortonormal positivamente orientada en el marco móvil.
3. n es la “línea de nodos”; es el vector unitario del eje $\zeta_3 \times x_3$.
4. φ es el ángulo entre x_1 y n .
5. θ es el ángulo entre x_3 y ζ_3 .
6. ψ es el ángulo entre n y ζ_1 .

Todos los vectores están escritos en el marco absoluto. En adelante las letras mayúsculas denotará un vector escrito en el marco móvil, y la letra minúscula correspondiente denotará el mismo vector escrito en el marco absoluto.

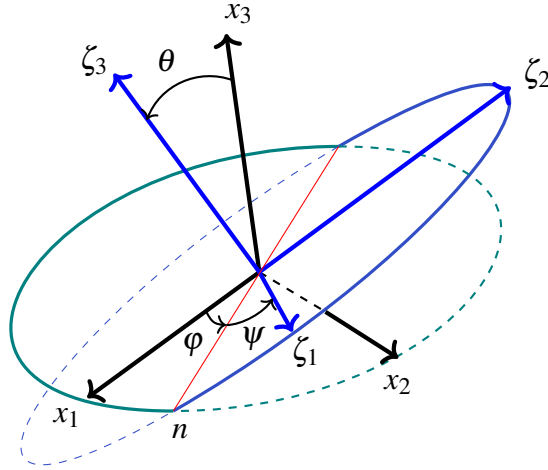


Figura B.1: Ángulos de Euler

Observación B.2.1. Si $R_{\psi,\theta,\varphi} = R_{\zeta_3,\psi} \circ R_{n,\theta} \circ R_{x_3,\varphi}$ es la transformación que aplica sucesivamente las rotaciones por los ángulos φ , θ y ψ respecto de los ejes x_3 , n y ζ_3 respectivamente, tenemos que $R_{\psi,\theta,\varphi}(x_1) = \zeta_1$, $R_{\psi,\theta,\varphi}(x_3) = \zeta_3$, y por tanto $R_{\psi,\theta,\varphi}(x_2) = \zeta_2$.

Tenemos entonces que la rotación $R_{\psi,\theta,\varphi}$ nos permite pasar del marco absoluto al marco móvil del cuerpo, mientras que $(R_{\psi,\theta,\varphi})^t$ tiene el efecto opuesto, lleva el marco móvil al marco absoluto.

Como el campo gravitacional es constante y apunta en la dirección del vector x_3 , las rotaciones alrededor de este eje mantienen invariantes la energía cinética y potencial del cuerpo. Esto implica que en la expresión del hamiltoniano del sistema en estas coordenadas no aparece la coordenada φ , y por las ecuaciones de Hamilton el momento correspondiente p_φ es constante. Esto nos permite reducir en 2 la dimensión del espacio fase $T^*SO(3)$. Viendo el espacio fase como subconjunto de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, tomaremos otro conjunto de coordenadas, formado por las 3 componentes de un vector cualquiera (el campo gravitacional es una elección conveniente) y las 3 del momento angular, descritos en el marco móvil del cuerpo. Aunque estas coordenadas también describen un conjunto de dimensión 6, más adelante se mostrará que todo el movimiento del sistema está restringido a una subvariedad de dimensión 4 difeomorfa a TS^2 .

Si queremos obtener las componentes en el marco absoluto de un vector escrito en el marco móvil, sabemos que las componentes q_i de q se obtienen haciendo el producto punto $\langle q, x_i \rangle = \langle Q, X_i \rangle$. Como $X_i = R^t Z_i$, con $R = R_{\psi,\theta,\varphi}$ la aplicación de la observación

B.2.1, tenemos

$$q_i = \langle Q, R^t Z_i \rangle = \langle RQ, Z_i \rangle.$$

Es decir, las componentes de q en el marco absoluto son las mismas que las componentes de RQ respecto del marco móvil. $R(t) = R_{\psi(t), \theta(t), \varphi(t)}$ es la rotación que describe los vectores en el marco móvil vistos desde el marco absoluto en el tiempo t . Podemos describir el movimiento del punto Q del cuerpo como

$$q(t) = R(t)Q, \quad (\text{B.4})$$

y el campo gravitacional γ visto desde el marco móvil se escribe

$$\Gamma(t) = R(t)^{-1}\gamma. \quad (\text{B.5})$$

Velocidad angular, momento angular y operador de inercia

Derivando (B.4) respecto de t tenemos

$$\dot{q}(t) = \dot{R}(t)Q = (\dot{R}(t)R(t)^{-1})q(t).$$

Dado que $R \in SO(3)$, tenemos que $RR^t = I$, derivando esta expresión, $\dot{R}R^t + R\dot{R}^t = 0$, y entonces

$$R\dot{R}^t = -\dot{R}R^t$$

y

$$(\dot{R}R^t)^t = -\dot{R}R^t.$$

Por tanto $\dot{R}R^t$ es una aplicación anti simétrica. El isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}(3) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{B.6})$$

transforma la acción de la matriz en el producto vectorial

$$A \cdot x \mapsto \varphi(A) \times x.$$

El elemento $\omega(t) = \varphi(\dot{R}R^t)$ es la **velocidad angular**. Por tanto

$$\dot{q} = \omega \times q.$$

El **momento angular** m de un punto de masa μ respecto del punto O se define como

$$m = \mu q \times \dot{q} = \mu q \times (\omega \times q).$$

Usando el hecho de que para una rotación R se cumple

$$R(v \times w) = Rv \times Rw,$$

tenemos que

$$M = \mu Q \times (\Omega \times Q).$$

Para cada punto Q definimos $I(X) = \mu Q \times (X \times Q)$, entonces $M = I(\Omega)$ y usando que $\langle u \times v, w \rangle = \langle w \times u, v \rangle$ tenemos que I es un operador simétrico:

$$\langle I(X), Y \rangle = \mu \langle Q \times (X \times Q), Y \rangle = \mu \langle (Y \times Q), (X \times Q) \rangle,$$

dónde la última expresión es simétrica en X e Y .

Si el cuerpo S está constituido de muchos puntos, por definición el momento angular del cuerpo es la suma de los momentos angulares de cada uno de sus puntos, por tanto:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i I_i(\Omega).$$

Si definimos $I = \sum_i I_i$, el **operador de inercia** del cuerpo, tenemos que

$$M = I(\Omega).$$

Para el operador simétrico I existe una base ortonormal de vectores propios (e_1, e_2, e_3) , con valores propios correspondientes I_1, I_2, I_3 . Los ejes definidos por los vectores e_i se llaman **ejes principales** del cuerpo, mientras que los valores propios asociados I_i son los **momentos principales de inercia**.

B.2.2. Ecuaciones diferenciales del sistema en el espacio fase reducido

Tomando derivadas en (B.5) y usando la anti simetría:

$$\dot{\Gamma} = \dot{R}^t \gamma = \dot{R}^t R \Gamma = (R^t \dot{R})^t \Gamma = -R^t \dot{R} \Gamma,$$

usando de nuevo la anti simetría tenemos que:

$$\dot{\Gamma} = -R^t \dot{R} (R^t \gamma) = -R^t (\dot{R} R^t \gamma) = -R^t (\omega \times \gamma) = (R^t \gamma) \times (R^t \omega)$$

y así obtenemos la primera ecuación del sistema:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega. \tag{B.7}$$

Ahora nos fijamos en el momento angular M : si G es el centro de masa del cuerpo y L el vector $\overline{G\dot{O}}$, la ley de conservación del momento angular dice que la derivada \dot{m}

debe ser igual a la suma n de los momentos (o torcas) de las fuerzas aplicadas a cada punto del cuerpo. Dado que se puede considerar que todas las fuerzas actúan sobre el centro de masa G y la única fuerza que actúa es el campo gravitacional γ , tenemos que $N = \Gamma \times L$. Por otra parte

$$\begin{aligned} n = \dot{m} &= \widehat{RM} = \dot{R}M + R\dot{M} = \dot{R}R^t m + R\dot{M} \\ &= \omega \times m + R\dot{M} = R\Omega \times RM + R\dot{M} \\ &= R(\Omega \times M + \dot{M}) \end{aligned}$$

y por tanto $\Gamma \times L = \Omega \times M + \dot{M}$, de donde tenemos la segunda ecuación del sistema:

$$\dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times L. \quad (\text{B.8})$$

Las ecuaciones (B.7) y (B.8) determinan el sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega \\ \dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times L. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

El vector Γ ya no es constante, pero sigue siendo unitario (si se eligen unidades adecuadas), de igual forma, por las ecuaciones en (B.9), el momento del sólido respecto a la vertical (la dirección del campo gravitacional), $\langle \Gamma, M \rangle$ se conserva. Los vectores Γ y M entonces están restringidos a estar sobre la subvariedad

$$W_a = \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\Gamma\|^2 = 1 \text{ y } \langle \Gamma, M \rangle = a \right\},$$

difeomorfa a $T\mathbb{S}^2$ bajo la aplicación

$$(\Gamma, M) \rightarrow (\Gamma, M - a\Gamma).$$

La energía total del sistema es

$$H(\Gamma, M) = \frac{1}{2} \langle M, \Omega \rangle + \langle \Gamma, L \rangle$$

Si dotamos a W_a con la forma canónica del haz (co)tangente a \mathbb{S}^2 o la restricción de la del espacio fase total $T^*SO(3)$, las variables Γ y M no serían canónicamente conjugadas (no serían válidas las ecuaciones de Hamilton para la función H). Sin embargo podemos encontrar una estructura para la que la función H sea el hamiltoniano de (B.9):

En las coordenadas $\phi = (\varphi, \theta, \psi)$ dadas por los ángulos de Euler los momentos correspondientes $\pi = (p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$ dependen de las componentes de la velocidad angular p, q, r y los momentos de inercia I_1, I_2, I_3 .

En estas coordenadas se tienen las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \partial H / \partial \phi \\ \partial H / \partial \pi \end{pmatrix}$$

donde H está expresada en las coordenadas (ϕ, π) .

Consideramos la transformación $(\phi, \pi) \mapsto (\Gamma, M)$ obtenida usando las identidades

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} = R^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 p \\ I_2 q \\ I_3 r \end{pmatrix}.$$

Si D es la matriz jacobiana de esta transformación,

$$\frac{\partial(\Gamma, M)}{\partial(\phi, \pi)},$$

tenemos que

$$DJD^t = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ -\Gamma^t & M \end{pmatrix},$$

donde, abusando de la notación, Γ y M denotan a sus matrices anti simétricas asociadas por el isomorfismo (B.6). Así recuperamos las ecuaciones de Hamilton con esta nueva estructura:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial \Gamma \\ \partial H / \partial M \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema (B.9) es hamiltoniano sobre W_a con la forma simpléctica

$$\omega_{(\Gamma, M)}((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = \langle \xi \times M + \Gamma \times \eta, \xi' \rangle + \langle \Gamma \times \xi, \eta' \rangle.$$

Bibliografía

- [AN01] Vladímir I. Arnold y Sergei P. Novikov. «*Symplectic Geometry*». En: *Dynamical Systems IV*. 2.^a ed. Vol. 4. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Heidelberg: Springer, 2001.
- [Arn89] Vladímir I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2.^a ed. Graduate Texts in Mathematics 60. Springer, 1989.
- [Aud01] Michèle Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. Collection SMF: Cours Spécialisés 8. EDP Sciences, 2001.
- [Aud11] Michèle Audin. *Remembering Sofya Kovalevskaya*. Springer, 2011.
- [Aud96] Michèle Audin. *Spinning Tops: A Course on Integrable Systems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 51. Cambridge University Press, 1996.
- [Can08] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2008.
- [CM85] Wendell Curtis y Forrest Miller. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Vol. 166. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., 1985.
- [Hil21] Victor Hildebrandsson. «The Hamiltonian formulation of geodesics». Informe de proyecto. Uppsala University, 2021.
- [Knö80] Horst Knörrer. «*Geodesics on the Ellipsoid*». En: *Inventiones mathematicae* 59 (1980), págs. 119-144. URL: <http://eudml.org/doc/142734>.
- [LM87] Paulette Libermann y Charles-Michel Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and its Applications. D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [Mel76] Richard B. Melrose. «*Equivalence of glancing hypersurfaces*». En: *Inventiones mathematicae* 37 (1976), págs. 165-191.
- [RDW97] Peter H. Richter, Holger R. Dullin y Andreas Wittek. «*The Kovaleskaya Top*». En: *Techn. Wiss./Naturw.* 13 (1997), págs. 33-96.

- [Sou97] Jean-Marie Souriau. *Structure of Dynamical Systems: A Symplectic View of Physics*. Vol. 149. Progress in Mathematics. Springer, 1997.
- [Spi10] Michael Spivak. *Physics for mathematicians: Mechanics 1*. Publish or Perish, Inc., 2010.
- [Spi99] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 1. Publish or Perish, Inc., 1999.
- [SW14] Gerald J. Sussman y Jack Wisdom. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. 2.^a ed. The MIT Press, 2014.
- [Tab95] Serge Tabachnikov. *Billiards*. Panoramas et synthèses 1. Société Mathématique de France, 1995.