



Universidad Nacional Autónoma de  
México y Universidad Michoacana  
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas  
UMSNH-UNAM

---

## Politopos de Reuleaux y cuerpos de ancho constante

---

# T E S I S

para obtener el grado de

*Maestra en Ciencias Matemáticas*

presenta

Marcela Guadalupe Mercado Flores  
mmercado@matmor.unam.mx

Asesor:

Doctor Edgardo Roldan Pensado.  
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM  
eroldan@matmor.unam.mx

Morelia, Michoacán, México  
23 de agosto de 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

El caos no es más que un orden sin descifrar.

Este trabajo se realizó gracias al apoyo económico de las siguientes entidades:

- Proyecto PAPIIT-UNAM IN111923.
- El Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías CONAHCYT.

Además, las siguientes instituciones apoyaron con sus instalaciones:

- El Centro de Ciencias Matemáticas CCM que me dio mi cubito.
- La Universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo que me dio agüita, y que gracias a ella me dieron la beca CONAHCYT.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>1 Poliedros de Reuleaux</b>	<b>1</b>
1.1 Polígonos de Reuleaux . . . . .	1
1.2 Poliedros Esféricos . . . . .	3
1.3 Poliedros de Reuleaux . . . . .	5
1.4 El Tetraedro de Reuleaux . . . . .	5
1.5 Relación entre los poliedros de Reuleaux y las gráficas autoduales . . . . .	8
<b>2 Cuerpos de Meissner</b>	<b>11</b>
2.1 El teorema de Meissner y Pál . . . . .	13
2.2 Modificación del tetraedro de Reuleaux . . . . .	14
2.3 Modificación de los poliedros de Reuleaux . . . . .	15
<b>3 Construcción de cuerpos de ancho constante a partir de polígonos de Reuleaux</b>	<b>18</b>
<b>4 Construcción de los grafos asociados a los poliedros de Reuleaux</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>32</b>

# Agradecimientos

Quiero expresar mi profunda gratitud a Conacyt por otorgarme la beca que me permitió cursar mis estudios de maestría durante estos dos años.

A mi hija, Luna Desire Adame Mercado, a quien le agradezco enormemente su inagotable motivación, apoyo, comprensión y amor incondicional. Eres mi motor y mi más grande razón de ser; no podría haber hecho nada de esto sin ti.

También deseo agradecer a mi familia por brindarme la invaluable oportunidad de continuar con mi formación académica. A mi madre, que ha hecho hasta lo imposible por sacarnos adelante y que nunca le pesó cada vez que le dije que quería seguir estudiando un poquito más. De poquito en poquito, estoy por iniciar un doctorado y en cada ocasión me sigue poniendo ojos de enojada, pero con una linda sonrisa que espero nunca me falte. Quiero agradecer a mi abuelita, que desde pequeña yo la recuerdo con mucho amor, ayudándome y motivándome para que me gustara mucho la escuela. Tú que siempre me diste la oportunidad de ser una niña feliz a pesar de las dificultades y las carencias, siempre me hiciste sentir libre y con ganas de conocer el mundo. Te amo. Quiero agradecer a mi abuelo, quien con su seriedad y su disciplina me ha hecho saber que aunque me asuste, siempre puedo con lo que sea para alcanzar lo que quiera hacer en mi vida.

Agradezco especialmente a mi asesor, Edgardo Roldán Pensado, quien en su momento me convenció de estudiar un posgrado y desde entonces me ha respaldado y guiado con paciencia y dedicación a lo largo de esta travesía académica.

A Carlos López Callejas le agradezco por haber estado ahí desde el primer día, por creer en mí, por exigirme, por estar cuando todo era perfecto y cuando no podía más, por estar cuando no me salía ni el ejercicio más simple de la frustración y el cansancio. No me dejaste rendirme nunca y cuando caí, me ayudaste a levantarme. Por considerarme tu compañera y estar en estos días tan importantes para mí. Gracias por las tardes de estudio, los domingos de no hacer nada y los momentos tan simples de felicidad. Gracias por tu apoyo incondicional a lo largo de estos dos años.

A Ismael, quien desde el inicio de la maestría me ha motivado y acompañado en los momentos de mayor tensión, que en cada trámite siempre fue un gran compañero y me salvó de más de un problema, le brindo mi más sincero agradecimiento.

Asimismo, agradezco a PAPIT por otorgarme una beca que me permitió finalizar mi tesis con éxito. A Morelia Alvarez, quien siempre estuvo allí para ayudarme cuando los trámites o las cosas se complicaron, siempre con una sonrisa y una actitud inmejorable, te agradezco de corazón.

A mi primer ayudante de clase y amigo de aquí de Morelia, Cesar Corral, quien me

---

hizo sentir que no solo soy una persona capaz, sino que también soy valiosa y talentosa. Me ayudaste a sentirme mejor cada vez que me sentí incapaz o insuficiente en algún sentido. Eres una persona increíble, muchísimas gracias.

A mis queridos compañeros de estudio, Sebastián, Salvador, Jesús, Jareb, Gerardo, Estefanía, Miguel Calderón, Manuel (Prima), Luis David e Itzel, quienes con sus ocurrencias y cariño alegraron mis días y los hicieron menos pesados, y algunos muy divertidos, les doy las gracias de todo corazón. Todos ustedes son personas maravillosas y no estaría aquí si no contara con su apoyo y compañía.

# Introducción

El propósito de este trabajo es desarrollar la teoría de los polítopos de Reuleaux y los cuerpos de ancho constante. Comenzaremos con un breve resumen sobre los cuerpos de ancho constante y su relación con los polítopos de Reuleaux, así como con un tipo especial de gráficas planas. Este tema se encuentra bien desarrollado en el libro de Martini, Montejano y Oliveros [Martini et al., 2019]. En dicho libro se explica con claridad la importancia de los cuerpos de ancho constante, que son cuerpos que poseen la propiedad de mantener la misma apertura entre dos líneas perpendiculares a una dirección y paralelas entre sí que los abrazan, independientemente de la dirección que se elija. Estos cuerpos son relevantes debido a su propiedad de ancho constante, la cual los hace útiles en diversas aplicaciones.

El primer ejemplo no trivial es el triángulo de Reuleaux, que se puede construir de dos maneras. La primera consiste en empezar con un triángulo equilátero  $abc$  de aristas de longitud unitaria y marcar desde cada vértice, digamos  $a$ , un segmento de arco que va de  $b$  a  $c$ , y repetir para cada vértice. La segunda construcción consiste en marcar una circunferencia de radio 1 y una segunda con centro sobre la primera circunferencia. Por último, marcamos una tercer circunferencia con centro en una de las intersecciones de los primeros dos círculos y la intersección de los tres círculos es el triángulo de Reuleaux. La Figura 1 muestra una representación del triángulo de Reuleaux.

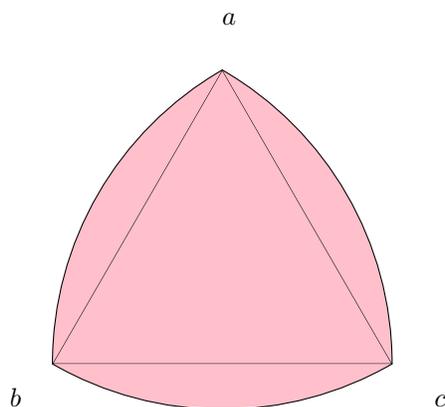


Figura 1: Triángulo de Reuleaux.

De hecho, hay muchas figuras de ancho constante, ya que cada polígono regular con un número impar de lados permite construir una figura con esta propiedad (como se muestra en la Figura 2). Además, existen infinitos polígonos no regulares adecuados

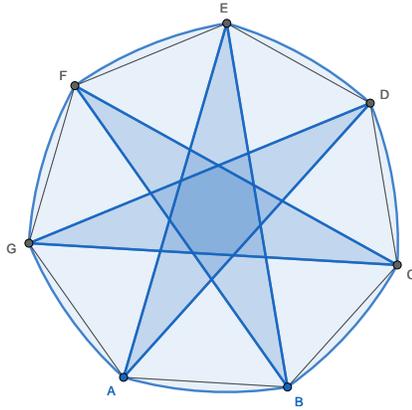


Figura 2: Una figura de ancho constante basada en un heptágono regular.

para estas construcciones, así como muchas otras formas diferentes de crear figuras de ancho constante.

Una posibilidad es empezar con un polígono irregular en forma de estrella, cuyo número de vértices es impar y cuyos lados tienen la misma longitud. Se dibujan arcos circulares con centro en los vértices que conectan cada par de puntas opuestas adyacentes. Las esquinas de la figura se pueden redondear extendiendo todos los lados del polígono en forma de estrella a la misma longitud y uniéndolos con arcos circulares cuyos centros son los puntos opuestos de la estrella. En la Figura 3, se muestra una curva de ancho constante basada en un polígono en forma de estrella y una versión suavizada del mismo.

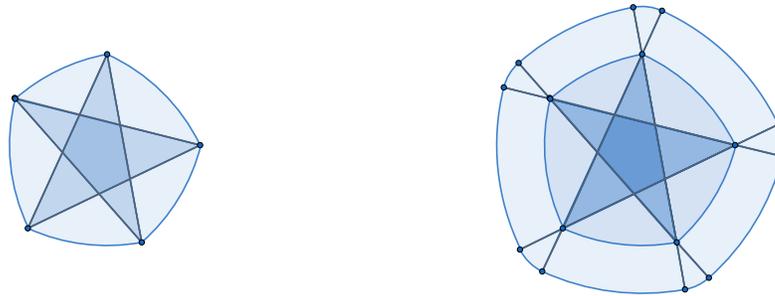


Figura 3: Una curva de ancho constante basada en un polígono en forma de estrella y una versión suavizada del mismo.

Otro hecho curioso que se trata en el libro [Martini et al., 2019] es que hay figuras de ancho constante que pueden construirse de tal manera que no contengan áreas circulares en ninguna parte de su frontera. Además, es posible construir una curva de ancho constante diferente del círculo, que es analítica. Es decir, existe una ecuación polinómica cuyos ceros son los puntos de una curva no circular de ancho constante (ver Figura 4).

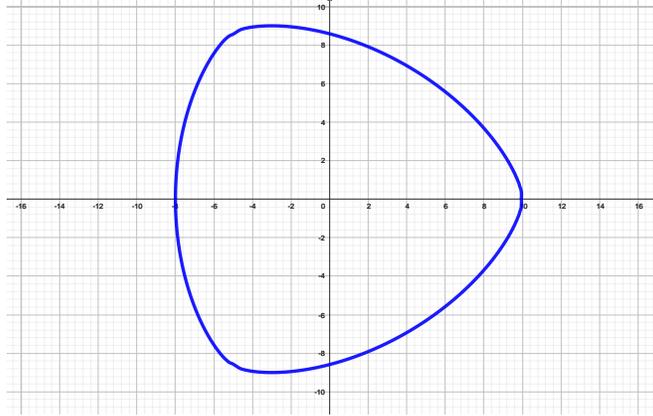


Figura 4: Curva analítica correspondiente a la ecuación:  $(x^2 + y^2)^4 - 45(x^2 + y^2)^3 - 41283(x^2 + y^2)^2 + 7950960(x^2 + y^2) + 16(x^2 + y^2) + 16(x^2 - 3y^2)^3 + 48(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)^2 + (x^2 - 3y^2)x(16(x^2 + y^2)^2 - 5544(x^2 + y^2) + 266382) = 720^3$ .

Como en el plano, también existen conjuntos sólidos de ancho constante en dimensiones superiores. En estos casos, se determina el ancho de un cuerpo en una dirección dada eligiendo un par de hiperplanos de apoyo paralelos que sujetan el cuerpo y son ortogonales a esa dirección. Entonces, la distancia entre estos hiperplanos es el ancho en esta dirección. Por lo tanto, un cuerpo de ancho constante es un cuerpo convexo con la propiedad de que su ancho es el mismo en todas las direcciones. Aunque se conocen muchos métodos para construir curvas de ancho constante, no ocurre lo mismo con sus análogos de mayor dimensión.

Gracias a un teorema de Pál, se sabe que todo subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  de diámetro 1 está contenido en un cuerpo de ancho constante [Gruber et al., 1983]. Sallee [Sallee, 1970], y Lachand y Outdet [Lachand-Robert and Oudet, 2007], dieron procedimientos no constructivos para encontrarlos.

Por ejemplo, si quisiéramos hacer una construcción análoga a la del triángulo de Reuleaux con esferas, no resultaría un cuerpo de ancho constante. Es decir, consideremos el tetraedro regular y tomemos la intersección de las esferas unitarias sólidas centradas en cada uno de los vértices, el resultado no es un cuerpo de ancho constante. Sin embargo es posible redondear tres de sus aristas curvas para obtener dos análogos tridimensionales del triángulo de Reuleaux, que son los llamados sólidos de Meissner (ver Figura 6)[Meissner, 1918].

Además de los dos sólidos de Meissner y cuerpos de revolución de ancho constante, de los cuales, un buen ejemplo en  $\mathbb{R}^3$  es el sólido de revolución obtenido del triángulo de Reuleaux haciéndolo girar alrededor de cualquiera de sus ejes de simetría (ver Figura 5), no había ningún ejemplo concreto en la literatura de un cuerpo de ancho constante de dimensión mayor que 2 o un procedimiento finito concreto para construir uno. En [Montejano and Roldán-Pensado, 2017] se describe cómo construir cuerpos tridimensionales de ancho constante con la ayuda de incrustaciones especiales de gráficos auto-duales. Además, dan un procedimiento finito para construir un cuerpo tridimensional de ancho constante a partir de un polígono de Reuleaux de dimensión dos.



Figura 5: Sólido de revolución del triángulo de Reuleaux.



Figura 6: Un solido de Meissner (Biblioteca de la Universidad de Toronto).

En este trabajo, comenzamos exponiendo qué son los polígonos de Reuleaux y su relación con los cuerpos de ancho constante en dos dimensiones. Posteriormente, vemos su generalización a tres dimensiones, cuyas construcciones siguen un razonamiento análogo pero utilizando esferas. Se explica cómo determinan una gráfica simple, plana y 3-conexa, que les da una estructura poliedral, por lo que se denominan poliedros de Reuleaux. Aunque estos poliedros no son cuerpos de ancho constante, pueden ser ligeramente modificados para serlo.

Como primer paso, explicamos el proceso mediante el cual se puede transformar un tetraedro de Reuleaux en un cuerpo de ancho constante conocido como cuerpo de Meissner. A continuación, describimos cómo aplicar este mismo proceso a cualquier poliedro de Reuleaux, esto se hace utilizando el método presentado en el artículo [[Montejano and Roldán-Pensado, 2017](#)].

En ese mismo artículo se da un proceso con el cual se puede obtener un poliedro de Reuleaux (y por lo tanto un cuerpo de ancho constante) a partir de un polígono de Reuleaux. En este método consiste en tomar los vértices de un polígono de Reuleaux de ancho 1 en el plano  $xy$  y colocar una esfera de radio 1 centrado en cada vértice. Esto nos da un poliedro esférico y agregamos los vértices de este politopo que están en el semiespacio superior. En el artículo se muestra que estos vértices son los vértices de

---

un poliedro de Reuleaux.

Basándonos en el trabajo computacional realizado en [\[Montejano et al., 2020\]](#) encontramos todas las gráficas de hasta 9 vértices que se pueden obtener, usando el método descrito anteriormente, a partir de algún polígono de Reuleaux. Se adjuntan las imágenes de las gráficas que se obtienen así como de los cuerpos de ancho constante asociados a éstas. Como consecuencia descubrimos que existen 2 gráficas de 9 vértices que son imposibles de obtener a partir de un polígono de Reuleaux con este método. Incluimos una demostración de este hecho.

# Capítulo 1

## Poliedros de Reuleaux

En este capítulo generalizamos el triángulo de Reuleaux a los polígonos de Reuleaux y posteriormente a los poliedros de Reuleaux. Este es un primer paso para comprender la teoría necesaria para construir cuerpos de ancho constante mediante polígonos de Reuleaux y su relación con las gráficas autoduales.

De aquí en adelante, denotaremos por  $\mathbb{R}^d$  al  $d$ -espacio euclidiano con origen en 0, el producto escalar por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y su norma inducida  $|\cdot|$ .

Además, denotaremos por  $B^d(p, r)$  a la bola  $d$ -dimensional con centro en  $p$  y radio  $r$ . Cuando la dimensión no es esencial, simplemente se denotará como  $B(p, r)$ . Cuando el centro o el radio no importen, se denotarán por  $B(r)$  y  $B(p)$ , respectivamente, o simplemente  $B$ .

De forma similar a lo anterior,  $S^{d-1}(p, r)$  denota la frontera de  $B^d(p, r)$ , y  $S(p, r)$  la frontera de  $B(p, r)$ .  $S(r)$  o  $S(p)$  denota la frontera de  $B(r)$  o  $B(p)$ , respectivamente. Cuando no haya peligro de confusión, denotamos también por  $S^{d-1}$  la esfera unitaria  $(d-1)$ -dimensional  $S^{d-1}(0, 1)$ .

También usamos  $\text{bd } \Phi$  e  $\text{int } \Phi$  para denotar la frontera y el interior, respectivamente, de un conjunto cerrado convexo  $\Phi$ .

### 1.1 Polígonos de Reuleaux

A continuación mostramos la forma en que el triángulo de Reuleaux de ancho 1 se puede generalizar a los polígonos de Reuleaux. Antes de continuar, recordemos que si más de un hiperplano de soporte pasa por un punto límite  $p$  de un cuerpo convexo  $\Phi$ , decimos que  $p$  es un punto *singular* en la frontera de  $\Phi$ . En cambio, si solo un hiperplano de soporte pasa por él, se denomina punto *regular* de la frontera.

Un polígono de Reuleaux es una figura de ancho constante 1 cuya frontera consiste en un número finito (necesariamente impar) de arcos circulares de radio 1. Estos arcos circulares están definidos de manera que los centros de los círculos que los forman también están en la frontera del polígono.

Describimos un método para construir todos los polígonos de Reuleaux. Sea  $P$  un polígono plano convexo de diámetro 1 con un número impar de vértices, es decir, dado el conjunto de vértices  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}\}$ , supongamos que las cuerdas opuestas

## Polígonos de Reuleaux

son diámetros de  $P$ . Es decir, supongamos que para todo  $k = 1, 2, \dots, 2n + 1$  donde los subíndices se toman en módulo  $2n + 1$ , tenemos

$$|x_k - x_{n+k}| = 1 = |x_k - x_{n+k+1}|.$$

Entonces, el polígono esférico  $\phi = \bigcap_1^{2n+1} B(x_k, 1)$  es una figura convexa de ancho constante 1 en la que los vértices del polígono  $P$  coinciden con los puntos singulares de la frontera de  $\phi$ , y esta frontera consiste en la unión de  $2n + 1$  arcos circulares. En efecto, para cada  $k = 1, 2, \dots, 2n + 1$ , el arco circular más corto, centrado en  $x_k$  y entre  $x_{n+k}$  y  $x_{n+k+1}$  (con índices mód  $(2n + 1)$ ), pertenece a la frontera de  $\phi$  (ver Figura 1.1).

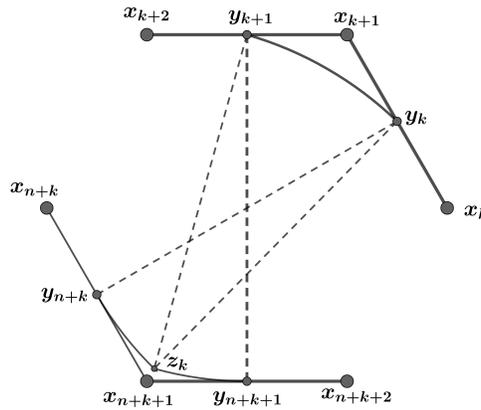


Figura 1.1

**Teorema 1.1.** Si  $\Phi$  es cualquier figura plana de ancho constante 1, entonces se puede construir un polígono de Reuleaux que es, con respecto a la métrica de Hausdorff, arbitrariamente cercano a  $\phi$ .

*Demostración.* Para la demostración se sigue de cerca [Yaglom and Boltyanski, 1960] Consideremos un polígono  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$  con las siguientes propiedades:

- 1) Los lados opuestos  $x_k x_{k+1}$  y  $x_{n+k} x_{n+k+1}$ , son paralelos y están a distancia 1.
- 2) Para cada  $1 \leq k \leq 2n$ , existe un punto  $y_k$  en el lado  $x_k x_{k+1}$  con la propiedad de que  $y_k y_{n+k}$  es ortogonal a  $x_k x_{k+1}$  y  $x_{n+k} x_{n+k+1}$ , y en consecuencia la distancia entre  $y_k$  y  $y_{n+k}$  es 1.

Permitimos la posibilidad de que  $x_k = y_k = x_{k+1}$  y  $x_{2n+1} = x_1$ .

Bajo estas circunstancias, vamos a construir un polígono de Reuleaux que está inscrito en el polígono  $y_1 y_2 \dots y_{2n}$  y circunscrito al polígono  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ . Para ello, se elige un arco de círculo de radio 1 entre  $y_k$  e  $y_{k+1}$  y una curva compuesta por dos arcos de círculo que unen  $y_{n+k}$  y  $y_{n+k+1}$  de tal manera que la nueva curva tenga ancho constante 1 y quede inscrita en el polígono  $y_1 y_2 \dots y_{2n}$ . Encontraremos un punto  $z_k$  cuya distancia a  $y_k$  y  $y_{k+1}$  es igual a 1. Además,  $z_k$  está elegido de tal manera que queda en la envolvente

convexa de los cuatro puntos siguientes:  $\{y_k y_{n+k} \cap y_{k+1} y_{n+k+1}, y_{n+k}, x_{n+k+1}, y_{n+k+1}\}$ . Ahora, para cada  $1 \leq k \leq n$ , dibuja un arco circular de radio 1 alrededor de  $z_k$  que una a  $y_k$  y  $y_{k+1}$ , un arco circular de radio 1 alrededor de  $y_k$  que una  $y_{n+k}$  y  $z_k$ , y un arco circular de radio 1 sobre  $y_k + 1$  que une  $z_k$  y  $y_{n+k+1}$ , véase la Figura 1.1. Es evidente que la nueva curva  $\phi$  así obtenida es una curva de ancho constante 1.

De hecho, si una de las dos líneas de apoyo paralelas  $L$  y  $L'$  de  $\phi$  toca el arco  $y_{n+k} z_k$ , entonces la otra pasa por el vértice  $y_k$ : si  $L$  pasa por  $z_k$ , entonces  $L'$  es tangente al arco circular  $y_k y_{k+1}$ ; si  $L$  toca el arco circular  $z_k y_{n+k+1}$ , entonces  $L'$  pasa por el vértice  $y_{k+1}$ . Por lo tanto  $\phi$  tiene ancho constante 1. Además,  $\phi$  permanece inscrito en el polígono  $y_1 y_2 \dots y_{2n}$  y circunscrito sobre el polígono  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ . Si  $\Phi$  es una figura de ancho constante, elijamos un polígono con vértices  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$  en la frontera de  $\Phi$  y con la propiedad de que la distancia entre los vértices opuestos  $y_k$  y  $y_{n+k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , es 1. Sea  $L_1, L_2, \dots, L_{2n}$  líneas de soporte de  $\Phi$  en  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ , respectivamente, de tal forma que las líneas de apoyo opuestas  $L_k$  y  $L_{n+k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , son paralelas. Por supuesto, debemos permitir la posibilidad de que  $y_k = y_{k+1}$ . Finalmente, sea  $\{x_k\} = L_{k-1} \cap L_k$ .

Primero observamos que,  $\Phi$  está inscrito en el polígono  $y_1 y_2 \dots y_{2n}$  y circunscrito a  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ . Además, por la primera parte de la demostración, es posible construir un polígono de Reuleaux  $\phi$  que también está inscrito en el polígono  $y_1 y_2 \dots y_{2n}$  y circunscrita a  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ . Si, además elegimos el polígono  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$  de tal manera que la distancia entre  $y_k$  y  $y_{k+1}$  ( $1 \leq k \leq 2n$ ),  $y_{2n}$  y  $y_1$ , es menor que  $\varepsilon$ , entonces la distancia de Hausdorff entre  $\Phi$  y  $\phi$  tiende a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. ■

## 1.2 Poliedros Esféricos

Un *poliedro esférico* (o *poliedro bola*) en  $\mathbb{R}^d$  es la intersección de un número finito, pero al menos  $d$ , de esferas de radio 1. supongamos primero que  $\Phi$  es tridimensional, para evitar trivialidad  $\Phi$  tiene interior no vacío y cualquier subconjunto propio  $X' \subseteq X$ ,  $\Phi \neq \bigcap_{x \in X'} B(x, 1)$ . La última condición se pide para evitar que  $X$  contenga puntos que no aporten nueva información sobre  $\Phi$ .

Lo que deseamos es describir la frontera de  $\Phi$ . Los puntos de la frontera de  $\Phi$  pueden clasificarse como singulares o regulares. Los puntos singulares se dividen en dos conjuntos: el conjunto de puntos 0-singulares y el conjunto de puntos 1-singulares. A continuación se detallan estas clasificaciones:

- Puntos 0-singulares: son aquellos puntos  $y \in \text{bd } \Phi$  que cumplen las siguientes condiciones:
  - $X \subseteq B(y, 1)$ .
  - Existen puntos  $x_1, x_2, x_3 \in X$  tales que los vectores  $x_1 - y, x_2 - y, x_3 - y$  son linealmente independientes. Estos puntos son los vértices de  $\Phi$ .
- Puntos 1-singulares: forman el conjunto de puntos  $y \in \mathbb{R}^d$  que cumplen las siguientes condiciones:
  - $X \subseteq B(y, 1)$ .

- $S(y, 1) \cap X$  contiene al menos dos puntos y está completamente contenido en algún círculo máximo de  $S(y, 1)$ . Estos puntos son las aristas de  $\Phi$ .

Por último, tenemos el conjunto de puntos regulares de la frontera de  $\Phi$ . Estos son aquellos puntos  $y \in \text{bd } \Phi$  que se caracterizan por cumplir las siguientes condiciones:

- $X \subseteq B(y, 1)$ .
- $|S(y, 1) \cap X| = 1$ . Estos puntos conforman las caras de  $\Phi$ .

En consecuencia, el conjunto de puntos singulares de la frontera de  $\Phi$ ,  $S(\Phi)$ , consiste en un encaje de una gráfica  $G_\Phi$  cuyos vértices  $V(\Phi)$  son los puntos 0-singulares de  $\text{bd } \Phi$  y cuyas aristas corresponden a subarcos de circunferencias que unen cada uno de los puntos en  $V(\Phi)$ . Dados dos vértices adyacentes  $a, b \in V(\Phi)$ , denotamos por  $\widetilde{ab}$  al subarco de círculo que une a  $a$  con  $b$ . El complemento de  $S(\Phi)$  en la frontera de  $\Phi$  consiste en los puntos regulares de  $\Phi$ , cuyas componentes son subconjuntos abiertos convexos esféricos de una esfera de radio 1. De esta forma, una cara de  $\Phi$  se define como  $S(x, 1) \cap \Phi$ , donde  $x \in X$ .

Un poliedro esférico tridimensional  $\Phi$  es *estándar* si la intersección de dos caras es vacía, un vértice de  $G_\Phi$  o una sola arista de  $G_\Phi$ . De hecho, se puede demostrar lo siguiente

**Teorema 1.2.** [*Kupitz et al., 2010*] *La gráfica  $G_\Phi$  de un poliedro esférico tridimensional estándar es simple, plana y 3-conexa.*

Recordemos la fórmula de Euler-Poincaré  $v - e + f = 2$  para cualquier poliedro esférico tridimensional con  $v$  vértices,  $e$  aristas y  $f$  caras. Ahora sea  $\Phi \subseteq \mathbb{R}^d$  un poliedro esférico. Suponiendo que  $\Phi = \bigcap_{x \in X} B(x, 1)$ , pero para cualquier subconjunto propio  $X' \subseteq X$ ,  $\Phi \neq \bigcap_{x \in X'} B(x, 1)$ . Una *esfera de soporte*  $S^l$  es una esfera de dimensión  $l$ , donde  $0 \leq l \leq d-1$ , que se puede obtener como la intersección de algunas de las esferas en  $S(x, 1)_{x \in X}$ . Diremos que un poliedro esférico  $d$ -dimensional  $\Phi$  es *estándar* si para cualquier esfera de soporte  $S^l$ , la intersección  $\Phi \cap S^l$  es esféricamente convexa en  $S^l$ . Si esto es así, llamamos  $\sigma$  a una *cara* de  $\Phi$  si  $\sigma = \Phi \cap S^l$ , para alguna esfera de soporte  $S^l$  de  $\Phi$ , donde la dimensión de  $\sigma$  es  $l$ . En [*Bezdek et al., 2007*], se probó el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.** *Sea  $\Phi \subseteq \mathbb{R}^d$  un poliedro esférico estándar. Entonces, las caras de  $\Phi$  forman las celdas de una descomposición finita CW de la frontera de  $\Phi$ . Además, tenemos la siguiente fórmula de Euler-Poincaré [*Hliněný, 2021*]:*

$$1 + (-1)^{d+1} = \sum_{i=0}^d (-1)^i f_i(\Phi),$$

donde  $f_i(\Phi)$  denota el número de caras de dimensión  $i$  de  $\Phi$ .

## 1.3 Poliedros de Reuleaux

De acuerdo con Sallee [Sallee, 1970], un *Poliedro de Reuleaux* es un cuerpo convexo  $\Phi \subseteq \mathbb{R}^d$  que satisface las siguientes propiedades:

- Hay un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $\Phi = \bigcap_{x \in X} B(x, 1)$ .
- $\Phi$  es un poliedro esférico estándar.
- El conjunto  $V(\Phi)$  de puntos singulares de dimensión 0 en  $\text{bd } \Phi$  es exactamente  $X$ .

En dimensión 2, un poliedro de Reuleaux es precisamente un polígono de Reuleaux. Sin embargo, en dimensiones superiores, excepto por el de dimensión 2, los poliedros de Reuleaux no son cuerpos de ancho constante. Hay muchos poliedros de Reuleaux pero estos no están caracterizados, ni ellos ni las gráficas que generan. Se conocen varias familias infinitas y más adelante construiremos varios de ellos. El ejemplo más sencillo de un poliedro de Reuleaux es el tetraedro de Reuleaux, que es el análogo tridimensional del triángulo de Reuleaux.

El tetraedro de Reuleaux tiene como gráfica autodual a la gráfica completa  $K_4$ . Este tetraedro será fundamental para construir ejemplos de cuerpos tridimensionales de ancho constante. A continuación, describimos su construcción.

## 1.4 El Tetraedro de Reuleaux

Comenzamos con un tetraedro regular con lados de longitud 1 en  $\mathbb{R}^3$ . Como en el caso del triángulo de Reuleaux, tomamos las cuatro bolas de radio 1 con centros en los vértices del tetraedro. La intersección de estas cuatro bolas se conoce como el *tetraedro de Reuleaux* y se denota por  $T$ .

El tetraedro  $T$  de Reuleaux es un cuerpo estrictamente convexo cuya frontera tiene la misma estructura de caras que un tetraedro regular, pero con caras y aristas curvas. Tiene cuatro “triángulos esféricos” que se cruzan en seis arcos circulares, donde el centro de cada porción esférica está en el vértice opuesto del tetraedro y el centro de cada arco circular está en el punto medio de lados opuestos del tetraedro (ver Figura 1.2). De manera más formal, sea  $a, b, c, d$  cuatro puntos equidistantes en  $\mathbb{R}^3$  cuya distancia por pares es 1, y consideremos su envolvente convexa, que es un tetraedro  $abcd$ . Sean  $B(a), B(b), B(c)$  y  $B(d)$  las bolas de radio 1 con centro en  $a, b, c$  y  $d$ , respectivamente, y sus fronteras son las esferas  $S(a), S(b), S(c)$  y  $S(d)$ . Por lo tanto, el tetraedro  $T$  de Reuleaux se define como

$$T = B(a) \cap B(b) \cap B(c) \cap B(d).$$

El primer propósito es describir la frontera de  $T$ . Notemos que  $S(a) \cap S(b)$  es el círculo de radio  $\sqrt{3}/2$  con centro en  $\frac{a+b}{2}$  y contenido en el plano ortogonal al lado  $ab$ . Claramente,  $c$  y  $d$ , los otros dos vértices del tetraedro, se encuentran en este círculo; por lo tanto, denotamos por  $\widehat{cd}$  al arco más corto de este círculo entre  $c$  y  $d$  (ver Figura 1.3

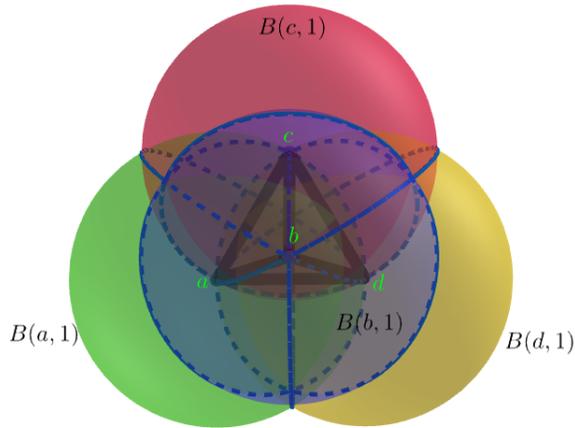


Figura 1.2: Tetraedro de Reuleaux  $T$ .

la cual fue extraída del libro [Martini et al., 2019]). De forma análoga, obtenemos seis arcos de círculo, cada uno por cada lado del tetraedro  $abcd$ , y todos ellos contenidos en la frontera de  $T$ . La unión de estos seis arcos de círculo,  $\widetilde{ab} \cup \widetilde{ac} \cup \widetilde{ad} \cup \widetilde{bc} \cup \widetilde{bd} \cup \widetilde{cd}$ , consiste de los puntos singulares de la frontera de  $T$ . Además de estos puntos singulares y los vértices  $a, b, c, d$ , todos los demás puntos de la frontera de  $T$  son puntos regulares y se encuentran en cuatro triángulos esféricos delimitados, cada uno de ellos, por tres de estos arcos circulares. Cada uno de estos cuatro triángulos esféricos  $\widetilde{S}(a), \widetilde{S}(b), \widetilde{S}(c)$  y  $\widetilde{S}(d)$  está contenido en  $S(a), S(b), S(c)$  y  $S(d)$ , respectivamente.

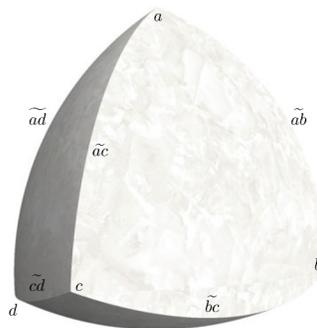


Figura 1.3

Sea  $H$  el plano que pasa por la cara  $abc$  del tetraedro. Entonces  $H \cap T$  es un triángulo de Reuleaux. Denotemos por  $(\widetilde{bc})_a \subseteq H \cap \widetilde{S}(a)$  el arco circular de radio 1 entre  $b$  y  $c$  con centro en  $a$ , que forma parte de la frontera del triángulo de Reuleaux  $H \cap T$ . Similarmente, podemos definir los otros doce arcos circulares, con los otros tres planos a través de las caras correspondientes del tetraedro  $abcd$ . Denotemos por  $\Sigma(bc)$  la región

de la frontera de  $T$  entre el arco circular  $(\widetilde{bc})_a$  y el arco circular  $(\widetilde{bc})_d$ , observemos que  $\widetilde{bc}$  se encuentra precisamente en medio de esta región. Las otras seis regiones se definen de manera análoga. Nuestro siguiente propósito es describir las cuerdas normales en cada punto de la frontera de  $T$  y determinar cuáles de ellas son binormales. Comenzamos considerando un vértice de  $T$ , digamos  $a$ , y observamos que las normales de  $T$  en  $a$  son precisamente las líneas a través de  $a$  y cualquier punto de la cara  $bcd$ . Para ver esto, consideremos los planos a través de  $a$  ortogonales a  $ab$ ,  $ac$  y  $ad$ , y los tres subespacios determinados por ellos que contienen a  $T$ . La intersección de estos subespacios es un cono tangente de  $T$  con el vértice  $a$  y las líneas normales en  $a$  son precisamente las líneas a través de  $a$  y cualquier punto de la cara  $bcd$ . Observemos el comportamiento de un punto regular  $r$  de  $T$ . Este punto  $r$  se encuentra en uno de estos triángulos esféricos. Supongamos, por ejemplo,  $r \in \widetilde{S}_a := S(a) \cap T$ , la superficie limitada por  $\widetilde{bc}$ ,  $\widetilde{cd}$  y  $\widetilde{db}$ .

En consecuencia, la cuerda normal de  $T$  en  $r$  es la única cuerda  $J_{ra} = ra$ . Si además la cuerda  $J_{ra}$  pasa por un punto de la cara  $bcd$  del tetraedro, esta cuerda se convierte en binormal. En contraste, si  $J_{ra}$  no corta la cara  $bcd$ , entonces la cuerda  $J_{ra}$  es normal en  $r$ , pero no en  $a$ , y por lo tanto no es binormal. De hecho, la correspondiente cuerda diametral de  $T$ , teniendo un extremo en el punto regular  $r$ , tiene el otro extremo en uno de los arcos de círculo de puntos singulares que llegan a  $a$ . Finalmente, si asumimos que  $p$  es un punto del arco circular, digamos  $\widetilde{cd}$ , a diferencia de  $c$  y  $d$ , una cuerda normal de  $T$  en  $p$  es cualquier línea que pasa por  $p$  y algún punto  $x \in ab$ . Por lo tanto, hay tantas líneas normales como puntos  $x$  en  $ab$ .

Ahora, notemos que excepto en el caso de la cuerda que pasa por el punto medio del arco  $\widetilde{cd}$  y el punto medio del arco  $\widetilde{ab}$ , las normales correspondientes no son binormales. Si  $L$  es la recta que pasa por  $\frac{a+b}{2}$  y  $\frac{c+d}{2}$ , entonces  $L \cap T$  es una binormal de longitud  $(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2})$ , que es aproximadamente  $1.02 > 1$ . Entonces tenemos tres de estos binormales, cada uno de longitud  $(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Si llamamos anormal a un punto  $q$  en la frontera de  $T$  cuando la cuerda normal en  $q$  no es binormal de longitud 1, de la discusión previa podemos concluir que todo punto en el interior de las superficies  $\Sigma(ab)$ ,  $\Sigma(ac)$ ,  $\sigma(ad)$ ,  $\Sigma(bc)$ ,  $\Sigma(bd)$ , y  $\Sigma(cd)$  es anormal, ver los parches rojos en la Figura 1.4, la cual fue tomada del libro [Martini et al., 2019]. Sabemos que los diámetros y las cuerdas de espesor de un cuerpo convexo son binormales. Así, nuestra discusión previa prueba que el diámetro de  $T$  es  $(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2})$  y el grosor es 1. No es muy difícil calcular el área superficial de  $T$ . De hecho, Weisstein [Weisstein, 2000] utilizó la fórmula de Gauss-Bonnet [Hliněný, 2021] para obtener los valores:

$$S(T) = 8\pi - 18 \cos^{-1}(1/3) = 2.975471\dots,$$

y para el volumen:

$$V(T) = \frac{1}{12} (3\sqrt{2} - 49\pi + 162 \tan^{-1}(\sqrt{2})).$$

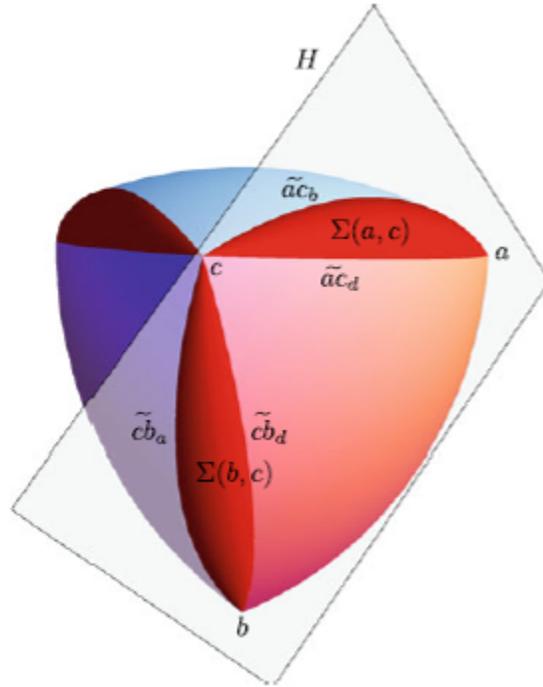


Figura 1.4

## 1.5 Relación entre los poliedros de Reuleaux y las gráficas autoduales

**Teorema 1.4.** *Sea  $\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$  un poliedro de Reuleaux. Entonces,  $G_\Phi$  es una gráfica autodual, donde el automorfismo  $\tau$  está dado por:  $\tau(x) = S(x) \cap \Phi$ , para todo  $x \in X$ . Además,  $\tau$  es una involución, es decir, un vértice  $x$  pertenece a la celda  $\tau(y)$  si y solo si el vértice  $y$  pertenece a la celda  $\tau(x)$ .*

*Demostración.* Sea  $\Phi = \bigcap_{x \in X} B(x)$  y supongamos que  $X$  es el conjunto de puntos 0-singulares de  $\Phi$ . Tomemos  $x, y \in X$ , las caras duales correspondientes son  $\tau(x) = S(x) \cap \Phi$  y  $\tau(y) = S(y) \cap \Phi$ . Supongamos primero que las caras  $\tau(x)$  y  $\tau(y)$  se cortan en el borde  $\widetilde{ab}$  de  $G_\Phi$ , donde  $a, b \in X$  y  $\widetilde{ab}$  es el arco más corto que une a  $x$  con  $y$  en el círculo  $S(x) \cap S(y)$ . Esto implica que  $d(x, a) = d(x, b) = d(y, a) = d(y, b) = 1$  y, por lo tanto, que  $x$  e  $y$  son dos vértices de la cara dual  $\tau(a) \cap \tau(b)$ . Dado que  $\Phi$  es un poliedro esférico estándar, entonces  $x, y$  es una arista de  $G_\Phi$ . La demostración del caso contrario es completamente análoga. Además, si el vértice  $x$  pertenece a la cara dual  $\tau(y) = S(y) \cap \Phi$ , entonces  $d(x, y) = 1$  y, por lo tanto, el vértice  $y$  pertenece a la cara dual  $\tau(x) = S(x) \cap \Phi$ . ■

Algo que debemos tener presente sobre el encaje de la gráfica  $G_\Phi$  en  $\mathbb{R}^3$  es que para todo par de puntos  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) \leq 1$  y  $d(x, y) = 1$  si y solo si  $x$  está en la cara dual de  $y$ .

Una gráfica plana 3-conexa  $G$  que admite un automorfismo  $\tau$  que es una involución ( $x \notin \tau(x)$  y  $x \in \tau(y)$  si y sólo si  $y \in \tau(x)$ ) se llama *gráfica autodual involutiva*. Un

*encaje métrico* de una gráfica  $G$  autodual involutiva en  $\mathbb{R}^3$  es un encaje de los vértices  $X$  de  $G$  en  $\mathbb{R}^3$ , es una gráfica geométrica de tal manera que cumple que para todo par de puntos  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) \leq 1$  y  $d(x, y) = 1$  si y sólo si  $x$  está en la cara dual de  $y$ . Algunos ejemplos de encajes métricos de gráficas autoduales son  $K_4$  con los vértices del tetraedro equilátero y los siguientes dos ejemplos concretos en la Figura 1.5.

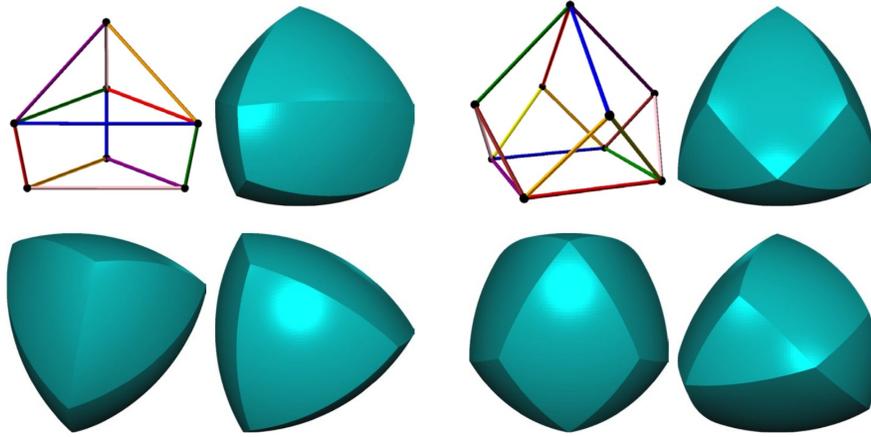


Figura 1.5

Caracterizar cuándo una gráfica autodual involutiva admite un encaje métrico es un problema interesante, por ejemplo. El poliedro construido por Lovász en [Lovász, 1983], en relación con el problema de la distancia, tiene la siguiente propiedad.

**Teorema 1.5.** *Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  los vértices de un encaje métrico de la gráfica autodual involutiva  $G$ . Entonces  $\bigcap_{x \in X} B(x)$  es un poliedro de Reuleaux. Además, la estructura poliédrica de las caras de  $\bigcap_{x \in X} B(x)$  es isomorfa a la estructura poliédrica (puntos, aristas, caras) de la gráfica plana  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $\Phi = \bigcap_{x \in X} B(x)$ . Será suficiente demostrar que los vértices de la frontera de  $\Phi$  coinciden con  $X$ . En este caso, ambas son isomorfas porque, para cada punto en  $X$ , la cara dual (como conjunto de puntos) de la estructura de caras de la frontera de  $\Phi$  y la cara dual del politopo abstracto determinado por la gráfica plana  $G$  coinciden.

Con ese propósito, primero demostraremos que el conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  admite  $2n - 2$  diámetros, donde  $|V| = n$ . Comenzamos demostrando que para cada  $x \in X$ ,  $\deg(x, G) = \deg(x, D(X))$ , donde  $D(X)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto  $X$  y cuyas aristas son pares  $x, y \subseteq X$  tales que el segmento  $xy$  es un diámetro de  $X$ . En efecto, el grado de  $x$  es igual al número de caras de  $G$  que contienen a  $x$  y, dado que  $G$  es una gráfica autodual involutiva, este número es igual al número de vértices de la cara dual de  $x$ , que es el grado de  $x$  en  $D(V)$ . Esto demuestra que el número de aristas de  $G$  y  $D(V)$  coinciden y, dado que  $G$  es una gráfica autodual con  $2n - 2$  aristas, la fórmula de Euler establece que  $D(V)$  tiene  $2n - 2$  aristas.

## Relación entre los poliedros de Reuleaux y las gráficas autoduales

---

Por el Teorema de Grünbaum–Heppes–Straszewicz ver [[Kupitz et al., 2010](#)], dado que cada vértice de  $X$  tiene grado mayor que dos, los vértices de la frontera de  $\Phi$  coinciden con  $X$ . ■

Más adelante, construiremos varias familias infinitas de politopos de Reuleaux en  $\mathbb{R}^3$ .

## Capítulo 2

# Cuerpos de Meissner

El primer cuerpo tridimensional no esférico de ancho constante se puede generar girando el triángulo de Reuleaux alrededor de uno de sus ejes de simetría Figura 2.1.

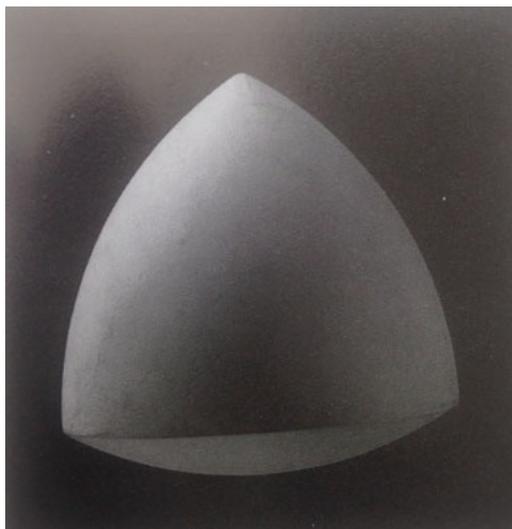


Figura 2.1: Rotación del triángulo de Reuleaux.

En 1911, este cuerpo de revolución apareció por primera vez en un catálogo de modelos matemáticos elaborado por Martin Schilling [Schilling, 1911]. También mostró el primer cuerpo no rotacional de ancho constante definido por Ernst Meissner.

Al igual que en el caso del triángulo de Reuleaux, el tetraedro de Reuleaux es la intersección de cuatro bolas centradas en los vértices de un tetraedro regular. Sin embargo, en esta ocasión, el cuerpo convexo obtenido no tiene un ancho constante. Meissner y Schilling [Meissner and Schilling, 1912] mostraron cómo modificar el tetraedro de Reuleaux para obtener un cuerpo convexo de ancho constante. Reemplazaron tres de sus arcos de borde por parches curvos formados como la superficie de rotación de un arco circular, como se puede apreciar en la Figura 2.2.

Los dos sólidos clásicos de Meissner se pueden construir realizando modificaciones en una de las aristas de cada par de aristas duales del tetraedro de Reuleaux. Este procedimiento fue descrito en el libro de [Yaglom and Boltyanskii, 1961]. El propósito

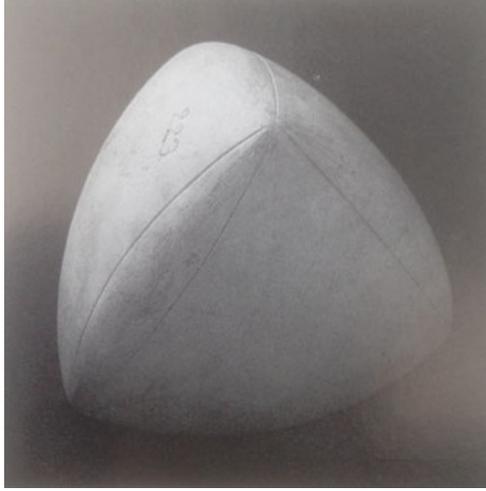


Figura 2.2: Modelo de yeso de Schilling de un sólido de Meissner (Biblioteca de la Universidad de Toronto).

de este capítulo es generalizar este procedimiento para cualquier poliedro de Reuleaux en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $G_\Phi \subseteq \text{bd } \Phi$  el encaje métrico de la gráfica autodual involutiva  $G_\Phi$  que tiene los puntos singulares del poliedro de Reuleaux  $\Phi = \bigcap_{x \in X} B(x)$ , donde  $X$  es el conjunto de vértices  $V(G_\Phi)$ .

Centremos nuestra atención en una arista  $\widetilde{xy} \in E(G_\Phi)$ . Entonces, hay una arista dual  $\widetilde{ab} \in E(G_\Phi)$  con las siguientes propiedades:

- $d(x, a) = d(x, b) = d(y, a) = d(y, b) = 1$ .
- La arista  $\widetilde{xy}$  está contenida en  $S(a) \cap S(b)$ , es decir,  $\widetilde{xy}$  es el arco del círculo con centro en  $\frac{a+b}{2}$ , entre  $x$  y  $y$ , y está contenido en el plano ortogonal al segmento  $\overline{ab}$ .
- De manera similar, la arista  $\widetilde{ab}$  está contenida en  $S(x) \cap S(y)$ , es decir,  $\widetilde{ab}$  es el arco del círculo con centro en  $\frac{x+y}{2}$ , entre  $a$  y  $b$  contenido en el plano ortogonal al segmento  $\overline{xy}$ .

Denotemos por  $\tau(x)$  la cara dual del vértice  $x \in \Phi$ , es decir,

$$\tau(x) = S(x) \cap \Phi.$$

De acuerdo al Lema 1.1 (2) en [Bezdek and Naszódi, 2006],  $\tau(x)$  es un subconjunto cerrado esférico convexo de la esfera  $S(x)$ . Como es un subconjunto de la frontera de  $\Phi$ , la cara  $\tau(x)$  del poliedro esférico  $\Phi$  está limitada por una cantidad finita de arcos de círculos, cada uno de los cuales es una arista de  $G_\Phi$ . Una de estas aristas es  $\widetilde{ab}$ . Ahora seguimos de cerca el procedimiento mencionado, en el que realizamos una serie de cambios en uno de los bordes del tetraedro de Reuleaux. Para ello, primero introducimos algunos resultados necesarios.

## 2.1 El teorema de Meissner y Pál

Decimos que un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^d$  es *completo* (o *diametralmente completo*) si, añadiéndole cualquier punto, aumenta su diámetro. Si tomamos el conjunto parcialmente ordenado  $\Omega$  de todos los conjuntos compactos de diámetro 1 en un espacio euclidiano de  $d$  dimensiones ordenados por inclusión, los cuerpos completos son precisamente los elementos máximos de  $\Omega$ . Es decir, un conjunto compacto  $A$  en  $\Omega$  es un elemento máximo de  $\Omega$ , o un cuerpo completo, si  $A$  es igual a  $B$  siempre que  $A$  esté contenido en  $B$ , para  $B$  en  $\Omega$ .

Sean  $p$  y  $q$  dos puntos en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^d$ , separados por no más de 2. El intervalo determinado por este par de puntos es la intersección de todas las bolas de radio 1 que contienen a  $p$  y  $q$ . Decimos que un conjunto  $\phi$ , con diámetro menor o igual a 2, es *spindle convexo* si, dados dos puntos  $p$  y  $q$  en  $\phi$ , el intervalo que determinan también está en  $\phi$ . Los dos resultados principales de este capítulo son que los cuerpos completos son precisamente cuerpos de ancho constante 1, y que todo elemento de  $\Omega$  está contenido en un cuerpo máximo; es decir, que se pueda completar hasta un cuerpo de ancho constante. Estos resultados se conocen como los teoremas de Meissner y Pál, respectivamente. El siguiente lema establece que todo cuerpo de ancho constante 1 es un cuerpo completo lo que implica todo lo necesario para nuestro trabajo.

**Lema 2.1.** *Sea  $\Phi$  un cuerpo de ancho constante 1 y supongamos que  $\Phi$  está contenido en un conjunto compacto  $\phi$  con diámetro 1. Entonces  $\Phi$  es igual a  $\phi$ .*

*Demostración.* Sea  $p$  cualquier punto de  $\phi \setminus \Phi$ . Dado que el diámetro de  $\phi$  es 1, la bola  $B(p)$  con centro en  $p$  y radio 1 contiene  $\phi$  y, por lo tanto, también  $\Phi$ . Consideremos el hiperplano  $H$  a través de  $p$  que no interseca a  $\Phi$ , junto con el hiperplano  $H'$  tangente a  $B(p)$  y paralelo a  $H$ . Es claro que  $\Phi$  está contenida adecuadamente en la franja entre  $H$  y  $H'$ , lo cual es una contradicción porque la distancia entre  $H$  y  $H'$  es precisamente 1. ■

Demostraremos que si  $\phi$  es un conjunto compacto de diámetro 1 que no es de ancho constante, entonces  $\phi$  está adecuadamente contenido en un cuerpo  $\Phi$  de ancho constante 1, demostrando así que todo cuerpo completo es un cuerpo de ancho constante.

**Teorema 2.2** (Teorema de Meissner). *Los cuerpos máximos de  $\Omega$ , o cuerpos completos, son precisamente los cuerpos de ancho constante 1.*

*Demostración.* Dado que cada conjunto de ancho constante 1 es un cuerpo completo, basta con demostrar que cada conjunto compacto  $\phi$  de diámetro 1 que no tiene ancho constante está adecuadamente contenido en un conjunto compacto de diámetro 1.

Si  $\phi$  no es spindle convexo, entonces, según el Lema 6.1.3 de [Martini et al., 2019],  $\phi$  está adecuadamente contenido en su envolvente spindle convexa, que tiene un diámetro de 1. Supongamos ahora que  $\phi$  es un cuerpo spindle convexo. Dado que  $\phi$  no tiene ancho constante 1, existen hiperplanos de soporte paralelos de  $\phi$ ,  $H$  y  $H'$ , con la propiedad de que la distancia entre ellos es menor que 1. Según el Lema 6.1.1 de [Martini et al., 2019], existe una esfera de soporte 1 de  $\phi$  tangente a  $H$ , cuyo centro  $q$  está estrictamente separado de  $\phi$  por  $H'$ . La envolvente spindle convexa  $\Phi$  del conjunto compacto formado

## Modificación del tetraedro de Reuleaux

---

por la unión del punto  $q$  y el conjunto  $\phi$  es un cuerpo spindle convexo que contiene adecuadamente a  $\phi$  y cuyo diámetro, según el Lema 6.1.3 de [Martini et al., 2019], es 1, dado que la distancia entre  $q$  y cada punto de  $\phi$  es menor o igual a 1. ■

El Teorema de Pál, al igual que el Teorema de Meissner, es considerado como un teorema clásico.

**Teorema 2.3** (Teorema de Pál). *Si  $\Phi$  es un cuerpo de diámetro 1, entonces existe un cuerpo de ancho constante 1 que contiene a  $\Phi$ .*

*Demostración.* En la demostración del Teorema de Meissner, mostramos que si  $\phi$  es un cuerpo de diámetro 1 y  $v$  es cualquier vector unitario en  $S^{n-1}$ , entonces existe un cuerpo  $\phi'$  de diámetro 1 que contiene a  $\phi$  y tiene la propiedad de que el ancho de  $\phi'$  en la dirección  $v$  es 1. Sean  $v_i, i = 1, \dots, \infty$ , una colección densa de vectores unitarios en  $S^{n-1}$ . Por lo tanto, existe una secuencia anidada de cuerpos convexos  $\phi = \phi_0 \subseteq \phi_1 \subseteq \dots \subseteq \phi_i \subseteq \dots$  de diámetro 1, con la propiedad de que el ancho de  $\phi_i$  en la dirección  $v_i$  es  $h$ . Sea  $\Phi$  la clausura de  $\bigcup \phi_i$ ; es decir,  $\Phi$  es  $\bigcup \phi_i$  más sus puntos de frontera. Es fácil ver que el diámetro de  $\Phi$  es 1, ya que el diámetro de  $\bigcup \phi_i$  también es 1. Además, como  $\phi_i$  está contenido en  $\Phi$ , el ancho de  $\Phi$  en la dirección  $v_i$  es 1 para cada  $i$ . Dado que la colección de vectores unitarios  $v_i$  es densa en  $S^{n-1}$  y la función de ancho es continua, el ancho de  $\phi$  en todas las direcciones es 1. ■

## 2.2 Modificación del tetraedro de Reuleaux

Como hemos mencionado,  $T$  no es un cuerpo de ancho constante. Por lo tanto, procederemos a realizar una serie de recortes en  $T$  para eliminar los puntos anormales.

Denotaremos por  $W(b, c)$  a la cuña a lo largo del segmento  $bc$ , es decir, la superficie de revolución con eje en  $bc$  entre el arco circular  $\widetilde{bc}_a$  y el arco circular  $\widetilde{bc}_d$ . Así, la cuña  $W(b, c)$  es la unión de todos los arcos circulares de radio 1 entre  $b$  y  $c$ , con centros en los puntos  $e$  del arco circular  $\widetilde{ad}$  (ver la Figura 2.3, tomada de [Martini et al., 2019]).

Modificaremos la frontera de  $T$ , reemplazando  $\Sigma(bc)$  por la cuña  $W(b, c)$  la envolvente convexa de la superficie obtenida por este cambio se denota por  $T_{bc}$ . En consecuencia, decimos que obtenemos  $T_{bc}$  por operar a  $T$  a lo largo de  $\Sigma(bc)$ . Note que  $T_{bc}$  es un cuerpo convexo contenido en  $T$ . Analicemos  $T_{bc}$  bajo los siguientes aspectos:

- 1) Detectar los puntos singulares de la frontera de  $T_{bc}$ .
- 2) Describir para todo punto  $p$  de la frontera de  $T_{bc}$  sus cuerdas normales.
- 3) Caracterizar la región en la que encuentran los puntos anormales de la frontera de  $T_{bc}$ .

Para realizar el punto 1). Siendo parte de una superficie de revolución, los puntos en el interior de  $W(b, c)$  son puntos regulares de  $T_{bc}$ . Además la cuña  $W(b, c)$  encaja tan bien con  $\text{bd}T \setminus \int \Sigma(bc)$  que los puntos de los arcos circulares  $\widetilde{bc}_a$  y  $\widetilde{bc}_d$  son puntos

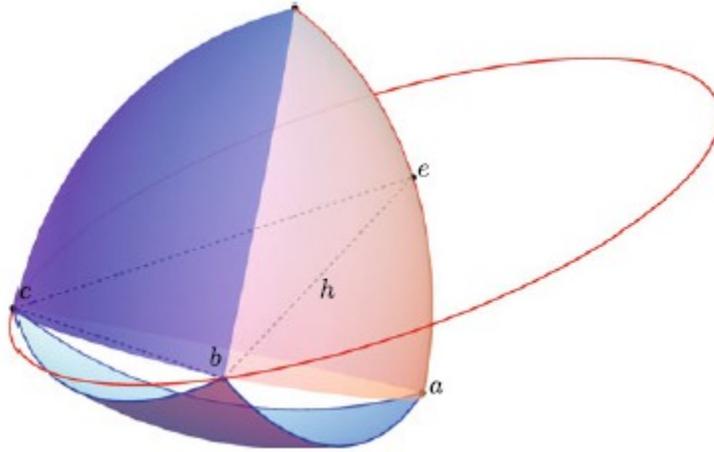


Figura 2.3

regulares de  $T_{bc}$ . Por lo tanto, la frontera de  $T_{bc}$  tiene solo cuatro puntos  $a, b, c, d$  en la frontera, y cinco arcos circulares de puntos singulares.

Para el punto 2). Si  $e$  es un punto del arco circular  $\widetilde{ad}$ , entonces las cuerdas normales de  $T_{bc}$  son binormales de longitud 1 porque los segundos puntos extremos de estas binormales describen el arco circular de radio 1 entre  $b$  y  $c$  con centro en  $e$ . Por lo tanto  $e$  ya no es un punto anormal de  $T_{bc}$ . Al mismo tiempo, si  $p$  es un punto de la cuña  $W(b, c)$ , entonces la cuerda normal de  $T_{bc}$  en  $p$  es una binormal  $pe$  de longitud 1, donde  $e$  es un punto en el arco circular  $\widetilde{ad}$ . Entonces, de nuevo, en este caso  $p$  no es un punto anormal de  $T_{bc}$ . Ahora, estudiaremos las cuerdas normales en los puntos de vértices de  $T_{bc}$ . Las cuerdas normales de  $T_{bc}$  en  $a$  son las intersecciones con  $T_{bc}$  de una línea que pasa por  $a$  y cualquier punto de la cara  $bcd$ . La situación análoga la tenemos con las cuerdas normales de  $T_{bc}$  en  $d$ . Sin embargo la situación no es la misma en los puntos de los vértices  $c$  y  $b$ . Consideremos un punto  $e \in \widetilde{da}$  y el plano  $H$  ortogonal a  $be$  en  $b$ . Como  $H$  es un plano de apoyo del cuerpo de revolución del arco circular  $\widetilde{bc}_a$  a lo largo del eje  $bc$ , entonces  $H$  es también un plano de apoyo de  $T_{bc}$  en  $b$ . Esto implica que la cuerda  $bx$  es una cuerda normal de  $T_{bc}$  en  $b$  si y sólo si  $x$  se encuentra en la región triangular esférica de  $S_b$  delimitada por los arcos circulares  $\widetilde{da}$ ,  $\widetilde{ac}_b$ , y  $\widetilde{cd}_b$ . Por lo tanto, los puntos regulares de  $T_{bc}$  contenida en la región triangular esférica de  $S_b$  delimitada por los arcos circulares  $\widetilde{da}$ ,  $\widetilde{ac}_b$ , y  $\widetilde{cd}_b$  no son puntos anormales de  $T_{bc}$ .

Para el 3). Como vimos antes, los puntos anormales de  $T_{bc}$  en el interior de la siguiente región:  $\Sigma(ab) \cup \Sigma(bd) \cup \Sigma(dc) \cup \Sigma(ca)$ . La siguiente Figura 2.4 del libro clásico “Convex Figures” de Yaglom y Boltyanski (ver [Yaglom and Boltyanski, 1951]) muestra el procedimiento.

## 2.3 Modificación de los poliedros de Reuleaux

En [Montejano and Roldán-Pensado, 2017] se construyen ejemplos concretos de cuerpos de ancho constante en la dimensión tres. Estos cuerpos se construyen a partir de

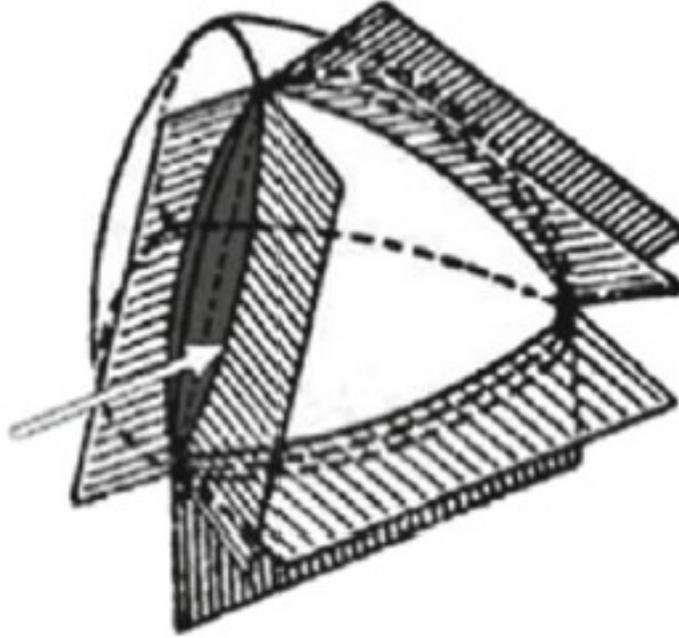


Figura 2.4

algunas incrustaciones especiales de gráficas autoduales, introducidas en este artículo. También se proporciona un procedimiento finito para construir un cuerpo tridimensional de ancho constante a partir de un polígono de Reuleaux en dimensión 2. A continuación, mostramos algunos de sus resultados.

**Teorema 2.4.** *Sea  $\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$  un poliedro de Reuleaux. La superficie  $\Sigma(\Phi)$  obtenida a partir de la frontera de  $\Phi$  al realizar modificaciones (como las realizadas en el tetraedro de Reuleaux en la sección anterior) en una arista de cada par de aristas duales de la gráfica autodual  $G_\Phi$  es la frontera de un cuerpo de ancho constante.*

*Demostración.* La demostración consiste en dos pasos. En el primer paso, demostramos que para cada punto  $p$  en la superficie  $\Sigma(P)$ , hay un punto  $q$  en la superficie  $\Sigma(P)$  tal que  $|p - q| = 1$ . En el segundo paso, demostramos que el diámetro de la superficie  $\Sigma(P)$  es igual a 1. Si esto es así, entonces por el Teorema de Pál 2.1, hay un cuerpo de ancho constante que contiene la superficie  $\Sigma(P)$  que, por supuesto, tiene  $\Sigma(P)$  como su frontera. Para la primera parte de la prueba, observe que un punto  $p$  en la superficie  $\Sigma(P)$  pertenece a una cara  $\tau(x)$ , para algún vértice  $x$  de  $G_P$ , o pertenece a una cuña  $W(x, y)$  para algún borde  $\widetilde{xy}$  de  $G_P$ . En el primer caso,  $|p - x| = 1$ , y en el segundo caso,  $|p - q| = 1$  para algún punto  $q$  en la doble arista  $\widetilde{ab}$  de  $\widetilde{xy}$ . Para la segunda parte de la demostración, supongamos que  $pq$  es un diámetro de  $\Sigma(P)$ . Entonces, los planos ortogonales a  $pq$  en  $p$  o en  $q$  son planos de apoyo de  $\Sigma(P)$ . Además, como la superficie  $\Sigma(P)$  está contenida en  $P$ , por la estricta convexidad de  $P$ , todos los puntos estrictamente entre  $p$  y  $q$  son puntos interiores de  $P$ .

## Modificación de los poliedros de Reuleaux

En este punto, necesitamos una clasificación de los puntos de  $\Sigma(P)$ . Primero, tenemos los puntos de vértice y segundo, tenemos los puntos de  $\Sigma(P)$  que están en el interior relativo de alguna arista  $\widetilde{ab} \in E(G_P)$ . Todos los demás puntos de  $\Sigma(P)$  son puntos regulares. De esta clase tenemos las que están en el interior de alguna cara  $\tau(x)$  de  $P$  y por tanto pertenecen a  $S(x, 1)$  para algún vértice  $x$  de  $P$ , las que están en el interior de una cuña  $W(x, y)$ , y finalmente aquellos puntos regulares de  $P$  que están en la intersección de una cuña  $W(x, y)$  y una cara  $\tau(a)$ .

Supongamos primero que  $p$  es un punto regular de  $\Sigma(P)$ . Si  $p$  pertenece a una cara de  $P$ , entonces la cuerda  $pq$  es una cuerda normal de  $P$  en  $p$  y por tanto hay un vértice  $z$  de  $P$  entre  $p$  y  $q$ . Como  $z \in \text{bd } P$  y como todo punto estrictamente entre  $p$  y  $q$  es un punto interior de  $P$ , entonces  $z = q$ , y por tanto la longitud de  $pq$  es 1. De manera similar, si  $p$  es un punto de la cuña  $W(x, y)$ , entonces la cuerda  $pq$  es normal a  $W(x, y)$  en  $p$ , y por tanto hay un punto  $z$  en la arista  $ab \in E(G_P)$  dual a  $xy \in E(G_P)$  que está entre  $p$  y  $q$ . Como antes, dado que  $z \in \text{bd } P$ , entonces  $z = q$ , y por lo tanto la longitud de  $pq$  es 1.

Supongamos ahora que ni  $p$  ni  $q$  son puntos regulares de  $\Sigma(P)$ . Si tanto  $p$  como  $q$  son vértices de  $P$ , entonces la longitud de  $pq$  es menor o igual que 1; por lo que podemos suponer que  $p$  está en el interior de la arista  $\widetilde{ab}$ . Si esto es así, dado que  $pq$  es normal a la superficie  $\Sigma(P)$  en  $p$ , entonces también es normal a  $P$  en  $p$ . Como  $q$  es un vértice de  $P$  o está en alguna arista de  $P$ , tenemos que  $pq$  es una cuerda de  $P$ ; de hecho, es una cuerda normal  $P$ . Por lo tanto,  $q$  es un vértice y luego la longitud de  $pq$  es 1, o  $q$  pertenece a  $\Sigma(xy)$ , lo cual es imposible por construcción. Esto completa la prueba. ■

Definimos un *poliedro de Meissner* como cualquier cuerpo de ancho constante que se puede obtener a partir de un poliedro de Reuleaux en  $\mathbb{R}^3$  realizando modificaciones en una arista de cada par de aristas duales de la gráfica auto-dual  $G_\Phi$  (ver Figura 2.5).

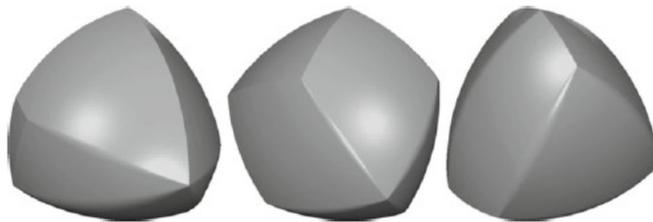


Figura 2.5

En [Sallee, 1970], Sallee demostró que cada cuerpo convexo suave tridimensional de ancho constante 1 puede aproximarse mediante un poliedro de Reuleaux (con aristas arbitrariamente pequeñas). Por lo tanto, cada cuerpo tridimensional de ancho constante se puede aproximar por un poliedro de Meissner.

Un cuerpo  $\Psi \subseteq \mathbb{R}^3$  de ancho constante se llama *sólido de Meissner* si tiene la propiedad de que las componentes suaves de su frontera tienen su curvatura principal menor constante. Por “suave” nos referimos a que es dos veces continuamente diferenciable. Es evidente que todo poliedro de Meissner es un sólido de Meissner.

## Capítulo 3

# Construcción de cuerpos de ancho constante a partir de polígonos de Reuleaux

Este capítulo describe la construcción de ejemplos concretos de cuerpos de ancho constante en tres dimensiones a partir de encajes especiales de gráficas autoduales. Este método ha sido introducido en el artículo [Montejano and Roldán-Pensado, 2017], el cual proporciona un procedimiento finito para la construcción de cuerpos tridimensionales de ancho constante a partir de polígonos de Reuleaux en dos dimensiones. Esta técnica permite obtener una amplia variedad de cuerpos de ancho constante, ofreciendo un enfoque práctico y concreto para la creación de estas estructuras geométricas.

El objetivo principal de este capítulo es presentar las bases teóricas y los pasos necesarios para llevar a cabo la construcción de estos cuerpos de ancho constante. Se explorarán las propiedades y características fundamentales de estas estructuras.

Sea  $P$  un polígono de Reuleaux de ancho 1 con vértices  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , como se muestra en la Figura 3.1. Suponemos que  $P \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Por supuesto,  $n$  es un número impar y  $P = \bigcap_{i=1}^n B(p_i, 1) \cap \{z = 0\}$ . Consideremos el *diagrama de Voronoi del punto más lejano de  $P$* , lo cual se puede consultar en [Brown, 1979]. En otras palabras, para cada vértice  $p_i$  de  $P$ , consideramos el conjunto de todos los puntos  $x \in P$  con la propiedad de que

$$d(x, p_i) \geq \max\{d(x, p_j) \mid 1 \leq j \leq n\},$$

Esto da una descomposición de las celdas de  $P$  en  $n$  celdas convexas, cada una de las cuales contiene el correspondiente arco de círculo  $S(p, 1) \cap P$ . La frontera entre dos de estas celdas convexas es una arista recta, y la colección de estas aristas da lugar al encaje de un árbol con aristas rectas y vértices denotados por  $V(P)$ , como se muestra en la Figura 3.2a.

La *triangulación de Delaunay del punto más lejano de  $P$*  es el dual plano del diagrama de Voronoi del punto más lejano de  $P$  (ver [Eppstein, 1992]). Esto da lugar a una familia  $F$  de subconjuntos de  $\{p_1, \dots, p_n\}$  cuyas envolventes convexas dividen a  $\text{conv}\{p_1, \dots, p_n\}$ , como se muestra en la Figura 3.2b. Resulta que  $T \in F$  si y sólo si  $|T| \geq 3$  y hay un disco  $D_T$  que contiene  $P$  cuya frontera corta a  $P$  exactamente

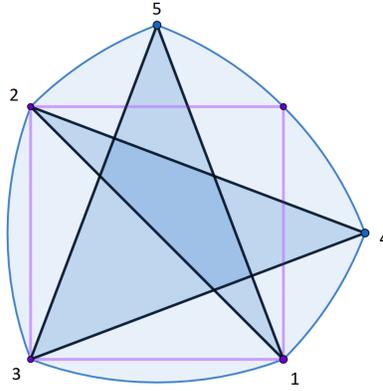


Figura 3.1: Polígono de Reuleaux  $P$  con cinco vértices.

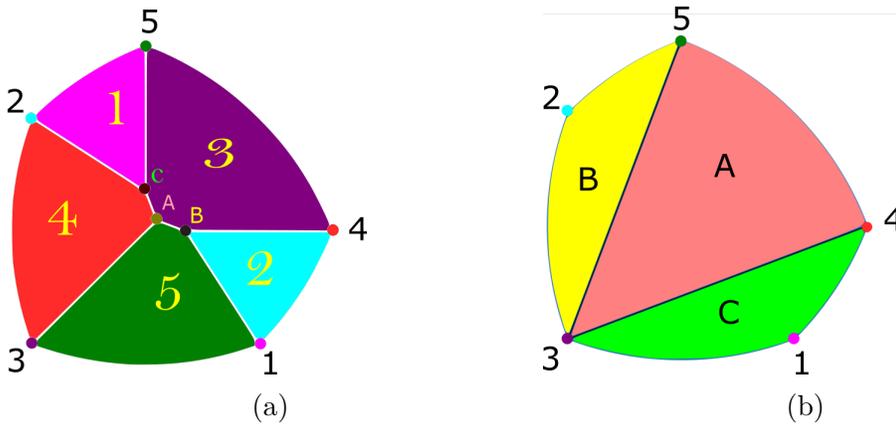


Figura 3.2: Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay de la Figura 3.1.

en  $T$ . Además, si  $c_T$  es el centro de  $D_T$  y  $r_T$  es el radio de  $D_T$ , entonces la colección  $\{c_T | T \in F\}$  es precisamente  $V(P) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ . Ahora consideremos el poliedro esférico tridimensional

$$\bar{P} = \bigcap_{i=1}^n B(p_i).$$

Ahora, definamos  $V(\bar{P})$  como el conjunto de puntos 0-singulares de la frontera de  $\bar{P}$ . No es difícil verificar que

$$V(\bar{P}) = \{(c_T, \pm\sqrt{1 - r_T^2}) | T \in F\}$$

y que la proyección ortogonal de la descomposición de celdas de la frontera de  $\bar{P}$  coincide precisamente con la descomposición de celdas del diagrama de Voronoi para el punto más lejano discutido anteriormente. Se define

$$P^+ = \bar{P} \cap \{z \geq 0\}.$$

y para todo  $1 \leq i \leq n$ , sea  $\sigma_i = S(p_i) \cap P^+$  la cara esférica de la frontera de  $P^+$ .

---

**Lema 3.1.** El cuerpo convexo  $P^+$  tiene las siguientes propiedades:

- el diámetro de  $P^+$  es 1,
- para todo punto  $x \in \text{bd } P^+ \cap \{z > 0\}$ , hay un punto  $y$  en la frontera del polígono de Reuleaux  $P$  tal que  $d(x, y) = 1$ .

*Demostración.* El segundo enunciado es obvio. Para la demostración del primer enunciado, sea  $xy$  un diámetro de  $P^+$ . Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x$  pertenece a la frontera del polígono  $P$  y  $y \in \text{bd } P^+ \cap \{z > 0\}$ . Si  $y$  es un punto regular de la frontera de  $P^+$ , entonces  $d(x, y) = 1$ . Si  $y$  es un punto singular de  $P^+$ , dado que  $x$  está en la frontera de  $P$ , entonces  $x$  es un vértice de  $P$  y, por lo tanto,  $d(x, y) = 1$ . ■

Pero según el teorema de Pál, hay un único cuerpo  $\Psi$  de ancho constante igual a 1 que contiene a  $P^+$ . Además, como se mencionó anteriormente,  $\text{bd } P^+ \cap \{z > 0\}$  está contenido en la frontera de  $\Psi$ , pero  $\Psi \cap \{z \geq 0\} = P^+$ .

Ahora queremos describir la parte inferior de  $\Psi$ , es decir,  $\Psi \cap \{z \leq 0\}$ . Resulta que la parte inferior de  $\Psi$  está determinada por las cuerdas binormales en los puntos singulares del límite de  $P^+$ . Es decir, para cada punto  $x \in \text{bd } P^+ \cap \{z \leq 0\}$ , existe un punto singular  $y \in \text{bd } P^+ \cap \{z > 0\}$  tal que  $d(x, y) = 1$ . Recordemos que  $F$  es el conjunto de puntos más lejanos en la triangulación de Delaunay de  $P$ , y sea  $T \in F$ . El conjunto de rectas normales a  $P^+$  en el vértice  $v_T = \left(c_T, \sqrt{1 - r_T^2}\right)$  es igual al cono  $\Delta_T$  con vértice en el punto  $v_T$ , pero excluyendo  $\text{conv } T$ . Por lo tanto,  $\sigma_T = \Delta_T \cap S(v_T, 1) \subseteq \text{bd } \Psi$  es una cara de casquete esférico de  $\Psi$ .

Supongamos que  $v, v' \in V(P)$  son vértices adyacentes en el árbol definido por el diagrama de Voronoi del punto más lejano de  $P$ . Sea  $x$  un punto en la arista  $\overline{vv'}$ . Deseamos determinar el conjunto de rectas normales a  $P^+$  en  $x$ . Hay dos posibilidades.

Si  $v = c_T$  y  $v' = c_{T'}$  para algún  $T, T' \in F$ , entonces  $T$  y  $T'$  comparten un lado de la forma  $p_i p_j$ . Por lo tanto, el conjunto de líneas normales de  $P^+$  en  $x$  es igual al cono con vértice  $x$  a través del segmento  $\overline{p_i p_j}$ . Esto implica que, en la frontera de  $\Psi$ , la cara  $T$  está conectada con la cara  $T'$  a través de una superficie de revolución cuyo eje es la línea que pasa por el segmento  $\overline{p_i p_j}$ . Si  $v = c_T$  para algún  $T \in F$  y  $v' = p_i$  para algún  $i$ , podemos razonar de manera similar para concluir que, en la frontera de  $\Psi$ , la cara  $\sigma_T$  está conectada con la cara  $\sigma_i$  a través de una superficie de revolución cuyo eje es la línea que pasa por el segmento  $\overline{p_j p_k}$ , donde  $\overline{p_j p_k}$  es opuesto a  $p_i$ . Estas superficies de revolución se ilustran en la Figura 3.3.

Entonces, la frontera de  $\Psi$  consiste en los casquetes esféricos  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  y  $\sigma_T$  con  $T \in F$ , y superficies de revolución en la parte inferior de  $\Psi$ . Una imagen de dicho cuerpo se muestra en la Figura 3.4.

Es fácil ver, a partir de la discusión anterior, que el conjunto de vértices de  $\Psi$  es

$$V = \{p_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_s | T \in F\}.$$

Entonces,

$$\Phi = \bigcap_{v \in V} B(v, 1)$$

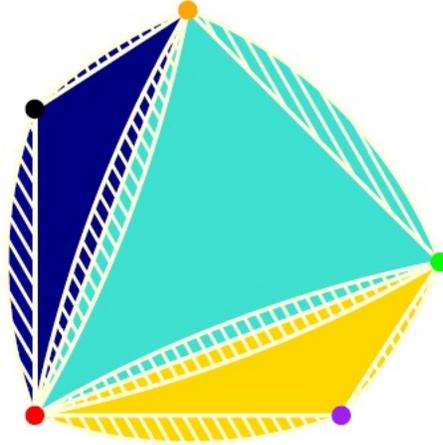


Figura 3.3:  $\Psi$  desde el fondo.

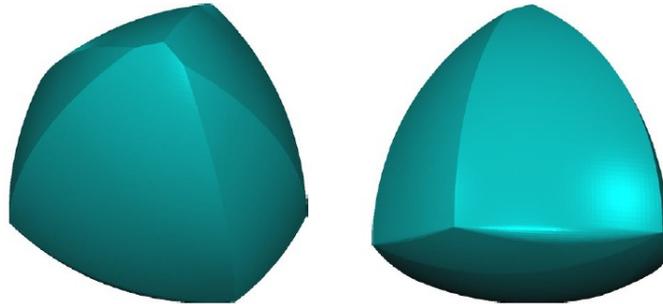


Figura 3.4: Un cuerpo de ancho constante obtenido de un pentágono de Reuleaux.

es un poliedro de Reuleaux y, por lo tanto, induce una gráfica autodual  $G_\Phi$  (ver Figura 3.5). De hecho,  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  es un encaje métrico de  $G_\Phi$  y, por supuesto,  $\Psi$  es un poliedro de Meissner, ya que se puede obtener del poliedro de Reuleaux  $\Phi$  realizando modificaciones en una arista de cada par de aristas duales de  $\Phi$ , como se mostró anteriormente.

Como segundo ejemplo, mostramos en la Figura 3.6 el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay de un polígono de Reuleaux con 7 vértices. También podemos interpretar estas dos figuras como la vista superior e inferior del sólido de Meissner correspondiente. En resumen, todo lo anterior demuestra lo siguiente.

**Teorema 3.2.** Dado un polígono de Reuleaux  $P \subseteq \mathbb{R}^2$ , existe un procedimiento finito (utilizando el Diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay) para construir un poliedro de Meissner  $\tilde{P} \subseteq \mathbb{R}^3$  tal que  $\tilde{P} \cap \mathbb{R}^2 = P$ .

Este último teorema nos permite construir una cantidad infinita de poliedros de Reuleaux, y lo aprovecharemos en el siguiente capítulo para encontrar todas las familias de poliedros de ancho constante con hasta 9 vértices.

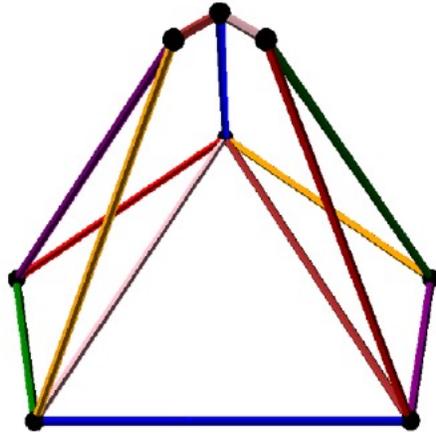


Figura 3.5: encaje métrico de la gráfica autodual  $G_\Phi$ .

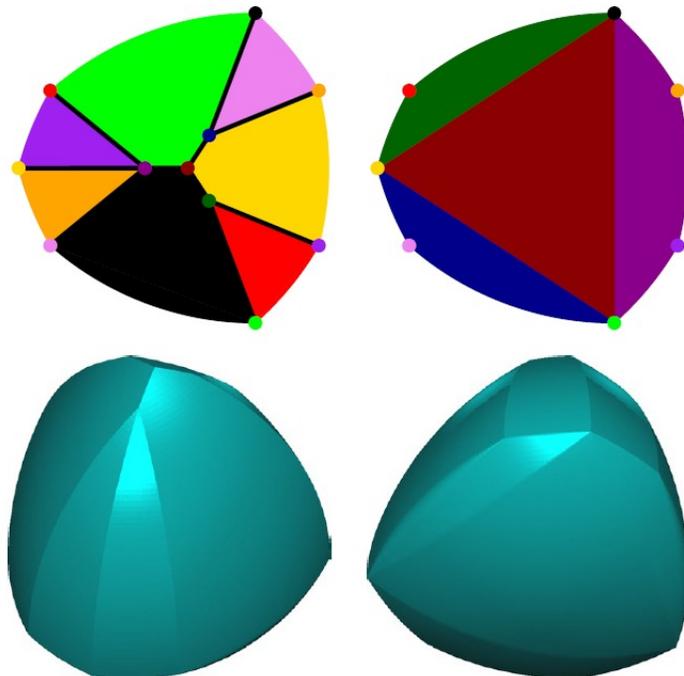


Figura 3.6: Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay de un heptágono de Reuleaux y del cuerpo de ancho constante obtenido a partir de él.

## Capítulo 4

# Construcción de los grafos asociados a los poliedros de Reuleaux

En el artículo [Montejano et al., 2020], se investigan los grafos que surgen a partir de los poliedros de Reuleaux. Estos grafos deben cumplir ciertas condiciones, como ser planos, 3-conexos y fuertemente autoduales. Se estudia cuándo estas condiciones son suficientes. Si  $G$  es una de estas gráficas, cada vértice tiene una cara opuesta con un isomorfismo  $\tau : G \rightarrow G^*$ , donde  $G^*$  es la gráfica dual única. Una *aplicación métrica* es una función  $\eta : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que el diámetro de  $\eta(G)$  es igual a 1 y para cada par de vértices  $(u, v)$ , donde  $u \in \tau(v)$ , se cumple  $\text{dist}(\eta(u), \eta(v)) = 1$ . Si  $\eta$  es inyectiva, entonces se trata de un *encaje métrico*.

En primer lugar, demuestran que cualquier gráfica plana, 3-conexa y fuertemente autodual tiene una aplicación métrica a los vértices de un tetraedro. Luego, se desarrollan algoritmos que permiten obtener estas gráficas con hasta 14 vértices, y construyen encajes métricos para ellos numéricamente. A partir de estos resultados, se formula la conjetura de que cada grafo de este tipo puede ser realizado como un poliedro de Reuleaux en  $\mathbb{R}^3$ . Como se ha demostrado en los capítulos anteriores, es posible construir un cuerpo de ancho constante a partir de un poliedro de Reuleaux. Por lo tanto, en esencia, se generan (numéricamente, pero con alta precisión) cientos de nuevos ejemplos de cuerpos de ancho constante.

La contribución de este capítulo radica en proporcionar ejemplos concretos de cuerpos de ancho constante encontrados mediante métodos numéricos, tal como se describe en el artículo [Montejano et al., 2020], y los construimos utilizando la técnica descrita en [Montejano and Roldán-Pensado, 2017] que parte de un cuerpo de ancho constante en  $\mathbb{R}^2$ .

Además, se abordarán posibles extensiones y aplicaciones futuras de esta técnica, así como los desafíos y limitaciones que pueden surgir durante el proceso de construcción. En última instancia, se pretende que este capítulo sea una guía práctica y valiosa para aquellos interesados en la creación de cuerpos de ancho constante en tres dimensiones, con el propósito de estimular nuevas investigaciones y desarrollos en esta área.

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica autodual plana 3-conexa, entonces tiene una única

# de vértices	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
# de gráficas	1	0	1	1	2	4	11	24	72	212	674	

Cuadro 4.1: Números de gráficas planas 3-conexas autoduales y fuertemente involutivas.

gráfica dual  $G^*$  cuyos vértices son las caras de  $G$  [Whitney, 1933]. Diremos que el isomorfismo de autodualidad  $\tau : G \rightarrow G^*$  es *fuertemente involutivo*, si cumple las dos condiciones siguientes:

- Para cada par de vértices  $u, v$ , tenemos que  $u \in \tau(v) \iff v \in \tau(u)$ .
- Para todo vértice  $u$ ,  $u \notin \tau(u)$ .

Existen muchos ejemplos de grafos fuertemente involutivos autoduales, como las ruedas con un número impar de lados (es decir, un ciclo más un vértice adicional conectado a cada otro vértice).

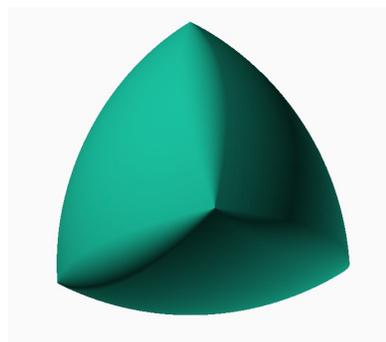
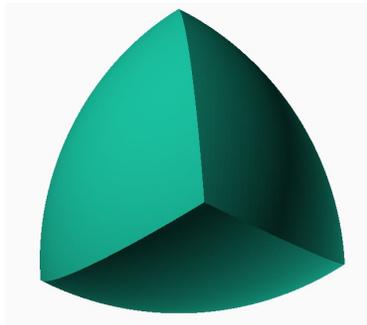
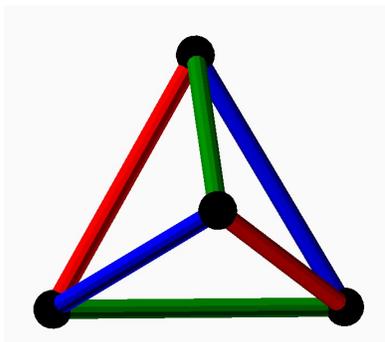
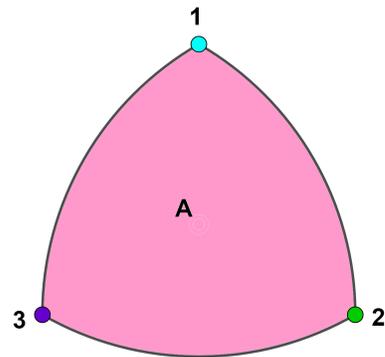
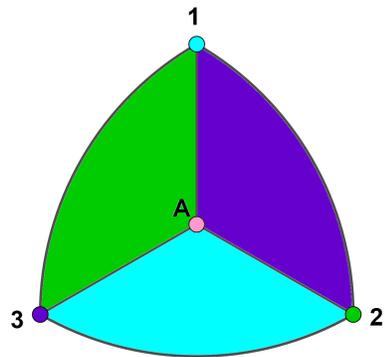
En [Montejano et al., 2020] se encontraron todas las gráficas autoduales fuertemente involutivas de hasta 14 vértices. Además, se encontró numéricamente un politopo de Reuleaux para cada una de ellas. Se muestra una tabla con el número de gráficas para cada cantidad de vértices, que va desde 4 hasta 14 (ver Cuadro 4.1). Además, se plantea la siguiente conjetura:

*Conjetura 1.* Para cada gráfica fuertemente autodual e involutiva  $G$ , plana y 3-conexa, existe un poliedro de Reuleaux  $\Phi$  tal que  $G_\Phi$  es isomorfo a  $G$ .

Nosotros las gráficas con a lo más 9 vértices obtenidas en [Montejano et al., 2020] y vemos cuáles de ellas se pueden obtener a partir de un polígono de Reuleaux como se describe en [Montejano and Roldán-Pensado, 2017]. Haremos esto por casos dependiendo del número de vértices.

## 4 vértices

La gráfica plana, autodual y 3-conexa con 4 vértices se puede representar como el tetraedro de Reuleaux, con un vértice en el centro unido a cada uno de los vértices del tetraedro, como se muestra en la siguiente figura que incluye su diagrama de Voronoi y su triangulación de Delaunay. De esta manera, el poliedro de Meissner se obtiene al suavizar las aristas apropiadas del tetraedro de Reuleaux, tal como se ilustra en las figuras a continuación.

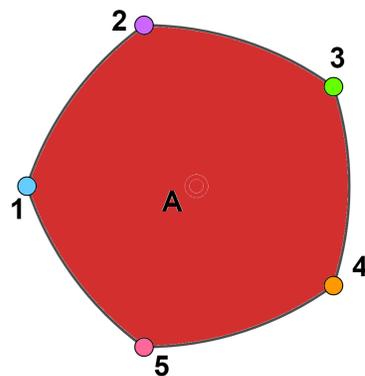
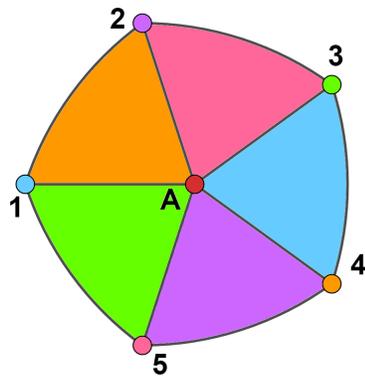


### 5 vértices

No es posible construir gráficas planas autoduales 3-conexas con 5 vértices, como se ve en el Cuadro 4.1.

### 6 vértices

Con 6 vértices, comenzamos con el pentágono regular, marcamos sus mediatrices y obtenemos el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay del pentágono.

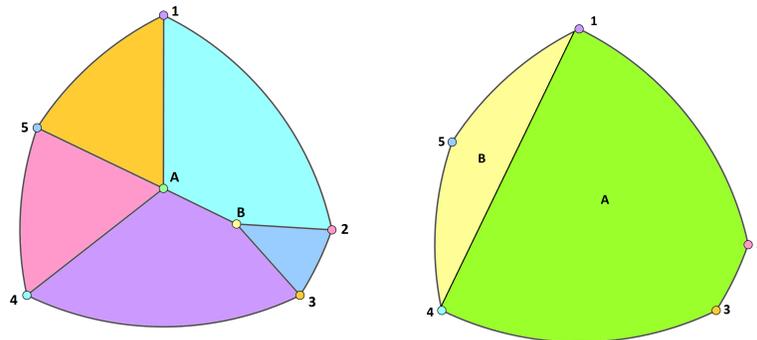


También obtenemos la gráfica de aristas y su respectivo poliedro de Reuleaux, así como el poliedro de ancho constante los cuales mostramos en las siguientes imágenes respectivamente.



## 7 vértices

Con 7 vértices, obtenemos una única gráfica a partir de un pentágono irregular de ancho constante. Este pentágono tiene un eje de simetría que pasa por el vértice 5 y el punto medio entre los vértices 2 y 3. Los vértices de este polígono de ancho constante se determinaron siguiendo las propiedades conocidas y utilizando cierta intuición.



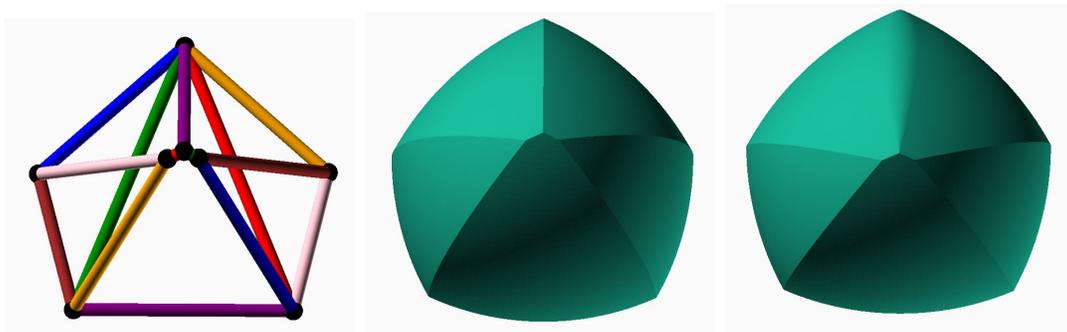
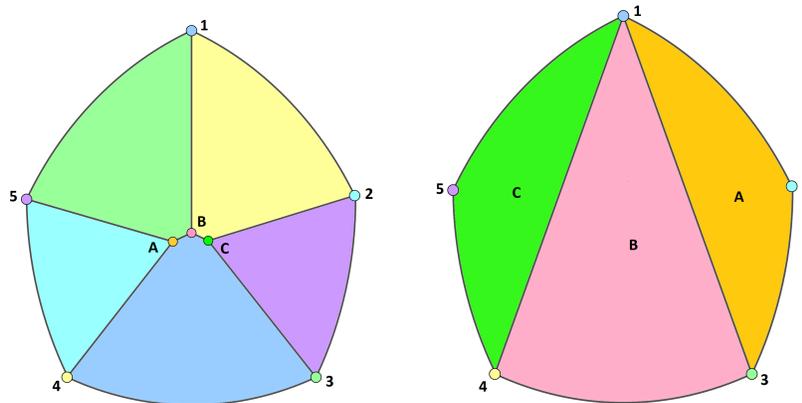
Debido a la irregularidad del pentágono, las mediatrices se intersectan en más de un punto. La simetría inherente del pentágono resulta en que, al realizar el diagrama de Voronoi, algunas mediatrices se intersectan exactamente en dos puntos. Esto da como resultado la presencia de dos vértices distintos,  $A$  y  $B$ , en el diagrama de Voronoi. A su vez, en la triangulación de Delaunay mostrada en la siguiente imagen de la derecha, se obtienen dos caras.

Las coordenadas de los puntos  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  se utilizan para encontrar los otros dos puntos en  $\mathbb{R}^3$  mediante la intersección de esferas de radio 1 con centros en los vértices 1, 5 y 3, para obtener el punto  $B$ . Del mismo modo, se intersectan esferas con centros en los vértices 2, 3 y 1 para obtener el punto  $A$ . Con las coordenadas de todos los puntos, fue sencillo encontrar el poliedro de Reuleaux. Además, se obtuvo el poliedro de ancho constante asociado a este polígono.

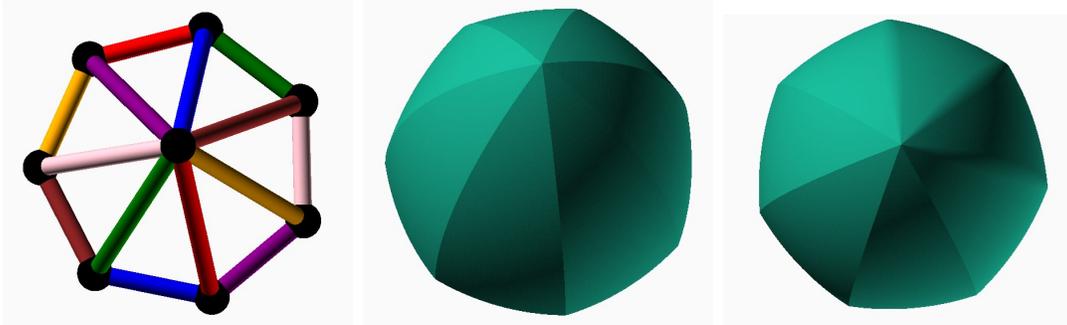
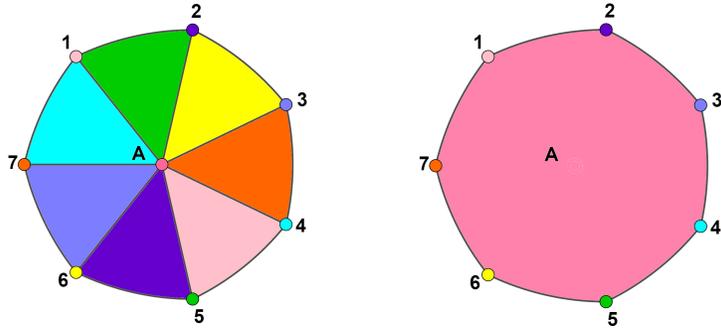


## 8 vértices

Obtenemos una gráfica de 8 vértices mediante un pentágono irregular que genera tres vértices interiores en su diagrama de Voronoi. Al igual que en el caso de la gráfica con 7 vértices, esta también exhibe cierta simetría en la mediatriz de los vértices 3 y 4. Sin embargo, las regiones más alejadas son menos evidentes debido a que el pentágono presenta una mayor apertura entre los vértices 3 y 4.



De manera similar a la de 6 vértices, se obtiene una segunda gráfica con 8 vértices compuesta por un heptágono regular de ancho constante y un vértice adicional ubicado a la misma distancia de cada vértice del heptágono.

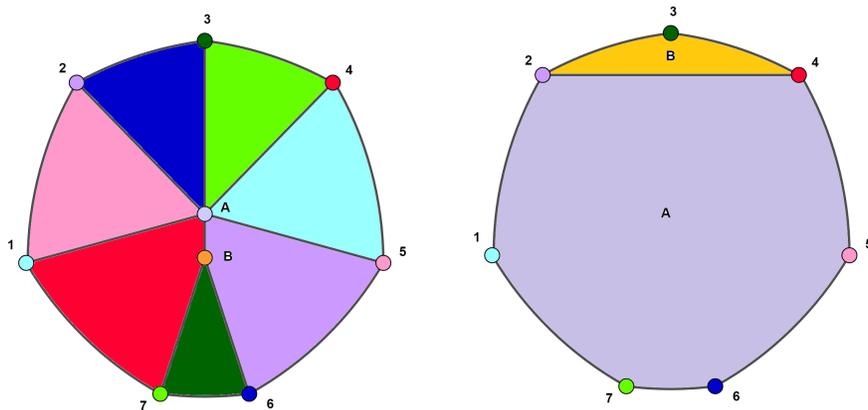


## 9 vértices

Hay 4 gráficas de 9 vértices. Nuestro objetivo es encontrar representaciones de estas gráficas como polígonos de Reuleaux, y por ende, sus correspondientes cuerpos de ancho constante. Nuestra contribución es demostrar que 2 de ellas no poseen una representación como polígonos de Reuleaux obtenidos mediante el método descrito en [Montejano and Roldán-Pensado, 2017]. Esto demuestra que no todos los poliedros de Reuleaux pueden ser realizados de esta manera.

### 9-0

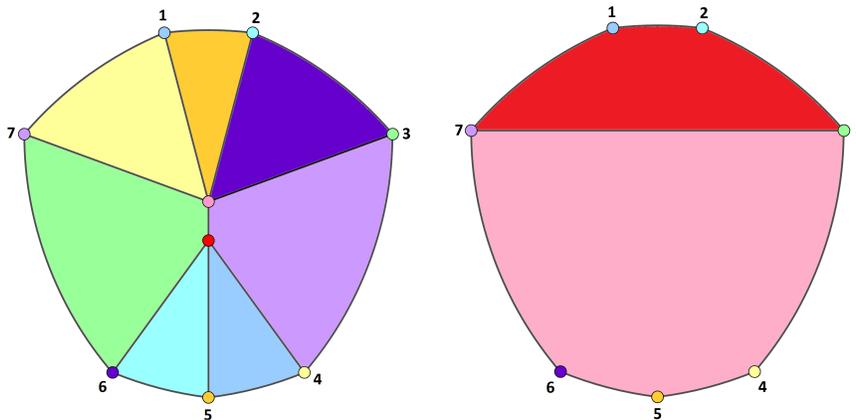
La primera gráfica se puede representar como un heptágono de ancho constante, con dos puntos interiores resultantes del diagrama de Voronoi.





### 9-1

También logramos encontrar el polígono de Reuleaux que genera la segunda gráfica que encontraron. Ilustramos esta gráfica a continuación con su diagrama de Voronoi, su triangulación de Delaunay, su gráfica de aristas, su politopo de Reuleaux y, finalmente, el cuerpo de ancho constante que generan.



### 9-2

En la Figura 4.1 mostramos la tercera gráfica de 9 vértices hecha por la computadora. Mostramos por que no es posible realizar esta gráfica a partir de un polígono de Reuleaux y por consiguiente este poliedro de ancho constante no es realizable mediante este procedimiento.

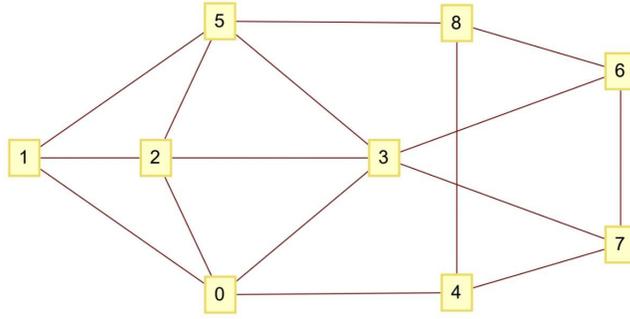


Figura 4.1: Gráfica  $G$  hecha por computadora.

*Demostración.* Supongamos que sí es posible, entonces al quitar los vértices interiores deberíamos obtener un ciclo de tamaño impar. Si en total tenemos 9 vértices, deberíamos tener un ciclo de tamaño 3, 5 ó 7. No es posible que sea un ciclo de tamaño 3 ó 5 pues la triangulación de Delauney tendría máximo 3 caras y cada cara debería corresponder a uno de los puntos internos pero tenemos más puntos internos que esto. Por lo tanto el ciclo debería tener 7 vértices.

Al quitar los dos vértices 2, 3 de la gráfica  $G$  obtenemos un 7-ciclo con una cuerda. Note que no hay otro par de vértices en  $G$  que podrían ser vértices internos.

Los vértices 0, 4, 7, 3 forman una cara dual al vértice 5 por lo tanto 0, 4 están en una circunferencia  $B(5)$  de radio 1 y centro 5. Los vértices 0, 4 están en una circunferencia  $B(8)$  de radio 1 y centro en 8 ya que los vértices del ciclo forman un polígono de Reuleaux. Pero esto contradice que el ciclo está en posición convexa. ■

### 9-3

Ahora mostramos la cuarta gráfica de 9 vértices generada por la computadora en la Figura 4.2 y explicamos por qué no es posible realizar esta a partir de un polígono de Reuleaux.

*Demostración.* Al igual que antes, si  $H$  es construible con esta técnica, deben existir dos vértices conectados por una arista que al quitarlos quede un ciclo de tamaño 7. En particular, la suma de los grados de estos vértices es 9, y al eliminarlos nos queda un ciclo más una arista. Sin embargo, la suma de los grados de cualquier par de vértices es como máximo 8. Por lo tanto el cuerpo de ancho constante asociado a  $H$  no es realizable con este método. ■

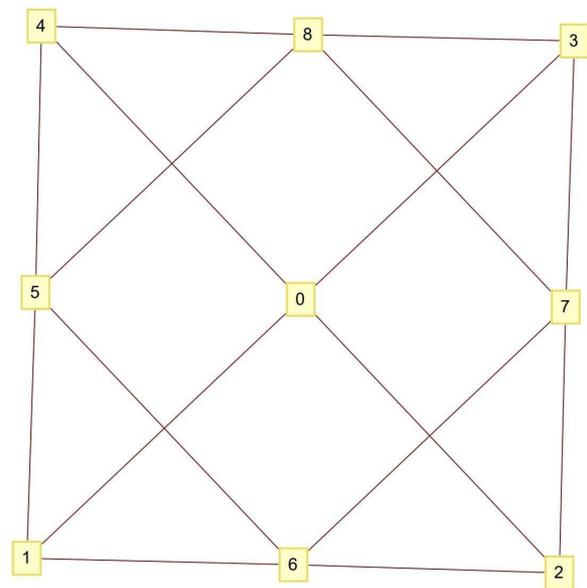


Figura 4.2: Gráfica  $H$  generada por la computadora.

# Bibliográfia

- [Bezdek et al., 2007] Bezdek, K., Lángi, Z., Naszódi, M., and Papez, P. (2007). Ball-polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 38:201–230. [4](#)
- [Bezdek and Naszódi, 2006] Bezdek, K. and Naszódi, M. (2006). Rigidity of ball-polyhedra in euclidean 3-space. *European Journal of Combinatorics*, 27(2):255–268. [12](#)
- [Brown, 1979] Brown, K. Q. (1979). Voronoi diagrams from convex hulls. *Information processing letters*, 9(5):223–228. [18](#)
- [Eppstein, 1992] Eppstein, D. (1992). The farthest point delaunay triangulation minimizes angles. *Computational Geometry*, 1(3):143–148. [18](#)
- [Gruber et al., 1983] Gruber, P. M., Wills, J. M., et al. (1983). *Convexity and its applications*, volume 1983. Springer. [viii](#)
- [Hliněný, 2021] Hliněný, P. (2021). A short proof of euler–poincaré formula. In *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, pages 92–96. Springer. [4](#), [7](#)
- [Kupitz et al., 2010] Kupitz, Y., Martini, H., and Perles, M. (2010). Ball polytopes and the vázsonyi problem. *Acta Mathematica Hungarica*, 126(1-2):99–163. [4](#), [10](#)
- [Lachand-Robert and Oudet, 2007] Lachand-Robert, T. and Oudet, E. (2007). Bodies of constant width in arbitrary dimension. *Mathematische Nachrichten*, 280(7):740–750. [viii](#)
- [Lovász, 1983] Lovász, L. (1983). Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 45(1-4):317–323. [9](#)
- [Martini et al., 2019] Martini, H., Montejano, L., and Oliveros, D. (2019). *Bodies of constant width*. Springer. [vi](#), [vii](#), [6](#), [7](#), [13](#), [14](#)
- [Meissner, 1918] Meissner, E. (1918). Über die durch reguläre polyeder nicht stützbaeren körper. *Vierteljahresschr. Naturfor. Ges. Zürich*, 63:544–551. [viii](#)
- [Meissner and Schilling, 1912] Meissner, E. and Schilling, F. (1912). Drei gipsmodelle von flächen konstanter breite. *Z. Math. Phys*, 60:92–94. [11](#)

## Bibliografía

---

- [Montejano et al., 2020] Montejano, L., Pauli, E., Raggi, M., and Roldán-Pensado, E. (2020). The graphs behind Reuleaux polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, 64(3):1013–1022. [x](#), [23](#), [24](#)
- [Montejano and Roldán-Pensado, 2017] Montejano, L. and Roldán-Pensado, E. (2017). Meissner polyhedra. *Acta Math. Hungar.*, 151(2):482–494. [viii](#), [ix](#), [15](#), [18](#), [23](#), [24](#), [28](#)
- [Sallee, 1970] Sallee, G. (1970). Reuleaux polytopes. *Mathematika*, 17(2):315–323. [viii](#), [5](#), [17](#)
- [Schilling, 1911] Schilling, M. (1911). *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. the author. [11](#)
- [Weisstein, 2000] Weisstein, E. W. (2000). Reuleaux tetrahedron. <https://mathworld.wolfram.com/>. [7](#)
- [Whitney, 1933] Whitney, H. (1933). 2-isomorphic graphs. *American Journal of Mathematics*, 55(1):245–254. [24](#)
- [Yaglom and Boltyanski, 1951] Yaglom, I. and Boltyanski, V. (1951). Convex figures, gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad. [15](#)
- [Yaglom and Boltyanskii, 1960] Yaglom, I. and Boltyanskii, V. (1960). Convex figures. translated by kelly, pj and walton, lf. [2](#)
- [Yaglom and Boltyanskii, 1961] Yaglom, I. and Boltyanskii, V. (1961). Convex figures (trans. pj kelly & lf walton) holt. *Rinehart & Winston, New York*. [11](#)