



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA
CIENCIAS ESPACIALES Y PLANETARIAS

LA RELACIÓN TITIUS-BODE Y SU IMPLICACIÓN EN LA ESTABILIDAD ORBITAL PLANETARIA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA
M. en C. PATRICIA LARA CRUZ

TUTORA PRINCIPAL
DRA. MARÍA GUADALUPE CORDERO TERCERO
INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
M. en C. CHRISTINE PATRICIA ALLEN ARMIÑO
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA, UNAM
DR. HECTOR JAVIER DURAND MANTEROLA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Comprender las cosas que nos rodean
es la mejor preparación para comprender
las cosas que hay mas allá.*

Hipatia de Alejandría

Agradecimientos

Me dirijo a ustedes con el corazón lleno de gratitud y alegría al concluir esta etapa tan significativa en mi vida. A través de estas palabras, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a todos ustedes, quienes han sido fundamentales en el desarrollo y finalización de mi tesis.

Primero que nada, quisiera agradecer a mi esposo Vasilis Zoumpourlis por su amor, apoyo y comprensión incondicional durante todo este proceso. Tu paciencia y aliento constante han sido un faro de luz en los momentos más desafiantes. Tu presencia en mi vida es un regalo invaluable y estoy profundamente agradecida por tener a alguien tan especial a mi lado.

Quiero agradecer a mi amado hijo Constantino. Tu presencia en mi vida ha sido una fuente constante de inspiración y motivación durante este proceso. Eres mi mayor motivación y estoy infinitamente feliz por tenerte como hijo.

A mis queridos padres Victorina Silvia Cruz Bernal y Juan Refugio Lara García, aunque no están físicamente presentes, sé que su amor y guía siempre me han acompañado. Cada logro que alcanzo es un tributo a su amoroso legado y a los valores que me inculcaron. Los extraño profundamente y agradezco su amor incondicional y su influencia en mi vida.

Quiero agradecer a mi asesora, Dra. Guadalupe Cordero-Tercero, por su invaluable orientación y dedicación a lo largo de todo el proceso de investigación. Su experiencia y sabiduría han sido fundamentales para el éxito de mi tesis. Aprecio profundamente su paciencia, su disposición para escuchar y su compromiso inquebrantable con mi crecimiento académico.

También quiero expresar mi gratitud a la Mtra. Chris Allen, por su valiosa contribución y asesoramiento en mi proyecto. Su experiencia y conocimientos han sido una fuente de inspiración para mí. Agradezco su tiempo, su apoyo constante y su disposición para ayudarme en cada paso del camino que he tenido desde la licenciatura.

Me gustaría expresar mi más sincera gratitud al Dr. Héctor Durand por aceptar formar parte de mi comité tutor. Su inestimable guía a lo largo del trayecto de mi tesis ha sido invaluable para mí.

A mi comité sinodal, conformado por la Dra Antígona Segura, la Dra. Dolores Maravilla y el Dr. Laurent Loinard, les agradezco por su generosidad al compartir su experiencia y conocimientos durante el proceso de evaluación de mi tesis. Sus comentarios y sugerencias constructivas han sido fundamentales para enriquecer mi trabajo y llevarlo a un nivel superior. Aprecio enormemente su dedicación y compromiso con mi crecimiento académico.

Mi mentor, Dr. Arcadio Poveda, merece un agradecimiento especial. El quién inició esta odisea. Su guía experta y su apoyo incondicional han sido un pilar fundamental en mi desarrollo como investigadora. Aprecio sinceramente sus consejos, su paciencia y su inspiración constante. Sin su orientación, no habría llegado tan lejos.

A mi querido hermano Ricardo Lara, gracias por tu constante apoyo y aliento. Tu presencia en mi vida ha sido un pilar fundamental y me siento afortunada de tener un hermano como tú. A mi primo hermano Octavio Cruz, gracias por estar siempre ahí para mí, por estar conmigo en momentos significativos en este camino académico. Tu amistad y apoyo han sido invaluable y estoy agradecida por tener a alguien como tú.

A mis amigos cercanos Norma Figueroa, Erendira Lozano y Zeus Valtierra, quienes han estado a mi lado en las buenas y en las malas, quiero agradecerles por su aliento, por escucharme cuando necesitaba desahogarme y por celebrar mis logros. Su amistad sincera ha sido una fuente constante de fortaleza y felicidad en mi vida.

En resumen, a todos ustedes, mi familia y amigos, les agradezco desde lo más profundo de mi corazón por ser parte de mi viaje en la realización de esta tesis. Sus palabras de aliento, su amor incondicional y su constante apoyo han sido fundamentales para alcanzar este logro. No habría sido posible sin ustedes.

No puedo dejar de mencionar a las instituciones que me instruyeron y me brindaron la oportunidad de llevar a cabo esta investigación. Agradezco al programa de posgrado de Ciencias de la Tierra de la UNAM por aceptarme para desarrollar este proyecto de tesis doctoral; al Instituto de Geofísica de la UNAM y al CONAHCYT, por su generosidad al proporcionar los recursos necesarios y la beca que hizo posible llevar a cabo este proyecto. Su apoyo financiero y académico han sido esenciales para mi éxito.

Finalmente, quiero expresar mi amor y gratitud eternos. Espero poder retribuir todo lo que han hecho por mí a lo largo de los años. Cada uno de ustedes ha dejado una huella imborrable en mi vida y estoy verdaderamente agradecida por tenerlos a mi lado.

Con todo mi cariño y agradecimiento,
Patricia Lara Cruz

Índice general

	1
Agradecimientos	2
1. Introducción	6
2. Algunos trabajos previos sobre la Relación Titius-Bode	12
3. La confiabilidad de la relación Titius-Bode y sus implicaciones en la búsqueda de exoplanetas.	23
3.1. Método	24
3.1.1. Descripción de la muestra	24
3.1.2. Técnicas de detección de los sistemas planetarios usados en la muestra	25
3.1.3. Descripción del método	28
3.2. Resultados de la capacidad predictiva de la relación Titius-Bode	33
3.3. Predicciones de planetas según la relación de TB	40
3.4. Análisis estadístico.	43
3.5. Zona Habitable.	44
3.6. Discusión	45
4. Análisis dinámico de la relación TB.	49
4.1. Sistemas exoplanetarios observados	49
4.1.1. Metodología	50
4.1.2. Resultados	54
4.1.3. Discusión	57
4.2. Sistemas azarosos	63
4.2.1. Metodología	63
4.2.2. Resultados	63
4.2.3. Discusión	64
5. Conclusiones	73

Apéndices.	75
A.1. Propagación de errores en los ajustes	75
A.2. Tablas de los valores de resonancias y delta de Hill en los sistemas exoplanetarios	76
A.3. Implementación del integrador orbital Mercury a los sistemas exoplanetarios.	82
A.4. Cálculo criterio Delta de Hill	85
Referencias bibliográficas	88

Capítulo 1

Introducción

Antes del descubrimiento del primer planeta extrasolar 51 Pegaso b, en 1997, el Sistema Solar era el único sistema planetario que se podía observar y modelar teóricamente. Desde entonces, la tecnología ha avanzado de una forma muy rápida, de tal manera que ya se han descubierto más de 4,500 planetas extrasolares. Esto ha permitido un gran avance en el análisis y estudio de los sistemas planetarios.

Las distancias planetarias del Sistema Solar siguen una relación empírica conocida como la Ley Titius-Bode formulada por Johann Daniel Titius en 1766, y popularizada por Johann Bode. Esta “ley” no es una ley en el sentido físico sino una relación empírica numérica; debido a esto en este trabajo la señalaremos como la relación Titius-Bode o relación TB.

La relación Titius-Bode es una simple progresión geométrica que relaciona el semieje mayor de la órbita de un planeta con el número de orden ascendente de su órbita respecto al Sol. Titius resaltó que las distancias de los planetas conocidos del Sistema Solar, en ese entonces, se pueden obtener mediante la siguiente relación

$$a = \frac{n + 4}{10} \quad (1.1)$$

donde $n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, \dots$ (es decir, a partir de $n = 3$, el valor de cada número en la sucesión es del doble del valor del número anterior), para $n = 0$ la relación da como resultado el semieje mayor (en unidades astronómicas) de Mercurio, para $n = 3$ el semieje mayor de Venus, $n = 6$ para Tierra, y así sucesivamente. Con este arreglo, Titius se dio cuenta que no había un cuerpo a la distancia asociada a $n = 24$, y que correspondería a un espacio entre Marte y Júpiter. Incluso en el mismo texto, Titius se preguntó si faltaría algún cuerpo aún no conocido en esta posición. Esta respuesta sería respondida en años siguientes.

Desde su formulación inicial hecha por Titius, la relación Titius-Bode ha presentado diferentes ecuaciones matemáticas. La formulación moderna y más aceptada actualmente de la relación TB para el Sistema Solar es de la forma

$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n, \quad (1.2)$$

donde $n = -\infty$ para Mercurio, 0 para Venus, 1 para la Tierra, 2 para Marte, 4 para Júpiter y 5 para Saturno. A esta relación se le conoce como la relación Titius-Bode clásica para el Sistema Solar. En la Tabla 1.1 se muestran las distancias planetarias de acuerdo a las ecuaciones 1.1 y 1.2 (columna 4), así como sus distancias conocidas actualmente (columna 5) “reales”.

Tabla 1.1: Distancias conocidas de los planetas al Sol y las distancias predichas por la relación TB

Planeta	n (Titius)	n (clásica)	Distancia Titius-Bode (ua)	Distancia real (ua)
Mercurio	0	$-\infty$	0.4	0.38
Venus	3	0	0.7	0.72
Tierra	6	1	1.0	1.00
Marte	12	2	1.6	1.52
-	24	3	2.8	
Júpiter	48	4	5.2	5.20
Saturno	96	5	10.0	9.54
Urano	192	6	19.6	19.22
Neptuno	384	7	38.8	30.06

La relación TB no tuvo gran impacto sino hasta el descubrimiento de Urano en 1781 y el descubrimiento de Ceres en 1801, pues las distancias de cada uno de ellos al Sol se ajustó a lo que predecía la relación TB. Estos descubrimientos se consideraron como triunfos de esta relación. Incluso John Couch Adams y Urbain Leverrier tomaron como base el valor predicho por la relación para sus cálculos de la órbita del octavo planeta. La relación TB, para $n = 7$ en el Sistema Solar, predice un valor de 38.8 ua; el planeta descubierto fue Neptuno pero éste tiene un semieje de 30.06 ua. Hasta el momento en que se descubrió Neptuno, la relación TB representaba muy bien los valores de los semiejes de las órbitas de los cuerpos del Sistema Solar. Una recopilación muy completa sobre la historia y teorías que se ha propuesto para esta relación a lo largo de la historia se puede consultar en la obra de Michael Martin Nieto [32].

La relación TB clásica proporciona los semiejes mayores de los 7 planetas internos del Sistema Solar (y de Ceres), con una precisión de 5% o mayor. Para el planeta más exterior (Neptuno), sin embargo, la precisión es de sólo alrededor de los 30%. Curiosamente, los principales satélites de Júpiter, Saturno y Urano obedecen a una progresión similar (pero no idéntica), conocida en la literatura como la ley de Dermott. La ley de Dermott es una relación entre

los períodos orbitales de los satélites y toma la forma:

$$P_n = P_0 \times k^n, \quad (1.3)$$

donde n es 0 para el satélite más interior, 1 para el siguiente satélite, etc. y P_0 es la escala del sistema de los satélites. Para órbitas keplerianas, un sistema que obedece la ley de Dermott obedecerá una ley similar para los semiejes mayores:

$$a_n = a_0 \times C^n = a_0 e^{bn}, \quad (1.4)$$

donde $n = 1, 2, 3 \dots$ es el número de orden ascendente de la órbita del planeta con respecto a su estrella primaria. Esta formulación fue primeramente planteada para el sistema exoplanetario 55 Cancri y para el Sistema Solar por Arcadio Poveda y Patricia Lara [33].

En el artículo de Poveda y Lara [33], se muestra que las órbitas planetarias del Sistema Solar y de 55 Cancri pueden ser descritas por una ley de este tipo. Siguiendo con esta línea de investigación, en trabajos posteriores se ha observado que los semiejes o períodos de los planetas de sistemas exoplanetarios con 4 planetas o más obedecen una relación tipo Titius-Bode ([23]; [25]; [3] y [24]).

En el trabajo de Lara [24], se analizaron 18 sistemas exoplanetarios con 4 o más planetas girando alrededor de su estrella primaria. Se encontró que estos sistemas exoplanetarios se ajustan y siguen una relación tipo Titius-Bode en su forma exponencial. En el mismo trabajo, se analizaron los estudios de Raymond y Barnes sobre estabilidad planetaria ([34],[1]). Estos autores localizaron configuraciones orbitales estables que dan la posibilidad de que existan planetas aún no encontrados en algunos de los sistemas exoplanetarios estudiados. Las configuraciones estables que ellos encuentran cumplen muy bien con la relación Titius-Bode exponencial. Este resultado sugiere que la relación Titius-Bode es una consecuencia de la estabilidad de los sistemas planetarios.

En el mismo trabajo de Lara [24], se encontró que los sistemas exoplanetarios que se ajustan a la relación Titius-Bode están en configuraciones orbitales resonantes¹. Por ejemplo: Kepler-33b y Kepler-33c (7:3), Kepler-33c y Kepler-33d (5:3), v And e y v And d (3:1), μ Arae d y μ Arae b (2:1). Incluso hay resonancias tan peculiares como “la resonancia de Laplace” la cual ocurre en los sistemas exoplanetarios HR 8799 y Gliese 876. El sistema KOI-730 presenta una resonancia 3:4:6:8 entre los períodos de los cuatro planetas conocidos. Los sistemas exoplanetarios HR 8799, KOI-730 y Kepler-33 que presentan estas resonancias, se encuentran entre los sistemas cuyas órbitas mejor se ajustan a la relación Titius-Bode exponencial.

Esta situación, en la cual se encuentran resonancias en los sistemas exoplanetarios con me-

¹Se dice que un sistema tiene configuraciones orbitales resonantes cuando un par de sus planetas o más se encuentra en resonancia de movimiento medio. Una resonancia de movimiento medio se establece cuando el cociente entre los periodos de dos planetas adyacentes se puede expresar como el cociente de dos números enteros.

jores ajustes a la relación Titius-Bode, se repite con la aplicación de dicha relación a los satélites de Júpiter (Io, Europa, Ganímedes y Calisto). Estos satélites también muestran una resonancia de “Laplace” así como uno de los mejores ajustes a una relación Titius-Bode.

El trabajo de Poveda y Lara mostró que el que los planetas y satélites del Sistema Solar, 55 Cancri y los sistemas exoplanetarios con 4 o más planetas sigan una ley estructural similar sugiere que la relación TB es más que una mera coincidencia.

Han pasado más de 250 años desde la publicación de la relación Titius-Bode. Esta ha estado sujeta a controversia debida a la falta de explicación física y ha dividido la opinión de los científicos sobre su validez.

Acerca de esta relación sobresalen las siguientes preguntas: ¿Es la relación Titius-Bode consecuencia de las condiciones iniciales en el disco protoplanetario? ¿Es el reflejo de un proceso dinámico de relajación en un sistema de planetas sujeto a mutuas perturbaciones gravitacionales? ¿Es debida al azar? Estas preguntas aún no tienen una respuesta clara.

Como se había mencionado antes, durante mucho tiempo, el Sistema Solar era el único sistema planetario conocido. Ahora, gracias al gran avance en la detección de sistemas extrasolares, se tienen más herramientas para poder modelar la formación y evolución de los sistemas planetarios. Debido a esto se tienen más datos para analizar y tratar de encontrar los mecanismos gravitacionales que expliquen cómo evolucionan las órbitas planetarias. En esta tesis, abordamos algunos de estos estudios.

La hipótesis de los sistemas planetarios estrechamente compactos y la relación Titius-Bode no son conceptos ajenos. A medida que el espacio entre los planetas disminuye, es decir, conforme un sistema se vuelve más compacto, el ajuste a la relación Titius-Bode aumenta. La hipótesis de Raymond y Barnes sugiere que los planetas están espaciados lo más compactamente posible sin que el sistema se vuelva dinámicamente inestable. Entonces podemos esperar que los sistemas que cumplan esta hipótesis se van ajustar más probablemente a una relación Titius-Bode.

El grado en que los sistemas planetarios estrechamente compactos siguen la relación TB es poco conocido. Como Raymond y Barnes analizan sistemas con 2 o 3 planetas, no se sabe si los sistemas planetarios estrechamente compactos con más planetas siguen la relación Titius-Bode [1]. En la actualidad, el número de sistemas que contienen cuatro o más planetas está creciendo rápidamente gracias a la misión Kepler. En este trabajo de tesis doctoral analizaremos la posible conexión entre sistemas estrechamente compactos y la relación TB en sistemas con al menos 4 planetas.

Los resultados de los trabajos que involucran sistemas estrechamente compactos o resonancias indican que las configuraciones planetarias descritas por una relación TB pueden no estar relacionadas con los mecanismos de formación de los sistemas planetarios, sino con su

posterior evolución dinámica.

En este trabajo de tesis se propone analizar si la relación Titius-Bode es reflejo de algún mecanismo gravitacional relacionado con la estabilidad planetaria y/o las resonancias orbitales.

Para analizar la posibilidad de que la relación Titius-Bode esté vinculada a algún mecanismo dinámico de evolución y estabilidad planetaria, en este proyecto doctoral se realizaron simulaciones de n-cuerpos de sistemas exoplanetarios observados con 4 planetas o más, con y sin considerar posibles planetas aún no detectados. También se trabajó con 100 sistemas planetarios cuyas componentes se generaron al azar, para estudiar y analizar si sistemas ficticios tienden a una forma de Titius-Bode y qué parámetros se presentan en sistemas que se mantienen estables.

Los datos requeridos se obtuvieron de las bases de datos que se encuentran en internet, en especial de los catálogos de exoplanetas: exoplanet.eu y exoplanetarchive.ipac.caltech.edu. Las simulaciones se llevaron a cabo con el integrador orbital Mercury [4].

En este trabajo también se reporta un método con el que se evaluó la capacidad que tiene la relación TB para predecir la existencia de exoplanetas aún no observados. Por esta razón, este trabajo se divide en dos partes.

Las distancias de los planetas al Sol nos brindan información que nos sirve para analizar las fuentes de energía, en particular la radiación recibida de la estrella. Si bien la luminosidad solar se mantiene prácticamente constante a lo largo de millones de años, no ocurre lo mismo con las órbitas. Estas oscilan periódicamente haciendo que la cantidad media de radiación que recibe cada hemisferio fluctúe a lo largo del tiempo. Cabe resaltar que es de vital importancia conocer cómo es la evolución orbital de los planetas, ya que la posición del planeta con respecto a su estrella primaria está directamente vinculado con la evolución geológica del mismo y tiene consecuencias astrobiológicas importantes. En particular, existe un “disco” alrededor de las estrellas dentro del cual puede existir agua líquida en un planeta con atmósfera. A este disco se conoce como zona habitable estelar. La posición de un planeta con respecto a su estrella indica si ese planeta podría ser habitable o no. Como se mencionó en el párrafo anterior, en este trabajo llevamos a cabo una evaluación de la capacidad predictiva de la relación TB. Encontramos que es posible conocer con cierto grado de certeza la existencia de exoplanetas aún no observados, algunos de los cuales se encuentran en las zonas habitables de sus estrellas.

Debido a los diferentes análisis que se realizaron, el escrito de la tesis se dividirá de la siguiente manera:

- **Capítulo 2. Algunos trabajos previos sobre la relación Titius-Bode.**

En este se resumirán los diferentes trabajos previos sobre la relación TB que nos dan pauta a plantearnos la hipótesis que se plantea en este proyecto doctoral.

- **Capítulo 3. La confiabilidad de la relación TB y sus implicaciones en la búsqueda de exoplanetas.**

Aquí se mostrará un método propuesto para cuantificar la capacidad de predecir exoplanetas aún no observados. Los resultados, discusión y conclusiones de este análisis están contenidos en este capítulo.

- **Capítulo 4. Análisis dinámico de la relación TB.**

En este capítulo se presentará la metodología de las simulaciones orbitales de los sistemas ficticios y de los sistemas exoplanetarios observados más las vacantes que la relación TB predice. De igual manera se presentaran los resultados y las conclusiones.

- **Capítulo 5. Conclusiones**

Por último, en este capítulo se recapitula las conclusiones de los diferentes análisis realizados en este proyecto doctoral.

Capítulo 2

Algunos trabajos previos sobre la Relación Titius-Bode

No existe una explicación clara sobre la relación Titius-Bode. Existen algunos trabajos que mencionan que la relación TB es consecuencia de mecanismos físicos que dependen de las condiciones iniciales del disco protoplanetario [20] [27]. Como se mencionó en la introducción, en este trabajo se pretende estudiar la posibilidad que la relación Titius-Bode es el resultado de interacciones entre planetas una vez que ya formados.

En este capítulo se describen los principales trabajos previos en los cuales se ha estudiado y aplicado la relación TB a sistemas exoplanetarios, y en los que incluso han analizado el posible origen de esta progresión geométrica. Estos trabajos son la base de la hipótesis de este trabajo doctoral.

Hills analizó los cocientes en los períodos entre planetas adyacentes en 11 sistemas simulados. Cada sistema se generó con una estrella primaria de $1 M_{\odot}$ pero con diferentes distribuciones en la masa de los planetas. Hills sugiere que los sistemas que tienen resonancias 5:2 y 3:2 son más estables que otros y estos se ajustan a la relación Titius-Bode. La inestabilidad tiende a excluir a ciertos cocientes de períodos entre planetas interactuantes. Cuanto más fuerte es la interacción el sistema tiende a ser más compacto y sus distancias se ajustan mejor a una relación Titius-Bode [17].

Isaacman y Sagan crearon un modelo de sistemas planetarios inyectando núcleos de acreción en un disco de gas y polvo hasta que el polvo se agotara. Ellos encontraron que los sistemas simulados cumplen la relación Titius-Bode de la misma forma que en el Sistema Solar [20]. Otro enfoque numérico fue tomado por Hayes y Tremaine , quienes generaron sistemas planetarios con periodos aleatorios que seguían una relación logarítmica y que las distancias entre ellos fueran mayores a 8 veces su radio de Hill. Bajo estas condiciones encontraron que los periodos de estos sistemas tienden una relación geométrica tipo Titius-Bode [16].

Laskar realiza simulaciones numéricas simplificadas que involucran 10^5 planetesimales distri-

buidos en sistemas con diferentes densidades superficiales, las cuales están definidas por la función $\Sigma(a)$, donde a es el semieje mayor. La fusión se produjo cuando dos planetésimos fueron sometidos a un encuentro cercano y las simulaciones siguieron hasta que no hubiera más encuentros cercanos posibles. La ubicación final de los planetas se ajusta muy bien a una relación Titius-Bode cuando la densidad superficial de planetésimos es tal que $\Sigma(a) \propto a^{-3/2}$ [27].

Poveda y Lara muestran que las órbitas planetarias del Sistema Solar y de 55 Cancri pueden ser descritas por la relación Titius-Bode en su forma exponencial ($a_n = a_0 \times e^{bn}$) [33]. También presentan la posibilidad de un planeta adicional en el sistema planetario 55 Cancri. La calidad del ajuste proporcionado por la relación TB exponencial es un poco más pobre que la proporcionada por la relación Titius-Bode clásica para los siete planetas interiores del Sistema Solar, pero es mejor para Neptuno. Esta es la primera aplicación de la relación Titius-Bode a los sistemas exoplanetarios. Línea de investigación que se siguió en mi trabajo de licenciatura de Lara [23]; Lara, Poveda y Allen [25] y mi tesis de maestría [24].

Chang, en su artículo de 2008, analiza las distribuciones provenientes de los cocientes de períodos de pares de planetas en sistemas exoplanetarios múltiples, calculando la χ^2 para las distribuciones de planetas observados con la distribución de diferentes relaciones tipo Titius-Bode, para con del Sistema Solar y 55 Cancri proponen una relación Titius-Bode generalizada $a_n = aC^m$ [6]. En el 2012, Chang repite el análisis para 31 sistemas extrasolares múltiples. Incluso sin tener en cuenta ninguna corrección para la incompletitud esperada en la detección de planetas, Chang concluyó provisionalmente que el acoplamiento de los planetas de nuestro Sistema Solar a una relación Titius-Bode no es “por casualidad” y que no se puede descartar la posibilidad de que la relación Titius-Bode se pueda aplicar a sistemas exoplanetarios [7].

Lovis y colaboradores [30] aplicaron una relación tipo Titius-Bode generalizada a los sistemas múltiples de exoplanetas observados con HARPS y encontraron ajustes razonables, aunque no hicieron predicciones de algún planeta. Cuntz [8] presenta una relación matemática con tres constantes a determinar (A, B, Z). Usando su versión de la relación Titius-Bode, encuentra 4 posiciones disponibles en las cuales podría existir un planeta aún no descubierto ($a \approx 0.081, 0.410, 1.51, 2.95$ ua) en el sistema planetario 55 Cancri. Cuntz estima el significado estadístico de la relación TB para la distribución de las órbitas de este sistema exoplanetario, como lo hizo Lynch en su trabajo del 2003 [31], para el Sistema Solar y los satélites de Urano. Cuntz encuentra que su relación y la de Poveda-Lara son altamente significativas.

Artículo sobre predicciones de planetas con base en la relación generalizada Titius-Bode

Bovaird y Lineweaver realizaron en 2013 un trabajo empezando un recuento histórico sobre cómo se fue desarrollando la relación Titius-Bode. Mencionan cómo la relación Titius-Bode produjo éxitos que ayudaron a descubrir planetas en el Sistema Solar, pero también fracasos en donde algunos planetas no se ajustaban a la relación [3].

En la segunda sección analizan los trabajos teóricos relacionados con la relación Titius-Bode. Se concentran en trabajos que tratan de explicar los mecanismos que pueden dar origen a la relación TB. Citan los trabajos de Weidenschilling [37] y Hayashi [15], donde los autores estudian la interacción entre el disco protoplanetario y los planetésimos, considerando el perfil de densidad del disco protoplanetario derivado de la masa mínima del sistema solar ($\sum(a) \propto a^{-3/2}$).

Los autores también mencionan los artículos de Hills [17] y Hayes y Tremaine [16], los cuales muestran que los sistemas exoplanetarios, así como el Sistema Solar, tienden a una configuración con órbitas conmensurables. Es decir, que los sistemas planetarios tienden a una configuración donde el numerador y el denominador de los cocientes de los períodos orbitales de planetas adyacentes son números enteros pequeños. También mencionan los trabajos donde se muestran los diferentes ajustes a diversos sistemas exoplanetarios, en particular citan el trabajo de Poveda y Lara [33].

El objetivo principal del trabajo de Bovaird y Lineweaver es hacer una nueva evaluación y aplicación de la relación Titius-Bode a los sistemas exoplanetarios con 4 o más planetas (confirmados y candidatos). Su muestra de sistemas contiene un total de 68 sistemas exoplanetarios, de esta muestra 7 sistemas planetarios fueron descubiertos por la técnica de velocidad radial. HR 8799 es uno de los sistemas planetarios detectados por imagen directa. Los restantes 60 planetas son candidatos detectados por la técnica de tránsito obtenidos por el telescopio espacial Kepler, de los cuales sólo 4 se han confirmado por el método de velocidad radial, dando un total de 56 candidatos a sistemas planetarios.

Los autores primero realizan ajustes a la relación TB tomando en cuenta su forma generalizada. Hacen el ajuste en el espacio logarítmico.

$$\log(P_n) = A + B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.1)$$

donde A y B son ajustados para cada sistema y N es el número de planetas.

Después calculan $\chi^2/\text{grados de libertad (gdl)}$ para cada ajuste para un sistema de N -planetas

$$\frac{\chi^2(A, B)}{N - 2} = \frac{1}{N - 2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{(A + B_n) - \log(P_n)}{\sigma_n} \right)^2 \quad (2.2)$$

donde σ_n es una incertidumbre desconocida que se puede asociar a varias razones por las cuales los periodos orbitales no se ajustan a la relación TB. En su análisis, eligen incertidumbres uniformes ($\sigma_n = \sigma$) y σ se calcula para cada sistema, este parámetro se obtiene calculando la diferencia media entre el logaritmo de los periodos observados con los predichos. $N - 2$ es el número de grados de libertad [N planetas - 2 parámetros a determinar (A y B)].

Teniendo en cuenta los períodos de los planetas en un sistema de exoplanetas que contiene cuatro miembros (por ejemplo, P_0, P_1, P_2, P_3), su estrategia consiste en insertar un nuevo quinto planeta (o más) entre dos planetas adyacentes y luego se hacen ajustes tipo TB al nuevo sistema (por ejemplo, $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\dots$) para ver si el nuevo $\chi^2(A, B)/\text{gdl}$ de la ecuación (2.2) es menor. La masa máxima o radio del planeta insertado se determina por el mínimo la relación señal a ruido (SNR) de los planetas detectados en el mismo sistema.

De las muchas maneras posibles para insertar planetas, quieren identificar la forma en la cual mejoran los ajustes a una relación TB. Al mismo tiempo, tratan de evitar la inserción de demasiados planetas. Para evaluar esto, se define una variable γ , que es una medida de la cantidad por la cual $\chi^2(A, B)/\text{gdl}$ mejora, de acuerdo con el número de planetas insertados:

$$\gamma = \frac{\frac{\chi_i^2 - \chi_f^2}{\chi_f^2}}{n_{ins}} \quad (2.3)$$

donde χ_i^2 y χ_f^2 son los valores de χ^2 de la ecuación (2.2) evaluados, respectivamente, antes y después de la inserción de n_{ins} planetas. γ se calcula para cada solución de inserción y se elige la solución con el γ más alto.

Para minimizar los efectos de incompletez en los ajustes a la relación TB, utilizan el criterio de separación dinámica Δ usando el radio de Hill. Esta es una aproximación a la estabilidad de un par de planetas adyacentes [5]. La separación dinámica Δ normalizada respecto a su radio de Hill mutuo está dada por

$$\Delta = \frac{a_2 - a_1}{R_H} \quad (2.4)$$

donde $R_H = \frac{a_1 + a_2}{2} \left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right)^{1/3}$.

El criterio para la separación dinámica que ellos toman es el de que planetas adyacentes serán inestables si $\Delta \lesssim 10$ y en estos casos no se insertan más planetas. Toman como referencia el trabajo de Chambers y colaboradores [5], en donde dice que para planetas simulados con excentricidades pequeñas y con poca inclinación, la estabilidad aumenta exponencialmente con Δ . En este esquema, un encuentro cercano perturbador entre dos planetas ocurre cuanto $\Delta \approx 10$.

Con este criterio, Bovaird y Lineweaver encuentran que 9 sistemas exoplanetarios son completos, es decir, no necesitan más planetas insertados. Por otro lado, 22 sistemas muestran

que 3 o más pares de planetas tienen $\Delta \lesssim 10$, por lo tanto ya no se toman en cuenta.

De los 31 sistemas restantes, 26 se ajustan mucho mejor a la relación TB que el Sistema Solar ($\chi^2/\text{gdl} < 1$), tres sistemas tienen ajuste muy similar al Sistema Solar, 2 tienen un ajuste peor a nuestro sistema estelar ($\chi^2/\text{gdl} \approx 1.4$). Si existen más planetas estos deben de estar en resonancia con dos o más planetas detectados.

Otro factor que analizan es la compactación o la dispersión del sistema planetario y su vínculo con la relación TB. En su análisis principal asignan un valor de σ tal que el valor χ^2/gdl sea igual a 1 para el Sistema Solar. También estudian los casos donde $\chi^2/\text{gdl} = 1$, casos que corresponden a los sistemas exoplanetarios más completos (y más compactos). El Sistema Solar es mucho más disperso que estos sistemas. Entonces para evaluar qué tan dispersos y compactos son los sistemas planetarios, primero calculan la dispersión dada por:

$$S_p = \frac{\log P_{N-1} - \log P_0}{N} \quad (2.5)$$

donde P_{N-1} y P_0 es son el período más largo y el más corto en el sistema, respectivamente. N es el número de planetas en el sistema.

Los autores plantean la hipótesis de que existen más planetas no detectados, por encontrarse por debajo del umbral de detección. Si los sistemas exoplanetarios cumplen con todos los criterios que se explicaron antes, los autores predicen la existencia de planetas y proporcionan cotas sobre sus radios y masas máximas. Para la restricción de masas (M_{max}) y radios (R_{max}), usan la relación señal-ruido (SNR, por sus siglas en inglés) ya sea de la técnica de detección de velocidad radial ó de tránsito, según corresponda el caso. Para planetas en tránsito en el mismo sistema la $\text{SNR} \propto r^2 P^{-1/2}$, donde r es el radio del planeta y P es su periodo orbital. Para planetas detectados por velocidad radial el $\text{SNR} \propto K P^{-5/6} \propto m P^{-7/6}$, donde K es la semiamplitud de la curva de velocidad radial y m es la masa del planeta [3].

Usando el método anterior, predicen planetas que están por debajo del umbral de detección. En la Tabla 2.1 se muestran los valores de χ^2/gdl , γ , no. de planetas insertados, el periodo de los planetas predichos [días], a semieje mayor [ua], $R_{max}[R_{\oplus}]$, $M_{max} [M_{\oplus}]$ y T_{eff} .

En la Tabla 2.1 se hacen predicciones (interpolaciones) insertando un total de 73 planetas en 29 de los 68 sistemas exoplanetarios que ellos analizan. En todos los 68 sistemas, hacen una extrapolación para predecir el siguiente planeta externo. La masa y radio máximos para cada planeta predicho son calculados usando el límite de detección para el sistema en cuestión. Este trabajo es importante mencionarlo pues se adhiere a la idea de que los sistemas exoplanetarios siguen una relación Titius-Bode.

Tabla 2.1

System	Number inserted	γ (equation 5)	$\Delta\gamma^a$	$\left(\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}}\right)_i$	$\left(\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}}\right)_f$	Inserted planet number	Period (d)	A (au)	R_{\max}^b (R_{\oplus})	M_{\max}^b (M_{\oplus})	T_{eff} (K)
KOI-1052	2	234.0	1528.2	1.36	0.01	1	11 ± 2	0.10	1.6	–	909
						2	28 ± 3	0.18	2.0	–	669
						3 E ^c	108 ± 12	0.46	2.8	–	423
Gliese 876	3	210.7	32.5	7.88	0.02	1	3.9 ± 0.7	0.03	–	0.7	489
						2	8 ± 2	0.05	–	1.2	388
						3	16 ± 3	0.08	–	2.2	308
KOI-701	5	209.2	58.2	5.92	0.01	4 E	245 ± 40	0.52	–	21.9	122
						1	8.5 ± 0.8	0.07	0.5	–	621
						2	27 ± 3	0.15	0.7	–	423
KOI-1952	2	171.1	10.9	3.26	0.01	3	39 ± 4	0.19	0.8	–	372
						4	58 ± 6	0.25	0.9	–	328
						5	84 ± 8	0.32	1.0	–	288^d
KOI-1952	2	171.1	10.9	3.26	0.01	6 E	180 ± 17	0.54	1.2	–	223
						1	13 ± 2	0.10	1.5	–	828
						2	19 ± 2	0.14	1.6	–	720
Kepler-62	6	107.3	40.6	4.04	0.01	3 E	65 ± 7	0.31	2.2	–	474
						1	8.5 ± 0.8	0.07	0.5	–	649
						2	27 ± 3	0.15	0.6	–	442
Kepler-62	6	107.3	40.6	4.04	0.01	3	40 ± 4	0.20	0.7	–	389
						4	58 ± 6	0.26	0.8	–	342
						5	85 ± 8	0.33	0.9	–	301
Kepler-62	6	107.3	40.6	4.04	0.01	6	182 ± 18	0.55	1.0	–	233
						7 E	391 ± 37	0.92	1.2	–	180
						1	41 ± 6	0.19	0.8	–	294
KOI-571	2	39.8	11.4	4.87	0.07	2	74 ± 10	0.28	1.0	–	242
						3 E	234 ± 32	0.61	1.3	–	164
						1	4.3 ± 0.5	0.04	1.4	–	633
KOI-248	1	18.3	17.5	2.48	0.13	2 E	31 ± 4	0.16	2.2	–	329
						1	1.5 ± 0.2	0.02	1.1	–	1055
						2	2.2 ± 0.2	0.03	1.2	–	929
KOI-500	2	15.2	4.6	5.42	0.18	3 E	15 ± 2	0.11	2.0	–	490
						1	12 ± 2	0.10	2.0	–	668
						2	29 ± 3	0.18	2.5	–	494
KOI-1567	2	11.8	12.1	1.51	0.07	3 E	70 ± 8	0.32	3.1	–	366
						1	1.5 ± 0.2	0.03	1.2	–	1855
						2	2.3 ± 0.3	0.04	1.3	–	1626
KOI-1198	6	10.8	1.5	7.19	0.11	3	3.3 ± 0.4	0.05	1.4	–	1425
						4	4.9 ± 0.5	0.06	1.6	–	1249
						5	7.3 ± 0.7	0.08	1.7	–	1095
KOI-1198	6	10.8	1.5	7.19	0.11	6	24 ± 3	0.17	2.3	–	737
						7 E	53 ± 6	0.29	2.8	–	566
						1	2.41 ± 0.10	0.03	0.6	–	1242
KOI-2859	1	10.2	–1.0	1.69	0.16	2 E	5.2 ± 0.3	0.05	0.8	–	967
						1	10 ± 2	0.09	1.4	–	841
						2	18 ± 3	0.13	1.6	–	700
KOI-1306	2	8.8	0.6	4.14	0.23	3 E	52 ± 7	0.27	2.1	–	485
						1	18 ± 6	0.14	–	3.8	847
						2	70 ± 22	0.36	–	11.9	537
ups And	2	8.5	1.0	5.31	0.30	3 E	16300 ± 5000	13.57	–	1116.0	87
						1	40 ± 6	0.22	1.2	–	500
						2 E	133 ± 19	0.49	1.6	–	332
Kepler-20	1	7.4	1.0	3.51	0.42	1	23 ± 5	0.16	–	7.7	705
						2	54 ± 11	0.29	–	15.8	529
						3	127 ± 26	0.52	–	32.4	396
mu Ara	4	6.0	1.8	4.15	0.17	4	1690 ± 350	2.90	–	280.2	167
						5 E	9500 ± 2000	9.17	–	1180.7	94
						1	30 ± 5	0.13	–	3.0	238
Gl 581	1	5.0	0.9	3.72	0.63	2 E	139 ± 23	0.35	–	11.2	141
						1	22 ± 3	0.15	4.6	–	788
						2	35 ± 4	0.20	5.1	–	676
KOI-505	3	4.7	0.6	8.20	0.56	3	56 ± 7	0.27	5.8	–	580
						4 E	139 ± 16	0.51	7.3	–	426

Tabla 2.1 – Continuación de la página previa

System	Number inserted	γ (equation 5)	$\Delta\gamma^a$	$\left(\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}}\right)_i$	$\left(\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}}\right)_f$	Inserted planet number	Period (d)	A (au)	R_{\max}^b (R_{\oplus})	M_{\max}^b (M_{\oplus})	T_{eff} (K)
KOI-880	1	4.0	2.4	1.35	0.28	1	12 ± 2	0.10	2.1	–	761
Kepler-11	1	3.7	1.7	3.15	0.69	2 E	117 ± 20	0.45	3.7	–	354
						1	75 ± 8	0.34	2.9	–	449
KOI-1831	3	3.5	1.7	2.54	0.23	2 E	171 ± 17	0.59	3.5	–	341
						1	6.5 ± 0.7	0.06	0.9	–	800
Kepler-33	1	3.2	0.1	3.69	0.90	2	9.8 ± 1.0	0.08	1.0	–	697
						3	23 ± 3	0.15	1.2	–	529
						4 E	78 ± 8	0.34	1.6	–	350
						1	8.9 ± 0.8	0.09	1.9	–	1162
KOI-1151	2	3.1	0.2	3.77	0.54	2 E	68 ± 7	0.35	3.2	–	590
						1	9.6 ± 0.7	0.09	0.8	–	854
KOI-250	5	3.1	2.5	2.26	0.14	2	12.7 ± 0.9	0.10	0.9	–	776
						3 E	30 ± 2	0.18	1.1	–	584
						1	4.9 ± 0.4	0.05	1.2	–	686
						2	6.7 ± 0.6	0.06	1.3	–	616
KOI-245	3	2.9	2.4	1.56	0.17	3	9.2 ± 0.8	0.07	1.4	–	553
						4	25 ± 2	0.14	1.8	–	401
						5	34 ± 3	0.17	2.0	–	360
						6 E	64 ± 5	0.27	2.3	–	290
						1	16.8 ± 0.9	0.12	0.3	–	582
55 Cnc	2	2.6	0.5	1.49	0.25	2	27 ± 2	0.16	0.4	–	502
						3	33 ± 2	0.18	0.4	–	467
						4 E	64 ± 4	0.28	0.5	–	374
						1	4 ± 2	0.04	–	1.4	1117
KOI-1336	2	2.5	11.0	1.07	0.19	2	1080 ± 370	1.98	–	178.2	158
						3 E	$20\,100 \pm 6900$	13.97	–	2046.5	59
						1	6.8 ± 0.7	0.07	1.7	–	1053
KOI-952	1	2.2	0.1	2.36	0.76	2	26 ± 3	0.17	2.4	–	679
						3 E	61 ± 6	0.31	3.0	–	507
						1	1.5 ± 0.3	0.02	0.9	–	904
HD 40307	4	1.3	0.2	1.91	0.32	2 E	41 ± 7	0.19	2.1	–	299
						1	6.3 ± 0.7	0.06	–	0.4	814
						2	15 ± 2	0.11	–	0.8	613
						3	81 ± 9	0.33	–	3.4	348
KOI-719	3	1.2	0.1	1.32	0.31	4	123 ± 13	0.44	–	4.8	302
						5 E	287 ± 30	0.78	–	9.7	227
						1	6.2 ± 0.6	0.06	0.6	–	692
						2	14 ± 2	0.10	0.7	–	532
						3	20 ± 2	0.13	0.8	–	466
						4 E	66 ± 7	0.28	1.1	–	314

Artículo sobre la validez de las predicciones de la relación Titius-Bode usando las curvas de luz obtenidas por la misión Kepler.

Huang y Bakos [18] se concentraron en revisar y analizar las señales de los sistemas exoplanetarios obtenidos por el telescopio espacial Kepler. La muestra que analizan son los 56 sistemas estudiados por Bovaird y Lineweaver. El propósito del artículo es examinar si los planetas predichos por Bovaird y Lineweaver se podían encontrar en las señales obtenidas por el método de tránsito.

Según el trabajo de Bovaird y Lineweaver se predice 141 planetas en los 68 sistemas exoplanetarios con 4 o más planetas. 60 sistemas planetarios fueron descubiertos por la misión Kepler (confirmados y candidatos). Los 8 sistemas restantes se descubrieron por el método de velocidad radial, no se tienen datos proporcionados por Kepler, por eso son excluidos en este análisis. También se excluyen a 4 sistemas detectados por Kepler debido a que no pueden comprobar la detección del 4to planeta en dichos sistemas. Una vez excluidos los planetas anteriores, Huang y Bakos [18] intentan encontrar los 117 planetas predichos por Bovaird y Lineweaver a partir de los datos de Kepler.

Los planetas predichos pueden agruparse en dos categorías: planetas “insertados” y planetas “extrapolados”. En 38 sistemas sólo se hace la predicción de un planeta extrapolado ya que no requieren de planetas insertados. Bovaird y Lineweaver predicen 41 planetas, 23 insertados y 18 extrapolados, en los 18 sistemas restantes. Son un total de 56 planetas extrapolados, uno por sistema, todos estos predichos por la relación Titius-Bode.

Huang y Bakos examinaron los 56 sistemas en los datos públicos de Kepler Q1-Q15 (con más de 1000 días de tiempo total de observación), en busca de señales periódicas adicionales. Primero validaron la detectabilidad de todos los candidatos planetarios de Kepler conocidos en estos sistemas. Ellos aplicaron el algoritmo Box Least Square Fitting (BLS) para filtrar las curvas de luz. Los procesos de pre-filtración incluyen la eliminación de los puntos de datos malos de los datos crudos de Kepler y una serie de ajustes. En el artículo de Huang, Bakos y Hartman [19] muestran detalles sobre la técnica de pre-filtración.

Los tránsitos conocidos fueron extraídos de las señales directas del flujo de las curvas de luz con una función ventana 1.1 veces más amplia que la duración del tránsito reportado por el catálogo Kepler. Después de quitar todas las señales conocidas, las curvas de luz fueron limpiadas por el mismo pre-filtrado. Se aplica nuevamente el algoritmo BLS para asegurarse que las curvas de luz conocidas sean eliminadas. Una vez hecho eso, seleccionan los picos que estén por arriba de un umbral y hacen un ajuste de caja BLS. También se examinaron visualmente máximos locales en el espectro BLS dentro del intervalo previsto por Bovaird y Lineweaver (independientemente de su SNR). Los picos seleccionados fueron revisados. Cinco nuevos candidatos planetarios fueron detectados una vez terminado el procedimiento. Después dedujeron el mejor ajuste a los elementos orbitales y las barras de error de los cinco candidatos aprobados usando un algoritmo Monte Carlo Markov.

Se muestran resultados nulos en la mayoría de los sistemas. Solo detectaron cinco candidatos planetarios alrededor de sus períodos previstos y un tránsito periódico que no había sido predicho. Los sistemas candidatos planetarios que se detectaron fueron: KOI-719, KOI-1336, KOI-1952, KOI-2722 y KOI-2859. En KOI-719 se habían predicho 3 planetas insertados [3], pero sólo se encontró un candidato con un período de 15.77 días, valor cercano a uno predicho de 14 días. En el sistema KOI-1336 se predijeron 2 planetas con períodos de 6.8 y 26 días y uno extrapolado. Huang y Bakos encontraron sólo una señal que concuerda con uno de los planetas predichos. La señal detectada tiene un período de 27.5 días. En el sistema KOI-1952 se predicen dos planetas insertados con 13 y 19 días, respectivamente. En este caso, los autores detectan una señal con un período de 13.3 días, coincidiendo con la predicción de uno de los planetas. En KOI-2722 se predijo un planeta extrapolado con un período de 16.8 días y se encontró una señal que muestra un período de 16.5 días. En el sistema planetario KOI-2859 se predijo un planeta insertado con un período orbital de 2.41 días y un extrapolado con 5.2 días. Sólo se localizó una señal, con un período de 5.43 días, que coincide aproximadamente con el período del planeta extrapolado.

También los autores encontraron un planeta que no estaban dentro de las predicciones, la señal que encontraron fue de un planeta extrapolado que pertenece al sistema KOI-733. El período del planeta fue 15 días. En este sistema Bovaird y Lineweaver habían predicho un planeta extrapolado con un período de 36 días.

Su análisis de la distribución de los períodos de planetas adyacentes sugiere que la relación general TB puede sobreestimar la presencia de pares de planetas cerca de la resonancia 3:2.

Resumen de los trabajos de Barnes, Raymond y Greenberg sobre la estabilidad en los sistemas exoplanetarios

Mediante la utilización de simulaciones numéricas de n-cuerpos se pueden estimar los intervalos (regiones) en el semieje mayor y en la excentricidad que podría tener un planeta adicional sin que el sistema se vuelva dinámicamente inestable.

En los trabajos que realizaron Barnes y Raymond en el 2004 y 2005 [1] [34], y Barnes y Greenberg en el 2006 [2] se enfocaron en el análisis dinámico de ciertos sistemas exoplanetarios. Barnes y Raymond [1] estudiaron los sistemas exoplanetarios HD 168443, HD 74156, HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri, con el propósito de encontrar regiones de estabilidad. Para ello, se colocan partículas sin masa entre los planetas conocidos de estos sistemas. Solamente encontraron regiones estables en los sistemas HD 74156, HD 37124, HD 38529 y 55 Cancri. Estos sistemas posteriormente fueron analizados por Raymond y Barnes en su trabajo del 2005 [34] para encontrar regiones de estabilidad, pero ahora con partículas con masa similar a la de Neptuno.

El propósito de los trabajos de Raymond y Barnes es el de encontrar regiones estables con la finalidad de comprobar la hipótesis de que los sistemas planetarios son estrechamente compactos. Este modelo asume que el proceso de formación planetaria es eficiente, en el sentido de que se forman todos los planetas posibles en los discos circunestelares. En este escenario el polvo se condensa en cuerpos cada vez más grandes, y los protoplanetas se perturban entre ellos, conforme se incrementa su masa. A medida que los protoplanetas se vuelven más masivos adquieren la posibilidad de empujar a otros planetas hacia posiciones favorables (dinámicamente estables) o, si las perturbaciones se vuelven muy grandes, de expulsarlos por completo del sistema.

Raymond y Barnes encuentran regiones de estabilidad en donde pueden existir planetas, los cuales por estar debajo del límite observacional no se han podido detectar. Encontraron regiones de estabilidad en los cuatro sistemas analizados. En HD 38529, la región estable se encuentra en $a = 0.7$ ua y $e = 0.07$. En HD 741256 las regiones estables que se encontraron fueron: (1.0 ua, $e = 0.1$) y (1.45 ua, $e = 0.12$); para HD 37124 fueron: (0.91 ua, $e = 0.11$) y (0.95 ua, $e = 0.09$). En 55 Cancri, Barnes y Raymond encontraron 3 regiones de estabilidad: (1.0 ua, $e = 0.07$), (2.0 ua, $e = 0.07$) y (3.1 ua, $e = 0.12$).

Como se vió en el trabajo de Bovaird y Lineweaver [3], formularon la hipótesis de que los sistemas planetarios compactos y que la ley de Titius-Bode están estrechamente relacionadas, que a medida que el sistema se vuelve más compacto, la correspondencia con la ley de Titius-Bode aumenta. La hipótesis de Raymond y Barnes sugiere que los planetas están espaciados lo más compactamente posible sin que el sistema se vuelva dinámicamente inestable. Entonces podemos esperar que sistemas compactos y dinámicamente estables se van a ajustar más probablemente a una relación Titius-Bode.

El grado en que los sistemas planetarios estrechamente compactos siguen la relación es poco conocida. Como Raymond y Barnes analizan sistemas con 2 o 3 planetas, no se sabe si los sistemas planetarios estrechamente compactos con más planetas siguen la relación Titius-Bode [1] [12]. En la actualidad hay muchos sistemas que contienen cuatro o más planetas, y este número está creciendo rápidamente debido a la misión Kepler. En este proyecto de tesis doctoral analizaremos esta posible conexión entre la relación TB y los sistemas compactos. De igual forma se analizará el posible vínculo de las resonancias de movimiento medio y la relación Titius-Bode.

Capítulo 3

La confiabilidad de la relación Titius-Bode y sus implicaciones en la búsqueda de exoplanetas.

En 2008, Poveda y Lara aplicaron un ajuste a los semiejes de los planetas del sistema exoplanetario 55 Cancri y se dieron cuenta de que, si bien el ajuste era bueno sobre todo si sólo se consideraban los primeros cuatro planetas, éste mejoraba considerablemente si se incluía una vacante entre el cuarto y el quinto planeta [33]. Esta vacante podría representar la posición de un planeta aún no descubierto de la misma forma que la relación TB indicó un cuerpo planetario aún descubierto entre las órbitas de Marte y Júpiter; y representó una buena aproximación para las distancias de Urano y Neptuno.

Algo que le daría validez a la relación TB sería mostrar que existen planetas aún no descubiertos en las posiciones (o con los períodos) predichos por la relación TB. En el desarrollo de este proyecto se evaluó la capacidad predictiva de la relación TB. Este análisis se muestra en el presente capítulo.

La hipótesis a evaluar fue que se pueden emplear los periodos de los primeros cuatro exoplanetas descubiertos en un sistema y ajustarles una relación tipo TB, para reproducir el periodo del quinto planeta descubierto posteriormente en el sistema. De ser cierta esta hipótesis, obtendríamos una estimación de qué tan confiable es la relación TB para predecir exoplanetas. Para esto, se propuso un método basado en tres restricciones las cuales se describirán en los párrafos siguientes.

Como se mencionó anteriormente, el propósito de este análisis es probar la capacidad predictiva de la relación TB. Para esto propusimos lo siguiente: se realizó un ajuste a los primeros 4 planetas confirmados y probamos qué tan bien nuestro método reproduce los períodos de los otros miembros conocidos del sistema que se descubrieron posteriormente. Esta idea se basa en el descubrimiento histórico de Ceres, Urano y Neptuno, ya que la relación Titius-Bode clásica fue capaz de predecirlos.

En los trabajos realizados por Bovaird [3], Lara y colaboradoras [25], y Poveda y Lara [33], se mostró que los sistemas exoplanetarios, así como el Sistema Solar, siguen una relación Titius-Bode. Además, como la relación TB fue una guía para descubrir planetas en el Sistema Solar [32], proponemos que también podría ser una buena guía para descubrir exoplanetas. Debido a esto, el coeficiente de correlación de la relación TB para nuestro sistema estelar será nuestro indicador para saber cuándo un sistema exoplanetario tiene un buen ajuste. En la siguiente sección se describirá en detalle el método de este estudio.

3.1. Método

3.1.1. Descripción de la muestra

Como mencionamos, nuestra hipótesis es que si tenemos al menos 4 planetas observados en un sistema exoplanetario con períodos orbitales conocidos, entonces la relación TB podrá predecir la existencia de otros planetas.

Para probar esta hipótesis, utilizamos una muestra que contiene todos los sistemas extrasolares conocidos con 5 o más planetas. La muestra utilizada contiene 27 sistemas exoplanetarios confirmados con al menos 5 planetas. Se emplearon solamente planetas observados confirmado, es decir, no tomamos datos de planetas que pudieran ser controversiales o candidatos con la intención de obtener una evaluación confiable de la capacidad de la relación TB para encontrar nuevos planetas en sistemas exoplanetarios.

La razón de esta elección fue que primero analizamos cuál sería el número mínimo de planetas que se podrían emplear para que la relación TB pudiera predecir nuevos objetos. Descubrimos que si tomábamos 3 planetas, los errores relativos eran entre 28 % y 140 %) ¹. Los errores disminuyeron apreciablemente usando al menos 4 planetas.

En 2019, cuando realizamos este análisis, los sistemas exoplanetarios con 5 planetas o más eran 27. De estos 27 sistemas, 21 fueron detectados por el método de tránsito: K2-138, Kepler-102, Kepler-122, Kepler-150, Kepler-154, Kepler-169, Kepler-186, Kepler-238, Kepler-292, Kepler-296, Kepler-33, Kepler-444, Kepler-55, Kepler-62, Kepler-84, Kepler-11, Kepler-20, Kepler-80, Kepler-90, Trappist-1 y HIP 41378. Los 6 sistemas exoplanetarios restantes: 55 cnc, GJ 667C, HD 40307, HD 10180, HD 34445 y HD 219134, fueron detectados por el método de velocidad radial. Todos los cuerpos en estos sistemas están confirmados. Para corroborar los datos utilizamos las 3 bases de datos de exoplanetas (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>, <http://exoplanet.eu> y <http://openexoplanetcatalogue.com>).

¹ $E_r = \frac{|P_{\text{real}} - P_{\text{predichoTB}}|}{P_{\text{real}}} \times 100 \%$

Antes de adentrarnos en la metodología empleada, discutiremos los diferentes métodos de detección y como podrían afectar nuestros resultados.

3.1.2. Técnicas de detección de los sistemas planetarios usados en la muestra

Velocidad Radial

El método para detectar planetas por velocidad radial se fundamenta en la medición de las velocidades radiales de estrellas aprovechando el efecto Doppler, el cual ocurre por el "bamboleo" de la estrella debido a la presencia de un objeto no-visible. Este método nos brinda información sobre las características orbitales del sistema, tales como el periodo, la excentricidad, el semieje mayor, el argumento del periastro y el tiempo del periastro. Este método resulta altamente sensible a la detección de planetas gigantes cercanos a sus estrellas, ya que en estos casos la señal de la variación en la velocidad radial es más intensa. Sin embargo, existe un sesgo relacionado con el tiempo de observación, debido a que los planetas con un semieje mayor más grande también tienen períodos más largos. Por ejemplo, Júpiter se encuentra a 5 ua de distancia del Sol y tiene un periodo de 12 años, lo cual implica que se requiere un tiempo de observación considerable para detectar el cambio de una señal de baja amplitud. En la gráfica 3.1 se muestran las amplitudes en la señal de la velocidad radial de una estrella tipo solar generadas por su interacción con planetas de diferentes masas y a diferentes distancias.

La figura 3.1 muestra que para poder detectar planetas menos masivos a Júpiter, el tratamiento de detección debe ser capaz de encontrar una amplitud de la velocidad radial menor a 10 m/s. Existen diferentes factores que intervienen en la precisión de la amplitud de la velocidad radial: la relación señal-ruido del espectro de la estrella, el poder de resolución del espectrógrafo y el tipo de estrella que se observa.

Cuando la técnica de velocidad radial se ve afectada por fuentes de ruido astrofísico (pulsaciones estelares, granulación superficial y fluctuaciones estelares causadas por manchas u otras inestabilidades en la atmósfera estelar), se generan señales significativas que pueden ocultar las señales de velocidades radiales causadas por los planetas si no se modelan adecuadamente. Por ejemplo, puede ocultar las señales de planetas con masa similar a la de la Tierra en la zona habitable de estrellas de tipo solar, donde la señal de velocidad radial es aproximadamente de 10 centímetros por segundo.

Las mediciones de velocidad radial, por sí solas, generalmente no proporcionan la verdadera masa de los planetas del sistema, sólo la masa mínima o, para ser más precisos, el producto de la masa por el seno de la inclinación orbital. Sólo en los casos en los que se verifique, por tránsito, que la órbita de un planeta tiene una inclinación de 90° entonces si se tendrá un valor preciso de su masa.

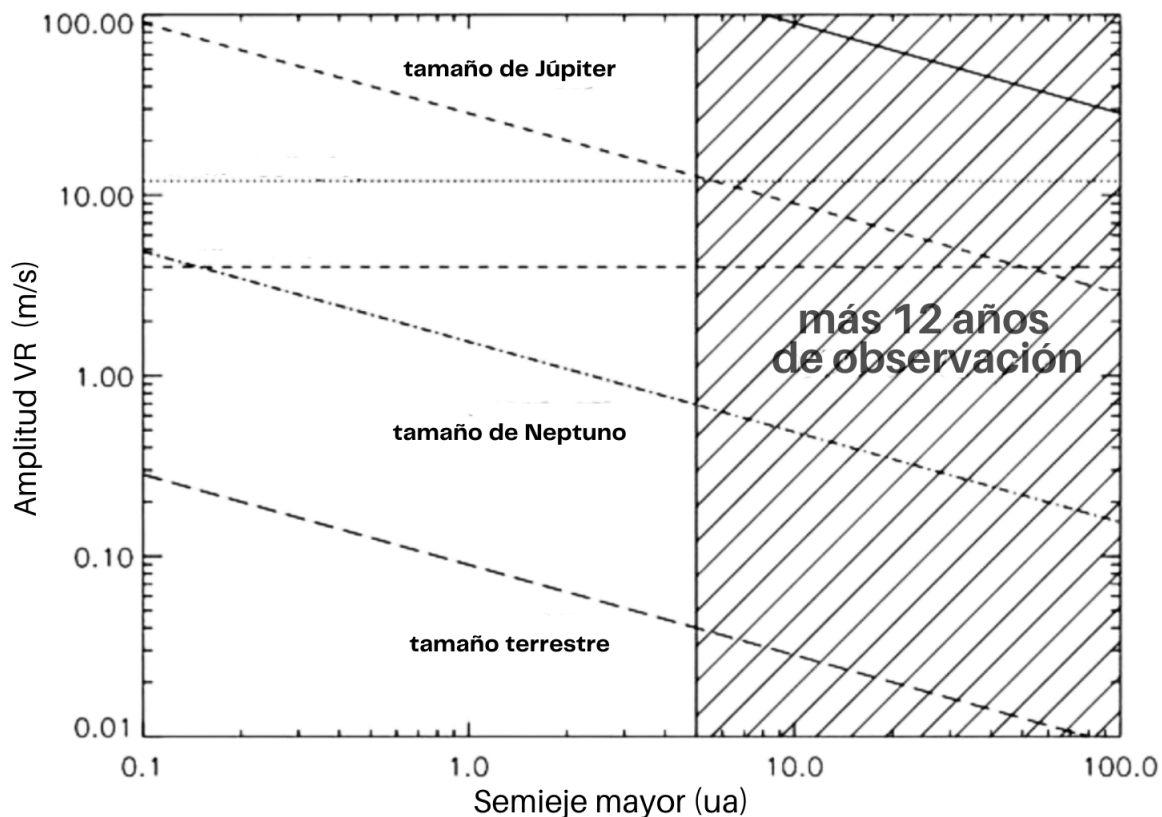


Figura 3.1: En la gráfica se muestra la amplitud de la velocidad radial (VR) que se observaría en una estrella tipo solar al interactuar con tres planetas de diferente masa (Tierra, Neptuno y Júpiter). La región sombreada muestra una región donde el método pierde su sensibilidad.

Método de tránsito

La técnica de los tránsitos es quizás la más directa de los métodos indirectos para descubrir planetas extrasolares. El tránsito astronómico es un fenómeno durante el cual un astro pasa por delante de otro, alterando la luz emitida por el segundo. La pequeña disminución de la luz estelar durante el tránsito de un planeta se debe a que un planeta pasa entre su estrella y su observador disminuyendo la luz de la estrella y permitiendo que el observador “vea” el planeta.

A partir de la observación de uno o más tránsitos es posible determinar varios datos importantes sobre el comportamiento planetario. Además de los parámetros orbitales como el período, el tiempo de los puntos de contacto y la inclinación de la órbita, se puede derivar la información primordial sobre las propiedades físicas del planeta. De hecho, el desvanecimiento de la curva de luz de la estrella es proporcional al cuadrado del cociente del radio

del planeta entre el radio de la estrella. Esto permite la estimación del radio del planeta, y debido a que el planeta transita delante de su estrella, se puede estimar el ángulo entre el vector del momento angular de la órbita del planeta y la dirección al observador que es de aproximadamente 90° . Si la estrella es lo suficientemente brillante, es posible seguirla con un espectrógrafo y medir las velocidades radiales para conocer la masa del planeta.

Las observaciones de tránsito hechas desde la Tierra tienen una capacidad limitada para detectar planetas pequeños y planetas en órbitas de período largo. Las fluctuaciones de la transparencia atmosférica y el centelleo limitan la precisión fotométrica relativa alcanzable desde el suelo a un 0.1 % aproximadamente desde los mejores sitios, mientras que la rotación de la Tierra impide la detección fiable de tránsitos de más de 5 o 6 horas de duración.

Largos tiempos de observación necesarios para detectar planetas en órbitas de período largo se pueden lograr colocando una nave espacial en una órbita ya sea heliocéntrica o bien en un órbita geocéntrica, casi polar, pero que siempre esté observando en dirección opuesta al Sol.

El telescopio Espacial Kepler fue puesto en mayo de 2009 en una órbita heliocéntrica que sigue a la Tierra. Su campo de visión durante los primeros 3.5 años de su funcionamiento estuvo entre las estrellas brillantes Deneb y Vega.

Debido a la forma de detectar planetas por este método hay tres escenarios que pueden dar falsos positivos ligados a sistemas binarios: a) Eclipses de estrellas binarias rasantes de secuencia principal, b) Sistemas binarios en los que la compañera más pequeña es la que tiene los planetas y c) Sistemas binarios donde una de las compañeras es una enana roja o enana café.

Lissauer y colaboradores concluyeron que la gran mayoría de los objetos detectados por Kepler eran verdaderos sistemas planetarios; de hecho se espera que sistemas múltiples tengan una tasa muy baja de falsos positivos ($\leq 1\%$), porque los eclipses de estrellas binarias de fondo pueden imitar la curva de luz de un solo planeta en tránsito, pero es poco probable que imiten dos o más [29] [28]. Este resultado es muy importante para la muestra que estamos usando porque nos garantiza la existencia de esos planetas.

La precisión en la determinación de los elementos orbitales de sistemas exoplanetarios múltiples detectados por tránsito aumenta con las mediciones de velocidad radial. Cuando éstas no se tienen, los elementos orbitales dependen del modelaje de los sistemas considerando diferentes escenarios en los que usan los periodos obtenidos y se varían los demás parámetros hasta encontrar la estabilidad del sistema. Dicho modelaje se realiza mediante integración de n-cuerpos.

Debido a que los periodos de los planetas se estiman con base a la velocidad radial de la estrella, los periodos planetarios son menos precisos que los obtenidos por el método de tránsito, pero aún así estas estimaciones tienen errores aceptables (1.68 %) de tal forma que las hacen

confiables para nuestro análisis.

Tomando los diferentes instrumentos y tipos de métodos de detección, la figura 3.2 muestra los límites de detección determinados para las masas y los períodos de los planetas. En la figura 3.3 se observa que los métodos de detección están sesgados para detectar cuerpos cuyos periodos de traslación son menores a 100 días.

3.1.3. Descripción del método

En la sección anterior mostramos que los datos que empleamos en este análisis tienen errores lo suficientemente pequeños como para considerar nuestros resultados aceptables. En esta sección describiremos el método empleado, aplicado a sistemas con 5 planetas o más.

Para cada sistema, usamos los primeros cuatro planetas descubiertos para obtener una relación TB y para predecir los períodos de otros planetas posibles. Los resultados se comparan con el planeta o los planetas reales posteriormente descubiertos. Para sistemas extrasolares en los cuales los hallazgos planetarios se informaron en diferentes fechas, la cronología es clara, pero para los sistemas reportados al mismo tiempo, usamos los cuatro períodos más pequeños.

A diferencia de la relación TB clásica, en este análisis empleamos los períodos orbitales (que son los datos directos) en lugar los semiejes mayores para evitar el error introducido por la determinación la masa de la estrella primaria. Dicho esto, entonces la relación tipo TB que empleamos es de la forma:

$$p_n = p_0 e^{(bn)}, \quad (3.1)$$

donde n es el número en orden ascendente de los planetas en un sistema planetario, p_0 y b son constantes que se determinan a partir de los ajustes, y p_n son los períodos observados.

Para nuestro método necesitamos un ajuste que pueda trabajar como referencia. Usamos el ajuste a los planetas del Sistema Solar que se conocían en tiempos en los cuales Titius formuló su relación. La razón de esto es porque sabemos que este ajuste fue capaz de predecir los cuerpos encontrados más tarde. Así que nuestro ajuste de referencia es un ajuste similar a la ley de Titius, es decir, ajustamos la ecuación 3.1 considerando solamente a Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno y una vacante entre Marte y Júpiter. El coeficiente de correlación que obtenemos es 0.9920. La relación encontrada predice los períodos de Ceres, Urano y Neptuno con errores de 17 %, 33 % y 24 %, respectivamente (Figura 3.4). Suponemos ahora que, para los exoplanetas, las vacantes podrían representar lugares donde podrían existir planetas, asteroides o cinturones de asteroides.

Para mostrar que este método es un buen enfoque para predecir la existencia de posibles pla-

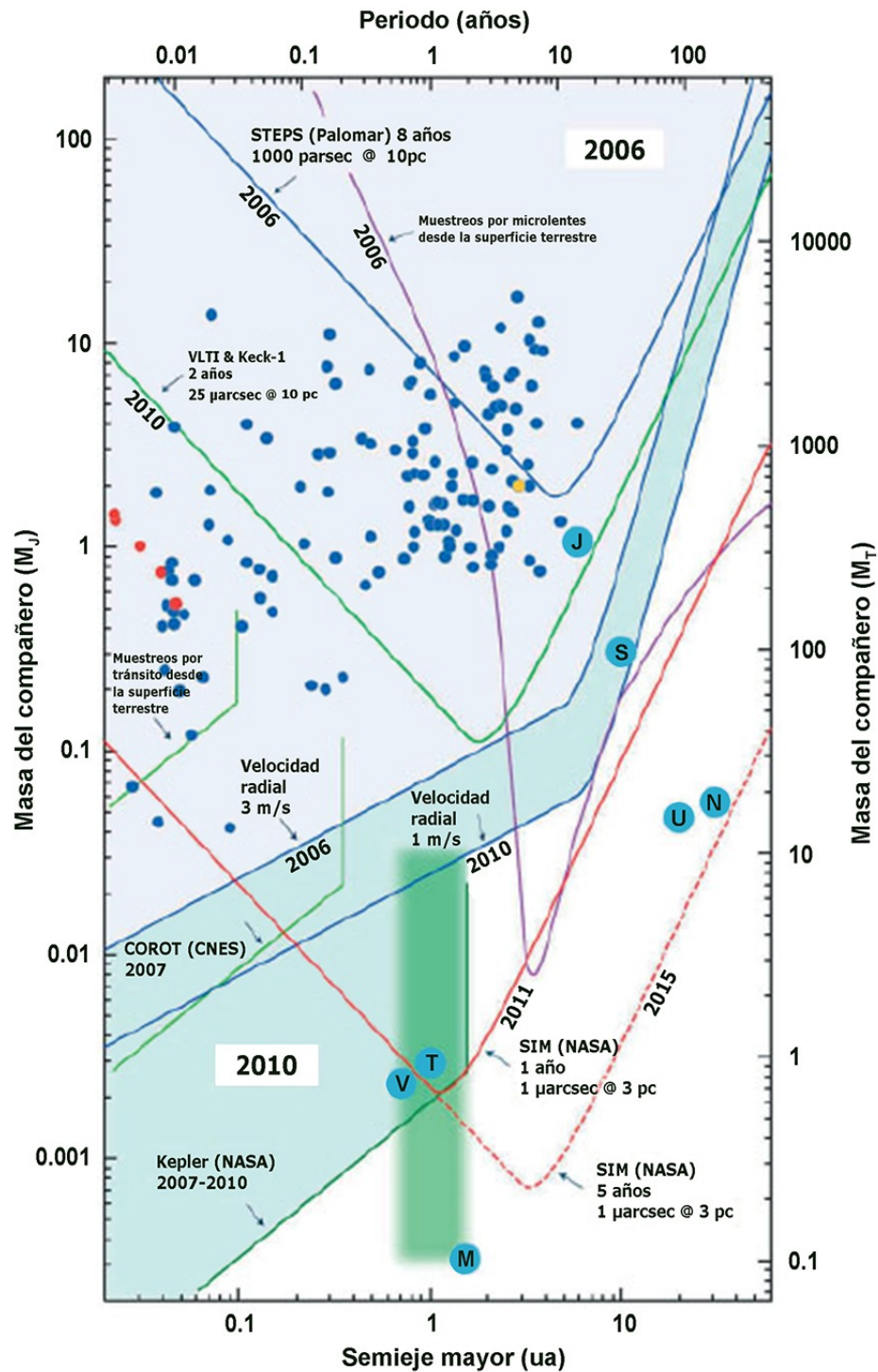


Figura 3.2: En la figura están marcados los límites de detección en masa (eje Y) determinados por la distancia a la estrella primaria (eje X). Las líneas azules muestra los límites observacionales por el método de velocidad radial. Las líneas rojas muestran el límite observacional por la técnica de tránsito.[10]

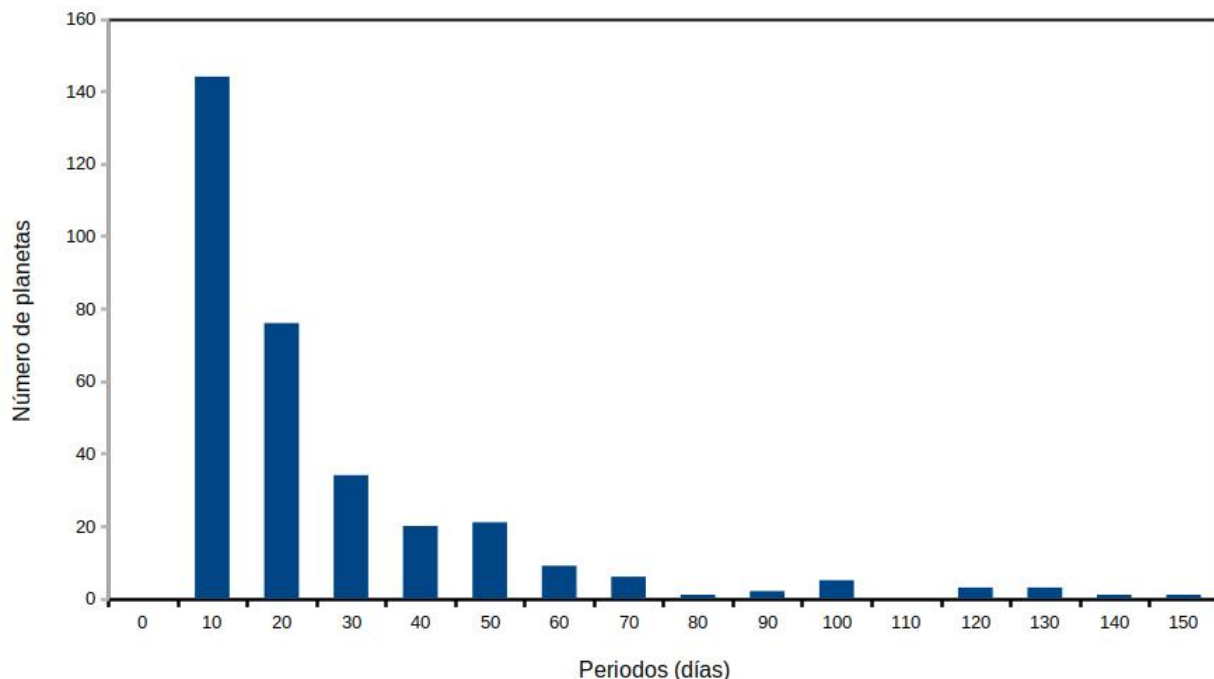


Figura 3.3: Histograma de períodos observados de todos los exoplanetas conocidos. Los datos fueron tomados del catálogo <http://exoplanet.eu>. Los períodos empleados son los confirmados por los diferentes métodos de detección.

netas en otros sistemas planetarios, usamos los 27 sistemas conocidos (al 2019), con 5 o más exoplanetas y procedimos de la siguiente manera: consideramos los primeros cuatro planetas descubiertos de cada uno de los sistemas en nuestra muestra, si la cronología del tiempo de descubrimiento no era clara usamos los datos de los exoplanetas más cercanos a la estrella primaria; en ambos casos ajustamos una función exponencial tipo Titius-Bode (como en la ecuación 3.1). Si ese ajuste no tenía un coeficiente de correlación de $R^2 = 0.9920$ o mayor, se hacía una serie de ajustes introduciendo vacantes entre planetas y considerando que el primer planeta observado siempre tiene $n = 1$. Primero, probamos todas las combinaciones posibles con una vacante entre cada par de planetas adyacentes. Ya fuera que una de estas combinaciones con una vacante cumpliera con el criterio $R^2 \geq 0.9920$ o no, el siguiente paso fue considerar todas las combinaciones posibles con dos vacantes entre cada par de planetas adyacentes para ver si había otras combinaciones que cumplieran con el criterio $R^2 \geq 0.9920$. Una vez terminado este ejercicio, se observó que si ya se había encontrado un buen ajuste con una vacante, no se encontró uno mejor considerando dos vacantes entre planetas adyacentes. En los casos en que el criterio R^2 se cumplió con una combinación de dos vacantes, proba-

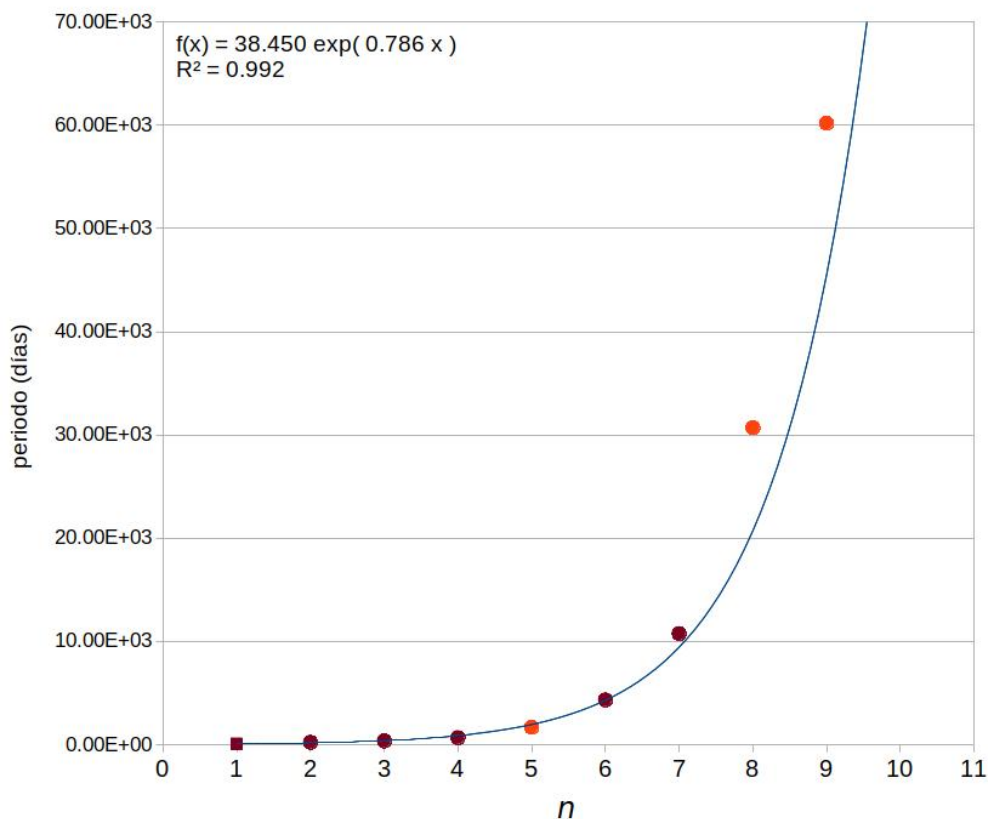


Figura 3.4: Ajuste realizado a los planetas del Sistema Solar descubiertos antes de Ceres, Urano y Neptuno (posiciones 1, 2, 3, 4, 6 y 7), vacante (posición 5) y extrapolaciones (posiciones 8 y 9).

mos todas las combinaciones posibles con tres vacantes para evaluar si se podía encontrar una combinación mejor. Al igual que en el caso anterior, los ajustes con dos vacantes fueron mejores que los ajustes con tres. Este proceso se repitió cuando se obtuvo un mejor ajuste con tres y cuatro vacantes. Es importante tener en cuenta que en todos los casos la mejor combinación que cumplió con el criterio fue la que tuvo el menor número de vacantes y que esa combinación fue única. La Figura 3.5 muestra un diagrama de flujo del método aplicado.

Consideramos que nuestro método es exitoso si:

1. Las predicciones conservan el mismo número de orden al hacer los ajustes incluyendo el quinto y demás planetas observados, y
2. El ajuste predice los próximos planetas descubiertos con un error menor a **33%**, que es el máximo error presentado por un planeta en el sistema solar respecto a su relación TB.

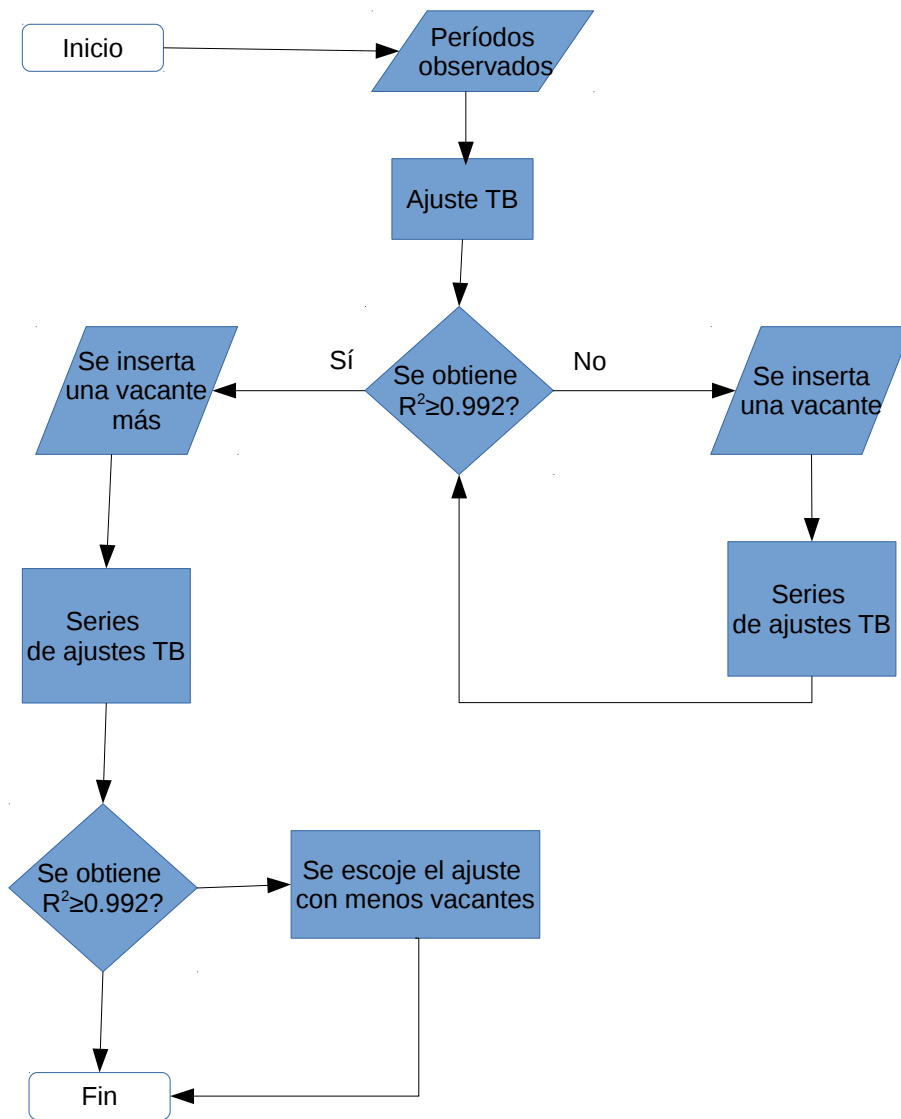


Figura 3.5: Diagrama de flujo que describe el método aplicado.

La primera condición nos da una certidumbre acerca del método porque si las vacantes no persisten el método no sería útil. En el resto del texto nos referiremos a la primera condición diciendo que las vacantes se mantienen. La segunda condición impone una restricción mayor al método al no permitir errores mayores que los obtenidos para el sistema solar.

Como se observó en el sistema solar, la relación TB puede ser extrapolada para predecir posibles planetas más allá de los planetas observados; sin embargo, en este trabajo procedimos como se narra a continuación:

- a) Si los 4 primeros planetas observados eran tales que abarcaban la extensión total del sistema, es decir, que las planetas restantes del sistema se esperaba que coincidieran con las vacantes encontradas, entonces no se hacían extrapolaciones.
- b) Si se sabía que existían uno o varios planetas más alejados que los primeros 4 observados entonces sí se consideraban extrapolaciones. Lo mismo pasaba si al ir incluyendo más planetas de los observados en el ajuste faltaba uno o algunos que estuvieran más alejados. En el momento en el que se tenían todos los planetas observados ya no se realizaban más extrapolaciones.

En la siguiente sección se muestran los resultados de este análisis.

3.2. Resultados de la capacidad predictiva de la relación Titius-Bode

Después de analizar los 27 sistemas exoplanetarios, encontramos que el método propuesto dio resultados exitosos para 21 sistemas: 55 Cancri, HD 40307, HIP 41378, K2-138, Kepler-102, Kepler-154, Kepler-186, Kepler-238, Kepler-296, Kepler-33, Kepler-444, Kepler-62, Kepler-84, GJ 667C, HD 34445, Kepler-20, Kepler-11, Kepler-80, HD 219134, Trappist-1 y Kepler-90. En estos sistemas planetarios, tanto vacantes como extrapolaciones coincidieron con planetas que luego fueron detectados. Los sistemas no exitosos fueron: Kepler-122, Kepler-150, Kepler-169, Kepler-292, Kepler-55 y HD 10180. Estos sistemas no fueron exitosos porque las vacantes no persistieron, es decir, cuando usamos diferentes números de planetas para el ajuste, se presentaron diferentes vacantes. Además, los sistemas Kepler-122 y HD 10180 mostraron errores superiores a 30%.

Tanto para sistemas exitosos como no-exitosos, los resultados obtenidos pueden clasificarse dentro de algunos de los siguientes tres casos: a) planetas encontrados por extrapolación (en 7 sistemas), b) planetas encontrados en vacantes (en 7 sistemas) y c) planetas encontrados en vacantes y extrapolación (en 13 sistemas). En los siguientes párrafos, describimos en detalle un caso de cada uno.

a) Planetas encontrados por extrapolación

El sistema exoplanetario Trappist-1 contiene 7 planetas. Usando los planetas b, c, d y e, para

el ajuste inicial, el resultado no mostró vacantes, pero su extrapolación mostró 3 orbitales adicionales que coinciden con Trappist-1 f, g y h, con errores de 8.42% 29.3% y 27.8%, respectivamente. Cuando se tomaron los primeros 5 planetas para el ajuste, no aparecieron vacantes, pero con su extrapolación se obtuvieron 2 espacios orbitales coincidiendo con los planetas g y h con errores de 21.20% y 17.85%, respectivamente. El ajuste con 6 planetas observados predijo un período orbital de 20.73 días que coincidió con el período orbital de Trappist-1 h con un error de 3.65%. También se puede observar que cuando se consideran más planetas en el ajuste los errores disminuyen.

Los otros sistemas que entran dentro de este esquema son: Kepler-296, Kepler-444, K2-138, HD 40307, Kepler-186 y Kepler-122 (no-exitoso). Cuando se extrapolaron los sistemas Kepler-296, Kepler-444 y K2-138, obtuvimos en los tres casos el quinto planeta con errores de 0.63%, 4.23% y 1.86%, respectivamente. Estos ejemplos muestran que las vacantes y las extrapolaciones de la relación de TB son buenos indicadores de la posible existencia de planetas.

b) Planetas encontrados en vacantes

Kepler-102 fue uno de los sistemas exoplanetarios donde la capacidad predictiva de la relación TB era muy clara. En este caso, la vacante generada por nuestro método coincidió con el período orbital del último planeta encontrado (Kepler-102 f) con un error de 10.43%. Además, cuando aplicamos el método a todos los planetas observados, no se encontraron más vacantes. Para Kepler-20, el ajuste para los primeros cuatro planetas mostró 2 vacantes que corresponderían a planetas con períodos de 21.75 y 40.29 días. Estos períodos coinciden con los períodos de los planetas Kepler-20 f y Kepler-20 g con errores de 11.08% y 15.31%, respectivamente. Cuando se hizo el ajuste con 5 planetas observados, obtuvimos una vacante que coincidió con el período del último planeta encontrado (Kepler-20g) con un error de 12%. En estos dos casos exitosos se muestra que la relación TB predice vacantes entre los planetas observados reproduciendo los períodos de los planetas posteriormente descubiertos. Este comportamiento lo siguen los sistemas 55 Cancri, Kepler-154, Kepler-11, HD 219134 y Kepler-55 sólo que en estos sistemas hay vacantes no correlacionadas aún con algún planeta observado.

c) Planetas en vacantes y extrapolaciones

Antes de diciembre de 2017, Kepler-90 tenía 7 planetas conocidos. El ajuste con los primeros cuatro planetas dio tres vacantes. A pesar de que ninguna de ellas coincidía con los otros tres planetas observados, cuando se extrapoló la relación TB, encontramos los períodos de otros tres planetas, que se descubrieron posteriormente (Kepler-90f, g y h), con errores de 14.3%, 5.8% y 4.3%, respectivamente. Si usamos 5 planetas para el ajuste, las tres vacantes anteriores permanecen, y los 2 planetas extrapolados siguientes coinciden con los períodos orbitales de Kepler-90 g y h con errores de 1.7% y 3.6%. Repitiendo el método usando seis planetas para el ajuste, las vacantes permanecen y el planeta extrapolado coincide con Kepler-90 h con un error de 3.6%. La relación TB indicó que eran 3 objetos putativos a ser descubiertos en este sistema planetario. En diciembre del 2017, se informó sobre el descubrimiento de Kepler-90i ([35]). El cual coincide con una de las vacantes que encontramos (junio 2017), con

un error de 6.0%. Cuando usamos estos ocho planetas observados, las otras dos vacantes permanecen. Este último comentario apoya la existencia de dos posibles cuerpos planetarios en las dos vacantes (Figura 3.6). Los sistemas exoplanetarios HIP 41378, Kepler-238, Kepler-33, Kepler-62, Kepler-84, GJ 667C, HD 34445, Kepler-80, Kepler-150, Kepler-169, Kepler-292 y HD 10180 de la misma manera que Kepler-90 predicen planetas en vacantes y extrapolaciones.

Todos los ejemplos anteriores muestran que la relación TB se puede utilizar como una guía para futuras detecciones. Los períodos pronosticados y sus errores se presentan en la Tabla 3.1. En ésta, la primera columna muestra el nombre de la estrella a la que pertenece el sistema exoplanetario, la segunda columna indica el número de planetas con el que se realizó el ajuste el cual produjo cierto número de vacantes (columna 3); la cuarta columna indica el número de vacantes en extrapolación. Las columnas cinco, seis y siete muestran las constantes obtenidas del ajuste; así como el coeficiente de correlación. En la octava columna está el valor calculado para χ^2 , la novena el período predicho para cada vacante, la décima el periodo observado de la vacante o vacantes que coincidieron con un planeta observado y la última columna indica el error porcentual del período predicho respecto al período observado.

En promedio, se encontró un error porcentual de 9.84% entre las predicciones y los planetas observados para los 21 sistemas estudiados (Tabla 3.1). Es interesante que cuando se hicieron ajustes con todos los planetas observados, el número de vacantes persistió, por lo que esperamos que indiquen un posible descubrimiento futuro de un planeta o un cinturón de asteroides.

Los resultados para los casos no exitosos se muestran en la Tabla 3.2 la cual tiene el mismo formato que la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Predicciones de los 21 casos exitosos de nuestra muestra.

Sistema planetario	No. planetas	No. vacantes	Extrapolaciones	p_0	b	R^2	χ^2	Períodos predichos (días)	Períodos Obs. (días)	error %
55 Cnc	4	3	0	0.1594	1.4717	0.9978	48.28	3.0 250.3 1090.6	260.7	3.98
HD 40307	4	0	2	1.8589	0.8209	0.9981	0.1857	112.7 256.0	198.8	23.79
HIP 41378	4	3	2	10.1334	0.4041	0.9920	3.7813	22.7 51.0 76.4 256.98 384.8	324	18.77
K2-138	4	0	1	1.5447	0.4158	0.99997	0.00088	12.5	12.7576	1.86
Kepler-102	4	3	0	4.0562	0.2793	0.9998	0.0041	9.2 12.2 21.0	10.31	10.43

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.1 – Continuación de la página previa

Sistema planetario	No. planetas	No. vacantes	Extrapolaciones	p_0	b	R^2	χ^2	Períodos predichos (días)	Períodos Obs. (días)	error %																																																																																																																																																																																																									
Kepler-154	4	2	0	4.0562	0.2793	0.9998	0.1726	6.8	9.92	17.85																																																																																																																																																																																																									
								11.7			Kepler-186	4	0	3	2.2135	0.5863	0.9982	0.0435	41.5	129.95	3.21	74.6	134.1	Kepler-238	4	1	1	1.0884	0.6125	0.9954	0.108	3.7	50.447	15.0	42.9	Kepler-296	4	0	1	3.2953	0.5899	0.9990	0.0329	62.9	63.3363	0.63	Kepler-33	4	1	1	3.6544	0.4361	0.9984	0.0542	8.7	41.029	22.00	50.0	Kepler-444	4	0	1	2.7584	0.2606	0.9962	0.0074	10.2	9.7405	4.23		Kepler-62	4	2	1	3.2858	0.6010	0.9945	0.3959	36.4	267.291	17.43	66.3	220.7	Kepler-84	4	2	1	2.8778	0.3748	0.998	0.0033	6.1	44.55	11.00	18.8	39.7	GJ 667C	4	3	2	4.8559	0.4244	0.9985	0.2097	11.4	39.026	3.87	17.3	40.5	144.8	221.4	GJ 667C	5	2	2	4.8351	0.4237	0.9982	0.2374	11.3	256.2	14.53	17.2	143.4	219.0		HD 34445	4	2	4	26.9052	0.5273	0.9941	4.3382	77.2	1056.7	2.08	375.7	1078.6	1827.6	3096.6	HD 34445	5	2	3	27.0806	0.5248	0.9966	5.0904	5246.7	5700.0	7.95		77.4	373.5	1803.0	Kepler-20	4	2	0	1.8461	0.6166	0.9972	0.2161	3047.3	5700.0	9.64	5150.3		77.4	373.5	Kepler-20	5	1	0	1.8408	0.6109	0.9958	0.6409	21.8	19.577	11.08	40.3	Kepler-20	5	1	0	1.8408	0.6109	0.9958	0.6409	34.94	34.94	15.31		Kepler-11	4	3	0	6.2186	0.4138	0.9945	0.6136	39.1	34.94	11.77	21.5	32.6	Kepler-11	5	2
Kepler-186	4	0	3	2.2135	0.5863	0.9982	0.0435	41.5	129.95	3.21																																																																																																																																																																																																									
								74.6																																																																																																																																																																																																											
								134.1																																																																																																																																																																																																											
Kepler-238	4	1	1	1.0884	0.6125	0.9954	0.108	3.7	50.447	15.0																																																																																																																																																																																																									
								42.9																																																																																																																																																																																																											
Kepler-296	4	0	1	3.2953	0.5899	0.9990	0.0329	62.9	63.3363	0.63																																																																																																																																																																																																									
Kepler-33	4	1	1	3.6544	0.4361	0.9984	0.0542	8.7	41.029	22.00																																																																																																																																																																																																									
								50.0																																																																																																																																																																																																											
Kepler-444	4	0	1	2.7584	0.2606	0.9962	0.0074	10.2	9.7405	4.23																																																																																																																																																																																																									
Kepler-62	4	2	1	3.2858	0.6010	0.9945	0.3959	36.4	267.291	17.43																																																																																																																																																																																																									
								66.3																																																																																																																																																																																																											
								220.7																																																																																																																																																																																																											
Kepler-84	4	2	1	2.8778	0.3748	0.998	0.0033	6.1	44.55	11.00																																																																																																																																																																																																									
								18.8																																																																																																																																																																																																											
								39.7																																																																																																																																																																																																											
GJ 667C	4	3	2	4.8559	0.4244	0.9985	0.2097	11.4	39.026	3.87																																																																																																																																																																																																									
								17.3																																																																																																																																																																																																											
								40.5																																																																																																																																																																																																											
								144.8																																																																																																																																																																																																											
								221.4																																																																																																																																																																																																											
GJ 667C	5	2	2	4.8351	0.4237	0.9982	0.2374	11.3	256.2	14.53																																																																																																																																																																																																									
								17.2																																																																																																																																																																																																											
								143.4																																																																																																																																																																																																											
								219.0																																																																																																																																																																																																											
HD 34445	4	2	4	26.9052	0.5273	0.9941	4.3382	77.2	1056.7	2.08																																																																																																																																																																																																									
								375.7																																																																																																																																																																																																											
								1078.6																																																																																																																																																																																																											
								1827.6																																																																																																																																																																																																											
								3096.6																																																																																																																																																																																																											
HD 34445	5	2	3	27.0806	0.5248	0.9966	5.0904	5246.7	5700.0	7.95																																																																																																																																																																																																									
								77.4																																																																																																																																																																																																											
								373.5																																																																																																																																																																																																											
								1803.0																																																																																																																																																																																																											
Kepler-20	4	2	0	1.8461	0.6166	0.9972	0.2161	3047.3	5700.0	9.64																																																																																																																																																																																																									
								5150.3																																																																																																																																																																																																											
								77.4																																																																																																																																																																																																											
								373.5																																																																																																																																																																																																											
Kepler-20	5	1	0	1.8408	0.6109	0.9958	0.6409	21.8	19.577	11.08																																																																																																																																																																																																									
								40.3																																																																																																																																																																																																											
Kepler-20	5	1	0	1.8408	0.6109	0.9958	0.6409	34.94	34.94	15.31																																																																																																																																																																																																									
Kepler-11	4	3	0	6.2186	0.4138	0.9945	0.6136	39.1	34.94	11.77																																																																																																																																																																																																									
								21.5																																																																																																																																																																																																											
								32.6																																																																																																																																																																																																											
Kepler-11	5	2	0	6.3157	0.4124	0.9941	0.640	74.4	31.9996	1.70																																																																																																																																																																																																									
								59.4																																																																																																																																																																																																											

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.1 – Continuación de la página previa

Sistema planetario	No. planetas	No. vacantes	Extrapolaciones	p_0	b	R^2	χ^2	Períodos predichos (días)	Períodos Obs. (días)	error %
Kepler-80	4	3	1	0.6817	0.3823	0.9989	0.0278	1.5	3.07	2.41
								2.2		
Kepler-80	4	3	1	0.6817	0.3823	0.9989	0.0278	3.2	14.6456	0.89
								14.5		
								14.5		
Kepler-80	5	2	1	0.6762	0.3830	0.9987	0.0294	1.5	14.6456	1.15
								2.1		
								14.5		
HD 219134	4	4	0	1.0675	0.9404	0.9969	43.221	17.9	22.717	21.13
								45.9		
								300.7		
								769.9		
HD 219134	5	3	0	1.0721	0.9401	0.9969	40.9815	18.0	22.717	20.80
								302.0		
								773.2		
Trappist-1	4	0	3	0.9520	0.4700	0.9981	0.0091	10.0	9.2067	8.42
								16.0		
								25.5		
Trappist-1	5	0	2	0.9835	0.4538	0.9977	0.0230	14.97	12.35	21.20
								23.57		
Trappist-1	6	0	1	1.0486	0.4263	0.9930	0.1649	20.4	20	1.93
								20.4		
Kepler-90	4	3	3	4.0584	0.4450	0.9949	0.2334	15.4	14.4491	6.74
								24.1		
								37.6		
								142.8		
								222.8		
								347.5		
Kepler-90	5	3	2	4.1658	0.4340	0.9951	1.332	15.3	14.4492	6.0
								23.6		
								36.5		
								207.0		
								319.5		
								319.5		
Kepler-90	6	3	1	4.1523	0.4351	0.9965	1.7094	15.3	14.4492	6.0
								23.7		
								36.6		
								322.1		
Kepler-90	7	2	0	4.1294	0.4367	0.9972	1.5493	15.3	14.4492	6.0
								23.7		
								36.4		
								36.4		

Tabla 3.2: Predicciones y errores de períodos para los sistemas no exitosos, es decir, para aquellos sistemas en los cuales las vacantes no fueron consistentes al realizar ajustes con un número mayor de planetas observados.

Sistema planetario	No. planetas	No. vacantes	Extrapolaciones	p_0	b	R^2	χ^2	Períodos predichos (días)	Períodos Obs. (días)	error %
Kepler-122	4	0	1	3.3029	0.6205	0.9930	0.1825	73.5	56.268	30.6

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.2 – Continuación de la página previa

Planetary system	Number of planets	Number of vacancies	Extrapolations	p_0	b	R^2	χ^2	Predicted periods (days)	Observed period (days)	error %
Kepler-150	4	2	7	2.1119	0.4428	0.9967	0.06915	5.1	636.21	4.84
								19.3		
								46.9		
								73.0		
								113.6		
								177.0		
								275.5		
								429.0		
Kepler-169	4	2	6	2.5220	0.2890	0.9951	0.0432	668.0	87.09	7.1
								4.5		
								10.7		
								19.1		
								25.5		
								34.0		
Kepler-292	4	2	1	1.9707	0.3065	0.9961	0.0364	45.4	19.81	15.00
								60.6		
								80.9		
Kepler-55	4	2	0	1.3171	0.5924	0.9955	0.6069	4.9	10.19	23.6
								9.1		
HD 10180	4	0	3	2.1026	1.0290	0.9983	0.5896	16.8	604.67	40.3
								7.8		
								14.9		
	5	1	1	2.5881	0.9320	0.9938	15.01	360.7	2205	28.1
								1009.4		
								2824.6		
								273.5		
								1763.8	2205	20.0

En cada sistema se calculó el error en el período, dado por el ajuste, para cada uno de los planetas, considerando los errores en las constantes p_0 y b de acuerdo con la ecuación (A.7) del apéndice A.1. En el caso de los sistemas detectados por tránsito, el error promedio de los períodos fue de 1.68 %. Los sistemas exoplanetarios Trappist-1 e HIP 41378 son los sistemas que tienen mayor incertidumbre en sus períodos siendo su error porcentual promedio de 10.54 % y 24.69 %, respectivamente. En el caso de HIP 41378, las incertidumbres se deben principalmente a la incertidumbre en los periodos de los planetas más externos (HIP 41378 d y e) determinados por el método de tránsito y respaldados por consideraciones de estabilidad dinámica [36]. Si no tomamos en cuenta estos dos últimos sistemas, el error porcentual de los demás sistemas detectados por tránsito baja hasta 0.0045 %. El error calculado para los sistemas detectados por velocidad radial tiene un promedio de 1.25 %. En el apéndice A.1 se muestran las ecuaciones empleadas para calcular la propagación de errores.

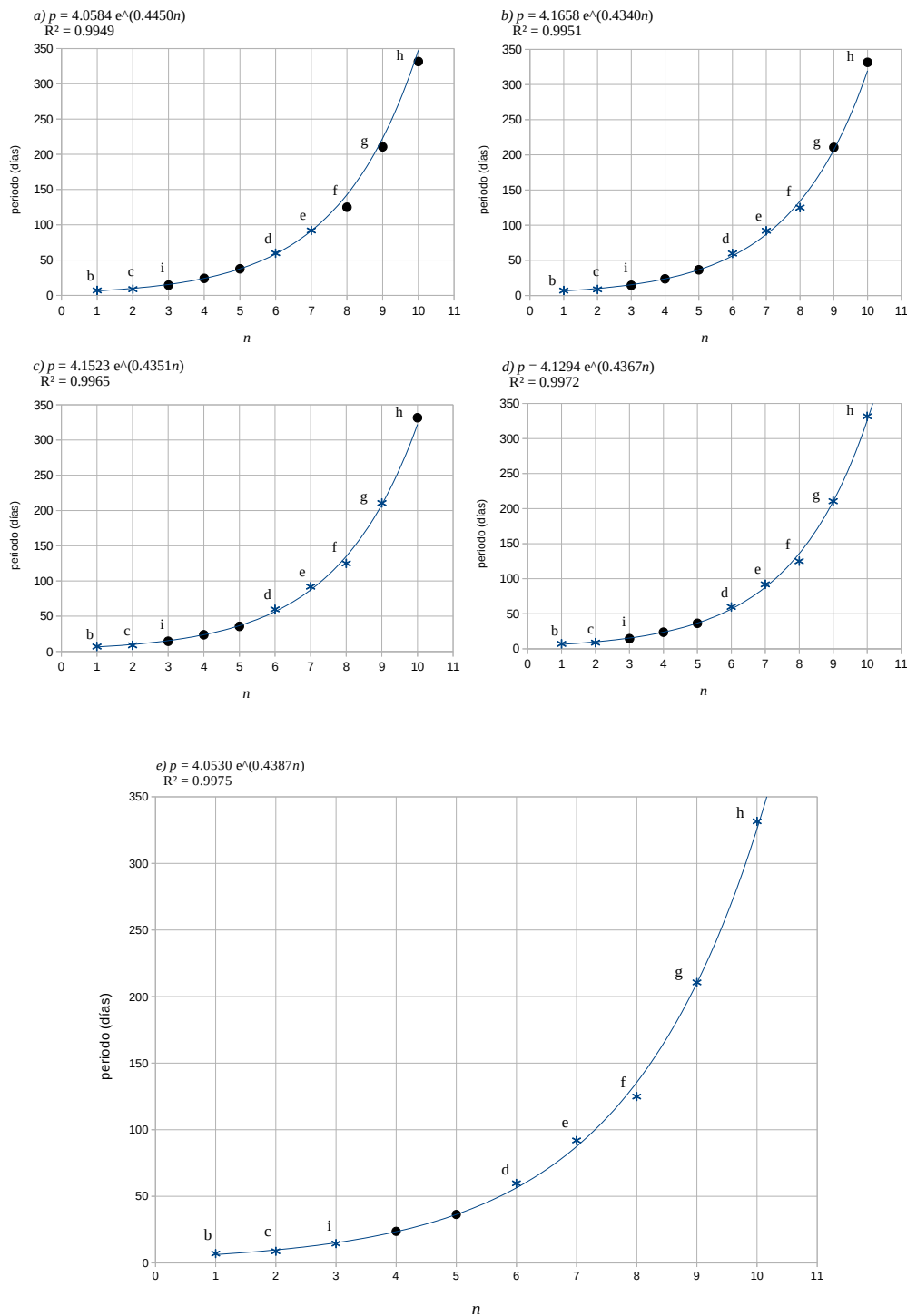


Figura 3.6: Método aplicado al sistema planetario Kepler-90. Los asteriscos denotan los planetas utilizados para el ajuste y los círculos las vacantes. (a) Ajuste usando los primeros cuatro planetas conocidos. Las vacantes están en $n = 3, 4$ y 5 , y las extrapolaciones en $n = 8, 9$ y 10 , las cuales coinciden con la mayoría de los planetas externos. (b) Ajuste usando los primeros cinco planetas conocidos. Nótese que las vacantes en $n = 3, 4$ y 5 permanecen así como las extrapolaciones. (c) Ajuste usando los primeros seis planetas conocidos. Vacantes y extrapolaciones se mantienen. (d) y (e) Ajustes que involucran a los planetas 7 y 8. Como en los otros casos, se conservan las vacantes. Además, la vacante en $n = 3$ coincide con Kepler-90 i.

3.3. Predicciones de planetas según la relación de TB

En las bases de datos consultadas, encontramos 74 sistemas planetarios con 4 planetas o más (ver Tablas 3.3 y 3.4). Entre estos, 47 sistemas planetarios albergan 4 planetas (Tabla 3.3), 18 sistemas tienen 5 planetas, 7 sistemas planetarios tienen 6 planetas, 1 sistema planetario contiene 7 planetas y 1 sistema planetario contiene 8 planetas (Tabla 3.4). Todos estos planetas han sido confirmados. En esta muestra, se detectaron 14 sistemas mediante la técnica de velocidad radial, 59 sistemas mediante tránsitos y 1 mediante imagen directa.

Como se mostró en la sección anterior, las vacantes necesarias para tener buenos ajustes a la relación TB pueden ser predicciones de cuerpos en sistemas planetarios. Dichas vacantes pueden ser planetas cuyas masas o radios están por debajo del límite de detección de la técnica observacional, asteroides o un grupo de objetos pequeños. Como también mencionamos, la relación TB tiene una capacidad predictiva aceptable cuando se usan al menos 4 planetas. Por tal motivo, se aplicó el método descrito en la sección 3.1.3 a los 74 sistemas planetarios con 4 o más planetas, y encontramos que 25 sistemas planetarios no presentaron vacantes, 14 sistemas mostraron 1 vacante, 26 sistemas planetarios tenían 2 vacantes, 7 sistemas tenían 3 vacantes y 2 sistemas mostraron 4 vacantes (Tablas 3.3 y 3.4). Las tablas 3.3 y 3.4 muestran los valores de p_0 y b para todos los sistemas, así como sus coeficientes de correlación y sus χ^2 . La última columna de las tablas muestra la masa máxima promedio que podrían tener los planetas no detectados de acuerdo a su técnica de detección según la información en la figura 3.2.

Por los resultados obtenidos al aplicar nuestro método a sistemas con 5 o más planetas, es posible sugerir que las interpolaciones que se pueden obtener de los ajustes podrían predecir nuevos planetas, pero no es posible decir cuántos planetas podría ser encontrados extrapolando; por esta razón, y para ser conservadores, los números mencionados en el párrafo anterior consideran sólo las vacantes (es decir, posibles cuerpos entre planetas observados) pero no las extrapolaciones, aunque algunas de éstas podrían ser útiles.

Tabla 3.3: Ajustes TB a sistemas con 4 planetas, predicciones y su masa mínima detectable.

	Sistema planetario	# planetas	p_0 (días)	b	R^2	χ^2	Vacantes	n	Predicción (días)	Masa máxima detectable (M_{\oplus})
1	GJ 3293	4	8.2758	0.4453	0.9990	0.0619	2	2	20.17	11
								5	76.70	10
2	GJ 676A	4	0.7913	1.7608	0.9938	85.67	1	3	155.74	1
3	GJ 876	4	0.894	0.8411	0.9959	1.1224	2	2	4.81	1
								3	11.15	2
4	HD 141399	4	42.1125	0.799	0.9997	1.6394	2	3	462.85	11
								5	2288	10
5	HD 215152	4	4.2152	0.2995	0.9958	0.0482	2	4	13.97	2
								5	18.84	2
6	HR 8799	4	8999.07	0.7327	0.9981	135.31	0			
7	Kepler-106	4	3.4298	0.6455	0.9943	0.0851	0			
8	Kepler-107	4	1.8332	0.5088	0.9932	0.3949	0			
9	Kepler-1388	4	3.1631	0.6284	0.9919	0.1011	0			
10	Kepler-1542	4	2.5255	0.1434	0.9981	0.00123	2	2	3.36	0.06

Continúa en la siguiente página

Tabla 3.3 – Continuación de la página previa

Sistema planetario	# planetas	p_0 (días)	b	R^2	χ^2	Vacantes	n	Predicción (días)	Masa máxima detectable (M_{\oplus})
11 Kepler-167	4	1.3797	0.9426	0.9948	2.0183	3	4	4.48	0.06
							4	59.87	0.22
							5	153.66	0.3
							6	394.4	0.6
12 Kepler-172	4	1.2541	0.829	0.9993	0.0152	0			
13 Kepler-176	4	2.7132	0.743	0.9971	0.0684	0			
14 Kepler-197	4	3.5877	0.4929	0.9933	0.04063	0			
15 Kepler-208	4	2.9167	0.3361	0.9926	0.0318	1	2	5.712	0.08
16 Kepler-215	4	6.4685	0.3928	0.9992	0.0118	2	3	21.017	0.15
							5	46.105	0.2
17 Kepler-220	4	2.4995	0.5938	0.9938	0.1652	1	3	14.841	0.12
18 Kepler-221	4	1.5561	0.6216	0.9978	0.0128	0			
19 Kepler-223	4	5.218	0.3354	0.9950	0.0175	0			
20 Kepler-224	4	1.7662	0.6001	0.9965	0.0398	0			
21 Kepler-235	4	1.3749	0.8821	0.9995	0.0189	0			
22 Kepler-24	4	2.8267	0.3726	0.9945	0.0357	1	2	5.96	0.08
23 Kepler-245	4	1.4631	0.8112	0.9988	0.0407	0			
24 Kepler-251	4	2.6403	0.6068	0.9999	0.0077	2	2	8.89	0.08
							5	54.85	0.2
25 Kepler-256	4	0.9126	0.6202	0.9960	0.0127	0			
26 Kepler-26	4	2.2465	0.4253	0.9964	0.1529	3	2	5.96	0.05
							3	8.05	0.06
							6	28.83	0.15
27 Kepler-265	4	4.3143	0.4595	0.99999	0.0009	2	2	10.82	0.1
							4	27.11	0.18
							5	33.18	0.18
28 Kepler-282	4	5.1134	0.531	0.9919	0.0920	2	3	17.85	0.14
							5	33.18	0.18
29 Kepler-286	4	0.8475	0.6949	0.9934	0.1265	1	4	13.653	0.1
30 Kepler-299	4	1.2414	0.8495	0.9989	0.0402	0			
31 Kepler-304	4	1.0682	0.3765	0.9922	0.0431	2	2	2.2682	0.005
							5	7.018	0.08
							3	11.356	0.1
32 Kepler-306	4	2.9263	0.452	0.9996	0.0146	2	5	28.044	0.14
							3	17.8591	0.15
33 Kepler-338	4	7.1186	0.3066	0.9977	0.0203	2	5	32.9737	0.2
							3	14.871	0.12
34 Kepler-341	4	2.9064	0.5442	0.9952	0.1392	1	3	14.871	0.12
35 Kepler-342	4	0.9833	0.5382	0.9981	0.1671	3	2	2.851	0.05
							3	4.855	0.06
							4	8.268	0.09
							2	17.098	0.2
36 Kepler-37	4	9.8921	0.2736	0.9962	0.0474	2	4	29.552	0.3
							2	4.9476	0.06
37 Kepler-402	4	3.2991	0.2026	0.9991	0.0025	2	4	7.4197	0.11
							4	111.1926	0.4
38 Kepler-48	4	1.4163	1.0908	0.9939	0.7832	2	5	330.98	0.6
							2	4.2479	0.03
39 Kepler-49	4	1.5954	0.4897	0.9986	0.1263	1	2	4.2479	0.03
40 Kepler-758	4	3.0082	0.4772	0.9963	0.0204	0			
41 Kepler-79	4	9.4382	0.3521	0.9977	0.1309	2	2	19.086	0.2
							4	38.596	0.2
42 Kepler-82	4	1.1865	0.7647	0.9975	0.1196	1	3	11.766	0.1
43 Kepler-85	4	5.8508	0.369	0.9982	0.0087	0			
44 Kepler-89	4	1.6398	0.8787	0.9969	0.0618	0			
45 mu Ara	4	4.045	1.0132	0.9935	57.777	3	2	30.69	4
							3	84.53	7
							6	1766.37	10
46 tau Cet	4	5.5740	1.1572	0.9921	10.1780	0			
47 Wasp-47	4	0.235	1.2954	0.9939	0.8066	2	4	41.56	4
							5	151.36	7

Tabla 3.4: Ajustes TB a sistemas con 5 o más planetas, predicciones y su masa mínima detectable.

Sistema planetario	# planetas	p_0 (días)	b	R^2	χ^2	Vacantes	n	Predicción (días)	Masa máxima detectable (M_{\oplus})
1 55 Cnc	5	0.1594	1.4738	0.9979	18.3282	2	2	3.04	1.8
							6	1103.65	10
2 HD 40307	5	2.0640	0.7721	0.9972	1.9114	1	5	98.0175	5
							3	23.13	3
3 HIP 41378	5	10.6414	0.3881	0.9927	3.2536	4	4	50.26	5
							5	74.09	5
							8	237.35	7
4 K2-138	5	1.5332	0.4223	0.9999	0.0012	0			
5 Kepler-102	5	4.1894	0.2714	0.9943	0.1205	2	4	12.41	0.1
							6	21.35	0.15
6 Kepler-122	5	3.4068	0.4674	0.9937	0.3073	1	2	8.68	0.08
7 Kepler-150	5	1.5435	0.7487	0.9981	0.5182	3	5	65.21	0.2
							6	137.86	0.35
							7	291.48	0.5
8 Kepler-154	5	2.1214	0.556	0.9946	0.1952	1	2	6.45	0.08
9 Kepler-169	5	2.1922	0.4605	0.9967	0.00015	3	5	21.92	0.15
							6	34.74	0.2
							7	55.06	0.2
10 Kepler-186	5	2.2401	0.5809	0.9995	0.0211	2	5	40.79	0.18
							6	72.89	0.2
11 Kepler-238	5	1.0262	0.6365	0.9954	0.2194	1	2	3.67	0.06
12 Kepler-292	5	1.4085	0.5348	0.9946	0.0293	0			
13 Kepler-296	5	3.2870	0.5912	0.9995	0.0359	0			
14 Kepler-33	5	4.2327	0.2828	0.9980	0.0609	1	2	8.86	0.09
15 Kepler-444	5	2.8045	0.2523	0.9969	0.0063	0			
16 Kepler-55	5	1.5356	0.4786	0.9939	0.1071	2	3	6.4541	0.07
							5	16.8091	0.11
17 Kepler-62	5	3.1299	0.6239	0.9959	1.4485	2	4	37.96	0.2
							5	70.85	0.2
18 Kepler-84	5	2.7741	0.3890	0.9981	0.1898	2	2	6.04	0.07
							5	19.40	2
19 GJ667C	6	4.5715	0.4391	0.9975	1.09185	3	2	11.00	2
							3	17.07	2
							8	153.33	4
20 HD 10180	6	1.51	1.1855	0.9927	45.073	0			
21 HD 219134	6	1.1418	0.9338	0.9953	36.53	2	6	309.64	13
							7	787.77	10
22 HD 34445	6	26.2016	0.5344	0.9982	13.6713	4	2	76.30	5
							5	379.11	10
							8	1883.75	15
							9	3214.48	18
23 Kepler-11	6	6.2963	0.412	0.9939	0.6974	1	6	74.59	0.3
24 Kepler-20	6	1.8483	0.6014	0.9949	0.7062	0			
25 Kepler-80	6	0.6739	0.3840	0.9991	0.0309	2	2	1.4526	0.001
							3	2.1326	0.005
26 TRAPPIST-1	7	1.0486	0.4263	0.994	0.2214	0			
27 Kepler-90	8	4.0530	0.4387	0.9975	1.4610	2	4	23.44	0.14
							5	36.34	0.2

3.4. Análisis estadístico.

Para evaluar la significación estadística de nuestros resultados, realizamos una serie de ajustes en sistemas artificiales generados aleatoriamente. Generamos 900 sistemas aleatorios, a saber, 300 sistemas con cinco planetas, trecientos con seis y trecientos con siete planetas. Estos conjuntos de 300 sistemas para cada número de planetas (5, 6 y 7), se generaron de tres maneras distintas de tal manera que 100 se obtuvieron siguiendo una distribución uniforme en sus períodos, 100 se generaron de tal manera que su distribución de periodos simulara una exponencial creciente y 100 sistemas aleatorios se generaron simulando que su distribución de períodos se ajustaba a una exponencial decreciente. Una restricción en los periodos generados por cualquiera de las distribuciones mencionadas fue que sus valores estuvieran entre 1 y 100 días, pues aunque sabemos que los periodos de los exoplanetas podrían ser mayores al límite superior, la idea era comparar los sistemas artificiales con sistemas reales cuyos periodos, en la mayoría de los casos, tienen valores menores a 100 días (ver Figura 3.3).

Aplicamos el método descrito en la sección 3.2 a cada uno de los 900 sistemas aleatorios exactamente de la misma manera que se hizo con los sistemas reales. Los resultados se muestran en la Tabla 3.5. Se encontró que en todos los conjuntos generados artificialmente había menos casos exitosos que fallidos, contrario a lo que se obtuvo en los sistemas observados. Además, cuanto mayor es el número de planetas, se encontraron menos casos exitosos, justo lo contrario de lo que se mostró al aplicar nuestro método a los sistemas reales. En particular, se esperaba que los sistemas aleatorios con una distribución de períodos exponencialmente creciente (una distribución similar a la TB, es decir, una similar a la de los sistemas observados) favorecería los casos exitosos pero; de hecho, estos mostraron resultados peores que los de sistemas con una distribución de períodos exponencialmente decreciente.

De estas pruebas se puede concluir que los sistemas exoplanetarios reales que satisfacen la relación TB son sistemas cuyos períodos no se derivan de una distribución aleatoria. Además, estos resultados indican que las configuraciones de los sistemas planetarios reales reflejan el hecho de que las órbitas planetarias no son independientes, sino que están influenciadas por la presencia de los otros cuerpos en el sistema. Por lo tanto, sus posiciones relativas son consecuencia del mecanismo de formación o debido a interacciones mutuas.

Otro punto importante a notar es que la mejor tasa de éxito obtenida de sistemas aleatorios con distribuciones exponenciales crecientes fue de sólo 26 % (cuarta columna de la Tabla 3.5), mientras que para los sistemas reales con 5 planetas o más fue de 72 % . Por lo tanto, los ajustes tipo TB de los sistemas no se deben al azar y las predicciones del método propuesto deberían ser confiables.

Tabla 3.5: Resultados estadísticos

Número de planetas	Resultado	Distribución Uniforme	Distribución Exponencial	Distribución Exponencial Decreciente	Muestra Real de Exoplanetas
5	exitoso	33 %	26 %	42 %	72 % (13/18)
	Sin éxito	67 %	74 %	58 %	28 % (5/18)
6	exitoso	5 %	17 %	27 %	85 % (6/7)
	Sin éxito	95 %	83 %	73 %	15 % (1/7)
7	Exitoso	1 %	2 %	28 %	100 % (1/1)
	Sin éxito	99 %	98 %	72 %	

3.5. Zona Habitable.

Para evaluar si algunos de los cuerpos predichos por nuestro método pueden ser considerados como planetas habitables; usamos tanto la definición conservadora como la optimista de la zona habitable propuestas por Ravi Kumar Kopparapu y colaboradores [22], quienes hacen una revisión de la definición de la Zona Habitable definida por Kasting y colaboradores [21]. Usando la luminosidad de la estrella primaria y su temperatura efectiva como valores de entrada, se empleó la aplicación de Kumar y colaboradores (<https://personal.ems.psu.edu/~ruk15/planets/>) para evaluar los límites de la zona habitable optimista y conservadora para cada una de las estrellas que orbitan los 27 sistemas exoplanetarios con 5 o más planetas de nuestra muestra.

El límite interno de la zona habitable conservadora esta determinado por un efecto invernadero en el que los océanos del planeta no se evaporen por completo. El límite exterior esta determinado por la distancia máxima a la cual las nubes de CO_2 no se condensan y se ha posible el efecto invernadero. Para un planeta tipo terrestre que giré alrededor de una estrella tipo solar, la ZH conservadora estaría entre 0.97-1.70 ua.

El límite interno de la zona habitable optimista se basa en la relación entre los flujos solares de Venus y la Tierra. La distancia orbital correspondiente a esta estimación se calcula como 0.75 ua. El límite optimista externo se estimó basándose en que un Marte temprano era lo suficientemente cálido como para que fluyera agua líquida en su superficie. Este límite sería de 1.77 ua.

Entre los 21 casos exitosos que analizamos, hay 14 planetas observados dentro tanto de la Zona Habitable conservadora como de la Zona Habitable Optimista: 55 Cnc f, HD 40307 g, Kepler-150 f, Kepler-186 f, Kepler-296 f, Kepler-62 f, GJ 667C e, GJ 667C f, HD 34445

b, HD 34445 f y Trappist-1 e, f y g. Sólo dos planetas se encuentran en la Zona Habitable Optimista: Kepler-296 e y Trappist-1 d.

De los 27 sistemas analizados, encontramos 4 vacantes que están dentro de las dos posibles Zonas Habitables (conservadora y optimista) de su estrella primaria. Las vacantes se encuentran en el sistema exoplanetario HD 40307 con un periodo de 98.02 días, en el sistema Kepler-186 con un periodo 72.86 días y en el sistema HD 219134 la vacante tiene un periodo de 309.63 días. En HD 34445 la vacante con un período de 379.11 días se encuentra dentro la zona habitable optimista. En Kepler-150 el planeta en la zona habitable tiene un periodo de 291.48 días; sin embargo, este sistema es un caso no exitoso, por lo que nuestra predicción es menos sólida. Por otro lado, HD 40307, Kepler-186, HD 219134 y HD 34445 pertenecen a nuestros sistemas exitosos, por lo que pensamos que estas predicciones tienen una alta probabilidad de ser confirmadas.

3.6. Discusión

Considerando los 27 sistemas con 5 planetas o más (Tablas 3.1 y 3.2), encontramos que se conservan 32 vacantes en 21 sistemas exitosos, mientras que en los 6 sistemas no exitosos las vacantes no se conservaron al incluir un mayor número de planetas en el ajuste. Sin embargo, debemos tener en cuenta que los ajustes dependen de la determinación de los elementos orbitales y de los errores asociados con las observaciones. Un ejemplo que muestra que los ajustes dependen de la calidad de los datos se puede encontrar en [33] y [25]. En el trabajo de 2008 [33], se utilizó un período orbital de 2.817 días para 55 Cancri e y se predijo una vacante en $n = 5$ con un período orbital de 1130 días. Dawson en el 2010 [9], informó una corrección en el período orbital de 55 Cancri e. Con este nuevo dato, Lara y colaboradores predijeron dos vacantes en $n = 2$ (3.038 días) y $n = 6$ (1130.64 días). De esto, notamos dos cosas: (a) la predicción de un objeto con un período orbital alrededor de 1130.6 días se mantuvo a pesar del cambio en los elementos orbitales, y (b) las vacantes pueden cambiar cuando se obtienen valores más precisos para los períodos.

Como mencionamos en el párrafo anterior, nuestro método fue exitoso para 21 sistemas exoplanetarios. Los errores promedio entre los planetas observados y las predicciones son de 9.84 %. El mejor caso fue Kepler-296, con un error de 0.63 %. El peor fue Trappist-1, con un error de 29.49 % cuando se usaron cuatro planetas. Sin embargo, cuando se consideraron más planetas, los errores disminuyeron a 1.93 %. En general, los errores disminuyen al usar más planetas en el ajuste, con la excepción de GJ 667C, HD 34445, Kepler-11 y Kepler-80, donde el error predicho en el período de un planeta aumentó en promedio 0.97 %, el cual no es un aumento significativo.

Para evaluar la bondad de los ajustes, calculamos χ^2 para todas las combinaciones posibles entre planetas y vacantes (8va columna en Tablas 3.1 y 3.2). Notamos que cuando nuestro

criterio ($R^2 = 0.9920$) se cumplía, el χ^2 era mínimo.

De acuerdo con Bovaird y colaboradores [3], cuanto más compactos son los sistemas exoplanetarios (comparados con el sistema solar), son mejor descritos por una relación TB. Debido al resultado de estos autores, quisimos evaluar si el éxito del método propuesto en la sección 3.1 dependía de que tan disperso o compacto es un sistema (de acuerdo con la definición de compacto de Bovaird y colaboradores). Para esto, calculamos la dispersión de cada sistema de 5 planetas de nuestra muestra empleando la ecuación dada por Bovaird y coautores. Este valor está dado por la ecuación 2.5.

Considerando el punto (S_p, σ) del sistema solar y el punto (0,0), se encontró una relación entre S_p y sigma a partir de la cual se obtuvo el valor de sigma para los sistemas exoplanetarios ($\sigma = 0.270S_p$). En la gráfica 3.7 se pueden observar los resultados, los cuales indican que no hay una diferencia evidente entre los casos exitosos y los casos no exitosos, es decir, la relación TB no se ve afectada por la compactación del sistema exoplanetario.

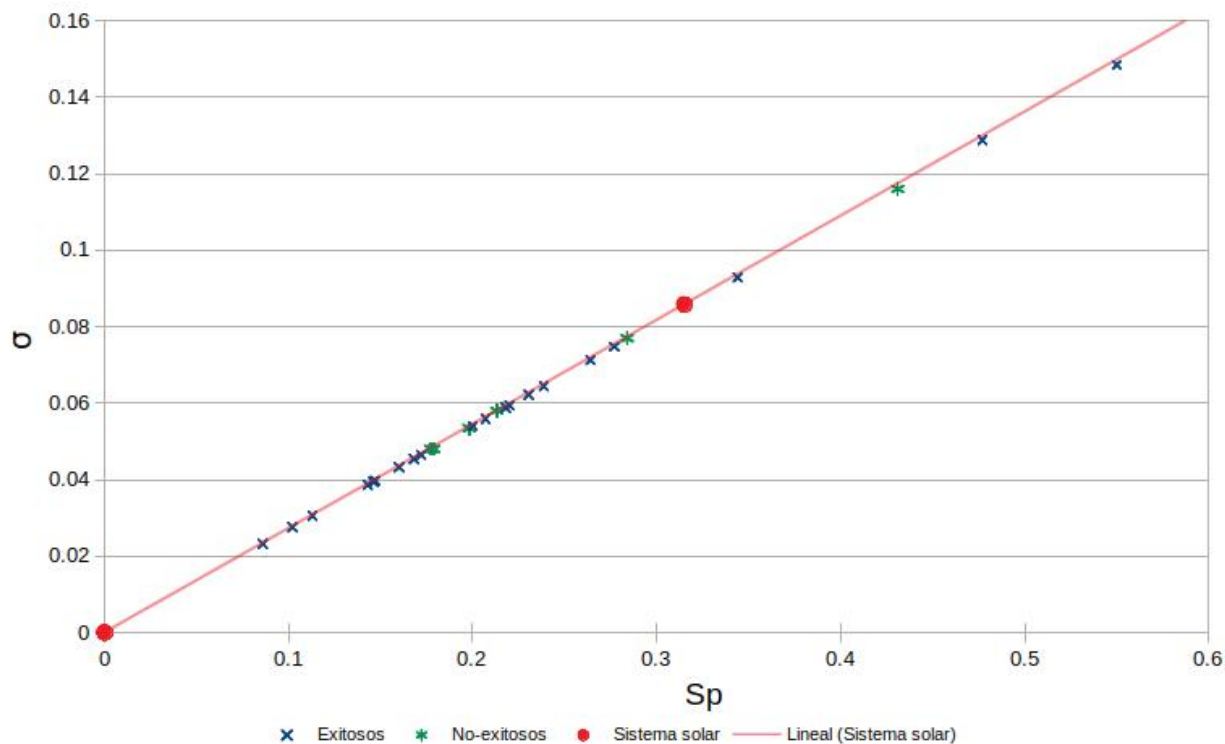


Figura 3.7: Se muestra la gráfica σ vs S_p , donde σ se calculó usando la ecuación $\sigma = 0.270S_p$ donde S_p está definido por la ecuación 2.5.

Aunque nuestra muestra todavía tiene pocos sistemas, podemos concluir que la relación TB, junto con nuestro criterio, es capaz de predecir nuevos planetas con una probabilidad de 78%. Este porcentaje podría aumentar cuando haya más datos disponibles. Por el momento, es

probable que las 32 vacantes encontradas en los 21 sistemas exitosos correspondan a cuerpos reales (planetas, asteroides o cinturones asteroidales). De hecho, desde el momento en que comenzamos a analizar estos sistemas hasta el momento de la escritura de este capítulo, el aumento de los datos disponibles así como de su calidad ha mejorado nuestra tasa de éxito: la probabilidad ha aumentado de 56 % a 78 %.

Para la muestra de 74 sistemas con 4 planetas o más, encontramos 95 vacantes (Tablas 3.3 y 3.4). Estos pueden ser cuerpos que aún no se han descubierto debido a los límites de detección.

Por otro lado, podemos estimar la masa de los objetos predichos por medio de la masa planetaria mínima detectable según la técnica y el programa de detección. La figura 3.2 que proviene del trabajo de Rauer y Erikson [10] muestra el límite de detección de masas y distancias de los planetas desde la estrella madre según el método de observación. Para los sistemas exoplanetarios detectados por tránsitos, encontramos que las vacantes podrían indicar planetas con masas similares a Mercurio y Ceres, pero también podrían ser un conjunto de objetos similares a nuestro cinturón principal de asteroides. Hay que resaltar que planetas detectados por la técnica de tránsito se encuentran en la línea de visión del observador. Entonces las vacantes predichas por la relación TB en sistemas detectados por esta técnica, pueden existir en el sistema pero no ser detectados porque no se encuentran en la línea de visión de observación.

En general, para que se pueda detectar un planeta a través del método de velocidad radial éste debe tener una masa mayor a Júpiter, debido a esto, por medio de este método se encuentran planetas más masivos que por el método de tránsito. Por lo tanto, en los sistemas detectados por la velocidad radial, los objetos predichos por las vacantes deben tener masas menores a 1 masa joviana.

En la sección 3.5 calculamos la zona habitable conservadora y optimista propuestas por Ravi Kumar Kopparapu y colaboradores [22] para las estrellas de nuestra muestra. De nuestros resultados tenemos que en 5 sistemas extrasolares existen planetas predichos que podrían estar situados dentro de la Zona Habitable de su estrella. Estos sistemas son: HD 40307, Kepler-186, HD 219134, HD 34445 y Kepler-150. De estos sistemas las predicciones más confiables, por ser casos exitosos, son en los sistemas HD 40307, HD 219134 y HD 34445, cuyas vacantes podrían estar ocupadas por planetas con masas de $5M_{\oplus}$, $13M_{\oplus}$ y $10M_{\oplus}$, respectivamente.

En este capítulo se estudió la fiabilidad del método propuesto para predecir exoplanetas con base en la relación TB. Se encontró que dicho método tiene una probabilidad del 78 % para predecir la existencia de planetas en sistemas extrasolares. Es de resaltar que gracias a la realización de un análisis estadístico se observó que muestras aleatorias de los períodos no son exitosas al aplicarles el método propuesto en este trabajo, lo cual nos indicó que las configuraciones tipo Titius-Bode no son al azar. Este resultado da mayor confianza para examinar la hipótesis principal de esta tesis: los períodos de los exoplanetas son dependientes de interacciones dinámicas entre planetas dentro de su sistema planetario.

Los resultados descritos en este capítulo fueron publicados en el artículo titulado: "The reliability of the Titius–Bode relation and its implications for the search for exoplanets" bajo la autoría de Patricia Lara, Guadalupe Cordero-Tercero y Christine Allen [26].

Capítulo 4

Análisis dinámico de la relación TB.

Este capítulo es sobre un estudio dinámico realizado con el propósito de analizar si la relación TB es consecuencia de interacciones gravitacionales entre los planetas miembros de los sistemas planetarios. **Cabe destacar que este análisis se realizó considerando que los planetas ya están formados y que no hay interacción con el disco protoplanetario por lo que, en todo rigor, en un trabajo a futuro sería necesario realizar el análisis considerando los planetas en formación y el gas del disco el cual es muy importante sobretodo en las primeras etapas de crecimiento planetario.** Entonces en este capítulo se estudiaron dos puntos: 1) La viabilidad de la estabilidad dinámica de los sistemas planetarios observados incluyendo las predicciones hechas por la relación Titius-Bode mencionadas en el capítulo anterior. 2) La evolución orbital de sistemas aleatorios por medio de integraciones orbitales de n-cuerpos.

Para estudiar el punto 1) se realizaron simulaciones orbitales de los sistemas exoplanetarios observados con 5 planetas o más incluyendo las predicciones hechas en el capítulo anterior, esto con el propósito de analizar si estas predicciones se pueden mantener estables en dichos sistemas y examinar si realmente se mantienen en órbitas cuantizadas, en el sentido que los planetas detectados más los planetas predichos ocupan órbitas de acuerdo con la relación TB. El propósito del punto 2) es estudiar si la relación TB es el reflejo de la evolución orbital de un sistema planetario con planetas ya formados que tienden a una estabilidad orbital después de interaccionar entre sí y que ésta se logra cuando las órbitas están en una configuración orbital tipo TB. Para eso se propuso la realización de simulaciones orbitales de sistemas planetarios ficticios azarosos con el objetivo de estudiar la evolución orbital de planetas ya formados sin ningún componente de fluido o polvo y estudiar las características de estabilidad de dichos sistemas.

4.1. Sistemas exoplanetarios observados

Se realizaron simulaciones de dos tipos de sistemas planetarios: sistemas exoplanetarios azarosos tipo solar y sistemas exoplanetarios observados con 5 planetas o más a los que

se les agregaron planetas en las posiciones predichas por la relación Titius-Bode (Capítulo 3). Debido a que las condiciones iniciales de las simulaciones son diferentes, la metodología aplicada en cada caso se va a tratar en dos apartados distintos (4.1.1 y 4.2.1). En ambos casos se empleó el software Mercury para las integraciones orbitales, el cual es capaz de simular sistemas planetarios y calcular los encuentros cercanos entre planetas.

4.1.1. Metodología

En esta sección se describen las simulaciones llevadas a cabo con los 27 sistemas exoplanetarios que contienen 5 planetas o más incluyendo los objetos predichos por la relación TB (Capítulo 3). Se decidió empezar con estos sistemas porque se tiene mayor información sobre ellos (masas, periodos) y por tanto son un buen punto de comparación con los sistemas azarosos.

La relación Titius-Bode predice cuerpos entre los planetas observados en 20 sistemas exoplanetarios de nuestra muestra de 27 sistemas con 5 planetas o más. Como se ha mencionado, el programa que se utilizó para simulaciones es el integrador de n-cuerpos Mercury. Antes de emplearlo se hicieron pruebas para estudiar su funcionamiento, dichas pruebas se pueden consultar en el apéndice A.3.

Para realizar una simulación, el software Mercury requiere de los siguientes elementos orbitales: semieje mayor (ua), excentricidad, inclinación ($^{\circ}$), argumento del periaastro($^{\circ}$), nodo ascendente ($^{\circ}$) y anomalía media($^{\circ}$). También se deben de insertar los valores de la masa de la estrella y de los planetas en cuestión, ambas en unidades de masas solares. Los datos de los planetas observados se obtuvieron de los catálogos de exoplanetas <https://exoplanet.eu> y <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>.

En los catálogos mencionados se muestra la longitud del periaastro, $\bar{\omega}$, de algunos sistemas de los que estamos analizando, entonces para determinar la longitud del nodo ascendente, Ω , se empleó la relación:

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega, \quad (4.1)$$

donde ω es el argumento del periaastro. El valor de la longitud del periaastro $\bar{\omega}$ se crea al azar.

Cuando los ángulos requeridos no estaban determinados para los planetas observados, se generaron al azar.

De los 27 sistemas estudiados en el capítulo anterior, 7 se ajustan y cumplen todos los criterios de un caso exitoso sin vacantes. De estos, sólo 2 sistemas exoplanetarios tienen masas determinadas de sus planetas, razón por la cual también se simularán para comprobar su estabilidad orbital.

En el caso de los sistemas a los que se les determinó vacantes, a éstas se les asoció el semieje mayor predicho por la relación TB, mientras que a sus masas se les asignó el valor de la masa mínima detectable de acuerdo a la técnica de observación con la que se observó el sistema en cuestión. Los valores se emplearon en unidades de masas solares pues así lo requiere el integrador. Las órbitas para las vacantes iniciaron con excentricidad cero y sin inclinación. La longitud del periastro y la anomalía media se generaron al azar. Debido a que inicialmente las órbitas de las vacantes son circulares y sin inclinación, el nodo ascendente se considera igual a cero. En la tabla 4.1 se muestran los datos de las condiciones iniciales de los sistemas que se simularon.

De acuerdo a las tablas 3.3 y 3.4, de los 20 sistemas en los que se determinó la necesidad de vacantes, en 6 sistemas exoplanetarios se predijo 1 vacante entre los planetas observados, en 9 sistemas se predijeron 2 vacantes, en 3 sistemas se predijeron 3 vacantes, y en dos sistemas se predijeron 4 vacantes. De los 27 sistemas planetarios, sólo se han determinado las masas de 13 de ellos, razón por la cual sólo estos 13 sistemas se simularon (véase en la Tabla 4.1).

En cada uno de los 6 sistemas con una vacante se consideraron dos escenarios: en el primero se tomaron en cuenta solamente los planetas observados; mientras que en el segundo, se insertó la vacante. En el caso de sistemas con dos vacantes se hicieron simulaciones con los planetas observados, simulaciones con éstos más las dos vacantes y simulaciones de cada una de las combinaciones usando todos los planetas observados más cada una de las vacantes por separado. De forma similar para sistemas con 3 o 4 vacantes se realizaron simulaciones usando los planetas observados más las vacantes en diferentes combinaciones: el total de los vacantes, un caso con cada una de las vacantes y las diferentes combinaciones con las vacantes.

El tiempo de simulación de cada una de las integraciones es de 50 millones de años. Se escogió este tiempo porque las pruebas mostraron que las interacciones orbitales importantes ocurren dentro de ese intervalo de tiempo. El paso de integración que se determinó en las pruebas para los planetas extrasolares es de 0.1 días. La razón de esta elección se puede consultar en el apéndice A.3.

Tabla 4.1: Condiciones iniciales empleadas en las simulaciones de los sistemas exoplanetarios con 5 planetas o más junto con sus vacantes predichas.

Planeta	Masa (M_{\odot})	a (UA)	e	i	ω ($^{\circ}$)	Ω ($^{\circ}$)	M ($^{\circ}$)
Kepler-20 b	2.9133E-05	0.0463	0.03	0.00	33	163	249
Kepler-20 e	9.0100E-06	0.0639	0.02	0.00	30	148	142
Kepler-20 c	4.8060E-05	0.0949	0.16	0.00	113	191	349
Kepler-20 f	4.2049E-05	0.1396	0.03	0.00	37	187	25
Kepler-20 g	5.8799E-05	0.2055	0.15	0.00	29	121	39
Kepler-20 d	6.0000E-05	0.3506	0.60	0.00	115	70	251
K2-138 b	9.3110E-06	0.0338	0.05	0.00	34	166	172
K2-138 c	1.8950E-06	0.0446	0.05	0.00	97	48	161
K2-138 d	2.3790E-05	0.0589	0.04	0.00	146	110	64
K2-138 e	3.8960E-05	0.0782	0.08	0.00	43	50	95
K2-138 f	4.8960E-06	0.1045	0.06	0.00	85	251	160
55 Cancri e	2.4247E-05	0.01544	0.00	7.7	170	190	2
55 Cancri b	7.9289E-04	0.11523	0.00	0.00	110	12	65
55 Cancri c	1.6363E-04	0.241376	0.02	0.00	356	0	305
55 Cancri f	1.3460E-04	0.7880	0.31	0.00	139	27	8
55 Cancri d	3.7019E-03	5.5030	0.02	0.00	254	50	100
55 Cancri vac1	5.4000E-06	0.0397	0.00	0.00	191	47	8
55 Cancri vac2	3.0000E-05	2.0220	0.00	0.00	279	60	91
HD 40307 b	1.2027E-05	0.0468	0.20	0.00	10	68	38
HD 40307 c	1.9855E-05	0.0799	0.06	0.00	5	40	207
HD 40307 d	2.8542E-05	0.1321	0.07	0.00	8	168	182
HD 40307 f	1.5655E-05	0.2470	0.02	0.00	43	108	187
HD 40307 g	2.1287E-05	0.6000	0.29	0.00	59	16	287
HD 40307 vac1	1.5017E-05	0.3816	0.00	0.00	53	167	132
Kepler-102 b	1.33644E-05	0.0554	0.00	0.00	259	56	88
Kepler-102 c	8.97324E-06	0.0672	0.00	0.00	37	10	357
Kepler-102 d	1.14552E-05	0.0864	0.00	0.00	347	2	56
Kepler-102 e	2.67288E-05	0.1165	0.00	0.00	186	180	114
Kepler-102 f	1.52736E-05	0.1781	0.00	0.00	105	97	274
Kepler-102 vac1	3.00000E-07	0.0977	0.00	0.00	75	120	32
Kepler-102 vac2	4.50520E-07	0.1389	0.00	0.00	26	56	23
Kepler-122 b	4.50520E-05	0.0640	0.00	0.00	47	9	0

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.1 – Continuación de la página previa

Planeta	Masa (M_{\odot})	a (UA)	e	i	ω ($^{\circ}$)	Ω ($^{\circ}$)	M ($^{\circ}$)
Kepler-122 c	9.01050E-05	0.1080	0.00	0.00	19	130	165
Kepler-122 d	3.00300E-05	0.1550	0.00	0.00	110	95	145
Kepler-122 e	4.50500E-05	0.2270	0.00	0.00	89	83	119
Kepler-122 f	1.50170E-05	0.2864	0.00	0.00	32	78	232
Kepler-122 vac1	2.40000E-07	0.0825	0.00	0.00	62	191	331
Kepler-154 e	1.8021E-05	0.0460	0.00	0.00	52	68	93
Kepler-154 f	1.8021E-05	0.0900	0.00	0.00	131	48	342
Kepler-154 d	3.3039E-05	0.1442	0.00	0.00	22	196	290
Kepler-154 b	3.1537E-05	0.1980	0.00	0.00	54	19	289
Kepler-154 c	3.3039E-05	0.3030	0.00	0.00	36	82	341
Kepler-154 vac1	2.4027E-07	0.0650	0.00	0.00	65	48	321
Kepler-238 b	1.0933E-05	0.034	0.00	0.00	35	184	327
Kepler-238 c	1.8933E-05	0.069	0.00	0.00	11	22	289
Kepler-238 d	2.8950E-05	0.115	0.00	0.00	37	136	278
Kepler-238 e	5.0970E-04	0.1613	0.00	0.00	94	222	94
Kepler-238 f	4.0547E-05	0.301	0.00	0.00	71	84	6
Kepler-238 vac1	1.8021E-07	0.0468	0.00	0.00	121	206	86
Kepler-62 b	2.67288E-05	0.053	0.00	0.8	224	29	81
Kepler-62 c	1.2028E-05	0.0929	0.00	0.30	251	100	10
Kepler-62 d	4.200E-05	0.12	0.00	0.30	105	249	41
Kepler-62 e	1.078E-04	0.427	0.00	0.02	145	81	21
Kepler-62 f	1.050E-04	0.718	0.00	0.10	80	151	90
Kepler-62 vac1	6.006E-07	0.019546	0.00	0.00	151	75	86
Kepler-62 vac2	6.006E-07	0.2962	0.00	0.00	182	0	81
HD 219134 b	1.4223E-05	0.03876	0	4.95	133	28	52
HD 219134 c	1.3220E-05	0.0653	0.062	2.62	15	140	68
HD 219134 d	4.8570E-05	0.237	0.138	0	70	0	93
HD 219134 f	2.1926E-05	0.1463	0.148	0	18	28	6
HD 219134 g	3.2456E-05	0.3753	0	0	64	191	3
HD 219134 h	2.6731E-04	3.11	0.06	0	144	94	353
HD 219134 vac1	3.0000E-05	0.8349	0	0	220	95	193
HD 219134 vac2	3.5000E-05	1.5562	0	0	40	312	11
Kepler-11 b	5.7276E-06	0.091	0.045	0.06	46	15	352
Kepler-11 c	8.5914E-06	0.107	0.026	0.41	90	11	293

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.1 – Continuación de la página previa

Planeta	Masa (M_{\odot})	a (UA)	e	i	ω ($^{\circ}$)	Ω ($^{\circ}$)	M ($^{\circ}$)
Kepler-11 d	2.1956E-05	0.155	0.004	0.33	180	72	210
Kepler-11 e	2.3865E-05	0.195	0.012	0.11	205	147	62
Kepler-11 f	5.7276E-06	0.25	0.013	0.53	240	53	213
Kepler-11 g	7.5413E-05	0.466	0.15	0.13	56	33	33
Kepler-11 vac1	9.0104E-07	0.342	0	0	190	12	184
GJ 667C b	1.6800E-05	0.0505	0.13	0	5.7	55	40
GJ 667C c	1.1455E-05	0.125	0.02	0	292	115	10
GJ 667C f	8.1141E-05	0.156	0.03	0	103	256	90
GJ 667C e	8.1141E-05	0.213	0.02	0	28.65	109	48
GJ 667C d	1.5312E-05	0.276	0.03	0	40.11	120	283
GJ 667C g	1.3842E-05	0.549	0.08	0	51.56	275	164
GJ 667C 1vac	6.0060E-06	0.06689	0	0	269	1	8
GJ 667C 2vac	6.0060E-06	0.08977	0	0	229	69	15
GJ 667C 3vac	1.2014E-05	0.3874	0	0	22	154	188
HD 34445 e	5.0498E-05	0.2687	0.09	0	42	59	191
HD 34445 d	9.2596E-05	0.4817	0.027	0	35	210	336
HD 34445 c	1.6037E-04	0.7181	0.036	0	114	34	268
HD 34445 f	1.1360E-05	1.543	0.031	0	74	10	192
HD 34445 b	7.8277E-04	2.07	0.27	0	164	78	347
HD 34445 g	3.6275E-04	6.36	0.032	0	218	69	243
HD 34445 vac1	1.5017E-05	0.3678	0	0	317	188	26
HD 34445 vac2	3.0035E-05	1.0708	0	0	256	9	282
HD 34445 vac3	4.5052E-05	3.1184	0	0	94	143	153
HD 34445 vac4	5.4063E-05	4.453	0	0	141	120	139

4.1.2. Resultados

En el capítulo 3 se mostró que, empleando el método propuesto para evaluar la existencia de más planetas en los sistemas exoplanetarios estudiados, la relación Titius-Bode tiene una probabilidad del 78 % de predecir nuevos exoplanetas.

De los 27 sistemas analizados, sólo 13 sistemas exoplanetarios tienen valores de masas determinados; por esta razón solamente se simuló esos 13 sistemas contemplando varios escenarios que incluyen tanto simulaciones dinámicas de los objetos observados como de los sistemas con sus vacantes. Los sistemas exoplanetarios simulados fueron K2-138, Kepler-20, 55 Cancri, Kepler-102, HD 40307, Kepler-154, Kepler-238, Kepler-62, HD 219134, Kepler-11,

GJ 667C, HD 34445 y Kepler-122.

Los sistemas planetarios en los que la relación TB predice un planeta son HD 40307, Kepler-154, Kepler-238, Kepler-11 y Kepler-122. En los sistemas que se predicen dos planetas son 55 Cancri, Kepler-102, Kepler-62 y HD 219134. El sistema GJ 667C tiene 3 vacantes predichas y el sistema HD 34445 tiene 4 vacantes. En los sistemas K2-138 y Kepler-20 no se predice ninguna vacante. Todos estos sistemas son casos exitosos de acuerdo al método empleado en el capítulo 3 exceptuando el sistema Kepler-122. Este último fue un caso no exitoso ya que las vacantes encontradas al hacer el ajuste con los 4 primeros planetas no coinciden con las predicciones resultantes del ajuste con los 5 planetas observados.

En la tabla 4.2 se muestran los resultados de las simulaciones. La primera columna es simplemente un número de orden, la segunda columna muestra el nombre del sistema exoplanetario, la tercera columna exhibe los escenarios simulados mientras que la cuarta y quinta columnas presentan información sobre si el sistemas con esas condiciones es estable o inestable (una **X** en la columna indica que el sistema cumple con la condición indicada en el encabezado). Los casos en negritas indican los escenarios exitosos de acuerdo con el método empleado en el capítulo 3 (compárese con la Tabla 3.1). El sistema Kepler-122 tiene un asterisco porque es un caso no-exitoso (Sección 3.3).

Un sistema se denominará como inestable cuando uno o más planetas son arrojados del sistema o cuando chocan con su estrella. Un sistema es considerado estable cuando al término de la simulación tanto los planetas observados como las vacantes se mantienen. En ninguno de los casos simulados que permanecieron estables, los planetas en los sistemas cambiaron de número de orden, fueron arrojados, o el valor de su semieje cambio en más de 2%.

Tabla 4.2: Resultados de las simulaciones de los sistemas exoplanetarios con 5 planetas o más con sus vacantes predichos.

	Sistema planetario	Caso	Estable	Inestable
1	K2-138	Observados	X	
2	Kepler-20	Observados	X	
3	Kepler-154	Observados Observados + vacante 1	X X	
4	Kepler-238	Observados Observados + vacante 1	X X	
5	HD 40307	Observados	X	

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.2 – Continuación de la página previa

Sistema planetario	Caso	Estable	Inestable
	Observados + vacante 1		X
6 Kepler-11	Observados	X	
	Observados + vacante 1		X
7 Kepler-122*	Observados	X	
	Observados + vacante 1		X
8 55 Cancri	Observados	X	
	Observados + vacante 1	X	
	Observados + vacante 2	X	
	Observados + 2 vacantes	X	
9 Kepler-102	Observados		X
	Observados + vacante 1	X	
	Observados + vacante 2		X
	Observados + 2 vacantes		X
10 Kepler-62	Observados	X	
	Observados + vacante 1	X	
	Observados + vacante 2	X	
	Observados + 2 vacantes	X	
11 HD 219134	Observados	X	
	Observados + vacante 1	X	
	Observados + vacante 2	X	
	Observados + 2 vacantes	X	
12 GJ 667C	Observados		X
	Observados + vacante 1		X
	Observados + vacante 2		X
	Observados + vacante 3		X
	Observados + vacante 1 + vacante 2		X
	Observados + vacante 1 + vacante 3		X
	Observados + vacante 2 + vacante 3		X
	Observados + 3 vacantes		X
13 HD 34445	Observados	X	
	Observados + vacante 1		X

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.2 – Continuación de la página previa

Sistema planetario	Caso	Estable	Inestable
HD 34445	Observados + vacante 2		X
	Observados + vacante 3		X
	Observados + vacante 4		X
	Observados + vacante 1 + vacante 2		X
	Observados + vacante 1 + vacante 3		X
	Observados + vacante 1 + vacante 4		X
	Observados + vacante 2 + vacante 3		X
	Observados + vacante 3 + vacante 4		X
	Observados + vacante 1 + vacante 2 + vacante 3		X
	Observados + vacante 1 + vacante 2 + vacante 4		X
	Observados + vacante 2 + vacante 3 + vacante 4		X
	Observados + vacante 1 + vacante 3 + vacante 4		X
	Observados + 4 vacantes		X

4.1.3. Discusión

En la sección pasada se mostraron los resultados de las simulaciones de los sistemas exoplanetarios que contaban con datos de la masa de sus planetas. Estos fueron: K2-138, Kepler-20, 55 Cancri, HD 40307, Kepler-102, Kepler-122, Kepler-154, Kepler-238, Kepler-62, HD 219124, Kepler-11, GJ 667C y HD 34445. De estos sistemas, en 7 se mantienen estables todos los planetas observados y sus vacantes predichas por la relación TB. Los sistemas en donde no se mantienen estables las vacantes son 6: HD 40307, Kepler-11, Kepler-122, Kepler-102, HD 34445 y GJ 667C.

En sistemas exoplanetarios de 5 planetas o más, hemos obtenido casos que son exitosos del método implementado, de estos casos se tiene mayor confianza en las predicciones que hace la relación TB.

En la Tabla 4.2 se muestra que puede haber diferentes escenarios estables en un sistema exoplanetario además del escenario exitoso. Cuando se consideran los exoplanetas más vacantes se observó que en estos sistemas, cuando son estables, el semieje mayor cambia en menos de 2% durante todo el tiempo de la simulación; por ejemplo el sistema K2-138.

En el caso de los sistemas inestables se observa que dicha inestabilidad empieza muy pronto en la simulación, aproximadamente entre 4×10^3 y 19.5×10^6 años. La configuración orbital final de todos los sistemas se alcanzó en tiempos menores a 45 millones de años (Kepler-102 es el sistema que tardó más en llegar a su configuración final). En todos los sistemas que resultan inestables, en particular ninguna vacante se mantiene estable. En la Figura 4.1 se

muestra la evolución de los planetas más la vacante del sistema Kepler-11 durante 5 millones de años. Se puede apreciar el cambio de posición de sus miembros e incluso la expulsión de Kepler-11c.

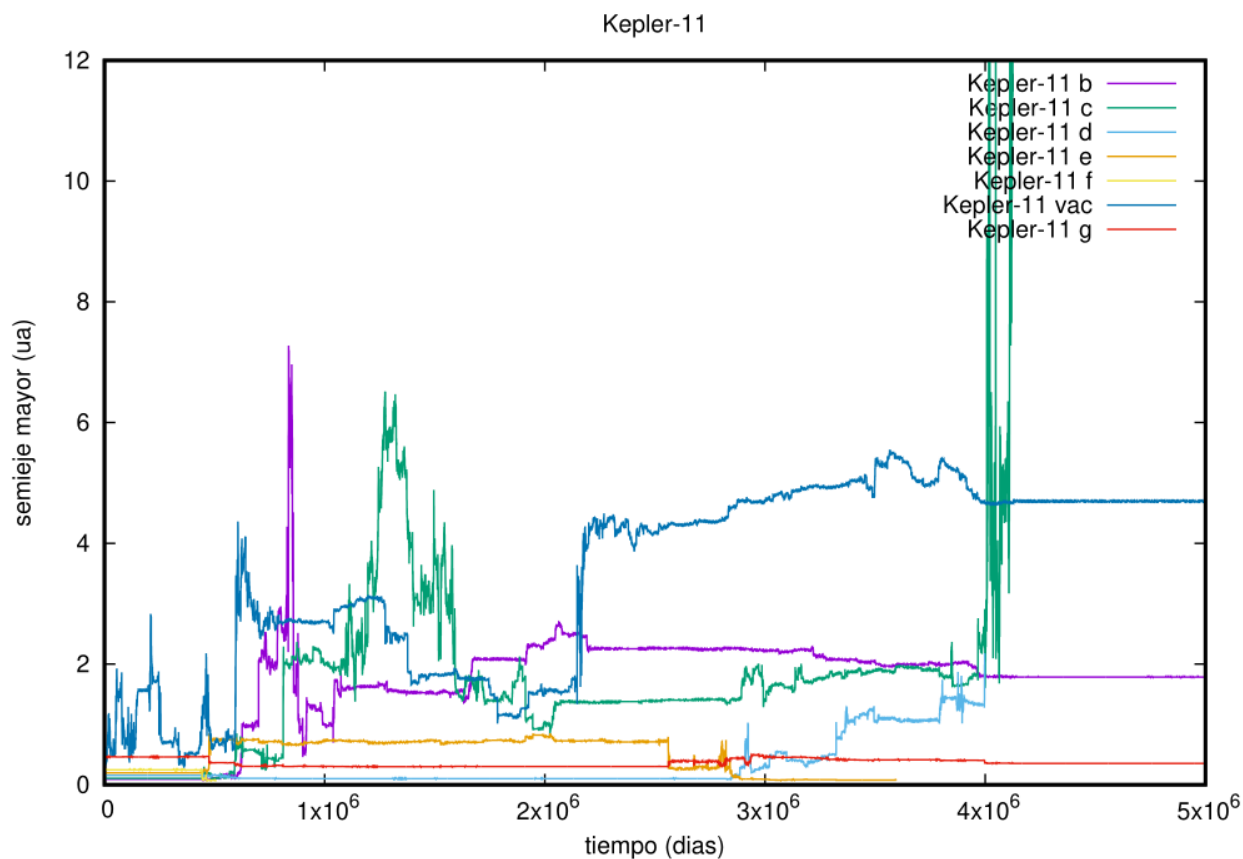


Figura 4.1: Evolución de los semiejes mayores de los planetas observados en el sistema Kepler-11 más la vacante.

Hay que recordar que las masas empleadas para las vacantes son masas que están por debajo del límite inferior de detectabilidad de las técnicas empleadas para su observación. Esta podría ser la causa de las inestabilidades obtenidas en las simulaciones. Debido a esto, en los sistemas que fueron inestables (HD 40307, Kepler-11, Kepler-122, Kepler-102, GJ 667C y HD 34445) se realizaron simulaciones donde a sus vacantes se les asignaron masas más pequeñas que las asignadas en las simulaciones mostradas en la Tabla 4.2, con la intención de identificar algún caso estable para estos sistemas. A todas las vacantes se les asignó una masa tipo de Ceres ($m = 9.39 \times 10^{20}$ kg). Lo que encontramos es que en cada uno de estos casos el sistema siguió siendo inestable.

Un punto importante, resultado de la observación de la Tabla 4.2 es que 7 de los 12 casos exitosos mostrados en esa Tabla son estables indicando que los exoplanetas predichos en el

capítulo anterior tienen una justificación dinámica en el sentido de que su existencia no altera la estabilidad del sistema.

Una de las limitaciones de las simulaciones es la masa inicial considerada pues ésta tiene un intervalo de error tanto en los planetas observados como en las vacantes, sobre todo en estas últimas pues pueden tener valores diversos por debajo del límite de detección de la técnica empleada.

Recordando que el sistema Kepler-122 es el único sistema simulado que es un caso no exitoso (ver Sección 3.3), la inestabilidad del sistema con una vacancia era esperada.

Uno de los casos más peculiares que se encontraron es el caso de GJ 667C pues el sistema es inestable tanto cuando se consideran sólo sus planetas observados como los planetas observados más vacantes. En el trabajo de Feroz y Hobson [13], en el cual se hace un análisis bayesiano en los datos de velocidad radial de los planetas detectados, se reproducen y encuentran sólo los periodos de dos planetas: GJ 667C b y c (7.19 y 28.13 días, respectivamente), y el de un tercero con un periodo de 91 días. Los autores mencionan que las afirmaciones previas de detección de los demás planetas en este sistema pueden deberse a un manejo inapropiado de las señales de ruido. Entonces una explicación de por qué las simulaciones dan como resultado escenarios inestables es que los datos de los planetas podrían ser resultado de falsos positivos.

En este trabajo hemos usado dos conceptos para analizar dinámicamente el comportamiento orbital: las resonancias y el criterio Delta del radio de Hill. En el Apéndice A.4 se muestra la ecuación empleada para calcular la delta de Hill así como la forma de obtener el error en este valor derivado de los errores en la determinación de los parámetros empleados para calcularla. En cada simulación realizada tanto en los casos de los sistemas con sólo planetas observados como en los casos de planetas observados más vacantes, se calcularon las resonancias usando los datos iniciales y finales.

De acuerdo con el criterio de la delta de Hill, los pares de planetas con una Δ mayor o igual a 10 son estables gravitacionalmente en el sentido de que sus órbitas no se perturban mutuamente. Los valores de la delta de Hill y todas las resonancias calculadas para los sistemas en estudio se muestran en las tablas A.1 y A.2 del apéndice A.2.

Usando la muestra que empleamos en la sección 3, calculamos los cocientes de los periodos de los planetas con la intención de encontrar resonancias entre ellos. Encontramos que en los sistemas estudiados el número de resonancias aumenta con el número de vacantes independientemente si el sistema es estable o inestable (Figura 4.2 y Tabla 4.3). En la Tabla 4.3 se observa que en los sistemas inestables el número de resonancias aumenta, excepto en el sistema de HD 40307.

En la figura 4.2 se puede ver que todas las resonancias encontradas en los sistemas estables también las muestran los sistemas inestables, pero estos últimos presentan 9 resonancias más

que no son observadas en los sistemas estables (1/7, 2/9, 1/4, 3/8, 1/2, 5/9, 5/7, 4/5 y 5/6). En la misma figura también se observa que el número de resonancias en los sistemas inestables es mayor que en los sistemas estables. Un dato curioso es que resonancias en el sistema solar tales como la de Ceres y Júpiter $n_{Cer/Jup} = 5/9$ y Urano y Neptuno $n_{Ura/Nep} = 1/2$ coinciden con dos resonancias en sistemas inestables.

De los casos simulados, los sistemas K2-138 y Kepler-20 son casos exitosos sin vacantes. Los dos casos se mantienen estables. En la Tabla 4.3 se ve que no tienen ningún par con la delta < 10 , lo que sostiene su estabilidad. Esto mismo ocurre en otros sistemas estables exceptuando 55 Cancri y Kepler-62 que tienen un par de planetas con una delta de Hill menor a 10. Para estos dos sistemas se calculó el error para ver si el valor estimado podría tener una delta > 10 para esos pares de planetas en conflicto en estos sistemas. Lo que se encontró es que en 55 Cancri el par de planetas tiene una delta de Hill de 9 con una incertidumbre de ± 0.6548 y en Kepler-62 de 8 ± 2.37 por lo que, dadas las incertidumbres obtenidas, los valores que tenían una delta menor a 10 podrían ser más cercanos a 10 (sobre todo en el caso de Kepler-62), validando el por qué estos dos sistemas son dinámicamente estables (ver apéndice A.4 para el cálculo de errores de la Delta de Hill). Este resultado muestra que en todas las simulaciones donde los sistemas fueron estables tienen (o podrían tener) deltas de Hill mayores a 10.

El caso contrario ocurre con los sistemas simulados inestables. Estos tienen valores de delta de Hill menores a 10 excepto en el caso de HD 40307. Incluso considerando el error de los valores de la delta en estos sistemas, el valor siempre es menor a 10.

El comportamiento peculiar del sistema HD 40307 podría ser debido a que es un sistema que ha sido controversial. En el trabajo de Diaz y colaboradores [11] se menciona que ellos encuentran sólo 4 planetas de los 6 reportados anteriormente. Ellos encontraron un error sistemático asociado a la técnica de detección. Incluso los datos no contemplan la detección del planeta HD 40307 g.

Después de este análisis se concluye que el criterio de Hill es un valor determinante para evaluar la estabilidad de los sistemas exoplanetarios observados con sus vacantes. Entonces encontramos que este criterio puede ser una condición necesaria para la existencia de un sistema planetario, confirmando el resultado obtenido por los autores Gladman y Chambers [5] [14].

El análisis realizado también muestra que la determinación precisa de los elementos orbitales es fundamental pues las condiciones iniciales de las simulaciones dependen de dichos datos.

Los resultados de estas simulaciones refuerzan la idea de que los planetas en sistemas estelares no están distribuidos de manera aleatoria alrededor de sus estrellas sino que siguen una configuración tipo Titius-Bode y ésta está relacionada con el criterio de la delta de Hill.

Tabla 4.3: Resultados de las simulaciones de los sistemas exoplanetarios con 5 planetas o más. La segunda columna de la tabla muestra el número de vacantes predichas por la relación TB, la tercera columna indica el número de pares de planetas con una delta de Hill menor a 10, mientras que la última columna muestra el número de resonancias encontradas en cada sistema.

Sistemas	Vacantes	$\Delta < 10$	Resonancias
Estables			
K2-138	0	0	6
Kepler-20	0	0	3
Kepler-154	1	0	1
Kepler-238	1	0	2
55 Cancri	2	1	1
Kepler-62	2	1	6
HD 219134	2	0	6
Inestables			
HD 40307	1	0	2
Kepler-11	1	2	6
Kepler-122	1	2	6
Kepler-102	2	5	12
GJ 667C	3	3	10
HD 34445	4	3	9

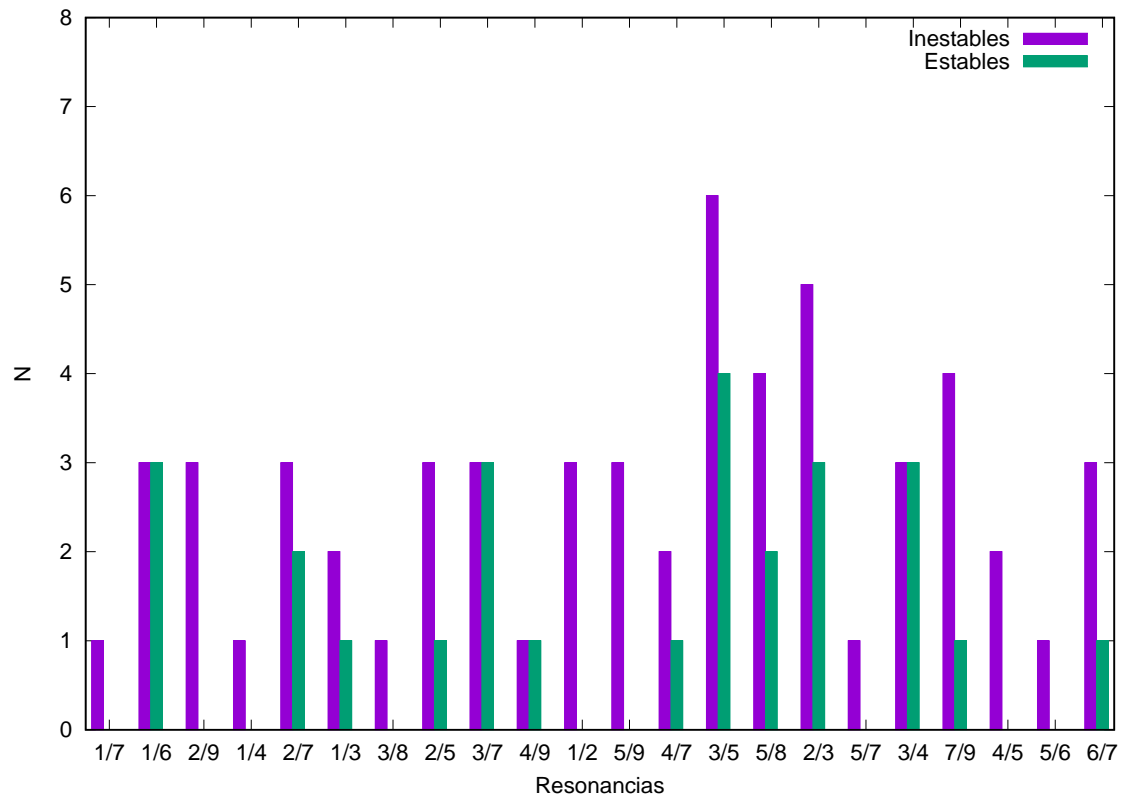


Figura 4.2: Frecuencia de las resonancias encontradas en sistemas exoplanetarios estables e inestables.

4.2. Sistemas azarosos

4.2.1. Metodología

Para probar la hipótesis de que la relación Titius-Bode puede ser el resultado de interacciones gravitacionales entre planetas que llegan a la estabilidad orbital, se generaron 100 sistemas planetarios al azar, es decir, para cada sistema se generaron 8 semiejes mayores y sus respectivas masas al azar que representarían planetas con una estrella primaria tipo solar. Las posiciones se generaron de tal manera que sus distancias a la estrella estuvieran distribuidas entre 0.38 ua (como el semieje mayor de Mercurio) y 40 ua (como Plutón). Las masas también se obtuvieron de manera aleatoria dentro de un intervalo entre la masa de Mercurio y la de Júpiter. La excentricidad y la inclinación iniciales de las órbitas fue de cero. Los ángulos de movimiento para simular los sistemas planetarios: longitud del periastro, nodo ascendente y anomalía media, se generaron al azar en el intervalo de 0° - 360° . El paso de integración elegido fue de 8 días pues es el paso de integración idóneo para sistemas tipo solar. El tiempo de integración fue de 1000 millones de años, se escogió este tiempo pues en las pruebas se observó que los encuentros cercanos entre planetas y las expulsiones ocurren dentro de ese periodo.

Hasta donde hemos entendido, la configuración de los sistemas planetarios se debe a dos componentes principales: la atracción gravitacional de las componentes sólidas del sistemas y las interacciones del gas con el polvo existentes en los discos protoplanetarios. Estas dos componentes motivan tanto las migraciones planetarios como las resonancias. En este trabajo de tesis se analizó un esquema simple en el sentido de que no se consideraron las interacciones con el gas en el disco y solamente nos centramos en estudiar la dinámica de los cuerpos considerando únicamente las interacciones gravitacionales con la estrella y entre ellos. En este sentido, el conjunto de sistemas aleatorios cumple este propósito.

4.2.2. Resultados

La simulaciones orbitales fueron realizadas mediante el integrador orbital Mercury. De los 100 casos que se simularon se obtuvo que sólo en 36 sistemas se conservaron 3 o más planetas de la siguiente manera: en 25 de ellos se mantuvieron 3 planetas, en 8 sistemas se mantuvieron 4 planetas, en un sistema se mantuvieron 5 planetas y en 2 sistemas se mantienen 6 planetas. En estos sistemas se analizó su evolución orbital mediante el cálculo del coeficiente de correlación al inicio, durante y al final de la simulación. Usando los valores iniciales (número de orden y semiejes mayores) de todos los sistemas simulados se encontró que el valor promedio del coeficiente de correlación inicial es de 0.8436 mientras que el coeficiente de correlación promedio final fue de 0.9787. Los coeficientes de correlación finales se calcularon solamente en los sistemas que mantuvieron 3 planetas o más.

En la figura 4.3 se observan los coeficientes de correlación inicial y final de los 36 sistemas azarosos que mantuvieron al menos 3 planetas al final de la simulación. En ésta se resalta

que el intervalo de los coeficientes de correlación inicial para estos sistemas fue $0.4 < R^2 < 1$, mientras que al final de la simulación los coeficientes estuvieron dentro del 0.92 a 1. Claramente se observa que los planetas evolucionaron de tal manera que su coeficiente de correlación es tal que muestra que sus órbitas tienden a una configuración tipo TB.

4.2.3. Discusión

Como lo mostraron nuestras simulaciones, los planetas de algunos sistemas evolucionan y se mantienen estables a ciertas distancias durante un tiempo determinado y después, debido a la interacción con otros planetas, cambian nuevamente de posición. A estas configuraciones orbitales en donde los planetas se mantienen estables durante cierto tiempo los llamaremos estados de estabilidad. Los estados de estabilidad son configuraciones orbitales donde no hay planetas expulsados y su distancia no varía más de 1 ua, durante cierto intervalo de tiempo. Para ilustrar mejor lo que es un estado de estabilidad, veamos el caso del sistema azaroso 17 mostrado en la figura 4.4. En ésta se muestra la evolución orbital en la cual se observan sólo dos estados de estabilidad en los intervalos de tiempo $8 \times 10^4 - 3 \times 10^5$ años (zona azul) y $4 \times 10^5 - 1 \times 10^9$ años (zona roja) pues el semieje mayor de estos planetas no varía más de 1 ua en estos intervalos de tiempo. Los coeficientes de correlación R^2 de estos estados se muestran en la tabla 4.4 en la columna marcada como "R² estados de estabilidad" (tercera y cuarta columnas). En consecuencia, en la Tabla 4.4 se muestran los coeficientes de correlación de los planetas de este sistema en esos dos estados de estabilidad (tercera y cuarta columnas). En todos los casos, la segunda columna muestra el coeficiente de correlación obtenido al inicio de la simulación y el último valor de R^2 mostrado representa el último estado de estabilidad con mínimo 3 planetas.

Si el sistema sigue evolucionando y quedan menos de 3 planetas, aunque estos se mantengan estables ya no se escribe el valor de R^2 porque éste sería 1. Si en algunos casos, como en el caso 4, no tiene coeficientes de correlación en los estados de estabilidad es debido a que el sistema se hace inestable muy rápido y no cuenta con al menos 3 planetas para calcular.

Hay algunos sistemas que sólo evolucionan a un solo estado de estabilidad, es decir, desde que inician interaccionan con los planetas cercanos en un tiempo corto, alcanzan la estabilidad y así se mantienen hasta el final.

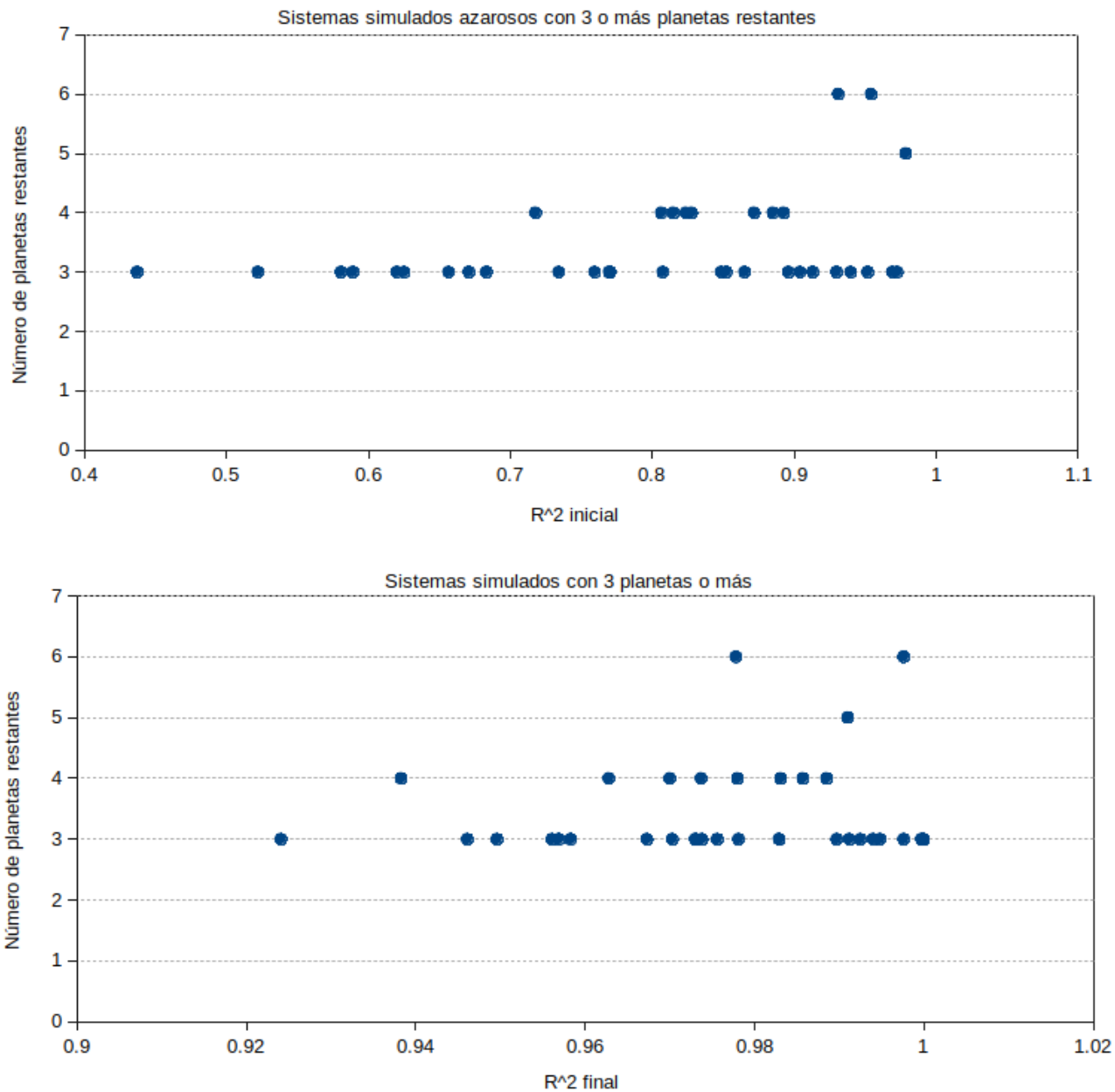


Figura 4.3: Valores del coeficiente de correlación de los 36 sistemas azarosos que mantuvieron 3 planetas o más al final de la simulación. El panel de arriba muestra los coeficientes de correlación iniciales mientras que el panel de abajo muestra los finales.

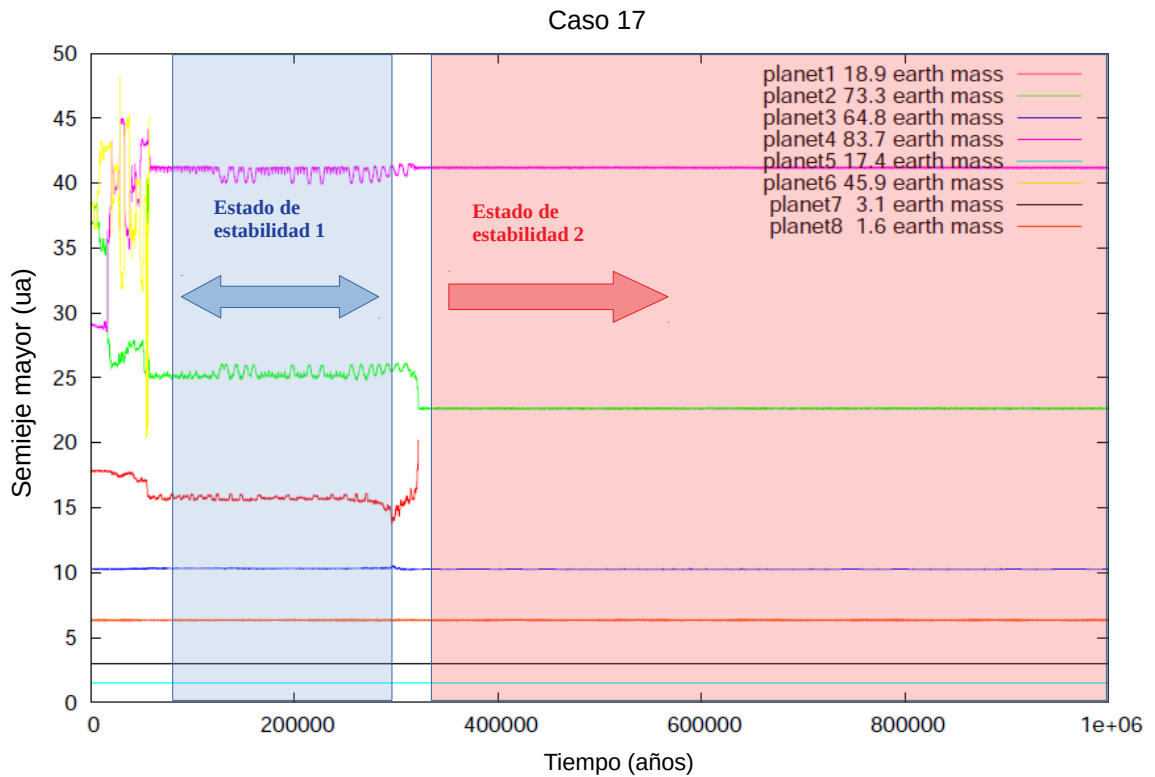


Figura 4.4: En esta gráfica se muestra la evolución orbital del caso 17 de los sistemas azarosos de $t = 0$ a $t = 1 \times 10^6$ años. Las áreas de color azul y de rojo corresponden a los intervalos de tiempo en los cuales el sistema tuvo periodos de estabilidad.

Tabla 4.4: Coeficientes de correlación de los distintos estados de estabilidad observados a lo largo de la evolución dinámica de los 100 sistemas azarosos trabajados.

Caso	R^2 estados de estabilidad							Planetas restantes
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0.9086	0.7887						2
2	0.5222	0.9476	0.9567	0.9496				3
3	0.6253	0.9999						3
4	0.9014							1
5	0.8939	0.8852	0.9722					2
6	0.9548	0.9622	0.9684					2
7	0.9615	0.9651	0.978					2
8	0.6201	0.8353	0.8762	0.9731				3
9	0.7005	0.9600	0.9616	0.9313				2
10	0.7286	0.9425	0.8481	0.9402				2
11	0.8064	0.8691	0.9886	0.9885				4
12	0.6565	0.7351	0.9461					3
13	0.9130	0.9551	0.9955	0.9976				3
14	0.8207	0.9746	0.99995	0.9882				2
15	0.9780	0.9783	0.9915	0.9910				2
16	0.8149	0.9182	0.9630	0.9628				4
17	0.9541	0.9883	0.9976					6
18	0.8975	0.9372						2
19	0.5892	0.9557	0.9706	0.99997				3
20	0.9567	0.9338						2
21	0.7737							2
22	0.8278	0.9797	0.9377	0.9383				4
23	0.9217							2
24	0.9517	0.9792	0.9700	0.9695	0.9912			3
25	0.8703	0.8415						2
26	0.9402							2
27	0.8718	0.9824	0.9695	0.9700				4
28	0.7178	0.9857						4
29	0.8444							1
30	0.8649	0.9743						1
31	0.9733							1
32	0.9478							2
33	0.9357							2
34	0.7715	0.9858	0.9831					2
35	0.7595	0.9516	0.9886	0.9823	0.9829			3
36	0.9724	0.9813	0.9212	0.9241				3

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.4 – Continuación de la página previa

Caso	R^2 estados de estabilidad							Planetas restantes
	1	2	3	4	5	6	7	
37	0.5998							1
38	0.9854							1
39	0.9758							2
40	0.8614							1
41	0.9264	0.8496						2
42	0.5619							2
43	0.6832	0.9561						3
44	0.9168							2
45	0.7416	0.9584	0.9995					2
46	0.8424							2
47	0.9298							1
48	0.8692							2
49	0.9016							2
50	0.7232							2
51	0.8850	0.9549	0.9821	0.9769	0.9780			4
52	0.6360	0.9248	0.9774					2
53	0.9151	0.9996						2
54	0.7696	0.8912	0.9709	0.9703				3
55	0.7341	0.9866	0.9862	0.99992				3
56	0.8485	0.9738						3
57	0.93096	0.9326	0.9781	0.9778				6
58	0.8650	0.9756						3
59	0.8933							2
60	0.5808	0.9089	0.9094	0.9829				3
61	0.8696	0.9560						2
62	0.8639	0.9086	0.8211					2
63	0.8959	0.9711	0.9771	0.9569				3
64	0.8926	0.9608	0.9601	0.9594	0.9831			4
65	0.9792							2
66	0.6849	0.9460	0.9513					2
67	0.9320	0.8981						1
68	0.4372	0.9781						3
69	0.9720	0.8911	0.9930					2
70	0.9298	0.9728	0.9684	0.9673				3
71	0.8521	0.9274	0.9323	0.9583				3
72	0.9621	0.9603	0.9742					1
73	0.8074	0.9336	0.9567	0.9487	0.9921	0.9919	0.9925	3
74	0.8040	0.9791	0.9364					2
75	0.9951	0.7671						2

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.4 – Continuación de la página previa

Caso	R^2 estados de estabilidad							Planetas restantes
	1	2	3	4	5	6	7	
76	0.9629							1
77	0.9514	0.9640	0.9294	0.9544	0.9785			2
78	0.8211	0.9384						2
79	0.7703	0.9816	0.9730					3
80	0.9670	0.9121						2
81	0.9343	0.9705	0.9999					2
82	0.9528	0.9736	0.9735					1
83	0.8808	0.9701	0.9674	0.9848				2
84	0.9398	0.9983	0.9783	0.9997				3
85	0.6393	0.9799	0.9559					1
86	0.8955	0.9674	0.9848					2
87	0.6708	0.994						3
88	0.8206							2
89	0.7398	0.9935	0.9580					2
90	0.9691	0.9542	0.9950	0.9948				3
91	0.6508	0.9933	0.9882	0.9895				2
92	0.9507	0.9936	0.9810					1
93	0.9041	0.9897						3
94	0.8238	0.9737						4
95	0.8220	0.9936	0.9810					2
96	0.9649							1
97	0.9862							1
98	0.9786	0.9911	0.9810	0.9910				5
99	0.8590	0.9805	0.9980					2
100	0.8020	0.9667	0.8984					2

En la figura 4.5 se muestra la variación del coeficiente de correlación durante los diferentes estados de estabilidad de sistemas que se mantuvieron con tres planetas o más. Para hacer esta figura se emplearon los datos de los sistemas identificados con un valor igual o mayor que 3 en la última columna de la tabla 4.4. Hay que resaltar que los coeficientes de correlación en general toman valores cada vez más cercanos a 1.

En todos los sistemas se aplicó el criterio de la delta del radio de Hill a los planetas al inicio y durante estados de estabilidad. Este parámetro nos permite analizar más profundamente la interacción que puede haber entre los planetas de estos sistemas simulados. En el apéndice A.4 se muestra un ejemplo de cómo se realizó el cálculo de la delta de Hill para cada par de planetas contiguos de los sistemas simulados. Como se mencionó en capítulos anteriores, este criterio sirve para evaluar si un sistema se mantiene estable o no, y brinda información del

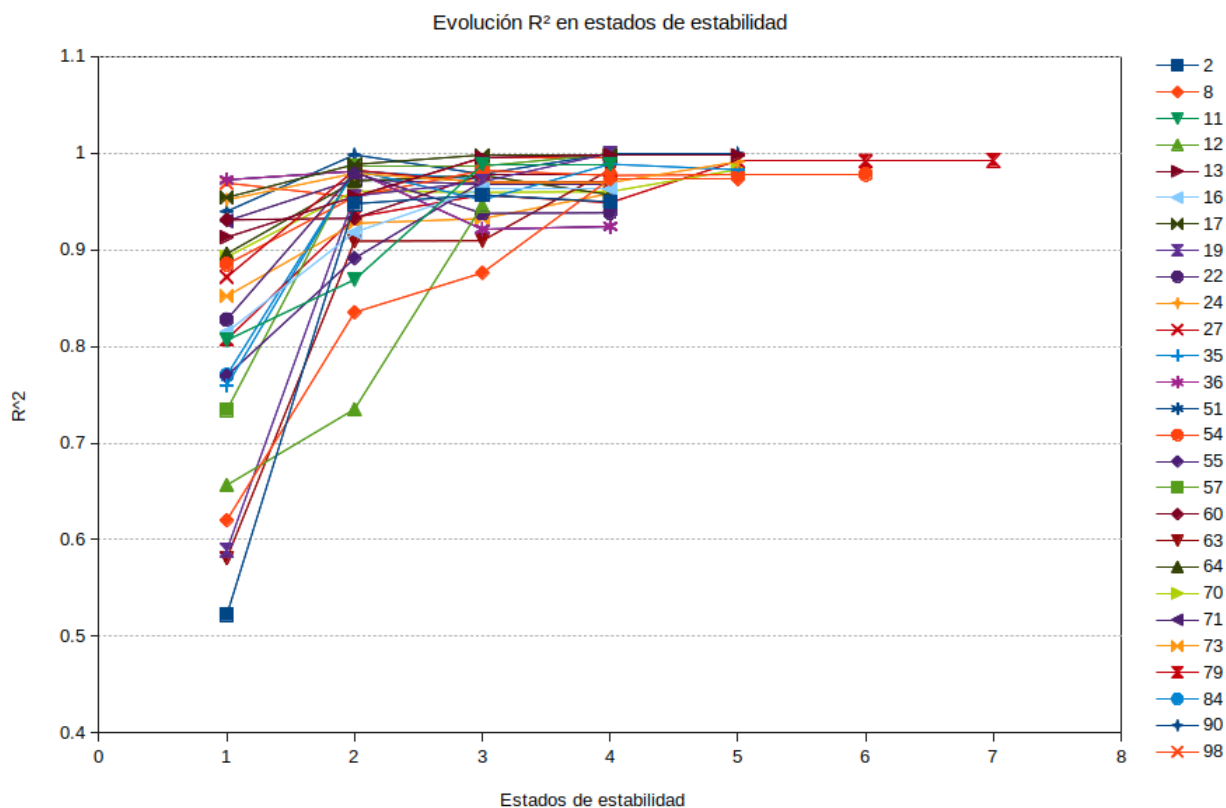


Figura 4.5: En esta gráfica se muestra cómo mejora el coeficiente de correlación de los sistemas azarosos en cada periodo de estabilidad

por qué de los estados de estabilidad o cómo se conecta con la relación TB.

Una vez que se calculó el Radio de Hill inicial para cada par de planetas en los sistemas se relacionó con el coeficiente de correlación inicial y con el número de planetas restantes al término de la simulación (Figura 4.6). Aquí también se muestra que en la gran mayoría de los sistemas que inicialmente tienen 2 o menos pares de planetas con $\delta > 10$, se conserva un menor número de planetas al final de la simulación.

En la figura 4.7 se observa un extracto de la figura 4.6 que muestra los sistemas planetarios que mantienen 4 planetas o más al final de las simulaciones. Comparando la información de ambas figuras se tiene que si un sistema tiene un mayor número inicial de pares de planetas con deltas mayores a 10 y su coeficiente es mayor a 0.7 entonces hay una tendencia a conservar un mayor número de planetas al final de la simulación y sus coeficientes de correlación aumentan.

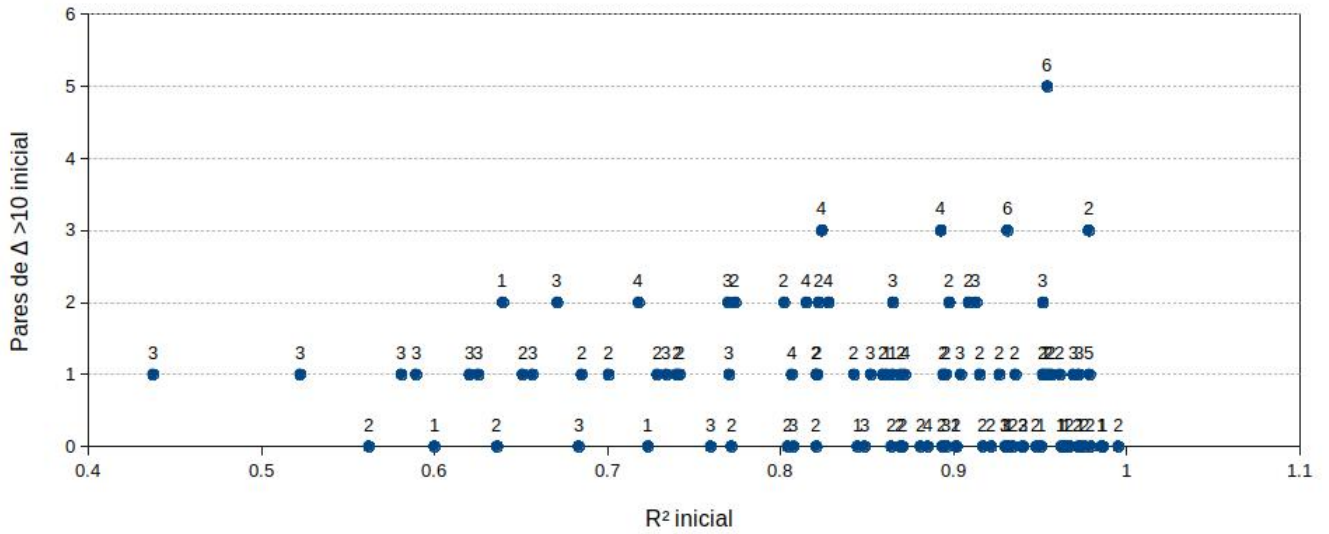


Figura 4.6: Coeficiente de correlación inicial de los sistemas azarosos.

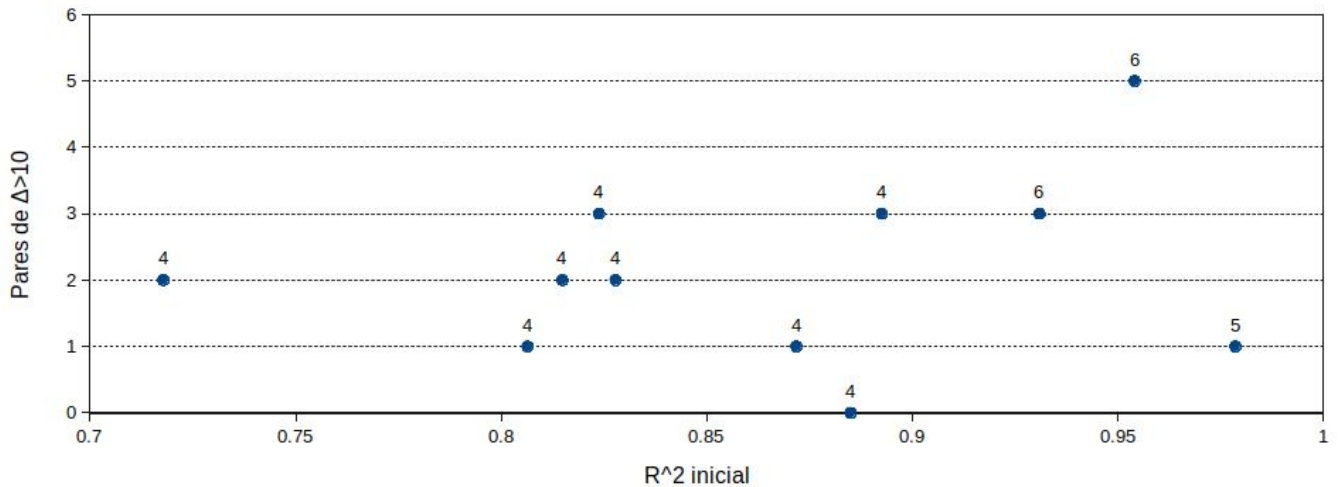


Figura 4.7: Coeficiente de correlación inicial de los sistemas azarosos que mantienen 4 planetas o más al final de las simulaciones.

Lo anterior plantea que los planetas una vez creados, si son estables, tienden a una configuración tipo Titius-Bode con unas deltas mayores a 10.

A diferencia de los sistemas observados con sus vacantes en los cuales sus componentes no cambian su número de orden, los sistemas azarosos evolucionan más rápido y sus planetas sí cambian de número de orden.

Hay que destacar que los sistemas que mantienen 3 planetas o más evolucionan a una configuración tipo Titius-Bode, es decir, que mejoran los coeficientes de correlación a un valor mayor a 0.9. Este resultado podría indicar que los arreglos orbitales tienden a ser estables en una configuración tipo Titius-Bode y el estudio estadístico que se realizó en el capítulo 3.4 da indicio de que las distancias orbitales de los sistemas exoplanetarios estudiados no se comportan de forma azarosa.

Capítulo 5

Conclusiones

En este proyecto doctoral se hicieron varios análisis de los cuales se obtuvieron resultados importantes que no se habían encontrado en trabajos anteriores.

En el análisis mostrado en el capítulo 3 se encontró que la relación Titius-Bode tiene una capacidad para predecir planetas del 78 %. Este resultado fue encontrado gracias a un método propuesto basado exclusivamente en datos observados en sistemas con al menos 5 planetas. El otro resultado obtenido en este capítulo a partir de 900 sistemas aleatorios generados con tres tipos de distribuciones de distancias, mostró que las posiciones de los planetas a su estrella no son debidas al azar.

En el capítulo 4 se llevaron a cabo dos tipos de análisis. En la sección 4.1 se realizaron simulaciones orbitales de los sistemas planetarios con sus vacantes predichas en el capítulo 3. Los resultados de las simulaciones mostraron que el estado final de los sistemas va a depender de qué tan bien se conocen los elementos orbitales y las masas de los planetas. En sistemas en los cuales se esperaría que el resultado fuera que sean estables se encontró que tienen planetas cuyo descubrimiento está puesto en duda, por ejemplo GJ 667C. Los cálculos mostraron que la estabilidad de los sistemas planetarios podría estar determinada por el criterio de la Delta de Hill.

En la sección 3.5 realizamos el cálculo de la Zona Habitable en la muestra propuesta, y encontramos que en tres sistemas, los cuales son casos exitosos (HD 40307, HD 219134 y HD 34445), hay predicciones que caen dentro de esta zona y podrían ser más confiables. Los resultados de las simulaciones dinámicas de dichos sistemas nos muestran que el sistema HD 219134 es el único estable; haciendo viable la existencia de un planeta con un periodo de 309.64 días con una masa de 13 masas terrestres.

En la sección 4.2 donde se realizaron simulaciones de sistemas generados al azar se encontró que los sistemas que conservaron más de 3 planetas al final del tiempo de simulación tienden a una relación tipo Titius-Bode.

Esto se puede aseverar porque en cada estado de estabilidad (tal como se definió en la sección 4.2.3), el coeficiente de correlación fue en aumento hasta alcanzar valores finales mayores a 0.900.

De igual manera se encontró que en sistemas que mantienen más planetas, más de 3 al final de la simulación, sus pares de planetas contiguos, están separados entre sí por un factor mayor que $\Delta = 10$, lo cual refuerza la estabilidad de estos planetas.

De los dos análisis se puede decir que la configuración orbital tiende a una relación TB. Puede ser que una vez creados, los sistemas evolucionen a una configuración Titius-Bode o que se formen en configuraciones TB pero para que se mantengan estables es necesario que las interacciones gravitacionales entre planetas a través de las resonancias cumplan el criterio de estabilidad de la Δ mayor a 10.

Si el criterio Δ es determinante para que un sistema no se destruya, se podría emplear este valor para evaluar las masas posibles de las vacantes de tal manera que el sistema fuera estable. Este sería un trabajo a futuro.

Recapitulando: simulaciones de sistemas generados al azar muestran que éstos tienden a evolucionar orbitalmente a configuraciones tipo TB. Tanto en simulaciones de sistemas exoplanetarios observados como azarosos se muestra que el factor del radio Hill es determinante para que los planetas se mantengan estables. La relación Titius-Bode no ha tenido gran importancia y ha sido menospreciada por su falta de explicación física, sin embargo, en este trabajo se ha mostrado que las configuraciones TB no son al azar e incluso tienen capacidad predictiva. Las simulaciones orbitales realizadas justifican dinámicamente la existencia de los planetas predichos de acuerdo con la metodología propuesta en este trabajo.

Apéndices

A.1. Propagación de errores en los ajustes

Para obtener los parámetros a y c que definen una recta $y = a + cx$ empleando el método de mínimos cuadrados se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$c = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2}, y \quad (\text{A.1})$$

$$a = \bar{y} - c\bar{x} \quad (\text{A.2})$$

donde a y c son las constantes a determinar, x y y son los valores por ajustar, y \bar{x} y \bar{y} son los valores promedio.

Para el tipo de relación exponencial que tenemos para la relación TB hacemos la siguiente conversión

$$p = p_0 e^{bn} \quad (\text{A.3})$$

$$\rightarrow \ln p = \ln p_0 + \ln e^{bn} = \ln p_0 + bn \quad (\text{A.4})$$

Entonces

$$\ln p = y, \ln p_0 = a, n = x \text{ y } b = c \quad (\text{A.5})$$

Encontramos la propagación de errores de la relación TB de la siguiente manera

$$p = p_0 e^{bn} \quad (\text{A.6})$$

$$\delta p = \delta(p_0 e^{bn}) = p_0 e^{bn} n \delta b + e^{bn} \delta p_0 \quad (\text{A.7})$$

Para calcular los errores, δp_0 y δb , se emplean las ecuaciones para el ajuste por mínimos cuadrados:

$$\delta b = \delta \frac{\sum(n - \bar{n})(\ln p - \ln \bar{p})}{\sum(n - \bar{n})^2}, y \quad (\text{A.8})$$

$$\delta(\ln p_0) = \delta(\ln \bar{p} - b\bar{n}) \quad (\text{A.9})$$

de donde

$$\delta p_0 = p_0[\delta(\ln \bar{p} - b\bar{n})] \quad (\text{A.10})$$

Entonces sustituyendo (A.8) y (A.10) en (A.7) se obtiene el valor del error en el período estimado considerando los errores en la pendiente y la ordenada al origen del ajuste realizado a los datos.

A.2. Tablas de los valores de resonancias y delta de Hill en los sistemas exoplanetarios

La Tabla A.1 muestra los resultados para sistemas estables y se explica de la siguiente manera:

- **Columna 1** (n): El número de los planetas por sistema.
- **Columna 2** (Planeta): Designación del planeta.
- **Columna 3** (a): Semieje mayor del planeta en unidades astronómicas.
- **Columna 4** (Delta): Valor de la Delta de Hill para cada par de planetas adyacentes. Este valor se registra en el segundo planeta más alejado del par.
- **Columna 5** (Resonancias): Cada una de las columnas 1 a 7 tiene dos subcolumnas en las que la primera muestra los valores de los cocientes del periodo de uno de los planetas con todos los demás del sistema; mientras que la segunda muestra dónde hay resonancias y su valor.
 - **Subcolumna 1** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 1$.
 - **Subcolumna 2** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 2$.
 - **Subcolumna 3** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 3$.
 - **Subcolumna 4** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 4$.
 - **Subcolumna 5** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 5$.
 - **Subcolumna 6** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 6$.
 - **Subcolumna 7** Resultados de las resonancias respecto al planeta $n = 7$.

Nótese que no todas estas siete columnas tienen valores pues depende del número de planetas en el sistema.

La Tabla A.2 muestra los resultados para los sistemas inestables y su explicación es la misma que la de la Tabla A.1.

Tabla A.1: Valores de resonancias y delta de Hill en los sistemas exoplanetarios más sus vacantes con simulaciones estables

n	Planeta	a (ua)	Delta	1	2	3	4	5	6	7
1	K2-138 b	0.03385								
2	K2-138 c	0.04461	17	0.7588						
3	K2-138 d	0.05893	13	0.5744	3/7					
4	K2-138 e	0.0782	10	0.4329	0.5705	4/7	0.7536	3/4		
5	K2-138 f	0.10447	11	0.3240	0.4270	3/7	0.5641	0.7485	3/4	
1	Kepler-20 b	0.0463								
2	Kepler-20 e	0.0639	13	0.7246	-					
3	Kepler-20 c	0.0949	14	0.4879	-	0.6733				
4	Kepler-20 f	0.139	12	0.3331	1/3	0.4597	2/3	0.6827	-	
5	Kepler-20 g	0.2055	12	0.2253	-	0.3109	-	0.4618	-	0.6764
6	Kepler-20 d	0.3506	15	0.1321	-	0.1823	-	0.2707	-	0.3965
										0.5861
1	Kepler-154 e	0.046								
2	Kepler-154 f	0.090	27	0.5111	-					
3	Kepler-154 d	0.1442	17	0.319	-	0.6241	5/8			
4	Kepler-154 b	0.198	11	0.2322	-	0.4543	-	0.7279	-	
5	Kepler-154 c	0.303	14	0.1518	-	0.297	-	0.4759	-	0.6538
1	Kepler-154 e	0.046								
2	vac	0.065	14	0.7077	-					
3	Kepler-154f	0.090	13	0.5111	-	0.7222	-			
4	Kepler-154 d	0.1442	17	0.3190	-	0.4508	-	0.6241	5/8	
5	Kepler-154 b	0.198	11	0.2322	-	0.3281	-	0.4543	-	0.7279
6	Kepler-154 c	0.303	14	0.1518	-	0.2145	-	0.2970	-	0.4759
										0.6538
1	Kepler-238 b	0.034								
2	Kepler-238 c	0.069	28	0.4928	-					
3	Kepler-238 d	0.115	17	0.2957	-	0.6000	3/5			
4	Kepler-238 e	0.161	12	0.2108	-	0.4278	-	0.7130	-	
5	Kepler-238 f	0.301	22	0.1130	-	0.2292	-	0.3821	-	0.5359
1	Kepler-238 b	0.034								
2	vac	0.0468	16	0.7265	-					
3	Kepler-238 c	0.069	16	0.4928	-	0.6783	-			
4	Kepler-238 d	0.115	17	0.2957	-	0.4070	-	0.6000	3/5	
5	Kepler-238 e	0.161	12	0.2108	-	0.2901	-	0.4278	3/7	0.7130
6	Kepler-238 f	0.301	22	0.1130	-	0.1555	-	0.2292	-	0.3821
										0.5359
1	55 Cancri e	0.0154								
2	55 Cancri b	0.1152	23	0.1337	-					
3	55 Cancri c	0.2409	10	0.0639	-	0.4782	-			
4	55 Cancri f	0.7838	22	0.0196	-	0.1470	-	0.3073	-	
5	55 Cancri d	5.6141	14	0.0027	-	0.0205	-	0.0429	-	0.1396

Continúa en la siguiente página

Tabla A.1 – Continuación de la página previa

<i>n</i>	Planeta	<i>a</i> (ua)	Delta	1	2	3	4	5	6	7
							Resonancia			
1	55 Cancri e	0.0154								
2	vac	0.0397	40	0.3879	-					
3	55 Cancri b	0.1152	15	0.1337	-					
4	55 Cancri c	0.2409	10	0.0639	-	0.4782				
5	55 Cancri f	0.7838	22	0.0196	-	0.1470	0.3073			
6	vac	2.0418	22	0.0075	-	0.0564	0.1180	0.3839		
7	55 Cancri d	5.6141	9	0.0027	-	0.0205	0.0429	0.1396	0.3637	-
1	Kepler-62 b	0.0553								
2	Kepler-62 c	0.0929	19	0.5953	3/5					
3	Kepler-62 d	0.1200	9	0.4608	-	0.7742	7/9			
4	Kepler-62 e	0.4271	27	0.1295	-	0.2175	0.2810	1/6		
5	Kepler-62 f	0.7185	11	0.0770	-	0.1293	0.167	0.5944	3/5	
1	Kepler-62 b	0.0553								
2	Kepler-62 c	0.0929	19	0.5953	3/5					
3	Kepler-62 d	0.1200	9	0.4608	-	0.7742	7/9			
4	vac	0.1955	17	0.2829	2/7	0.4752	-	0.6138	-	
5	vac	0.2962	49	0.1867	-	0.3136	-	0.4051	-	0.6600
6	Kepler-62 e	0.4271	10	0.1295	-	0.2175	-	0.2810	-	0.4577
7	Kepler-62 f	0.7185	11	0.0770	-	0.1293	-	0.1670	1/6	0.2721
									0.5944	3/5
1	HD 219134 b	0.0388								
2	HD 219134 c	0.0653	24	0.5936	3/5					
3	HD 219134 f	0.1390	23	0.2788	-	0.4698	-			
4	HD 219134 d	0.2370	15	0.1635	-	0.2755	-	0.5865	-	
5	HD 219134 g	0.3753	8	0.1033	-	0.1740	-	0.3704	-	0.6315
6	HD 219134 h	3.1100	25	0.0125	-	0.0210	-	0.0447	-	0.0762
								0.1207	-	
1	HD 219134 b	0.0388								
2	HD 219134 c	0.0653	24	0.5936	3/5					
3	HD 219134 f	0.1390	23	0.2788	-	0.4698	-			
4	HD 219134 d	0.2370	15	0.1635	-	0.2755	-	0.5865	-	
5	HD 219134 g	0.3753	16	0.1033	-	0.1740	-	0.3704	-	0.6315
6	vac	0.8349	27	0.0464	-	0.0782	-	0.1665	1/6	0.2839
7	vac	1.5562	11	0.0249	-	0.0420	-	0.0893	-	0.1523
8	HD 219134 h	3.1100	11	0.0637	-	0.0637	-	0.0447	-	0.0762
								0.4495	4/9	
								0.2412	-	0.5365
								0.1207	-	0.2685
										0.5004
										1/2
1	Kepler-102 b	0.0550								
2	Kepler-102 c	0.0670	9	0.8209	-					
3	Kepler-102 d	0.0860	12	0.6395	-	0.7791	-			
4	Kepler-102 e	0.1170	6	0.4701	-	0.5726	4/7	0.7350	-	
5	Kepler-102 f	0.1650	7	0.3333	1/3	0.4061	-	0.5212	-	0.7091
1	Kepler-102 b	0.0550								

Continúa en la siguiente página

Tabla A.1 – Continuación de la página previa

n	Planeta	a (ua)	Delta	1	2	3	4	5	6	7
2	Kepler-102 c	0.0670	9	0.8209	-	-	-	-	-	-
3	Kepler-102 d	0.0860	12	0.6395	-	0.7791	7/9	-	-	-
4	vac	0.9977	7	0.5513	5/9	0.6715	2/3	0.8620	6/7	-
5	Kepler-102 e	0.1170	4	0.4701	-	0.5726	4/7	0.7350	-	0.8527 6/7
6	vac	0.1389	4	0.3961	2/5	0.4825	-	0.6193	5/8	0.7185 -
7	Kepler-102 f	0.1650	9	0.3333	1/3	0.4061	-	0.5212	-	0.6047 3/5
									0.8426 5/6	0.8416 5/9

Tabla A.2: Valores de Resonancias y delta de Hill en los sistemas exoplanetarios más sus vacantes con simulaciones inestables.

n	Planeta	a (ua)	Delta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	HD 40307 b	0.0468										
2	HD 40307 c	0.0799	149	0.5857	-	-	-	-	-	-	-	-
3	HD 40307 d	0.1321	122	0.3543	0.6048	3/5	-	-	-	-	-	-
4	HD 40307 f	0.2470	32	0.1895	0.3235	-	0.5348	-	-	-	-	-
5	HD 40307 g	0.600	33	0.0780	0.1332	-	0.4117	-	-	-	-	-
	Semiejes iniciales											
1	HD 40307 b	0.0468										
2	HD 40307 c	0.0799	149	0.5857	-	-	-	-	-	-	-	-
3	HD 40307 d	0.1321	122	0.3543	0.6048	3/5	-	-	-	-	-	-
4	HD 40307 f	0.2470	32	0.1895	0.3235	-	0.5348	-	-	-	-	-
5	vac	0.3816	18	0.1226	0.2094	-	0.3462	0.6473	-	-	-	-
6	HD 40307 g	0.600	18	0.0780	0.1332	-	0.4117	0.6360	-	-	-	-
	Semiejes finales											
1	HD 40307 d	0.1162										
2	HD 40307 g	1.2885	21	0.0902	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kepler-11											
1	Kepler-11 b	0.091										
2	Kepler-11 c	0.107	9	0.8505	6/7	-	-	-	-	-	-	-
3	Kepler-11 d	0.155	17	0.5871	0.6903	-	-	-	-	-	-	-
4	Kepler-11 e	0.195	9	0.4667	0.5487	-	0.7989	-	-	-	-	-
5	Kepler-11 f	0.250	11	0.3640	0.4280	3/7	0.6200	-	0.7800	-	-	-
6	Kepler-11 g	0.466	20	0.1953	0.2296	-	0.3326	1/3	0.4185	-	0.5365	-
	Semiejes iniciales											
1	Kepler-11 b	0.091										
2	Kepler-11 c	0.107	9	0.8505	6/7	-	-	-	-	-	-	-
3	Kepler-11 d	0.155	17	0.5871	0.6903	-	-	-	-	-	-	-
4	Kepler-11 e	0.195	9	0.4667	0.5487	-	0.7989	4/5	-	-	-	-
5	Kepler-11 f	0.250	11	0.3640	0.4280	3/7	0.6200	5/8	0.7800	-	-	-

Continúa en la siguiente página

Tabla A.2 – Continuación de la página previa

n	Planeta	a (ua)	Delta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	vac	0.342	23	0.1953	-	0.3129	-	0.4532	2/9	0.5702	5/7	0.7310
7	Kepler-11 g	0.466	10	0.1953	-	0.2296	-	0.3326	1/3	0.4185	-	0.5365
												.07339
	Semiejtes finales											
1	g	0.3562	44	0.2001	1/5							
2	b	1.7705	34	0.0662	-	0.3308	1/3					
3	vac	5.3526										
1	Kepler-122 b	0.0635	17	0.5863	-	0.6983	-					
2	Kepler-122 c	0.1083	9	0.4094	-	0.4769	-	0.6830				
3	Kepler-122 d	0.1551	14	0.2796	-	0.4769	-	0.6830				
4	Kepler-122 e	0.2271	7	0.2227	2/9	0.3799	-	0.5440		0.7966	5/8	
5	Kepler-122 f	0.2851										
	Semiejtes iniciales											
1	Kepler-122 b	0.0635	11	0.7697	7/9							
2	vac	0.0825	9	0.5863	-	0.7618	-					
3	Kepler-122 c	0.1083	10	0.4094	-	0.5319	-	0.6983				
4	Kepler-122 d	0.1551	13	0.2796	-	0.3633	-	0.4769	-	0.6830	-	
5	Kepler-122 e	0.2271	8	0.2227	2/9	0.2894	-	0.3799	-	0.5440	-	0.7966
6	Kepler-122 f	0.2851										5/8
	Semiejtes finales											
1	Kepler-122 b	0.0635	17	0.5863	-	0.7618	-					
2	Kepler-122 c	0.1083	9	0.4094	-	0.5319	-	0.6983				
3	Kepler-122 d	0.1551	14	0.2796	-	0.3633	-	0.4769	-	0.6830	-	
4	Kepler-122 e	0.2271	7	0.2227	2/9	0.2894	-	0.3799	-	0.5440	-	0.7966
5	Kepler-122 f	0.2851										5/8
1	HD 34445 e	0.2687	16	0.5578	5/9							
2	HD 34445 d	0.4817	9	0.3742	3/8	0.6708	2/3					
3	HD 34445 c	0.7181	17	0.1741	-	0.3122	-	0.4654				
4	HD 34445 f	1.5430	5	0.1298	-	0.2327	-	0.3469	-	0.7454	3/4	
5	HD 34445 b	2.0700	15	0.0422	-	0.0757	-	0.1129	-	0.2426	-	0.3255
6	HD 34445 g	6.3600										-
	Semiejtes iniciales											
1	HD 34445 e	0.2687	12	0.7306								
2	vac	0.3678	8	0.5578	5/9	0.7635	-					
3	HD 34445 d	0.4817	9	0.3742	3/8	0.5122	-	0.6708	2/3			
4	HD 34445 c	0.7181	10	0.2509	1/4	0.3435	-	0.4499	-	0.6706	2/3	
5	vac	1.0708	10	0.1741	-	0.2384	-	0.3122	-	0.4654	-	0.6940
6	HD 34445 f	1.5430	5	0.1298	-	0.1777	-	0.2327	-	0.3469	-	0.5173
7	HD 34445 b	2.0700	6	0.0862	-	0.1179	-	0.1545	-	0.2303	-	0.3434
8	vac	3.1184	13	0.0603	-	0.0826	-	0.1082	-	0.1613	-	0.2405
9	vac	4.4530	7	0.0422	-	0.0422	-	0.0757	-	0.1129	-	0.1684
10	HD 34445 g	6.3600										1/7
												0.7003
												0.4649
												0.3255
												0.4903
												0.7002

Continúa en la siguiente página

A.3. Implementación del integrador orbital Mercury a los sistemas exoplanetarios.

Primeras pruebas

El integrador orbital Mercury es un programa que resuelve la interacción gravitacional de n -cuerpos. Ese programa fue hecho por John Chambers [4]. Mercury trabaja en coordenadas cartesianas y coordenadas keplerianas. Una vez aprendido el manejo de uso del integrador orbital se empezaron las primeras pruebas.

El propósito de las primeras pruebas es el de encontrar el paso de integración idóneo para minimizar el error en los cálculos de la simulación. El error en la simulaciones se refleja en el cambio de energía (dE/E) y de momento (dL/L). Se utilizó el sistema exoplanetario 55 Cancri para estas primeras pruebas. Se realizaron diferentes pruebas ya que se usaron diferentes tiempos en el paso de integración y radio crítico de Hill. Estas pruebas fueron una calibración para encontrar el paso de integración para periodos similares a los de los sistemas exoplanetarios.

El sistema 55 Cancri tiene los siguientes elementos orbitales

Tabla A.3: Elementos orbitales de los planetas en el sistema 55 Cancri

n	Planeta	a [UA]	p [días]	e	M_{seni} [M_{Jup}]
1	e	0.0156	0.73546	0.06	0.0263
2	b	0.1134	14.651	0.0159	0.80
3	c	0.2403	44.3446	0.053	0.169
4	f	0.781	260.7	0.0002	0.144
5	d	5.76	5218.0	0.025	3.835

Los parámetros que se usaron para calcular la r_{crit} para este sistema planetario fueron $n_1 = 4.97$, $n_2 = 1.4361$, donde n_1 es la máxima separación en el semieje mayor que hay entre el planeta 55 Cancri f y d y n_2 es el promedio de separación de semiejes mayores de todos los planetas en este sistema; $v_{max} = 47.58$ ua/año y paso de integración = 0.01 días. $n_1 R_{Hill} = 4.97$ y $n_2 \tau v_{max} = 0.0187$. Entonces el $r_{crit} = 5R_{Hill}$. Para constatar que el radio de Hill no afecta tanto en el cálculo como el paso de integración; se hicieron pruebas cambiando el paso de integración para cada radio crítico determinado. En la tabla A.4 y en la gráfica A.1 se muestran los resultados de cada una de las integraciones.

Un resultado importante diferente a las pruebas que anteriormente se realizaron fue que el sistema planetario simulado con los valores de 55 Cancri se mantiene estable y reproduce los elementos orbitales actuales.

Tabla A.4: Error para cada paso de integración y radio crítico de Hill.

$R_{crit_{max}}$	τ (dias)	dE/E	dL/L
4-5 R_{Hill}	0.001	1.64E-006	9.62E-006
	0.01	7.54E-007	1.91E-006
	0.1	3.57E-008	6.33E-009
	0.5	2.69E-004	5.72E-010
	1	2.14E-004	1.54E-012
3-4 R_{Hill}	0.01	7.54E-008	9.59E-007
	0.1	3.57E-008	6.33E-009
	0.5	2.69E-004	5.72E-010
	1	2.14E-004	1.54E-012
2-3 R_{Hill}	0.01	7.54E-008	9.59E-007
	0.1	3.57E-008	6.33E-009
	0.5	2.69E-004	5.72E-010
	1	2.14E-004	1.54E-012
1-2 R_{Hill}	0.01	7.41E-008	9.59E-007
	0.1	3.57E-008	6.33E-009
	0.5	2.69E-004	5.72E-010
	1	2.14E-004	1.54E-012

En la gráfica de la figura A.1 se muestra que el parámetro que modifica el resultado de la integración para este sistema planetario es el paso de integración. La información de la gráfica también nos muestra que el mejor paso de integración, por proporcionar la menor variación en la energía, es de 0.1 días. Este paso de integración se reproduce igual para cada radio crítico de Hill¹.

¹El radio crítico de Hill es la distancia máxima donde el integrador Mercury cambia de algoritmo para calcular encuentros cercanos entre dichos cuerpos

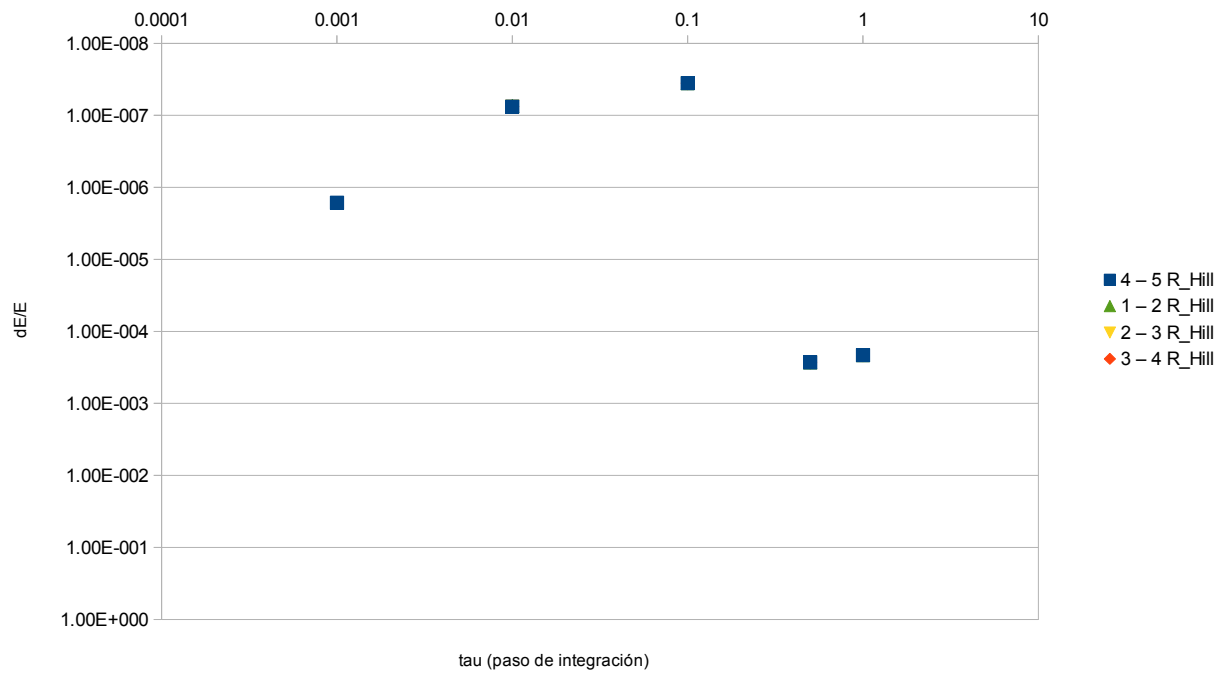


Figura A.1: Valores del error en la energía (dE/E) para cada valor de R_{crit} y paso de integración τ , en las pruebas realizadas en 55 Cancri.

A.4. Cálculo criterio Delta de Hill

Los autores Gladman [14] y Chambers [5], realizando simulaciones numéricas propusieron una relación que denominaron Delta. Este es un criterio de estabilidad dinámica entre cuerpos planetarios contiguos. Estos autores encontraron que si un par planetas tenían una delta menor a 10, uno o los dos planetas se vuelven dinámicamente inestables por lo que cambia su semieje mayor o son expulsados del sistema planetario.

La delta está definida como:

$$\Delta = \frac{a_2 - a_1}{R_H}, \quad (\text{A.11})$$

donde R_H es igual a:


$$R_H = \frac{a_1 + a_2}{2} \left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right)^{(1/3)}, \quad (\text{A.12})$$

donde a_1 y a_2 son los semiejes de los planetas contiguos, m_1 y m_2 son sus masas y M_* es la masa de la estrella del sistema planetario.

Tomando en cuenta este criterio, lo aplicamos tanto a los sistemas observados como a los sistemas azarosos (Capítulo 4) con el propósito de analizar su estabilidad.

A continuación, mostramos un ejemplo de cómo se aplicó el criterio de la Delta a un sistema de nuestra muestra.

	Semieje mayor (UA)	Masa (M_sol)
planeta 1	1.56	0.0088
planeta 2	2.13	0.0007
planeta 3	5.69	0.0004
planeta 4	6.45	0.0009



$$Masa_{estrella} = 0.86 M_{sol}$$

$$R_H = \frac{a_1 + a_2}{2} \left(\frac{m_1 + m_2}{3 M_{estrella}} \right)^{1/3}$$

$$R_H = \frac{1.56[UA] + 2.13[UA]}{2} \left(\frac{0.0088[M_{sol}] + 0.0007[M_{sol}]}{3(0.86)[M_{sol}]} \right)^{1/3}$$

$$R_H = \frac{7.52[UA]}{2} (0.0037)^{1/3} = 0.5806 UA$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{a_2 - a_1}{R_H} = \frac{2.13[UA] - 1.56[UA]}{0.5806[UA]} = 0.9817$$

Planetas 2-3

$$R_H = \frac{2.13[UA] + 5.69[UA]}{2} \left(\frac{0.0007[M_{sol}] + 0.0004[M_{sol}]}{3(0.86)[M_{sol}]} \right)^{1/3}$$

$$R_H = \frac{3.69[UA]}{2} (4.26 \times 10^{-4})^{1/3} = 0.1388 UA$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{a_2 - a_1}{R_H} = \frac{5.69[UA] - 2.13[UA]}{0.1388[UA]} = 25.64$$

Figura A.2: Ejemplo del cálculo de Δ

El cálculo de la Δ de Hill esta sujeto a datos que tienen incertidumbres. A continuación se muestra cómo se calcula la propagación de errores en el cálculo de la delta de Hill.

La propagación de errores se obtiene usando la ecuación A.11, de la siguiente manera

$$\delta\Delta = \delta \left(\frac{a_2 - a_1}{R_H} \right), \quad (\text{A.13})$$

Sustituimos la ecuación A.12 en la ecuación A.13 queda de la siguiente manera

$$\delta\Delta = \frac{R_H(\delta a_2 + \delta a_1) + \delta R_H(a_2 - a_1)}{R_H^2}, \quad (\text{A.14})$$

donde δR_H es igual a

$$\delta R_H = \left(\frac{a_1 + a_2}{6} \left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right)^{-2/3} \delta \left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right) \right) + \left(\left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2}(\delta a_1 + \delta a_2) \right) \right), \quad (\text{A.15})$$

donde

$$\delta \left(\frac{m_1 + m_2}{3M_*} \right) = \frac{3M_*(\delta m_1 + \delta m_2) + 3\delta M_*(m_1 + m_2)}{(3M_*)^2} \quad (\text{A.16})$$

Referencias bibliográficas

- [1] R. Barnes y S. N. Raymond. Predicting Planets in Known Extrasolar Planetary Systems. I. Test Particle Simulations. *ApJ*, 617:569–574, 2004. doi:10.1086/423419.
- [2] Rory Barnes y Richard Greenberg. Stability Limits in Extrasolar Planetary Systems. *ApJl*, 647(2):L163–L166, 2006. doi:10.1086/507521.
- [3] T. Bovaird y C. H. Lineweaver. Exoplanet predictions based on the generalized Titius-Bode relation. *MNRAS*, 435:1126–1138, 2013.
- [4] J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304:793–799, 1999. doi:10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.
- [5] J. E. Chambers, G. W. Wetherill, y A. P. Boss. The Stability of Multi-Planet Systems. *Icarus*, 119(2):261–268, 1996. doi:10.1006/icar.1996.0019.
- [6] Heon-Young Chang. Titius-Bode’s Relation and 55 Cancri. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 25(3):239–244, 2008. doi:10.5140/JASS.2008.25.3.239.
- [7] Heon-Young Chang. Titius-Bode’s Relation and Distribution of Exoplanets. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 27(1):1–10, 2010. doi:10.5140/JASS.2010.27.1.001.
- [8] Manfred Cuntz. Application of the Titius-Bode Rule to the 55 Cancri System: Tentative Prediction of a Possibly Habitable Planet. *PASJ*, 64:73, 2012. doi:10.1093/pasj/64.4.73.
- [9] Rebekah I. Dawson y Daniel C. Fabrycky. Radial Velocity Planets De-aliased: A New, Short Period for Super-Earth 55 Cnc e. *ApJ*, 722(1):937–953, 2010. doi:10.1088/0004-637X/722/1/937.
- [10] Rudolf Dvorak. *Extrasolar Planets. Formation, Detection and Dynamics*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007.
- [11] R.F. Díaz, D. Ségransan, S. Udry, C. Lovis, F. Pepe, X. Dumusque, M. Marmier, R. Alonso, W. Benz, F. Bouchy, A. Coffinet, A. Collier Cameron, M. Deleuil, P. Figueira, M. Gillon, G. Lo Curto, M. Mayor, C. Mordasini, F. Motalebi, C. Moutou, D. Pollacco, E. Pompei, D. Queloz, N. Santos, y A. Wyttenbach. The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXVIII. Bayesian re-analysis of three systems. New super-Earths, unconfirmed signals, and magnetic cycles. *A&A*, 585:A134, 2016. doi:10.1051/0004-6361/201526729.

- [12] Julia Fang y Jean-Luc Margot. Predicting planets in kepler multi-planet systems. *The Astrophysical Journal*, 751(1):23, 2012. doi:10.1088/0004-637X/751/1/23. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/751/1/23>.
- [13] F. Feroz y M. P. Hobson. Bayesian analysis of radial velocity data of GJ667C with correlated noise: evidence for only two planets. *MNRAS*, 437(4):3540–3549, 2014. doi:10.1093/mnras/stt2148.
- [14] Brett Gladman. Dynamics of Systems of Two Close Planets. *Icarus*, 106(1):247–263, 1993. doi:10.1006/icar.1993.1169.
- [15] C. Hayashi. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70:35–53, 1981. doi:10.1143/PTPS.70.35.
- [16] Wayne Hayes y Scott Tremaine. Fitting Selected Random Planetary Systems to Titius-Bode Laws. *Icarus*, 135(2):549–557, 1998. doi:10.1006/icar.1998.5999.
- [17] J. G. Hills. Dynamic Relaxation of Planetary Systems and Bode’s Law. *Nature*, 225(5235):840–842, 1970. doi:10.1038/225840a0.
- [18] Chelsea X. Huang y Gáspár Á. Bakos. Testing the Titius-Bode law predictions for Kepler multiplanet systems. *MNRAS*, 442(1):674–681, 2014. doi:10.1093/mnras/stu906.
- [19] X. Huang, G. Á. Bakos, y J. D. Hartman. 150 new transiting planet candidates from Kepler Q1-Q6 data. *MNRAS*, 429(3):2001–2018, 2013. doi:10.1093/mnras/sts463.
- [20] R. Isaacman y C. Sagan. Computer Simulations of Planetary Accretion Dynamics: Sensitivity to Initial Conditions. *Icarus*, 31(4):510–533, 1977. doi:10.1016/0019-1035(77)90153-1.
- [21] James F. Kasting, Daniel P. Whitmire, y Ray T. Reynolds. Habitable Zones around Main Sequence Stars. *Icarus*, 101(1):108–128, 1993. doi:10.1006/icar.1993.1010.
- [22] Ravi Kumar Kopparapu, Ramses M. Ramirez, James SchottelKotte, James F. Kasting, Shawn Domagal-Goldman, y Vincent Eymet. Habitable Zones around Main-sequence Stars: Dependence on Planetary Mass. *ApJL*, 787(2):L29, 2014. doi:10.1088/2041-8205/787/2/L29.
- [23] P. Lara. *La relación de Titius-Bode y los sistemas exoplanetarios*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México., Ciudad Universitaria, Mexico D.F., 2010.
- [24] P. Lara. *La validez de la Relación Titius-Bode en los sistemas exoplanetarios y su capacidad predictiva*. Tesis de maestría, Instituto de Astronomía. Universidad Nacional Autónoma de México., Ciudad Universitaria, Mexico D.F., 2014.

- [25] P. Lara, A. Poveda, y C. Allen. On the structural law of exoplanetary systems. En T. E. Simos, G. Psihoyios, C. Tsitouras, y Z. Anastassi, eds., *American Institute of Physics Conference Series*, tomo 1479 de *American Institute of Physics Conference Series*, págs. 2356–2359. 2012. doi:10.1063/1.4756667.
- [26] Patricia Lara, Guadalupe Cordero-Tercero, y Christine Allen. The reliability of the Titius-Bode relation and its implications for the search for exoplanets. *pasj*, 72(2):24, 2020. doi:10.1093/pasj/psz146.
- [27] J. Laskar. AMD-stability and the Spacing of Planetary Systems. En *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #32*, tomo 32 de *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, pág. 52.10. 2000.
- [28] Jack J. Lissauer, Geoffrey W. Marcy, Stephen T. Bryson, Jason F. Rowe, Daniel Jontof-Hutter, Eric Agol, William J. Borucki, Joshua A. Carter, Eric B. Ford, Ronald L. Gilliland, Rea Kolbl, Kimberly M. Star, Jason H. Steffen, y Guillermo Torres. Validation of Kepler’s Multiple Planet Candidates. II. Refined Statistical Framework and Descriptions of Systems of Special Interest. *ApJ*, 784(1):44, 2014. doi:10.1088/0004-637X/784/1/44.
- [29] Jack J. Lissauer, Geoffrey W. Marcy, Jason F. Rowe, Stephen T. Bryson, Elisabeth Adams, Lars A. Buchhave, David R. Ciardi, William D. Cochran, Daniel C. Fabrycky, Eric B. Ford, Francois Fressin, John Geary, Ronald L. Gilliland, Matthew J. Holman, Steve B. Howell, Jon M. Jenkins, Karen Kinemuchi, David G. Koch, Robert C. Morehead, Darin Ragozzine, Shawn E. Seader, Peter G. Tanenbaum, Guillermo Torres, y Joseph D. Twicken. Almost All of Kepler’s Multiple-planet Candidates Are Planets. *ApJ*, 750(2):112, 2012. doi:10.1088/0004-637X/750/2/112.
- [30] C. Lovis, D. Ségransan, M. Mayor, S. Udry, W. Benz, J. L. Bertaux, F. Bouchy, A.C.M. Correia, J. Laskar, G. Lo Curto, C. Mordasini, F. Pepe, D. Queloz, y N.C. Santos. The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems. *A&A*, 528:A112, 2011. doi:10.1051/0004-6361/201015577.
- [31] Peter Lynch. On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets. *MNRAS*, 341(4):1174–1178, 2003. doi:10.1046/j.1365-8711.2003.06492.x.
- [32] M. M. Nieto. *The Titius-Bode law of planetary distances: Its history and theory*. International Series of Monographs in Natural Philosophy, Oxford: Pergamon Press, 1972.
- [33] A. Poveda y P. Lara. The exo-planetary system of 55 Cancri and the Titius-Bode Law. *RMAA*, 44:243–246, 2008.
- [34] S. N. Raymond y R. Barnes. Predicting Planets in Known Extrasolar Planetary Systems. II. Testing for Saturn Mass Planets. *ApJ*, 619:549–557, 2005. doi:10.1086/426311.

-
- [35] Christopher J. Shallue y Andrew Vanderburg. Identifying Exoplanets with Deep Learning: A Five-planet Resonant Chain around Kepler-80 and an Eighth Planet around Kepler-90. *AJ*, 155(2):94, 2018. doi:10.3847/1538-3881/aa9e09.
- [36] Andrew Vanderburg, Juliette C. Becker, Martti H. Kristiansen, Allyson Bieryla, Dmitry A. Dhev, Rebecca Jensen-Clem, Timothy D. Morton, David W. Latham, Fred C. Adams, Christoph Baranec, Perry Berlind, Michael L. Calkins, Gilbert A. Esquerdo, Shrinivas Kulkarni, Nicholas M. Law, Reed Riddle, Maïssa Salama, y Allan R. Schmitt. Five Planets Transiting a Ninth Magnitude Star. *ApJl*, 827(1):L10, 2016. doi:10.3847/2041-8205/827/1/L10.
- [37] S. J. Weidenschilling. The Distribution of Mass in the Planetary System and Solar Nebula. *APSS*, 51(1):153–158, 1977. doi:10.1007/BF00642464.