Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Conjuntos con una acción de una categoría

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta:

Itzel Rosas Martínez

TUTOR PRINCIPAL:
Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas Centro de
Ciencias Matemáticas UNAM, Campus Morelia

Morelia, Michoacán, México Septiembre, 2023

A David

A César

Índice general

Agradecimientos

A la UNAM y la UMSNH, por permitirme realizar mis estudios de maestría en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas.

Al CONACyT por haberme otorgado una beca durante el tiempo de mis estudios. Sin ese apoyo este trabajo no habría sido posible.

A mi familia, que sin su apoyo no habría sobrevivido (dentro y) lejos de casa.

A todos mis amigos, virtual o físicamente presentes en el momento necesario, que en este tiempo estuvieron para ayudarme y alentarme cuando más lo necesité. Agradezco muy especialmente a aquellos buenos amigos algebristas: Miguel Calderón, Benjamín García, Luis Pineda, Mireya Díaz y Gabriel Hernández, que me escucharon y tendieron su mano cuando estaba entre penumbras.

A David Villa y César Cejudo, aquellos primeros mentores profesionales que, a pesar de la distancia, me han sabido decir que voy por el camino correcto.

A los sinodales: Dr. Luis Valero, Dr. David Villa, Dr. Daniel Juan y Dr. Ernesto Vallejo, por haber revisado este trabajo y dado valiosas sugerencias y correcciones para su mejora.

Special thanks to Dr. Peter Webb, for transmitting me his enthusiasm for this topic, and for listening to my questions. Without his ideas and doubts this work would not exist.

Por último y no por eso menos importante, al Dr. Gerardo Raggi, por continuar confiando en mí. Por ser tan generoso con su conocimiento, incluso con sus dudas. Por las oportunidades que me ha dado en este tiempo para crecer y por esa guía tan *precisa* que me ha brindado a lo largo de estos más de 4 años, esperando que sean más.

Introducción

A finales del s. XX, S. Bouc en su artículo *Foncteurs d'ensembles munis d'une double action*, [4], introdujo a la teoría de representaciones de grupos finitos el concepto de biconjunto, con el cual definió la categoría de biconjuntos que consiste de los grupos finitos como objetos y, como morfismos entre G y H grupos finitos, de los (H, G)-biconjuntos finitos. Además, dio el concepto de funtor de biconjuntos, el cual es un funtor de la categoría de biconjuntos a R-Mód. Éstos han sido ampliamente estudiados e incluyen ejemplos importantes como el anillo de Burnside de un grupo finito, la cohomología de grupos, entre otros. Además, están estrechamente relacionados con los funtores de Mackey. Para ver un estudio completo de estos funtores se puede consultar [5], además de [15], donde a los funtores de biconjuntos se les llama "funtores de Mackey globalmente definidos".

En este trabajo se introducen las nociones básicas para el estudio de los funtores de biconjuntos, ahora definidos sobre categorías finitas y, más generalmente, pequeñas. El propósito de introducir funtores de biconjuntos para categorías es similar a lo expuesto anteriormente, pero con la diferencia de que los contextos en los que se puede trabajar son más amplios y vastos. Es necesario hacer notar que algunos ejemplo de las categorías que nos interesan son las categorías de desenlazado de grupos finitos, por lo que la teoría de funtores de biconjuntos usual resulta ser un caso especial de la teoría que estudiamos en esta tesis.

La mayor parte de este trabajo está basada en el preprint "Sets with an action of a category", [13], y el artículo "Biset functors for categories", [17], ambos de Peter Webb. Nuestro objetivo es dar demostraciones más detalladas de los resultados expuestos en dichos artículos, además de dar ejemplos distintos a los mencionados. Todo esto para tener un mejor entendimiento de este enfoque que no ha sido explorado tan ampliamente.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo definimos los objetos fundamentales para el trabajo, los $\mathcal{C}$-conjuntos, y damos diversas propiedades para ellos, algunas análogas a las que se tienen para grupos, las cuales son útiles más adelante. Además estudiamos los $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos desde dos perspectivas diferentes. En el segundo capítulo damos una construcción del anillo de Burnside para la categoría de los $\mathcal{C}$-conjuntos finitos, al igual que establecemos una relación entre dicho anillo de Burnside y el que llamaremos $B_{\mathrm{Set}_{\mathrm{I}}}(\mathcal{C})$. Damos también una definición de un morfismo análogo al homomorfismo de marcas que se tiene para grupos y calculamos los idempotentes del anillo de Burnside.

En el tercer capítulo definimos las nociones primordiales del trabajo, que son los conceptos de biconjunto y funtor de biconjuntos, estudiamos algunas de sus propiedades y construimos tanto la categoría de biconjuntos como la categoría de funtores de biconjuntos. Además, examinamos cómo son los $\mathcal{C}$-conjuntos y biconjuntos representables. En el último capítulo tomamos la teoría de correspondencias desarrollada por S. Bouc y J. Thévenaz en [6] y vemos cómo ésta se puede relacionar con la teoría de funtores de biconjuntos en categorías descrita en el capítulo anterior.

Cabe mencionar que para una mayor comprensión de este trabajo, se recomienda al lector tener conocimientos básicos de la teoría de categorías. Sin embargo, algunos conceptos de esta teoría serán recordados cuando se necesiten.

Capítulo 1

$\mathcal{C}$–conjuntos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Recordemos que $\mathcal{C}$ es llamada *pequeña* si tanto su clase de objetos como su clase de morfismos son conjuntos. En un idioma diferente, el estudio de los funtores $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, con $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una segunda categoría, es algo que ha sido fundamental a través de las matemáticas.

Cuando $\mathcal{D}$ es la categoría de módulos sobre algún anillo y morfismos de módulos, tal funtor es llamado *representación* de $\mathcal{C}$, generalizando la noción de una representación de un grupo (el cual puede ser visto como su categoría de desenlazado, la cual consta de un objeto y cuyos morfismos son los elementos del grupo). Aquí nos centraremos.

Denotaremos por Set a la categoría de conjuntos y funciones, y a la categoría de conjuntos y funciones inyectivas por $\mathrm{Set_I}$.

1.1 Definición y propiedades

Definición 1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Un $\mathcal{C}$-*conjunto* es un funtor covariante $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$.

Entonces Ω es simplemente un diagrama de conjuntos el cual tiene la misma forma que $\mathcal{C}$: para cada objeto x de $\mathcal{C}$ hay un conjunto específico $\Omega(x)$ y para cada morfismo $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$ hay una función $\Omega(\alpha) : \Omega(x) \longrightarrow \Omega(y)$.

Note que la imagen de Ω se queda en $\mathrm{Set_I}$ si y sólo si estas funciones son inyectivas.

Ejemplo 1.2. Sea G un grupo y $\mathcal{C}_G$ la categoría de desenlazado de G, es decir, los objetos de $\mathcal{C}_G$ constan de un punto $\bullet$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\bullet, \bullet) = G$. La composición es la operación del grupo.

Un $\mathcal{C}_G$-conjunto es un funtor $\Omega : \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathrm{Set}$. Observemos lo siguiente: sea $X = \Omega(\bullet)$. X es un G-conjunto con la acción dada por

$$g \cdot x := \Omega(g)(x)$$

para todo $g \in G$ y todo $x \in X$.

En efecto. Sean $g, h \in G$, e el elemento identidad de G y $x \in X$. Notemos que

$$e \cdot x = \Omega(e)(x) = id_X(x) = x$$

pues Ω es funtor. Además,

$$(gh)\cdot x = \Omega(gh)(x) = (\Omega(g)\circ\Omega(h))(x) = \Omega(g)(\Omega(h)(x)) = g\cdot(h\cdot x).$$

Así, X es G-conjunto. Recíprocamente, si X es un G-conjunto, podemos definir $\Omega : \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathrm{Set}$ con $\Omega(\bullet) = X$ y $\Omega(g)(x) := gx$. Para ver que Ω es un funtor covariante, tenemos que ver que $\Omega(e) = id_X$ con e el elemento identidad de G y que para cualesquiera $g, h \in G$, $\Omega(gh) = \Omega(g)\Omega(h)$.

Para esto, note que

$$id_X(x) = x = ex = \Omega(e)(x)$$

y esto pasa para cualquier $x \in X$. Así, $\Omega(e) = id_X$. Luego,

$$\Omega(gh)(x) = (gh)x = g(hx) = \Omega(g)\left(\Omega(h)(x)\right) = \left(\Omega(g)\circ\Omega(h)\right)(x)$$

y esto pasa para todo $x \in X$. Por lo tanto, Ω es un funtor covariante.

Observe que todas las funciones $\Omega(g)$ son inyectivas, así que realmente $\Omega : \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathrm{Set_I}$, es decir, Ω es un $\mathcal{C}$-conjunto con valores en $\mathrm{Set_I}$.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathcal{Q}$ el siguiente carcaj:

$$\mathcal{Q} = \qquad x \xrightarrow{\alpha} y$$

y considerémoslo como categoría, es decir, los objetos de dicha categoría son $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{Q}) = \{x, y\}$ y como morfismos tenemos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}\,(x,x) = \{1_x\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}\,(y,y) = \{1_y\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}\,(x,y) = \{\alpha\}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}\,(y,x) = \emptyset$.

Un $\mathcal{Q}$-conjunto se verá entonces como una tripleta $\Omega = (X, Y, f)$ con $X = \Omega(x)$, $Y = \Omega(y)$ y $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f = \Omega(\alpha)$.

Recíprocamente, si tenemos una tripleta (X, Y, f) con X, Y conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ función, podemos asignarle un carcaj (y a su vez un $\mathcal{Q}$-conjunto $\Omega : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathrm{Set}$)

$$\mathcal{Q} = \qquad x \xrightarrow{\widehat{f}} y$$

tal que $\Omega(x) = X$, $\Omega(y) = Y$ y $\Omega(\widehat{f}) = f$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Denotaremos por $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ a la categoría cuyos objetos son todos los $\mathcal{C}$-conjuntos y, si $\Omega, \Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}\,(\Omega, \Psi)$ consta de las transformaciones naturales entre Ω y Ψ.

Recordemos que una *equivalencia entre categorías* $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste de funtores $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $K : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ e isomorfismos naturales $\eta : K \circ H \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ y $\varepsilon : H \circ K \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$.

Proposición 1.4. *Si las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son naturalmente equivalentes, entonces las categorías $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ y $\mathcal{C}' - \mathrm{Set}$ son naturalmente equivalentes.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son equivalentes, tenemos funtores $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $1_{\mathcal{C}}$ es naturalmente isomorfo al funtor $G \circ H$ y el funtor $1_{\mathcal{C}'}$ es naturalmente isomorfo a $H \circ G$, es decir, existen isomorfismos naturales $\rho : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ H$ y $\theta : 1_{\mathcal{C}'} \longrightarrow H \circ G$. Veamos que $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ y $\mathcal{C}' - \mathrm{Set}$ son equivalentes.

Definimos el funtor $\overline{H} : \mathcal{C} - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathcal{C}' - \mathrm{Set}$ de manera que:

- En objetos: para cada $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$,

$$\overline{H}(\Omega) = \Omega \circ G.$$

- En morfismos: si Ω_1, Ω_2 son objetos de $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ y $\eta : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es un morfismo entre ellos, entonces $\overline{H}(\eta) : \overline{H}(\Omega_1) \longrightarrow \overline{H}(\Omega_2)$ queda definida como sigue: sea $x' \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}')$, entonces

$$\overline{H}(\eta)_{x'} = \eta_{G(x')},$$

  pues $G(x')$ es objeto de $\mathcal{C}$.

Veamos que $\overline{H}(\eta)$ es transformación natural: sean x', y' objetos de $\mathcal{C}'$ y $\alpha' : x' \longrightarrow y'$ un morfismo entre ellos. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{H}(\Omega_1)(x') \arrow[r, "\overline{H}(\eta)_{x'}"] \arrow[d, "\overline{H}(\Omega_1)(\alpha')"'] & \overline{H}(\Omega_2)(x') \arrow[d, "\overline{H}(\Omega_2)(\alpha')"] \\
\overline{H}(\Omega_1)(y') \arrow[r, "\overline{H}(\eta)_{y'}"'] & \overline{H}(\Omega_2)(y')
\end{tikzcd}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\overline{H}(\Omega_2)(\alpha') \circ \overline{H}(\eta)_{x'} &= (\Omega_2 \circ G)(\alpha') \circ \eta_{G(x')} \\
&= \eta_{G(y')} \circ (\Omega_1 \circ G)(\alpha') \\
&= \overline{H}(\eta)_{y'} \circ \overline{H}(\Omega_1)(\alpha')
\end{aligned}$$

pues η es transformación natural.

Entonces $\overline{H}(\eta)$ es transformación natural, es decir, es morfismo en $\mathcal{C}' - \mathrm{Set}$.

De igual manera, definimos el funtor $\overline{G} : \mathcal{C}' - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set}$ de manera que:

- En objetos: para cada $\Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}' - \mathrm{Set})$,

$$\overline{G}(\Psi) = \Psi \circ H.$$

- En morfismos: si Ψ_1, Ψ_2 son objetos de $\mathcal{C}' - \mathrm{Set}$ y $\eta' : \Psi_1 \longrightarrow \Psi_2$ es un morfismo entre ellos, entonces $\overline{G}(\eta') : \overline{G}(\Psi_1) \longrightarrow \overline{G}(\Psi_2)$ queda definida como sigue: sea $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, entonces

$$\overline{G}(\eta')_x = \eta'_{H(x)},$$

  pues $H(x)$ es objeto de $\mathcal{C}'$.

$\overline{G}(\eta')$ es transformación natural y se demuestra de manera análoga a lo que hicimos anteriormente, por lo que es morfismo en $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$.

Por último, veamos que el funtor $1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}$ es naturalmente isomorfo a $\overline{G} \circ \overline{H}$ y que $1_{\mathcal{C}'-\mathrm{Set}}$ es naturalmente isomorfo al funtor $\overline{H} \circ \overline{G}$.

Para ver que $1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}$ es naturalmente isomorfo a $\overline{G}\circ\overline{H}$, definimos $\epsilon : 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}} \longrightarrow \overline{G}\circ\overline{H}$ como sigue: si $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}-\mathrm{Set})$, entonces $\epsilon_\Omega : \Omega \longrightarrow (\overline{G}\circ\overline{H})(\Omega)$ es el morfismo en $\mathcal{C}-\mathrm{Set}$ definido como

$$(\epsilon_\Omega)_x = \Omega(\rho_x)$$

para cada x objeto de $\mathcal{C}$.

Veamos que, en efecto, ϵ es transformación natural. Sea $\eta : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un morfismo en $\mathcal{C}-\mathrm{Set}$. Veamos que el cuadrado siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "\epsilon_{\Omega_1}"] \arrow[d, "\eta"'] & (\overline{G}\circ\overline{H})(\Omega_1) \arrow[d, "(\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)"] \\
\Omega_2 \arrow[r, "\epsilon_{\Omega_2}"'] & (\overline{G}\circ\overline{H})(\Omega_2)
\end{tikzcd}$$

Para ver que conmuta, hay que ver que se da la igualdad en transformaciones naturales, es decir, que $\left((\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)\circ\epsilon_{\Omega_1}\right)_x = (\epsilon_{\Omega_2}\circ\eta)_x$ para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$.

Sea $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Entonces $(\epsilon_{\Omega_2}\circ\eta)_x = (\epsilon_{\Omega_2})_x \circ \eta_x = \Omega_2(\rho_x)\circ\eta_x$. Por otro lado, $\left((\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)\circ\epsilon_{\Omega_1}\right)_x = \left((\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)\right)_x \circ (\epsilon_{\Omega_1})_x = \eta_{(G\circ H)(x)}\circ\Omega_1(\rho_x)$.

Como η es natural, se tiene que $\Omega_2(\rho_x)\circ\eta_x = \eta_{(G\circ H)(x)}\circ\Omega_1(\rho_x)$, es decir, el cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "\Omega_1(\rho_x)"'] & \Omega_2(x) \arrow[d, "\Omega_2(\rho_x)"] \\
\Omega_1\left((G\circ H)(x)\right) \arrow[r, "\eta_{(G\circ H)(x)}"'] & \Omega_2\left((G\circ H)(x)\right)
\end{tikzcd}$$

De aquí que $\left((\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)\circ\epsilon_{\Omega_1}\right)_x = (\epsilon_{\Omega_2}\circ\eta)_x$ para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, por lo que $(\overline{G}\circ\overline{H})(\eta)\circ\epsilon_{\Omega_1} = \epsilon_{\Omega_2}\circ\eta$. Así, ϵ es natural.

Luego, ϵ es isomorfismo natural pues para cada $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}-\mathrm{Set})$, ϵ_Ω es isomorfismo pues para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $(\epsilon_\Omega)_x = \Omega(\rho_x)$ es isomorfismo pues como ρ es isomorfismo natural, ρ_x es isomorfismo. En consecuencia, el funtor $1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}$ es naturalmente isomorfo a $\overline{G}\circ\overline{H}$.

Siguiendo un razonamiento análogo, se sigue que el funtor $1_{\mathcal{C}'-\mathrm{Set}}$ es naturalmente isomorfo a $\overline{H}\circ\overline{G}$.

Por lo tanto, las categorías $\mathcal{C}-\mathrm{Set}$ y $\mathcal{C}'-\mathrm{Set}$ son naturalmente equivalentes. $\square$

Definición 1.5. Dados Ω_1, Ω_2 dos $\mathcal{C}$-conjuntos, definimos su *unión disjunta* como sigue:

- En objetos: para cada objeto x de $\mathcal{C}$,

$$(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(x) := \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x).$$

- En morfismos: si $x, y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo entre ellos, entonces

$$(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(\alpha) := \Omega_1(\alpha) \sqcup \Omega_2(\alpha)$$

manda a cada elemento de $\Omega_i(x)$ en el correspondiente $\Omega_i(y)$. Note que está bien definido pues la unión es disjunta.

Veamos que, en efecto, la unión ajena de $\mathcal{C}$-conjuntos es un $\mathcal{C}$-conjunto. Sean Ω_1, Ω_2 $\mathcal{C}$-conjuntos. Para probar que $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ es un $\mathcal{C}$-conjunto tenemos que ver lo siguiente:

1. Para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,

$$(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(1_x) = 1_{(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(x)}.$$

2. Si $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\beta \circ \alpha) = (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\beta) \circ (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\alpha).$$

Para la primera propiedad, sea x objeto de la categoría $\mathcal{C}$. Notemos que

$$\begin{aligned}(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(1_x) &= \Omega_1(1_x) \sqcup \Omega_2(1_x)\\ &= 1_{\Omega_1(x)} \sqcup 1_{\Omega_2(x)}\\ &= 1_{\Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)}\\ &= 1_{(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(x)}.\end{aligned}$$

Hay que ver que, en efecto, $1_{\Omega_1(x)} \sqcup 1_{\Omega_2(x)} = 1_{\Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)}$. Para esto, sea $c \in \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$, entonces $c \in \Omega_1(x)$ o $c \in \Omega_2(x)$.

- Si $c \in \Omega_1(x)$, entonces $\left(1_{\Omega_1(x)} \sqcup 1_{\Omega_2(x)}\right)(c) = 1_{\Omega_1(x)}(c) = c = 1_{\Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)}(c)$.
- Si $c \in \Omega_2(x)$, entonces $\left(1_{\Omega_1(x)} \sqcup 1_{\Omega_2(x)}\right)(c) = 1_{\Omega_2(x)}(c) = c = 1_{\Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)}(c)$.

Y note que esto pasa para cada $c \in \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$. Así, $1_{\Omega_1(x)} \sqcup 1_{\Omega_2(x)} = 1_{\Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)}$.

Para la segunda propiedad, sean $x, y, z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$ morfismos entre ellos. Notemos que

$$\begin{aligned}(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\beta \circ \alpha) &= \Omega_1(\beta \circ \alpha) \sqcup \Omega_2(\beta \circ \alpha)\\ &= (\Omega_1(\beta) \circ \Omega_1(\alpha)) \sqcup (\Omega_2(\beta) \circ \Omega_2(\alpha))\\ &= (\Omega_1(\beta) \sqcup \Omega_2(\beta)) \circ (\Omega_1(\alpha) \sqcup \Omega_2(\alpha))\\ &= (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\beta) \circ (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)\,(\alpha).\end{aligned}$$

Para verificar la penúltima igualdad, sea $c \in \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$. Entonces $c \in \Omega_1(x)$ o $c \in \Omega_2(x)$.

Si $c \in \Omega_1(x)$, entonces $(\Omega_1(\alpha) \sqcup \Omega_2(\alpha))(c) = \Omega_1(\alpha)(c)$. Luego,

$$\begin{aligned}((\Omega_1(\beta) \sqcup \Omega_2(\beta)) \circ (\Omega_1(\alpha) \sqcup \Omega_2(\alpha)))(c) &= (\Omega_1(\beta) \sqcup \Omega_2(\beta))(\Omega_1(\alpha)(c)) \\ &= \Omega_1(\beta)(\Omega_1(\alpha)(c)).\end{aligned}$$

Por otro lado, $((\Omega_1(\beta) \circ \Omega_1(\alpha)) \sqcup (\Omega_2(\beta) \circ \Omega_2(\alpha)))(c) = (\Omega_1(\beta) \circ \Omega_1(\alpha))(c)$, que es igual a lo obtenido anteriormente.

La prueba es análoga para el caso en el que $c \in \Omega_2(x)$, y note que esto pasa para cada $c \in \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$. Por lo tanto, $(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(\beta \circ \alpha) = (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(\beta) \circ (\Omega_1 \sqcup \Omega_2)(\alpha)$.

En consecuencia, la unión disjunta de dos $\mathcal{C}$-conjuntos es un $\mathcal{C}$-conjunto.

Definición 1.6. Dados Ω_1, Ω_2 dos $\mathcal{C}$-conjuntos, definimos su *intersección* como sigue:

- En objetos: para cada objeto x de $\mathcal{C}$,

  $$(\Omega_1 \cap \Omega_2)(x) := \Omega_1(x) \cap \Omega_2(x)$$

  es la intersección de dichos conjuntos.

- En morfismos: si $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo entre ellos, entonces $(\Omega_1 \cap \Omega_2)(\alpha)$ es la restricción de $\Omega_1(\alpha)$ a $\Omega_1(x) \cap \Omega_2(x)$.

Observe que si el dominio de $(\Omega_1 \cap \Omega_2)(\alpha)$, es decir, $(\Omega_1 \cap \Omega_2)(x)$, es vacío, entonces $(\Omega_1 \cap \Omega_2)(\alpha)$ es la función vacía.

Además, dicha intersección está bien definida y es un funtor pues restringir funciones preserva identidades y composiciones.

1.2 $\mathcal{C}$–conjuntos transitivos

Definición 1.7. 1. Definimos el *soporte* de un $\mathcal{C}$-conjunto Ω como el conjunto de objetos c de $\mathcal{C}$ tales que $\Omega(c) \neq \emptyset$ y lo denotamos por $\mathrm{supp}(\Omega)$.

2. Diremos que un $\mathcal{C}$-conjunto es *no vacío* si $\mathrm{supp}(\Omega)$ es no vacío, es decir, existe $c \in \mathrm{Obj}(C)$ tal que $\Omega(c) \neq \emptyset$.

Observación 1.8. Existe el $\mathcal{C}$-conjunto vacío, el cual denotamos por $\varnothing$, que cumple que para todo $x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\varnothing(x) = \emptyset$ y si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ con $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\varnothing(f)$ es la función vacía.

Observemos también que $\mathrm{supp}(\varnothing) = \emptyset$.

Definición 1.9. Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto. Decimos que Ω_1 es un $\mathcal{C}$-*subconjunto* de Ω, denotado por $\Omega_1 \leq \Omega$, si Ω_1 es un subfuntor de Ω, es decir, $\Omega_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ es un funtor junto con una transformación natural $\iota : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ tal que para cada objeto c de $\mathcal{C}$, $\iota_c : \Omega_1(c) \longrightarrow \Omega(c)$ es una inclusión.

Definición 1.10. 1. Un $\mathcal{C}$-conjunto no vacío Ω es *transitivo* si no se puede expresar propiamente como una unión disjunta, es decir, si Ω_1, Ω_2 son $\mathcal{C}$-conjuntos tales que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, entonces $\Omega_1 = \varnothing$ o $\Omega_2 = \varnothing$.

2. Decimos que un $\mathcal{C}$-conjunto Ω es *finito* si
   (a) $|\operatorname{supp}(\Omega)| < \infty$, y
   (b) para todo $x \in \mathcal{C}$, $|\Omega(x)| < \infty$.
3. Una categoría pequeña $\mathcal{C}$ es *finita* si tanto su conjunto de objetos como su conjunto de morfismos son finitos.

Definición 1.11. Una categoría $\mathcal{C}$ es *conexa* si no se puede escribir de la forma $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ categorías no vacías y, además, no hay morfismos de objetos de $\mathcal{C}_1$ en objetos de $\mathcal{C}_2$ y viceversa.

Proposición 1.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña.*

1. *Salvo orden, todo $\mathcal{C}$-conjunto finito no vacío Ω tiene una descomposición única*
$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \cdots \sqcup \Omega_n$$
donde cada Ω_i es transitivo.
2. *Si Ω es un $\mathcal{C}$-conjunto transitivo, entonces la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son el soporte de Ω es conexa.*

Demostración. 1. Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto finito. Si Ω es transitivo, acabamos. Si no, entonces $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. Si Ω_1 y Ω_2 son transitivos, acabamos. Si no (es decir, alguno de ellos no lo es), repetimos el argumento, y así seguimos sucesivamente. Note que este proceso debe terminar pues Ω es finito. Por lo tanto, Ω tiene una descomposición en transitivos.

Ahora, si γ es un $\mathcal{C}$-conjunto transitivo y $\gamma \leq \Omega$, entonces $\gamma \leq \Omega_i$ para algún $i \leq n$, pues note que $\gamma = \bigsqcup_{i=1}^{n} (\gamma \cap \Omega_i)$ y como γ es $\mathcal{C}$-transitivo, al igual que los Ω_i's, debe pasar que $\gamma \cap \Omega_j \neq \varnothing$ para algún $j \leq n$ y $\gamma \cap \Omega_i = \varnothing$ para toda $i \neq j$. De ahí que $\gamma = \gamma \cap \Omega_j$.

Con esto, si tenemos otra descomposición de Ω en $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos,
$$\Omega = \bigsqcup_{j=1}^{m} \Omega'_j,$$
el proceso anterior lo podemos hacer para cada Ω'_j. Por lo tanto, cada Ω'_j es $\mathcal{C}$-subconjunto de algún Ω_i y viceversa, por lo que $n = m$ y para todas i, j, $\Omega_i = \Omega'_j$.

En consecuencia, la descomposición es única.

2. Sea $\mathcal{D}$ la subcategoría plena cuyos objetos son los elementos de $\operatorname{supp}(\Omega)$. Supongamos que $\mathcal{D}$ es disconexa con $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2$ sin morfismos entre los objetos de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$.

Podemos entonces definir al $\mathcal{C}$-conjunto Ω_i, $i = 1, 2$, como sigue:
$$\Omega_i(x) = \begin{cases} \Omega(x), & x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D}_i)\,; \\ \emptyset, & x \notin \operatorname{Obj}(\mathcal{D}_i)\,. \end{cases}$$

Esto implicaría que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ con $\Omega_1 \neq \emptyset \neq \Omega_2$, lo cual es una contradicción a la suposición de que Ω es transitivo.

Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es conexa. $\square$

Ejemplo 1.13. Sea $\mathcal{Q}$ la categoría

$$\mathcal{Q} = \qquad x \xrightarrow{\alpha} y$$

del Ejemplo 1.3. Veamos que los $\mathcal{Q}$-conjuntos transitivos no vacíos finitos son isomorfos a los $\mathcal{Q}$-conjuntos de la forma

$$\Omega_n := \underline{n} \longrightarrow \underline{1}$$

con $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}, n \geq 0$, es decir, $\Omega_n(x) = \underline{n}$, $\Omega_n(y) = \underline{1}$ y $\Omega_n(\alpha)$ es constante.

En efecto. Si $|Y| > 1$, entonces $Y = Y_1 \sqcup Y_2$, así que podemos definir $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ y $X_2 = f^{-1}(Y_2)$. Con esto, definimos $\Omega_i(x) = X_i$ y $\Omega_i(y) = Y_i$ para $i = 1, 2$ y tendríamos funciones $f_i = f|_{\Omega_i(x)} : \Omega_i(x) \longrightarrow \Omega_i(y)$, la cual está bien definida pues $\Omega_i(x)$ es la preimagen de $\Omega_i(y)$.

Esto implica que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ con $\Omega_1 \neq \varnothing \neq \Omega_2$, de donde se implicaría que Ω no es transitivo.

De ahí que, para que Ω sea $\mathcal{Q}$-transitivo, se debe cumplir que $|Y| = 1$.

Este ejemplo nos dice que una categoría finita puede tener infinitos $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos no isomorfos.

Proposición 1.14. *1. Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto. Ω_1 es un $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω si y sólo si $\Omega_1(x) \subseteq \Omega(x)$ para todo objeto x de $\mathcal{C}$ y, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, $\Omega(\alpha)(\Omega_1(x)) \subseteq \Omega_1(y)$.*

2. Sea $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathcal{C}$-subconjuntos de Ω. Entonces $\bigcap_{i\in I} \Omega_i$ es un $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω.

Demostración. 1.$\Longrightarrow$) Como Ω_1 es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω, entonces es un subfuntor, por lo que existe $\iota : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ transformación natural tal que para todo objeto x de $\mathcal{C}$, $\iota_x : \Omega_1(x) \longrightarrow \Omega(x)$ es una inclusión.

En particular, esto nos dice que $\Omega_1(x) \subseteq \Omega(x)$.

Ahora, sea $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$, entonces $\Omega(\alpha) : \Omega(x) \longrightarrow \Omega(y)$. Sea $c \in \Omega_1(x)$. Como Ω_1 es subfuntor, tenemos $\iota_x : \Omega_1(x) \longrightarrow \Omega(x)$ inclusión.

Entonces, por una parte,

$$(\Omega(\alpha) \circ \iota_x)(c) = \Omega(\alpha)(\iota_x(c)) = \Omega(\alpha)(c)$$

y, por otra parte,

$$(\Omega(\alpha) \circ \iota_x)(c) = (\iota_y \circ \Omega_1(\alpha))(c) = \iota_y(\Omega_1(\alpha)(c)) = \Omega_1(\alpha)(c) \in \Omega_1(y)$$

por ser ι transformación natural.

Y esto pasa para cada elemento $c \in \Omega_1(x)$. Así, $\Omega(\alpha)(\Omega_1(x)) \subseteq \Omega_1(y)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\Omega_1(x) \subseteq \Omega(x)$ para todo $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y que, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,y)$, $\Omega(\alpha)\,(\Omega_1(x)) \subseteq \Omega_1(y)$. Veamos que Ω_1 es subfuntor de Ω.

Definimos el funtor $\Omega_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ de la siguiente manera:

- En objetos: para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\Omega_1(x)$ es tal que es subconjunto de $\Omega(x)$, por lo que $\Omega_1(x)$ es un conjunto.
- En morfismos: si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,y)$, definimos $\Omega_1(\alpha) : \Omega_1(x) \longrightarrow \Omega_1(y)$ como $\Omega_1(\alpha) = \Omega(x)|_{\Omega_1(x)}$.

Con esta definición es claro que Ω_1 es funtor.

Ahora, sea $\iota : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ tal que, para cada objeto x de $\mathcal{C}$, $\iota_x : \Omega_1(x) \longrightarrow \Omega(x)$ es la inclusión de $\Omega_1(x)$ en $\Omega(x)$. Para ver que ι es transformación natural, veamos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1(x) \arrow[r, "\iota_x"] \arrow[d, "\Omega_1(\alpha)"'] & \Omega(x) \arrow[d, "\Omega(\alpha)"] \\
\Omega_1(y) \arrow[r, "\iota_y"'] & \Omega(y)
\end{tikzcd}$$

Es decir, veamos que $\Omega(\alpha) \circ \iota_x = \iota_y \circ \Omega_1(\alpha)$.

Sea $c \in \Omega_1(x)$, entonces $(\Omega(\alpha) \circ \iota_x)(c) = \Omega(\alpha)(\iota_x(c)) = \Omega(\alpha)(c)$. Por otro lado, $(\iota_y \circ \Omega_1(\alpha))(c) = \iota_y(\Omega_1(\alpha)(c)) = \Omega_1(\alpha)(c) = \Omega(\alpha)(c)$ por definición de Ω_1 en morfismos.

Por lo tanto, el diagrama conmuta. En consecuencia, ι es transformación natural. Además, por definición ι_x es inyectiva para todo $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Así, Ω_1 es subfuntor de Ω y, por lo tanto, es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω.

2. Se sigue de 1. Como cada Ω_i es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω, entonces cumple ambas condiciones de 1., por lo que su intersección también las cumple. Así, la intersección de $\mathcal{C}$-subconjunto es un $\mathcal{C}$-conjunto. $\square$

Definición 1.15 ($\mathcal{C}$-conjunto generado)**.** Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto y sea θ una función tal que a todo objeto x de $\mathcal{C}$ le asigna un conjunto $\theta(x)$ que satisface $\theta(x) \subseteq \Omega(x)$. Definimos el *$\mathcal{C}$-conjunto generado por θ* como

$$\langle\theta\rangle = \bigcap_{\substack{\Omega_i \leq \Omega \\ \theta(x)\subseteq\Omega_i(x)\ \forall x\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \\ i\in I}} \Omega_i,$$

es decir, la intersección de los $\mathcal{C}$-subconjuntos de Ω que contienen a X.

Decimos entonces que $\theta \subseteq \Omega$ y podemos pensar que $\theta \subseteq \bigcup\limits_{x\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \Omega(x)$.

Lema 1.16. *Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto y sea $\theta \subseteq \Omega$. Entonces para todo objeto $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,*

$$\langle\theta\rangle = \bigcup_{\substack{y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \\ \alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)}} \Omega(\alpha)\,(\theta(y))\,.$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha)(\theta(y)) &\subseteq \Omega(\alpha)(\langle\theta\rangle(y)) && \text{pues } \theta \subseteq \langle\theta\rangle \\ &\subseteq \langle\theta\rangle(x) && \text{pues } \langle\theta\rangle \leq \Omega \end{aligned}$$

por la Proposición 1.14.

Sea $E(x) = \bigcup\limits_{\substack{y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\\ \alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)}} \Omega(\alpha)(\theta(y))$. Por la observación anterior, $E(x) \subseteq \langle\theta\rangle(x)$. Ahora veamos que $E \leq \Omega$. Si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha)\left(E(y)\right) &= \Omega(\alpha)\left(\bigcup_{\substack{z\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\\ \beta\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,y)}} \Omega(\beta)\left(\theta(z)\right)\right) \\ &\subseteq \bigcup_{\substack{z\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\\ \beta\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,y)}} \Omega(\alpha)\left(\Omega(\beta)\left(\theta(z)\right)\right) \\ &= \bigcup_{\substack{z\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})\\ z\xrightarrow{\beta}y\xrightarrow{\alpha}x}} \Omega(\alpha\circ\beta)\left(\theta(z)\right) \\ &\subseteq E(x), \end{aligned}$$

esto último pues $\alpha\circ\beta$ es un morfismo que llega a x. Así, $E \leq \Omega$. Además, $\theta(x) \subseteq E(x)$ pues $\theta(x) = \Omega(1_x)(\theta(x)) \subseteq E(x)$.

Por lo tanto, $\langle\theta\rangle \leq E$ y, así, $\langle\theta\rangle = E$. □

Corolario 1.17. *Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto. Si existe un objeto x y un elemento $u \in \Omega(x)$ que genera a Ω, entonces Ω es transitivo.*

Demostración. Supongamos que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ de tal manera que algún Ω_i es un $\mathcal{C}$-subconjunto transitivo de Ω. Sin pérdida de generalidad, supongamos que Ω_1 es dicho $\mathcal{C}$-subconjunto transitivo y, además, que $u \in \Omega_1(x)$. Entonces $\langle u\rangle \leq \Omega_1$ pero, por hipótesis, $\langle u\rangle = \Omega$. Entonces $\Omega \leq \Omega_1$, por lo que $\Omega = \Omega_1$ es transitivo. □

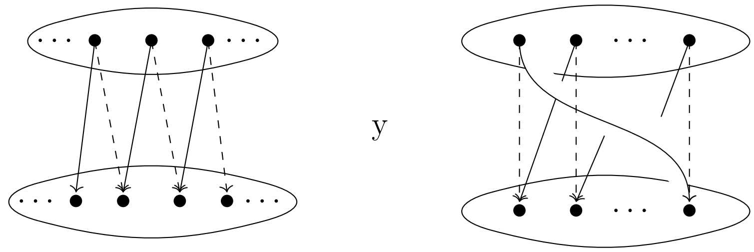
Ejemplo 1.18. Sea $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$ la categoría asociada al carcaj de Kronecker, que consta de dos objetos x, y y dos morfismos $\alpha, \beta : x \longrightarrow y$, como se representa en el siguiente diagrama:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{K}} = \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & y \end{tikzcd}$$

Esta categoría finita tiene conjuntos transitivos que no son finitos, al igual que infinitos conjuntos finitos cuyos morfismos son inyectivos.

Recordemos que un $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjunto es de la forma $\Omega = (X, Y, f, g)$ con $\Omega(x) = X$, $\Omega(y) = Y$, $\Omega(\alpha) = f$ y $\Omega(\beta) = g$.

Consideremos los $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjuntos

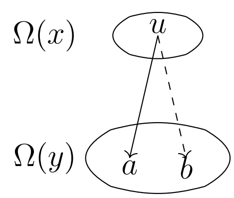


con $\Omega(\alpha)$ representado por las flechas de línea continua y $\Omega(\beta)$ representado por las flechas de línea segmentada.

El primer $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjunto mostrado puede extenderse hacia la derecha o izquierda indefinidamente, o puede terminar para dar un $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjunto finito. Los $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjuntos de este tipo son todos los transitivos con morfismos actuando como funciones inyectivas.

Hay más $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjuntos que los mostrados; los restantes tienen funciones $\Omega(\alpha)$ y $\Omega(\beta)$ no inyectivas.

Por otra parte, los $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjuntos de esta categoría están en biyección con las digráficas: dado un $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjunto Ω podemos construir una digráfica $D = (V, E)$ con V el conjunto de vértices y E el conjunto de flechas tal que $\Omega(y) = V$ y $ab \in E$ si hay un elemento $u \in \Omega(x)$ tal que $\Omega(\alpha)(u) = a$ y $\Omega(\beta)(u) = b$.



Recíprocamente, las digráficas conexas que provienen de $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$-conjuntos Ω donde $\Omega(\alpha)$ y $\Omega(\beta)$ son inyectivas son los caminos cerrados orientados y las trayectorias.

Recordemos que un funtor F es *fiel* ([9], p. 15) si para cada $x, y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y cada $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y)$, la igualdad $F(f_1) = F(f_2)$ implica que $f_1 = f_2$. También ([9], p. 26) recordemos que una *categoría concreta* es un par $(\mathcal{C}, U)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría y $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ es un funtor fiel.

Para una categoría $\mathcal{C}$, dar un $\mathcal{C}$-conjunto es lo mismo que verla como categoría concreta, siempre que $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ sea fiel (ver [11], p. 4). De igual manera podemos ver una categoría concreta como una categoría cuyos objetos son conjuntos (disjuntos) y los morfismos son funciones entre conjuntos.

Esto extiende la noción de que podemos ver a un grupo de permutaciones como un grupo junto con un morfismo fiel al grupo simétrico de algún conjunto, o como un grupo de permutaciones de un conjunto.

Si $\mathcal{C}_G$ es la categoría de desenlazado de algún grupo G, un $\mathcal{C}_G$-conjunto es lo mismo que una representación por permutación de G.

Así como para los grupos tenemos el teorema de Cayley, que nos dice que todo grupo se puede ver como un grupo de permutaciones, precisamente es más general el caso de que toda categoría $\mathcal{C}$ podemos verla como una categoría concreta. Vamos a "copiar" la demostración del teorema de Cayley, que procede de considerar la representación regular.

Definición 1.19. Para cada objeto y de una categoría $\mathcal{C}$, sea ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y$ el $\mathcal{C}$-conjunto tal que:

- En objetos: si $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(x) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$,
- En morfismos: si $x, z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow z$ es un morfismo entre ellos,
$$ {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(\alpha) : \ {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(x) \longrightarrow \ {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(z) $$
es tal que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(\alpha)(f) = \alpha \circ f$.

Con esto, sea ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C} = \bigsqcup_{y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})} {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y$. A ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$ se le llama $\mathcal{C}$-*conjunto regular* izquierdo.

Es claro que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-conjunto.

Proposición 1.20. *1. Los $\mathcal{C}$-conjuntos ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y$ son transitivos.*

2. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, el $\mathcal{C}$-conjunto regular es fiel.

Demostración. 1. Si tomamos $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $1_y \in {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y(y)$, éste genera a ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y$ y, por el Corolario 1.17, se sigue que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_y$ es transitivo.

2. Supongamos que α y β son tales que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}(\alpha) = \ {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}(\beta)$, los cuales, por definición, son tales que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}(\beta)(f) = \beta \circ f$ y ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}(\alpha)(f) = \alpha \circ f$.

Entonces, para cualquier f, $\alpha \circ f = \beta \circ f$, lo que implica que los dominios de α, $\operatorname{dom}(\alpha)$, y de β, $\operatorname{dom}(\beta)$, son iguales, pues los conjuntos ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}(x)$ son distintos para diferentes objetos x.

Luego, $1_{\operatorname{dom}(\alpha)} = 1_{\operatorname{dom}(\beta)}$, así que $\alpha = \alpha \circ 1_{\operatorname{dom}(\alpha)} = \beta \circ 1_{\operatorname{dom}(\beta)} = \beta$.

Así, ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$ es fiel. □

Durante el Seminario de Álgebra impartido en el semestre 2023-1 estudiamos desde otro enfoque a los $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos que, aunque es independiente a la perspectiva de [13], es más parecida a cómo se estudian en la Teoría de Grupos:

Definición 1.21. Sean $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ un $\mathcal{C}$-conjunto y $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Si $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, una *caminata* de x en y es una sucesión de morfismos $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_1$ de la forma

$$ x \overset{\alpha_1}{\text{———}} y_1 \overset{\alpha_2}{\text{———}} y_2 \text{———} \cdots \overset{\alpha_n}{\text{———}} y_n = y $$

Definimos, para cada α_i flecha de la caminata,

$$ \Omega(\overline{\alpha_i}) = \begin{cases} \Omega(\alpha_i), & \text{si } y_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} y_i \\ \Omega(\alpha_i)^{-1}, & \text{si } y_i \xrightarrow{\alpha_i} y_{i-1} \end{cases} $$

donde $\Omega(\alpha_i)^{-1}$ denota a la preimagen de $\Omega(\alpha_i)$. Además, si α es caminata de x en y, definimos la *caminata opuesta* de α, denotada por α^{op}, como la caminata α en dirección opuesta, es decir, α^{op} es una caminata de y en x.

Observación 1.22. Como nos interesan flechas del estilo $\Omega(\overline{\alpha_{i+1}})\Omega(\overline{\alpha_i})$, si α_i y α_{i+1} fueran en la misma dirección tendríamos que, como Ω es covariante, $\Omega(\overline{\alpha_{i+1}})\Omega(\overline{\alpha_i}) = \Omega(\alpha_{i+1}\alpha_i)$ o $\Omega(\overline{\alpha_{i+1}})\Omega(\overline{\alpha_i}) = \Omega(\alpha_i\alpha_{i+1})^{-1}$, dependiendo de la orientación.

Entonces, en la caminata, podemos suponer sin pérdida de generalidad que dos flechas consecutivas van en direcciones opuestas. De ahí que tenemos únicamente cuatro posibles tipos de caminatas:

1. $x \xrightarrow{\alpha_1} y_1 \xleftarrow{\alpha_2} y_2 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} y$;
2. $x \xleftarrow{\alpha_1} y_1 \xrightarrow{\alpha_2} y_2 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} y$;
3. $x \xrightarrow{\alpha_1} y_1 \xleftarrow{\alpha_2} y_2 \cdots \xleftarrow{\alpha_n} y$;
4. $x \xleftarrow{\alpha_1} y_1 \xrightarrow{\alpha_2} y_2 \cdots \xleftarrow{\alpha_n} y$.

Definición 1.23. Definimos, para $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $u \in \Omega(x)$, $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, la $\mathcal{C}$-*órbita de u respecto de y* como:

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}u)(y) &= \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \text{caminata}}} \Omega(\overline{\alpha_n})\cdots\Omega(\overline{\alpha_1})(u) \\ &= \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \alpha}} \Omega(\overline{\alpha})(u).\end{aligned}$$

Observemos que si x, y, z son objetos de $\mathcal{C}$, α es una caminata de x en y y β es una caminata de y en z, entonces $\Omega(\overline{\beta\alpha})(u) = \Omega(\overline{\beta})\Omega(\overline{\alpha})(u)$. En efecto, si β se compone de morfismos $\beta_1, \dots, \beta_m$ y α de morfismos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, entonces

$$\begin{aligned}\Omega(\overline{\beta})\Omega(\overline{\alpha})(u) &= \Omega(\overline{\beta_m})\cdots\Omega(\overline{\beta_1})\Omega(\overline{\alpha_n})\cdots\Omega(\overline{\alpha_1})(u) \\ &= \Omega(\overline{\beta\alpha})(u).\end{aligned}$$

Lema 1.24. *Sean Ω un $\mathcal{C}$-conjunto, $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $u \in \Omega(x)$. Entonces $\mathcal{C}u$ es un $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω y $u \in (\mathcal{C}u)(x)$.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{C}u$ es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω, primero note que por definición $(\mathcal{C}u)(y) \subseteq \Omega(y)$ y esto pasa para cada $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Ahora, sean $\ell : y \longrightarrow w$ morfismo en $\mathcal{C}$ y $v \in (\mathcal{C}u)(y)$. De esto último se sigue que existe α caminata de x a y compuesta de morfismos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que $v \in \Omega(\overline{\alpha_n})\cdots\Omega(\overline{\alpha_1})(u)$.

Observe entonces que

$$x \overset{\alpha_1}{\text{———}} y_1 \overset{\alpha_2}{\text{———}} y_2 \text{———} \cdots \overset{\alpha_n}{\text{———}} y_n = y \xrightarrow{\ell} w$$

es una caminata de x a w. De ahí que $\Omega(\overline{\ell})(v)$ es un elemento de un uniendo que representa una caminata de x a w. Es decir, $\Omega(\ell)(v) \in (\mathcal{C}u)(w)$.

Por la Proposición 1.14, $\mathcal{C}u$ es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω.

Por otra parte, por hipótesis, $u \in \Omega(x)$, así que consideremos la caminata trivial de x a x, es decir, 1_x. Así,

$$u \in \Omega(\overline{1_x})(u) \subseteq \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \alpha}} \Omega(\overline{\alpha})(u) = (\mathcal{C}u)(x).$$

□

Observación 1.25. Definimos $(\mathcal{C}u)'(y) := \Omega(y) \setminus (\mathcal{C}u)(y)$. Observemos que $(\mathcal{C}u)'$ es un $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω.

En efecto. Por definición, es claro que $(\mathcal{C}u)'(y) \subseteq \Omega(y)$. Sean $\ell : y \longrightarrow w$ morfismo en $\mathcal{C}$ y $v \in (\mathcal{C}u)'(y)$, entonces $v \in \Omega(y) \setminus (\mathcal{C}u)(y)$. Si $\Omega(\ell)(v) \in (\mathcal{C}u)(w)$, entonces existe α una caminata de x a y tal que $\Omega(\ell)(v) \in \Omega(\overline{\alpha})(u)$, entonces $v \in \Omega(\ell)^{-1}\Omega(\overline{\alpha})(u) \subseteq (\mathcal{C}u)(y)$, lo cual es una contradicción.

Así, $(\mathcal{C}u)'$ es un $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω por la Proposición 1.14.

Lema 1.26. *Sean $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $u \in \Omega(x)$. Si $v \in (\mathcal{C}u)(y)$, entonces $\mathcal{C}u = \mathcal{C}v$ como $\mathcal{C}$-conjuntos.*

Demostración. Sea $v \in (\mathcal{C}u)(y)$, entonces existe γ caminata de x a y tal que $v \in \Omega(\overline{\gamma})(u)$. De ahí que $u \in \Omega(\overline{\gamma^{op}})(v)$.

Sea $c \in (\mathcal{C}u)(z)$. Entonces $c \in \Omega(\overline{\alpha})(u)$ para alguna caminata α de x en y, pero por una observación anterior tenemos que $c \in \Omega(\overline{\alpha})\left(\Omega(\overline{\gamma^{op}})(v)\right) = \Omega(\overline{\alpha\gamma^{op}})(v)$, el cual es un subconjunto de $(\mathcal{C}v)(z)$, pues $\alpha\gamma^{op}$ es una caminata de y en z.

Análogamente, si $b \in (\mathcal{C}v)(z)$, entonces existe β caminata de y en z tal que $b \in \Omega(\overline{\beta})(v) \subseteq \Omega(\overline{\beta})\left(\Omega(\overline{\gamma})(u)\right) = \Omega(\overline{\beta\gamma})(u) \subseteq (\mathcal{C}u)(z)$.

Así, para todo $z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}u)(z) = (\mathcal{C}v)(z)$, por lo que $\mathcal{C}u$ y $\mathcal{C}v$ son iguales en objetos.

Luego, si $f : z \longrightarrow w$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y $c \in (\mathcal{C}u)(z)$, $(\mathcal{C}u)(f)(c) = \Omega(f)(c)$. Y si $b \in (\mathcal{C}v)(z)$, $(\mathcal{C}v)(f)(b) = \Omega(f)(b)$. En consecuencia, $\mathcal{C}u$ y $\mathcal{C}v$ son iguales en morfismos.

Por lo tanto, $\mathcal{C}u = \mathcal{C}v$. □

Corolario 1.27. *Si $\mathcal{C}u \cap \mathcal{C}v \neq \varnothing$, entonces $\mathcal{C}u = \mathcal{C}v$.*

Demostración. Se sigue del Lema 1.26. □

Teorema 1.28. *Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto. Son equivalentes:*

1. *Ω es transitivo;*
2. *Para cada objeto x de $\mathcal{C}$ y cada $u \in \Omega(x)$, $\mathcal{C}u = \Omega$;*
3. *Existe un objeto x de $\mathcal{C}$ y un elemento $u \in \Omega(x)$ tales que $\mathcal{C}u = \Omega$.*

Demostración. [1. $\Longrightarrow$ 2.] Supongamos que Ω es transitivo. Sabemos, por el Lema 1.24 que $\mathcal{C}u \leq \Omega$. Supongamos que $\mathcal{C}u \lneq \Omega$.

Por la Observación 1.25 tenemos que $(\mathcal{C}u)' \leq \Omega$ y, entonces, $\Omega = \mathcal{C}u \sqcup (\mathcal{C}u)'$. Pero como $u \in (\mathcal{C}u)(x)$, $(\mathcal{C}u) \neq \varnothing$ y, como por hipótesis Ω es transitivo, se sigue que $(\mathcal{C}u)' = \varnothing$. Por lo tanto, $\mathcal{C}u = \Omega$.

[2. $\Longrightarrow$ 3.] Es claro.

[3. $\Longrightarrow$ 1.] Por hipótesis, existen $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $u \in \Omega(x)$ tales que $\Omega = \mathcal{C}u$. Supongamos que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ y que $\Omega_1 \neq \varnothing$. Sea $v \in \Omega_1(y)$ con $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.

Entonces, por una parte, $\mathcal{C}v \leq \Omega$, pero por otra parte, por el Lema 1.26 $\mathcal{C}v = \mathcal{C}u = \Omega$, es decir, $\Omega \leq \Omega_1$.

De ahí que $\mathcal{C}u = \Omega = \Omega_1$ y $\Omega_2 = \varnothing$. En consecuencia, Ω es transitivo. □

Proposición 1.29. *Sean* Ω, Ω' $\mathcal{C}$*-conjuntos,* $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ *y* $u \in \Omega(x)$*. Si* $\eta : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *un morfismo entre ellos, entonces* $\eta(\mathcal{C}u)$ *es* $\mathcal{C}$*-subconjunto de* $\mathcal{C}\eta_x(u)$*.*

Demostración. Como η es una transformación natural, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "\Omega(\overline{\alpha})"'] & \Omega'(x) \arrow[d, "\Omega'(\overline{\alpha})"] \\
\Omega(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & \Omega'(y)
\end{tikzcd}$$

con α caminata de x a y. Entonces si $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$,

$$(\eta(\mathcal{C}u))(y) = \eta_y\left(\bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \alpha}} \Omega(\overline{\alpha})(u)\right) \subseteq \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \beta}} \Omega'(\overline{\beta})(\eta_x(u)) = (\mathcal{C}\eta_x(u))(y).$$

Luego, si $f : y \longrightarrow z$ es morfismo en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(x) \arrow[r, "\Omega(\overline{\alpha})"] \arrow[d, "\eta_x"'] & \Omega(y) \arrow[r, "\Omega(f)"] \arrow[d, "\eta_y"'] & \Omega(z) \arrow[d, "\eta_z"] \\
\Omega'(x) \arrow[r, "\Omega'(\overline{\alpha})"'] & \Omega'(y) \arrow[r, "\Omega'(f)"'] & \Omega'(z)
\end{tikzcd}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}\eta_x(u))(f)\left((\eta(\mathcal{C}u))(y)\right) &= \Omega'(f)\eta_y\left(\bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \alpha}} \Omega(\overline{\alpha})(u)\right) \\
&= \eta_z\left(\Omega(f)\left(\bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow y \\ \alpha}} \Omega(\overline{\alpha})(u)\right)\right) \\
&\subseteq \eta_z\left(\bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow z \\ \beta}} \Omega(\overline{\beta})(u)\right) \\
&= (\eta(\mathcal{C}u))(z).
\end{aligned}$$

Así, $\eta(\mathcal{C}u)$ es $\mathcal{C}$-subconjunto de $\mathcal{C}\eta_x(u)$. □

Note que si η de la Proposición 1.29 es un isomorfismo, se da la igualdad entre dichos $\mathcal{C}$-conjuntos.

Con estos resultados previamente demostrados, podemos dar otra prueba de la unicidad del punto *1.* de la Proposición 1.12.

Sabemos que, si Ω es un $\mathcal{C}$-conjunto finito, podemos descomponerlo en unión disjunta de $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos, a saber,

$$\Omega \cong \bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i.$$

Por el Teorema 1.28, para cada i existen $x_i \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $u_i \in \Omega(x_i)$ tales que $\Omega_i = \mathcal{C}u_i$. De ahí que

$$\Omega \cong \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}u_i.$$

Ahora supongamos que

$$\Omega \cong \bigsqcup_{j=1}^{m} \mathcal{C}v_j,$$

con $v_j \in \Omega(x_j)$, $x_j \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, es decir, tenemos otra descomposición de Ω en $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos con $m > n$. Como ambas son descomposiciones en transitivos de Ω, tenemos η un isomorfismo natural entre ellas por lo que, por la Proposición 1.29, se tiene que $\eta(\mathcal{C}u_1) = \mathcal{C}\eta_{x_1}(u_1)$. Luego, como las $\mathcal{C}$-órbitas están generadas por cualquiera de sus elementos (como vimos en el Lema 1.26) tenemos sin pérdida de generalidad que $\eta(\mathcal{C}u_i) = \mathcal{C}v_i$. En particular, $\eta(\mathcal{C}u_1) = \mathcal{C}v_1$. Ahora, como sabemos que $(\mathcal{C}u_i)'$ es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω,

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}u_i\right) \cap (\mathcal{C}u_1)' \cong \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} \mathcal{C}v_j\right) \cap (\mathcal{C}v_1)',$$

por lo que

$$\bigsqcup_{i=2}^{n} \mathcal{C}u_i \cong \bigsqcup_{j=2}^{m} \mathcal{C}v_j.$$

Si continuamos este proceso, como $m > n$, llegaremos a que $\varnothing \cong \bigsqcup_{j=n+1}^{m} \mathcal{C}v_j$, pero como $\mathcal{C}v_j \neq \varnothing$ para toda j, llegamos a que $m = n$. Con esto, la descomposición en $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos es única.

Lema 1.30. *Sean Ω un $\mathcal{C}$-conjunto, $\alpha : x \rightsquigarrow x'$ una caminata en $\mathcal{C}$ y $u \in \Omega(x)$. Denotaremos por $\alpha u = \Omega(\overline{\alpha})(u)$. Entonces $a \in \alpha u$ si y sólo si $u \in \alpha^{op} a$.*

Demostración. Sólo veremos la necesidad, la suficiencia es simétrica. Sea $a \in \alpha u$ y supongamos que $\alpha = \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ con $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $1 \leq i \leq n$. Procederemos por inducción sobre n la longitud de la caminata α.

Si $n = 1$, entonces $\alpha = \alpha_1^{\varepsilon_1}$, es decir, α es un morfismo. Tenemos dos casos:

- Si $\varepsilon_1 = 1$, entonces $\alpha u = \Omega(\alpha)(u)$, por lo que $a \in \alpha u$ implica que $a = \Omega(\alpha)(u)$, de ahí que $u \in \Omega(\alpha)^{-1}(a)$ y observe que $\alpha^{op} a = \Omega(\overline{\alpha^{op}})(a) = \Omega(\alpha)^{-1}(a)$.
- Si $\varepsilon = -1$, entonces $\alpha u = \Omega(\alpha)^{-1}(u)$, entonces $a \in \alpha u$ implica que $u \in \Omega(\alpha)(a) = \Omega(\overline{\alpha^{op}})(a) = \alpha^{op} a$.

Supongamos que se cumple para $n > 1$, es decir, si $\alpha = \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$, entonces $a \in \alpha u$ implica que $u \in \alpha^{op} a$. Sea α caminata de x a x' en $\mathcal{C}$ de longitud $n+1$, entonces $\alpha = \alpha_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$.

Si $a \in \alpha u$, entonces $a \in (\alpha_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1})\, u = (\alpha_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \alpha_n^{\varepsilon_n} \cdots \alpha_2^{\varepsilon_2})\, \alpha_1^{\varepsilon_1} u$.

Note que $\alpha_1^{\varepsilon_1}u$ es no vacío, pues de lo contrario $\alpha u = \emptyset$. Entonces

$$\alpha_1^{\varepsilon_1}u \subseteq \alpha_2^{-\varepsilon_2} \cdots \alpha_n^{-\varepsilon_n}\alpha_{n+1}^{-\varepsilon_{n+1}}a.$$

De nueva cuenta, tenemos dos casos:

- Si $\varepsilon_1 = 1$, $\alpha_1 u \subseteq \alpha_2^{-\varepsilon_2} \cdots \alpha_n^{-\varepsilon_n}\alpha_{n+1}^{-\varepsilon_{n+1}}a$, así que $u \in \alpha_1^{-1} \cdots \alpha_n^{-\varepsilon_n}\alpha_{n+1}^{-\varepsilon_{n+1}}a = \alpha^{op}a$.
- Si $\varepsilon_1 = -1$, $\alpha_1^{-1}u \subseteq \alpha_2^{-\varepsilon_2} \cdots \alpha_n^{-\varepsilon_n}\alpha_{n+1}^{-\varepsilon_{n+1}}a$, así que $u \in \alpha_1 \cdots \alpha_n^{-\varepsilon_n}\alpha_{n+1}^{-\varepsilon_{n+1}}a = \alpha^{op}a$. $\square$

Ejemplo 1.31. Consideremos $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}$ el siguiente carcaj:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{L}} = \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

y considerémoslo como categoría. Sabemos que los $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}$-conjuntos son de la forma $\Omega : \mathcal{Q}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \text{Set}$, $\Omega = (X, f)$ con $X = \Omega(x)$ y $f = \Omega(\alpha)$.

Sea $u \in X$. Analicemos las $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}$-órbitas de u. Note que, como $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}$ sólo tiene un objeto, en objetos únicamente tiene sentido evaluar $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}u$ en x. Así,

$$(\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}u)(x) = \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow x \\ \beta}} \Omega(\overline{\beta})(u).$$

Pero observe que una caminata β de x a x tiene la forma $\beta = \alpha^{-m} \circ \alpha^n$, con $m, n \in \mathbb{N}_0$. Así que

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}u)(x) &= \bigcup_{m,n} \Omega(\alpha)^{-m}\Omega(\alpha)^n(u) \\ &= \bigcup_{m,n} (f^{-m} \circ f^n)(u).\end{aligned}$$

Luego, Ω es transitivo si y sólo si para cualquier partición de X, $X = X_1 \sqcup X_2$, $f(X_1) \cap X_2 \neq \emptyset$ o $f(X_2) \cap X_1 \neq \emptyset$.

Capítulo 2

El anillo de Burnside

Sea $\mathcal{C}$ una categoría finita. A partir de aquí y en lo que resta del trabajo estaremos considerando $\mathcal{C}$-conjuntos finitos, a menos que se especifique otra cosa.

2.1 Definición y propiedades básicas

Tenemos una operación de producto en los $\mathcal{C}$-conjuntos: dados Ω y Ψ dos $\mathcal{C}$-conjuntos, definimos $\Omega \times \Psi$ como sigue:

- En objetos: para cada objeto x de $\mathcal{C}$, $(\Omega \times \Psi)(x) = \Omega(x) \times \Psi(x)$ es el producto cartesiano de dichos conjuntos.
- En morfismos: para cualesquiera $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y cualquier $\alpha : x \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{C}$, tenemos $(\Omega \times \Psi)(\alpha) = \Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha)$.

Veamos entonces que $\Omega \times \Psi$ es un funtor. Notemos primero que, si c es un objeto de $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
(\Omega \times \Psi)(1_c) &= \Omega(1_c) \times \Psi(1_c) \\
&= 1_{\Omega(c)} \times 1_{\Psi(c)} \\
&= 1_{\Omega(c) \times \Psi(c)} \\
&= 1_{(\Omega \times \Psi)(c)}.
\end{aligned}$$

Observemos que, en efecto, $1_{\Omega(c)} \times 1_{\Psi(c)} = 1_{\Omega(c) \times \Psi(c)}$. Para esto, sea $u \in (\Omega \times \Psi)(c)$, entonces $u = (u_1, u_2)$, con $u_1 \in \Omega(c)$ y $u_2 \in \Psi(c)$. Entonces

$$\left(1_{\Omega(c)} \times 1_{\Psi(c)}\right)(u_1, u_2) = \left(1_{\Omega(c)}(u_1), 1_{\Psi(c)}(u_2)\right) = (u_1, u_2) = 1_{\Omega(c) \times \Psi(c)}(u_1, u_2),$$

es decir, $\left(1_{\Omega(c)} \times 1_{\Psi(c)}\right)(u) = 1_{\Omega(c) \times \Psi(c)}(u)$ y esto pasa para toda $u \in (\Omega \times \Psi)(c)$. Así, $\Omega \times \Psi$ manda identidades en identidades.

Por otra parte, si c, c', c'' son objetos en $\mathcal{C}$ y $c \xrightarrow{\alpha} c' \xrightarrow{\beta} c''$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(\Omega \times \Psi)(\beta \circ \alpha) &= \Omega(\beta \circ \alpha) \times \Psi(\beta \circ \alpha)\\ &= (\Omega(\beta) \circ \Omega(\alpha)) \times (\Psi(\beta) \circ \Psi(\alpha))\\ &= (\Omega(\beta) \times \Psi(\beta)) \circ (\Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha))\\ &= (\Omega \times \Psi)(\beta) \circ (\Omega \times \Psi)(\alpha).\end{aligned}$$

Veamos que, en efecto,

$$(\Omega(\beta) \circ \Omega(\alpha)) \times (\Psi(\beta) \circ \Psi(\alpha)) = (\Omega(\beta) \times \Psi(\beta)) \circ (\Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha)).$$

Sea $u \in (\Omega \times \Psi)(x)$, entonces $u = (u_1, u_2)$ con $u_1 \in \Omega(x)$ y $u_2 \in \Psi(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}((\Omega(\beta) \times \Psi(\beta)) \circ (\Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha)))(u_1, u_2) &= (\Omega(\beta) \times \Psi(\beta))(\Omega(\alpha)(u_1), \Psi(\alpha)(u_2))\\ &= ((\Omega(\beta) \circ \Omega(\alpha))(u_1), (\Psi(\beta) \circ \Psi(\alpha))(u_2))\\ &= ((\Omega(\beta) \circ \Omega(\alpha)) \times (\Psi(\beta) \circ \Psi(\alpha)))(u_1, u_2)\end{aligned}$$

y esto pasa para cada $u = (u_1, u_2) \in (\Omega \times \Psi)(x)$ y todo objeto x de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $\Omega \times \Psi$ es funtor covariante.

Recordemos que dos funtores F y G son *isomorfos* si existe $\eta : F \longrightarrow G$ un isomorfismo natural entre ellos. La relación "ser isomorfo" entre $\mathcal{C}$-conjuntos nos produce una relación de equivalencia. Bajo esta relación, a la clase de equivalencia de cualquier $\mathcal{C}$-conjunto Ω la denotaremos por $[\Omega]$ y la llamaremos *clase de isomorfismo*. Con estas consideraciones podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1. Definimos el *anillo de Burnside* de la categoría finita $\mathcal{C}$, denotado por $B(\mathcal{C})$, como el grupo de Grothendieck de los $\mathcal{C}$-conjuntos finitos respecto a la unión ajena $\sqcup$, es decir,

$$B(\mathcal{C}) = \frac{\mathbb{Z}\text{-módulo libre generado por las clases de isomorfismo de } \mathcal{C}\text{-conjuntos}}{\langle [\Omega \sqcup \Psi] - [\Omega] - [\Psi] \rangle}$$

Si deseamos especificar que los $\mathcal{C}$-conjuntos que consideramos son funtores $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, con $\mathcal{D}$ ya sea Set o $\mathrm{Set_I}$, escribimos $B_{\mathcal{D}}(\mathcal{C})$ para denotar a este anillo. Así, $B(\mathcal{C}) = B_{\mathrm{Set}}(\mathcal{C})$.

T. Yoshida, en [18], y J. P. May, en [10], dieron definiciones para el anillo de Burnside de una categoría. Sin embargo, la definición que damos en el presente trabajo es diferente a las antes dadas.

Antes de probar que, en efecto, $B(\mathcal{C})$ es un anillo, daremos la siguiente definición.

Definición 2.2. Decimos que un $\mathcal{C}$-conjunto es *constante* si es isomorfo a un funtor $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ donde para cada objeto x de $\mathcal{C}$, $\Omega(x) = X$ de cardinalidad 1 y, para todo morfismo $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$, $\Omega(\alpha)$ es la función identidad.

Proposición 2.3. *Hasta isomorfismo, hay un único $\mathcal{C}$-conjunto constante con valores en objetos de tamaño 1.*

Demostración. Sea $*_c : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ un $\mathcal{C}$-conjunto tal que, para todo objeto x de $\mathcal{C}$, $*_c(x) = \{c\}$, y en todo morfismo α de $\mathcal{C}$, $*_c(\alpha)$ es la función identidad en c. Análogamente, sea $*_d : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ un $\mathcal{C}$-conjunto tal que, para todo objeto x de $\mathcal{C}$, $*_d(x) = \{d\}$, y en todo morfismo α de $\mathcal{C}$, $*_d(\alpha)$ es la función identidad en d.

Sea $\eta : *_c \longrightarrow *_d$ tal que para todo objeto x de $\mathcal{C}$, $\eta_x : *_c(x) \longrightarrow *_d(x)$ es tal que $\eta_x(c) = d$. Note que esto está bien definido. Si $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} *_c(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "*_c(\alpha)"'] & *_d(x) \arrow[d, "*_d(\alpha)"] \\ *_c(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & *_d(y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues $*_c(\alpha)$ y $*_d(\alpha)$ son las identidades en c y d respectivamente. Así, η es transformación natural. Además, si $\theta : *_d \longrightarrow *_c$ es tal que $\theta_x : *_d(x) \longrightarrow *_c(x)$ con $\theta_x(d) = c$, por un argumento análogo al anteriormente usado se sigue que θ es transformación natural que, además, es inverso de η, y esto se cumple para cada $x \in \text{Obj}\,(\mathcal{C})$.

Por lo tanto, η es isomorfismo natural. En consecuencia, $[*_c] = [*_d]$. $\square$

A la clase de isomorfismo de los $\mathcal{C}$-conjuntos constantes la denotaremos por $[*]$.

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. El $\mathcal{C}$-conjunto constante $*$ es transitivo si y sólo si $\mathcal{C}$ es conexa.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $* : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ es transitivo y que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$ sin morfismos entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Definimos el $\mathcal{C}$-conjunto $\Omega_i : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$, $i = 1, 2$, tal que

$$\Omega_i(x) = \begin{cases} \{c\}, & x \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}_i)\,; \\ \emptyset, & x \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}_j)\,, j \neq i. \end{cases}$$

Note que, con esto, $* = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ y $\Omega_1 \neq \emptyset \neq \Omega_2$. Esto es una contradicción pues estamos suponiendo que $*$ es transitivo. Así, $\mathcal{C}$ es conexa.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathcal{C}$ es conexa y que $* = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, con $*(x) = \{c\}$ para todo objeto x de $\mathcal{C}$. Entonces $\{c\} = *(x) = \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$. De ahí que $c \in \Omega_1(x)$ o $c \in \Omega_2(x)$.

Sea $\mathcal{C}_i$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ con $\text{Obj}\,(\mathcal{C}_i) = \{x \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}) \mid c \in \Omega_i(x)\}$.

Con esto, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$. Además, no hay morfismos de $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ ni viceversa pues, de lo contrario, si existiera (sin pérdida de generalidad) $\alpha : x \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{C}$ con $x \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}_1)$, $y \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}_2)$, entonces

$$1_c = *(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \sqcup \Omega_2(\alpha),$$

por lo que $\Omega_1(\alpha)$ es 1_c y $\Omega_2(\alpha)$ es la función vacía $\emptyset$, o $\Omega_1(\alpha)$ es la función vacía $\emptyset$ y $\Omega_2(\alpha)$ es 1_c.

En el primer caso, si $\Omega_1(\alpha)$ es 1_c es porque $c \in \Omega_1(x)$ y $c \in \Omega_1(y)$, lo que implica que $y \in \text{Obj}\,(\mathcal{C})$, así que $y \in \text{Obj}\,(\mathcal{C}_1) \cap \text{Obj}\,(\mathcal{C}_2)$, lo cual no es posible. Análogamente llegamos a una contradicción en el segundo caso.

Por tanto, no hay morfismos entre objetos de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Esto nos dice entonces que $\mathcal{C}$ es disconexa, lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que es conexa. Esta contradicción surge de suponer que $*$ se puede partir como unión ajena de dos $\mathcal{C}$-conjuntos no vacíos.

Así, $*$ es transitivo. □

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría finita. Entonces $B(\mathcal{C})$ es un anillo conmutativo con unidad, y como grupo abeliano tiene como base al conjunto de las clases de isomorfismo de los $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos.*

Demostración. Primero veamos que el producto de elementos en $B(\mathcal{C})$ está bien definido.

Supongamos que $\Omega, \Omega', \Psi, \Psi'$ son $\mathcal{C}$-conjuntos tales que $[\Omega] = [\Omega']$ y $[\Psi] = [\Psi']$. Entonces existen isomorfismos naturales $\eta : \Omega \longrightarrow \Omega'$ y $\theta : \Psi \longrightarrow \Psi'$, por lo que para cualesquiera objetos $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y cualquier morfismo $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$, los siguientes cuadrados conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(x) & \xrightarrow{\eta_x} & \Omega'(x) \\ {\scriptstyle \Omega(\alpha)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Omega'(\alpha)} \\ \Omega(y) & \xrightarrow[\eta_y]{} & \Omega'(y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Psi(x) & \xrightarrow{\theta_x} & \Psi'(x) \\ {\scriptstyle \Psi(\alpha)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Psi'(\alpha)} \\ \Psi(y) & \xrightarrow[\theta_y]{} & \Psi'(y) \end{array}$$

Queremos ver que $[\Omega][\Psi] = [\Omega'][\Psi']$, es decir, $[\Omega \times \Psi] = [\Omega' \times \Psi']$. Para esto tenemos que dar una transformación natural $\sigma : \Omega \times \Psi \longrightarrow \Omega' \times \Psi'$ tal que para todo objeto x de $\mathcal{C}$, σ_x es isomorfismo.

Proponemos $\sigma = \eta \times \theta$, es decir, para cada objeto x de $\mathcal{C}$, sea $\sigma_x = (\eta \times \theta)_x = \eta_x \times \theta_x$. Veamos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (\Omega \times \Psi)(x) & \xrightarrow{(\eta\times\theta)_x} & (\Omega' \times \Psi')(x) \\ {\scriptstyle (\Omega\times\Psi)(\alpha)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\Omega'\times\Psi')(\alpha)} \\ (\Omega \times \Psi)(y) & \xrightarrow[(\eta\times\theta)_y]{} & (\Omega' \times \Psi')(y) \end{array}$$

es decir, $(\Omega' \times \Psi')(\alpha) \circ (\eta \times \theta)_x = (\eta \times \theta)_y \circ (\Omega \times \Psi)(\alpha)$.

Sabemos por hipótesis que $\Omega'(\alpha) \circ \eta_x = \eta_y \circ \Omega(\alpha)$ y $\Psi'(\alpha) \circ \theta_x = \theta_y \circ \Psi(\alpha)$. Sea $(a, b) \in (\Omega \times \Psi)(x)$, entonces $a \in \Omega(x)$ y $b \in \Psi(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} ((\Omega'(\alpha) \circ \eta_x) \times (\Psi'(\alpha) \circ \theta_x))(a, b) &= ((\Omega'(\alpha) \circ \eta_x)(a), (\Psi'(\alpha) \circ \theta_x)(b)) \\ &= (\Omega'(\alpha) \times \Psi'(\alpha))(\eta_x(a), \theta_x(b)) \\ &= ((\Omega'(a) \times \Psi'(\alpha)) \circ (\eta_x \times \theta_x))(a, b) \end{aligned}$$

y esto pasa para cada $(a, b) \in (\Omega \times \Psi(x))$ y cada $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Análogamente tenemos que $(\eta_y \circ \Omega(\alpha)) \times (\theta_y \circ \Psi(\alpha)) = (\eta_y \times \theta_y) \circ (\Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha))$. Por lo anterior,

$$\begin{aligned}(\Omega' \times \Psi)(\alpha) \circ (\eta \times \theta)_x &= (\Omega'(\alpha) \times \Psi'(\alpha)) \circ (\eta_x \times \theta_x)\\ &= (\Omega'(\alpha) \circ \eta_x) \times (\Psi'(\alpha) \circ \theta_x)\\ &= (\eta_y \circ \Omega(\alpha)) \times (\theta_y \circ \Psi(\alpha))\\ &= (\eta_y \times \theta_y) \circ (\Omega(\alpha) \times \Psi(\alpha))\\ &= (\eta \times \theta)_y \circ (\Omega \times \Psi)(\alpha)\end{aligned}$$

y por ende el diagrama conmuta, es decir, $\sigma = \eta \times \theta$ es una transformación natural.

Note que, como η y θ son isomorfismos naturales, para todo $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ η_x y θ_x son biyecciones, de ahí que $\eta_x \times \theta_x = \sigma_x$ es biyección. En consecuencia, σ es isomorfismo natural. Esto nos dice que $[\Omega \times \Psi] = [\Omega' \times \Psi']$. En otras palabras, la multiplicación en $B(\mathcal{C})$ está bien definida.

Ahora veamos que $B(\mathcal{C})$ es un anillo conmutativo con unidad. Sean $[\Omega], [\Psi], [\Phi] \in B(\mathcal{C})$. Primero veamos que el producto es asociativo.

Para ver que $([\Omega][\Psi])[\Phi] = [\Omega]([\Psi][\Phi])$, encontremos un isomorfismo natural $\eta : (\Omega \times \Psi) \times \Phi \longrightarrow \Omega \times (\Psi \times \Phi)$. Para cada $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, sea $\eta_x : ((\Omega \times \Psi) \times \Phi)(x) \longrightarrow (\Omega \times (\Psi \times \Phi))(x)$ tal que $\eta_x((a,b),c) = (a,(b,c))$. Note que η_x está bien definida, es biyección y que esto pasa para cada objeto x de la categoría. Por otra parte, observe que si $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} ((\Omega \times \Psi) \times \Phi)(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "((\Omega\times\Psi)\times\Phi)(\alpha)"'] & (\Omega \times (\Psi \times \Phi))(x) \arrow[d, "(\Omega\times(\Psi\times\Phi))(\alpha)"] \\ ((\Omega \times \Psi) \times \Phi)(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & (\Omega \times (\Psi \times \Phi))(y) \end{tikzcd}$$

pues

$$\begin{aligned}((\Omega \times (\Psi \times \Phi))(\alpha) \circ \eta_x)((a,b),c) &= (\Omega(\alpha)(a), (\Psi(\alpha)(b), \Phi(\alpha)(c)))\\ &= ((\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b)), \Phi(\alpha)(c))\\ &= (\eta_y \circ ((\Omega \times \Psi) \times \Phi)(\alpha))((a,b),c).\end{aligned}$$

Por lo tanto, η es isomorfismo natural. Así, $(\Omega \times \Psi) \times \Phi \cong \Omega \times (\Psi \times \Phi)$, lo que implica que el producto es asociativo.

Para ver que el producto es conmutativo, sea $\eta : \Omega \times \Psi \longrightarrow \Psi \times \Omega$ definida de la siguiente forma: para cada objeto x de $\mathcal{C}$, sea $\eta_x : (\Omega \times \Psi)(x) \longrightarrow (\Psi \times \Omega)(x)$ tal que si $(a,b) \in (\Omega \times \Psi)(x)$, $\eta_x(a,b) = (b,a)$. Note que η_x está bien definida y que es biyectiva para cada $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Para ver que es transformación natural, sean $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow y$ un morfismo entre ellos; veamos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} (\Omega \times \Psi)(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "(\Omega\times\Psi)(\alpha)"'] & (\Psi \times \Omega)(x) \arrow[d, "(\Psi\times\Omega)(\alpha)"] \\ (\Omega \times \Psi)(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & (\Psi \times \Omega)(y) \end{tikzcd}$$

Sea $(a,b) \in (\Omega \times \Psi)(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}((\Psi \times \Omega)(\alpha) \circ \eta_x)(a,b) &= (\Psi \times \Omega)(\alpha)\eta_x(a,b)\\ &= (\Psi \times \Omega)(\alpha)(b,a)\\ &= (\Psi(\alpha)(b), \Omega(\alpha)(a))\\ &= \eta_y(\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b))\\ &= (\eta_y \circ (\Omega \times \Psi)(\alpha))(a,b)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama conmuta. Así, η es transformación natural y, como para cada $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ η_x es biyección, entonces η es isomorfismo natural.

En consecuencia, el producto en $B(\mathcal{C})$ es conmutativo.

Veamos que, en efecto, $[*]$ es la unidad de $B(\mathcal{C})$. Demostremos que $[*][\Omega] = [\Omega]$.

Sea $\eta : * \times \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que, para cada objeto x de $\mathcal{C}$, $\eta_x : \{c\} \times \Omega(x) \longrightarrow \Omega(x)$ es la proyección en la segunda entrada, i.e., $\eta_x(c,a) = a$ para toda $a \in \Omega(x)$.

Observe que $(c,a) = (c,a')$ si y sólo si $a = a'$. Esto nos dice que η_x está bien definida y es inyectiva. Además, es suprayectiva. Por lo tanto, η_x es biyección para todo $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Ahora, sean $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $\alpha : x \longrightarrow y$ un morfismo entre ellos y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}(* \times \Omega)(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "(*\times\Omega)(\alpha)"'] & \Omega(x) \arrow[d, "\Omega(\alpha)"] \\ (* \times \Omega)(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & \Omega(y)\end{tikzcd}$$

Sea $(c,a) \in (* \times \Omega)(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\Omega(\alpha) \circ \eta_x)(c,a) &= \Omega(\alpha)(\eta_x(c,a))\\ &= \Omega(\alpha)(a)\\ &= \eta_y(c, \Omega(\alpha)(a))\\ &= (\eta_y \circ (* \times \Omega)(\alpha))(c,a).\end{aligned}$$

Así, η es isomorfismo natural y entonces $* \times \Omega \cong \Omega$, es decir, $[*][\Omega] = [\Omega]$. Como el producto en $B(\mathcal{C})$ es conmutativo (por lo visto anteriormente), $[*]$ es la identidad de $B(\mathcal{C})$.

Verifiquemos ahora la distributividad del producto con la suma, es decir,

$$[\Omega]\,([\Psi] + [\Phi]) = [\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi)] = [(\Omega \times \Psi) \sqcup (\Omega \times \Phi)] = [\Omega][\Psi] + [\Omega][\Phi].$$

Sea $\eta : \Omega \times (\Psi \sqcup \Phi) \longrightarrow (\Omega \times \Psi) \sqcup (\Omega \times \Phi)$ tal que, para cada objeto x de $\mathcal{C}$, $\eta_x : (\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi))(x) \longrightarrow (\Omega \times \Psi)(x) \sqcup (\Omega \times \Phi)(x)$ es tal que $\eta_x(a,b) = (a,b)$. Note que está bien definida pues $\Psi \cap \Phi = \varnothing$. Además, es claro que es biyectiva. Sean $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$. Veamos que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}(\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi))(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "(\Omega\times(\Psi\sqcup\Phi))(\alpha)"'] & ((\Omega \times \Psi) \sqcup (\Omega \times \Phi))(x) \arrow[d, "(\Omega\times\Psi)\sqcup(\Omega\times\Phi)(\alpha)"] \\ (\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi))(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & ((\Omega \times \Psi) \sqcup (\Omega \times \Phi))(y)\end{tikzcd}$$

Sea $(a,b) \in (\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi))(x)$. Entonces $a \in \Omega(x)$ y $b \in \Psi(x) \sqcup \Phi(x)$.

Si $b \in \Psi(x)$, entonces $(\Omega \times (\Psi \sqcup \Phi))(\alpha)(a,b) = (\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b))$. Luego,

$$\eta_y(\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b)) = (\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b))$$

en $\Omega(y) \times \Psi(y) \subseteq (\Omega(y) \times \Psi(y)) \sqcup (\Omega(y) \times \Phi(y))$.

Por otra parte, $\eta_x(a,b) = (a,b) \in \Omega(x) \times \Psi(x) \subseteq (\Omega(x) \times \Psi(x)) \sqcup (\Omega(x) \times \Phi(x))$. Luego, $((\Omega \times \Psi) \sqcup (\Omega \times \Phi)(\alpha))(a,b) = (\Omega(\alpha)(a), \Psi(\alpha)(b))$ en $\Omega(y) \times \Psi(y) \subseteq (\Omega(y) \times \Psi(y)) \sqcup (\Omega(y) \times \Phi(y))$.

Si $b \in \Phi(x)$, el razonamiento es análogo al del caso anterior. Así, el diagrama conmuta en ambos casos. Por lo tanto, η es un isomorfismo natural. En consecuencia, en $B(\mathcal{C})$ el producto se distribuye con la suma. Por lo tanto, $B(\mathcal{C})$ es un anillo conmutativo con unidad.

Por último, veamos que $\{[\Omega] \mid \Omega \text{ es } \mathcal{C}\text{-transitivo}\}$ es una base de $B(\mathcal{C})$ como grupo abeliano.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} a_i[\Omega_i] = 0$ con $\Omega_i \ncong \Omega_j$ si $i \neq j$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, tenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{a_i > 0} a_i[\Omega_i] = \sum_{a_l < 0} (-a_l)[\Omega_l].$$

De ahí que

$$\bigsqcup_{a_i > 0} \Omega_i^{a_i} \cong \bigsqcup_{a_l < 0} \Omega_l^{-a_l}.$$

Por *1.* de la Proposición 1.12 tenemos que la descomposición en transitivos es única, así que $\Omega_i \cong \Omega_l$ y $a_i = -a_l$, lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo que los Ω_i no son isomorfos entre sí. Así, $a_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo tanto, $\{[\Omega] \mid \Omega \text{ es } \mathcal{C}\text{-transitivo}\}$ forma una base para $B(\mathcal{C})$ como $\mathbb{Z}$-módulo. □

Continuamos con una observación que muestra que, al estudiar la estructura del anillo de Burnside, basta con suponer que la categoría $\mathcal{C}$ en cuestión es conexa.

Proposición 2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y supongamos que no es conexa, es decir, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ subcategorías plenas de $\mathcal{C}$ sin morfismos de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ y viceversa. Entonces $B(\mathcal{C}) \cong B(\mathcal{C}_1) \times B(\mathcal{C}_2)$.*

Demostración. Sean Ω un $\mathcal{C}$-conjunto y $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Definimos los $\mathcal{C}$-conjuntos Ω_i, $i = 1, 2$, de la siguiente forma:

$$\Omega_i(x) = \begin{cases} \Omega(x), & x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_i)\,; \\ \emptyset, & x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_j)\,, j \neq i. \end{cases}$$

Entonces $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. Además, Ω_1, Ω_2 son $\mathcal{C}$-subconjuntos de Ω: si $\beta : x \longrightarrow y$, entonces $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_1)$ o $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_2)$. Luego, $\Omega(\beta) : \Omega(x) \longrightarrow \Omega(y)$ es tal que, como $x, y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}_i)$ y como $\mathcal{C}$ es disconexa, $\Omega(\beta) = \Omega_i(\beta)$ en $\mathcal{C}_i$. Así, Ω_i es $\mathcal{C}$-subconjunto de Ω. Se sigue que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$.

Luego, sea $B(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi} B(\mathcal{C}_1) \times B(\mathcal{C}_2)$ tal que $\phi([\Omega]) = ([\Omega_1], [\Omega_2])$. Veamos que está bien definida y que es morfismo de anillos.

Supongamos que $[\Omega], [\Omega'] \in B(\mathcal{C})$ son tales que $[\Omega] = [\Omega']$. Entonces existe $\eta : \Omega \longrightarrow \Omega'$ isomorfismo natural. Observe que $\Omega_i = \Omega|_{\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)}$ y $\Omega'_i = \Omega'|_{\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)}$, así que sea $\eta^i = \eta|_{\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)} : \Omega_i \longrightarrow \Omega'_i$ que es un isomorfismo natural, pues η lo es y por cómo se define Ω_i. De ahí que $[\Omega_i] = [\Omega'_i]$, $i = 1, 2$ y, en consecuencia, $([\Omega_1], [\Omega_2]) = ([\Omega'_1], [\Omega'_2])$, por lo que ϕ está bien definida.

Ahora, sean $[\Omega], [\Psi] \in B(\mathcal{C})$. Entonces $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ y $\Psi = \Psi_1 \sqcup \Psi_2$ como antes.

Primero observemos que $[\Omega] + [\Psi] = [\Omega \sqcup \Psi]$ y

$$\begin{aligned} \Omega \sqcup \Psi &= (\Omega_1 \sqcup \Omega_2) \sqcup (\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \\ &= (\Omega_1 \sqcup \Psi_1) \sqcup (\Omega_2 \sqcup \Psi_2), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \phi([\Omega] + [\Psi]) &= ([\Omega_1 \sqcup \Psi_1], [\Omega_2 \sqcup \Psi_2]) \\ &= ([\Omega_1] + [\Psi_1], [\Omega_2] + [\Psi_2]) \\ &= ([\Omega_1], [\Omega_2]) + ([\Psi_1], [\Psi_2]) \\ &= \phi([\Omega]) + \phi([\Psi]). \end{aligned}$$

Luego, notemos que $[\Omega][\Psi] = [\Omega \times \Psi]$ y

$$\begin{aligned} \Omega \times \Psi &= (\Omega_1 \sqcup \Omega_2) \times (\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \\ &= (\Omega_1 \times \Psi_1) \sqcup (\Omega_1 \times \Psi_2) \sqcup (\Omega_2 \times \Psi_1) \sqcup (\Omega_2 \times \Psi_2). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}$ es disconexa, si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}_1)$, entonces

$$\begin{aligned} (\Omega \times \Psi)(x) &= (\Omega_1 \times \Psi_1)(x) \sqcup (\Omega_1 \times \Psi_2)(x) \sqcup (\Omega_2 \times \Psi_1)(x) \sqcup (\Omega_2 \times \Psi_2)(x) \\ &= (\Omega_1 \times \Psi_1)(x) \sqcup \emptyset \\ &= (\Omega_1 \times \Psi_1)(x) \sqcup (\Omega_2 \times \Psi_2)(x) \end{aligned}$$

pues $x \notin \mathrm{supp}\,(\Omega_2)$ y $x \notin \mathrm{supp}\,(\Psi_2)$. Y si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}_2)$, tenemos una situación análoga.

Así, $[\Omega \times \Psi] = [\Omega_1 \times \Psi_1 \sqcup \Omega_2 \times \Psi_2]$. De ahí que

$$\begin{aligned} \phi([\Omega][\Psi]) &= ([\Omega_1 \times \Psi_1], [\Omega_2 \times \Psi_2]) \\ &= ([\Omega_1][\Psi_1], [\Omega_2][\Psi_2]) \\ &= ([\Omega_1], [\Omega_2])([\Psi_1], [\Psi_2]) \\ &= \phi([\Omega])\phi([\Psi]). \end{aligned}$$

Luego, notemos que $* = *|_{\mathcal{C}_1} \sqcup *|_{\mathcal{C}_2}$ y observemos que dichas restricciones son $\mathcal{C}_i$-conjuntos constantes, por lo que $\phi([*]) = ([*|_{\mathcal{C}_1}], [*|_{\mathcal{C}_2}]) = 1_{B(\mathcal{C}_1) \times B(\mathcal{C}_2)}$. Por ende, ϕ es morfismo de anillos.

Por último, veamos que ϕ es biyectivo.

Sean $[\Omega], [\Psi] \in B(\mathcal{C})$ tales que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ y $\Psi = \Psi_1 \sqcup \Psi_2$ y que $([\Omega_1], [\Omega_2]) = ([\Psi_1], [\Psi_2])$. Entonces $[\Omega_1] = [\Psi_1]$ y $[\Omega_2] = [\Psi_2]$. De ahí que $[\Omega_1] + [\Omega_2] = [\Psi_1] + [\Psi_2]$, es decir, $[\Omega] = [\Psi]$. Por lo tanto, ϕ es inyectiva.

Ahora, sea $([\Omega_1], [\Omega_2]) \in B(\mathcal{C}_1) \times B(\mathcal{C}_2)$. Note que, como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$ es disconexa, $[\Omega_1 \sqcup \Omega_2] \in B(\mathcal{C})$. Así, $\phi([\Omega_1 \sqcup \Omega_2]) = ([\Omega_1], [\Omega_2])$.

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo de anillos. Es decir, $B(\mathcal{C}) \cong B(\mathcal{C}_1) \times B(\mathcal{C}_2)$. □

Ejemplo 2.7. Sea G un grupo finito y consideremos su categoría de desenlazado como en el Ejemplo 1.2. Con esta construcción tenemos que

$$B(\mathcal{C}_G) = B(G),$$

lo cual nos dice que coincide con la noción que tenemos para grupos.

Ejemplo 2.8. Como un ejemplo del tipo de estructura que puede tener un anillo de Burnside de una categoría, tomemos el carcaj del Ejemplo 1.3:

$$\mathcal{Q} = \qquad x \xrightarrow{\alpha} y$$

y, de nueva cuenta, considerémoslo como categoría. Calculemos $B(\mathcal{Q})$.

Sea Ω_n el $\mathcal{Q}$-conjunto $\Omega_n := \underline{n} \longrightarrow \underline{1}$ como en el Ejemplo 1.13, es decir, con $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}, n \geq 0$. Como vimos en dicho ejemplo, los Ω_n son transitivos.

Ahora, observe que $\Omega_n \times \Omega_m \cong \Omega_{nm}$, pues $(\Omega_n \times \Omega_m)(x) = \underline{n} \times \underline{m} \cong \underline{nm}$, $(\Omega_n \times \Omega_m)(y) = \underline{1} \times \underline{1} \cong \underline{1}$ y $(\Omega_n \times \Omega_m)(\alpha) : \underline{nm} \longrightarrow \underline{1}$ es la función constante.

De ahí que

$$\begin{aligned} B(\mathcal{Q}) &= \prod_{i \geq 0} \mathbb{Z}[\Omega_i] \\ &\cong \mathbb{Z}\mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Z}\mathbb{N}_0$ es el álgebra de monoide de $\mathbb{N}_0$ sobre $\mathbb{Z}$, con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, visto como monoide multiplicativo. Además, $\Omega_0 = \varnothing$.

Esta es la descomposición completa de $B(\mathcal{Q})$ como producto de anillos y note, además, que no es finitamente generado sobre $\mathbb{Z}$, pues el álgebra de monoide $\mathbb{Z}\mathbb{N}$ no lo es.

2.2 Conjuntos con valores en $\mathrm{Set_I}$ y una descomposición del anillo de Burnside

A partir de esta sección y en el resto del trabajo, a menos que se especifique otra cosa, Set denotará la categoría de conjuntos finitos y funciones, y $\mathrm{Set_I}$ a la categoría de conjuntos finitos y funciones inyectivas.

El ejemplo del anillo de Burnside de la categoría con dos objetos y un único morfismo entre ellos muestra que la construcción que hemos dado no se comporta como el anillo de Burnside en el caso de grupos finitos (por ejemplo, el anillo de Burnside del Ejemplo 2.8 no es finitamente generado sobre $\mathbb{Z}$). Como $\mathrm{Set_I}$ es una subcategoría de Set, tenemos un funtor $i : \mathcal{C} - \mathrm{Set_I} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set}$, componiendo un funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set_I}$ con la inclusión $j : \mathrm{Set_I} \longrightarrow \mathrm{Set}$.

Antes de dar el primer resultado, recordemos qué es una adjunción de funtores o un par adjunto de funtores.

Definición 2.9. [11, Definition 4.1.1] Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Una *adjunción* consiste de un par de funtores, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ junto con un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$ para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y cada $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, el cual es natural en ambas variables. Decimos que F es *adjunto izquierdo* a G y que G es *adjunto derecho* a F y lo denotamos por $F \dashv G$.

Los morfismos $f^\sharp : F(c) \longrightarrow d$ y $f^\flat : c \longrightarrow G(d)$ que se corresponden bajo la biyección anterior son *adjuntos* entre sí.

Si fijamos un objeto c de $\mathcal{C}$, este isomorfismo natural nos dice que el objeto $F(c) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ representa al funtor $\mathrm{Hom}_{C}(c, G(\_))$. Por el Lema de Yoneda, el isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), \_) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(\_))$ está determinado por un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, GF(c))$, el adjunto de $1_{F(c)}$, denotado por η_c. La naturalidad de los morfismos adjuntos implica que las funciones η_c forman una transformación natural $\eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$. A dicha η se le llama *unidad* de la adjunción (ver [11], Lemma 4.2.2).

Dualmente, si fijamos un objeto d de $\mathcal{D}$ ([11], p. 122) y hacemos el razonamiento análogo, obtenemos una transformación natural $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$. A dicha ε se le llama *counidad* de la adjunción (ver [11], Lemma 4.2.3).

Con esto, podemos dar la siguiente definición:

Definición 2.10. [11, Definition 4.2.5] Una *adjunción* consiste de un par opuesto de funtores, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, junto con transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ tales que hacen conmutar a los siguientes diagramas, llamados *identidades triangulares*:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Ambas definiciones de adjunción dadas anteriormente son equivalentes (ver [11, Proposition 4.2.6]).

Teorema 2.11. 1. *El funtor inclusión* $i : \mathcal{C} - \mathrm{Set_I} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set}$ *tiene como adjunto izquierdo a* $j : \mathcal{C} - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set_I}$ *y es tal que* $j(\Omega) = \Omega^{\mathrm{Set_I}}$.

2. *La unidad* $\eta : 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}} \longrightarrow ij$ *de la adjunción consiste de transformaciones naturales* $\eta_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Set_I}}$ *que son suprayectivas en cada evaluación en objetos de* $\mathcal{C}$.

3. *La counidad de la adjunción* $\varepsilon : ji \longrightarrow 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set_I}}$ *es la identidad.*

Demostración. Sean $x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\Omega \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$. Sean $u, v \in \Omega(x)$. Decimos que $u \sim v$ si y sólo si existen α una caminata en $\mathcal{C}$ de y en x y $w \in \Omega(y)$ tales que $u, v \in \Omega(\overline{\alpha})(w)$. Note que esto es equivalente a que $\Omega(\overline{\alpha^{op}})(u) \cap \Omega(\overline{\alpha^{op}})(v) \neq \emptyset$. Observe que $\sim$ no es transitiva, por lo que extendemos esta relación a la menor relación de equivalencia que la contenga.

Con esto, definimos $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) := \Omega(x)/\sim$. Veamos que $\Omega^{\mathrm{Set_I}}$ es un $\mathcal{C}$-conjunto con valores en $\mathrm{Set_I}$.

Sea $\alpha : x \longrightarrow y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(\alpha) : \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Set_I}}(y)$ como $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(\alpha)([u]) = [\Omega(\overline{\alpha})(u)]$. Veamos que esta función está bien definida: supongamos que $[u] = [v]$ en $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(x)$, entonces existe una sucesión de elementos $u = u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_n = v$ con $u_i \sim u_{i+1}$ en $\Omega(x)$ relacionados con la relación definida anteriormente. Procederemos por inducción en n el número de elementos en dicha sucesión:

- Si $n = 1$, entonces $u \sim v$, así que existen β caminata de z a x en $\mathcal{C}$ y $w \in \Omega(x)$ tales que $u, v \in \Omega(\overline{\beta})(w)$. Entonces $\Omega(\alpha)(u), \Omega(\alpha)(v) \in \Omega(\alpha)\left(\Omega(\overline{\beta})(w)\right) = \Omega(\overline{\alpha})\Omega(\overline{\beta})(w) = \Omega(\overline{\alpha\beta})(w)$. Así, $\Omega(\alpha)(u) \sim \Omega(\alpha)(v)$, por lo que $[\Omega(\alpha)(u)] = [\Omega(\alpha)(v)]$.
- Supongamos que esta propiedad se cumple para sucesiones de elementos en $\Omega(x)$ de tamaño menor que n. Sea $u = u_0 \sim u_1 \sim \cdots \sim u_{n-2} \sim u_{n-1} \sim u_n = v$ dicha sucesión. Por transitividad de $\sim$, $u_{n-2} \sim u_n$, por lo que tenemos la sucesión resultante $u \sim u_1 \sim \cdots \sim u_{n-2} \sim v$, la cual tiene tamaño menor que n. Por hipótesis de inducción, se sigue que $[\Omega(\alpha)(u)] = [\Omega(\alpha)(v)]$.

Por lo tanto, $\Omega^{\mathrm{Set_I}}$ está bien definido en morfismos. Y como Ω es funtor, se sigue que $\Omega^{\mathrm{Set_I}}$ es un $\mathcal{C}$-conjunto.

Observemos lo siguiente: sea $\alpha : x \longrightarrow y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y sean $[u], [v]$ en $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(x)$ tales que $[\Omega(\alpha)(u)] = [\Omega(\alpha)(v)]$. Entonces existen $\gamma : z \rightsquigarrow y$ caminata en $\mathcal{C}$ y $w \in \Omega(z)$ tales que $\Omega(\alpha)(u), \Omega(\alpha)(v) \in \Omega(\overline{\gamma})(w)$. De ahí que $u, v \in \Omega(\overline{\alpha^{op}\gamma})(w)$ y note que $\alpha^{op}\gamma$ es caminata de z a x. Se sigue que $[u] = [v]$. Por lo tanto, $\Omega^{\mathrm{Set_I}}$ es un objeto de $\mathcal{C} - \mathrm{Set_I}$.

Definimos $j : \mathcal{C} - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set_I}$ de tal forma que:

- En objetos: si $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$, $j(\Omega) = \Omega^{\mathrm{Set_I}}$;
- En morfismos: si $\Omega, \Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$ y $\alpha : \Omega \longrightarrow \Psi$ un morfismo entre ellos, $j(\alpha) : \Omega^{\mathrm{Set_I}} \longrightarrow \Psi^{\mathrm{Set_I}}$ es tal que para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $j(\alpha)_x = j(\alpha_x) : \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \longrightarrow \Psi^{\mathrm{Set_I}}(x)$ se define como $j(\alpha_x)([u]) = [\alpha_x(u)]$.

Se puede ver que, de esta manera, j está bien definido en morfismos. Además, como los morfismos en $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ son transformaciones naturales, se sigue que j es funtor. Veamos que j es adjunto izquierdo del funtor inclusión $i : \mathcal{C} - \mathrm{Set_I} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set}$.

Primero observemos que $ji = 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set_I}}$, pues si $\Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set_I})$, $j(\Psi) = \Psi^{\mathrm{Set_I}} = \Psi$ porque todo morfismo, al aplicársele Ψ, ya es inyectivo. Esto nos da lugar a una transformación natural $\varepsilon : ji \longrightarrow 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set_I}}$, la cual es la identidad.

Por otro lado, por construcción tenemos que $\eta_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Set_I}}$, es decir, $\eta_\Omega : 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega) \longrightarrow ij(\Omega)$ es transformación natural y esto pasa para cada $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$. Entonces $\eta : 1_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}} \longrightarrow ij$ es transformación natural. Además, note que $\eta_{\Omega_x} : \Omega(x) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x)$ que es tal que $\eta_{\Omega_x}(u) = [u]$ es claramente suprayectiva.

Veamos que η y ε anteriormente definidas satisfacen las identidades triangulares.

- Sea $\Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set_I})$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} i(\Psi) = \Psi \arrow[r, "\eta_{i(\Psi)}"] \arrow[dr, "1_{i(\Psi)}"'] & \Psi = iji(\Psi) \arrow[d, "i(\varepsilon_\Psi)"] \\ & i(\Psi) = \Psi \end{tikzcd}$$

que es tal que para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,

$$\begin{tikzcd} \Psi(x) \arrow[r, "\eta_{i(\Psi)_x}"] \arrow[dr, "1_{i(\Psi)(x)}"'] & \Psi(x) \arrow[d, "i(\varepsilon_\Psi)_x"] \\ & \Psi(x) \end{tikzcd}$$

conmuta pues $\Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set_I})$, así que si $u \in \Psi(x)$, $[u] = u$.

- Sea $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} j(\Omega) = \Omega^{\mathrm{Set_I}} \arrow[r, "j(\eta_\Omega)"] \arrow[dr, "1_{j(\Omega)}"'] & \Omega^{\mathrm{Set_I}} = jij(\Omega) \arrow[d, "\varepsilon_{j(\Omega)}"] \\ & \Omega^{\mathrm{Set_I}} = j(\Omega) \end{tikzcd}$$

que es tal que para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,

$$\begin{tikzcd} \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \arrow[r, "j(\eta_\Omega)_x"] \arrow[dr, "1_{j(\Omega)(x)}"'] & \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \arrow[d, "\varepsilon_{j(\Omega)_x}"] \\ & \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \end{tikzcd}$$

conmuta pues $j(\eta_\Omega)_x([u]) = [\eta_{\Omega_x}(u)] = [u]$ pues $\Omega^{\mathrm{Set_I}} \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set_I})$.

Como ambos diagramas conmutan y esto pasa para cualesquiera $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$ y $\Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set_I})$, se satisfacen las identidades triangulares.

De ahí que j es adjunto izquierdo de i y η y ε son la unidad y counidad respectivamente de dicha adjunción. □

Hemos visto que cada $\mathcal{C}$-conjunto Ω en $\mathcal{C} - \mathrm{Set}$ tiene un único cociente $\Omega^{\mathrm{Set_I}}$ con morfismos que son inyectivos.

Una pregunta que surge naturalmente al observar esta construcción es si preserva uniones disjuntas y productos.

Es claro que si $\Omega, \Psi \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$, $(\Omega \sqcup \Psi)^{\mathrm{Set_I}} \cong \Omega^{\mathrm{Set_I}} \sqcup \Psi^{\mathrm{Set_I}}$ pues si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $u \sim v$ en $(\Omega \sqcup \Psi)(x)$ sucede si y sólo si $u \sim v$ en $\Omega(x)$ o $u \sim v$ en $\Psi(x)$, más no en ambos al mismo tiempo, pues la unión es disjunta.

En el caso del producto, primero notemos que $\Omega^{\mathrm{Set_I}} \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}$ es un objeto de $\mathcal{C} - \mathrm{Set_I}$, pues si $\alpha : x \longrightarrow y$ es morfismo en $\mathcal{C}$, entonces tanto $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(\alpha)$ como $\Psi^{\mathrm{Set_I}}(\alpha)$ son funciones inyectivas. De ahí que $\left(\Omega^{\mathrm{Set_I}} \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}\right)(\alpha) = \Omega^{\mathrm{Set_I}}(\alpha) \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}(\alpha)$ lo es.

Por la construcción anterior tenemos los morfismos $\Omega \times \Psi \xrightarrow{\eta_\Omega \times \eta_\Psi} \Omega^{\mathrm{Set_I}} \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}$ y $\Omega \times \Psi \xrightarrow{\eta_{\Omega \times \Psi}} (\Omega \times \Psi)^{\mathrm{Set_I}}$, lo que nos da un único morfismo

$$(\Omega \times \Psi)^{\mathrm{Set_I}} \xrightarrow{\ \theta\ } \Omega^{\mathrm{Set_I}} \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}$$

tal que, para cada objeto x de $\mathcal{C}$, θ_x está dado por

$$(\Omega \times \Psi)^{\mathrm{Set_I}}(x) \xrightarrow{\theta_x} \Omega^{\mathrm{Set_I}}(x) \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}(x) \ ,$$

$\theta_x([u,v]) = ([u],[v])$, el cual está bien definido, es suprayectivo y $\theta \circ \eta_{\Omega\times\Psi} = \eta_\Omega \times \eta_\Psi$.

Sin embargo, en general, θ no es inyectivo. Consideremos el siguiente carcaj:

$$T = \begin{tikzcd} & y \\ x \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & z \end{tikzcd}$$

y su categoría asociada $\mathcal{C}_T$.

Construyamos dos $\mathcal{C}_T$-conjuntos de la siguiente manera:

1. $\Omega : \mathcal{C}_T \longrightarrow \mathrm{Set}$ es tal que
   - $\Omega(x) = \Omega(y) = \Omega(z) = \{0,1\}$;
   - $\Omega(\alpha)(0) = \Omega(\alpha)(1) = 0$, i.e., $\Omega(\alpha)$ es la función constante 0;
   - $\Omega(\beta)(0) = 0$, $\Omega(\beta)(1) = 1$, i.e., $\Omega(\beta)$ es la función identidad.
2. $\Psi : \mathcal{C}_T \longrightarrow \mathrm{Set}$ es tal que
   - $\Psi(x) = \Psi(y) = \Psi(z) = \{0,1\}$;
   - $\Psi(\alpha)(0) = 0$, $\Psi(\alpha)(1) = 1$, i.e., $\Psi(\alpha)$ es la función identidad;
   - $\Psi(\beta)(0) = \Psi(\beta)(1) = 1$, i.e., $\Psi(\beta)$ es la función constante 1.

Con estas dos definiciones, tenemos que $\Omega \times \Psi : \mathcal{C}_T \longrightarrow F$ es tal que

1. $(\Omega\times\Psi)(x) = (\Omega\times\Psi)(y) = (\Omega\times\Psi)(z) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$;
2. $(\Omega\times\Psi)(\alpha)(0,0) = (\Omega\times\Psi)(\alpha)(1,0) = (0,0)$, $(\Omega\times\Psi)(\alpha)(0,1) = (\Omega\times\Psi)(\alpha)(1,1) = (0,1)$;
3. $(\Omega\times\Psi)(\beta)(0,0) = (\Omega\times\Psi)(\beta)(0,1) = (0,1)$, $(\Omega\times\Psi)(\beta)(1,0) = (\Omega\times\Psi)(\beta)(1,1) = (1,1)$.

Calculemos $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(y) \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}(y)$ y $(\Omega\times\Psi)^{\mathrm{Set_I}}(y)$. Para el primero, observemos que $0 \nsim 1$ pues toda caminata γ, ya sea de z a y o de x a y, es tal que para todo $w \in \Omega(z)$ o $w \in \Omega(x)$, 0 y 1 no están contenidos al mismo tiempo en $\Omega(\overline{\gamma})(w)$. Entonces $\Omega^{\mathrm{Set_I}}(y) = \{[0],[1]\}$.

Luego, observe que $\alpha\beta : z \rightsquigarrow y$ es tal que $0,1 \in \Psi(\overline{\alpha\beta})(1)$, así que $\Psi^{\mathrm{Set_I}}(y) = \{[0]\}$. Con esto,

$$\Omega^{\mathrm{Set_I}}(y) \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}(y) = \{([0],[0]),([1],[0])\}.$$

Por otra parte, toda caminata γ, ya sea de z a y o de x a y, es tal que para todo $w \in (\Omega \times \Psi)(z)$ o $w \in (\Omega \times \Psi)(x)$, sólo tendremos que $(0,0),(0,1) \in (\Omega \times \Psi)(\overline{\gamma})(w)$. Los otros dos elementos en $(\Omega \times \Psi)(y)$ serán representantes de sus propias clases de equivalencia. Así,

$$(\Omega \times \Psi)^{\mathrm{Set_I}}(y) = \{[0,0],[1,0],[1,1]\}.$$

Se sigue que $\theta_y : (\Omega \times \Psi)^{\mathrm{Set_I}} \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Set_I}}(y) \times \Psi^{\mathrm{Set_I}}(y)$ no es inyectivo.

Nos gustaría que dicho θ fuera inyectivo para que, además de que esta construcción pueda separar productos, podamos tener morfismos de anillos

$$B_{\mathrm{Set_I}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{i_*} B(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} B_{\mathrm{Set_I}}(\mathcal{C})$$

tales que $j_* \circ i_* = 1$. Con esto tendríamos entonces que, como anillos, $B(\mathcal{C}) \cong B_{\mathrm{Set_I}}(\mathcal{C}) \oplus J(\mathcal{C})$, con $J(\mathcal{C}) = \mathrm{Ker}(j_*)$ un ideal de $B(\mathcal{C})$. Sin embargo, es un problema abierto el encontrar condiciones para que esto se cumpla.

2.3 Homomorfismo de marcas

Cuando G es un grupo y consideramos a $H \leq G$ subgrupo, podemos definir un morfismo φ_H tal que a cada G-conjunto X le asigna el número de puntos fijos que deja la acción de H en X. Con esto, producimos el monomorfismo de anillos

$$B(G) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{|[S_G]|} = \prod_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}$$

con $\varphi = (\varphi_H)_{H \in [S_G]}$ (i.e., las φ_H como componentes) y con $[S_G]$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G.

Generalizaremos esta idea a $\mathcal{C}$-conjuntos, primero definiendo el análogo del conjunto de puntos fijos en este contexto y luego explicando el análogo del conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos. Luego veremos algunas de las propiedades del morfismo m que obtengamos. Para comenzar, primero generalizaremos φ_G.

Definición 2.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y Ω un $\mathcal{C}$-conjunto. Si $\Omega \cong \bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ es su descomposición en transitivos, definimos

$$m_{\mathcal{C}}(\Omega) := |\{i : \Omega_i \cong *\}|$$

es decir, $m_{\mathcal{C}}(\Omega)$ es el número de $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos en la descomposición de Ω que son constantes.

Ejemplo 2.13. Tomemos el carcaj

$$\mathcal{Q} = \qquad x \xrightarrow{\alpha} y$$

y veámoslo como categoría, como lo hicimos en el Ejemplo 1.3. Sea $\Omega = (X, Y, f)$ un $\mathcal{Q}$-conjunto.

Notemos que su descomposición en transitivos es de la forma $\Omega \cong \bigsqcup_{y \in Y} \Omega_y$, con $\Omega_y = (f^{-1}(y), \{y\}, f|_{f^{-1}(y)})$. Observe que Ω_y es constante siempre que $|f^{-1}(y)| = 1$, así que

$$m_{\mathcal{Q}}(\Omega) = |\{y \in Y : |f^{-1}(y)| = 1\}|.$$

Recordemos que, por el Lema 2.4, $*$ es transitivo si y sólo si $\mathcal{C}$ es conexa, así que si $\mathcal{C}$ es disconexa tendremos que $m_{\mathcal{C}}(\Omega) = 0$ para todo $\Omega \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} - \mathrm{Set})$. Por lo tanto supondremos que $\mathcal{C}$ es conexa.

Veamos que este morfismo es multiplicativo.

Lema 2.14. *Sean Ω y Ψ $\mathcal{C}$-conjuntos. Si $\Omega \times \Psi$ tiene en su descomposición un transitivo constante, tanto Ω como Ψ tienen transitivos constantes en sus descomposiciones respectivas.*

Demostración. Supongamos que $\Omega \times \Psi$ se descompone en transitivos de la siguiente manera:

$$\Omega \times \Psi \cong \bigsqcup_{i=1}^{m} U_i$$

y supongamos sin pérdida de generalidad que $U_1 \cong *$. Entonces si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $U_1(x) = \{(u, v)\}$, con $(u, v) \in (\Omega \times \Psi)(x)$, es decir, $u \in \Omega(x)$ y $v \in \Psi(x)$.

Si $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $U_1(\alpha)$ es tal que $U_1(u, v) = (u, v)$, por lo que $\Omega(\alpha)(u) = u$ y $\Psi(\alpha)(v) = v$.

Se sigue que $* \cong \langle u \rangle \leq \Omega$ y $* \cong \langle v \rangle \leq \Psi$ son $\mathcal{C}$-subconjuntos transitivos constantes. $\square$

Corolario 2.15. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y Ω, Ψ $\mathcal{C}$-conjuntos. Se tiene que $m_{\mathcal{C}}(\Omega \sqcup \Psi) = m_{\mathcal{C}}(\Omega) + m_{\mathcal{C}}(\Psi)$ y $m_{\mathcal{C}}(\Omega \times \Psi) = m_{\mathcal{C}}(\Omega) m_{\mathcal{C}}(\Psi)$.*

Entonces $m_{\mathcal{C}}$ puede ser visto como un morfismo de anillos $B(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Demostración. Observe que descomponer una unión disjunta de $\mathcal{C}$-conjuntos es igual a unir disjuntamente las descomposiciones de dichos $\mathcal{C}$-conjuntos, así que los transitivos constantes de $\Omega \sqcup \Psi$ son exactamente los transitivos constantes de Ω junto con los de Ψ, lo que nos da

$$m_{\mathcal{C}}(\Omega \sqcup \Psi) = m_{\mathcal{C}}(\Omega) + m_{\mathcal{C}}(\Psi).$$

Ahora, recordemos que $\times$ se distribuye sobre $\sqcup$, así que basta ver que la fórmula se cumple cuando Ω y Ψ son transitivos.

Si $m_{\mathcal{C}}(\Omega \times \Psi) = 0$ es porque alguno de los dos $\mathcal{C}$-conjuntos no es constante, pues si ambos lo fueran lo sería también $\Omega \times \Psi$. En este caso, $0 = m_{\mathcal{C}}(\Omega \times \Psi) = m_{\mathcal{C}}(\Omega) m_{\mathcal{C}}(\Psi) = 0$.

Si $m_{\mathcal{C}}(\Omega \times \Psi) \neq 0$, por el Lema 2.14 tenemos que ambos son constantes, por lo que $\Omega \times \Psi$ también es constante y se sigue que $m_{\mathcal{C}}(\Omega \times \Psi) = m_{\mathcal{C}}(\Omega) m_{\mathcal{C}}(\Psi)$. $\square$

Recordemos que en grupos, si G es un grupo y $H \leq G$ y consideramos sus correspondientes anillos de Burnside, podemos definir un morfismo de anillos $B(G) \xrightarrow{Res^G_H} B(H)$ tal que, si X es un G-conjunto, a su clase de isomorfismo $[X]$ la consideramos como la clase de isomorfismo de X visto como H-conjunto, y que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B(G) \arrow[rr, "Res^G_H"] \arrow[dr, "\varphi_H"'] & & B(H) \arrow[dl, "\varphi_H"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

De manera más general, si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, podemos restringir a un $\mathcal{C}$-conjunto Ω para verlo como $\mathcal{D}$-conjunto, lo cual denotaremos por $Res^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(\Omega)$, simplemente componiendo el funtor inclusión $\iota : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ con el $\mathcal{C}$-conjunto $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$. Es decir, $Res^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(\Omega) : \mathcal{D} \longrightarrow \text{Set}$.

Con esta noción en mente, definimos $m_{\mathcal{D}}(\Omega)$ como el número de $\mathcal{D}$-conjuntos transitivos constantes en la descomposición de $Res^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(\Omega)$ en $\mathcal{D}$-conjuntos transitivos. Por el mismo argumento usado anteriormente, $m_{\mathcal{D}} : B(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un morfismo de anillos.

Ejemplo 2.16. Sean G un grupo finito y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$ como en el Ejemplo 1.2. En dicho ejemplo vimos que si X es un $\mathcal{C}_G$-conjunto, entonces X es un G-conjunto.

Sea $X = \bigsqcup_{i=1}^{r} X_i$ su descomposición en G-conjuntos transitivos. Note que X_j es constante si y sólo si X_j consta de un único punto, es decir, esto equivale a que G actúa trivialmente en dicho punto. Y esto pasa si y sólo si X_j es isomorfo como G-conjunto a G/G.

De ahí que $m_{\mathcal{C}_G}(X) = |\{i \mid X_i \cong *\}| = |X^G| = \varphi_G(X)$.

Además, si $H \leq G$ es un subgrupo y tomamos la categoría $\mathcal{C}_H \subseteq \mathcal{C}_G$, si X es un G-conjunto entonces

$$m_{\mathcal{C}_H}(Res^G_H(X)) = \varphi_H(Res^G_H(X)) = \varphi_H(X)$$

y esto pasa para todo subgrupo H de G.

Por otro lado, si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}_G$ es una subcategoría no vacía, entonces $\text{Obj}\,(\mathcal{D}) = \{*\}$ y debe cumplir que $\text{End}_{\mathcal{D}}(*) \subseteq G$ que es cerrado bajo composición, la cual sabemos que es el producto en el grupo. Así, $\text{End}_{\mathcal{D}}(*)$ debe ser un subgrupo H de G, pues G es finito.

Concluimos entonces que $\mathcal{D} = \mathcal{C}_H$ para algún $H \leq G$.

Podemos ver entonces que, cuando $\mathcal{C}$ es la categoría de desenlazado de un grupo finito, nuestra definición coincide con la noción de marca que se tiene para grupos.

Es tentador tratar de definir $m_{\mathcal{D}}(\Omega)$ no cero para el caso en el que $\mathcal{D}$ no es conexa. Sin embargo, el siguiente resultado nos dice por qué esto no es posible.

Proposición 2.17. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{D}$ no es conexa, entonces $m_{\mathcal{D}} = 0$.*

Demostración. Supongamos que $m_{\mathcal{D}} \neq 0$, entonces para todo $\mathcal{D}$-conjunto Ω, $m_{\mathcal{D}}(\Omega) = t \neq 0$. Así, al descomponer a Ω en $\mathcal{D}$-conjuntos transitivos tendremos que

$$\Omega \cong \bigsqcup_{i=1}^{t} \Omega_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{r} \Omega_j$$

con los Ω_i constantes y $|\Omega_j(x)| > 1$ para todo objeto $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$ y toda $j \in \{1, \ldots, r\}$. Por el Lema 2.4, al ser los Ω_i transitivos se sigue que $\mathcal{D}$ es conexa. $\square$

Estamos cerca de definir el morfismo de marcas, el cual tendrá como componentes a los morfismos $m_{\mathcal{D}}$ para cada $\mathcal{D}$ subcategoría no vacía de $\mathcal{C}$. Antes de hacerlo hay que observar que no todas las subcategorías de $\mathcal{C}$ nos son útiles. Por la proposición anterior ya vimos que las subcategorías disconexas nos dan marcas cero, por lo que podemos descartarlas. También si $m_{\mathcal{D}_1} = m_{\mathcal{D}_2}$ con $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ subcategorías de $\mathcal{C}$ diferentes, podemos considerar sólo una de ellas.

Proposición 2.18. *Supongamos que $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor y Ω es un $\mathcal{E}$-conjunto.*

1. *Si Ω es un $\mathcal{E}$-conjunto constante, entonces $\Omega \circ F$ es un $\mathcal{D}$-conjunto constante.*
2. *Si F es una equivalencia de categorías, entonces $m_{\mathcal{E}}(\Omega) = m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F)$.*

Demostración.

1. Supongamos que Ω es constante, entonces $\Omega(x) = \Omega(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{E})$. Sean $x', y' \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$. Entonces

   $$(\Omega \circ F)(x') = \Omega(F(x')) = \Omega(F(y')) = (\Omega \circ F)(y')$$

   pues $F(x'), F(y')$ son objetos en $\mathcal{E}$. Además, si $\alpha : x' \longrightarrow y'$ es un morfismo en $\mathcal{D}$, tenemos que $(\Omega \circ F)(\alpha) = \Omega(F(\alpha))$ es una función constante. Así, $\Omega \circ F$ es un $\mathcal{D}$-conjunto constante.

2. Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una equivalencia, existe $G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $G \circ F$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{D}}$ y $F \circ G$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{E}}$.

   Supongamos que la descomposición en $\mathcal{E}$-conjuntos transitivos de Ω tiene la forma $\Omega \cong \bigsqcup_{i=1}^{t} \Omega_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{r} \Omega_j$, con los Ω_i constantes y los Ω_j no constantes. De ahí que $m_{\mathcal{E}}(\Omega) = t$.

   Entonces $\Omega \circ F \cong \bigsqcup_{i=1}^{t} (\Omega_i \circ F) \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{r} (\Omega_j \circ F)$. Por 1, los $\Omega_i \circ F$ son constantes. Observe que $\Omega_j \circ F$ no es constante para cada j, pues si alguno lo fuera, $(\Omega_j \circ F) \circ G \cong \Omega_j$ sería constante, pero estamos suponiendo que ningún Ω_j lo es. De ahí que $m_{\mathcal{E}}(\Omega) \leq m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F)$.

   Ahora, si $\Omega \circ F \cong \bigsqcup_{i=1}^{t'} \Omega'_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{r'} \Omega'_j$ es la descomposición en $\mathcal{D}$-conjuntos transitivos de $\Omega \circ F$ con los Ω'_i constantes y los Ω'_j no constantes, $m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F) = t'$. Entonces

$\Omega \cong (\Omega \circ F) \circ G \cong \bigsqcup_{i=1}^{t'} (\Omega'_i \circ G) \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{r'} (\Omega'_j \circ G)$. Por un argumento análogo al usado anteriormente, $m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F) \leq m_{\mathcal{E}}(\Omega)$.

Por lo tanto, $m_{\mathcal{E}}(\Omega) = m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F)$. □

Proposición 2.19. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor que es naturalmente isomorfo al funtor identidad, i.e., $F \cong 1_{\mathcal{C}}$. Sean Ω un $\mathcal{C}$-conjunto y $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Entonces*

1. *F es una equivalencia de categorías que se restringe a una equivalencia de categorías $F(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$.*

2. *$\Omega \circ F \cong \Omega$ como $\mathcal{C}$-conjuntos.*

3. *$m_{\mathcal{D}}(\Omega) = m_{F(\mathcal{D})}(\Omega)$.*

Demostración. 1. Como F es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathcal{C}}$, existe $\eta : F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ isomorfismo natural.

Para que F sea equivalencia, debe existir $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}} \cong F \circ G$. Pero observe que $1_{\mathcal{C}} \circ F = F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ 1_{\mathcal{C}} = F \cong 1_{\mathcal{C}}$, es decir, $1_{\mathcal{C}} \circ F \cong 1_{\mathcal{C}} \cong F \circ 1_{\mathcal{C}}$. Por lo tanto, F es una equivalencia.

Observe que como η es isomorfismo natural, para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ se tiene que η_x es isomorfismo. En particular, esto pasa para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$, pues $\mathcal{D}$ es subcategoría de $\mathcal{C}$. Entonces $\eta|_{\mathcal{D}} : F|_{\mathcal{D}} \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo natural, con $F|_{\mathcal{D}}$ el funtor F restringido a la subcategoría $\mathcal{D}$. Luego, como F es equivalencia con cuasi-inverso $1_{\mathcal{C}}$, $F|_{\mathcal{D}}$ es equivalencia con cuasi-inverso $1_{\mathcal{D}}$. Así, $\mathcal{D} \simeq F(\mathcal{D})$.

2. Sea $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ un $\mathcal{C}$-conjunto y tomemos η como en 1. Observe que, para todo $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, tenemos que $\Omega(\eta_x) : \Omega(x) \longrightarrow (\Omega \circ F)(x)$ es una biyección pues todo funtor preserva isomorfismos. Como esto pasa para cualquier objeto de la categoría, tenemos entonces que $\Omega \cong \Omega \circ F$.

3. El inciso 2. de la Proposición 2.18 nos dice que si tenemos una equivalencia y Ω un $\mathcal{E}$-conjunto, entonces $m_{\mathcal{E}}(\Omega) = m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F)$. Así, como $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es una equivalencia que se restringe a $F(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$ (por 1. de esta proposición), $m_{F(\mathcal{D})}(\Omega) = m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F)$. Y como por 2. de esta proposición tenemos que $\Omega \circ F \cong \Omega$, se tiene que $m_{\mathcal{D}}(\Omega \circ F) = m_{\mathcal{D}}(\Omega)$. Es decir, $m_{\mathcal{D}}(\Omega) = m_{F(\mathcal{D})}(\Omega)$. □

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos el conjunto de *automorfismos* de $\mathcal{C}$ como

$$\mathrm{Aut}\,(\mathcal{C}) = \{F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \mid F \text{ es una equivalencia}\}.$$

En este caso, entenderemos por *equivalencia* un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que existen $G, G' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores tales que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G' \cong 1_{\mathcal{C}}$ naturalmente.

Note que, a diferencia de lo que pasa cuando tratamos con grupos, $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{C})$ no es un grupo pues el inverso de un automorfismo de $\mathcal{C}$ no necesariamente es único. Sin embargo, podemos dar el siguiente lema.

Lema 2.20. *Supongamos que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es una equivalencia con $G, G' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G' \cong 1_{\mathcal{C}}$ naturalmente. Entonces $G \cong G'$ naturalmente.*

Demostración. Como F es equivalencia y se cumple que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G' \cong 1_{\mathcal{C}}$ naturalmente, sean $\eta : G \circ F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\nu : F \circ G' \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ dichos isomorfismos naturales.

Por definición, para cada objeto $c \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene $\eta_c : (G \circ F)(c) \longrightarrow c$. En particular, se tiene $\eta_{G'(c)} : (G \circ F)(G'(c)) \longrightarrow G'(c)$, que es biyección.

Por otro lado, tomemos $G(\nu_c) : G((F \circ G')(c)) \longrightarrow G(c)$ que es una biyección pues ν_c lo es. Con esto, tomemos $\eta_{G'(c)} \circ G(\nu_c)^{-1}$. Veamos que, si $\alpha : c \longrightarrow d$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} G(c) \arrow[r, "\eta_{G'(c)} \circ G(\nu_c)^{-1}"] \arrow[d, "G(\alpha)"'] & G'(c) \arrow[d, "G'(\alpha)"] \\ G(d) \arrow[r, "\eta_{G'(d)} \circ G(\nu_d)^{-1}"'] & G'(d) \end{tikzcd}$$

Observe que $G(\nu_c)^{-1} = G(\nu_c^{-1})$. Queremos ver que

$$G'(\alpha) \circ \left(\eta_{G'(c)} \circ G(\nu_c)^{-1}\right) = \left(\eta_{G'(d)} \circ G(\nu_d)^{-1}\right) \circ G(\alpha).$$

Sea $x \in G(c)$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(G'(\alpha) \circ \eta_{G'(c)} \circ G(\nu_c)^{-1}\right)(x) &= \left(\eta_{G'(d)} \circ (G \circ F)(G'(\alpha)) \circ G(\nu_c)^{-1}\right)(x) \\ &= \left(\eta_{G'(d)} \circ (G \circ F \circ G')(\alpha) \circ G(\nu_c)^{-1}\right)(x) \\ &= \left(\eta_{G'(d)} \circ G(\alpha) \circ G(\nu_c)^{-1}\right)(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left(\eta_{G'(d)} \circ G(\nu_d)^{-1} \circ G(\alpha)\right)(x) &= \left(\eta_{G'(d)} \circ G(\nu_d^{-1} \circ \alpha)\right)(x) \\ &= \left(\eta_{G'(d)} \circ G((F \circ G')(\alpha) \circ \nu_c^{-1})\right)(x) \\ &= \left(\eta_{G'(d)} \circ G((F \circ G')(\alpha)) \circ G(\nu_c^{-1})\right)(x) \\ &= \left(\eta_{G'(d)} \circ G(\alpha) \circ G(\nu_c^{-1})\right)(x). \end{aligned}$$

Así, el cuadrado conmuta. Además, como se trata de biyecciones para cada objeto c de $\mathcal{C}$, tenemos que $G \cong G'$ naturalmente. □

Definimos los *automorfismos interiores* de $\mathcal{C}$ como

$$\operatorname{Inn}(\mathcal{C}) = \{F \in \operatorname{Aut}(\mathcal{C}) \mid F \cong 1_{\mathcal{C}}\}.$$

Note que $\operatorname{Inn}(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{Aut}(\mathcal{C})$, pues todo funtor naturalmente isomorfo a la identidad es una equivalencia. Note que éste tampoco es un grupo.

Ahora, damos la siguiente relación en $\operatorname{Aut}(\mathcal{C})$: $F \sim F'$ si y sólo si existe $G \in \operatorname{Aut}(\mathcal{C})$ tal que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F' \circ G \cong 1_{\mathcal{C}}$. Note que, en efecto, se trata de una relación de equivalencia.

Con esta relación, definimos el conjunto de automorfismos exteriores de $\mathcal{C}$ como

$$\mathrm{Out}\,(\mathcal{C}) = \mathrm{Aut}\,(\mathcal{C})\,/\sim,$$

el cual sí es un grupo bajo la composición pues para cada elemento de $\mathrm{Out}\,(\mathcal{C})$ existe un inverso y éste es único.

Ejemplo 2.21. Si $\mathcal{C}_G$ es la categoría de desenlazado de un grupo finito G, se puede verificar que $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{C}_G)$ se corresponde biyectivamente con $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Sea $F \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{C}_G)$. Entonces $F(\bullet) = \bullet$ y $F\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\bullet,\bullet)\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\bullet,\bullet)$, es decir, $F(G) = G$. Note que F es morfismo de grupos, pues al ser funtor respeta composiciones, es decir, la multiplicación del grupo.

Sea $H : \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_G$ tal que $\eta : H \circ F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}_G}$ es isomorfismo natural. Sea $g : \bullet \longrightarrow \bullet$ un elemento del grupo. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bullet = (H\circ F)(\bullet) & \xrightarrow{\eta_\bullet = 1_\bullet} & \bullet \\ {\scriptstyle (H\circ F)(g)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ \bullet = (H\circ F)(\bullet) & \xrightarrow[\eta_\bullet = 1_\bullet]{} & \bullet \end{array}$$

Entonces $g \circ \eta_\bullet = \eta_\bullet \circ (H \circ F)(g)$, es decir, $g = (H \circ F)(g)$ y como esto pasa para cualquier elemento del grupo, se tiene que $H \circ F = 1_{\mathcal{C}_G}$. Se puede hacer un razonamiento para H' análogo al descrito para ver que $F \circ H' = 1_{\mathcal{C}_G}$. Como el inverso de un morfismo de grupos es único, se sigue que $H = H'$. Es decir, F es un automorfismo de G. Y no es difícil ver que si $f \in \mathrm{Aut}\,(G)$, entonces f se va a corresponder con un funtor $F_f \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{C}_G)$.

Definición 2.22. Sean $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ subcategorías de una categoría finita $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son *conjugadas* si existe $F \in \mathrm{Inn}\,(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{E} = F(\mathcal{D})$.

Se puede ver que la conjugación de categorías es una relación de equivalencia. Al conjunto de las clases de conjugación de subcategorías conexas no vacías lo denotaremos por $\mathrm{cc}\,(\mathcal{C})$.

El inciso 3. de la Proposición 2.19 nos dice que la función $m_{\mathcal{D}}(\Omega)$ es constante en las clases de conjugación de $\mathcal{D}$. Ahora podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.23. Definimos el *morfismo de marcas* $m : B(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathrm{cc}(\mathcal{C})}$ como el morfismo tal que a cada clase de isomorfismo de $\mathcal{C}$-conjuntos $[\Omega]$ la manda a la n-ada $(m_{\mathcal{D}}([\Omega]))_{\mathcal{D}\in\mathrm{cc}(\mathcal{C})}$, donde las coordenadas del vector resultante están indexadas por un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subcategorías de $\mathcal{C}$.

Al igual que la construcción del anillo de Burnside $B(\mathcal{C})$, el morfismo de marcas que acabamos de definir no se comporta como su análogo para grupos finitos, pues no nos da información relevante sobre la categoría como lo hace en el caso de grupos. Sin embargo, no se descarta continuar investigando sus propiedades.

2.4 Idempotentes

Ahora construiremos una familia de elementos idempotentes de $B(\mathcal{C})$ que surgen del copo universal $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ asociado a $\mathcal{C}$. Este copo se caracteriza por el hecho de que hay un funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}_\mathcal{C}$ universal entre todos los funtores de $\mathcal{C}$ a copos.

Para definir $\mathcal{P}_\mathcal{C}$, primero daremos una relación en los objetos de $\mathcal{C}$: $x \sim y$ si y sólo si existen algún morfismo $x \longrightarrow y$ y algún morfismo $y \longrightarrow x$. Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia.

Si denotamos la clase de equivalencia de x por $\overline{x}$, diremos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ si y sólo si hay un morfismo $x \longrightarrow y$. Este es un orden parcial:

- (Reflexividad) $\overline{x} \leq \overline{x}$ pues existe $1_x : x \longrightarrow x$ el morfismo identidad.
- (Antisimetría) Supongamos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ y $\overline{y} \leq \overline{x}$. Entonces existen morfismos $x \longrightarrow y$ y $y \longrightarrow x$, por lo que x y y están relacionados, es decir, $\overline{x} = \overline{y}$.
- (Transitividad) Supongamos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ y $\overline{y} \leq \overline{z}$. Entonces existen morfismos $x \longrightarrow$ y $y \longrightarrow z$, por lo que al hacer la composición de dichos morfismos obtenemos un morfismo de x a z. Es decir, $\overline{x} \leq \overline{z}$.

Note que este orden no depende del representante que tomemos de cada clase. Si $\overline{x} = \overline{x'}$ y $\overline{y} = \overline{y'}$, en particular existen $x' \longrightarrow x$ y $y \longrightarrow y'$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si $\overline{x} \leq \overline{y}$, entonces existe $x \longrightarrow y$, pero la composición $x' \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow y'$ es morfismo en $\mathcal{C}$, por lo que $\overline{x'} \leq \overline{y'}$.

Al conjunto de clases de equivalencia de objetos de $\mathcal{C}$ bajo esta relación lo denotaremos por $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ y, con el orden definido anteriormente, $(\mathcal{P}_\mathcal{C}, \leq)$ es un copo.

Observe que, si Q es un copo, podemos considerar su categorización, la cual denotaremos por la misma Q por practicidad. Es decir, veremos a Q como la categoría cuyos objetos son los elementos del copo y para cualesquiera $x, y \in Q$ existe un único morfismo $x \longrightarrow y$ siempre que x y y sean comparables en Q. Con esto en mente, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.24. *1. Existe un funtor $\rho : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}_\mathcal{C}$ tal que, en objetos, $\rho(x) = \overline{x}$ y, si $\alpha : x \longrightarrow y$ es morfismo en $\mathcal{C}$, $\rho(\alpha) = \overline{\alpha}$ es el único morfismo que existe entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$.*

2. ρ tiene la siguiente propiedad universal: para todo copo Q y todo funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow Q$, existe un único morfismo de orden $\overline{F} : \mathcal{P}_\mathcal{C} \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{P}_\mathcal{C} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \overline{F}"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. Sea ρ definido como en el enunciado. Veamos que, en efecto, ρ es un funtor.

Observemos primero que, si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\rho(1_x) = \overline{1_x} : \overline{x} \longrightarrow \overline{x}$. Note que también existe $1_{\overline{x}} : \overline{x} \longrightarrow \overline{x}$. Como los morfismos entre objetos comparables son únicos y $\overline{x} \leq \overline{x}$, entonces $\rho(1_x) = \overline{1_x} = 1_{\overline{x}} = 1_{\rho(x)}$.

Por otra parte, supongamos que existen $\alpha : x \longrightarrow y$ y $\beta : y \longrightarrow z$. Entonces $\overline{x} \leq \overline{y} \leq \overline{z}$ así que, por transitividad, $\overline{x} \leq \overline{z}$. Ahora, note que $\overline{\beta \circ \alpha}, \overline{\beta} \circ \overline{\alpha} : \overline{x} \longrightarrow \overline{z}$. Como los morfismos entre objetos comparables son únicos y ya vimos que $\overline{x} \leq \overline{z}$, se sigue que $\rho(\beta \circ \alpha) = \overline{\beta \circ \alpha} = \overline{\beta} \circ \overline{\alpha} = \rho(\beta) \circ \rho(\alpha)$.

Por lo tanto, ρ es funtor.

2. Definimos $\overline{F} : \mathcal{P}_{\mathcal{C}} \longrightarrow Q$ tal que $\overline{F}(\overline{x}) = F(x)$. Note que $\overline{F}$ está bien definido: supongamos que $\overline{x} = \overline{y}$, entonces $x \sim y$, por lo que existen morfismos $x \longrightarrow y$ y $y \longrightarrow x$. Luego, al ser F funtor, tenemos $F(x) \longrightarrow F(y)$ y $F(y) \longrightarrow F(x)$ en Q. Esto implica que $F(x) \leq F(y)$ y $F(y) \leq F(x)$ en Q, por lo que $F(x) = F(y)$, es decir, $\overline{F}(\overline{x}) = \overline{F}(\overline{y})$.

   Por lo tanto, $\overline{F}$ está bien definido. Note que $\overline{F}$ es funtor pues F lo es y porque el morfismo entre dos objetos del copo que estén relacionados es único.

   Luego, por cómo se definió $\overline{F}$, éste es único. Así, el funtor ρ es universal.

   Por último, veamos que $\overline{F}$ es un morfismo de orden.

   Supongamos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ en $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, entonces existe $x \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{C}$ con x, y representantes de sus respectivas clases. Entonces $F(x) \longrightarrow F(y)$ es morfismo en Q, lo que implica que $F(x) \leq F(y)$ en Q. Por lo tanto, $\overline{F}$ es morfismo de orden. □

Ahora nos gustaría tener una noción de ideal para categorías, similar a la que tenemos para copos.

Definición 2.25. Sea $I \subseteq \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ un conjunto de objetos de la categoría $\mathcal{C}$. Decimos que I es un *ideal* de $\mathcal{C}$ si

1. $x \sim y$ implica $x \in I$ si y sólo si $y \in I$;
2. $\overline{I} = \{\overline{x} \,|\, x \in I\}$ es un ideal de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, es decir, si $\overline{x} \leq \overline{y}$ y $\overline{x} \in \overline{I}$, entonces $\overline{y} \in \overline{I}$. Equivalentemente, si existe $x \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{C}$ y $x \in I$, entonces $y \in I$.

Definición 2.26. Sean $\mathcal{C}$ una categoría e I un ideal de $\mathcal{C}$. Definimos, para cada objeto x de $\mathcal{C}$,

$$e_I(x) = \begin{cases} \{c\}, & x \in I; \\ \emptyset, & x \notin I, \end{cases}$$

con c fijo.

Lema 2.27. *Sea I un ideal de una categoría $\mathcal{C}$. e_I es un $\mathcal{C}$-conjunto.*

Demostración. Supongamos que existe $\alpha : x \longrightarrow y$ y consideremos $e_I(\alpha) : e_I(x) \longrightarrow e_I(y)$. Si $x \notin I$, entonces $e_I(\alpha)$ es la función vacía. Si $x \in I$, como I es ideal, esto implica que $y \in I$ y, por lo tanto, $e_I(\alpha)$ es la función identidad.

Veamos que e_I es un funtor. Sean $x, y, z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\alpha : x \longrightarrow y$, $\beta : y \longrightarrow z$ morfismos entre ellos. Para ver que $e_I(1_x) = 1_{e_I(x)}$, consideremos los siguientes casos:

- Si $x \notin I$, entonces $e_I(x) = \emptyset$, así que $e_I(1_x)$ es la función vacía, al igual que $1_{e_I(x)}$. De ahí que $e_I(1_x) = 1_{e_I(x)}$.
- Si $x \in I$, entonces $e_I(x) = \{c\}$, por lo que $e_I(1_x)$ es la función identidad en c, es decir, $e_I(1_x) = 1_{e_I(x)}$.

Para ver que e_I respeta composiciones de morfismos, tenemos los siguientes casos:

- Si $x \in I$, entonces tanto y como z pertenecen a I. Luego, $e_I(\alpha)$ y $e_I(\beta)$ son funciones identidad, por lo que su composición también lo es. Por otra parte, $e_I(\beta \circ \alpha)$ es la función identidad pues $z \in I$. Así, $e_I(\beta) \circ e_I(\alpha) = e_I(\beta \circ \alpha)$.
- Si $x \notin I$, entonces $e_I(\alpha)$ es la función vacía. Al hacer la composición $e_I(\beta) \circ e_I(\alpha) = e_I(\beta) \circ \emptyset = \emptyset$ obtenemos la función vacía. Por otra parte, si componemos $\beta \circ \alpha : x \longrightarrow z$, notemos que $e_I(\beta \circ \alpha)$ es la función vacía. Así, $e_I(\beta) \circ e_I(\alpha) = e_I(\beta \circ \alpha)$.

Por lo tanto, e_I es un $\mathcal{C}$-conjunto. □

Lema 2.28. *Sea I un ideal de $\mathcal{C}$ tal que $I = I_1 \sqcup I_2$, con I_1, I_2 ideales de $\mathcal{C}$. Entonces $e_I = e_{I_1} \sqcup e_{I_2}$ como $\mathcal{C}$-conjuntos.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y consideremos $e_I(x)$. Si $x \notin I$, entonces $x \notin I_1$ y $x \notin I_2$, por lo que $e_I = e_{I_1} = e_{I_2} = \varnothing$. Entonces $e_I = e_{I_1} \sqcup e_{I_2}$. Por otra parte, supongamos que $x \in I$, entonces $x \in I_1$ o $x \in I_2$. Si $x \in I_1$, entonces $x \notin I_2$ por lo que $\{c\} = e_I(x) = e_{I_1}(x) = e_{I_1}(x) \sqcup \emptyset = e_{I_1}(x) \sqcup e_{I_2}(x)$. Se usa un argumento análogo para $x \in I_2$.

Por lo tanto, $e_I = e_{I_1} \sqcup e_{I_2}$ como $\mathcal{C}$-conjuntos. □

Note que la definición de e_I no depende del punto c. Si tomamos

$$e'_I(x) = \begin{cases} \{d\}, & x \in I \\ \emptyset, & x \notin I \end{cases}$$

para algún d fijo, observe que $e'_I \cong e_I$ como $\mathcal{C}$-conjuntos. Por lo tanto, en el anillo de Burnside de $\mathcal{C}$, $[e'_I] = [e_I]$.

Observación 2.29. Supongamos que I, J son ideales de $\mathcal{C}$. Entonces $(e_I \times e_J)(x) = e_I(x) \times e_J(x)$. Para que este producto no sea vacío, $x \in I \cap J$. De hecho, $(e_I \times e_J)(x) = \{(c, d)\}$ con c, d fijos. Es fácil ver que en cualquier otro caso, $(e_I \times e_J)(x) = \emptyset$.

Por lo tanto, en $B(\mathcal{C})$, $[e_I][e_J] = [e_{I \cap J}]$.

Definición 2.30. Un ideal I de $\mathcal{C}$ es *conexo* si $I = I_1 \sqcup I_2$ implica $I_1 = \emptyset$ o $I_2 = \emptyset$.

Lema 2.31. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría e I un ideal conexo de $\mathcal{C}$. Entonces e_I es un $\mathcal{C}$-conjunto transitivo.*

Demostración. Supongamos que $e_I = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. Sea $x \in I$, entonces $\{c\} = e_I(x) = \Omega_1(x) \sqcup \Omega_2(x)$.

Sea $I_i = \{x \in I \mid c \in \Omega_i(x)\}$, $i = 1, 2$. Veamos que I_i es un ideal de $\mathcal{C}$.

Primero supongamos que $x \sim y$, así que existen $\alpha : x \longrightarrow y$ y $\beta : y \longrightarrow x$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si $x \in I_i$ entonces $c \in \Omega_i(x)$, por lo que es no vacío. Si aplicamos Ω_i a α y β, tendremos $\Omega_i(\alpha) : \Omega_i(x) \longrightarrow \Omega_i(y)$ y $\Omega_i(\beta) : \Omega_i(y) \longrightarrow \Omega_i(x)$. Note que, para que $\Omega_i(\alpha)$ esté bien definida, $\Omega_i(y) \neq \emptyset$, por lo que $c \in \Omega_i(y)$. Así, $y \in I_i$.

Análogamente, si $y \in I_i$, para que $\Omega_i(\beta)$ esté bien definida, $\Omega_i(x) \neq \emptyset$, por lo que $c \in \Omega_i(x)$. Así, $x \in I_i$.

Ahora veamos que $\overline{I_i}$ es ideal en $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Supongamos que existe $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$ con $x \in I_i$. Entonces $\Omega_i(\alpha) : \Omega_i(x) \longrightarrow \Omega_i(y)$. Como $x \in I_i$, entonces $c \in \Omega_i(x)$. Luego, como $\Omega_i(\alpha)$ debe estar bien definida, $\Omega_i(y) \neq \emptyset$ por lo que $c \in \Omega_i(y)$, i.e., $y \in I_i$.

Por lo tanto, I_1, I_2 son ideales de $\mathcal{C}$. Entonces $I = I_1 \sqcup I_2$ pero, como por hipótesis I es conexo, entonces $I = I_i$ e $I_j = \emptyset$ con $j \neq i$ e $i, j \in \{1, 2\}$. En consecuencia, como c sólo puede estar en el soporte de alguno de los Ω_i, entonces $e_I = \Omega_i$ y $\Omega_j = \emptyset$ con $j \neq i$.

Así, e_I es transitivo. $\square$

Observación 2.32. Un punto importante a mencionar es que los $[e_I]$ son idempotentes en $B(\mathcal{C})$, pues $[e_I][e_I] = [e_{I \cap I}] = [e_I]$.

Veamos cómo estos e_I se comportan al calcular sus marcas.

Lema 2.33. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, I un ideal de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Entonces $m_{\mathcal{D}}([e_I]) \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Se sigue de que $m_{\mathcal{D}}$ es un morfismo de anillos y de que los idempotentes de $\mathbb{Z}$ son $\{0, 1\}$. $\square$

Obsrve que si I es un ideal de una categoría $\mathcal{C}$, también es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, tiene sentido calcular la marca en I.

Lema 2.34. *Sean I, J ideales de $\mathcal{C}$. Entonces $m_I([e_I]) = 1$ y, si $m_I([e_J]) = 1$ entonces $I \subseteq J$.*

Demostración. Para ver que $m_I([e_I]) = 1$, basta ver que $m_{\mathcal{C}}([e_{\mathcal{C}}]) = 1$ pues $m_I([e_I]) = m_I([Res^{\mathcal{C}}_I(e_I)])$.

Observe que $e_{\mathcal{C}}(x) = \{c\}$ para algún c fijo, por definición. Luego, $e_{\mathcal{C}}$ es transitivo constante. Se sigue que $m_{\mathcal{C}}([e_{\mathcal{C}}]) = 1$ pues en su descomposición en $\mathcal{C}$-conjuntos transitivos sólo hay un transitivo constante, a saber, él mismo.

Ahora, supongamos que $m_I([e_J]) = 1$. Entonces $m_I([Res^{\mathcal{C}}_I(e_J)]) = 1$, lo que implica que $Res^{\mathcal{C}}_I(e_J) = e_I$, por la primera parte de este lema. Supongamos que $I \nsubseteq J$, entonces si $x \in I \setminus J$, tendríamos que $e_I(x) = \{c\}$ y $Res^{\mathcal{C}}_I(e_J)(x) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $I \subseteq J$. $\square$

En general, si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$ e I es un ideal de $\mathcal{C}$, $m_{\mathcal{D}}([e_I]) = 1$ implica que $\mathcal{D} \subseteq I$ sólo como subcategoría, pues no toda subcategoría de $\mathcal{C}$ es un ideal.

Lema 2.35. *Sea $\{I_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ una familia de ideales finitos conexos de $\mathcal{C}$ y supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [e_{I_i}] = 0$ en $B(\mathcal{C})$, con $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces los $[e_{I_i}]$ son linealmente independientes, es decir, $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Supongamos que existe algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\lambda_i \neq 0$ y tomemos I_{i_0} ideal en $\mathcal{C}$ máximo tal que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Entonces

$$0 = m_{I_{i_0}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [e_{I_i}] \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{I_{i_0}}([e_{I_i}]) = \lambda_{i_0}.$$

Esta última igualdad se da pues, para que dicha marca sea distinta de 0, I_{i_0} debe estar contenido en I_i pero como es máximo, entonces $I_{i_0} = I_i$. De ahí que $\lambda_{i_0} = 0$, lo cual contradice que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Por lo tanto, $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

En resumen, si la categoría $\mathcal{C}$ es finita e I es un ideal de $\mathcal{C}$ y consideramos el anillo de Burnside $B(\mathcal{C})$, $[e_I]$ es un elemento idempotente. Ahora, consideremos al conjunto generado por los $[e_I]$, es decir, $\langle [e_I] \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C} \rangle$. Note que éste es un subgrupo abeliano de $B(\mathcal{C})$ que es cerrado bajo productos. Más aún, $\langle [e_I] \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C} \rangle$ es una subálgebra de $B(\mathcal{C})$, con unidad $[e_{\mathcal{C}}] = [*]$ la unidad de $B(\mathcal{C})$.

Proposición 2.36. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. En el anillo de Burnside $B(\mathcal{C})$, para cada ideal I de $\mathcal{C}$ los elementos $[e_I]$ son idempotentes y generan un subanillo isomorfo a A/K, donde A es el álgebra de Möbius de la retícula de ideales del copo asociado $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ y K es el generado por los elementos $I - I_1 - I_2$, siempre que $I = I_1 \sqcup I_2$.*

Demostración. Por la Observación 2.32 tenemos que los $[e_I]$ son idempotentes en $B(\mathcal{C})$. Note que son distintos de 0 si $I \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de ideales de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, el cual es un copo respecto de la inclusión. Note que, por definición, en realidad consta de ideales de $\mathcal{C}$. Además, es una retícula con supremo dado por la unión de ideales e ínfimo dado por la intersección de ideales. Se sigue directamente de la definición de ideal que tanto $I \cup J$ como $I \cap J$ son ideales.

Definimos $A = A(\mathcal{L})$ como el grupo abeliano libre con base los elementos de $\mathcal{L}$ y con multiplicación en los básicos dada por $I \cdot J = I \cap J$.

Note que $\mathcal{C}$ es la unidad en A, pues $\mathcal{C} \cap I = I = I \cap \mathcal{C}$.

Sea $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{C})$ tal que, definido en los elementos básicos, $\pi(I) = [e_I]$. Extendiendo linealmente a π, obtenemos un morfismo de grupos abelianos. Además, $\pi(IJ) = \pi(I \cap J) = [e_{I \cap J}] = [e_I][e_J]$, por lo que es en realidad un morfismo de anillos, cuya imagen es $\langle e_I \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Llamaremos a A el álgebra de Möbius de la retícula $\mathcal{L}$. Afirmamos que $\operatorname{Ker}(\pi)$ es un ideal de A y que $\operatorname{Ker}(\pi) = \langle I - I_1 - I_2 \mid I = I_1 \sqcup I_2 \rangle =: K$.

$\supseteq$) Observe que $\pi(I - I_1 - I_2) = [e_I] - [e_{I_1}] - [e_{I_2}] = 0$ pues, por el Lema 2.28, como $I = I_1 \sqcup I_2$, $[e_I] = [e_{I_1}] + [e_{I_2}]$. Entonces $I - I_1 - I_2 \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Así, $K \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$.

$\subseteq$) Suponga que $\pi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i\right) = 0$. Observe que si $I_j = I_j^1 \sqcup I_j^2$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, i.e., si algún ideal es disconexo, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i - \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i I_i + \lambda_j^1 I_j^1 + \lambda_j^2 I_j^2 \right) \in K \subseteq \operatorname{Ker}(\pi).$$

Entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que los I_i son conexos. Entonces

$$0 = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [e_{I_i}]$$

pero, por el Lema 2.35, los $[e_I]$ son linealmente independientes, por lo que $\lambda_i = 0$ para toda i. $\square$

Corolario 2.37. *Con las hipótesis de la Proposición anterior, el álgebra $A(\mathcal{L})/K$ es isomorfa a $\langle [e_I] \mid I$ ideal conexo de $\mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Z}}$ dentro de $B(\mathcal{C})$.*

Demostración. Es inmediato. $\square$

Antes de continuar, necesitaremos dar el siguiente resultado para retículas.

Lema 2.38. *Sea P una retícula finita con ínfimo denotado por $\wedge$ y sean $a, b, w \in P$, con a, b fijos. Entonces*

$$\sum_{\substack{u,v\in P \\ u\wedge v = w}} \mu(u,a)\mu(v,b) = \mu(w,b)\delta(b,a)$$

con μ la función de Möbius de P y δ la delta de Kronecker.

Demostración. Sea $f : P \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(w) = \sum_{\substack{u,v\in P \\ u\wedge v = w}} \mu(u,a)\mu(v,b)$. Definimos $g : P \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $g(w) = \sum_{x\in P} \zeta(w,x) f(x)$ con ζ la función Zeta de P. Entonces

$$\begin{aligned}
g(w) &= \sum_{w\le x} \sum_{\substack{u,v\in P \\ u\wedge v = x}} \mu(u,a)\mu(v,b) \\
&= \sum_{\substack{u,v\in P \\ w\le u \\ w\le v}} \mu(u,a)\mu(v,b) \\
&= \sum_{\substack{u\in P \\ w\le u}} \left(\sum_{\substack{v\in P \\ w\le v\le b}} \mu(v,b) \right) \mu(u,a) \\
&= \delta(w,b) \sum_{\substack{u\in P \\ b\le u\le a}} \mu(u,a) \\
&= \delta(w,b)\delta(b,a).
\end{aligned}$$

Es decir, $g(w) = \delta(w,b)\delta(b,a)$. Luego, por el Teorema de Inversión de Möbius [12, Section 3.7] se tiene que

$$\begin{aligned}
f(w) &= \sum_{x\in P} \mu(w,x) g(x) \\
&= \sum_{x\in P} \mu(w,x)\delta(x,b)\delta(b,a) \\
&= \mu(w,b)\delta(b,a).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.39. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Consideremos a $\mathbb{Q}B(\mathcal{C}) := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(\mathcal{C})$. Entonces $\langle [e_I] \mid I$ ideal conexo de $\mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Q}} \leq \mathbb{Q}B(\mathcal{C})$ es un álgebra semisimple y sus idempotentes primitivos son $\{f_I \mid I$ ideal conexo de $\mathcal{C}\}$, con*

$$f_I = \sum_{J \leq I} \mu(J, I)[e_J]$$

donde μ es la función de Möbius de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Además, $[e_J] = \sum_I \zeta(J, I) f_I$.

Demostración. Sean $\mathcal{L}$, $A := A(\mathcal{L})$ y K como en la Proposición 2.36. Observe que

$$\mathbb{Q}A/K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A/K \cong \langle [e_I] \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Q}}$$

y note que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}A/K) = |\{I \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\}|$, pues los e_I provienen justamente de los ideales conexos de $\mathcal{C}$ y son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$, por lo que también lo son sobre $\mathbb{Q}$.

Definimos $f_I = \sum\limits_{\substack{J \leq I \\ J \text{ conexo}}} \mu(J, I)[e_J]$. El teorema de Inversión de Möbius nos dice que esto pasa si y sólo si $[e_I] = \sum\limits_{\substack{J \leq I \\ J \text{ conexo}}} f_J$.

Ahora veamos que los f_J son idempotentes ortogonales para todo J ideal conexo de $\mathcal{C}$. Sean I, J ideales conexos de $\mathcal{C}$. El producto de f_I con f_J queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f_I f_J &= \sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ L \text{ conexo}}} \mu(L, I)[e_I] \sum_{\substack{T \in \mathcal{L} \\ T \text{ conexo}}} \mu(T, J)[e_J] \\
&= \sum_{L,T} \mu(L, I)\mu(T, J)[e_{I \cap J}] \\
&= \sum_{W} \left(\sum_{\substack{L,T \\ L \cap T = W}} \mu(L, I)\mu(T, J) \right) [e_W] \\
&= \sum_{W} \mu(W, I)\delta(I, J)[e_W] && \text{por el Lema 2.38} \\
&= \delta(I, J) \sum_{W} \mu(W, I)[e_W] \\
&= \delta(I, J)\, f_I \\
&= \begin{cases} [\varnothing], & \text{si } I \neq J; \\ f_I, & \text{si } I = J. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los f_I son idempotentes ortogonales. Note que hay la misma cantidad de e_I's que de f_I's. $\square$

Por lo visto en el Corolario 2.37, $A(\mathcal{L})/K \cong \langle [e_I] \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Z}}$ dentro de $B(\mathcal{C})$. Al hacer producto tensorial por $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$, tenemos que $\langle [e_I] \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Q}}$ $= \langle f_I \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Q}}$ dentro de $\mathbb{Q}B(\mathcal{C})$. Pero note que $\langle f_I \mid I \text{ ideal conexo de } \mathcal{C}\rangle_{\mathbb{Q}}$ $\cong \prod_I \mathbb{Q} f_I$ como álgebras. Por lo tanto, es semisimple.

Capítulo 3

Biconjuntos para categorías

Los biconjuntos han sido estudiados por un largo tiempo usando nombres diferentes. En el contexto de la teoría de categorías son conocidos como *distribuidores* o *profuntores*. Aparecieron en la tesis de 1966 de M. Bunge [7], al igual que en un trabajo de J. Bénabou [2] de 1973, y hay una descripción de la teoría de distribuidores en [3, Sección 7.8].

En el contexto en el que las categorías son grupos finitos, la teoría ha sido desarrollada considerablemente teniendo en mente aplicaciones principalmente en teoría de grupos. Además, se han usado a los biconjuntos en un contexto topológico, para tener una aplicación a la conjetura de Segal [1].

Revisaremos estas definiciones e introduciremos nuestra notación, usando el término *biconjunto* en vez de profuntor o distribuidor, notando que la teoría de biconjuntos difiere de la de distribuidores una vez que establezcamos la relación de que la unión disjunta se corresponde con la suma.

Volveremos a considerar categorías pequeñas, a menos que se indique lo contrario. Denotaremos por $\mathcal{C}^{op}$ a la categoría opuesta de $\mathcal{C}$.

3.1 Biconjuntos y funtores de biconjuntos

Definición 3.1. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías. Un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-*biconjunto* es un funtor $\Omega : \mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$, es decir, es un $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op}$-conjunto.

Para recordar el lado por el cual actúa cada categoría, a Ω lo denotaremos por ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$. Y dado Ω un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto, morfismos $\alpha : x \longrightarrow x_1$ en $\mathcal{C}$ y $\beta : y_1 \longrightarrow y$ en $\mathcal{D}$, y $u \in \Omega(x, y)$, obtenemos elementos

$$\alpha u := \Omega(\alpha, 1_y)(u) \in \Omega(x_1, y),$$

$$u\beta := \Omega(1_x, \beta) \in \Omega(x, y_1).$$

En este sentido, tenemos acciones conmutativas en Ω de $\mathcal{C}$ por la izquierda y de $\mathcal{D}$ por la derecha.

Ejemplo 3.2. Si G y H son grupos finitos y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}_H$ las categorías de desenlazado de G y H respectivamente, un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto Ω es un (G, H)-biconjunto.

Sea $X := \Omega(\bullet_G, \bullet_H)$ con $\bullet_G, \bullet_H$ los únicos objetos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Sean $x \in X$, $g \in G$ y $h \in H$. Observe que $gx := \Omega(g, e_H)(x)$ y $xh := \Omega(e_G, h)(x)$, así que X es un G-conjunto izquierdo y un H-conjunto derecho, por la covarianza y contravarianza de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente, y $(gx)h = \Omega(g, h)(x) = g(xh)$.

Hay biconjuntos que se pueden obtener a través del comportamiento de funtores, como se observa en la siguiente definición.

Definición 3.3. Dadas categorías pequeñas $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ y funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, obtenemos un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto que denotamos por ${}_{\mathcal{C}^F}\mathcal{E}_{G_\mathcal{D}}$. Dicho biconjunto está definido en objetos de la siguiente forma: si $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$,

$$ {}_{\mathcal{C}^F}\mathcal{E}_{G_\mathcal{D}}(x, y) := \mathrm{Hom}_\mathcal{E}\left(G(y), F(x)\right). $$

Invertimos el orden de x y y a izquierda y derecha en la ecuación anterior que define a este biconjunto para permitir la convención de que componemos morfismos por la izquierda.

Note que, en morfismos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, el efecto de este funtor está dado por la composición en $\mathcal{E}$, después de aplicar F y G. Es decir, si $\alpha : x_1 \longrightarrow x_2$ en $\mathcal{C}$, $\beta : y_1 \longrightarrow y_2$ en $\mathcal{D}$ y $\phi : G(y_2) \longrightarrow F(x_1)$ en $\mathcal{E}$, ${}_{\mathcal{C}^F}\mathcal{E}_{G_\mathcal{D}}(\alpha, \beta)$ manda a ϕ en $F(\alpha) \circ \phi \circ G(\beta)$. Si alguno de los funtores F o G es la inclusión de una subcategoría en una categoría más grande, se omite de la notación. Esto para que sea consistente con la notación del biconjunto ${}_\mathcal{C}\mathcal{C}_\mathcal{C}$, el cual ya es fácil ver que en objetos está definido como ${}_\mathcal{C}\mathcal{C}_\mathcal{C}(x, y) = \mathrm{Hom}_\mathcal{C}\,(y, x)$.

Ejemplo 3.4. En el contexto de los biconjuntos definidos para grupos finitos, cuando H es un subgrupo de G el biconjunto ${}_HG_G$ representa a la restricción en funtores de biconjuntos, mientras que ${}_GG_H$ representa a la inducción. Si Q es un cociente del grupo G, el biconjunto ${}_GQ_Q$ representa a la inflación y ${}_QQ_G$ a la deflación.

Al igual que para $\mathcal{C}$-conjuntos, dados $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjuntos ${}_\mathcal{C}\Omega_\mathcal{D}$ y ${}_\mathcal{C}\Psi_\mathcal{D}$, podemos formar su unión disjunta ${}_\mathcal{C}\Omega_\mathcal{D} \sqcup {}_\mathcal{C}\Psi_\mathcal{D}$ y las propiedades de esta construcción, dadas en el Capítulo 1, se siguen cumpliendo.

Hay un *producto* o *composición* de biconjuntos que aparece en [2] y también se describe en [3]. La resumiremos a continuación.

Definición 3.5. Dados un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto ${}_\mathcal{C}\Omega_\mathcal{D}$ y un $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$-biconjunto ${}_\mathcal{D}\Psi_\mathcal{E}$, construimos un $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$-biconjunto $\Omega \times_\mathcal{D} \Psi$, para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y cada $z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{E})$, como sigue:

$$ (\Omega \times_\mathcal{D} \Psi)(x, z) = \left(\bigsqcup_{y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \Omega(x, y) \times \Psi(y, z) \right) / \sim, $$

donde $\sim$ está dada como sigue: si $a \in \Omega(x, y')$, $b \in \Psi(y, z)$, $\beta : y \rightsquigarrow y'$ es una caminata en $\mathcal{D}$, $u \in a\beta$ y $v \in \beta b$, entonces $(u, b) \sim (a, v)$.

Note que ésta, en efecto, es una relación de equivalencia.

- Reflexividad. Sea $(a, b) \in \Omega(x, y) \times \Psi(y, z)$. Entonces $(a, b) \sim (a, b)$ mediante la caminata de una paso, es decir, el morfismo $1_y : y \longrightarrow y$.

- Simetría. Supongamos que $(u, b) \sim (a, v)$, entonces existe $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$ tal que $u \in a\beta$ y $v \in \beta b$, lo que implica, por un análogo del Lema 1.30 para biconjuntos, que $a \in u\beta^{op}$ y $b \in \beta^{op}v$. Así, $(a, v) \sim (u, b)$.

- Transitividad. Supongamos que $(u, b) \sim (a, v)$ y $(a, v) \sim (c, w)$, así que existen caminatas β, γ en $\mathcal{D}$ tales que $u \in a\beta$, $v \in \beta b$, $a \in c\gamma$ y $w \in \gamma v$. Entonces $\gamma \circ \beta$ es caminata en $\mathcal{D}$ tal que $u \in c(\gamma \circ \beta)$ y $w \in (\gamma \circ \beta)b$. Por lo tanto, $(u, b) \sim (c, w)$.

Denotaremos a los clases de equivalencia bajo dicha relación por $[u, b]$.

La acción funtorial izquierda de $\mathcal{C}$ viene de la acción izquierda de $\mathcal{C}$ en Ω y la acción funtorial derecha de $\mathcal{E}$ proviene de la acción derecha de $\mathcal{E}$ en Ψ.

Cuando las categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ son categorías de desenlazado de grupos finitos, esta composición de biconjuntos coincide con la definición usual, dada en [1, 4].

La composición descrita anteriormente es asociativa hasta isomorfismo, como veremos más adelante.

Lema 3.6. *Sean ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$ y ${}_{\mathcal{D}}\Psi_{\mathcal{E}}$ biconjuntos. Entonces $\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi$ es un $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$-biconjunto.*

Demostración. Para la buena definición en la primera entrada, supongamos que $\alpha : x \longrightarrow x'$ es morfismo en $\mathcal{C}$. Entonces tenemos

$$(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, z) \xrightarrow{(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)} (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x', z)$$

tal que $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)([u, v]) = [\alpha u, v]$. Veamos que está bien definido.

Supongamos que $[u, v] = [u', v']$. Entonces existe $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$ tal que $(u, v) = (a\beta, v)$ y $(u', v') = (a, \beta v)$ para algunos $a \in \Omega(x, y')$ y $b \in \Psi(y, z)$. Entonces $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)([u, v]) = [\alpha u, v] = [\alpha(a\beta), v]$. Pero

$$\begin{aligned}
\alpha(a\beta) &= \Omega(\alpha, 1_y)(a\beta) \\
&= \Omega(\alpha, 1_y)\left(\Omega(1_x, \overline{\beta})(a)\right) \\
&= \Omega(\alpha, \overline{\beta})(a) \\
&= \Omega(1_x, \overline{\beta})\left(\Omega(\alpha, 1_y)(a)\right) \\
&= (\alpha a)\beta.
\end{aligned}$$

Así, $[\alpha(a\beta), v] = [(\alpha a)\beta, v]$. Por otro lado, $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)([u', v']) = [\alpha u', v'] = [\alpha a, \beta v] = [(\alpha a)\beta, v] = (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)([u, v])$.

Por lo tanto, está bien definido. Ahora, note que es un $\mathcal{C}$-conjunto izquierdo, es decir, es un funtor covariante en la primera entrada, pues Ω lo es.

Ahora veamos la buena definición en la segunda entrada. Supongamos que $\gamma : z \longrightarrow z'$ es morfismo en $\mathcal{E}$. Entonces tenemos

$$(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, z') \xrightarrow{(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, \gamma)} (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, z)$$

tal que $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, \gamma)([u, v]) = [u, v\gamma]$. Veamos que está bien definido.

Supongamos que $[u, v] = [u', v']$. Entonces existe $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$ tal que $(u, v) = (a\beta, v)$ y $(u', v') = (a, \beta v)$ con a, b como antes. Entonces $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, \gamma)([u, v]) =$

$[u, v\gamma] = [a\beta, v\gamma] = [a, \beta(v\gamma)]$. Por otro lado, $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x,\gamma)([u',v']) = [u', v'\gamma] = [a, (\beta v)\gamma]$. Pero

$$\begin{aligned}(\beta v)\gamma &= \Psi(1_y, \gamma)(\beta v)\\ &= \Psi(1_y,\gamma)\left(\Psi(\overline{\beta}, 1_z)(v)\right)\\ &= \Psi(\overline{\beta},\gamma)(v)\\ &= \Psi(\overline{\beta}, 1_z)\left(\Psi(1_y,\gamma)(v)\right)\\ &= \beta(v\gamma).\end{aligned}$$

Así, $[a, (\beta v)\gamma] = [a, \beta(v\gamma)]$ y, por lo tanto, está bien definido. Note que es un $\mathcal{E}$-conjunto derecho, es decir, es un funtor contravariante en la segunda entrada pues Ψ lo es.

Por último, veamos que ambas acciones son compatibles. Sean $\alpha : x \longrightarrow x_1$ y $\gamma : z_1 \longrightarrow z$ morfismos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ respectivamente. Note que

$$\begin{aligned}(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x,\gamma)\left((\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)([u,v])\right) &= (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha,\gamma)([u,v])\\ &= (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\alpha, z)\left((\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x,\gamma)([u,v])\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, las acciones son compatibles. Así, $\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{E})$-biconjunto. □

Teorema 3.7. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ categorías y ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$, ${}_{\mathcal{D}}\Psi_{\mathcal{E}}$, ${}_{\mathcal{E}}\zeta_{\mathcal{F}}$ biconjuntos. Entonces, como $(\mathcal{C},\mathcal{F})$-biconjuntos, $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \times_{\mathcal{E}} \zeta \cong \Omega \times_{\mathcal{D}} (\Psi \times_{\mathcal{E}} \zeta)$.*

Demostración. Por el Lema 3.6, $\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{E})$-biconjunto y, por tanto, $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \times_{\mathcal{E}} \zeta$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{F})$-biconjunto, al igual que $(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \times_{\mathcal{E}} \zeta$.

Sean $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $t \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{F})$. Note que

$$((\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \times_{\mathcal{E}} \zeta)(x,t) = \left(\bigsqcup_{\substack{y\in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})\\ z\in\mathrm{Obj}(\mathcal{E})}} \Omega(x,y) \times \Psi(y,z) \times \zeta(z,t)\right) / \sim$$

con la relación dada como sigue: sean $a \in \Omega(x,y')$, $b \in \Psi(y,z')$ y $c \in \zeta(z,t)$, $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$, $\gamma : z \rightsquigarrow z'$ caminata en $\mathcal{E}$ y $u \in a\beta$, $v \in \beta b$, $w \in b\gamma$ y $r \in \gamma c$, entonces $(u,b,c) \sim (a,v,c)$ y $(a,w,c) \sim (a,b,r)$. La prueba de que ésta es relación de equivalencia es análoga a la dada anteriormente. Y esto mismo es verdadero para $(\Omega \times_{\mathcal{D}} (\Psi \times_{\mathcal{E}} \zeta))(x,t)$, además de que las acciones funtoriales de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}$ son las mismas con estas identificaciones. Por lo tanto, ambas composiciones son isomorfas. □

Observación 3.8. Note que ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$ actúa como la identidad bajo la composición descrita anteriormente, pues si Ω es un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-biconjunto, tenemos una transformación natural $\eta : {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}} \Omega \longrightarrow \Omega$ dada, para cada objeto (x,z) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op}$, por $\eta_{(x,z)}([\alpha,u]) = \alpha u$ con $\alpha : x' \longrightarrow x$ y $u \in \Omega(x',z)$ para algún $x' \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Se puede ver que es, en efecto, una transformación natural.

Note que $\eta_{(x,z)}$ es suprayectiva pues si $u \in \Omega(x,z)$, $\eta_{(x,z)}([1_x,u]) = 1_x u = u$. Y si $[\alpha,u], [\beta,v]$ son tales que $\alpha u = \beta v$, entonces $[\alpha,u] = [1_x, \alpha u] = [1_x, \beta v] = [\beta, v]$. De ahí que $\eta_{(x,z)}$ es biyectiva para cada $(x,z) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op})$.

Por lo tanto, η es isomorfismo natural. Análogamente se verifica que ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}} \times_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{\mathcal{D}} \cong {}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$.

Con lo anterior, hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 3.9 ([3], 7.8.2)**.** *Las categorías pequeñas junto con los* $(\mathcal{C},\mathcal{D})$*-biconjuntos como morfismos de* $\mathcal{D}$ *a* $\mathcal{C}$*, y con transformaciones naturales entre biconjuntos como 2-morfismos forman una bicategoría, la cual denotaremos por Bi-Biset.*

En particular, la operación composición $\times_{\mathcal{D}}$ *es asociativa hasta isomorfismo de biconjuntos. Y para cada categoría* $\mathcal{C}$*, el biconjunto* ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$ *es el endomorfismo identidad.*

Sean R un anillo conmutativo y $\mathcal{E}$ una categoría pequeña.

Definición 3.10. 1. Definimos el *álgebra de categoría* de $\mathcal{E}$ (ver [8, 16]), denotada por $R\mathcal{E}$, como

$$R\mathcal{E} = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{E})} \lambda_\alpha \alpha \;\middle|\; \lambda_\alpha = 0 \text{ para casi toda } \alpha \right\}$$

con producto en los elementos de la base dado por

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta, & \text{si se pueden componer} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

el cual extendemos linealmente. Esta es una álgebra asociativa, posiblemente sin unidad.

2. Si Ω es un $\mathcal{E}$-conjunto, definimos

$$R\Omega = \bigoplus_{x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{E})} R\Omega(x)$$

el cual es un $R\mathcal{E}$-módulo con producto escalar dado como sigue: si $a \in \Omega(x)$, $\alpha : z \longrightarrow y$ en $\mathcal{E}$,

$$\alpha \cdot a = \begin{cases} \Omega(\alpha)(a), & x = z; \\ 0, & x \neq z. \end{cases}$$

Si Ω es finito, $R\Omega$ es finitamente generado.

Lema 3.11. *Sean* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{D}$ *categorías finitas. Como* R*-álgebras,* $R(\mathcal{C}\times\mathcal{D}^{op}) \cong R\mathcal{C}\otimes_R R\mathcal{D}^{op}$*.*

Demostración. Primero note que $R(\mathcal{D}^{op}) \cong (R\mathcal{D})^{op}$. Con esto en mente, el isomorfismo que proponemos, además de su inverso, están dados en los elementos básicos por

$$R(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op}) \longrightarrow R\mathcal{C} \otimes_R R\mathcal{D}^{op}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \otimes \beta$$

$$(\alpha, \beta) \longleftarrow\!\shortmid \alpha \otimes \beta$$

los cuales se tienen que extender linealmente para que sean los que buscamos. $\square$

Una observación relevante que surge de este lema es que si Ω es un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto, entonces $R\Omega$ es un $R(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op})$-módulo, es decir, un $(R\mathcal{C} \otimes_R R\mathcal{D}^{op})$-módulo. Ahora, si $a \in \Omega(x, w)$, $\alpha : x \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y $\beta : v \longrightarrow u$ es un morfismo en $\mathcal{D}$, $\alpha a \beta = \Omega(\alpha, \beta)(a)$, así que $\alpha(a\beta) = (\alpha a)\beta$. Por lo tanto, $R\Omega$ es un $(R\mathcal{C}, R\mathcal{D})$-bimódulo.

Teorema 3.12. *Sean Ω un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto y Ψ un $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$-biconjunto. Entonces $R(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \cong R\Omega \otimes_{R\mathcal{D}} R\Psi$ es un $(R\mathcal{C}, R\mathcal{E})$-bimódulo.*

Demostración. Sean $x \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ y $z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{E})$, $u \in \Omega(x, y)$ y $v \in \Psi(y, z)$. Definimos morfismos

$$\theta : R(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi) \longrightarrow R\Omega \otimes_{R\mathcal{D}} R\Psi$$

tal que $\theta([u, v]) = u \otimes v$, y

$$\varphi : R\Omega \otimes_{R\mathcal{D}} R\Psi \longrightarrow R(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)$$

tal que $\varphi(u \otimes v) = [u, v]$. Note que ambas asignaciones están bien definidas por las propiedades del producto tensorial y por la relación $\sim$ que da origen a la composición de biconjuntos. Al extenderlas linealmente, es claro que θ y φ son morfismos inversos. $\square$

Definiremos, ahora sí, la categoría de biconjuntos. Para esto necesitamos las siguientes definiciones. Consideraremos categorías finitas pues, de lo contrario, no tendremos unidad en las álgebras.

Definición 3.13. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías finitas. Definimos $A(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ como el grupo de Grothendieck de los $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjuntos finitos respecto de la unión disjunta. Esto es,

$$A(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \frac{\mathbb{Z}\text{-módulo libre sobre las clases de isomorfismo de } (\mathcal{C}, \mathcal{D})\text{-biconjuntos}}{\langle \Omega - \Omega_1 - \Omega_2 \mid \Omega \cong \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \rangle}.$$

Note que $A(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \cong B(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op})$. Si R es un anillo conmutativo, definimos

$$A_R(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := R \otimes_{\mathbb{Z}} A(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

Dada una categoría finita $\mathcal{E}$, además de las dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, definimos una función

$$A_R(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \times A_R(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \longrightarrow A_R(\mathcal{E}, \mathcal{C})$$

dada en biconjuntos por la composición $\times$ de los mismos. Note que esta composición manda uniones disjuntas en uniones disjuntas, así que puede extenderse a una función R-bilineal.

Definición 3.14. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Definimos la *categoría de biconjuntos*, denotada por $\mathbb{B}_R$, como la categoría cuyos objetos son las categorías finitas, con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{B}_R}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = A_R(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ y composición inducida por la composición de biconjuntos, extendida por R-linealidad.

Note que la inversión de las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en $A_R(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ se debe a la convención de que componemos morfismos por la izquierda.

Definición 3.15. Un *funtor de biconjuntos* sobre R es un funtor R-lineal $\mathbb{B}_R \longrightarrow R$-Mód. A la categoría cuyos objetos son estos funtores de biconjuntos y los morfismos son transformaciones naturales entre estos funtores es llamada *categoría de funtores de biconjuntos*, la cual denotamos por $\mathcal{F}_R$.

Como toda categoría de funtores a la categoría de R-módulos, la categoría de funtores de biconjuntos es abeliana. Presentaremos ejemplos, algunos de los cuales resultarán familiares de la teoría de funtores de biconjuntos para grupos finitos, cuya diferencia es que ahora están definidos sobre todas las categorías finitas.

Denotaremos por $\mathbf{1}$ a la categoría con un único objeto y un único morfismo para dicho objeto.

Ejemplo 3.16. Sea $B_R : \mathbb{B}_R \longrightarrow R$-Mód el funtor grupo de Burnside, que es tal que a cada categoría $\mathcal{C}$ le asocia $B_R(\mathcal{C}) := R \otimes_{\mathbb{Z}} B(\mathcal{C})$, y si φ es un $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$-biconjunto, $B_R({}_{\mathcal{D}}\varphi_{\mathcal{C}})$ es tal que a cada $\mathcal{C}$-conjunto Ω (el cual podemos ver como el biconjunto ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathbf{1}}$), $B_R({}_{\mathcal{D}}\varphi_{\mathcal{C}})([\Omega]) = [\varphi \times_{\mathcal{C}} \Omega]$.

Ejemplo 3.17. Para cada categoría finita $\mathcal{C}$, el funtor representable $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}_R}(\mathcal{C}, \_)$ es un funtor de biconjuntos. En efecto, para cada categoría finita $\mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}_R}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es un R-módulo y, si ${}_{\mathcal{D}}\Omega_{\mathcal{C}}$ es un biconjunto, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}_R}(\mathcal{C}, \Omega)$ es un morfismo de R-módulos. Y note que, por propiedades del Hom, se sigue que es un funtor de biconjuntos.

Proposición 3.18. *$B_R \cong A_R(\_, \mathbf{1})$ es representable y, por lo tanto, proyectivo. Si R es un anillo local completo, entonces B_R es inescindible.*

Demostración. Note que $A_R(\mathcal{C}, \mathbf{1}) = R \otimes_{\mathbb{Z}} B(\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op}) \cong B_R(\mathcal{C})$, y este isomorfismo es natural. Por lo tanto, B_R es representable.

Recordemos que $\mathcal{F}_R$ es una categoría abeliana. Sea F un funtor de biconjuntos, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_R}(B_R, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_R}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}_R}(\mathbf{1}, \_), F) \cong F(\mathbf{1})$ por el Lema de Yoneda. Luego, si $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de funtores de biconjuntos, entonces

$$0 \longrightarrow F_1(\mathbf{1}) \longrightarrow F_2(\mathbf{1}) \longrightarrow F_3(\mathbf{1}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Es decir,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_R}(B_R, F_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_R}(B_R, F_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_R}(B_R, F_3) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto, B_R es proyectivo.

Luego, $\mathrm{End}_{\mathcal{F}_R}(B_R) \cong B_R(\mathbf{1}) = R$ y, como R es local, se sigue que B_R es inescindible. □

Anteriormente habíamos formado la bicategoría Bi-Biset, la cual se puede notar que tiene similitudes con $\mathbb{B}_R$. Bien podríamos trabajar con cualquiera de las dos; sin embargo, para nuestros propósitos nos basta considerar únicamente a $\mathbb{B}_R$.

Retomemos la definición de biconjuntos construidos a partir de funtores (Definición 3.3). Éstos nos dan la conexión básica entre la categoría de categorías finitas y funtores Cat y la categoría de biconjuntos $\mathbb{B}_R$.

Lema 3.19. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorías finitas y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ funtores. Entonces ${}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G_{\mathcal{D}}} \times_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}} \cong {}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G\circ F_{\mathcal{C}}}$ como $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$-biconjuntos.*

Demostración. Sean $t = {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}} : \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ tal que $t(y, x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$, $r = {}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G_{\mathcal{D}}} : \mathcal{E} \times \mathcal{D}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ tal que $r(z, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(G(y), z)$ y $u = {}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G\circ F_{\mathcal{C}}} : \mathcal{E} \times \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ tal que $u(z, x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}((G \circ F)(x), z)$. Sea $s = r \times_{\mathcal{D}} t$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
s(z,x) &= \left(\bigsqcup_{y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} r(z,y) \times t(y,x) \right) / \sim \\
&= \left(\bigsqcup_{y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(G(y), z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \right) / \sim .
\end{aligned}
$$

Sea $\varphi : s \longrightarrow u$ tal que, a nivel de básicos, $\varphi([w, v]) = w \circ G(v)$. Veamos que de esta manera está bien definido. Supongamos que $[w, v] = [w', v']$, entonces existe $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$ tal que $(w, v) = (a\beta, v)$ y $(w', v') = (a, \beta v)$ para algún $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(G(y'), z)$.

Por un lado, note que $[a\beta, v] = [a \circ G(\beta), v]$, así que $\varphi([w, v]) = \varphi([a\beta, v]) = a \circ G(\beta) \circ G(v)$. Por otro lado, $[a, \beta v] = [a, \beta \circ v]$ por lo que $\varphi([w', v']) = \varphi([a, \beta v]) = a \circ G(\beta \circ v)$ que, como G es funtor, respeta composiciones, es decir, $\varphi([w, v]) = \varphi([w', v'])$. Por lo tanto, φ está bien definido. Veamos que es una transformación natural en ambas entradas.

Consideremos primero $\alpha : z \longrightarrow z'$ un morfismo en $\mathcal{E}$ y el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
s(z,x) \arrow[r, "\varphi_{z,x}"] \arrow[d, "s(\alpha,x)"'] & u(z,x) \arrow[d, "u(\alpha,x)"] \\
s(z',x) \arrow[r, "\varphi_{z',x}"'] & u(z',x)
\end{tikzcd}
$$

Sea $[w, v] \in s(z, x)$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
(u(\alpha,x) \circ \varphi_{z,x})([w,v]) &= u(\alpha,x)(w \circ G(v)) \\
&= \alpha_*(w \circ G(v)) \\
&= \alpha \circ (w \circ G(v)) \\
&= (\alpha \circ w) \circ G(v) \\
&= \varphi_{z',x}([\alpha \circ w, v]) \\
&= \varphi_{z',x}([\alpha w, v]) \\
&= \varphi_{z',x}(s(\alpha,x)([w,v])).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $u(\alpha, x) \circ \varphi_{z,x} = \varphi_{z',x} \circ s(\alpha, x)$. Es decir, es natural en la primera entrada. Para ver que es natural en la segunda entrada, consideremos $\gamma : x \longrightarrow x'$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
s(z,x') \arrow[r, "\varphi_{z,x'}"] \arrow[d, "s(z,\gamma)"'] & u(z,x') \arrow[d, "u(z,\gamma)"] \\
s(z,x) \arrow[r, "\varphi_{z,x}"'] & u(z,x)
\end{tikzcd}
$$

Sea $[w,v] \in s(z,x')$, entonces

$$\begin{aligned}(u(z,\gamma)\circ\varphi_{z,x'})([w,v]) &= u(z,\gamma)(w\circ G(v))\\ &= (G\circ F)(\gamma)^*(w\circ G(v))\\ &= w\circ G(v)\circ (G\circ F)(\gamma)\\ &= w\circ G(v\circ F(\gamma))\\ &= \varphi_{z,x}([w, v\circ F(\gamma)])\\ &= \varphi_{z,x}([w, v\gamma])\\ &= \varphi_{z,x}(s(z,\gamma)([w,v])).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(z,\gamma)\circ\varphi_{z,x'} = \varphi_{z,x}\circ s(z,\gamma)$. Es decir, es natural en la segunda entrada.

Por lo tanto, φ es una transformación natural. Demos su inverso. Para objetos $z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{E})$ y $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, sea $\zeta : u \longrightarrow s$ tal que $\zeta_{z,x}(w) = [w, 1_{F(x)}]$. Note que está bien definido. Además, observe que $[w,v] = [wv, 1_{F(x)}] = [w\circ G(v), 1_{F(x)}]$ pues $wv = r(1,v)(w) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}\,(G(v),1)\,(w) = w\circ G(v)$.

Con esto, $(\zeta_{z,x}\circ\varphi_{z,x})([w,v]) = \zeta_{z,x}(w\circ G(v)) = [w\circ G(v), 1_{F(x)}] = [w,v]$ y $(\varphi_{z,x}\circ \zeta_{z,x})(w) = \varphi_{z,x}([w,1_{F(x)}]) = w\circ G(1_{F(x)}) = w\circ 1_{(G\circ F)(x)} = w$.

Por lo tanto, φ es isomorfismo natural. $\square$

La siguiente proposición nos dice que las construcciones de biconjuntos a partir de funtores son funtoriales, y determina cuándo dos funtores entre categorías nos dan biconjuntos isomorfos.

Proposición 3.20. *1. Existe un funtor covariante $\phi : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathbb{B}_R$ definido en objetos como la identidad y, si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un morfismo en* Cat, *$\phi(F) = {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. También se tiene un funtor contravariante $\widehat{\phi} : \mathrm{Cat}^{op} \longrightarrow \mathbb{B}_R$ definido, de nuevo, como la identidad en objetos y con $\widehat{\phi}(F) = {}_{\mathcal{C}^F}\mathcal{D}_{\mathcal{D}}$.*

2. Bajo estos funtores ϕ y $\widehat{\phi}$, dos funtores $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dan lugar al mismo morfismo en $\mathbb{B}_R$ si y sólo si F y G son naturalmente isomorfos.

Demostración. Sólo describiremos el caso de ϕ, para $\widehat{\phi}$ se hacen razonamientos similares.

1. Por hipótesis, si $\mathcal{C}$ es una categoría finita, $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Y si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor, $\phi(F) = {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}}$. Si $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ es otro funtor, por el Lema 3.19 tendremos que
$$\phi(G)\circ\phi(F) = {}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G_{\mathcal{D}}} \times_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}} \cong {}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{G\circ F_{\mathcal{C}}} = \phi(G\circ F)$$
y, si $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $\phi(1_{\mathcal{C}}) = {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{1_{\mathcal{C}}\mathcal{C}} \cong {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$. Como consideramos clases de isomorfismo de biconjuntos en $\mathbb{B}_R$, ϕ preserva composiciones e identidades, por lo que es un funtor.

2. ($\Longleftarrow$) Es claro.

   ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\phi(F) = \phi(G)$, es decir, ${}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F_{\mathcal{C}}} \cong {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{G_{\mathcal{C}}}$, entonces existe un isomorfismo $\theta_{x,y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(x),y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(G(x),y)$ natural para cada $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y cada $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$. Fijemos x objeto de $\mathcal{C}$.

En particular, tenemos un isomorfismo

$$\theta_{x,G(x)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), G(x))$$

tal que un elemento $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$ se corresponde con $1_{G(x)}$. Sea $\alpha : x \longrightarrow x'$ en $\mathcal{C}$. Veamos que dicho η_x es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(x) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(x') \arrow[r, "\eta_{x'}"'] & G(x') \end{tikzcd}$$

es decir, $G(\alpha) \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ F(\alpha)$. Sabemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x'), G(x')) \arrow[r, "\theta_{x',G(x')}"] \arrow[d, "F(\alpha)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x'), G(x')) \arrow[d, "G(\alpha)^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x')) \arrow[r, "\theta_{x,G(x')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), G(x')) \end{tikzcd}$$

así que como $\eta_{x'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x'), G(x'))$ el cual se corresponde con $1_{G(x')}$, se tiene que $G(\alpha) = \theta_{x,G(x')}(\eta_{x'} \circ F(\alpha))$. Por otra parte, el siguiente diagrama también conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x)) \arrow[r, "\theta_{x,G(x)}"] \arrow[d, "G(\alpha)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), G(x)) \arrow[d, "G(\alpha)_*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x')) \arrow[r, "\theta_{x,G(x')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), G(x')) \end{tikzcd}$$

y como $\eta_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x))$ el cual se corresponde con $1_{G(x)}$, se tiene que $G(\alpha) = \theta_{x,G(x')}(G(\alpha)\circ\eta_x)$. Es decir, $\theta_{x,G(x')}(\eta_{x'}\circ F(\alpha)) = \theta_{x,G(x')}(G(\alpha)\circ\eta_x)$. Como $\theta_{x,G(x')}$ es un isomorfismo, en particular es inyectivo. Por lo tanto, $G(\alpha) \circ \eta_x = \eta_{x'}\circ F(\alpha)$. Así, el diagrama conmuta y $\eta : F \longrightarrow G$ es una transformación natural.

Demos el inverso. Consideremos

$$\theta_{x,F(x)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(x)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), F(x))$$

que es un isomorfismo tal que $1_{F(x)}$ se corresponde con un morfismo $\gamma_x : G(x) \longrightarrow F(x)$. Veamos que $\eta_x\circ\gamma_x = 1_{G(x)}$ y $\gamma_x\circ\eta_x = 1_{F(x)}$. Tomemos el siguiente diagrama, el cual sabemos que es conmutativo pues θ es transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(x)) \arrow[r, "\theta_{x,F(x)}"] \arrow[d, "(\eta_x)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), F(x)) \arrow[d, "(\eta_x)_*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x)) \arrow[r, "\theta_{x,G(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), G(x)) \end{tikzcd}$$

Note que, por un lado, $(\eta_x)_*(\theta_{x,F(x)}(1_{F(x)})) = (\eta_x)_*(\gamma_x) = \eta_x \circ \gamma_x$. Por otro lado, $\theta_{x,G(x)}((\eta_x)_*(1_{F(x)})) = \theta_{x,G(x)}(\eta_x \circ 1_{F(x)}) = \theta_{x,G(x)}(\eta_x) = 1_{G(x)}$. Es decir, $\eta_x \circ \gamma_x = 1_{G(x)}$. Para la otra igualdad se usa un diagrama análogo.

Por lo tanto, η_x y γ_x son inversos, por lo que son isomorfismos. Y como ya hemos visto que η es natural, se sigue que η es un isomorfismo natural. Por lo tanto, F y G son naturalmente isomorfos. $\square$

Corolario 3.21. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías finitas. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías equivalentes, entonces son isomorfas en $\mathbb{B}_R$.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes, existen $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores tales que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$ naturalmente. Por la Proposición 3.20, note que los biconjuntos ${}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{G\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ son inversos en $\mathbb{B}_R$ pues

$${}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}} {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{G\mathcal{D}} \cong {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F\circ G\mathcal{D}} \cong {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{\mathcal{D}}$$

y

$${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{G\mathcal{D}} \times_{\mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{F\mathcal{C}} \cong {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{G\circ F\mathcal{C}} \cong {}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}.$$

$\square$

3.2 Clases especiales de biconjuntos

En la teoría de funtores de biconjuntos definidos en grupos, es útil restringir los tipos de biconjuntos que aparecen, pues algunos funtores de biconjuntos importantes no están definidos en todos los biconjuntos.

Una condición natural cuando estamos considerando grupos es tomar en cuenta solamente biconjuntos donde los estabilizadores en cada lado se quedan en clases específicas de subgrupos.

En [14] se consideraron biconjuntos libres en restricción por ambos lados y a un solo lado, pues la cohomología de grupos no está definida en biconjuntos arbitrarios, y al desarrollar la teoría en este contexto se hizo una aplicación al cálculo de la cohomología de grupos en dicho artículo. Además, en [4] se consideraron restricciones generales de los estabilizadores en los biconjuntos.

En el caso de los biconjuntos para categorías, ya no tiene sentido hablar de estabilizadores de elementos, así que sustituimos la condición de los estabilizadores por una que tenga sentido en este contexto.

3.2.1 Representabilidad para $\mathcal{C}$-conjuntos

Definición 3.22.

1. Decimos que un $\mathcal{C}$-conjunto es *representable* si es isomorfo a una unión ajena de conjuntos de la forma $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_)$ para algunos objetos x de $\mathcal{C}$.

2. Un $\mathcal{C}$-conjunto Ω es *representablemente generado por* $\omega \in \Omega(x)$ si y sólo si la transformación natural
$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \Omega$$
definida de forma que para cualquier objeto y de $\mathcal{C}$ y cualquier $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, $\eta_y(\alpha) = \Omega(\alpha)(\omega)$, es un isomorfismo. Es decir, η definida de esta manera es un isomorfismo natural.

3. Decimos que Ω es *representable en* $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ si es una unión ajena de $\mathcal{C}$-conjuntos representablemente generados por algunos elementos de $\Omega(x)$.

Proposición 3.23. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría finita y conexa y sean $x, w \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$.*

1. *El funtor representable $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$ está representablemente generado en z por $f : x \longrightarrow z$ si y sólo si f es isomorfismo. En particular, el funtor representable $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$ está representablemente generado en x por 1_x.*

2. *Los funtores representables $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, \_)$ son isomorfos si y sólo si x y w son isomorfos como objetos en $\mathcal{C}$.*

3. *Las clases de isomorfismo de $\mathcal{C}$-conjuntos representables transitivos son representados por los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$ donde los $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ son tomados hasta isomorfismo.*

Demostración. 1. Usaremos el Teorema de Inmersión de Yoneda ([11], Corollary 2.2.8), que dice que si $Y : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C} - \mathrm{Set}$ es un funtor tal que para cada objeto c de $\mathcal{C}$, $Y(c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(c, \_)$ y a cada flecha $\alpha : c \longrightarrow d$ en $\mathcal{C}$ la manda a una transformación natural cuyas componentes son obtenidas por postcomposición, entonces éste es un encaje. En particular, Y es fiel.

Como η es isomorfismo natural, existe $\eta^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, \_)$ tal que $\eta \circ \eta^{-1} = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)}$ y $\eta^{-1} \circ \eta = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\_)}$. Sea $g : z \longrightarrow x$. Observe que $Y(g \circ f) = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)} = Y(1_x)$ pues Y es funtor. Como es fiel, se tiene que $g \circ f = 1_x$. Análogamente, $Y(f \circ g) = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\_)} = Y(1_z)$ implica que $f \circ g = 1_z$. Por lo tanto, f es isomorfismo.

Recíprocamente, supongamos que f es un isomorfismo. Recordemos que $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$ es un isomorfismo natural tal que, para cada $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\eta_y(\alpha) = \alpha \circ f$.

Sea $\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, \_)$ tal que, para cada $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\theta_y(\alpha) = \alpha \circ f^{-1}$. Note que θ_y está bien definida pues f es isomorfismo. Veamos que es transformación natural. Sean $y, y' \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\alpha : y \longrightarrow y'$ morfismo en $\mathcal{C}$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y) \arrow[r, "\theta_y"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\alpha)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\alpha)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y') \arrow[r, "\theta_{y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, y')
\end{tikzcd}$$

Sea $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, \alpha) \circ \theta_y)(\beta) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z, \alpha)\,(\beta \circ f^{-1}) \\
&= \alpha \circ (\beta \circ f^{-1}) \\
&= (\alpha \circ \beta) \circ f^{-1} \\
&= \theta_{y'}(\alpha \circ \beta) \\
&= (\theta_{y'} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \alpha))(\beta)
\end{aligned}$$

Así, θ es transformación natural.

Observe que $(\theta_y \circ \eta_y)(\alpha) = \theta_y(\alpha \circ f) = (\alpha \circ f) \circ f^{-1} = \alpha$ y que $(\eta_y \circ \theta_y)(\alpha) = \eta_y(\alpha \circ f^{-1}) = (\alpha \circ f^{-1}) \circ f = \alpha$, y esto pasa para todo $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Así, θ_y es inverso de η_y, por lo que η_y es isomorfismo. Como esto pasa para todo objeto de $\mathcal{C}$, se sigue que η es un isomorfismo natural.

2. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, \_)$, entonces existen isomorfismos naturales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \underset{\theta}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, \_)$, por lo que en particular $\eta_x : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, x)$ con $\eta_x(1_x) = g$ y $\theta_w : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, w) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, w)$ con $\theta_w(1_w) = f$ son isomorfismos.

   Por la naturalidad de θ, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, w) \arrow[r, "\theta_w"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, w) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,g)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, x) \arrow[r, "\theta_x"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, x)
\end{tikzcd}$$

   Entonces, por una parte,

$$(\theta_x \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, g))(1_w) = \theta_x(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, g)\,(1_w)) = \theta_x(\eta_x(1_x)) = 1_x$$

   y, por otra parte,

$$(\theta_x \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, g))(1_w) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, g) \circ \theta_w)(1_w) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, g)\,(f) = g \circ f.$$

   Es decir, $g \circ f = 1_x$. Y por la naturalidad de η, haciendo el mismo procedimiento que antes, tenemos que $f \circ g = 1_w$. Se sigue entonces que $x \cong w$.

   ($\Longleftarrow$) Supongamos que x y w son objetos isomorfos en $\mathcal{C}$. Entonces existen $x \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} w$ tales que $\alpha \circ \beta = 1_w$ y $\beta \circ \alpha = 1_x$. Definimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \xrightarrow{\ \eta\ } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, \_) \xrightarrow{\ \theta\ } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_)$$

   tales que, para cada $a \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $\eta_a : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, a)$ es tal que $\eta_a(f) = f \circ \beta$ y $\theta_a : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, a)$ es tal que $\theta_a(g) = g \circ \alpha$.

   Note que están bien definidas. Veamos que son naturales y que son inversos. Sea $\ell : a \longrightarrow b$ morfismo en $\mathcal{C}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, a) \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ell)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, a) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\ell)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, a) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ell)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, b) \arrow[r, "\eta_b"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w, b) \arrow[r, "\theta_b"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, b)
\end{tikzcd}$$

Sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,a)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\ell)\circ\eta_a)(h) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\ell)(h\circ\beta)\\ &= \ell\circ(h\circ\beta)\\ &= (\ell\circ h)\circ\beta\\ &= \eta_b(\ell\circ h)\\ &= (\eta_b\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ell))(h).\end{aligned}$$

Para la conmutatividad del segundo cuadrado se hace un razonamiento análogo. Por lo tanto, η y θ son transformaciones naturales. Ahora, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,a)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,a)$,

$$(\eta\circ\theta)_a(g) = \eta_a(\theta_a(g)) = \eta_a(g\circ\alpha) = g\circ\alpha\circ\beta = g\circ 1_w = g = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,a)}(g)$$

y

$$(\theta\circ\eta)_a(f) = \theta_a(\eta_a(f)) = \theta_a(f\circ\beta) = f\circ\beta\circ\alpha = f\circ 1_x = f = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,a)}(f).$$

Por lo tanto, η y θ son isomorfismos naturales y, así, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\_)$.

3. Sabemos por el primer inciso de esta proposición que cada $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)$ está generado por 1_x, así que es transitivo por el Corolario 1.17.

   Sea Ω un $\mathcal{C}$-conjunto representable transitivo. Por definición de representabilidad,

   $$\Omega \cong \coprod_{\text{p. a. } x\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)$$

   pero, como es transitivo, $\Omega \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)$ para algún $x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

   Así, al tomar clases de isomorfismo de $\mathcal{C}$-conjuntos representables transitivos, podemos escoger como representante a algún $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)$ y, por el segundo inciso de esta proposición, tenemos que los representantes de cada $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\_)$ son únicos hasta isomorfismo. $\square$

Ejemplo 3.24. Es posible que un $\mathcal{C}$-conjunto representable $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\_)$ pueda ser generado en otro objeto $x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $x \ncong w$. Sin embargo, del inciso 2 de la Proposición 3.23 se sigue que el funtor no puede ser representablemente generado en x.

Consideremos la categoría

$$\mathcal{C}_Q = \quad \begin{tikzcd} w \arrow[r, bend left, "\beta"] & x \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

tal que $\gamma\circ\beta = 1_w, \alpha\circ\beta = \beta, \gamma\circ\alpha = \gamma$ y $\alpha^2 = 1_x$.

De ahí que $(\beta\circ\gamma)^2 = \beta\circ\gamma$. Además, $(\beta\circ\gamma)\circ\alpha = \alpha\circ(\beta\circ\gamma)$.

El funtor representable $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(w, \_)$ es representablemente generado en w; también es generado en x por $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(w, x)$, pero note que no es representablemente generado en x por β.

La transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(x, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(w, \_)$ tal que $\zeta \longmapsto \zeta \circ \beta$ es suprayectiva, pues si $\delta : w \longrightarrow z$ es morfismo, entonces $\delta \circ \gamma \longmapsto (\delta \circ \gamma) \circ \beta = \delta \circ (\gamma \circ \beta) = \delta$. Sin embargo, no es inyectiva pues $\alpha \circ \beta = \beta = 1_x \circ \beta$ pero $\alpha \neq 1_x$.

Proposición 3.25. *Sea* $\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ *un* $\mathcal{C}$*-conjunto y* $f \in \Omega(x)$ *para algún* $x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*. Son equivalentes:*

1. Ω *es representablemente generado en* x *por* f.
2. *Para todo objeto* $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *y todo* $u \in \Omega(y)$ *existe un único morfismo* $\alpha : x \longrightarrow y$ *tal que* $u = \Omega(\alpha)(f)$.
3. *Como funtores* $\mathcal{C} - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Set}$*, tenemos que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \_)$ *es isomorfo a* ev_x*, donde* $ev_x(P) := P(x)$ *es la evaluación en* x*, y bajo el isomorfismo dado* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \Omega) \cong \Omega(x)$*, los elementos* 1_Ω *y* $f \in \Omega(x)$ *se corresponden.*

Demostración. ($1 \implies 2$) Supongamos que Ω es representablemente generado en x por f. Entonces existe un isomorfismo natural $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \Omega$ tal que para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\eta_y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \Omega(y)$, $\eta_y(\alpha) = \Omega(\alpha)(f)$ es isomorfismo. Sea $u = \Omega(\alpha)(f)$.

Como η_y en particular es suprayectiva, para cada $u \in \Omega(y)$ existe $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$ tal que $u = \Omega(\alpha)(f)$. Y esto pasa para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Ahora, supongamos que existe $\beta : x \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\Omega(\beta)(f) = u = \Omega(\alpha)(f)$. Entonces $\eta_y(\alpha) = \eta_y(\beta)$. Como η_y es isomorfismo, se sigue que $\alpha = \beta$. Es decir, el morfismo α es único.

($2 \implies 1$) Para ver que Ω es representablemente generado por f en x, veamos que $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo natural, con cada componente definida como $\eta_y(\alpha) = \Omega(\alpha)(f)$ para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Veamos primero que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[r, "\eta_y"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ell)"'] & \Omega(y) \arrow[d, "\Omega(z)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \arrow[r, "\eta_z"'] & \Omega(z)
\end{tikzcd}$$

Note que si $\alpha : x \longrightarrow y$, $(\Omega(\ell) \circ \eta_y)(\alpha) = \Omega(\ell)(\eta_y(\alpha)) = \Omega(\ell)(\Omega(\alpha)(f)) = \Omega(\ell \circ \alpha)(f) = \eta_z(\ell \circ \alpha) = \eta_z(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \ell)(\alpha)) = (\eta_z \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \ell))(\alpha)$. Es decir, el cuadrado conmuta y por tanto η es transformación natural.

Ahora, para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y cada $u \in \Omega(y)$, tenemos que existe $\alpha : x \longrightarrow y$ tal que $u = \Omega(\alpha)(f)$, por lo que $\eta_y(\alpha) = \Omega(\alpha)(f) = u$. Así, η_y es suprayectivo.

Además, dicho α es único, lo que implica que η_y es inyectivo. Así, para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, η_y es un isomorfismo. Se sigue que η es un isomorfismo natural.

($1 \implies 3$) Por hipótesis, sabemos que $\eta : \Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_)$ es un isomorfismo natural, así que este mismo isomorfismo nos ayuda a ver que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \_)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \_)$ son naturalmente isomorfos.

Luego, por el Lema de Yoneda, si Ψ es un $\mathcal{C}$-conjunto, se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \Psi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \Psi) \cong \Psi(x) = ev_x(\Psi)$$

(mediante la componente Ψ-ésima del isomorfismo natural Y dado por el Lema de Yoneda) y, como esto pasa para cada $\mathcal{C}$-conjunto Ψ, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \_) \cong ev_x$.

Ahora, si esta composición de isomorfismos la evaluamos en Ω, tenemos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\eta,\Omega)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \Omega) \xrightarrow{Y_\Omega} \Omega(x)$$

y es tal que

$$1_\Omega \longmapsto (\alpha \mapsto \Omega(\alpha)(f)) \longmapsto \Omega(\alpha)(f).$$

Así que, si tomamos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ y $\alpha = 1_x$, tendremos que

$$1_\Omega \longmapsto \Omega(1_x)(f) = 1_{\Omega(x)}(f) = f$$

por lo que 1_Ω y f se corresponden.

($3 \implies 1$) Supongamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \_) \cong ev_x$ naturalmente y que 1_Ω se corresponde con f. Sea Ψ un $\mathcal{C}$-conjunto. Observe que este isomorfismo natural nos dice que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \Psi) \cong ev_x(\Psi) = \Psi(x)$ y de esto último, por el Lema de Yoneda, se sigue que $\Psi(x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \Psi)$. Pero esto pasa para cada $\mathcal{C}$-conjunto Ψ. Entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \_) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \_).$$

Como el encaje de Yoneda es fiel, se sigue que $\Omega \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_)$.

Tenemos que ver que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \Omega$ tal que, para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\alpha \longmapsto \Omega(\alpha)(f)$ es isomorfismo natural. Para eso, retomemos la siguiente composición de isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\Omega, \Omega) \longrightarrow \Omega(x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_), \Omega).$$

Sabemos que $1_\Omega \longmapsto f$. Al dar la correspondencia inversa que da el Lema de Yoneda, tenemos que f se va a corresponder con una familia de morfismos de $\mathcal{C}$-conjuntos $\eta^f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \Omega$ dados como sigue: para cada $y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, sea $\eta^f_y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \Omega(y)$ tal que $\eta^f_y(\alpha) = \Omega(\alpha)(f)$. Entonces

$$1_\Omega \longmapsto f \longmapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \xrightarrow{\eta^f_y} \Omega(y)\right)_{y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$$

Como se trata de un isomorfismo natural, sabemos que esta correspondencia es biunívoca. Y note que η^f es un isomorfismo natural pues se corresponde vía isomorfismo con 1_Ω, el cual es un isomorfismo natural.

Por lo tanto, Ω es representablemente generado en x por f. □

Corolario 3.26. *Si el $\mathcal{C}$-conjunto Ω es representablemente generado tanto por $f \in \Omega(x)$ como por $g \in \Omega(y)$, entonces hay un isomorfismo $\alpha : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$ con $\Omega(\alpha)(f) = g$.*

Demostración. Como Ω es representablemente generado por $f \in \Omega(x)$, existe un único $\alpha : x \longrightarrow y$ tal que $g = \Omega(\alpha)(f)$. Por otra parte, como Ω es representablemente generado por $g \in \Omega(y)$, existe un único $\beta : y \longrightarrow x$ tal que $f = \Omega(\beta)(g)$.

Luego, $f = \Omega(\beta)(g) = \Omega(\beta)(\Omega(\alpha)(f)) = \Omega(\beta\circ\alpha)(f)$. Notemos que, de igual manera, $f = \Omega(1_x)(f)$. Por la unicidad del morfismo que nos asegura la proposición anterior, $\beta \circ \alpha = 1_x$. Análogamente tenemos que $\alpha \circ \beta = 1_y$. Esto nos dice entonces que α es un isomorfismo. $\square$

3.2.2 Representabilidad para biconjuntos

Ahora consideraremos biconjuntos representables. Dado un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$, podemos verlo como un $\mathcal{C}$-*conjunto izquierdo* ${}_{\mathcal{C}}\Omega$ y como un $\mathcal{D}$-*conjunto derecho* $\Omega_{\mathcal{D}}$ restringiendo las acciones correspondientes:

- Como un $\mathcal{C}$-conjunto izquierdo, su valor en un objeto $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ se define como

$$ {}_{\mathcal{C}}\Omega(x) = \bigsqcup_{y\in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \Omega(x, y) $$

- y, como un $\mathcal{D}$-conjunto derecho, su valor en un objeto $y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$ se define como

$$ \Omega_{\mathcal{D}}(y) = \bigsqcup_{x\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \Omega(x, y). $$

Definición 3.27. Decimos que un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-biconjunto ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$ es *representable por la izquierda* si el $\mathcal{C}$-conjunto izquierdo ${}_{\mathcal{C}}\Omega$ es representable, y *representable por la derecha* si el $\mathcal{D}$-conjunto derecho $\Omega_{\mathcal{D}}$ es representable (es decir, representable como $\mathcal{D}^{op}$-conjunto). ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$ es *birrepresentable* si es representable tanto por la izquierda como por la derecha.

Veremos que la composición de biconjuntos que son representables por un lado también es representable por ese mismo lado.

Lema 3.28. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ categorías finitas y ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$, ${}_{\mathcal{D}}\Psi_{\mathcal{E}}$ biconjuntos. Supongamos que $\widehat{u} \in \Omega(x, y)$ genera representablemente a su $\mathcal{C}$-órbita $\mathcal{C}\widehat{u}$ como $\mathcal{C}$-conjunto. Si $\widehat{v} \in \Psi(y, z)$ y $[\widehat{u}, \widehat{v}] \in (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, z)$, entonces para cada $x' \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,*

$$ \mathcal{C}[\widehat{u}, \widehat{v}](x') = \{[\ell\widehat{u}, \widehat{v}] \mid \ell \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, x')\}\,. $$

Demostración. Como $\widehat{u}$ genera representablemente a $\mathcal{C}\widehat{u}$, entonces existe un isomorfismo natural $\eta^{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x, \_) \longrightarrow \mathcal{C}\widehat{u}$ tal que para cada $x' \in \mathcal{C}\widehat{u}$, $\eta^{\mathcal{C}}_{x'}(\ell) = \Omega(\ell, 1_y)(\widehat{u}) = \ell\widehat{u}$.

Sea $\alpha : x \rightsquigarrow x'$ una caminata en $\mathcal{C}$, entonces definimos

$$ (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\overline{\alpha}, 1_z) : (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x, z) \longrightarrow (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(x', z) $$

tal que $[w, r] \longmapsto [\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(w), r]$. Note que la imagen es un conjunto.

$\supseteq$) Sea $\ell : x \longrightarrow x'$ morfismo en $\mathcal{C}$. Note que

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x') &= \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow x' \\ \alpha}} (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\overline{\alpha}, 1_z)([\widehat{u},\widehat{v}]) \\ &= \bigcup_{\substack{x \rightsquigarrow x' \\ \alpha}} [\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}]\end{aligned}$$

Así, si consideramos $[\Omega(\ell, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}]$, entonces éste es un uniendo de $(\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x')$, el cual note que consta de un solo elemento.

$\subseteq$) Sea $\alpha : x \rightsquigarrow x'$ caminata en $\mathcal{C}$. Entonces

$$(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\overline{\alpha}, 1_z)([\widehat{u},\widehat{v}]) = [\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}]$$

pero note que $\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(\widehat{u}) \in \mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}]$, así que por hipótesis existe $\ell : x \longrightarrow x'$ morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(\widehat{u}) = \Omega(\ell, 1_y)(\widehat{u}) = \ell u$ por ser la órbita representablemente generada por $\widehat{u}$.

Así, $[\Omega(\overline{\alpha}, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}] = [\ell\widehat{u}, \widehat{v}] \in \{[\ell\widehat{u}, \widehat{v}] \mid \ell \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')\}$. □

Lema 3.29. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ categorías finitas y ${}_{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{D}}$, ${}_{\mathcal{D}}\Psi_{\mathcal{E}}$ biconjuntos. Sea $k \in \Psi(y, z)$ tal que su $\mathcal{D}$-órbita $\mathcal{D}k$ es representablemente generada por k como $\mathcal{D}$-conjunto. Sean $w \in \Omega(x, y)$, $w' \in \Omega(x, y')$ y $k' \in \Psi(y', z)$. Entonces $[w, k] = [w', k']$ si y sólo si existe $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(y, y')$ tal que $k' = tk$ y $w = w't$.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Es claro.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $[w, k] = [w', k']$. Entonces $(w, k) = (a\beta, k)$ y $(w', k') = (a, \beta k)$ para algún $a \in \Omega(x, y')$ y $\beta : y \rightsquigarrow y'$ caminata en $\mathcal{D}$. Entonces $k' = \beta k \in \mathcal{D}k$, por lo que existe $t : y \longrightarrow y'$ morfismo en $\mathcal{D}$ único tal que $\beta k = tk$, i.e., $k' = tk$. Además, $a = w'$ por lo que al sustituir tenemos que $(w, k) = (w'\beta, k)$ y $(w', k') = (w', \beta k) = (w', tk) \sim (w't, k)$. Es decir, $(w, k) \sim (w't, k)$, lo que implica que existe $\gamma : y \rightsquigarrow y$ caminata en $\mathcal{D}$ tal que $(w, k) = (w''\gamma, k)$ y $(w't, k) = (w'', \gamma k)$ para algún $w'' \in \Omega(x, y)$. Se tiene entonces que $k = \gamma k$ y como k genera representablemente a $\mathcal{D}k$, se sigue que $\gamma = 1_y$. Con esto, $w = w'' = w't$. □

Teorema 3.30. *Sean $\widehat{u} \in \Omega(x, y)$ y $\widehat{v} \in \Psi(y, z)$ que representablemente generan a sus órbitas bajo $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Entonces en $\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi$ la clase de equivalencia $[\widehat{u},\widehat{v}]$ genera representablemente a su $\mathcal{C}$-órbita.*

Demostración. Queremos un isomorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_)$ y $\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}]$. Sea $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \_) \longrightarrow \mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}]$ tal que para cada $x' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\eta_{x'}(\ell) = [\ell\widehat{u}, \widehat{v}] = (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\ell, 1_z)([\widehat{u},\widehat{v}]).$$

Note que este morfismo está bien definido y es suprayectivo.

Notemos primero lo siguiente: sea $\beta : x' \longrightarrow x''$ morfismo en $\mathcal{C}$ y consideremos el morfismo

$$(\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x') \xrightarrow{\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}](\beta)} (\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x'').$$

Note que dicho morfismo es tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}](\beta)(c) &= (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\beta, 1_z)(c)\\ &\in (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\beta, 1_z)(\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\overline{\gamma}, 1_z)([\widehat{u},\widehat{v}])\\ &= (\Omega \times_{\mathcal{D}} \Psi)(\overline{\beta\gamma}, 1_z)([\widehat{u},\widehat{v}])\\ &\subseteq (\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x'')\end{aligned}$$

pues $\beta\gamma$ es una caminata de x a x'' en $\mathcal{C}$.

Veamos que η es transformación natural: sea $\beta : x \longrightarrow x''$ en $\mathcal{C}$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x') \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "\beta_*"'] & (\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x') \arrow[d, "(\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(\beta)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x'') \arrow[r, "\eta_{x''}"'] & (\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(x'')
\end{tikzcd}$$

Note que, por un lado,

$$\begin{aligned}((\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(\beta) \circ \eta_{x'})(\ell) &= (\mathcal{C}[\widehat{u},\widehat{v}])(\beta)([\Omega(\ell, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}])\\ &= [\Omega(\beta, 1_y)\Omega(\ell, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}]\\ &= [\Omega(\beta \circ \ell, 1_y)(\widehat{u}), \widehat{v}]\\ &= \eta_{x''}(\beta \circ \ell)\\ &= (\eta_{x''} \circ \beta_*)(\ell)\end{aligned}$$

y como esto pasa para cualquier $\ell \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$, se tiene que el diagrama conmuta. Por lo tanto, η es transformación natural.

Para la inyectividad, supongamos que $\ell, \ell' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$ son tales que $[\ell\widehat{u}, \widehat{v}] = [\ell'\widehat{u}, \widehat{v}]$. Por el Lema 3.29 tenemos que, como $\widehat{v}$ genera representablemente a $\mathcal{D}\widehat{v}$, entonces $\widehat{v} = t\widehat{v}$ para algún $t : y \longrightarrow y$ morfismo en $\mathcal{D}$. Como dicho morfismo t es único, se sigue que $t = 1_y$. De ahí que $\ell\widehat{u} = \ell'\widehat{u}t = \ell'\widehat{u}$ y, como $\widehat{u}$ genera representablemente a $\mathcal{C}\widehat{u}$, se tiene que $\ell = \ell'$.

Así, se tiene que η es un isomorfismo natural. □

Capítulo 4

Correspondencias y biconjuntos

En este capítulo describimos una forma en la que la teoría de correspondencias de S. Bouc y J. Thévenaz, dada en [6], encaja con la teoría de funtores de biconjuntos sobre categorías, introducida en el Capítulo 3.

Definición 4.1. Dados X y Y conjuntos finitos, una *correspondencia* de X a Y es un subconjunto del producto cartesiano $Y \times X$.

Note que no estamos tomando un subconjunto de $X \times Y$, como se esperaría. El orden se invierte para tener en cuenta el hecho de que componemos morfismos por la izquierda.

Si $X = Y$, a las correspondencias les llamamos *relaciones*.

Dadas correspondencias $S \subseteq Z \times Y$ y $T \subseteq Y \times X$, la composición de S y T está dada por

$$ST = \{(z, x) \in Z \times X \mid \text{ existe } y \in Y \text{ tal que } (z, y) \in S, (y, x) \in T\}.$$

Esta composición es asociativa y los subconjuntos diagonales

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

actúan como identidades.

Con esta información, formamos entonces una categoría $\mathcal{K}$ como sigue:

- En objetos: $\mathrm{Obj}(\mathcal{K})$ consta de los conjuntos finitos.
- En morfismos: si X, Y son objetos de $\mathcal{K}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ es el conjunto de correspondencias de X a Y.
- La composición de la categoría es la composición de correspondencias.

Ahora que tenemos esta categoría, podemos definir lo siguiente.

Definición 4.2. Dado un anillo conmutativo R, un *funtor de correspondencias sobre* R es una representación de $\mathcal{K}$ sobre R, a saber, un funtor $\mathcal{K} \longrightarrow R\text{-Mód}$.

De manera equivalente, podemos forma la linealización $R\mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ ([6], Definition 2.1), con objetos los objetos de $\mathcal{K}$ y, para cualesquiera objetos X, Y de $R\mathcal{K}$, el conjunto de morfismos de X a Y es el R-módulo libre $R\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ con $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ como base. La composición de morfismos en $R\mathcal{K}$ es la extensión R-bilineal

$$R\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(Y,Z) \times R\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y) \longrightarrow R\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Z)$$

de la composición en $\mathcal{K}$.

Con esto, un funtor de correspondencias es ahora un funtor R-lineal $R\mathcal{K} \longrightarrow R$-Mód, es decir, es una R-representación de $\mathcal{K}$.

Para los siguientes resultados consideraremos a los copos como categorías en la forma usual: los objetos de la categoría son los elementos del copo y, si a, a' son dos objetos en dicha categoría, habrá un único morfismo $a \longrightarrow a'$ si y sólo si $a \leq a'$, con $\leq$ el orden en el copo.

Definición 4.3. Para cada conjunto X, sea $X^\dagger$ el copo de subconjuntos de X dado por la inclusión. Para cada correspondencia $S \subseteq Y \times X$, tenemos una función $S^\dagger : X^\dagger \longrightarrow Y^\dagger$ definida como sigue: para cada $A \in X^\dagger$,

$$S^\dagger(A) = \{y \in Y \mid \exists\,(y,x) \in S : x \in A\}\,.$$

Recordemos que Cat denota a la categoría de todas las categorías pequeñas y funtores entre ellas. Esta es una categoría localmente pequeña, más no pequeña. Note que un copo visto como categoría es una categoría pequeña.

Proposición 4.4. *La operación † definida anteriormente es un funtor que encaja la categoría de correspondencias $\mathcal{K}$ en* Cat*. En particular, para cada conjunto X, el monoide de relaciones se encaja en el monoide de los morfismos de orden $X^\dagger \longrightarrow X^\dagger$.*

Demostración. Sean $S \subseteq Z \times Y$ y $T \subseteq Y \times X$ correspondencias con X, Y, Z conjuntos finitos. Veamos que $S^\dagger$ y $T^\dagger$ son morfismos de orden.

Sean $A, B \in X^\dagger$ tales que $A \subseteq B$. Sea $y \in T^\dagger(A)$, entonces existe $(y,x) \in T$ tal que $x \in A \subseteq B$, es decir, existe $(y,x) \in T$ tal que $x \in B$. De ahí que $y \in T^\dagger(B)$. Entonces $T^\dagger(A) \subseteq T^\dagger(B)$. Se usa un argumento análogo para $S^\dagger$.

Por lo tanto, para toda correspondencia S, $S^\dagger$ es morfismo de orden.

Veamos ahora que $(ST)^\dagger = S^\dagger T^\dagger$: sea $A \subseteq X$, entonces

$$\begin{aligned}(ST)^\dagger(A) &= \{z \in Z \mid \exists\,(z,x) \in ST : x \in A\}\\ &= \{z \in Z \mid \exists\, y \in Y, x \in A : (z,y) \in S, (y,x) \in T\}\\ &= \{z \in Z \mid \exists\,(z,y) \in S, (y,x) \in T : x \in A\}\\ &= \left\{z \in Z \mid \exists\,(z,y) \in S : y \in T^\dagger(A)\right\}\\ &= S^\dagger(T^\dagger(A)).\end{aligned}$$

Luego, observemos que si $A \in X^\dagger$,

$$\begin{aligned}\Delta_X^\dagger(A) &= \{x \in X \mid \exists\,(x,a) \in \Delta_X : a \in A\}\\ &= \{x \in X \mid a \in A, x = a\}\\ &= A.\end{aligned}$$

Tenemos entonces un funtor $\dagger : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ tal que en objetos, si $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{K})$, $X^\dagger$ es un copo visto como categoría y, si $S \subseteq Y \times X$ es una correspondencia de X a Y, $S^\dagger$ es morfismo de copos; el cual por lo anterior en efecto respeta composiciones y preserva identidades.

Afirmamos que $\dagger$ es un funtor fiel. Sean $S, T \subseteq Y \times X$ correspondencias tales que $S^\dagger = T^\dagger$. Entonces para cada singulete $\{x\} \subseteq X$, $S^\dagger(\{x\}) = T^\dagger(\{x\})$, por lo que si $(y, x) \in S$ entonces $y \in S^\dagger(\{x\}) = T^\dagger(\{x\})$, que implica que $(y, x) \in T$, y viceversa. Así, $S = T$.

Por último, afirmamos que $\dagger$ es inyectivo en objetos. Sean $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{K})$ tales que $X^\dagger = Y^\dagger$. Esto implica que los subconjuntos de X y Y son iguales, en particular $\{x_i\} = \{y_i\}$ para cada $x_i \in X$ y cada $y_i \in Y$, y como X y Y son conjuntos finitos, se sigue que $X = Y$.

En consecuencia, $\dagger$ es un funtor que encaja a $\mathcal{K}$ en Cat. $\square$

Observe que, a nivel de morfismos, $\dagger$ no es suprayectivo. Sea $f : X^\dagger \longrightarrow Y^\dagger$ morfismo de orden. Afirmamos que $\dagger$ es suprayectivo en morfismos si y sólo si para todo subconjunto $A \subseteq X$, $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(\{x\})$. Note que toda correspondencia $S \subseteq Y \times X$ cumple esta propiedad.

Supongamos que $\dagger$ es suprayectivo en morfismos. Sean $f : X^\dagger \longrightarrow Y^\dagger$ morfismo de orden y $A \subseteq X$. Entonces existe $S \subseteq Y \times X$ tal que $S^\dagger = f$. Entonces

$$f(A) = S^\dagger(A) = \bigcup_{x \in A} S^\dagger(\{x\}) = \bigcup_{x \in A} f(\{x\}).$$

Recíprocamente, supongamos que $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(\{x\})$ para todo $A \subseteq X$. Definimos $S \subseteq Y \times X$ tal que $S = \{(y, x) \mid \exists\, x \in A : y \in f(\{x\})\}$. Note que

$$\begin{aligned} S^\dagger(A) &= \{y \in Y \mid \exists\, x \in A : (y, x) \in S\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists\, x \in A : y \in f(\{x\})\} \\ &= \bigcup_{x \in A} f(\{x\}) \\ &= f(A) \end{aligned}$$

y note que esto pasa para cualquier subconjunto A de X, i.e., existe $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}\,(X, Y)$ tal que $S^\dagger = f$. Por tanto, $\dagger$ es suprayectivo en morfismos.

Sea R un anillo conmutativo con unidad. Hemos visto, en la Proposición 3.20, que hay un funtor $\phi : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathbb{B}_R$. Si lo componemos con $\dagger$ obtenemos un funtor $\phi\dagger : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{B}_R$. ϕ no es un encaje, pero veremos que, en efecto, encaja a la subcategoría de Cat cuyos objetos son los conjuntos potencia $X^\dagger$ con morfismos de la forma $S^\dagger$.

Proposición 4.5. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. El funtor $\phi\dagger : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{B}_R$ encaja la categoría de correspondencias $\mathcal{K}$ como subcategoría de la categoría de biconjuntos.*

Demostración. El funtor $\phi\dagger$ está definido como sigue:

- En objetos: si X es un objeto de $\mathcal{K}$, es decir, si X es un conjunto finito, $\phi\dagger$ lo manda al copo conjunto potencia $X^\dagger$, visto como categoría.

- En morfismos: si $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{K})$ y $S \subseteq Y \times X$ es una correspondencia, entonces $\phi \dagger (S) = {}_{Y^\dagger}{Y^\dagger}_{S^\dagger X^\dagger}$.

Note que el funtor $\phi\dagger$ es inyectivo en objetos pues $\dagger$ lo es y ϕ es la identidad en objetos.

Ahora, dos correspondencias $S_1, S_2 \subseteq Y \times X$ tienen igual imagen en $\mathbb{B}_R$ si y sólo si los biconjuntos a los que son mandados son isomorfos, es decir, ${}_{Y^\dagger}{Y^\dagger}_{S_1{}^\dagger X^\dagger} \cong {}_{Y^\dagger}{Y^\dagger}_{S_2{}^\dagger X^\dagger}$ como $(Y^\dagger, X^\dagger)$-biconjuntos, así que existe $f : Y^\dagger \longrightarrow Y^\dagger$ biyección de $(X^\dagger, Y^\dagger)$-biconjuntos, es decir, f es un isomorfismo natural.

Si evaluamos a f en $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, obtenemos

$$f_{A,B} : \operatorname{Hom}_{Y^\dagger}\left(S_1^\dagger(B), A\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{Y^\dagger}\left(S_2^\dagger(B), A\right)$$

que es biyección.

Si $A = S_1^\dagger(B)$ con B arbitrario, entonces en $\operatorname{Hom}_{Y^\dagger}\left(S_1^\dagger(B), S_1^\dagger(B)\right)$ hay un elemento, por lo que en $\operatorname{Hom}_{Y^\dagger}\left(S_2^\dagger(B), S_1^\dagger(B)\right)$ también hay un elemento. De ahí que $S_1^\dagger(B) \subseteq S_2^\dagger(B)$.

Y si $A = S_2^\dagger(B)$, por un argumento análogo (esto se puede pues $f_{A,B}$ es biyección) tenemos que $S_2^\dagger(B) \subseteq S_1^\dagger(B)$. Luego, $S_1^\dagger(B) = S_2^\dagger(B)$ y esto pasa para cualquier $B \subseteq Y$. De ahí que $S_1^\dagger = S_2^\dagger$.

Como $\dagger$ es fiel, se sigue que $S_1^\dagger = S_2^\dagger$. Así, $\phi\dagger$ es fiel y entonces $\mathcal{K}$ está incrustada en $\mathbb{B}_R$. $\square$

Bibliografía

[1] J.F. Adams, J.H. Gunawardena, and H. Miller. The Segal conjecture for elementary abelian p-groups. *Topology*, 24(4):435–460, 1985. doi:10.1016/0040-9383(85)90014-X. 45, 47

[2] Jean Benabou. Les Distributeurs. Rapport 33, Université Catholique de Louvain, Institut de Mathématique Pure et Appliquée, 1973. 45, 46

[3] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra*, volume 1 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994. doi:10.1017/CBO9780511525858. 45, 46, 49

[4] Serge Bouc. Foncteurs d'ensembles munis d'une double action. *Journal of Algebra*, 183(3):664–736, 1996. doi:10.1006/jabr.1996.0238. iv, 47, 55

[5] Serge Bouc. *Biset Functors for Finite Groups*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. iv

[6] Serge Bouc and Jacques Thévenaz. Correspondence functors and finiteness conditions. *Journal of Algebra*, 495:150–198, 2018. doi:10.1016/j.jalgebra.2017.11.010. v, 64, 65

[7] Marta Bunge. *Categories of Set-valued functors*. PhD thesis, Univ. of Pennsylvania, 1966. 45

[8] John Haigh. On the Möbius Algebra and the Grothendieck Ring of a Finite Category. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-21(1):81–92, 02 1980. doi:10.1112/jlms/s2-21.1.81. 49

[9] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer New York, 1 edition, 1978. doi:10.1007/978-1-4757-4721-8. 11

[10] J.P. May. Picard Groups, Grothendieck Rings, and Burnside Rings of Categories. *Advances in Mathematics*, 163(1):1–16, 2001. doi:10.1006/aima.2001.1996. 19

[11] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 1 edition, 2016. https://emilyriehl.github.io/files/context.pdf. 11, 27, 56

[12] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Cambridge University Press, 2 edition, 2011. doi:10.1017/CBO9781139058520. 43

[13] Peter Webb. Sets with an action of a category. Preprint, 2022. https://drive.matmor.unam.mx/s/TnEPHYFMGtEsBqM. iv, 12

[14] Peter Webb. Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 88(1):265–304, 1993. doi:10.1016/0022-4049(93)90030-W. 55

[15] Peter Webb. A guide to Mackey functors. In M. Hazewinkel, editor, *Handbook of Algebra*, volume 2, pages 805–836. North-Holland, 2000. iv

[16] Peter Webb. An Introduction to the Representations and Cohomology of Categories. In J. Thévenaz M. Geck, D. Testerman, editor, *Group Representation Theory*, pages 149–173. EPFL Press, 2007. 49

[17] Peter Webb. Biset functors for categories, 2023. arXiv:2304.06863, doi:10.48550/arXiv.2304.06863. iv

[18] Tomoyuki Yoshida. On the Burnside rings of finite groups and finite categories. *Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985)*, 11:337–353, 1987. 19