



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL MODELO
COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A :

MATTHEW JESÚS VALENCIA

TUTOR

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

«De todas las opiniones y descubrimientos, ninguna debe haber ejercido mayor efecto sobre el espíritu humano que la doctrina copernicana. Apenas el mundo había sido considerado como redondo y completo en sí mismo cuando se le pidió que renunciara al tremendo privilegio de ser el centro del universo.

Quizá nunca se haya hecho una petición tan exigente a la humanidad, ya que, al admitirla, tantas cosas se desvanecían en humo y niebla. ¿Qué se hizo del Edén, nuestro mundo de inocencia, piedad y poesía?; ¿qué se hizo del testimonio de los sentidos, de las convicciones de una fe poético-religiosa? No sorprende que sus contemporáneos reusaran perder todo esto y presentaran toda la resistencia posible a una doctrina que autorizaba y exigía de sus conversos una libertad de miras y una grandeza de pensamiento desconocidas, ni tan siquiera soñadas, hasta entonces.»

Johann Wolfgang von Goethe

Para mi familia.
Pero principalmente para Arath.

Agradecimientos

A mi mamá, por todo su apoyo, pues me tuvo una sagrada confianza; si he llegado a aspirar y lograr grandes proyectos ha sido por ti.

A mis hermanos, que nunca dudaron de mis capacidades y han aportado a mi vida mucho más que un buen consejo: Alex, quien en su esfuerzo por enseñar virtud me dio valor para continuar; Aldo, que en su sabiduría me enseñó nobleza.

A toda mi familia, que ha apoyado mis sueños desde que estos solo eran cruzar la calle.

A Adrián, por enseñarme a soportar.

A Arath, cuya guía valoraré por siempre.

A mis amigos y colegas de la facultad, porque sin ellos hoy no habría llegado tan lejos y corresponde mucho de mi formación profesional: Tonatiuh, Arodi, Edwin, Jeiko, Raquel, Marcos, Carlos, Ale (todos ellos), Aldair, Karla, Víctor (todos ellos), Selene, Julio, Allan, Francisco, Ricardo, Jorge (todos ellos), Harold, Emiliano, Will, Kevin, Omar.

A mis amigos en general, sin su grata compañía no estaría salvo de las desventuras que tocan a nuestra generación.

A Yesenia, que me escucha de hace tiempo, aún cuando no tengo nada que contar.

A Carter, quien ilumina el lugar a donde quiera que va.

A Hernando, mi asesor, quien me tuvo una infinita paciencia a lo largo de este proyecto.

A mi jurado, que aportó valioso tiempo a mí y mi trabajo.

Y a todo quien en su absoluta voluntad me hizo mejor persona.

Índice general

	V
Agradecimientos	VII
Exordio	XIII
I Geometría diferencial	1
1. Topología	3
1.1. Elementos de teoría de conjuntos	5
1.1.1. Relaciones	6
1.1.2. Redes	10
1.2. Topología general	16
1.2.1. Espacio vecindad	16
1.2.2. Espacios topológicos	20
1.2.3. Propiedades de las topologías y espacios topológicos	23
1.2.4. Espacios compactos	26
1.2.5. Axiomas de separación	28
1.2.6. Mapeos entre espacios topológicos	29
1.3. Espacios métricos	32
2. Variedades diferenciales	37
2.1. Estructura diferencial	39
2.1.1. Algunas variedades diferenciales	42
2.1.2. Mapeos diferenciales	43
2.2. Espacios tangentes	46
2.2.1. Vector tangente como clase de equivalencia de curvas	46
2.2.2. La estructura de espacio vectorial de $T_p\mathcal{M}$	49
2.2.3. El empuje de una clase de equivalencia de curvas	53
2.2.4. El espacio tangente de un espacio vectorial	56
2.2.5. El espacio tangente de un producto de variedades	57
2.3. Particiones de la unidad	60

3. Tensores	65
3.1. Campos vectoriales	67
3.1.1. Expresión local	70
3.1.2. El conmutador de campos vectoriales	72
3.1.3. Campos vectoriales h -relacionados	73
3.2. 1-formas	75
3.2.1. Covectores	75
3.2.2. El diferencial	77
3.2.3. El pull-back de 1-formas	78
3.2.4. Integración de 1-formas	79
3.3. Tensores	82
3.3.1. Producto tensorial	82
3.3.2. Tensores simétricos y antisimétricos	85
3.4. Formas diferenciales	87
3.4.1. Álgebra exterior	87
3.4.2. La derivada exterior	93
3.4.3. Cohomología de De Rham	96
3.5. Difeomorfismos locales	98
3.5.1. Flujo y curvas integrales	98
4. Métrica, conexión y curvatura	105
4.1. Métrica	107
4.1.1. Métrica riemanniana	107
4.1.2. El isomorfismo tangente-cotangente	108
4.1.3. La distancia riemanniana	110
4.1.4. Planitud	112
4.1.5. Integración de formas diferenciales	114
4.1.6. Métrica semi-riemanniana	122
4.2. Cálculo de variaciones	125
4.2.1. Variaciones en una curva	125
4.2.2. Variaciones de campos	129
4.2.3. Principio de mínima acción	131
4.3. Conexión	133
4.3.1. Conexiones lineales	133
4.3.2. Derivada covariante	135
4.3.3. Conexión de Levi-Civita	139
4.4. Torsión y curvatura	142
4.4.1. Torsión	142
4.4.2. Formas diferenciales $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ -valuadas	145
4.4.3. Curvatura	149
5. Haces fibrados y grupos de Lie	157
5.1. Grupos de Lie	159
5.1.1. Grupos matriciales y de Lie	159
5.1.2. El grupo ortogonal	162

5.1.3.	El álgebra de Lie de un grupo de Lie	164
5.1.4.	Completez de campos vectoriales invariantes	168
5.1.5.	El álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$	172
5.1.6.	Formas diferenciales en grupos de Lie	174
5.1.7.	Grupos de transformaciones	176
5.2.	Haces fibrados	179
5.2.1.	Haces en general	179
5.2.2.	Haces fibrados principales	181
5.2.3.	Reconstrucción de haces fibrados principales	183
5.2.4.	Conexiones en un haz principal	185
5.2.5.	Ecuaciones de estructura	190
5.2.6.	Clases características	193
 II Cuantización topológica		 201
6.	Gravitación	203
6.1.	Mecánica clásica	205
6.2.	Relatividad especial	208
6.2.1.	Estructura del espaciotiempo	208
6.2.2.	Relatividad del tiempo y el espacio	210
6.2.3.	Mecánica relativista	216
6.3.	Relatividad general	219
6.3.1.	Estructura del espaciotiempo	219
6.3.2.	Principio de equivalencia	222
6.3.3.	Ecuaciones de campo	224
6.3.4.	Sobre los campos de materia	229
6.4.	El Universo a gran escala	234
6.4.1.	El principio cosmológico	234
6.4.2.	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	235
6.4.3.	Fluidos perfectos	239
6.4.4.	Ecuaciones de Friedmann	243
6.4.5.	Soluciones del factor de escala	250
7.	La cuantización topológica	255
7.1.	Estructura de un sistema clásico	259
7.1.1.	Configuración clásica	259
7.1.2.	Espectro topológico	260
7.2.	Configuración clásica de sistemas mecánicos	262
7.2.1.	Sistemas mecánicos	262
7.2.2.	Principio de Maupertuis	267
7.3.	Haz fibrado principal de sistemas mecánicos	273
7.4.	Espectro topológico en sistemas mecánicos	276

8. Cuantización topológica en teoría de gravedad	287
8.1. Campos gravitacionales	289
8.2. Haz fibrado principal en gravedad	293
8.2.1. Soluciones en vacío	293
8.2.2. Soluciones con campos de materia	295
8.3. Cuantización topológica del modelo Λ -CDM	297
8.3.1. Espectro topológico de FLRW	300
8.3.2. Espectros para el Universo plano	302
8.3.3. Espectros para un Universo curvo	307
8.3.4. Conclusiones	311
9. Corolario	315
Bibliografía	318

Exordio

*«Soy hombre: duro poco
y es enorme la noche.
Pero miro hacia arriba:
las estrellas escriben.
Sin entender comprendo:
también soy escritura
y en este mismo instante
alguien me deletrea.»*

Octavio Paz

Como seres humanos entendemos la importancia que ha tenido comprender de dónde y hacia dónde vamos, dar razón a la creación de la vida en la Tierra, que conlleva el preguntarse por la génesis del mundo, no solo en cuanto a nuestro origen sino al del Universo. Es un tema recurrente a lo largo de la existencia de nuestra especie que no ha dejado de ser y que no tiene porqué dejar de serlo, es más, estamos en una época y un avance en el saber humano tal que podemos estudiar más que conjeturar, observar más que imaginar para buscar la respuesta a tantas preguntas que nos legaron nuestros antepasados. Y a pesar que las conjeturas y la imaginación siguen siendo importantes en el desarrollo de la ciencia, el quehacer científico ha madurado desde que nuestras respuestas a los fenómenos naturales fueron atribuidas a dioses, criaturas míticas o entidades cósmicas fuera de nuestro entendimiento, lo que en ocasiones más que ofrecer una solución nos arrebatava la curiosidad y nos sumía en la conformidad. No obstante, este no será un espacio para establecer lo bueno y malo de creer en deidades; ya que siendo este un tema sumamente complejo que se ubica en otra disciplina del pensamiento y/o que rebasa los alcances del teorema que nos abocamos y de la ciencia inherente a esta no erraremos mezclando religión y ciencia que nada tienen que ver en nuestro propósito, empero que ambos son, independientemente uno del otro, una búsqueda autónoma para comprender dos mundos diferentes.

En el tiempo en que esto no era del todo claro y la observación del firmamento contaba con una creciente precisión, aparecieron grandes estudiosos del mundo y los fenómenos naturales; con ellos la primer teoría que buscaba formalizar el estudio de los astros y que ofreció al mismo tiempo una comprensión global de la fuerza de gravedad: la ley de gravitación universal. Aún hoy seguimos recordando a Sir Isaac Newton como uno de los mayores genios de la historia y se siguen usando las ideas

y herramientas que alguna vez concibió. Sus propuestas nos llevaron a tiempos mejores, hasta que se dio la necesidad de cambiar de panorama (aunque no por ello sus ideas son menos útiles), al tiempo que dos grandes teorías de la física, la mecánica clásica y el electromagnetismo, chocaban por falta de consistencia. Entonces apareció la siguiente revolución: la relatividad. La teoría de la gravedad que se derivó como resultado de ella ofreció grandes cambios en nuestra manera de entender dicho fenómeno, dejó de ser una fuerza para convertirse en una consecuencia de la estructura del espacio.

En la actualidad se ha propuesto más de un formalismo con el objetivo de entender y estudiar la gravedad, además de la teoría de Newton. Debido a esto vale la pena especificar desde qué panorama vamos a partir. Hoy en día, la propuesta más aceptada es la de Einstein (conocida como “relatividad general”), esto no quiere decir que el resto necesariamente sean menos exactas o más complicadas de usar. Por el contrario, conlleva ecuaciones que, en la práctica, son muy difíciles de resolver, pero al mismo tiempo es una de las teorías más estudiadas, no solo dentro de la física. Debido a ello y de ahora en adelante al hablar de la “teoría estándar” de gravitación en el sentido clásico nos vamos a referir a la teoría de Einstein.

Por otro lado, mientras algunos físicos batallaban con la aparente inconsistencia entre la mecánica clásica y el electromagnetismo, otro grupo lidiaba con sus propios problemas. A finales del siglo XX aparecieron anomalías en cuanto a la termodinámica del cuerpo negro, que parecía evadir cualquier descripción teórica que se le planteara para un modelo de la radiación asociada con él, hasta que la respuesta pareció esclarecerse cuando se propuso que la energía, en lugar de propagarse de manera continua, lo hacía mediante «paquetes energéticos» llamados “cuantos” cuya energía estaba bien definida. Los sistemas en los cuales estos cuantos y sus asociados son relevantes es materia que le incumbe a la mecánica cuántica. Posterior a su desarrollo apareció la necesidad de dar explicación al sin fin de nuevos sistemas que aparecían con el vertiginoso avance tecnológico que la misma teoría iba propiciando, llegó un momento en el cual se vio en necesidad de explorar sus límites, que no solo rayaban con la mecánica clásica, sino también a la relativista.

La teoría cuántica desde sus inicios ha tenido un lugar especial en la física, no solo por la amplia gama de fenómenos microscópicos que logra explicar y los resultados experimentales que la avalan, sino porque cambió la concepción que se tenía de la naturaleza, que afectó tanto a la física y otras disciplinas científicas como a la filosofía. Esto último también se le puede atribuir a la relatividad. El desarrollo de estas teorías cambió la manera en que concebimos el mundo que nos rodea: la teoría cuántica con la estructura de la materia, mientras que la relatividad, con la del espacio y el tiempo. La primera exhibió la estructura de la materia y dedujo con mucho éxito la manera en que las partículas elementales interactúan entre sí, vinculando el estudio de esta rama con la química; la segunda aseveró que existe una relación entre el espacio y el tiempo de manera que se puede interactuar con ellos, esto permitió describir la gravedad y posteriormente desarrollar un modelo cosmológico físico. Y por esta razón durante largo tiempo ambas teorías parecían describir escenarios completamente distintos.

Es natural ahora plantearnos la existencia de un escenario en el que ambas teorías convivan. Esto es, un fenómeno gravitacional de carácter y/o escala cuántica, que vendría a ser adecuadamente descrito por una «teoría de gravedad cuántica». El primero de estos ambientes se logró formulando un modelo en el que tanto la mecánica cuántica como la relatividad especial describieran un mismo sistema, encontrando consistencia entre ambas descripciones y dando como resultado la teoría cuántica de campos. Seguido de esto se llevó este formalismo a los espacios curvos, es decir, en lugares con presencia de gravedad. Ahora bien, este último estudio corresponde al de las partículas y su comportamiento en las cercanías de un campo gravitacional, el cual sigue siendo clásico. Y, contrario a lo que pudiera parecer, no ha sido posible desarrollar este estudio de la relatividad general dentro del esquema de la teoría cuántica. Es decir, la gravitación no se ha podido examinar como las demás interacciones en el formalismo de los campos cuánticos. A lo largo del siglo XX se desarrollaron cuantiosas ideas que proponían resolver el problema de una u otra manera, hasta el día de hoy no se conoce que alguna de ellas haya tenido éxito a pesar de los avances en las áreas afines.

No discutiremos aquí la dificultad de encontrarla, pero sí los alcances que tendría. Por un lado, sistemas gravitacionales como los agujeros negros no cuentan con una descripción total por parte de la relatividad general. En particular, cuando se aproxima a estudiar las singularidades físicas aparecen problemas en la misma teoría que hacen imposible ofrecer una adecuada descripción. En general, ninguna singularidad física puede ser tratada en términos de una teoría de gravedad clásica. Este es un problema puesto que no sabemos qué ocurre con la energía y la información al adentrarse en las profundidades de estos objetos. Más aún, el modelo cosmológico estándar ofrece una descripción parcial del origen del Universo. Pues al acercarnos a tiempos cada vez más pequeños (ceranos a la singularidad) los formalismos clásicos se vuelven obsoletos. Por otro lado, la gravedad entendida como interacción entre el contenido del espacio, en principio, debería poseer un mediador que permita describirla, un corpúsculo dentro del zoológico de partículas elementales en la naturaleza. Por supuesto, es trabajo de las teorías cuánticas ofrecer una descripción apropiada de esta partícula y sus interacciones.

Actualmente el santo grial de la física teórica es un estudio que describa en un mismo formalismo las cuatro interacciones fundamentales (gravedad, electromagnetismo y nucleares fuerte y débil), denominada como “teoría del todo”. Es imposible empezar a resolver el problema sin antes contar con una adecuada descripción para la gravedad cuántica. Y como mencionamos existen en la actualidad diversas teorías cuyo objetivo es alcanzar este estudio, por más de 90 años esta búsqueda no se ha detenido y debido a ello podemos considerar una propuesta diferente para entender desde otra perspectiva al problema. La idea que ahora presentamos se inspira en el trabajo de Dirac para la cuantización de la carga eléctrica, que dio origen a la cuantización topológica, un método para calcular espectros discretos con base en la estructura topológica inherente en un sistema. Esta propuesta ha sido usada en diferentes áreas de la física como una alternativa para el cálculo de estos espectros. Es de nuestro interés explorar esta idea.

La idea general es emplear una teoría clásica que describa adecuadamente un fenómeno y adaptarla al lenguaje de la geometría diferencial, es decir, asociar una estructura geométrica capaz de representar a dicho sistema y sus propiedades, lo cual, a su vez, motiva el estudio de esta disciplina. Con ello es mucho más cómodo emplear sus conceptos y herramientas para obtener toda la información geométrica y topológica disponible. El objeto que nos va a permitir hacer esto es conocido como “haz fibrado principal”. Si bien la cuantización topológica será nuestro punto de partida, no vamos a limitarnos a ella; el objetivo es desarrollar una teoría completa, capaz de extraer la información del sistema cuántico asociado. Para conseguirlo vamos a partir del supuesto que todo sistema es por naturaleza cuántico y su información existe aún en sus versiones clásicas.

Por supuesto los resultados que arroja deben ser analizados adecuadamente y poseer consistencia física, además de ser comparados con la información disponible de otros modelos (principalmente con la cuantización canónica) en los casos que sea posible. A pesar de la diversidad de sistemas en los cuales se ha empleado, y al igual que las demás propuestas de gravedad cuántica, aún no arroja suficiente información como para ser una descripción completa. El principal problema de la cuantización topológica es que aún no se sabe cómo construir los estados y su evolución en las configuraciones, pues no hay un análogo a la ecuación de Schrödinger. Una teoría cuántica debe proveer tres elementos: observables (un espectro discreto), estados cuánticos y su evolución. Por amplia que sea la gama de observables que se pueden calcular con esta propuesta, al no dar una descripción de los elementos restantes, se convierte en un método de extracción para calcular espectros discretos en un sistema cuántico. Y aún cuando estas descripciones estuvieran disponibles no se garantiza que sea la solución al problema antes planteado.

Siendo una teoría incompleta, el presente estudio arroja resultados importantes que apoyan en la comprensión global sobre el problema de la cuantización de un sistema físico. Siendo así, presentamos el formalismo de la **cuantización topológica** enfocada a la teoría de la gravedad. Para tratarla formalmente vamos a partir de la construcción de los espacios topológicos para posteriormente desarrollar una breve introducción de la geometría diferencial. Este estudio abarca desde las variedades diferenciales y el álgebra tensorial con sus principales resultados hasta los grupos de Lie, haces fibrados y sus conexiones. Esta estructura no es en vano, una comprensión de los objetos abstractos involucrados nos permitirá desarrollar la física de manera más precisa. Sin embargo, debido a ello vamos a dividir este enfoque en dos; la primera parte se va a encargar de las herramientas matemáticas pertinentes. Y dado que nos vamos a centrar en la gravitación daremos un pequeño repaso de la relatividad general para iniciar la segunda parte, que se dedica enteramente a la física del formalismo, ofreciendo la construcción de la cuantización topológica y repasando algunos de sus principales resultados en mecánica clásica para finalmente concluir con un análisis gravitacional enfocado en el modelo cosmológico estándar.

Parte I

Geometría diferencial

1 Topología

«La axiomatización es un procedimiento no solo fructífero, sino impecable desde el punto de vista lógico, además de garantizar la más amplia libertad en la investigación científica. Proceder de manera axiomática no significa otra cosa que pensar conscientemente.»

David Hilbert

Nuestro objetivo principal en este capítulo es introducir las bases de la topología como estructura sobre la que descansa la geometría. Una visión general nos acerca al estudio de las propiedades de los espacios que son previas a medirlo. En el margen de la física, poder medir una cantidad es fundamental y un primer paso para hacerlo es por medio de nuestra capacidad de medir en el espacio (como concepto generalizado, no solo como espacio físico); esto viene con una noción de geometría. Sin embargo, hay propiedades físicas que se relacionan con la estructura misma del espacio, su estudio le corresponde a la topología, que generaliza las ideas de continuidad, cercanía, convergencia, etc.

Una teoría física que busca la estructura última del Universo debe contemplar la dimensionalidad, continuidad y otras propiedades topológicas que lo determinan. Incluso aquellas que buscan ofrecer respuesta al problema de la cuantización de la gravedad nunca dejan de lado la estructura del espacio; ya sea proponiendo dimensiones superiores o bien, añadiendo una estructura intrínseca al espacio 4-dimensional usual para apoyar las descripciones que nuestras teorías clásicas no alcanzan a describir. Así, nuestro objetivo es conocer las propiedades topológicas (antes que geométricas) del espacio (aún en los casos generales en los que no solo buscamos represente a nuestro Universo).

En cuanto a un sentido físico se puede afirmar que a la topología le concierne la relación entre puntos y regiones. Es por ello, y dado el significado mismo de “topología”, que nos interesa una teoría que nos permita distinguir claramente el concepto de cercanía, que al mismo tiempo nos ofrece un escenario sobre el cual colocar los objetos que buscamos describir. En particular, los conjuntos abiertos son aquellos en que las «cosas reales» pueden existir [1].

Hay mucho que decir al respecto, más aún con un enfoque matemático, a pesar de ello nos es suficiente una breve introducción en que buscamos familiarizarnos con

la estructura del espacio y sus propiedades. Conforme avancemos añadiremos otras, adicionales a las ya existentes. Así, lo que parecería vago como “en una vecindad...” pasará a tomar un significado específico que a su vez desentraña lo que esta pequeña frase quiere dar a entender. Mientras vayamos avanzando esta vecindad se convertirá en un abierto, un sistema coordinado, un marco local o hasta un comarco ortonormal; las estructuras consecuentes son el resultado de esta siempre existente propiedad del espacio de ser, justamente, un objeto topológico.

1.1. Elementos de teoría de conjuntos

Vamos a partir del hecho que un conjunto cualquiera queda totalmente determinado por sus «elementos». Es decir, dada la caracterización de los objetos que conforman a un conjunto queda unívocamente definido. En este sentido, un conjunto es igual a otro si y solo si ambos contienen exactamente a los mismos elementos. Denotamos la pertenencia de un elemento x a un conjunto A como $x \in A$, o también $A \ni x$. Bajo estas mismas consideraciones se puede descomponer un conjunto en otros conjuntos que contienen menor cantidad de elementos.

Definición 1.1.1 (Contención). Sean A, B cualesquiera dos conjuntos. Decimos que A es *subconjunto* de B , y lo denotamos por $A \subseteq B$ (o también como $B \supseteq A$), si todo elemento $x \in A$ también es elemento de B , es decir, $x \in B$.

Esta notación incluye el caso en que ambos conjuntos son iguales. Si ésta posibilidad se desea excluir, es decir, $A \neq B$, usamos la notación $A \subset B$. Para esto tiene que haber al menos un elemento de B que no esté en A . Escribimos que un elemento no pertenece a un conjunto como $a \notin A$.

Observación. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$ [?].

Se puede pensar en el conjunto que contenga a todos los elementos bajo estudio, al que llamamos “conjunto universal”. También podemos construir conjuntos a partir de otros ya definidos o con base a una o varias propiedades de los objetos que los caracterizan. Esto último se puede representar escribiendo a un conjunto como “todos los elementos x que cumplen p ”, lo cual se denota como

$$A = \{x \mid x \text{ cumple } p\}, \quad (1.1)$$

el símbolo \mid se lee “tal que”¹.

Definición 1.1.2 (Producto cartesiano). Sean A y B conjuntos, definimos el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}. \quad (1.2)$$

Observación. Los elementos de $A \times B$ son pares (a, b) en las que el orden es importante. Esto es a lo que llamamos “par ordenado”, pues para que un elemento sea igual a otro, sus primeras componentes son iguales entre sí, y de la misma forma las segundas. Es decir, $(a, b) = (\alpha, \beta)$ si y solo si $a = \alpha$ y $b = \beta$ [2].

Definición 1.1.3 (Complemento). Sea $A \subset X$ un subconjunto de X , definimos al *complemento*² de A respecto a X como³

$$A^c := X - A := \{x \in X \mid x \notin A\}. \quad (1.3)$$

¹En ocasiones también se usa “.”. Ambos símbolos solo se ocupan al caracterizar un conjunto dentro de nuestra notación, fuera de ello carecen de este significado.

²O simplemente el “complemento de A ” cuando X se sobreentiende.

³La notación “:=” significa “igualdad por definición”.

Notemos que los conjuntos A y A^c no comparten ningún elemento de X .

Definición 1.1.4 (Conjuntos ajenos). Sean $A, B \subseteq X$, A y B son *ajenos* si para todo $x \in A$ y $y \in B$, se tiene que $x \notin B$ y $y \notin A$.

Sin embargo, también existen conjuntos que comparten elementos entre sí, además de aquellos que están contenidos en otros.

Definición 1.1.5 (Unión e intersección). Sean A y B conjuntos, definimos su *unión* e *intersección* como los conjuntos

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}, \quad (1.4)$$

y

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}, \quad (1.5)$$

respectivamente [3].

Observación. A^c es ajeno a A , y es tal que los elementos de A y los de A^c forman exactamente a X bajo la unión. En general, podemos descomponer a un conjunto como unión de conjuntos ajenos.

Hay muchas otras maneras de formar nuevos conjuntos, de entre ellas tenemos a las “familias de conjuntos”, que son «conjuntos», o más bien colecciones, cuyos elementos son conjuntos.⁴ Una de ellas, que vamos a requerir a lo largo de éste capítulo, es la siguiente.

Definición 1.1.6 (Conjunto potencia). Sea X un conjunto, definimos al *conjunto potencia* como la familia de todos los subconjuntos de X ; y lo denotamos como 2^X o simplemente como $\mathcal{P}(X)$.

Es importante notar que esta colección de subconjuntos contiene al “conjunto vacío”, aquel que no contiene ningún elemento, denotado por \emptyset [4] [5].

1.1.1. Relaciones

Nos interesa ahora el concepto de «orden», además del sentido intuitivo es muy útil hacernos del concepto formal, que involucra la «relación» entre elementos de un conjunto. Dedicamos ésta subsección a un breve tratamiento del álgebra de relaciones.

Consideremos una relación (intuitivamente) entre dos objetos cualesquiera. La idea básica es que la relación puede ser representada como el conjunto, R , de los pares de objetos mutuamente relacionados; es decir, un conjunto del cual sus elementos son pares ordenados; su dominio sería el conjunto $\{x \mid \exists y : (x, y) \in R\}$ y su rango, $\{y \mid \exists x : (x, y) \in R\}$. Si x está relacionado con y por medio de la relación R decimos que “ x está R -relacionado con y ” y lo denotamos como xRy .

⁴Usaremos la palabra “familia” siempre que pueda haber confusión entre los términos aquí descritos.

Definición 1.1.7 (Relación). Sean A y B conjuntos. Una relación R entre estos es un subconjunto de $A \times B$. Sean $x \in X$ y $y \in B$, decimos que x está R -relacionado con y , xRy , si $(x, y) \in R \subset A \times B$.

Un caso particular de relaciones son las funciones.

Definición 1.1.8 (Función). Sean A, B conjuntos, una *función*⁵ es una regla de correspondencia que asigna un elemento de $y \in B$ para cada $x \in A$, que escribimos como $f : A \rightarrow B$. Si f es definida mediante una fórmula explícita lo podemos denotar como $x \mapsto f(x)$, donde $f(x) = y \in B$.

Observación. En efecto, una función $f : A \rightarrow B$ nos permite definir la relación $R := \{(x, f(x)) \mid x \in A \text{ y } f(x) \in B\}$. Sin embargo, cabe aclarar que, por definición, un elemento $x \in A$ sólo puede ser asignado a un elemento en B ; mientras que más de un elemento en A puede ser enviado a un solo elemento en B .

Un buen ejemplo de esto último es la “función constante”, definida como

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y_0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

esto es $f(x) = y_0$, donde $y_0 \in B$ es un elemento particular. Es decir, la función f asigna a cada $x \in A$ al elemento $y_0 \in B$. Al conjunto A le decimos “dominio” y a B , “rango” o “codominio”, denotados como $\text{Dom}(f)$, $\text{Rang}(f)$ y $\text{Cod}(f)$, respectivamente. Mientras que al subconjunto de B dado por $\text{Im}(f) = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$, lo nombramos “imagen” de f . Análogamente, definimos la “imagen inversa” (o “pre-imagen”) de un subconjunto $C \subset B$ como $f^{-1}(C) := \{x \in A \mid \exists y \in C : f(x) = y\}$. Adicional a esto podemos asignar algunas propiedades a las funciones con base en los conjuntos que acabamos de mencionar.

Definición 1.1.9 (Inyectividad, suprayectividad y biyectividad). Sean A, B conjuntos y f una función de A a B ($f : A \rightarrow B$), definimos lo siguiente:

- f es *inyectiva* (o *uno a uno*) si para $x, y \in A$ tales que $x \neq y$, implica $f(x) \neq f(y)$;
- es *suprayectiva* si para cada $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- es *biyectiva* (o una *biyección*) si es ambas (tanto suprayectiva como inyectiva).

En ocasiones se trabaja con conjuntos entre los cuales se definen funciones en las que a menudo no se quiere tomar la totalidad de un conjunto sino un subconjunto de este como su dominio, para ello usamos la “restricción” de la función a dicho subconjunto: si $f : A \rightarrow B$, entonces definimos $f|_C : C \rightarrow B$ donde $C \subseteq A$ [5].

⁵A lo largo del texto se usarán indistintamente los términos “mapeo” y “función”.

También se puede definir una relación en un conjunto X , en la cual ésta es un subconjunto de $X \times X$ y obtenemos una definición equivalente en la que $A = B$.⁶ Hay muchas otras relaciones que no necesariamente se derivan de funciones, por ejemplo, el mismo producto cartesiano de los conjuntos A y B . Además, a una relación R se le puede dotar de otras propiedades; es decir, a los elementos de un conjunto se les puede relacionar entre sí por medio de R .

Definición 1.1.10 (Relación de equivalencia). Sea R una relación en un conjunto X . Definimos a R como una *relación de equivalencia* si satisface lo siguiente:

- reflexividad: para todo $x \in X$, xRx ;
- simetría: para todo $x, y \in X$, xRy implica yRx ;
- transitividad: para todo $x, y, z \in X$ si xRy y yRz , entonces xRz .

Además, se puede caracterizar al subconjunto de todos los elementos que están relacionados con un elemento particular.

Definición 1.1.11 (Clase de equivalencia). Sean X un conjunto, R una relación de equivalencia y $a \in X$. Definimos la clase de equivalencia de a como el subconjunto

$$[a] = \{b \in X \mid aRb\}, \quad (1.7)$$

es decir, el de todos los elementos que están relacionados con a .

Observación. Es importante notar que una relación de equivalencia en X parte a este conjunto en distintas clases de equivalencia en las cuales todos los elementos en cualquier clase son equivalentes. El conjunto de todas esas clases de equivalencia se denota como X/R [1] [3].

Existen además el inverso de una relación R y la “relación diagonal” en X , el primero de ellos invierte al par ordenado que pertenece a R , mientras que el segundo se define como $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$.

Definición 1.1.12 (Inverso de una relación). Sea R una relación, definimos la *relación inversa*, R^{-1} , como el conjunto

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}. \quad (1.8)$$

Recordemos la relación R del producto cartesiano de los conjuntos A y B , la relación inversa R^{-1} está dada entonces por el conjunto $B \times A$.

Observación. Notemos que el rango y el dominio se invierten. Es decir, Si R es una relación entre los conjuntos A y B que tiene como dominio A y rango B , entonces R^{-1} tiene por dominio a B y rango A .

⁶La observación anterior también se le puede aplicar, pues es un caso particular.

Definición 1.1.13 (Composición de relaciones). Sean R y S relaciones entre X y Y y entre Y y Z , definimos su *composición* como el conjunto de los pares ordenados $(a, c) \in X \times Z$ para los cuales existe $b \in Y$ tal que aRb y bSc . A ésta relación la denotamos como $R \circ S$ o simplemente RS .

Observación. En términos de la teoría de conjuntos, la transitividad se puede escribir como $R \circ R \subset R$.

Para la relación SR que se compone de los pares ordenados (c, a) debe existir b tal que cRb y bSa . Esto es, en general, $RS \neq SR$. Comentarios totalmente análogos se pueden hacer respecto a las funciones, quedando así definidas la composición entre funciones y la inversa (en caso de existir). Dependiendo de la literatura nos encontraremos con que la composición de funciones $f[g(x)]$ se denota como $[f \circ g](x)$ o $[g \circ f](x)$; es decir, es una convención el orden en la notación $(_ \circ _)$. A lo largo de este trabajo vamos a trabajar con $[f \circ g](x) := f[g(x)]$. Respecto a esto, notemos que si R es una relación entre X y Y y R^{-1} su inversa (una relación entre Y y X), entonces la composición $R \circ R^{-1}$, o simplemente RR^{-1} , es una relación en X , donde existe $y \in Y$ tal que xRy y $yR^{-1}x$. Esta es la relación diagonal en X , que denotamos como Δ_X . Análogamente, la relación $R^{-1}R$ denotada como Δ_Y es la relación diagonal en Y . De igual manera, estas relaciones pueden representar funciones, en cuyo caso reciben el nombre de “identidad”, que denotamos como $\mathbb{1}_X$ o $\mathbb{1}_Y$, según sea el caso.

Las relaciones que nos interesan son las que nos permiten definir el ordenamiento de un conjunto.

Definición 1.1.14 (Pre-orden). Un *pre-orden* en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva.

Análogamente a la simetría en una relación se puede definir la propiedad de *antisimetría* de R como aquella en la que si xRy , entonces no se puede tener yRx . En otras palabras, $(y, x) \notin R$ si $(x, y) \in R$. Si además R es reflexiva, podemos escribir que si xRy se puede dar que yRx si y sólo si $x = y$.

Definición 1.1.15 (Conjunto parcialmente ordenado). Un *conjunto parcialmente ordenado* (o *poset*) es un conjunto X con una relación \preceq que satisface:

- Reflexividad: para todo $x \in X$, $x \preceq x$,
- Antisimetría: para todo $x, y \in X$, si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$,
- Transitividad: para todo $x, y, z \in X$ si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

Análogamente a la notación \subset , \prec se reserva para denotar que $a \preceq b$ y $a \neq b$, para cualesquiera elementos a, b .

Observación. La transitividad, en términos de la composición queda descrita como la relación R que cumple $R \circ R \subset R$ [1] [6] [3] [4].

Definición 1.1.16 (Conjunto totalmente ordenado). Un conjunto X *totalmente ordenado* es aquel que cuenta con una relación \prec antisimétrica y en la que, para todo $x, y \in \text{Rang}(\prec) \cup \text{Dom}(\prec)$, se cumple que $x \prec y$ o $y \prec x$, para $x \neq y$.

El conjunto \mathbb{R} de los números reales está totalmente ordenado con respecto al ordenamiento usual \leq , para el cual si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b , o que b es mayor o igual que a .

Definición 1.1.17 (Cubierta de un elemento). Sea X un poset. Un elemento $y \in X$ cubre a otro elemento $x \in X$ si $x \prec y$ y para el cual no existe ningún $z \in X$ tal que $x \prec y \prec z$. También se dice que y cubre a x .

De acuerdo con ello es posible que una cubierta esté asignada a más de un elemento.

Observación. Ningún real r posee una cubierta, puesto que para cualesquiera dos números reales, siempre existe uno mayor a ellos.⁷

Ahora bien, sea A un subconjunto de X , $A \subset X$, tenemos que $A \in \mathcal{P}(X)$. Es de nuestro interés considerar para la convergencia de sucesiones a un elemento $x \in X$ y una colección de subconjuntos $\Sigma(x)$ que contengan a ese elemento en particular⁸. Esto nos va a ayudar a determinar si una sucesión converge a x . Por supuesto $\Sigma(x) \subset \mathcal{P}(X)$, o lo que es lo mismo, $\Sigma(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. De manera similar tenemos la colección $\Sigma := \{\Sigma(x) \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ y análogamente vemos que $\Sigma \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$.

Observación. EL conjunto $\mathcal{P}(X)$ es parcialmente ordenado por la relación natural \subset . Es decir, \prec en la teoría de conjuntos significa \subset .

Los conjuntos parcialmente ordenados juegan un papel importante en la teoría clásica de la relatividad general. Específicamente, sea \mathcal{M} una *variedad espaciotemporal* con una *métrica lorentziana*. Sean $q, p \in \mathcal{M}$, definimos $q \preceq p$ si p está en futuro causal de q ; es decir, podemos unir a p y q por medio de una trayectoria cuyo vector tangente es en todas partes tipo tiempo o nulo [1] [7].

1.1.2. Redes

Una de las ramas de las matemáticas en la cual la estructura de los conjuntos parcialmente ordenados aparece naturalmente es en la lógica proposicional, donde, dadas las proposiciones p y q , la relación $p \leq q$ es definida de manera que “ p lógicamente implica q ”; esto es, si p es verdadero, entonces necesariamente q también lo es. Por otro lado, hay también una estructura dada por las funciones proposicionales “ \wedge ” y “ \vee ”, conjunción y disyunción, respectivamente; entonces, dados cualesquiera par de proposiciones p y q , podemos formar las proposiciones “ $p \wedge q$ ” y “ $p \vee q$ ”.

Definición 1.1.18 (Encuentro). Sea \mathcal{P} un poset, un *encuentro* (o *máximo límite inferior*) de $a, b \in \mathcal{P}$ es un elemento $a \wedge b \in \mathcal{P}$ tal que:

⁷Es bien sabido que los números reales no están acotados.

⁸Llamados la “vecindad” del punto x , concepto que se aclarará más adelante.

- $a \wedge b$ es un límite inferior de a y b , esto es, $a \wedge b \preceq a$ y $a \wedge b \preceq b$;
- $a \wedge b$ es un máximo de los límites inferiores, es decir, si existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $c \preceq a$ y $c \preceq b$, entonces $c \preceq a \wedge b$.

De manera análoga, contamos con el opuesto.

Definición 1.1.19 (Ensamble). Un *ensamble* en \mathcal{P} (o *mínimo límite superior*) de $a, b \in \mathcal{P}$ es un elemento $a \vee b$ tal que:

- $a \vee b$ es un límite superior de a y b , o lo que es lo mismo, $a \preceq a \vee b$ y $b \preceq a \vee b$;
- $a \vee b$ es un mínimo de los límites superiores, más precisamente, si existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $a \preceq c$ y $b \preceq c$, entonces $a \vee b \preceq c$.

Lema 1.1.1. *El ensamble y el encuentro, de existir, son necesariamente únicos.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{P}$, consideremos $a \wedge b \in \mathcal{P}$. Supongamos que existe $\eta \in \mathcal{P}$ tal que es un máximo del límite inferior de a y b . Entonces tenemos que, como η es un límite inferior

$$\eta \preceq a \wedge b \preceq a, \quad (1.9)$$

y lo mismo para b . Por otro lado, $a \wedge b$ también es un límite inferior, por lo que

$$a \wedge b \preceq \eta \preceq a, \quad (1.10)$$

análogamente para b . Es decir, tenemos que

$$a \wedge b \preceq \eta, \quad \eta \preceq a \wedge b. \quad (1.11)$$

Y como la relación \preceq es antisimétrica, se cumple

$$\eta = a \wedge b. \quad (1.12)$$

Por lo que $a \wedge b$ es único.

Un razonamiento análogo se emplea para $a \vee b$.

QED

Definición 1.1.20 (Red). Una *red* es un poset \mathcal{L} en el cual todo par de elementos posee un ensamble y encuentro.

En una red hay un par de elementos particularmente especiales que consideramos a partir de la relación \preceq .

Definición 1.1.21 (Elementos unidad y nulo en la red). Sea \mathcal{L} una red, definimos lo siguiente:

- un elemento *unidad* en \mathcal{L} , que denotamos como 1 , es aquel que cumple $a \preceq 1$ para todo $a \in \mathcal{L}$.

- un elemento *nulo* en \mathcal{L} , que se denota como 0, es tal que, para cualquier $a \in \mathcal{L}$, $0 \preceq a$.

Todas las redes pueden considerarse con un elemento unidad y nulo.

Definición 1.1.22 (Red completa). Decimos que una red es *completa* si existen un máximo límite inferior y un mínimo límite superior para cada subconjunto de la red.

Consideremos una red \mathcal{L} . Por un mínimo límite superior de un subconjunto S de \mathcal{L} se entiende un elemento $u \in \mathcal{L}$ tal que

- para toda $a \in S$, $a \preceq u$,
- si $v \in \mathcal{L}$ es cualquier otro elemento, tal que $a \preceq v$, para toda $a \in S$, entonces $u \preceq v$.

Análogamente para el máximo límite inferior.

Observación. Esto se garantiza por la definición de red. Es decir, los límites (máximo inferior y mínimo superior) existirán para todo subconjunto finito de \mathcal{L} .

Denotamos por $\bigwedge S$ y $\bigvee S$ al máximo límite inferior y al mínimo límite inferior respectivamente de un subconjunto S de una red.

Definición 1.1.23 (Red distributiva). Sea \mathcal{L} una red, decimos que es *distributiva* si, para todo $a, b, c \in \mathcal{L}$, tenemos

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad (1.13)$$

y

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \quad (1.14)$$

Definición 1.1.24 (Complemento ortogonal). Un mapeo que actúa como $a \mapsto a'$ en un poset \mathcal{P} es un *complemento ortogonal* si, para todo $a, b \in \mathcal{P}$, se cumple:

- $(a')' = a$,
- $a \preceq b$ implica $a' \preceq b'$,
- $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$.

Un poset con un operador complemento ortogonal se dice que está “complementado ortogonalmente”.

Definición 1.1.25 (Álgebra booleana). Un *álgebra booleana* es una red complementada ortogonalmente y distributiva.

Observación. Notemos que $a \preceq b$ si y solo si $a \wedge b = a$ si y solo si $a \vee b = b$.

Definición 1.1.26 (Semigrupo). Un *semigrupo* es un conjunto equipado con una ley de combinación asociativa y un elemento unitario.

Observación. Notemos que, a diferencia del caso de un grupo, el elemento inverso puede no existir.

\mathcal{L} es un semigrupo con respecto a la operación \wedge con 1 el elemento unitario; sin embargo, no es un grupo, puesto que no hay un elemento en \mathcal{L} de tal forma que 1 tenga inverso. De manera similar, $0 \vee a = a$, y por ende \mathcal{L} es también un semigrupo con respecto a la operación (relación) \vee con 0 como el unitario.

En resumen, para todo $a \in \mathcal{L}$

$$1 \vee a = 1, \quad 0 \wedge a = 0. \quad (1.15)$$

Esto es, son elementos absorbentes para los semigrupos \vee y \wedge respectivamente⁹.

Finalmente, si la red \mathcal{L} es distributiva, entonces todo complemento a' de un elemento $a \in \mathcal{L}$ es único.

Consideremos ahora algunos ejemplos.

- La familia $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X es un álgebra booleana, en donde

$$\begin{aligned} A \wedge B &:= A \cap B, \\ A \vee B &:= A \cup B; \end{aligned} \quad (1.16)$$

definiendo $A \preceq B$ como $A \subseteq B$. En general, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X el encuentro y el ensamble de una familia de conjuntos se definen como la intersección y la unión, respectivamente, de los conjuntos en la familia. Los elementos unitario y nulo son

$$\begin{aligned} 1 &:= X, \\ 0 &:= \emptyset. \end{aligned} \quad (1.17)$$

El complemento de red A' de $A \subset X$ es definido como el conjunto complemento A^c . Claramente esta red es completa.

- Sea V un espacio vectorial, el conjunto de subespacios lineales de V es una red con

$$W_1 \wedge W_2 := W_1 \cap W_2, \quad (1.18)$$

y $W_1 \cup W_2$ definido como el subespacio más pequeño que contiene a los subespacios W_1 y W_2 . Si V es un espacio de Hilbert, la red de subespacios lineales *cerrados*¹⁰ es complementado, donde el complemento de un subespacio W es

⁹Es decir, los subgrupos que se forman con dicha operación.

¹⁰Si V es de dimensión infinita, la disyunción $W_1 \vee W_2$ de dos subespacios cerrados es definida como la «cerradura» del subespacio más pequeño $[W_1, W_2]$ que contiene tanto a W_1 como a W_2 ; el subespacio $[W_1, W_2]$ en sí mismo puede no ser cerrado.

definido como su complemento ortogonal con respecto al producto interior en el espacio de Hilbert $\langle _, _ \rangle$:

$$W' := W_{\perp} = \{v \in V \mid \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\}. \quad (1.19)$$

Correspondientemente, el conjunto de todos los operadores de proyección hermitianos en V forman también una red complemento.

Esta última red en particular ha sido usada extensamente dentro de los fundamentos axiomáticos de la teoría cuántica general. Difiere sorprendentemente de la red análoga de proposiciones en la mecánica clásica que no es distributiva. Esto es porque el tipo básico de preguntas “si-no” que se pueden hacer en física clásica es si el punto en el espacio de estados representa al estado del sistema o no, encontrándose en un subconjunto particular. Esto es, la red proposicional de la física clásica es esencialmente una red de subconjuntos del espacio de estados, el cual es automáticamente distributivo; o más precisamente, la red usualmente se elige como el conjunto de subespacios que son *medidos* con respecto a alguna estructura medible. Esta distinción entre las redes clásicas y cuánticas han dado lugar a la rama de “lógica cuántica”.

Una red \mathcal{L} satisface varias relaciones algebraicas importantes:

- (L1) *Indempotencia*: para todo $a \in \mathcal{L}$, $a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$;
- (L2) *Conmutatividad*: para cualesquiera $a, b \in \mathcal{L}$ $a \vee b = b \vee a$ y $a \wedge b = b \wedge a$;
- (L3) *Asociatividad*: sean $a, b, c \in \mathcal{L}$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ y $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Y en adición, cualquier red satisface las leyes de *absorción*

- (L4) si $a, b \in \mathcal{L}$, $a \wedge (a \vee b) = a$ y $a \vee (a \wedge b) = a$.

Inversamente, se tiene el teorema siguiente.

Teorema 1.1.2. *Para cualquier conjunto \mathcal{L} no vacío, equipado con las operaciones binarias \wedge y \vee que satisfacen las condiciones (L1)-(L4) pueden dar lugar a un orden parcial definiendo $a \preceq b$ si $a = a \wedge b$.*

La estructura resultante es una red en la cual los operadores encuentro y ensamble son $a \wedge b$ y $a \vee b$ respectivamente.

Demostración. Sabemos que en un conjunto \mathcal{L} , una relación debe cumplir con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva para conseguir la estructura de un poset. Definimos la relación $a \preceq b$ como aquella que cumple $a = a \wedge b$. Consideremos primeramente la operación encuentro, \wedge . Sean $a, b, c \in \mathcal{L}$ se tiene lo siguiente:

- por (L1) sabemos que $a \wedge a = a$, y (por definición) $a \preceq a$, entonces \preceq es reflexiva;

- supongamos que

$$\begin{aligned} a = a \wedge b &\Rightarrow a \preceq b, \\ b = b \wedge a &\Rightarrow b \preceq a, \end{aligned} \tag{1.20}$$

y de (L2)

$$\begin{aligned} a = a \wedge b = b \wedge a = b, \\ \text{i.e., } a = b; \end{aligned} \tag{1.21}$$

por lo que \preceq es antisimétrica;

- tomamos ahora

$$a = a \wedge b \Rightarrow a \preceq b, b = b \wedge c \Rightarrow b \preceq c, \tag{1.22}$$

de donde, usando (L3),

$$\begin{aligned} a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c, \\ \therefore a \preceq c, \end{aligned} \tag{1.23}$$

por lo que \preceq es una relación transitiva.

Notemos que esto se consigue demostrar (análogamente) con la operación ensamble, \vee . Así, tenemos que \preceq dota a \mathcal{L} de la estructura de red. [1] QED

1.2. Topología general

Empezaremos nuestra discusión de los espacios topológicos por el problema de la convergencia de sucesiones; esto lo vamos a trabajar en espacios que no necesariamente cuenten con una métrica (es decir, una noción de «distancia»). Así que durante esta sección estudiaremos conjuntos de este estilo. (Nótese que incluso aquellos que poseen una métrica pueden estudiarse bajo este enfoque)

En espacios no-métricos ya no es posible definir el concepto de “cercanía” sin usar los números reales; así que en la convergencia de una sucesión, en su lugar, se «persiguen» las “colas” de dicha sucesión con subconjuntos que se podrían considerar como generalización de las *bolas* $B_\epsilon(x)$ en espacios métricos. Una estructura así consiste en asociar una colección $\Sigma(x)$ de subconjuntos de X para cada $x \in X$ y que está formado por elementos «vecinos»; la convergencia se puede definir en términos de éstos subconjuntos.

Definición 1.2.1 (Convergencia). Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X decimos que *converge* a x con respecto a $\Sigma(x)$ (que denotamos como $x_n \xrightarrow{\Sigma(x)} x$) si para toda $N \in \Sigma(x)$ existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in N$.

A los conjuntos N los llamaremos *vecindades* de x .

$\Sigma(x)$ vendrían a ser familias de vecindades. La definición se puede reformular en términos de las colas de las sucesiones, definidas como $T_n := \{x_k | k > n\}$.

Definición 1.2.2 (Convergencia). Una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a x con respecto a $\Sigma(x)$ si para toda $N \in \Sigma(x)$ existe n_0 tal que $T_{n_0} \subset N$.

Observación. Ésto no excluye el que una sucesión converja a más de un punto. [1]

1.2.1. Espacio vecindad

Es necesario investigar las propiedades que debería tener $\Sigma(x)$ en el sentido de otorgar una noción de convergencia que concuerde con nuestra intuición. Para ello consideremos, en particular, la sucesión $\{x_n\}$ constante, *i.e.*, $x_n = x$, $n = 1, 2, \dots$, que sabemos siempre converge a x ; entonces una condición necesaria para que una sucesión converja es que cada vecindad de x debe contener a x , es decir, $x \in \Sigma(x)$.

Observación. El conjunto \emptyset no es elemento de $\Sigma(x)$ para ninguna $x \in X$.

Por otro lado, ¿cuándo dos familias distintas de vecindades llevan a los mismos conjuntos de sucesiones convergentes? Para ello consideramos lo siguiente.

Definición 1.2.3 (Colecciones finas y gruesas). Sean $\alpha, \beta \subset \mathcal{P}(X)$, la colección β es más *fina* que la colección α (o equivalentemente, que la α es más *gruesa* que β) si para cada $A \in \alpha$ existe un subconjunto $B \in \beta$ tal que $A \subset B$, a lo que denotamos como $\alpha \vdash \beta$.

Las colecciones finas son aquellas con mayor cantidad de conjuntos, mientras que las gruesas tienen menos, de lo cual podemos notar lo siguiente:

- si $\alpha \subset \beta$, entonces β es más fina que α ;
- la definición (1.2.1) de convergencia con respecto a $\Sigma(x)$ es equivalente a que el conjunto de las colas de la sucesión, $T := \{T_1, T_2, \dots\}$, es más fina que la familia $\Sigma(x)$, *i.e.*, $\Sigma \vdash T$;
- la relación \cong es transitiva, pues si $\alpha \cong \beta$ y $\beta \cong \gamma$, entonces $\alpha \cong \gamma$. [8]

Aquí contemplamos las vecindades de $x \in X$, $\Sigma(x)$, para las cuales tenemos, además, la siguiente definición.

Definición 1.2.4 (Familias equivalentes). Sean $\Sigma^{(1)}(x)$ y $\Sigma^{(2)}(x)$ dos familias de vecindades para $x \in X$, decimos que son *equivalentes*, $\Sigma^{(1)}(x) \cong \Sigma^{(2)}(x)$, si cada uno es más fino que el otro.

Observación. La relación \cong es de equivalencia, pues:

- $N^{(1)} \cong N^{(1)}$,
- $N^{(1)} \cong N^{(2)}$ implica $N^{(2)} \cong N^{(1)}$,
- si $N^{(1)} \cong N^{(2)}$ y $N^{(2)} \cong N^{(3)}$, entonces $N^{(1)} \cong N^{(3)}$.

Así que dos familias equivalentes de vecindades de $x \in X$ producen la misma colección de sucesiones convergentes a x .

Las vecindades que nos interesan para la convergencia de sucesiones son entonces las de equivalencia. La situación no es totalmente distinta a la de teorías de norma; en particular, es útil encontrar el análogo natural a la «elección de norma», es decir, la colección de condiciones para los elementos de $\Sigma(x)$ que seleccionen una representación única de la familia de colecciones de vecindades equivalentes. [1]

Definición 1.2.5 (Subconjunto supremo). En una red \mathcal{L} , un subconjunto $U \subset \mathcal{L}$ se dice que es un *subconjunto supremo* si, para $a \in U$ y $b \in \mathcal{L}$, se cumple que $a \preceq b$, entonces $b \in U$.

Ahora bien, las propiedades de la convergencia de una familia de vecindades $\Sigma(x)$ no se ve afectada si le añadimos un subconjunto de X que sea un subconjunto supremo de esta familia. Es decir, no hay pérdida de generalidad en asumir que cada $\Sigma(x)$ es un conjunto supremo en la red $\mathcal{P}(X)$.

Observación. Si $\alpha \vdash b$ (α es más gruesa que β) y β es supremo, entonces $\alpha \subset \beta$. Por lo tanto, si tanto α como β son supremos, se sigue que $\alpha \cong \beta$ si y solo si $\alpha = \beta$. Esto es, cada clase de equivalencia tiene justamente una familia suprema.

Lema 1.2.1. *Dada una familia de subconjuntos $\Sigma(x)$, definimos $\Sigma'(x)$ como la colección de intersecciones finitas de subconjuntos de $\Sigma(x)$. Entonces una sucesión en X converge a x con respecto a $\Sigma(x)$ si y solo si converge con respecto a $\Sigma'(x)$.*

Demostración. [\Leftarrow] Dado que

$$\Sigma(x) \subset \Sigma'(x) \Rightarrow \Sigma(x) \vdash \Sigma'(x), \quad (1.24)$$

y por lo tanto, si la sucesión $\{x_n\}$ converge a x con respecto a $\Sigma'(x)$, también lo hace respecto a $\Sigma(x)$.

[\Rightarrow] Por otro lado, si

$$x_n \xrightarrow{\Sigma(x)} x, \quad (1.25)$$

y sean $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Sigma(x)$ cualquier colección finita de subconjuntos de $\Sigma(x)$, entonces existen n_1, n_2, \dots, n_m , tales que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\Rightarrow x_n \in A_1, \\ n > n_2 &\Rightarrow x_n \in A_2, \\ &\vdots \\ n > n_m &\Rightarrow x_n \in A_m. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Consideramos $n > \max(n_1, n_2, \dots, n_m)$, de donde $x_n \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$, por lo que

$$x_n \xrightarrow{\Sigma'(x)} x. \quad (1.27)$$

QED

De lo anterior, en lo que respecta a la convergencia de sucesiones, sin pérdida de generalidad se puede escoger a $\Sigma(x)$ cerrada bajo intersecciones finitas de sus miembros en el sentido algebraico. Junto a demandar que sea una familia suprema ambas condiciones constituyen nuestra «elección de norma» de los elementos de $\Sigma(x)$.

Definición 1.2.6 (Filtro). Sea \mathcal{F} una familia no-vacía de subconjuntos de X que satisface

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- \mathcal{F} es cerrado bajo intersecciones finitas (en el sentido algebraico),
- \mathcal{F} es una familia suprema,

entonces decimos que \mathcal{F} es un *filtro*. [2]

Ahora nuestra idea de convergencia se puede poner en términos de los filtros de X . (Véase la definición de convergencia (1.2.1).)

Definición 1.2.7 (Estructura de vecindad). Una estructura de *vecindad* Σ en un conjunto X es una asignación para cada $x \in X$ de un filtro $\Sigma(x)$ en X cuyos elementos contienen al punto x .

El par (X, Σ) es llamado el *espacio vecindad*¹¹; el filtro $\Sigma(x)$ es conocido como el *filtro vecindad* del punto $x \in X$.

Definición 1.2.8 (Filtro base). Un *filtro base* \mathcal{B} es una familia de subconjuntos de X , no vacíos, tales que si $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.

Las definiciones anteriores junto con (1.2.1) se refieren a la noción más general de convergencia de sucesiones; con el cual tenemos los fundamentos de una variedad de estructuras especiales en las cuales los filtros $\Sigma(x)$ se restringen en varias formas. Uno de esos ejemplos es, justamente, la topología. [1]

Si \mathcal{B} es un filtro base, entonces $\uparrow \mathcal{B} := \{B \subset X \mid \exists A \in \mathcal{B} : A \subset B\}$ es un filtro *generado* por \mathcal{B} , y el filtro base \mathcal{B} se dice que es *base* de ese filtro.

En la práctica, en ocasiones es mejor tratar con los filtros bases en lugar de los generados por estos, pues frecuentemente son más grandes. No se pierde nada al hacerlo, ya que una sucesión converge en un filtro si y solo si converge en cualquier otro filtro base asociado.

Observación. Si \mathcal{B} es un filtro base y $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ es tal que $\alpha \cong \mathcal{B}$, entonces α es también un filtro base.

Además, una colección no vacía \mathcal{B} de subconjuntos de X es un filtro base para un filtro en particular \mathcal{F} en X si y solo si

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$,
- Si $A \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset A$.

Lema 1.2.2. *La colección T de colas de una sucesión (x_1, x_2, \dots) es un filtro base.*

Demostración. Consideramos la colección $T = \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Recordemos que $T_n = \{x_l \mid l > n\}$, de donde, sin pérdida de generalidad, si $m < n$, entonces $T_n \subset T_m$. Por lo que $T_m \cap T_n = T_n$ y como $n \in \mathbb{N}$, siempre existirá $k > \max(n, m)$ por lo que $T_k \subset T_m \cap T_n$. Por lo tanto, T es un filtro base. QED

Podemos reescribir la condición para la convergencia de una sucesión como: “la sucesión (x_1, x_2, \dots) converge a x con respecto a Σ si y solo si el filtro base T es más fino que el filtro $\Sigma(x)$ ”. La razón de esta versión de convergencia es que permite una generalización de filtros base arbitrarios.

Definición 1.2.9 (Convergencia de filtro base). Un filtro base \mathcal{B} *converge* a $x \in X$ si \mathcal{B} es más fino que $\Sigma(x)$.

Observación. Esto es cierto si y solo si \mathcal{B} es más fino que cualquier filtro base $\mathcal{B}(x)$ para $\Sigma(x)$. También colecciones de vecindades equivalentes admiten el mismo conjunto de filtros convergentes.

¹¹O simplemente a X si el filtro Σ se sobreentiende.

En el espacio de funciones del intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tenemos el filtro $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ y podemos considerar una colección de vecindades de una función en particular f definida como

$$N_{t,\epsilon} := \{g \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) : |g(t) - f(t)| < \epsilon\}, \quad (1.28)$$

donde t es un real en el intervalo $[a, b]$ y ϵ es cualquier número positivo. Esta familia forma lo que se conoce como un filtro *subbase*, el subconjunto de todas las intersecciones finitas de conjuntos de este tipo forma un filtro base.

Presentamos ahora los conjuntos sobre los cuales descarnsarán nuestras construcciones posteriores.

Definición 1.2.10 (Conjuntos abiertos). Un subconjunto A es *abierto* si y solo si, para toda $a \in A$, existe $N \in \Sigma(a)$ tal que $N \subset A$.

Es decir, A es abierto si contiene al menos una vecindad para cada uno de los elementos que lo conforman.

Observación. El espacio X (nuestro conjunto universal) es abierto por definición. [1]

1.2.2. Espacios topológicos

El problema con un espacio vecindad en general es la ausencia de una relación genérica entre las vecindades para diferentes puntos. Requerimos que cualquier vecindad de un punto sea también una vecindad de los puntos «suficientemente cercanos» a él; y claro, debería estar definido en términos de las vecindades.¹²

Definición 1.2.11 (Topología). Un *espacio topológico* es un espacio vecindad (X, Σ) en el cual, para cada $x \in X$ y para todo $N \in \Sigma(x)$, existe $N' \in \Sigma(x)$ tal que para todo $y \in N'$ se tiene que $N \in \Sigma(y)$.

Es decir, un espacio vecindad es topológico cuando las vecindades de cada punto son también vecindades de los puntos suficientemente «cercaño». La definición de “cercaña” queda entonces determinada mediante este concepto a partir de las vecindades en un espacio topológico genérico; y en efecto, lo establecen los conjuntos abiertos.

Teorema 1.2.3. *Un espacio vecindad (X, Σ) es un espacio topológico si y solo si cada filtro $\Sigma(x)$ tiene un filtro base que consiste de conjuntos abiertos para todo $x \in X$.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Sean (X, Σ) un espacio topológico y $x \in X$ un punto arbitrario. Consideremos el filtro $\Sigma(x)$ y una vecindad arbitraria $N \in \Sigma(x)$. Cada filtro es un filtro base,

$$\Rightarrow \quad \exists C \in \Sigma(x) \quad \text{tal que} \quad C \subset N \cap N', \quad (1.29)$$

¹²Es interesante considerar si esto también es relevante para un modelo matemático del espacio-tiempo físico. Para la relatividad general clásica se sabe que esto se cumple; sin embargo, no es obvio su validez en la teoría cuántica [1]

para algún $N' \in \Sigma(x)$; en particular,

$$x \in C \subset N, \quad (1.30)$$

por lo que N es abierto. La existencia de $N' \in \Sigma(x)$ queda asegurada gracias a la definición de espacio topológico, y de ahí que se cumpla $\forall N \in \Sigma(x)$. Esto es válido para cualquier $x \in X$, por lo que cada filtro base $\Sigma(x)$ está formado por abiertos.

[\Leftarrow] Supongamos que cada filtro base consiste de abiertos. Sea $\Sigma(x)$ la familia de vecindades de $x \in X$, $\forall N \in \Sigma(x)$ y $\forall y \in N$, $\exists N' \in \Sigma(y)$ tal que $N' \subset N$; en particular para x , entonces $N' \in \Sigma(x)$. Ahora bien, sea $y \in N'$, implica que $y \in N$ y por tanto $\exists C \subset N \cap N'$. En particular, $y \in C \subset N$ y como $N' \in \Sigma(y)$ entonces $N \in \Sigma(y)$. QED

Encontramos que en una topología las vecindades están comprendidas únicamente por conjuntos abiertos; lo cual no siempre es cierto para espacios vecindad en general. Consideremos un conjunto X con n elementos, existen 2^{n^2-n} estructuras de vecindad diferentes¹³, pero el número de topologías es menor. El conjunto de todas las estructuras de vecindad en X , contiene al conjunto de todas las topologías en X .

Observación. La colección de abiertos en un espacio topológico satisface las condiciones:

- \emptyset y X son abiertos,
- la unión arbitraria de abiertos es un abierto,
- la intersección finita de abiertos es un abierto.

Una de las propiedades más importantes de los espacios topológicos es que el inverso también se cumple.

Teorema 1.2.4. *Sea τ una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:*

(τ_1) X y \emptyset son elementos de τ ;

(τ_2) τ es cerrado bajo intersecciones finitas: sean $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$;

(τ_3) τ es cerrado bajo uniones arbitrarias: sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (con A un conjunto indexado) una colección arbitraria de elementos de τ , entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Entonces τ es una familia de abiertos de una topología en X con una base de vecindades $\mathcal{B}(x) := \{O \in \tau \mid x \in O\}$ para todo $x \in X$.

¹³Consideremos $n = 1$, entonces el número de estructuras es 1, si $n = 2$, existen 4: la vecindad de cada punto que solo contiene a dicho elemento, la combinación con el otro elemento y el que los contiene a ambos. Para $n = 3$, tenemos los mismos casos, pero ahora serían 8 estructuras, de donde deducimos, por combinatoria, que el total de estructuras para n elementos sería 2^{n^2-n} .

Demostración. Es claro que la familia τ es una topología. Sean $x \in X$ y $O_x \in \tau$ tal que $O_x \in \Sigma(x)$. Sea $y \in O_x$, en particular sabemos que $\exists O_y \in \tau$. En resumen

$$O_x, O_y \in \tau \quad \Rightarrow \quad O_x \cap O_y = O_z \in \tau, \quad (1.31)$$

para algún elemento $z \in X$, siendo $O_z \neq \emptyset$, de manera que $z \in O_z$. Lo que implica que $O_z \subset O_x$. Es decir, $O_x \in \tau$ es abierto $\forall x \in X$. Por lo tanto, τ es una familia de abiertos con base de vecindades $\mathcal{B}(x) := \{O \in \tau \mid x \in O\}$, $\forall x \in X$.

Ahora bien, para cualesquiera $A, B \in \tau$, $\exists C \in \tau$ tal que $C = A \cap B$, y como C es abierto, $\exists D \in \tau$ tal que $D \subset C = A \cap B$. Por lo que $\mathcal{B}(x)$ es un filtro base que consiste de subconjuntos abiertos. Como τ le da a X una estructura de vecindad, por el teorema (1.2.3), τ es una topología en X . [9] QED

Las condiciones $(\tau_1) - (\tau_3)$ en (1.2.4) constituyen un camino alternativo para definir una topología en X . Muchas de las introducciones a la topología general principian con este resultado, esto es, definiendo una topología en un espacio X como la colección τ de subconjuntos de X que satisfacen $(\tau_1) - (\tau_3)$. De hecho, esta trae consigo una definición implícita de lo que son los subconjuntos abiertos (pues, justamente, son los elementos de la topología). A partir de este camino se puede llegar a nuestra definición de abierto (1.2.10) por medio del siguiente resultado.

Lema 1.2.5. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A es abierto en X si y solo si para cada $x \in A$ existe un abierto B tal que $x \in B \subset A$.*¹⁴

Por esta razón, un espacio topológico se denota por (X, τ) en lugar de (X, Σ) .

Nos es lícito preguntarnos ahora cuándo un subconjunto A de una topología es un espacio topológico. Para responder a esto debemos considerar que el conjunto A por sí mismo debe cumplir las propiedades arriba mencionadas. En particular, debe contar con una topología; parte del trabajo está hecho, puesto que ya tenemos una topología en X , lo que nos queda hacer es adaptarla para que sea consistente con A por sí mismo. Como A es abierto, de entrada puede ser un espacio topológico con la “topología trivial”¹⁵. Sea como fuere A , la intersección de este con cualquier abierto de X puede tomarse como un abierto de A .

Definición 1.2.12. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos el *subespacio topológico* (A, η) como aquel en que la topología η está dada por

$$\eta = \{A \cap O \mid O \in \tau\}. \quad (1.32)$$

A la topología η la denominamos *topología inducida* por τ .

Notemos entonces que, en un espacio topológico, para cualquier subconjunto de este podemos definir un subespacio topológico. [1] [6] [3] [4] [8]

¹⁴Este lema llama a la definición de “abierto” en la topología para definir “abierto” de manera genérica.

¹⁵Aquella que solo contiene al conjunto universo (que en este caso sería A) y el vacío, \emptyset .

1.2.3. Propiedades de las topologías y espacios topológicos

Denotamos por $\Sigma(X)$ al conjunto de todas las estructuras de vecindad en X y $\tau(X)$, al de topologías. Tenemos que $\tau(X) \subset \Sigma(X)$ y la inyección $i : \tau(X) \rightarrow \Sigma(X)$ donde, dada una topología τ en X , la estructura de vecindad $i(\tau)$ se obtiene definiendo el filtro vecindad $N(x)$ (para cualquier $x \in X$) como la colección de todos los subconjuntos N de X que contienen conjuntos abiertos respecto a τ (τ -abiertos) que contienen a x ; es decir, $N \in N(x)$ si y solo si existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset N$.

Consideremos ahora la clasificación de puntos en espacios topológicos.

Definición 1.2.13 (Clasificación de puntos). Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de este.

- Un punto $x \in A$ es un *punto interior* de A si y solo si existe un abierto O tal que $x \in O \subset A$.
- Decimos que $x \in A$ es un *punto exterior* si y solo si existe un abierto O , con $x \in O$, tal que $O \cap A = \emptyset$.
- Definimos $x \in A$ como un *punto frontera* de A si y solo si existe un abierto O , $x \in O$, que cumple $O \cap A \neq \emptyset$ y $O \cap A^c \neq \emptyset$.

A partir de esto podemos definir conjuntos «cerrados».

Definición 1.2.14 (Conjuntos cerrados). Decimos que un subconjunto A de un espacio topológico X es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos frontera.

Una manera equivalente para definir una topología se da con este tipo de conjuntos mediante una colección \mathcal{C} de subconjuntos de X que

- incluye \emptyset y X ,
- es algebraicamente cerrado bajo intersecciones arbitrarias,
- es algebraicamente cerrada bajo uniones finitas.

Los complementos de los elementos de esta familia forman entonces una colección de conjuntos abiertos para una única topología en X en la cual la colección \mathcal{C} es la familia de conjuntos cerrados.

El que un conjunto sea abierto y/o cerrado depende de la topología y en muchas ocasiones nos encontramos con objetos adecuadamente definidos en uno u otro. Si bien un conjunto no siempre es abierto y cerrado, sí le podemos asociar uno «bien portado». Es decir, podemos asociar un conjunto abierto o cerrado a un conjunto arbitrario más «parecido». La idea que llamamos es la de “cerradura”, que puede entenderse como el subconjunto cerrado «más pequeño» de X que contiene a A . Por lo que nuestra definición será la siguiente.

Definición 1.2.15 (Cerradura de un conjunto). Sea X un espacio topológico y A un subconjunto cualquiera de este, definimos la *cerradura* de A , denotada por \overline{A} , como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A .¹⁶

Análogamente podemos considerar el conjunto abierto asociado.

Definición 1.2.16 (Interior de un conjunto). Definimos el *interior* de $A \in X$, $\text{Int}(A)$, con (X, τ) un espacio topológico, como la intersección de todos los abiertos que contienen a A .

Así, el interior de un subconjunto en un espacio topológico es el abierto «más grande» contenido en él. En el caso de estructuras de vecindad es conveniente introducir la noción de “base”, o “sub-base” de una topología.

Definición 1.2.17 (Base de una topología). Sea (X, τ) un espacio topológico, una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X se dice que es una *base* para una topología τ si cada conjunto τ -abierto se puede escribir como la unión de miembros de \mathcal{B} .

Una colección de subconjuntos es una *sub-base* si el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de la colección forma una base para la topología.

Definición 1.2.18. Decimos que un espacio topológico X es *segundo-contable* (o simplemente *contable*) si existe una base contable (numerable) para su topología.

Observación. Dada cualquier familia \mathcal{C} de subconjuntos de X existe una única topología «mínima» en X para la cual \mathcal{C} es una subbase; a saber, esa topología cuyos conjuntos abiertos están definidos como todas las uniones arbitrarias de la colección de todas las intersecciones finitas de elementos en \mathcal{C} .

Un ejemplo importante es el “producto de topologías”, que puede entenderse como un producto cartesiano $X \times Y$ de los espacios topológicos (X, τ) y (Y, η) . Esta se define como la unión de todos los conjuntos de la forma $O \times \Theta$, donde $O \subset X$ es τ -abierto y $\Theta \subset Y$, η -abierto.

Es interesante notar que los τ -abiertos en una topología τ de X forman una red. Sean $O, O' \in \tau$ identificamos:

- el orden parcial se define como $O \preceq O'$ si y solo si $O \subseteq O'$;

- el encuentro, como

$$O \wedge O' := O \cap O'; \tag{1.33}$$

- el ensamble,

$$O \vee O' := O \cup O'; \tag{1.34}$$

¹⁶Recordemos que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

- el elemento unidad y en nulo como

$$1 := X \quad \text{y} \quad 0 := \emptyset, \quad (1.35)$$

respectivamente;

- el pseudo-complemento de O

$$O' := \text{Int}(X - O). \quad (1.36)$$

Por otro lado, en la familia de topologías en X , $\tau(X)$, podemos definir un orden parcial de la misma manera.

Definición 1.2.19 (Orden entre topologías). Sean τ, τ' topologías en X ; definimos $\tau \preceq \tau'$ en el sentido en que cualquier conjunto τ -abierto es τ' -abierto.

Esto quiere decir que τ' tiene más conjuntos abiertos que τ . En este caso, decimos que τ es “más débil” (o “más gruesa”) que τ' ; y que τ' es “más fuerte” (o “más fina”) que τ .

Observación. Notemos entonces que la topología más fuerte es, justamente, el conjunto potencia, $\mathcal{P}(X)$, a la que llamamos “topología discreta”. Por otro lado, la más débil, la “topología indiscreta” (o “trivial”), es $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Análogo a la red que forman los abiertos en una topología, si τ y τ' son topologías en X , podemos identificar:

- la operación encuentro es

$$\tau \wedge \tau' := \{A \subset X \mid A \text{ es abierto tanto en } \tau \text{ como en } \tau'\}; \quad (1.37)$$

- El ensamble está dado por

$$\tau \vee \tau' := \text{máx}(\{A \cap B \mid A \in \tau, B \in \tau'\}), \quad (1.38)$$

donde $\text{máx}(\{A \cap B \mid A \in \tau, B \in \tau'\})$ es la topología más gruesa que contiene a $\{A \cap B \mid A \in \tau, B \in \tau'\}$;

- los elementos nulo y unidad son la topología trivial y la discreta, respectivamente.

Es decir, el conjunto de las topologías en X también forman una red. [1]

1.2.4. Espacios compactos

Nos incumbe ahora la “compacidad”, que se puede entender en algún sentido como un espacio de «tamaño» finito. Los ejemplos clásicos envuelven a la esfera, el toro y otros subespacios en del espacio real n -dimensional; en particular, el teorema de Heine-Borel asegura que los subconjuntos de \mathbb{R}^n cerrados y acotados son justamente compactos. [10]

Una de las características principales de los conjuntos compactos es que en cualquier subconjunto infinito sus puntos necesariamente deben agruparse de alguna manera. Es decir, se puede mostrar que toda sucesión $\{x_n\}$ en un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n tiene necesariamente al menos un punto de “acumulación”, definido como aquel en que cualquiera de sus vecindades es visitada infinitas veces por la sucesión: “para todo $N \in \Sigma(x)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $n' > n$ tal que $x_{n'} \in N$ ”, o en términos de las colas, “para todo $N \in \Sigma(x)$, para toda T_n , $N \cap T_n \neq \emptyset$ ”. [1] Sin embargo, en lugar de solo considerar las colas de una sucesión podemos usar los filtros base, por lo que nuestra definición será la siguiente.

Definición 1.2.20 (Compacidad). Un espacio topológico X es *compacto* si cada filtro base \mathcal{B} en X tiene un punto de acumulación. Esto es, existe $x \in X$ tal que, para todo $N \in \Sigma(x)$ y para toda $A \in \mathcal{B}$, $N \cap A \neq \emptyset$.

Una definición equivalente se puede hacer en términos de subconjuntos tales que cubran por completo a X . Es de especial importancia considerar aquellos que sean abiertos, por lo que motivamos la siguiente definición.

Definición 1.2.21 (Cubierta). Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X se dice que es una *cubierta* de X si

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X, \quad (1.39)$$

con I un conjunto de índices.

Si además cada $A_i \in \tau$ para toda $i \in I$, entonces decimos que $\{A_i\}$ es una *cubierta abierta*.

En términos de este concepto, podemos redefinir (o más bien, expresar) (1.2.20) de la siguiente manera.

Definición 1.2.22 (Compacidad). El espacio topológico (X, τ) es compacto si, para cada cubierta abierta $\{O_i\}_{i \in I}$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $\{O_j\}_{j \in J}$ es también una cubierta de X , que denominamos *subcubierta abierta*.

En otras palabras, X es compacto si tiene una cubierta abierta finita. Estos conceptos atacan el problema de la compacidad de un espacio topológico, mas no la de un subconjunto de este. Al tomar un subconjunto A de X podemos definirlo compacto a partir de su estructura topológica (que será la topología inducida) y posteriormente

aplicar los conceptos anteriores. Entonces si A es compacto como espacio topológico, con la topología inducida por τ , lo definimos como subconjunto compacto del espacio topológico (X, τ) .

Lema 1.2.6. *Todo conjunto cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológico compacto y A cerrado en X . Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de A ; entonces definimos $B_i = C_i \cap A$, con C_i abierto en $X \forall i \in I$. Luego, $\{C_i\}_{i \in I} \cup \{(X - A)\}$ es una cubierta abierta de X , y dado que es compacto, existe una subcubierta abierta finita $\{C_i\}_{i \in J} \cup \{(X - A)\}$ de X , con $J \subset I$. Finalmente, $\{B_i\}_{i \in J}$ es una subcubierta abierta finita de A . QED

Definición 1.2.23 (Refinamiento). Sea X un espacio topológico. Dada una cubierta \mathcal{A} de X , otra cubierta \mathcal{B} es un *refinamiento* de \mathcal{A} si, para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$. [7]

En la práctica, es muy útil el teorema de Heine-Borel, que establece una caracterización más sencilla de usar. Otra proposición importante es el teorema del producto de Tychonoff, que asevera que el producto de topologías en un producto de familias arbitrarias de espacios compactos es compacta. [1]

Otra propiedad importante es saber cuándo un espacio topológico puede ser visto como una única «pieza». Es decir, cuando no es unión de uno o varios subespacios ajenos.

Definición 1.2.24 (Conexidad). Un espacio topológico se dice que es *conexo*, si no es posible escribirlo como la unión de dos abiertos disjuntos. Esto es, X no se puede escribir como $X = O \cup O'$, con $O, O' \in \tau$ y $O \cap O' = \emptyset$.

Observación. Cabe destacar que en esta definición el vacío queda excluido de ser alguno de estos subconjuntos, pues todo conjunto X se puede escribir como $X \cup \emptyset$, además de cumplir $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Teorema 1.2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, si $A \subset X$ es abierto y cerrado, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$ si y solo si X es conexo.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ (Por contradicción.) Supongamos que X no es conexo, es decir, se puede escribir como $X = O \cup O'$ para algún par $O, O' \in \tau$, tales que $O \cap O' = \emptyset$. Dado que la unión de cerrados es cerrado, tenemos entonces que tanto O como O' son cerrados (pues X lo es). Sin embargo, dado que X y \emptyset son los únicos abiertos y cerrados, entonces O y O' no pueden ser abiertos.¹⁷ (!). Por lo tanto, X es conexo.

$[\Leftarrow]$ Sea $A \subset X$ abierto y cerrado. Sabemos que podemos escribir $X = A \cup A^c$, notemos que $A, A^c \in \tau$, pues como A es abierto, y como también es cerrado, A^c es abierto. Dado que X es conexo, la única unión de abiertos disjuntos permitida es, justamente, si estos subconjuntos son X y \emptyset . Por lo que los únicos abiertos y cerrados son estos dos. QED

¹⁷El símbolo “(!)” indica contradicción.

Gracias a este teorema es que se hace evidente que un espacio desconexo se puede ver como un arreglo de espacios, cada uno independiente del otro. [11] Los espacios topológicos conexos son de suma importancia para nosotros para el desarrollo posterior de las estructuras diferenciales debido a las propiedades que le podemos asociar en analogía con el espacio físico. Otra propiedad importante, que está relacionada con esta es la de hacer al espacio «continuo». Esto es, además de exigir un espacio conexo (que en un sentido se puede entender como aquel en que todos sus puntos, o más precisamente, todas sus regiones están conectadas), deseamos introducir una noción de infinitud, no en el sentido de su extensión, sino en el de contenido.

1.2.5. Axiomas de separación

Una cuestión importante es el grado en el cual los puntos sobre un espacio topológico se pueden distinguir de otros listando la colección de abiertos a los que pertenecen. Desde el punto de vista físico, que está relacionado con representar a X como el espacio físico, cualquier objeto existe dentro de un abierto; en otras palabras, no puede existir como subconjunto de un subconjunto cerrado a no ser que tenga un interior no trivial.¹⁸ En la teoría cuántica de campos esto se relaciona con la observación de Bohr y Rosendeld sobre la necesidad de manchar los campos cuánticos con funciones de prueba que no se anulen en un conjunto abierto. Por lo tanto, parece indicado argumentar que físicamente no tiene sentido distinguir entre cualquier par de puntos en X si las colecciones de abiertos a los que pertenecen son idénticos. Esto envuelve una clasificación de las topologías en X , algunas de las cuales son de especial atención para nuestro desarrollo posterior.

Definición 1.2.25 (Axiomas de separación). Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Decimos que es un *espacio* T_0 si y solo si, para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $y \notin O$.
- Es un *espacio* T_1 si y solo si, para todo par de elementos $x, y \in X$ distintos, existen $O_x, O_y \in \tau$ tales que $y \notin O_x \ni x$ y $x \notin O_y \ni y$.
- Es un *espacio* T_2 si y solo si, para cualesquiera $x, y \in X$ diferentes, existen $O_x, O_y \in \tau$ con $x \in O_x$ y $y \in O_y$ tales que $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Especial atención se merecen los espacios T_2 , que también reciben el nombre de “Espacio de Hausdorff”, pues para los espacios T_0 y T_1 , los conjuntos X pueden ser finitos; sin embargo, T_2 tiene elementos infinitos¹⁹, esto se puede interpretar como una generalización de la propiedad arquimediana. De ahora en adelante, solo se considerarán espacios de este tipo (a menos que se diga lo contrario).

¹⁸Se puede afirmar que los abiertos son «gruesos», mientras que los cerrados entran tanto en estos como en los «delgados».

¹⁹De hecho, la única topología de Hausdorff en un conjunto finito es la topología discreta.

Observación. La cuestión de la unicidad de los límites en una sucesión (o filtros) en un espacio topológico tiene una respuesta directa a través de los axiomas de separación (1.2.25). En particular, se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X sea Hausdorff es que cada filtro en X converja a lo más a un punto en X .

Un espacio de Hausdorff X es “paracompacto” si para cada cubierta abierta de X existe otra cubierta que la refine. La importancia de los paracompactos en la geometría diferencial radica en que permiten la existencia de una “partición de la unidad” para cada cubierta de X «localmente finita»²⁰. Estas funciones se usan para formar, a partir de objetos geométricos definidos localmente, un objeto global. [1] [7] [11]

1.2.6. Mapeos entre espacios topológicos

Un concepto crucial en varias ramas de las matemáticas es el de una estructura que preserve mapeos entre dos conjuntos equipados con el mismo tipo de estructura matemática: en nuestro caso, la red de abiertos asociados con una topología. Entonces nos preguntamos cuándo un mapeo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce otro entre $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$ de manera que respete la estructura de red. Desde un punto de vista conjuntista, existen dos funciones naturales.

Definición 1.2.26 (Mapeo inducido (ida)). El mapeo inducido de $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(Y)$ se define en un subconjunto $A \subset X$ por

$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\}, \quad (1.40)$$

tiene las siguientes propiedades:

- (I) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- (II) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

La igualdad no se cumple en (II), pues el mapeo no preserva la estructura de red.

Definición 1.2.27 (Mapeo inducido (inverso)). El segundo mapeo es de $\mathcal{P}(Y)$ a $\mathcal{P}(X)$, y es definido en $B \subset Y$ como el mapeo inverso,

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}. \quad (1.41)$$

Este mapeo satisface:

- (I) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- (II) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

²⁰Este término se tratará propiamente en el siguiente capítulo. Más adelante (véase capítulo (6)) usaremos estas propiedades para establecer un modelo del espaciotiempo.

Está bien definido si $f : X \rightarrow Y$ es uno a uno y preserva las operaciones de red. Estas últimas dos relaciones motivan el siguiente concepto.

Definición 1.2.28 (Función continua). Una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \eta)$ entre espacios topológicos es *continua* si, para todo $\Theta \in \eta$, $f^{-1}(\Theta) \in \tau$.

Una función continua es un mapeo que preserva estructura cuando la topología se mira desde el punto de vista de la red de abiertos. Otra manera de intuir la continuidad en una función es pensando que variaciones «pequeñas» en $x \in X$, producen pequeñas variaciones para $f(x) \in Y$. En ausencia de una métrica, el concepto (o percepción) de «pequeño» se puede definir en términos de las vecindades de los puntos x y $f(x)$; esto es, en cuanto a la cercanía: f envía puntos cercanos a x en puntos cercanos a $f(x)$.

Teorema 1.2.8. *Una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ entre espacios topológicos, es continua si y solo si, para todo $x \in X$ y $M \in \Sigma(f(x))$, existe $N \in \Sigma(x)$ tal que $f(N) \subset M$.*

Equivalentemente $\Sigma(f(x)) \vdash f(\Sigma(x))$.

Observación. Cuando $X = Y = \mathbb{R}$, esto se reduce a una definición más familiar: para todo $x \in \mathbb{R}$, sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Lema 1.2.9. *Sea $A \subset X$ abierto, con (X, τ) un espacio topológico. El mapeo inclusión, definido como*

$$\begin{aligned} \iota : A &\rightarrow X, \\ a &\mapsto a \in X, \end{aligned} \tag{1.42}$$

*es continuo.*²¹

Demostración. Sea $O \in \tau$, entonces $\iota^{-1}(O) = O \cap A$, el cual es abierto. QED

Notemos que la función identidad $\mathbb{1} : X \rightarrow X$, es un caso particular del mapeo inclusión cuando $A = X$.

Lema 1.2.10. *Sean (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos. El mapeo proyección*

$$\begin{aligned} \pi : X \times Y &\rightarrow X, \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned} \tag{1.43}$$

es continuo.

Demostración. Sea $O \in \tau$. Consideramos $\pi^{-1}(O) = O \times Y$, como este es abierto en la topología de $X \times Y$, entonces π es continua. QED

²¹A menudo se denota este mapeo como $\iota : A \hookrightarrow X$.

Otro resultado muy importante se da en la composición de funciones.

Teorema 1.2.11. Sean (X, τ) , (Y, η) y (Z, ω) espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son continuas, entonces la composición $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua.

Demostración. Sea $V \in \omega$, entonces

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)), \quad (1.44)$$

pues $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(V), & \iff g(x) \in V, & \iff f(x) \in g^{-1}(V), \\ & \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(V)). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Como g es continua, $g^{-1}(V)$ es abierto en η . De la misma manera, como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en τ . Por lo tanto, $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua. QED

En el caso de la topología contamos con los “homeomorfismos”, funciones que preservan dicha estructura y a ambos conjuntos entre los que existe dicha función los llamamos “homeomorfos”. Podemos pensar entonces que los homeomorfismos sean biyectivos, sin embargo, necesitamos otra condición para asegurar que la función envíe abiertos de una topología en abiertos de la otra. Nos es lícito considerar la continuidad.

Definición 1.2.29 (Homeomorfismo). Una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \eta)$ es un *homeomorfismo* si

- f es biyectiva
- f y f^{-1} son continuas.

Observación. f^{-1} no se refiere a la imagen inversa, sino a la función inversa de f . Esto es $f^{-1} : (Y, \eta) \rightarrow (X, \tau)$.

Escribimos en este caso $(X, \tau) \simeq (Y, \eta)$ para denotar que X y Y son homeomorfos. En el caso de las variedades diferenciales los mapeos que los preservan son conocidos como “difeomorfismos”.

Lema 1.2.12. Una biyección f es un homeomorfismo si y solo si

- para todo $O \in \tau$, $f(O) \in \eta$;
- si $\Theta \in \eta$, entonces $f^{-1}(\Theta) \in \tau$.

Es decir, f induce un mapeo biyectivo entre la colección de abiertos de ambas topologías y con la propiedad que preserve las operaciones algebraicas para formar uniones e intersecciones. [1]

1.3. Espacios métricos

Un caso particular, pero muy importante, de los espacios topológicos en general son aquellos que están provistos de una “función distancia”, gracias a la cual los conceptos básicos con los que construimos el concepto de topología quedan expuestos de la manera usual con bolas abiertas de radio $r \in \mathbb{R}$. Con esta función que mide distancias podemos construir más fácilmente el concepto de “cercanía” entre cualesquiera par de puntos en un conjunto X . De hecho, la definición de convergencia queda expuesta en el sentido ya conocido.

Definición 1.3.1 (Métrica). Sea X un conjunto, una *métrica* en X es un mapeo $d : X \times X \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple lo siguiente:

$$(M_1) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y,$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

El conjunto X provisto de esta función recibe el nombre “espacio métrico”, denotado como (X, d) , y decimos que X tiene una “estructura métrica”.

Definición 1.3.2 (Pseudo-métrica). A la función $d' : X \times X \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ que satisface (M_1) , (M_3) y además

$$(M_4) \quad d'(x, x) = 0 \text{ para todo } x \in X,$$

la llamamos *pseudo-métrica*, en cuyo caso al espacio X , un espacio *pseudo-métrico*.

Observación. Al hacer este cambio, de (M_2) por (M_4) , permitimos que puedan haber $x, y \in X$, distintos, tales que $d'(x, y) = 0$.

En estos términos podemos definir la convergencia de una sucesión en un espacio métrico persiguiendo las colas de la sucesión con bolas que serían justamente las vecindades.

Definición 1.3.3 (Bola). Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$ cualquier punto de este, definimos la *bola abierta* de radio ϵ como el conjunto

$$B_\epsilon := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}, \quad (1.46)$$

y la *bola cerrada* del mismo radio como la cerradura de este, es decir,

$$\overline{B}_\epsilon := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}. \quad (1.47)$$

Un espacio métrico es automáticamente un espacio topológico, identificando cada abierto como una bola abierta. A partir de esto, la convergencia en espacios métricos se expresa como sigue.

Definición 1.3.4 (Convergencia en espacios métricos). Sean (X, d) un espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ si y solo si para toda $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{n_0} \subset B_\epsilon(x)$.

Lema 1.3.1. Una sucesión en un espacio métrico, de converger, lo hace a un único punto.

Demostración. Supongamos que la sucesión también converge a $y \in X$. Consideramos entonces $\epsilon_1 > 0$ y n_1 tales que $T_{n_1} \subset B_{\epsilon_1}(x)$ y además para $\epsilon_2 > 0$ existe n_2 , $T_{n_2} \subset B_{\epsilon_2}(y)$. Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Rightarrow T_{n_0} \subset B_{\epsilon_1}(x) \quad \text{y} \quad T_{n_0} \subset B_{\epsilon_1}(y), \quad (1.48)$$

$$\text{i.e.,} \quad T_{n_0} \subset B_{\epsilon_1}(x) \cap B_{\epsilon_2}(y) = \{z \in X \mid d(x, z) < \epsilon_1 \text{ y } d(y, z) < \epsilon_2\}. \quad (1.49)$$

Ahora, sea $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$, de (M_3) tenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon. \quad (1.50)$$

$$\therefore T_{n_0} \subset B_\epsilon(x) = B_\epsilon(y). \quad (1.51)$$

Como esto último es válido para cualquier $\epsilon > 0$, tenemos entonces que $x = y$. QED

Es importante considerar cuándo dos espacios métricos son equivalentes, para lo cual introducimos los siguientes conceptos.

Definición 1.3.5 (Métricas isométricas). Sean X un conjunto y $d^{(1)}$ y $d^{(2)}$ cualesquiera dos métricas, decimos que son *isométricas* si existe una biyección $\iota : X \rightarrow X$, tal que para todo $x, y \in X$,

$$d^{(1)}(x, y) = d^{(2)}(\iota(x), \iota(y)). \quad (1.52)$$

Es importante también saber cuándo dos métricas admiten el mismo conjunto de sucesiones convergentes y cuando estas convergen al mismo punto en ambas métricas. Esto se explica en la siguiente definición.

Definición 1.3.6 (Métricas fuertes y débiles). Una métrica $d^{(1)}$ es *más fuerte* que $d^{(2)}$ (o, equivalentemente $d^{(2)}$ es *más débil* que $d^{(1)}$) si, para cualquier $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$, existe $\epsilon' > 0$ tal que $B_{\epsilon'}^{(2)}(x) \subset B_\epsilon^{(1)}(x)$. Decimos además, que un par de métricas son equivalentes si cada una es más fuerte (o más débil) que la otra.

Observación. En este sentido, estamos implícitamente definiendo una estructura de orden parcial, donde $d^{(1)} \preceq d^{(2)}$ significa que $d^{(2)}$ es más fuerte que $d^{(1)}$. De igual manera, los abiertos que se pueden definir en $d^{(2)}$ son más finos que los de $d^{(1)}$. Esto quiere decir que la topología asociada con $d^{(2)}$ tiene más abiertos que con $d^{(1)}$.

Lema 1.3.2. Sean $d^{(1)}, d^{(2)}$ cualesquiera dos métricas, donde $d^{(2)}$ es más fuerte que $d^{(1)}$. Entonces cualquier sucesión convergente respecto a $d^{(2)}$ ($d^{(2)}$ -convergente) automáticamente lo es con $d^{(1)}$.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X que converge a x . Consideremos $\epsilon > 0$ y n_0 tales que $T_{n_0} \subset B_\epsilon^{(2)}(x)$, sabemos que existe $\epsilon' > 0$ tal que $B_\epsilon^{(2)}(x) \subset B_{\epsilon'}^{(1)}(x)$, es decir, $T_{n_0} \subset B_{\epsilon'}^{(1)}(x)$. Por lo cual $\{x_n\}$ es $d^{(1)}$ -convergente. QED

Observación. Dos métricas equivalentes admiten el mismo conjunto de sucesiones convergentes.

Consideremos la métrica usual de \mathbb{R}^n y cualesquiera dos de sus elementos, definida como

$$d_{\mathbb{R}^n}(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.53)$$

donde

$$\vec{x} := (x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (1.54)$$

Es decir, x^i es la i -ésima componente del punto \vec{x} , donde es importante notar que $x^i \in \mathbb{R}$. El “producto punto” está dado por

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{i=1}^n x^i y^i. \quad (1.55)$$

Esta métrica, como se mencionó anteriormente en un caso más general, está ligada a una topología denominada como “topología inducida por la métrica”, que viene dada por los abiertos $B_r(x)$ para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Al espacio topológico \mathbb{R}^n con la métrica usual se le llama “espacio euclidiano”. Hay muchas más métricas, cada una de las cuales tiene su propia topología inducida. En el espacio \mathbb{R}^n tenemos principalmente

$$d^{(\infty)}(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x^i - y^i|, \quad (1.56)$$

junto con

$$d^{(p)}(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (1.57)$$

Por otro lado, en cualquier conjunto se puede definir la “métrica trivial”:

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases} \quad (1.58)$$

Observación. Esta métrica solo admite dos abiertos, que son justamente X y \emptyset , en otras palabras, la métrica trivial induce la topología trivial.

Finalmente, para acabar el capítulo, recordemos la clasificación de puntos en un espacio topológico. Dada la topología inducida por una métrica es importante tener la definición en este caso, ya que estos puntos tienen propiedades importantes e interesantes sobre las regiones que se pueden entender con ellos.

Definición 1.3.7 (Clasificación de puntos). Sean (X, d) un espacio métrico, x un punto arbitrario y A un subconjunto cualquiera. Entonces:

- x es un punto *interior* de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$;
- el punto x es *exterior* de A si hay al menos un $\epsilon > 0$ para el cual $B_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$;
- decimos que x es un punto *frontera* de A si para cada bola $B_\epsilon(x)$, con $\epsilon > 0$ tiene intersección no vacía tanto con A como con A^c , es decir,

$$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset. \quad (1.59)$$

Además, $x \in X$ se dice que es un punto “límite” de A si $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, un punto límite puede ser tanto interior como frontera. Denotamos al conjunto de todos los puntos interiores de A como $\text{Int}(A)$, al de los exteriores como $\text{Ext}(A)$ y al de los frontera, $\text{Fr}(A)$, aunque es más usual denotarlo como ∂A . Es entonces evidente que

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) &= \text{Ext}(A^c), \\ \text{Ext}(A) &= \text{Int}(A^c), \\ \partial A &= \partial(A^c). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Y además

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) &\subset A, \\ A \cap \text{Ext}(A) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Observación. Todo subconjunto A es abierto si no contiene a ningún punto frontera y es cerrado si los contiene a todos. Además

- A es abierto si y solo si $A = \text{Int}(A)$,
- A es abierto si y solo si A^c es cerrado.

Hay muchas otras estructuras que se le pueden asociar a un conjunto cualquiera. Dentro del campo de la topología se pueden desarrollar generalizaciones de estos conceptos y hacerse desviaciones a otras ramas como topología diferencial o la algebraica. [1] [3] [4] [8] [11] Aunque hay conceptos de estas ramas que serán útiles más adelante por ahora nos es suficiente este primer acercamiento. El camino a seguir ahora es construir las “estructuras diferenciales” en un puñado de espacios topológicos denominados “variedades topológicas”.

2 Variedades diferenciales

«Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes»

Isaac Newton

Una primera idea que nos podemos hacer acerca de las variedades es una generalización del concepto de superficie, usualmente asociado con el espacio \mathbb{R}^3 , a cualquier dimensión y no estar limitado a este último, en el sentido de no estar necesariamente contenido en \mathbb{R}^n . Es pues, un espacio abstracto al que se le pueden atribuir propiedades geométricas y topológicas que en \mathbb{R}^n serían invisibles o triviales. A pesar de ello hay una vasta cantidad de herramientas ya desarrolladas en el espacio euclidiano, por lo que las usaremos como punto de apoyo en busca de la generalización que deseamos construir. En efecto, vamos a partir de la construcción de estos objetos de manera que «localmente» se parezcan a \mathbb{R}^n .

Una de las razones por las que estos objetos son esenciales a nuestro propósito es su independencia de un espacio que lo contenga, obligándonos a trabajar solamente sobre él. Es por ello que es un buen candidato para el estudio del espaciotiempo.

En álgebra la importancia de las variedades se da en los “grupos de Lie”, que son grupos y también variedades junto con algunas propiedades técnicas que permiten asegurar que ambas estructuras sean compatibles entre sí. En geometría diferencial tienen un papel fundamental, pues además de dotarlos con propiedades geométricas como distancias, áreas y volúmenes, se derivan otras de éstas como la “curvatura” y la “torsión”. Por otro lado, la topología diferencial se dedica a estudiar las propiedades topológicas de las “variedades suaves” e incluso en la mecánica clásica las soluciones a las ecuaciones de movimiento llegan a generar a estos objetos.

Dado que una variedad está íntimamente relacionada con \mathbb{R}^n , su dimensión dependerá del número de parámetros necesarios para especificar un punto, físicamente esto quiere decir que la determinan sus grados de libertad. Aún así, es importante mencionar que, a pesar que una variedad puede estar contenida en el espacio real n -dimensional, no necesariamente es un espacio de dimensión n .

2.1. Estructura diferencial

De ahora en adelante vamos a considerar \mathcal{M} un espacio topológico de Hausdorff conexo y segundo-contable. Ahora, para definir la estructura que nos incumbe consideramos las funciones diferenciables.

Definición 2.1.1 (Funciones de clase C^k). Sea $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f es de clase $C^k(X, Y)$ (o simplemente C^k) si todas sus derivadas al menos hasta el orden k existen y son continuas.

Una función C^0 es continua, mientras que las C^∞ tienen derivadas de todos los órdenes (analíticas). En adelante las llamaremos simplemente “suaves”.

Definición 2.1.2 (Carta coordenada). Sea, U un abierto en \mathcal{M} , una *carta coordenada* m -dimensional de clase C^k es un par (U, ϕ) , donde $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U a un abierto de \mathbb{R}^m (dotado de su topología métrica usual) y tanto ϕ como ϕ^{-1} son de clase C^j .

Si $U = \mathcal{M}$ decimos que la carta coordenada es “globalmente definida”; por otro lado, consideremos una carta (U, ϕ) , al mapeo ϕ lo nombramos “sistema local de coordenadas en U ” y a U un “dominio coordenado”. Ahora bien, podemos usar tantas cartas sean necesarias para cubrir a \mathcal{M} ; sin embargo, las intersecciones de estas deben tener un comportamiento adecuado.

Definición 2.1.3 (Funciones de traslape). Sean (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) cartas coordenadas m -dimensionales con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Definimos la *función de traslape* como el mapeo $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Una vez con el «pegado» apropiado tenemos una familia de cartas que llevan de abiertos en \mathcal{M} a abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.4 (Atlas). Un *atlas* (de dimensión m) en \mathcal{M} es una familia Φ de cartas m -dimensionales $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$, con I un conjunto indexado, tales que

- \mathcal{M} es cubierto por esta familia en sentido que $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} U_i$,
- cada función de traslape $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, $i, j \in I$ es clase C^k .

Definición 2.1.5 (Atlas maximal). Sean Φ un atlas en \mathcal{M} y $\psi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo. Decimos que Φ es un *atlas maximal* si y solo si toda $\phi \in \Phi$ con $Dom(\phi) \cap Dom(\psi) \neq \emptyset$, satisfacen que las funciones

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(Dom(\phi) \cap Dom(\psi)) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (2.1)$$

y

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(Dom(\phi) \cap Dom(\psi)) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (2.2)$$

son de clase C^k , entonces $\psi \in \Phi$.

Decimos que un atlas es *completo* si es maximal, es decir, no está contenido por cualquier otro atlas.

Para un atlas completo, la familia $\Phi = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ es llamada una “estructura diferencial” en \mathcal{M} de dimensión m .

Definición 2.1.6. Un espacio topológico de Hausdorff conexo y segundo-contable con una estructura diferencial es una *variedad diferencial*.

Análogamente a las funciones, decimos que una variedad es de clase C^k si todas sus funciones traslape son al menos C^k . Y de la misma manera es “suave” si dichas funciones lo son, en cuyo caso a los dominios coordinados los denominamos “suaves”.

Definición 2.1.7 (Espacio localmente euclidiano). Un espacio topológico \mathcal{M} es localmente euclidiano y de dimensión m si para cada uno de sus puntos existe una vecindad y un homeomorfismo a un abierto de \mathbb{R}^m .

Observación. Por definición, una variedad diferencial es un espacio localmente euclidiano. Sin embargo, no todo espacio localmente euclidiano es una variedad diferencial, puesto que no necesariamente está definida esta estructura. En cuanto a esto se puede referir al pegado de cartas, es decir, sus funciones traslape.

Definición 2.1.8 (Variedad topológica). Sea \mathcal{M} un espacio topológico, decimos que \mathcal{M} es una *variedad topológica* si es un espacio de Hausdorff localmente euclidiano y segundo contable.

A partir de esto, las variedades topológicas únicamente requieren que las funciones traslape sean continuas. Gracias a lo cual es fácil notar que toda variedad diferencial es también una variedad topológica [11]. Por otro lado, los puntos en una variedad tienen una manera de representarse por medio de las funciones coordinadas.

Definición 2.1.9 (Coordinadas en una carta). Sea $p \in U \subset \mathcal{M}$, definimos sus *coordinadas* con respecto a la carta (U, ϕ) como $\phi(p) = (\phi^1(p), \dots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$, donde los mapeos $\phi^\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$, son conocidos como *funciones coordinadas* que en términos de las funciones proyección,

$$\begin{aligned} \pi^\mu : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{x} &\mapsto \pi^\mu(x^1, \dots, x^\mu, \dots, x^m) = x^\mu, \end{aligned} \tag{2.3}$$

se expresan como

$$\phi^\mu(p) := \pi^\mu(\phi(p)) = (\pi^\mu \circ \phi)(p), \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \tag{2.4}$$

Decimos además que la carta (U, ϕ) está “centrada en p ” si $\phi(p) = 0$. En ocasiones escribimos a las coordenadas de un punto p en particular como la m -tupla $(x^1(p), x^2(p), \dots, x^m(p))$. El hecho de que las coordenadas x^μ puedan ser pensadas como funciones locales sobre la variedad tiene un papel importante en el desarrollo de la geometría diferencial moderna.

Las definiciones anteriores se basan en el espacio real m -dimensional. Sin embargo, existe el concepto de “variedad compleja”, en el cual se refieren al espacio complejo n -dimensional y funciones holomorfas. Esto requiere un estudio separado debido al cambio radical en la idea de *variedad* [1].

Ahora bien, podemos construir variedades diferenciales a partir de otras ya conocidas. Para ejemplificar esto podemos considerar el producto cartesiano.

Lema 2.1.1. Sean (\mathcal{M}, Φ) una m -variedad diferencial de clase C^k y (\mathcal{N}, Ψ) una n -variedad diferencial de clase C^l . Entonces el producto cartesiano $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tiene estructura de $(m+n)$ -variedad diferencial de clase C^j , con $j = \min(k, l)$.

Demostración. Sean $p \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $x \in \mathcal{M}$ y $y \in \mathcal{N}$. Consideramos las cartas coordenadas (U, ϕ) en \mathcal{M} tal que $x \in U$ y (V, ψ) en \mathcal{N} donde $y \in V$. Definimos

$$\begin{aligned} \sigma : U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n}, \\ (x, y) &\mapsto (\phi(x), \psi(y)); \end{aligned} \tag{2.5}$$

notemos que σ es de clase C^j , pues hereda el grado mínimo de diferenciabilidad de las funciones ϕ y ψ .

Por otro lado, tomemos cualesquiera otras dos cartas $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ y $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ en \mathcal{M} y \mathcal{N} , respectivamente, de manera que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Análogamente definimos $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \times \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, que también es clase C^j .

$$\therefore \sigma \circ \tilde{\sigma}^{-1} \in C^j,$$

y por construcción, es un homeomorfismo. Si consideramos estas construcciones para cada par de carta en Φ y Ψ , recuperamos una estructura diferencial en $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. QED

Es inusual en la práctica mostrar que un espacio es una variedad directamente examinando las propiedades diferenciales de sus funciones de traslape asociadas con varias cubiertas abiertas del espacio. Una manera más común de proceder es iniciar con algunos espacios particulares que trivialmente sean vistos como variedades y a partir de ahí construir un subespacio de tal variedad de tal manera que se asegure de mantener una estructura diferencial, es decir, una “subvariedad”.

Definición 2.1.10 (Subvariedad). Un subconjunto \mathcal{N} de \mathcal{M} es una *subvariedad- C^∞* de \mathcal{M} si cada punto en \mathcal{N} se encuentra en alguna carta (U, ϕ) tal que

$$\phi(\mathcal{N} \cap U) = \phi(U) \cap \mathbb{R}^k, \tag{2.6}$$

donde $0 < k < m$ [7] [12].

2.1.1. Algunas variedades diferenciales

El espacio real \mathbb{R}^m

\mathbb{R}^m equipado con su topología usual es de los ejemplos más sencillos de variedad¹, pues toda su estructura tiene definida globalmente una carta coordenada, la m -tupla de reales $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m)$.

En general, cualquier espacio vectorial V de dimensión finita se puede asociar como una variedad diferencial escogiendo cualquier conjunto de base de vectores en V y un mapeo isomorfo a \mathbb{R}^m en el sentido usual; es decir, podemos escribir

$$V \ni v = \sum_{i=1}^m v^i e_i, \quad (2.7)$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^m$ es una base de V , consideramos el mapeo

$$\begin{aligned} \eta : V &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \vec{v}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

claramente haciendo $m = \dim V$.

El círculo \mathbb{S}^1

El círculo puede ser pensado como el conjunto $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Este ejemplo ilustra la importancia de permitir más de una carta. Sabemos que, como es un subconjunto cerrado y acotado, por el teorema de Heine-Borel, es compacto.

En el intento de darle a \mathbb{S}^1 estructura de variedad diferenciable puede parecer natural considerar la coordenada angular θ . Sin embargo, esto no se define globalmente en el círculo en el sentido de no haber una función continua en el punto donde $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$. En efecto, no hay forma de parametrizar al círculo con una única función coordenada.

Esta situación, en general, es cierta, pues en una variedad arbitraria no es posible localizar cualquier punto con una sola carta coordenada. Recordemos el caso del abierto de \mathbb{R}^m o el mismo \mathbb{R}^m ; si una variedad \mathcal{M} puede escribirse en términos de una sola carta, entonces necesariamente es homeomorfa a \mathbb{R}^m .

En el caso que nos atañe una opción sería considerar el traslape de cartas coordenadas angulares. Otra podría ser tomar como U_1 el semi-círculo superior y U_2 , el inferior; pero no estaríamos considerando los puntos en que se unen, para ello consideramos los otros dos abiertos U_3 como el semicírculo derecho y U_4 , el izquierdo. Esto

¹El más sencillo es un abierto de \mathbb{R}^m .

es

$$\begin{aligned}
 U_1 &:= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}, & \phi_1(x, y) &:= x, \\
 U_2 &:= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y < 0\}, & \phi_2(x, y) &:= x, \\
 U_3 &:= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}, & \phi_3(x, y) &:= y, \\
 U_4 &:= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x < 0\}, & \phi_4(x, y) &:= y.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observación. Aunque las funciones coordenadas están escritas como dependientes de ambas variables, debemos recordar que están sujetas a la restricción $x^2 + y^2 = 1$; es decir, a pesar de ser un subconjunto de un espacio bidimensional, \mathbb{S}^1 es una 1-variedad.

El toro \mathbb{T}^2

En ocasiones se define el toro² como el producto cartesiano $\mathcal{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Como el producto de dos espacios compactos, el toro hereda esta propiedad. Esta 2-variedad puede ser parametrizada localmente especificando dos ángulos.

La n -esfera \mathbb{S}^n

Generalicemos la esfera unitaria definiendola como

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot x = 1\}. \tag{2.10}$$

Espacio que gracias al teorema de Heine-Borel es compacto. Se puede dar una estructura diferencial explícita por medio de la proyección estereográfica del polo norte al sur, por medio de los mapeos ϕ_1 y ϕ_2 dados por

$$\phi_1(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) := \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$

y

$$\phi_2(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) := \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \frac{x^2}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}} \right) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

respectivamente, y donde [1]

$$x^{n+1} = +\sqrt{(1 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^n)^2)}. \tag{2.13}$$

2.1.2. Mapeos diferenciales

Es de suma importancia para nosotros considerar curvas sobre variedades. Una curva puede ser entendida desde el punto de vista de la geometría diferencial como una variedad 1-dimensional, sin embargo, nos interesa en el sentido de una serie continua de puntos sobre \mathcal{M} (que pueda tener en nosotros la interpretación de una trayectoria). El resto del capítulo se tomará a \mathcal{M} como una variedad diferenciable de dimensión n con el atlas Φ de clase C^k .

²O “2-toro” por su dimensión, pudiendo generalizar posteriormente a un n -toro.

Funciones en variedades diferenciables

Definición 2.1.11 (Funciones sobre \mathcal{M}). Una función $f : A \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, con A un abierto, se dice que es un *mapeo en \mathcal{M}* de clase C^j ($j \leq k$) en $p \in A$ si existe una carta (U, ϕ) , con $p \in U$, tal que $f \circ \phi^{-1}$ es una función definida en el abierto $\phi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ y de clase C^j en $\phi(p)$. Además, decimos que la función f es C^j en \mathcal{M} si es lo es para cualquier $p \in A$.

Observación. La definición de suavidad de la función f en un punto es independiente de la carta (U, ϕ) , pues si $f \circ \phi^{-1}$ es C^j en $\phi(p)$ y (V, ψ) es cualquier otra carta que contiene a p , entonces en $\psi(U \cap V)$

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \circ \psi^{-1} = f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}), \quad (2.14)$$

la cual es C^j en $\psi(p)$.

Notemos además que las funciones coordenadas, ϕ^μ , son de este tipo.

Definición 2.1.12 (Curva). Una *curva* (de clase C^j) sobre \mathcal{M} es una función de un intervalo real $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que para todo $(U, \phi) \in \Phi$, el mapeo $\phi \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^j sobre U .

Notemos que si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^j , entonces la función

$$\begin{aligned} f \circ \alpha : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto f(\alpha(t)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

tiene una derivada bien definida. En un momento regresaremos a esto (véase subsección (2.2.1)); antes repasemos algunas funciones entre variedades que nos serán de interés más adelante.

Mapeos entre variedades diferenciables

Recordemos aquellas funciones que preservan estructura, para el caso de los espacios topológicos estos son los homeomorfismos; en la geometría diferencial los mapeos que nos interesan, dada nuestra estructura diferencial son las funciones diferenciables.

Definición 2.1.13 (Representación local). Sea \mathcal{N} una n -variedad diferencial con atlas Ψ de clase C^l . Definimos la *representación local* de una función entre variedades $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ con respecto a las cartas coordenadas (U, ϕ) y (V, ψ) en \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, como el mapeo

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (2.16)$$

Definición 2.1.14 (Funciones diferenciables). Un mapeo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es de clase C^r si, para todas las cubiertas de vecindades coordenadas de \mathcal{M} y \mathcal{N} , las representaciones locales de F son funciones C^r en el sentido del análisis real.

Definición 2.1.15 (Difeomorfismo). Una función $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un *difeomorfismo* C^r si es una biyección y tanto esta como su inversa son de clase C^r . Decimos en ese caso que \mathcal{M} y \mathcal{N} son *difeomorfos* y los denotamos como $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$

Observación. En el caso en que $\mathcal{N} = \mathbb{R}^m$, esto nos devuelve a los espacios localmente euclidianos; es decir, una variedad diferencial es localmente difeomorfa a \mathbb{R}^m . Entonces las funciones de las cartas coordenadas en un atlas, $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, son difeomorfismos.

Para mostrar que un mapeo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es C^r es suficiente exhibir que la representación local es C^r para una sola cubierta de \mathcal{M} y \mathcal{N} de cartas coordenadas. La naturaleza diferencial de las representaciones locales respecto a cualquier otra cubierta de cartas coordenadas se puede seguir de la diferenciabilidad de las funciones traslape.

Dos variedades difeomorfas son “equivalentes”, en el sentido de ser copias diferentes de una variedad «más» abstracta. Por otro lado, el conjunto de difeomorfismos de una variedad \mathcal{M} sobre sí mismo forma un grupo³, que denotamos como $\text{Diff}(\mathcal{M})$ [1].

Definición 2.1.16 (Subvariedad). Sea \mathcal{N} una variedad de dimensión $k < n$. Si la función $S : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ es C^r , localmente biyectiva (en el sentido que cada abierto $O \subset \mathcal{N}$ tal que $S|_O$ es biyectiva) y $S^{-1} : S(O) \rightarrow \mathcal{N}$ es C^r , entonces $S(\mathcal{N})$ es una *subvariedad inmersa* de \mathcal{M} . Si es globalmente biyectiva es conocida como *subvariedad incrustada* de \mathcal{M} . Una *hipersuperficie* es una subvariedad incrustada de dimensión $n - 1$.

Hay mucho que decir al respecto de las variedades en general, para un enfoque más profundo se puede consultar la bibliografía [1] [11] [12] [13] [14] [15]. En síntesis esta sección versa sobre la estructura de una variedad diferencial que estaremos usando el resto del trabajo.

³Este grupo juega un papel importante en varias ramas de la física teórica moderna

2.2. Espacios tangentes

Uno de los conceptos más importantes en la geometría diferencial es la de un “espacio tangente” a una variedad, que es una generalización de la idea de plano tangente a una superficie (o recta tangente). Justamente esta idea nos interesa para formalizar la diferenciabilidad de funciones sobre una variedad. Hay muchas definiciones del espacio tangente, algunas de las cuales enfatizan el lado geométrico, mientras que otras le dan prioridad al aspecto algebraico. Para variedades de dimensión finita, afortunadamente, ambas nociones son equivalentes (es en gran medida una cuestión de gustos que determina el enfoque a adoptar en un caso particular).

Ahora bien, esta generalización de «tangencia» para una variedad no es tan sencilla, ya que la visión convencional de un plano tangente es permitida gracias a la estructura de \mathbb{R}^n en la que esté definida la superficie; es decir, tanto el plano tangente como la misma superficie son envueltas por un mismo espacio vectorial. En general, esta idea no funciona con una variedad, esencialmente porque no la consideramos metida en otro espacio, sino que es el espacio general en nuestro estudio. Este es uno de los principales objetivos de la geometría diferencial: presentar una variedad y su espacio tangente como objetos independientes de otro espacio vectorial (en el sentido de no estar envueltos en él). En efecto, la definición de variedad no hace referencia a otro espacio más que localmente, por lo que una de espacio tangente tampoco debería hacerlo.

Esto se puede comprender mejor si se entiende a un vector tangente como un objeto tangente a una curva en una variedad. Así como una curva sobre una superficie en \mathbb{R}^{n+1} pertenece a la superficie (que es n -dimensional), un vector tangente a esta no pertenece a un espacio vectorial «superior» (de \mathbb{R}^{n+1}) y, por lo tanto, la idea de vector tangente como «tangente a una curva» se puede generalizar a variedades arbitrarias sin necesidad de meterlas primero en un espacio vectorial «contenedor». La idea general es definir a un vector tangente en términos de una curva que debe ser entendido como tangente.

Cabe destacar que pudieran haber muchas curvas para las cuales un vector es tangente; en este sentido podemos identificar un vector tangente como una clase de equivalencia de curvas, que es justo la idea que vamos a trabajar.

2.2.1. Vector tangente como clase de equivalencia de curvas

De ahora en adelante vamos a considerar a la variedad \mathcal{M} como variedad suave, es decir, clase C^∞ , por lo que las funciones (2.1.11) y las curvas (2.1.12) sobre una variedad las adaptamos a esta suavidad.

Definición 2.2.1 (Curvas tangentes). Sean α, β dos curvas en \mathcal{M} que pasan por el mismo punto $\alpha(0) = \beta(0) = p \in \mathcal{M}$, decimos que son *tangentes* a este punto si y solo

si para cualquier $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^j , con $j \geq 1$,

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t) \right|_{t=0}. \quad (2.17)$$

Lema 2.2.1. *Sea (U, ϕ) una carta arbitraria de \mathcal{M} cuyo dominio incluye a p . Consideremos el difeomorfismo en p expresado en sus funciones coordenadas, $\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$. Entonces dos curvas α, β , $\alpha(0) = \beta(0) = p \in \mathcal{M}$, tienen la misma tangente en p si y solo si para $i = 1, 2, \dots, n$,*

$$\left. \frac{dx^i}{dt}(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i}{dt}(\beta(t)) \right|_{t=0}. \quad (2.18)$$

Demostración. (\Rightarrow) Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, escribimos $f \circ \alpha = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha)$. Dado que

$$\begin{aligned} f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto f(\phi^{-1}(\vec{x})) \end{aligned} \quad (2.19)$$

y

$$\begin{aligned} \phi \circ \alpha : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \phi(\alpha(t)). \end{aligned} \quad (2.20)$$

son funciones bien definidas tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) &= \frac{d}{dt}[(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha)](t) \\ &= \nabla(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right] \frac{d}{dt}x^i(\alpha(t)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nótese que x^i en (2.21) se refiere a las coordenadas del punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Realizando un procedimiento análogo para $f \circ \beta$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right] \frac{d}{dt}x^i(\beta(t)), \quad (2.22)$$

de donde

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt}(f \circ \alpha - f \circ \beta) \right] (t) \Big|_{t=0} &= \\ &\stackrel{2.2.1}{=} \nabla(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \Big|_{\phi(p)} \cdot \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t) - \frac{d}{dt}(\phi \circ \beta)(t) \right) \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t) - \frac{d}{dt}(\phi \circ \beta)(t) \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.24)$$

$$i.e., \quad \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \beta)(t) \right|_{t=0} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.25)$$

(\Leftarrow) Es un caso particular de la definición (2.2.1), únicamente identificamos $f = x^i$. QED

Observación. Si α y β son tangentes en un sistema coordenado, entonces lo son en otro que cubre al punto $p \in \mathcal{M}$. Es decir, la tangencia es independiente del sistema coordenado.

Consideremos una función en \mathcal{M} , $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k . Notemos que, de la definición de curva tangente (2.2.1) y el lema (2.2.1), un vector tangente $v \in T_p\mathcal{M}$ puede ser usado como una derivada direccional para funciones sobre \mathcal{M} .

Definición 2.2.2 (Vector tangente a una curva). Sea f una función en \mathcal{M} , definimos al *vector tangente de f en p* como

$$v_p(f) := \left. \frac{df(\sigma(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.26)$$

donde σ es una curva que pasa por $p \in \mathcal{M}$.

Un vector asigna a una función su derivada direccional a lo largo de una curva de la cual el vector es tangente.

Observación. Las definición (2.2.2) se puede entender como un caso particular de vector tangente en algún punto $p \in \mathcal{M}$. Por lo que, dadas las equivalencias mencionadas anteriormente, podemos generalizarla para hacer que un vector no dependa específicamente de una curva en \mathcal{M} .

Definición 2.2.3 (Vector tangente en un punto). Un *vector tangente a $p \in \mathcal{M}$* es una clase de equivalencia curvas en \mathcal{M} donde la relación de equivalencia entre cualesquiera dos vectores es que sean tangentes a una curva que pase por p . La clase de equivalencia de una curva en particular σ se denota por $[\sigma]$.

Observación. Tenemos entonces que $v := [\sigma]$.

Definición 2.2.4 (Espacio y haz tangentes). El *espacio tangente $T_p\mathcal{M}$* a \mathcal{M} en el punto $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto de todos los vectores tangentes al punto p . Y el *haz tangente* se define como

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}. \quad (2.27)$$

La idea que permite ver a los vectores tangentes como un tipo de operadores diferenciales es un ingrediente clave para la estructura del espacio tangente.

Existe una proyección natural $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que asocia con cada vector tangente al punto $p \in \mathcal{M}$ del cual es tangente. La imagen inversa (conocida como “fibra”) de cualquier punto p bajo el mapeo π es así el conjunto de todos los vectores tangentes de la variedad en dicho punto, es decir, el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. Este es un caso espacial de la idea general de “haz fibrado”, a la cual volveremos en el capítulo (5) [1] [11].

2.2.2. La estructura de espacio vectorial de $T_p\mathcal{M}$

De manera heurística, así como ocurre con el plano tangente a una superficie en \mathbb{R}^n , podemos asociar una función «suma» sobre el espacio tangente tal que sea cerrada para cualesquiera dos vectores tangentes a un punto. En adelante si deseamos especificar que un conjunto X es un espacio vectorial sobre algún campo \mathbb{F} , escribiremos “ X es un \mathbb{F} -e.v.” a manera de simplificar.

Teorema 2.2.2. *El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ tiene la estructura de espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{R} .*

Demostración. Sean α y β curvas representativas para dos vectores tangentes a $p \in \mathcal{M}$, $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$ tales que $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Sea una carta coordenada (U, ϕ) , con $p \in U \subset \mathcal{M}$ de manera que $\phi(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Notemos que la imagen de las curvas $\phi \circ \alpha$ y $\phi \circ \beta$ es un abierto de \mathbb{R}^n , por lo que nos es lícito considerar a este con su estructura de espacio vectorial, en donde la suma $\eta(t) = \phi \circ \alpha(t) + \phi \circ \beta(t)$ está definida y además es una curva en este espacio ($\eta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$), en donde tanto $\phi \circ \alpha$ como $\phi \circ \beta$ pasan a través del punto $\vec{0}$ cuando $t = 0$. Por lo tanto, el mapeo

$$\begin{aligned} \xi : (a, b) &\rightarrow \mathcal{M} \\ t &\mapsto \phi^{-1} \circ (\phi \circ \alpha(t) + \phi \circ \beta(t)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

es una curva en \mathcal{M} (que pasa a través del punto p cuando $t = 0$). Entonces existe $u_p \in T_p\mathcal{M}$, vector tangente a ξ , de manera que

$$\begin{aligned} u_p(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \xi)_p = \frac{d}{dt} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \xi)]_p \\ &\stackrel{(2.2.1)}{=} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \frac{d}{dt} x^i(\xi(t)) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Consideremos la derivada total:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^i(\xi(t)) &= \frac{d}{dt} x^i(\phi^{-1} \circ [\phi \circ \alpha(t) + \phi \circ \beta(t)]) \\ &= \frac{d}{dt} \pi^i(\phi \{ \phi^{-1} \circ [\phi \circ \alpha(t) + \phi \circ \beta(t)] \}) \\ &= \frac{d}{dt} [\phi^i \circ \alpha(t) + \phi^i \circ \beta(t)] \\ &= \frac{d}{dt} x^i \circ \alpha(t) + \frac{d}{dt} x^i \circ \beta(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por lo que, de (2.29) y (2.30),

$$\begin{aligned} u_p(f) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \left(\frac{d}{dt} x^i \circ \alpha(t) + \frac{d}{dt} x^i \circ \beta(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= v_p(f) + w_p(f), \end{aligned} \quad (2.31)$$

esto es, $u_p = v_p + w_p \in T_p\mathcal{M}$.

Por otro lado, sea $r \in \mathbb{R}$ una constante, consideramos u_p , de donde

$$\begin{aligned} ru_p(f) &= r \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \frac{d}{dt} x^i(\xi(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \frac{d}{dt} r x^i(\xi(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (r\phi \circ \xi)](t) \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $\phi^{-1} \circ (r\phi \circ \xi)$ es una curva en \mathcal{M} que pasa por p cuando $t = 0$. Por lo tanto, $T_p\mathcal{M}$ tiene estructura de \mathbb{R} -e.v.

Ahora, (para demostrar que $\dim(T_p\mathcal{M}) = n$) consideramos una carta (U, ϕ) con cartas coordenadas⁴ $\{x^i\}_{i=1}^n$. Definimos las curvas $\gamma_j : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ de manera que

$$\phi(\gamma_j(t)) = (x^1(p), \dots, x^{j-1}(p), x^j(p) + t, x^{j+1}(p), \dots, x^n(p)), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.33)$$

En otras palabras, γ_j es la imagen del eje coordenado x^j de $U \subset \mathcal{M}$ en \mathbb{R}^n . Tomando $\gamma_j(0) = p$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y los vectores tangentes a estas curvas en $p \in \mathcal{M}$, $[e_j]_p \in T_p\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow [e_p]_j(f) &= \frac{d}{dt} (f \circ \gamma_j) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma_j)](t) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma_j)(t) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \delta_j^i, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde

$$\delta_j^i := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.35)$$

es la “ δ de Kronecker”; notemos que tiene n^2 combinaciones de sus índices, pues $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, sin embargo, solo n son distintos de cero.⁵

⁴Denotamos al conjunto $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ como $\{x^i\}_{i=1}^n$.

⁵La delta de Kronecker se puede representar matricialmente mediante la matriz identidad. Es decir, sea $[\delta_j^i]$ la representación matricial de δ_j^i (su acomodo sobre una matriz de tamaño adecuado, donde i y j se interpretarían como renglones y columnas, respectivamente), por definición,

$$[\delta_j^i] = \mathbb{1}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} := \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ argumentos}}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Desarrollando la suma en (2.34), tenemos que

$$[e_j]_p(f) = \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)}. \quad (2.36)$$

Observemos que

$$(f \circ \phi^{-1})(\vec{x})|_{\vec{x}=\phi(p)} = f(p)|_{p=\phi^{-1}(\vec{x})}, \quad (2.37)$$

esto justifica la relación

$$(e_j)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p, \quad (2.38)$$

y además que $\{(e_j)_p\}_{j=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente. Consideremos ahora cualquier vector tangente a una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ que pasa por $\sigma(0) = p \in \mathcal{M}$, $z_p \in T_p\mathcal{M}$. Entonces

$$\begin{aligned} z_p(f) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \frac{d}{dt} (x^i \circ \sigma)(t) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(2.2.2)}{=} \sum_{i=1}^n [e_i]_p(f) z_p(x^i). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dado que $z_p(x^i) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ podemos interpretarlas como coeficientes reales y al conjunto $\{(e_i)_p\}_{i=1}^n$, como una base del espacio tangente. Entonces $\dim(T_p\mathcal{M}) = n$. QED

Observación. Podemos escribir al vector tangente $z_p \in T_p\mathcal{M}$ como

$$z_p(f) = \sum_{i=1}^n z_p^i [e_i]_p(f), \quad (2.40)$$

donde hemos definido $z_p(x^i) := z_p^i$, las componentes del vector z_p en la base $\{[e_i]_p\}_{i=1}^n$. Notemos entonces que la «carga» de operador diferencial en un vector tangente la llevamos a la base $\{(e_i)_p\}_{i=1}^n$ (pues son los elementos de esta quienes actúan sobre la función f). Por lo tanto,

$$z_p = \sum_{i=1}^n z_p^i [e_i]_p. \quad (2.41)$$

Es buen momento para introducir lo que se conoce como “convención de la suma de Einstein”, que no es más que (valga la redundancia) una convención para escribir sumas. Dado que las expresiones con las que vamos a trabajar están plagadas de índices (tanto arriba como abajo), aprovechamos este hecho para escribir

$$z_p = z_p^i [e_i]_p = z_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p. \quad (2.42)$$

Notemos que, de (2.36), el operador diferencial $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ se considera que tiene un subíndice; esto es, si en una expresión se repite el mismo índice arriba y abajo (como en

la expresión anterior), dejamos explícito que hay una suma sobre todos sus valores permitidos. Usaremos esta convención de ahora en adelante a menos que se indique lo contrario.

Observación. Hay una clara diferencia entre la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x^j}$ en \mathbb{R}^n y el vector tangente $(\frac{\partial}{\partial x^j})_p \in T_p\mathcal{M}$, pero su relación está dada por (2.36) [1] [16].

Lema 2.2.3 (Regla de Leibniz). *Sean $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones en \mathcal{M} , definimos el producto de mapeos como*

$$\begin{aligned} fg : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto f(p)g(p). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Sea $v_p \in T_p\mathcal{M}$, entonces

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g). \tag{2.44}$$

Demostración. Sea α una curva en \mathcal{M} de la cual v_p es tangente en $t = 0$, notemos que

$$\begin{aligned} (fg) \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto fg(\phi^{-1}(\vec{x})) = f(\phi^{-1}(\vec{x}))g(\phi^{-1}(\vec{x})) = [(f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})](\vec{x}). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Entonces, para $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} [e_j]_p(fg) &= \left. \frac{\partial}{\partial x^j} (fg \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right|_{\phi(p)} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^j} [(f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})](\vec{x}) \right|_{\phi(p)} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \phi^{-1}) \right] (g \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \Big|_{\phi(p)} \\ &\quad + (f \circ \phi^{-1}) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (g \circ \phi^{-1}) \right] (\vec{x}) \Big|_{\phi(p)} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (f \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} g(p) + f(p) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (g \circ \phi^{-1})(\vec{x}) \right]_{\phi(p)} \\ &= [e_j]_p(f)g(p) + f(p)[e_j]_p(g), \end{aligned} \tag{2.46}$$

por lo que

$$\begin{aligned} v_p(fg) &= v_p^j [e_j]_p(fg) = v_p^j [e_j]_p(f)g(p) + v_p^j f(p)[e_j]_p(g) \\ &= v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g). \end{aligned} \tag{2.47}$$

QED

2.2.3. El empuje de una clase de equivalencia de curvas

Además de poder entender al espacio tangente como una «linearización» de la variedad a la que está asociada, nos es de considerable importancia un mapeo entre variedades que pueda ser «linearizado» con ayuda de la estructura de espacio vectorial que llevan los espacios tangentes. Es decir, mapeos lineales entre espacios tangentes.

Definición 2.2.5 (Empuje). Sean $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $v \in T_p\mathcal{M}$, el empuje (*push-forward*), $h_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{h(p)}\mathcal{N}$ es definido como

$$h_*(v) := [h \circ \sigma], \quad (2.48)$$

donde $v = [\sigma]$.

Lo que hace el empuje es, valga la redundancia, empujar un vector tangente de \mathcal{M} a \mathcal{N} por medio de una función entre ambas variedades. Así (como todo lo que se viene construyendo) esta definición es independiente de σ en la clase de equivalencia. Además, dado que los vectores tangentes son lineales nos gustaría que este mapeo lo fuera. Y en efecto lo es, pero antes de probarlo consideremos el siguiente resultado.

Lema 2.2.4. Sean $v_p \in T_p\mathcal{M}$ y $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Para cualquier función sobre \mathcal{N} , $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(h_*v_p)(f) = v_p(f \circ h). \quad (2.49)$$

Demostración. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ una curva en \mathcal{M} de la clase de equivalencia del vector v_p que pasa por p en $t = 0$, es decir, $\alpha(0) = p$. Dado que $h \circ \alpha$ es una curva en \mathcal{N} que pasa por $h(p)$ en $t = 0$ y $f \circ h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, una función sobre \mathcal{M} , consideramos

$$\begin{aligned} (h_*v_p)(f) &\stackrel{(2.2.2)}{=} \left. \frac{d}{dt}[f \circ (h \circ \alpha)](t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}[(f \circ h) \circ \alpha](t) \right|_{t=0} \\ &= v_p(f \circ h). \end{aligned} \quad (2.50)$$

QED

Es decir, siempre podemos construir un vector tangente en $T_{h(p)}\mathcal{N}$ dado uno en $T_p\mathcal{M}$ y una función $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Corolario 2.2.4.1. El empuje h_* es lineal en el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$.

Demostración. Queremos demostrar que $h_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{h(p)}\mathcal{N}$ abre sumas y saca escalares. Tomemos primeramente $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$. Entonces, siendo f una función en \mathcal{N} ,

$$\begin{aligned} [h_*(v_p + w_p)](f) &\stackrel{(2.2.4)}{=} (v_p + w_p)(f \circ h) = v_p(f \circ h) + w_p(f \circ h) \\ &= (h_*v_p)(f) + (h_*w_p)(f), \end{aligned} \quad (2.51)$$

en virtud de la estructura vectorial de $T_p\mathcal{M}$. Por otro lado, sea $r \in \mathbb{R}$,

$$(h_*rv_p)(f) = rv_p(f \circ h) = r[h_*v_p](f). \quad (2.52)$$

Se puede también verificar de (2.51) que el empuje h_* envía al cero en el cero. QED

Corolario 2.2.4.2. Sea $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ una curva en \mathcal{M} . Entonces para toda $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ suave

$$c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = [c] \in T_p \mathcal{M}, \quad (2.53)$$

donde $\left(\frac{d}{dt} \right)_0$ denota la derivada en $C^\infty(\mathbb{R})$ usual evaluada en $t = 0$.

Demostración. Consideramos

$$[c](f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \right|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} \right)_0 (f \circ c) = \left(c_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \right) f. \quad (2.54)$$

QED

El siguiente resultado también se deriva del lema (2.2.4).

Corolario 2.2.4.3. Sea \mathcal{P} una p -variedad diferencial. Si $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $k : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$. Entonces

$$(k \circ h)_* = k_* h_*. \quad (2.55)$$

Demostración. Consideramos $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, una función sobre \mathcal{P} , de donde

$$[(k \circ h)_* v_p](f) = v_p(f \circ (k \circ h)) = v_p((f \circ k) \circ h) = h_* v_p(f \circ k) = k_* h_* v_p(f). \quad (2.56)$$

QED

Finalmente, consideramos el siguiente lema.

Lema 2.2.5. Sea (U, ϕ) una carta coordenada centrada en $p \in \mathcal{M}$. Para cualquier función suave $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathcal{M} existen las funciones suaves $f_\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f_\mu(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f, \quad (2.57)$$

$$f(q) = f(p) + x^\nu(q) f_\nu(q), \quad (2.58)$$

para todo q en alguna vecindad de p . La condición (2.58) quiere decir que la función f se puede escribir localmente como

$$f = k_{f(p)} + x^\nu f_\nu, \quad (2.59)$$

donde, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, $k_c : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ denota la función constante cuyo valor es siempre $c \equiv k_c(p)$.

Demostración. Sea $F : B(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $F := f \circ \phi^{-1}$ y donde $B(\vec{0})$ es una bola abierta centrada en $\vec{0} \in \mathbb{R}$. Entonces, para $\vec{a} \in B(\vec{0})$,

$$\begin{aligned} F(a^1, \dots, a^n) &= F(a^1, a^2, \dots, a^n) \\ &\quad + F(a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, 0) - F(a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, 0) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + F(a^1, 0, \dots, 0) - +F(a^1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + F(0, \dots, 0) - F(0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta identidad puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
F(a^1, a^2, \dots, a^n) &= F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\mu=1}^n F(a^1, a^2, \dots, a^{\mu-1}, ta^\mu, 0, \dots, 0) \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\mu=1}^n \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^\mu}(a^1, \dots, ta^\mu, 0, \dots, 0) a^\mu dt \\
&= F(0, 0, \dots, 0) + a^\mu F_\mu(a^1, a^2, \dots, a^n),
\end{aligned} \tag{2.61}$$

donde

$$F_\mu(\vec{x}) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^\mu}(a^1, \dots, a^{\mu-1}, ta^\mu, 0, \dots, 0) dt, \tag{2.62}$$

son funciones en $B(\vec{0})$ suaves. Consideramos ahora las funciones $f_\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_\mu := F_\mu \circ \phi$, las cuales están definidas en una vecindad de $p \in \mathcal{M}$, sin embargo, se puede extender arbitrariamente al resto de \mathcal{M} . Entonces

$$\begin{aligned}
f(q) &= (f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = F(x^1(q), \dots, x^n(q)) \\
&= F(\vec{0}) + x^\nu(q) F_\nu(x^1(q), \dots, x^n(q)) \\
&= f(p) + x^\nu(q) f_\nu(q).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

que era la representación que buscábamos en (2.58).

El siguiente paso es encontrar una forma explícita para $f_\mu(p)$, aplicamos entonces el vector tangente $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})_p \in T_p \mathcal{M}$ a (2.63),

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p k_{f(p)} + \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p x^\nu\right) f_\nu(p) + x^\nu(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f_\nu \right]. \tag{2.64}$$

Dado que $v_p(k_c) = 0$, $\forall v_p \in T_p \mathcal{M}$ y la carta (U, ϕ) está centrada en p (es decir, $x^\nu(p) = 0$ para $\nu = 1, \dots, n$) tenemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p x^\nu\right) f_\nu(p) = \delta_\mu^\nu f_\nu(p) = f_\mu(p), \tag{2.65}$$

que es la condición (2.57). QED

Observación. Podemos construir una expresión explícita para el empuje $h_* v_p \in T_{h(p)} \mathcal{N}$. Sean los sistemas de coordenadas locales $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ y $\{y^\nu\}_{\nu=1}^m$ en los puntos $p \in \mathcal{M}$ y $h(p) \in \mathcal{N}$ respectivamente. Si $v_p \in T_p \mathcal{M}$, sabemos que lo podemos escribir como

$$v_p = v_p^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p, \tag{2.66}$$

y como $h_* T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{h(p)} \mathcal{N}$ es lineal, tenemos que

$$h_* v_p = v_p^\mu h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p. \tag{2.67}$$

Por otro lado, podemos usar el sistema coordinado alrededor de $h(p) \in \mathcal{N}$ para expandir el vector $h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \in T_{h(p)}\mathcal{N}$ como

$$h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p = \left(h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_{h(p)}. \quad (2.68)$$

Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \left(h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right)^\nu &= \left(h_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right) (y^\nu) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p (y^\nu \circ h) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p h^\nu, \end{aligned} \quad (2.69)$$

para $\nu = 1, \dots, m$ donde $m = \dim(\mathcal{N})$ y definimos $h^\nu := y^\nu \circ h$, que son funciones reales. Es decir, h^ν son las componentes del mapeo h definidas en una vecindad coordinada del punto $p \in \mathcal{M}$. La expresión en (2.69) se conoce como “matriz jacobiana” (o “jacobiano”) de la función h con respecto a las coordenadas locales en \mathcal{M} y \mathcal{N} [1]. Finalmente, conseguimos la expresión para la representación local de $h_*v_p \in T_{h(p)}\mathcal{N}$:

$$h_*v_p = v_p^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p h^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_{h(p)}. \quad (2.70)$$

En este caso particular, justamente, la expresión $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p h^\nu$ se escribe también como $\frac{\partial h^\nu}{\partial x^\mu}(p)$, de donde

$$h_*v_p = v_p^\mu \frac{\partial h^\nu}{\partial x^\mu}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_{h(p)}. \quad (2.71)$$

2.2.4. El espacio tangente de un espacio vectorial

Consideremos ahora el haz tangente. Notemos que los elementos de este son justamente los vectores tangentes en cada punto $p \in \mathcal{M}$, por lo que para especificar alguno de ellos nos hace falta, además de la base de n vectores linealmente independientes, el punto en particular al cual son tangentes; esto sugiere que su dimensión es $2n$. De manera más abstracta, si (U, ϕ) es una carta coordinada que contiene a p , entonces podemos definir la biyección

$$\begin{aligned} T\mathcal{M}|_U &\rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ [c] &\mapsto (\phi(p), \phi_*[c]), \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde $[c] \in T_p\mathcal{M}$ y $T\mathcal{M}|_U$ denota la restricción de $T\mathcal{M}$ al subconjunto $U \subset \mathcal{M}$. Notemos que podemos identificar al espacio real \mathbb{R}^n con cualquiera de sus espacios

tangentes⁶ $T_{\vec{x}}\mathbb{R}^n$ asociando $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$ la derivada $\chi(\vec{\omega}) \in T_{\vec{x}}\mathbb{R}^n$ definida como

$$\chi(\vec{\omega})(f) := \left. \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{\omega}) \right|_{t=0}, \quad (2.73)$$

es decir, $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$ genera la curva $t \mapsto \vec{x} + t\vec{\omega}$ en \mathbb{R}^n .

En intuitivo pensar que el espacio tangente a un punto en un espacio vectorial V cualquiera (considerado como una variedad) es isomorfo al mismo V de manera natural. Para mostrar esto explícitamente podemos pensar a cada $\omega \in T_v V$ con $v \in V$ como derivaciones del anillo de funciones suaves en V , $C^\infty(V)$. Entonces podemos definir el mapeo

$$\begin{aligned} \chi : V &\rightarrow T_v V, \\ \omega &\mapsto \chi(\omega)(f) := \left. \frac{d}{dt} f(v + t\omega) \right|_{t=0}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

para cada $f \in C^\infty(V)$. Debemos mostrar ahora que χ es lineal, uno a uno y supra-yectiva. Para la linealidad podemos notar que

$$\begin{aligned} \chi(\omega_1 + \omega_2)(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(v + t\omega_1 + t\omega_2) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(v + t\omega_1) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} f(v + t\omega_2) \right|_{t=0} \\ &= \chi(\omega_1)(f) + \chi(\omega_2)(f). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Además, para $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \chi(e_\omega)(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(v + tr\omega) \right|_{t=0} = r \left. \frac{d}{dt} f(v + t\omega) \right|_{t=0} \\ &= r\chi(\omega)(f), \end{aligned} \quad (2.76)$$

por lo cual $\chi : V \rightarrow T_v V$ es lineal.

Para mostrar que χ es uno a uno consideramos que $\omega_1, \omega_2 \in V$ son tales que $\chi(\omega_1) = \chi(\omega_2)$, entonces $\chi(\omega_1) - \chi(\omega_2) = \chi(\omega_1 - \omega_2) = 0$, y como $T(\vec{x}) = \vec{0}$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$ para cualquier transformación lineal, podemos asegurar que $\omega_1 - \omega_2 = 0$, esto es $\omega_1 = \omega_2$.

Finalmente, χ es supra-yectiva, para su evidencia es suficiente notar que cualquier clase de equivalencia de curvas pensada como $v \in V$, contiene una forma $t \mapsto v + t\omega$ para algún $\omega \in V$. Entonces invocamos el isomorfismo entre clases de equivalencia de curvas entre el espacio tangente en el punto $v \in V$ [1].

2.2.5. El espacio tangente de un producto de variedades

Vamos a considerar algunos resultados importantes referentes a la estructura del espacio tangente del producto $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de las variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} . Para empezar a

⁶Esta es la razón por la que escribimos punto y vectores en \mathbb{R}^n como \vec{x} .

tratarlos podemos pensar que un vector tangente al punto $(p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ se puede «descomponer» en una componente referente a \mathcal{M} y otra, a \mathcal{N} .

Definición 2.2.6. La *suma directa* $V \oplus W$ de dos \mathbb{F} -e.v.s V y W es definida como el conjunto de todo los pares (v, w) , con $v \in V$ y $w \in W$. Y donde las operaciones en dicho espacio vectorial se definen como

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') &:= (v + v', w + w') \\ r(v, w) &:= (rv, rw), \end{aligned} \quad (2.77)$$

para todos $v, v' \in V$; $w, w' \in W$; y $r \in \mathbb{F}$.

Ahora bien, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.2.6. *En el producto de variedades $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ existe un isomorfismo natural*

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) &\simeq T_p\mathcal{M} \oplus T_q\mathcal{N} \\ v &\mapsto (\pi_{\mathcal{M}*}(v), \pi_{\mathcal{N}*}(v)) \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M} & \pi_{\mathcal{N}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N} \\ (p, q) &\mapsto p, & (p, q) &\mapsto q, \end{aligned} \quad (2.79)$$

son las proyecciones usuales sobre cada variedad.

Demostración. Sea $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ una curva sobre el producto de variedades en la clase de equivalencia de $v_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$. Entonces existen las curvas únicas σ_1 y σ_2 sobre \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, tales que $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$. Nos es permitido entonces escribir

$$\sigma_1(t) := \pi_{\mathcal{M}} \circ \sigma(t) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) := \pi_{\mathcal{N}} \circ \sigma(t). \quad (2.80)$$

Definimos el mapeo lineal

$$\begin{aligned} \chi : T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) &\rightarrow T_p\mathcal{M} \oplus T_q\mathcal{N} \\ \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \chi([\sigma]) := ([\sigma_1], [\sigma_2]), \end{aligned} \quad (2.81)$$

el cual es biyectivo y, por lo tanto, el isomorfismo deseado. QED

Observación. Más aún, tenemos que

$$[\sigma_1] = \sigma_{1*} \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = (\pi_{\mathcal{M}} \circ \sigma)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = \pi_{\mathcal{M}*} \sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = \pi_{\mathcal{M}*} [\sigma]. \quad (2.82)$$

Es conveniente hacer ahora un par de comentarios respecto a este teorema. Para ello consideramos un concepto más.

Definición 2.2.7 (Inyección). Definimos la *inyección* de \mathcal{M} en $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ como el mapeo

$$\begin{aligned} i_q : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\ x &\mapsto (x, q) \end{aligned} \quad (2.83)$$

para cualquier $q \in \mathcal{N}$

De manera análoga se puede definir la inyección de \mathcal{N} en $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ para todo $p \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} i_p : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\ y &\mapsto (p, y). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para distinguirlas entre sí denotamos $(i_{\mathcal{M}})_q$ y $(i_{\mathcal{N}})_p$ a las inyecciones en $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente. Con estas definiciones podemos notar que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{M}} \circ (i_{\mathcal{M}})_q &= \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, & \pi_{\mathcal{N}} \circ (i_{\mathcal{M}})_q &= k_q, \\ \pi_{\mathcal{M}} \circ (i_{\mathcal{N}})_p &= k_p, & \pi_{\mathcal{N}} \circ (i_{\mathcal{N}})_p &= \mathbb{1}_{\mathcal{N}}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

Así, el inverso del isomorfismo χ en (2.81) es el mapeo

$$\begin{aligned} \chi^{-1} : T_p \mathcal{M} \oplus T_q \mathcal{N} &\rightarrow T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}), \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (i_{\mathcal{M}})_{q*} \alpha + (i_{\mathcal{N}})_{p*} \beta. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Consideremos ahora otra variedad diferencial \mathcal{P} y una función $f : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$. Sabemos que $f_* : T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \rightarrow T_{f(p,q)}\mathcal{P}$ donde $p \in \mathcal{M}$ y $q \in \mathcal{N}$. Entonces podemos considerar

$$T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \xrightarrow{\chi} T_p \mathcal{M} \oplus T_q \mathcal{N} \xrightarrow{g} T_{f(p,q)}\mathcal{P}, \quad (2.87)$$

donde

$$g(\alpha, \beta) := (f \circ (i_{\mathcal{M}})_q)_* \alpha + (f \circ (i_{\mathcal{N}})_p)_* \beta, \quad (2.88)$$

y también [1]

$$\begin{aligned} f \circ (i_{\mathcal{M}})_q : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{P}, & f \circ (i_{\mathcal{N}})_p : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{P}, \\ x &\mapsto f(x, q), & y &\mapsto f(p, y). \end{aligned} \quad (2.89)$$

2.3. Particiones de la unidad

A lo largo del presente capítulo se ha dado una noción de la derivada sobre una variedad diferencial. Es entonces lícito preguntarnos por la integración sobre variedades. Más adelante se hablará al respecto, desarrollando los elementos básicos de esta teoría (Véase sección (4.1)). Por el momento, es buena excusa estudiar algunas nociones de las “particiones de la unidad” con el objetivo de introducir una familia de funciones que nos permitan sumar las integrales en los abiertos de un atlas que nos lleve a una expresión consistente de una “integral global”. Esto nos llevará de la integral real al concepto de integral sobre una variedad. Así, nuestro propósito por ahora es construir una colección de funciones finitas sobre una cubierta abierta y cuya suma sea exactamente la unidad. Primeramente tomamos del análisis real que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases} \quad (2.90)$$

es continua.

Lema 2.3.1. *Sean cualesquiera $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r_1 < r_2$, existe una función suave $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq r_1, \\ r \in (0, 1) & \text{si } r_1 < t < r_2, \\ 0 & \text{si } t \geq r_2. \end{cases} \quad (2.91)$$

Demostración. Sea f la función en (2.90). Consideramos la función

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}. \quad (2.92)$$

Notemos que el denominador es siempre positivo, pues al menos una de las expresiones $r_2 - t$ y $t - r_1$ es positiva. QED

Una función con las propiedades de h en (2.92) es conocida como “función de corte”. Consideremos ahora una función análoga, pero en \mathbb{R}^n .

Lema 2.3.2. *Dados cualesquiera reales positivos, $r_1 < r_2$, existe una función suave $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$H(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in B_{r_1}(0), \\ r \in (0, 1) & \text{si } \vec{x} \in (B_{r_2}(0) - B_{r_1}(0)), \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in (\mathbb{R}^n - B_{r_2}(0)). \end{cases} \quad (2.93)$$

Demostración. Consideremos justamente la función $H(\vec{x}) = h(\|\vec{x}\|)$, donde h es definida en (2.92). Notemos que en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ H es suave, pues es composición de funciones suaves. Y como es idénticamente igual a 1 en $B_{r_1}(0)$, entonces es suave también ahí. QED

Este tipo de funciones son conocidas como “función pastel”: una función suave de valores reales que es igual a 1 en un conjunto específico y cero fuera él.

Definición 2.3.1. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función en un espacio topológico X . Definimos el *soporte* de f , denotado por $\text{supp}f$, como la cerradura del conjunto de puntos tales que f no se anula:

$$\text{supp}f = \overline{\{p \in \mathcal{M} \mid f(p) \neq 0\}}. \quad (2.94)$$

Observación. El soporte de la función H en (2.93) es $\overline{B_{r_2}(0)}$.

Decimos que f tiene “soporte compacto” si $\text{supp}f$ es un conjunto compacto. Tenemos además que si f está definida en un conjunto $U \subset \mathcal{M}$ compacto, entonces f tiene soporte compacto.

Definición 2.3.2. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X indexada por un conjunto I . Una *partición de la unidad subordinada a \mathcal{A}* es una familia indexada $\{\psi_i\}_{i \in I}$ de funciones continuas $\psi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- (I) para todo $i \in I$ y $x \in X$ $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$,
- (II) $\text{supp}\psi_i \subseteq A_i$ para cada $i \in I$,
- (III) la familia de soportes $\{\text{supp}\psi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita⁷,
- (IV) para todo $x \in X$, $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$.

Observación. Debido a la condición de finitud en (III), la suma en (IV) tiene solamente una cantidad finita de términos que no son cero en la vecindad de cada punto, entonces no es un problema de convergencia.

Ahora bien, si \mathcal{M} es una variedad suave, una partición de la unidad es “suave” si cada ψ_i lo es. Nuestro interés es construir una partición de la unidad en las variedades diferenciales; sin embargo, antes de hacerlo, para usar las funciones pastel efectivamente, necesitamos algunos resultados más. En particular, requerimos construir algunas cubiertas especiales. Es de imaginar que cualquier cubierta abierta debería admitir un refinamiento localmente finito, entonces el resultado topológico que necesitamos es que cada variedad es paracompacta.

Definición 2.3.3. Una *bola coordinada* es un dominio coordinado cuya imagen bajo una función coordinada es una bola en el espacio euclidiano. Decimos que una bola coordinada es *suave* si la función coordinada lo es.

⁷Esto significa que cada punto en \mathcal{M} intersecta a $\text{supp}\psi_i$ solo para un número finito de valores de $i \in I$.

Notemos que la cerradura de las bolas coordenadas son claramente compactas. Más aún, se puede establecer la existencia de una cubierta abierta conformada por bolas coordenadas. Ahora sí, buscamos probar la paracompacidad en las variedades topológicas, pero con el ánimo de extendernos aún más, introducimos el término “cubierta regular” que, expresada como $\{A_i\}_{i \in I}$, además de ser una cubierta del espacio topológico X en el sentido usual, cumple:

- ser una cubierta contable localmente finita,
- para cada $i \in I$ existe un difeomorfismo $\phi_i : A_i \rightarrow B_{r'}(0) \subset \mathbb{R}^n$, para $r' \in \mathbb{R}$,
- la colección $\{C_i = \phi_i^{-1}(B_r(0))\}_{i \in I}$ con $r < r'$, también es una cubierta abierta.

Notemos que los elementos A_i son bolas coordenadas para cada $i \in I$ en una cubierta regular, entonces la cubierta regular está conformada por «bolas coordenadas regulares». Así, este último término se puede expresar de la siguiente manera.

Definición 2.3.4. Sea $B \subseteq \mathcal{M}$. B es una *bola coordenada regular* si existe una bola coordenada B' que contiene a la cerradura de B ($\overline{B} \subseteq B'$) y una función coordenada $\phi : B' \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para $r, r' \in \mathbb{R}$, $r < r'$,

$$\phi(B) = B_r(0), \quad (2.95)$$

$$\phi(\overline{B}) = \overline{B_r(0)}, \quad (2.96)$$

$$\phi(B') = B_{r'}(0). \quad (2.97)$$

Finalmente, consideremos el resultado que nos incumbe.

Teorema 2.3.3. *Sea \mathcal{M} una variedad suave. Toda cubierta abierta de \mathcal{M} tiene un refinamiento regular.*

Demostración. Sea \mathcal{A} una cubierta abierta de \mathcal{M} y $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ (con J un conjunto de índices) una cubierta abierta localmente finita conformada por bolas coordenadas regulares. Para cada $p \in \mathcal{M}$, sea (U_p, ϕ_p) una carta coordenada centrada en p tal que

- $\phi_p(U_p) = B_r$, para algún $r \in \mathbb{R}$,
- U_p está contenido en uno de los abiertos de \mathcal{A} ,
- si $p \in B_j$, entonces también $U_p \subset B_j$.

La última condición es posible gracias a la finitud local de \mathcal{B} . Consideremos ahora

$$V_p = \phi_p^{-1}(B_{r'}(0)), \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (2.98)$$

Para cada $k \in J$, la colección $\{V_p : p \in \overline{B}_k\}$ es una cubierta abierta de \overline{B}_k . Por compacidad, \overline{B}_k es cubierto por un número finito de esos conjuntos. Denotamos a estos como $V_k^1, \dots, V_k^{m(k)}$, y sean $(U_k^1, \phi_k^1), \dots, (U_k^{m(k)}, \phi_k^{m(k)})$ las correspondientes cartas coordenadas. La colección de todos los conjuntos $\{U_k^i\}$ es claramente una cubierta

abierta contable que refina a \mathcal{A} y satisface (2.95) y (2.96) en la definición (2.3.4). Para ver entonces que es regular únicamente nos hace falta mostrar que es localmente finita.

Para cualquier k , cada conjunto U_k^i (por construcción) está contenido en algún B_j tal que $\overline{B_k} \cap B_j \neq \emptyset$. El compacto $\overline{B_k}$ es cubierto por $\{B_j\}$ para un número finito de $j \in J$ y cada B_j se interseca a lo más con un número finito de los otros; así, hay subíndices $j \in J$ finitos para los cuales U_k^i y U_j^i tienen intersecciones no vacías. Como hay solamente un número finito de U_j^i , para cada $j \in J$, la cubierta que hemos construido es localmente finita. QED

El teorema anterior se puede plantear como: “toda variedad suave tiene una base contable que consiste de bolas coordenadas regulares”. Un resultado inmediato de esto es que toda variedad suave es paracompacta. Finalmente, también derivado del teorema (2.3.3), llegamos a la siguiente afirmación.

Corolario 2.3.3.1. *Dada una variedad diferencial \mathcal{M} , una cubierta abierta \mathcal{A} de este y una base para su topología, \mathcal{B} , existe un refinamiento de \mathcal{A} contable localmente finito que consiste de elementos de \mathcal{B} .*

Demostración. Dado que cada $A \in \mathcal{A}$ es una variedad diferencial en sí misma, puesto que \mathcal{M} es una variedad topológica, entonces existe un refinamiento regular de este, considerando que A en sí mismo es compacto en su topología, tenemos que su refinamiento está compuesto por elementos de su topología. El mismo argumento es válido para todo subconjunto de \mathcal{M} en la cubierta abierta \mathcal{A} . QED

Observación. Lo que implica este resultado es que \mathcal{M} es paracompacta. De hecho, se puede demostrar que cada variedad topológica es paracompacta.

Ahora sí, con los elementos expuestos con anterioridad, estamos en condiciones de construir una partición de la unidad en \mathcal{M} .

Teorema 2.3.4. *Sean \mathcal{M} una variedad suave y $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta. Entonces existe una partición de la unidad suave subordinada a \mathcal{A} .*

Demostración. Consideremos un elemento arbitrario de la cubierta abierta \mathcal{A} , A_i , tenemos que este abierto es también una variedad diferencial, por lo que tiene una base contable \mathcal{B}_i de bolas coordenadas regulares, podemos ver entonces que $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i$ es una base para la topología de \mathcal{M} . Como \mathcal{A} es contable, existe un refinamiento contable localmente finito $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que consiste de elementos de \mathcal{B} . Así, la cubierta $\{\overline{B}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ también es localmente finita.

Para cada α , como B_α es una bola coordenada regular, en algún A_i , tenemos entonces que existe una bola coordenada $B'_\alpha \subseteq A_i$ tal que $\overline{B}_\alpha \subseteq B'_\alpha$, y una función coordenada suave $\phi_\alpha : B'_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_\alpha(\overline{B}_\alpha) = \overline{B}_{r_\alpha}(0)$ y $\phi_\alpha(B'_\alpha) = B_{r'_\alpha}(0)$ para algún par de reales $r_\alpha < r'_\alpha$. Definimos la función $f_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_\alpha(p) = \begin{cases} H_\alpha \circ \phi_\alpha & \text{si } p \in B'_\alpha, \\ 0 & \text{si } p \in M - \overline{B}_\alpha, \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad (2.99)$$

donde $H_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función del lema (2.3.2) que es positiva en $B_{r_\alpha}(0)$ y cero en los demás casos. En el conjunto $B'_\alpha - \overline{B}_\alpha$ donde ambas definiciones se traslapan, ambas regresan la función cero, así f_α está bien definida y es suave. Además, $\text{supp} f_\alpha = \overline{B}_\alpha$. Definimos $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(p) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p). \quad (2.100)$$

Como la cubierta \overline{B}_α es localmente finita, la suma anterior solo tiene finitos términos nulos en una vecindad de cada punto en \mathcal{M} , así esta función suave está bien definida. Además, dado que cada f_α es no negativa en cualquier punto y positiva en B_α , y cada punto de \mathcal{M} está en algún B_α , se sigue que $f(p) > 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Definiendo ahora la función $g_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_\alpha(p) = \frac{f_\alpha(p)}{f(p)}, \quad (2.101)$$

que también es suave, tenemos inmediatamente que $0 \leq g_\alpha \leq 1$ para cualquier α y que $\sum_\alpha g_\alpha = 1$.

Finalmente, necesitamos redefinir los índices de nuestras funciones para que sean compatibles con los de la cubierta \mathcal{A} , pues la cubierta $\{B'_\alpha\}$ es un refinamiento de este. Consideremos a cada índice $i \in I$, podemos entonces escoger algún índice $a(\alpha) \in I$ tal que $B'_\alpha \subseteq A_{a(\alpha)}$. Para cada $i \in I$, definimos $\psi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\psi_i = \sum_{\alpha: a(\alpha)=i} g_\alpha. \quad (2.102)$$

Si no hay índices $i \in I$ para los cuales $a(\alpha) = i$, entonces esta suma debe interpretarse como la función cero. Cada ψ_i es una función suave que satisface $0 \leq \psi_i \leq 1$, con $\text{supp} \psi_i \subset A_i$. Más aún, la familia de soportes $\{\text{supp} \psi_i\}_{i \in I}$ es todavía localmente finita. Además

$$\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1, \quad (2.103)$$

así que esta es la partición de la unidad deseada [11].

QED

Antes de tratar con la integral de una función sobre una variedad nos será útil el concepto de “campo” que es fundamental en la física moderna. En cuanto a ello hay un sinnúmero de funciones que pueden existir en este contexto, de entre ellas buscamos generalizar los vectores de manera que podamos tratar no solo con campos escalares, sino con los «vectoriales».

3 Tensores

«Nada es demasiado maravilloso para ser cierto, si es consistente con las leyes de la naturaleza.»

Michael Faraday

Hasta ahora hemos hablado de los vectores tangentes y algunas de sus propiedades. El objetivo de este capítulo es introducir una generalización de esta idea hacia los «campos» de vectores tangentes, es decir, un objeto que se pueda desplazar suavemente por la variedad donde define un vector tangente en cada punto: un “campo vectorial”. La idea de un campo es muy útil dentro de la física porque nos permite representar las interacciones y objetos que existen en el espacio. Así, podemos asignarles propiedades en el sentido de ajustarlos para representar un fenómeno en la naturaleza; esto va desde un campo de velocidades, el electromagnético, etc., hasta un campo de materia o de fuerza en una teoría de norma.

Por otro lado, no solo existen campos relacionados con los vectores tangentes sino con los vectores duales y funciones que dependen de ellas. Estas funciones generalizadas son conocidas como “tensores” y puede llevarse la idea de campo hasta ellos. Los “campos tensoriales” y sus propiedades son el objetivo del actual capítulo, que presenta la idea de estas funciones generalizadas para hacerlas compatibles con las estructuras diferenciales que estudiamos anteriormente. El uso de los tensores en la geometría diferencial nos ayuda a estudiar las propiedades mismas del espacio en el que están definidas. En particular, es posible hacer geometría gracias al denominado “tensor métrico”, los “tensores antisimétricos” son el puente entre la teoría de integración sobre \mathbb{R}^n y una variedad suave \mathcal{M} ; de hecho, estos últimos son tan importantes que conforman el segundo eje del capítulo y son conocidos como “formas diferenciales”.

Como último elemento estudiaremos la posibilidad de construir un campo vectorial a partir de una curva en una vecindad. Estos campos generados nos permitirán introducir herramientas para minimizar los valores de los campos que a grandes rasgos nos abrirán las puertas a las teorías físicas de nuestro interés.

3.1. Campos vectoriales

Vamos a considerar de ahora en adelante a \mathcal{M} una n -variedad suave.

Definición 3.1.1. Sea $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Un *campo vectorial* en \mathcal{M} es una asignación suave definida por

$$\begin{aligned} Xf : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (Xf)(p) := X_p(f). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observación. En este concepto entendemos por suavidad que $(Xf)(p)$ es infinitamente diferenciable.

Un campo vectorial en $U \subset \mathcal{M}$ se puede definir de la misma manera, donde $f \in C^\infty(U)$. De igual forma se puede definir la restricción de X en \mathcal{M} a un abierto $V \subset \mathcal{M}$, denotado como $X|_V$.

Observación. Un campo vectorial da lugar a un mapeo $X : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$. La función Xf es también conocida como la “derivada de Lie” de la función f a lo largo del campo vectorial X , y usualmente se denota como $L_X f$, o $\mathcal{L}_X f$.

Hacemos ahora la convención

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (3.2)$$

para simplificar la notación del operador derivada parcial en general (es decir, tanto la derivación en \mathbb{R}^n como la referida al vector tangente).

Teorema 3.1.1. Sean $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y X un campo vectorial sobre \mathcal{M} . Entonces, si $r \in \mathbb{R}$,

$$X(f + g) = Xf + Xg, \quad (3.3)$$

$$X(rf) = rXf, \quad (3.4)$$

$$X(fg) = fXg + gXf. \quad (3.5)$$

Demostración. Sea $p \in \mathcal{M}$ y $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})_p\}_{\mu=1}^n$ una base de vectores tangentes en p . (Para (3.3).) Notemos que

$$\begin{aligned} f + g : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto f(p) + g(p), \end{aligned} \quad (3.6)$$

de donde

$$\begin{aligned} (f + g) \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto (f + g) \circ \phi^{-1}(\vec{x}) = (f + g)(\phi^{-1}(\vec{x})) \\ &= f(\phi^{-1}(\vec{x})) + g(\phi^{-1}(\vec{x})). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Consideramos ahora

$$\begin{aligned}
X(f+g)(p) &= X_p(f+g) = X_p(x^\mu)(\partial_\mu)_p(f+g) \\
&= X_px^\mu\partial_\mu[(f+g)\circ\phi^{-1}](\vec{x})|_{\phi(p)} \\
&= X_px^\mu\partial_\mu[f\circ\phi^{-1}+g\circ\phi^{-1}](\vec{x})|_{\phi(p)} \\
&= X_px^\mu\partial_\mu(f\circ\phi^{-1})(\vec{x})|_{\phi(p)} + X_px^\mu\partial_\mu(g\circ\phi^{-1})(\vec{x})|_{\phi(p)} \\
&= X_px^\mu[\partial_\mu f]_p + X_px^\mu[\partial_\mu g]_p \\
&= X(f)(p) + X(g)(p), \quad \forall p \in \mathcal{M}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(Para (3.4).) Tomamos por otro lado

$$\begin{aligned}
X(rf)(p) &= Xx^\mu[\partial_\mu(rf)]_p = Xx^\mu\partial_\mu(rf\circ\phi^{-1})(\vec{x})|_{\phi(p)} \\
&= Xx^\mu\partial_\mu r f(\phi^{-1}(\vec{x}))|_{\phi(p)} = rXx^\mu[\partial_\mu f]_p \\
&= rX(f)(p).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(Para (3.5).) Esta relación se sigue de la regla de Leibniz (2.2.3).

QED

Observación. Es de suma importancia notar ahora que los campos vectoriales, tanto como los vectores tangentes, son lineales. En particular, los elementos del conjunto $\{[\partial_\mu]_p\}_{\mu=1}^n$ son lineales.

Dada la forma en que definimos los campos vectoriales, es posible interpretarlos como «derivaciones» en el anillo de funciones sobre \mathcal{M} .

Definición 3.1.2 (Derivaciones). Una derivación en un punto $p \in \mathcal{M}$ es un mapeo $v : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $r \in \mathbb{R}$:

$$v(f+g) = v(f) + v(g), \tag{3.10}$$

$$v(rf) = rv(f), \tag{3.11}$$

$$v(fg)(p) = f(p)v(g)|_p + g(p)v(f)|_p. \tag{3.12}$$

Denotamos como $D_p\mathcal{M}$ al conjunto de todas las derivaciones en $p \in \mathcal{M}$. Es importante mencionar que nos aprovechamos de un análisis geométrico para construir el concepto de vector tangente; sin embargo, para su desarrollo nos hicimos de sus propiedades algebraicas. Justamente desde este punto de vista podemos describir a un vector tangente gracias a que existe un isomorfismo entre el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ y el conjunto de derivaciones $D_p\mathcal{M}$. Antes de probar esto, es útil notar que este último tiene estructura de espacio vectorial bajo las definiciones

$$\begin{aligned}
(v+w)(f) &:= v(f) + w(f), \\
(rv)(f) &:= rv(f),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

para cualesquiera $v, w \in D_p\mathcal{M}$ y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Entonces, observamos que la definición (2.4.2) (Vector tangente a una curva) está dada en términos de la estructura algebraica, ya que es justamente una derivación.

Teorema 3.1.2. *El mapeo lineal $\iota : T_p\mathcal{M} \rightarrow D_p\mathcal{M}$ definido como*

$$\iota(v_p)(f) := \left. \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \right|_{t=0}, \quad [\sigma] = v_p, \quad (3.14)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Notemos que, por definición, ι es lineal. Por ende solo necesitamos mostrar que es biyectiva.

(Inyectividad:) Sean $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$, para los cuales $\iota(v_p) = \iota(w_p)$, con $v_p = [\alpha]$ y $w_p = [\beta]$ donde $\alpha(0) = \beta(0) = p \in \mathcal{M}$. Consideremos una función f sobre \mathcal{M} y un sistema local de coordenadas con funciones coordenadas $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$. Entonces, por el corolario (2.4.1)

$$\left. \frac{d}{dt} x^\mu(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \iota(v_p) = \iota(w_p) = \left. \frac{d}{dt} x^\mu(\beta(t)) \right|_{t=0} \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Dado que las curvas son tangentes en $t = 0$, tenemos que $v_p = [\alpha] = [\beta] = w_p$.

(Suprayectividad:) Sea $v \in D_p\mathcal{M}$, construimos una curva $\sigma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$, que pase por $p \in \mathcal{M}$ y tal que

$$v(x^\mu) = \left. \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \sigma_v)(t) \right|_{t=0}, \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Entonces

$$v(f) = v(x^\mu)[\partial_\mu f]_p = \left. \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} [\partial_\mu f]_p. \quad (3.17)$$

Y como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (f \circ \sigma_v)(t) \right|_{t=0} &= \partial_\mu (f \circ \phi^{-1})(\vec{x})|_{\phi(p)} \left. \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \sigma_v)(t) \right|_{t=0} \\ &= [\partial_\mu f]_p \left. \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \sigma_v)(t) \right|_{t=0} \\ &= v_p(f). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es decir, $[\sigma_v](f) = v(f)$. QED

Este isomorfismo implica que los elementos de $T_p\mathcal{M}$ y $D_p\mathcal{M}$ pueden ser usados acorde a la situación en consideración. Cualquier fórmula provista por un vector tangente definida como una clase de equivalencia de curvas debe tener un análogo en una derivación y vice versa. En particular, es gracias a ello que cualquier vector tangente se puede expandir en sus componentes pensándolo como una derivación, lo que nos permitió escribir en el capítulo pasado la ecuación (2.9).

Al conjunto de los campos vectoriales en \mathcal{M} lo denotamos como $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Este hereda la estructura de \mathbb{R} -e.v. bajo la adición y multiplicación por escalar usual [1] [11] [13]:

$$(aX + bY)f := aXf + bYf, \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Análogamente, si $g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$, podemos definir el campo vectorial $gX + hY$ como

$$(gX + hY)_p f := g(p)X_p f + h(p)Y_p f, \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (3.20)$$

3.1.1. Expresión local

Por otro lado, podemos descomponer a cualquier campo vectorial en sus componentes sobre una base en una carta (U, ϕ) haciendo uso de la misma expansión sobre el vector tangente a través del cual está definido.

Definición 3.1.3. Un *marco local* de \mathcal{M} es una n -tupla ordenada de campos vectoriales $\{e_i\}_{i=1}^n$ definidos en un abierto $U \subseteq \mathcal{M}$ que son linealmente independientes y generan al haz tangente

$$T_U\mathcal{M} = \bigcup_{p \in U} T_p\mathcal{M}. \quad (3.21)$$

Observación. $\{e_i|_p\}_{i=1}^n$ forma una base para $T_p\mathcal{M}$ en cada $p \in U$. Decimos además que es un “marco global” si $U = \mathcal{M}$ y lo llamamos “suave” si los campos en cuestión son, valga la redundancia, suaves.

Consideremos entonces, para $p \in U$,

$$(Xf)(p) = X_p f = X_p(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f = X(x^\mu)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f, \quad (3.22)$$

es decir, en U podemos escribir

$$X = Xx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \quad (3.23)$$

donde hemos usado que $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tiene estructura de módulo¹ sobre el anillo $C^\infty(\mathcal{M})$.

Observación. Hemos expandido el campo vectorial X en términos de los campos vectoriales coordenados locales $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu = 1, \dots, n$, donde Xx^μ son funciones definidas sobre el abierto U , por lo que esta expresión es solo válida ahí.

A las funciones Xx^μ , $\mu = 1, \dots, n$ les decimos “componentes” del campo vectorial con respecto al sistema coordenado asociado a la carta (U, ϕ) y las denotamos como X^μ . Los campos $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^n$ forman un marco local en esta misma carta, al cual, debido a que está dado enteramente por el sistema coordenado $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$, lo denominamos “marco coordenado”.

Sean (V, ψ) una carta coordenada tal que $U \cap V \neq \emptyset$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial, podemos expandirlo respecto a las bases² $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ y $\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}$, $\mu, \nu' = 1, \dots, n$ en U y V respectivamente, por lo que en el abierto $U \cap V \subset \mathcal{M}$ tenemos que

$$X = Xx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = Xx^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}. \quad (3.24)$$

¹Es decir, donde los escalares pueden ser elementos del anillo, en este caso funciones.

²Las cartas coordenadas de un sistema alterno suelen escribirse con el símbolo primado “'” en la variable: $x^{\mu'}$; sin embargo, nosotros vamos a atribuirle esta al índice que le acompaña, para hacer evidente el cambio entre los sistemas coordenados aún cuando no tratemos con las componentes del campo.

Notemos ahora que los campos $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ se pueden expresar por medio de la base $\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}$ gracias a este mismo resultado, obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x^{\nu'}) \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}, \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Esta es, de hecho, la “regla de la cadena” entre campos vectoriales. Por lo que, únicamente para una transformación entre bases coordenadas, podemos definir

$$\Lambda_\mu^{\nu'} := \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu}; \quad (3.26)$$

acomodamos estas componentes en un arreglo matricial (que sería justo la matriz de transformación entre sistemas coordenados) $\Lambda \in M_{n \times n}(C^\infty(\mathcal{M}))$, de donde

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda_\mu^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}. \quad (3.27)$$

Las componentes de X en los dos sistemas coordenados son $X^\mu := X x^\mu$ y $X^{\nu'} := X x^{\nu'}$ respectivamente; entonces

$$X = X x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \Lambda_\mu^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = X^{\nu'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}, \quad (3.28)$$

e igualando términos concluimos que

$$X^{\nu'} = X^\mu \Lambda_\mu^{\nu'}. \quad (3.29)$$

Finalmente, escribiendo a los campos vectoriales $\{\partial_{\nu'}\}_{\nu'=1}^n$ en términos de $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^n$ tenemos que

$$\partial_\mu = \Lambda_\mu^{\nu'} \partial_{\nu'} = \Lambda_\mu^{\nu'} \Lambda_{\nu'}^\gamma \partial_\gamma, \quad (3.30)$$

es decir,

$$\Lambda_\mu^{\nu'} \Lambda_{\nu'}^\gamma = \delta_\mu^\gamma. \quad (3.31)$$

Por lo que el conjunto de funciones $\{\Lambda_{\nu'}^\gamma\}_{\gamma, \nu'=1, \dots, n}$, se pueden acomodar en una matriz que resulta ser la inversa de Λ , que denotamos como Λ^{-1} .

Observación. Los campos vectoriales se transforman con Λ y sus componentes con Λ^{-1} , pues aplicando la transformación $\Lambda_{\nu'}^\gamma$ a (3.29) obtenemos

$$X^{\nu'} \Lambda_{\nu'}^\gamma = X^\mu \Lambda_\mu^{\nu'} \Lambda_{\nu'}^\gamma = X^\mu \delta_\mu^\gamma = X^\gamma. \quad (3.32)$$

Dadas las hipótesis del cambio de coordenadas, los resultados anteriores (3.27)-(3.32) se pueden aplicar perfectamente en una carta con dos (o más) sistemas coordenados; de igual manera, de existir la transformación, se tienen relaciones análogas para los vectores tangentes. En general, para cualesquiera dos bases de campos vectoriales $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ y $\{e_{\mu'}\}_{\mu'=1}^n$ la transformación general entre estas bases es

$$e_\mu = \Lambda_\mu^{\nu'} e_{\nu'}. \quad (3.33)$$

La forma de esta matriz de transformación Λ no tiene, en general, la misma forma que entre sistemas coordenados, pero las reglas de transformación se mantienen intactas [1] [16] [13].

3.1.2. El conmutador de campos vectoriales

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, tenemos que para cada $p \in \mathcal{M}$, $Y_p(f)$ es un número real. Esto es

$$\begin{aligned} Yf &: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto Y_p(f), \end{aligned} \quad (3.34)$$

entonces nos es lícito considerar la función $X_p(Yf)$

$$\begin{aligned} X_p(Yf) &= X_p^\mu [\partial_\mu(Yf)]_p = X_p^\mu [\partial_\mu(Y^\nu \partial_\nu f)]_p \\ &= X_p^\mu [\partial_\mu Y^\nu]_p [\partial_\nu f]_p + X_p^\mu Y_p^\nu [\partial_\mu \partial_\nu f]_p. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Observación. No existe $Z \in T\mathcal{M}$ tal que $Z_p = X_p(Yf)$, ya que esta última tiene segundas derivadas en f (más precisamente, derivadas mixtas); en otras palabras, $X_p(Yf)$ no es un vector tangente. La importancia de este hecho radica en que estas segundas derivadas se pueden anular si consideramos la función $Y_p(Xf)$ que tendrá un término análogo, así que

$$X_p(Yf) - Y_p(Xf) = X_p^\mu [\partial_\mu Y^\nu]_p [\partial_\nu f]_p - Y_p^\mu [\partial_\mu X^\nu]_p [\partial_\nu f]_p. \quad (3.36)$$

Introducimos ahora la notación $Y^\mu_{,\nu} = e_\nu(Y^\mu)$ para simplificar (aún más) las ecuaciones, esta notación se aplica para cualquier base de vectores, no únicamente para la base coordenada.

Definición 3.1.4 (Conmutador). Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ campos vectoriales y una función sobre \mathcal{M} , $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. El *conmutador* de X y Y es el campo vectorial

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf). \quad (3.37)$$

De esta definición podemos ver que, para una base genérica $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$, se cumple

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) = X^\mu e_\mu(Y^\nu e_\nu f) - Y^\nu e_\nu(X^\mu e_\mu f) \\ &= X^\mu e_\mu(Y^\nu) e_\nu f + X^\mu Y^\nu e_\mu(e_\nu f) - Y^\nu e_\nu(X^\mu) e_\mu f - Y^\nu X^\mu e_\nu(e_\mu f) \\ &= [X^\mu e_\mu(Y^\nu) - Y^\nu e_\nu(X^\mu)] e_\nu f + X^\mu Y^\nu [e_\mu(e_\nu f) - e_\nu(e_\mu f)] \\ &= [X^\mu e_\mu(Y^\nu) - Y^\nu e_\nu(X^\mu)] e_\nu f + X^\mu Y^\nu c_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha f, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde

$$[e_\mu, e_\nu] := c_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha, \quad (3.39)$$

son los “coeficientes de estructura”. En particular, para la base coordenada $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^n$

$$[X, Y]^\nu = X^\mu Y^\nu_{,\mu} - Y^\mu X^\nu_{,\mu}, \quad (3.40)$$

es decir, $c_{\mu\nu}^\alpha = 0$ [17].

Rápidamente podemos darnos cuenta de dos cosas: en primera, el conmutador es antisimétrico:

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}); \quad (3.41)$$

y en segunda, es bilineal:

$$\left. \begin{aligned} [X + Z, Y] &= [X, Y] + [Z, Y] \\ [X, Y + Z] &= [X, Y] + [X, Z] \end{aligned} \right\} \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}). \quad (3.42)$$

Una tercera propiedad, no tan intuitiva de notar, pero muy importante, es la “identidad de Jacobi”:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0. \quad (3.43)$$

Dos campos vectoriales “conmutan” si su conmutador es idénticamente cero [16].

3.1.3. Campos vectoriales h -relacionados

Recordemos el empuje $h_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{h(p)}\mathcal{N}$ dado por el mapeo $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre las variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} . La pregunta que nos hacemos ahora es ¿cuándo es posible inducir un mapeo entre campos vectoriales de \mathcal{M} a \mathcal{N} ? Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}$ y el mapeo h , una primer propuesta sería definir

$$(h_*X)_{h(p)} := h_*(X_p), \quad (3.44)$$

sin embargo, esta falla principalmente por dos razones: en primer lugar, consideremos $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$ tales que $h(p_1) = h(p_2)$ (es decir, no es inyectiva), entonces hay una ambigüedad si $h_*(X_{p_1}) \neq h_*(X_{p_2})$; y en segunda, si h no es suprayectiva no se especifica el campo inducido fuera del rango de h .

Observación. Si h es un difeomorfismo de \mathcal{M} a \mathcal{N} , las anteriores objeciones no aplican, y está perfectamente definido el campo vectorial h_*X por medio de (3.44). Sin embargo, es posible que la idea funcione en ciertos casos, incluso si h no fuera un difeomorfismo.

Definición 3.1.5. Sean $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. Decimos que X y Y están h -relacionados si, para todo $p \in \mathcal{M}$,

$$h_*(X_p) = Y_{h(p)}; \quad (3.45)$$

y escribimos $Y = h_*X$.

Consideremos X y Y h -relacionados y $f \in C^\infty(\mathcal{N})$, entonces

$$(h_*X_p)f = Y_{h(p)}f \quad i.e., \quad [X(f \circ h)](p) = X_p(f \circ h) = (Yf)(h(p)), \quad (3.46)$$

esto es

$$X(f \circ h) = (Yf) \circ h, \quad (3.47)$$

que es la forma mediante la cual se expresa la propiedad de la h -relación.

Observación. Podemos usar (3.47) para expresar el conmutador entre campos vectoriales en la variedad \mathcal{N} . Si $h_*X_1 = Y_1$ y $h_*X_2 = Y_2$, entonces, para cualquier función suave f en \mathcal{M} podemos escribir

$$\begin{aligned}
 ([Y_1, Y_2]f) \circ h &= (Y_1(Y_2f)) \circ h - (Y_2(Y_1f)) \circ h \\
 &= X_1((Y_2f) \circ h) - X_2((Y_1f) \circ h) \\
 &= X_1(X_2(f \circ h)) - X_2(X_1(f \circ h)) \\
 &= [X_1, X_2](f \circ h),
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

lo cual implica

$$h_*([X_1, X_2]_p) = [h_*X_1, h_*X_2]_{h(p)}, \quad \forall p \in \mathcal{M}. \tag{3.49}$$

Por lo tanto, $[X_1, X_2]$ está h -relacionado con $[Y_1, Y_2]$ por medio de

$$h_*[X_1, X_2] = [h_*X_1, h_*X_2]. \tag{3.50}$$

Esta relación juega un papel importante en el desarrollo de las álgebras de Lie asociadas con un grupo de Lie [1].

3.2. 1-formas

Vamos ahora a abordar el tema de los “covectores” y las “formas diferenciales”. Estas son de gran importancia en la geometría diferencial y sus aplicaciones en la física teórica. Recordemos el espacio dual de un espacio vectorial V , que está formado por las funciones lineales $w : V \rightarrow \mathbb{R}$; dada la estructura de \mathbb{R} -e.v. del espacio tangente en $p \in \mathcal{M}$ podemos definir dicho espacio dual de $T_p\mathcal{M}$.

3.2.1. Covectores

Definición 3.2.1 (Vector cotangente). Un *vector cotangente* (o *covector*) en un punto $p \in \mathcal{M}$ es un mapeo lineal $\xi_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Al conjunto de covectores en un punto $p \in \mathcal{M}$ lo denotamos como $T_p^*\mathcal{M}$. El valor de ξ_p en el vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$ lo escribiremos como $\langle \xi_p, v_p \rangle_p$ o simplemente $\langle \xi_p, v_p \rangle$.

Observación. Es importante hacer notar que, como $T_p^*\mathcal{M}$ es el espacio dual de $T_p\mathcal{M}$, automáticamente obtenemos una estructura de espacio vectorial (\mathbb{R} -e.v.) de la misma dimensión.

De manera análoga al haz tangente, podemos definir el “haz cotangente” como el conjunto de los vectores cotangentes en todos los puntos sobre \mathcal{M} :

$$T^*\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}, \quad (3.51)$$

el cual tiene la estructura de una variedad diferencial $2n$ -dimensional.

Observación. A la función $\langle _, _ \rangle_p : T_p^*\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ la llamamos “producto escalar”. Por ahora solo lo vamos a definir como una función positiva definida y bilineal.

Ahora bien, podemos considerar los campos de covectores, de manera que se ajusten a la estructura diferencial.

Definición 3.2.2 (1-formas). Una *1-forma* ω en \mathcal{M} es una asignación suave de un vector cotangente ω_p a cada punto $p \in \mathcal{M}$ en el sentido que, para cualquier campo vectorial X sobre \mathcal{M} , la función real sobre \mathcal{M}

$$\omega(X)(p) \equiv \langle \omega, X \rangle(p) := \langle \omega_p, X_p \rangle_p \quad (3.52)$$

es suave. Denotamos como $\Lambda^1(\mathcal{M})$ al espacio de todas las 1-formas en \mathcal{M} .

Observación. Debido a que $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es un \mathbb{R} -e.v., notemos que su espacio dual $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ es justamente el espacio de las 1-formas $\Lambda^1(\mathcal{M})$; así, obtenemos que este también es un espacio vectorial sobre los reales. A lo largo del presente capítulo usaremos ambas notaciones.

En la definición de 1-formas (3.2.2) el hecho de hacer $\omega(X) \equiv \langle \omega, X \rangle$ en efecto tiene que ver con el producto escalar. Denominamos como “producto interior” a la función $\langle _, _ \rangle : \Lambda^1(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$, que es una asignación suave del producto escalar para cada $p \in \mathcal{M}$.³

Una 1-forma es a los vectores cotangentes lo que los campos vectoriales a los vectores tangentes; es decir, las 1-formas son “campos covectoriales” sobre la variedad. Y en efecto, es posible escribirlas mediante una base, consideremos para esto un sistema coordenado alrededor de $p \in \mathcal{M}$ y la base coordenada $\left\{ (\partial_\mu)_p \right\}_{\mu=1}^n$ de vectores tangentes en p . Dado que, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de V , un \mathbb{R} -e.v., existe una base dual para el espacio vectorial dual V^* , $\{\omega^j\}_{j=1}^n$, que satisface

$$\langle \omega^j, e_i \rangle = \delta_i^j. \quad (3.53)$$

Entonces, por construcción, existe una base dual del espacio $T_p^*\mathcal{M}$, $\{(\theta^\nu)_p\}_{\nu=1}^n$, tal que⁴

$$\left\langle (\theta^\nu)_p, (\partial_\mu)_p \right\rangle = \delta_\mu^\nu, \quad \forall p \in \mathcal{M}. \quad (3.54)$$

Entonces, en una carta coordenada, cualquier $\xi_p \in T_p^*\mathcal{M}$ se puede expandir como

$$\xi_p = \xi_\mu(p) [\theta^\mu]_p, \quad (3.55)$$

donde las componentes de ξ_p , $(\xi_p)_\mu = \xi_\mu|_p = \xi_\mu(p)$, es el conjunto de reales que satisfacen

$$(\xi_p)_\mu = \langle \xi_p, (\partial_\mu)_p \rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (3.56)$$

Se sigue también de esto que el producto interno $\langle \xi, v \rangle$ se puede escribir en términos de las componentes en un sistema coordenado como

$$\langle \xi, v \rangle(p) = \langle \xi_\mu \theta^\mu, v^\nu \partial_\nu \rangle(p) = (\xi_\mu v^\nu)|_p \langle \theta^\mu, \partial_\nu \rangle_p = (\xi_\mu v^\nu)|_p \delta_\nu^\mu = (k_\mu v^\mu)(p), \quad (3.57)$$

en virtud de la linealidad del producto $\langle _, _ \rangle$.⁵

Podemos considerar la representación local de una 1-forma. Sea U el dominio de una carta coordenada, escribimos a $\omega \in T^*\mathcal{M}$ como

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu, \quad \forall p \in U. \quad (3.58)$$

³Hablaremos a detalle de este hecho más adelante, véase la sección (4.1).

⁴Observemos que la delta de Kronecker puede ser vista como una función constante, esto es, para cada $p \in \mathcal{M}$, $\delta_\mu^\nu(p) = \delta_\mu^\nu$, para cada $\mu, \nu = 1, \dots, n$.

⁵Nótese que hay sumas implícitas en este producto interno. El desarrollo en la ecuación (3.57) es correcto debido a que

$$\langle \xi, v \rangle(p) = \left\langle \sum_{\mu=1}^n \xi_\mu \theta^\mu, \sum_{\nu=1}^n v^\nu \partial_\nu \right\rangle(p) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \langle \xi_\mu \theta^\mu, v^\nu \partial_\nu \rangle(p) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (\xi_\mu v^\nu)|_p \langle \theta^\mu, \partial_\nu \rangle(p),$$

donde primero abrimos la suma y luego «sacamos» los escalares de la transformación, en este caso las funciones k_μ, v^ν sobre \mathcal{M} .

A la n -tupla de 1-formas que generan al haz cotangente en U ,

$$T_U^* \mathcal{M} = \bigcup_{p \in U} T_p^* \mathcal{M}, \quad (3.59)$$

lo denominamos “co-marco local”, en adelante “marco dual”; aquel que cumple la relación (3.54), es decir, que aplicado al marco coordinado devuelve la delta de Kronecker, lo denominamos “marco dual coordinado” [1].

3.2.2. El diferencial

Recordemos que de $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y una función f sobre \mathcal{M} , podemos construir la función Xf . En otras palabras, f puede ser usado para mapear campos vectoriales en funciones $C^\infty(\mathcal{M})$.

Definición 3.2.3 (Diferencial). Sean $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en \mathcal{M} y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial, definimos el *diferencial* de f (o *gradiente*) como

$$\begin{aligned} df : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ X &\mapsto Xf. \end{aligned} \quad (3.60)$$

El diferencial de una función hereda del campo vectorial la linealidad y, al devolver una función suave, tenemos que

$$Xf(p) = df(X)(p) = \langle df, X \rangle_p. \quad (3.61)$$

En otras palabras, $df \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$. Así, podemos expandirlo en una base conforme a la ecuación (3.58):

$$df = (df)_\nu \theta^\nu = \langle df, \partial_\nu \rangle \theta^\nu = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \theta^\nu. \quad (3.62)$$

Observación. Consideremos ahora a las funciones coordinadas $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$,

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \theta^\nu = \delta_\nu^\mu \theta^\nu = \theta^\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Esto significa que las 1-formas dadas por el diferencial de las funciones coordinadas forman exactamente el marco dual coordinado.

Ahora estamos en condiciones para establecer un cambio de coordenadas y ver cómo es que las 1-formas se transforman de acuerdo a este. Consideremos una carta (U, ϕ) y dos sistemas coordinados, $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ y $\{x^{\nu'}\}_{\nu'=1}^n$. Sabemos que podemos descomponer a cualquier 1-forma en términos de estas bases de manera análoga a los campos vectoriales; así, sea ω una 1-forma, escribimos sus componentes:

$$\omega_\mu = \langle \omega, \partial_\mu \rangle \stackrel{(3.27)}{=} \langle \omega, \Lambda_{\mu'}^{\nu'} \partial_{\nu'} \rangle = \Lambda_{\mu'}^{\nu'} \omega_{\nu'}. \quad (3.63)$$

Notemos entonces que las componentes de la 1-forma cambian de acuerdo a la transformación directa Λ , por lo que deducimos que la base lo debe hacer de acuerdo a la inversa, Λ^{-1} . Para exhibir esto notemos que

$$\omega = \omega_{\nu'} dx^{\nu'} = \omega_{\mu} dx^{\mu}, \quad (3.64)$$

usando esta igualdad escribimos la base $\{dx^{\mu}\}_{\mu=1}^n$ en términos de $\{dx^{\nu'}\}_{\nu'=1}^n$:

$$dx^{\mu} = \langle dx^{\mu}, \partial_{\nu'} \rangle dx^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} dx^{\nu'}. \quad (3.65)$$

Análogamente podemos construir las reglas de transformación para los vectores cotangentes [1] [5] [16].

3.2.3. El pull-back de 1-formas

Recordemos que una función $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ no siempre se puede usar para «empujar» un campo vectorial en \mathcal{M} . Sin embargo, puede ser usado para «jalar» una 1-forma de \mathcal{N} . Esta característica de las 1-formas (y en general, de las formas diferenciales) es de suma importancia, pues está relacionado estrechamente con la forma en que la estructura topológica global de una variedad se refleja en los grupos de cohomología de De Rham de \mathcal{M} . También está estrechamente relacionado con que los haces fibrados también «jalan», no «empujan».

Definición 3.2.4 (Dual del empuje). Sea $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, el *dual del empuje* es el mapeo $h^* : T_{h(p)}^* \rightarrow T_p^* \mathcal{M}$, dual de $h_* : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{h(p)} \mathcal{N}$.

En otras palabras, sean $\xi_p \in T_p^* \mathcal{M}$ y $v_p \in T_p \mathcal{M}$,

$$\langle h^* \xi_p, v_p \rangle_p := \langle \xi_p, h_* v_p \rangle_{h(p)}, \quad (3.66)$$

para todo $p \in \mathcal{M}$. Esta definición se puede adaptar a las 1-formas en \mathcal{M} .

Definición 3.2.5 (Jalar formas). Sean $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $\omega \in \mathfrak{X}^* \mathcal{N}$ definimos el *jalar* (o *variar*) la 1-forma ω (*pull-back* en inglés) como

$$\langle h^* \omega, v \rangle_p := \langle \omega, h_* v \rangle_{h(p)}, \quad (3.67)$$

para todo $p \in \mathcal{M}$ y $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

El mapeo h^* que varía la 1-forma está solamente definida en los espacios cotangentes $T_q^* \mathcal{N}$ para los cuales existe $p \in \mathcal{M}$ tal que $q = h(p)$. Entonces no necesariamente debemos pensar a h^* como un mapeo que induce todo el haz cotangente $T^* \mathcal{N}$ en $T^* \mathcal{M}$, a menos que h sea suprayectiva.

Análogo al empuje entre campos vectoriales podemos expresar la 1-forma variada de \mathcal{N} a \mathcal{M} usando las coordenadas locales $\{y^{\mu}\}_{\mu=1}^m$ y $\{x^{\nu}\}_{\nu=1}^n$ respectivamente. Sea $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{N})$, tenemos que

$$\omega_{h(p)} = \omega_{\nu}(h(p)) [dy^{\nu}]_{h(p)}, \quad (3.68)$$

para todo $p \in \mathcal{M}$ tal que $h(p)$ esté en el dominio del sistema coordinado de la base $\{y^\mu\}_{\mu=1}^m$. Entonces las componentes de $h^*\omega$, $(h^*\omega)_\mu$, con respecto al sistema coordinado $\{x^\nu\}_{\nu=1}^n$ son

$$(h^*\omega)_\mu(p) = \langle h^*\omega, \partial_\mu \rangle_p = \langle \omega, h_*(\partial_\mu)_p \rangle_{h(p)} = \omega_\nu(h(p))(h_*(\partial_\nu)_p)^\nu. \quad (3.69)$$

Usando (2.69) obtenemos [1]

$$(h^*\omega)_p = \omega_\nu(h(p))\partial_\mu h^\nu(p)(dx^\mu)_p. \quad (3.70)$$

3.2.4. Integración de 1-formas

Una aplicación muy importante de las 1-formas es que, en algún sentido, nos dan una noción de la integral de línea independiente de las coordenadas. Un caso simple de esto es considerar una 1-forma en \mathbb{R} ; en particular, si $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R})$ es suave en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y tomando t como la coordenada estándar en \mathbb{R} , entonces

$$\omega = f(t)dt, \quad (3.71)$$

para alguna función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.2.6 (Integral de 1-formas). Definimos a la *integral de ω* sobre $[a, b]$ como

$$\int_{[a,b]} \omega := \int_a^b f(t)dt.$$

Esto es algo más que un abuso de notación, pues la integral de f en dicho intervalo está bien definida y la integrabilidad de ω dependerá directamente de f .

Observación. Cabe recalcar que el símbolo dt que aparece en la integral no significa lo mismo que el diferencial de la función t , dt . Es por ello que la primera la escribimos con un estilo diferente.

Nos interesa ahora estudiar la integral de línea sobre una variedad. Para conseguir esto las curvas nos dan, de hecho, la variación de la forma que necesitamos para su definición con base a la que ya conocemos.

Definición 3.2.7 (Integral de línea). Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva suave en \mathcal{M} y $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, definimos la *integral de línea de ω* sobre γ como

$$\int_\gamma \omega := \int_{[a,b]} \gamma^*\omega. \quad (3.72)$$

El mapeo γ^* jala la forma de \mathcal{M} a \mathbb{R} , en particular al intervalo cerrado $[a, b]$: $\gamma^*\omega \in \Lambda^1([a, b])$.

Observación. Podemos reescribir la integral de línea de ω de una manera parecida a la que conocemos del análisis real. Recordemos para ello que dada la clase de equivalencia de curvas que dan origen a un vector tangente podemos tomar

$$[\gamma]_p(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0}, \quad \gamma(0) = p \in \mathcal{M}, \quad (3.73)$$

donde $[\gamma]_p$ es el vector tangente a la curva gama. Este se puede reescribir como

$$[\gamma]_p = \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma) \right|_{t=0} (\partial_i)_p = \left. \frac{d}{dt} \gamma^i \right|_{t=0} (\partial_i)_p, \quad (3.74)$$

donde $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ es una función de variable real, o sea, $\gamma^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Finalmente obtenemos un campo vectorial a partir de la curva γ , expresado como

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \gamma^i(t) \partial_i = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i, \quad \frac{d}{dt} \gamma^i(t) \equiv \dot{\gamma}^i(t). \quad (3.75)$$

El hecho de escribir $\dot{\gamma}$ se refiere justamente a que la construcción que hicimos con la derivada en el parámetro t , es en analogía con la mecánica clásica que usamos esta notación, pero principalmente porque al actuar sobre una función en la variedad este campo es enteramente una derivada sobre dicho parámetro. Una vez con esto, estamos en condiciones de considerar, en virtud de la ecuación (3.70) y los marco y co-marco coordenados, lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\gamma^* \omega)_t &= \omega_\nu(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma^\nu(t) dt \\ &= \omega_\nu(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma^\mu(t) (dx^\nu)_p (\partial_\mu)_p dt \\ &= \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt \end{aligned} \quad (3.76)$$

Así, de la definición (3.2.7)

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt. \quad (3.77)$$

Es importante notar que esta integral de línea hereda las propiedades básicas de la integral gracias a que los campos vectoriales y co-vectoriales son también lineales.

Lema 3.2.1. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva suave en \mathcal{M} y $\omega, \omega^1, \omega^2 \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, entonces:*

(I) *Para cualquier par de reales c_1, c_2 ,*

$$\int_\gamma (c_1 \omega^1 + c_2 \omega^2) = c_1 \int_\gamma \omega^1 + c_2 \int_\gamma \omega^2; \quad (3.78)$$

(II) *Si γ es una función constante*

$$\int_\gamma \omega = 0; \quad (3.79)$$

(III) Si $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$, con $a < c < b$,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega; \quad (3.80)$$

(IV) Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es cualquier función suave y $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{N})$,

$$\int_{\gamma} F^* \eta = \int_{F \circ \gamma} \eta. \quad (3.81)$$

La integral se puede extender a toda la variedad, y aunque es nuestro propósito hacerlo necesitamos una generalización más. Por ahora, concluimos la integral de línea con el siguiente resultado, que es consecuencia tanto del diferencial que construimos como del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 3.2.2. *Sea f una función en \mathcal{M} y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva suave, entonces [1] [15] [11]*

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (3.82)$$

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_a^b (\partial_{\mu} f dx^{\mu}) \left(\frac{d}{dt} \gamma^{\nu} \partial_{\nu} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\partial_{\mu} f \frac{d}{dt} \gamma^{\mu} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f \circ \gamma \right) dt \\ &= (f \circ \gamma)|_a^b. \end{aligned} \quad (3.83)$$

QED

3.3. Tensores

Los tensores (como mencionamos con anterioridad) son una generalización de los campos vectoriales y 1-formas en un arreglo que los engloba en el sentido algebraico. Esta construcción descansa sobre la hecha previamente, sin embargo, hay otros conceptos que aún son necesarios repasar antes de entrar a su desarrollo, el más importante es el de “producto tensorial” entre espacios vectoriales.

3.3.1. Producto tensorial

La mejor aproximación se hace por medio de la “propiedad de factorización universal” en la cual el producto tensorial de V y W (dos \mathbb{R} -e.v.), denotado como $V \otimes W$, y un mapeo bilineal $\lambda : V \times W \rightarrow V \otimes W$ con la propiedad que dado cualquier otro espacio vectorial Z y otra función bilineal $b : V \times W \rightarrow Z$ existe un único mapeo lineal $\tilde{b} : V \otimes W \rightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & Z \\ \lambda \uparrow & \nearrow \tilde{b} & \\ V \otimes W & & \end{array} \quad (3.84)$$

Observación. El par $(V \otimes W, \lambda)$ es único salvo isomorfismos.

Esta definición es muy general, aunque también abstracta, y para nuestros propósitos explotan el que, para espacios vectoriales de dimensión finita, existe un isomorfismo natural $u : V \otimes W \rightarrow B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$ dado por⁶

$$u(v \otimes w)(k, l) := \langle k, v \rangle \langle l, w \rangle. \quad (3.85)$$

Esta puede ser considerada una extensión del hecho que $(V^*)^*$ es isomorfo a V si $\dim(V)$ es finita.

Ahora bien, podemos considerar el producto tensorial de r espacios tangentes en $p \in \mathcal{M}$,

$$\underbrace{T_p \mathcal{M} \otimes T_p \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p \mathcal{M}}_{r \text{ veces}} = \bigotimes_{i=1}^r T_p \mathcal{M} \equiv \bigotimes^r T_p \mathcal{M}, \quad (3.86)$$

y el de s cotangentes para definir un “tensor” en el producto tensorial de estos espacios.

Definición 3.3.1 (Tensores). Un *tensor* de tipo $\binom{r}{s}$ (o (r, s)) en un punto $p \in \mathcal{M}$ es un elemento del espacio

$$T_{s p}^r \mathcal{M} := \left[\bigotimes^r T_p \mathcal{M} \right] \otimes \left[\bigotimes^s T_p^* \mathcal{M} \right]. \quad (3.87)$$

⁶Recordemos que $B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$ es el \mathbb{R} -e.v. de las funciones bilineales del producto cartesiano $V^* \times W^*$ de los espacios duales de V y W respectivamente.

Definimos $T_{0p}^0\mathcal{M}$ como \mathbb{R} , y notemos que

$$(I) \quad T_{1p}^0 = T_p^*\mathcal{M},$$

$$(II) \quad T_{0p}^1 = (T_p^*\mathcal{M})^* \cong T_p\mathcal{M},$$

(III) T_{0p}^r es llamado el “espacio de tensores r -contravariantes”,

(IV) T_{sp}^0 es conocido como el “espacio de tensores s -covariantes”.

Otra manera de definir a los tensores es mediante una transformación multilinear

$$T_p : \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times T_p^*\mathcal{M} \times \cdots \times T_p^*\mathcal{M}}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times \cdots \times T_p\mathcal{M}}_{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.88)$$

esto significa que es lineal en cada entrada.

Bajo esta idea los tensores se extienden inmediatamente a la idea de un “campo $\binom{r}{s}$ -tensorial” sobre \mathcal{M} , que es una asignación suave para cada punto de la variedad. Es decir, bajo la notación anterior, el tensor es el mapeo

$$T_p : \left(\times^r T_p^*\mathcal{M} \right) \times \left(\times^s T_p\mathcal{M} \right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.89)$$

$$(\omega_p^1, \dots, \omega_p^r; X_p^1, \dots, X_p^s) \mapsto T_p(\omega_p^1, \dots, \omega_p^r; X_p^1, \dots, X_p^s),$$

donde ω_p^i son vectores cotangentes ($i = 1, \dots, r$) y X_p^j , tangentes ($i = 1, \dots, s$), con $p \in \mathcal{M}$; mientras que el campo tensorial es la asignación suave

$$T : \left(\times^r \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \right) \times \left(\times^s \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \right) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}), \quad (3.90)$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^r; X^1, \dots, X^s)(p) \mapsto T_p(\omega^1, \dots, \omega^r; X^1, \dots, X^s).$$

Y ahora, tenemos el espacio de los campos $\binom{r}{s}$ -tensoriales en \mathcal{M} , denotado como $\mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$. Notemos que $\mathfrak{T}_0^0(\mathcal{M}) \equiv C^\infty(\mathcal{M})$, es por ello que a estas funciones las denominamos “campos escalares”.

Según la definición de producto tensorial (3.84), tenemos que si $v \in V$ y $w \in W$, el producto tensorial de los vectores v y w , denotado como $v \otimes w$, está dado por el elemento $\lambda(v, w) \in V \otimes W$ según lo cual define una única función bilineal

$$\lambda(v, w) : V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.91)$$

$$(k, l) \mapsto \lambda(v, w)(k, l) = \langle k, v \rangle \langle l, w \rangle.$$

Esta noción se puede extender al producto tensorial para tensores de cualquier tipo, también a los campos tensoriales.

Definición 3.3.2 (Producto tensorial). Sean $T \in \mathfrak{T}_{s_1}^{r_1}(\mathcal{M})$ y $S \in \mathfrak{T}_{s_2}^{r_2}(\mathcal{M})$ campos tensoriales. El *producto tensorial* $T \otimes S \in \mathfrak{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(\mathcal{M})$ es el mapeo

$$T \otimes S(\omega^1, \dots, \omega^{r_1+r_2}; v^1, \dots, v^{s_1+s_2})(p) := T_p(\omega^1, \dots, \omega^{r_1}; v^1, \dots, v^{s_1})S_p(\omega^{r_1+1}, \dots, \omega^{r_1+r_2}; v^{s_1+1}, \dots, v^{s_1+s_2}), \quad (3.92)$$

para $\omega^i \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$, $v^j \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $i = 1, \dots, r_1 + r_2$, $j = 1, \dots, s_1 + s_2$ y $p \in \mathcal{M}$.

Tenemos entonces que la dimensión del producto tensorial $V \otimes W$ es justamente $\dim(V) \cdot \dim(W)$; en consecuencia, si $\{a^i\}_{i=1}^n$ es una base de V y $\{b^j\}_{j=1}^m$, de W , $\dim(V \otimes W) = nm$, entonces $\{a^i \otimes b^j | i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, m\}$ es una base de $V \otimes W$. Con base en esto podemos ahora construir una base para el espacio $T_{p_s}^r(\mathcal{M})$ usando para ello el sistema coordenado $\{x^k\}_{k=1}^n$, sus elementos tienen entonces la forma

$$(\partial_{\mu_1})_p \otimes \dots \otimes (\partial_{\mu_r})_p \otimes (dx^{\nu_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{\nu_s})_p, \quad (3.93)$$

y la base es justamente el conjunto de todas las combinaciones, es decir, $\mu_i, \nu_j = 1, \dots, n$ con $i = 1, \dots, r$ y $j = 1, \dots, s$. De donde se deduce que este espacio es de n^{r+s} dimensiones. Así mismo, las componentes de un tensor $T_p \in T_{s_p}^r(\mathcal{M})$ están dadas por

$$T_{p_{\nu_1, \dots, \nu_s}}^{\mu_1, \dots, \mu_r} = T((dx^{\mu_1})_p, \dots, (dx^{\mu_r})_p; (\partial_{\nu_1})_p, \dots, (\partial_{\nu_s})_p), \quad (3.94)$$

donde vemos a T_p como una función multilineal dada por (3.89). Notemos también que se puede dar una base análoga para el espacio de los campos tensoriales de clase $\binom{r}{s}$.

Ahora bien, consideramos cómo es la representación de un tensor entre bases y su relación, es decir, el cambio de coordenadas. Para esto, tomamos un campo tensorial de tipo $\binom{r}{s}$. Sabemos que

$$T = T_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}. \quad (3.95)$$

Consideremos primeramente las componentes del tensor en el sistema coordenado $\{x^{\mu'}\}_{\mu'=1}^n$ en la misma carta coordenada del sistema $\{x^{\mu}\}_{\mu=1}^n$:

$$\begin{aligned} T_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r} &= T(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}; \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_s}) \\ &= T\left(\Lambda_{\mu'_1}^{\mu_1} dx^{\mu'_1}, \dots, \Lambda_{\mu'_r}^{\mu_r} dx^{\mu'_r}; \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \partial_{\nu'_1}, \dots, \Lambda_{\nu'_s}^{\nu_s} \partial_{\nu'_s}\right) \\ &= \Lambda_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\mu'_r}^{\mu_r} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_s}^{\nu_s} T\left(dx^{\mu'_1}, \dots, dx^{\mu'_r}; \partial_{\nu'_1}, \dots, \partial_{\nu'_s}\right) \\ &= \Lambda_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\mu'_r}^{\mu_r} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_s}^{\nu_s} T_{\nu'_1, \dots, \nu'_s}^{\mu'_1, \dots, \mu'_r} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Por otro lado, para la base tenemos que, gracias a la linealidad del producto tensorial [1] [15],

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} = \\ \Lambda_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\mu'_r}^{\mu_r} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_s}^{\nu_s} \partial_{\mu'_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu'_r} \otimes dx^{\nu'_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu'_s}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

3.3.2. Tensores simétricos y antisimétricos

Consideremos ahora un tensor cualquiera, ¿qué pasa cuando cambiamos el orden de los vectores sobre los que actúa?; en particular, ¿toma el mismo valor? Es claro que esto es considerable solo si el tensor es covariante o contravariante; si el tensor tiene por argumentos tanto vectores tangentes como cotangentes las consideraciones siguientes han de hacerse por separado.⁷

Definición 3.3.3 (Tensores (covariantes) simétricos). Sea V un \mathbb{R} -e.v. de dimensión finita. Un s -tensor covariante α en V se dice que es *simétrico* si su valor es invariante ante el intercambio de cualquier par de argumentos:

$$\alpha(v^1, \dots, v^i, \dots, v^j, \dots, v^r) \equiv \alpha(v^1, \dots, v^j, \dots, v^i, \dots, v^r), \quad 1 \leq i < j \leq r. \quad (3.98)$$

Una definición análoga tiene lugar para los r -tensores contravariantes. Los tensores simétricos tienen un lugar especial dentro de la teoría que venimos desarrollando, pues entre estos se encuentra la métrica. El ejemplo más importante de tensor simétrico en un espacio vectorial es el producto interno, ya que permite definir longitudes de vectores y ángulos entre ellos (véase sección (4.1)). Por otro lado, están los tensores que sí cambian cuando hacemos un intercambio entre sus argumentos.

Definición 3.3.4 (Tensores (covariantes) antisimétricos). Un s -tensor covariante α en V se dice que es *antisimétrico* si su valor cambia de signo ante el intercambio entre cualquier par de sus argumentos:

$$\alpha(v^1, \dots, v^i, \dots, v^j, \dots, v^r) = -\alpha(v^1, \dots, v^j, \dots, v^i, \dots, v^r), \quad 1 \leq i < j \leq r. \quad (3.99)$$

Análogamente se puede definir un r -tensor contravariante antisimétrico.

Podemos emplear además la “simetrización” de un tensor, de manera que para un tensor contravariante $T \in \mathfrak{T}_0^r(\mathcal{M})$ podemos definir la “parte simétrica de T ” como

$$\text{Sym}[T](\omega_1, \dots, \omega_r) = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq r} T(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}), \quad (3.100)$$

donde $\omega_i \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ para $i = 1, \dots, r$ y (i_1, \dots, i_r) son permutaciones de $(1, \dots, r)$. Si $T^{\mu_1 \dots \mu_r}$ son las componentes del tensor T , denotamos a las del tensor $\text{Sym}[T]$ como $T^{(\mu_1 \dots \mu_r)}$. Podemos además considerar la parte simétrica de un tensor covariante, que se define análogamente. El concepto puede también aplicarse solo a algunas componentes del tensor, por lo que la expresión $T^{\mu_1 \dots (\mu_i \dots \mu_i) \dots \mu_r}$ significa que únicamente tomamos las permutaciones de (i, \dots, j) .

Así mismo, podemos hablar de la “alternancia” de un tensor covariante $S \in \mathfrak{T}_s^0(\mathcal{M})$, en cuyo caso definimos la “parte antisimétrica de S ” como

$$\text{Alt}[S](v_1, \dots, v_s) = \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s} (-1)^\pi S(v_{i_1}, \dots, v_{i_s}), \quad (3.101)$$

⁷Para considerar ambos tipos de índices a la vez necesitamos la métrica.

donde $v_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ para $i = 1, \dots, s$ y

$$\pi := \begin{cases} 1 & \text{si la permutación } (i_1, i_2, \dots, i_s) \text{ es par,} \\ 0 & \text{si es impar.} \end{cases} \quad (3.102)$$

Sean $S_{\nu_1 \dots \nu_s}$ las componentes del tensor S , denotamos a las del tensor $\text{Alt}[S]$ como $S_{[\nu_1 \dots \nu_s]}$. Esta idea se puede aplicar tanto a los tensores contravariantes así como a un número específico de las componentes del tensor, por lo que la expresión $S_{\nu_1 \dots [\nu_i \dots \nu_j] \dots \nu_s}$ se refiere a la alternancia de los índices ν_i, \dots, ν_j , por lo que las permutaciones únicamente se realizan sobre esos índices [11].

En general, los tensores antisimétricos juegan un papel central dentro de la topología algebraica, ya que nos permiten obtener propiedades topológicas, al igual que geométricas. En la física a menudo aparecen en teorías como el electromagnetismo y la teoría de Cartan-Einstein (por mencionar algunos ejemplos).

3.4. Formas diferenciales

Las formas diferenciales son, esencialmente, tensores covariantes alternantes (antisimétricos). Estas ayudan a definir el concepto de orientación y son de gran ayuda en la teoría de integración.

3.4.1. Álgebra exterior

Definición 3.4.1 (Formas). Una k -forma (o k -forma alternante) sobre V , un \mathbb{R} -e.v., es una transformación multilinear de k vectores en V a \mathbb{R} alternante, es decir, que bajo el intercambio de cualesquiera par de argumentos cambia de signo:

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots). \quad (3.103)$$

A menudo a las k -formas las llamamos simplemente “formas”, en caso de no ser necesario especificar el tipo de tensor que es. Decimos que una forma es “diferenciable”, a lo que nombramos “forma diferencial”, si el tensor alternante covariante definido por la forma $\omega(p)$ es diferenciable en todo $p \in \mathcal{M}$. Denotamos al conjunto de las k -formas diferenciales en \mathcal{M} como $\Lambda^k(\mathcal{M})$.

Observación. La propiedad alternante se puede expresar también como

$$\omega(v^1, v^2, \dots, v^k) = (-1)^\pi \omega(v^{i_1}, v^{i_2}, \dots, v^{i_k}), \quad (3.104)$$

donde π es definida en (3.102).

Si una forma actúa sobre un conjunto de campos vectoriales en el que al menos uno de ellos se repite, entonces es igual a cero; esto significa que la igualdad se cumple por ser igual a cero.⁸

Lema 3.4.1. Sea α un k -tensor covariante en un espacio vectorial V de dimensión finita. Lo siguiente es equivalente:

- (I) α es alternante;
- (II) $\alpha(v^1, \dots, v^k) = 0$ si la k -tupla (v^1, \dots, v^k) es linealmente dependiente;
- (III) α da el valor cero cuando dos de sus argumentos son iguales:

$$\alpha(v^1, \dots, w, \dots, w, \dots, v^k) = 0. \quad (3.105)$$

Demostración. [(I) \Rightarrow (II)] Consideremos $\{v^1, \dots, v^k\} \subset V$ un subconjunto linealmente dependiente, supongamos s.p.g.⁹ que v^j se escribe como combinación lineal de los demás como

$$\begin{aligned} v^j &= a_1 v^1 + \dots + a_{j-1} v^{j-1} + a_{j+1} v^{j+1} + \dots + a_k v^k \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} a_i v^i + \sum_{i=j+1}^k a_i v^i. \end{aligned} \quad (3.106)$$

⁸La permutación de cualquier conjunto de k elementos en el que al menos uno se repite al intercambiar de lugar cualquiera de estos es el conjunto ordenado original.

⁹Sin pérdida de generalidad.

Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(v^1, \dots, v^k) &= \alpha\left(v^1, \dots, v^{j-1}, \sum_{i=1}^{j-1} a_i v^i + \sum_{i=j+1}^k a_i v^i, v^{j+1}, \dots, v^k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} a_i \alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^i, v^{j+1}, \dots, v^k) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^k a_i \alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^i, v^{j+1}, \dots, v^k),
\end{aligned} \tag{3.107}$$

bajo el intercambio de v^i con su respectivo elemento obtenemos un signo, es decir, cuando $i = 1$ intercambiamos v^i con v^1 y así sucesivamente:

$$\begin{aligned}
\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^1, v^{j+1}, \dots, v^k) &= -\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^1, v^{j+1}, \dots, v^k), \\
&\vdots \\
\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^{j-1}, v^{j+1}, \dots, v^k) &= -\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^{j-1}, v^{j+1}, \dots, v^k), \\
\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^{j+1}, v^{j+1}, \dots, v^k) &= -\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^{j+1}, v^{j+1}, \dots, v^k), \\
&\vdots \\
\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^k, v^{j+1}, \dots, v^k) &= -\alpha(v^1, \dots, v^{j-1}, v^k, v^{j+1}, \dots, v^k);
\end{aligned} \tag{3.108}$$

volviendo a agrupar términos obtenemos

$$\alpha(v^1, \dots, v^k) = -\alpha(v^1, \dots, v^k), \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(v^1, \dots, v^k) = 0. \tag{3.109}$$

[(II) \Rightarrow (III)] Es inmediato a partir de lo anterior.

[(III) \Rightarrow (I)] Sean $v^1, \dots, v^k \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(v^1, \dots, v^i + v^j, \dots, v^i + v^j, \dots, v^k) \\
&= \alpha(v^1, \dots, v^i, \dots, v^i, \dots, v^k) + \alpha(v^1, \dots, v^i, \dots, v^j, \dots, v^k) \\
&\quad + \alpha(v^1, \dots, v^j, \dots, v^i, \dots, v^k) + \alpha(v^1, \dots, v^i + v^j, \dots, v^j, \dots, v^k) \\
&= \alpha(v^1, \dots, v^i, \dots, v^j, \dots, v^k) + \alpha(v^1, \dots, v^j, \dots, v^i, \dots, v^k).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

QED

Observación. Del este lema podemos deducir que todas las k -formas con $k > n$ son idénticamente cero (recordemos que n es la dimensión de la variedad), ya que todo conjunto de $n + 1$ vectores es linealmente dependiente.

Así mismo, podemos escribir a cualquier k -forma en términos de la base. Sin embargo, para este propósito, el producto tensorial no nos da todas las propiedades que buscamos. Tomemos por ejemplo dos 1-formas $\alpha, \beta \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, el producto tensorial de estas es el 2-tensor covariante $\alpha \otimes \beta$, el cual no necesariamente es alternante, pues no siempre se cumple que $\alpha \otimes \beta = -\beta \otimes \alpha$, dado que no todos los 2-tensores covariantes son 2-formas. Debido a ello necesitamos un producto que preserve las propiedades entre las formas: que dada una k -forma y una l -forma, exista un producto \wedge tal que el resultado sea una $(k + l)$ -forma. Esto motiva el desarrollo del “álgebra exterior”.

Definición 3.4.2 (Producto exterior). Sean $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ y $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{M})$. El *producto exterior* (o *cuña*) de las formas α y β es la forma $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(\mathcal{M})$ expresada como

$$\alpha \wedge \beta(v^1, \dots, v^{k+l}) := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq i_{k+1} < \dots < i_{k+l} \leq n}} (-1)^\pi \alpha(v^{i_1}, \dots, v^{i_k}) \beta(v^{i_{k+1}}, \dots, v^{i_{k+l}}), \quad (3.111)$$

donde $v^1, \dots, v^{k+l} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y π es como se definió en (3.102).

Esta es una ampliación de la definición del producto cuña sobre espacios vectoriales. Y con el ánimo de no repetir las definiciones y teoremas tanto para estos como para las variedades diferenciales plantearemos su estudio directamente a estos últimos espacios el resto del capítulo. El lector no debe olvidar que los resultados que se expongan tienen validez en ambos, aunque bajo ciertas restricciones, al menos en lo que concierne a la diferencibilidad (siempre que se pueda definir esta propiedad sobre dicho espacio vectorial).

Con este nuevo enfoque podemos escribir una base para las formas diferenciales. Para ello consideremos nuevamente la base de 1-formas $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^n$. Tomando su producto exterior tenemos que la base coordenada de las 2-formas diferenciales está dada por

$$\{dx^\mu \wedge dx^\nu \mid 1 \leq \mu < \nu \leq n\}, \quad (3.112)$$

de manera análoga para las 3-formas. En resumen, la base coordenada para las k -formas diferenciales es

$$\{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \mid 1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n\}. \quad (3.113)$$

Directamente podemos deducir que

$$\dim(\Lambda^k(\mathcal{M})) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (3.114)$$

Por definición las funciones $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ como “0-formas”: $\Lambda^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$. Así, interpretamos el producto entre $f \in \Lambda^0(\mathcal{M})$ y $\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ como el producto ordinario $f\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M})$. Lo que ocurre es que estamos definiendo las 0-formas y 1-formas diferenciales como tensores alternantes. Ahora bien, el “espacio de formas diferenciales” está dado por

$$\Lambda(\mathcal{M}) := \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(\mathcal{M}); \quad (3.115)$$

entonces el producto cuña convierte al espacio $\Lambda(\mathcal{M})$ en una álgebra graduada asociativa y anticonmutativa que cumple

$$\dim(\Lambda(\mathcal{M})) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n, \quad (3.116)$$

bajo las definiciones

$$(\alpha + \beta)(v^1, \dots, v^k) := \alpha(v^1, \dots, v^k) + \beta(v^1, \dots, v^k), \quad (3.117)$$

$$(f \wedge \alpha)(v^1, \dots, v^k) := f\alpha(v^1, \dots, v^k), \quad (3.118)$$

para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ y $v^1, \dots, v^k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Notemos ahora que toda k -forma diferencial se puede escribir como

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}, \quad (3.119)$$

Si queremos aprovechar la convención de la suma tenemos que considerar que hay términos que se van a repetir. Esto es, si la suma se hace sobre cada índice, entonces cada término se va a repetir $k!$ veces en el caso general de una k -forma diferencial. Es decir,

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (3.120)$$

Sin embargo, para ahorrar notación, cuando hablemos de formas diferenciales la suma sobre los índices vamos a efectuarla sin repeticiones, a menos que se diga lo contrario. Por lo que vamos a escribir una k -forma diferencial como

$$\omega = \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (3.121)$$

En cuanto a las componentes alternantes (es decir, la notación $\omega_{[\mu_1 \dots \mu_k]}$) vamos también a restringirlas a sumas sin repeticiones, por lo que para las componentes de una forma tendremos que $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} \equiv \omega_{[\mu_1, \dots, \mu_k]}$.

Lema 3.4.2. Sean $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{M})$, $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{M})$ y $\omega \in \Lambda^j(\mathcal{M})$ formas diferenciales.

(I) *Bilinealidad:* para $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} (f\alpha + g\beta) \wedge \omega &= f(\alpha \wedge \omega) + g(\beta \wedge \omega) \\ \omega \wedge (f\alpha + g\beta) &= f(\omega \wedge \alpha) + g(\omega \wedge \beta). \end{aligned} \quad (3.122)$$

(II) *Asociatividad:*

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \omega) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \omega. \quad (3.123)$$

(III) *Anticonmutatividad:*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha. \quad (3.124)$$

Demostración. (I) Notemos que en este caso la suma solo tiene sentido si $k = l$. Sean v^1, \dots, v^{k+j} campos vectoriales en \mathcal{M} y haciendo la suma sobre los índices i_1, \dots, i_{k+j}

tales que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ y $1 \leq i_{k+1} < \dots < i_{k+j} \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
& (f\alpha + g\beta) \wedge \omega(v^1, \dots, v^{k+j}) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq i_{k+1} < \dots < i_{k+j} \leq n}} (-1)^\pi (f\alpha + g\beta)(v^{i_1}, \dots, v^{i_k}) \omega(v^{i_{k+1}}, \dots, v^{i_{k+j}}) \\
&= f \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq i_{k+1} < \dots < i_{k+j} \leq n}} (-1)^\pi \alpha(v^{i_1}, \dots, v^{i_k}) \omega(v^{i_{k+1}}, \dots, v^{i_{k+j}}) \\
&\quad + g \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq i_{k+1} < \dots < i_{k+j} \leq n}} (-1)^\pi \beta(v^{i_1}, \dots, v^{i_k}) \omega(v^{i_{k+1}}, \dots, v^{i_{k+j}}) \\
&= f(\alpha \wedge \omega)(v^1, \dots, v^{k+j}) + g(\beta \wedge \omega)(v^1, \dots, v^{k+j}),
\end{aligned} \tag{3.125}$$

análogamente

$$\omega \wedge (f\alpha + g\beta) = f(\omega \wedge \alpha) + g(\omega \wedge \beta). \tag{3.126}$$

(ii) Para este caso vamos a obviar las sumas, esto con el propósito de ahorrar espacio. Consideremos $v^i \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, para $i = 1, \dots, k+l+j$, entonces

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \omega(v^1, \dots, v^{k+l+j}) = (-1)^\pi \alpha(v^{i_1}, \dots, v^{i_k}) \beta(v^{i_{k+1}}, \dots, v^{i_{k+l}}) \omega(v^{i_{k+l+1}}, \dots, v^{i_{k+l+j}}).$$

Como el producto es asociativo, la afirmación se cumple.

(iii) Consideremos un sistema coordenado (U, ϕ) con sus funciones coordenadas dadas por $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$, dado que el producto exterior, \wedge , es lineal, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \wedge (\beta_{\nu_1, \dots, \nu_l} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l}) \\
&= \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k} \beta_{\nu_1, \dots, \nu_l} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \\
&= (-1)^l \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k} \beta_{\nu_1, \dots, \nu_l} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{k-1}} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \wedge dx^{\mu_k} \\
&= (-1)^{kl} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k} \beta_{\nu_1, \dots, \nu_l} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\
&= (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

QED

Es útil notar además que de lo anterior se cumple

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \tag{3.128}$$

y es inmediato que

$$dx^i \wedge dx^i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{3.129}$$

Observación. A pesar de lo anterior, en general,

$$\omega \wedge \omega \neq 0, \tag{3.130}$$

tómese por ejemplo, $\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$,

$$\omega \wedge \omega = 2dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \neq 0. \tag{3.131}$$

Hay un tensor antisimétrico en particular cuya importancia es especial para nosotros y será de mucha ayuda a lo largo del presente trabajo.

Definición 3.4.3 (Tensor de Levi Civita). Definimos el tensor *totalmente antisimétrico de Levi-Civita* de orden k , denotado como ϵ^k , como aquel cuyas componentes están dadas por

$$\epsilon^k_{i_1 \dots i_k} := \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_k) \text{ es una permutación par de } (1, \dots, n), \\ -1 & \text{si es impar,} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (3.132)$$

a las cuales denominamos *símbolos de Levi-Civita*.

La razón de esta notación es simple: este tensor se puede construir con la base dual de un sistema coordenado. Es decir, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base para los campos vectoriales en un abierto $U \subset \mathcal{M}$, y su base dual $\{\theta^i\}_{i=1}^n$, sabemos que cumplen

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i. \quad (3.133)$$

Entonces el tensor de Levi-Civita puede escribirse como

$$\epsilon^k = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k. \quad (3.134)$$

Ahora, sean $X^1, \dots, X^k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, tenemos que¹⁰

$$\begin{aligned} \epsilon^k(X^1, \dots, X^k) &= \epsilon^k((X^1)^{i_1} e_{i_1}, \dots, (X^k)^{i_k} e_{i_k}) \\ &= (X^1)^{i_1} \dots (X^k)^{i_k} \epsilon^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= (X^1)^{i_1} \dots (X^k)^{i_k} \epsilon^k_{i_1 \dots i_k} \\ &= \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} (-1)^\pi (X^1)^{i_1} \dots (X^k)^{i_k} \\ &= \det(X), \end{aligned} \quad (3.135)$$

donde X es la matriz cuyas componentes son $(X^i)^j$ con $i, j = 1, \dots, k$ y además una sub-matriz de $A \in M_{n \times n}(C^\infty(\mathcal{M}))$ que se expresa como

$$A = \begin{pmatrix} \theta^1(X^1) & \dots & \theta^1(X^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^n(X^1) & \dots & \theta^n(X^n) \end{pmatrix}, \quad (3.136)$$

recordando que [11]

$$(X^i)^j = \theta^j(X^i). \quad (3.137)$$

¹⁰El determinante de una matriz $A \in M_{k \times k}(\mathbb{F})$ puede ser expresado (en virtud del símbolo de Levi-Civita) como

$$\det(A) = \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} (-1)^\pi \prod_{j=1}^k a_{i_j}^j = \epsilon^{i_1 \dots i_k} a_{i_1}^1 \dots a_{i_k}^k,$$

donde $a_j^i \in \mathbb{F}$ son las componentes de la matriz y π definido en (3.102) [18].

Así, consideremos las 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^k$ arbitrarias, tenemos que

$$\begin{aligned}\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(X^1, \dots, X^k) &= \omega^1_{i_1} \dots \omega^k_{i_k} (X^1)^{j_1} \dots (X^k)^{j_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k} (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \omega^1_{i_1} (X^1)^{j_1} \dots \omega^k_{i_k} (X^k)^{j_k} \epsilon^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} (-1)^\pi \omega^1_{i_1} (X^1)^{j_1} \dots \omega^k_{i_k} (X^k)^{j_k}.\end{aligned}$$

Sea $\Omega \in M_{k \times k}(C^\infty(\mathcal{M}))$ dada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega^1(X^1) & \dots & \omega^1(X^k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^k(X^1) & \dots & \omega^k(X^k) \end{pmatrix}, \quad (3.138)$$

entonces

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(X^1, \dots, X^k) = \det(\Omega). \quad (3.139)$$

3.4.2. La derivada exterior

En la definición del diferencial de una función f , (3.2.3), la razón de escribir df es más por hacer referencia a una «derivada» entre funciones, pues esta se escribe en términos de las derivadas parciales de la misma. Lo que buscamos ahora es adaptar esta noción al resto de formas diferenciales. Entonces si el diferencial transforma 0-formas en 1-formas, la derivada que buscamos debería actuar como $d : \Lambda^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathcal{M})$. Claramente debe cumplir algunas condiciones como la linealidad, satisfacer la regla de Leibniz y coincidir con el diferencial (si se le aplica a 0-formas).

Comencemos por construir una definición de esta «derivada» para 1-formas. Sea $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, sabemos que sus componentes son funciones, por lo que podemos considerar el diferencial de estas:

$$d\omega_\mu = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (3.140)$$

Si denotamos la derivada

$$\partial_\mu \omega \equiv \omega_{,\mu}, \quad (3.141)$$

para simplificar notación, podemos escribir esto último como

$$d\omega_\mu = \omega_{\mu,\nu} dx^\nu. \quad (3.142)$$

Entonces una propuesta podría ser definir

$$d\omega := d\omega_\mu \wedge dx^\mu = \omega_{\mu,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (3.143)$$

Es claramente válido en un sistema coordenado dado por las funciones coordenadas $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$. Notemos que $d\omega$ es una 2-forma diferencial y sabemos que es lineal, pues lo hereda del diferencial y el producto cuña.

Consideremos ahora aplicar esta derivada a la 1-forma resultante del diferencial de una función f sobre \mathcal{M} . Tenemos que

$$\begin{aligned} d(df) &= d(\partial_\mu f dx^\mu) = \partial_\nu (\partial_\mu f) dx^\nu \wedge dx^\mu = f_{,\mu\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= f_{,\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu = -f_{,\nu\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -d(df), \end{aligned} \quad (3.144)$$

donde usamos que las derivadas parciales conmutan, e invertimos el orden en el producto cuña. Así, tenemos que

$$d(df) \equiv 0. \quad (3.145)$$

Esto es consistente con nuestra definición, pues de (3.143) vemos que esta derivada no actúa sobre la base que es el resultado de aplicar el diferencial a las funciones coordenadas, es decir, por construcción $d(dx^\mu) = 0$, $\mu = 1, \dots, n$.

Veamos ahora qué ocurre ante el producto cuña de dos 1-formas; sean $\alpha, \beta \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d((\alpha_\mu dx^\mu) \wedge (\beta_\nu dx^\nu)) = d(\alpha_\mu \beta_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= d(\alpha_\mu \beta_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\sigma (\alpha_\mu \beta_\nu) dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \beta_\nu \alpha_{\mu,\sigma} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + \alpha_\mu \beta_{\nu,\sigma} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= d\alpha_\mu \wedge dx^\mu \wedge \beta + d\beta_\nu \wedge \alpha \wedge dx^\nu \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)\alpha \wedge d\beta. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Dadas las consideraciones anteriores, nos es lícito tomar (3.143) como definición local de la derivada que buscamos (dado que es una expresión que descansa sobre la base coordenada).

Definición 3.4.4 (Derivada exterior (local)). Sea ω una k -forma diferencial sobre \mathcal{M} . Definimos la *derivada exterior (local)* de ω como

$$d\omega := \omega_{\mu_1 \dots \mu_k, \nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (3.147)$$

donde $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ es un sistema coordenado en una carta (U, ϕ) .

A pesar de ser una definición en términos de sus componentes locales, sus propiedades no dependen de un sistema coordenado, por lo cual esta representación es muy útil a la hora de exhibirlas. Algunas de estas propiedades ya se mencionaron con anterioridad, un ejemplo de esto es mostrar la regla de Leibniz en general, es decir, para cualesquiera k -formas diferenciales. Para lo cual consideramos $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ y $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{M})$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d[(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \wedge (\beta_{\nu_1 \dots \nu_l} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l})] \\ &= d(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_k} \beta_{\nu_1 \dots \nu_l}) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \\ &= \beta_{\nu_1 \dots \nu_l} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k, \lambda} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \\ &\quad + \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k} \beta_{\nu_1 \dots \nu_l, \lambda} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Notemos que en la última igualdad el primer término corresponde justamente a $d\alpha \wedge \beta$. Por su parte, para reducir el segundo escribimos

$$dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} = (-1)^k dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^\lambda,$$

de donde

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \quad (3.149)$$

Para una definición más general de (3.147) podemos regresar a la expresión original del diferencial de f , es decir,

$$df = \partial_\mu f dx^\mu, \quad (3.150)$$

en una base genérica $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ de campos vectoriales y $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$ su base dual podemos escribir

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \Lambda_\mu^{\nu'} e_{\nu'}, \\ dx^\mu &= \Lambda_{\lambda'}^\mu \theta^{\lambda'}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Con lo que

$$df = \partial_\mu f dx^\mu = \Lambda_\mu^{\nu'} e_{\nu'}(f) \Lambda_{\lambda'}^\mu \theta^{\lambda'} = \Lambda_\mu^{\nu'} \Lambda_{\lambda'}^\mu e_{\nu'}(f) \theta^{\lambda'} = \delta_{\lambda'}^{\nu'} e_{\nu'}(f) \theta^{\lambda'} = e_{\lambda'}(f) \theta^{\lambda'}. \quad (3.152)$$

Por lo que una expresión más general para la derivada exterior es

$$d\omega = e_\mu(\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}) \theta^\mu \wedge \theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}. \quad (3.153)$$

siendo la k -forma ω escrita en la base $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$ como

$$\omega = \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}. \quad (3.154)$$

La definición global de la derivada exterior debe ser independiente de la base seleccionada.

Definición 3.4.5. Sean $\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M})$, con $k < n$ y $X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Definimos su *derivada exterior*¹¹, $d\omega \in \Lambda^{k+1}(\mathcal{M})$, como

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \left[\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \right] \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned} \quad (3.155)$$

donde la notación \widehat{X}_k significa que el elemento X_k es omitido e $i, j = 0, \dots, k$ [1] [19].

¹¹Esta expresión se escribe usualmente como [14]

$$d\omega(\dots) := \frac{1}{k+1} \sum (-1)^i X_i [\omega(\dots)] + \frac{1}{k+1} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots).$$

El cambio radica en la convención establecida para efectuar la suma sobre las formas diferenciales; en particular, nosotros establecimos sumas sin repeticiones.

3.4.3. Cohomología de De Rham

Tomar la derivada exterior de un elemento de la base de 1-formas $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$ no necesariamente se anulará. Es decir, en general

$$d\theta^\mu \neq 0. \quad (3.156)$$

Esto motiva el siguiente concepto.

Definición 3.4.6. Sea ω una k -forma.

- Decimos que ω es *exacta* si existe η una $(k-1)$ -forma, tal que $d\eta = \omega$.
- Si $d\omega = 0$ la llamamos *cerrada*.

En particular para las formas diferenciales que forman una base tenemos la siguiente convención.

Definición 3.4.7. Un marco dual es llamado *holonómico* si las n 1-formas $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ son exactas.

Un caso particular de base holonómica es la base coordenada.

Observación. Todas las formas exactas son cerradas, pero no todas las cerradas son exactas.

Denotamos por $B^r(\mathcal{M})$ al espacio de las k -formas diferenciales exactas y por $Z^k(\mathcal{M})$, al de las cerradas. Notemos que ambos son espacios vectoriales en virtud de la linealidad de la derivada exterior.

Definición 3.4.8. La k -ésima cohomología de De Rham de la variedad diferencial \mathcal{M} , denotada como $H^k(\mathcal{M})$, es el espacio cociente del espacio lineal de las formas cerradas sobre el subespacio lineal de las formas exactas. Es decir,

$$H^k(\mathcal{M}) := \frac{Z^k(\mathcal{M})}{B^r(\mathcal{M})}. \quad (3.157)$$

Observación. En virtud de las propiedades de la derivada exterior podemos también definir a la cohomología de De Rham como

$$H^k(\mathcal{M}) := \frac{\text{Ker}(d)}{\text{Im}(d)}. \quad (3.158)$$

Además, $H^k(\mathcal{M})$ es un espacio vectorial [13] [20].

Como primer caso tenemos que

$$H^0(\mathcal{M}) = \{f \in C^\infty(\mathcal{M}) \mid df = 0\} = \{f \in C^\infty(\mathcal{M}) \mid f = cte.\} \cong \mathbb{R}. \quad (3.159)$$

Al entero $b_k \in \mathbb{Z}$ que satisface $d = \dim(H^k(\mathcal{M}))$ se le denomina “ k -ésimo número de Betti”.

Definición 3.4.9. La *característica de Euler-Poincaré* de una variedad \mathcal{M} , $\chi(\mathcal{M})$, es el entero [15]

$$\chi(\mathcal{M}) := \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k = n \in \mathbb{Z}. \quad (3.160)$$

Lema 3.4.3. Sea $n = \dim(\mathcal{M})$, entonces $b_k = 0$ para $k > n$.

Estos elementos son de suma importancia para la topología diferencial, topología algebraica, geometría diferencial y, por supuesto, para la física teórica [1]. Más adelante regresaremos a la cohomología de De Rham para desarrollar las «clases características». Véase subsección (5.2.6).

3.5. Difeomorfismos locales

Para terminar el presente capítulo trataremos con el sentido en el cual un campo vectorial puede ser entendido como un generador de un difeomorfismo «infinitesimal»; esta idea se expresa como

$$\delta x^\mu = \epsilon x^\mu(x), \quad (3.161)$$

y aparece frecuentemente en la literatura, a la vez que nos permite desarrollar conceptos muy útiles para la geometría diferencial y que nos van a ser útiles más adelante (sobre todo al tratar formalmente con la conexión y la curvatura). En particular, dentro de las teorías de campos podemos separar a estas «variaciones» en dos tipos, que son “reales” y “virtuales”, pero por ahora no nos involucraremos en la física que describen sino en la geometría subyacente. Un concepto inmediato que aparece después de examinar esta idea la de una derivada en particular que pueda evaluar (o comparar) un objeto sobre los difeomorfismos infinitesimales generados por un campo vectorial. Esta es la idea de la “derivada de Lie” que mencionamos al inicio del capítulo y aplicamos al caso de una función sobre \mathcal{M} .

3.5.1. Flujo y curvas integrales

Es intuitivo que si tenemos una familia de curvas suaves que no se crucen sobre una variedad entonces los vectores tangentes en cada punto pueden considerarse en conjunto para formar un campo vectorial. Más aún, podemos considerar el caso contrario: un campo vectorial que pueda entenderse como una colección de vectores tangentes anclados a los puntos sobre una familia de curvas. Claramente estos campos deberían satisfacer algunas condiciones para lograr que esto sea posible. Primeramente, tomamos un campo vectorial X sobre \mathcal{M} . Lo que tenemos que averiguar es si es posible llenar la variedad con una familia de curvas de tal manera que los vectores tangentes a dichas curvas pasen a través de puntos particulares en \mathcal{M} que sean justamente el campo vectorial evaluado en cualquier punto, esto es, la derivación X_p .

Esta idea es muy importante desde el punto de vista físico, pues está involucrado con las trayectorias que sigue un sistema físico desde el análisis funcional. En particular, en la mecánica clásica, donde \mathcal{M} puede representar al espacio de estados de un sistema, si equipamos a \mathcal{M} de una estructura que nos permita asignar vectores tangentes a cada función en la variedad, la familia de curvas que encajan con dicho vector juegan un papel crucial dentro de la teoría. En particular, las curvas asociadas con el vector tangente asignado a la función energía $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ son justamente las trayectorias del sistema.

De este ejemplo podemos extraer dos condiciones sobre las curvas:

- deben pasar por un punto específico $p \in \mathcal{M}$,
- el vector tangente en cada punto a lo largo de ella corresponde con el campo vectorial evaluado en ese punto.

Con esto en mente conseguimos una primera formalidad.

Definición 3.5.1 (Curvas integrales). Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial y $p \in \mathcal{M}$. Una *curva integral* de X que pasa a través del punto p es una curva $t \mapsto \sigma(t)$ en \mathcal{M} tal que

$$\sigma(0) = p, \quad (3.162)$$

y

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t = X_{\sigma(t)}, \quad (3.163)$$

para todo t en un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$ de \mathbb{R} .

Recordemos que en coordenadas locales X puede escribirse como

$$X = \sum_{\mu=1}^m X(x^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.164)$$

y, en el presente caso, (3.163) implica que

$$(Xx^\mu)(\sigma(t)) = X_{\sigma(t)}(x^\mu) = \sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t x^\mu = \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \sigma(t)), \quad (3.165)$$

y así las componentes X^μ determinan la curva integral $t \mapsto \sigma(t)$ de acuerdo a la ecuación diferencial

$$X^\mu(\sigma(t)) = \frac{d}{dt} (x^\mu \circ \sigma(t)), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (3.166)$$

sujeto a la condición de frontera

$$x^\mu(\sigma(0)) = x^\mu(p), \quad \mu = 1, \dots, m. \quad (3.167)$$

En cuanto al problema de resolver (3.166) con el valor inicial (3.167) existe un vasto estudio acerca del tema y se puede implementar el método analítico que se prefiera. Así mismo se puede usar la ecuación integral (equivalente)

$$X^\mu(\sigma(t)) = x^\mu(p) + \int_0^t X^\mu(\sigma(s)) ds. \quad (3.168)$$

Se puede demostrar la existencia de una curva integral que pasa por un punto específico de \mathcal{M} y que está definida para un intervalo $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$. Sin embargo, es diferente si la existencia de soluciones está definida para todo t . Se puede traslapar abiertos en los que hay solución, pero esto no garantiza la existencia para todo valor de $t \in \mathbb{R}$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.5.2 (Campo vectorial completo). Un campo vectorial X en una variedad \mathcal{M} es *completo* si, para cada punto $p \in \mathcal{M}$, la curva integral que pasa a través de p se puede extender a una curva integral para X que está definida para cada $t \in \mathbb{R}$.

Si una variedad es compacta se puede mostrar que cualquier campo vectorial es completo [1]. Otra herramienta muy útil son los grupos uniparamétricos; dentro de los grupos de Lie estos son muy importantes ya que destacan propiedades importantes de un grupo y en particular de un álgebra estrechamente relacionada con este.

Definición 3.5.3. Un *grupo local uniparamétrico* (*one-parameter group*) de difeomorfismos en un punto $p \in \mathcal{M}$ consiste en

- una vecindad abierta U a la cual pertenece p ,
- una constante real $\epsilon > 0$,
- una familia $\{\phi_t : |t| < \epsilon\}$,

con las siguientes propiedades:

- el mapeo

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) \times U &\rightarrow \mathcal{M} \\ (t, q) &\mapsto \phi_t(q), \end{aligned} \tag{3.169}$$

es una función suave tanto para t como q ,

- para todo $t, s, \in \mathbb{R}$ tales que $|t|$, $|s|$ y $|t + s|$ están acotadas superiormente por ϵ , y para todo $q \in U$ tal que $\phi_t(q)$, $\phi_s(q)$ y $\phi_{t+s}(q)$ también pertenecen a U tenemos que

$$\phi_s(\phi_t(q)) = \phi_{t+s}(q), \tag{3.170}$$

- para todo $q \in U$,

$$\phi_0(q) = q. \tag{3.171}$$

El término “local” se refiere tanto a que los difeomorfismos están definidos solamente en un abierto «pequeño» de \mathbb{R} y también a la localidad sobre la variedad, entendiéndose que la vecindad en que está definida es también restringida por esta variable real. Así mismo, “grupo” hace referencia al hecho de trasladar el grupo aditivo sobre la recta real a la idea de un grupo que conserva esta aditividad en forma de composición de funciones y que dibuja una familia de difeomorfismos. Debido a esto (y a su importancia a la que aún no le hemos hecho justicia) es que este grupo se distingue de otros y recibe el nombre de “grupo de difeomorfismos” y es usualmente denotado como $\text{Diff}(\mathcal{M})$.

La idea que ahora nos importa es que a través de cada punto $q \in U$ por la cual pase una curva $t \mapsto \phi_t(q)$ podemos obtener un campo vectorial sobre U tomando las tangentes a esta familia de curvas en cada punto. El campo resultante, al que nombramos X^ϕ , está inducido por la familia de difeomorfismos locales y está definido mediante

$$X_q^\phi(f) := \left. \frac{d}{dt} f(\phi_t(q)) \right|_{t=0}, \tag{3.172}$$

para todo punto $q \in U$.

Veamos ahora la relación que existe entre este campo inducido y las curvas integrales.

Teorema 3.5.1. *Para todo $q \in U$ la curva $t \mapsto \phi_t(q)$ es una curva integral de X^ϕ para $|t| < \epsilon$.*

Demostración. Definimos la curva $\phi_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ como

$$\phi_t(q) := \phi_q(t). \quad (3.173)$$

De acuerdo a (3.163), queremos mostrar que

$$\phi_{q*} \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_s = X_{\phi_s(q)}^\phi. \quad (3.174)$$

Vamos a omitir el superíndice ϕ que acompaña al campo X para no tener una notación engorrosa, entiéndase que estamos trabajando con el campo inducido. Consideramos entonces

$$\phi_{q*} \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_s f = \frac{d}{dt} f(\phi_q(t)) \Big|_{t=s} = \frac{d}{dt} f(\phi_t(q)) \Big|_{t=s}. \quad (3.175)$$

Sea $t = s + u$, tenemos que

$$\frac{d}{dt} f(\phi_t(q)) \Big|_{t=s} = \frac{d}{du} f(\phi_{s+u}(q)) \Big|_{u=0} = \frac{d}{du} f(\phi_u(\phi_s(q))) \Big|_{u=0}. \quad (3.176)$$

Finalmente, sea $\phi_s(q) = p$,

$$\phi_{q*} \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_s f = \frac{d}{du} f(\phi_u(p)) \Big|_{u=0} = X_p(f) = X_{\phi_s(q)}^\phi. \quad (3.177)$$

QED

Ya exploramos la idea de pasar de un grupo local de difeomorfismos a un campo vectorial, estrechamente relacionado a esto tenemos el siguiente concepto que nos permite partir de un campo vectorial y definir un grupo de difeomorfismos.

Definición 3.5.4 (Flujo local). Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial definido en un abierto U y $p \in U$. El *flujo local* de X en p es un grupo uniparamétrico local que consta de difeomorfismos locales definidos en una vecindad $\mathcal{V} \subset U$ para la cual $p \in \mathcal{V} \subset U$ y de tal manera que el campo vectorial inducido por esta familia de difeomorfismos es justamente el campo X .

Los flujos locales siempre existen en virtud del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Notemos además que si X es un campo vectorial completo, entonces \mathcal{V} puede extenderse a la variedad diferencial \mathcal{M} , al igual que el intervalo del que parten los difeomorfismos, $(-\epsilon, \epsilon)$, puede tomarse como \mathbb{R} .

Observación. Denotamos a un flujo local para X como ϕ_t^X . Notemos que en un sistema coordenado se satisface la ecuación diferencial

$$X^\mu(\phi_t^X(p)) = \frac{d}{dt}x^\mu(\phi_t^X(p)), \quad (3.178)$$

al rededor de cualquier punto $p \in U$. Si tomamos la expansión de Taylor de las coordenadas $x^\mu(\phi_t^X(p))$ del punto $\phi_t^X(p)$ al rededor de $t = 0$ obtenemos

$$x^\mu(\phi_t^X(p)) = x^\mu(p) + tX^\mu(p) + O(t^2), \quad (3.179)$$

la cual puede tomarse como una versión formal de la expresión (3.161) y nos muestra que los campos vectoriales generan “transformaciones infinitesimales”.

Lema 3.5.2. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Si X tiene un flujo local de un grupo uniparamétrico ϕ_t , tal que $\phi_{-t}(p) = q$, entonces

$$[X, Y]_p = - \left. \frac{d}{dt}(\phi_t)_* Y \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_p - [(\phi_t)_* Y]_p \right). \quad (3.180)$$

Demostración. Sabemos que

$$(\phi_t)_* Y(f)|_p = Y(\phi_t^* f)|_q. \quad (3.181)$$

En una base coordenada para una vecindad de $p \in U \subset \mathcal{M}$ tenemos que

$$[(\phi_t)_* Y]_p^\mu = (\phi_t)_* Y_p x^\mu = Y_q^\nu \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_q (x^\mu(p)) = Y_q^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu(\phi_t(q)), \quad (3.182)$$

pero como

$$\frac{d}{dt}x^\mu(\phi_t(q)) = X_{\phi_t(q)}^\mu, \quad (3.183)$$

entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu(\phi_t(q)) \right) \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) X_p^\mu. \quad (3.184)$$

Así,

$$- \left. \frac{d}{dt} [(\phi_t)_* Y]^\mu \right|_{t=0} = (X^\nu Y_{,\nu}^\mu - X_{,\nu}^\mu Y^\nu)|_p = [X, Y]_p^\mu. \quad (3.185)$$

QED

Esta derivada es una generalización muy importante de la usual y por ello una herramienta muy especial dentro de este campo. Gracias a que define derivaciones sobre un flujo local sobre los valores de un vector, en efecto, es posible implementarlo a las formas diferenciales y tensores en general.

Definición 3.5.5 (Derivada de Lie). Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$. Si X tiene un flujo local de un grupo uniparamétrico ϕ_t , definimos la *derivada de Lie*, denotada como $\mathcal{L}_X T$, como

$$\mathcal{L}_X T := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(T_p - [(\phi_t)_* T]_p \right) = - \left. \frac{d}{dt} (\phi_t)_* T \right|_{t=0}. \quad (3.186)$$

A pesar de su importancia, este no será un espacio para establecer un análisis de ella. Aún así, puede consultarse [1] [11] [19] [16] [14] para mayores detalles. Ahora bien, esto no quiere decir que no vayamos a considerar otro tipo de derivaciones, pero para exponerlas es necesario introducir otro escenario que nos permitirá tratarlas adecuadamente, este es precisamente el propósito de la conexión.

4 Métrica, conexión y curvatura

«Los encantos de esta ciencia sublime [las matemáticas] solo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.»

Carl Friedrich Gauss

Anteriormente hicimos gala de lo fundamental que resulta medir una cantidad o propiedad en el espacio y lo esencial que llega a ser en física, y que muchas veces es el resultado de la geometría inherente en las estructuras sobre las que nuestras teorías descansan. Con el objetivo de atender este hecho dedicamos este capítulo a desarrollar las herramientas geométricas pertinentes, al mismo tiempo que nos disponemos a resolver algunas cuestiones que dejamos abiertas anteriormente.

Este capítulo tiene tres protagonistas, por un lado, la métrica, que nos ayuda a medir distancias; la conexión, que nos relaciona conceptos locales de una variedad con propiedades globales; y la curvatura, que mide la deformación del espacio. Estos tres elementos son necesarios para desarrollar adecuadamente la estructura geométrica sobre una variedad diferencial. El orden aquí es un factor importante, ya que primeramente la métrica nos lleva al concepto de conexión y a su vez este al de torsión y curvatura. Por lo tanto, debemos tener en mente los resultados desarrollados en uno para seguir al próximo.

La idea que conecta estos tres conceptos y sobre el cual gira el formalismo son las “curvas geodésicas”. Su papel dentro de la geometría diferencial es fundamental, pues son lo más cercano a una línea recta sobre una variedad y son el puente entre la métrica y la “distancia”¹. Permittiéndonos a su vez definir las trayectorias mínimas sobre una variedad y que nos llevan irremediabilmente a hablar del cálculo de las variaciones. A su vez, establecemos la conexión de manera que nos ayude a «transportar paralelamente» (la conexión nos define específicamente qué es esto) campos sobre una curva. Hay diferentes tipos de conexiones y cada uno tiene sus ventajas; por ahora solo daremos una introducción, más adelante formalizaremos el concepto, así que tan solo nos quedaremos con la idea general y las expresiones locales que podamos derivar con las herramientas de las que disponemos hasta el momento.

¹Más adelante recalamos su diferencia y a qué nos referimos con cada uno.

Finalmente, el transporte paralelo sobre ciclos cerrados nos conduce directamente a la curvatura, que es nuestro objetivo: encontrar una manera de estudiar la deformación de la variedad bajo estudio y poder evaluar sus propiedades globales. Esto nos va a permitir a su vez regresar al estudio de su topología.

Así, este capítulo versa sobre la estructura geométrica y sus consecuencias, una de las cuales es poder estudiar a detalle la topología e introducir invariantes como las clases características. Si bien estas ideas se estudiarán más adelante, la razón de este capítulo es servirnos de puente hacia las estructuras abstractas sobre las que descansa nuestro formalismo físico a construir.

4.1. Métrica

Para definir conceptos como longitudes y ángulos en los espacios vectoriales se hace uso de un producto interno. En el caso de las variedades diferenciales la estructura apropiada es la de “métrica riemanniana” o en su caso “semi-riemanniana”, la cual es esencialmente una elección de un producto escalar en cada punto del espacio tangente, variándolo suavemente de punto a punto. En esta sección vamos a introducir propiamente la geometría sobre una variedad suave, pues una elección de métrica nos permite definir varios conceptos de interés, además de la distancia.

4.1.1. Métrica riemanniana

Transfiriendo las ideas del producto interior en el espacio euclidiano a las variedades, obtenemos una de las aplicaciones más importantes de tensores a la geometría diferencial.

Definición 4.1.1 (Métrica riemanniana). Sea \mathcal{M} una variedad suave. Una *métrica riemanniana* es un campo 2-tensorial covariante simétrico, g , que es positivo definido en cada punto, esto es, para cualesquiera $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$,

$$g_p(v_p, w_p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad (4.1)$$

y no degenerado, es decir, si para cualquier $w_p \in T_p\mathcal{M}$, $g(v_p, w_p) = 0$, entonces $v_p = 0$. Al par (\mathcal{M}, g) lo denominamos *variedad riemanniana*.

Observación. No es lo mismo una métrica riemanniana y una métrica en el sentido de los espacios métricos, a pesar que ambos conceptos están relacionados. Debido a esta ambigüedad denominamos a la segunda “función distancia” y reservamos el término “métrica” para el primero.

g es un campo tensorial covariante, lo podemos expresar localmente como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (4.2)$$

en términos de la base dual coordenada (que hemos venido usando) $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^n$.

Observación. La métrica que hemos estado considerando hasta ahora es aquella cuya matriz se escribe como $g = \text{diag}(1, \dots, 1)$, la matriz identidad² cuyas componentes escribimos como $\delta_{\mu\nu}$. Es decir,

$$\bar{g} = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (4.3)$$

denominada “métrica euclidiana”. Además, debido a su calidad como tensor no degenerado, el determinante de la métrica nunca se anula, es decir,

$$g := \det([g]) \neq 0. \quad (4.4)$$

²Con el ánimo de no confundirla con la delta de Kronecker, cuyas componentes se escriben como δ_ν^μ , decimos que la matriz cuyas entradas son $\delta_{\mu\nu}$ es justamente la identidad. Esta identidad es la del espacio de los 2-tensores covariantes, la de los 2-tensores contravariantes lleva índices arriba, esto es, $\delta^{\mu\nu}$. En todos estos casos $\mu, \nu = 1, \dots, n$, si μ y ν son distintos la componente es nula y 1 si son iguales.

Es posible, en efecto, definir una métrica riemanniana en toda variedad suave. Para demostrar esto es útil ver que es válido llevar la métrica euclidiana a dicho espacio variando este campo. Es necesario entonces variar un campo tensorial covariante entre variedades diferenciales.

Definición 4.1.2 (Campo tensorial covariante variado). Sea $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{N}) \times \mathfrak{X}^*(\mathcal{N})$ y $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una función suave, definimos a $h^*\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ como el *campo tensorial covariante variado* en \mathcal{M} (el *pull-back* de ω) como

$$h^*\omega(X^1, X^2) := \omega(h_*X^1, h_*X^2), \quad X^1, X^2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}). \quad (4.5)$$

Esta definición se puede generalizar a campos tensoriales covariantes de cualquier tipo. (Más adelante esto será útil en la teoría de integración).

Teorema 4.1.1. *Toda variedad suave admite una métrica riemanniana.*

Demostración. Consideremos una cubierta abierta de \mathcal{M} , $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (donde A es un conjunto indexado) y el atlas dado por las cartas coordenadas suaves $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. En cada sistema coordenado existe una métrica riemanniana dada por

$$g_\alpha = \phi_\alpha^* \bar{g}, \quad (4.6)$$

con \bar{g} la métrica euclidiana. Ahora, sea $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta \mathcal{U} , definimos

$$g = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha g_\alpha, \quad (4.7)$$

en donde cada término se interpreta como cero fuera del soporte de ψ_α . Como es localmente finito, existen solo un número finito de términos diferentes de cero en una vecindad de cada punto, así que esta expresión define un campo tensorial suave y también simétrico gracias a \bar{g} . Por otro lado, para ver que es positivo definido consideramos el vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$, entonces

$$g_p(v_p, v_p) = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(p) g_\alpha(v_p, v_p) \Big|_p. \quad (4.8)$$

Esta suma es no negativa, puesto que ninguno de sus términos lo es, y al menos una de las funciones ψ_α es estrictamente positiva en p (dado que la suma sobre estas tiene que ser 1). Como $g_\alpha(v_p, v_p)|_p \geq 0$, se sigue que $g_p(v_p, v_p) \geq 0$. QED

4.1.2. El isomorfismo tangente-cotangente

Uno de los aspectos más importantes de la métrica es que nos define un isomorfismo entre el espacio tangente y el cotangente. Más aún, entre los campos vectoriales y los

covectoriales. Es decir, nos permite identificar un campo vectorial con una 1-forma y *vice versa*. Consideremos para ello un campo vectorial v en \mathcal{M} y el mapeo

$$\begin{aligned} g_v : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ w &\mapsto g(v, w), \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ergo, g_v es una 1-forma que depende únicamente de v y g . Tenemos entonces que en una carta y un comarco coordenados podemos expresar

$$g_v(w) = g(v, w) = g_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta = g_{\alpha\beta}v^\alpha w^\mu dx^\beta(\partial_\mu) \quad (4.10)$$

con lo que

$$g_v = g_{\alpha\beta}v^\alpha dx^\beta. \quad (4.11)$$

Denotamos por $\tilde{v} = g_v = v_\alpha dx^\alpha$ a la 1-forma asociada del campo vectorial v , donde

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta}v^\beta \quad (4.12)$$

Las componentes de la 1-forma \tilde{v} las escribimos como v_α y a las del campo vectorial como v^α . Esto es a lo que denominamos “bajar el índice”. La 1-forma \tilde{v} es inyectiva, debido a que depende únicamente de las componentes del campo. Además es suprayectiva, pues la métrica está definida en toda la variedad. Así, tenemos que el mapeo

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \\ v &\mapsto \tilde{v} \end{aligned} \quad (4.13)$$

es un isomorfismo. Gracias a que el determinante de la métrica es distinto de cero en cada punto y al teorema de la función inversa del análisis real, este tiene inversa. Denotamos por $g^{\mu\nu}$ a las componentes de la matriz de funciones cuyo valor en $p \in \mathcal{M}$ es la inversa de $g_{\mu\nu}(p)$, en consecuencia

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = g_{\lambda\nu}g^{\nu\mu} = \delta_\lambda^\mu. \quad (4.14)$$

Debido a que $g_{\mu\nu}$ forma una matriz simétrica, $g^{\alpha\beta}$ también lo hace. Si $\tilde{g}^{-1} : \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es la inversa de \tilde{g} , para un campo covectorial $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$, el campo vectorial $\tilde{g}^{-1}(\omega)$ tiene la representación coordenada

$$\vec{\omega} = \tilde{g}^{-1}(\omega) = \omega^\mu \partial_\mu, \quad (4.15)$$

donde

$$\omega^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu. \quad (4.16)$$

ω_ν son las componentes de ω y $\vec{\omega}$, el vector asociado a este. A esto lo denominamos “subir el índice”.

Ahora bien, si v y w son dos campos vectoriales, entonces

$$g(v, w) = g(v^\mu \partial_\mu, w^\nu \partial_\nu) = v^\mu w^\nu g_{\mu\nu} = g^{\alpha\mu}v_\alpha g^{\beta\nu}w_\beta g_{\mu\nu} = v_\alpha w_\beta g^{\alpha\beta}. \quad (4.17)$$

Notemos entonces que la matriz que definen los elementos $g^{\mu\nu}$ definen una métrica en el espacio de los campos cotangentes, dado por $g^{\alpha\beta} = g^{-1}(dx^\alpha, dx^\beta)$. Debido a que se deriva de la inversa del isomorfismo entre campos vectoriales y covectoriales la denominamos “métrica inversa” (y en contraposición con la relación (4.14)).

Observación. Con la métrica euclidiana dada por $\delta_{\mu\nu}$ identificamos $v^\alpha = v_\alpha$ para cualquier componente de cualquier vector tangente y cotangente (y, por lo tanto, entre campos).

El subir y bajar índices lo podemos extender de manera natural a los tensores en general de la misma manera en que implementamos el cambio de base. Gracias a esto a cada tensor de tipo $\binom{r}{s}$ le podemos asociar uno tipo $\binom{r+s}{0}$ o $\binom{0}{r+s}$. Sin embargo, a pesar de lo que pudiera parecer, el hecho de haber un isomorfismo entre campos no quiere decir que sean lo mismo. En general, cada uno tiene un significado geométrico diferente [11] [21].

4.1.3. La distancia riemanniana

Es importante observar que existe una enorme libertad en la elección de la construcción de una métrica para una variedad dada (no hay nada canónico al respecto). En particular, diferentes métricas en la misma variedad pueden dar propiedades geométricas bastante diferentes. A continuación damos algunas definiciones a las que nos da acceso una métrica.

Definición 4.1.3 (Norma, ángulo y ortogonalidad). Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana.

- La *norma* de un vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$ es

$$\|v_p\|_g^2 = g_p(v_p, v_p). \quad (4.18)$$

- El *ángulo* entre cualesquiera dos vectores tangentes $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$ diferentes de cero es el único $\theta \in [0, 2\pi]$ que satisface

$$\cos \theta = \frac{g_p(v_p, w_p)}{\|v_p\|_g \|w_p\|_g}. \quad (4.19)$$

- Dos vectores tangentes $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$ se dice que son *ortogonales* si

$$g_p(v_p, w_p) = 0; \quad (4.20)$$

esto significa que, a menos que uno o ambos sean cero, el ángulo entre ellos es de $\pi/2$.

Una de las consecuencias más notables de las métricas que satisfacen $g_{\alpha\beta} \neq \delta_{\alpha\beta}$ es la manera en que medimos los ángulos, pues será distinto en contraposición con la geometría elemental. La geometría se la estamos atribuyendo enteramente a la métrica.

Una de las herramientas más importantes que una métrica riemanniana nos ofrece es el de “longitud de una curva”. Pero para tratarla primero debemos extender el concepto de integral de línea de 1-formas a campos vectoriales. Para ello recordemos que si $v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, entonces $g(v, w)$ es una función sobre \mathcal{M} .

Definición 4.1.4 (Integral de línea). Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva suave en \mathcal{M} . Definimos la *integral de línea* de X a lo largo de γ como³

$$\int_{\gamma} \langle ds, X \rangle = \int_{\gamma} g(\dot{\gamma}, X) := \int_a^b \gamma^* g(\dot{\gamma}, X). \quad (4.21)$$

Es decir, escribimos ds como la 1-forma asociada al campo vectorial $\dot{\gamma}$. Recordemos que, dado que existe un isomorfismo natural entre vectores tangentes y cotangentes, el producto interno $\langle _, _ \rangle$ también es simétrico.

Definición 4.1.5 (Longitud de una curva). Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ es una curva suave, definimos la *longitud* de γ como⁴

$$L_g(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt. \quad (4.22)$$

Si la curva es suave por pedazos su longitud se define análogamente.

Usando un segmento de curva como «cinta de medir» podemos definir una función distancia entre puntos de la variedad.

Definición 4.1.6 (Distancia riemanniana). Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana. Sean $p, q \in \mathcal{M}$, la *distancia (riemanniana)* de p a q , denotado como $d_g(p, q)$ se define como el ínfimo del conjunto $\{L_g(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}\}$, donde γ son las curvas que conectan a los puntos p y q (y $a, b \in \mathbb{R}$).

Recordemos que la distancia más corta entre cualesquiera dos puntos sobre el espacio euclidiano es justamente la longitud del segmento de recta que las conecta. Sin embargo, en las variedades diferenciales, en general, esta línea no existe. Ahora bien, consideramos la distancia riemanniana s , que de (4.22) nos es lícito considerar

$$ds := \|\gamma'(t)\|_g dt = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^{\mu} \dot{\gamma}^{\nu}} dt = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt}} dt = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}. \quad (4.23)$$

En este sentido el elemento de línea suele definirse como

$$ds^2 := g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (4.24)$$

³Recordemos que si f es una función sobre la variedad y $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, entonces $h^* f = f \circ h$.

⁴Entendemos por $\|v\|$ a la raíz de la norma del vector v , es decir,

$$\|v\| = \sqrt{\|v\|^2}.$$

esta notación tiene la virtud de expresar justamente la longitud de arco s de la curva γ , es decir, de la curva más corta que conecta los puntos p y q . Más adelante profundizaremos en el estudio de estas curvas, que de hecho son las geodésicas. Que además exhiben las trayectorias de las partículas según las ecuaciones de movimiento en la relatividad general. Más aún, en la mecánica clásica se pueden llegar a estudiar un sistema por medio de ellas. Incluso nosotros, en capítulos posteriores, retomaremos estas ideas para describir sistemas mecánicos en la aproximación de la cuantización topológica.

La definición de función distancia riemanniana (4.1.6) exhibe su relación con la métrica riemanniana. Sin embargo, podemos llegar aún más lejos aseverando que este concepto nos permite tratar a \mathcal{M} como un espacio métrico.

Teorema 4.1.2. *Toda variedad riemanniana conexa con la función distancia riemanniana es un espacio métrico cuya topología métrica es la misma que la topología de la variedad original.*

Demostración. Inmediatamente de la definición podemos comprobar que $d_g(p, q) \geq 0$, pues la longitud de la curva es no negativa y toda curva constante tiene longitud cero (si una curva es constante, entonces mapea $t \in [a, b]$ a un solo punto $p \in \mathcal{M}$). De esto último podemos notar que $d_g(p, p) = 0$. Además, dado que toda curva que va de p a q puede ser reparametrizada para ir de q a p (y notando que la longitud de cualquier curva es independiente de su parametrización), tenemos que $d_g(p, q) = d_g(q, p)$. Por otro lado, consideremos $r \in \mathcal{M}$ un punto distinto de p y q , tomamos las curvas γ_1 que conecta a p con q y γ_2 que lo hace con q y r , si además (s.p.g.) γ es la curva que recorre γ_1 y luego γ_2 (es decir, va de p a q), entonces (en virtud de la linealidad de la integral)

$$d_g(p, r) \leq L_g(\gamma) = L_g(\gamma_1) + L_g(\gamma_2); \quad (4.25)$$

tomando el ínfimo de las longitudes de las curvas que conectan p con q y q con r , tenemos que

$$d_g(p, r) \leq d_g(p, q) + d_g(q, r), \quad (4.26)$$

que es justamente la desigualdad del triángulo. (Esto exhibe la importancia de definir la función distancia permitiendo curvas suaves por pedazos.)

Finalmente, sean τ la topología métrica generada por la función distancia d_g y $\tau_{\mathcal{M}}$ la topología original de la variedad diferencial. Sea $U \in \tau_{\mathcal{M}}$ y $p \in U$, consideramos V una bola coordenada regular de radio ϵ alrededor de p tal que $\bar{V} \subseteq U$. Tenemos que si $p \neq q$, $d_g(p, q) \geq c\epsilon$ para alguna $c \in \mathbb{R}$ positiva cuando $q \notin \bar{V}$. Si c es tal que $d_g(p, q) < c\epsilon$, entonces $q \in \bar{V} \subseteq U$, en otras palabras, la bola métrica de radio $c\epsilon$ alrededor de p está contenida en U . Esto prueba que U es abierto en τ .

QED

4.1.4. Planitud

Una herramienta muy útil en el estudio de las variedades riemannianas son los “marcos ortonormales” y sus respectivos marcos duales. Estos se derivan directamente

del concepto de “marco ortogonal” que no significa más que un marco compuesto enteramente por campos vectoriales ortogonales entre sí.

Definición 4.1.7 (Marco ortonormal). Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un marco ortogonal en una carta (U, ϕ) de \mathcal{M} . Decimos que $\{e_i\}_{i=1}^n$ es un *marco ortonormal* si

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

De manera análoga, un marco dual ortonormal, $\{\theta^j\}_{j=1}^n$, satisface

$$g^{-1}(\theta^i, \theta^j) = \delta^{ij}, \quad (4.28)$$

para cualquier $i, j = 1, \dots, n$.

Teorema 4.1.3 (Existencia de los marcos ortonormales). *Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana. Para cualquier $p \in \mathcal{M}$, existe un marco ortonormal suave en una vecindad de p .*

Demostración. Sea $\{x^i\}_i^n$ un sistema coordenado en una vecindad U de p . Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt al marco coordenado $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ obtenemos un nuevo marco $\{e_i\}_{i=1}^n$, dado inductivamente por la fórmula

$$e_j = \frac{\partial_j - \sum_{i=1}^{j-1} g(\partial_j, e_i)e_i}{\|\partial_j - \sum_{i=1}^{j-1} g(\partial_j, e_i)e_i\|_g}. \quad (4.29)$$

Como ∂_j es linealmente independiente del conjunto $\{e_i\}_{i=1}^{j-1}$, la norma en el denominador nunca se anula en U . Así, esta fórmula define a $\{e_i\}_{i=1}^n$ como un marco ortonormal en U . QED

Observación. Este resultado no muestra que existan coordenadas suaves en una vecindad de p para las cuales el marco coordenado es ortonormal.

En una vecindad de $p \in \mathcal{M}$ toda métrica se puede expresar como

$$g_{local} = \delta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu. \quad (4.30)$$

Sin embargo, el co-marco ortonormal, cuya existencia se deriva del lema anterior, no necesariamente es el coordenado. Esto físicamente tiene que ver con el “principio de equivalencia”, que se interpreta como la existencia de sistemas de referencia locales que se aproximan a los de la relatividad especial. En otras palabras, en cada lugar del Universo, existe una vecindad de esta región que puede aproximarse a un espacio plano en donde se puede construir un sistema de referencia inercial, sobre el que las leyes de la relatividad especial son válidos, en particular, la existencia de dichas regiones. Véase el principio (6.3.2).

Nos planteamos entonces ¿cuándo una métrica, globalmente, se puede tratar como la de un espacio euclidiano?

Definición 4.1.8 (Isometrías). Sean (\mathcal{M}, g) y (\mathcal{N}, h) variedades riemannianas. Un mapeo suave $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una *isometría (riemanniana)* si es un difeomorfismo que satisface

$$F^*h = g. \quad (4.31)$$

Decimos además que (\mathcal{M}, g) y (\mathcal{N}, h) son *isométricos*.

Más aún, F es llamado “isometría local” si cada $p \in \mathcal{M}$ tiene una vecindad U tal que $F|_U$ es una isometría de U a un abierto de \mathcal{N} .

Definición 4.1.9 (Localmente isométrico). Si cada punto $p \in \mathcal{M}$ tiene una vecindad que es isométrica a un abierto de \mathcal{N} , decimos que (\mathcal{M}, g) es *localmente isométrico* a (\mathcal{N}, h) .

El estudio de las propiedades de las variedades riemannianas que son invariantes bajo isometrías (locales o globales) es llamado “Geometría Riemanniana” [11]. Y una de las propiedades más importantes (al menos para esta sección) es la planitud.

Definición 4.1.10 (Planitud). Una n -variedad riemanniana (\mathcal{M}, g) se dice que es una *variedad riemanniana plana* (o simplemente que es *plana*) al igual que su métrica (*métrica plana*) si es localmente isométrica a (\mathbb{R}^n, \bar{g}) .

En ocasiones una métrica es isomorfa a la métrica plana salvo por una constante, a estas las llamaremos “conformemente planas”.

4.1.5. Integración de formas diferenciales

Para introducir la teoría de integración en las variedades diferenciales es necesario considerar la manera en que el pull-back actúa sobre las formas diferenciales en general, esto con el ánimo de implementar lo que ya sabemos del análisis real. Para ello consideramos el mapeo $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, variamos la k -forma diferencial $\omega \in \Lambda^k(\mathcal{N})$, en particular, dado que es un campo tensorial covariante tenemos que

$$(h^*\omega)(X^1, \dots, X^k)(p) = \omega(h_*X^1, \dots, h_*X^k)(h(p)). \quad (4.32)$$

Veamos ahora las componentes de la forma $h^*\omega$ de acuerdo a⁵ (2.13). Sean $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ y $\{y^\nu\}_{\nu=1}^m$ bases de los abiertos $U \subset \mathcal{M}$ y $V \subset \mathcal{N}$, respectivamente. Si $U \cap \text{Dom}(h) \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} (h^*\omega)_{\mu_1, \dots, \mu_k}(p) &= h^*\omega(\partial_{\mu_1}, \dots, \partial_{\mu_k})(p) = \omega(h_*\partial_{\mu_1}, \dots, h_*\partial_{\mu_k})(h(p)) \\ &= \omega(\partial_{\mu_1}h^{\nu_1}\partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\mu_k}h^{\nu_k}\partial_{\nu_k})(h(p)) \\ &= \partial_{\mu_1}h^{\nu_1} \dots \partial_{\mu_k}h^{\nu_k}\omega_{\nu_1, \dots, \nu_k}(h(p)), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $p \in U$ es tal que $h(p) \in V$. Ahora, sea $\{dy^\nu\}_{\nu=1}^m$ la base coordenada de 1-formas de V y $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^n$, en U , tenemos que

$$h^*\omega = (\omega_{\nu_1, \dots, \nu_k} \circ h)\partial_{\mu_1}h^{\nu_1} \dots \partial_{\mu_k}h^{\nu_k}dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (4.34)$$

⁵Y en virtud de la linealidad del empuje.

Notemos ahora que

$$h^* dy^\nu \stackrel{(3.70)}{=} ((dy^\nu)_\sigma \circ h) \partial_\mu h^\sigma dx^\mu = \partial_\mu h^\nu dx^\mu. \quad (4.35)$$

Por otro lado, consideremos

$$d(h^* y^\nu) = d(y^\nu \circ h) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (h^\nu) dx^\mu = \partial_\mu h^\nu dx^\mu. \quad (4.36)$$

Así, vemos que

$$h^*(dy^\mu) \equiv d(h^* y^\mu), \quad \forall \mu \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.37)$$

Y además,

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1} h^{\nu_1} \cdots \partial_{\mu_k} h^{\nu_k} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} &= (\partial_{\mu_1} h^{\nu_1} dx^{\mu_1}) \wedge \cdots \wedge (\partial_{\mu_k} h^{\nu_k} dx^{\mu_k}) \\ &\stackrel{(4.36)}{=} d(y^{\nu_1} \circ h) \wedge \cdots \wedge d(y^{\nu_k} \circ h), \end{aligned} \quad (4.38)$$

de donde

$$h^* \omega \stackrel{(4.34)}{=} (\omega_{\nu_1, \dots, \nu_k} \circ h) d(y^{\nu_1} \circ h) \wedge \cdots \wedge d(y^{\nu_k} \circ h). \quad (4.39)$$

De lo anterior se pueden deducir dos cosas: en primera, se cumple que h^* es lineal, y en segunda satisface⁶

$$h^*(\omega \wedge \eta) = h^* \omega \wedge h^* \eta, \quad (4.40)$$

para cualesquiera formas diferenciales ω y η .

El resultado de (4.37) es válido para cualquier función suave $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, pues

$$\begin{aligned} d(h^* f) &= d(f \circ h) = \partial_\mu (f \circ h) dx^\mu = (h_* \partial_\mu) f dx^\mu \stackrel{(2.71)}{=} \partial_\mu h^\nu (\partial_\nu f \circ h) dx^\mu \\ &= (\partial_\nu f \circ h) d(y^\nu \circ h) \stackrel{(3.70)}{=} h^*(\partial_\nu f dy^\nu) = h^*(df). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Esto se puede extender a las formas diferenciales, es decir, el pull-back conmuta con la derivada exterior. Para probar esto consideremos ω una k -forma diferencial. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} d(h^* \omega) &= d(h^*(\omega_{\nu_1 \dots \nu_k} dy^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dy^{\nu_k})) \\ &= d(\omega_{\nu_1 \dots \nu_k} \circ h) \wedge d(y^{\nu_1} \circ h) \wedge \cdots \wedge d(y^{\nu_k} \circ h); \end{aligned} \quad (4.42)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} h^*(d\omega) &= h^*(d(\omega_{\nu_1 \dots \nu_k} dy^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dy^{\nu_k})) \\ &= h^*(d\omega_{\nu_1 \dots \nu_k}) \wedge h^*(dy^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge h^*(dy^{\nu_k}) \\ &\stackrel{(4.37)}{=} d(\omega_{\nu_1 \dots \nu_k} \circ h) \wedge h^*(dy^{\nu_1}) \wedge \cdots \wedge h^*(dy^{\nu_k}), \\ &\stackrel{(4.39)}{=} \end{aligned} \quad (4.43)$$

⁶Para notar esto basta con recordar que la composición de un producto de funciones es igual al producto de las composiciones; es decir, si $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, entonces

$$(fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{N}).$$

que es idéntico al anterior. Por lo tanto,

$$h^*(d\omega) \equiv d(h^*\omega). \quad (4.44)$$

Observemos que $\dim(\Lambda^n(\mathcal{M})) = 1$. Esto es, una n -forma puede escribirse como

$$\alpha = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad (4.45)$$

donde f es una función sobre \mathcal{M} . En el caso en que $n = m$, es decir, ambas variedades son de la misma dimensión, la expresión de una n -forma, ω en \mathcal{N} , luce como

$$\begin{aligned} h^*\omega &= h^*(f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) \\ &= (f \circ h)(\partial_{\mu_1} h^1 dx^{\mu_1}) \wedge \cdots \wedge (\partial_{\mu_n} h^n dx^{\mu_n}) \\ &= (f \circ h)\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^n, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde las 1-formas ξ^j están dadas por

$$\xi^j = \partial_i h^j dx^i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Ignoremos por un momento la función $f \circ h$, tenemos entonces que

$$(\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^n)(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_n}) = \det(\xi^j(\partial_{i_j})),$$

donde

$$\xi^j(\partial_{i_j}) = \partial_i h^j \delta_i^l = \partial_i h^j; \quad (4.48)$$

por lo que podemos expresar

$$\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^n = \det(\partial_i h^j) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (4.49)$$

Es decir, el factor de proporción entre una base y otra está dado justamente por el determinante del jacobiano de la transformación. Concluimos entonces que, para $n = m$ finito, se cumple

$$h^*(f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (f \circ h) \det \left(\frac{\partial h^\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (4.50)$$

Esto es lo que se conoce como “fórmula de cambio de coordenadas”.

Definición 4.1.11 (Orientación). Una *orientación* en un abierto $U \subset \mathcal{M}$, es una elección de una de las dos partes de $\Lambda^n(U) - 0$. Es decir, seleccionar alguna n -forma ω diferente de cero módulo un factor positivo.

Observación. Sea ω una n -forma en $U \subset \mathcal{M}$ que define una orientación, si $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es tal que $f(p) > 0$ para todo punto $p \in U$, entonces la n -forma $f\omega$ define la misma orientación. Estrictamente hablando, una orientación es una clase de equivalencia entre n -formas en U donde dos n -formas son equivalentes si solo difieren por cualquier factor positivo.

Por supuesto, cualquier elección de base ordenada para las n -formas define una orientación. Consideremos ahora dos cartas coordenadas de \mathcal{M} , (U, ϕ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y una orientación en cada una. Sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{v_i\}_{i=1}^n$ bases ordenadas para los campos vectoriales en U y V , respectivamente. Consideremos sus bases duales $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ y $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, es decir, tales que

$$\begin{aligned}\theta^j(e_i) &= \delta_i^j, \\ \varphi^j(v_i) &= \delta_i^j.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Entonces las bases ordenadas duales definen una orientación, donde la elección de la base para las n -formas está dada por el orden establecido por las bases. Esto es, la orientación inducida en U está dada por la n -forma $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ y en V , por $\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n$. Decimos que las cartas coordenadas tienen una “coherente orientación” si la matriz Λ , cuyas componentes satisfacen

$$e_i = \Lambda_i^j v_j,\tag{4.52}$$

tiene determinante positivo para todo $p \in U \cap V$.

Definición 4.1.12 (Orientación de variedades). Una *orientación* en una variedad diferencial \mathcal{M} es una coherente orientación para cada carta coordenada de \mathcal{M} .

Una definición análoga se puede hacer a espacios vectoriales orientables, es decir, podemos definir una orientación en el espacio tangente, bajo lo cual tendríamos una elección de una base para las n -formas diferenciables en p . A pesar de poder definir “coherencia” entre las orientaciones de los abiertos de \mathcal{M} no siempre es posible definir una orientación en una variedad. Debido a esto, si \mathcal{M} es una variedad diferencial, decimos que es “orientable” si existe al menos una orientación para ella.⁷ En este sentido, también es importante considerar cuándo una función entre variedades preserva la orientación, ante lo cual tomamos la siguiente convención.

Definición 4.1.13. Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una función entre las variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} . Si F es un difeomorfismo local decimos que *preserva orientación* si, para cada $p \in \mathcal{M}$, el isomorfismo F_* manda bases orientadas de $T_p\mathcal{M}$ a bases orientadas de $T_{F(p)}\mathcal{N}$.

Esto quiere decir que el determinante del jacobiano de la transformación es positivo, con base en la fórmula de cambio de coordenadas (4.50).

Sabemos del teorema (4.1.3) que existe un marco localmente ortonormal para cada punto de \mathcal{M} . En términos de estos marcos podemos construir una orientación invariante, lo cual nos va a permitir tener una medida de volúmen estándar.

Lema 4.1.4. *Existe una única n -forma $\omega_g \in \Lambda^n(\mathcal{M})$ que define una orientación y satisface*

$$\omega_g(e_1, \dots, e_n) = 1\tag{4.53}$$

para todo marco local ortonormal orientado $\{e_i\}_{i=1}^n$. A ω_g la denominamos “forma de volúmen riemanniano”.

⁷Un ejemplo de variedad no-orientable es la banda de Möbius.

Demostración. Sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ un marco ortonormal y su dual en un abierto $U \subset \mathcal{M}$. Podemos considerar la n -forma

$$\omega_g = f\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n. \quad (4.54)$$

Entonces ahora buscamos ver que $f = 1$, que nos permitiría ver que es única. Para probar su existencia debemos poder definir $\omega_g = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ en alguna vecindad de cada punto; así que debemos comprobar que la definición de esta forma es independiente de la elección del marco ortonormal orientado. Así, consideremos otro dado por $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ con su dual $\{\tilde{\theta}^i\}_{i=1}^n$. Escribimos entonces

$$\tilde{\omega}_g = \tilde{\theta}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\theta}^n. \quad (4.55)$$

Tenemos también

$$\tilde{e}_i = \Lambda_i^j e_j, \quad (4.56)$$

con la matriz de transformación Λ conformada de funciones suaves. El hecho de ambos marcos ser ortonormales significa que la matriz Λ es ortogonal⁸, esto es, $\det(\Lambda) = \pm 1$. Debido a que ambos marcos deben estar orientados obtenemos el signo positivo. Calculamos entonces

$$\omega_g(e_1, \dots, e_n) = \det(\theta^j(e_i)) = 1 = \tilde{\omega}_g(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n). \quad (4.57)$$

Tenemos entonces que $\omega_g = \tilde{\omega}_g$. Definiendo ω_g en una vecindad de cada punto como

$$\omega_g = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \quad (4.58)$$

con respecto a algún marco ortonormal orientado suave obtenemos una n -forma global. Esta entonces cumple (4.53) para cada marco ortonormal orientado. QED

No está de más contar con la expresión de la forma de volumen en el sistema coordenado.

Lema 4.1.5. *En un sistema de coordenadas orientado $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ la forma de volúmen riemanniano tiene la expresión local⁹*

$$\omega_g = \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (4.59)$$

Demostración. Sea U la carta orientada en la que el sistema coordenado está definido, entonces podemos escribir

$$\omega_g = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad (4.60)$$

para una función positiva f . Consideremos ahora $\{e_i\}_{i=1}^n$ y $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ un marco ortonormal orientado y su respectivo dual en una vecindad de $p \in U$. Así, existe una matriz ortogonal Λ tal que

$$\partial_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu. \quad (4.61)$$

⁸El conjunto de matrices de este tipo son muy importantes y las trataremos más adelante. Véase subsección (5.1.2)

⁹Recordemos que $g = \det([g])$.

Entonces, podemos calcular

$$f = \omega_g(\partial_1, \dots, \partial_n) = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det(\theta^\mu(\partial_\nu)) = \det(\Lambda). \quad (4.62)$$

Por otro lado, observemos que

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g(\Lambda_\mu^\alpha e_\alpha, \Lambda_\nu^\beta e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.63)$$

Esta última expresión nos da las componentes de la métrica en el sistema coordinado en función de las componentes de la matriz resultante del producto $\Lambda^T \Lambda$, dado que $\mathbb{1}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Así

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(\Lambda^T \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = (\det(\Lambda))^2, \quad (4.64)$$

de donde

$$f = \det(\Lambda) = \pm \sqrt{g}. \quad (4.65)$$

Dado que ambos marcos están orientados el signo debe ser positivo. QED

La importancia de esta forma de volúmen en la teoría de integración es que nos permite extender la integral a las n -formas diferenciales. Esta expresa el volumen del paralelepípedo generado por los segmentos de línea que van desde el punto p a cada uno de los vectores tangentes que usamos como marco ortonormal, por tal razón suele escribirse como $dvol$.

Recordemos que toda n -forma se puede escribir localmente como

$$\omega = \alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \alpha \in C^\infty(\mathcal{M}); \quad (4.66)$$

sin embargo, como hemos venido mencionando, esta expresión es dependiente de la base seleccionada. Si escribimos ahora

$$\omega = f \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = f dvol, \quad (4.67)$$

para alguna función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, vemos entonces que dicha función no depende del marco de referencia, por lo que esta expresión para ω tampoco. Es entonces que podemos hablar de la integral.

Definición 4.1.14 (Integral de una n -forma). Sean (U, ϕ) una carta coordinada de \mathcal{M} y $\omega \in \Lambda^n(\mathcal{M})$ una n -forma diferencial. Definimos la *integral* de ω sobre U como

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega. \quad (4.68)$$

Observación. Necesitamos que la región $\phi(U)$ sea integrable en el sentido del análisis real. Esto lo podemos conseguir pidiendo que la función f sobre \mathcal{M} tenga soporte compacto y contenido en U .

Por la fórmula de cambio de coordenadas (4.50), podemos expresar el integrando de (4.68) como

$$(\phi^{-1})^* \omega = (f\sqrt{g} \circ (\phi^{-1})) \det \left(\frac{\partial (\phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (4.69)$$

Cabe destacar que la derivada en el determinante es la usual¹⁰ de \mathbb{R}^n , así como el comarco $\{dx^i\}_{i=1}^n$. Tenemos entonces que $\phi^*\omega$ es una n -forma en \mathbb{R}^n , por lo que podemos reescribir la integral (4.68) como

$$\int_U \omega = \int_{\phi(U)} (f\sqrt{g} \circ (\phi^{-1})) \det \left(\frac{\partial (\phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right) d^n x, \quad (4.70)$$

donde $d^n x = dx^1 \cdots dx^n$, es decir, nos «olvidamos» de las cuñas (esto es simplemente notación).

Esta definición la podemos extender a cualquier abierto $A \subset \mathcal{M}$, para ello debemos considerar que el soporte de la función cumpla las mismas condiciones en A . Al extender el dominio de integración a toda la variedad tenemos que considerar cada región de interés; es decir, debemos sumar las contribuciones sobre \mathcal{M} . Esto lo podemos efectuar considerando una cubierta y una partición de la unidad subordinada a ella. Es gracias a ello que cada una de estas sumas es ajena, por lo que nunca sumamos sobre alguna región dos veces.

Definición 4.1.15 (Integral sobre una variedad). Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de \mathcal{M} y $\{\psi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada a \mathcal{A} . Si ω es una n -forma diferencial, definimos la *integral de ω sobre \mathcal{M}* como

$$\int_{\mathcal{M}} \omega := \sum_{i \in I} \int_{A_i} \psi_i \omega. \quad (4.71)$$

Donde $\text{supp}(\psi_i \omega) \subset A_i$, para todo $i \in I$.

De (4.71) obtenemos una integral que no depende de la elección de un sistema coordenado

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} f d\text{vol}. \quad (4.72)$$

Esta expresión nos ayuda también a ver que el «volumen» de la variedad puede ser determinado mediante la integral de la forma de volumen, es decir, definimos el «volumen de \mathcal{M} », denotado como $\text{vol}(\mathcal{M})$, como

$$\text{vol}(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} d\text{vol}. \quad (4.73)$$

Aún así, en la práctica, se usa un resultado más para evaluar integrales sobre variedades y que nos devuelve a un escenario más familiar [11].

¹⁰Es por ello que no escribimos las componentes de ϕ como coordenadas

Teorema 4.1.6 (Integración sobre parametrizaciones). *Sean \mathcal{M} una variedad suave n -dimensional y ω una n -forma en \mathcal{M} con soporte compacto. Supongamos que D_1, \dots, D_k son dominios de integración abiertos en \mathbb{R}^n y para $i = 1, \dots, k$ tenemos funciones suaves $F_i : \overline{D}_i \rightarrow M$ que satisfacen*

- F_i restringe a un difeomorfismo que preserva orientación de D_i en un subconjunto abierto $W_i \subseteq \mathcal{M}$;
- $W_i \cap W_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$;
- $\text{supp}(\omega) \subseteq \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_k$.

Entonces

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad (4.74)$$

Demostración. Es suficiente con asumir que ω tiene soporte en el dominio de una única carta suave orientada (U, ϕ) . Restringiendo a una carta lo suficientemente agradable podemos asumir que U es precompacta; $Y = \phi(U)$ es un dominio de integración en \mathbb{R}^n y ϕ se extiende a un difeomorfismo de \overline{U} a \overline{Y} .

Para cada i , definimos los abiertos $A_i \subseteq D_i$, $B_i \subseteq W_i$ y $C_i \subseteq Y$ como

$$\begin{aligned} A_i &= F_i^{-1}(U \cap W_i), \\ B_i &= U \cap W_i = F_i(A_i), \\ C_i &= \phi(B_i) = \phi \circ F_i(A_i). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Dado que \overline{D}_i es compacto podemos encontrar que $\partial W_i \subseteq F_i(\partial D_i)$ y por lo tanto ∂W_i tiene medida cero en \mathcal{M} y $\partial C_i = \phi(\partial B_i)$ tiene medida cero en \mathbb{R}^n .

El soporte de $(\phi^{-1})^* \omega$ está contenido en $\overline{C}_1 \cup \dots \cup \overline{C}_k$ y cualesquiera dos de estos conjuntos interseca solo en sus fronteras, que tienen medida cero. Así, tenemos que

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_Y (\phi^{-1})^* \omega = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Completamos la prueba usando el difeomorfismo $\phi \circ F_i : A_i \rightarrow C_i$ a cada término, es decir,

$$\int_{C_i} (\phi^{-1})^* \omega = \int_{A_i} (\phi \circ F_i)^* (\phi^{-1})^* \omega = \int_{A_i} F_i^* \omega = \int_{D_i} F_i^* \omega.$$

Sumando sobre i obtenemos

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad (4.76)$$

QED

4.1.6. Métrica semi-riemanniana

Vamos ahora, antes de concluir esta sección, a abordar un grupo que no exploramos lo suficiente el capítulo anterior. Ahora contamos con las herramientas necesarias para desarrollar los grupos semi-ortonormales $O(n, m)$, entre los cuales destaca el grupo de Lorentz $O(1, n)$.

Recordemos en primer lugar la forma de la métrica plana, $\text{diag}(1, \dots, 1)$ y la condición para los marcos y comarcos ortonormales (4.27) y (4.28). La relación entre ambas está determinada mediante

$$\Lambda^T \bar{g} \Lambda = \bar{g}, \quad (4.77)$$

en donde Λ es una matriz ortonormal; esta condición también se puede escribir en términos de sus componentes como

$$\Lambda_\alpha^\mu \delta_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\nu = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.78)$$

Es decir, las matrices que dejan invariante a la métrica $\delta_{\alpha\beta}$ son ortonormales y las columnas de dichas matrices pueden representarse como los elementos del marco ortonormal. Vemos entonces que para preservar la estructura de una métrica usamos (por lo general) marcos y comarcos determinados por las matrices que satisfacen (4.77).

En lo que respecta a las métricas semi-riemannianas una métrica puede tener un elemento (o varios) con signo distinto al resto. Es decir, para la versión plana de estas métricas podemos considerar

$$[\eta] = \text{diag} \left(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{p \text{ argumentos}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q \text{ argumentos}} \right), \quad p + q = n, \quad (4.79)$$

donde n es la dimensión de la variedad.¹¹ Notemos que esta métrica admite valores negativos y engloba el caso positivo definido cuando $p = 0$. La diferencia entre el número de argumentos positivos y negativos, $q - p$, es conocida como “signatura de la métrica”. Ahora bien, las matrices que preservan esta estructura, es decir, que satisfacen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (4.80)$$

forman el grupo “semi-ortonormal” sobre \mathbb{R} , que denotamos como $O(p, q)$. Se sigue de esta condición que

$$\det(\Lambda) = \pm 1, \quad \forall \Lambda \in O(p, q). \quad (4.81)$$

¹¹Algunos autores suelen usar una forma equivalente

$$\text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ argumentos}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q \text{ argumentos}} \right),$$

esto es, la ordenación del signo es distinta. Según el contexto es conveniente usar una u otra; principalmente en la literatura física, ya que en el campo de la gravitación suele usarse el signo negativo en las primeras componentes, contrario a lo estándar para la teoría cuántica de campos. La física que puede extraerse de una u otra forma es la misma.

Podemos considerar el caso del subgrupo $SO(p, q)$, denominado “grupo especial semi-ortonormal” y que está formado por las matrices $\Lambda \in O(p, q)$ tales que $\det(\Lambda) = 1$.

Si queremos estudiar métricas en general para las que las transformaciones semi-ortonormales preserven su estructura debemos demostrar el análogo a los resultados expuestos a lo largo de la presente sección y que fueron tratadas en el sentido ortonormal, que es justo lo que haremos a continuación. Para ello es útil nombrar a las variedades que cuenten con estas estructuras.

Definición 4.1.16. Sea \mathcal{M} una variedad diferencial. Una *pseudo-métrica* (o *métrica semi-riemanniana*) es un campo tensorial $g \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$ simétrico y no degenerado. Así mismo, al par (\mathcal{M}, g) lo llamamos *variedad semi-riemanniana*

Su existencia para cualquier variedad suave se sigue del teorema (4.1.1), solo hay que tomar en cuenta que en lugar de usar la métrica plana \bar{g} debemos cambiarla por η . Así como excluir la hipótesis de un campo positivo definido.

Teorema 4.1.7. *Toda variedad suave admite una métrica semi-riemanniana.*

De igual forma el determinante de estas pseudo-métricas nunca se anula y podemos escribirlas como

$$g = g_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu, \quad (4.82)$$

para un comarco $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ en \mathcal{M} .

Si nos retomamos a la definición (4.1.3) vamos a encontrar que nuestra noción de norma y el ángulo entre cualesquiera dos vectores queda invariante, es decir, podemos seguir usando las mismas fórmulas para definirlos. Lo más importante a destacar es que la norma puede tomar valores positivos, negativos y cero; esto es, en estos espacios tenemos la posibilidad de encontrar vectores cuya norma es nula o incluso negativa para vectores diferentes de cero. La estructura formada por los vectores con norma nula y anclados a un punto $p \in \mathcal{M}$ son de especial importancia en física, ya que delimitan los procesos causales dentro de una región¹².

En cuanto a subir y bajar índices, es decir, el isomorfismo tangente-cotangente, queda inadvertido al trabajar con métricas o pseudo-métricas. Esto es gracias a que podemos definir la pseudo-métrica inversa, $g^{-1} = g^{\mu\nu}e_\mu \otimes e_\nu$, con $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ un marco en \mathcal{M} , como aquella que satisface

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\lambda. \quad (4.83)$$

lo cual es totalmente equivalente a la métrica riemanniana inversa.

Por otro lado, no existe el concepto de «ortogonalidad» en estos espacios, aunque sí su equivalente para pseudo-métricas.

¹²En relatividad especial nos permite clasificar eventos en el espacio según la norma de los vectores de velocidad correspondientes. Véase subsección (6.2.3)

Definición 4.1.17 (Pseudo-ortogonalidad). Sea (\mathcal{M}, g) una variedad semi-riemanniana. Dos vectores tangentes $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$ se dice que son *pseudo-ortogonales* (o *semi-ortogonales*) si

$$g_p(v_p, w_p) = 0. \quad (4.84)$$

Observación. La semi-ortogonalidad es equivalente a la ortogonalidad en el sentido que podemos seguir usando el teorema de Gram-Schmidt para probar la existencia de marcos semi-ortogonales y a su vez construir bases de vectores semi-ortonormales y sus respectivas bases duales.

Podemos escribir entonces localmente toda pseudo-métrica como

$$g_{\text{local}} = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu, \quad (4.85)$$

para una base dual semi-ortonormal $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$.

El resto de los conceptos concernientes a la planitud de un espacio permanecen invariantes.

Esta nueva estructura geométrica tampoco se ve afectada por el concepto de orientabilidad, pero sí genera un pequeño cambio en cuanto a la integración de la variedad, pues la expresión de la forma de volumen $dvol$ es ligeramente distinta. Sabemos que

$$dvol = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad (4.86)$$

sobre dos comarcos, el coordenado $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^n$ y el (en este caso) semi-ortonormal $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$. Para encontrar la función f procedemos de manera análoga al teorema (4.1.5). Primeramente consideremos

$$f = dvol(\partial_1, \dots, \partial_n) = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det(\theta^\mu(\partial_\nu)) = \det(\Lambda), \quad (4.87)$$

y por otro lado,

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g(\Lambda_\mu^\alpha e_\alpha, \Lambda_\nu^\beta e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad (4.88)$$

tomando el determinante de está última relación

$$g = \det(g) = \det(\Lambda \eta \Lambda) = \det(\Lambda) \det(\eta) \det(\Lambda) = (-1)^p \det(\Lambda)^2, \quad (4.89)$$

donde

$$\det(\eta) = (-1)^p (1)^q = (-1)^p. \quad (4.90)$$

Así,

$$\det(\Lambda) = \pm \sqrt{(-1)^p g}. \quad (4.91)$$

Por lo tanto, dado que trabajamos con marcos orientados

$$f = \sqrt{(-1)^p g}. \quad (4.92)$$

Es decir,

$$dvol = \sqrt{(-1)^p g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n. \quad (4.93)$$

Tanto las formas diferenciales como la métrica jugarán un papel fundamental en nuestra construcción posterior. En cuanto a la integración hay aún un mar de herramientas que no vamos a bordar, pero se puede referir a la bibliografía para mayores detalles [11] [13].

4.2. Cálculo de variaciones

Notemos que la curva involucrada en la distancia riemanniana d_g definida en (4.1.6) no queda del todo especificada. Es razonable buscar una manera de obtener una expresión precisa para dicha curva y que sea más específica que el ínfimo de un conjunto de trayectorias. Para tratar esto más adecuadamente debemos extraer técnicas del “cálculo de variaciones”, de donde precisamos el concepto de «derivada variacional». Antes de entrar de lleno a este problema vamos a introducir las variaciones, que son una herramienta muy importante en la física. Este análisis lo dividiremos en dos partes: por un lado, trataremos con las variaciones sobre una curva, con lo que daremos solución al problema que nos abocamos; y por otro lado, generalizaremos la idea para adaptarla a variaciones de campos, que nos permitirán abordar problemas de minimización en los objetos correspondientes, apoyándonos en la construcción de las teorías de campo que nos interesan.

4.2.1. Variaciones en una curva

Como un primer caso para el estudio de las variaciones podemos considerar cómo una curva en la variedad \mathcal{M} puede afectar el valor de la función en la que intervenga, en ese sentido de la familia de curvas que afectan a dicha función queremos encontrar aquella que maximice (o en nuestro caso, minimice) su valor. Para desarrollar a fondo esta idea precisamos de una breve introducción.

Definición 4.2.1 (Funcional). Sean X un \mathbb{R} -e.v. y X^* su espacio dual. Un *funcional* es una función del espacio dual en campo de los reales, es decir, $J : X^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación. Dado que X^* también es un espacio vectorial sobre los reales podemos establecer de igual manera que $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ es igualmente un funcional¹³.

La virtud de los funcionales es que se tratan de mapeos de funciones que nos llevan a los reales, en particular, podemos establecer funcionales que dependan de curvas de interés. Consideremos una curva α , podemos definir una nueva curva β como

$$\beta^\mu(t) = \alpha^\mu(t) + u\eta^\mu(t), \quad (4.94)$$

donde η es otra curva, es decir, β es tan próxima a α como el parámetro u sea más cercano a cero. Esto nos permite evaluar qué tanto cambia el valor del funcional ante una pequeña «variación» de la curva. Así que, primeramente, formalizaremos esta idea.

Definición 4.2.2 (Variaciones de una curva). Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva diferenciable, una *variación (con extremos fijos)* de α es una familia uniparamétrica de curvas $\alpha_u : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $t \mapsto \psi(u, t)$ tales que

- $\psi(u, t)$ es continuamente diferenciable para $u \in [-\epsilon, \epsilon]$ y $t \in [a, b]$,

¹³Para ello debemos poder identificar $(X^*)^* \cong X$

- $\alpha_0 = \alpha$,
- $\psi(u, a) = \alpha(a)$ y $\psi(u, b) = \alpha(b)$, donde $u \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Denotamos como $\Gamma(p, q; \mathcal{M})$ al espacio de curvas¹⁴ que conectan los puntos $p, q \in \mathcal{M}$. Recordemos que si S es una función en \mathcal{M} , en particular del espacio $\Gamma(p, q)$ donde $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, entonces la función de variable real $S \circ \alpha$ está bien definida y tiene derivada en \mathbb{R} . Entonces, el espacio al que recurrimos para definir un funcional es el haz tangente, mediante una función $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$S[\alpha] = \int_a^b L \circ \tilde{\alpha}(t) dt, \quad \text{donde} \quad \tilde{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right). \quad (4.95)$$

También pueden considerarse casos más generales en los que la función L está sobre el haz tangente extendido $T\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, y en cuyo caso definimos $\tilde{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t), t)$. En estos casos tenemos el funcional L definido a partir de la función S , la cual es sensible a las variaciones de la curva α .

Definición 4.2.3 (Función estacionaria). Decimos que una función $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es *estacionaria* en α (una curva en $\Gamma(p, q)$) si para cada variación α_u de α tenemos que

$$\delta^{(1)}S[\alpha] := \left. \frac{d}{du} S(\alpha_u) \right|_{u=0} = 0. \quad (4.96)$$

Consideremos ahora una expansión en serie de Taylor de una variación α_u alrededor de $u = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_u^\nu(t) &= \alpha_0^\nu(t) + u \left. \frac{d}{du} \alpha_u^\nu(t) \right|_{u=0} + O(u^2), \\ &= \alpha^\nu(t) + u \left. \frac{d}{du} \psi^\nu(u, t) \right|_{u=0} + O(u^2), \end{aligned} \quad (4.97)$$

donde $O(u^2)$ representa términos de orden superior en u . Denotamos como

$$\delta^{(1)}\alpha^\nu \equiv \left. \frac{d}{du} \alpha_u^\nu(t) \right|_{u=0}, \quad (4.98)$$

esta notación indica la “primer variación” de la curva α en cuanto al parámetro u , con lo que nos referimos al término lineal en la expansión de Taylor. El hecho de quedarnos a primer orden radica en que son los términos que contribuyen para determinar los máximos o mínimos del funcional S , según la definición (4.2.3). Así, las variaciones de interés son de la forma

$$\alpha'(t) = \alpha(t) + u\delta^{(1)}\alpha(t). \quad (4.99)$$

¹⁴Que también suele denotarse como $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

A este tipo de variaciones se les denomina “virtuales” ya que ocurren a un mismo t .¹⁵

Existen en este formalismo diferentes órdenes para las variaciones, sin embargo, no vamos a entrar en detalle a ellas, por lo que, a menos que se indique lo contrario, en el presente trabajo vamos a quedarnos siempre con primeras variaciones. En virtud de ello vamos a denotar a todas estas simplemente con δ en lugar de $\delta^{(1)}$.

Ahora bien, la idea general nos permite definir una «derivada» que actúa sobre el parámetro de las variaciones, de donde recibe su nombre.

Definición 4.2.4 (Variación respecto a una curva). Sean $S : \Gamma(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva y $\alpha_u : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ variaciones de la curva. Definimos la (primera) variación, denotada como $\delta S[\alpha^\mu]$, mediante la ecuación¹⁶

$$\delta S[\alpha] = \left. \frac{d}{du} S(\alpha(t) + u\delta\alpha(t)) \right|_{u=0}, \quad (4.100)$$

también conocida como “derivada de Gâteaux» y denotada como $D_u S(\alpha)$.

Consideremos la acción (4.95), tenemos entonces

$$\begin{aligned} \delta S[\alpha] &\stackrel{4.100}{\stackrel{4.99}{=}} \left. \frac{d}{du} \int_a^b L(\alpha'(t), \dot{\alpha}'(t), t) dt \right|_{u=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha'^\mu} \frac{d\alpha'^\mu}{du} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}'^\mu} \frac{d\dot{\alpha}'^\mu}{du} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{du} \right] \Big|_{u=0} dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha^\mu} \delta\alpha^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}^\mu} \delta\dot{\alpha}^\mu \right] dt \\ &= \int_a^b \delta L dt, \end{aligned} \quad (4.101)$$

donde obtenemos

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \alpha^\mu} \delta\alpha^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}^\mu} \delta\dot{\alpha}^\mu. \quad (4.102)$$

Lema 4.2.1 (de Lagrange). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0, \quad (4.103)$$

para toda función continua $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f(x) \equiv 0$.

¹⁵Esto es debido a que en física este parámetro t suele identificarse como el tiempo, entonces se consideran variaciones de la curva sin que el tiempo cambie; en contraposición con las “variaciones reales” en donde el sistema evoluciona en cuanto a la variación.

¹⁶Algunos autores se refieren a este concepto como una derivada variacional $\frac{\delta S}{\delta \alpha}$ [12]. Nótese que es solo un cambio de notación y se usa únicamente para referirse a problemas de minimización que involucran a las variaciones, de donde recibe su nombre.

Demostración. (Por contradicción.) Supongamos que $f(x_0) \neq 0$ para algún punto $x_0 \in [a, b]$. Por continuidad existe una región $[c, d]$ al rededor de x_0 en donde $f(x)$ es del mismo signo para $x \in [c, d]$. Por hipótesis el resultado es válido para toda h continua en el intervalo $[a, b]$, en particular, consideramos la función

$$h(x) = \begin{cases} (x-c)(d-x) & \text{si } x \in [c, d], \\ 0 & \text{si } x \notin [c, d]. \end{cases} \quad (4.104)$$

Así definida, h es continua y positiva en $[c, d]$, por lo que

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_c^d f(x)h(x)dx, \quad (4.105)$$

tiene el mismo signo que $f(x_0)$ (!). Pero esto contradice el valor original de la integral. Por lo tanto, la función $f(x)$ debe ser idénticamente cero en el intervalo $[a, b]$. QED

Observación. Notemos que para encontrar los máximos y mínimos a partir de la definición (4.2.4), podemos considerar

$$\delta S[\alpha] = 0, \quad (4.106)$$

Vamos a suponer también que las variaciones de la curva en los extremos es nula: $\delta\alpha^\mu(t=a) = \delta\alpha^\mu(t=b) = 0$; esto se conoce como fijar los extremos. Consideremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}^\mu} \delta\alpha^\mu \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}^\mu} \right) \delta\alpha^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}^\mu} \delta\dot{\alpha}^\mu, \quad (4.107)$$

de donde

$$\begin{aligned} \delta S &\stackrel{(4.101)}{=} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] \delta q^\alpha dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] \delta q^\alpha dt \end{aligned} \quad (4.108)$$

En virtud del lema (4.2.1) deducimos

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad (4.109)$$

conocidas como “ecuaciones de Euler-Lagrange”. En física estas ecuaciones son tan importantes como el principio variacional del que parten; las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica clásica se hacen de ello para encontrar una generalización de la segunda ley de Newton.

Algunos autores definen la variación como

$$\delta S[\alpha] = S[\alpha + \beta] - S[\alpha], \quad (4.110)$$

y para encontrar el mínimo demandan que los términos lineales en β se anulen, lo que significa tomar las primeras variaciones nulas. Debe entenderse, dado el análisis anterior, que ambas descripciones son totalmente equivalentes. Según el problema a tratar será más sencillo abordar uno u otro método.

4.2.2. Variaciones de campos

Vamos ahora a considerar funciones cuyo valor dependa de un campo y establecer una manera de encontrar sus propiedades al tratar problemas de minimización. En particular, buscamos los campos que minimizan el valor de una función.

La idea de establecer variaciones sobre una variedad en lo que respecta a los campos es una idea sutilmente diferente. Podemos plantear su construcción de manera análoga, pero en lugar de usar variaciones de una curva vamos a usar los grupos de difeomorfismos locales. Trataremos esta idea primero para campos escalares y luego generalizaremos la idea para campos tensoriales en general.

Consideremos primero un flujo local ϕ_u para un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ con parámetro $u \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sabemos que en una expansión en serie de Taylor de las coordenadas $x^\nu(\phi_u(p))$ a primer orden se satisface

$$x^\mu(\phi_u(p)) = x^\mu(p) + u \left. \frac{d}{du} x^\mu(\phi_u(p)) \right|_{u=0} (p), \quad (4.111)$$

al rededor de $t = 0$. Podemos entender esto como una variación de las coordenadas x^μ bajo la condición $\phi_0(p) = p$, por lo que nos es lícito escribir

$$\delta x^\mu(p) = \left. \frac{d}{du} x^\mu(\phi_u(p)) \right|_{u=0}. \quad (4.112)$$

Si consideramos ahora un campo escalar $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el valor de $\zeta(\phi_u(p))$ está bien definida, por lo que podemos considerar derivadas respecto al parámetro u . Definimos entonces la “variación del campo escalar ζ ” como

$$\delta \zeta = \left. \frac{d}{du} \zeta(\phi_u(p)) \right|_{u=0}. \quad (4.113)$$

Por lo que podemos escribir

$$\zeta'(x^\mu) = \zeta(x^\mu) + u \delta \zeta(x^\mu). \quad (4.114)$$

La familia de difeomorfismos a menudo suelen denotarse como $\psi(u, x^\mu)$. Si consideramos una función $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos tomar la restricción $S|_\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ a los valores en los que el campo ζ puede ser evaluado. A esto simplemente lo denotamos como $S[\zeta]$.

Definición 4.2.5 (Variación respecto a un campo escalar). Sean $S : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\zeta \in C^\infty(\mathcal{M})$ un campo escalar. Definimos la (*primera*) *variación* de S respecto a ζ como

$$\delta S[\zeta] = \left. \frac{d}{du} S(\zeta(p) + u\delta\zeta(p)) \right|_{u=0}. \quad (4.115)$$

La función S puede depender de más de un campo escalar y, en general, de sus derivadas, por lo que la generalización hacia los campos vectoriales y tensoriales son inmediatos a partir de sus componentes, que también son campos escalares. Es decir, la función puede estar definida como $S = S(\zeta, \partial_\mu \zeta, x^\nu)$. Esto queda explícito escribiendo

$$S[\zeta] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \circ \tilde{\zeta}(p) dvol, \quad \text{donde } \tilde{\zeta}(p) = (\zeta(p), \partial_\mu \zeta(p), x^\nu(p)), \quad (4.116)$$

para un funcional $\mathcal{L} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. La región de integración puede ser un abierto $U \subseteq \mathcal{M}$ de la variedad en donde el campo toma valor.

Consideremos, por otro lado, un tensor $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$, dado que sus componentes son funciones sobre \mathcal{M} podemos establecer las variaciones respecto a ellas como

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p) = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p) + u \delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p), \quad (4.117)$$

donde

$$\delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p) = \left. \frac{d}{du} T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(\psi(u, p)) \right|_{u=0}, \quad (4.118)$$

así podemos generalizar las variaciones hacia los tensores en general.

Definición 4.2.6. Sean $S : \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función sobre el espacio de los tensores y $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ un tensor. Definimos la (*primera*) *variación* de S respecto a T como

$$\delta S[T] = \left. \frac{d}{du} S(T(p) + u\delta T(p)) \right|_{u=0}. \quad (4.119)$$

De manera análoga esta función S puede depender de las derivadas de las componentes del campo. Entonces podemos definir

$$S[T] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \circ \tilde{T}(p) dvol, \quad \text{donde } \tilde{T}(p) = (T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p), \partial_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}(p), x^\mu), \quad (4.120)$$

para el funcional $\mathcal{L} : T_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Un procedimiento análogo al de las variaciones para curvas (4.101) nos lleva a¹⁷

$$\delta S[T] = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial(\mathcal{L} dvol)}{\partial T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} + \frac{\partial(\mathcal{L} dvol)}{\partial T_{\nu_1 \dots \nu_s, \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta T_{\nu_1 \dots \nu_s, \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r} \right]. \quad (4.121)$$

Es importante mencionar que uno de los campos de los que puede depender la función S es la métrica g , por lo que el elemento de volumen toma lugar dentro de la variación.

¹⁷Cabe mencionar que la derivada que interviene en el tensor T se puede generalizar a la derivada covariante, que definiremos en la siguiente sección y será de gran importancia, sobre todo cuando tratemos con las ecuaciones de los campos de materia (véase subsección (6.3.4)).

4.2.3. Principio de mínima acción

El cálculo de variaciones nos va a permitir tratar problemas de minimización sobre los parámetros que intervienen en nuestro formalismo. En física estos principios nos permiten encontrar las ecuaciones de movimiento, o bien las ecuaciones de campo que describen una determinada teoría con base en el lagrangiano o hamiltoniano que lo describe [7]. Para usar el principio variacional en física el tensor $T \in \mathcal{T}_s^r \mathcal{M}$ y sus derivadas se deben anular en ∂U , estas son nuestras condiciones de frontera. Usualmente para referirnos a estas hipótesis (condiciones de frontera y primeras variaciones nulas) se introduce el concepto de “derivada variacional”, que se define mediante la expresión

$$\delta S[T] = \int_U \frac{\delta(Sdvol)}{\delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}, \quad (4.122)$$

sobre los campos y

$$\delta S[\alpha] = \int_a^b \frac{\delta S}{\delta \alpha^\mu} \delta \alpha^\mu dt, \quad (4.123)$$

para una curva. Así, las ecuaciones de campo están dadas por la condición

$$\frac{\delta(Sdvol)}{\delta T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} = 0, \quad (4.124)$$

y de manera análoga, para variaciones sobre una curva $\alpha(t)$, se expresa como

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha^\mu} = 0; \quad (4.125)$$

en cuanto a ello las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden encontrar mediante

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = 0. \quad (4.126)$$

Al tratar con las variedades diferenciales estos métodos nos permiten encontrar la curva mínima que conecta dos puntos sobre un espacio dada una métrica. Regresaremos ahora al problema de encontrar la curva que define una distancia en una variedad riemanniana. El concepto que nos proporcionará esto es justo el relacionar vectores en una vecindad y poder compararlos, permitiéndonos definir una derivada sobre los vectores que además es un vector.

La formulación más general de las leyes que gobiernan el movimiento de un sistema mecánico es el “principio de mínima acción” o “principio de Hamilton”, de acuerdo al cual todo sistema mecánico está caracterizado por la función L , conocida como “lagrangiano” y el comportamiento del sistema es tal que satisface algunas condiciones. Un sistema que evoluciona entre dos instantes de tiempo debe satisfacer que la integral

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt, \quad (4.127)$$

llamada “acción” toma el menor valor posible. Es importante mencionar que esta formulación del principio de mínima acción no siempre es válido para la trayectoria completa de un sistema, sino únicamente para algunos segmentos suficientemente

pequeños. La integral de la trayectoria completa debe tener un valor extremo, no necesariamente mínimo. Este hecho, sin embargo, no es de importancia en cuanto a la derivación de las ecuaciones de movimiento, pues solamente hacemos uso de la condición extremal.

El lagrangiano contiene únicamente a las coordenadas \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$, pero no de mayor orden. Este hecho expresa que el estado mecánico del sistema está completamente definido cuando las coordenadas y las velocidades están dadas [22]. En general, siempre vamos a buscar lagrangianos que contengan a lo más segundas derivadas de la variable que tomemos en cuestión para la descripción del sistema físico. Más aún, en las teorías de campo, donde aparece la cantidad \mathcal{L} , nombrada en este caso “densidad lagrangiana” contiene hasta segundas derivadas de los campos involucrados en la descripción del campo. A manera de ejemplificar, las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos tienen la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{\nu_1 \dots \nu_s, \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \right) = 0. \quad (4.128)$$

4.3. Conexión

La idea de una conexión envuelve la idea de una diferenciación generalizada que pueda aplicarse a los tensores en general, esto con el propósito de evaluar su tasa de cambio ante desplazamientos en una dirección sobre la variedad. Para ello tomamos el ejemplo de la derivada usual de una función escalar $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, en la cual establecemos una comparación (o diferenciación) entre su valor en un punto y su valor en otro punto cercano. Siguiendo esta idea podemos pensar en una diferenciación entre campos vectoriales como una comparación entre su valor en un punto y otro suficientemente cercano. El problema con esta idea es que en una variedad diferencial genérica estos campos (evaluados cada uno en un punto) no están necesariamente sobre un mismo espacio tangente. En este sentido buscamos establecer una manera de desplazar a uno de ellos sobre la variedad hasta el otro punto para pensar correctamente en una diferenciación. Esta es la idea detrás del “transporte paralelo”: «arrastrar» un vector a lo largo de una curva sin cambiar sus propiedades. La conexión entonces puede entenderse como un medio para comparar objetos en una vecindad, por lo que localmente nos ofrece el concepto que precisamos.

La importancia de establecer una nueva derivación es que, en general, las derivadas parciales de las componentes de un tensor no se transforman como las componentes de otro tensor al pasar de una base a otra. Las transformaciones entre tensores están bien definidas, por lo que una diferenciación entre tensores que nos devuelva un tensor es una idea no solo interesante, sino necesaria. Los conceptos a los que nos da acceso una conexión son, además del transporte paralelo, la “derivada covariante”, la “curvatura”, “torsión” y nos permite generalizar la idea de las curvas mínimas que conectan dos puntos sobre \mathcal{M} , las “geodésicas”. En este sentido, podemos definir derivadas direccionales de tensores en general.

En la presente sección asumiremos que los objetos con los que trabajemos son infinitamente diferenciables.

4.3.1. Conexiones lineales

La idea de una conexión no se limita a las variedades riemannianas, de hecho, estrictamente están definidas en un haz fibrado principal, que no abordaremos sino hasta el siguiente capítulo (Véase subsección (5.2.4)). Por ahora nos concentraremos en aquellas denominadas “conexiones lineales”, las cuales podemos estudiar con las herramientas expuestas hasta ahora. Con el objetivo de formalizar las ideas que acabamos de exponer daremos primero algunas definiciones.

Definición 4.3.1 (Germen). Dos funciones $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $p \in \mathcal{M}$ tienen el mismo *germen en p* si existe una vecindad V de p donde coinciden.

La clase de equivalencia de funciones diferenciables en p que tienen el mismo germen como una función f es llamada *germen de f* . Los conceptos que abordamos entonces siempre son locales y se refieren a una región V tan pequeña como sea necesaria.

Definición 4.3.2 (Conexión lineal). Una *conexión lineal* en una variedad diferencial \mathcal{M} es un mapeo $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_1^1(\mathcal{M})$ de los gérmenes de un campo vectorial en los gérmenes de un campo tensorial tal que

$$\begin{aligned}\nabla(v + w) &= \nabla v + \nabla w, \\ \nabla(vf) &= v \otimes df + f\nabla v.\end{aligned}\tag{4.129}$$

donde $v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. El tensor ∇v es conocido como la *derivada covariante* de v (o *derivada absoluta*).

Formas de conexión

El orden en (4.129) es importante y regresaremos a este hecho más adelante (véase sección 4.4.2). Podemos expresar la derivada covariante de un campo vectorial, en una base $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ y su dual $\{\theta^\nu\}_{\nu=1}^n$ como

$$\nabla e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \theta^\nu,\tag{4.130}$$

donde $\{e_\alpha \otimes \theta^\nu\}_{\alpha,\nu=1}^n$ es una base de campos tensoriales de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A las funciones $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ las denominamos “coeficientes de la conexión” y en particular cuando trabajamos con la base coordenada son conocidos como “símbolos de Christoffel”. Estas funciones nos permiten escribir la derivada covariante de un campo vectorial $v = v^\mu e_\mu$ como

$$\begin{aligned}\nabla v &= \nabla(e_\mu v^\mu) = e_\mu \otimes dv^\mu + v^\mu \nabla e_\mu \\ &= e_\nu(v^\mu) e_\mu \otimes \theta^\nu + v^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \theta^\nu \\ &= e_\mu [\otimes (e_\nu(v^\mu) + v^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu) \theta^\nu] \\ &= e_\mu \otimes (dv^\mu + \omega^\mu{}_\alpha v^\alpha),\end{aligned}\tag{4.131}$$

donde hemos definido a

$$\omega^\mu{}_\alpha := \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \theta^\nu,\tag{4.132}$$

como las “formas de conexión”. Denotamos como $\nabla_\mu v^\mu$ a las componentes $(\nabla v)_\mu^\nu$ de la derivada covariante, con lo que obtenemos una expresión para una base genérica como

$$\nabla_\mu v^\nu = \nabla v(\theta^\nu, e_\mu) = e_\mu(v^\nu) + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu v^\alpha.\tag{4.133}$$

La derivada covariante engloba la derivada direccional de campos vectoriales; fijando un campo de la base e_μ podemos definir la derivada covariante en dicha dirección $\nabla_{e_\mu} v$ como una función que asigna campos vectoriales a un campo vectorial de forma que

$$\nabla_\mu v := (\nabla v)_\mu = (e_\mu(v^\nu) + v^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu) e_\nu\tag{4.134}$$

para cualquier campo vectorial v . Esto significa que podemos identificar las componentes de la derivada absoluta ∇_μ con el operador ∇_{e_μ} :

$$\nabla_\mu \equiv \nabla_{e_\mu}.\tag{4.135}$$

Finalmente, de (4.130), podemos encontrar

$$\nabla_\nu e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha,\tag{4.136}$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ representa la α -ésima componente de la tasa de cambio de e_μ por un desplazamiento en la dirección e_ν .

4.3.2. Derivada covariante

Antes de introducir formalmente la derivada covariante «direccional» es útil mencionar que esta no solo está definida para campos vectoriales, sino que en efecto es posible definirlas también para 1-formas diferenciales y tensores en general. Con el ánimo de generalizar esta idea vamos a comenzar por considerar un campo tensorial $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$. Primeramente, la derivada covariante de dicho tensor deberá ser un nuevo tensor $\nabla T \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(\mathcal{M})$, mientras que la derivada direccional respecto a un campo vectorial $u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ será un tensor del mismo tipo, es decir, $\nabla_u T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$.

Trazas y contracciones

Para encontrar la forma en la que el operador ∇ actúa sobre los tensores en general debemos estudiar cómo actúan sobre los elementos de la base. Para establecer sus propiedades primero introducimos las “contracciones”. Consideremos un tensor $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$, gracias a la métrica podemos subir y bajar índices, por lo que la posición de estos no es relevante por ahora. Entonces podemos pensar al tensor con componentes $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ expresado en las bases construidas con los productos tensoriales de las bases genéricas de campos vectoriales y covectoriales y donde además $k = r + s$. Consideremos el tensor R de rango $k - 2$ cuyas componentes son¹⁸

$$R^{\mu_1 \cdots \widehat{\mu}_i \cdots \widehat{\mu}_j \cdots \mu_k} = g_{\mu_i \mu_j} T^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_j \cdots \mu_k} = T_{\mu_i}^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \widehat{\mu}_j \cdots \mu_k}, \quad (4.137)$$

y donde dejamos implícita la suma sobre el índice repetido μ_i . Dado que podemos usar la métrica para subir y bajar índices podemos pensar este hecho como el resultado de un producto escalar sobre las componentes de un tensor, es decir, una «traza» definida sobre los tensores de rango mayor o igual a 2.

Definición 4.3.3. Sea $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ ($r + s \geq 2$) un tensor en \mathcal{M} que se expresa como

$$T = T_{\nu_1 \cdots \nu_s}^{\mu_1 \cdots \mu_r} e_1 \otimes \cdots \otimes e_{\mu_r} \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^{\mu_r}, \quad (4.138)$$

La traza del tensor R en las componentes μ_i y ν_j es el tensor

$$\begin{aligned} \text{Tr} : \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(\mathcal{M}), \\ T &\mapsto \text{Tr}(T), \end{aligned} \quad (4.139)$$

que se expresa como

$$\text{Tr}(T) = T_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \mu_i \nu_{j+1} \cdots \nu_s}^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_i \mu_{i+1} \cdots \mu_r} e_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{e}_i \cdots \otimes e_{\mu_r} \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\theta}^j \cdots \otimes \theta^{\mu_r}. \quad (4.140)$$

Podemos pensar en este proceso para un tensor genérico. Si tomamos en otro tensor S de rango l , cuyas componentes se expresan como $S_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ en la misma base, definimos la “contracción de S con T ” sobre las componentes μ_i y ν_j como el tensor R cuyas componentes son

$$R_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \widehat{\mu}_i \cdots \mu_k} = T^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_k} S_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \mu_i \nu_{j+1} \cdots \nu_l}. \quad (4.141)$$

¹⁸Recordemos que la notación \widehat{X}_k significa que el elemento X_k es omitido.

Estas contracciones las podemos hacer con tantos índices queramos, pero en cada contracción el rango del tensor será menos dos el original. Si contraemos todos los índices de un tensor obtendremos un vector (o covector según sea el caso) si el rango es impar y una función escalar si su rango es par [23] [7].

Observación. Las contracciones son un caso general de la traza, pues si escribimos al tensor R como el producto tensorial de T y S podemos entender la contracción de estos dos últimos como la traza de R sobre los índices de interés. Es decir, podemos escribir la contracción de T y S , denotada como $\text{Con}(T, S)$, donde $R = T \otimes S$, como

$$\text{Tr}(R) = \text{Tr}(T \otimes S) = \text{Con}(R, S). \quad (4.142)$$

Esto es así en virtud que la traza es una operación lineal.

Derivada covariante direccional

Ahora bien, regresemos a la derivación que preserva el orden del tensor.

Definición 4.3.4 (Derivada covariante direccional). Sean $T \in \mathfrak{T}_j^i(\mathcal{M})$ y $S \in \mathfrak{T}_l^k(\mathcal{M})$ campos tensoriales. Definimos la *derivada covariante direccional* (en dirección del vector $u^\mu e_\mu = u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$) como el mapeo

$$\begin{aligned} \nabla_u : \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}), \\ R &\mapsto \nabla_u R, \end{aligned} \quad (4.143)$$

que satisface

- $\nabla_{u^\mu e_\mu} T = u^\mu \nabla_\mu T$,
- $\nabla_u f = u(f)$,
- $\nabla_u(T + S) = \nabla_u T + \nabla_u S$, si $i = k$ y $j = l$,
- $\nabla_u(T \otimes S) = \nabla_u T \otimes S + T \otimes \nabla_u S$,
- $\nabla_u(\text{Tr}(T \otimes S)) = \text{Tr}(\nabla_u(T \otimes S))$,

para cualquier $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

A las componentes de la derivada covariante del tensor $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$, $\nabla_\lambda T$, las denotamos como $T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} ; \lambda$. Consideremos ahora la traza del producto tensorial de una 1-forma ω y un vector v , es decir,

$$\text{Tr}(\omega \otimes v) = \text{Tr}(\omega_\mu v^\nu \theta^\mu \otimes e_\nu) = \omega_\mu v^\mu = \omega(v). \quad (4.144)$$

Dado que la derivada covariante direccional de una 1-forma diferencial nos devuelve otra 1-forma, podemos considerar entonces, en dirección del vector e_α ,

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \omega(v) &= \nabla_\alpha (\text{Tr}[\omega \otimes v]) = \text{Tr}[\nabla_\alpha (\omega \otimes v)] = \text{Tr}[\nabla_\alpha \omega \otimes v + \omega \otimes \nabla_\alpha v] \\ &= \text{Tr}[\nabla_\alpha \omega \otimes v] + \text{Tr}[\omega \otimes \nabla_\alpha v] = \nabla_\alpha \omega(v) + \omega(\nabla_\alpha v), \end{aligned} \quad (4.145)$$

de donde, si $v = e_\beta$, por un lado tenemos que

$$\nabla_\alpha \omega(e_\beta) = \nabla_\alpha \omega_\beta = e_\alpha(\omega_\beta), \quad (4.146)$$

mientras que, por el otro,

$$\nabla_\alpha \omega(e_\beta) + \omega(\nabla_\alpha e_\beta) = (\nabla \omega)_{\alpha\beta} + \omega(\Gamma_{\beta\alpha}^\mu e_\mu) = \nabla_\alpha \omega_\beta + \omega_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu, \quad (4.147)$$

por lo tanto,

$$\nabla_\alpha \omega_\beta = e_\alpha(\omega_\beta) - \omega_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu. \quad (4.148)$$

De esta ecuación también podemos ver que

$$\nabla_\alpha \omega = \omega_{\beta;\alpha} \theta^\beta = [e_\alpha(\omega_\beta) - \omega_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu] \theta^\beta, \quad (4.149)$$

y comparándola con

$$\nabla_\alpha \omega = (\nabla_\alpha \omega_\beta) \theta^\beta + \omega_\beta \nabla_\alpha \theta^\beta = e_\alpha(\omega_\beta) \theta^\beta + \omega_\mu \nabla_\alpha \theta^\mu \quad (4.150)$$

obtenemos

$$\nabla_\alpha \theta^\mu = -\Gamma_{\beta\alpha}^\mu \theta^\beta. \quad (4.151)$$

Por otro lado, podemos considerar un tensor $T \in \mathfrak{T}_0^2(\mathcal{M})$, asumiendo que las componentes $T^{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathcal{M})$ son tensores de rango cero (0), podemos expresar su derivada covariante como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (T^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta) &= \nabla_\mu (T^{\alpha\beta}) e_\alpha \otimes e_\beta + T^{\alpha\beta} (\nabla_\mu e_\alpha) \otimes e_\beta \\ &\quad + T^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes (\nabla_\mu e_\beta) \\ &= e_\mu (T^{\alpha\beta}) e_\alpha \otimes e_\beta + T^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\mu}^\nu e_\nu) \otimes e_\beta \\ &\quad + T^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes (\Gamma_{\beta\mu}^\nu e_\nu) \\ &= [e_\mu (T^{\alpha\beta}) + T^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + T^{\alpha\nu} \Gamma_{\nu\mu}^\beta] e_\alpha \otimes e_\beta, \end{aligned} \quad (4.152)$$

podemos generalizar esta expresión siguiendo esta idea, por lo que para un tensor $T \in \mathfrak{T}_0^r(\mathcal{M})$ podemos expresar las componentes de su derivada covariante como

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{;\nu} = T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{,\nu} + T^{\lambda\mu_2 \dots \mu_r} \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu_1} + T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_r} \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu_2} + \dots + T^{\mu_1 \dots \lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu_r}. \quad (4.153)$$

Mientras que para un tensor $S \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (S_{\alpha\beta} \theta^\alpha \otimes \theta^\beta) &= \nabla_\mu (S_{\alpha\beta}) \theta^\alpha \otimes \theta^\beta + S_{\alpha\beta} (\nabla_\mu \theta^\alpha) \otimes \theta^\beta \\ &\quad + S_{\alpha\beta} \theta^\alpha \otimes (\nabla_\mu \theta^\beta) \\ &= e_\mu (S_{\alpha\beta}) \theta^\alpha \otimes \theta^\beta + S_{\alpha\beta} (-\Gamma_{\nu\mu}^\alpha \theta^\nu) \otimes \theta^\beta \\ &\quad + S_{\alpha\beta} \theta^\alpha \otimes (-\Gamma_{\nu\mu}^\beta \theta^\nu) \\ &= [e_\mu (S_{\alpha\beta}) - S_{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^\nu - S_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\mu}^\nu] \theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Así que para un tensor $S \in \mathfrak{T}_s^0(\mathcal{M})$ encontramos que

$$S_{\mu_1 \dots \mu_s}{}_{;\nu} = S_{\mu_1 \dots \mu_s}{}_{,\nu} - S_{\lambda\mu_2 \dots \mu_s} \Gamma_{\mu_1\nu}^\lambda - S_{\mu_1 \lambda \dots \mu_s} \Gamma_{\mu_2\nu}^\lambda - \dots - S_{\mu_1 \dots \lambda} \Gamma_{\mu_s\nu}^\lambda \quad (4.155)$$

Finalmente, de estos últimos desarrollos podemos establecer la expresión general para la derivada covariante de un tensor $R \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$, obteniendo

$$\begin{aligned} R_{\nu_1 \dots \nu_s ; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r} &= R_{\nu_1 \dots \nu_s, \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r} \\ &+ R_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\alpha \dots \mu_r} \Gamma_{\alpha \lambda}^{\mu_1} + \dots + R_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \alpha} \Gamma_{\alpha \lambda}^{\mu_r} \\ &- R_{\beta \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \Gamma_{\mu_1 \lambda}^{\beta} - \dots - R_{\nu_1 \dots \beta}^{\mu_1 \dots \mu_r} \Gamma_{\nu_s \lambda}^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Geodésicas

Consideremos ahora una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, podemos construir entonces un campo vectorial $u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ de tal manera que $u_p \in T_p \mathcal{M}$ sea un vector tangente a la curva. Con ayuda de la derivada covariante podemos evaluar la tasa de cambio de un vector sobre un punto de la curva.

Definición 4.3.5 (Vector paralelo). Sea una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ y $u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial tal que $u_p \in T_p(\mathcal{M})$ son vectores tangentes a la curva

$$u = \gamma_* \frac{d}{dt}. \quad (4.157)$$

Decimos que un vector $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es *paralelo a lo largo de la curva* γ si

$$\nabla_u v = 0, \quad \forall p \in \gamma([a, b]). \quad (4.158)$$

La derivada covariante en dirección de un campo generado a partir de una curva de esta manera es usualmente denotado como

$$\frac{Dv}{dt} = \nabla_u v, \quad (4.159)$$

y por lo tanto, solo está definido sobre los puntos en la curva. Esto es lo que se conoce como “transporte paralelo” de un vector a lo largo de una curva.

Definición 4.3.6 (Geodésica). Una *geodésica afín* es una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ tal que

$$\nabla_u u = \lambda(t)u, \quad \text{donde } u = \gamma_* \frac{d}{dt}, \quad (4.160)$$

para alguna función $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si en cambio la curva satisface $\nabla_u u = 0$ entonces es llamada *geodésica*, tal relación es conocida como *ecuación geodésica*.

Observación. Notemos que estas expresiones que engloban a la derivada covariante cuentan con una expresión independiente del sistema coordenado. Así, la conexión tiene que ser independiente de la elección de una base. Sin embargo, los coeficientes de la conexión en efecto dependen de la base escogida, por lo que no se transforman de acuerdo a la transformación de tensores entre un marco y otro.

Dada una geodésica afín podemos considerar una reparametrización de la curva de tal manera que la función $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ en la definición sea nula, si bajo tal reparametrización se satisface la ecuación geodésica, el nuevo parámetro es una función.

Definición 4.3.7 (Parámetro afín). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una geodésica afín cuyo vector tangente es $u = \dot{\gamma}$. Consideremos ahora un cambio de parámetro $s = \xi(t)$, de manera que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma} \circ \xi(t)$ y podemos definir

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}. \quad (4.161)$$

Entonces si $\nabla_{\tilde{u}}\tilde{u} = 0$ decimos que s es un *parámetro afín*.

Es posible además extender el conjunto $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 4.3.8 (Geodésicas completas). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una geodésica, si podemos extenderla, de manera que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, entonces decimos que es una *geodésica completa*. En dado caso, si todas las geodésicas son completas en \mathcal{M} , a este se le conoce como *geodésicamente completo*.

4.3.3. Conexión de Levi-Civita

Consideremos una curva γ en un abierto $U \subset \mathcal{M}$; podemos escribir¹⁹ $u^\mu = \frac{d\gamma^\mu}{dt}$, de donde

$$u(u^\mu) = \gamma_* \frac{d}{dt} u^\mu = \frac{d}{dt} u^\mu(\gamma) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \gamma^\mu(t) \right] = \frac{d^2}{dt^2} \gamma^\mu, \quad (4.162)$$

es decir, podemos identificar sobre la curva

$$u^\mu \partial_\mu = \frac{d}{dt}, \quad (4.163)$$

dejando implícito el empuje de la derivada total sobre la curva. Por lo tanto, escribimos la ecuación geodésica en una base coordenada como

$$\nabla_u u^\alpha = u^\nu \nabla_\nu u^\alpha = u^\nu (\partial_\nu u^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu) = \frac{d^2 \gamma^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{d\gamma^\mu}{dt} \frac{d\gamma^\nu}{dt} = 0. \quad (4.164)$$

Que podemos simplificar a

$$\ddot{\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0. \quad (4.165)$$

Este mismo resultado se deriva de los métodos variacionales que tratamos anteriormente. Dado el concepto de distancia riemanniana las curvas geodésicas tienen una distancia extremal s entre dos puntos dados (extremos fijos), por lo que nos está permitido tomar

$$\delta s = \delta \int_a^b ds = 0, \quad (4.166)$$

¹⁹Para $u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ como en (4.157).

recordemos que el elemento de línea está dado (en la base coordenada) por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.167)$$

Así, sobre la curva γ y con el parámetro afín s

$$ds^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt^2, \quad (4.168)$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{ds}{dt} dt \right) \left(\frac{dx^\nu}{ds} \frac{ds}{dt} dt \right) \\ &= g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt^2, \end{aligned} \quad (4.169)$$

donde hicimos

$$\frac{dx^\mu}{ds} \equiv \dot{x}^\mu. \quad (4.170)$$

Entonces encontramos

$$1 = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (4.171)$$

Por lo tanto,

$$s = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} ds = \int_a^b L ds, \quad (4.172)$$

habiendo tomado el funcional

$$L = L(x(s), \dot{x}(s), s) = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (4.173)$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \delta \int_a^b L ds &\stackrel{(4.101)}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right) ds \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \delta x^\mu + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \delta \dot{x}^\mu \right] ds \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta x^\mu + \frac{1}{2} (2g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha) \delta \dot{x}^\mu \right] ds \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \delta x^\mu) + \left[-\frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \delta x^\mu \right\} ds, \end{aligned} \quad (4.174)$$

donde usamos

$$\frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \delta x^\mu) = \frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha) \delta x^\mu + g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \delta \dot{x}^\mu. \quad (4.175)$$

El primer término de (4.174) se anula por la condición $\delta x^\mu = 0$ en los extremos y el principio variacional (4.166) nos deja con

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= \left(\frac{dg_{\alpha\mu}}{ds} \right) \dot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
&= \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
&= g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha + g_{\alpha\mu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
&\quad - g_{\alpha\beta,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) \\
&= g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
&\quad - g_{\alpha\beta,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) \\
&= g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{4.176}$$

contrayendo con $g^{\mu\nu}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \left[g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right] \\
= \delta_\alpha^\nu \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
= \ddot{x}^\nu + \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
= 0.
\end{aligned} \tag{4.177}$$

Dado que la curva es una geodésica podemos identificar

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \stackrel{(4.165)}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}). \tag{4.178}$$

Observación. De (4.178) vemos que los índices de abajo en los símbolos de Christoffel conmutan, es decir,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \Gamma_{\beta\alpha}^\nu. \tag{4.179}$$

4.4. Torsión y curvatura

Para hablar sobre las deformaciones sobre una variedad necesitamos una medida de comparación de los vectores ante cambios específicos que nos permitan estudiar su forma y que nos devuelvan el aspecto global. Para ello nos vamos a ayudar del transporte paralelo; la idea general es que intuitivamente (en el espacio plano) el transporte paralelo de un vector a lo largo de una trayectoria lo deja

4.4.1. Torsión

Primeramente, para el caso de la torsión podemos considerar la manera en que dos vectores cambian covariantemente entre sí, es decir, transportar paralelamente uno sobre otro y comparar el resultado. Sean $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, esta idea puede expresarse como

$$\nabla_u v - \nabla_v u, \quad (4.180)$$

sobre un punto $p \in \mathcal{M}$ donde las geodésicas descritas por las ecuaciones $\nabla_u u = 0$ y $\nabla_v v = 0$ se crucen. El resultado de esta diferencia puede ser afectado por el conmutador de los campos, por lo que esta contribución debe ser eliminada.

Definición 4.4.1 (Operador de torsión). Sean $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dos campos vectoriales. Definimos el *operador de torsión* como

$$\tau(u, v) := \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]. \quad (4.181)$$

Consideremos desarrollar el operador de torsión en una base $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$

$$\begin{aligned} \tau(u, v) &= \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] \\ &= u^\mu (e_\mu(v^\nu) + v^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu) e_\nu - v^\nu (e_\nu(u^\mu) + u^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu) e_\mu \\ &\quad - [u^\mu e_\mu(v^\nu) - v^\mu e_\mu(u^\nu)] e_\nu - u^\mu v^\nu c_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \\ &= u^\mu v^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu e_\nu - v^\nu u^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu e_\mu - u^\mu v^\nu c_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \\ &= (\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - c_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu v^\nu e_\alpha. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Definimos así el “tensor de torsión” como

$$\begin{aligned} T : \Lambda^1(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ (\alpha; u, v) &\mapsto \alpha(\tau(u, v)), \end{aligned} \quad (4.183)$$

cuyas componentes están dadas por

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = T(\theta^\alpha, e_\mu, e_\nu) = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - c_{\mu\nu}^\alpha. \quad (4.184)$$

Debido a la antisimetría en los índices μ y ν podemos definir las “formas de torsión” como

$$\Theta^\alpha := T^\alpha{}_{\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu. \quad (4.185)$$

Cabe destacar en este punto, dado que nosotros tomamos la convención de la suma sin repetir términos para las formas diferenciales, que en general podemos considerar la relación anterior como $\Theta^\alpha = \frac{1}{2}T^\alpha_{\mu\nu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu$, si tomamos en cuenta todos los términos en la suma. Es decir, cada término aparecerá dos veces, de donde viene el factor $\frac{1}{2}$. En el presente capítulo vamos a estudiar relaciones análogas a esta, por lo que es importante recalcar cuándo trabajamos con sumas sin repeticiones para las formas y cuándo no. La forma estándar de estas ecuaciones (referido a gran parte de la bibliografía) toma en cuenta repeticiones y nuestra convención puede resultar confusa si se compara con estas, por lo que haremos hincapié en los resultados que tomen en cuenta este hecho.

Conexión compatible con la métrica

Tomemos como caso particular a la derivada covariante del tensor métrico, escrito como $g = g_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$, tenemos que

$$g_{\mu\nu;\alpha} = e_\alpha(g_{\mu\nu}) - g_{\beta\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^\beta. \quad (4.186)$$

Más adelante nos será de ayuda una condición entre una conexión y la métrica, en la que interviene esta expresión.

Definición 4.4.2 (Conexión métrica). La conexión que anula la derivada covariante de la métrica g es conocida como “conexión compatible con la métrica” (o “conexión métrica”).

Observación. La conexión métrica satisface

$$g_{\mu\nu;\alpha} = e_\alpha(g_{\mu\nu}) - g_{\beta\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0, \quad (4.187)$$

es decir,

$$dg_{\mu\nu} = g_{\beta\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^\beta\theta^\alpha + g_{\mu\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^\beta\theta^\alpha = g_{\beta\nu}\omega^\beta_\mu + g_{\mu\beta}\omega^\beta_\nu = \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (4.188)$$

donde hemos definido

$$\omega_{\nu\mu} := g_{\beta\nu}\omega^\beta_\mu. \quad (4.189)$$

Consideremos ahora una base ortonormal (o semi-ortonormal). En esta base los vectores solo cambian de dirección, mientras que su magnitud y ángulos relativos permanecen constantes. Las formas de conexión ω^β_ν en esta base son conocidas como “formas de rotación”. Dado que las componentes de la métrica en esta base son constantes (e iguales a 0 o ± 1) tenemos que $dg_{\mu\nu} = 0$, entonces

$$\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}, \quad i.e., \quad \Gamma_{\nu\mu\alpha} = -\Gamma_{\mu\nu\alpha}. \quad (4.190)$$

Esta antisimetría nos será de gran ayuda más adelante.

Teorema 4.4.1. *Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana, existe una única conexión lineal que es compatible con una métrica, en el sentido que el tensor métrico es covariantemente constante y el tensor de torsión T se anula, es decir,*

$$\nabla_u g = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad (4.191)$$

$$T = 0. \quad (4.192)$$

Demostración. Para demostrar la existencia y unicidad debemos derivar una expresión explícita para los coeficientes de la conexión. Sabemos que la condición para una métrica covariantemente constante está dada por

$$\nabla_u g = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_{\mu\nu, \alpha} = g_{\beta\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} + g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}. \quad (4.193)$$

Por otro lado,

$$T = 0, \quad \Longrightarrow \quad c_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (4.194)$$

Por lo que si consideramos

$$\begin{aligned} g_{\alpha\nu, \mu} &= g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + g_{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\mu}^{\beta}, \\ g_{\mu\alpha, \nu} &= g_{\beta\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}, \end{aligned} \quad (4.195)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\mu\nu, \alpha} &= g_{\beta\nu} (\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}) + g_{\beta\alpha} (\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}) \\ &\quad + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}) \\ &= g_{\beta\nu} c_{\mu\alpha}^{\beta} + g_{\beta\alpha} c_{\nu\alpha}^{\beta} + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}) \\ &= g_{\beta\nu} c_{\mu\alpha}^{\beta} + g_{\beta\alpha} c_{\nu\alpha}^{\beta} + g_{\alpha\beta} c_{\mu\nu}^{\beta} + 2g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \end{aligned} \quad (4.196)$$

Si contraemos con $g^{\alpha\lambda}$ obtenemos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\lambda} g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} &= \delta_{\beta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\mu\nu, \alpha} - (g_{\beta\nu} c_{\mu\alpha}^{\beta} + g_{\beta\alpha} c_{\nu\alpha}^{\beta} + g_{\alpha\beta} c_{\mu\nu}^{\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (4.197)$$

QED

La conexión definida por los coeficientes

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\mu\nu, \alpha} - (g_{\beta\nu} c_{\mu\alpha}^{\beta} + g_{\beta\alpha} c_{\nu\alpha}^{\beta} + g_{\alpha\beta} c_{\mu\nu}^{\beta}) \right], \quad (4.198)$$

es conocida como “conexión riemanniana”.

4.4.2. Formas diferenciales $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ -valuadas

Hasta ahora cuando hablamos de la derivada exterior únicamente nos referimos a las formas diferenciales, ahora es conveniente definir la derivada exterior para vectores. Tomamos una base de campos vectoriales $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ y su correspondiente base dual de 1-formas $\{\theta_\nu\}_{\nu=1}^n$, consideremos

$$T = T_\nu^\mu e_\mu \otimes \theta^\nu, \quad (4.199)$$

este tensor puede ser entendido como una 1-forma vectorial; esto es, si fijamos cualquier campo vectorial u podemos entender al tensor T como una función que asigna un vector dado por

$$T(_, u) = T_\nu^\mu u^\nu e_\mu, \quad (4.200)$$

el cual puede ser considerado como una “1-forma vector-valuada” (que es justamente una 1-forma con valor vectorial), también llamada “1-forma vectorial”. En principio, podemos entender al tensor T de tres maneras: como un tensor mixto de rango 2, una 1-forma vectorial y una forma vector-valuada.

Definición 4.4.3 (k -forma vector-valuada). Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{M})$. Definimos una k -forma vectorial como el tensor $X \otimes \alpha$ antisimétrico en la parte covariante y que asigna un vector a cada conjunto de k vectores. En otras palabras, una k -forma vectorial es una función

$$\begin{aligned} T^k : \times^k \mathfrak{X}\mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \\ (v_1, v_2, \dots, v_k) &\mapsto v, \end{aligned} \quad (4.201)$$

totalmente antisimétrica, donde $v, v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Las formas diferenciales que hemos estado usando toman su valor en los números reales, en ese sentido podemos llamarles \mathbb{R} -valuadas. Lo único que hicimos fue cambiar el campo sobre el que toman sus valores, generalizando la idea a los espacios vectoriales. En particular, hemos definido las formas diferenciales $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ -valuadas. Sean $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ una base de campos vectoriales en un abierto $U \subset \mathcal{M}$ y $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$ su respectiva base dual, podemos construir una base para las k -formas vectoriales como

$$\{e_\mu \otimes \theta^{\nu_1} \wedge \theta^{\nu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_k} \mid \mu = 1, \dots, n \text{ y } 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq n\}. \quad (4.202)$$

El producto cuña se define análogamente, pues esta forma también es lineal y contamos con la base tensorial anterior para orientarnos.

Derivada exterior covariante

Lo que no resulta intuitivo sobre estos objetos es la diferenciación, pero nos podemos dar una idea para encontrar una expresión local consistente. Tomemos en primer lugar una 0-forma vectorial, que podemos identificar inmediatamente con un campo

vectorial. Sea e_μ un elemento de la base de campos vectoriales, queremos que de_μ sea una 1-forma vectorial, es decir, una función

$$de_\mu : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad (4.203)$$

en particular, sea e_ν otro elemento de la base, entonces $de_\mu(e_\nu)$ es de nuevo un campo vectorial, por lo que puede ser expresado en la misma base. Es decir

$$de_\mu(e_\nu) = J_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha. \quad (4.204)$$

Las funciones $J_{\mu\nu}^\alpha$ pueden entenderse como la α -ésima componente de la tasa de cambio de e_ν a lo largo de e_μ , por lo que podemos identificar $J_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Por otro lado, de_μ puede ser expresada en la base $\{e_\mu \otimes \theta^\nu\}_{\mu,\nu=1}^n$, de donde

$$de_\mu = \gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \theta^\nu. \quad (4.205)$$

Podemos ver de estas expresiones que $\gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ para todo $\mu, \nu, \alpha = 1, \dots, n$.

Para construir una derivada exterior en el espacio de campos vectoriales precisamos entonces de la derivada exterior (que satisface la regla de Leibniz) y el producto cuña usuales definidas en las formas diferenciales. Denotamos como $\Lambda^k(U, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ al espacio de las k -formas $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ -valuadas sobre el abierto $U \subset \mathcal{M}$.

Definición 4.4.4 (Derivada exterior de 0-formas vectoriales). Sea $X \in \Lambda^0(U, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$, es decir, un campo vectorial. Definimos la *derivada exterior* de X como

$$dX = d(e_\mu X^\mu) = e_\mu \otimes dX^\mu + X^\mu de_\mu, \quad (4.206)$$

donde

$$de_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \theta^\nu, \quad (4.207)$$

en la base $\{e_\mu\}_{\mu=1}^n$ de campos vectoriales y $\{\theta_\nu\}_{\nu=1}^n$, su correspondiente base dual de 1-formas.

Las formas de conexión vuelven a aparecer aquí, pues

$$de_\mu = e_\alpha \otimes \omega^\alpha_\mu \quad (4.208)$$

La derivada exterior del campo X puede expresarse como

$$dX = (e_\nu(X^\mu) + X^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu) e_\mu \otimes \theta^\nu + X^\mu e_\mu \otimes \theta^\nu. \quad (4.209)$$

Considérese tener cuidado al expresarla ya que debemos respetar el orden de la base, es decir, el orden en el producto tensorial $e_\mu \otimes \theta^\nu$.

El producto cuña se define análogamente entre formas y formas vectoriales, al igual que podemos establecer la diferenciación de un producto cuña, es decir,

$$d(T \wedge S) = dT \wedge S + (-1)^p T \wedge dS, \quad (4.210)$$

donde $T \in \Lambda^p(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ y $S \in \Lambda^q(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$. Si $T \in \Lambda^0(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ el producto cuña es reemplazado por el producto tensorial. Así, si $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ entonces

$$d(v \otimes S) = dv \wedge S + v \otimes dS. \quad (4.211)$$

Podemos también definir la métrica entre un vector y una k -forma vectorial contrayendo con g .

Definición 4.4.5 (Producto escalar entre campos vectoriales y formas vectoriales). Sean $u \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial y $v \in \Lambda^k(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ una k -forma vectorial. Definimos el producto escalar entre estos dos elementos en una base local como la k -forma

$$g(u, v) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_k}. \quad (4.212)$$

Recordemos de la definición de derivada exterior que si $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ y $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, entonces

$$d\alpha(u, v) \stackrel{(3.155)}{=} u(\alpha(v)) - v(\alpha(u)) - \alpha([u, v]), \quad (4.213)$$

en particular, para los elementos de la base tenemos que

$$d\theta^\alpha(e_\mu, e_\nu) = -\theta^\alpha([e_\mu, e_\nu]) = -c_{\mu\nu}^\alpha. \quad (4.214)$$

Así, llegamos a

$$d\theta^\alpha = -c_{\mu\nu}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu. \quad (4.215)$$

Esta ecuación también se puede expresar como

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2} c_{\mu\nu}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu, \quad (4.216)$$

si realizamos las sumas con repeticiones.

Regresemos ahora al tensor de torsión,

$$T = \frac{1}{2} T^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu, \quad (4.217)$$

consideramos las sumas con repetición puesto que hay un índice (el relativo al producto tensorial) que se está sumando de esta manera, por lo que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - c_{\mu\nu}^\alpha) e_\alpha \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu \\ &= e_\alpha \otimes \left(\frac{1}{2} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu + d\theta^\alpha \right) \\ &= e_\alpha \otimes \left(d\theta^\alpha + \frac{1}{2} \omega_{\nu}^\alpha \wedge \theta^\nu + \frac{1}{2} \omega_{\mu}^\alpha \wedge \theta^\mu \right) \\ &= e_\alpha \otimes (d\theta^\alpha + \omega_{\nu}^\alpha \wedge \theta^\nu), \end{aligned} \quad (4.218)$$

de donde

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega_{\nu}^\alpha \wedge \theta^\nu. \quad (4.219)$$

Esta ecuación es conocida como la “primer ecuación de estructura de Cartan”. Notemos que el tensor T puede ser entendido, escrito de esta manera, como una 2-forma vectorial. Esto nos lleva a pensar en una derivación que nos lleve del espacio de k -formas con valores vectoriales al de las $k + 1$ -formas valuadas en el mismo espacio vectorial.

Definición 4.4.6 (Derivada exterior covariante (local)). Sea $v \in \Lambda^k(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ una k -forma vectorial expresada como

$$V = e_\mu \otimes V^\mu_{\nu_1 \dots \nu_k} \theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_k} = e_\mu \otimes V^\mu, \quad (4.220)$$

donde los coeficientes $V^\mu_{\nu_1 \dots \nu_k} \theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_k} = V^\mu$ son k -formas escalares. Definimos la “derivada exterior covariante de v ”²⁰, denotada como Dv mediante la ecuación [17]

$$e_\mu \otimes Dv^\mu = dv. \quad (4.221)$$

Observación. Notemos que para una 0-forma vectorial $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tenemos que

$$e_\mu \otimes Dv^\mu = dv = v^\mu{}_{;\nu} e_\mu \otimes \theta^\nu = e_\mu \otimes (v^\mu{}_{;\nu} \theta^\nu), \quad (4.222)$$

de donde

$$Dv^\mu = v^\mu{}_{;\nu} \theta^\nu = dv^\mu + \omega^\mu{}_\nu v^\nu. \quad (4.223)$$

Consideremos ahora una k -forma vectorial $V \in \Lambda^k(\mathcal{M}, \mathfrak{X}(\mathcal{M}))$. Entonces

$$\begin{aligned} e_\mu \otimes DV^\mu &= d(e_\mu \otimes V^\mu) = de_\mu \wedge V^\mu + e_\mu \otimes dV^\mu \\ &= e_\nu \otimes \omega^\nu{}_\mu \wedge V^\mu + e_\mu \otimes dV^\mu \\ &= e_\mu \otimes (dV^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge V^\nu), \end{aligned} \quad (4.224)$$

es decir,

$$DV^\mu = dV^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge V^\nu. \quad (4.225)$$

En particular, si estas 1-formas son la base de formas $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^n$, tenemos que

$$D\theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = \Theta^\mu. \quad (4.226)$$

Para una conexión métrica tenemos entonces que se cumple

$$D\theta^\mu = 0. \quad (4.227)$$

²⁰Abordaremos este concepto de manera formal más adelante, pues requerimos la teoría de conexiones sobre los haces fibrados. Véase (5.2.5), en particular (5.2.13). Para esta sección nos basta con esta primer propuesta que descansa sobre las expresiones locales.

Transformación de la conexión

Tomemos ahora un cambio de marco, siendo una transformación

$$e_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} e_{\nu}, \quad (4.228)$$

para el marco $\{e_{\mu'}\}_{\mu'=1}^n$. Tenemos entonces que en ese sistema

$$\begin{aligned} \nabla e_{\mu'} &= \nabla (e_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu}) = \nabla e_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} + e_{\mu} \otimes d\Lambda_{\mu'}^{\mu} = e_{\alpha} \otimes \omega^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} + e_{\alpha} \otimes d\Lambda_{\mu'}^{\alpha} \\ &= e_{\alpha} \otimes (\omega^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} + d\Lambda_{\mu'}^{\alpha}), \end{aligned} \quad (4.229)$$

pero también

$$\nabla e_{\mu'} = e_{\alpha'} \otimes \omega^{\alpha'}_{\mu'} = e_{\alpha} \otimes (\Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \omega^{\alpha'}_{\mu'}), \quad (4.230)$$

de donde

$$\Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \omega^{\alpha'}_{\mu'} = \omega^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} + d\Lambda_{\mu'}^{\alpha}. \quad (4.231)$$

Contrayendo con $(\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\nu'}$ tenemos que

$$\omega^{\nu'}_{\mu'} = (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\nu'} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \omega^{\alpha'}_{\mu'} = (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\nu'} \omega^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} + (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\nu'} d\Lambda_{\mu'}^{\alpha}. \quad (4.232)$$

Lo cual simbólicamente suele escribirse como

$$\omega' = \Lambda^{-1} \omega \Lambda + \Lambda^{-1} d\Lambda, \quad (4.233)$$

y establece la regla de transformación para las 1-formas de conexión²¹ [19].

Notemos que la forma ω no transforma de acuerdo a la regla general tensorial. Esto es debido a que es, de hecho, una “forma pseudo-tensorial”, que *grosso modo* depende de la representación que se use para su expresión local, con lo que el término extra vendría a ser la manera en que afecta esta representación al cambiar de una expresión en un abierto a otro.

4.4.3. Curvatura

Habiendo ya introducido la torsión podemos considerar la forma en que los vectores cambian ante el transporte paralelo no en una dirección sino en dos de ellas, de forma que podemos evaluar cuándo este segundo transporte cambia dependiendo de la dirección seleccionada. Así como la torsión mide la torcedura del espacio debida al desplazamiento ante el transporte paralelo podemos introducir la «curvatura» como una manera de medir cuanto un vector cambia ante el transporte paralelo en un circuito cerrado. Es decir, sean $u, v, w \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ podemos considerar la diferencia

$$\nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w, \quad (4.234)$$

²¹En distintas fuentes esta regla suele escribirse como

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}$$

La elección de la transformación Λ y Λ^{-1} es arbitraria, por lo que es equivalente a (4.233)

que nos mide justamente cómo cambia el vector w ante el transporte en un sentido y en otro. Este resultado no significa completamente la curvatura puesto que debemos eliminar la contribución debida al conmutado, pero esta contribución está en el transporte paralelo, por lo que podemos considerar el operador $\nabla_{[u,v]}$.

Definición 4.4.7 (Operador de curvatura). Sean $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Definimos el *operador de curvatura* como

$$\rho(u, v) := \nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u,v]}. \quad (4.235)$$

Con ello, y análogo a la torsión, podemos definir el tensor asociado a este operador conocido como “tensor de curvatura de Riemann” (o simplemente “tensor de Riemann”):

$$\begin{aligned} R : \Lambda^1(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}), \\ (\alpha; u, v, w) &\mapsto \alpha(\rho(u, v)w). \end{aligned} \quad (4.236)$$

Para calcular sus componentes notemos primero que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \stackrel{(4.235)}{=} R(\theta^\alpha; e_\beta, e_\mu, e_\nu) = \theta^\alpha[\rho(e_\mu, e_\nu)e_\beta], \quad (4.237)$$

donde

$$\rho(e_\mu, e_\nu) = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_{[e_\mu, e_\nu]}, \quad (4.238)$$

además nos será útil recordar

$$[e_\mu, e_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda. \quad (4.239)$$

Ahora bien, tenemos

$$\begin{aligned} \rho(e_\mu, e_\nu)e_\beta &= \nabla_\mu \nabla_\nu e_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\beta - c_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda e_\beta \\ &= \nabla_\mu (\Gamma_{\beta\nu}^\alpha e_\alpha) - \nabla_\nu (\Gamma_{\beta\mu}^\alpha e_\alpha) - c_{\mu\nu}^\lambda (\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha e_\alpha) \\ &= [e_\mu (\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha] e_\alpha - [e_\nu (\Gamma_{\beta\mu}^\alpha) + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha] e_\alpha - c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha e_\alpha \\ &= [\Gamma_{\beta\nu, \mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu, \nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha] e_\alpha, \end{aligned} \quad (4.240)$$

con lo que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma_{\beta\nu, \mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu, \nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha. \quad (4.241)$$

La antisimetría entre los índices μ y ν implica que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\mu}. \quad (4.242)$$

y nos permite definir las “2-formas de curvatura” como [24]

$$\Omega^\alpha_{\beta} := R^\alpha_{\beta\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu. \quad (4.243)$$

que podemos tomar como $\Omega^\alpha_{\beta} = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu$ si efectuamos la suma repitiendo términos.

Consideremos ahora la derivada exterior covariante de las formas de conexión ω^α_β , de donde

$$e_\alpha \otimes D(\omega^\alpha_\beta) = d(e_\alpha \otimes \omega^\alpha_\beta) = e_\alpha \otimes (d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\lambda \wedge \omega^\lambda_\beta). \quad (4.244)$$

Si consideramos sumas con repeticiones (para estar sobre la misma convención en cuanto a la suma sobre los índices del producto tensorial y cuña) podemos expresar

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha_\beta &= d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\lambda \wedge \omega^\lambda_\beta \\ &= d(\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\theta^\nu) + (\Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\theta^\nu) \wedge (\Gamma^\lambda_{\beta\mu}\theta^\mu) \\ &= \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}d\theta^\nu + \Gamma^\lambda_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu \\ &= \left(\Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\lambda_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}c^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} \right) \theta^\mu \wedge \theta^\nu \\ &= \frac{1}{2}R^\alpha_{\beta[\mu\nu]}\theta^\mu \wedge \theta^\nu \\ &= \Omega^\alpha_\beta, \end{aligned} \quad (4.245)$$

La relación

$$D\omega^\alpha_\beta = \Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\lambda \wedge \omega^\lambda_\beta, \quad (4.246)$$

es conocida como la “segunda ecuación de estructura de Cartan”.

Transformación de la curvatura

Tomemos ahora una transformación de marco local Λ de manera que

$$e_{\mu'} = \Lambda^\mu_{\mu'} e_\mu. \quad (4.247)$$

Con el objetivo de no alargar el cálculo vamos a proceder simbólicamente, es decir, vamos a escribir $e' = \Lambda e$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= d(\Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda) + (\Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda) \\ &= d\Lambda^{-1} \wedge \omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\omega\Lambda - \Lambda^{-1}\omega \wedge d\Lambda + d\Lambda^{-1} \wedge d\Lambda \\ &\quad + (\Lambda^{-1}\omega\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}\omega\Lambda) + (\Lambda^{-1}\omega\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda) \\ &\quad + (\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}\omega\Lambda) + (\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda) \\ &= \Lambda^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)\Lambda + d\Lambda^{-1} \wedge \omega\Lambda - \Lambda^{-1}\omega \wedge d\Lambda \\ &\quad + d\Lambda^{-1} \wedge d\Lambda + (\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda) \end{aligned} \quad (4.248)$$

Sabemos además que $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$, por lo que

$$d\Lambda^{-1}\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda = 0 \quad \implies \quad d\Lambda^{-1} = -\Lambda^{-1}d\Lambda\Lambda^{-1}. \quad (4.249)$$

Así,

$$\begin{aligned}
d\Lambda^{-1} \wedge \omega\Lambda - \Lambda^{-1}\omega \wedge d\Lambda &= -(\Lambda^{-1}d\Lambda\Lambda^{-1}) \wedge \omega\Lambda - \Lambda^{-1}\omega \wedge d\Lambda \\
&= \Lambda^{-1}(-\omega \wedge d\Lambda - d\Lambda\Lambda^{-1} \wedge \omega\Lambda) \\
&= \Lambda^{-1}(-\omega \wedge d\Lambda [\Lambda^{-1}\Lambda] - d\Lambda\Lambda^{-1} \wedge \omega\Lambda) \\
&= \Lambda^{-1}(-\omega \wedge d\Lambda\Lambda^{-1} - d\Lambda\Lambda^{-1} \wedge \omega) \Lambda \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.250}$$

Mientras que

$$d\Lambda^{-1} \wedge d\Lambda = -(\Lambda^{-1}d\Lambda\Lambda^{-1}) \wedge d\Lambda = -(\Lambda^{-1}d\Lambda) \wedge (\Lambda^{-1}d\Lambda). \tag{4.251}$$

Sustituyendo (4.250) y (4.251) en (4.248) llegamos a que

$$\Omega' = \Lambda^{-1}\Omega\Lambda, \tag{4.252}$$

que es la misma regla de transformación de una transformación lineal²². Por lo que es, en efecto, una forma tensorial, a diferencia de la conexión [19] [25] [14].

Identidades de Bianchi

Consideremos ahora la diferenciación de las formas de torsión

$$\begin{aligned}
D\Theta^\alpha &= d\Theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Theta^\mu \\
&= d(d\theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta) + \omega^\alpha{}_\mu \wedge (d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\beta \wedge \theta^\beta) \\
&= d^2\theta^\alpha + d(\omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta) + \omega^\alpha{}_\mu \wedge d\theta^\mu + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta \wedge \theta^\beta \\
&= d\omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta - \omega^\alpha{}_\beta \wedge d\theta^\beta + \omega^\alpha{}_\beta \wedge d\theta^\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta \wedge \theta^\beta \\
&= (d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta) \wedge \theta^\beta,
\end{aligned} \tag{4.253}$$

con lo que obtenemos la “primera identidad de Bianchi”:

$$D\Theta^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta. \tag{4.254}$$

Cuando la torsión se anula, esta relación queda como

$$\Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu \wedge \theta^\beta = R^\alpha{}_{[\beta\mu\nu]}\theta^\mu \wedge \theta^\nu \wedge \theta^\beta = 0, \tag{4.255}$$

es decir,

$$R^\alpha{}_{[\beta\mu\nu]} = 0, \tag{4.256}$$

que expandiendo términos podemos expresar como

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0. \tag{4.257}$$

²²De igual forma que con la regla de transformación de la conexión, la transformación de la curvatura suele encontrarse como

$$\Omega' = \Lambda\Omega\Lambda^{-1},$$

que de igual forma es equivalente a la anterior.

Definición 4.4.8. Definimos el “tensor de Ricci” como la traza del tensor de Riemann. Es decir, el tensor $R \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$ cuyas componentes son

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\mu\alpha\nu}. \quad (4.258)$$

Así mismo, definimos el “escalar de Ricci” como la traza del tensor de Ricci:

$$R = R^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (4.259)$$

Observación. Bajando el índice α en las componentes del tensor de Riemann, tomamos el intercambio entre los índices α y β , es decir,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &\stackrel{(4.241)}{=} \Gamma_{\alpha\beta\nu,\mu} - \Gamma_{\alpha\beta\mu,\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda\mu} - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda\nu} - c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta\lambda} \\ &= -\Gamma_{\beta\alpha\nu,\mu} + \Gamma_{\beta\alpha\mu,\nu} + g^{\lambda\iota} (\Gamma_{\iota\beta\nu} \Gamma_{\alpha\lambda\mu} - \Gamma_{\iota\beta\mu} \Gamma_{\alpha\lambda\nu}) + c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \\ &= -\Gamma_{\beta\alpha\nu,\mu} + \Gamma_{\beta\alpha\mu,\nu} - g^{\lambda\iota} (\Gamma_{\iota\beta\mu} \Gamma_{\alpha\lambda\nu} - \Gamma_{\iota\beta\nu} \Gamma_{\alpha\lambda\mu}) + c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \\ &= -\Gamma_{\beta\alpha\nu,\mu} + \Gamma_{\beta\alpha\mu,\nu} - g^{\lambda\iota} (\Gamma_{\lambda\alpha\nu} \Gamma_{\beta\iota\mu} - \Gamma_{\lambda\alpha\mu} \Gamma_{\beta\iota\nu}) + c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \\ &= - \left(\Gamma_{\beta\alpha\nu,\mu} - \Gamma_{\beta\alpha\mu,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\iota \Gamma_{\beta\iota\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\iota \Gamma_{\beta\iota\nu} - c_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.260)$$

Es decir,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (4.261)$$

A partir de ahora (por el resto del capítulo) vamos a suponer que la conexión es compatible con la métrica. Consideremos ahora la derivada de las formas de curvatura $D\Omega^\alpha{}_\beta$ mediante

$$dR = d(e_\alpha \otimes R^\alpha{}_{\beta\nu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu \wedge \theta^\beta) = d(e_\alpha \otimes \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta) = e_\alpha \otimes D\Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta. \quad (4.262)$$

Para una conexión compatible con la métrica los coeficientes de estructura se expresan como $c_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, por lo que

$$d\theta^\alpha = -(\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \theta^\mu \wedge \theta^\nu = -\Gamma_{[\nu\mu]}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu = -\omega^\alpha{}_\nu \wedge \theta^\nu. \quad (4.263)$$

Con ello expresamos

$$\begin{aligned} d(e_\alpha \otimes \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta) &= de_\alpha \wedge \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta + e_\alpha \otimes d\Omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta + e_\alpha \otimes \Omega^\alpha{}_\beta \wedge d\theta^\beta \\ &= e_\alpha \otimes [(\omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta + d\Omega^\alpha{}_\beta) \wedge \theta^\beta + \Omega^\alpha{}_\beta \wedge (-\omega^\beta{}_\mu \wedge \theta^\mu)] \\ &= e_\alpha \otimes (d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta - \Omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta) \wedge \theta^\beta, \end{aligned} \quad (4.264)$$

siendo así

$$\Omega^\alpha{}_\beta \stackrel{(4.262)}{=} d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta - \Omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta. \quad (4.265)$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta &= d(d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta) + \omega^\alpha{}_\mu \wedge (d\omega^\mu{}_\beta + \omega^\mu{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta) \\ &= d^2\omega^\alpha{}_\beta + d\omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge d\omega^\lambda{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge d\omega^\mu{}_\beta \\ &\quad + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta \\ &= (d\omega^\alpha{}_\lambda + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\lambda) \wedge \omega^\lambda{}_\beta \\ &= \Omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta, \end{aligned} \quad (4.266)$$

por lo tanto,

$$D\Omega^\alpha{}_\beta \stackrel{(4.265)}{=} d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta - \Omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta = 0. \quad (4.267)$$

Esta ecuación es conocida como la “segunda identidad de Bianchi”, y en términos de sus componentes podemos escribir

$$\begin{aligned} d\Omega^\alpha{}_\beta &= dR^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \wedge \theta^\mu \wedge \theta^\nu + R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} d\theta^\mu \wedge \theta^\nu - R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \theta^\mu \wedge d\theta^\nu \\ &= R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} \theta^\lambda \wedge \theta^\mu \wedge \theta^\nu - \Gamma^\mu{}_{\iota\lambda} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \theta^\lambda \wedge \theta^\iota \wedge \theta^\nu + \Gamma^\nu{}_{\iota\lambda} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\lambda \wedge \theta^\iota \\ &= \left(R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} - \Gamma^\iota{}_{\mu\lambda} R^\alpha{}_{\beta\iota\nu} - \Gamma^\iota{}_{\nu\lambda} R^\alpha{}_{\beta\mu\iota} \right) \theta^\lambda \wedge \theta^\mu \wedge \theta^\nu, \end{aligned} \quad (4.268)$$

también

$$\begin{aligned} \omega^\alpha{}_\mu \wedge \Omega^\mu{}_\beta - \Omega^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta &= \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} R^\mu{}_{\beta\nu} \theta^\lambda \wedge \theta^\nu - \Gamma^\mu{}_{\beta\lambda} R^\alpha{}_{\mu\nu} \theta^\lambda \wedge \theta^\nu \\ &= (\Gamma^\alpha{}_{\iota\lambda} R^\iota{}_{\beta\mu\nu} - \Gamma^\nu{}_{\beta\lambda} R^\alpha{}_{\iota\mu\nu}) \theta^\lambda \wedge \theta^\mu \wedge \theta^\nu. \end{aligned} \quad (4.269)$$

Encontramos así que

$$D\Omega^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} \theta^\mu \wedge \theta^\nu \wedge \theta^\lambda = R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\lambda]} \theta^\mu \wedge \theta^\nu \wedge \theta^\lambda = 0, \quad (4.270)$$

que también podemos expresar como

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (4.271)$$

Esta misma ecuación es válida cuando bajamos el índice α

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (4.272)$$

si contraemos con $g^{\alpha\mu}$ obtenemos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu} \left(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} \right) &= R^\mu{}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\mu{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} \\ &= R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.273)$$

contrayendo ahora con $g^{\beta\nu}$,

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} \left(R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} \right) &= R^\nu{}_{\nu;\lambda} - R^\nu{}_{\lambda;\nu} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\beta\alpha\nu\lambda;\mu} \\ &= R_{;\lambda} - R^\nu{}_{\lambda;\nu} - g^{\alpha\mu} R_{\alpha\lambda;\mu} \\ &= R_{;\lambda} - 2R^\nu{}_{\lambda;\nu} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.274)$$

Esto último se puede reescribir como

$$R^\nu{}_{\lambda;\nu} - \frac{1}{2} R_{;\lambda} = 0, \quad (4.275)$$

una última contracción con g^{λ} y dado que la conexión es métrica (es decir, la métrica es covariantemente constante) nos devuelve

$$\begin{aligned}
 g^{\lambda} \left(R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} - \frac{1}{2} R_{;\lambda} \right) &= g^{\lambda} R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} - \frac{1}{2} g^{\lambda} R_{;\lambda} \\
 &= (g^{\lambda} R^{\nu}{}_{\lambda})_{;\nu} - \frac{1}{2} (g^{\lambda} R)_{;\lambda} \\
 &= R^{\nu}{}_{;\nu} - \left(\frac{1}{2} g^{\lambda} R \right)_{;\lambda} \\
 &= \left(R^{\lambda}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} g^{\lambda} R \right)_{;\lambda} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.276}$$

Definimos al “tensor de curvatura de Einstein” (o simplemente “tensor de Einstein”) como

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \tag{4.277}$$

Tenemos entonces que $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$, esta propiedad es importante para nuestra construcción posterior ya que contiene información geométrica relevante para la descripción de un sistema que pueda ser descrito a partir de los métodos geométricos que acabamos de construir. En particular, para la relatividad general este tensor nos permite estudiar lo que ocurre con la geometría del espacio al someterlo a una distribución de materia y energía [12].

5 Haces fibrados y grupos de Lie

«Los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo.»

Ludwig Wittgenstein

Describir simetrías en física es fundamental, muchos de los principales resultados se derivan de ellas, tales como ecuaciones de movimiento o leyes de conservación. Una simetría puede estar asociada a un objeto en concreto que existe en el espacio o sus características. Así, vamos a encontrar muchas situaciones en las que los campos llevan índices, cuya función es expresar las propiedades de estas estructuras. Así que podemos preguntarnos cuándo las simetrías de un sistema pueden formar una variedad diferencial; en particular, podemos buscar un grupo de transformaciones bajo las cuales permanece invariante. Para tratar apropiadamente este concepto con el objetivo que nos proponemos la idea clave es la de “grupo de Lie” que, en efecto, es justamente un grupo en el sentido usual algebraico y al mismo tiempo una variedad diferencial. Para hacer estas definiciones compatibles necesitamos que las operaciones en el grupo sean suaves. A pesar de ello, en diversas situaciones se suele preferir a las “álgebras de Lie”, que guardan íntima relación con los objetos antes mencionados. Ambos juegan un papel muy importante tanto en las matemáticas como en la física: la cuantización canónica en el formalismo de las teorías de norma ha tenido gran éxito al vislumbrar el modelo estándar de partículas elementales que exhibe las simetrías de las fuerzas fundamentales (a excepción de la gravedad) con la existencia de los campos que intervienen en su interacción. Este es solo uno de los muchos ejemplos que se encuentran en la naturaleza y muestra el alcance de sus aplicaciones.

En cuanto a la descripción de los fenómenos físicos tanto el espacio como las simetrías pueden representarse por medio de variedades diferenciales, así como algunas de sus propiedades (geométricas y topológicas) tendrán correspondencia con el mundo natural. Nos es lícito pensar en los espacios que se construyen entonces como el producto de estos dos objetos, es decir, cargar en cada punto con la información de la simetría correspondiente. El concepto que generaliza esta idea son los haces principales, que han jugado un papel esencial en situaciones donde la distinción entre los aspectos locales y globales son importantes. En general, podemos abarcar mayor terreno con las generalizaciones adecuadas y el área que más se ha hecho de ellas son las teorías de norma, incluso bajo la relatividad general puede entenderse desde el

panorama de estos formalismos¹.

Así mismo, es interesante estudiar las características propias de estos espacios que permanecen invariantes ante una conexión o curvatura, por lo que regresaremos brevemente a las propiedades topológicas. Los invariantes o «características» topológicas que buscamos se pueden expresar por medio de la curvatura, así que repasaremos la idea de una conexión sobre los haces principales. Estas propiedades invariantes también juegan un papel importante en la cuantización que buscamos construir, de hecho, será el eje de nuestros cálculos posteriores. Con esto vamos a concluir la parte introductoria, referida a las herramientas matemáticas de este trabajo.

¹Estrictamente la relatividad general no es una teoría de norma a nivel de la acción [25].

5.1. Grupos de Lie

Es de nuestro interés dar un panorama general de los grupos de Lie, así como sus álgebras, antes de entrar de lleno al estudio de los haces fibrados. Comencemos entonces, como es costumbre, por las definiciones básicas.

5.1.1. Grupos matriciales y de Lie

Recordemos primeramente el concepto de grupo, que consiste de un conjunto dotado de un producto cerrado y asociativo, en el que además existen el elemento unidad.

Definición 5.1.1 (Grupo topológico). Un *grupo topológico* X es un grupo con estructura de espacio topológico.

Con esto en mente nos adentramos a asignarle una estructura diferencial.

Definición 5.1.2 (Grupo de Lie). Un *grupo real de Lie*, G , es un grupo y una variedad diferencial donde el producto entre elementos del grupo e inversa son operaciones suaves. Es decir,

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

y

$$\begin{aligned} \iota : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

son ambos $C^\infty(G)$.

Observación. Todos los grupos de Lie son grupos topológicos, mientras que la aseveración contraria no es necesariamente cierta.

Definición 5.1.3 (Subgrupo). Un *subgrupo* de un grupo de Lie G es un subconjunto H de G que es un subgrupo en el sentido algebraico, una subvariedad diferencial de G y un grupo topológico con respecto a la topología del subespacio.

En ocasiones el producto de un grupo también recibe el nombre “ley del grupo G ”. Si este es conmutativo decimos que el grupo es “abeliano”, en caso contrario lo llamamos “no-abeliano”. En cuanto a ello es importante considerar el orden en el producto, dado que esto nos lleva a otro elemento en el grupo se puede entender como una «traslación».

Definición 5.1.4 (Traslaciones). Las *traslaciones derecha* e *izquierda* de G son difeomorfismos de G etiquetados por elementos $g \in G$ y definidos como

$$\begin{aligned} r_g : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto ag \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} l_g : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto ga \end{aligned}$$

respectivamente.

Un ejemplo clásico de un grupo de Lie es el círculo unitario, que escribimos como $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Este puede establecerse como un grupo real unidimensional gracias a la estructura diferencial usual, definiendo el producto del grupo como la multiplicación compleja en \mathbb{C} . Este usualmente se denota como $U(1)$ y se puede generalizar a $U(n)$, para hacer esto primero consideraremos otro par de ejemplos.

Denotamos por $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{F} . Acomodamos las componentes de una matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ como A_j^i , donde i denota el número del renglón ($i = 1, \dots, n$) y j , el de columna ($j = 1, \dots, m$), por lo que esta matriz se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_m^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_m^n \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Definición 5.1.5 (Matriz transpuesta). Sea $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, definimos su *matriz transpuesta*, denotada como $A^t \in M_{m \times n}$, como aquella que es el resultado de intercambiar renglones por columnas y *vice versa*.

Observación. Si expresamos a A como en (5.3) con entradas A_j^i , entonces A^t explícitamente se escribe

$$A^t = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_m^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_m^n \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Debido a esto hacemos la convención $(A^t)_l^k = A_k^l$. Esto es, la entrada (j, k) de A^t es la (k, j) de A .

Consideremos ahora las matrices $A \in M_{n \times m}$ y $B \in M_{r \times s}$. Al igual que es posible definir un «producto» entre vectores en \mathbb{R}^n , es posible formular uno para el espacio de

las matrices. La diferencia principal es que este producto no devuelve un número real, sino otra matriz. Para tratarlo nos hacemos de las componentes de ambas matrices, dadas por A_j^i y B_l^k respectivamente, donde los índices i, j, k, l corren de 1 a n, m, r y s según sea el caso. Primero vamos a pedir que $j = k$, con esto podemos considerar a la matriz AB como aquella cuyas componentes se expresan como

$$(AB)_l^i := \sum_{j=1}^m A_j^i B_l^j \equiv \sum_{k=1}^m A_k^i B_l^k. \quad (5.5)$$

Esto quiere decir que el número de renglones de B debe ser el mismo que el de columnas de A para que la multiplicación esté bien definida.

Definición 5.1.6 (Producto de matrices). Sean $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m \times r}$, definimos el *producto* $AB \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$ como la matriz con las componentes dadas por

$$(AB)_j^i = \sum_{k=1}^m A_k^i B_j^k. \quad (5.6)$$

Observación. En general, $AB \neq BA$.

Introducimos ahora al “grupo lineal general real” (el complejo es análogo) en n dimensiones definido como

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}, \quad (5.7)$$

o lo que es lo mismo, el subconjunto de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en los reales. No olvidemos que el conjunto $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es isomorfo al espacio \mathbb{R}^{n^2} , por lo que podemos asociarle su topología natural, aún más, una estructura diferencial.

Observación. Recordemos que $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua; $\det^{-1}(0)$ es un subconjunto cerrado de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, pues $\{0\}$ es cerrado en \mathbb{R} . Como el subconjunto $GL(n, \mathbb{R})$ es su complemento, entonces es abierto. Es así como estas dos componentes adquieren una estructura diferencial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, y es a partir de esto que adquiere la estructura de grupo de Lie. Empero $GL(n, \mathbb{R})$ es abierto en \mathbb{R}^{n^2} , entonces es un espacio topológico no compacto, este se puede descomponer en dos componentes disjuntas según el determinante de la matriz sea mayor o menor a cero.

A pesar de la observación anterior, el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ sí es localmente compacto. Esto conlleva algunas importantes aplicaciones dentro de la teoría de grupos. Un ejemplo de ello es la medida de Haar. Uno de los principales problemas de los grupos que no son localmente compactos es que no poseen esta medida. Ello se representa serias dificultades en la cuantización de los sistemas físicos que poseen tales grupos. Un ejemplo de ello es la gravedad cuántica y el papel del grupo de difeomorfismos espaciotemporales (o espaciales) de dimensión infinita [1].

La “componente conexa” de $GL(n, \mathbb{R})$ (aquella que contiene al elemento unitario, $\mathbb{1}$) denotada como

$$GL(n, \mathbb{R})^+ := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}, \quad (5.8)$$

es un grupo de Lie localmente compacto (aunque no globalmente) de dimensión n^2 . Esto es gracias a que es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$:

- $\mathbb{1} \in GL(n, \mathbb{R})^+$ (pues $\det(\mathbb{1}) = 1$),
- si $A, B \in GL(n, \mathbb{R})^+$, entonces $AB \in GL(n, \mathbb{R})^+$ (dado que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$),
- si $A \in GL(n, \mathbb{R})^+$, $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})^+$ (de $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$).

Es importante enfatizar otro subgrupo del grupo lineal general, que además es una restricción más específica del anterior. Definimos al “grupo lineal especial” como

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}. \quad (5.9)$$

En efecto, este también es localmente compacto y un subgrupo (no compacto) de $GL(n, \mathbb{R})$. Algo importante a destacar es que la dimensión de este subgrupo es $n^2 - 1$.

Los grupos de Lie juegan un papel importante dentro la física teórica gracias a que con ellos es posible describir las simetrías, tanto del sistema que se analiza como de la teoría misma. Una introducción a las simetrías físicas implica un repaso de estos grupos. A continuación se estudiará uno en particular.

5.1.2. El grupo ortogonal

En la mecánica clásica, el grupo de rotaciones y traslaciones de un sistema en el espacio tridimensional forma un grupo de Lie, denominado “grupo ortonormal” (esto es debido a que preservan distancias y ángulos relativos; o sea, los sistemas ortonormales lo siguen siendo ante estas transformaciones). Así, para el estudio de las simetrías en la mecánica clásica el grupo ortonormal tiene un papel central. Estas se definen básicamente como el conjunto de matrices $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tales que $A^t = A^{-1}$, o lo que es lo mismo

$$AA^t = \mathbb{1}. \quad (5.10)$$

De aquí tenemos que, por definición, son invertibles.

Observación. El conjunto de matrices ortonormales con coeficientes en los reales, que denotamos como $O(n, \mathbb{R})$, forma un grupo. Para exhibir esto notemos lo siguiente:

- $\mathbb{1}\mathbb{1}^t = \mathbb{1}$, de donde $\mathbb{1} \in O(n, \mathbb{R})$;
- para $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, $AB(AB)^t = ABB^tA^t = A\mathbb{1}A^t = \mathbb{1}$, entonces $AB \in O(n, \mathbb{R})$;
- como $AA^t = AA^{-1} = A^{-1}A = A^{-1}(A^t)^t = A^{-1}(A^{-1})^t = \mathbb{1}$, por lo que $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

El conjunto $O(n, \mathbb{R})$ es justamente el grupo ortonormal al que nos referimos anteriormente. En adelante vamos a obviar el hecho de ser un espacio sobre los reales, escribiéndolo simplemente como $O(n)$.

Definición 5.1.7 (Grupo ortonormal). El *grupo ortonormal (real)* es el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ definido como

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = \mathbb{1}\}. \quad (5.11)$$

En términos de los elementos de la matriz A , denotados como A_j^i , la condición (5.10) se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^n A_k^i A_k^j = \delta_j^i, \quad (5.12)$$

Aprovechando que δ_{ij} forma una matriz simétrica, de las n^2 ecuaciones, únicamente las de la diagonal superior (o inferior) junto con la diagonal serán linealmente independientes. Esto es, tendremos $\frac{1}{2}n(n+1)$ ecuaciones independientes, que se pueden interpretar como constricciones asociadas a los elementos de la matriz. Esto último junto con el hecho de que $\dim(GL(n, \mathbb{R})) = n^2$ sugieren que $O(n)$ es una subvariedad de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Teorema 5.1.1. *El grupo ortonormal es una variedad compacta.*

Demostración. Definimos $GL^2(n, \mathbb{R}) := GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ y las relaciones

$$\begin{aligned} T : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}), & \mu : GL^2(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \\ A &\mapsto A^t, & (A, B) &\mapsto AB, \end{aligned} \quad (5.13)$$

que son la operación transpuesta y la multiplicación, respectivamente. Consideremos la serie de mapeos

$$\begin{array}{ccccccc} GL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\Delta} & GL^2(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathbb{1} \times T} & GL^2(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\mu} & GL(n, \mathbb{R}), \\ A & \mapsto & (A, A) & \mapsto & (A, A^t) & \mapsto & AA^t. \end{array} \quad (5.14)$$

Notemos que la función

$$\begin{aligned} \rho : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \\ A &\mapsto AA^t, \\ O(n) &\ni A \mapsto \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

definida como $\rho := \mu \circ (\mathbb{1} \times T) \circ \Delta$ es continuo. Esta función envía cada elemento de $O(n)$ a la identidad continuamente, así podemos ver que $O(n) = \rho^{-1}(\mathbb{1})$. Como la imagen inversa de un cerrado es un conjunto cerrado bajo la acción de una función continua, concluimos que $O(n)$ es una subvariedad cerrada.

Por otro lado, de (5.12) tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_j^i)^2 = n, \quad \forall A \in O(n). \quad (5.16)$$

Así, el grupo ortonormal es un suconjunto de la esfera $\mathbb{S}^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$, por lo que está acotado. Por el teorema de Heine-Borel se sigue que, como $O(n)$ es cerrado y acotado, es compacto. QED

Es útil notar que la condición (5.10) implica que $(\det A)^2 = 1$, de donde $\det A = \pm 1$. Al subconjunto formado por las matrices que satisfacen $\det A = 1$ recibe el nombre “grupo ortonormal especial” y es denotado por $SO(n)$. Cabe mencionar que es cerrado y también de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$.

El grupo ortonormal tiene una importante generalización íntimamente relacionada con la métrica del espacio, recordemos pues a la matriz de (4.79) dada por

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{p \text{ argumentos}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q \text{ argumentos}}), \quad p + q = n. \quad (5.17)$$

Hablamos someramente de ella el capítulo pasado (véase sección (4.1.6)), en donde vimos las matrices Λ que satisfacen

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (5.18)$$

forman el grupo semiortonormal $O(p, q)$, a partir del cual podemos construir el grupo especial semi-ortonormal $SO(p, q)$. El caso particular en que $p = 1$ y el elemento $\Lambda_0^0 > 0$ es conocido como el “grupo de Lorentz”, denotado como $SO(1, q)$. En particular, el grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ es esencial en la relatividad general y la teoría cuántica de campos.

Tanto $O(n)$ como $SO(n)$ juegan un papel importante dentro de las simetrías en la mecánica clásica, ya que se vinculan con las simetrías bajo rotaciones. En muchas situaciones, algunas dentro de la física, es más conveniente trabajar con el “álgebra” asociada que se vincula al grupo de simetrías de un sistema.

5.1.3. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

En adelante denotaremos como G a un grupo de Lie.

Nos interesa ahora llevar estas traslaciones a los vectores tangentes, es decir, a una noción de multiplicación en el espacio tangente $T_p G$ en un punto $p \in G$ derivada de estas propiedades del grupo. Para eso debemos notar que, para un elemento $B \in G$ fijo, la traslación l_A (por cualquier elemento $A \in G$) puede verse como un mapeo $l_A : G \rightarrow G$, y ya sabemos cómo mapear vectores tangentes de una variedad a otra por medio de estas funciones entre variedades.

Definición 5.1.8 (Traslaciones). Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$, definimos la *traslación izquierda* de X por un elemento $A \in G$ como $(l_A)_* X$.

La “traslación derecha” se define análogamente, pero usando para ello r_A .

Los campos vectoriales en los que nos vamos a concentrar ahora son los que no cambian ante estas traslaciones en el espacio tangente.

Definición 5.1.9 (Campos vectoriales invariantes). Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante por la izquierda* si es invariante ante traslaciones izquierdas l_A para toda $A \in G$. Es decir,

$$l_{A*}X = X, \quad \forall A \in G. \quad (5.19)$$

O equivalentemente

$$l_{A*}(X_B) = X_{AB}, \quad \forall A, B \in G. \quad (5.20)$$

Y de la misma forma, X es *invariante por la derecha* si es invariante ante todas las traslaciones derechas $(r_A)_*$.

Al conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda lo denotaremos como $L(G)$.

Observación. Ambos tipos de traslaciones (tanto derechas como izquierdas) se pueden tratar en términos del empuje del campo (por medio de $(l_A)_*$ y $(r_A)_*$). Así, un campo vectorial invariante por la izquierda es aquel que está l_A -relacionado consigo mismo para toda $A \in G$ (análogamente para los invariantes por la derecha.) de donde se puede seguir que los campos vectoriales invariantes son siempre diferenciables [1]. En adelante trataremos con las traslaciones izquierdas, pero no debemos olvidar que los conceptos y resultados principales se cumplen de igual forma para las derechas, a menos que se diga lo contrario.

Ahora bien, nos centraremos en el estudio del conjunto $L(G)$, para ello es útil recordar que el conmutador $[X, Y]$ de cualesquiera dos campos vectoriales en \mathcal{M} está h -relacionado con $[X', Y']$ (donde $X', Y' \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$) si X y Y lo están con X' y Y' respectivamente, para $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. En particular, si $\mathcal{M} = \mathcal{N} = G$ y X y Y son invariantes por la izquierda, entonces

$$l_{A*}[X, Y] = [l_{A*}X, l_{A*}Y] = [X, Y] \quad \forall A \in G, \quad (5.21)$$

es decir, $[X, Y] \in L(G)$. Estos comentarios tienen el objetivo de mostrar que el conjunto $L(G)$ es un espacio vectorial dotado de un producto.

Definición 5.1.10 (Álgebra de Lie). Un *álgebra de Lie* sobre un campo \mathbb{K} es un \mathbb{K} -e.v. \mathfrak{g} junto con un mapeo bilineal $[_, _] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ anticonmutativo

$$[a, a] = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \quad (5.22)$$

y que satisface la identidad de Jacobi

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{g}. \quad (5.23)$$

La operación $[_, _]$ es conocida como *corchete de Lie* (o simplemente *corchete*) [1] [26].

Definición 5.1.11 (Grupos abelianos). Un grupo de Lie se dice que es *abeliano* si su corchete es idénticamente cero.

Sea V un \mathbb{F} -e.v., definimos el “conmutador” de dos operadores lineales (sobre \mathbb{F}) $u, v : V \rightarrow V$ como

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u. \quad (5.24)$$

Se puede verificar la identidad de Jacobi en virtud que

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] &= u \circ (v \circ w - w \circ v) - (v \circ w - w \circ v) \circ u \\ &\quad + v \circ (w \circ u - u \circ w) - (w \circ u - u \circ w) \circ v \\ &\quad + w \circ (u \circ v - v \circ u) - (u \circ v - v \circ u) \circ w \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Así, el conmutador define una estructura de álgebra de Lie en el espacio de los operadores \mathbb{F} -lineales sobre V . En particular, el espacio $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ junto con el conmutador

$$[u, v] = uv - vu, \quad (5.26)$$

es un álgebra de Lie sobre \mathbb{F} de dimensión n^2 , denotada como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

Definición 5.1.12 (Subálgebra de Lie). Una *subálgebra de Lie* de un álgebra de Lie es un subespacio vectorial cerrado bajo el corchete de Lie [26].

Observación. El conjunto $L(G)$ es justamente un álgebra de Lie, donde el conmutador (5.26) cumple como dicha función bilineal. De hecho, el conjunto $\mathfrak{X}(G)$ es un álgebra de Lie, de la cual $L(G)$ se puede entender como una “sub-álgebra de Lie” de esta, bajo el mismo producto [14].

Aún queda la pregunta de cuándo hay campos vectoriales invariantes por la izquierda no-triviales en un grupo de Lie dado, así como ver varias de sus propiedades, gran parte de estas se pueden tratar bajo el resultado que se expone a continuación.

Teorema 5.1.2. *Existe un isomorfismo entre $L(G)$ y el espacio tangente $T_e G$ donde $e \in G$ es el elemento unitario en G .*

Demostración. Sean $v \in T_e G$ y $A \in G$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \iota : T_e G &\rightarrow L(G) \\ v &\mapsto L^v, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $L_A^v := l_{A*} v$ para todo $A \in G$. Notemos que $l_A \circ l_B = l_{AB}$ para cualesquiera $A, B \in G$, entonces

$$l_{B*}(L_A^v) = l_{B*}(l_{A*} v) = l_{BA*} v = L_{BA}^v. \quad (5.28)$$

Se sigue de aquí que L^v es un campo vectorial invariante por la izquierda.

Se puede ver también que ι es lineal, así, únicamente debemos mostrar que es biyectiva. Para demostrar que es inyectiva consideramos $L^v = L^u$ (con $u \in T_e G$), en particular $L_e^v = L_e^u$, por lo que

$$v = l_{e*} v = L_e^v = L_e^u = l_{e*} u = u; \quad (5.29)$$

por otro lado, sea $L \in L(G)$ definimos $v_L \in T_e G$ como $v_L := L_e$. (Observemos que $L \mapsto v_L$ es la inversa de $v \mapsto L^v$.) Tenemos que

$$l_{A*}(v_L) = l_{A*}(L_e) = L_A, \quad (5.30)$$

Así, $\iota(v_L) = L$, de donde vemos que ι es suprayectiva. QED

Corolario 5.1.2.1. *La dimensión de $L(G)$ es igual a la del espacio tangente $T_e G$ (que es igual a la del grupo G).*

Por construcción, G es de dimensión finita, se sigue de aquí que $L(G)$ es una subálgebra no-trivial de dimensión finita del álgebra de Lie de todos los campos vectoriales en G .

Sea $\dim(G) = n$ y $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ una base para $L(G) \cong T_e G$, entonces el conmutador de cualesquiera dos de estos elementos es una combinación lineal de ellos:

$$[E_\alpha, E_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, n\}, \quad (5.31)$$

para algún conjunto de números $C_{\alpha\beta}^\gamma$ conocidos como las “constantes de estructura del grupo” (o álgebra) de Lie.

Definición 5.1.13 (Mapeo adjunto). Definimos el *mapeo adjunto* $\text{Ad}_A : G \rightarrow G$ para cada $A, B \in G$ como

$$\text{Ad}_A(B) := ABA^{-1}. \quad (5.32)$$

Observación. Notemos que, para cada $A \in G$ y $v \in L(G)$,

$$(\text{Ad}_A)_* v = (r_{A^{-1}})_* v, \quad (5.33)$$

pues v es invariante por la izquierda y

$$\text{Ad}_B(A) = BAB^{-1} = l_B r_{B^{-1}} A = r_{B^{-1}} l_B A. \quad (5.34)$$

Esto también se puede escribir como

$$R_A^v = (\text{Ad}_{A^{-1}})_* L_A^v, \quad (5.35)$$

donde $R_A^v := r_{A*} v$, para cualquier $A \in G$ [1].

El álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de todas las matrices antisimétricas de tamaño $n \times n$ puede identificarse como el álgebra de Lie del grupo $O(n)$, y el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{o}(n) \rightarrow O(n)$ es la función exponencial usual. Esta álgebra en la mecánica clásica nos permite introducir rotaciones que preservan distancias. Hay muchos otros grupos de Lie que tienen importancia dentro de la física, como $U(n)$ y los grupos $SU(n)$, cuyas álgebras de Lie denotamos como $\mathfrak{u}(n)$ y $\mathfrak{su}(n)$, respectivamente.

5.1.4. Completez de campos vectoriales invariantes

Recordemos (véase definición (3.5.2)) que una curva integral $t \mapsto \sigma^X(t)$ de un campo vectorial X es completo si está definido para todo t donde $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$. Como vimos todo campo vectorial en una variedad compacta es completo, el resultado clave en la teoría de los grupos de Lie es que cada campo vectorial invariante por la izquierda en un grupo de Lie G es completo, incluso cuando G sea no-compacto. La idea que nos permite hacer esto es el producto del grupo $\mu : G \times G \rightarrow G$ e inducirlo hacia el espacio tangente, es decir, $\mu_* : T_{(A,B)}(G \times G) \rightarrow T_{AB}G$. En particular, existe un mapeo $\xi : T_{(A,B)}(G \times G) \rightarrow T_A G \oplus T_B G$ a través del cual podemos factorizar el mapeo inducido μ_* como

$$T_{(A,B)}(G \times G) \xrightarrow{\xi} T_A G \oplus T_B G \xrightarrow{\tilde{\mu}} T_{AB}G, \quad (5.36)$$

donde $\mu_* = \tilde{\mu} \circ \xi$. De (2.86) tenemos que

$$\tilde{\mu}(\alpha, \beta) = (\mu \circ i_B)_* \alpha + (\mu \circ j_A)_* \beta, \quad (5.37)$$

en donde $\alpha \in T_A G$, $\beta \in T_B G$, $i_B(C) = (C, B)$ y $j_A(C) = (A, C)$, estos dos últimos elementos de $G \times G$. Así,

$$\begin{aligned} \mu \circ i_B(C) &= \mu(C, B) = CB, \\ \mu \circ j_A(C) &= \mu(A, C) = AC, \end{aligned} \quad (5.38)$$

que puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mu \circ i_B &= r_B, \\ \mu \circ j_A &= l_A. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\mu}(\alpha, \beta) = r_{B*}(\alpha) + l_{A*}(\beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in T_A G \oplus T_B G. \quad (5.40)$$

Teorema 5.1.3. *Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo vectorial invariante por la izquierda, entonces es completo.*

Demostración. Sea $t \mapsto \sigma^X(t)$ una curva integral de X sobre $e \in G$, definido para todo $|t| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces

$$\sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma^X(s)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que } |s| < \epsilon, \quad (5.41)$$

y por tanto

$$(l_A \circ \sigma^X)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_s = l_{A*} \sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = l_{A*}(X_{\sigma^X(s)}) = X_{A\sigma^X(s)}, \quad (5.42)$$

es decir, $t \mapsto l_A \circ \sigma^X(t)$ es una curva integral de X que pasa por el punto $A \in G$. Sea $\phi_t^X(A) := A\sigma^X(t)$, entonces $t \mapsto \phi_t^X$ es un flujo local para el campo X . Esto significa que

$$\begin{aligned} \sigma^X(t_1 + t_2) &= \sigma^X(t_1)\sigma^X(t_2), \\ \implies \phi_{t_1}^X(\phi_{t_2}^X(A)) &= \phi_{t_1+t_2}^X(A) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, donde $|t_1|, |t_2| < \epsilon$ y $|t_1 + t_2| < \epsilon$. Esta ecuación se puede entender de manera que el mapeo $t \mapsto \sigma^X(t)$ es un homeomorfismo local de \mathbb{R} como grupo en el grupo de Lie G . Consideremos ahora $|t| < 2\epsilon$ y definimos

$$\sigma^X(t) := \left(\sigma^X \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2, \quad (5.44)$$

que es consistente con la definición original $|t| < \epsilon$. Este proceso puede ser iterado hasta la condición $|t| < n\epsilon$ para cualquier entero positivo n , y de ahí a la recta real. Nuestro objetivo es entonces mostrar que (5.44) en efecto es una curva integral.

Vamos a denotar por ahora

$$t \mapsto \tilde{\sigma}^X(t) = \left(\sigma^X \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2, \quad (5.45)$$

es necesario mostrar entonces que para $|s| < 2\epsilon$

$$\tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma^X(s)}. \quad (5.46)$$

Para hacer esto consideramos

$$\tilde{\sigma}^X = \mu \circ \Delta \circ \sigma^X \circ H, \quad (5.47)$$

donde

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \Delta : G &\rightarrow G \times G, \\ t &\mapsto \frac{t}{2}, & A &\mapsto (A, A). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Por lo tanto

$$\tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = \frac{1}{2} \mu_* \Delta_* \sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_{\frac{s}{2}} = \frac{1}{2} \mu_* \Delta_* \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) \stackrel{(5.36)}{=} \frac{1}{2} \tilde{\mu} \circ \xi \circ \Delta_* \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right), \quad (5.49)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s &= \frac{1}{2} \tilde{\mu} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})}, X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[r_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) + l_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Notemos que las traslaciones izquierdas y derechas conmutan, es decir, $r_A \circ l_A = l_A \circ r_A$ $\forall A \in G$, por lo que el primer término de (5.50) se expresa como

$$\left(r_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \circ l_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right)_* X_e = \left(l_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \circ r_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right)_* X_e, \quad (5.51)$$

donde además usamos que X es invariante por la izquierda. También notemos que

$$r_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X \stackrel{(5.43)}{=} l_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X, \quad (5.52)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} r_{\sigma^X(t)}_* X_e &= (r_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = (l_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \\ &= l_{\sigma^X(t)}_* X_e \\ &= X_{\sigma^X(t)}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Así,

$$l_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} = X_{[\sigma^X(\frac{s}{2})]^2}, \quad (5.54)$$

análogamente

$$r_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} = X_{[\sigma^X(\frac{s}{2})]^2}. \quad (5.55)$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{[\sigma^X(\frac{s}{2})]^2} = X_{\sigma^X(s)}, \quad (5.56)$$

que es justo lo que queríamos encontrar como extensión de la curva integral original σ^X del intervalo $|t| < \epsilon$ a $|t| < 2\epsilon$. Iterando este procedimiento encontramos que la curva integral de X puede ser extendida a todo valor de $t \in \mathbb{R}$, con lo que el campo vectorial X es completo. QED

Sea $v \in T_e G$. La curva integral $t \mapsto \sigma^{L^v}(t)$, donde

$$v = \sigma_*^{L^v} \left(\frac{d}{dt} \right)_0, \quad (5.57)$$

del campo vectorial invariante por la izquierda L^v , con $\sigma^{L^v}(0) = e$, puede ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$ como

$$t \mapsto \exp(tv) = \sigma^{L^v}(t). \quad (5.58)$$

Definición 5.1.14 (Exponencial). Definimos al *mapeo exponencial* como

$$\begin{aligned} \exp : T_e G &\rightarrow G, \\ A &\mapsto \exp(A) := \exp(tA)|_{t=1}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Se puede mostrar que, de hecho, el mapeo exponencial es un difeomorfismo local entre el espacio tangente $T_e G$ y el elemento unitario $e \in G$ en el grupo de Lie. Más aún, si en lugar de un grupo de Lie G tenemos una variedad diferencial \mathcal{M} , podemos definir de igual manera el mapeo exponencial $\exp : T_p(\mathcal{M}) \supseteq V \rightarrow U \subseteq \mathcal{M}$, donde $p \in U$. Si $u \in T_p(\mathcal{M})$, entonces $\exp(u)$ es el punto q a una unidad, según el parámetro de distancia, del punto p sobre la geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, cuyo vector tangente es $u \in T_p(\mathcal{M})$. Ya sea que la variedad \mathcal{M} fuese o no completa, el mapeo exponencial es un difeomorfismo de $V \subseteq T_p(\mathcal{M})$ a $U \subseteq \mathcal{M}$. Esta última vecindad se conoce como “vecindad normal”, y es importante en el régimen de la relatividad general, pues es de ayuda al estudiar la causalidad local [7].

Definición 5.1.15 (Subgrupo uniparamétrico). Un *subgrupo uniparamétrico* de un grupo de Lie G es un homeomorfismo suave $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ del grupo aditivo de la recta real a G . Es decir, para cada $s, t \in \mathbb{R}$

$$\xi(s + t) = \xi(s)\xi(t). \quad (5.60)$$

Observación. Esto significa que $\xi(0) = e \in G$.

Así bien, mapeo $t \mapsto \exp(tv)$ es un subgrupo uniparamétrico en G . Nos preguntamos ahora si el converso es cierto, es decir, si cada subgrupo uniparamétrico de G es de la forma $t \mapsto \exp(tv)$ para algún $v \in T_e G \cong L(G)$ [26].

Teorema 5.1.4. *Sea $\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico de G . Entonces existe un único $v \in \mathfrak{g}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t) = \exp(tv)$, donde*

$$v := \xi_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0. \quad (5.61)$$

Demostración. La definición (5.1.15) implica

$$[\xi \circ l_s](t) = \xi(s + t) = \xi(s) + \xi(t) = l_{\xi(s)}\xi(t), \quad (5.62)$$

es decir,

$$\xi \circ l_s = l_{\xi(s)} \circ \xi, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (5.63)$$

De donde

$$\xi_* \left(\frac{d}{dt} \right)_s = \xi_* l_{s*} \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \stackrel{(5.63)}{=} l_{\xi(s)*} \xi_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = l_{\xi(s)*}(v) = L_{\xi(s)}^v. \quad (5.64)$$

Por lo que el mapeo $t \mapsto \xi(t)$ es una curva integral de $L^v \in L(G)$. El resultado se sigue de la unicidad de tales curvas [1]. QED

Así, existe una relación uno-a-uno entre los subgrupos uniparamétricos de G y su álgebra de Lie $L(G)$ [1].

Definición 5.1.16. El campo vectorial $v \in \mathfrak{g}$ que satisface $\xi(t) = \exp(tv)$ es conocido como el *generador infinitesimal* del grupo uniparamétrico $t \mapsto \exp(tv)$.

Las matrices de rotación en $\mathfrak{so}(3)$ son un buen ejemplo de generadores infinitesimales. En física el término “generador infinitesimal” de un grupo uniparamétrico $\xi(t)$ se refiere a la matriz que satisface

$$\xi(t) = \exp \{-itA\}, \quad (5.65)$$

entonces $A = iX$. En particular, si el grupo uniparamétrico consiste de transformaciones unitarias de un espacio de Hilbert de dimensión finita, entonces el operador A es hermitiano (auto-adjunto) y X , anti-hermitiano. En dimensiones infinitas el problema es que el operador no necesariamente está acotado [26].

Consideremos a $v \in L(G)$ un generador infinitesimal del grupo uniparamétrico $\xi(t) = \exp(tv) = \phi_t(e)$, para $\phi_t : G \rightarrow G$ una familia de difeomorfismos uniparamétricos locales. Entonces $\phi_t(A) = A\xi(t)$ para $A \in G$. Si consideramos el conmutador $[u, v]$ con $u \in L(G)$, tenemos que [14]

$$[u, v] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t)_* u - u] = \lim_{t \rightarrow 0} [(r_{\xi(t)})_* u - u] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* u - u]. \quad (5.66)$$

Aquí, $\xi(t)^{-1}$ se refiere a la inversa de $\xi(t)$ en el grupo, es decir,

$$\xi(t)\xi(t)^{-1} = \xi(t)^{-1}\xi(t) = e \in G. \quad (5.67)$$

5.1.5. El álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$

El espacio $GL(n, \mathbb{R})$ como grupo de Lie tiene variadas aplicaciones tanto a las matemáticas como a la física y por supuesto cuenta con un álgebra de Lie. La ventaja con este espacio es que su álgebra también es un conjunto matricial. Por lo que es un terreno que nos es más familiar.

Definición 5.1.17 (Representación). Una *representación de un grupo de Lie* G en una variedad \mathcal{M} es un homeomorfismo del grupo G a $\text{Diff}(\mathcal{M})$ [25].

Así mismo podemos considerar representaciones en las álgebras de Lie. Para lo cual consideramos a V un \mathbb{F} -e.v. normado y tomamos el espacio vectorial de los mapeos lineales $u : V \rightarrow V$, con la norma estándar. Este espacio vectorial dotado del conmutador (5.24) es una subálgebra de Lie del álgebra de los operadores lineales sobre V . Esta es denotada como $\mathfrak{gl}(V)$. En el caso en que V es de dimensión finita cada mapeo lineal en V es continuo. En particular, $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^n)$ se puede identificar con el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{F} .

Definición 5.1.18 (Representación). Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{F} . Una *representación de \mathfrak{g}* es un mapeo \mathbb{F} -lineal $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que satisface

$$[R(u), R(v)] = R([u, v]). \quad (5.68)$$

El conjunto $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de las matrices reales de tamaño $n \times n$ forman una álgebra de Lie de dimensión n^2 , en donde la función bilineal que lo determina está definida como

$$[u, v] := uv - vu, \quad \forall u, v \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}). \quad (5.69)$$

Este es conocido como el álgebra de Lie del grupo $GL(n, \mathbb{R})$ y el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ coincide con el exponencial usual [14]

$$\exp(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{k!}. \quad (5.70)$$

Consideremos ahora los campos vectoriales invariantes por la izquierda concernientes a la componente conexa del grupo $GL^+(n, \mathbb{R})$. Dado que este aparece como un abierto de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ entonces el espacio tangente en cualquier punto en G puede ser identificado de manera natural con el espacio vectorial $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ por lo que también puede asociarse también con su álgebra de Lie, denotada como $\mathfrak{gl}^+(n, \mathbb{R})$.

En un sistema de coordenadas en una vecindad de $\mathbb{1} \in GL^+(n, \mathbb{R})$ podemos escribir las componentes del elemento $A \in G$ como $A_b^a \in \mathbb{R}$, donde $a, b = 1, \dots, n$. Cabe destacar ahora que vamos a usar índices que se refieren tanto a las características del objeto como en este caso los índices a, b que se refieren a la estructura interna de A y su carácter como elemento de un espacio vectorial, y los índices de carácter externo que se refieren al carácter del objeto como campo vectorial, forma diferencial o tensorial en general. Por ejemplo, cuando tratamos el tensor de Riemann el capítulo pasado lo escribimos como

$$R = R^\alpha_{\beta\mu\nu} (e_\alpha \otimes \theta^\beta) \wedge (\theta^\mu \wedge \theta^\nu) = \Omega^\alpha_\beta (e_\alpha \otimes \theta^\beta), \quad (5.71)$$

donde los índices μ y ν se refieren a la estructura de la 2-forma y los índices α y β se refieren al carácter interno, pues cada 2-forma Ω^α_β se puede acomodar sobre una matriz. Siguiendo esta idea podemos organizar las componentes de un elemento $A \in G$ como

$$x_\nu^\mu(A) := A_\nu^\mu \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } A \in GL^+(n, \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (5.72)$$

donde A_ν^μ representa al elemento en el μ -ésimo renglón y la ν -ésima columna. La multiplicación en $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ está dada por [14]

$$(AB)_\nu^\mu := A_\lambda^\mu B_\nu^\lambda. \quad (5.73)$$

Tomamos ahora $v \in T_e G \cong M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y un campo vectorial invariante por la izquierda asociado a v , su representación coordenada es

$$L_A^v = (L^v x_\nu^\mu)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu^\mu} \right)_A, \quad (5.74)$$

donde

$$(L^v x_\nu^\mu)_A = \left. \frac{d}{dt} [x_\nu^\mu (A \exp(tv))] \right|_{t=0}. \quad (5.75)$$

Entendiendo a $v \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, consideramos la curva $t \mapsto e^{tv} \in GL^+(n, \mathbb{R})$ que se refiere a la matriz exponencial. El vector tangente a esta curva en $t = 0$ es la matriz v y, por lo tanto, define un subgrupo uniparamétrico de $GL^+(n, \mathbb{R})$. Es decir,

$$e^{tv} = \exp(tv), \quad (5.76)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $v \in T_e G \cong M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Tenemos entonces que

$$L_A^v x_\nu^\mu = \left. \frac{d}{dt} [x_\nu^\mu (Ae^{tv})] \right|_{t=0} = A_\lambda^\mu \left. \frac{d}{dt} (e^{tv})_\nu^\lambda \right|_{t=0} = A_\lambda^\mu v_\nu^\lambda = (Av)_\nu^\mu, \quad (5.77)$$

así que el campo L^v tiene la representación local [1]

$$L_A^v = (Av)_\nu^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu^\mu} \right)_A. \quad (5.78)$$

Teorema 5.1.5. *El álgebra de Lie de $O(n)$ es $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$.*

Demostración. El resultado se sigue de la condición para $\exp(tv)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ [26]. QED

5.1.6. Formas diferenciales en grupos de Lie

Análogamente al álgebra de Lie de un grupo G , podemos construir su dual, que estará formado justamente por las formas diferenciales invariantes ante la traslación adecuada. Para el caso de las formas estas traslaciones estarán dadas por el pull-back $(L_A)^*$, para el caso de las traslaciones izquierdas y donde $A \in G$. La teoría de conexiones sobre los haces fibrados está basada fuertemente en esta idea.

Definición 5.1.19 (Formas invariantes). Una forma diferencial ω en G se dice que es *invariante por la izquierda* si $(L_A)^* \omega = \omega$, para cada $A \in G$.

Una *k-forma invariante por la derecha* se define equivalentemente con la traslación derecha.

Observación. Equivalentemente podemos pensar a esta forma invariante por la izquierda como

$$l_A^*(\omega_B) = \omega_{A^{-1}B}, \quad (5.79)$$

para todo $B \in G$ [1].

Denotamos ahora por \mathfrak{g} al álgebra de Lie del grupo G . El espacio vectorial \mathfrak{g}^* formado por todas las 1-formas invariantes por la izquierda es el espacio dual del álgebra \mathfrak{g} . Entonces, si $X \in \mathfrak{g}$ y $\omega \in \mathfrak{g}^*$, la función $\omega(X)$ es una constante en G [14].

Así como existe un isomorfismo $\iota : T_e G \rightarrow L(G)$ visto en el teorema (5.1.2), también existe uno entre el espacio $T_e^* G$ y el conjunto $L^*(G)$ de 1-formas invariantes por la izquierda en G , dado por

$$\lambda_A^\kappa := l_{A^{-1}}^*(\kappa) \in T_A^* G, \quad \forall A \in G, \quad (5.80)$$

donde $\kappa \in T_e^* G$ y $\lambda^\kappa \in L^*(G)$. Es decir, $T_e^* G \cong L^*(G)$. A pesar de ello el conjunto $L^*(G)$ no es un álgebra de Lie.

Lema 5.1.6. *Sea $\omega \in \mathfrak{g}^*$, entonces $d\omega$ también es invariante por la izquierda.*

Demostración. Sea $A \in G$, tenemos que

$$(L_A)^*(d\omega) = d((L_A)^*\omega) = d\omega, \quad (5.81)$$

en virtud que el pull-back conmuta con el diferencial. QED

Sea $\{E_\mu\}_{\mu=1}^n$ una base de \mathfrak{g} , consideramos la base dual $\{\Theta^\mu\}_{\mu=1}^n$ en \mathfrak{g}^* . Entonces análogamente a la construcción para llegar a (4.214), podemos expresar

$$d\Theta^\mu(E_\alpha, E_\beta) = -C_{\alpha\beta}^\mu, \quad (5.82)$$

obteniendo así la “ecuación de Maurer-Cartan”² dada por

$$d\Theta^\mu = -C_{\alpha\beta}^\mu \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta. \quad (5.83)$$

Definición 5.1.20 (Forma de Maurer-Cartan). *La forma de Maurer-Cartan $\Xi \in \mathfrak{g}^*$ es la 1-forma \mathfrak{g} -valuada en G que asocia a cada $v \in T_A G$ el campo vectorial invariante por la izquierda en G cuyo valor en $A \in G$ es precisamente v . Es decir, si $B \in G$*

$$\Xi(v)(B) := l_{B*}(l_{A^{-1}*}v), \quad \forall v \in T_A G. \quad (5.84)$$

Así definida podemos ver que $\Xi \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$, de manera que [25]

$$\Xi|_{\mathfrak{g}} = \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}. \quad (5.85)$$

Es decir, si tomamos un campo vectorial invariante por la izquierda L^v , podemos escribir

$$\Xi(L_A^v)(B) = L_B^v. \quad (5.86)$$

Y dado que $L(G) \cong T_e G$, entonces

$$\Xi(L_A^v) = v. \quad (5.87)$$

²Esta forma se escribe como

$$d\Theta^\mu = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^\mu \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta$$

al considerar sumas repetidas. Esta es la forma en que puede encontrarse en la bibliografía.

Consideremos ahora el caso en que G es un grupo matricial real, en cuyo caso $T_e G$ es isomorfo a $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, por lo que la forma de Maurer-Cartan toma valores en este último, es decir, sus componentes son matrices. Tenemos así que de (5.78)

$$(\Xi_A)_\lambda^\mu (Av)_\nu^\lambda = (\Xi_A)_\lambda^\mu A_\nu^\lambda v_\nu^\lambda \stackrel{(5.87)}{=} v_\nu^\mu, \quad (5.88)$$

multiplicando ambos lados por $(v^{-1})_\alpha^\nu$, tenemos que

$$(\Xi_A)_\lambda^\mu A_\nu^\lambda v_\nu^\lambda (v^{-1})_\alpha^\nu = (\Xi_A)_\lambda^\mu A_\nu^\lambda (vv^{-1})_\alpha^\nu = (\Xi_A)_\lambda^\mu A_\nu^\lambda \delta_\alpha^\nu = (\Xi_A)_\lambda^\mu A_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\mu. \quad (5.89)$$

Y si ahora multiplicamos por $(A^{-1})_\beta^\alpha$ llegamos a que

$$(\Xi_A)_\lambda^\mu \delta_\beta^\lambda = (\Xi_A)_\beta^\mu = (A^{-1})_\beta^\mu. \quad (5.90)$$

Por lo que podemos escribir a la forma de Maurer-Cartan como

$$\Xi_{A\nu}^\mu = (A^{-1})_\lambda^\mu dx_\nu^\lambda. \quad (5.91)$$

Consideremos ahora una función $\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow G$, sabemos que $\Lambda^* \Xi$ es una 1-forma $L(G)$ -valuada en \mathcal{M} . Si G es un grupo matricial, podemos usar su representación coordenada, entonces para $p \in \mathcal{M}$ podemos expresar

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^* \Xi_b^a, \partial_\mu \rangle_p &= \langle \Xi_b^a, \Lambda_* \partial_\mu \rangle_{\Lambda(p)} \\ &= \langle [\Lambda^{-1}(p)]_c^a dx_b^c, \Lambda_* \partial_\mu \rangle_{\Lambda(p)} \\ &= [\Lambda^{-1}(p)]_c^a \Lambda_* \partial_\mu x_b^c |_{\Lambda(p)} \\ &= [\Lambda^{-1}(p)]_c^a \partial_\mu x_b^c [\Lambda(p)], \end{aligned} \quad (5.92)$$

de donde

$$(\Lambda^* \Xi_p)_b^a = [\Lambda^{-1}(p)]_c^a \partial_\mu [\Lambda(p)]_b^c (dx^\mu)_p = [\Lambda^{-1}(p)]_c^a d[\Lambda(p)]_b^c \quad (5.93)$$

que matricialmente puede expresarse como [1]

$$\Lambda^* \Xi = \Lambda^{-1} d\Lambda. \quad (5.94)$$

5.1.7. Grupos de transformaciones

Podemos usar grupos de Lie para transformaciones entre objetos sobre algún espacio en particular, esta idea es de fundamental importancia en la física teórica. Y con el ánimo de introducirlos consideramos lo siguiente.

Definición 5.1.21 (Acción). Un grupo G se dice que *actúa por la izquierda* sobre una variedad diferencial \mathcal{M} (o *tiene una acción izquierda sobre \mathcal{M}*) si existe un homeomorfismo $A \mapsto \gamma_A$ de G en el grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} en donde el mapeo

$$\begin{aligned} \Lambda : G \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M}, \\ (A, p) &\mapsto \gamma_A(p) \equiv Ap \end{aligned} \quad (5.95)$$

es suave. Es decir, cada elemento de G induce una transformación en \mathcal{M} . Esta transformación cumple con

$$(AB)p = A(Bp), \quad (5.96)$$

$$ep = p, \quad (5.97)$$

para todo $A, B \in G$ y $p \in \mathcal{M}$ [27].

Análogamente podemos considerar una “acción derecha”, es decir, en la que se cumple $p(AB) = (pA)B$ en lugar de (5.96), al igual que $p \mapsto \delta_A(p) \equiv pA$ en (5.95). La relación entre una y otra está dada entonces por $\delta_A = \gamma_{A^{-1}}$.

Definición 5.1.22 (Acciones efectivas y libres). Decimos que G actúa *efectivamente* sobre \mathcal{M} si $r_{Ap} = p$ para todo $p \in \mathcal{M}$ implica que $A = e$. De igual forma, decimos que actúa *libremente* si para algún $p \in \mathcal{M}$, $r_{Ap} = p$ implica que $A = e$ [14].

Decimos que dos elementos $p, q \in \mathcal{M}$ están “conectados” por un elemento del grupo G si existe $A \in G$ tal que $p = qA$.

Definición 5.1.23 (Órbitas). Dada una G -acción, definimos la *órbita* O_p de la acción a través de $p \in \mathcal{M}$ como el conjunto

$$O_p := \{q \in \mathcal{M} \mid \exists A \in G \text{ tal que } q = pA\}. \quad (5.98)$$

Una G -acción es *transitiva* si cada par de puntos $p, q \in \mathcal{M}$ se pueden conectar por un elemento del grupo [1].

Esta acción define una relación de equivalencia, cuya clase de equivalencia son exactamente las órbitas de G en \mathcal{M} . El conjunto de las órbitas está dado por el espacio cociente, denotado por \mathcal{M}/G [11].³

Para estos últimos conceptos introdujimos una acción derecha. Sin embargo, el concepto análogo se sigue para la acción izquierda [1]. La invariancia ante G -acciones (o G -transformaciones) locales caracteriza a las teorías de norma en general [25].

Consideremos al grupo G que actúa en \mathcal{M} por la derecha, la acción del subgrupo uniparamétrico $\xi(t) = \exp(tv)$ en \mathcal{M} induce un campo vectorial en \mathcal{M} , que denotamos como v^* . Es decir, asignamos a cada elemento $v \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial $v^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, conocido como “campo vectorial fundamental” correspondiente a v .

Lema 5.1.7. *Sea G un grupo de Lie que actúa en \mathcal{M} por la derecha. El mapeo*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \\ v &\mapsto \sigma(v) := v^* \end{aligned} \quad (5.99)$$

es un homeomorfismo. Si G actúa efectivamente en \mathcal{M} , entonces σ es un isomorfismo de \mathfrak{g} en \mathcal{M} . Si G actúa libremente en \mathcal{M} , entonces, para cada $v \in \mathfrak{g}$ diferente de cero, $\sigma(v)$ nunca se anula en \mathcal{M} .

³Algunos autores reservan la notación G/\mathcal{M} para el espacio de las órbitas determinado por la acción izquierda; mientras que se deja \mathcal{M}/G para referirse a la acción derecha.

Demostración. Para cada $p \in \mathcal{M}$, sea $\sigma_p : G \rightarrow \mathcal{M}$, definida como $\sigma_p(A) = pA$. Tenemos entonces que $(\sigma_p)_* v_e = (\sigma(v))_p$. Se sigue que σ es una función lineal. Sean $u, v \in \mathfrak{g}$, tales que $\sigma(u) = u^*$ y $\sigma(v) = v^*$ y donde además u es un generador infinitesimal del grupo uniparamétrico $\xi(t) = \exp(tu)$ al subgrupo uniparamétrico. Tenemos entonces que

$$[u^*, v^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [v^* - (\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* v^*]. \quad (5.100)$$

Sabemos además que para $p \in \mathcal{M}$

$$[(\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* v^*]_p = (\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* (\sigma_p)_* v_e = (\sigma_p)_* [(\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* v_e]. \quad (5.101)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [u^*, v^*] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\sigma_p)_* v_e - (\sigma_p)_* (\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* v_e] \\ &= (\sigma_p)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [v_e - (\text{Ad}_{\xi(t)^{-1}})_* v_e] \right) \\ &= (\sigma_p)_* ([u, v]_e) \\ &= \sigma([u, v])_p. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Es decir,

$$[\sigma(u), \sigma(v)] = \sigma([u, v]), \quad (5.103)$$

por lo que σ es un homeomorfismo.

Supongamos ahora que $\sigma(v) = 0$ para cualquier punto en \mathcal{M} . Si G actúa efectivamente en \mathcal{M} , $r_{\xi(t)}$ es la transformación identidad, pues de $t \mapsto \exp(tv)$ vemos que $\xi(t) = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde $v = 0$.

Finalmente, si $\sigma(v)$ se anula en algún punto $p \in \mathcal{M}$, entonces $r_{\xi(t)}$ deja fijo a p para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Si G actúa libremente en \mathcal{M} , tenemos que $\xi(t) = e$ para todo t , y entonces $v = 0$ [14] [13]. QED

5.2. Haces fibrados

Los haces surgen de la propuesta de generalizar los productos topológicos⁴. Así como partimos de la idea de superficie en \mathbb{R}^n que dio lugar al concepto de variedad, podemos seguir un razonamiento similar para atacar esta construcción. En primer lugar, podemos imaginar a los haces como objetos cuya expresión local se reduce al producto de dos espacios topológicos; en segundo lugar, las propiedades de estos espacios y la idea de esta «localidad» nos conducen a una descripción alternativa para algunos espacios ya conocidos.

5.2.1. Haces en general

Un primer ejemplo es el cilindro, que podemos entender como el producto cartesiano entre un círculo S^1 y un intervalo $I = [a, b]$, una configuración distinta la obtenemos torciendo este espacio, con lo que resulta la cinta de Möbius, la cual tiene únicamente una sola cara y no puede ser descrita globalmente como un producto cartesiano, pero localmente sí, pues para $U \subseteq S^1$ el producto topológico $U \times I$ describe un segmento de la banda. Así que necesitamos un mecanismo para indicarnos que la torcedura ocurre en algún lado [15] [28].

Definición 5.2.1 (Haz). Un *haz* es un triplete (E, B, π) que consiste en dos espacios topológicos, E y B , y un mapeo continuo $\pi : E \rightarrow B$. Llamamos a B *espacio base* (o simplemente *base*) mientras que a E , *espacio total*.

No hay pérdida de generalidad en suponer que π sea suprayectivo [1]. Como primer ejemplo podemos tomar a B_1 y B_2 dos espacios topológicos, entonces podemos definir el haz $(B_1 \times B_2, B_1, \pi_1)$ donde π_1 es la proyección

$$\begin{aligned} \pi_1 : B_1 \times B_2 &\rightarrow B_1, \\ (x^1, x^2) &\mapsto x^1, \end{aligned} \tag{5.104}$$

para todo $x^1 \in B_1$ y $x^2 \in B_2$.

Al producto cartesiano entre espacios topológicos suele llamarse también “producto topológico” y a los haces que se pueden construir globalmente como un producto topológico los denominamos “haz producto” [15].

Definición 5.2.2 (Fibra). Una *fibra* en $p \in B$, denotada como F_p es la imagen inversa en dicho punto de la proyección, $\pi^{-1}(\{p\})$.

Adicionalmente con esto, si el haz permite también una estructura adicional en la que cada fibra sea homeomorfa (o en caso de una variedad diferencial, difeomorfa) a un espacio en común, denotado por F , decimos que F es la “fibra estándar” (o “fibra del

⁴Es decir, espacios definidos como el producto cartesiano de dos o más espacios topológicos.

haz”), en cuyo caso el haz es conocido como “haz fibrado” [15].

En adelante usaremos para nuestra descripción haces que provengan de variedades diferenciales. En esta convención \mathcal{M} denota a una variedad diferencial y el espacio total, \mathcal{P} , también lo será.⁵

Definición 5.2.3 (Sección cruzada). Una *sección cruzada* del haz $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ es un mapeo $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$.

Es decir, la imagen en cada punto $p \in \mathcal{M}$ pertenece a la fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ sobre p . En el caso de un haz producto $(\mathcal{M} \times F, \mathcal{M}, \pi)$ donde $\pi : \mathcal{M} \times F \rightarrow \mathcal{M}$ es la proyección, una sección cruzada σ define una única función $\tilde{\sigma} : \mathcal{M} \rightarrow F$ dada por

$$\sigma(p) = (p, \tilde{\sigma}(p)), \quad (5.105)$$

para todo $p \in \mathcal{M}$. De igual forma, cada función $\tilde{\sigma}$ nos regresa una única sección cruzada σ definida de la misma manera. Por otro lado, en una situación más general de un haz fibrado que no sea el resultado de un producto topológico global, una sección cruzada puede ser asociada con una función de «torcedura» del espacio base al espacio total, como en el caso de la banda de Möbius [1].

Observación. Un campo vectorial v en \mathcal{M} es una sección cruzada del haz tangente $T(\mathcal{M})$, pues un campo vectorial asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector tangente $v_p \in T_p(\mathcal{M})$ por el mapeo $p \mapsto v_p$.

Una “sección local” se define análogamente sobre un abierto $U \subset \mathcal{M}$ [25]. En este caso conviene introducir una cubierta abierta sobre la variedad \mathcal{M} .

Definición 5.2.4 (Mapeo entre haces). Un *mapeo de haces* entre dos pares de haces $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ y $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ es un par de funciones (f, g) donde $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}$ y $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tales que

$$\varpi \circ f = g \circ \pi. \quad (5.106)$$

Este mapeo entre haces implica que, para todo $p \in \mathcal{M}$, $f(\pi^{-1}(\{p\})) \subset \varpi^{-1}(\{g(p)\})$. Es decir, el mapeo de haces envía fibras en fibras [25].

Definición 5.2.5 (Haces isomorfos). Sean $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ y $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ dos haces. Decimos que *existe un isomorfismo* entre ellos si existe un mapeo de haces (f, g) de $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ a $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ para el cual hay otro mapeo de haces (f', g') de $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ a $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ tal que

$$\begin{aligned} f' \circ f &= \mathbb{1}_{\mathcal{P}}, & f \circ f' &= \mathbb{1}_{\mathcal{R}}, \\ g' \circ g &= \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, & g \circ g' &= \mathbb{1}_{\mathcal{N}}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Decimos que $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ es *isomorfo* a $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ (o que son *isomorfos*) si existe un isomorfismo entre ellos.

⁵Esto en virtud que el producto topológico entre dos variedades diferenciales es también una variedad diferencial. Véase el lema (2.1.1).

De existir un isomorfismo entre los haces, al mapeo de haces suele llamarse “morfismo de haces” y una “categoría de haces” consiste en los haces junto con los morfismos de haces.⁶ Consideremos ahora $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. En este caso el mapeo de haces $(f, \mathbb{1}_{\mathcal{M}})$ se conoce como “mapeo del \mathcal{M} -haz” (\mathcal{M} -bundle map). Además dos haces $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ y $(\mathcal{R}, \mathcal{M}, \varpi)$ son “localmente isomorfos” si para cada $p \in \mathcal{M}$ existe una vecindad abierta de p , $U \subset \mathcal{M}$, tal que $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)|_U$ y $(\mathcal{R}, \mathcal{M}, \varpi)|_U$ son isomorfos, en cuyo caso decimos también que son U -isomorfos [1].

Definición 5.2.6 (Haces triviales). Un haz fibrado $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ es *trivial* si es \mathcal{M} -isomorfo al haz producto $(\mathcal{M} \times F, \mathcal{M}, \pi)$ para algún espacio F [15] [20].

La relación isomorfismo-local es de equivalencia sobre el conjunto de haces de una variedad \mathcal{M} .⁷

5.2.2. Haces fibrados principales

La idea clave de los haces fibrados «principales» es el poder asociar a la fibra con un grupo de Lie. Para ello buscamos descomponer localmente al haz fibrado en la forma $U_i \times G$, donde U_i es un abierto de \mathcal{M} . Conseguir esto conlleva establecer un «pegado» de abiertos adecuado para la compatibilidad de sus cartas.

Definición 5.2.7 (Haz fibrado principal). Un *haz fibrado principal* sobre \mathcal{M} con el grupo G , denotado como $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G, \pi)$, consiste de una variedad \mathcal{P} y una acción de G en \mathcal{P} que satisface:

- (I) G actúa libremente en \mathcal{P} por la derecha: $\mathcal{P} \times G \ni (o, A) \mapsto oA = r_A o \in \mathcal{P}$;
- (II) \mathcal{M} es el espacio cociente de \mathcal{P} por la relación de equivalencia inducida por G , $\mathcal{M} = \mathcal{P}/G$, y la proyección canónica $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ es diferenciable;
- (III) \mathcal{P} es localmente trivial.

El grupo de Lie G es llamado el *grupo de estructura* y \mathcal{M} , *variedad base* [14].

Se suele denotar a un haz fibrado principal simplemente como \mathcal{P} cuando tanto la variedad base como el grupo de estructura están ya especificados.

Observación. Para cada $p \in \mathcal{M}$, la fibra sobre p , $\pi^{-1}(\{p\})$, es una subvariedad cerrada de $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G, \pi)$; de hecho, son las orbitas de la G -acción sobre \mathcal{P} , pues si $o \in \pi^{-1}(\{x\}) \subset \mathcal{P}$, entonces $\pi^{-1}(\{x\}) = \{oA \mid A \in G\}$ y es conocido como “la fibra a través de o ”. Cada fibra es difeomorfa a G [1].

⁶Esto conyeva una introducción a la teoría de categorías que rebasa los alcances de nuestra descripción.

⁷De la misma manera si se trata de espacios topológicos.

Definición 5.2.8 (Haces principales). Un *haz principal* es aquel en que $F = G$ donde G es representado por sí mismo por traslaciones izquierdas [25].

Teorema 5.2.1. *Un haz fibrado principal $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ es trivial si y solo si posee una sección.*

Demostración. $[(\Rightarrow)]$ Sea G el grupo de estructura. Si \mathcal{P} es trivial entonces lo podemos escribir como $\mathcal{P} = \mathcal{M} \times G$. De donde podemos definir una sección para todo $p \in \mathcal{M}$ como

$$\sigma(p) := (p, e). \quad (5.108)$$

$[(\Leftarrow)]$ Consideremos la sección $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$. Dado que la acción derecha en G es libre, entonces los elementos en cada fibra $o \in \pi^{-1}(\{p\})$ pueden escribirse como $o = \sigma(p)A$ para un único $A \in G$. Por lo tanto, podemos trivializar a \mathcal{P} mapeando o en $(p, A) \in \mathcal{M} \times G$ [25]. QED

Podemos pensar ahora en un marco lineal, es decir, una base de $v_p \in T_p\mathcal{M}$ en el punto $p \in \mathcal{M}$, que es el conjunto ordenado $\{(e_\alpha)_p\}_{\alpha=1}^n$ de vectores tangentes en $T_p\mathcal{M}$.

Definición 5.2.9 (Haces de marcos). Definimos el *haz de marcos* (*bundle of frames*), $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \pi)$ como el conjunto de todos los marcos en cada punto de una variedad diferencial \mathcal{M} , donde la proyección $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ se define como la función que envía cada marco al punto de \mathcal{M} al que está anclado.

De manera natural podemos tomar una acción derecha del grupo $GL(n, \mathbb{R})$ (donde $n = \dim(\mathcal{M})$) sobre el haz $(\mathcal{B}, \mathcal{M}, \pi)$. Si $e_p = (e_1, \dots, e_n)_p \in (\mathcal{B}, \mathcal{M}, \pi)$ es un elemento del haz de marcos y $A \in GL(n, \mathbb{R})$ entonces consideramos

$$(e_1, \dots, e_n)_p A := (e_{i_1} A_1^{i_1}, \dots, e_{i_n} A_n^{i_n}). \quad (5.109)$$

Con ella podemos ver que el haz de marcos es un haz fibrado principal, por tanto lo denotamos como $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Y tiene estructura de variedad diferencial, pues si $U \subset \mathcal{M}$ es una vecindad coordinada cuyas funciones coordenadas son (x^1, \dots, x^n) , para cualquier base de vectores tangentes en el punto $p = (p^1, \dots, p^n) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ expresado como $e_p = (e_1, \dots, e_n)_p$, podemos expresarla como

$$e_a = e_a^\mu (\partial_\mu)_p, \quad \mu, a = 1, \dots, n, \quad (5.110)$$

y donde e_a^μ forma una matriz $\Lambda \in GL(n, \mathbb{R})$. Así, definimos

$$\begin{aligned} \phi : U \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \pi^{-1}(U), \\ (p, A) &\mapsto \left(A_1^{i_1} (\partial_{i_1})_p, \dots, A_n^{i_n} (\partial_{i_n})_p \right), \end{aligned} \quad (5.111)$$

que nos permite tratar a $(x^1, \dots, x^n; A_1^1, \dots, A_n^n)$ como las coordenadas de la variedad diferencial $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. De esto podemos ver que $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{M})) = n + n^2$ [1] [15].

Dado un haz fibrado principal $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$, la acción de G en \mathcal{P} induce un homeomorfismo $\varsigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G a los campos vectoriales en \mathcal{P} , en virtud del lema⁸ (5.1.7). Entonces, para cada $v \in \mathfrak{g}$ podemos construir $v^* = \varsigma(v) \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$, el campo vectorial fundamental asociado a $v \in \mathfrak{g}$. Como la acción G envía cada fibra en sí misma, $v_o^* \in T_o\mathcal{P}$ es un vector tangente a la fibra que puede definirse en todo $o \in \mathcal{P}$. Dado que G actúa libremente en \mathcal{P} , gracias al mismo lema, siempre que $v \neq 0$, v_o^* nunca se anula en \mathcal{P} . Entonces

$$\begin{aligned} \varsigma : \mathfrak{g} &\rightarrow T_o\mathcal{P}, \\ v &\mapsto (v^*)_o, \end{aligned} \tag{5.112}$$

es un isomorfismo lineal en la fibra a través de $o \in \mathcal{P}$. Esto muestra el siguiente resultado.

Lema 5.2.2. *Sea v^* el campo vectorial fundamental correspondiente a $v \in \mathfrak{g}$. Para cada $A \in G$, $(r_A)_* v^*$ es el campo vectorial fundamental correspondiente al campo $(\text{Ad}_{A^{-1}})_* v \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Dado que v^* es inducido por $r_{\xi(t)}$, donde $\xi(t) = \exp(tv)$, entonces el campo vectorial $(r_A)_* v^*$ puede ser expresado como

$$(r_A)_* v_p^* = (r_A)_* (\varsigma_p)_* v_e = (\varsigma_p)_* (\text{Ad}_{A^{-1}})_* v_e = \varsigma [(\text{Ad}_{A^{-1}})_* v_e]_p, \tag{5.113}$$

es decir,

$$(r_A)_* v^* = \varsigma [(\text{Ad}_{A^{-1}})_* v]. \tag{5.114}$$

QED

5.2.3. Reconstrucción de haces fibrados principales

Notemos que en un haz fibrado principal \mathcal{P} la trivialidad local se puede entender como la condición que para todo $p \in \mathcal{M}$ existe una vecindad $U \subset \mathcal{M}$ tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfa a $U \times G$ en el sentido que existe un difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times G, \\ o &\mapsto \Psi(o) := (\pi(o), \varphi(o)), \end{aligned} \tag{5.115}$$

donde $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ satisface

$$\varphi(oA) = (\varphi(o)) A. \tag{5.116}$$

para todo $o \in \pi^{-1}(U)$ y $A \in G$. Introducimos ahora una cubierta abierta $\mathcal{A} = \{U_x\}_{x \in I}$ de \mathcal{M} y definimos, en cada abierto U_x , un difeomorfismo $\Psi_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times G$ como en (5.115). La familia $\{U_x, \Psi_x\}_{x \in I}$ se conoce como “trivializaciones locales”.

⁸En el lema mencionado se escribe este homeomorfismo con la letra σ ; con el ánimo de no confundirla con las secciones cruzadas, cambiamos la notación del homeomorfismo a ς .

En cuanto a identificar la definición de haz fibrado principal (5.2.7) con su construcción por medio de una cubierta abierta necesitamos un pegado adecuado, que conseguimos con las adecuadas «funciones de transición». Seleccionamos entonces una cubierta abierta de \mathcal{M} dada por $\mathcal{A} = \{U_x\}_{x \in I}$, para definir las trivializaciones locales $\{U_x, \Psi_x\}_{x \in I}$

$$\begin{aligned} \Psi_x : \pi^{-1}(U_x) &\rightarrow U_x \times G, \\ o &\mapsto (\pi(o), \varphi_x(o)). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Por otro lado, si $o \in \pi^{-1}(U_x \cap U_y)$, entonces

$$\varphi_y(oA)(\varphi_x(oA))^{-1} = \varphi_y(o)(\varphi_x(o))^{-1}, \quad (5.118)$$

que muestra que $\varphi_y(o)(\varphi_x(o))^{-1}$ depende únicamente de $\pi(o)$ mas no de $o \in \pi^{-1}(U_x \cap U_y)$. Podemos ahora definir un mapeo

$$\begin{aligned} \Psi_{yx} : U_x \cap U_y &\rightarrow G, \\ \pi(o) &\mapsto \varphi_y(o)(\varphi_x(o))^{-1}. \end{aligned} \quad (5.119)$$

La familia de mapeos Ψ_{yx} son conocidos como “funciones de transición” del haz $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ correspondientes a la cubierta abierta \mathcal{A} de \mathcal{M} . Con ello, podemos ver que para $p \in U_x \cap U_y \cap U_z \neq \emptyset$

$$\Psi_{zx}(p) = \Psi_{zy}(p)\Psi_{yx}(p). \quad (5.120)$$

Sean $\sigma_x : U_x \rightarrow \mathcal{P}$ y $\sigma_y : U_y \rightarrow \mathcal{P}$ dos secciones locales en las que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, entonces podemos definir las de tal manera que

$$\begin{aligned} \sigma_x : U_x &\rightarrow \pi^{-1}(U_x), & \sigma_y : U_y &\rightarrow \pi^{-1}(U_y), \\ p &\mapsto \Psi_x^{-1}(p, e), & p &\mapsto \Psi_y^{-1}(p, e). \end{aligned} \quad (5.121)$$

la relación entre estas secciones locales y las funciones de transición están dadas por

$$\sigma_x(p) = \Psi_{xy}(p)\sigma_y(p), \quad (5.122)$$

para todo $p \in (U_x \cap U_y) \subset \mathcal{M}$. Las secciones locales así definidas son conocidas como “secciones locales canónicas”.

Teorema 5.2.3 (de reconstrucción de haces fibrados principales). *Sea \mathcal{M} una variedad suave, $\{U_x\}_{x \in I}$ una cubierta abierta de \mathcal{M} y G un grupo de Lie. Consideramos un mapeo $\psi_{yx} : U_x \cap U_y \rightarrow G$ para todo $x, y \in I$ en los que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, si se cumple*

$$\Psi_{zx}(p) = \Psi_{zy}(p)\Psi_{yx}(p) \quad \text{para } p \in U_x \cap U_y \cap U_z \neq \emptyset, \quad (5.123)$$

entonces podemos construir un haz fibrado principal (diferencial) $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ con funciones de transición dadas por Ψ_{xy} .

Demostración. Notemos de (5.123) que $\psi_{xx} = e$ para cada $p \in U_x$. Además $\Psi_{xy}(p)\Psi_{yx}(p) = e$ siempre que $p \in U_x \cap U_y$.

Sea $V_x = U_x \times G$, donde $x \in I$, y definimos

$$V = \bigcup_{x \in I} V_x, \quad (5.124)$$

la suma topológica de los abiertos V_x , es decir,

$$V = \{(x, p, A) \mid x \in I, p \in U_x, A \in G\}. \quad (5.125)$$

Como cada V_x es una variedad diferencial y V es una unión disjunta de los conjuntos $\{V_x\}_{x \in I}$, entonces es una variedad diferencial en el sentido usual.

Introducimos ahora una relación de equivalencia ε en V . Para ello consideramos al elemento $(x, p, A) \in \{x\} \times V_x$ que es ε -equivalente a $(y, q, B) \in \{y\} \times V_y$ si y solo si $p = q \in U_x \cap U_y$ y $B = \Psi_{yx}(p)A$. Sea \mathcal{P} el espacio cociente de V y esta relación de equivalencia ε , $\mathcal{P} = V/\varepsilon$, por definición, cada $C \in G$ mapea la clase de ε -equivalencia de (x, p, A) en la clase de ε -equivalencia (x, p, AC) . Esta definición es independiente de la elección de (x, p, A) y vemos de ella que G actúa libremente por la derecha en \mathcal{P} . Consideremos ahora la proyección $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$, que mapea la clase de ε -equivalencia de (x, p, A) a $p \in \mathcal{M}$. La definición de la proyección π es independiente del elemento representativo (x, p, A) . Entonces, si $o, u \in \mathcal{P}$, tenemos que $\pi(o) = \pi(u)$ si y solo si $u = oC$ para algún $C \in G$. Tomemos entonces a los representantes de $o, u \in \mathcal{P}$ dados por (x, p, A) y (y, q, B) , respectivamente; si $u = oC$ para algún $C \in G$, tenemos que $p = q$ y por lo tanto $\pi(u) = \pi(o)$. De igual manera, si $\pi(o) = p = q = \pi(u) \in U_x \cap U_y$, entonces $u = oC$, donde $C = A^{-1}\Psi_{yx}B \in G$.

Tomamos ahora el mapeo $\Phi : V \rightarrow P$, que induce un difeomorfismo de $V_x = U_x \times G$ en $\pi^{-1}(U_x)$. Esto es posible en virtud que cada punto $o \in \mathcal{P}$ está contenido en $\pi^{-1}(U_x)$ para algún $x \in I$, y la identificación de (x, p, A) con $(y, q, \Psi_{yx}(p)A)$ está hecha a partir de funciones diferenciables. Llegamos entonces a que la acción de G en \mathcal{P} es diferenciable y, por tanto, $P(\mathcal{M}, G, \pi)$ es un haz fibrado principal con estructura diferencial.

Las funciones de transición en \mathcal{P} correspondientes a la cubierta \mathcal{A} son precisamente la familia de funciones $\{\Psi_{yx}\}_{x, y \in I}$ definiendo

$$\begin{aligned} \Psi_x : \pi^{-1}(U_x) &\rightarrow U_x \times G, \\ o &\mapsto \Psi_x(o) = (p, A), \end{aligned} \quad (5.126)$$

donde $o \in \pi^{-1}(U_x)$ es la clase de ε -equivalencia de (x, p, A) [14] [20].

QED

5.2.4. Conexiones en un haz principal

Presentamos ahora las conexiones sobre un haz, que nos permiten establecer una correspondencia entre dos fibras del haz [15]. La pieza clave en nuestra discusión es la posibilidad de definir una conexión sobre un haz principal. En particular, las conexiones que construimos en la sección (4.3) son un caso particular de conexión

sobre el haz de marcos, precisamente introducidas como conexiones lineales. Con el ánimo de generalizar esta idea empezamos considerando a un haz principal cuyo grupo de estructura es G . La fibración en \mathcal{P} por medio de la proyección $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ induce el mapeo lineal $\pi_* : T_o\mathcal{P} \rightarrow T_{\pi(o)}\mathcal{M}$ para cada $o \in \mathcal{P}$; los vectores tangentes que se anulan ante este mapeo nos permiten ver cuándo son también «tangentes a la fibra» en ese punto.

Definición 5.2.10 (Campos vectoriales verticales). Un vector tangente en un haz principal $X_o \in T_p\mathcal{P}$ es llamado *vertical* si $\pi_*(X_o) = 0$. Denotamos por $V_p\mathcal{P}$ al subespacio de los vectores tangentes verticales en $T_p\mathcal{P}$ [14].

La definición de los espacios tangentes verticales $V_p\mathcal{P}$ es una consecuencia inmediata de las propiedades características del haz fibrado. El espacio complementario de $T_o\mathcal{P}$ no es un espacio canónico y debe ser introducido como una estructura adicional [25]. Los vectores complementarios podemos entonces pensarlos como «horizontales» y en una elección consistente del espacio que forman se encuentra la formalización de la conexión.

Definición 5.2.11 (Conexión). Una *conexión* en un haz principal $(\mathcal{P}, \mathcal{M}, \pi)$ es una asignación de subespacios $H_p\mathcal{P} \subset T_p\mathcal{P}$ a cada $o \in \mathcal{P}$ llamados *espacios tangentes horizontales* que satisfacen:

- (I) $H_o\mathcal{P}$ es complementario a $V_o\mathcal{P}$ en $T_o\mathcal{P}$, es decir, $T_o\mathcal{P} \cong V_o\mathcal{P} \oplus H_o\mathcal{P}$ para todo $o \in \mathcal{P}$;
- (II) $r_{A*}(H_o\mathcal{P}) = H_{oA}\mathcal{P}$ para todo $A \in G$, $o \in \mathcal{P}$ y donde $r_A(o) := oA$ denota la acción derecha de G en \mathcal{P} ;
- (III) $H_o\mathcal{P}$ depende suavemente de $o \in \mathcal{P}$ [1] [14] [25].

Geoméricamente, una conexión en un haz principal es una asignación de un espacio horizontal a cada punto del haz (de manera consistente con los demás puntos). A esta familia de subespacios del haz tangente la denotamos como Γ , por lo que una elección de una conexión significa especificar Γ [29].

Consideremos ahora la descomposición de un vector tangente sobre el haz, sea $X_o \in T_u\mathcal{P}$, entonces

$$X_o = Y_o + Z_o, \quad (5.127)$$

donde $Y_o \in V_o\mathcal{P}$ y $Z_o \in H_o\mathcal{P}$. A los vectores $Z_o \in H_o\mathcal{P}$ los nombramos “horizontales”. Podemos llamar a las componentes verticales u horizontales de un vector tangente con las asignaciones

$$X_o = [\text{ver}(X)]_o + [\text{hor}(X)]_o, \quad (5.128)$$

en donde definimos $[\text{ver}(X)]_o := Y_o$ y $[\text{hor}(X)]_o := Z_o$. Así, para todo $o \in \mathcal{P}$, $[\text{ver}(X)]_o \in V_o\mathcal{P}$ y $[\text{hor}(X)]_o \in H_o\mathcal{P}$.

Observación. De la condición (II) entendemos que la descomposición de un vector en sus componentes horizontal y vertical es compatible con la acción del grupo G . Por otro lado, de (III) podemos ver que si $X_o \in T_o\mathcal{P}$ es un vector tangente suave, entonces $[\text{ver}(X)]_o$ y $[\text{hor}(X)]$ también lo son.

Lema 5.2.4. *Sean $v^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ el campo vectorial fundamental asociado a $v \in \mathfrak{g}$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ un campo vectorial horizontal. Entonces $[X, v^*] \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ es horizontal.*

Demostración. Sea v^* inducido por la traslación derecha $r_{\xi(t)}$, donde $\xi(t) = \exp(tv)$ es el subgrupo uniparamétrico de G inducido por $v \in \mathfrak{g}$. Entonces, de (5.66) sabemos que

$$[X, v^*] = \lim_{t \rightarrow 0} [(r_{\xi(t)})_* X - X]. \quad (5.129)$$

Dado que X es horizontal, y $(r_{\xi(t)})_* X$ también, se sigue que $[X, v^*]$ es, en efecto, un campo vectorial horizontal. QED

Sabemos que cada $v \in \mathfrak{g}$ induce un campo vectorial $v^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ (el campo vectorial fundamental asociado). De (5.112) vemos que el mapeo $\varsigma : \mathfrak{g} \rightarrow T_o\mathcal{P}$ es un isomorfismo lineal. Definimos la 1-forma ω en \mathcal{P} con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , es decir, $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$, para cada $X_o \in T_o\mathcal{P}$, mediante la condición

$$\omega(X) = v \in \mathfrak{g}, \quad \text{donde } \varsigma(v) = v^* = \text{ver}(X). \quad (5.130)$$

Por construcción, $X_o \in H_o\mathcal{P}$ si y solo si $\omega(X) = 0$. La forma ω así definida es conocida como “forma de conexión” [14]. La forma de conexión también cumple con la definición de la forma de Maurer-Cartan (5.1.20) [25].

Teorema 5.2.5. *La forma de conexión $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ satisface las siguientes condiciones para cada $A \in G$ y cada vector tangente $X_o \in T_o\mathcal{P}$:*

- (I) $\omega(v^*) = v$ para cada $v \in \mathfrak{g}$;
- (II) $[(r_A)^* \omega](X) = (\text{Ad}_{A^{-1}})[\omega(X)]$;
- (III) ω_o depende suavemente de $o \in \mathcal{P}$.

Además, dada una 1-forma \mathfrak{g} -valuada en \mathcal{P} , ω , que satisface las condiciones (i)–(iii), existe una única conexión Γ en \mathcal{P} cuya forma de conexión es ω .

Demostración. [(I)] Esta condición se deriva directamente de la definición de forma de conexión (5.130).

[(II)] Descomponemos cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ en sus partes horizontal y vertical. Si X es un campo vectorial horizontal, entonces $(r_A)_* X$ también lo es para cada $A \in G$, en virtud de la propiedad (ii) de la definición de conexión (5.2.11). Así,

$$[(r_A)^* \omega]_o(X_o) = \omega_{oA}((r_A)_* X_o) = \omega_{oA}(X_{oA}) = 0; \quad (5.131)$$

por otro lado,

$$(\text{Ad}_{A^{-1}})_* [\omega_o(X_o)] = 0; \quad (5.132)$$

por lo que la igualdad se satisface por ser igual a cero. Si ahora X es un campo vectorial vertical podemos asumir que es el campo vectorial fundamental asociado a $v \in \mathfrak{g}$, es decir, $X = v^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$; gracias al resultado (5.2.2) sabemos que

$$[(r_A)^* \omega]_o(X_o) = \omega_{oA} [(r_A)_* v_o^*] = v_{oA} = (\text{Ad}_{A^{-1}})_* v_o = (\text{Ad}_{A^{-1}})_* \omega_o(X_o). \quad (5.133)$$

[(III)] Esto se deduce de la estructura diferencial de \mathcal{P} y la condición (III) de la definición de conexión (5.2.11).

Finalmente, sea $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$, tal que satisface (i) – (iii) podemos definir

$$H_o\mathcal{P} := \{X_o \in T_o\mathcal{P} \mid \omega_o(X_o) = 0\}. \quad (5.134)$$

La propiedad $T_o\mathcal{P} = V_o\mathcal{P} \oplus H_o\mathcal{P}$ se sigue de la definición de $H_o\mathcal{P}$ y el hecho que $\omega(X)$ es suprayectiva.

Luego, si $Y \in H_o\mathcal{P}$, entonces

$$\omega_{oA} [(r_A)_* Y] = \omega [(r_A)_* Y] = \text{Ad}_{A^{-1}} \omega(Y) = 0, \quad (5.135)$$

así que $(r_A)_* Y \in H_{oA}\mathcal{P}$. Dado que $(r_A)_*$ es uno-a-uno y $\dim(H_o\mathcal{P}) = \dim(H_{oA}\mathcal{P})$, se sigue que $H_{oA}\mathcal{P} = (r_A)_* H_o\mathcal{P}$.

Escogemos ahora la base de campos vectoriales $Y_1, \dots, Y_{n+k} \in T_o\mathcal{P}$ en una vecindad de $o \in \mathcal{P}$ y donde $\dim(G) = k$. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{g}$ los campos vectoriales que forman una base en el álgebra de Lie, de esta manera escribimos la forma de conexión como

$$\omega = v_j \otimes \omega^j, \quad (5.136)$$

donde $\omega^j \in \Lambda^1(\mathcal{P})$ son 1-formas suaves en \mathcal{P} . Definimos los campos $X_i \in T_o\mathcal{P}$ como

$$X_i = Y_i - \omega^j(Y_i) \sigma(v_j). \quad (5.137)$$

Los campos X_i son horizontales y llenan al espacio $H_o\mathcal{P}$ en una vecindad de $o \in \mathcal{P}$ [1] [14] [15] [25]. QED

La 1-forma de conexión definida por ω es conocida como “conexión de Ehresmann” y establece la elección de la estructura de $H_o\mathcal{P}$ [13].

Sean $\mathcal{A} = \{U_x\}_{x \in I}$ una cubierta abierta de \mathcal{M} , $\{U_x, \Phi_x\}_{x \in I}$ la familia de trivializaciones locales y $\Psi_{yx} : U_x \cap U_y \rightarrow G$ sus correspondientes funciones de transición. Tomamos la forma de Maurer-Cartan en G , $\Xi \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ y definimos, para cada $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, la forma $\Xi_{xy} \in \Lambda^1(U_x \cap U_y, \mathfrak{g})$ como

$$\Xi_{xy} = \Psi_{xy}^* \Xi. \quad (5.138)$$

Así mismo, para cada $x \in I$, sea $\sigma_x : U_x \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$ la sección local canónica en U_x , podemos definir $\omega_x \in \Lambda^1(U_x, \mathfrak{g})$ de manera que

$$\omega_x = \sigma_x^* \omega. \quad (5.139)$$

Lema 5.2.6. Las formas $\Xi_{xy} \in \Lambda^1(U_x \cap U_y, \mathfrak{g})$ y $\omega_x \in \Lambda^1(U_x, \mathfrak{g})$ definidas en (5.138) y (5.139), respectivamente, están relacionadas por la ecuación

$$\omega_y = \left(\text{Ad}_{\Psi_{xy}^{-1}(p)} \right)_* \omega_x + \Xi_{xy}, \quad (5.140)$$

sobre $U_x \cap U_y$, conocida como “condición de compatibilidad”.

Demostración. Sabemos que

$$\sigma_y(p) = \sigma_x(p)\Psi_{xy}(p) = \sigma_x(p)A, \quad \forall p \in U_x \cap U_y \neq \emptyset, \quad (5.141)$$

donde definimos $A = \Psi_{xy}(p) \in G$. Sean $o = \sigma_x(p)$ y $u = \sigma_y(p)$, entonces para cada vector tangente $X_p \in T_p(U_x \cap U_y)$ tenemos que $(\sigma_y)_* X_p \in T_u \mathcal{P}$, y además bajo el mapeo $\mu : \mathcal{P} \times G \rightarrow \mathcal{P}$ que denota la acción derecha del grupo, tenemos que $\mu_* : T_{(o,A)}(\mathcal{P} \times G) \rightarrow T_{oA} \mathcal{P}$. Es decir,

$$T_{(o,A)}(\mathcal{P} \times G) \xrightarrow{\chi} T_o \mathcal{P} \oplus T_A G \xrightarrow{\tilde{\mu}} T_{oA} \mathcal{P}, \quad (5.142)$$

donde $\mu_* = \tilde{\mu} \circ \chi$. De aquí encontramos que

$$(\sigma_y)_* = \tilde{\mu} \left((\sigma_x)_*, (\Psi_{xy})_* \right). \quad (5.143)$$

pues $((\sigma_x)_* X_p, (\Psi_{xy})_* X_p) \in T_o \mathcal{P} \oplus T_A G$. Descomponiendo esta expresión tenemos

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_* X_p &= \tilde{\mu} \left((\sigma_x)_* X_p, (\Psi_{xy})_* X_p \right) \\ &= (\mu \circ i_A)_* [(\sigma_x)_* X_p] + (\mu \circ i_o)_* [(\Psi_{xy})_* X_p] \\ &= (\Psi_{xy})_* (\sigma_x)_* X_p + (\mu \circ i_o)_* (\Psi_{xy})_* X_p \end{aligned} \quad (5.144)$$

habiendo definido

$$\begin{aligned} \mu \circ i_A : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P}, & \mu \circ i_o : G &\rightarrow \mathcal{P}, \\ o \mapsto \mu(o, A) &= oA, & A \mapsto \mu(o, A) &= oA. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Notemos primeramente que

$$(\Psi_{xy})_* (\sigma_x)_* X_p = (r_A)_* [(\sigma_x)_* X_p] = (\text{Ad}_{A^{-1}})_* [(\sigma_x)_* X_p]. \quad (5.146)$$

Si ahora aplicamos la forma de conexión obtenemos

$$(\sigma_y)^* \omega(X_p) = \omega [(\sigma_y)_* X_p] = (\text{Ad}_{A^{-1}})_* (\sigma_x)^* \omega(X_p) + \omega [(\mu \circ i_o)_* (\Psi_{xy})_* X_p]. \quad (5.147)$$

Para tratar el segundo término consideramos un campo vectorial $v \in \mathfrak{g}$, tal que

$$v_A = (\Psi_{xy})_* X_p, \quad i.e., \quad \Xi [(\Psi_{xy})_* X] = v. \quad (5.148)$$

Dado que $(\mu \circ i_o)_* : T_A G \rightarrow T_u \mathcal{P}$, entonces

$$(\mu \circ i_o)_* (\Psi_{xy})_* X_p = \varsigma_u(v_e) = [\varsigma(v)]_u = v_u^*, \quad (5.149)$$

pero como $\omega(v^*) = v$, tenemos que

$$\omega [(\mu \circ i_o)_* (\Psi_{xy})_* X_p] = \Xi [(\Psi_{xy})_* X_p] = (\Psi_{xy})^* \Xi(X_p) = \Xi_{xy}(X_p). \quad (5.150)$$

QED

Una vez llegados a este punto establecemos la manera de construir una forma de conexión a partir de la estructura del haz principal.

Teorema 5.2.7 (de existencia y unicidad de la forma de conexión). *Sean $\mathcal{A} = \{U_x\}_{x \in I}$ una cubierta abierta de \mathcal{M} , $\{U_x, \Psi_x\}_{x \in I}$ la familia de trivializaciones locales, $\sigma_x : U_x \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$ las secciones locales canónicas y $\Psi_{yx} : U_x \cap U_y \rightarrow G$ sus respectivas funciones de transición. Si $\omega_x \in \Lambda^1(U_x, \mathfrak{g})$ satisface la condición de compatibilidad (5.140), entonces existe una única forma de conexión ω en \mathcal{P} tal que $\omega_x = \sigma_x^* \omega$ [25].*

La demostración de este teorema se sigue del lema (5.2.6) siguiendo el proceso inverso.

Si G es un grupo matricial la condición de compatibilidad (5.140) puede escribirse como

$$\omega_y = \Psi_{xy}^{-1} \omega_x \Psi_{xy} + \Psi_{xy}^{-1} d\Psi_{xy}, \quad (5.151)$$

en virtud de (5.94) [1] [20].

5.2.5. Ecuaciones de estructura

Habiendo construido una conexión en un haz fibrado nos preguntamos inmediatamente por la curvatura y, en particular, por las ecuaciones que nos permiten desarrollar sus propiedades. Para ello introducimos una extensión de la derivada exterior.

Definición 5.2.12 (Formas verticales y horizontales). Una forma diferencial en \mathcal{P} se dice que es *vertical* si se anula siempre que al menos uno de los campos vectoriales en los que se evalúa es horizontal. Análogamente, una forma es *horizontal* si se anula cuando al menos uno de los campos en los que se evalúa es vertical.

La horizontabilidad de una forma es independiente de la existencia de una conexión.

Observación. La forma de conexión es, por construcción, vertical.

Definición 5.2.13 (Derivada exterior covariante). Sea $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{P})$, definimos su *derivada exterior covariante*, $D\alpha \in \Lambda^{k+1}(\mathcal{P})$ como

$$D\alpha = d\alpha \circ \text{hor}. \quad (5.152)$$

Es decir, sean $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$, entonces

$$D\alpha(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\alpha[\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{k+1})]. \quad (5.153)$$

Observación. $D\alpha$ es siempre horizontal [25].

Definición 5.2.14 (Forma de curvatura). Sea $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ una 1-forma de conexión, su 2-forma de curvatura es la 2-forma horizontal \mathfrak{g} -valuada en \mathcal{P} , Ω , dada por

$$\Omega := D\omega. \quad (5.154)$$

La conexión se dice que es plana si $\Omega = 0$ [24].

Teorema 5.2.8. Sea $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ una forma de conexión y $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ su forma de curvatura. Entonces

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \quad (5.155)$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$.

Demostración. Dado que cada campo vectorial en \mathcal{P} es una suma de sus componentes vertical y horizontal, entonces ambos lados de (5.155) son una función lineal antisimétrica en X y Y , por lo que podemos proceder por casos. Denotamos por $\mathfrak{H}(\mathcal{P})$ y $\mathfrak{V}(\mathcal{P})$ a los espacios de campos vectoriales horizontales y verticales en \mathcal{P} , respectivamente. [(a)] Sean $X, Y \in \mathfrak{H}(\mathcal{P})$, entonces, dado que ω es vertical podemos escribir

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \quad (5.156)$$

gracias a que $\omega(X) = \omega(Y) = 0$.

[(b)] Sean $X, Y \in \mathfrak{V}(\mathcal{P})$. Sabemos que, como Ω es horizontal, entonces $\Omega(X, Y) = 0$. Sean $u, v \in \mathfrak{g}$ tales que $X = v^*$ y $Y = u^*$, es decir, X y Y son campos vectoriales fundamentales correspondientes a v y u , respectivamente. Sabemos que

$$\omega(X) = \omega(v^*) = v \in \mathfrak{g} \quad (5.157)$$

Dado que $\omega(X) = v$ es una constante en \mathfrak{g} , entonces $Y[\omega(X)] = 0$; análogamente $X[\omega(Y)] = 0$. Entonces, expandiendo la derivada exterior de acuerdo a su definición (3.4.5)

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([v^*, u^*]) = -\omega([v, u]^*) = -[v, u]. \end{aligned} \quad (5.158)$$

Es decir,

$$0 = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]. \quad (5.159)$$

[(c)] Sean $X \in \mathfrak{H}(\mathcal{P})$ y $Y \in \mathfrak{V}(\mathcal{P})$. Notemos que $\Omega(X, Y) = 0$, pues es una 2-forma horizontal y Y es vertical. El conmutador se anula por la misma razón, ya que $\omega(X) = 0$, es decir,

$$\Omega(X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)] = 0. \quad (5.160)$$

Sea $v \in \mathfrak{g}$ tal que Y es su campo vectorial fundamental asociado, entonces

$$d\omega(X, Y) = d\omega(X, v^*) = X[\omega(v^*)] - v^*[\omega(X)] - \omega([X, v^*]) = -\omega([X, v^*]), \quad (5.161)$$

El primer y segundo término de la expansión de la derivada exterior se anulan gracias a que v es una constante en \mathfrak{g} y $X \in \mathfrak{H}(\mathcal{P})$. Dado que $[X, v^*]$ es horizontal y en virtud del lema (5.2.4) se sigue que $d\omega(X, Y) = 0$. QED

La relación (5.155) es usualmente escrita como⁹

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega], \quad (5.162)$$

y es conocida como “ecuación de estructura de Cartan” (o “segunda ecuación de estructura”¹⁰) [13].

Sea $\{e_\mu\}_{\mu=1}^k$ una base de \mathfrak{g} , donde $\dim(\mathfrak{g}) = k$, entonces podemos expandir la forma de conexión y de curvatura como

$$\omega = \omega^\mu e_\mu, \quad \Omega = \Omega^\mu e_\mu, \quad (5.163)$$

respectivamente, y donde ω^μ y Ω^μ son 1-formas en \mathcal{P} . Entonces

$$\Omega^\mu = d\omega^\mu + C_{\alpha\beta}^\mu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (5.164)$$

con $C_{\alpha\beta}^\mu$ las constantes de estructura de G .

Teorema 5.2.9 (Identidad de Bianchi). *Sea $\Omega \in \Lambda^2(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ la forma de curvatura, entonces*

$$D\Omega = 0. \quad (5.165)$$

Demostración. Dado que Ω es horizontal, consideramos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$. Entonces, tomando la derivada exterior de (5.164) obtenemos

$$d\Omega^\mu = d^2\omega^\mu + C_{\alpha\beta}^\mu d\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - C_{\alpha\beta}^\mu \omega^\alpha \wedge d\omega^\beta, \quad (5.166)$$

Gracias a que $\omega^\mu(X) = 0$, tenemos que

$$d\Omega^\mu(X, Y, Z) = 0. \quad (5.167)$$

QED

Esta relación es, de hecho, la segunda identidad de Bianchi, que ya introdujimos en (4.267).

Lema 5.2.10. *Sean $\sigma_x : U_x \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$ y $\sigma_y : U_y \rightarrow \pi^{-1}(U_y)$ secciones locales canónicas en U_x y U_y , respectivamente, sobre la cubierta abierta $\mathcal{A} = \{U_x\}_{x \in I}$ de \mathcal{M} y $\Psi_{yx} : U_x \cap U_y \rightarrow G$ sus correspondientes funciones de transición. Definimos las formas $\Omega_x \in \Lambda^2(U_x, \mathfrak{g})$ tales que [1]*

$$\Omega_x = \sigma_x^* \Omega, \quad (5.168)$$

para todo $x \in I$. Entonces

$$\Omega_y = \left(\text{Ad}_{\Psi_{xy}^{-1}(p)} \right)^* \Omega_x, \quad \forall p \in U_x \cap U_y. \quad (5.169)$$

⁹En algunas fuentes esta misma ecuación se escribe como

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Debido a la convención que se suele usar para expresar la derivada exterior (véase (3.4.5)). En efecto, debido a la convención sobre la suma de los índices. Se debe entender que ambas versiones son totalmente equivalentes.

¹⁰La primer ecuación de estructura está relacionada con la torsión. Véase la ecuación (4.219).

Demostración. La prueba se sigue de la relación (4.40) y el procedimiento seguido para obtener la transformación general de la forma de curvatura (4.252). QED

En particular, si G es un grupo matricial, entonces el álgebra de Lie \mathfrak{g} se puede identificar como un subconjunto de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Usando la base $\{e_\nu^\mu\}_{\mu, \nu=1}^n$ del álgebra podemos escribir

$$\Omega = \Omega^\mu{}_\nu e_\mu^\nu, \quad (5.170)$$

donde $\Omega^\mu{}_\nu$ son 2-formas diferenciales. Así, la ecuación de estructura luce como

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\nu. \quad (5.171)$$

A menudo también suele escribirse como [13]

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (5.172)$$

5.2.6. Clases características

Ciertas cantidades construidas a partir de la curvatura son propias del haz principal, por lo que no dependen de una conexión específica, a las que se les suele referir como «características» del mismo. Estas cantidades se preservan ante difeomorfismos sobre el haz y definen invariantes topológicos asociados. Estos tienen que ver con las clases de cohomología de De Rham, que también definen invariantes topológicos. Es por ello que estas cantidades suelen llamarse “clases características” [30].

En la práctica, la teoría de las clases características suele centrarse en el estudio de los objetos cuyo grupo de estructura, G , es $O(k)$, $SO(k)$ o $U(k)$ principalmente. En particular, para los haces principales que cuentan con alguno de estos grupos reciben su propio nombre. Las clases características de los haces principales con $O(k)$ son llamados “clases de Pontrjagin”¹¹, si el grupo es $SO(k)$ siguen llamándose clases de Pontrjagin y hay otra clase característica especial, llamada “clase de Euler”, la cual es distinta de cero solo cuando k es par. Finalmente, si $G = U(k)$, es conocida como “clase de Chern”. Existe también la “clase de Stiefel-Whitney” que está asociada al grupo $O(k)$ y es de especial importancia en física, puesto que nos dice cuándo una variedad \mathcal{M} admite una estructura de espín [32].

Las clases de Euler y Pontrjagin son clases características asociadas a haces principales reales, y por tanto el grupo de estructura está definido sobre \mathbb{R} . Por otro lado, la clase de Chern está construida sobre haces complejos, que no hemos introducido adecuadamente y por ello no estableceremos un análisis al respecto [31].

En adelante trataremos a $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ como un haz principal.

¹¹Suelen llamarse también “Pontryagin” [31].

Definición 5.2.15 (Clases características). Una *clase característica* de dimensión j para un haz suave \mathcal{P} es una función C que asocia a cada haz un elemento

$$C(\mathcal{P}) \in H^j(\mathcal{M}), \quad (5.173)$$

con la propiedad que si \mathcal{R} es otro haz m -dimensional con espacio base \mathcal{N} , si (f, g) es un mapeo de haces entre \mathcal{P} y \mathcal{R} , entonces

$$C(\mathcal{R}) = g^* [C(\mathcal{P})] \in H^j(\mathcal{N}). \quad (5.174)$$

Observación. Una formulación equivalente surge de considerar

$$C(\mathcal{P}) = C(\mathcal{R}), \quad (5.175)$$

si los haces son isomorfos, es decir, $\mathcal{P} \cong \mathcal{R}$. Para el mapeo suave $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, tenemos que [13]

$$C(g^*\mathcal{P}) = g^* [C(\mathcal{P})], \quad (5.176)$$

donde definimos el haz principal $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, \varpi)$ en el cual la proyección es

$$\begin{aligned} \varpi : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{N}, \\ \varpi(p, e) &= p. \end{aligned} \quad (5.177)$$

y además $\mathcal{R} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{P}$ que es denotado como $g^*\mathcal{P}$ y conocido como el haz sobre \mathcal{M} “inducido” por g y \mathcal{P} .

El cálculo de los grupos de cohomología es un tema que le concierne a la topología algebraica, que cuenta con sus propios métodos. En lugar de introducirnos a este campo, vamos a proceder con las herramientas geometro-diferenciales que sabemos usar.

Observación. Dado que las clases características pertenecen a $H^j(\mathcal{M})$, para algunos valores de $j \in \{1, \dots, \dim(\mathcal{M})\}$, entonces estas son formas cerradas, pero no exactas en \mathcal{M} . (Véase subsección (3.4.3).)

Clase de Pontrjagin

Si introducimos una métrica g en la variedad \mathcal{M} , podemos introducir marcos ortonormales. Análogamente semi-ortonormales si la métrica g es semi-riemanniana. En este sentido el grupo de estructura se puede entender como $O(k)$. Buscamos ahora construir un invariante topológico generado de estas estructuras.

Definición 5.2.16. Sea $A \in GL(k, \mathbb{R})$, definimos las funciones $f_i : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, k$ por medio de la relación

$$\det(\mathbb{1}\lambda + A) = 1 + \lambda f_1(A) + \dots + \lambda^n f_n(A). \quad (5.178)$$

Establecemos que $f_0(A) = 1$.

Cada función polinómica en las matrices $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ invariante ante la acción del operador adjunto en $GL(n, \mathbb{R})$ es un polinomio en estas funciones f_i [13].

Definición 5.2.17 (Polinomios invariantes). Un polinomio $p(v) \in \mathfrak{g}$, con $v \in \mathfrak{g}$ es *invariante* si [32]

$$p(A^{-1}vA) = p(v), \quad \forall A \in G. \quad (5.179)$$

Observación. Los mapeos f_i son funciones polinómicas con entradas en $GL(k, \mathbb{R})$, invariantes ante la acción adjunta del grupo. En efecto, esto puede verse gracias a que

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B) \det(A) \det(B^{-1}) = \det(A), \quad (5.180)$$

para todo $B \in GL(k, \mathbb{R})$. Con lo que

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1}\lambda + A) &= \det[B(\mathbb{1}\lambda + A)B^{-1}] = \det(\mathbb{1}\lambda + BAB^{-1}) \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda^i f_i(BAB^{-1}) = \sum_{i=0}^k \lambda^i f_i(A). \end{aligned} \quad (5.181)$$

En particular, sea $A \in \mathfrak{o}(k)$, entonces

$$(\mathbb{1}\lambda + A)^t = \mathbb{1}\lambda - A, \quad \implies \quad \det(\mathbb{1}\lambda + A) = \det(\mathbb{1}\lambda - A), \quad (5.182)$$

con lo que

$$\sum_{i=0}^k \lambda^i f_i(A) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \lambda^i f_i(A), \quad (5.183)$$

y por lo tanto, $f_i(A) = 0$ si i es impar.

Corolario 5.2.10.1. Sea $k = 2m$ o $k = 2m+1$. Entonces una función polinómica f en $\mathfrak{o}(k)$ que es invariante ante la acción adjunta de $O(n)$ es un polinomio en f_2, \dots, f_{2m} [13].

Una primer propuesta es tomar estos polinomios invariantes sobre la forma de curvatura Ω . Aunque esta no parece ser la mejor propuesta debido a que al tomar una conexión diferente la curvatura cambia, el resultado de interés es que estas clases características están dadas por formas diferenciales que son polinomios independientes de la conexión (hablando en términos de la cohomología). Para pensar en esta independencia debemos escoger invariantes del álgebra de Lie \mathfrak{g} . Por lo que las funciones f_i definidas anteriormente resultan ahora en una elección más elocuente.

Observación. En el polinomio invariante

$$p(\Omega) = \sum_{i=0}^k \lambda^i f_i(\Omega), \quad (5.184)$$

las funciones $f_i(\Omega)$ son polinomios de grado i , dado que Ω es una 2-forma, entonces $p_i(\Omega)$ es una $2i$ -forma.

Dado que el polinomio invariante se anula para i impar podemos renombrar los índices de manera que

$$p(\Omega) = \sum_{i=0}^m \lambda^i p_{m-i}(\Omega), \quad \text{donde } p_{m-i} = f_{2i}, \quad (5.185)$$

entonces $p_i(\Omega)$ es una $4i$ -forma.

Lema 5.2.11. *Sea $\alpha \in \Lambda^l(\mathcal{P})$ que se proyecta a una forma $\tilde{\alpha} \in \Lambda^l(\mathcal{M})$, es decir, $\alpha = \pi^*(\tilde{\alpha})$. Entonces*

$$d\alpha = D\alpha. \quad (5.186)$$

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_{l+1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$, entonces

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{l+1}) &= (d\pi^*(\tilde{\alpha}))(X_1, \dots, X_{l+1}) \\ &= (\pi^*d(\tilde{\alpha}))(X_1, \dots, X_{l+1}) \\ &= (d(\tilde{\alpha}))(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_{l+1}) \\ &= (d(\tilde{\alpha}))[\pi_*\text{hor}(X_1), \dots, \pi_*\text{hor}(X_{l+1})] \\ &= (\pi^*d(\tilde{\alpha}))[\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{l+1})] \\ &= (d\pi^*(\tilde{\alpha}))[\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{l+1})] \\ &= (d\alpha)[\text{hor}(X_1), \dots, \text{hor}(X_{l+1})] \\ &= D\alpha(X_1, \dots, X_{l+1}). \end{aligned} \quad (5.187)$$

QED

Teorema 5.2.12. *Los términos del polinomio invariante (5.185) satisfacen lo siguiente:*

- (I) $p_i(\Omega)$ es cerrada;
- (II) las formas $p_i(\Omega)$ son independientes de la conexión ω .

Demostración. [(I)] Pensemos a $p_i(\Omega)$ como una forma multilineal simétrica en i variables denotada como $p(x_1, \dots, x_i)$. Tenemos que si $x = x_j$ para $j = 1, \dots, i$, entonces

$$p(x, \dots, x) = p_i(x), \quad (5.188)$$

por lo que podemos considerar

$$\begin{aligned} dp_i(\Omega) &= Dp_i(\Omega) = p(D\Omega, \dots, \Omega) + \dots + p(\Omega, \dots, D\Omega) \\ &= ip(D\Omega, \dots, \Omega) = 0, \end{aligned} \quad (5.189)$$

en virtud de la identidad de Bianchi (5.165). Es decir,

$$dp_i(\Omega) = 0. \quad (5.190)$$

[(II)] Sean ω y ω' dos formas de conexión y definimos la familia de conexiones $\tilde{\omega}$ como

$$\tilde{\omega} = \omega + t(\omega' - \omega) = \omega + t\alpha, \quad t \in [0, 1], \quad (5.191)$$

es decir, la forma $\alpha := \omega' - \omega$ puede definir una forma de curvatura $\tilde{\Omega}$. Entonces $\tilde{\omega}$ varía de ω a ω' y $\tilde{\Omega}$, de Ω a Ω' conforme t va de 0 a 1. De esto podemos ver que

$$p_i(\Omega) - p_i(\Omega') = \int_0^1 \frac{d}{dt} p_i(\tilde{\Omega}) dt = \int_0^1 d\beta(t) = d\left(\int_0^1 \beta(t) dt\right) = d\eta \quad (5.192)$$

donde

$$\frac{d}{dt} p_i(\tilde{\Omega}) dt = d\beta(t), \quad y \quad \eta = \int_0^1 \beta(t) dt, \quad (5.193)$$

para $t \in [0, 1]$. Buscamos ahora probar que $\beta(t)$ es exacta para $i \in [0, 1]$. Esto ya lo probamos para $t = 0$, entonces para considerar el resto de valores de t cambiamos al intervalo $[t, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i(\tilde{\Omega}) &= \frac{d}{dt} p(\tilde{\Omega}, \dots, \tilde{\Omega}) \\ &= p\left(\frac{d\tilde{\Omega}}{dt}, \dots, \tilde{\Omega}\right) + \dots + p\left(\tilde{\Omega}, \dots, \frac{d\tilde{\Omega}}{dt}\right). \end{aligned} \quad (5.194)$$

Pero como

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \\ &= d(\omega + t\alpha) + (\omega + t\alpha) \wedge (\omega + t\alpha) \\ &= \Omega + t(d\alpha + \omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega) + t^2 \alpha \wedge \alpha \\ &= \Omega + tD\alpha + t^2 \alpha \wedge \alpha, \end{aligned} \quad (5.195)$$

y donde

$$\left. \frac{d\tilde{\Omega}}{dt} \right|_{t=0} = D\alpha, \quad (5.196)$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i(\tilde{\Omega}) &= p(D\alpha, \dots, \Omega) + \dots + p(\Omega, \dots, D\alpha) \\ &= ip(D\alpha, \dots, \Omega) \\ &= d[ip(\alpha, \dots, \Omega)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.197)$$

esto último en virtud de la identidad de Bianchi. Así,

$$p_i(\Omega) - p_i(\Omega') = d\eta, \quad (5.198)$$

donde η es una forma exacta, por lo que $p_i(\Omega)$ y $p_i(\Omega')$ pertenecen a la misma clase de cohomología. QED

Observación. Tenemos que $p_i(\Omega) \in H^{4i}(\mathcal{M})$.

Definición 5.2.18 (Clase de Pontrjagin). La *clase total de Pontrjagin*, $p(\mathcal{P})$ está dada, en términos de los polinomios invariantes como

$$p(\mathcal{P}) := \det \left(\mathbb{1}\lambda - \frac{1}{2\pi}\Omega \right) = \sum_{i=0}^m \lambda^i p_{m-i}(\Omega). \quad (5.199)$$

Los polinomios p_i son conocidos como *clases de Pontrjagin*.

La razón de la normalización (es decir, el factor $\frac{1}{2\pi}$ que acompaña a la curvatura) se incluye porque la clase característica determina la integral de las clases de cohomología. Más adelante regresaremos a esto para encontrar los «números característicos».

Observación. Dado que el álgebra de Lie de $SO(k)$ es $\mathfrak{o}(k)$, podemos calcular la clase de Pontrjagin en los haces cuyo grupo de estructura sea $SO(k)$ [32].

Clase de Euler

Consideremos ahora $G = SO(k)$, donde $k = 2m$.

Definición 5.2.19. La *clase de Euler*, denotada como $e(\mathcal{P})$, está dada por la relación

$$e(\mathcal{P}) \wedge e(\mathcal{P}) = p_m(\Omega). \quad (5.200)$$

Si \mathcal{M} es una variedad diferencial con dimensión impar, entonces

$$e(\mathcal{P}) = 0. \quad (5.201)$$

Observación. Tenemos que $e(\mathcal{P}) \in \Lambda^{2m}(\mathcal{M})$, es decir, es un elemento de $H^k(\mathcal{M})$.

En general, el determinante de una matriz de tamaño $k \times k$ antisimétrica es el cuadrado de un polinomio conocido como “pfaffiano”.

Definición 5.2.20 (Pfaffiano). Sea $A \in M_{k \times k}(\mathbb{F})$ con $k = 2m$, para algún $m \in \mathbb{N}$ (es decir, k es par). Definimos el *Pfaffiano* de A , denotado por $\text{Pf}(A)$, como

$$\text{Pf}(A) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \sum_{i_1 \cdots i_k} \epsilon^{i_1 \cdots i_k} a_{i_2}^{i_1} \cdots a_{i_k}^{i_{k-1}}, \quad (5.202)$$

donde $a_j^i \in \mathbb{F}$ son las componentes de la matriz [13].

La definición (5.2.20) recuerda al concepto de determinante y, en efecto, hay una relación entre ambos conceptos.

Lema 5.2.13. Sea $A \in M_{k \times k}(\mathbb{F})$ con $k = 2m$, entonces

$$\text{Pf}^2(A) := [\text{Pf}(A)]^2 = \det(A). \quad (5.203)$$

Un resultado inmediato es entonces el siguiente.

Corolario 5.2.13.1. *Sea $k = 2m$ par. Entonces para toda matriz $A, B \in M_{k \times k}(\mathbb{F})$ se cumple*

$$\text{Pf}(B^t AB) = \det(B)\text{Pf}(A). \quad (5.204)$$

Observación. En particular, si $B \in SO(k)$ entonces

$$\text{Pf}(B^t AB) = \text{Pf}(A). \quad (5.205)$$

El Pfaffiano se refiere a matrices cuyo valor está en un campo, pero podemos extenderlo a valores sobre un álgebra conmutativa \mathcal{B} sobre \mathbb{R} . Consideremos ahora $A, B \in \mathcal{B}$, la prueba de los resultados (5.2.20-5.2.13.1) funciona sin mayores cambios gracias al “principio de extensión de identidades algebraicas”.

Teorema 5.2.14. *Sea $k = 2m$, entonces cada función polinómica en $\mathfrak{o}(k)$ invariante ante la acción adjunta de $SO(k)$ es un polinomio en f_2, \dots, f_{2m-2} definidos en (5.2.16) y el pfaffiano.*

Podemos entonces considerar la expresión

$$\begin{aligned} \text{Pf}\left(\frac{1}{2\pi}\Omega\right) &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \sum_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{i_1 \dots i_k} \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)_{i_k}^{i_{k-1}} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \sum_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{i_1 \dots i_k} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_k}^{i_{k-1}} \\ &= \frac{(-1)^m}{(4\pi)^m m!} \sum_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{i_1 \dots i_k} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_k}^{i_{k-1}}. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Definimos entonces [5]

$$e(\mathcal{P}) := \frac{(-1)^m}{(4\pi)^m m!} \sum_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{i_1 \dots i_k} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_k}^{i_{k-1}}. \quad (5.207)$$

Notemos que, en virtud de (5.205), el pfaffiano $\text{Pf}[(2\pi)^{-1}\Omega]$ es invariante solo en $SO(k)$, mas no en $O(k)$.

Números característicos

Dentro de la geometría existe un resultado muy importante conocido como “teorema de Gauss-Bonnet”, que establece que para una superficie compacta \mathcal{S} , se cumple

$$\int_{\mathcal{S}} K d\sigma = 2\pi\chi(\mathcal{M}), \quad (5.208)$$

donde $\chi(\mathcal{M})$ es la característica de Euler, K la curvatura intrínseca y $d\sigma$ el elemento de volumen sobre la superficie [13]. Este resultado se puede generalizar a las clases

características, de manera que la integración sobre la variedad base \mathcal{M} sea también un invariante topológico. En particular, introdujimos el factor de normalización $\frac{1}{2\pi}$ para que la integral tome valor sobre los enteros. Es decir,

$$\int_{\mathcal{M}} e(\mathcal{P}) = \chi(\mathcal{M}) = n \in \mathbb{Z}, \quad (5.209)$$

Esto en lo que respecta a la clase de Euler, sin embargo, podemos ir más lejos aseverando una forma similar para la clase de Pontrjagin. Para establecer esto recordemos que las clases características $C(\mathcal{P})$ son formas diferenciales, por tanto pueden ser integradas sobre \mathcal{M} o algún ciclo compacto¹² (si la forma en cuestión es de menor orden que la dimensión de la variedad base). Cuando esta integración se lleva a cabo el resultado es un número, cuyo nombre depende de la clase que se use para calcularlo. Si integramos las i -ésimas clases de Pontrjagin sobre una i -cadena, respectivamente, los números obtenidos son llamados “números de Pontrjagin”; en cambio, si $c_i(\mathcal{P})$ son las clases características de Chern y se integran sobre una i -cadena respectiva, los valores de dichas integrales son conocidos como “números de Chern”. Es decir,

$$\int_{\mathcal{N}_i} C_i(\mathcal{P}) = n_i, \quad (5.210)$$

donde $C_i(\mathcal{P})$ puede ser $p_i(\mathcal{M})$ o $c_i(\mathcal{P})$ y \mathcal{N}_i es una i -cadena. En general, la integral $\int_{\mathcal{M}} C(\mathcal{P})$ es un invariante topológico que siempre puede ser normalizado de tal manera que

$$\int_{\mathcal{M}} C(\mathcal{P}) = n \in \mathbb{Z}. \quad (5.211)$$

La integral de $\dim(\mathcal{M})$ -formas sobre \mathcal{M} , que se construyen a partir de productos cuña de las clases características son también llamados “números característicos” de \mathcal{M} [32].

Con este último resultado damos por concluida nuestra base matemática, esta engloba los requisitos previos a nuestro estudio físico. Vale la pena mencionar ahora que dicha introducción es tan solo una pequeña parte del gran edificio que conforma la geometría diferencial; las herramientas aquí presentadas son suficientes para nuestro propósito, empero no se debe olvidar que obedecen a sus propios intereses, los cuales lamentablemente dejamos fuera en gran parte debido que su estudio abarca mucho más de lo que pueda caber en un solo trabajo. Este no es un espacio para hablar enteramente de su estudio, motivaciones y propósito, pero valgámonos de haberlo vislumbrado someramente para presentar adecuadamente una construcción de la cuantización topológica.

¹²Que por ahora puede entenderse como una subvariedad cuya dimensión es igual al grado de la forma en la clase característica. Este concepto trata sobre las “cadenas” y la relación entre la derivada exterior d y el operador frontera ∂ ; sin embargo, estos temas rebasan los objetivos de nuestro análisis. Aún así, el lector puede referirse a la bibliografía [32].

Parte II

Cuantización topológica

6 Gravitación

«Y sin embargo, se mueve.»

Galileo Galilei

El estudio teórico del fenómeno de la gravedad tiene sus inicios con Isaac Newton y su “ley de gravitación universal”, que se convirtió en el formalismo adecuado para los sistemas conocidos en la época. A la par de la gravitación, Newton estableció las leyes de la mecánica que regían el movimiento de los objetos con bastante precisión. Esta aportación fue de especial importancia para el desarrollo de lo que conocemos como “mecánica clásica”, y que ahora sabemos no describe con la rigidez suficiente cualquier sistema físico en la naturaleza. De hecho, aquellos sistemas que no son descritos apropiadamente por la mecánica clásica constituyeron las dos grandes revoluciones del siglo XX, al menos en cuanto se refiere a la física: las mecánicas cuántica y relativista.¹

Mientras la mecánica clásica seguía en expansión, a finales del siglo XIX se formalizó la teoría electromagnética, cuyo objetivo era justamente detallar el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Esta última llegó a su auge cuando se establecieron las ecuaciones de Maxwell, capaces de explicar todo sistema electromagnético (hasta entonces). Sin embargo, aparecía un inconveniente y una nueva mecánica asomándose a la vuelta del siglo. Mientras algunos físicos batallaban contra el cuerpo negro, otros se concentraban en la inconsistencia entre la mecánica clásica y la electrodinámica. Finalmente el problema se resolvió cuando se propuso que la velocidad de la luz era una constante universal, una cantidad que tenía el mismo valor quien fuera que lo midiese. Rápidamente esto fue satisfactorio para el problema que atacaba, pero entraba en conflicto² con otra aportación de Newton: la gravitación.

Actualmente existen numerosas teorías bastante rigurosas que se enfocan en el problema de la gravedad clásicamente, de entre ellas destaca la teoría de Einstein por su precisión en cuanto a las pruebas experimentales y observaciones realizadas. Lo cierto es que hay teorías que son equivalentes a ella en cuanto a su descripción física y

¹Algunos autores consideran que la mecánica estadística es otra gran revolución del siglo, sin embargo, esta rama queda aún fuera del alcance de la cuantización topológica y por tanto no abordaremos una discusión más detallada al respecto.

²Ya que la gravitación de Newton no estaba formulada sobre la mecánica relativista, por lo mismo no respectaba sus restricciones.

hacen uso de herramientas matemáticas alternativas³. Sin embargo, nos concentraremos en esta porque es la más empleada para la descripción de la gravedad en el último siglo (además de la teoría de Newton); la información observacional recabada, al igual que las predicciones que han sido verificadas dan fe de ella y la han establecido como la teoría estándar de la gravedad.

La relatividad general es la teoría del espacio, el tiempo y la gravitación, para hacer justicia a ello precisamos de la teoría que le precede, esto es, la mecánica relativista; un vistazo general nos va a permitir desarrollar más cómodamente la teoría de Einstein⁴ como una generalización.

³Véase [33] [34] [23] o para un tratamiento de la teoría de Einstein en cinco dimensiones [17].

⁴Algunos autores hacen una distinción entre lo que es la teoría de Einstein y la relatividad general [17] [25]. La diferencia radica en los postulados de los que se parte para construir la teoría, pues la primera se basa en el principio de mínima acción, formalizando la teoría sobre una propuesta para el lagrangiano que describe la interacción de los campos; mientras que la segunda, parte de los principios de equivalencia, covariancia general, etc., que le permiten establecer la teoría física desde otro formato. Nosotros presentaremos ambos enfoques, aunque sin distinción alguna (dado que se trata del mismo panorama físico y llegamos a las mismas ecuaciones de campo) puesto que nos interesan tanto los postulados (que se basan fuertemente en las observaciones) como la geometría que construimos en la primer parte para acabar de formalizar la deducción de las ecuaciones de campo.

6.1. Mecánica clásica

El esfuerzo en la comprensión y el estudio de los cuerpos materiales permitió formular la mecánica analítica (o simplemente mecánica). En la actualidad, debido a la creciente ramificación de los temas que le incumben a la física, este estudio conforma lo que ahora conocemos como mecánica clásica. En particular, con la palabra “clásico” nos referimos a las teorías no-cuánticas, es decir, aquellas en que los efectos de las teorías cuánticas no son válidos, o bien, despreciables; estas son parte de la física clásica. Sin embargo, en esta sección y la siguiente (6.2) (en que introducimos la relatividad especial) interpretamos “mecánica clásica” como la rama que deja fuera los fenómenos debidos a la teoría de la relatividad; por lo que, en este caso, nos vamos a referir a sistemas no-cuánticos y no-relativistas.

La mecánica clásica se basa en suponer al espacio físico como un continuo de todas las posiciones que puede ocupar un objeto y que además es inmutable. Podemos entonces representarlo como un espacio euclideo 3-dimensional. Así mismo, una vez sincronizados dos relojes (ideales) estos siempre lo estarán respecto al otro y asociamos al tiempo un parámetro de evolución, que nos permite describir el comportamiento de un sistema a lo largo de su dependencia con este, por lo que puede representarse como un espacio abstracto uni-dimensional. Estas descripciones son las nociones que se presentan de acuerdo a nuestra intuición del Universo físico⁵, y son aproximadas puesto que en la actualidad se tienen definiciones alternas y, en efecto, diferentes teorías buscan ofrecer un panorama completo de lo que es el espacio y el tiempo en cuanto a su aspecto fundamental.

Principiando con las bases del formalismo presentamos el principio de relatividad, el cual se apoya de los sistemas coordinados que, dada la estructura que le impusimos al espacio, siempre podemos anclar a los sistemas mecánicos. Aún así, hay otra propiedad que nos ayudará en nuestro propósito.

Principio 6.1.1 (de relatividad de Galileo). *Existen sistemas coordinados, llamados “inerciales”, que poseen las siguientes propiedades:*

- (I) *las leyes de la mecánica en cualquier momento del tiempo son las mismas en todos los sistemas inerciales,*
- (II) *todos los sistemas coordinados en movimiento rectilíneo uniforme con respecto a uno inercial son a su vez inerciales.*

Ahora bien, consideremos la noción de partícula «aislada», consiste en una partícula suficientemente pequeña y suficientemente alejada de cualquier otra partícula material. Lo que entendemos por «suficiente» dependerá de la precisión de las mediciones efectuadas, es decir, válidas para mediciones cuyas incertidumbres son grandes en

⁵A pesar que en la actualidad nuestra noción del espacio y el tiempo es la correspondiente a la teoría de la relatividad general.

comparación a las dimensiones características de la partícula y mediciones de tiempo cuyas incertidumbres son también grandes comparadas con los tiempos característicos de los cambios dentro del objeto. Estos tiempos y distancias, pensados grandes al lado de las características del objeto, no deben ser pequeños comparados a las distancias del objeto más cercano y el tiempo para alcanzarla. En este sentido, la precisión de los principios que establecemos ahora aumentará con el «grado» de aislamiento de la partícula [35].

Ley 6.1.2 (primera de Newton). *Siempre que un cuerpo permanezca aislado se mantendrá en velocidad constante.*

A menudo también se le conoce como “ley de inercia”, pues asevera que siempre es posible encontrar un sistema coordenado en el que un cuerpo aislado se mueve uniformemente; la esencia de la primera ley de Newton es entonces aseverar, junto al principio de Galileo, que los sistemas inerciales existen [36]. La velocidad \mathbf{v} , se define como la tasa de cambio de la posición respecto al tiempo t . Es decir, si x^i son las coordenadas espaciales, para $i = 1, 2, 3$, y la posición la representamos como $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ entonces

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}. \quad (6.1)$$

Ley 6.1.3 (segunda de Newton). *La fuerza que actúa sobre un cuerpo se identifica como la tasa de cambio de la cantidad de movimiento respecto al tiempo.*

Sea \mathbf{p} la cantidad de movimiento y \mathbf{F} la fuerza medidas en un sistema inercial, entonces

$$\mathbf{F} := \dot{\mathbf{p}}. \quad (6.2)$$

Una versión equivalente asevera que la fuerza que experimenta un cuerpo es proporcional a su aceleración. Dado que la aceleración se define como $\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}}$, entonces

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (6.3)$$

es decir, m es una constante positiva e independiente del sistema coordenado⁶, esta es la “masa inercial” del objeto. Y podemos ver que

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (6.4)$$

Ley 6.1.4 (tercera de Newton). *A cada acción de una fuerza le corresponde una fuerza de reacción que es opuesta en dirección, pero igual en magnitud.*

⁶Dicha constante puede escribirse como

$$m := \frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{a}\|},$$

donde $\|_ \|$ es la norma euclideana del vector.

En general, las leyes de la mecánica clásica pueden plantearse desde diferentes perspectivas, y en cuanto a ello podemos introducir diferentes formulaciones para la misma teoría. Las leyes de Newton (6.1.2-6.1.4) junto con el principio de relatividad (6.1.1) son las bases de la mecánica newtoniana. Existen diferentes enfoques, cada uno de los cuales establece métodos para encontrar las ecuaciones de movimiento, que son el conjunto de reglas que satisface un sistema mecánico y que al resolverlas nos permiten, en principio, conocer completamente su evolución [37] [38] [39].

Esto nos conduce analíticamente a las transformaciones de Galileo. Sean dos sistemas de inerciales \mathcal{O} y \mathcal{O}' en los que el segundo se mueve respecto al primero con velocidad constante \mathbf{v} . Tomamos un objeto cuyas coordenadas en \mathcal{O} y \mathcal{O}' son (x, y, z) y (x', y', z') , respectivamente. Si el movimiento de \mathcal{O}' lo referimos al eje X en \mathcal{O} y X' en \mathcal{O}' , entonces

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, & y' &= y, \\t' &= t, & z' &= z.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Estas son las reglas de transformación relativos al movimiento entre dos sistemas coordenados. En principio, todo sistema mecánico satisface estas transformaciones [39]. Sin embargo, cuando tomamos las ecuaciones de Maxwell en la teoría electromagnética⁷

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{6.6}$$

vemos que las transformaciones de Galileo no las preservan. Es decir, si tomamos dos sistemas coordenados que se mueven a velocidad constante entre sí, estas ecuaciones no permanecen invariantes bajo las transformaciones de Galileo.

Así mismo, una importante predicción de la teoría es que un campo eléctrico dependiente del tiempo genera un campo magnético. Surge un problema dentro del formalismo ya que esta dependencia puede cambiar de un sistema de referencia a otro. Las leyes de la física deberían ser, en principio, independientes de ello (por lo que esta cuestión no queda del todo entendida). Existen más ejemplos que exhiben, en efecto, que ambas teorías parecen contradecirse. Para resolver estas cuestiones formulamos la “teoría de la relatividad”.

⁷Las cantidades ϵ_0 y μ_0 son las constantes de permitividad y permeabilidad en el vacío, respectivamente. Mientras que la “divergencia” de un campo vectorial \mathbf{F} la denotamos como $\nabla \cdot \mathbf{F}$, y al “rotacional”, $\nabla \times \mathbf{F}$.

6.2. Relatividad especial

Vamos a sobreentender las nociones de movimiento inercial y «no-acelerado» de manera usual en la mecánica clásica. En primer lugar, vamos a extender el principio de Galileo, sobre la independencia de las leyes de la mecánica en los sistemas inerciales, a toda ley física que gobierna el comportamiento del mundo material. Por otro lado, introducimos un postulado más que se refiere a la interpretación sobre la velocidad de la luz medida en un sistema de referencia al pasar a otro, mediante las transformaciones de Lorentz (que mantienen invariantes a las ecuaciones de Maxwell, sabiendo que la luz es un sistema adecuadamente descrito por esta teoría).

Postulado 6.2.1 (Principio de relatividad (extendido)). *Las leyes de la física son las mismas independientemente del sistema inercial.*

Postulado 6.2.2 (Constancia de la velocidad de la luz). *La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas inerciales e independiente del movimiento de la fuente.*⁸

Estos son los postulados de la relatividad especial. El segundo nos indica que la velocidad de la luz es la misma independientemente del sistema inercial en que se mida, lo que implica esta afirmación es que el espacio y el tiempo no son absolutos. Esto también entra en conflicto desde la perspectiva de la mecánica clásica con el principio de relatividad⁹ (6.2.1).

6.2.1. Estructura del espaciotiempo

Consideremos ahora la relación $c = \|\mathbf{v}\|$, para un sistema que se mueve a la velocidad de la luz, de donde

$$c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad (6.7)$$

⁸Este postulado se hace más evidente con el experimento de Michelson y Morley, mediante el cual intentaron medir un cambio en la velocidad de la luz con rayos que van, uno con el movimiento de la Tierra y el otro en sentido opuesto, al reencontrarse deberían estar desfasados. Con ello Michelson y Morley buscaban determinar las propiedades del éter, un fluido que se creía permeaba el espacio y permitía que las ondas electromagnéticas viajaran en el espacio «vacío». Concluyeron que no había ningún desfase y, por lo tanto, posibilidad de determinar estas propiedades mediante este procedimiento. En la actualidad este experimento sirvió para aseverar que, en efecto, la luz puede viajar en el vacío y sentó las bases para interpretar en un sentido físico las transformaciones de Lorentz.

⁹Pero este se esclarece discutiendo la sincronización de dos relojes distantes con rayos de luz.

entonces podemos considerar¹⁰

$$\begin{aligned} c^2 dt^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 dt^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{dt} dt\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 dx^i dx^i, \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde hemos hecho $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$ y $z \equiv x^3$. Llegamos así a la condición

$$0 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.9)$$

Imponiendo una pseudo-métrica¹¹ plana

$$[\eta] := \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (6.10)$$

que a su vez nos permite definir un elemento de línea espacial dl^2 que asignamos al espacio y representa su geometría¹² podemos escribir la relación anterior como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dl^2 = 0, \quad (6.11)$$

aquí hemos hecho $ct \equiv x^0$ y la suma corre desde 0 hasta 3. La métrica η está definida en un espacio \mathcal{M} de 4 dimensiones que conforma tanto al espacio físico como al tiempo, podemos entonces entenderla como un solo objeto al que nombraremos “espaciotiempo” y es el lugar donde ocurren todos los sucesos en el Universo, a los que llamamos “eventos”. Cada punto en el espaciotiempo puede ser identificado con cuatro coordenadas, que corresponden al tiempo y lugar en que un evento se localiza. A η , definida en (6.10), se le conoce como “métrica de Minkowski” y al espaciotiempo \mathcal{M} dotado de ella, (\mathcal{M}, η) , “espaciotiempo de Minkowski”.

Observación. η es constante y, por lo tanto, el espaciotiempo de Minkowski es plano.

Definición 6.2.1 (Observador inercial). Un *observador inercial* es un sistema coordinado para el espaciotiempo que puede hacer una observación identificando la posición (x, y, z) y el tiempo t para cada evento, (ct, x, y, z) .

Observación. Un objeto en reposo respecto a un observador en reposo relativo anclado al origen, con coordenadas $(0, 0, 0, 0)$, espacialmente permanecerá ahí, pero su coordenada temporal seguirá avanzando, pues se mueve al futuro. Después de un tiempo t , tendrá coordenadas $(t, 0, 0, 0)$.

¹⁰En nuestra notación los diferenciales deberían ir en negritas, pero vamos a obviar este hecho para no cargar una notación engorrosa: $dx \equiv \mathbf{dx}$.

¹¹En adelante simplemente métrica, sobreentendiendo que nos referimos a la pseudo-métrica a menos que se diga lo contrario.

¹²Este, sabemos, es el espacio euclideo tridimensional de la mecánica clásica, por lo que puede ser representado en las coordenadas que se prefieran; en nuestro análisis son cartesianas, pues está dado por $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Definición 6.2.2 (Tiempo propio). Al tiempo transcurrido medido por un observador inercial se le conoce como *tiempo propio* y es denotado usualmente como τ . A su vez definido a partir de la relación

$$d\tau^2 = -ds^2. \quad (6.12)$$

Esta definición es independiente del observador. Podemos también expresar esta relación expandiendo el elemento de línea de modo que

$$d\tau^2 = - \left(-dt^2 + \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \right) = dt^2 (1 - v^2), \quad (6.13)$$

para un observador que se desplaza a velocidad v . La relación entre el tiempo propio y el tiempo del otro observador entre dos eventos A y B es entonces

$$\tau = \int d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - v^2} dt. \quad (6.14)$$

Por otro lado, el tiempo propio medido por un observador en reposo relativo se reduce al tiempo coordenado del observador

$$d\tau^2 = dt^2. \quad (6.15)$$

De esta manera el tiempo propio de un objeto entre dos eventos A y B queda expresado como [40]

$$\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt = t_B - t_A. \quad (6.16)$$

6.2.2. Relatividad del tiempo y el espacio

En el espaciotiempo, las trayectorias de los objetos pueden ser representados por “líneas mundo” que, como su nombre lo indica, son líneas sobre el espaciotiempo que caracterizan la evolución de un evento en un sistema de referencia \mathcal{R} . Por ahora consideremos movimiento en una sola dimensión para representarlo gráficamente, sea entonces X el eje de movimiento y cT , el de tiempo (en virtud que las coordenadas espaciotemporales $x^0 = ct$). La línea mundo de un objeto que se encuentre en reposo puede ser representada como una recta paralela al eje T (es decir, a una posición x fija). En este sentido una línea diagonal representa un objeto moviéndose a velocidad constante, la inclinación entonces puede cuantificar su velocidad: la luz tiene una trayectoria fija, dado que en todos los sistemas de referencia tiene la misma velocidad y el elemento de línea asignado es $ds^2 = 0$, o lo que es lo mismo, $cdt = dl = dx$, podemos entender que «avanza» de igual forma tanto en el espacio como en el tiempo, pues $x^0 = x^1$.¹³ Es decir, un haz de luz que se mueva a lo largo del eje X «dibujará» una línea mundo diagonal, a un ángulo de 45° entre el eje T y X .

¹³Para encontrar dicha relación basta con observar que

$$\frac{dx^1}{dx^0} = 1,$$

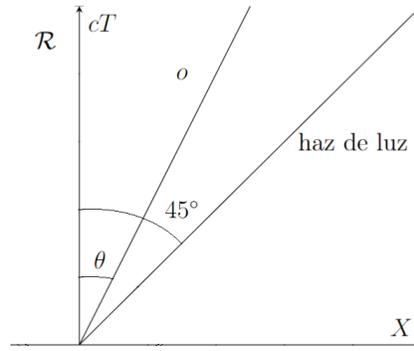


Figura 6.1: Línea mundo de un objeto o a velocidad constante y de un haz de luz.

Debido al postulado (6.2.2), en todo sistema de referencia se debe satisfacer que la línea mundo de la luz sea siempre la misma; para conseguir esto los ejes de otro sistema de referencia, que se mueva respecto al primero, deberán cambiar de una manera específica, es intuitivo pensar que este otro sistema tenga su propia línea mundo, que represente su movimiento respecto al primero. Pero lo que ocurre con la medición del espacio y el tiempo se visualiza de manera distinta. Para entender mejor lo que ocurre precisamos de una discusión sobre la sincronización de relojes en diferentes sistemas de referencia.

Consideremos una señal de luz que enviamos desde el origen espacial, a un tiempo $t = t_A$; al tiempo t_B es recibido por un espejo localizado sobre el eje X . Esta señal es reflejada y recibida otra vez por el observador que estaba en el origen, pero a un tiempo t_C . Por el postulado (6.2.2), los rayos de luz se mueven a la misma velocidad sin importar la dirección de movimiento, obteniéndose

$$t_B = \frac{1}{2} (t_A + t_C). \quad (6.17)$$

Cuando esta relación se satisface decimos que los relojes en el origen y en el espejo están “sincronizados (según Einstein)” y nos sirve también para medir distancias. La distancia entre el origen y el espejo está dada por

$$L = \frac{c}{2} (t_C - t_A). \quad (6.18)$$

que es la pendiente de la recta y cuyo ángulo es de 45° . La relación entre el ángulo de inclinación θ sobre el eje cT de la línea mundo y la velocidad del objeto está dado por [40]

$$v = \tan \theta.$$

Dilatación temporal

Como mencionamos al inicio de la sección, el precio por mantener la constancia de la velocidad de la luz nos lleva a renunciar a la noción absoluta del espacio y el tiempo. Para aclarar esto consideremos dos espejos paralelos que se mueven a lo largo del eje X a una rapidez v y separados a una distancia L_0 . Referimos el movimiento únicamente al eje X y tomamos la rapidez como v . Tenemos ahora dos sistemas de referencia: \mathcal{R} que está en reposo para un observador inercial \mathcal{O} y \mathcal{R}' , que lo hace con los espejos (es decir, en dicho sistema los espejos están en reposo). Ahora bien, enviamos un rayo de luz desde uno de ellos, el tiempo que le toma regresar al mismo en el sistema \mathcal{R}' es

$$\Delta t' = \frac{2L_0}{c}. \quad (6.19)$$

Para el sistema \mathcal{R} los rayos de luz tienen que ir en zigzag siguiendo el movimiento de los espejos. La trayectoria del haz de luz junto con el de los espejos dibuja triángulos isósceles de altura L_0 y base $v\Delta t$ (que es la distancia que recorre el espejo en el tiempo que le toma al haz de luz volver). Para recorrer los lados iguales del triángulo (el primer zigzag), el haz de luz atraviesa una distancia $c\Delta t$. Si cortamos este triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos (trazando una línea que le corte por la mitad), cuyos catetos son L_0 y $\frac{1}{2}v\Delta t$ (media base), tendremos que la hipotenusa mide $\frac{1}{2}c\Delta t$. Usando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = L_0^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2, \quad (6.20)$$

de donde,

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\Delta t\right]^2 (c^2 - v^2) = L_0^2. \quad (6.21)$$

Es decir,

$$\Delta t = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2\gamma L_0}{c}, \quad (6.22)$$

donde

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.23)$$

es conocido como “factor de Lorentz”¹⁴. Finalmente, de (6.19) y (6.22), encontramos que

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (6.24)$$

Lo que podemos concluir es que el tiempo que le toma al haz de luz regresar al espejo es mayor cuando es observado moviéndose, por lo que los relojes cuando están en movimiento se retrasan respecto a los que están en reposo. El tiempo $\Delta t'$ es llamado “tiempo propio” del reloj.

¹⁴Notemos que este factor es siempre mayor o igual a 1.

Observación. La naturaleza de la dilatación del tiempo es consecuencia del principio de relatividad. Se podría pensar que esto se debe al tipo de relojes que usamos y nuestra definición de sincronización. Pero debemos notar que de no encontrar dilatación temporal alguna deberíamos admitir que la luz tiene diferentes velocidades en su recorrido.

Este efecto trae consigo un debate sobre lo que significa la simultaneidad. Eventos que son simultáneos en un marco de referencia no lo son en otro que se encuentre en movimiento respecto al primero. Esto es así por la dilatación temporal referida al movimiento relativo a dos sistemas de referencia; significa que uno de estos eventos tuvo lugar antes que el otro para un sistema de referencia en movimiento.

Contracción de Lorentz

Hay un fenómeno análogo a este para el espacio, particularmente a la longitud de los objetos en movimiento. Tomemos dos espejos paralelos separados una distancia L medido en un sistema de referencia \mathcal{R} que los observa moverse con rapidez v sobre el eje X . En el sistema de referencia \mathcal{R}' ambos espejos están en reposo y separados una distancia L_0 . Un haz de luz va de uno a otro espejo de tal manera que su movimiento también está restringido al eje X . El tiempo que le toma a la luz ir de un espejo al otro y regresar en \mathcal{R}' es

$$\Delta t' = 2 \frac{L_0}{c}, \quad (6.25)$$

mientras que en \mathcal{R} podemos descomponer el tiempo en que la luz va en dirección al movimiento de los espejos, Δt_1 , y cuando va en sentido contrario, Δt_2 , de donde

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{1-\frac{v}{c}} + \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \right) = \frac{L}{c} \left(\frac{2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) \\ &= \frac{2\gamma^2 L}{c}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Entonces, de (6.24), (6.25) y (6.26) encontramos que

$$\frac{2\gamma^2 L}{c} = \frac{2\gamma L_0}{c}, \quad (6.27)$$

de donde

$$L = \gamma^{-1} L_0. \quad (6.28)$$

Es decir, la longitud de los espejos en movimiento es menor. Esta reducción de la distancia, llamada “contracción de Lorentz”, se satisface para cualquier objeto y ocurre únicamente en la dirección de movimiento.

Transformación de coordenadas entre sistemas inerciales

Los fenómenos de dilatación temporal y contracción de Lorentz no se tratan de efectos ópticos o una simple curiosidad matemática, realmente tienen lugar en el

mundo físico así como las consecuencias que de estos se derivan. Algunas de ellas son la relatividad de la simultaneidad, la adición de velocidades (que tiene una versión adaptada a esta mecánica) y la equivalencia masa-energía, por mencionar algunas. Para tratar con estos fenómenos introducimos primero las reglas de transformación entre sistemas inerciales en esta teoría.

Consideremos ahora un evento \mathcal{P} y dos sistemas de referencia \mathcal{R} y \mathcal{R}' , de los cuales el segundo se mueve respecto al primero sobre el eje X con rapidez v . Ambos sistemas tienen el mismo origen y la misma orientación (espacial); el evento se puede representar como $\mathcal{P} = (t', x', 0, 0)$ en coordenadas cartesianas para el sistema \mathcal{R}' . La medida de la coordenada x se realiza de acuerdo a \mathcal{R} , por lo que debemos añadir la contracción de Lorentz para calcular su valor, es decir,

$$x = vt + \gamma^{-1}x', \quad (6.29)$$

de donde

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (6.30)$$

De igual forma, para calcular la coordenada x podemos sustituir $v \rightarrow -v$, de forma que

$$x = \gamma(x + vt'). \quad (6.31)$$

Dado que las coordenadas y y z son perpendiculares al movimiento, no se observa ni contracción ni desfase de los sistemas de referencia, de manera que $y = y'$ y $z = z'$. Finalmente, sustituyendo (6.30) en (6.31) obtenemos

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] = \gamma^2(x - vt) + \gamma vt', \quad (6.32)$$

podemos ahora obtener t' en términos de las coordenadas de \mathcal{R} ,

$$\begin{aligned} \gamma vt' &= x - \gamma^2(x - vt) = x(1 - \gamma^2) + \gamma^2 vt = x \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + \gamma^2 vt \\ &= \gamma^2 \left(vt - x \frac{v^2}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (6.33)$$

es decir,

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (6.34)$$

Análogamente,

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v'x'}{c^2} \right). \quad (6.35)$$

Al conjunto de transformaciones

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), & y' &= y, \\ x' &= \gamma(x - vt), & z' &= z, \end{aligned} \quad (6.36)$$

se les conoce como “boosts” (de Lorentz) y son un caso especial de las transformaciones de Lorentz [17] [40].

Observación. En el caso no-relativista, a velocidades $v \ll c$, recuperamos las transformaciones de Galileo entre sistemas de referencia.

Las transformaciones (6.36), en efecto, dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell. De hecho, estas ecuaciones preceden al desarrollo de la relatividad especial, sin embargo, faltaba un sentido físico que pudiera explicar su naturaleza. Debido a ello se dice que la teoría electromagnética es, por defecto, relativista; esto era de esperarse por ofrecer una descripción de la naturaleza de la luz, que fue el detonante para la formulación de esta teoría. Sin embargo, la naturaleza del espaciotiempo resulta ser más que una gama de resultados sobre la manera «correcta» de medir el espacio y el tiempo; lo primero que podemos notar es que los conceptos de ortogonalidad no son los usuales por la métrica que estamos usando.

Consideremos ahora dos eventos, los cuales conectamos por una línea mundo. Ya analizamos lo que pasa cuando el elemento de línea de esta configuración es nulo, $ds^2 = 0$: los eventos están sobre la trayectoria de algún haz de luz (o algún objeto que se mueva a esta velocidad).

Tomemos ahora el caso en que el elemento de línea es menor a cero, esto ya nos obliga a considerar una geometría distinta. Por un lado, tenemos que $dl < cdt$, es decir, $v < c$. Y, por el otro, existe un sistema de referencia en el que este objeto está en reposo, por lo que la línea mundo de este objeto denota el eje temporal en el sistema que detecta un movimiento. Para mantener el mismo ángulo (entre los nuevos ejes espacial y temporal) de un haz de luz, el eje sobre el que se mueve el objeto debe inclinarse sobre el nuevo eje temporal de manera que el ángulo entre los ejes temporales sea el mismo que entre los ejes espaciales.

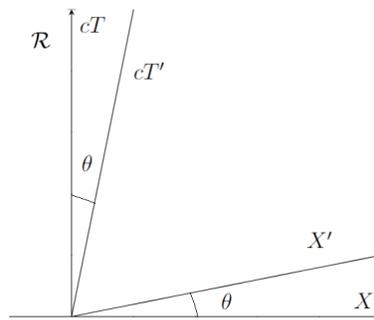


Figura 6.2: Ejes del sistema \mathcal{R}' respecto al de \mathcal{R} .

Otro caso, no menos importante, es el de los objetos descritos por un elemento de línea mayor a cero, o sea, en los que $dl > cdt$; esta relación implica que $v > c$. Lo primero que podemos notar es que los boosts de Lorentz no están adaptados para estos objetos, ya que el factor de Lorentz resultaría en un número complejo. Además, el sistema de referencia que describa a dicho objeto tendría que estar más inclinada que la diagonal del haz de luz, por lo que hay otro sistema de referencia en que esta

línea es un eje espacial, donde se esté llevando a cabo el movimiento, por lo que en ese sistema ambos eventos serían simultáneos (pues se encuentran a un mismo tiempo t). Analicemos esto físicamente; un objeto que se mueva a velocidades super-lumínicas, puede, en principio, interactuar con dos eventos, los cuales podrían ser uno causa del otro. En ese sentido, existe un sistema de referencia en que dichos eventos son simultáneos, por lo que causa y efecto pueden ocurrir al mismo tiempo, o aún más, el efecto puede preceder a la causa. Este fenómeno no tiene sentido físico, y con el propósito de proteger el principio de causalidad vamos a aseverar ahora que ninguna interacción física puede superar la velocidad de la luz; es decir, c funciona como un límite de velocidades para las interacciones físicas en el espaciotiempo.

6.2.3. Mecánica relativista

El desplazamiento de un objeto por el espaciotiempo (la línea mundo de un evento) puede ser descrito por un observador inercial en un sistema coordenado \mathcal{O} como (t, x, y, z) . Otro observador inercial \mathcal{O}' medirá que el objeto tiene coordenadas (t', x', y', z') , denotamos a sus variables como $x^{\mu'}$. La relación entre estos dos sistemas coordenados está dada por las transformaciones de Lorentz Λ , de manera que

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} x^{\nu'}. \quad (6.37)$$

Si \mathcal{O}' se mueve a velocidad \mathbf{v} en dirección del eje X las transformaciones de Lorentz se reducen al boost (6.36), de manera que

$$[\Lambda^{\mu}_{\nu'}] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$ es la velocidad relativa. Estas coordenadas pueden parametrizarse de acuerdo al tiempo propio en \mathcal{O} , τ , es decir,

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau). \quad (6.39)$$

Con lo que podemos parametrizar la curva que describe la línea mundo y definir un vector tangente a cada punto de ella,

$$u^{\alpha} := \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}, \quad (6.40)$$

esta es la “4-velocidad”.

Observación. Notemos que las coordenadas u^i , para $i = 1, 2, 3$ se pueden interpretar como la velocidad usual en la mecánica clásica. Una vez aquí debemos hacer una elección de nuestra base $\{\mathbf{e}_{\mu}\}$, encontramos aquí que la expresión de las componentes espaciales de la 4-velocidad son

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma v^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.41)$$

donde v^i son las componentes de la velocidad usual. Análogamente para la componente u^0 ,

$$u^0 = \frac{dct}{d\tau} = c\gamma \frac{d\tau}{d\tau} = c\gamma. \quad (6.42)$$

Acerca de la geometría cabe recalcar que la métrica nos permite clasificar a los vectores de 4-velocidad.

- Si $ds^2 > 0$ (entonces $dl > cdt$) llamamos a este intervalo “de tipo espacio” o “espacialoide”;
- Si $ds^2 = 0$ (implica $dl = cdt$) conocido como intervalo “tipo luz” o “nulo”;
- Si $ds^2 < 0$ (por tanto, $dl < cdt$) decimos que el intervalo es “tipo tiempo” o “temporaloide”.

La razón de estos nombres tiene que ver con la física de los eventos involucrados, que ya se discutieron anteriormente. Debido a que los vectores nulos delimitan las interacciones físicas vamos a definir el “cono de luz” en un evento como la región que encierran los haces de luz que pasan por dicho punto, incluidos aquellos que vienen del pasado. Con este concepto podemos aseverar que dos eventos interactúan entre sí solo en la región en que sus respectivos conos de luz se intersectan.

Observación. Sobre el cuadrado de la longitud del 4-momento podemos expresarlo como

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 \\ &= -c^2 \gamma^2 + \sum_{i=1}^3 (v^i \gamma)^2 = -\frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2 \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \\ &= -c^2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Es decir, el cuadrado de la 4-velocidad es siempre constante.

Por otro lado, podemos definir el “4-momento” como

$$p^\alpha = mu^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (6.44)$$

De la misma manera, las componentes p^i , $i = 1, 2, 3$, son las componentes del momento clásico. Para estudiar la componente temporal recordemos que el cuadrado de la 4-velocidad es $-c^2$, con lo que

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}) &= \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \\ &= -(mc\gamma)^2 + \sum_{i=1}^3 (p^i \gamma)^2 = -(mc\gamma)^2 + (p\gamma)^2, \end{aligned} \quad (6.45)$$

a su vez, sabemos, del cuadrado de la 4-velocidad, que

$$\eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -m^2 c^2, \quad (6.46)$$

de donde encontramos la relación

$$-(mc\gamma)^2 + (p\gamma)^2 = -m^2c^2. \quad (6.47)$$

De esta última, multiplicando por c^2 y reorganizando términos encontramos

$$(mc^2\gamma)^2 = m^2c^4 + p^2c^2\gamma^2, \quad (6.48)$$

notemos que el primer término tiene unidades de energía, por lo que es comprensible entenderlo como la energía del sistema, la cual a su vez depende del sistema de referencia y puede expresarse como

$$E = p_0u^0 = -\eta_{\mu\nu}P^\mu u^\nu_{\text{observador}} \quad (6.49)$$

es decir, en el sistema de referencia del observador encontramos que

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2, \quad (6.50)$$

que es conocida como “relación de dispersión”. Para un objeto en reposo esta se reduce a $E = mc^2$ y para un objeto sin masa (como la luz), a $E = pc$.

Observación. Si aproximamos (6.50) a velocidades bajas (es decir, $v \ll c$) recuperamos la relación para la energía usual en la mecánica clásica, pues

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right), \quad (6.51)$$

obteniendo así

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (6.52)$$

entendemos que el primer término, debido a la energía en reposo, queda inalterado puesto que no depende del movimiento.

6.3. Relatividad general

El presente formalismo versa sobre la estructura del espaciotiempo y cómo la gravedad puede entenderse como una consecuencia de su deformación. Esto conlleva formular una descripción diferente de la gravitación newtoniana y que sea compatible con la mecánica relativista. En particular, la teoría newtoniana no cuenta con una velocidad límite para las interacciones, cuya necesidad se ve reflejada en la estructura del espaciotiempo de la relatividad especial. Así mismo, la masa y la energía surgen como dos aspectos de un mismo objeto y que pueden transformarse uno en el otro, por lo que resulta ahora intuitivo que los campos gravitacionales se vean afectados por ellos (y *vice versa*).

En la presente sección y con motivo de simplificar las expresiones vamos a trabajar con “unidades geométricas”, que se definen mediante la relación $G = c = 1$, es decir, la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz están normalizadas y son adimensionales.¹⁵

6.3.1. Estructura del espaciotiempo

La manera natural de adaptar la idea de continuidad para el espacio y el tiempo es una variedad. Esta propiedad ha sido establecida para distancias por debajo de 10^{-15} cm mediante experimentos en dispersión de piones, y es extremadamente difícil extenderlo a distancias más cortas, pues requerimos de partículas más energéticas y esto provocaría la creación de otras partículas, lo cual podría estropear el experimento [7]. Por esta razón es que a esta escala se usan formalismos alternativos. La teoría que nos incumbe es de carácter clásico¹⁶, así definimos al espacio topológico \mathcal{M} como el conjunto de todos los eventos, el cual será una variedad diferencial Hausdorff; la herramienta que introducimos para medir distancias en ella será la métrica lorentziana¹⁷ \mathbf{g} . A la estructura $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ se le conoce como “espaciotiempo”. Una variedad Hausdorff junto con la existencia de una métrica lorentziana nos lleva a que \mathcal{M} es paracompacta [12].

En general, puede existir más de una variedad diferencial junto con una métrica lorentziana que represente al mismo espaciotiempo. Es decir, si existe $(\mathcal{N}, \mathbf{h})$ isomor-

¹⁵Esto más precisamente significa que

$$G = 6.7 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2 = c = 3 \times 10^8 m/s = 1,$$

por lo que podemos definir unidades de medida que nos devuelvan la adimensionalidad de las constantes que intervienen. En particular, si medimos distancias en metros podemos definir metros de tiempo y metros de masa, estas cantidades no significan que el espacio, tiempo y materia son indistinguibles, sino que nos ahorramos cargar con las unidades en virtud de expresiones más sencillas. A costa de esto sacrificamos la verificación de nuestras fórmulas con un análisis dimensional; sin embargo estas pueden ser reinsertadas [12]

¹⁶Retornando al significado “no-cuántico”.

¹⁷Es decir, una pseudo-métrica con signatura +2 y con componentes $g_{\mu\nu}$.

fo¹⁸ a $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, entonces decimos que los representantes son equivalentes y por tanto describen la misma física. Así que, formalmente, el espaciotiempo es una clase de equivalencia de la estructura $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ y es único para un sistema físico (entendido sobre esta equivalencia) [7].

No vamos a suponer de entrada la existencia de marcos de referencia inerciales, por lo que nuestras transformaciones entre dos marcos arbitrarios serán considerados de manera general. Las componentes de los tensores se transforman homogéneamente en el sentido que los tensores tienen expresiones independientes del sistema coordenado. Bajo esta idea las propiedades de los tensores hacen posible formular las leyes de la naturaleza por medio de ecuaciones que tengan esencialmente la misma forma en cualquier sistema coordenado, lo que se conoce como “covariancia” o “principio de covarianciaa general” (véase el principio (6.3.3)).

El espaciotiempo es una variedad diferencial 4-dimensional. Una base ortonormal $\{\mathbf{e}_\mu\}$ para el espaciotiempo tiene un vector temporaloide \mathbf{e}_t y tres espacioaloides \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Dicha base y su correspondiente base dual de 1-formas las denominaremos una “tétrada”. Dado que es una base local ortonormal la métrica asociada es plana, es decir, tendremos a la métrica de Minkowski η dada por

$$[\eta] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (6.53)$$

Una transformación Λ entre dos tétradas debe satisfacer la ecuación

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (6.54)$$

Estas también son precisamente las transformaciones de Lorentz.

Existen tres conceptos fundamentales en la teoría, los cuales son «posición», «dirección» y «movimiento». A cada uno de ellos le corresponde un tipo de referencia independiente: la posición de una partícula está referida al sistema coordenado; la dirección, a la base de campos vectoriales; mientras que el movimiento está asociado a un marco de referencia. En la relatividad general introducimos bases de co-vectores llamadas “bases de 1-formas”, lo cual corresponde a caracterizar la dirección de un objeto con el plano normal al mismo.

Un sistema coordenado \mathcal{O} que cubre una región del espaciotiempo es un continuo de cuatro variables $\{x^\mu\}$ que etiquetan a cada evento en la región. Definimos así un “marco de referencia” como un continuo de curvas que no se intersectan, ya sean temporaloides o espacialoides. En este sentido un marco de referencia puede ser entendido como un continuo líneas-mundo de partículas, estas son conocidas como “partículas de prueba” u “observadores”.

Un “sistema coordenado comóvil” en un marco de referencia es una condición, y demanda que las partículas de prueba del marco tienen coordenadas espaciales constantes. En general, los observadores del marco no necesitan moverse libremente; sin

¹⁸Es decir, si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, entonces $\mathbf{g} = f^*\mathbf{h}$.

embargo, algunas propiedades de sistemas gravitacionales son definidos mediante observadores que se mueven libremente, a los cuales llamaremos “observadores inerciales”. En particular, un campo de tétradas ortonormales pueden asociarse con un marco de referencia \mathcal{R} , donde \mathbf{e}_0 es el campo vectorial unitario tangente a las líneas-mundo de los observadores en \mathcal{R} . Es decir, \mathbf{e}_0 se puede identificar con la 4-velocidad \mathbf{u} de dichos observadores.

Ahora bien, consideremos \mathcal{O} un sistema coordinado comóvil de un sistema de referencia \mathcal{R} con una base coordinada de campos vectoriales $\{\mathbf{e}_\mu\}$. Asumimos que los vectores espacialoides \mathbf{e}_i son ortogonales entre sí, pero no necesariamente con el vector \mathbf{e}_0 . Debemos poder encontrar una base de tétradas $\{\mathbf{e}_a\}$ de tal manera que $\mathbf{e}_{a=0}$ es paralelo a $\mathbf{e}_{\mu=0}$. El vector $\mathbf{e}_{a=0}$ es la 4-velocidad de las partículas de prueba de \mathcal{R} . Las componentes de un tensor relativo a una base ortonormal es conocida como “componentes de la tétrada” del tensor, las cuales son invariantes bajo una transformación de coordenadas interna que no cambia la orientación de la base de vectores espacialoides, pero cuando cambiamos entre marcos de referencia varían de acuerdo a las transformaciones de Lorentz. Las componentes de la tétrada de una base de vectores \mathbf{e}_μ las denotamos por e_μ^a y están dadas por

$$\mathbf{e}_\mu = e_\mu^a \mathbf{e}_a. \quad (6.55)$$

Y se sigue de aquí que el tensor métrico en una base arbitraria $\{\mathbf{e}_\mu\}$ está dada en términos de las componentes de la tétrada como [17]

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (6.56)$$

Los índices griegos (μ, ν , etc.) son llamados “holonómicos” y se refieren al espaciotiempo, mientras que los latinos (a, b, c , etc.) son llamados “inholonómicos” y caracterizan la estructura del espacio tangente [41].

En cuanto a la forma de volúmen sabemos que está dada por

$$dvol = \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (6.57)$$

en términos de una base ortonormal $\{\mathbf{e}^a\}$, dual a $\{\mathbf{e}_a\}$, y en la base coordinada, respectivamente, y donde $g = \det \mathbf{g}$.

Afirmamos que hay una única conexión que es compatible con la métrica en el sentido que el tensor métrico es covariantemente constante:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g} = 0, \quad (6.58)$$

para todo campo vectorial \mathbf{u} . Esta es la condición de compatibilidad con la métrica (o conexión métrica). Si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son dos vectores transportados paralelamente a lo largo de un vector \mathbf{u} , entonces el producto interno es constante también,

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu)_{;\alpha} u^\alpha = 0. \quad (6.59)$$

Esto significa que el ángulo entre ambos vectores se conserva ante transporte paralelo.

Como mencionamos anteriormente, en la relatividad general asumimos que la torsión es nula, la consecuencia de esto en los símbolos de Christoffel es la simetría entre los índices de abajo, es decir,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}. \quad (6.60)$$

Más aún, si trabajamos con una base coordenada podemos usar la expresión

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \quad (6.61)$$

para comprobar la correcta expresión de los símbolos de Christoffel que permiten al tensor métrico ser covariantemente constante.

6.3.2. Principio de equivalencia

La idea principal de la relatividad general es describir a la gravedad no como una fuerza que actúe sobre las partículas, sino como el resultado de moverse a lo largo de líneas geodésicas en un espaciotiempo curvo. Esta curvatura es física, por lo que debe estar vinculada con el contenido de materia y energía presente en la región donde haya gravedad. Es decir, la teoría debe especificar la manera en que la materia y energía curvan el espaciotiempo.

Para iniciar con nuestro análisis vamos a partir del principio de equivalencia. En la física clásica no hacemos distinción entre la masa inercial (que concierne a la segunda ley de Newton (6.1.3)) y la masa gravitacional, que interviene en la ley de gravitación universal. Experimentos recientes muestran que

$$\frac{|m_i - m_g|}{m_i} < 9 \times 10^{-33}, \quad (6.62)$$

donde m_i y m_g son las masas inercial y gravitacional, respectivamente. En principio, esta cantidad es despreciable y puede suponerse lo mismo para cualquier tipo de partícula [17].

Principio 6.3.1 (de equivalencia (débil)). *La masa gravitacional es equivalente a la masa inercial ($m_i = m_g$).*

Esta es la idea detrás del gran éxito de la gravitación newtoniana. Sin embargo, como es de costumbre nos interesa cómo la idea de un espaciotiempo curvo pueda afectar a las leyes de la física en general.

Principio 6.3.2 (de equivalencia (fuerte)). *Un observador en caída libre es localmente equivalente a un observador inercial.*

La idea es que las leyes de la relatividad especial siempre son validas localmente en un espaciotiempo curvo; ahora surge la pregunta ¿cómo podemos entender esta «localidad»? La manera natural es a través de un punto $p \in \mathcal{M}$ sobre el cual anclamos un “marco lorentziano local” que se define como el sistema coordenado en el cual

$$g_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu}, \quad (6.63)$$

y además

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu}|_p = 0. \quad (6.64)$$

En este sentido nos podemos remitir a la localidad en geometría diferencial mediante el proceso de ortogonalización, pues sabemos que toda variedad diferencial es localmente plana.¹⁹

El principio de equivalencia (6.3.2) motiva formalizar las expresiones matemáticas que utilizamos en la relatividad general.

Principio 6.3.3 (de covariancia general). *Las ecuaciones de una teoría física tienen la misma forma en cada sistema coordenado.*

La consecuencia de esta aseveración es que las leyes de la física deben poder escribirse de manera que sean invariantes ante transformaciones de coordenadas, una vez más, el escenario natural para conseguir esto son los tensores²⁰. Ahora bien, con lo expuesto hasta ahora podemos reformular el principio de equivalencia fuerte.

Principio 6.3.4 (de equivalencia (de Einstein)). *No hay forma alguna, mediante experimentos confinados a regiones infinitesimalmente pequeñas del espaciotiempo, para distinguir un marco lorentziano local en una región del espaciotiempo de cualquier otro marco lorentziano local en la misma u otra región.*

Observación. En un marco lorentziano local los símbolos de Christoffel se anulan,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha|_p = 0, \quad (6.65)$$

puesto que un observador sobre este marco lorentziano local estará en reposo:

$$x^\mu = x^\mu(p) = \text{cte.}, \quad \mu = 1, 2, 3; \quad (6.66)$$

mientras que x^0 está variando (y vendría siendo justamente el tiempo propio). De la definición de aceleración

$$\mathbf{a} := \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \quad (6.67)$$

¹⁹Véase la subsección Planitud (4.1.4), en particular (4.30).

²⁰Podemos, más aún, restringir el cálculo tensorial al lenguaje de las formas diferenciales que veremos más adelante. Véase capítulo 8.

que es una generalización debida al principio de covariancia²¹ y donde la 4-velocidad está dada por

$$\mathbf{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \mathbf{e}_\alpha = \frac{dx^0}{d\tau} \mathbf{e}_0 = \frac{d\tau}{d\tau} \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0, \quad (6.68)$$

encontramos

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \nabla_0 \mathbf{e}_0 = \Gamma_{00}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (6.69)$$

es decir,

$$\mathbf{a}|_p = 0. \quad (6.70)$$

Deducimos entonces que un observador en el marco lorentziano local cae libremente, moviéndose así sobre una geodésica.

De lo anterior también podemos inferir que un observador que cae libremente en un espacio curvo realiza mediciones en un marco lorentziano local [21].

6.3.3. Ecuaciones de campo

Como mencionamos anteriormente, la gravedad en la teoría de Einstein no se entiende como una fuerza y el movimiento de los cuerpos (sujeto solamente a la interacción gravitacional) es referido al de las partículas libres sobre un espaciotiempo curvo, es decir, la gravedad aparece como consecuencia de la deformación²² del espaciotiempo de Minkowski. Necesitamos ahora un medio que nos permita describir cómo ocurre esta curvatura, pues precisamos de un método para medir el campo gravitatorio.

El procedimiento que vamos a seguir consiste en construir una acción, con lo que podremos aplicar el principio de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (6.71)$$

que nos devolverá la física del sistema. La acción puede ser expresada en términos de la integral de un escalar sobre todo el espacio y entre dos valores del tiempo (o la coordenada x^0). Para determinar este escalar partimos de saber que las ecuaciones del campo gravitacional deben contener derivadas de los «potenciales» no mayores a segundo orden. Esencialmente tenemos como variable a la métrica \mathbf{g} , entonces una propuesta es un escalar formado a partir de ella que nos sirva de lagrangiano. Sabemos que la métrica se puede llevar a su forma canónica y sus primeras derivadas se anulan localmente, cualquier escalar no trivial debe entonces envolver al menos

²¹En la relatividad especial, la aceleración está definida como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau},$$

notemos además que la derivada covariante en espacios curvos se reduce a este caso cuando los coeficientes de la conexión se anulan, lo cual ocurre en un espacio plano. Notemos además que la aceleración es la 4-velocidad transportada paralelamente sobre sí misma.

²²Entendido como no-planitud.

segundas derivadas de la métrica. Tomemos el tensor de Riemann, que por supuesto está formado por segundas derivadas de la métrica, el único escalar independiente que podemos construir a partir de él es el escalar de Ricci R . Ningún tensor no trivial formado de productos de la métrica y sus primeras y segundas derivadas se puede expresar en términos de la métrica y el tensor de Riemann. Por lo tanto, el único escalar independiente construido de la métrica y que no tiene más que derivadas de segundo orden es el de Ricci [42].

En vacío

Consideramos la acción

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{EH} \sqrt{-g} d^4x, \quad (6.72)$$

la constante $(16\pi)^{-1}$ tiene como objetivo devolvernos, bajo las aproximaciones adecuadas, la teoría de Newton. Ahora bien, Hilbert propuso que la elección más simple posible para un lagrangiano era $\mathcal{L}_{EH} \equiv R$, es decir, el escalar de Ricci. Con esto en mente establecemos

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (6.73)$$

que es la “acción de Einstein-Hilbert” (o simplemente “acción de Hilbert”) [17] [42]. Ahora bien, del principio variacional (6.71) tenemos que

$$\begin{aligned} 16\pi \delta S_{EH} &= \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} (R \sqrt{-g}) \delta g^{\alpha\beta} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \delta g^{\alpha\beta} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\left(\frac{\partial R_{\mu\nu}}{\partial g^{\alpha\beta}} g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g^{\alpha\beta}} \right) \sqrt{-g} + R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta} d^4x. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Consideremos el primer término, el integrando puede verse como

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{\partial R_{\mu\nu}}{\partial g^{\alpha\beta}} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} d^4x = \int_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (6.75)$$

Por otro lado, sabemos que podemos escribir

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu}, \quad (6.76)$$

en un sistema coordenado local para el que los símbolos de Christoffel se anulan. Así mismo, en dicho sistema se satisface que las derivadas parciales de la métrica se anulan, siendo así podemos escribir

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta \left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} \right) = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} \\ &= g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu,\lambda} = \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \right)_{,\lambda} \\ &= A^\lambda{}_{,\lambda}, \end{aligned} \quad (6.77)$$

donde definimos el vector \mathbf{A} como

$$A^\lambda = g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu. \quad (6.78)$$

Podemos entender entonces al término $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ como una divergencia, que de acuerdo al teorema de Stokes (o bien el teorema integral de Gauss) solo contribuye con un término de frontera, este se anula por la condición en que las variaciones se anulan en la frontera [17] [43]. Con ello encontramos que

$$\int_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\text{vol} = 0. \quad (6.79)$$

Simplificando ahora el segundo término de la acción (6.74) tenemos hasta ahora

$$16\pi\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \left[R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} \right] \delta g^{\alpha\beta} d^4x, \quad (6.80)$$

o lo que es equivalente a

$$16\pi \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\alpha\beta}} = R_{\alpha\beta} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} = 0. \quad (6.81)$$

Para tratar con el último término desarrollamos el determinante, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \prod_{\nu=0}^3 g_{\mu_\nu \nu} = \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \prod_{\nu=0}^3 g_{\mu_\nu \nu} \\ &= \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \left(\delta_{\mu_0}^\alpha \delta_0^\beta g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} + \dots + g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} \delta_{\mu_3}^\alpha \delta_3^\beta \right) \\ &= \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \left(g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\mu_0} \delta_0^\beta g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} + \dots + g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\mu_3} \delta_3^\beta \right) \\ &= \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \left[g^{\alpha 0} \left(\delta_0^\beta g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} + \dots + \delta_3^\beta g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 0} \right) + \right. \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. + g^{\alpha 3} \left(\delta_0^\beta g_{\mu_0 3} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} + \dots + \delta_3^\beta g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} \right) \right] \\ &= \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \left[g^{\alpha 0} \delta_0^\beta g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} + \dots + g^{\alpha 3} \delta_3^\beta g_{\mu_0 0} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} \right] \\ &= \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi g^{\alpha\lambda} \delta_\lambda^\beta g_{\mu_0 3} g_{\mu_1 1} g_{\mu_2 2} g_{\mu_3 3} = g^{\alpha\beta} \sum_{\mu_0 \neq \dots \neq \mu_3} (-1)^\pi \prod_{\nu=0}^3 g_{\mu_\nu \nu} \\ &= g^{\alpha\beta} g. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Notemos ahora que

$$\delta(\delta_\alpha^\mu) = \delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}) = \delta g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\alpha} = 0, \quad (6.83)$$

contrayendo con $g_{\mu\beta}$ encontramos

$$\delta g_{\beta\alpha} = g_{\mu\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\alpha} = -g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu}. \quad (6.84)$$

Más aún, hallamos que

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

de donde

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} = -g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} = -g_{\mu\nu} g. \quad (6.86)$$

Ahora bien

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g_{\alpha\beta} g) = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}. \quad (6.87)$$

Tenemos así que la derivada variacional se reduce a²³

$$16\pi \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\alpha\beta}} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.88)$$

estas son las “ecuaciones de campo en vacío” de la teoría de la relatividad general.

Con campos de materia

Hasta ahora no hemos considerado los sistemas físicos que existen sobre el espaciotiempo, para ello podemos considerar su tensor de energía-momento. Este análisis requiere que tomemos en cuenta la acción debida a los campos de materia [43], es decir,

$$S = S_{EH} + S_M, \quad (6.89)$$

donde S_M es la acción de materia y energía, que a su vez se puede escribir, en términos de su lagrangiano, como

$$S_M = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x. \quad (6.90)$$

Consideremos ahora la primera variación de esta densidad lagrangiana, que ahora va a depender tanto de la métrica como de sus derivadas²⁴,

$$\delta (\mathcal{L}_M \sqrt{-g}) = \frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}, \lambda} \delta g^{\mu\nu}, \lambda. \quad (6.91)$$

²³Recordemos que esta es justamente la expresión del tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$ (4.277). Se puede probar, en efecto, que este, al igual que el tensor métrico son los únicos tensores independientes en cuatro dimensiones que son simétricos, con divergencia nula y formados a partir de la métrica junto con sus primeras y segundas derivadas. [44]

²⁴Este es el caso debido a que \mathcal{L}_M se puede encontrar de la expresión de parte de la relatividad especial reemplazando las derivadas parciales por sus derivadas covariantes, debido al principio de covarianza general, lo cual nos hace introducir los símbolos de Christoffel en nuestra expresión.

Definimos el vector \mathbf{B} como

$$B^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}, \quad (6.92)$$

de donde

$$B^\lambda{}_{,\lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}. \quad (6.93)$$

Reemplazando en (6.91) encontramos

$$\delta (\mathcal{L}_M \sqrt{-g}) = \frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + B^\lambda{}_{,\lambda}, \quad (6.94)$$

al integrar $B^\lambda{}_{,\lambda}$ solo contribuye con un término de frontera, que a su vez se anula por la variación nula en la frontera. Finalmente hallamos que

$$\delta S_M = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (6.95)$$

definimos ahora el “tensor de energía-momento” \mathbf{T} de un sistema físico, cuya densidad lagrangiana es \mathcal{L}_M , como el tensor simétrico dado por

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \right], \quad (6.96)$$

con lo que

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\text{vol}. \quad (6.97)$$

Tenemos así la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} (S_{EH} + S_M) \\ &= \frac{1}{16\pi} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.98)$$

que se reduce a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6.99)$$

estas son las “ecuaciones de campo (de Einstein-Hilbert)” [17].

Observación. Las ecuaciones de campo (6.99) se reducen a (6.88) en el vacío, es decir, cuando $\mathbf{T} = 0$. Obteniendo la traza de dicha ecuación tenemos que

$$R^\mu_\mu - \frac{1}{2}Rg^\mu_\mu = R - \frac{4}{2}R = -R = 0, \quad (6.100)$$

lo que nos deja con las ecuaciones

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.101)$$

Esto, contrario a lo que podría parecer, no implica que el espaciotiempo sea plano; en efecto existen soluciones a las ecuaciones de campo para el vacío no-planas, como la solución de Schwarzschild, que representa un agujero negro estático.

De la misma forma, al tomar la acción

$$S = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} (R - 2\Lambda + 16\pi\mathcal{L}_M) \, dvol, \quad (6.102)$$

en donde Λ es la “constante cosmológica”, las ecuaciones de campo que se derivan del principio variacional son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (6.103)$$

La importancia de estas nuevas ecuaciones se remite al estudio del Universo a gran escala, pues la cosmología moderna entiende esta constante como la consecuencia de la existencia de un fluido con una energía de vacío, la cual a su vez nos ayuda a estudiar la historia y evolución del Universo, incluyendo su actual expansión acelerada. Más adelante daremos más detalles al respecto (véase la sección (6.4)).

6.3.4. Sobre los campos de materia

Para describir la física de las interacciones sobre el espaciotiempo contamos con los campos de materia, estos satisfacen ecuaciones que en principio podemos escribir en términos de campos tensoriales sobre \mathcal{M} y en las cuales todas las derivadas respecto a la posición son derivadas covariantes referidas a la conexión simétrica que define la métrica \mathbf{g} .

Consideramos los campos de materia que han sido observados en la naturaleza²⁵. Estos deben satisfacer una serie de postulados que nos permiten aseverar que un campo de materia es físico.

Postulado 6.3.5 (causalidad local). *Las ecuaciones que satisfacen los campos de materia deben ser tales que si U es una vecindad convexa normal y $p, q \in U$, entonces una señal puede ser enviada en U de p a q si y solo si p y q se pueden unir por una curva $C^1(U)$ y cuyo vector tangente siempre es distinto de cero y es nulo o temporaloide; dicha curva es llamada “no-espacialoide”.*

²⁵También podemos postular la existencia de campos alternativos que aún no cumplan con esta condición, siempre y cuando hagan satisfacer las propiedades físicas que describimos a continuación.

El que la señal vaya de p a q o al revés dependerá de la dirección del tiempo en U . Sin embargo, el problema de asignar consistentemente una dirección temporal a cada punto del espaciotiempo no es un tema que tratemos en el presente trabajo. Para mayor información véase [7].

Postulado 6.3.6 (Conservación local de energía y momento). *Las ecuaciones que describen los campos de materia son tales que existe un tensor \mathbf{T} , con componentes $T^{\mu\nu}$, llamado “tensor de energía-momento” y que depende de los campos, sus derivadas covariantes, la métrica y satisface*

(I) *el tensor de energía-momento se anula en un abierto Ω si y solo si los campos de materia se anulan en Ω ,*

(II) *se satisface la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.*

La condición (I) expresa que todos los campos tienen energía. Mientras que (II) exhibe el hecho de poder encontrar leyes de conservación [7]. Cabe destacar que el flujo total de energía-momento sobre una región Ω es nulo:

$$\int_{\partial\Omega} T^{\mu\nu} n_\nu d\sigma = 0, \quad (6.104)$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de dicha región, n^ν es el vector normal exterior de $\partial\Omega$ y $d\sigma$ el elemento de volumen de la 3-superficie. Esta es la “ley de conservación de energía-momento”. Del teorema integral de Gauss encontramos que

$$\int_{\Omega} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} d\text{vol} = 0, \quad (6.105)$$

para una región arbitraria Ω , que nos regresa la expresión

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (6.106)$$

Cabe mencionar que la componente temporal describe la conservación de la energía, mientras que las espaciales, la conservación del momento²⁶ [17].

Vamos a considerar una vez más la variación sobre la acción de materia, pero esta vez respecto a los campos de materia denotados como ${}_j\Psi$, con componentes ${}_j\Psi^{\mu_1\dots\mu_r}_{\nu_1\dots\nu_s}$

²⁶Esto va de acuerdo con las ecuaciones de campo, puesto que el tensor de Einstein $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$, también tiene divergencia covariante nula, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

y en los que el subíndice j numera a los campos en consideración

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_M d\text{vol} \\
&= \sum_j \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r} \right] d\text{vol} \\
&= \sum_j \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \right)_{; \lambda} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \right] d\text{vol} \\
&= \sum_j \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \right)_{; \lambda} \right] \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} d\text{vol},
\end{aligned} \tag{6.107}$$

donde, definiendo el vector \mathbf{C} como

$$C^\lambda = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \delta_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}, \tag{6.108}$$

usamos

$$\int_{\Omega} C^\lambda_{; \lambda} d\text{vol} = 0. \tag{6.109}$$

Encontramos así las “ecuaciones de Euler-Lagrange”

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial_j \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}} \right)_{; \lambda} = 0, \tag{6.110}$$

que se satisfacen para todo campo ${}_j \Psi$.

Finalmente, con el fin de ser consistentes en la teoría que venimos desarrollando, planteamos un último postulado.

Postulado 6.3.7 (ecuaciones de campo). *Las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert (6.99) se cumplen en \mathcal{M} [7].*

Campo electromagnético

Con lo expuesto hasta ahora podemos encontrar el tensor de energía-momento del campo electromagnético, cuya densidad lagrangiana es una cantidad escalar que representa la densidad de energía local del campo, así que podemos establecer²⁷

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\mu j^\mu. \tag{6.111}$$

²⁷En unidades dadas por $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$ y donde \mathbf{j} es la 4-corriente electromagnética con componentes j^μ .

Notemos que este no depende explícitamente de las derivadas de la métrica, pues se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + A_\mu j^\mu. \quad (6.112)$$

Observación. Para los tensores de energía-momento que no dependen de las derivadas de la métrica podemos simplificar la expresión (6.96) a

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L} \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\mathcal{L} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) \\ &\stackrel{(6.87)}{=} -\frac{2}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.113)$$

De aquí tenemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\stackrel{(6.111)}{=} \frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu}) - \frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{8\pi} (F_{\mu\beta} F_{\nu\alpha} g^{\beta\alpha} + F_{\alpha\mu} F_{\lambda\nu} g^{\alpha\lambda}) - \frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(F^\lambda{}_\mu F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (6.114)$$

esto último en virtud de la antisimetría del tensor de Faraday, \mathbf{F} .

Observación. La traza del tensor de energía-momento electromagnético es nula [12]:

$$4\pi T^\mu{}_\mu = F^{\alpha\mu} F_{\alpha\mu} - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\mu} F_{\alpha\mu} - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.115)$$

También es posible encontrar las ecuaciones del campo electromagnético, es decir, las ecuaciones de Maxwell. Para ello tomamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.110) y escribimos al lagrangiano en términos del potencial electromagnético

$$F_{\alpha\beta} = 2A_{[\beta;\alpha]}. \quad (6.116)$$

Tenemos entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \stackrel{(6.116)}{=} \delta^\mu{}_\nu j^\nu = j^\mu, \quad (6.117)$$

y también

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu;\nu}} &\stackrel{(6.116)}{=} -\frac{1}{16\pi} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\mu;\nu}} (4A_{[\beta;\alpha]} A_{[\mu;\lambda]}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \left(A_{[\mu;\lambda]} \delta_{[\beta}^\mu \delta_{\alpha]}^\nu + A_{[\beta;\alpha]} \delta_{[\mu}^\mu \delta_{\lambda]}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} g^{\nu[\alpha} g^{\beta]\mu} = -\frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.118)$$

de donde

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu;\nu}} \right)_{;\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}. \quad (6.119)$$

Estos cálculos insertados en (6.110) nos devuelven dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell; las dos restantes las encontramos considerando

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta;\mu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta})_{;\mu} = 0, \quad (6.120)$$

en virtud de la antisimetría del tensor de Levi-Civita. Finalmente, de (6.110) y (6.120) tenemos que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como²⁸ [40]

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 4\pi j^\mu, \\ F_{[\mu\nu;\alpha]} &= 0. \end{aligned} \quad (6.121)$$

²⁸De igual forma, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en términos de las formas diferenciales como [21]

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= 0, \\ d * \mathbf{F} &= 4\pi * \mathbf{j}, \end{aligned}$$

donde $*$ es el dual de Hodge [45].

6.4. El Universo a gran escala

Uno de los principales intereses en gravitación es la cosmología. Actualmente la mejor herramienta para estudiar el Universo a gran escala es el “modelo cosmológico estándar”, constituido por el modelo Λ -CDM²⁹ y la inflación. En esta sección solamente nos vamos a enfocar a la primera, que pretende ser un breve prelude al modelo.

6.4.1. El principio cosmológico

La cosmología es el estudio del Universo como un todo, el cual abarca su historia, evolución, composición y dinámica. Entendemos al Universo como la totalidad de los sistemas físicos en el espaciotiempo así como al espaciotiempo mismo, el uso de una variedad diferencial, independiente de un espacio que le contenga y que tiene geometría propia, se vuelve el escenario adecuado, siendo así la relatividad general la teoría apropiada para estudiarlo³⁰, al menos en el sentido clásico (no-cuántico).

Las observaciones que dieron pie a un estudio formal del Universo comienzan con la ciencia misma; empero para un desarrollo de su estructura a gran escala nos remitimos al notar que cuando se miran galaxias lejanas, a gran escala, parecen estar distribuidas uniformemente y, del mismo modo, en cualquier dirección en la que se mire; estas propiedades se conocen como “homogeneidad” e “isotropía”, respectivamente. El Universo luce muy simétrico en cuanto a la distribución de galaxias, tanto si uno se traslada en el espacio, como si cambiara el ángulo en que se observa. Ahora bien, esta propiedad no se cumple en nuestro vecindario, pues hay irregularidades locales, tenemos una estructura diferente; tan solo en la Vía Láctea o el sistema solar se hace evidente que la distribución de materia no es uniforme; entonces ¿a qué nos referimos con «gran escala»? Dada la ambigüedad con que varios autores la establecen tomaremos una definición propia, siendo nuestra convención de “gran escala” dimensiones por encima de 300Mpc. A estas escalas los sistemas físicos apenas interactúan, dejándonos modelarlos como fluidos perfectos y sobreentendiendo cada «partícula» como un cúmulo de galaxias [7].

Principio 6.4.1 (cosmológico). *No hay dirección o punto especiales en el Universo [17]. (El Universo es homogéneo e isotrópico.)*

Sería intuitivo pensar que dada la simetría que presenta el espacio, fuese además esféricamente simétrico. Por un lado, es complicado probar que el Universo en efecto es homogéneo, es más sencillo, en principio, detectar isotropías en las observaciones extragalácticas y vincularlas a la homogeneidad en virtud de su íntima relación. Por otro lado, en cuanto al fondo cósmico de microondas se puede encontrar que a gran escala la distribución de esta radiación es altamente isotrópica; estas investigaciones

²⁹ Λ se refiere a la constante cosmológica, mientras que CDM, a “materia oscura fría”, por sus siglas en inglés “cold dark matter”.

³⁰No es nuestra única opción, puesto que hay más de una teoría de la gravedad.

refuerzan nuestra idea de un Universo con simetría esférica. Así mismo, es importante mencionar el corrimiento al rojo de las galaxias lejanas, que indica un alejamiento de unas con otras; inferimos que en el pasado las galaxias estuvieron más cerca entre sí. La conjetura que ahora presentamos es que el espacio se expande, incluso se ha demostrado la existencia de una singularidad inicial, a partir de la cual el Universo evolucionó [7].

Es momento de formalizar estas conclusiones en nuestro análisis. Vamos a considerar una foliación del espaciotiempo \mathcal{M} como $\mathbb{R} \times \Sigma_t$ donde \mathbb{R} es la curva temporal y Σ_t son hipersuperficies espaciales a tiempo constante; el parámetro temporal usado aquí es conocido como “tiempo cósmico”. Un espaciotiempo es “homogéneo (espacialmente)” si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espacialoides Σ_t que folian el espaciotiempo de tal manera que para cada t y cualesquiera dos puntos $p, q \in \Sigma_t$ existe una isometría de la métrica espaciotemporal, \mathbf{g} , que envía p en q . Es decir, cualquier punto de una de estas hipersuperficies es equivalente a cualquier otro punto de la misma hipersuperficie. Adicionalmente, un espaciotiempo se dice que es “(espacialmente) isotrópico” en cada punto si existe una congruencia de curvas temporaloides (observadores), cuyos vectores tangentes, \mathbf{u} , llenan el espaciotiempo y satisfacen que dado cualquier punto p y cualesquiera dos vectores tangentes \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 ortogonales a \mathbf{u} , existe una isometría de \mathbf{g} que deja p fijo y rota \mathbf{s}_1 en \mathbf{s}_2 . Esto es, en un Universo isotrópico es imposible construir un vector tangente ortonormal a \mathbf{u} geoméricamente preferencial [12]. En virtud de la isotropía, podemos asumir que la dirección del tiempo, \mathbf{e}_0 , es ortonormal a estas secciones espaciales³¹ [17].

6.4.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Haciendo uso de los principios y estructuras del Universo descritas anteriormente vamos ahora a deducir su métrica. Escribimos entonces el elemento de línea como

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + h_{ij}dx^i dx^j,$$

donde h_{ij} son las componentes de la métrica espacial (es decir, de las hipersuperficies Σ_t), en cuyo caso tendremos $g_{tt} = -1$. Notemos que los términos g_{0i} se anulan por la isotropía, de la homogeneidad encontramos que h_{ij} son nulos si $i \neq j$ y además

$$h_{ij} = a(t)\hat{h}_{ij}, \quad (6.122)$$

en virtud de la expansión, donde $a(t)$ es conocido como el “factor de escala” (o “factor de expansión”), es adimensional y siempre puede ser normalizado: $a(t_0) \equiv 1$, donde t_0 es el tiempo actual, es decir, hoy (el resto del capítulo t_0 denotará este significado); las componentes \hat{h}_{ij} son independientes del tiempo, para encontrar su expresión llamamos a la simetría esférica, que nos permite escribir (en coordenadas esféricas)

$$\hat{h}_{ij}dx^i dx^j = d\xi^2 + r^2(\xi)d\Omega^2, \quad (6.123)$$

³¹Si este no fuera el caso, la proyección del vector temporal sobre Σ_t apuntaría en una dirección preferencial, lo cual viola la isotropía.

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ es el elemento de ángulo sólido. Nos quedamos entonces con

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\xi^2 + r^2(\xi)d\Omega^2], \quad (6.124)$$

que es la expresión más general para las condiciones que impusimos. La métrica entonces puede ser escrita en términos de la tétrada

$$\mathbf{e}^0 = dt, \quad \mathbf{e}^1 = a(t)d\xi, \quad \mathbf{e}^2 = a(t)r(\xi)d\theta, \quad \mathbf{e}^3 = a(t)r(\xi)\sin\theta d\phi, \quad (6.125)$$

como

$$g = \eta_{ab}\mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b. \quad (6.126)$$

Buscamos ahora calcular la curvatura. En primer lugar debemos calcular la conexión, para lo cual tomamos

$$\begin{aligned} de^0 &= 0, \\ de^1 &= \dot{a}dt \wedge d\xi = -\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^0, \\ de^2 &= \dot{a}rdt \wedge d\theta + ar'd\xi \wedge d\theta = -\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^0 - \frac{r'}{ar}\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1, \\ de^3 &= \dot{a}r\sin\theta dt \wedge d\phi + a\sin\theta r'd\xi \wedge d\phi + ar\cos\theta d\theta \wedge d\phi \\ &= -\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^0 - \frac{r'}{ar}\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 - \frac{\cot\theta}{ar}\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2, \end{aligned} \quad (6.127)$$

donde hicimos

$$r' = \frac{dr}{d\xi}. \quad (6.128)$$

De la primer ecuación de estructura (sin torsión)

$$de^a \stackrel{(4.219)}{=} -\omega^a_b \wedge \mathbf{e}^b, \quad (6.129)$$

obtenemos así los términos distintos de cero de la conexión

$$\begin{aligned} \omega^1_0 &= \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^1, & \omega^2_0 &= \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^2, & \omega^2_1 &= \frac{r'}{ar}\mathbf{e}^2, \\ \omega^3_0 &= \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{e}^3, & \omega^3_1 &= \frac{r'}{ar}\mathbf{e}^3, & \omega^3_2 &= \frac{\cot\theta}{ar}\mathbf{e}^3, \end{aligned} \quad (6.130)$$

que se leen directamente de (6.127), el resto quedan determinados en virtud de la antisimetría de ω^a_b , la forma de la métrica η y dos resultados que se siguen de ello³²:

$$\omega^0_a = \omega^a_0, \quad \text{para } a = 1, 2, 3; \quad (6.131)$$

y

$$\omega^a_b = -\omega^b_a, \quad \text{para } a, b = 1, 2, 3. \quad (6.132)$$

³²Esto es porque

$$\omega^0_a = \eta^{b0}\omega_{ba} = -\omega_{0a} = \omega_{a0} = \eta_{ab}\omega^b_0 = \omega^a_0,$$

siempre y cuando $a \neq 0$.

En la base local de tétradas la conexión se puede expresar como

$$\begin{aligned}\omega^a_0 &= \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{e}^a \quad (a = 1, 2, 3), \\ \omega^a_1 &= \frac{r'}{ar} \mathbf{e}^a \quad (a = 2, 3), \\ \omega^3_2 &= \frac{\cot \theta}{ar} \mathbf{e}^3.\end{aligned}\tag{6.133}$$

Luego, a partir de la segunda ecuación de estructura (4.246), calculamos la curvatura

$$\begin{aligned}\Omega^1_0 &= d\omega^1_0 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_0 + \omega^1_3 \wedge \omega^3_0 = d(\dot{a}d\xi) = \frac{\ddot{a}}{a} \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1, \\ \Omega^2_0 &= d\omega^2_0 + \omega^2_1 \wedge \omega^1_0 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_0 = d(\dot{a}rd\theta) = \frac{\ddot{a}}{a} \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^2 \\ \Omega^2_1 &= d\omega^2_1 + \omega^2_0 \wedge \omega^0_1 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_1 = d(r'd\theta) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1 \\ &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{r''}{a^2 r} \right) \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1 \\ \Omega^3_0 &= d\omega^3_0 + \omega^3_1 \wedge \omega^1_0 + \omega^3_2 \wedge \omega^2_0 = d(\dot{a}r \sin \theta d\phi) + \dot{a} \sin \theta d\phi \wedge d\xi \\ &\quad + \dot{a}r \cos \theta d\phi \wedge d\theta = \ddot{a}r \sin \theta dt \wedge d\phi = \frac{\ddot{a}}{a} \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^3 \\ \Omega^3_1 &= d\omega^3_1 + \omega^3_0 \wedge \omega^0_1 + \omega^3_2 \wedge \omega^2_1 = d(r' \sin \theta d\phi) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 \\ &\quad + \frac{r' \cot \theta}{a^2 r^2} \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2 = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{r''}{a^2 r} \right) \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 \\ \Omega^3_2 &= d\omega^3_2 + \omega^3_0 \wedge \omega^0_2 + \omega^3_1 \wedge \omega^1_2 = d(\cos \theta d\phi) + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a^2 r^2} \right) \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2 \\ &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2 r^2} - \frac{r'^2}{a^2 r^2} \right) \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2.\end{aligned}\tag{6.134}$$

En virtud de la isotropía demandamos que la curvatura se exprese igual todas direcciones sobre la tétrada:

$$\frac{1}{a^2 r^2} - \frac{r'^2}{a^2 r^2} = -\frac{r''}{a^2 r}, \quad \Rightarrow \quad 1 - r'^2 = -r r'', \quad \Rightarrow \quad \frac{r'}{r} = \frac{r' r''}{r'^2 - 1}.\tag{6.135}$$

Notemos que

$$\frac{d}{d\xi} (r'^2 - 1) = 2r' r'',\tag{6.136}$$

por lo tanto, integrando obtenemos

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln (r'^2 - 1) + C,\tag{6.137}$$

donde C es una constante de integración. Una breve manipulación nos lleva a

$$r' = \sqrt{1 - \kappa r^2}, \quad \kappa = cte.\tag{6.138}$$

Notemos que las unidades de κ son inversas al cuadrado de la longitud, además tenemos tres posibles soluciones dependiendo del signo de κ . Este valor lo podemos normalizar definiendo

$$\kappa \equiv \frac{k}{r_0^2}, \quad (6.139)$$

donde r_0 representa el valor del radio de curvatura del 3-espacio Σ_t a un tiempo fijo $t = t_0$ y $k = 0, \pm 1$ determina la solución y se denomina “constante de curvatura”. Así pues

$$dr = \sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}} d\xi. \quad (6.140)$$

Las soluciones de $r(\xi)$ están dadas por

$$r(\xi) = \begin{cases} r_0 \sin\left(\frac{\xi}{r_0}\right) & \text{si } k = 1, \\ \xi & \text{si } k = 0, \\ r_0 \sinh\left(\frac{\xi}{r_0}\right) & \text{si } k = -1, \end{cases} \quad (6.141)$$

y de ellas podemos ver que la coordenada radial evoluciona entre $[0, 2\pi]$ si $k = 1$, en caso contrario será $[0, \infty)$. Finalmente llegamos a

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (6.142)$$

Que es conocida como “métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker” (FLRW).

En la base (6.125) tomamos

$$\mathbf{e}^1 = \frac{a(t)}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} dr, \quad (6.143)$$

y sabiendo que

$$\frac{k}{r_0^2} \stackrel{(6.140)}{=} \frac{1}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}. \quad (6.144)$$

escribimos la curvatura como

$$\begin{aligned} \Omega^0_a &= \frac{\ddot{a}}{a} \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^a, \\ \Omega^a_b &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right) \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b, \end{aligned} \quad (6.145)$$

para $a, b = 1, 2, 3$. Encontramos así que las componentes distintas de cero del tensor de Riemann son

$$\begin{aligned} R^0_{a0a} &= \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R^b_{aba} &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2}, \end{aligned} \quad (6.146)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \sum_{c=1}^3 R^c{}_{0c0} = \sum_{c=1}^3 \eta^{cd} R_{d0c0} = - \sum_{c=1}^3 R^0{}_{c0c} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\
 R_{aa} &= R^0{}_{a0a} + \sum_{b=1}^3 R^b{}_{aba} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right), \\
 R &= R^0{}_0 + \sum_{a=1}^3 R^a{}_a = -R_{00} + 3R_{aa} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right).
 \end{aligned} \tag{6.147}$$

Expresamos al tensor de Einstein (4.277) en la base de tétradas como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R \eta_{ab}, \tag{6.148}$$

encontrando así,

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R \eta_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right), \tag{6.149}$$

y también

$$G_{aa} = R_{aa} - \frac{1}{2} R \eta_{aa} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right), \quad a = 1, 2, 3. \tag{6.150}$$

6.4.3. Fluidos perfectos

Mencionamos anteriormente que el contenido del espaciotiempo tiene muy poca interacción entre sí a gran escala, sugiriendo que se comporta como un fluido perfecto. Decimos que un fluido es “perfecto” cuando no tiene viscosidad ni conducción de calor. Con ello podemos caracterizarlo con la 4-velocidad, la densidad propia³³ ρ , la presión p y la densidad del número de bariones n , entre otros elementos. Debido a la poca interacción entre galaxias podemos aproximar el comportamiento del contenido del Universo como un fluido perfecto³⁴. Principiando con ello tenemos al vector de densidad de flujo del número de bariones:

$$n^\mu = n \sqrt{-g} u^\mu, \tag{6.151}$$

de donde

$$n = \sqrt{\frac{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}{g}}. \tag{6.152}$$

³³Debido a que la medición de la distancia es relativa al observador tomamos como referencia el marco de referencia en el que el sistema está en reposo.

³⁴El significado de lo que es un «fluido» en relatividad es bastante ambiguo, pues se refiere tanto al sentido usual de un fluido, como a gases, radiación e inclusive energía de vacío; así que vale la pena mencionar que nos vamos a referir a este sentido generalizado de la palabra.

Suponemos que tanto la entropía (s) como el número de partículas se conserva bajo las variaciones de la métrica, es decir,

$$\begin{aligned}\delta s &= 0, \\ \delta n^\mu &= 0,\end{aligned}\tag{6.153}$$

respectivamente. Consideramos ahora la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\rho.\tag{6.154}$$

Sabemos que la entalpía (w) está dada por

$$w = \frac{\rho + p}{n}\tag{6.155}$$

y satisface

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s = w,\tag{6.156}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = -w \left(\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \sqrt{\frac{g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta}{g}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{w}{2n} \left(\frac{n^\mu n^\nu}{g} - \frac{n^\alpha n_\alpha}{g^2} g^{\mu\nu} g \right) \delta g_{\mu\nu} \stackrel{(6.151)}{=} -\frac{wn}{2} (-u^\mu u^\nu + u^\alpha u_\alpha g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{wn}{2} (u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} = -\frac{wn}{2} (u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{wn}{2} (u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{6.157}$$

es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{wn}{2} (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) \stackrel{(6.155)}{=} -\frac{1}{2} [\rho + p] (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}).\tag{6.158}$$

Así, llegamos a

$$T_{\mu\nu} \stackrel{(6.113)}{\stackrel{(6.154)}{=}} [\rho + p] (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) - \rho g_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}.\tag{6.159}$$

A continuación deduciremos las ecuaciones de estado de la energía de vacío, radiación electromagnética y polvo, descritas como fluidos perfectos.

Energía de vacío invariante de Lorentz (LIVE)

El tensor de energía-momento del fluido LIVE³⁵ se deduce del hecho que sus componentes son invariantes de Lorentz, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^\alpha \Lambda_{\nu'}^\beta T_{\alpha\beta},\tag{6.160}$$

³⁵Por sus siglas en inglés Lorentz invariant vacuum energy.

para transformaciones de Lorentz arbitrarias. Tomamos el boost de Lorentz sobre la dirección x^1

$$[\Lambda_{\nu'}^{\mu}] \stackrel{(6.38)}{=} \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.161)$$

y donde el factor de Lorentz se reduce a $\gamma = (\sqrt{1-v^2})^{-1}$. Consideramos de ello primeramente

$$T_{00} = \Lambda_{0'}^{\alpha} \Lambda_{0'}^{\beta} T_{\alpha\beta} = \gamma^2 T_{00} + v\gamma^2 (T_{01} + T_{10}) + v^2 \gamma^2 T_{11}, \quad (6.162)$$

y usando que $\gamma^2 - 1 = v^2 \gamma^2$, tenemos

$$v^2 \gamma^2 T_{00} + v\gamma^2 (T_{01} + T_{10} + T_{11}) = v\gamma^2 [v(T_{00} + T_{11}) + T_{01} + T_{10}] = 0, \quad (6.163)$$

la misma ecuación se puede encontrar expandiendo de igual manera la expresión para T_{11} , es decir,

$$v(T_{00} + T_{11}) + T_{01} + T_{10} = 0. \quad (6.164)$$

De esta forma también obtenemos, de T_{01} y T_{10} ,

$$T_{00} + T_{11} + v(T_{01} + T_{10}) = 0. \quad (6.165)$$

Encontramos así dos relaciones

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(6.164)}{=} T_{00} + T_{11} + v[-v(T_{00} + T_{11})] = (1-v^2)(T_{00} + T_{11}) \\ &\stackrel{(6.165)}{=} 0 = v[-v(T_{01} + T_{10})] + T_{01} + T_{10} = (1-v^2)(T_{01} + T_{10}), \end{aligned} \quad (6.166)$$

que bien podemos escribir como

$$T_{00} = -T_{11}, \quad (6.167)$$

$$T_{01} = -T_{10}, \quad (6.168)$$

esta última, en virtud de la simetría del tensor de energía-momento, no es nada más que

$$T_{01} = T_{10} = 0. \quad (6.169)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} T_{02} &= \gamma(T_{02} + vT_{12}), \quad \Rightarrow \quad T_{02} = \frac{v\gamma}{1-\gamma} T_{12}, \\ T_{12} &= \gamma(vT_{02} + T_{12}), \quad \Rightarrow \quad T_{12} = \frac{v\gamma}{1-\gamma} T_{02}, \\ i.e., \quad T_{02} &= -T_{02} \quad y \quad T_{12} = -T_{12}, \end{aligned} \quad (6.170)$$

que nos devuelve,

$$T_{02} = T_{20} = 0, \quad (6.171)$$

$$T_{12} = T_{21} = 0. \quad (6.172)$$

De manera similar se satisface para T_{03} y T_{13} , con lo que

$$T_{03} = T_{30} = 0, \quad (6.173)$$

$$T_{13} = T_{31} = 0. \quad (6.174)$$

Ahora bien, bajo la invarianza del boost de Lorentz en la dirección x^2

$$[\Lambda_{\nu}^{\mu}] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & v\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.175)$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} T_{23} &= \gamma (T_{23} + vT_{03}), \\ T_{03} &= \gamma (vT_{23} + T_{03}), \end{aligned} \quad (6.176)$$

y ya sabemos que nos lleva a

$$T_{23} = T_{32} = 0. \quad (6.177)$$

Adicionalmente llegamos a

$$T_{22} = v^2\gamma^2 T_{00} + (\gamma^2 - 1) T_{22}, \quad \Rightarrow \quad v^2\gamma^2 (T_{00} + T_{22}) = 0. \quad (6.178)$$

Finalmente, del boost en la dirección x^3

$$[\Lambda_{\nu}^{\mu}] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & v\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6.179)$$

deducimos, de igual manera, que $T_{00} = -T_{33}$,

$$T_{00} = -T_{11} = -T_{22} = -T_{33}. \quad (6.180)$$

Con lo expuesto hasta ahora podemos ver que el tensor de energía-momento es diagonal, y se reduce a

$$[\mathbf{T}] = \text{diag}(T_{00}, -T_{00}, -T_{00}, -T_{00}) = -T_{00} \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = -T_{00} [\eta]. \quad (6.181)$$

Este se puede generalizar transformando a una base arbitraria, sumado al hecho que $T_{00} = \rho$ encontramos

$$T_{\mu\nu} = -\rho g_{\mu\nu}, \quad (6.182)$$

comparando con (6.159) podemos deducir la ecuación de estado del fluido LIVE

$$p = -\rho. \quad (6.183)$$

Observación. Si este vacío es homogéneo, la densidad dependerá únicamente del tiempo. En virtud de la relatividad de la simultaneidad esta condición representa un invariante de Lorentz solo si la densidad es constante. Así, esta energía de vacío aparece como una constante cosmológica. Siendo este el caso, se hace válida la expresión

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 g_{\mu\nu}. \quad (6.184)$$

Radiación

Ya estudiamos someramente el tensor de energía-momento de un campo electromagnético, para el cual su traza se anula. Sin embargo, pensando esta radiación como un fluido perfecto y en virtud de la expresión (6.159) podemos tomar

$$T_{\mu}^{\mu} = 3p - \rho = 0, \quad (6.185)$$

que nos devuelve la ecuación de estado

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (6.186)$$

Esto también se satisface para las partículas ultra-relativistas, es decir, aquellas que se aproximan a la velocidad de la luz y que por tanto su energía en reposo es despreciable comparada con su energía total. Así, la ecuación de estado (6.186) no solo puede describir a la radiación sino cualquier tipo de partícula ultra-relativista que se pueda modelar como un fluido perfecto.

Polvo

Por el contrario, si tenemos un gas cuyas partículas se mueven muy despacio, la energía en reposo predomina sobre la energía cinética, dejándonos poca interacción entre ellas. Este es el “polvo”, un fluido perfecto con presión nula, proponiendo entonces

$$p = 0, \quad (6.187)$$

lo que reduce su tensor de energía-momento a

$$T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu}. \quad (6.188)$$

Podemos establecer entonces una ecuación de la forma

$$p = \omega\rho, \quad (6.189)$$

para describir la relación entre presión y densidad en un fluido perfecto; conocida como “ecuación de estado” y donde la constante ω depende de la sustancia y a su vez es conocida como “constante barotrópica”. A menudo esta relación también es llamada “ecuación barotrópica”.

6.4.4. Ecuaciones de Friedmann

En virtud de las ecuaciones de campo (6.99) y el tensor de energía-momento (6.159) encontramos dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right) &= 8\pi\rho, \\ -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} \right) &= 8\pi p. \end{aligned} \quad (6.190)$$

donde

$$T_{00} = \rho, \quad \text{y} \quad T_{aa} = p. \quad (6.191)$$

De aquí encontramos dos relaciones, conocidas como “ecuaciones de Friedmann” [17]:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} = \frac{8\pi}{3} \rho, \quad (6.192)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p). \quad (6.193)$$

Observación. La presión contribuye con el efecto gravitacional, la energía gravitacional efectiva está dada por $\rho + 3p$. Además $p < -\frac{1}{3}\rho$ implica gravedad repulsiva.

Tan solo del hecho de que $\rho, p > 0$ nos indica que el Universo no puede ser estático, pues $\ddot{a} < 0$, así que el Universo se debe expandir más rápido en cuanto más se retroceda en el tiempo. Llegaría un momento en que llegásemos a $a(t) = 0$, encontrándonos que la distancia entre todos los «puntos del espacio» era nula, la densidad de materia y energía, así como la curvatura del espaciotiempo era infinita. Este estado singular del espaciotiempo es conocido como el “big bang” (o “gran explosión”)³⁶. La naturaleza de esta singularidad resulta de la contracción homogénea del espacio hasta ser cero, sin embargo, de este escenario muy poco se puede decir puesto que, en el sentido físico tanto como matemático, las teorías involucradas no nos dan más información; por lo tanto, no tiene sentido preguntarnos por el estado del Universo «previo» al big bang, no hay forma de extender al espaciotiempo o la métrica más allá de la singularidad inicial. De igual manera, en tiempos cercanos a la singularidad inicial se espera que los efectos cuánticos jueguen un papel importante para desentrañar sus propiedades [12].

Ley de Hubble

El Universo siempre debe estar evolucionando, ya sea que se expanda o se contraiga (con la posible excepción del instante cuando la expansión cambia a contracción). Esto da a entender que la distancia entre los observadores cambia con el tiempo, sin embargo, no hay un centro de expansión en particular a partir del cual ocurra este fenómeno. La distancia entre dos observadores (o distancia propia), d_P , en el tiempo está dada por

$$d_P(t) = a(t)\xi, \quad (6.194)$$

nos deja ver que la velocidad con la que una galaxia se aleja del observador está dada por la “ley de Hubble”:

$$v = \frac{dd_P}{dt} = \dot{a}\xi = H(t)d_P, \quad (6.195)$$

³⁶Este término no se debe interpretar de manera literal, pues no nos referimos a una explosión de materia y energía concentradas en un punto que estalló a partir de un espaciotiempo preexistente. Nos referimos más bien a la expansión del espacio mismo.

donde definimos el “parámetro de Hubble”

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (6.196)$$

El valor $H(t_0) = H_0$ se conoce como “constante de Hubble”³⁷ y tiene un valor cercano a $H_0 = 69 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ [17].

Observación. La ley de Hubble indica que la velocidad a la que dos galaxias se separan puede ser mayor a la velocidad de la luz si d_P es suficientemente grande; lo cual no contradice la aseveración fundamental “nada puede viajar más rápido que la luz”, puesto que esto último se refiere a mediciones locales relativas a la velocidad de dos objetos en el mismo evento espaciotemporal, mas no a la velocidad entre dos objetos distantes [12]. En general, no tenemos ninguna ley que nos restrinja la velocidad con la que el Universo se expande o se contrae; de hecho, la inflación es un periodo muy corto de expansión acelerada del Universo temprano, motivado a partir de problemas cosmológicos que no se pueden responder desde el modelo Λ -CDM.

Ecuación de continuidad

Recordemos que tanto el tensor de energía momento (\mathbf{T}) como el de Einstein (\mathbf{G}) son covariantemente constantes, consideramos entonces

$$T^{0a}{}_{;a} = T^{0a}{}_{,a} + T^{0b}\Gamma_{ba}^a + T^{ab}\Gamma_{ab}^0 = T^{00}{}_{,0} + T^{00}\Gamma_{0a}^a + \sum_{a=0}^3 T^{aa}\Gamma_{aa}^0 = 0, \quad (6.197)$$

insertando³⁸ (6.133) y (6.191) deducimos la ley de conservación

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (6.198)$$

que no es más que la ecuación de continuidad. En virtud de la ecuación de estado (6.189) escribimos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = \dot{\rho} + 3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (6.199)$$

multiplicando por el factor $a^{3(1+\omega)}$ deducimos

$$\begin{aligned} a^{3(1+\omega)} \left[\dot{\rho} + 3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}\rho \right] &= a^{3(1+\omega)}\dot{\rho} + 3(1 + \omega)a^{3(1+\omega)-1}\dot{a}\rho \\ &= \frac{d}{dt} [\rho a^{3(1+\omega)}] = 0, \end{aligned} \quad (6.200)$$

encontrando la solución

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (6.201)$$

³⁷El valor de la constante de Hubble ha sido medido con métodos observacionales diferentes y ha arrojado diferentes valores; por ello su valor dependerá de la fuente de consulta. Nosotros vamos a tomar el de [17]. Cabe mencionar que muchas otras mediciones se derivan de este valor, así que para mantener consistencia, también los vamos a tomar de este texto.

³⁸Recordemos que los coeficientes de la conexión están dados por $\omega^a_b = \Gamma_{bc}^a \theta^c$.

donde ρ_0 es una constante que podemos establecer como la densidad actual del fluido: $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$. Notemos que la solución depende de ω .

Parámetros cosmográficos

La densidad global podemos descomponerla en sus contribuyentes, de manera que la densidad total se puede escribir como la suma de las densidades de cada sustancia

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega}, \quad (6.202)$$

donde el subíndice ω es correspondiente al fluido descrito por la ecuación de estado (6.189). Definimos ahora la densidad crítica³⁹

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi}, \quad (6.203)$$

que nos permite escribir las cantidades

$$\Omega_{\omega} := \frac{\rho_{\omega}}{\rho_c}, \quad \Omega_k := -\frac{k}{H^2 a^2 r_0^2}, \quad (6.204)$$

conocidos como “parámetros cosmográficos”. Denotamos también $\Omega = \sum_{\omega} \Omega_{\omega}$, que es la “densidad relativa de materia y energía”. Expresamos la primer ecuación de Friedmann (6.192), en términos de los parámetros cosmográficos, como

$$1 = \Omega + \Omega_k, \quad (6.205)$$

y nos deja clasificar sus valores:

- $\Omega > 1$ y $\Omega_k < 0$ si $k = 1$ (Universo cerrado),
- $\Omega = 1$ y $\Omega_k = 0$ si $k = 0$ (Universo plano),
- $\Omega < 1$ y $\Omega_k > 0$ si $k = -1$ (Universo abierto).

Podemos destacar cinco parámetros cosmográficos que afectan significativamente la evolución del Universo y los cuales han sido medidos en la actualidad.⁴⁰ Estos valores son

$$\begin{aligned} \Omega_{0,\Lambda} &= 0.7, \\ \Omega_{0,\text{mo}} &= 0.26, \\ \Omega_{0,\text{m}} &= 0.04, \\ \Omega_{0,\gamma} &\approx 0, \\ \Omega_{0,k} &\approx 0, \end{aligned} \quad (6.206)$$

³⁹Cuyo valor presente es aproximadamente $\rho_c(t_0) = 2 \times 10^{-26} \text{kg/m}^3$.

⁴⁰Vamos a usar las etiquetas $0,\omega$ que se referirán al valor medido en la actualidad ($t = t_0$) y a la sustancia (ω) asociada. Así, por ejemplo, el parámetro cosmográfico actual de la materia bariónica se escribe como $\Omega_{0,\text{m}}$.

donde el subíndice Λ se refiere a la energía de vacío, también conocida como “energía oscura”; m , a la materia oscura; m , materia bariónica; γ , radiación (que incluye partículas ultra-relativistas); y k curvatura. Entendemos por «materia bariónica» al tipo de materia que conocemos en la actualidad y que está descrita por el modelo estándar de partículas elementales; nos referimos a aquella que está conformada por protones, neutrones y electrones, así como sus constituyentes (siempre y cuando no se acerquen a la velocidad de la luz, como el neutrino). Es importante mencionar que existe un tipo de materia especial que no se ha observado directamente, puesto que no emite radiación electromagnética y tan solo interactúa gravitacionalmente, conocida como “materia oscura”⁴¹ [40]. Sin embargo, sigue bajo estudio tanto desde el enfoque gravitacional como en el cuántico. Así mismo, la energía oscura puede ser tratada desde ambos panoramas y no cuenta con una interpretación totalmente aceptada por la comunidad científica; es por ello que en este sentido se suele aseverar que aproximadamente el 76 % del Universo es aún desconocido.

El valor actual del parámetro de curvatura se puede expresar como

$$\Omega_{0,k} \stackrel{(6.204)}{=} -\frac{k}{H_0^2 r_0^2}. \quad (6.207)$$

de donde obtenemos una expresión para el radio de curvatura actual del 3-espacio,

$$r_0 \stackrel{(6.205)}{\stackrel{(6.207)}{=}} \frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{k}{\Omega_0 - 1}}. \quad (6.208)$$

Recientes mediciones muestran que $\Omega_0 = 1.04 \pm_{0.04}^{0.02}$, se infiere que $r_0 > 56 \times 10^9 \text{al}$, (“al” denota años luz). Deducimos entonces que el 3-espacio del Universo es cercano al espacio euclidiano a gran escala [17].

Ahora bien, a partir de (6.207), los parámetros cosmográficos y la primer ecuación de Friedmann (6.192) consideramos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{r_0^2 a^2} = H_0^2 \left(\sum_{\omega} \frac{\rho_{\omega}}{\rho_{0,c}} + \Omega_k^0 a^{-2} \right), \quad (6.209)$$

y de las soluciones (6.201)

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\sum_{\omega} \Omega_{0,\omega} a^{-3(\omega+1)} + \Omega_{0,k} a^{-2} \right), \quad (6.210)$$

luego, agrupando el factor de escala

$$\frac{\dot{a}}{\sqrt{\sum_{\omega} \Omega_{0,\omega} a^{-(3\omega+1)} + \Omega_{0,k}}} = H_0, \quad (6.211)$$

⁴¹Su existencia está sujeta a pruebas indirectas y, por lo tanto, se propone su existencia.

obteniendo así

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{H_0 \sqrt{\sum_{\omega} \Omega_{0,\omega} a^{-(3\omega+1)} + \Omega_{0,k}}}. \quad (6.212)$$

Esta integral se puede resolver numéricamente para darnos una mejor aproximación de la edad del Universo, que en general arroja valores cercanos a 13,800 millones de años. Nosotros vamos a trabajar con $t_0 = 15 \times 10^9$ años.

Corrimiento al rojo

Ya hablamos sobre el fenómeno de alejamiento para dos observadores inerciales, ahora buscamos entender qué pasa con la luz cuando viaja sobre un Universo en expansión. Sabemos de antemano que la luz viaja sobre curvas geodésicas nulas del espaciotiempo, descritas por $ds^2 = 0$, por simplicidad tomaremos $d\theta = d\phi = 0$, quedándonos con

$$\frac{dt}{a(t)} \stackrel{(6.142)}{=} - \frac{dr}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} \stackrel{(6.140)}{=} -d\xi. \quad (6.213)$$

Sean t_e y t_0 los tiempos en los que se emite un rayo de luz y se recibe por un observador, respectivamente; y ξ_e la distancia entre uno y otro. Definimos también Δt_e como el tiempo que pasa mientras se emite un segundo haz y Δt_0 , en que se recibe, entonces integrando la ecuación anterior

$$\xi_e = \int_0^{\xi_e} d\xi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.214)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_0^{\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_0^{\Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\Delta t_e}^{\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0, \end{aligned} \quad (6.215)$$

bajo la integración el factor de escala se puede considerar constante, obteniéndose

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}. \quad (6.216)$$

Sabemos que la longitud de onda se escribe como $\lambda = c\Delta t$, de donde

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (6.217)$$

Esta ecuación muestra que existe una estrecha relación entre la longitud de onda y el factor de escala; podemos ahora definir el “corrimiento al rojo” como [17]

$$z := \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} - 1. \quad (6.218)$$

Con la normalización del factor de escala podemos reescribir esto como

$$a(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (6.219)$$

Interpretamos la cantidad $1+z$ como el radio de distancias al tiempo de llegada y de emisión de una señal de luz⁴². Consideramos la expansión en serie de Taylor del factor de escala al rededor de t_0

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \dot{a}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t-t_0) \\ &= a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t-t_0)^2 \right]; \end{aligned} \quad (6.220)$$

donde definimos el “parámetro de desaceleración”

$$q := -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (6.221)$$

Mediciones del corrimiento al rojo de objetos distantes indican que $q_0 < 0$, significa que el Universo está en un estado de expansión acelerada [17].

Consideremos (6.219), podemos escribir al corrimiento al rojo como función del factor de escala, de modo que

$$z = \frac{1}{a} - 1, \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{\dot{a}}{a^2}dt = -(1+z)H(z)dt, \quad (6.222)$$

es decir,

$$dt = -\frac{1}{(1+z)H(z)}dz. \quad (6.223)$$

En ese sentido

$$\xi = -\int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{dz}{H(z)}, \quad (6.224)$$

entonces para $z \ll 1$

$$\xi \approx \frac{z}{H_0}, \quad \Rightarrow \quad z \stackrel{(6.194)}{=} H_0 d_P, \quad (6.225)$$

y de la ley de Hubble (6.195),

$$v \approx \xi. \quad (6.226)$$

Esto significa que para valores pequeños de z , el corrimiento al rojo (relacionado como un efecto de expansión) se puede asociar con el efecto Doppler [17] [40].

⁴²Esto significa, por ejemplo, que si $z = 1$ el Universo duplicó su tamaño desde que la señal se envió.

6.4.5. Soluciones del factor de escala

Cabe destacar que la constante de curvatura k , además de caracterizar la solución, nos provee tres geometrías distintas, cada una con su propia topología: $k = 0$ corresponde a un espacio plano; $k = 1$, una 3-esfera; y $k = -1$, un hiperboloide. En primer lugar, de la ecuación de evolución (6.192) deducimos que \dot{a} nunca se anula [12].

Con la solución del factor de escala en la primer ecuación de Friedmann tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2 r_0^2} &= \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+\omega)}}, \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= H_0^2 [\Omega_{0\omega} a^{-3(1+\omega)} + \Omega_{0,k} a^{-2}], \end{aligned} \quad (6.227)$$

y deja en evidencia que la evolución del Universo está determinada por la curvatura espacial si $\omega > -\frac{1}{3}$. Entonces los Universos planos y abiertos se expanden siempre, mientras que un Universo cerrado llega a un valor máximo $a_{\text{máx}}$ y se recolapsa, lo que se conoce como “big crunch”. Si $\omega < -\frac{1}{3}$ la expansión procederá por siempre independientemente de la topología del Universo. El caso límite se da cuando $\omega = -\frac{1}{3}$, y en nuestro análisis representa a un Universo dominado por un fluido con densidad de masa gravitacional nula; la tasa de expansión \dot{a} es una constante, como si se tratase de un Universo vacío [17]. Los valores de la constante barotrópica que consideramos físicos están dados por la condición $-1 < \omega$.

Universo plano

Tenemos que $k = 0$. Consideramos un Universo dominado por un fluido con parámetro $\Omega_\omega \approx \Omega_0 = 1$. Retomando (6.227) encontramos que

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,\omega}} a^{-\frac{3}{2}(\omega+1)}, \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,\omega}}, \quad (6.228)$$

integrando sobre t obtenemos

$$\frac{2}{3(1+\omega)} a^{\frac{3}{2}(\omega+1)} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,\omega}} t, \quad (6.229)$$

de donde

$$a_\omega(t) = \left[\frac{3}{2} (1+\omega) H_0 \sqrt{\Omega_{0,\omega}} t \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad \omega \neq -1. \quad (6.230)$$

Para la solución con Ω_Λ regresamos a la expresión (6.228)

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}, \quad (6.231)$$

integrando esta expresión entre $[t, t_0]$ encontramos la solución

$$a(t) = a_\Lambda(t) \exp \left\{ H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} (t_0 - t) \right\}, \quad (6.232)$$

es decir,

$$a_{\Lambda}(t) = \exp \left\{ -H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} (t_0 - t) \right\}. \quad (6.233)$$

En esta solución tenemos que

$$a_{\Lambda}(0) = \exp \left\{ -H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} t_0 \right\}, \quad (6.234)$$

que si bien es pequeño no nos permite recuperar la condición $a(0) = 0$ de manera analítica. Una mejor aproximación se da en cuanto mayor es la edad del Universo, pues $a \rightarrow 0$ cuando $t_0 \rightarrow \infty$.

Universos no-planos

Sea $k \neq 0$. Consideramos primero un Universo dominado por la contribución a la curvatura, es decir, Ω_k ; de (6.227)

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{0,k}} a^{-2}, \quad (6.235)$$

de donde

$$a(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{0,k}} t. \quad (6.236)$$

Por otro lado, para Universos dominados por un fluido encontramos, de (6.227),

$$dt = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{0,\omega}}} \frac{a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} da}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_{0,k}}{\Omega_{0,\omega}} a^{(1+3\omega)}}} \quad (6.237)$$

Introducimos el “tiempo conforme“, η , como⁴³

$$H_0 \frac{dt}{d\eta} := a(\eta), \quad (6.238)$$

y el cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\omega}}} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}(1+3\omega) \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\omega}}} a^{\frac{1}{2}(-1+3\omega)} da, \quad (6.239)$$

que nos permiten escribir dos soluciones

$$d\eta = H_0 \frac{dt}{a(t)} = \begin{cases} P_{0,\omega,k} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, & \text{si } k = 1, \\ P_{0,\omega,k} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.240)$$

⁴³Con este tiempo conforme la métrica de FLRW se puede escribir, de (6.142), como

$$ds^2 = a^2(t) \left[-\frac{1}{H_0^2} d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}} + r^2 d\Omega^2 \right],$$

donde

$$P_{0,\omega,k} = \frac{2}{(1+3\omega)\sqrt{|\Omega_{0,k}|}}. \quad (6.241)$$

Bajo integración obtenemos las soluciones

$$\eta = \begin{cases} P_{0,\omega,k} \sin^{-1} u, & \text{si } k = 1, \\ P_{0,\omega,k} \sinh^{-1} u, & \text{si } k = -1, \end{cases} \quad (6.242)$$

de donde encontramos también

$$u = \begin{cases} \sin\left(\frac{\eta}{P_{0,\omega,k}}\right), & \text{si } k = 1, \\ \sinh\left(\frac{\eta}{P_{0,\omega,k}}\right), & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.243)$$

Tenemos entonces que

$$H_0 dt \stackrel{(6.238)}{=} a d\eta = \begin{cases} Q_{0,\omega,k} \frac{u^{\frac{2}{1+3\omega}}}{\sqrt{1-u^2}} du, & \text{si } k = 1, \\ Q_{0,\omega,k} \frac{u^{\frac{2}{1+3\omega}}}{\sqrt{1+u^2}} du, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.244)$$

donde usamos

$$a \stackrel{(6.239)}{=} \left(\frac{\Omega_{0,\omega}}{|\Omega_{0,k}|}\right)^{\frac{1}{1+3\omega}} u^{\frac{2}{1+3\omega}}, \quad (6.245)$$

y definimos

$$Q_{0,\omega,k} = \left(\frac{\Omega_{0,\omega}}{|\Omega_{0,k}|}\right)^{\frac{1}{1+3\omega}} P_{0,\omega,k} = \frac{2(\Omega_{0,\omega})^{\frac{1}{1+3\omega}}}{(1+3\omega)|\Omega_{0,k}|^{\frac{3(1+\omega)}{2(1+3\omega)}}}. \quad (6.246)$$

Sabiendo que

$$du = \frac{1}{P_{0,\omega,k}} \cos\left(\frac{\eta}{P_{0,\omega,k}}\right) d\eta, \quad (6.247)$$

llegamos a

$$\left(\frac{\Omega_{0,\omega}}{|\Omega_{0,k}|}\right)^{\frac{-1}{1+3\omega}} H_0 dt = \begin{cases} \sin^{\frac{2}{1+3\omega}}\left(\frac{\eta}{P_{0,\omega,k}}\right) d\eta, & \text{si } k = 1, \\ \sinh^{\frac{2}{1+3\omega}}\left(\frac{\eta}{P_{0,\omega,k}}\right) d\eta, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.248)$$

Una vez llegados a este punto es muy difícil integrar, por lo que vamos a proceder con valores de ω específicos.

Para materia ($\omega = 0$) tenemos que

$$\left(\frac{\Omega_{0,m}}{|\Omega_{0,k}|}\right)^{-1} H_0 dt = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\eta}{P_{0,m,k}}\right) d\eta, & \text{si } k = 1, \\ \sinh^2\left(\frac{\eta}{P_{0,m,k}}\right) d\eta, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.249)$$

y encontrando las soluciones

$$t(\eta) = \begin{cases} \frac{\Omega_{0,m}}{2H_0 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} (\eta - \sin \eta), & \text{si } k = 1, \\ \frac{\Omega_{0,m}}{2H_0 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} (\sinh \eta - \eta), & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.250)$$

Así mismo

$$a_m(\eta) \stackrel{(6.238)}{=} \stackrel{(6.249)}{\begin{cases} \frac{\Omega_{0,m}}{2|\Omega_{0,k}|} (1 - \cos \eta), & \text{si } k = 1, \\ \frac{\Omega_{0,m}}{2|\Omega_{0,k}|} (\cosh \eta - 1), & \text{si } k = -1. \end{cases}} \quad (6.251)$$

El siguiente caso será la radiación ($\omega = \frac{1}{3}$). De (6.248) escribimos

$$\left(\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|} \right)^{-\frac{1}{2}} H_0 dt = \begin{cases} \sin(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta) d\eta, & \text{si } k = 1, \\ \sinh(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta) d\eta, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.252)$$

Encontrando así

$$a_\gamma(\eta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|}} \sin(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta), & \text{si } k = 1, \\ \sqrt{\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|}} \sinh(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta), & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.253)$$

Por otro lado, regresemos a la ecuación (6.227), de donde

$$\dot{a}^2 = Ra^{-2} - kr_0^{-2}, \quad R \equiv \frac{8\pi}{3} \rho_{0,\gamma}. \quad (6.254)$$

Además, de la segunda ecuación de Friedmann (6.193) vemos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -Ra^{-4}, \quad (6.255)$$

obteniendo así la ecuación

$$\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kr_0^{-2} = \frac{d}{dt} \left(a\dot{a} + k \frac{t}{r_0^2} \right) = 0. \quad (6.256)$$

Sea S la constante resultante de la primera integración, de la segunda encontramos

$$\frac{a^2}{2} + k \frac{t^2}{2r_0^2} = tS, \quad (6.257)$$

es decir,

$$a(t) = \sqrt{2tS - k \frac{t^2}{r_0^2}}. \quad (6.258)$$

Comparando con (6.254) podemos escribir $R = S^2$, y como

$$r_0 \stackrel{(6.208)}{=} \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_{0,k}|}}, \quad (6.259)$$

la solución general queda como [12]

$$a_\gamma(t) = \begin{cases} \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \left[1 - (1 - H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{si } k = 1, \\ \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \left[-1 + (1 + H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.260)$$

Para la energía oscura ($\omega = -1$) recuperamos directamente de (6.227)

$$a_\Lambda(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\Lambda}}} \sin(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} t), & \text{si } k = 1, \\ \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\Lambda}}} \sinh(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} t), & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (6.261)$$

Observación. Las soluciones del factor de escala para el Universo cerrado ($k = 1$) hacen evidente el big crunch, pues la solución rebota: alcanza un máximo y se contrae.

El modelo Λ -CDM abarca un estudio más profundo; diferentes ramas de la física como la astronomía, astrofísica y gravitación nos han acercado a una mejor comprensión del Universo a gran escala, e inclusive apoyado en la predicción de la estructura de nuestro vecindario con ayuda de la teoría de perturbaciones. Aún así, el modelo presenta problemas que siguen bajo estudio y han llevado a diferentes propuestas con soluciones variadas. No vamos a entrar en detalle en este ámbito, pero vale la pena mencionar que algunas de las teorías alternativas a la gravedad de Einstein también conducen a teorías formales de la gravedad cuántica.

7 La cuantización topológica

*«Cuidado
amigos:
las
experiencias
engañan.»*

Efraín Huerta

Uno de los bloques fundamentales de la física moderna es la cuantización canónica, un formalismo que al ser aplicado a las teorías de norma nos devuelve el modelo estándar de partículas elementales cuyas predicciones se han puesto a prueba experimentalmente con gran exactitud, por lo que hoy es considerado uno de los modelos más exitosos dentro de la física. A pesar de ello, presenta problemas conceptuales que no son completamente entendidos: la existencia de un espacio de Hilbert para los estados cuánticos no siempre está garantizada, especialmente en los casos en que el sistema tiene un número infinito de grados de libertad; los operadores cuánticos pueden ser bien definidos solo en algunos casos relativamente simples; la existencia del caso límite en cuanto al principio de correspondencia (que es una condición necesaria según sus postulados y que la hace compatible con otras teorías) no siempre se satisface; la no unicidad de la evolución cuántica. Además, el método está plagado de divergencias que requieren la implementación de regularizaciones adicionales y procedimientos de renormalización.

Al intentar aplicarla a la gravitación de Einstein, el problema del tiempo presenta serias dificultades adicionales, que están aún lejos de ser resueltas. De hecho, la cuantización de la gravedad es considerado uno de los problemas más complicados de la física teórica moderna [46].

A lo largo de los últimos 90 años muchos autores han emprendido una búsqueda por una teoría consistente de la «gravedad cuántica» por medio de todos los procedimientos de cuantización disponibles, en los cuales al menos uno de los postulados de la cuantización canónica es usado. Cerca de los años 70's la perspectiva del enfoque de esta búsqueda divergió, en gran parte por la formación teórica del investigador: algunos se enfocaron en la física de partículas elementales, usando teoría de perturbaciones sobre la teoría cuántica de campos; mientras que otros se basaron en la relatividad general y utilizaron elementos de la teoría cuántica sobre un fondo basado en un espacio curvo.

El primero de estos enfoques dio paso a la super-gravedad, que es una extensión del modelo super-simétrico de la relatividad general estándar. Esta aproximación pronto fue reemplazada por la teoría de supercuerdas, la cual ahora es el programa de cuantización de la gravedad dominante (en términos del número de personas involucradas y artículos publicados, por año, por persona). Por otro lado, el enfoque de quienes siguieron la relatividad general partieron de la cuantización canónica, logrando formular la gravedad cuántica por lazos, que ha obtenido resultados interesantes en cuanto a la naturaleza del espaciotiempo [34].

Ambas aproximaciones asumen que la cuantización canónica es el método apropiado para obtener las propiedades cuánticas de un sistema clásico. En este sentido, por ejemplo, la teoría de cuerdas propone la existencia de campos adicionales por lo que, estrictamente hablando, la teoría de Einstein resulta incompleta para describir todos los aspectos clásicos del campo gravitacional. Mientras que la teoría de lazos es una aproximación más conservadora, pues asume que ambas, la relatividad general y la cuantización canónica, son correctas y ataca el problema desde una perspectiva más técnica, introduciendo un nuevo formalismo para describirlas a las dos. En general, la cuantización canónica es un ingrediente básico de todas las aproximaciones al problema de la gravedad cuántica.

Probablemente el único punto en el que la mayoría de los autores están de acuerdo es que una teoría de la gravedad cuántica definitiva está aún lejos de nuestro alcance. Debido a esta situación se puede suponer que una diferente aproximación podría esclarecer el problema. La inspiración de esta nueva formulación desarrollada por E. Patiño y H. Quevedo viene de la idea de P. A. M. Dirac para determinar la fase adquirida por una carga q al moverse sobre una trayectoria cerrada sobre el campo de un monopolo magnético (con carga g) [47], obteniéndose

$$qg = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.1)$$

Este resultado es conocido como la “cuantización de Dirac de la carga eléctrica” y se puede interpretar, desde un punto de vista geométrico, como la consecuencia de la existencia de un haz fibrado principal no trivial en el cual el espacio base es la esfera \mathbb{S}^2 y el grupo de estructura, $U(1)$, junto con una conexión en el álgebra $\mathfrak{u}(1)$ para el sistema compuesto por una carga eléctrica q y una carga magnética g . Los números de Chern para este haz fibrado resultan ser el producto qg , por lo que esta cantidad resulta cuantizada [31] [48] [49].

Es de nuestro interés ahora buscar una generalización de esta idea, más aún, encontrar un método de cuantización que se pueda derivar de la estructura geométrica del sistema en cuestión. Es decir, encontrar propiedades geométricas y topológicas disponibles en una configuración clásica para describir las características principales del sistema cuántico asociado [46], que tiene como antecedentes no solo a la cuantización de Dirac, sino que tratamientos así se han realizado en configuraciones de instantones y monopolos [50] [51], se han aplicado en el contexto de la cohomología [52], modelos topológicos del electromagnetismo [53] y teorías de Yang-Mills [54]. También se ha estudiado en la cuantización de corrientes en nano-estructuras [55] y

en teoría de superconductores [56] [57]. Este tratamiento es conocido como “cuantización topológica” (“topological quantization”) e incluso ha sido tratado formalmente y de manera geométrica con aplicaciones a sistemas físicos descritos por un haz de línea hermitiano [19]. Una teoría cuántica que tome en cuenta esta discretización y cuyo propósito sea dar una descripción completa sobre la naturaleza discreta de los sistemas físicos, habrá de considerar los requisitos correspondientes, por lo que esta «cuantización de fibras» será un formalismo a parte.

7.1. Estructura de un sistema clásico

Como un primer paso se asume que las teorías de norma y relatividad general describen correctamente y de manera clásica las interacciones entre campos que es una de las principales divergencias con las principales propuestas de gravedad cuántica, puesto que no suponemos de partida a la cuantización canónica. Sin embargo, un paso necesario es que este método pueda predecir los éxitos de aquella.

Es esencial en una teoría cuántica ofrecer una manera de encontrar los observables en el formalismo y dar una descripción precisa de los estados cuánticos y su evolución (estos dos últimos los omitimos por ahora ya que aún no cuentan con una adecuada definición).

A modo de preludeo, comenzaremos familiarizándonos con las herramientas de las que vamos a disponer.

7.1.1. Configuración clásica

Es clara la idea de una configuración clásica, y con ello proporcionamos una definición exacta. *Grosso modo*, esta ofrece una estructura apropiada de nuestro sistema a considerar.

Definición 7.1.1 (Configuración clásica). Una *configuración clásica* (no cuántica) de un sistema físico es aquel en el cual podemos asociar una única estructura geométrica que consiste en una variedad diferencial con una conexión.

Esta unicidad debe entenderse de manera que estos dos objetos geométricos sean suficientes para distinguir cualquier configuración clásica de otra. Así, dos variedades diferenciales relacionadas por un isomorfismo con la misma conexión describen, en nuestro formalismo, a la misma configuración clásica.

Consideremos ahora un par de ejemplos de la teoría de campos.

En las teorías de norma de Yang-Mills una configuración clásica es una solución de las correspondientes ecuaciones de campo: la variedad diferencial es el espacio-tiempo de Minkowski y la conexión A es una 1-forma diferencial con valores en el álgebra \mathfrak{g} del grupo de norma G que puede ser $U(1)$, $SU(2)$ o $SU(3)$ para las interacciones conocidas de la naturaleza. Cualquier solución de las ecuaciones de campos puede representarse, salvo una transformación de norma, por medio de una conexión A la cual genera la curvatura de norma $F = dA$ en el caso abeliano o $F = dA + A \wedge A$, en el no-abeliano. A pesar que la información del sistema físico está contenida en la curvatura, usamos la conexión debido a que la libertad de norma es una componente importante en la construcción de la estructura geométrica sobre la que descansa la cuantización topológica. Una configuración clásica la podemos escribir, al menos en el caso de las teorías de norma, como (\mathcal{M}_η, A) [58].

Los sistemas clásicos son usualmente invariantes ante ciertas transformaciones las cuales forman un grupo de Lie G , en los sistemas mecánicos este grupo corresponde a las transformaciones de Galileo que se puede reducir al grupo de rotaciones $SO(n)$ (cuando usamos para su descripción un marco ortonormal de tétradas). De manera similar los campos gravitacionales son en general localmente invariantes ante el grupo de las transformaciones de Lorentz $SO(1, 3)$ actuando sobre las 1-formas θ^a . Los campos de materia son invariantes ante sus respectivas transformaciones de norma (es decir, el grupo de norma G), cuando actúan sobre una conexión A , al mismo tiempo lo pueden ser sobre el grupo de Lorentz cuando actúan sobre la métrica de Minkowski η . Vamos a usar este grupo como fibra estándar para construir un haz fibrado principal \mathcal{P} con espacio base (\mathcal{M}, ω) . Nuestro objetivo es extraer todas las propiedades geométricas y topológicas de \mathcal{P} y mostrar que están relacionadas con características cuánticas del sistema clásico subyacente [46] [58].

Notemos que la idea de dimensiones adicionales para describir el comportamiento de los campos aparece de manera natural en esta construcción, pues la dimensión del haz fibrado principal es la suma de las dimensiones de los espacios que lo componen, es decir,

$$\dim(\mathcal{P}) = \dim(\mathcal{M}) + \dim(G). \quad (7.2)$$

Así, para los sistemas mecánicos con k grados de libertad tendremos una k -variedad diferencial \mathcal{M} y el grupo de Lie asociado es el grupo $SO(k)$, cuya dimensión es $\frac{1}{2}k(k-1)$, de donde el haz tendrá dimensión $\dim(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}k(k+1)$. Para los campos gravitacionales este será $\dim(\mathcal{P}) = 4+6 = 10$, pues la variedad \mathcal{M} es el espaciotiempo y el grupo asociado, el de Lorentz $SO(1, 3)$. Mientras que para un campo de Yang-Mills será un espaciotiempo de Minkowski con un grupo $SU(k)$, por lo que estará descrito por un haz fibrado de dimensión $\dim(\mathcal{P}) = 4 + k^2 - 1$. Como último ejemplo podemos tomar la configuración clásica del modelo estándar de partículas elementales con grupo de norma $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, cuyo haz fibrado será de 16 dimensiones. A pesar que esas dimensiones adicionales tienen una importancia física relevante, en el sentido que están relacionadas con las simetrías del sistema, estas no pueden ser observadas directamente en el espaciotiempo. Es decir, a pesar de su importancia en la construcción del haz fibrado, solo se presentan en el espaciotiempo a través de las leyes de conservación que se pueden asociar a las simetrías del sistema.

7.1.2. Espectro topológico

Consideremos una clase característica $C(\mathcal{P})$ del haz fibrado \mathcal{P} . Como es un invariante topológico, la integral $\int C(\mathcal{P})$ sobre el espacio base (o un ciclo compacto de este) también lo es, el resultado de interés es que la integral anterior siempre puede ser normalizada de forma que obtenemos un espectro de números enteros n . Para lograrlo requerimos que la clase característica sea una forma diferencial, además su forma explícita depende del grupo de estructura. En los casos que hemos abordado en este capítulo la clase característica queda escrita en términos de la 2-forma de

curvatura Ω ; para las clases de Pontrjagin, Euler y Chern la integral $\int C(\mathcal{P})$ se puede calcular explícitamente y obtenemos una función que depende de los parámetros que intervienen en la métrica del espacio base y una relación de la forma

$$f(q^1, \dots, q^k) = n, \quad (7.3)$$

que representa la discretización de los parámetros q^1, \dots, q^k en términos de los números característicos. Este resultado no solo nos da una noción de lo que es un espectro discreto (u observable) en la cuantización topológica, sino una formalidad.

Definición 7.1.2 (Espectro topológico). Definimos el *espectro topológico* del sistema clásico descrito por el haz fibrado \mathcal{P} como el resultado de la integral de la clase característica $C(\mathcal{P})$ sobre el espacio base \mathcal{M} (o sobre un ciclo compacto de \mathcal{M}):

$$\int_{\mathcal{M}} C(\mathcal{P}) = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.4)$$

Observación. Esta definición tiene una reminiscencia directa con la cuantización de Bohr-Wilson-Sommerfeld en la que, para sistemas separables (integrables) con movimientos periódicos, se propone que las variables de acción J_α toman valores discretos, con lo que restringen las órbitas permitidas sobre el espacio fase. Es decir, de acuerdo a su definición

$$J_\alpha = \oint p_\alpha dq^\alpha = hn, \quad (7.5)$$

donde la integración se realiza sobre un ciclo completo. El índice α etiqueta a los grados de libertad, por lo que no hace referencia a una suma sobre sus posibles valores y h es la constante de Planck [59].

A pesar de lo que puede parecer, existen grandes diferencias entre esta cuantización y el espectro topológico en el formalismo de Patiño-Quevedo. La más evidente es la manera en que se obtiene un espectro discreto: mientras que en la mecánica cuántica primitiva las variables de acción se proponen de la manera anterior, en la cuantización topológica es una consecuencia de las propiedades topológicas del haz fibrado que describe al sistema [58]. Por otro lado, la restricción a sistemas periódicos deja fuera de su alcance muchos sistemas físicos importantes. Sin embargo, los problemas persistentes en la teoría de Bohr condujeron a la comunidad científica a la mecánica cuántica moderna y bajo algunas modificaciones se han realizado mejores descripciones [60].

7.2. Configuración clásica de sistemas mecánicos

Hasta ahora hemos descrito la manera en que se puede asociar una estructura a un sistema físico clásico a partir del cual obtener un espectro discreto. Sin embargo, el resultado más importante es, de hecho, demostrar que en efecto estas estructuras existen y cómo se pueden construir. En cuanto a los sistemas mecánicos necesitamos una descripción que contenga toda la información física del sistema, es decir, que la configuración clásica del sistema mecánico (\mathcal{M}, ω) sea suficiente para dar una descripción completa.

En adelante vamos a construir un formalismo de la mecánica clásica que nos va a permitir definir esta configuración clásica de sistemas mecánicos.

7.2.1. Sistemas mecánicos

La mecánica clásica puede ser descrita en términos de varios formalismos, entre los que destacan la versión Lagrangiana y Hamiltoniana que ayudaron a formalizar los principios por los que se rige esta teoría. En particular, la mecánica lagrangiana describe el movimiento de un sistema mecánico por medio de un espacio de configuración, el cual tiene la estructura de una variedad diferencial, y una función en el haz tangente, el lagrangiano, bajo el cual se pueden encontrar leyes de conservación. Por otro lado, la versión hamiltoniana hace uso de la geometría en un espacio fase, con estructura de variedad simpléctica, y una función escalar sobre este conocida como hamiltoniano, estos ingredientes reducen la mecánica lagrangiana a un caso especial de esta última¹. Estas dos formulaciones hacen uso del principio de Hamilton para deducir las ecuaciones que rigen el movimiento del sistema mecánico y tienen la ventaja de proporcionar gran información solo conociendo el lagrangiano o hamiltoniano que lo describen. El comportamiento completo viene dado cuando se resuelven las ecuaciones de movimiento obtenidas del principio variacional anterior y se establecen las condiciones iniciales (o de frontera). Y, como se puede ver, ambos enfoques pueden ser tratados desde la geometría diferencial [37].

Mecánica lagrangiana

Consideremos el espacio de configuración \mathcal{M} (de dimensión k) con coordenadas q^α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$, esto es, para un sistema con k grados de libertad. Vamos a establecer un conjunto de coordenadas generalizadas sobre el espacio \mathcal{M} . Sabemos que los puntos sobre el haz tangente $T\mathcal{M}$ quedan representados por el par (q, \dot{q}) , donde $q = (q^1, \dots, q^k)$ y $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)$, dado que

$$\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}, \quad (7.6)$$

¹El espacio fase es en este caso el haz cotangente del espacio de configuración y el hamiltoniano es la transformada de Legendre del lagrangiano.

son las componentes en la base coordenada $\{\partial_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ del vector tangente a una curva parametrizada por el tiempo, t . Dada esta estructura de \mathcal{M} podemos introducir una métrica g , determinada por la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}g(v, v). \quad (7.7)$$

Aún con estos elementos no es posible dar una descripción completa de la dinámica del sistema. Es ahora que introducimos el lagrangiano como pieza clave en nuestra formulación. Vamos a partir del caso más general en el que es función explícita del tiempo, esto es $L = L(q, \dot{q}, t)$. En este caso $L : (T\mathcal{M} \times \mathbb{R})^* \rightarrow \mathbb{R}$, donde $(T\mathcal{M} \times \mathbb{R})^*$ es el espacio de las funciones lineales sobre el haz tangente extendido $T\mathcal{M} \times \mathbb{R}$. Definimos ahora la acción, S , como

$$S[\gamma] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (7.8)$$

donde γ es una curva y t_i y t_f son los tiempos inicial y final entre los que evoluciona el sistema mecánico, respectivamente. La acción $S : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ así definida es entonces una función que depende de la curva y las funciones coordenadas, q^α , que conforman q y el vector tangente \dot{q} , pues también dependen de ella. En el caso del funcional que nos incumbe no solo dependerá de las curvas sino de los vectores tangentes a ellas y (en nuestro caso general) el tiempo. Vamos a fijar los extremos, por lo que las variaciones de la curva al inicio y al final son nulas, es decir, $\delta q^\alpha(t_i) = \delta q^\alpha(t_f) = 0$. El principio variacional sobre el que descansa la mecánica lagrangiana afirma que la curva que describe la trayectoria física es extremal, esto es, la acción es un mínimo variacional

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = 0, \quad (7.9)$$

de donde se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (7.10)$$

Es útil ahora definir el “momento canónico conjugado de la variable q^α ” (o simplemente “momento generalizado”) que está dado por

$$p_\alpha(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \quad (7.11)$$

En caso de tener un sistema no singular² las coordenadas y momentos generalizados constituyen un conjunto de relaciones invertibles.

²Un sistema no singular o regular es aquel en que

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right) \neq 0.$$

Observación. El momento generalizado es un vector covariante. Para los casos en que la fuerza pueda derivarse de un potencial, es decir, para fuerzas conservativas, el lagrangiano viene dado por la expresión

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(q). \quad (7.12)$$

donde T es la energía cinética y V , la potencial. Por lo que una vez definido el tensor métrico, el momento canónico se puede expresar como

$$p_\mu = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha \dot{q}^\beta + \delta_\mu^\beta \dot{q}^\alpha) = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta} \dot{q}^\beta + g_{\mu\alpha} \dot{q}^\alpha) = g_{\mu\beta} \dot{q}^\beta. \quad (7.13)$$

Mecánica hamiltoniana

La estructura simpléctica en la versión hamiltoniana de la mecánica clásica establece la existencia de un espacio de $2k$ dimensiones (para un sistema con k grados de libertad), que denotaremos en esta sección como \mathcal{M}^{2k} (y que representa el espacio fase), en la cual existe una 2-forma diferencial cerrada no degenerada ω . A esta estructura simpléctica la denotamos como $(\mathcal{M}^{2k}, \omega)$. Al igual que en las variedades riemannianas, en las simplécticas existe un isomorfismo natural entre campos vectoriales y 1-formas.

Para esta forma simpléctica en una vecindad de $x \in \mathcal{M}^{2k}$ uno siempre puede escoger un sistema de coordenadas $(p_1, \dots, p_k, q^1, \dots, q^k)$ en el cual [35] [37]

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^k dp_\alpha \wedge dq^\alpha. \quad (7.14)$$

Así, siempre podemos elegir esta forma ω de manera que esté descrita en términos de las variables del sistema. Para encontrar las componentes de ω consideramos coordenadas (z^1, \dots, z^{2k}) , donde $z^i = p_i$ si $i = 1, \dots, k$ y $z^i = q^i$ si $i = k+1, \dots, 2k$ [35]. Así, escribimos

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega(\partial_i, \partial_j) = \sum_{l=1}^k dz^l \wedge dz^{l+k}(\partial_i, \partial_j) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k+i \text{ con } i = 1 \dots, k, \\ -1 & \text{si } i = k+j \text{ con } j = 1 \dots, k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Escribiendo las componentes de la forma simpléctica en forma matricial tenemos que

$$[\omega] = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & \mathbb{O}_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

donde $\mathbb{O}_{n \times n}$ es la matriz cero de tamaño $n \times n$. Por otro lado, el isomorfismo natural entre los campos vectoriales y las 1-formas se da a continuación.

Definición 7.2.1 (Forma asociada a un vector). Sea $(\mathcal{M}^{2k}, \omega)$ una variedad simpléctica. Consideremos un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^{2k})$, le asociamos la 1-forma ω_X definida como

$$\omega_X(Y) = \omega(Y, X), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^{2k}). \quad (7.17)$$

También podemos definir el tensor ω^{-1} de manera que sus componentes $\omega^{\mu\nu}$ sean tales que

$$\omega^{\mu\lambda}\omega_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (7.18)$$

haciendo una construcción análoga a la métrica inversa. Las componentes de este tensor están dados por

$$[\omega^{-1}] = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} & -\mathbb{1}_{n \times n} \\ \mathbb{1}_{n \times n} & \mathbb{O}_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

Esto garantiza la existencia de un isomorfismo entre los campos vectoriales y las 1-formas diferenciales.

A pesar de la estructura actual ocurre, una vez más, que no es suficiente para dar una descripción completa del sistema físico. Por esta razón introducimos el hamiltoniano $H : \mathcal{M}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$. Para el caso más general en que depende explícitamente del tiempo vamos a partir del espacio fase extendido, $\mathcal{M}^{2k} \times \mathbb{R}$, así $H = H(p, q, t)$. En este espacio podemos construir la 2-forma no singular, a partir de (7.14),

$$dp_\alpha \wedge dq^\alpha + \eta \wedge dt, \quad (7.20)$$

donde η es una 1-forma y dejamos implícita la suma sobre el índice α . Para completar nuestra formulación vamos a considerar que esta forma contiene la información dada por el hamiltoniano, por lo que una propuesta para esta es dH , sin embargo, por convención vamos a tomar $-dH$, ya que esta tiene que ver con la trayectoria física del sistema en el espacio fase. Es decir, vamos a considerar la 2-forma

$$dp_\alpha \wedge dq^\alpha - dH \wedge dt, \quad (7.21)$$

que se puede obtener de la derivada exterior de la 1-forma

$$p_\alpha dq^\alpha - H dt, \quad (7.22)$$

conocida como “forma de Poincaré-Cartan”, de donde podemos definir la acción como

$$S = \int_\gamma p_\alpha dq^\alpha - H dt, \quad (7.23)$$

(esta integral es conocida como “integral invariante de Hilbert”) donde γ es la curva que describe el sistema físico sobre el espacio fase. Así mismo encontramos la relación entre el hamiltoniano y el lagrangiano

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L, \quad (7.24)$$

dado por la transformación de Legendre³

Ahora consideramos esta integral como un mínimo variacional para encontrar las ecuaciones de movimiento. Primeramente fijamos los extremos de las coordenadas (no es necesario hacerlo para los momentos dada la relación entre \dot{q}^α y p_α dado por la transformación de Legendre; es decir, $\delta q^\alpha(\hat{t}) = 0$, para $\alpha, \beta = 1, \dots, k$ y donde \hat{t} son los tiempos inicial y final. Notemos que las coordenadas y momentos generalizados están parametrizados por t . Luego, sabemos que llegaremos a las ecuaciones de Euler-Lagrange en las coordenadas z^i ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} - \frac{\partial L}{\partial z^i} = 0, \quad (7.25)$$

que nos llevan, por un lado,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial p_\alpha} \stackrel{7.24}{=} -\dot{q}^\beta + \frac{\partial H}{\partial p_\beta} = 0, \quad (7.26)$$

y, por el otro,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \stackrel{7.24}{=} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (7.27)$$

de donde obtenemos las “ecuaciones canónicas de Hamilton”:

$$\dot{q}^\beta = \frac{\partial H}{\partial p_\beta}, \quad \dot{p}_\beta = -\frac{\partial H}{\partial q^\beta}, \quad (7.28)$$

las cuales describen la mecánica del sistema en el formalismo de Hamilton [35].

Estas dos formulaciones son las más populares para describir a un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad. Tienen extensiones a las teorías de campo por lo que no solo se limitan a ofrecer una descripción de la mecánica clásica, sino que usualmente otras ramas de la física se hacen de formulaciones análogas para formalizar sus resultados. Entre ellas están la teoría cuántica de campos (como la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica, etc.), la electromagnética e inclusive la gravedad de Einstein, por mencionar algunos ejemplos. El alcance de estas formulaciones al resto de la física es evidente. Sin embargo, no son las apropiadas para la descripción de una configuración clásica ya que, como se mencionó con anterioridad, la estructura geométrica deja fuera información física relevante y el sistema físico solo es descrito correctamente al introducir el lagrangiano o hamiltoniano correspondiente.

Aún hay tesis que se enfocan en la mecánica clásica y que se pueden seguir analizando, empero nos vamos a concentrar solamente en una de ellas conocida como “formalismo de Maupertuis”, el cual, con las bases de las dos anteriores, estamos en condiciones de presentar ahora.

³Que es una manera de describir una función, o reproducir su gráfica enteramente en términos de su derivada sin hacer referencia a la variable. Para ello hace uso de otra función. Véase [35].

7.2.2. Principio de Maupertuis

Sabemos que un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad está descrito en la mecánica clásica por el lagrangiano⁴

$$L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - V(q). \quad (7.29)$$

Asumimos que el sistema es conservativo, entonces el hamiltoniano correspondiente H es una constante de movimiento, E , que coincide con la energía total del sistema. La variación del lagrangiano nos lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (7.30)$$

de las cuales tenemos, por un lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} (g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\dot{q}^\mu \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\nu + \dot{q}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\mu \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\dot{q}^\mu \delta_\alpha^\nu + \dot{q}^\nu \delta_\alpha^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} \dot{q}^\mu + g_{\alpha\nu} \dot{q}^\nu) = g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu, \end{aligned} \quad (7.31)$$

es decir⁵,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = g_{\alpha\mu} \ddot{q}^\mu + \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta. \quad (7.32)$$

Y por otro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - \partial_\alpha V(q), \quad (7.33)$$

de donde

$$g_{\alpha\mu} \ddot{q}^\mu + \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \partial_\alpha V(q) = 0, \quad (7.34)$$

contrayendo con $g^{\alpha\lambda}$ obtenemos para el primer término

$$g^{\alpha\lambda} g_{\alpha\mu} \ddot{q}^\mu = \delta_\mu^\lambda \ddot{q}^\mu = \ddot{q}^\lambda, \quad (7.35)$$

para el segundo y tercero

$$\begin{aligned} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \right) &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta + \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \dot{q}^\mu + \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\beta - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} \dot{q}^\nu + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \dot{q}^\nu - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu. \end{aligned} \quad (7.36)$$

⁴Esta es la forma estandar de un lagrangiano para los sistemas mecánicos que consideraremos el resto del capítulo.

⁵En virtud que

$$\frac{d}{dt} = \dot{q}^\beta \partial_\beta.$$

De lo anterior, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + g^{\alpha\lambda} \partial_\alpha V(q) = 0, \quad (7.37)$$

donde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (7.38)$$

es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica.

En cuanto al hamiltoniano del sistema, dado que es independiente del tiempo, H es una constante de movimiento, por lo que el sistema se mantiene en la hipersuperficie $H(p, q) = E$. Al proyectar la trayectoria del espacio fase sobre el de configuración \mathcal{M} obtenemos la trayectoria usual que describe la trayectoria física y que está descrita por la denominada “acción reducida”

$$\int p_\alpha dq^\alpha. \quad (7.39)$$

Para mostrar esto primero notemos que la 1-forma de esta integral se puede escribir como

$$p_\alpha dq^\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta (\dot{q}^\alpha dt) = 2T dt, \quad (7.40)$$

y, por otro lado, como $H = E$,

$$T = E - V(q), \quad (7.41)$$

por lo que

$$p_\alpha dq^\alpha = 2[E - V(q)] dt. \quad (7.42)$$

Así, podemos reescribir el elemento de línea como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta dt^2 = 2T dt^2, \quad (7.43)$$

de donde

$$ds = \sqrt{2T} dt. \quad (7.44)$$

Finalmente,

$$p_\alpha dq^\alpha = 2T dt = \sqrt{2T} ds, \quad (7.45)$$

esto nos permite definir una nueva métrica h a partir de g , la cual es conforme a ella y que definimos como

$$h = 2[E - V(q)]g, \quad (7.46)$$

llamada “métrica de Jacobi”. En términos del elemento de línea ds , asociamos $d\tilde{s}$ a la métrica h ,

$$d\tilde{s}^2 = 2[E - V(q)] ds^2. \quad (7.47)$$

En términos de t

$$d\tilde{s}^2 = (2[E - V(q)])^2 dt^2, \quad i.e., \quad d\tilde{s} = 2[E - V(q)] dt. \quad (7.48)$$

Esta nueva métrica nos permite escribir la acción reducida como

$$\int p_\alpha dq^\alpha = \int d\tilde{s}. \quad (7.49)$$

Este es el “principio de Maupertuis”.

Teorema 7.2.1. *Las ecuaciones de movimiento*

$$\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + g^{\alpha\beta} \partial_\beta V(q) = 0, \quad (7.50)$$

para el lagrangiano estándar (7.29) son equivalentes a las ecuaciones geodésicas

$$\frac{d^2 q^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \frac{dq^\gamma}{d\tilde{s}} = 0, \quad (7.51)$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} h^{\alpha\lambda} (\partial_\beta h_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma h_{\beta\lambda} - \partial_\lambda h_{\beta\gamma}), \quad (7.52)$$

es la conexión asociada a la métrica de Jacobi, dada por

$$d\tilde{s}^2 = h_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta = 2[E - V(q)] g_{\alpha\beta} dq^\alpha \otimes dq^\beta, \quad (7.53)$$

y la condición

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = 2[E - V(q)]. \quad (7.54)$$

Demostración. Las ecuaciones geodésicas (7.51) asociadas a la métrica de Jacobi se siguen de la variación de

$$\int d\tilde{s} = \int \sqrt{h_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}}} d\tilde{s}, \quad (7.55)$$

donde \tilde{s} es un parámetro afín. En particular,

$$\sqrt{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta} = 1, \quad \text{donde } v^\mu \equiv \frac{dq^\mu}{d\tilde{s}}, \quad (7.56)$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \delta \int d\tilde{s} &= \delta \int \sqrt{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta} d\tilde{s} \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial q^\mu} \sqrt{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta} \delta q^\mu + \frac{\partial}{\partial v^\mu} \sqrt{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta} \delta v^\mu \right] d\tilde{s} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta \delta q^\mu + \frac{1}{2} (2h_{\alpha\mu} v^\alpha) \delta v^\mu \right] d\tilde{s} \\ &\stackrel{(7.56)}{=} \int \left[h_{\alpha\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \delta \left(\frac{dq^\mu}{d\tilde{s}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta \delta q^\mu \right] d\tilde{s} \\ &= \int \left\{ \frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\alpha\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \delta q^\mu \right) + \left[-\frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\alpha\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta \right] \delta q^\mu \right\} d\tilde{s} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.57)$$

el primer término se anula al integrar, porque las variaciones en los extremos son nulas, de donde,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tilde{s}} \left(h_{\alpha\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta &= \left(\frac{dh_{\alpha\mu}}{d\tilde{s}} \right) \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} + h_{\alpha\mu} \frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta \\
&= \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial q^\beta} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} + h_{\alpha\mu} \frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} v^\alpha v^\beta \\
&= h_{\alpha\mu} \frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \frac{1}{2} (h_{\alpha\mu,\beta} v^\beta v^\alpha + h_{\alpha\mu,\beta} v^\alpha v^\beta - h_{\alpha\beta,\mu} v^\alpha v^\beta) \\
&= h_{\alpha\mu} \frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \frac{1}{2} (h_{\beta\mu,\alpha} v^\alpha v^\beta + h_{\alpha\mu,\beta} v^\alpha v^\beta - h_{\alpha\beta,\mu} v^\alpha v^\beta) \\
&= h_{\alpha\mu} \frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \frac{1}{2} (h_{\beta\mu,\alpha} + h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}) v^\alpha v^\beta \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{7.58}$$

contrayendo con $h^{\mu\nu}$ tenemos que

$$\frac{d^2q^\nu}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\nu \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} = 0. \tag{7.59}$$

Estas son las ecuaciones geodésicas para la métrica de Jacobi con la conexión de Levi-Civitta.

Ahora vamos a considerar, de (7.54),

$$\frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} = \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tilde{s}} = \frac{1}{2[E - V(q)]} \dot{q}^\alpha, \tag{7.60}$$

y también

$$\begin{aligned}
\frac{d^2q^\alpha}{d\tilde{s}^2} &= \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \dot{q}^\alpha \right) = \frac{dt}{d\tilde{s}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \dot{q}^\alpha \right) = \frac{dt}{d\tilde{s}} \left[\dot{q}^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \right) + \frac{dt}{d\tilde{s}} \ddot{q}^\alpha \right] \\
&= \frac{dt}{d\tilde{s}} \left[\frac{dt}{d\tilde{s}} \ddot{q}^\alpha + \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(\frac{1}{2[E - V(q)]} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right] \\
&= \frac{dt}{d\tilde{s}} \left[\frac{dt}{d\tilde{s}} \ddot{q}^\alpha - \frac{1}{(2[E - V(q)])^2} \left(-2 \frac{\partial V(q)}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right] \\
&= \frac{1}{(2[E - V(q)])^2} \ddot{q}^\alpha + \frac{2\partial_\beta V(q)}{(2[E - V(q)])^3} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta.
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Además sabemos por (7.53) que

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu} &= 2[E - V(q)]g_{\mu\nu}, \\
h^{\mu\nu} &= \frac{1}{2[E - V(q)]} g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{7.62}$$

de donde

$$h_{\mu\nu,\beta} = 2[E - V(q)]g_{\mu\nu,\beta} - 2g_{\mu\nu}\partial_\beta V(q). \tag{7.63}$$

Con estos últimos cálculos (7.60)-(7.63) podemos considerar

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2[E - V(q)]} g^{\alpha\beta} \right) \{2[E - V(q)] (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\
&\quad - 2[g_{\mu\beta}\partial_{\nu}V(q) + g_{\nu\beta}\partial_{\mu}V(q) - g_{\mu\nu}\partial_{\beta}V(q)]\} \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\
&\quad - \frac{g^{\alpha\beta}}{2[E - V(q)]} [g_{\mu\beta}\partial_{\nu}V(q) + g_{\nu\beta}\partial_{\mu}V(q) - g_{\mu\nu}\partial_{\beta}V(q)] \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2[E - V(q)]} [\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}V(q) + \delta_{\nu}^{\alpha}\partial_{\mu}V(q) - g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\partial_{\beta}V(q)].
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Así, llegamos a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dq^{\mu}}{d\tilde{s}} \frac{dq^{\nu}}{d\tilde{s}} &= \frac{1}{\{2[E - V(q)]\}^2} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \\
&\quad - \frac{1}{\{2[E - V(q)]\}^3} [\delta_{\mu}^{\alpha}\partial_{\nu}V(q) + \delta_{\nu}^{\alpha}\partial_{\mu}V(q) - g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\partial_{\beta}V(q)] \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \\
&= \frac{1}{\{2[E - V(q)]\}^2} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} + \frac{g_{\mu\nu}\dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu}}{\{2[E - V(q)]\}^3} g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}V(q) \\
&\quad - \frac{2\partial_{\beta}V(q)}{\{2[E - V(q)]\}^3} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \\
&= \frac{1}{\{2[E - V(q)]\}^2} [\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}V(q)] - \frac{2\partial_{\beta}V(q)}{\{2[E - V(q)]\}^3} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta},
\end{aligned} \tag{7.65}$$

pues de (7.56),

$$1 = h_{\mu\nu} \frac{dq^{\mu}}{d\tilde{s}} \frac{dq^{\nu}}{d\tilde{s}} = 2[E - V(q)]g_{\mu\nu} \left(\frac{\dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\beta}}{\{2[E - V(q)]\}^2} \right) = \frac{g_{\mu\nu}\dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu}}{2[E - V(q)]}. \tag{7.66}$$

Finalmente, de la ecuación geodésica (7.51):

$$\frac{d^2q^{\alpha}}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dq^{\mu}}{d\tilde{s}} \frac{dq^{\nu}}{d\tilde{s}} = \frac{1}{(2[E - V(q)])^2} [\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}V(q)] = 0, \tag{7.67}$$

es decir,

$$\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} + g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}V(q) = 0. \tag{7.68}$$

QED

La métrica de Jacobi impone nuevas condiciones en la dinámica del sistema; en particular, restringe el movimiento de este al subespacio

$$\Sigma = \{q \in \mathcal{M} \mid E - V(q) > 0\}, \tag{7.69}$$

Si una trayectoria alcanza la frontera $\partial\Sigma = \{q \in \mathcal{M} \mid E - V(q) = 0\}$ en un punto q_0 , tendrá velocidad cero ahí. Este tipo de trayectorias están permitidas físicamente⁶ solo si el potencial no tiene puntos críticos en q_0 . Entonces, en principio, podemos incluir la frontera en la definición del subespacio Σ . Sin embargo, la métrica de Jacobi se anula en esta región, lo que implica desagradables consecuencias. Es por ello que en el presente trabajo vamos a tomar Σ como un subespacio abierto y las soluciones de las ecuaciones geodésicas (7.51) serán consideradas solamente en el interior de este subespacio [37] [58]. Una generalización del principio de Maupertuis que incluye la frontera de Σ se puede encontrar en [61].

Esta estructura es la adecuada para la cuantización topológica porque la variedad riemanniana (Σ, h) contiene toda la información física. Así, para los sistemas descritos con anterioridad (para los cuales el principio de Maupertuis es válido) es posible asociar la configuración clásica (Σ_h, ω) , donde Σ_h es la variedad descrita anteriormente y ω la conexión asociada a la métrica de Jacobi.

⁶Tanto las que alcanzan la frontera como aquellas contenidas en ella.

7.3. Haz fibrado principal de sistemas mecánicos

Los resultados anteriores muestran que podemos asociar a cada sistema mecánico una variedad riemanniana (Σ, h) . En el caso de la partícula libre, por ejemplo, en coordenadas cartesianas tenemos

$$h = 2Eg = 2E\delta, \quad (7.70)$$

donde δ es la métrica euclidiana, así que Σ es una variedad plana. Para cualquier valor distinto del potencial, la métrica de Jacobi es conformemente plana y contiene toda la información física en este factor conforme. Pueden darse situaciones más generales en las que la métrica g no es plana, en cuyo caso la geometría de h se vuelve más complicada, pero igualmente tratable como variedad riemanniana. En consecuencia, (Σ, h) determina una configuración mecanico-clásica y puede ser usada como espacio base para el haz fibrado, donde la fibra estandar debe reflejar las simetrías del espacio base.

El siguiente paso es construir el haz fibrado principal asociado a los sistemas mecánicos. Por un lado, tomaremos como variedad base al espacio (Σ, h) y por otro lado, los sistemas mecánicos (descritos por el lagrangiano (7.29)) son invariantes ante las transformaciones de Galileo, que localmente podemos representar con el grupo $SO(k)$ al introducir una base ortonormal sobre Σ . Sabemos que esta existe y, escribiéndola como $\{e_a\}_{a=1}^k$, es tal que

$$h(e_a, e_b) = \delta_{ab}. \quad (7.71)$$

Además, otro sistema ortonormal $\{e'_a\}_{a=1}^k$ con la misma orientación está relacionado con el anterior por medio de una transformación ortogonal, es decir,

$$e'_a = (\Lambda^{-1})^b_a e_b, \quad \Lambda \in SO(k), \quad (7.72)$$

donde $(\Lambda^{-1})^b_a$ denota las componentes de Λ^{-1} . Así mismo, podemos considerar la base dual de 1-formas $\{\theta^a\}_{a=1}^k$, de manera que podemos expresar la métrica de Jacobi como

$$h = h_{\mu\nu} dq^\mu \otimes dq^\nu = \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b. \quad (7.73)$$

Para un espacio sin torsión, podemos introducir una 1-forma de conexión ω y la 2-forma de curvatura Ω por medio de las ecuaciones de estructura de Cartan:

$$D\theta^a := d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = 0, \quad (7.74)$$

$$D\omega^a_b := \Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (7.75)$$

donde d es la derivada exterior y D la derivada exterior covariante. Las componentes de la forma de curvatura en el marco local ortonormal, dadas por

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d, \quad (7.76)$$

determinan al tensor de curvatura de Riemann R^a_{bcd} . Bajo un cambio de base ortonormal a la base $\{\theta'^a\}_{a=1}^k$,

$$\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b, \quad (7.77)$$

las formas de conexión y de curvatura transforman como

$$\omega' = \Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}, \quad (7.78)$$

$$\Omega' = \Lambda\Omega\Lambda^{-1}, \quad (7.79)$$

respectivamente y donde hemos omitido los índices y expresado las transformaciones en notación matricial.

Con los cálculos y resultados expuestos hasta ahora podemos formular el siguiente resultado, que puede entenderse como una consecuencia de la estructura subyacente en la configuración clásica asignada a los sistemas mecánicos. En particular, estos serán los que puedan ser descritos bajo el principio de Maupertuis.

Teorema 7.3.1 (fundamental de la cuantización topológica en sistemas mecánicos). *Un sistema mecánico conservativo con k grados de libertad, para el cual el hamiltoniano es una cantidad conservada, puede ser representado por un único haz fibrado principal \mathcal{P} de dimensión $\frac{1}{2}k(k+1)$, con la variedad riemanniana (Σ, h) como el espacio base, donde h es la métrica de Jacobi y Σ su dominio en el espacio de configuraciones, el grupo $SO(k)$ como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y una conexión con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k)$.*

Demostración. Con base en la configuración clásica de los sistemas mecánicos, consideremos a la k -variedad riemanniana (Σ, h) como el espacio base y al grupo $SO(k)$ el grupo de estructura isomorfo a la fibra estándar para construir el haz fibrado principal \mathcal{P} . Para mostrar que está bien definido tomamos un atlas que consiste del conjunto de cartas $\{(^xU, ^x\phi)\}_{x \in I}$, donde el «ante-índice» se refiere a la etiqueta que numera a los elementos del atlas e I es un conjunto indexado. Consideramos la carta $(^xU, ^x\psi)$ donde la función⁷ $^x\psi : ^xU \rightarrow \Lambda^1(^xU, \mathfrak{so}(k))$ es quien nos permite definir la base de tétradas $\{^x\theta^a\}_{a=1}^k$ sobre xU . Sean los abiertos $^xU, ^yU$ con bases duales $\{^x\theta^a\}_{a=1}^k$ y $\{^y\theta^a\}_{a=1}^k$ respectivamente, tales que $^xU \cap ^yU \neq \emptyset$, sabemos que estas bases transforman como

$$^x\theta^a = {}^{xy}\Lambda_b^a {}^y\theta^b, \quad {}^{xy}\Lambda \in SO(k), \quad (7.80)$$

por lo que podemos considerar a ${}^{xy}\Lambda$ como la función de transición, es decir,

$${}^{xy}\Lambda = ^x\psi \circ ^y\psi^{-1}, \quad (7.81)$$

siempre y cuando satisficieran la condición de cociclo. Para exhibir esto primero notemos que, por construcción, $({}^{xy}\Lambda)^{-1} = {}^{yx}\Lambda$; consideremos también la triple intersección $^xU \cap ^yU \cap ^zU \neq \emptyset$ y las respectivas transformaciones entre estos abiertos. Es decir, sabemos que ${}^{xy}\Lambda$ es la transformación que nos lleva de la base en xU a yU , etc., junto con sus respectivas transformaciones inversas. De esta forma nos es lícito escribir

$${}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda = (^x\psi \circ ^y\psi^{-1}) \circ (^y\psi \circ ^z\psi^{-1}) = ^x\psi \circ ^z\psi^{-1} = {}^{xz}\Lambda, \quad (7.82)$$

⁷ $\Lambda^1(^xU, \mathfrak{so}(k))$ es el espacio de las 1-formas $\mathfrak{so}(k)$ -valuadas sobre xU .

multiplicando esto último por $({}^{xz}\Lambda)^{-1}$ obtenemos

$${}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda ({}^{xz}\Lambda)^{-1} = {}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda {}^{zx}\Lambda = \mathbb{1}_{SO(k)}. \quad (7.83)$$

Esto prueba, con base en el teorema de reconstrucción (5.2.3), que el haz fibrado principal \mathcal{P} compuesto por el espacio base Σ_h y grupo de estructura $SO(k)$ isomorfo a la fibra estándar está bien definido. La dimensión del espacio total (como comentamos al inicio del presente capítulo) es $\frac{1}{2}k(k+1)$ debido a que $\dim(\Sigma) = k$ y $\dim(SO(k)) = \frac{1}{2}k(k-1)$.

Finalmente, procedemos a construir una conexión en el haz fibrado \mathcal{P} . Tomamos $\mathcal{U} = \{{}^xU\}_{x \in I}$ una cubierta abierta en Σ (con I un conjunto indexado). De la primer ecuación de estructura (7.74) y dada la métrica de Jacobi h , podemos encontrar una forma de conexión ${}^x\omega$ con valores en el álgebra $\mathfrak{so}(k)$ para cada xU . Dado que la transformación entre bases duales satisface (8.18), tenemos entonces que las formas de conexión transforman de acuerdo a

$${}^x\omega = {}^{xy}\Lambda {}^y\omega ({}^{xy}\Lambda)^{-1} + {}^{xy}\Lambda d ({}^{xy}\Lambda)^{-1}, \quad (7.84)$$

que es justamente la condición de compatibilidad. Consideremos ahora las secciones locales. Como \mathcal{P} es un haz fibrado principal, localmente es trivial, por lo que existen los mapeos ${}^x\Psi : \pi^{-1}({}^xU) \rightarrow {}^xU \times SO(k)$ que definen esta propiedad. Así, podemos definir una sección local canónica como

$$\begin{aligned} {}^x\sigma : {}^xU &\rightarrow \pi^{-1}({}^xU) \\ q &\mapsto {}^x\sigma(q) = {}^x\Psi^{-1}(q, e), \end{aligned} \quad (7.85)$$

donde $e = {}^{xx}\Lambda(q) \in SO(k)$ es la identidad y $q \in {}^xU$. Esta sección canónica satisface

$${}^x\sigma = {}^{xy}\Lambda {}^y\sigma, \quad (7.86)$$

para ${}^xU \cap {}^yU \neq \emptyset$ gracias a que ${}^{xy}\Lambda$ son funciones de transición. Es decir, por el teorema de existencia y unicidad de la forma de conexión (5.2.7), existe una única conexión ω en \mathcal{P} tal que

$${}^x\omega = {}^x\sigma^* \omega. \quad (7.87)$$

QED

Este teorema prueba y construye la estructura diferencial que describe por completo una configuración clásica asociada a un sistema mecánico descrito por el principio de Maupertuis. Lo fundamental de este resultado es ofrecer una relación entre los invariantes topológicos con propiedades físicas en un sistema con un número finito de grados de libertad. Este hecho nos apoya en asociar el espectro topológico con el espectro discreto de un sistema físico.

7.4. Espectro topológico en sistemas mecánicos

A continuación estudiaremos brevemente la cuantización topológica en algunos casos sencillos de sistemas mecánicos, pero antes de ello es útil considerar los siguientes resultados.

Tomamos el caso de una métrica de Jacobi conformalmente plana

$$h_{\mu\nu} = 2[E - V(q)]\delta_{\mu\nu}, \quad (7.88)$$

escogemos la base dual

$$\theta^a = \sqrt{2[E - V(q)]}\delta_\alpha^a dq^\alpha. \quad (7.89)$$

Por simplicidad denotamos

$$\varphi(q) = \ln(2[E - V(q)]), \quad (7.90)$$

con lo que

$$\theta^a = e^{\varphi/2}\delta_\alpha^a dq^\alpha, \quad a = 1, \dots, k. \quad (7.91)$$

Esto nos permite encontrar una expresión para la 1-forma de conexión. De la primera ecuación de estructura

$$d\theta^a + \Gamma^a_{bc}\theta^c \wedge \theta^b = 0, \quad (7.92)$$

donde Γ^a_{bc} son las componentes de la conexión ω^a_b en la base $\{\theta^a\}_{a=1}^k$, continuamos entonces con la diferenciación

$$d\theta^a = -\Gamma^a_{bc}\theta^c \wedge \theta^b = \delta^{ad}(\Gamma_{bdc} - \Gamma_{dbc})\theta^c \wedge \theta^b, \quad (7.93)$$

sabiendo que

$$dq^\alpha = e^{-\varphi/2}\delta^\alpha_a \theta^a, \quad (7.94)$$

consideramos

$$\begin{aligned} d\theta^a &= d(e^{\varphi/2}\delta_\alpha^a dq^\alpha) = \frac{1}{2}e^{\varphi/2}\partial_\beta\varphi\delta_\alpha^a dq^\beta \wedge dq^\alpha \\ &= \frac{1}{2}e^{\varphi/2}\partial_\beta\varphi\delta_\alpha^a (e^{-\varphi/2}\delta^\beta_b \theta^b) \wedge (e^{-\varphi/2}\delta^\alpha_c \theta^c) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\varphi/2}\partial_\beta\varphi\delta^\beta_b \theta^b \wedge \theta^a \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\varphi/2}\partial_\beta\varphi\delta^\beta_b \delta_{ac}\theta^c \wedge \theta^b, \end{aligned} \quad (7.95)$$

así

$$\Gamma_{abc} = \delta_{ad}\Gamma^d_{bc} = \frac{1}{2}e^{-\varphi/2}\partial_\beta\varphi\delta^\beta_b \delta_{ac}. \quad (7.96)$$

Llegados a este punto, hacemos explícita la antisimetría de la conexión ($\omega_{ab} = -\omega_{ba}$) considerando las componentes Γ_{abc}

$$\omega_{ab} = \delta_{ac}\omega^c_b = (\Gamma_{abc} - \Gamma_{bac})\theta^c, \quad (7.97)$$

(dejando implícita la suma sin repeticiones) de donde

$$\omega_{ab} = e^{-\varphi/2} \partial_\beta \varphi \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \theta^c. \quad (7.98)$$

Así mismo, consideramos la forma de curvatura con índices abajo

$$\Omega_{ab} = d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \delta^{cd} \omega_{db}, \quad (7.99)$$

y para encontrarla primero tomamos

$$\begin{aligned} d\omega_{ab} &= d(e^{-\varphi/2} \partial_\beta \varphi \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \theta^c) = d(\partial_\beta \varphi \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \delta^\mu_c dq^\mu) \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta \varphi \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \delta^\mu_c dq^\alpha \wedge dq^\mu = e^{-\varphi} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi \delta^\alpha_d \delta^\beta_{[b} \delta_{a]c} \theta^d \wedge \theta^c \\ &= e^{-\varphi} \delta^\alpha_d \delta^\beta_{[a} \delta_{b]c} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi \theta^c \wedge \theta^d, \end{aligned} \quad (7.100)$$

y también consideramos

$$\begin{aligned} \omega_{ac} \wedge \delta^{cd} \omega_{db} &= (e^{-\varphi/2} \partial_\alpha \varphi \delta^\alpha_{[c} \delta_{a]e} \theta^e) \wedge [\delta^{cd} (e^{-\varphi/2} \partial_\beta \varphi \delta^\beta_{[b} \delta_{d]f} \theta^f)] \\ &= e^{-\varphi} \delta^{cd} \delta^\alpha_{[c} \delta_{a]e} \delta^\beta_{[b} \delta_{d]f} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \theta^e \wedge \theta^f \\ &= e^{-\varphi} \delta^{ef} \delta^\alpha_{[e} \delta_{a]c} \delta^\beta_{[b} \delta_{f]d} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \theta^c \wedge \theta^d, \end{aligned} \quad (7.101)$$

donde en la última igualdad hemos hecho los cambios $c \leftrightarrow e$ y $d \leftrightarrow f$. Así, podemos expresar la 2-forma de curvatura como

$$\Omega_{ab} = e^{-\varphi} [\delta^\alpha_d \delta^\beta_{[a} \delta_{b]c} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi + \delta^{ef} \delta^\alpha_{[e} \delta_{a]c} \delta^\beta_{[b} \delta_{f]d} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi] \theta^c \wedge \theta^d. \quad (7.102)$$

Es útil también recordar que la clase característica para los haces fibrados principales cuyo grupo de estructura es $SO(k)$ son las clases de Pontrjagin $p(\mathcal{P})$ y de Euler $e(\mathcal{P})$. Ambas se pueden escribir en términos de la 2-forma de curvatura del espacio Σ . La clase de Pontrjagin se puede obtener de los polinomios invariantes de Ω

$$\det \left(\mathbb{1}t - \frac{1}{2} \Omega \right) = \sum_{j=0}^k p_{k-j}(\Omega) t^j, \quad (7.103)$$

y la clase de Euler está dada por

$$e(\mathcal{P}) = \frac{(-1)^m}{(4\pi)^m m!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2m}} \Omega^{i_1}_{i_2} \wedge \Omega^{i_3}_{i_4} \wedge \dots \wedge \Omega^{i_{2m-1}}_{i_{2m}}, \quad 2m = k \quad (7.104)$$

y es diferente de cero solo si k es par.

Partícula libre

Consideremos una partícula libre con k grados de libertad y energía E . En coordenadas cartesianas, en virtud que el potencial $V(q)$ se anula en todo punto q , podemos escribir $2E = \delta_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$, con la métrica del espacio de configuraciones \mathcal{M} , $g = \delta$, por lo que la métrica de Jacobi se puede escribir como

$$h = 2E\delta. \quad (7.105)$$

Además $\mathcal{M} = \Sigma$. Como consecuencia tenemos que la curvatura se anula, al igual que la clase característica, lo que implica que no existe condición de discretización para los parámetros del sistema. Es decir, no hay un espectro topológico asociado a la partícula libre en la cuantización topológica. Este resultado también es reproducido por la cuantización canónica, que establece que no existe un espectro discreto para dicho sistema.

Oscilador armónico

Consideremos el lagrangiano de dos osciladores armónicos de masa m

$$L = \frac{1}{2}m [(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] - \frac{1}{2} [k_1(q^1)^2 + k_2(q^2)^2], \quad (7.106)$$

donde k_1 y k_2 son constantes. El sistema es conservativo y el correspondiente hamiltoniano $H = E$ es una constante de movimiento. La métrica 2-dimensional

$$g = m \text{diag}(1, 1), \quad (7.107)$$

es plana, y la métrica de Jacobi

$$h = 2m(E - V) \text{diag}(1, 1) = \delta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b = \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2, \quad (7.108)$$

es conformemente plana habiendo escogido el marco dual local

$$\theta^i = \sqrt{2m(E - V)}dq^i, \quad i = 1, 2. \quad (7.109)$$

La simetría de esta configuración clásica reduce las transformaciones al grupo $SO(2)$. Primeramente consideremos la forma de conexión a partir de los cálculos anteriores, el único cambio que tiene esta forma de conexión con (7.98) es que definimos

$$\varphi = \ln(2m[E - V]). \quad (7.110)$$

Encontramos que solo hay dos componentes distintas de cero y, debido a la antisimetría, tenemos únicamente una componente independiente:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= e^{-\phi/2} \partial_\beta \delta^\beta [{}_{[2}\delta_{1]c} \theta^c = \partial_\beta \phi \delta^\beta [{}_{[2}\delta_{1]c} \delta^c_\alpha dq^\alpha \\ &= \frac{1}{2} [\partial_2 \phi dq^1 - \partial_1 \phi dq^2] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2m[E - V(q)]} \right) [-2m\partial_2 V dq^1 + 2m\partial_1 V dq^2] \\ &= \frac{1}{2[E - V(q)]} (-\partial_2 V dq^1 + \partial_1 V dq^2). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Para el cálculo de la curvatura primero notemos, al igual que la conexión, que únicamente contamos con una componente independiente, Ω_{12} ; luego, expandimos las

deltas de la ecuación (8.35): por un lado,

$$\begin{aligned}
e^{-\varphi} \delta^\alpha_d \delta^\beta_{[a} \delta_{b]c} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi \theta^c \wedge \theta^d &= \frac{1}{2} \delta^c_\mu \delta^d_\nu \delta^\alpha_d (\delta^\beta_a \delta_{bc} - \delta^\beta_b \delta_{ac}) \partial_\alpha \partial_\beta \varphi dq^\mu \wedge dq^\nu \\
&= \frac{1}{2} (\delta^\beta_a \delta_{bc} - \delta^\beta_b \delta_{ac}) \partial_\alpha \partial_\beta \varphi dq^c \wedge dq^\alpha \\
&= \frac{1}{2} (\delta_{bc} \partial_\alpha \partial_a \varphi dq^c \wedge dq^\alpha - \delta_{ac} \partial_\alpha \partial_b \varphi dq^c \wedge dq^\alpha) \\
&\stackrel{a=1}{=} \stackrel{b=2}{=} \frac{1}{2} (\delta_{22} \partial_1 \partial_1 \varphi dq^2 \wedge dq^1 - \delta_{11} \partial_2 \partial_2 \varphi dq^1 \wedge dq^2) ;
\end{aligned} \tag{7.112}$$

y por el otro,

$$\Omega_{12} = d\omega_{12} + \omega_{1c} \wedge \delta^{cd} \omega_{d2} = d\omega_{12} + \omega_{12} \wedge \delta^{22} \omega_{22} = d\omega_{12}, \tag{7.113}$$

es decir,

$$e^{-\varphi} \delta^{ef} \delta^\alpha_{[e} \delta_{a]c} \delta^\beta_{[b} \delta_{f]d} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \theta^c \wedge \theta^d = 0, \quad \text{con } a = 1, b = 2. \tag{7.114}$$

Esto último nos ahorra mucho el cálculo y nos permite encontrar

$$\Omega_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (q^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (q^2)^2} \right) dq^1 \wedge dq^2. \tag{7.115}$$

Finalmente, tenemos que la clase de Euler se expresa como

$$e(\mathcal{P}) = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{i_1 i_2} \Omega^{i_1 i_2} = \frac{1}{2\pi} \Omega_{12} = \frac{1}{4\pi} (\partial_1^2 \varphi + \partial_2^2 \varphi) dq^1 \wedge dq^2. \tag{7.116}$$

Retomando la definición de φ escribimos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} = -\frac{2m \partial_\alpha V}{2m[E - V]} = -\frac{\partial_\alpha V}{E - V}, \tag{7.117}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (q^\alpha)^2} &= - \left(\frac{\partial_\alpha^2 V [E - V] + [\partial_\alpha V]^2}{[E - V]^2} \right) \\
&= \frac{-k_\alpha [E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]] - [k_\alpha q^\alpha]^2}{[E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]]^2},
\end{aligned} \tag{7.118}$$

en donde no hay suma sobre el índice α . Consideramos ahora

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (q^1)^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (q^2)^2} &= \frac{(k_1 + k_2) [E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]] + (k_1 q^1)^2 + (k_2 q^2)^2}{[E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]]^2} \\
&= \frac{E(k_1 + k_2) + [\frac{1}{2} [(k_1 q^1)^2 + (k_2 q^2)^2]]}{[E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]]^2} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} k_1 k_2 [(q^1)^2 + (q^2)^2]}{[E - \frac{1}{2} [k_1 (q^1)^2 + k_2 (q^2)^2]]^2}.
\end{aligned} \tag{7.119}$$

Esta expresión es complicada, con motivo de simplicidad consideramos el caso especial $k_2 = 0$, y hacemos $k_1 = k$ y $q^1 = q$. Entonces la clase de Euler queda como

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Ek + \frac{1}{2}(kq)^2}{[E - \frac{1}{2}kq^2]^2} \right) dq \wedge dq^2. \quad (7.120)$$

Podemos integrar q^2 escogiendo el intervalo $[0, a\pi]$, siendo a una constante arbitraria con unidades de longitud, por lo que el resultado de la integración en esta coordenada es $a\pi$. A su vez consideramos el punto q_0 (relacionado con el punto de retorno del oscilador), de forma que q toma valores en el intervalo $[-q_0, q_0]$ dando como resultado la condición de discretización

$$\int_{\Sigma} e(\mathcal{P}) = -\frac{ak}{4} \int_{-q_0}^{q_0} \frac{E + \frac{1}{2}kq^2}{(E - \frac{1}{2}kq^2)^2} dq = n. \quad (7.121)$$

Para evaluar la integral la reescribimos como⁸

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{-q_0}^{q_0} \frac{2Ek + (kq)^2}{(2E - kq^2)^2} dq &= -\frac{1}{2} \int_{-q_0}^{q_0} \frac{2Ek - (kq)^2 + 2(kq)^2}{(2E - kq^2)^2} dq \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-q_0}^{q_0} \frac{k(2E - kq^2) + 2(kq)(kq)}{(2E - kq^2)^2} dq \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{kq}{kq^2 - 2E} \right|_{-q_0}^{q_0}. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Obtenemos así el espectro topológico para el oscilador armónico

$$\frac{akq_0}{kq_0^2 - 2E} = n. \quad (7.123)$$

Esta relación establece una discretización de los parámetros del sistema. Ahora bien, el espectro obtenido con la cuantización canónica es

$$E = \hbar\omega(n + 1/2), \quad (7.124)$$

esta expresión también la podemos deducir del nuestro por medio de la relación

$$q_0 = \frac{a^2 \hbar\omega}{2E - \hbar\omega} - \sqrt{\left(\frac{a^2 \hbar\omega}{2E - \hbar\omega} \right)^2 + \frac{2E}{k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.125)$$

Esto muestra que existe una relación directa entre el espectro topológico y el espectro canónico del oscilador armónico.

⁸Es útil mencionar que en la integración de la forma de Euler se usa el siguiente resultado del cálculo elemental:

$$\int_a^b \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} dx = \frac{f(x)}{g(x)} \Big|_a^b, \quad \text{siempre que } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

E identificando

$$f = kq, \quad g = 2E - kq^2.$$

Campo central

Consideremos ahora un sistema de masa m sujeto a un potencial central de la forma $V(r)$ usando para su descripción coordenadas polares (r, ϑ) . Este puede ser descrito por el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 \right) - V(r). \quad (7.126)$$

Sabemos que la dinámica de este se lleva a cabo en un plano gracias a la conservación del momento angular, l . Además, el hamiltoniano es una cantidad conservada que nos lleva a expresar a la energía del sistema como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r). \quad (7.127)$$

La métrica en el espacio de configuración está dada por

$$g = m \text{diag}(1, r^2), \quad (7.128)$$

con lo que la métrica de Jacobi es

$$h = 2m [E - V] \text{diag}(1, r^2). \quad (7.129)$$

Escogemos la base de tétradas, con $\varphi = \ln(2m[E - V])$, como

$$\theta^r = e^{\varphi/2} dr, \quad \theta^\vartheta = e^{\varphi/2} r d\vartheta, \quad (7.130)$$

que nos deja escribir la métrica de Jacobi como $h = \theta^r \otimes \theta^r + \theta^\vartheta \otimes \theta^\vartheta$. De la primera ecuación de estructura de Cartan tomamos primeramente el diferencial de las tétradas anteriores, encontrando que

$$d\theta^r = 0, \quad (7.131)$$

pues no depende del ángulo ϑ y

$$\begin{aligned} d\theta^\vartheta &= \frac{d}{dr} (e^{\varphi/2} r) dr \wedge d\vartheta = e^{\varphi/2} \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \varphi \right) dr \wedge d\vartheta \\ &= - \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \varphi \right) d\vartheta \wedge \theta^r, \end{aligned} \quad (7.132)$$

de donde obtenemos la única componente independiente de la 1-forma de conexión es

$$\omega^\vartheta_r = \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \varphi \right) d\vartheta, \quad (7.133)$$

de igual manera $\Omega^\vartheta_r = d\omega^\vartheta_r$ es la única componente independiente de la 2-forma de curvatura,

$$\begin{aligned} \Omega^\vartheta_r &= \frac{d}{dr} \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \varphi \right) dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \varphi + r \frac{d^2}{dr^2} \varphi \right) dr \wedge d\vartheta \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{E - V} \frac{d}{dr} V(r) \right) dr \wedge d\vartheta. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Así, la clase de Euler del presente haz fibrado principal queda como

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \epsilon_{i_1 i_2} \Omega^{i_1 i_2} = -\frac{1}{2\pi} \Omega^r_{\vartheta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{E-V} \frac{d}{dr} V(r) \right) dr \wedge d\vartheta. \quad (7.135)$$

Llegamos entonces a

$$\int_{\Sigma} e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{E-V} \frac{d}{dr} V(r) \right) \Big|_{r_-}^{r_+} = n, \quad (7.136)$$

donde $\vartheta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [r_-, r_+]$. La cuantización topológica arroja entonces un espectro discreto explícito para cualquier configuración de campo central, únicamente es necesario proporcionar el potencial $V(r)$.

Tomemos el caso en que tenemos como solución curvas cerradas,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (7.137)$$

En este caso las trayectorias son elípticas y están caracterizadas por los puntos en que la velocidad tangencial se anula. De la expresión de la energía (7.127) encontramos que esta condición se reduce a

$$Er^2 + \alpha r - \frac{l^2}{2m} = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad (7.138)$$

como solución a esta ecuación tenemos que

$$r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha}{E} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + 4\frac{l^2}{2mE}} \right) = -\frac{\alpha}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \right). \quad (7.139)$$

Definimos

$$a \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}, \quad (7.140)$$

entonces, sustituyendo (7.139) en la condición de cuantización (7.136)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{E-V} \frac{d}{dr} V(r) \right) \Big|_{r_-}^{r_+} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{E + \frac{\alpha}{r}} \right) \Big|_{r_-}^{r_+} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{Er + \alpha} \Big|_{r_-}^{r_+} \\ &= -\frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{\alpha - \frac{\alpha}{2}(1+a)} - \frac{1}{\alpha - \frac{\alpha}{2}(1-a)} \right] \\ &= -\frac{2a}{1-a^2} = -\frac{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}}{\frac{El^2}{m\alpha^2}} = n, \end{aligned} \quad (7.141)$$

y reescribiendo

$$E_0 = \frac{m\alpha^2}{l^2}, \quad (7.142)$$

tenemos que

$$\frac{(E/E_0)^2}{1 + 2E/E_0} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - \frac{2}{n^2} \frac{E}{E_0} - \frac{1}{n^2} = 0. \quad (7.143)$$

A partir de aquí tenemos dos soluciones, elegimos la que nos lleve a soluciones negativas ya que estas son las que tienen sentido físico, en particular, para describir la energía de ligadura. Con lo que llegamos al siguiente resultado

$$\frac{E}{E_0} = -\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2 + 1} - 1 \right). \quad (7.144)$$

Excluimos el valor $n = 0$ ya que que la única manera en que esto es consistente es teniendo una órbita circular. Notemos además que cuando $n \rightarrow \infty$ se pierde la condición de cuantización, llevándonos a que la energía se aproxime a cero, entendemos entonces que el sistema queda fuera de la interacción del potencial, siendo así descrita como una partícula libre para la cual, justamente, no hay un espectro discreto asociado.

Cabe destacar también que el espectro topológico (7.144) no nos lleva directamente al descrito por la cuantización canónica por lo que no hay punto de comparación. Sin embargo, sí es físico por su comportamiento, graficándolo para los primeros valores de n encontramos una fenomenología similar al de la cuantización canónica.

Coordenadas complejas nulas

Como último ejemplo vamos a estudiar el caso de un sistema con dos grados de libertad descrito por las coordenadas (q^1, q^2) con la métrica de Jacobi

$$h = 2m [E - V(q^1, q^2)] \text{diag}(1, 1). \quad (7.145)$$

Introducimos las coordenadas (u, v) definidas como

$$u = q^1 + iq^2, \quad v = q^1 - iq^2, \quad (7.146)$$

y que nos permiten elegir la base de tétradas⁹

$$\hat{\theta}^1 = \frac{1}{2} e^{\varphi/2} (du + dv), \quad \hat{\theta}^2 = \frac{i}{2} e^{\varphi/2} (du - dv). \quad (7.147)$$

⁹Usando las relaciones

$$du \otimes du = dq^1 \otimes dq^1 + 2idq^1 \otimes dq^2 - dq^2 \otimes dq^2,$$

$$dv \otimes dv = dq^1 \otimes dq^1 - 2idq^1 \otimes dq^2 - dq^2 \otimes dq^2,$$

$$du \otimes dv = dq^1 \otimes dq^1 + dq^2 \otimes dq^2 = dv \otimes du,$$

se puede mostrar que $h = \delta_{ab} \hat{\theta}^a \otimes \hat{\theta}^b = e^\varphi du \otimes dv$.

con $\varphi = \ln(2m[E - V(q^1, q^2)])$. De donde,

$$\begin{aligned} d\hat{\theta}^1 &= \frac{1}{4}e^{\varphi/2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} du \wedge dv + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \wedge du \right) = \frac{1}{2i} \left[\frac{i}{2}e^{\varphi/2} \right] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} du \wedge dv - \frac{\partial\varphi}{\partial v} du \wedge dv \right) \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} du - \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{i}{2}e^{\varphi/2} (du - dv) \right) = -\frac{1}{2i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} du - \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \right) \wedge \hat{\theta}^2, \end{aligned} \quad (7.148)$$

encontrando que la única componente independiente de la conexión es

$$\omega^1{}_2 = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} du - \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \right), \quad (7.149)$$

y de la misma forma la curvatura

$$\Omega^1{}_2 = d\omega^1{}_2 = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} dv \wedge du - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} du \wedge dv \right) = -\frac{1}{i} \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} du \wedge dv. \quad (7.150)$$

La clase de Euler con esta curvatura se puede expresar como

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} \Omega^1{}_2 = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} du \wedge dv, \quad (7.151)$$

e integrando esta 2-forma sobre Σ , tenemos que

$$\int_{\Sigma} e(\mathcal{P}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} du \wedge dv = n, \quad (7.152)$$

Sean u_1 y u_2 los extremos en la región Σ para la coordenada u y v_1 y v_2 , para v , obtenemos el espectro

$$\frac{1}{2i\pi} [\varphi(u_2, v_2) - \varphi(u_2, v_1) - \varphi(u_1, v_2) + \varphi(u_1, v_1)] = n. \quad (7.153)$$

Este resultado implica que, en principio, se puede obtener analíticamente un espectro topológico de cualquier sistema mecánico con dos grados de libertad. El espectro discreto que hemos formulado, a pesar de poder ser comparado en algunos casos, no es equivalente al espectro canónico. Mientras que en la cuantización canónica propiamente se cuantiza un sistema físico, en nuestro caso aún no hemos ofrecido una definición o procedimiento de cuantización más allá de la discretización de los parámetros. Aún así, el hecho de exhibir expresiones equivalentes nos permite contrastar y estudiar el comportamiento de los sistemas clásicos (aún no cuánticos) con que estamos lidiando, y que aparecen aún antes de extraer una hipótesis de cuantización, pues estos espectros están contenidos en las configuraciones clásicas. El que estos espectros resulten físicos nos lleva un paso adelante, ya que con la cuantización canónica solamente se pueden obtener soluciones exactas para un número limitado de casos.

En el presente capítulo hemos dejado fuera configuraciones que se han estudiado bajo este formalismo, pero consideramos que a manera de introducción es suficiente con los conceptos y ejemplos desarrollados hasta ahora. Esta breve introducción

presenta las bases y el desarrollo conceptual, en cuanto al siguiente capítulo abordaremos los campos gravitacionales, que cronológicamente fueron los primeros en ponerse a prueba bajo este enfoque, sin embargo, se ha preferido hacerlo así para abordarlos con más detalle.

8 Cuantización topológica en teoría de gravedad

«Una ley física debe poseer belleza matemática.»

P. A. M. Dirac

El capítulo anterior dio una breve discusión acerca de las bases de la cuantización topológica, encontrando que la relación de discretización que establece sobre los parámetros del sistema es física y se puede derivar sin necesidad de introducir hipótesis externas a las teorías que consideramos¹. Esto se realiza haciendo uso únicamente de las estructuras y propiedades asociadas a las configuraciones clásicas de los sistemas mecánicos en los que el principio de Maupertuis es válido. Es decir, buscamos entonces explorar la posibilidad de poder extraer a partir de la configuración de un sistema físico la información cuántica asociada. En cuanto al espectro discreto no hacemos distinción en cuanto a los observables clásicos y cuánticos.

Es de nuestro interés extender este formalismo a los sistemas gravitacionales descritos por la teoría de Einstein. En el presente capítulo expondremos de manera detallada en qué consiste una configuración gravitacional y demostraremos el teorema fundamental de la cuantización topológica en el caso de la teoría de la gravedad de Einstein, que establece la existencia del haz fibrado principal que describe dicha configuración, ofrece su construcción y prueba su unicidad. Este resultado nos permitirá hacer un análisis análogo al de los sistemas mecánicos para determinar una relación de discretización de los parámetros que intervienen en el campo gravitacional ya sea para soluciones en vacío o con algún campo de materia. Posteriormente consideraremos emplear los resultados obtenidos para analizar el modelo Λ -CDM dentro de este formalismo, buscando extraer el espectro topológico asociado e interpretarlo físicamente.

¹Más aún, el concepto de cuanto de energía aparece de manera natural.

8.1. Campos gravitacionales

Antes que nada, vamos a partir de la suposición que la teoría de Einstein describe correctamente la dinámica del campo gravitacional, por lo que esta va a ser nuestra teoría estándar en lo que respecta a configuraciones clásicas de sistemas gravitacionales. A diferencia de los sistemas mecánicos, la relatividad general por sí misma se ha encargado de construir una estructura geométrica a partir de la cual ofrecer una descripción completa (de manera clásica) del fenómeno de la gravedad. Nuestro objetivo en esta sección es formalizar esta idea de «configuración gravitacional» para poder emplear la cuantización topológica en ella. Es usual estudiar gravitación a partir del formalismo tensorial con base en el sistema de coordenadas espaciotemporales $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, \dots, 3$ pero, por cuestiones que se tratarán más adelante, vamos a preferir la descripción en términos de los marcos locales semi-ortonormales (en adelante simplemente «ortonormales»).

Sea g una solución (exacta o aproximada) de las ecuaciones de Einstein en el vacío y \mathcal{M} la variedad semi-riemanniana que describe g , de acuerdo a la relatividad general (\mathcal{M}, g) es el objeto geométrico que contiene toda la información relevante acerca del campo gravitacional. La configuración clásica de sistemas gravitacionales, que definimos como «configuración gravitacional», es (\mathcal{M}, ω) donde ω es la conexión de espín, que se deriva de g ,

$$g(e^a, e^b) = \eta^{ab}, \quad (8.1)$$

con η la métrica de Minkowski y el conjunto de 1-formas locales ortonormales $\{e^a\}$, dadas por

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad [e^a_\mu] \in GL(4, \mathbb{R}). \quad (8.2)$$

En un espaciotiempo sin torsión la conexión de espín está determinada por la primer ecuación de estructura de Cartan:

$$de^a = -\omega^a_b \wedge e^b, \quad (8.3)$$

y toma valores en el álgebra del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$. Demandamos que esta conexión sea compatible con la métrica, lo cual se puede escribir como

$$D\eta_{ab} = d\eta_{ab} + \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0, \quad (8.4)$$

de donde podemos deducir que la conexión es antisimétrica en estos índices, es decir, $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. La correspondiente 2-forma de curvatura

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (8.5)$$

es de nuevo el objeto básico del cual se pueden extraer las propiedades físicas del correspondiente campo gravitacional [48].

En esta descripción hemos preferido el uso de las tétradas (es decir, en términos de marcos diferenciales ortonormales e^a) en lugar de la usual conexión de Levi-Civita

Γ (en coordenadas espaciotemporales x^μ). La ventaja de la aproximación local es que reducimos la invariancia de los difeomorfismos de la métrica a la invariancia en el grupo de Lorentz, que son más sencillas de manejar desde el punto de vista geométrico. En contraste con las teorías de norma, en la relatividad general la métrica g determina enteramente la conexión, por lo que para una configuración clásica sólo precisamos conocer g . Aún así, usamos la notación (\mathcal{M}_g, ω) para enfatizar la posibilidad de considerar teorías más generales a la gravedad en las cuales la conexión no es compatible con la métrica [58].

Las configuraciones gravitacionales están dadas entonces por la estructura (\mathcal{M}_g, ω) y es por ello que precisamos dar una descripción de la teoría de Einstein en términos de formas diferenciales. Primeramente vamos a considerar la acción en términos de marcos ortonormales [25]

$$S = -\frac{1}{32\pi G} \int_{\mathcal{M}} \Omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd} + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m, \quad (8.6)$$

el primer término es la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} , el segundo es la usual acción de materia, que es un funcional que depende únicamente del marco local ortonormal, la conexión y los campos de materia. Consideremos ahora la primera variación respecto al marco ortonormal e^a , para lo cual tomamos otro marco local $\{r^a\}_{a=0}^3$ y escribimos (omitiendo los índices)

$$\delta S = S[e + r, \omega] - S[e, \omega], \quad (8.7)$$

en donde únicamente consideramos los términos lineales en r . Para el primer término de la acción (el de Einstein-Hilbert):

$$\begin{aligned} S_{EH}[e + r, \omega] - S_{EH}[e, \omega] &= -\frac{1}{32\pi G} \int_{\mathcal{M}} [\Omega^{ab} \wedge (e^c + r^c) \wedge (e^d + r^d) \epsilon_{abcd} \\ &\quad - \Omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}] \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \int_{\mathcal{M}} \Omega^{ab} \wedge (e^c \wedge r^d + r^c \wedge e^d \\ &\quad + r^c \wedge r^d) \epsilon_{abcd}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

en cuanto a los términos lineales en r^a obtenemos para el integrando

$$\begin{aligned} \Omega^{ab} \wedge (e^c \wedge r^d + r^c \wedge e^d) \epsilon_{abcd} &= \Omega^{ab} \wedge (e^c \wedge r^d \epsilon_{abcd} + r^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}) \\ &= \Omega^{ab} \wedge (-r^d \wedge e^c \epsilon_{abcd} + r^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}) \\ &= 2\Omega^{ab} \wedge r^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

donde hicimos el cambio $c \leftrightarrow d$ en el primer término en virtud que son índices mudos y hemos definido $\epsilon_{0123} = 1$. Llegamos así a

$$S_{EH}(e + r, \omega) - S_{EH}(e, \omega) = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} r^c \wedge \Omega^{ab} \wedge e^d \epsilon_{abcd} + O(r^2), \quad (8.10)$$

donde los términos $O(r^2)$ se refieren a aquellos en que la forma queda expresada en la base $r^a \wedge r^b$. Por otro lado, para la acción de materia consideramos

$$S_m = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m = \int_{\mathcal{M}} T_a \wedge e^a, \quad (8.11)$$

donde T_a es una 3-forma llamada “corriente energía-momento de materia”² (“energy-momentum current of matter”). Integrando sobre un volumen tipo espacio tridimensional se puede obtener el tensor de energía-momento de materia incluida en este volumen. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} S_m[e + r, \omega] - S_m[e, \omega] &= \int_{\mathcal{M}} T_a \wedge (e^a + r^a) - \int_{\mathcal{M}} T_a \wedge e^a \\ &= - \int_{\mathcal{M}} r^c \wedge T_c + O(r^2). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Imponiendo que la variación se anule para los términos lineales en r^a (primera variación),

$$- \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} [r^c \wedge \Omega^{ab} \wedge e^d \epsilon_{abcd} + 16\pi G r^c \wedge T_c] = 0, \quad (8.13)$$

que también se puede expresar como

$$\Omega^{ab} \wedge e^d \epsilon_{abcd} = -16\pi G T_c. \quad (8.14)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein escritas en términos de las tétradas $\{e^a\}_{a=0}^3$ [25]. En adelante simplemente nos referiremos a ellas como “ecuaciones de campo”.

Ahora bien, es más sencillo geoméricamente usar marcos locales ortonormales para la construcción de la conexión y la curvatura debido a que, en primer lugar, la condición de compatibilidad con la métrica se reduce de

$$dg - \Gamma^T g - g\Gamma = 0 \quad \text{a} \quad \omega^T \eta + \eta\omega = 0, \quad (8.15)$$

que expresamos en notación matricial, lo cual implica la antisimetría de la conexión y justamente nos lleva a que ω es una 1-forma con valores en el álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(1,3)$, es decir, $\omega \in \Lambda^1(U, \mathfrak{so}(1,3))$, donde U es un abierto de \mathcal{M} en donde está definido el marco local ortonormal en consideración. Esto es así porque el grupo de Lorentz está construido de manera que preserve la métrica η . Esta reducción del grupo

²Esta es análoga a la corriente electromagnética que aparece en las ecuaciones de Maxwell en el formalismo de las formas diferenciales. El 4-vector densidad de corriente j^μ puede ser usado para construir la 3-forma de densidad de corriente

$$j = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} j^\alpha dx^\beta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Es natural asociar una 3-forma porque, con objetos tales como corrientes, después de la integración sobre un volumen tridimensional en el espaciotiempo recuperamos la carga contenida en ese volumen. Una construcción análoga se puede hacer para construir la 3-forma de corriente asociada a la energía y momento del campo de materia.

de simetría de GL_4^+ a $SO(1, 3)$ es, de hecho, el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Por otro lado, las cuatro 1-formas que conforman el marco ortonormal consisten en 16 funciones, aquellas que determinan la métrica son constantes, y la reducción del grupo de invariancia a $SO(1, 3)$ que es 6-dimensional nos llevan a que la conexión ω tiene 24 grados de libertad en contraposición con los 40 de la conexión de Levi-Civita Γ [25] [48].

8.2. Haz fibrado principal en gravedad

En los sistemas gravitatorios descritos por la teoría de Einstein podemos considerar esencialmente dos tipos de soluciones: en vacío y con campos de materia. Las ecuaciones de Einstein son lineales en cuanto a las componentes de la curvatura y podemos entender a la distribución de energía-momento como su fuente. Sin embargo, no necesariamente las soluciones en vacío conducen a curvatura nula³ y en este sentido se puede usar el formalismo que se construyó en la sección pasada. En cuanto a los campos gravitatorios con energía y momento distintos de cero es necesario enfatizar que asumimos los campos de materia como campos de norma con lo cual podemos guiarnos de las teorías de Yang-Mills para su descripción. Debido a esto es que podemos construir haces fibrados distintos según la configuración gravitacional y es precisamente por esta razón que partimos de la hipótesis que las teorías de norma describen correctamente y de manera clásica las interacciones entre campos de materia.

8.2.1. Soluciones en vacío

Al igual que hicimos con los sistemas mecánicos podemos construir el haz fibrado principal que describe configuraciones gravitacionales considerando el respectivo grupo de simetría, que en este caso es el grupo de Lorentz bajo la descripción de un marco local de tétradas $\{e^a\}_{a=0}^3$. Con lo cual el cambio a otro marco local, digamos $\{e^{a'}\}_{a=0}^3$, está determinada por

$$e^{a'} = \Lambda^{a'}_b e^b, \quad \Lambda \in SO(1, 3). \quad (8.16)$$

La 1-forma de conexión y la correspondiente 2-forma de curvatura toman valores en el álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(1, 3)$ y bajo un cambio de marco transforman de acuerdo a

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}, \quad \text{y} \quad \Omega' = \Lambda \Omega \Lambda^{-1}, \quad (8.17)$$

respectivamente. Es en este sentido que la teoría de Einstein se puede considerar una teoría de norma respecto al grupo de Lorentz. Sin embargo, es al nivel de la acción que difiere de una teoría de Yang-Mills [25]. El siguiente resultado es esencial en nuestro análisis posterior, gracias a él aseveramos la correspondencia de las estructuras matemáticas con nuestro análisis físico y las propiedades que derivamos a partir de ellas tiene lugar en el mundo físico. En particular, hemos hablado del espectro topológico y cómo este nos permite concluir la discretización de los parámetros, el teorema que estamos por presentar es la prueba de que es físico, cuando menos en el sentido en que no entra en contradicción con las leyes de la física. La interpretación de los mismo también es derivada de esta construcción, en ese sentido, todo análisis físico en adelante ha de contemplar este “Teorema fundamental”.

³Como buen ejemplo de ello se puede tomar la solución de Schwarzschild o el campo débil como solución aproximada. [62].

Teorema 8.2.1 (fundamental de la cuantización topológica para gravedad en vacío). *Una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en vacío puede ser representada por un único haz fibrado principal 10-dimensional \mathcal{P} con el espaciotiempo \mathcal{M} como el espacio base, el grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y una conexión con valores en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz.*

Demostración. Recurrimos de nueva cuenta al teorema de reconstrucción (5.2.3). Para una solución de las ecuaciones de campo en vacío dadas por un marco ortonormal $\{e^a\}_{a=0}^3$, podemos establecer al espacio base como el espaciotiempo \mathcal{M} , identificamos al grupo de estructura con el grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, el cual además es isomorfo a la fibra estándar para construir un haz fibrado principal \mathcal{P} que representa a dicha configuración gravitacional. Para que esto sea consistente precisamos que las funciones de transición estén bien definidas y cumplan con la condición de compatibilidad. Entonces, sea \mathcal{A} un atlas que consiste del conjunto de cartas $\{(^xU, ^x\phi)\}_{x \in I}$, sabemos que en todas ellas podemos definir la función $^x\psi : ^xU \rightarrow \Lambda^1(^xU, \mathfrak{so}(1, 3))$ estableciendo la base de tétradas $\{^x\theta^a\}_{a=1}^k$ sobre xU y que además nos permite escribir la carta $(^xU, ^x\psi)$. Sean los abiertos $^xU, ^yU$ con bases duales $\{^x\theta^a\}_{a=1}^k$ y $\{^y\theta^a\}_{a=1}^k$ respectivamente, de manera que $^xU \cap ^yU \neq \emptyset$. Sabemos que

$$^x\theta^a = {}^{xy}\Lambda_b^a {}^y\theta^b, \quad {}^{xy}\Lambda \in SO(k), \quad (8.18)$$

es decir, ${}^{xy}\Lambda$ puede tomarse como la función de transición en la intersección anterior,

$${}^{xy}\Lambda = ^x\psi \circ ^y\psi^{-1}. \quad (8.19)$$

Para que esto sea consistente se debe satisfacer la condición de cociclo. Consideremos, por construcción, que $({}^{xy}\Lambda)^{-1} = {}^{yx}\Lambda$, también centrémonos en la triple intersección $^xU \cap ^yU \cap ^zU \neq \emptyset$ y sus transformaciones. Recordemos que ${}^{xy}\Lambda$ es la transformación entre las tétradas en xU y yU , de estas relaciones y sus inversas podemos considerar

$${}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda = (^x\psi \circ ^y\psi^{-1}) \circ (^y\psi \circ ^z\psi^{-1}) = ^x\psi \circ ^z\psi^{-1} = {}^{xz}\Lambda, \quad (8.20)$$

multiplicando por $({}^{xz}\Lambda)^{-1}$ obtenemos

$${}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda ({}^{xz}\Lambda)^{-1} = {}^{xy}\Lambda {}^{yz}\Lambda {}^{zx}\Lambda = \mathbb{1}_{SO(k)}. \quad (8.21)$$

Del teorema de reconstrucción (5.2.3) el haz fibrado principal 10-dimensional \mathcal{P} (compuesto por el espacio base \mathcal{M} y grupo de estructura $SO(1, 3)$ isomorfo a la fibra estándar) está bien definido.

Por otro lado, tenemos ahora que construir una conexión en el haz fibrado \mathcal{P} , para lo cual consideramos $\mathcal{U} = \{^xU\}_{x \in I}$ una cubierta abierta en \mathcal{M} . De la primer ecuación de estructura de Cartan (8.3) y las condiciones de compatibilidad con la métrica de Minkowski podemos encontrar una forma de conexión $^x\omega$ con valores en el álgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$ para cada xU . Las transformaciones entre las bases duales satisfacen (8.18), por lo que las formas de conexión transforman como

$$^x\omega = {}^{xy}\Lambda {}^y\omega ({}^{xy}\Lambda)^{-1} + {}^{xy}\Lambda d({}^{xy}\Lambda)^{-1}, \quad (8.22)$$

que es la condición de compatibilidad. Finalmente, como \mathcal{P} es un haz fibrado principal, localmente es trivial, por lo que existen los mapeos ${}^x\Psi : \pi^{-1}({}^xU) \rightarrow {}^xU \times \mathfrak{so}(1, 3)$ que definen esta propiedad. Definimos una sección local canónica como

$$\begin{aligned} {}^x\sigma : {}^xU &\rightarrow \pi^{-1}({}^xU) \\ q &\mapsto {}^x\sigma(q) = {}^x\Psi^{-1}(q, e), \end{aligned} \quad (8.23)$$

donde $e = {}^{xx}\Lambda(q)$ es la identidad en $\mathfrak{so}(1, 3)$ y $q \in {}^xU$. Esta sección canónica satisface

$${}^x\sigma = {}^{xy}\Lambda \circ {}^y\sigma, \quad (8.24)$$

para ${}^xU \cap {}^yU \neq \emptyset$ gracias a que ${}^{xy}\Lambda$ son funciones de transición. Entonces, por el teorema de la conexión (5.2.7) existe una única conexión ω en \mathcal{P} tal que

$${}^x\omega = {}^x\sigma^* \omega. \quad (8.25)$$

QED

Como puede observarse la demostración de este teorema es análoga a la construcción del haz fibrado para configuraciones clásicas que representen sistemas mecánicos. Ambos teoremas se derivan directamente del teorema de reconstrucción de haces fibrados principales y el teorema de existencia y unicidad de la conexión en el haz fibrado. Este resultado tiene la ventaja de especificar el haz fibrado y la conexión de manera única, puesto que el grupo de estructura siempre es el grupo de Lorentz, la conexión es única y la configuración gravitacional está determinada también de manera única salvo isomorfismos. El haz fibrado principal que hemos construido es único en el sentido de una clase de equivalencia.

8.2.2. Soluciones con campos de materia

Vamos a considerar las ecuaciones de campo de Einstein acopladas a un campo de materia. Como mencionamos anteriormente, la acción de materia que interviene en la teoría depende del marco local, la conexión y los campos de materia, vamos a asumir que estos campos están descritos por las teorías de norma. De acuerdo a ello podemos introducir un grupo de norma G (que es un grupo de Lie arbitrario y consideramos que es un grupo matricial) de tal manera que la teoría que describe el campo de materia sea invariante ante una transformación local de norma $\gamma \in G$, lo cual caracteriza a las teorías de norma. Entonces existe una conexión A con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de norma y que genera el campo de fuerza F dado por

$$F = dA, \quad (8.26)$$

en el caso abeliano y

$$F = dA + A \wedge A, \quad (8.27)$$

en el no-abeliano. Este campo de fuerza también es \mathfrak{g} -valuado y de acuerdo a la teoría, bajo una transformación de norma $\gamma \in G$, esta forma y la de conexión se escriben de acuerdo a

$$A \rightarrow A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1}, \quad y \quad F \rightarrow F' = \gamma F \gamma^{-1}. \quad (8.28)$$

El sentido físico de la conexión es precisamente la descripción del potencial involucrado en la interacción del campo de materia, así como la curvatura puede asociarse con el campo de fuerza.

Teorema 8.2.2 (fundamental de la cuantización topológica para gravedad y materia). *Una solución de las ecuaciones de campo de Einstein acopladas con un campo de materia descrito por una teoría de norma puede ser representado por un único haz fibrado principal \mathcal{P} con \mathcal{M} el espacio base, el grupo de norma G como el grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y una conexión con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de norma.*

No ofreceremos una demostración detallada de este teorema ya que es análoga al anterior (8.2.1), únicamente hay que considerar los cambios respectivos del grupo de Lie G , que representa a las simetrías del campo de materia, y la correspondiente conexión A .

8.3. Cuantización topológica del modelo Λ -CDM

Vamos a considerar al modelo cosmológico estándar como configuración gravitacional, en la cual interviene la métrica de FLRW descrito por el elemento de línea

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (8.29)$$

recordemos que $a(t)$ es el factor de escala, k es la constante de curvatura y está normalizada de tal forma que toma los valores $0, \pm 1$ (tanto a como k son adimensionales) y r_0 representa el valor presente del radio de curvatura del 3-espacio formado por la superficie $t = t_0$ y tiene unidades de distancia. Este elemento de línea también puede ser escrito en términos de la base local ortonormal

$$e^0 = c dt, \quad e^1 = \frac{a(t)}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} dr, \quad e^2 = a(t) r d\theta, \quad e^3 = a(t) r \sin \theta d\phi, \quad (8.30)$$

como

$$g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b, \quad e^a = e^a_\mu dx^\mu. \quad (8.31)$$

donde la transformación e^a_μ es diagonal

$$[e^a_\mu] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

en la cual hemos definido

$$b(r) := \frac{1}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{b(r)} \right) = -\frac{kr}{r_0^2} b(r), \quad (8.33)$$

que nos deja escribir $e^1 = a(t)b(r)dr$, esto será útil para simplificar algunos cálculos⁴.

Consideremos las ecuaciones de estructura y el cálculo que hicimos de la conexión y curvatura para obtener la métrica de FLRW (véase la subsección (6.4.2)). En la base local de tétradas podemos encontrar las formas de conexión, que se expresan como

$$\begin{aligned} \omega^a_0 &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} e^a \quad (a = 1, 2, 3), \\ \omega^a_1 &= \frac{1}{abr} e^a \quad (a = 2, 3), \\ \omega^3_2 &= \frac{\cot \theta}{ar} e^3. \end{aligned} \quad (8.34)$$

⁴Cabe mencionar que usamos la letra a para referirnos al factor de escala y denotar índices latinos. Esperamos que no haya confusión sobre cuándo se refiere a uno u otro concepto, al igual que en el caso de la función de curvatura $b(r)$ y la velocidad de la luz c .

Para la curvatura tendremos

$$\begin{aligned}\Omega^0_a &= \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} e^0 \wedge e^a & (a = 1, 2, 3), \\ \Omega^a_b &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} \right) e^a \wedge e^b & (a, b = 1, 2, 3).\end{aligned}\tag{8.35}$$

Esto nos permite calcular el tensor de Riemann, que a su vez nos da una expresión del tensor de Einstein. A partir de las ecuaciones de campo, estos elementos nos permiten describir la dinámica del Universo a gran escala, dados por las ecuaciones de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{r_0^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho,\tag{8.36}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right),\tag{8.37}$$

junto con la ecuación barotrópica

$$P = \omega c^2 \rho,\tag{8.38}$$

donde ω es una constante que depende únicamente de la sustancia [17]. Escribiendo la densidad como una suma de sus contribuyentes, es decir,

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega},\tag{8.39}$$

donde el subíndice ω es el correspondiente a la constante barotrópica en (8.38), podemos introducir los parámetros cosmográficos

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 a^2 r_0^2}, \quad \Omega_{\omega} = \frac{\rho_{\omega}}{\rho_c},\tag{8.40}$$

esto nos deja expresar la primera ecuación de evolución de Friedmann (8.36) como

$$1 = \sum_{\omega} \Omega_{\omega} + \Omega_k.\tag{8.41}$$

A su vez, también nos permite escribir el radio actual del 3-espacio como

$$r_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{k}{\Omega_0 - 1}}.\tag{8.42}$$

Por otro lado, al resolver las ecuaciones de Friedmann en casos particulares podemos establecer soluciones exactas del factor de escala [63]. Tenemos que la solución general para la densidad es

$$\rho_{\omega}(t) = \frac{\rho_{0,\omega}}{a^{3(\omega+1)}},\tag{8.43}$$

para $\omega \geq -1$ y donde ρ_0 es el valor de la densidad actual [17]. Soluciones para el factor de escala podemos encontrarlas en general considerando a partir de los parámetros cosmográficos la primer ecuación de Friedmann (8.36):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left(\sum_{\omega} \frac{\rho_{\omega}}{\rho_c} + \Omega_k^0 a^{-2} \right), \quad (8.44)$$

y de las soluciones (8.43) obtenemos, para un Universo con materia (tanto bariónica como oscura), energía oscura, radiación y curvatura,

$$H_0 dt = \frac{da}{\sqrt{\Omega_{0,m} a^{-1} + \Omega_{0,\Lambda} a^2 + \Omega_{0,\gamma} a^{-\frac{4}{3}} + \Omega_k^0}}, \quad -1 \leq \omega. \quad (8.45)$$

El caso general es muy difícil de resolver e intervienen (para una mejor aproximación) los métodos numéricos. En su lugar vamos a considerar las soluciones que encontramos en (6.4.5): para materia,

$$a_m = \begin{cases} \frac{\Omega_{0,m}}{2|\Omega_{0,k}|} (1 - \cos \eta), & \text{si } k = 1, \\ \left[\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{0,m} t} \right]^{\frac{2}{3}}, & \text{si } k = 0 \\ \frac{\Omega_{0,m}}{2|\Omega_{0,k}|} (\cosh \eta - 1), & \text{si } k = -1; \end{cases} \quad (8.46)$$

radiación:

$$a_{\gamma} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|}} \sin(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta), & \text{si } k = 1, \\ [2H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma} t}]^{\frac{1}{2}}, & \text{si } k = 0, \\ \sqrt{\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|}} \sinh(\sqrt{\Omega_{0,k}} \eta), & \text{si } k = -1; \end{cases} \quad (8.47)$$

y energía oscura:

$$a_{\Lambda}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\Lambda}}} \sin(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} t), & \text{si } k = 1, \\ \exp\{-H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} (t_0 - t)\}, & \text{si } k = 0, \\ \sqrt{\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\Lambda}}} \sinh(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} t), & \text{si } k = -1, \end{cases} \quad (8.48)$$

individualmente. Estas soluciones corresponden a una configuración específica del Universo: un solo fluido para una curvatura definida. Nuestro análisis posterior se basa en estas soluciones, que son las más sencillas de estudiar con las herramientas analíticas de las que disponemos.

8.3.1. Espectro topológico de FLRW

Para un espacio 4-dimensional la característica de Euler está dada por [5]

$$e(\mathcal{P}) = \frac{1}{2(4\pi)^2} \epsilon^{abcd} \Omega_{ab} \wedge \Omega_{cd}. \quad (8.49)$$

De esta expresión resultan 24 términos distintos de cero, dado que tenemos 6 formas $\Omega^a{}_b$ independientes y debido al carácter simétrico del producto cuña en cuando a las 2-formas⁵ únicamente contamos con 3 términos $\Omega_{ab} \wedge \Omega_{cd}$ independientes. Es decir,

$$\epsilon^{abcd} \Omega_{ab} \wedge \Omega_{cd} = -8 (\Omega_{a_1 b_1} \wedge \Omega_{c_1 d_1} + \Omega_{a_2 b_2} \wedge \Omega_{c_2 d_2} + \Omega_{a_3 b_3} \wedge \Omega_{c_3 d_3}),$$

donde (a_i, b_i, c_i, d_i) son permutaciones pares de $(0, 1, 2, 3)$, $i = 1, 2, 3$ y $\epsilon^{0123} = -1$. Explícitamente

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} [\Omega_{01} \wedge \Omega_{23} + \Omega_{02} \wedge \Omega_{31} + \Omega_{03} \wedge \Omega_{12}]. \quad (8.50)$$

Hasta ahora no hemos introducido ningún valor de la métrica de FLRW, de hecho, esta fórmula es válida para cualquier espacio lorentziano 4-dimensional. Observemos ahora que las tres 4-formas que intervienen en (8.50) son iguales en el caso que nos incumbe y dadas por

$$\Omega_{01} \wedge \Omega_{23} = \Omega_{02} \wedge \Omega_{31} = \Omega_{03} \wedge \Omega_{12} = -\frac{\ddot{a}}{c^2 a^3} \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} \right) e^0 \wedge e^1 \wedge e^3 \wedge e^4. \quad (8.51)$$

La característica de Euler se puede escribir como

$$e(\mathcal{P}) = \frac{3}{(2c\pi)^2} \frac{\ddot{a}}{a^3} \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} \right) e^0 \wedge e^1 \wedge e^3 \wedge e^4. \quad (8.52)$$

El resultado al que nos lleva la cuantización topológica es que la integración de la clase característica (en este caso la forma de Euler) $\int_{\mathcal{M}} e(\mathcal{P})$ nos devuelve una discretización de los parámetros, el espectro topológico

$$\frac{3}{(2c\pi)^2} \int_{\mathcal{M}} \frac{\ddot{a}}{a^3} \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} \right) \sqrt{-g} d^4x = n. \quad (8.53)$$

Una breve manipulación de la primera ecuación de Friedmann (8.36) nos lleva a

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2, \quad (8.54)$$

⁵Recordemos que si α es una k -forma y β , una l -forma, entonces

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

En particular, si α y β son 2-formas

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$$

al igual que de la segunda (8.37) y la ecuación de estado (8.38) obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a^3} = -\frac{4\pi G}{3a^2} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3a^2} (1 + 3\omega) \rho. \quad (8.55)$$

Introduciendo la solución general de la densidad (8.43) en las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} a^2 \frac{\rho_\omega^0}{a^{3(\omega+1)}} \quad (8.56)$$

y también

$$\frac{\ddot{a}}{a^3} = -(1 + 3\omega) \frac{4\pi G}{3a^2} \cdot \frac{\rho_\omega^0}{a^{3(\omega+1)}} \quad (8.57)$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a^3} \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{k}{r_0^2} \right) &= -(1 + 3\omega) \frac{4\pi G}{3a^2} \frac{\rho_\omega^0}{a^{3(\omega+1)}} \frac{8\pi G}{3c^2} a^2 \frac{\rho_\omega^0}{a^{3(\omega+1)}} \\ &= -(1 + 3\omega) \frac{32\pi^2 G^2}{9c^2} \frac{(\rho_\omega^0)^2}{a^{6(\omega+1)}}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Por lo tanto, del espectro (8.53) resulta en

$$-\frac{8}{3} \frac{G^2}{c^4} (1 + 3\omega) \rho_{0,\omega}^2 \int_{\mathcal{M}} \frac{dvol}{a^{6(\omega+1)}} = n. \quad (8.59)$$

La integral involucrada se expresa como

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \frac{dvol}{a^{6(\omega+1)}} &= \int_{t_i}^{t_f} \int_0^{ar_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^{-6(1+\omega)} \frac{ca^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} d\phi d\theta dr dt \\ &= 4\pi c \int_{t_i}^{t_f} \int_0^{ar_0} a^{-3(1+2\omega)} \frac{r^2}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} dr dt. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Dejándonos expresar nuestro espectro como

$$-\frac{32\pi}{3} (1 + 3\omega) \frac{G^2}{c^3} \rho_{0,\omega}^2 \int_{t_i}^{t_f} \int_0^{ar_0} a^{-3(1+2\omega)} \frac{r^2}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} dr dt = n. \quad (8.61)$$

Por otro lado, la integral radial depende del valor de k , siendo sus soluciones

$$\sigma_{0,k}(a) = \int_0^{ar_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} = \begin{cases} \frac{r_0^3}{2} [\arcsin(a) - a\sqrt{1 - a^2}], & \text{si } k = 1, \\ \frac{r_0^3 a^3}{3}, & \text{si } k = 0, \\ \frac{r_0^3}{2} [-\operatorname{arcsinh}(a) + a\sqrt{1 + a^2}], & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (8.62)$$

Observación. Para $a \ll 1$ las tres soluciones se comportan semejantes:

$$\int_0^{ar_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}}} \approx \frac{(r_0 a)^3}{3 + |k|}, \quad (8.63)$$

la integral en (8.59) se puede escribir bajo esta aproximación como

$$- \frac{32\pi}{3(3 + |k|)} (1 + 3\omega) G^2 \rho_{0,\omega}^2 \frac{r_0^3}{c^3} \int_{t_i}^{t_f} a^{-6\omega} dt = n. \quad (8.64)$$

Para trabajar con una expresión más cómoda tomamos las ecuaciones (8.40), notando que

$$\rho_{0,c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (8.65)$$

nos permitimos escribir

$$G^2 \rho_{0,\omega}^2 = \left(\frac{3H_0^2 \rho_{0,\omega}}{8\pi \rho_{0,c}} \right) = \frac{9H_0^4}{64\pi^2} \Omega_{0,\omega}^2, \quad (8.66)$$

llegando así a la expresión general

$$- \frac{3H_0^4}{2\pi c^3} (1 + 3\omega) \Omega_{0,\omega}^2 \int_{t_i}^{t_f} a^{-3(1+2\omega)} \sigma_{0,k}(a) dt = n. \quad (8.67)$$

Llegados a este punto precisamos de hacernos con casos particulares para estudiar los espectros respectivos.

8.3.2. Espectros para el Universo plano

Bajo la condición $k = 0$ reducimos el espectro (8.67) a

$$- \frac{H_0^4}{2\pi} (1 + 3\omega) \Omega_{0,\omega}^2 \left(\frac{r_0}{c} \right)^3 \int_{t_i}^{t_f} a^{-6\omega} dt = n. \quad (8.68)$$

Podemos acomodar la solución de la integral como

$$\int_{t_i}^{t_f} a^{-6\omega} dt = \begin{cases} \Delta t = t_f - t_i, & \text{si } \omega = 0, \\ \frac{1}{2H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}}} \ln \left(\frac{t_f}{t_i} \right), & \text{si } \omega = \frac{1}{3}, \\ \frac{a_\Lambda^6(t_f) - a_\Lambda^6(t_i)}{6H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}}, & \text{si } \omega = -1. \end{cases} \quad (8.69)$$

El intervalo de integración a considerar es $[t_0, t]$, donde t_0 es un momento fijo en el cual conocemos las propiedades del Universo que nos incumben; así, $t \in [0, t_0]$. Tomamos entonces como punto fijo el día de hoy, pues conocemos sus propiedades y podemos observarlo (al menos algunas de sus características), y retrocedemos en el tiempo de acuerdo a la variable t . El número característico n nos discretiza t puesto que en $n = 0$ recuperamos que $t = t_0$, conforme n crece t se aleja de t_0 , por lo que vamos hacia atrás en el tiempo. Esto hace que, al menos por el momento, no precisemos de conocer las propiedades de un Universo en su edad temprana para poder discretizar sus parámetros. Aún así, es interesante tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ en los espectros que vayamos encontrando.

Universo plano dominado por materia

La integración sobre el límite $[t_0, t]$ nos resulta en el espectro

$$\frac{H_0^4}{2\pi} \Omega_{0,m}^2 \left(\frac{r_0}{c}\right)^3 (t_0 - t) = n, \quad (8.70)$$

que directamente nos arroja una discretización para el tiempo

$$\Delta t = \frac{2n\pi c^3}{H_0^4 \Omega_{0,m}^2 r_0^3} n = \beta_{0,m,0} n. \quad (8.71)$$

Habiendo fijado t_0 como límite de integración. Con los valores actuales tenemos que $\beta_{0,m,0} \approx 2.21 \times 10^{25}$ s; entendemos entonces que este «paso del tiempo» a través del parámetro n es muy grande, lo que dificulta interpretar a n como un parámetro de evolución. En efecto, se han medido tiempos más pequeños, sin embargo, también el Universo no está dominado por materia en la actualidad y no es el único fluido presente. Así que una propuesta para solucionar esto sería tomar una época adecuadamente descrita por el dominio del polvo.

Podemos mover t_0 a tiempos diferentes de hoy; en dicho caso tanto la densidad de materia $\rho_{0,m}$ es mayor, reduciendo el valor de $\beta_{0,m,0}$. A manera de ilustrar esta idea tomamos nuestro Universo, específicamente durante el dominio de la materia; el tiempo de transición entre un Universo dominado por radiación a uno por materia está dado por

$$Ht_{eq} = \int_0^{\Omega_{0,\gamma}/\Omega_{0,m}} \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{0,\Lambda} a^4 + \Omega_{0,m} a + \Omega_{0,\gamma}}}, \quad (8.72)$$

el resultado de esta integral resuelta numéricamente arroja $t_{eq} = 47 \times 10^3$ años, mientras que el final de este dominio es 10^{17} s [17]. Ajustando los límites de integración a $[t, t_{eq}]$ encontramos que $\beta_{eq,m,0} \approx 127.6$ s.

Se puede entender nuestro espectro como un parámetro del tiempo, pues para diferentes valores de n recuperamos tiempos cada vez más alejados de t_0 , sin embargo, la constante involucrada arroja que la separación entre un «instante» de tiempo y el siguiente es grande comparada con la diferencia de tiempos que se miden. El valor del mismo se puede reducir cambiando nuevamente el límite de integración, empero a tiempos más tempranos la aproximación deja de ser válida, al menos para nuestro Universo puesto que no siempre domina la materia. Aún así, para un Universo cuyo único fluido presente sea el polvo, bien podemos considerar tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$, y dejando libre el límite superior, de manera que podemos orientar el espectro topológico para que n crezca conforme t :

$$t = \beta_{0,m,0} n. \quad (8.73)$$

Cabe destacar que el «paso» del tiempo se mantiene constante, en el sentido que cada uno de sus valores está igualmente distanciado del siguiente, como se puede observar en la gráfica de t contra n (figura 8.1), pues es una recta.

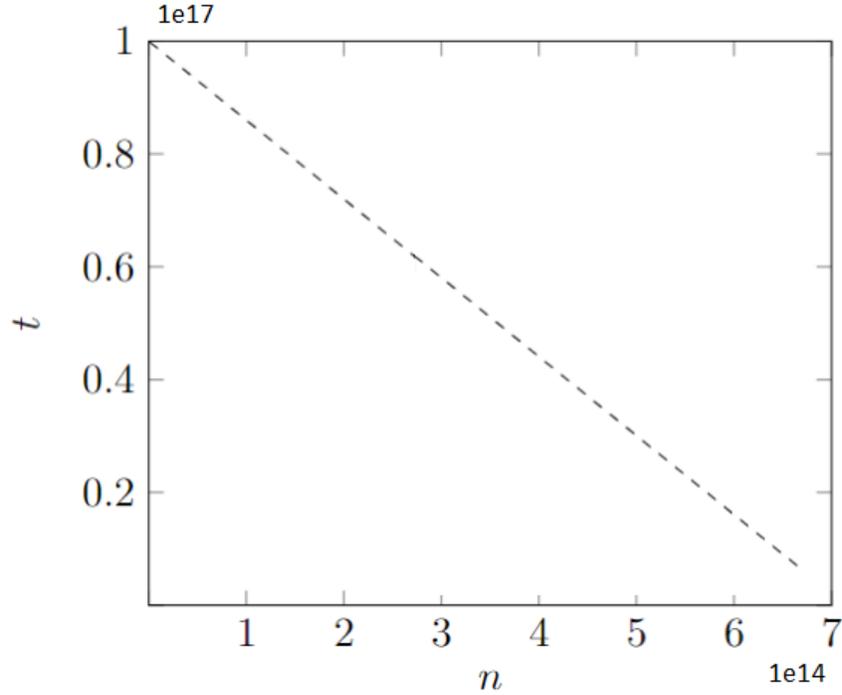


Figura 8.1: Gráfica del espectro topológico para un Universo dominado por materia. (Con motivo de ilustrar la discretización se omitieron algunos puntos.)

Por otro lado, de la solución del factor de escala (8.46) podemos obtener el espectro

$$a_m(n) = \alpha_{eq,m,0} n^{2/3}, \quad \alpha_{eq,m,0} = \left[\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{0,m}} \beta_{eq,m,0} \right]^{2/3}, \quad (8.74)$$

así como del corrimiento al rojo

$$z = \frac{n^{-2/3}}{\alpha_{eq,m,0}} - 1. \quad (8.75)$$

Universo plano dominado por radiación

El espectro topológico que nos incumbe se escribe como

$$-\frac{1}{2\pi} \left[H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \frac{r_0}{c} \right]^3 \ln \left(\frac{t_f}{t_i} \right) = n. \quad (8.76)$$

Fijando de nueva cuenta los límites $[t_0, t]$ obtenemos la relación

$$t = t_0 \exp \left\{ -2\pi \left(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \frac{r_0}{c} \right)^{-3} n \right\} = t_0 \exp \{ \beta_{0,\gamma,0} n \}, \quad (8.77)$$

que arroja también una discretización para el intervalo temporal. Con los valores actuales la constante involucrada se puede aproximar a $\beta_{0,\gamma,0} \approx -7.3 \times 10^{13}$ que, de

nueva cuenta, es un lapso muy grande entre un «instante» de tiempo y el siguiente. Regresando al tiempo de transición obtenemos $\beta_{eq,\gamma,0} = -10^{-16}$ encontrando así el espectro

$$t = \kappa^n t_{eq}, \quad \kappa \equiv e^{-10^{-16}}. \quad (8.78)$$

Observemos que el espectro para la radiación marca un ritmo diferente para el tiempo conforme a n , es decir, mientras n crece (y por tanto t disminuye) divide al tiempo en más intervalos, por lo que la duración de estos es menor:

$$\Delta t = C(1 - \kappa^n). \quad (8.79)$$

Vemos entonces que el paso del tiempo decrementa conforme miramos más al pasado. La gráfica t contra n luce como una exponencial invertida (figura 8.2).

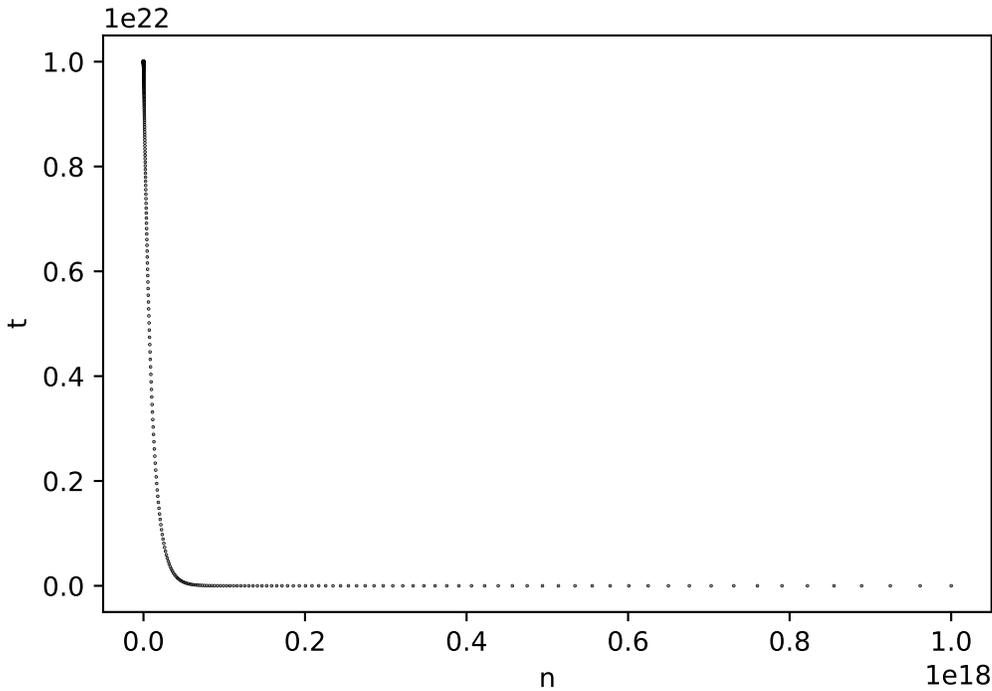


Figura 8.2: Gráfica del espectro topológico para un Universo dominado por radiación.

Para ilustrar este hecho calculamos el número característico para dos momentos. La era en que el Universo era dominado por la radiación inició en $t_i = 10^{-33}$ s y terminó en $t_{eq} \approx 1.5 \times 10^{12}$ s; en virtud de esto podemos encontrar el entero n_0 que satisface

$$t_i = \kappa^{n_0} t_{eq}, \quad \Rightarrow \quad n_0 \approx 10^{18}, \quad (8.80)$$

(el número de «pasos» en el tiempo). Por otro lado, a la mitad de esta era la edad del Universo era de aproximadamente 7.5×10^{11} s, para el cual $n_{1/2} \approx 7 \times 10^{15}$. Notemos entonces que la mayor cantidad de intervalos se dieron durante la primera mitad de

la era de la radiación. También se puede encontrar, durante el final de esta era, que el lapso entre el último segundo y su antecesor se dividieron en $n = 6670$ intervalos.

Consideremos ahora el primer segundo del Universo, el número característico para este instante es $n_1 = 2.8 \times 10^{17}$. De donde encontramos que

$$n_1 - n_0 \approx 7.2 \times 10^{17}. \quad (8.81)$$

Es decir, 7.2×10^{17} es el número de veces que n parte el intervalo $[10^{-33}\text{s}, 1\text{s}]$, cada uno de los cuales es más pequeño mientras más nos acercamos al Big Bang. En principio, el primer segundo del Universo fue el más largo en el sentido del avance del número característico.

Se puede notar entonces que mientras el Universo crece y avanza el tiempo, el número característico decrece con él (el tiempo avanza en intervalos más grandes) hasta llegar a un ritmo constante (era de la materia); a su vez, esto se puede entender como la respuesta al crecimiento del Universo. En los tiempos tempranos los intervalos de tiempo cambian en gran medida comparados con el resto de su historia. Aún así, poco se puede aseverar del periodo anterior a la era de la radiación, puesto que se tiene, además de la singularidad inicial, la época de inflación. Esto arroja una pregunta importante: ¿cuál es el sentido físico del número característico a tiempos posteriores? El espectro (8.78), con este primer análisis, apunta a ser una discretización del tiempo, al menos para el Universo temprano.

De la discretización (8.78) también podemos obtener un espectro para el factor de escala $a_\gamma(n)$, dado por

$$a_\gamma(n) = \left[2H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \kappa^n t_{eq} \right]^{\frac{1}{2}} = a(t_{eq}) \kappa^{n/2}, \quad (8.82)$$

y a su vez para el corrimiento al rojo

$$z_\gamma(n) = \left[2H_0 \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \kappa^n t_{eq} \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 = z(t_{eq}) \kappa^{-n/2} - 1. \quad (8.83)$$

El espectro tanto de a como de z se puede encontrar directamente de la integral

$$\int_{t_i}^{t_f} a^{-6\omega} dt, \quad (8.84)$$

involucrada en el espectro topológico (8.68) al resolverse con los cambios de variables adecuados (dados por las ecuaciones que las relacionan entre sí).

Observación. Cuando $n \rightarrow \infty$ recuperamos que $a \rightarrow 0$ y también $z \rightarrow \infty$. Esto va de acuerdo a las soluciones de ambas variables en el modelo cosmológico que presentamos anteriormente. El comportamiento de a_n respecto a n es similar al de t , esto es, incrementos en porciones cada vez más grandes. Empero, el de z_n va al contrario, tomando valores cada vez más separados durante el Universo temprano, puesto que si $a \rightarrow 0$ entonces $z \rightarrow \infty$.

Universo plano dominado por energía oscura

El espectro para un Universo dominado por energía oscura se puede expresar como

$$\frac{1}{6\pi} \left(H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}} \frac{r_0}{c} \right)^3 [a_\Lambda^6(t_f) - a_\Lambda^6(t_i)] = n, \quad (8.85)$$

en donde usamos que el factor de escala está bien definido en $t = 0$, obteniendo así directamente un espectro para el factor de escala

$$a_\Lambda(n) = 17n^{1/6}, \quad (8.86)$$

donde hemos usado que $a_\Lambda(0) \approx 0$ comparado con $17n^{1/6}$, para $1 \leq n$. Este espectro nos arroja inconsistencias con la solución clásica porque solo es válido para $n = 0$. Usando la solución del factor de escala (8.48) podemos expresar

$$\Delta t = -\frac{2.8 + \frac{1}{6} \ln(n)}{H_0 \sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}}. \quad (8.87)$$

Existen inconsistencias con esta solución debido a que, en principio, la solución clásica nos indica que $a \rightarrow 0$ solo en cuanto mayor es la edad del Universo, $t_0 \rightarrow \infty$.

El final del dominio de la materia en el Universo marca el inicio de la era de energía oscura, para este momento el espectro asociado nos indica que los intervalos de tiempo continúan creciendo.

8.3.3. Espectros para un Universo curvo

Para las soluciones del factor de escala con que contamos la integral (8.67) resulta complicada de resolver, debido a este hecho, y en virtud de los resultados expuestos para el Universo plano, vamos a considerar una aproximación para tiempos pequeños. Es importante mencionar que para un Universo vacío (sin algún fluido) no es posible analizar un espectro con la expresión antes mencionada; podemos remitirnos a la relación (8.53), sin embargo, con la solución

$$a_k(t) = H_0 \sqrt{|\Omega_{0,k}|} t, \quad (8.88)$$

tampoco recuperamos un espectro topológico. De esta manera podemos encontrar una condición para la discretización de los parámetros, que es el contenido del Universo. A pesar de ello aún podemos estudiar la manera en que la forma del espacio afecta dicha discretización.

Regresemos a la ecuación (8.42), encontramos de ella que

$$\frac{r_0^3}{c^3} = \frac{1}{H_0^3 |\Omega_{0,k}|^2}, \quad (8.89)$$

de donde

$$G^2 \rho_{0,\omega}^2 \frac{r_0^3}{c^3} = \frac{9H_0}{64\pi^2} \frac{\Omega_{0,\omega}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.90)$$

Finalmente hallamos

$$- \frac{3H_0}{8\pi} (1 + 3\omega) \frac{\Omega_{0,\omega}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \int_{t_i}^{t_f} a^{-6\omega} dt \stackrel{(8.64)}{=} n, \quad (8.91)$$

que será el espectro que estudiaremos. Las observaciones actuales apuntan a que vivimos en un Universo plano (cuando menos aproximadamente), por lo que nos limitaremos a un análisis cualitativo de los espectros que vayamos encontrando.

Las soluciones para el factor de escala para tiempos pequeños se aproximan a

$$a_\omega \approx \begin{cases} \frac{\Omega_{0,m}}{4|\Omega_{0,k}|} \eta^2, & \text{si } \omega = 0, \\ \sqrt{\Omega_{0,\gamma}} \eta, & \text{si } \omega = \frac{1}{3}, \\ H_0 \sqrt{|\Omega_{0,k}|} t, & \text{si } \omega = -1, \end{cases} \quad (8.92)$$

que es independiente de si el Universo es abierto o cerrado. Notemos también que las expresiones se asemejan bastante, sobre todo a tiempos pequeños. Cabe recalcar que en el escenario que nos incumbe la cantidad $\Omega_{0,k}$ influye más en la solución a la energía oscura que $\Omega_{0,\Lambda}$.

Universo curvo dominado por materia

Sustituyendo $\omega = 0$ en (8.91) tenemos

$$\begin{aligned} n &= \frac{3H_0}{8\pi} \frac{\Omega_{0,m}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \int_{t_i}^t d\hat{t} \\ &= \frac{3H_0}{8\pi} \frac{\Omega_{0,m}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{H_0} \int_{\eta_i}^\eta a_m(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \\ &= \frac{1}{32\pi} \frac{\Omega_{0,m}^3}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{5}{2}}} \hat{\eta}^3 \Big|_{\eta_i}^\eta. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Este espectro se puede escribir, tomando el límite cuando $\eta_i \rightarrow 0$, como

$$\eta = \frac{|\Omega_{0,k}|^{\frac{5}{6}}}{\Omega_{0,m}} \sqrt[3]{32\pi n}. \quad (8.94)$$

Ahora bien, suponemos que este Universo está dominado por materia, de donde

$$1 = \Omega_0 + \Omega_{0,k}, \quad \Rightarrow \quad |\Omega_{0,k}| = k(1 - \Omega_{0,m}), \quad (8.95)$$

esto significa que podemos escribir el espectro topológico únicamente en términos de la densidad relativa de materia

$$\eta = \frac{|1 - \Omega_{0,m}|^{\frac{5}{6}}}{\Omega_{0,m}} \sqrt[3]{32n\pi}. \quad (8.96)$$

La discretización del tiempo conforme es independiente de si el Universo es abierto o cerrado y está orientada en n ; es decir, recuperamos que $\eta = 0$ cuando $n = 0$.

Con este resultado podemos encontrar los espectros del factor de escala

$$a(n) = \frac{1}{4\Omega_{0,m}} (32\pi |1 - \Omega_{0,m}| n)^{\frac{3}{2}}. \quad (8.97)$$

Y finalmente, para el corrimiento al rojo

$$z(n) = \frac{4\Omega_{0,m}}{(32\pi |1 - \Omega_{0,m}| n)^{\frac{3}{2}}} - 1. \quad (8.98)$$

Es importante mencionar que cuando el espacio tiende a ser plano $k \rightarrow 0$, perdemos la condición de discretización, puesto que $\Omega_m \rightarrow 1$.

Universo curvo dominado por radiación

En este caso $\omega = \frac{1}{3}$, que reduce nuestro espectro a

$$\begin{aligned} n &= -\frac{3H_0}{4\pi} \frac{\Omega_{0,\gamma}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^t a^{-6\omega}(\hat{t}) d\hat{t} \\ &= -\frac{3}{4\pi} \frac{\Omega_{0,\gamma}^2}{|\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{a(\hat{\eta})} d\hat{\eta} \\ &= -\frac{3}{4\pi} \left(\frac{\Omega_{0,\gamma}}{|\Omega_{0,k}|} \right)^{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta_0} \right), \end{aligned} \quad (8.99)$$

es decir, para el tiempo conforme

$$\eta = \eta_0 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} \left(\frac{|\Omega_{0,k}|}{\Omega_{0,\gamma}} \right)^{\frac{3}{2}} n \right\}. \quad (8.100)$$

donde $\eta < \eta_0$ y fijamos el valor de η_0 como el instante de transición en que nuestra aproximación de la edad temprana es válida. Recordemos también nuestra suposición de un Universo dominado por radiación, de donde

$$1 = \Omega_0 + \Omega_{0,k}, \quad \Rightarrow \quad |\Omega_{0,k}| = k(1 - \Omega_{0,\gamma}), \quad (8.101)$$

Siendo así, podemos escribir el espectro topológico de un Universo curvo dominado por radiación como

$$\eta = \eta_0 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} \left| \frac{1}{\Omega_{0,\gamma}} - 1 \right|^{\frac{3}{2}} n \right\}. \quad (8.102)$$

Notemos ahora que lo único que determina el espectro es la densidad relativa $\Omega_{0,\gamma}$. Ahora bien, en el caso límite cuando $\eta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. El espectro tiene, en esencia, la misma forma que el espectro análogo para el Universo plano (8.78),

$$\eta = \eta_i \kappa^n, \quad (8.103)$$

la diferencia entre ellos, además que en este aparece el tiempo conforme, se da más que nada en cuando al factor que multiplica n . El problema que encontrábamos en el espectro plano sucedía cuando alcanzaba un tiempo suficientemente grande, pues la interpretación de ser un observable se dificulta para un Universo maduro, para corregir esto en el caso que nos incumbe podemos seleccionar η_0 de manera que corte estos casos. Notemos además que cuando el Universo tiende a ser plano $\Omega_{0,k} \rightarrow 0$ entonces $\Delta\eta \rightarrow 0$, con lo que perdemos la discretización de los parámetros independientemente de si el Universo es abierto o cerrado.

El espectro correspondiente del factor de escala está dado por

$$a(n) = a_0 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} \left| \frac{1}{\Omega_{0,\gamma}} - 1 \right|^{\frac{3}{2}} n \right\}, \quad (8.104)$$

que nos arroja una descripción similar, pero en cuanto al crecimiento del espacio (o decremento, puesto que $a < a_0$). Finalmente, en virtud de esto, el espectro respectivo del corrimiento al rojo es

$$z(n) = z_0 \exp \left\{ \frac{4\pi}{3} \left| \frac{1}{\Omega_{0,\gamma}} - 1 \right|^{\frac{3}{2}} n \right\}. \quad (8.105)$$

Universo dominado por energía oscura

Con la constante $\omega = -1$ encontramos de manera similar que

$$\frac{3}{28\pi} H_0^7 \Omega_{0,\Lambda}^2 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}} (t_f^7 - t_i^7) = n. \quad (8.106)$$

Que en el límite cuando $t_i \rightarrow 0$ encontramos que en un Universo curvo dominado por energía oscura

$$t = \frac{1}{H_0} \left(\frac{28\pi n}{3\Omega_{0,\Lambda}^2 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \right)^{1/7}. \quad (8.107)$$

De igual forma el espectro asociado al factor de escala es

$$a(n) = \sqrt{|\Omega_{0,k}|} \left(\frac{28\pi n}{3\Omega_{0,\Lambda}^2 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}} \right)^{1/7}. \quad (8.108)$$

A su vez es interesante notar la relación que obtenemos para el corrimiento al rojo

$$z(n) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{0,k}|}} \left(\frac{3\Omega_{0,\Lambda}^2 |\Omega_{0,k}|^{\frac{3}{2}}}{28\pi n} \right)^{1/7} - 1. \quad (8.109)$$

8.3.4. Conclusiones

Los espectros topológicos que encontramos para las propiedades del Universo sujetas al modelo Λ -CDM ofrecen un panorama de su evolución en cuanto al número característico. Dada la poca información que tenemos sobre la edad temprana, así como observaciones en un espaciotiempo curvo, nos dificultan el camino para encontrar un sentido físico cerca de la edad actual. Por otro lado, una interpretación física del número característico apunta a ser el observable que cuantifica las mediciones del Universo a gran escala, independientemente de su tamaño (es decir, en cuanto al factor de escala). La forma en que resolvimos la integral sobre \mathcal{M} que nos devuelve un espectro explícito nos lleva a pensar que tanto el corrimiento al rojo y el factor de escala están discretizados como consecuencia de su dependencia con el tiempo, cuya discretización es el elemento fundamental en nuestro análisis y el cual, a su vez, crece a medida que el Universo lo hace. Cabe destacar, así mismo, que en el Universo temprano obtenemos resultados interesantes, principalmente para los espectros asociados al dominio de la radiación. Así, los espectros discretos del modelo cosmológico estándar arrojan la discretización del tiempo. Más aún, engloba el crecimiento discreto del Universo, cuantificado en el factor de escala. No aseveramos que nuestra interpretación se entienda como una cuantización del Universo, pues (aún en el caso de contar con una cuantización completa ofreciendo estados y evolución cuánticas) no se cuenta con suficiente información hasta el momento. Así que nos limitaremos a este primer análisis de la cuantización topológica.

Los espectros discretos solo nos son accesibles por medio de la existencia de un fluido sobre el espaciotiempo, es decir, para Universos no-vacíos. Nuestro espectro topológico no alcanza a esclarecer los casos más generales en que un Universo sea ocupado por varios fluidos, que a su vez afectan las propiedades clásicas del Universo (por ello, en principio, también tendrían una consecuencia en el espectro topológico correspondiente). La forma de abordarlos es mediante las soluciones al factor de escala con varios fluidos y las ecuaciones de Friedmann, que nos llevan a resolver la integral de la forma característica de manera numérica.

Podemos entender entonces que el contenido de materia (o un fluido en general) es un primer ingrediente necesario para obtener discretizaciones de las propiedades del Universo⁶ y por tanto, ofrecer una cuantización formal del mismo. Junto con nuestras observaciones a la forma de los espectros topológicos de materia y energía oscura para un Universo plano la discretización obtenida de los parámetros aún no arroja una interpretación física, al menos hasta cierta edad temprana del Universo cuyo valor por ahora desconocemos.

Concentrémonos ahora en el factor r_0 , mientras mayor sea su valor el espectro topológico de un Universo dominado por cualquier fluido agranda la división de intervalos temporales. Cuando r_0 tiende a infinito perdemos la condición de discretización (junto con el hecho que nuestra variedad deja de ser compacta); que se puede entender

⁶Al menos en el caso del modelo cosmológico estándar, pues existen espectros topológicos no triviales con $T_{\mu\nu} = 0$ [48].

como la respuesta al hecho que, siendo infinito el espacio, no hay distinción alguna entre las escalas clásicas y cuánticas. Es decir, en un Universo infinito no puede haber un espectro discreto (en nuestro formalismo).

Es entonces que, dado el futuro del Universo plano (a saber, que se expandirá por siempre al igual que el abierto) hay un momento en su evolución en que la discretización de los parámetros no será válida. Nuestro principal problema con este hecho es que, a la fecha, se desconoce su valor exacto; en efecto, este valor puede ser mayor, lo que resultaría en inconsistencias del espectro asociado y el momento en que dejase de ser válido, para lo que el Universo pasará de un sistema bien portado en el régimen de la cuantización topológica a uno en que su tamaño se vuelve una limitante para encontrar sus propiedades cuánticas asociadas. Aún así es útil notar que esta observación es válida únicamente para un Universo plano, puesto que en los curvos siempre es posible evitar su valor en virtud de la densidad relativa gracias a los parámetros cosmográficos.

Un problema más al que no nos hemos enfrentado, pero que es igualmente importante, es el de estudiar nuestros resultados cuando se ven afectados al introducir la teoría inflacionaria. Posteriormente de la inflación es que las ecuaciones y descripciones que hemos venido manejando para el modelo Λ -CDM son válidas (clásicamente), así que una propuesta es analizar los campos de inflación bajo el enfoque de la cuantización topológica para reconstruir la historia de nuestro Universo con un espectro topológico físicamente consistente previo a la era de la radiación. Es decir, el uso de nuestro formalismo en la teoría inflacionaria, que fuese a ofrecer una descripción de los parámetros en la época que la inflación tuvo lugar.

Anteriormente mencionamos que tanto el factor de escala como el corrimiento al rojo tienen un espectro topológico asignado en virtud de su dependencia con el tiempo. En general, podemos asignar una discretización a las propiedades físicas del Universo dependientes del tiempo, incluidas la densidad, presión, densidad relativa⁷ e incluso la distancia propia y el parámetro de Hubble, que podemos considerar a través del previo análisis al factor de escala y no necesariamente implican una condición de discretización para el espacio.

Las expresiones aquí encontradas no dependen de la dirección o un punto específicos en el espacio, ello nos lleva a una discretización de los parámetros que lo determinan; factor de escala, corrimiento al rojo, tiempo, tiempo conforme, etc. Esto es así en virtud del principio cosmológico, que en modelos cosmológicos más generales no se satisface. En virtud de ello se espera que en modelos «menos» simétrico (en este sentido) las expresiones para un espectro discreto arrojen también una discretización para el espacio o bien para el espaciotiempo. En nuestro caso se aprecia mejor esta observación escribiendo la métrica en términos del tiempo conforme: dado que el

⁷Nótese que esto no implica que el parámetro de curvatura Ω_k también esté discretizado. Esto, con lo expuesto hasta ahora, no lo podemos aseverar.

factor de escala es una cantidad discretizada el elemento de línea también lo está

$$ds^2 = a_n^2(\eta) \left[- \left(\frac{c}{H_0} \right)^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{r_0^2}} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (8.110)$$

Entonces solo podemos asegurar que la discretización del espacio ocurre en cuanto a un factor conforme (que deducimos de la discretización del factor de escala). Cabe destacar que estos resultados no implican una discretización de la variedad diferencial, seguimos nuestro análisis bajo una variedad diferencial Hausdorff; nuestras construcciones nos llevan a constricciones sobre los parámetros involucrados y que fundamentalmente es uno: el tiempo.

9 Corolario

«El error nunca nos abandona, aunque una necesidad superior guía constantemente a la mente aspirante silenciosamente hacia la verdad.»

Johann Wolfgang von Goethe

El modelo estándar de partículas elementales es uno de los pilares de la física teórica moderna, cuyo objetivo es ofrecer un estudio completo de la naturaleza de la materia, energía y sus interacciones a escalas microscópicas. Esta meta se ha visto obstruida por incontables problemas que dificultan una adecuada descripción: por un lado, tanto el formalismo matemático sobre el que descansa así como los resultados experimentales la han llevado a replantearse sus alcances y la naturaleza de los objetos que le incumben, puesto que no siempre se dispone de la suficiente información para describir adecuadamente sistemas que experimentalmente se han observado. En principio, ninguna teoría es capaz de responder a todos los fenómenos que se dispone a estudiar¹. Otro ejemplo de ello es la gravitación; planteamos al inicio de este trabajo que objetos como el Universo o los agujeros negros no eran completamente descritos por las teorías de gravedad actual, e inclusive en nuestro somero estudio de la cosmología moderna nos encontramos con inconsistencias en las soluciones clásicas.

No es nuestro objetivo dar una respuesta puntual a los problemas de la cuantización canónica o la relatividad general, y menos aun competir con las propuestas formales de gravedad cuántica, sino ofrecer una alternativa para el cálculo de espectros discretos que esperamos pueda conducir a una teoría cuántica sólida², la cual descansará sobre los resultados e investigaciones de los conceptos de estado y evolución, aún restantes en el formalismo, y el espectro discreto (topológico) estudiado en este y otros trabajos, siendo esta formulación alternativa la cuantización topológica.

El formalismo ha logrado de manera efectiva dar una descripción de la naturaleza discreta de los parámetros que intervienen en un sistema clásico recurriendo a las estructuras geométricas y topológicas inherentes en la configuración clásica del sistema físico, y sin introducir otro tipo de hipótesis de cuantización. Aún así cabe recalcar

¹Este enfoque filosófico de la ciencia rebasa nuestro propósito, empero se puede consultar [64] y [65].

²El que nos lleve o no a una teoría cuántica formal no será analizado aquí, pues escapa a nuestros objetivos y aún sigue en desarrollo.

que nuestro formalismo no es aún una teoría cuántica completa, a diferencia de otras descripciones; la presencia de hipótesis adicionales apoya en la comprensión global de la cuantización de un sistema clásico, por lo que no se descarta la idea de completar el formalismo con algún principio que nos lleve a dicho objetivo. Como hemos hecho saber, el desarrollo de nuestro estudio ha de seguirse con cuidado y necesariamente apoyarse en los resultados recabados por teorías cuánticas formales. Desde un inicio hicimos hincapié en la necesidad de conocer las bases de la geometría diferencial y que apoyan a una comprensión global de la idea que buscamos entender. Se ha conseguido vislumbrar un panorama diferente para los observables de un sistema físico. La cuantización topológica (que esperamos extender a la “cuantización de fibras”) incorpora el estudio de los campos gravitacionales [48], sistemas mecánicos [58], campos bosónicos y fermiónicos [66], teoría de cuerdas y mapeos armónicos generalizados [67]. Nosotros realizamos, con base en los anteriores trabajos, un somero estudio del Universo a gran escala.

Ahora bien, los resultados principales a los que hemos llegado en el presente trabajo, que ya han sido estudiados anteriormente, son los “Teoremas fundamentales de la cuantización topológica”. Por lo que nos remitimos a construir, desde los espacios topológicos hasta la teoría de haces fibrados y sus conexiones, el formalismo físico. Este grupo de Teoremas fundamentales se encargan de probar que existe, en efecto, un objeto que posee toda la información relevante de un sistema físico, el haz fibrado principal. En general, probar esto es un gran esfuerzo, pues es necesario traducir las teorías físicas al lenguaje de las estructuras diferenciales. Este primer paso lo dimos con los sistemas mecánicos descritos por el formalismo de Maupertuis; el Teorema fundamental de la cuantización topológica en sistemas mecánicos nos permite construir el haz fibrado principal que representa la configuración y con ayuda de los invariantes topológicos conseguir un espectro discreto para sus parámetros. Si bien algunos son consistentes físicamente con otras teorías hay otros que no es posible comparar directamente ya que arrojan información única que es imposible comparar con la cuantización canónica, como es el caso de un sistema con dos grados de libertad. Este análisis no implica una cuantización o que, de hecho, estemos cuantizando un sistema; tan solo extraemos la información disponible mediante las técnicas geométricas que podemos asociar con propiedades bien conocidas que debería poseer un sistema cuántico.

El Teorema fundamental de la cuantización topológica en teoría de la gravedad establece la existencia de un haz fibrado principal que describe de manera única a un sistema gravitacional, ya sea que se trate de una solución a las ecuaciones de Einstein-Hilbert para vacío o con campos de materia. Toda la información necesaria del sistema físico está contenida en este objeto. Es más sencillo probar esto para los campos gravitacionales ya que la teoría de Einstein dispone totalmente de estas estructuras diferenciales. Por otro lado, el desarrollo de las teorías de norma nos permite escribir las simetrías de los campos de materia como invariantes de norma, que nos llevan a que las interacciones están correctamente descritas por una conexión y los campos de fuerza por su respectiva curvatura, siendo las teorías de norma el esce-

nario requerido para escribir los campos de materia en la estructura diferencial que deseamos.

La importancia de poner todas las propiedades físicas en un solo objeto radica en que podemos asociar los invariantes geométricos y topológicos con características de los sistemas físicos, que a su vez también serán invariantes por pertenecer a la misma estructura matemática inherente que describe la totalidad del sistema. Es así que relacionamos el número característico, un invariante topológico, con una discretización de los parámetros de las entidades físicas. Gracias al teorema fundamental es que podemos aseverar que esta relación es física.

Ahora bien, el estudio que llevamos a cabo sobre los campos gravitacionales y la construcción del formalismo nos permiten considerar, en principio, cualquier sistema gravitacional y obtener un espectro topológico directamente de las expresiones para la curvatura escribiendo la solución de las ecuaciones de campo en términos de las tétradas. Considerando en esta representación la solución de FLRW el teorema fundamental nos asevera que existe un haz fibrado principal asociado al Universo a gran escala y que a su vez contiene toda la información relevante. El número característico asociado nos arroja una discretización de los parámetros que intervienen, en este caso es solo uno: el tiempo. La discretización del tiempo es el resultado principal de nuestro análisis, cuya interpretación se ayuda de otras propiedades del Universo que están parametrizadas a partir de él, como el factor de escala o el corrimiento al rojo, por mencionar algunos. Es decir, esta discretización implica una evolución discreta del tamaño del Universo.

El espectro topológico que obtenemos del tiempo depende directamente del fluido que domine en el Universo. Excluimos los casos generales en que el Universo es dominado por dos o más fluidos, son casos más difíciles de resolver y una mejor aproximación vendrá a tenerse con las soluciones numéricas para el factor de escala. Dado que el tiempo determina las propiedades del Universo es posible, en principio, obtener una discretización de las propiedades que dependan de él. El espectro del tiempo es el resultado de las simetrías presentes en la construcción del modelo cosmológico, en particular de la validez del principio cosmológico a gran escala. El caso más interesante es el espectro topológico de la radiación, que apunta a una mayor evolución del tiempo en cuanto al número característico para el Universo temprano, ya sea en un Universo plano, abierto o cerrado. Si es que en verdad hay un estado cuántico del Universo, aún escondido de la cuantización topológica, la mayor evolución apunta a ser durante los primeros segundos del Cosmos.

A pesar de los resultados presentados anteriormente, que nos dejan ver un avance importante en el formalismo, hay todavía cuestiones que no son completamente entendidas y queda desarrollar muchos aspectos para llevar a la cuantización topológica a una teoría cuántica formal. En cuanto al problema de los estados cuánticos se tiene la propuesta de usar secciones locales en su descripción, pero la idea todavía está bajo estudio; al igual que el concepto de evolución, en que se pretende usar el transporte paralelo definido por la conexión que nos permita ir de una sección local a otra.

Lamentablemente, aún no existe un análogo a la ecuación de Schrödinger que nos oriente en su desarrollo. En lo que respecta a los sistemas mecánicos aún falta explorar extensiones del principio de Maupertuis que nos permitan considerar la frontera de Σ , además de sistemas no conservativos y de igual forma la manera de ampliar el formalismo a la mecánica relativista y en la praxis de sistemas moleculares que son muy importantes en la física-química [58]. Así mismo, en cuanto al modelo Λ -CDM es importante estudiar el periodo anterior a la era de la radiación, incorporar un análisis de la inflación para reconstruir la historia del Universo, considerar modelos cosmológicos más generales como los de Bianchi (en los que no se satisface la isotropía) y soluciones con dos o más fluidos. En síntesis, hay un sin fin de posibilidades a la hora de estudiar el espectro topológico.

Bibliografía

- [1] C. J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, vol. 61. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [2] J.-I. Nagata, *Modern general topology*. Elsevier, 1985.
- [3] S. Lipschutz, “Theory and problems of general topology,” tech. rep., 1965.
- [4] J. Dugundji, “Topology allyn and bacon,” *Inc., Boston*, vol. 5, p. 95, 1966.
- [5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [6] W. J. Pervin, *Foundations of general topology*. Academic Press, 2014.
- [7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, vol. 1. Cambridge university press, 1973.
- [8] J. M. Møller, “General topology,” *Matematisk Institut, Universitetsparken*, vol. 5, 2007.
- [9] J. Lee, *Introduction to topological manifolds*, vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [10] M. Clapp, *Análisis matemático*. UNAM, 2015.
- [11] J. Lee, “Introduction to smooth manifolds (springer, 2012).,”
- [12] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [13] M. Spivak, “A comprehensive introduction to differential geometry, 2nd edn., vol. 1-5,” *Publish or Parish, Houston*, 1979.
- [14] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1. New York, London, 1963.
- [15] Y. C. Bruhat, M. D. Bleick, and C. D. Morette, *Analysis, manifolds and physics*. Mir, 1997.
- [16] E. Nahmad-Achar, *Differential Topology and Geometry with Applications to Physics*. IOP Publishing, 2018.

- [17] O. Gron and S. Hervik, “Einstein’s general theory of relativity (e-book),” 2004.
- [18] A. B. Mojica, H. R. Mejía, and C. R. Orta, *Álgebra superior*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2006.
- [19] T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [20] C. H. Taubes, *Differential geometry: Bundles, connections, metrics and curvature*, vol. 23. OUP Oxford, 2011.
- [21] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics and electrodynamics*. Elsevier, 2013.
- [23] J. C. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*, vol. 4. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [24] S. Johannesen, *Smooth Manifolds and Fibre Bundles with Applications to Theoretical Physics*. CRC Press, 2016.
- [25] M. Göckeler and T. Schücker, *Differential geometry, gauge theories, and gravity*. Cambridge University Press, 1989.
- [26] Y. Kosmann-Schwarzbach *et al.*, *Groups and symmetries*. Springer, 2010.
- [27] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, “Connections, curvature and cohomology, 1–3, acad,” 1972.
- [28] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles.(PMS-14), Volume 14*. Princeton university press, 2016.
- [29] J. L. Koszul and S. Ramanan, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, vol. 20. Tata Institute of fundamental research Bombay, 1960.
- [30] J. A. de Azcárraga and J. M. Izquierdo, *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [31] W. Drechsler, M. E. Mayer, A. Böhm, and J. D. Dollard, *Fiber bundle techniques in gauge theories: lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin*. Springer, 1977.
- [32] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*. Elsevier, 1988.
- [33] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel gravity: an introduction*, vol. 173. Springer Science & Business Media, 2012.
- [34] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*. Cambridge University Press, 2008.

- [35] J. José and E. Saletan, “Classical dynamics: a contemporary approach,” 2000.
- [36] D. Kleppner and R. Kolenkow, *An introduction to mechanics*. Cambridge University Press, 2014.
- [37] V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [38] V. Cortés and A. S. Haupt, *Mathematical methods of classical physics*. Springer, 2017.
- [39] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, “Classical mechanics,” 2002.
- [40] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [41] K. Sundermeyer, *Symmetries in fundamental physics*, vol. 176. Springer, 2014.
- [42] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [43] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, vol. 2. Elsevier, 2013.
- [44] D. Lovelock, “The einstein tensor and its generalizations,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12, no. 3, pp. 498–501, 1971.
- [45] T. Dray, *Differential forms and the geometry of general relativity*. CRC Press, 2014.
- [46] F. Nettel, H. Quevedo, and M. Rodríguez, “Topological spectrum of mechanical systems,” *Reports on Mathematical Physics*, vol. 64, no. 3, pp. 355–365, 2009.
- [47] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.
- [48] L. Patino and H. Quevedo, “Topological quantization of gravitational fields,” *Journal of mathematical physics*, vol. 46, no. 2, p. 022502, 2005.
- [49] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields,” *Physical Review D*, vol. 12, no. 12, p. 3845, 1975.
- [50] A. S. Schwarz, “On regular solutions of euclidean yang-mills equations,” *Physics Letters B*, vol. 67, no. 2, pp. 172–174, 1977.
- [51] Z. Wo-Jun and D. Yi-Shi, “Topological quantization of instantons in su (2) yang–mills theory,” *Chinese Physics Letters*, vol. 25, no. 5, p. 1534, 2008.
- [52] O. Alvarez, “Topological quantization and cohomology,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 100, no. 2, pp. 279–309, 1985.
- [53] A. F. Ranada and J. L. Trueba, “Topological quantization of the magnetic flux,” *Foundations of Physics*, vol. 36, no. 3, pp. 427–436, 2006.

- [54] S. Deguchi, “Atiyah-singer index theorem in an $so(3)$ yang-mills-higgs system and derivation of a charge quantization condition,” *Progress of theoretical physics*, vol. 118, no. 4, pp. 769–784, 2007.
- [55] S. A. Bulgadaev, “Topological quantization of current in quantum tunnel contacts,” *JETP letters*, vol. 83, no. 12, pp. 563–567, 2006.
- [56] M. Choi, “Bloch oscillation and topological quantization,” *Physical Review B*, vol. 50, no. 18, p. 13875, 1994.
- [57] R. Leone and L. Lévy, “Topological quantization by controlled paths: Application to cooper pairs pumps,” *Physical Review B*, vol. 77, no. 6, p. 064524, 2008.
- [58] F. Nettel and H. Quevedo, “Topological spectrum of classical configurations,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 956, pp. 9–14, American Institute of Physics, 2007.
- [59] L. De la Peña, *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica, 2014.
- [60] M. Bucher, “Rise and fall of the old quantum theory,” *arXiv preprint arXiv:0802.1366*, 2008.
- [61] M. Szydłowski, “The generalized maupertuis principle,” *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 3, no. 2, pp. 10–19, 1998.
- [62] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [63] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [64] I. Lakatos, *The methodology of scientific research programmes: Volume 1: Philosophical papers*, vol. 1. Cambridge university press, 1980.
- [65] P. Feyerabend, *Against method: Outline of an anarchistic theory of knowledge*. Verso Books, 2010.
- [66] G. Arciniega, F. Nettel, L. Patino, and H. Quevedo, “Topological quantization of free massive bosonic fields,” *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, vol. 26, pp. 1–12, 2012.
- [67] F. Nettel, “Topological quantization of gravitational fields as generalized harmonic maps,” *arXiv preprint arXiv:1502.01012*, 2015.