



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

USO DEL SUBESPACIO SIMÉTRICO PARA LA EVOLUCIÓN DE SISTEMAS
ATÓMICOS CERCANOS A NANOFIBRAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
WILLIAM EDUARDO ÁLVAREZ GIRÓN

TUTOR PRINCIPAL
DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN,
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS (IIMAS), UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA,
INSTITUTO DE FÍSICA (IF), UNAM

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA,
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES (ICN), UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, AGOSTO DE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice de notación

N	—	Número de partículas.
M	—	Número de excitaciones atómicas en el sistema.
\mathcal{H}_2	—	Espacio de Hilbert para una partículas de dos niveles.
$\mathcal{H}_2^{\otimes N}$	—	Espacio de Hilbert para N partículas de dos niveles.
$ \psi\rangle$	—	Ket ψ o estado vector ψ .
$\langle\psi $	—	Bra ψ o dual de $ \psi\rangle$.
\hat{A}	—	Operador A .
\mathcal{L}_4	—	Espacio de Liouville de una partícula de dos niveles.
$\mathcal{L}_4^{\otimes N}$	—	Espacio de Liouville de N partículas de dos niveles.
$\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$	—	Subespacio simétrico del espacio de Liouville de N partículas de dos niveles.
$ B\rangle$	—	Notación tipo Dirac para operadores. Se usará para denotar elementos de la base de decaimiento y operadores de estado.
$\langle B $	—	Dual de $ B\rangle$.
$ \rho\rangle$	—	Operador de estado u operador de densidad, en algunos casos solo será denotado como $\hat{\rho}$.
$ mn\rangle$	—	Operador proyector $ m\rangle\langle n $.
\check{L}	—	Superoperador L .
$\check{Q}_{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}$	—	Elemento de la base de operadores simétricos para $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$
\check{L}_i	—	Superoperador del canal de disipación independiente.
Γ	—	Tasa de decaimiento total.
\check{L}_c	—	Superoperador del canal de disipación colectivo.
γ	—	Tasa de decaimiento de un átomo a los modos guiados de la fibra.
$ \alpha, \delta\rangle_n$	—	Eigenvector izquierdo de \check{L}_i , con $\alpha = n_{00} + n_{11}$, $\alpha \geq \delta \geq 0$ y $n = n_{10}$.
${}_n \langle\alpha, \delta $	—	Eigenvector derecho de \check{L}_i , definiendo $n = n_{01}$.
$\lambda_{\alpha, \delta}$	—	Eigenvalor de \check{L}_i asociado al eigenvector $ \alpha, \delta\rangle_n$.
τ_S	—	Tiempo de evolución del sistema cuántico.
τ_c	—	Tiempo de decaimiento de las correlaciones del ambiente.
ω_0	—	Frecuencia de transición entre los dos niveles de un átomo.
d	—	Distancia entre dos átomos.
v_g	—	Velocidad de grupo del campo electromagnético dentro de la fibra.
$\tau = d/v_g$	—	Retardo en la interacción de dos átomos debido a que el campo se propaga con una velocidad finita dentro de la guía de onda.
$\phi = \omega_0\tau$	—	Fase que acumula el campo a consecuencia de la distancia entre los átomos.

*Para mi mamá y papá, Amalia e Ignacio,
con todo mi amor*

*Y Dios dijo: “Que haya luz”. Y hubo luz.
Génesis 1: 3*

*The theory of quantum electrodynamics describes Nature
as absurd from the point of view of common sense. And
it agrees fully with experiment. So I hope you accept
Nature as She is — absurd
“QED. The Strange Theory of Light and Matter”,
Richard Feynman*

Agradecimientos

El trabajo aquí expuesto representa para mí la culminación de toda una etapa de mi vida. Etapa cuyo inicio está marcado por mi entrada a la universidad, y que abarca poco más de una década en la que he podido desarrollarme no sólo como físico y como profesional, sino sobre todo como ser humano. Por tanto, primeramente me gustaría reconocer que el fruto aquí plasmado es un testimonial de que he podido concretar y materializar metas y proyectos. Que a lo largo del camino he sido capaz de desarrollar las herramientas para enfrentar los obstáculos y los retos, y que al final las varias pruebas y los varios errores se han transformado en valiosas experiencias y aprendizajes.

Parafraseando al buen libro, separados poco (o nada) podemos hacer. Es así, que lo que soy y lo que voy logrando es producto de una superposición de las varios colectivos que me han acogido. Con toda mi gratitud y cariño, agradezco a las comunidades que me han permitido compartir esta vida:

Este sueño ha sido posible por el apoyo incondicional de mi mamá y papá, Amalia e Ignacio, quiénes me han dado todo el soporte desde el primer momento en que la idea de estudiar física en la UNAM formó parte de mi vocación. Pero más allá, agradezco que compartan el don de su vida conmigo. Agradezco sus experiencias, sus consejos, sus luchas y sus sueños. Los consejos que me han dado son para mí tesoros, que me han ayudado tanto al enfrentarme a los retos de la vida como para disfrutar los regalos del presente. Agradezco a mis abuelas y abuelos: Antonia, Pedro, Angela y Erasto, quiénes me han dado raíces e identidad como indígena tseltal de Chiapas, y gracias a los valores, la lengua, la historia, y la lucha de nuestras comunidades puedo tener una guía en la vida. Agradezco el amor que me han brindado mi hermana y hermano, Karen y Edwin, por su apoyo y compañía. Agradezco a mi tía Benjamina, que me ha brindado su amor maternal. Y agradezco a Misha, la felicidad peluda de nuestra casa.

El poder emigrar a la Ciudad de México y estudiar en la UNAM, me ha permitido conocer a una persona muy valiosa en mi vida, y por ello agradezco al azar o al destino. Así, de manera muy especial, agradezco con todo mi amor a Tayde, mi pareja, mejor amiga, compañera de aventuras, roomie y consejera. Ella me ha acompañado en la mayor parte de este ciclo, y ha sido una referente en mi vida por ser gran un ejemplo de calidad humana, genialidad y sabiduría. Gracias por tu lecciones de vida y de valentía.

Esta etapa también ha sido para mí un éxodo, un salir de mi tierra natal y del seno familiar en búsqueda de oportunidades y en la construcción de mis sueños. Pero afortunadamente este camino no lo inicié en soledad, así que agradezco a mi gran amigo Erik, a quién conocí desde el bachillerato y con quién compartí un camino paralelo, como estudiantes chiapanecos de física. Le agradezco el apoyo y el tiempo que no me ha escatimado. También agradezco a los amigos que he conocido en esta gran ciudad. A Alejandro, Diego, Eli, Adrián, Eva y a todos los amigos de la “Cochera de Paco”, que fue la primera casa de estudiantes que me acogió. De la misma forma agradezco a Isaí, Raúl, Octavio y a todos los amigos que hice en “Casa Jakkal”.

Además de tener la fortuna de acceder a un lugar en el que mi yo material pudiera habitar, tuve

también la fortuna de tener una casa que me ha acogido espiritualmente. Así, agradezco de corazón a mi padrino y amigo Fray Juan Efraín y a la Orden de Predicadores, por ser un hogar espiritual para mí. De la misma forma agradezco a Magaly, Aldo, Sai, Miguel, Daniel, Carmen, Marcos, Abraham, Ricardo, Liz, Tere, Karla, Alex, Oscar, Aaron, Brenda, Julio, Alicia y a todos los amigos del Centro Cultural Universitario (CUC) y de la pastoral universitaria “Ego Sum”.

Como estudiante agradezco a las varias personas que me formaron y compartieron sus conocimientos conmigo. De manera especial agradezco al Dr. Pablo Barberis, mi tutor, a quien admiro como científico y como ser humano. Quién siempre tuvo las puertas abiertas de su cubículo para cualquier duda que tuviera, y quién siempre ha sido un apoyo para mí durante los varios obstáculos que enfrente en el posgrado. Agradezco también a los miembros de mi Comité Tutor, quienes han estado al tanto de mi progreso en este proyecto, el Dr. Carlos Pineda y el Dr. Ramón López. La calidad de este trabajo ha sido posible por los sinodales que aceptaron y con su experiencia enriquecieron los resultados aquí expuestos: Dra. Laura Rosales, Dr. Jorge Hirsch, Dr. Asaf Paris y al Dr. Roberto León. De manera especial, quiero agradecer a los investigadores Dr. Pablo Solano y Dra. Kanupriya Sinha, con quienes tuve la oportunidad de colaborar en algunas partes de este proyecto. Agradezco a mis compañeros del posgrado Marco, Pablo, Juan, Guillermo, Alain, Anahí y quienes han compartido conmigo varios conocimientos dentro y fuera de la física. Finalmente quiero agradecer a todos los profesores que me han formado en el posgrado y en la Facultad de Ciencias.

En este recorrido también he recibido la ayuda para desarrollarme de manera física y mental. Agradezco al grupo de “Krav Maga Experts”, especialmente a mis instructores Isaac y Erick quienes me han enseñado todo un estilo de vida. A la escuela de natación “Pingüinos de San Cristóbal” por enseñarme que puedo vencer mis miedos y que nunca es tarde para aprender. A mi psicóloga Araceli Vallejo, con quién he podido desarrollar las herramientas para hacerme responsable de mi vida. Al grupo de danza folklórica de la UNAM “Vini Cubi”, especialmente al director Antonio Ordoñez, que me han dado el espacio para poder expresarme a través de la danza mexicana.

Por último, me siento orgulloso de decir que todo mi desarrollo académico, desde el preescolar hasta el doctorado, ha sido producto de la educación pública y gratuita. Es así, que agradezco a todas aquellos colectivos que han hecho posible esto, pues las oportunidades que he tenido han sido gracias a la conquista popular de este y otros derechos. Además, quiero agradecer especialmente a la UNAM, que ya para mí significa un seno familiar pues me ha brindado el apoyo para mi desarrollo profesional y personal. Finalmente, agradezco a la sociedad que ha hecho posible la realización de este proyecto, esto a través de los apoyos económicos, como la beca de Doctorado del CONACyT-México y a la beca del proyecto PAPIIT IG101421 “Mediciones en sistemas cuánticos de muchos cuerpos: nuevos métodos y perspectivas” de la DGAPA-UNAM.

A Dios, el principio unificador del universo, gracias por todo. Por las vivencias, las experiencias, los aprendizajes. Por los amigos, y sobre todo por los hermanos y hermanas que he encontrado el camino, pues nunca me ha faltado la sonrisa, la amabilidad, el apoyo o el consejo en las otras y otros. Porque siempre ha habido en mi camino un aire refrescante, un plato de comida, un vaso de agua o un rayo cálido de sol, y muchos otros dones que se me presentan en el día a día. A este Dios que se manifiesta a través de nuestro compromiso con las y los demás, le reitero mi disposición para seguir trabajando con amor, fe y creatividad por una vida digna para todas y todos los que aquí y allá habitamos en este universo (y quizá en otros).

Índice general

1. Introducción	9
2. Conceptos de Mecánica Cuántica	13
2.1. Formalismo en el espacio de Hilbert	13
2.2. Formalismo en el espacio de Liouville	15
2.2.1. El operador de densidad	16
2.2.2. La base de decaimiento	18
2.3. Sistemas compuestos	19
2.3.1. Subespacio simétrico	20
2.3.2. El esquema de interacción	22
2.4. Enredamiento	23
2.4.1. Medidas de enredamiento	24
3. Electrodinámica Cuántica en nanofibras	29
3.1. Elementos de Electrodinámica Cuántica	29
3.1.1. Cuantización del campo Electromagnético en el vacío	29
3.1.2. Interacción átomos-campo	31
3.1.3. Sistemas abiertos y ecuaciones maestras	32
3.1.4. Efectos colectivos: superradianza	35
3.2. ¿Por qué considerar átomos acoplados a nanofibras?	37
3.2.1. Eficacia de la plataforma	37
3.2.2. Posibilidades de la plataforma	38
3.3. Campo electromagnético en fibras ópticas	39
3.3.1. Propagación del campo en fibras cilíndricas	40
3.3.2. Constante de propagación β	43
3.4. Cuantización del campo eléctrico alrededor de una nanofibra	44
3.5. Interacción de N átomos con el campo de una nanofibra	45
3.6. Superradianza en nanofibras	47
3.6.1. Observación experimental de superradianza	48
3.7. Más allá de la dinámica Markoviana	48
3.8. Parámetros físicos y experimentales para átomos-nanofibra	49
3.8.1. La fibra	50
3.8.2. El sistema atómico	50
4. Sistema Markoviano	53
4.1. Base de decaimiento para la emisión independiente	55
4.1.1. Método perturbativo para la emisión colectiva	57
4.1.2. Aplicación del método perturbativo	58
4.2. Base de decaimiento para la emisión total	63

4.3. Propiedades del campo emitido	66
4.3.1. Fracción de energía emitida en los modos guiados	66
4.3.2. Funciones de correlación para el campo	67
4.4. Caso particular: $N=2$	71
4.4.1. Una excitación atómica	72
4.4.2. Dos excitaciones atómicas	72
4.4.3. Enredamiento entre átomos	74
5. Sistema no-Markoviano	77
5.1. Sistema atómico simétrico con una excitación	78
5.2. Sistema atómico con dos excitaciones	81
5.2.1. Derivación de las ecuaciones de movimiento	81
5.2.2. Solución al sistema de ecuaciones retardadas	82
5.3. Discusión de resultados	85
85subsubsection.5.3.1	
5.3.2. Enredamiento átomo-átomo y subfluorescencia	88
5.3.3. Enredamiento átomos-campo	90
6. Conclusiones	93
A. Mapeos lineales a superoperadores de ascenso	97
B. Calculo de la constante de propagación	99
B.1. Funciones de perfil para los modos guiados	99
B.2. Funciones de perfil para los modos radiados	100
C. Población de átomos excitados	101
D. Suma con las constantes de acoplamiento g_α	103
E. Resolución de la integral sobre frecuencias de \tilde{a}	105
F. Transformada inversa de Laplace de $\tilde{B}_\alpha^{(1,2)}$	107
G. Solución de las amplitudes c_α	109
H. Valores estacionarios	111

Capítulo 1

Introducción

Motivación

El desarrollo de las tecnologías cuánticas tiene como una componente esencial la interconexión de sistemas cuánticos a gran escala, lo que posibilita el procesamiento y la distribución de la información cuántica [1–3]. Para átomos en el espacio libre el acoplamiento entre las partículas del sistema tiene una magnitud relevante cuando la distancia interatómica es menor a la longitud de onda asociada a la transición atómica λ_0 [4–7]. Pero si queremos acoplamientos considerables a largas distancias, una plataforma de la que podemos hacer uso son los emisores cuánticos atrapados a lo largo de una guía de onda. De esta forma los emisores pueden interactuar e intercambiar estados cuánticos entre sí a través de fotones ópticos que se propagan en la guía de onda a velocidades cercanas de la luz [8–12]. Así se ha propuesto que la información cuántica pueda transmitirse empleando la infraestructura cada vez más creciente de las fibras ópticas en telecomunicaciones [13] usando los modos del campo electromagnético en la región de frecuencias ópticas, infrarrojas e incluso microondas [9, 14–18].

Las fibras ópticas han sido usadas para el desarrollo de tecnologías cuánticas a través del empleo de *nanofibras*, fibras típicamente fabricadas con dióxido de silicio (SiO_2) cuyos diámetros suelen estar en el rango de cientos de nanómetros [15, 19]. En el contexto de la óptica cuántica y la física atómica, podemos citar dos aplicaciones fundamentales de la nanofibra. La primera, es la captura y la manipulación de átomos, moléculas o iones. Esto a través de la refrigeración por láser y la creación de trampas ópticas localizadas en la superficie de la guía de onda, todo ello creado a través de haces de luz aplicados a través de la fibra [10, 20, 21]. La segunda, es que la plataforma nos permite realizar interacciones eficientes¹ entre los fotones guiados a través de la fibra y los átomos o iones capturados en la superficie [9, 22, 23]. Estas dos propiedades son fundamentales en la Electrodinámica Cuántica de Cavidades (QED), en la que las interacciones entre átomos individuales y fotones permiten el desarrollo de fuentes monofotónicas [24], memorias cuánticas [25, 26] y otros dispositivos, así como el acoplamientos entre distintos emisores cuánticos.

El acoplamiento de varios sistemas físicos trae consigo fenómenos que no pueden explicarse considerando individualmente las componentes del sistema total, sino que son efectos que surgen al considerar las interacciones entre todos los subsistemas que la conforman. Ejemplo de ello, al estudiar emisores cuánticos acoplados entre sí a través de un campo electromagnético común es posible observar dos efectos que no aparecen en sistema con emisores sin interacción: uno son las interacciones dipolo-dipolo entre los emisores, las cuales pueden explicarse por el intercambio de fotones virtuales, propiciando el cambio de las fases cuánticas de los emisores. La otra es una emisión colectiva de fotones, donde se incrementa o se disminuye la tasa de pérdida de las excitaciones atómicas. Esto comparado a las tasas que se presenta en un emisor individual en interacción solo con los modos infinitos del campo

¹En la sección 3.2.1 precisamos que son las “interacciones eficientes”.

electromagnético en el vacío [27].

Ejemplos del último fenómeno pueden observarse a través de un incremento o decremento de las tasas de decaimiento del sistema en comparación al caso de emisores independientes [28–30]. Para ilustrar esto, consideremos átomos de dos niveles en el espacio libre. Un átomo inicialmente excitado decaerá exponencialmente con una tasa de decaimiento Γ . Ahora consideremos varios átomos cuya separación entre ellos es mucho mayor a λ_0 . Independientemente de la condición inicial, un átomo excitado seguirá decayendo con una tasa Γ . Pero si la separación es comparable o menor a λ_0 , el decaimiento de N átomos excitados dependerá fuertemente de la condición inicial [4–7]. Por ejemplo: si inicialmente tenemos una excitación compartida por todos los átomos a través de una superposición, la tasa de decaimiento puede ser mayor o menor que Γ , dependiendo de las fases con las que esté descrita la superposición. Cuando los átomos interactuantes emiten fotones más rápido que los átomos independientes decimos que el sistema es *superradiante*. Si el decaimiento es más lento entonces decimos que el sistema es *subradiante*.

En general, para modificar la tasa de decaimiento es necesario que existan coherencia entre los átomos interactuantes [29]. Ciertamente, estos fenómenos tienen un símil en el electromagnetismo clásico pues un conjunto de dipolos oscilantes radian con mayor intensidad cuando presentan coherencias iniciales, o cuando alguna fuerza externa crea coherencia entre los dipolos [31]. De manera similar, en el caso cuántico podemos observar la superradianza cuando hay coherencias iniciales en el sistema o se generan externamente, ya sea al exponer al sistema a un haz láser proveyendo así a los emisores de correlaciones. Pero, a diferencia del caso clásico, la superradianza también puede presentarse sin la introducción de factores externos o previos, debido a la aparición espontánea de coherencias durante la evolución del sistema por las interacciones entre emisores [6]. Tal es el caso de *varios emisores cuánticos acoplados y totalmente excitados* al tiempo inicial. Estos formaran coherencias entre ellos debido al proceso de emisión de fotones, y aparecerán los fenómenos de sub- o super- radianza². Todos estos fenómenos deben de considerarse al plantearse el estudio y el desarrollo de sistemas de emisores cuánticos acoplados.

Para resolver la dinámica de estos sistemas interconectados debemos de considerar los grados de libertad atómicos cuyo número crece exponencialmente con el número de partículas N . Sumado a esto tenemos los infinitos modos del campo electromagnético. Es así que, un obstáculo para obtener soluciones analíticas para la dinámica de emisores cuánticos acoplados a través de modos del campo es el enorme número de grados de libertad. Una forma de simplificar el problema es considerar separaciones interatómicas del orden de, o menores a, λ_0 . Cuando esto sucede, podemos hacer uso de las aproximaciones de Born-Markov [33, 34] y obtener una ecuación de movimiento solo para la parte atómica, lo que nos evita lidiar con los infinitos modos del campo. Cuando es posible usar estas aproximaciones diremos que tenemos una dinámica Markoviana, descripción que ha posibilitado el estudio de la super- y sub- radianza en la emisión de fotones por parte de átomos [9, 29]. Pero aún bajo estas aproximaciones debemos de trabajar en un espacio de estados que escala exponencialmente con N , el número de partículas.

Es posible reducir el espacio de estados accesibles para la parte atómica, cuando la ecuación de movimiento para los emisores y las condiciones iniciales de nuestro problema son simétricas ante cualquier permutación de partículas. Cuando lo anterior se satisface, podemos describir la evolución en un subespacio cuya dimensión es un polinomio de N , en lugar de usar al espacio total, cuya dimensión es exponencial de N . Ejemplo de esto es la emisión colectiva de N qubits descrito por la ecuación maestra superradiante³, donde la dinámica toma lugar en un subespacio de dimensión $N + 1$ en lugar del espacio total de tamaño 2^N [35]. Para casos más generales donde consideramos también procesos de desfases y/o procesos de emisión independiente de cada qubit, este subespacio de dimensión $N + 1$ es

²Cabe aclarar que Bonifacio y Lugiato denominaron como *superradianza* al cambio de las tasas de decaimiento ante la presencia de coherencias iniciales o externas, mientras que llaman *superfluorescencia* al fenómeno provocado solo por la creación espontánea de coherencia [32]. Pero a lo largo de este trabajo llamaremos a ambos fenómenos como *superradianza*.

³Ecuación (3.37), de la sección 3.1.4.

insuficiente para describir toda la dinámica, pero es posible considerar otro subespacio cuya dimensión es igual a $(N + 1)(N + 2)(N + 3)/6$ [36–38].

Sin embargo, todo lo anterior tiene que ser revisado cuando los emisores cuánticos acoplados a guías de onda tienen separaciones mayores a λ_0 . Debido a que la velocidad v_g de propagación de los modos del campo dentro de una guía de onda es finita, siempre habrá un retardo entre el tiempo en que un fotón sea emitido por un átomo e interactúe con otro. Conforme la distancia entre átomos crezca, en principio podríamos observar como el fotón pasa al ambiente que rodea a los átomos y luego es reabsorbido por el sistema atómico para excitar a otra partícula. Esta retroalimentación nos inhabilita a considerar la aproximación de Born, y así el sistema entra en una dinámica llamada no-Markoviana [39–44]. Por tanto debemos de incorporar también a nuestra descripción los grados de libertad de los modos del campo electromagnético [45]. Esta dinámica introduce nuevos efectos colectivos no presentes en la dinámica Markoviana. Ejemplo de ellos son tasas de decaimiento colectivos que exceden a las tasas que podemos encontrar con el caso Markoviano o la formación de estados estacionarios de excitaciones atómicas y fotónicas [45–50].

Finalmente, es importante señalar algunas ventajas que nos brindan las nanofibras, y en general las guías de onda, en el estudio y desarrollo de las tecnologías cuánticas. La primera es su relativa facilidad de producción, ya que en el proceso de deformación del que se obtienen, no se crean daños significativos en la estructura ni en los altos índices de transmisión de los que se parte [51,52]. Segundo, en el contexto del desarrollo de sistemas cuánticos híbridos, los fotones ópticos y las fibras ópticas proporcionan una excelente plataforma para acoplar y transmitir información cuántica con una gran transmisión [13,53,54], incluso a distancias kilométricas. Y tercero, es que los sistemas acoplados a guías de onda abren nuevos paradigmas físicos, como la *Óptica Cuántica Quiral*, en donde los acoplamientos de los átomos y las emisiones de fotones dependen de la dirección de propagación y polarización de los modos [55–57].

Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 2 se da una breve introducción al formalismo de la Mecánica Cuántica. Principalmente introducimos los conceptos de vector y operador de estado, y las ecuaciones de movimiento usando uno u otro objeto. Asociados a estos conceptos definimos el espacio de vectores \mathcal{H} y el espacio de operadores \mathcal{L} , y describimos las ventajas que podemos obtener al trabajar en uno u otro espacio. De vital importancia es la noción de sistema cuántico compuesto, lo que nos ayuda a introducir los conceptos de: sistemas de muchas partículas, sistemas cuánticos abiertos, los subespacios simétricos y las ecuaciones de movimiento en el esquema de interacción, todos ellos muy utilizados a lo largo de este trabajo. Finalmente, al tener un proyecto donde se estudia la interacción entre emisores, un concepto clave que se expondrá es el enredamiento entre subsistemas cuánticos que surge por la interacción de componentes dentro de un sistema compuesto. Introduciremos también las funciones que usamos en este proyecto para cuantificar el enredamiento entre nuestros sistemas físicos de estudio.

El capítulo 3 empieza resumiendo la teoría de la electrodinámica cuántica, esencialmente describiendo la cuantización de un campo electromagnético en el vacío. Después mostramos como se modela la interacción entre átomos y campo cuantizado a través de la interacción dipolar. Dada la interacción, describimos como usando las aproximaciones de Born-Markov, podemos obtener una ecuación de movimiento solo para el operador de estado reducido atómico. Con esta ecuación, introducimos el concepto de los fenómenos colectivos en el proceso de emisión de varios átomos, especialmente la sub- y super-radianza. Luego, aterrizamos explícitamente todos estos conceptos para el campo electromagnético que se encuentra alrededor de una fibra óptica cilíndrica con corte transversal circular. Esto nos permite clasificar los modos que utilizaremos en este trabajo: los modos guiados y radiados, y hablamos de la interacción de estos modos del campo cuantizado con los átomos en un arreglo unidimensional. Finalmente, usando los parámetros del sistema físico átomos-nanofibras describimos cuando es posible

usar las aproximaciones de Born-Markov (dinámica Markoviana) o no (dinámica no-Markoviana) para resolver la evolución del sistema.

El capítulo 4 contiene la primer serie de contribuciones originales de este proyecto. En ella trabajamos en el régimen Markoviano, que puede considerarse cuando la distancia entre átomos es del orden de λ_0 , la longitud de onda de la transición atómica. En este caso ya existe una ecuación maestra en la forma de Lindblad que describe la evolución del operador de estado atómico cercano a una nanofibra [8]. Así, describimos un método para resolver la dinámica Markoviana de manera analítica, considerando un número general N de átomos acomodados en un arreglo simétrico unidimensional, pero limitando el número de excitaciones iniciales M que puede haber en el sistema atómico. Todo esto considerando que la ecuación de movimiento es invariante ante el intercambio de cualquiera dos partículas, lo que nos permite trabajar en un subespacio de estados simétricos. Es para estos subespacios vectoriales que calculamos una base usando los eigenvectores de la ecuación. Encontrado todo lo anterior, aplicamos el método al caso de la interacción entre los átomos y los modos guiados y radiados de la guía de onda para estudiar cómo se modifica el proceso de emisión de fotones. Estudiamos las modificaciones calculando la población de excitaciones atómicas en el sistema y las funciones de correlación del campo. Parte de los resultados arriba descritos han sido publicados en *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* bajo el título “The atomic damping basis and the collective decay of interacting two-level atoms” [58].

En el capítulo 5 estudiamos la evolución del sistema átomos-guías de onda considerando separaciones mucho mayores a λ_0 . Esto implica que no podemos seguir considerar la aproximación de Born para la dinámica, por lo que tomamos los grados de libertad atómicos y fotónicos del sistema. Como lidiamos con infinitos y continuos modos del campo nos restringimos a estudiar el caso de $N = 2$ átomos. Principalmente nos enfocamos en el caso de un estado inicial de átomos totalmente excitados. De esta forma, en el capítulo presentamos el Hamiltoniano del sistema y el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo que se obtienen de la ecuación de Schrödinger. Luego presentamos la solución al sistema de ecuaciones a través del uso de la transformada de Laplace. Dadas las soluciones, describimos el proceso de emisión espontánea considerando la probabilidad de tener una excitación así como definiendo tasas de decaimiento efectivas. Esto nos permite discutir las condiciones del sistema que propician la generación espontánea de un estado estacionario de átomos-modos del campo que no emite fotones. Tal estado se crea debido al relajamiento del sistema atómico durante el proceso de emisión de fotones, hasta llegar a un régimen de enredamiento entre el campo y los átomos que no decae, proceso que bautizamos como *subfluorescencia inducida por retardo*. Adicional a lo anterior, demostramos que la consideración del retardo permite obtener tasas de decaimiento instantáneo que rebasan las tasas superradiantes de la dinámica Markoviana, efecto llamado *superduperradianza*. Parte de estos resultados conforman otro artículo titulado “Delay-induced spontaneous dark state generation from two distant excited atoms” [59].

Capítulo 2

Conceptos de Mecánica Cuántica

2.1. Formalismo en el espacio de Hilbert

En el formalismo de la Mecánica Cuántica toda la información de un sistema físico está dado por un *vector de estado* o *ket* $|\psi\rangle$, perteneciente a un espacio de Hilbert que denotaremos como \mathcal{H} . Otra característica del espacio \mathcal{H} es que está dotado de un producto interno. Este producto nos permite asociar al espacio original, un espacio dual que identificaremos como \mathcal{H}^* . A los elementos de este espacio dual llamados *vectores duales* o *bras*, los representaremos como $\langle\psi|$. Existe una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de ambos espacios $|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi|$. Con estos elementos, el traslape entre dos vectores $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$, que es igual al *producto interno*, lo representaremos como $\langle\alpha|\beta\rangle$, el cual es un número complejo. Diremos que los vectores $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ son *ortogonales* entre sí cuando $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$. En general el producto interno para un vector consigo mismo es real y mayor o igual que cero, por tanto diremos que un vector es *unitario* cuando $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

El espacio de Hilbert \mathcal{H} , al ser un espacio vectorial admite conjuntos de vectores $\{|i\rangle\}$ (llamados *base de vectores* o *base de estados*) que podemos elegir que sean unitarios y ortogonales entre sí¹, de forma que $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$. Estos conjuntos permiten representar a cualquier vector perteneciente al espacio como una combinación lineal de elementos del conjunto. Especialmente, podemos representar un vector estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ como

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle. \quad (2.1)$$

Este hecho es llamado *Principio de Superposición* y es uno de los conceptos fundamentales en la teoría cuántica, ya que establece como un sistema cuántico puede existir en múltiples estados simultáneamente y describe como pueden combinarse estos estados. En nuestro formalismo los coeficientes complejos c_i , llamados *amplitudes de probabilidad*, nos dan la probabilidad $|c_i|^2$ de que el sistema se encuentre en el estado $|i\rangle$. Mediante el producto interno podemos encontrar estos coeficientes de la forma $c_i = \langle i|\psi\rangle$. Finalmente, para los estados cuánticos solo necesitamos especificar la dirección del vector $|\psi\rangle$, por tanto tomaremos vectores normalizados lo que implica que

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \implies \quad \sum_i |c_i|^2 = 1.$$

Toda información que podemos extraer de un sistema físico la llamaremos *observable* y está representada por un *operador lineal hermítico*, también llamado operador lineal *autoadjunto*, \hat{A} que actúa sobre los elementos de \mathcal{H} . Un operador lineal actúa a la izquierda de un ket $\hat{A}|\alpha\rangle$ dando como resultado

¹Además de que forman un conjunto completo, lo cual se definirá más adelante.

otro ket, y a la derecha de un bra $\langle\alpha|\hat{A}$ dando otro bra. En general no podemos hacer la correspondencia dual entre ambos elementos, por lo que introducimos el concepto de operador *adjunto* o *conjugado hermítico* de \hat{A} , denotado como \hat{A}^\dagger , cuando es posible hacer la correspondencia $\hat{A}|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|\hat{A}^\dagger$ para cualquier vector en $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$. Diremos que un operador es *autoadjunto* o *hermítico* cuando $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Dado el operador hermítico \hat{A} , podemos encontrar una base del espacio \mathcal{H} considerando todos los vectores que satisfacen la siguiente relación (llamada *ecuación de eigenvalores*)

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle. \quad (2.2)$$

Los coeficientes a_i los llamaremos *eigenvalores*, que en general serán números complejos pero que, en el caso de que \hat{A} sea autoadjunto, serán constantes reales. Los vectores $|a_i\rangle$ los nombraremos *eigenvectores*, y el conjunto de todos ellos forma una base ortonormal para el espacio \mathcal{H} . Finalmente, usando las bases $\{|i\rangle\}$ de \mathcal{H} y el asociado $\{\langle i|\}$ de \mathcal{H}^* , podemos formar operadores de la forma $|i\rangle\langle j| \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$. Estos objetos son operadores que actúan sobre los elementos de \mathcal{H} y los nombramos *productos externos*. Podemos usar estos elementos para formar una base del espacio vectorial de los operadores que actúan sobre \mathcal{H}^2 . Así, cualquier operador \hat{A} puede representarse de la forma³

$$\hat{A} = \sum_{i,j} \langle i|\hat{A}|j\rangle |i\rangle\langle j|, \quad (2.3)$$

donde los coeficientes $\langle i|\hat{A}|j\rangle$ forman la *representación matricial* de \hat{A} ⁴.

Accedemos al valor que toma un estado $|\psi\rangle$ bajo una observable \hat{A} a través de una *medición*. Para ello describimos al estado mediante la base de eigenvectores $\{|a_i\rangle\}$ de \hat{A} como

$$|\psi\rangle = \sum_i p_i |a_i\rangle. \quad (2.5)$$

Los eigenvalores a_i son los posibles resultados que podemos obtener al realizar una medición. Tales resultados tiene una probabilidad $|p_i|^2$ de ocurrir. Cuando realizamos una sola medición y obtenemos como resultado a_n para alguna n , entonces forzamos al sistema a proyectarse al eigenvector correspondiente

$$|\psi\rangle \longrightarrow |a_n\rangle, \quad (2.6)$$

proceso conocido como *colapso de onda*. Como ya mencionamos, este resultado no está determinado sino que tiene una probabilidad p_n de ocurrir. Si tuviéramos varias copias del mismo estado cuántico $|\psi\rangle$ y realizamos la misma medición cada una será diferente, pero podemos obtener un promedio de los resultados. Este promedio lo llamaremos *valor de expectación* de la observable \hat{A} y es igual a

$$\langle A \rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_i |p_i|^2 a_i. \quad (2.7)$$

²Espacio vectorial llamado *espacio de Liouville* que trataremos en la siguiente sección.

³Cabe hacer notar que, a lo largo de este trabajo denotaremos una doble suma como

$$\sum_{i,j} = \sum_i \sum_j.$$

Usaremos notaciones similares para abreviar la representación de múltiples sumas.

⁴Una propiedad específica de una base de vectores es que el operador identidad debe de representarse de la forma

$$\mathbb{I} = \sum_i |i\rangle\langle i| \quad (2.4)$$

propiedad llamada *relación de completez*

Finalmente es necesario puntualizar que debido al colapso de onda, si realizamos dos mediciones \hat{A} y \hat{B} consecutivas, la medición de una observable influenciará a la subsiguiente. Podemos cuantificar la “influencia” de medir una y luego la otra a través de la relación de conmutación de los operadores

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.8)$$

Cuando el conmutador es cero, entonces no importará el orden en que medimos las observables.

Hasta aquí, pareciera que hemos tratado al estado cuántico $|\psi\rangle$ como una entidad estática, pero esto no es así pues el sistema físico varía a través del tiempo. Esto implica que el estado sea un vector que varía temporalmente, $|\psi(t)\rangle$. En nuestro formalismo cuántico se postula que la dinámica del vector de estado está dado por la ecuación de Schrödinger igual a

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (2.9)$$

donde $\hat{H}(t)$ es una observable del sistema y es llamado *operador Hamiltoniano*. Cuando tal operador no tiene una dependencia explícita en el tiempo, la solución de la ecuación de Schrödinger es igual a

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}\hat{H}}. \quad (2.10)$$

siendo $\hat{U}(t, t_0)$ el *operador de evolución*, el cual es un operador unitario. Diremos que un operador \hat{A} es unitario si $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \mathbb{I}$, siendo \mathbb{I} el operador identidad. Ya que \hat{H} es una observable, de manera particular podemos expandir al espacio de Hilbert \mathcal{H} con los eigenvectores del Hamiltoniano. Denotaremos a este conjunto como $\{|E_i\rangle\}$, el cual tiene como eigenvalores los coeficientes E_i . Esta base nos permite escribir la solución de la ecuación de Schrödinger como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}\hat{H}} \sum_n c_n |E_n\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n}{\hbar}(t-t_0)} |E_n\rangle, \quad (2.11)$$

donde $c_n = \langle E_n | \psi(t_0) \rangle$.

Este formalismo, en donde consideramos que las observables son constantes en el tiempo mientras que los vectores de estado son dependientes es llamado *esquema de Schrödinger* (S). Esta formulación no es la única en nuestro formalismo cuántico. Podemos considerar el caso contrario, donde asumiremos que las observables son los que evolucionan a través del tiempo mientras que el vector de estado es constante. Bajo este esquema llamado *de Heisenberg* (H), la ecuación de movimiento la satisfacen los operadores y es igual a

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_S \right)_H, \quad (2.12)$$

relación conocida como *ecuación de Heisenberg*. Ambas formulaciones son equivalentes, y podemos transformar las soluciones de una forma a otra como

$$|\psi(t)\rangle_S = \hat{U}(t, t_0)|\psi\rangle_H, \quad \hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t, t_0).$$

Cabe recalcar que los valores de expectación no dependen del esquema estemos usando para describir la evolución.

2.2. Formalismo en el espacio de Liouville

Los operadores lineales que actúan sobre los elementos del espacio \mathcal{H} también forman un espacio de Hilbert (en el sentido matemático). A tal espacio lo llamaremos *espacio de Liouville* y será denotado por \mathcal{L} . De manera precisa, la definición de este espacio es la siguiente (definición tomada íntegramente de [60])

Definición 2.2.1. *Un espacio de Liouville \mathcal{L} es un conjunto de operadores lineales, los cuales satisfacen las siguientes propiedades*

1 \mathcal{L} es un espacio vectorial.

2 Si $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}$, el producto escalar entre estos elementos está definido como $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})$.

3 \mathcal{L} es un espacio normado y completo, cuya norma para $\hat{A} \in \mathcal{L}$ es $\|\hat{A}\| = \sqrt{\langle \hat{A}, \hat{A} \rangle}$.

Matemáticamente los espacios \mathcal{H} y \mathcal{L} comparten características similares, esto nos motivan a adoptar una notación similar a lo introducido en la sección anterior, y que usaremos en partes del trabajo que aquí se presenta. Así, denotaremos que $\hat{A} \in \mathcal{L}$ a través de un ket redondeado $|A\rangle$, elemento que llamaremos *superket*. También, a semejanza de \mathcal{H} , nuestro espacio \mathcal{L} tiene asociado a él un espacio dual que denotamos por \mathcal{L}^* . Siguiendo la lógica de nuestra notación, un elemento perteneciente al espacio dual será representado como $\langle B|$, elemento que llamaremos *superbra*. Esto nos ayuda a representar el producto interno entre dos operadores $|A\rangle, |B\rangle \in \mathcal{L}$ como $\langle B|A\rangle = \text{tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A})$.

Siendo \mathcal{L} un espacio vectorial, admite también un conjunto de operadores que sean ortonormales entre sí y que satisfagan una relación de completéz, de forma que el conjunto forme una *base de operadores* para el espacio. Un conjunto de tales operadores ya ha sido introducido en la sección anterior y es el conjunto de los productos externos $\{|i\rangle\langle j|\}$ que podemos formar dado una base vectorial $\{|i\rangle\}$ del espacio de Hilbert \mathcal{H} . La identificación de esta base nos permite decir que el espacio de Liouville \mathcal{L} es equivalente al producto tensorial del espacio de Hilbert \mathcal{H} con su dual (igual a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$). Por tanto, la dimensión del espacio \mathcal{L} es el cuadrado de la dimensión del espacio \mathcal{H} , $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{H})^2$.

Finalmente, en el espacio de Liouville podemos considerar mapeos lineales que operen sobre un elemento del espacio y dar como resultado otro. Estos mapeos serán denotados como $\check{T} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ y los llamaremos *superoperadores*. Cabe mencionar, que los mismos mapeos que actúan sobre \mathcal{H} también pueden operar sobre los elementos de \mathcal{L} , ya que el producto de operadores lineales nos da otro operador lineal. Además, dada una base de operadores $\{|\alpha\rangle\}$ de \mathcal{L} es posible dar una representación matricial para \check{T} , el cual será igual a

$$\check{T} = \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle\langle \beta|,$$

donde los elementos $T_{\alpha, \beta} := \langle \alpha | \check{T} | \beta \rangle$ son llamados *elementos de supermatriz*.

2.2.1. El operador de densidad

El uso del espacio de Liouville en el formalismo de la Mecánica Cuántica está ligado a una descripción más general que podemos obtener haciendo uso del *operador de estado* $\hat{\rho}$, llamado también *operador de densidad*, comparado a la descripción de un sistema cuántico mediante los vectores de estado $|\psi\rangle$. En la sección anterior, la descripción probabilística que dábamos en nuestro formalismo era inherente al mundo físico. De manera que las incertidumbres asociadas a la descripción no pueden eliminarse aunque tengamos una completa información sobre el sistema, es decir, las incertidumbres de la sección anterior no lo son en el sentido clásico. Pero hay situaciones en las que tenemos que lidiar también con las incertidumbres clásicas. Por ejemplo, debido a nuestra ignorancia no tenemos la seguridad del estado $|\psi\rangle$ en que se encuentra nuestro sistema, pero sabemos que se encuentra dentro de un conjunto de posibles estados $|\psi_i\rangle$ (no necesariamente ortogonales entre si), con una distribución de probabilidad clásica P_i . Tal estado es conocido como *estado mixto* $\{P_i, |\psi_i\rangle\}$, el cual queremos describir

con un operador $\hat{\rho}$ que nos describa la probabilidad clásica de tener un estado $|\psi_i\rangle$. No es difícil de ver que tal operador tiene que ser de la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.13)$$

objeto conocido como *operador de estado*.

Como ya mencionamos, introducimos al operador de estado como una generalización al vector de estado. Por tanto, es posible describir todo el formalismo en el espacio de vectores \mathcal{H} al espacio de operadores \mathcal{L} . De esta forma, dado un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (sin incertidumbres clásicas) tenemos que el operador de estado asociado es simplemente el proyector del vector,

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.14)$$

En este caso decimos que el estado es un *estado puro*, mientras aquellos estados que pueden expresarse como (2.13) los etiquetaremos como *estados mixtos*. Así, en general el operador de estado representa un sistema físico que tiene dentro de sí un carácter estadístico clásico, lo que nos hace pedir que estos operadores satisfagan ciertas propiedades matemáticas, como son

1. $\hat{\rho}$ es un operador hermítico, lo que implica que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$.
2. Ya que consideramos que los estados cuánticos están normalizados pediremos que $tr(\hat{\rho}) = 1$.
3. Para todo $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ se satisface que $\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0$. Esto nos permite decir que $\hat{\rho}$ es operador definido no-negativo.
4. Finalmente se satisface que $tr(\hat{\rho}^2) \leq 1$. La igualdad se da si y sólo si el operador representa un estado puro.

El formalismo cuántico descrito para un vector de estado puede extenderse al operador de estado. Por ejemplo, el valor de expectación de una observable \hat{A} está dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = tr(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (2.15)$$

De vital importancia es conocer la expresión de la evolución temporal para los operadores de densidad. Si el fenómeno físico está descrito por un Hamiltoniano $\hat{H}(t)$, la dinámica del operador de densidad puede derivarse a partir de la ecuación de Schrödinger, lo cual nos permite llegar a la *ecuación de Liouville-Von Neumann*, igual a

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.16)$$

Si no tenemos una dependencia temporal explícita en el Hamiltoniano, entonces la evolución es una transformación unitaria de la forma

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0),$$

a semejanza de la expresión (2.10). No hay que confundir la ecuación (2.16) con la expresión (2.12). De hecho, resolver la ecuación de Liouville-Von Neumann equivale a resolver la dinámica del sistema físico en el esquema de Schrödinger (S). Bajo el esquema de Heisenberg (H) tratamos al operador de estado como una constante en el tiempo, y mientras que todos los operadores de observables del sistema obedecerán la ecuación de Heisenberg (2.12).

2.2.2. La base de decaimiento

El espacio de Liouville no solo nos permite considerar sistemas físicos que contengan incertidumbres clásicas además de las inherentes incertidumbres cuánticas. También nos permite considerar una mayor variedad de evoluciones físicas que no pueden ser descritos por un Hamiltoniano, el cual hemos descrito como un operador hermitiano. Así, hay casos en los que se hace necesario considerar que el mapeo que nos da la evolución es no-hermitiano. Ejemplo de estos casos puede ser la no conservación de las distribuciones de probabilidad dentro de nuestro sistema físico, debido a la presencia de un flujo de energía, partículas, etc. de nuestro espacio \mathcal{H} a otro espacio de estados del que no tenemos acceso o del cual no poseemos información alguna.

Por tanto, dentro de nuestro espacio \mathcal{L} podemos explorar soluciones a sistemas de ecuaciones de la forma

$$\frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle = \check{\Lambda}(t) |\rho(t)\rangle \quad (2.17)$$

siendo $\check{\Lambda}$ un superoperador el cuál puede ser hermitiano o no. Si consideramos que tal superoperador no tiene una dependencia explícita con el tiempo, entonces la solución a la ecuación anterior es

$$|\rho(t)\rangle = e^{(t-t_0)\check{\Lambda}} |\rho(t_0)\rangle . \quad (2.18)$$

Notemos que la solución anterior es similar a nuestra expresión (2.10). Por tanto, cuando el superoperador $\check{\Lambda}$ es hermitiano, podemos asegurar que el conjunto de eigenvectores de $\check{\Lambda}$ forma una base de operadores de nuestro espacio \mathcal{L} . Esto nos permite resolver la evolución de (2.18) a semejanza de la ecuación (2.11). Un ejemplo de esto es el superoperador⁵

$$\check{\Lambda} |\rho\rangle = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H} |\rho\rangle - |\rho\rangle \hat{H}) . \quad (2.19)$$

Si usamos la base de eigenvectores $\{|E_i, E_j\rangle\}$ siendo $|E_i\rangle$ los eigenvectores del Hamiltoniano, podremos derivar que la solución a la ecuación (2.17) es igual a [61]

$$|\rho(t)\rangle = \sum_n (E_n, E_n | \rho(t_0)\rangle) |E_n, E_n\rangle + \sum_{m \neq n} e^{-\frac{i}{\hbar} [E_m - E_n] (t-t_0)} (E_m, E_n | \rho(t_0)\rangle) |E_m, E_n\rangle . \quad (2.20)$$

Pero en general, al asegurarnos que nuestro mapeo $\check{\Lambda}$ sea hermitiano, no podremos garantizar que el conjunto de eigenvectores del superoperador formen una base del espacio \mathcal{L} , y es aquí que entra el método conocido como solución mediante la *base de decaimiento* [62]. Este método consiste en calcular los *eigenvectores derechos* de $\check{\Lambda}$, que satisfacen

$$\check{\Lambda} |\alpha\rangle = \lambda_\alpha |\alpha\rangle ,$$

siendo λ_α un número complejo. Cuando $\check{\Lambda}$ es un mapeo no-hermitiano, no hay garantía de que el conjunto de eigenvectores forme una base del espacio. Por tanto, tenemos que demostrar que la dimensión del conjunto de eigenvectores derechos es igual a la $\dim(\mathcal{L})$, solo así habremos encontrado una base, la cual llamaremos *base de decaimiento*.

Pero además, hay otro inconveniente a superar antes de dar por completado el método. Y es que, cuando $\check{\Lambda}$ es no-hermitiano, los elementos duales de los eigenvectores derechos no necesariamente son los operadores $|\alpha\rangle^\dagger$. Sin embargo, estos operadores duales pueden ser encontrados también con una ecuación de eigenvectores. Para ello consideraremos la acción del superoperador del lado derecho y plantaremos una ecuación de eigenvalores de la forma

$$\langle \alpha' | \check{\Lambda} = \lambda_{\alpha'} \langle \alpha' | .$$

⁵El cuál no es propiamente un superoperador hermitiano, sino anti-hermitiano pues satisface que $\check{\Lambda}^\dagger = -\check{\Lambda}$. Aún así sus eigenvectores forman automáticamente una base de operadores para el espacio.

A este conjunto de operadores los denominaremos *eigenvectores izquierdos* de $\check{\Lambda}$. De esta forma podemos asegurar que $\langle \alpha' | \in \mathcal{L}^*$ y además se satisface la relación de dualidad

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = \delta_{\alpha', \alpha}.$$

Una vez que hayamos encontrado los eigenvectores derechos $|\alpha\rangle$ e izquierdos $\langle \alpha|$, y hayamos demostrado que efectivamente forman una base del espacio podemos expandir la solución (2.18) en esta base como

$$|\rho(t)\rangle = \sum_{\alpha} e^{\lambda_{\alpha}(t-t_0)} c_{\alpha} |\alpha\rangle,$$

donde los coeficientes de la combinación lineal están dados por $c_{\alpha} = \langle \alpha | \rho(t_0) \rangle$.

2.3. Sistemas compuestos

Para nuestros propósitos un sistema compuesto es aquél que está conformado por dos o más subsistemas, donde en cada una de las partes podemos identificar su propio espacio de estados cuánticos. A lo largo de este trabajo vamos a trabajar con dos formas de sistemas compuesto. La primera es un sistema formado de varias partículas idénticas, por ejemplo, un sistema atómico formado por N átomos de la misma especie. En el formalismo clásico aunque tengamos partículas idénticas podemos diferenciar a cada subsistema. En contraparte, en el formalismo cuántico se postula que las partículas idénticas serán fundamentalmente indistinguibles. Matemáticamente este hecho repercute en como el número de grados de libertad crece conforme el número de partículas N en el sistema compuesto. Así, en el formalismo clásico si el estado de un subsistema se especifica por n variables, entonces para un sistema de N partículas se necesita dar $n \cdot N$ parámetros para conocer el estado del sistema total. Por otra lado, suponiendo que un subsistema cuántico tiene un espacio estados de dimensión n (que denotaremos por \mathcal{H}_n) entonces el espacio de estados total (igual a $\mathcal{H}_n^{\otimes N}$) tendrá dimensión n^N .

El segundo tipo de sistema compuesto que vamos a considerar es aquél sistema que podemos separar en dos subsistemas. Una de ellas es un subsistema de interés que denotaremos como \mathbf{S} , del cual podemos medir todas sus observables, como por ejemplo un sistema atómico. Este subsistema \mathbf{S} está en interacción con otro subsistema \mathbf{A} del cual podemos medir sus observables o no, pues los grados de libertad de este subsistema puede ser enorme, o podemos no tener acceso a ellas. Ejemplo de esto son todos los modos de un campo electromagnético⁶. Una herramienta útil cuando lidiamos con este caso es el formalismo del operador de estado. Un estado de este sistema total lo describimos con el operador $\hat{\rho}_{SA}$, el cual pertenece al espacio de Liouville $\mathcal{L}_S \otimes \mathcal{L}_A$. En caso de que solo quisiéramos medir la observable \hat{O}_S de nuestro sistema de interés \mathbf{S} , entonces debemos de calcular el *operador de densidad reducido*. Este operador se calcula tomando la traza parcial de $\hat{\rho}_{SA}$ respecto al subsistema \mathbf{A} . Si para \mathcal{H}_A tenemos la base $\{|A_i\rangle\}$, entonces el *operador de estado reducido en el subsistema \mathbf{S}* es

$$\hat{\rho}_S = tr_A (\hat{\rho}_{SA}) = \sum_i \langle A_i | \hat{\rho}_{SA} | A_i \rangle, \quad (2.21)$$

operador que pertenece solo a \mathcal{L}_S . Así, el valor de expectación de nuestra observable \hat{O}_S es calculado con nuestro operador reducido

$$\langle \hat{O}_S \rangle = tr_S (\hat{\rho}_S \hat{O}_S). \quad (2.22)$$

⁶Que describiremos con mayor detalle en el siguiente capítulo.

2.3.1. Subespacio simétrico

Para un sistema de partículas idénticas, el hecho de que el espacio del sistema total crezca exponencialmente con el número de partículas N , llega a ser un obstáculo para obtener soluciones analíticas a la dinámica conforme el número de partículas crece, debido al crecimiento de los grados de libertad. Pero, existen situaciones que nos permiten reducir el número de estados accesibles en la evolución, lo que nos lleva a considerar un subconjunto del espacio total para describir la dinámica. Ejemplo de ello es el *subespacio simétrico*.

Para definir tal subespacio, consideremos primero la base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_n^{\otimes N}$. Si $\{|\phi_\alpha\rangle\}$ es la base de \mathcal{H}_n , entonces para el sistema compuesto total de N subsistemas podemos proponer como base al conjunto $\{|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle\}$. Para los elementos de esta base podemos definir el *operador de intercambio entre dos partículas i, j* , tal que

$$\hat{P}_{ij}|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_i}, \dots, \phi_{\alpha_j}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle = |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_j}, \dots, \phi_{\alpha_i}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle. \quad (2.23)$$

Usando este operador podemos precisar cuando tenemos subsistemas “idénticos”. Esto sucede si cualquier observable \hat{A} del sistema conmuta con \hat{P}_{ij} para i, j arbitrarias. Además, haciendo uso de los operadores de intercambio es posible identificar dos tipos de estados. Definiremos como *estados simétricos* aquellos que satisfacen $\hat{P}_{ij}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, para cualquier i, j . Por otro lado están los *estados antisimétricos*, aquellos que cumplan $\hat{P}_{ij}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$. La importancia de estos dos tipos de estados radica en el *Postulado de simetrización*, que nos dice que cualquier estado cuántico puro de un sistema compuesto por partículas idénticas es un estado simétrico o antisimétrico. Y en base a ello, podemos formar dos subespacios del espacio total: el subespacio simétrico y el antisimétrico.

Una de las razones para considerar al subespacio simétrico, el cual denotaremos como $\mathcal{S}(\mathcal{H}_n^{\otimes N})$, es que si estudiamos subsistemas físicos de n niveles, el estado base total del sistema ($|0_1, \dots, 0_N\rangle$) y el estado de máxima excitación ($|(n-1)_1, \dots, (n-1)_N\rangle$) pertenecen al subespacio simétrico. Debido a que todas las observables del sistema conmutan con los operadores \hat{P}_{ij} , de manera especial lo harán el Hamiltoniano \hat{H} y consecuentemente el operador de evolución $\hat{U}(t, t_0)$. Por tanto, si tomamos como estado inicial uno simétrico, $|\psi(t_0)\rangle$, se cumple que

$$\hat{P}_{ij}\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t, t_0)\hat{P}_{ij}|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (2.24)$$

es decir, el estado después de la evolución también será simétrico. Haciendo uso de este hecho, podemos considerar para la dinámica un espacio de estados más pequeño que el espacio total. Prueba de que el subespacio tiene una dimensión más pequeña que el espacio total, es que dada la base $\{|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle\}$, para el espacio total podemos tomar una *base de vectores simétricos*, que tiene la forma

$$|\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^S\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{i, j} \hat{P}_{ij}|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle, \quad (2.25)$$

donde la doble suma sobre i, j indica el tomar en cuenta todas las permutaciones de dos partículas posibles. Cabe mencionar, que tal estado construido sólo estará normalizado si los vectores $|\phi_{\alpha_i}\rangle$ tienen distintos números cuánticos α_i .

Uno de los ejemplos populares sobre el uso del subespacio simétrico para la resolución de problemas, es el de los *estados de Dicke*. Consideremos un subsistema de dos niveles que tiene como espacio de estado \mathcal{H}_2 . Una base para el espacio es $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, que representan al estado base y excitado respectivamente. Cualquier observable de este espacio puede representarse con los productos externos de la base, pero es usual usar los operadores [63]

$$\hat{\sigma}_0 = \mathbb{I}_2 = |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma}_+ = |1\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma}_- = |0\rangle\langle 1|, \quad \hat{\sigma}_3 = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, \quad (2.26)$$

llamados *operadores atómicos*. Si queremos resolver la dinámica de un sistema de N partículas, el sistema total evolucionará en el espacio $\mathcal{H}_2^{\otimes N}$, el cual tiene dimensión 2^N . Pero si el Hamiltoniano que

describe la evolución del sistema es simétrico (es decir, conmuta con los operadores \hat{P}_{ij}), podemos usar el subespacio simétrico⁷ el cual tiene como base los vectores

$$|N, k\rangle = \sqrt{\frac{k!(N-k)!}{N!}} \sum_{i,j} \hat{P}_{ij} \left(|1\rangle^{\otimes k} \otimes |0\rangle^{\otimes (N-k)} \right), \quad (2.27)$$

donde hacemos la suma sobre todas las conmutaciones posibles sobre el estado $|1\dots 10\dots 0\rangle$ de k átomos en el estado excitado y $N-k$ en el estado base. Así, el subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes N})$, tiene dimensión $N+1$ el cual crece linealmente con el número de partículas. Finalmente, al trabajar en el subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes N})$ es útil describir las observables en términos de los *operadores colectivos atómicos* definidos como

$$\hat{J}_{\pm} = \sum_r \hat{\sigma}_{\pm}^{(r)}, \quad \hat{J}_3 = \frac{1}{2} \sum_r \hat{\sigma}_3^{(r)}, \quad (2.28)$$

los cuales operan sobre el estado de Dicke de la forma

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |N, k\rangle &= \sqrt{(k+1)(N-k)} |N, k+1\rangle, \\ \hat{J}_- |N, k\rangle &= \sqrt{k(N-k+1)} |N, k-1\rangle, \\ \hat{J}_3 |N, k\rangle &= \left(k - \frac{N}{2} \right) |N, k\rangle. \end{aligned}$$

El tratamiento anterior puede extenderse al espacio de Liouville. Recordemos que si el espacio de vectores \mathcal{H}_n tiene dimensión n , el espacio de Liouville asociado \mathcal{L}_{n^2} tendrá dimensión n^2 . Así, si consideramos un sistema compuesto por N estados mixtos, el operador de estado pertenecerá al espacio $\mathcal{L}_{n^2}^{\otimes N}$ de dimensión n^{2N} . Este crecimiento exponencial del número de grados de libertad puede ser reducido si consideramos la simetría de intercambio de etiqueta de partículas. Para esto, nuevamente pediremos que toda observable \hat{A} del sistema conmute con los operadores de permutación \hat{P}_{ij} . Pero como requerimiento adicional, al considerar una evolución descrita por la ecuación (2.17), solicitamos que el superoperador de evolución $\check{\Lambda}$ conmute con el *superoperador de intercambio entre dos partículas* i, j que denotaremos por \check{P}_{ij} . Si esto ocurre, podemos considerar el subespacio simétrico del espacio de Liouville que denotaremos como $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{n^2}^{\otimes N})$, el cual está formado por todos los operadores invariantes ante cualquier \check{P}_{ij} .

Un ejemplo del uso del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{n^2}^{\otimes N})$ se da en el estudio de sistemas compuestos por qubits. Para un qubit tenemos el espacio \mathcal{L}_4 , el cual tiene como base el conjunto $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Para el espacio de N qubits, se ha demostrado que $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ tiene dimensión $(N+1)(N+2)(N+3)/6$ [36]. Así, si tenemos una evolución dada por un superoperador $\check{\Lambda}$ que sea simétrico ante cualquier permutación de partículas, entonces el operador de estado del sistema compuesto mantiene una evolución cerrada dentro del subespacio simétrico.

Para trabajar sobre el subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ se ha introducido la *base de operadores simétricos*, cuyos elementos son [64, 65]

$$\hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} = \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \sum_{i,j} \check{P}_{ij} \left(|00\rangle^{\otimes n_{00}} |01\rangle^{\otimes n_{01}} \otimes |10\rangle^{\otimes n_{10}} |11\rangle^{\otimes n_{11}} \right), \quad (2.29)$$

En los productos tensoriales se han introducido los exponentes $n_{nm} = 0, 1, 2, \dots, N$ los cuales satisfacen la constricción $N = n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}$. Como ejemplo del uso de la base de estados simétricos, el estado simétrico mixto que describe a un estado en donde tenemos dos átomos en el estado base y

⁷También recibe los nombres de *subespacio de Dicke* o *subespacio superradiante* para este caso [37].

uno en el estado excitado pero no sabemos cuál y cada átomo tiene la misma probabilidad de ser el excitado, es

$$\hat{Q}_{01}^{20} = \frac{1}{3} \left(|00\rangle |00\rangle |11\rangle + |00\rangle |11\rangle |00\rangle + |11\rangle |00\rangle |00\rangle \right).$$

Los elementos de la base de operadores simétricos son ortogonales entre sí, y satisfacen

$$\text{Tr} \left(\hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n'_{00} & n'_{01} \\ n'_{10} & n'_{11} \end{smallmatrix}} \hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} \right) = \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}}.$$

Cabe mencionar que no todos los operadores simétricos representan estados físicos, pero cualquier operador de estado que pertenezca al subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ puede ser representado como combinación lineal de estos.

Para facilitar el uso de la base de operadores simétricos se han introducido los *superoperadores colectivos*, a semejanza de los operadores colectivos que encontramos en el subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2^{\otimes N})$. Operacionalmente, estos superoperadores actúan de la siguiente forma. El superoperador \check{A}_+^{ij} actuando sobre un elemento de la base de operadores simétricos (2.29) del lado izquierdo, decrece en una unidad la etiqueta n_{kl} , e incrementan n_{ij} por uno, y el operador resultante se multiplica por n_{kl} . Como ejemplo de la acción tenemos

$$\check{A}_+^{11} \hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} = n_{10} \hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}-1 & n_{11}+1 \end{smallmatrix}}. \quad (2.30)$$

La acción de \check{A}_+^{ij} sobre el lado derecho de $\hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} = \hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{10} \\ n_{01} & n_{11} \end{smallmatrix}}$ se obtiene con la regla explicada más arriba intercambiando $n_{kl} \leftrightarrow n_{ij}$. Como ejemplo tenemos

$$\hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} \check{A}_+^{11} = n_{11} \hat{Q}_{01}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}+1 & n_{11}-1 \end{smallmatrix}}. \quad (2.31)$$

La importancia de estos superoperadores, es que nos funcionan como una base para los superoperadores que actúan sobre $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$. Para mayores detalles consultar Apéndice A. Finalmente, el uso del subespacio de Dicke es suficiente cuando consideramos la evolución de un sistema simétrico cerrado de qubits, o al considerar sistema abiertos solo con emisiones superradiantes. Pero, tal espacio es insuficiente y debemos de usar el subespacio simétrico de Liouville cuando consideremos sistemas abiertos con desfases y/o decaimientos individuales (todos ellos simétricos) [37, 65, 66].

2.3.2. El esquema de interacción

Otra herramienta útil que tenemos al trabajar con sistemas compuestos es el *esquema de interacción* (I). Anteriormente ya habíamos introducido el esquema de Schrödinger (S) y el de Heisenberg (H). En el esquema de interacción consideramos que tanto el estado como las observables varían en el tiempo. Nuestro interés radica en que nos permite considerar un Hamiltoniano que pueda separarse como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (2.32)$$

donde \hat{H}_0 describe una evolución libre de cada uno de los subsistemas mientras que el término \hat{H}_{int} describe la interacción entre los subsistemas, ambos los consideraremos independiente del tiempo. En el esquema de interacción, podemos separar nuestra evolución de la forma

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad \frac{d}{dt} \hat{A}_I(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{A}_I(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_S \right)_I, \quad (2.33)$$

en donde

$$\hat{H}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{H}_{\text{int}} \hat{U}_0(t, t_0), \quad \hat{U}_0(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t_0)}. \quad (2.34)$$

Podemos pasar de este esquema al de Schrödinger por las transformaciones

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_0(t, t_0) |\psi(t)\rangle_S, \quad \hat{A}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.35)$$

En el formalismo del operador de estado también podemos usar el esquema de interacción. Consideremos que en el esquema de Schrödinger se satisface

$$\frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} [H_0, |\rho(t)\rangle_S] + \check{\Lambda} |\rho(t)\rangle_S \quad (2.36)$$

donde H_0 describe una evolución libre de los subsistemas, mientras que el superoperador $\check{\Lambda}$ puede describir la parte de interacción, además que puede tener un carácter no-hermitiano. Nuevamente nuestras observables se transformaran acorde a la expresión (2.35), pero ahora nuestro estado cambia a

$$|\rho(t)\rangle_I = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) |\rho(t)\rangle_S \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.37)$$

Este estado transformado evoluciona de la forma

$$\frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle_I = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \check{\Lambda} \hat{U}_0(t, t_0) |\rho(t)\rangle_I. \quad (2.38)$$

Adicionalmente si pedimos que $[\hat{H}_0, \check{\Lambda}] = 0$ nuestra ecuación será igual a (2.17). Es necesario mencionar que los valores importantes como eigenvalores y valores de expectación no dependen del esquema de evolución que estemos usando.

2.4. Enredamiento

Como ya mencionamos, uno de los conceptos clave en Mecánica Cuántica es el “Principio de Superposición”, donde un sistema puede describirse como una superposición lineal de los diferentes estados posibles que podemos observar al realizar una medición al sistema. Así, en el mundo microscópico una partícula puede estar en dos posiciones al mismo tiempo, o una flecha puede apuntar simultáneamente hacia dos direcciones diferentes, cosa que no ocurre de manera macroscópica. Solo cuando se realiza la medición de una observable, el sistema se proyectará a uno de los estados de la superposición lineal, fenómeno que llamamos “colapso de la función de onda”.

Cuando este principio es aplicado a un sistema compuesto de varios subsistemas (como pueden ser varias partículas), obtendremos el concepto de “enredamiento”. Así, tras la interacción de dos (o más) subsistemas microscópicos, el estado del sistema total puede evolucionar a un estado que no es posible de escribir como un producto de estados independientes de cada subsistema. Sino que será la superposición lineal de productos del estado de un subsistema y del otro. De forma que las mediciones que hagamos sobre alguna de las componentes determinará el estado en que se proyecte la otra componente. Cuando los sistemas microscópicos se encuentran entrelazados de esta forma las partículas estarán correlacionadas entre ellas a pesar de las bases que usemos para hacer las mediciones así como la separación espacial entre los subsistemas. Eso último, introduce un aspecto no-local a la Mecánica Cuántica.

Inicialmente, el concepto de enredamiento fue introducido en el contexto de debates filosóficos sobre los fundamentos de la Mecánica Cuántica. El hecho de que las partículas puedan estar correlacionadas sin importar cuan separadas estén unas de otras parece una violación a la teoría especial de la relatividad, en donde no es posible transmitir información entre dos puntos de manera más rápida que la

velocidad de la luz en el vacío. Tal característica llamó la atención de Einstein quién junto a Podolsky y Rosen (EPR) publicaron un artículo en 1935 [67], con el propósito de mostrar el escepticismo de los autores sobre algunas predicciones de la Mecánica Cuántica, concluyendo que la descripción de la realidad física a través del formalismo cuántico es incompleta. En tal publicación aparece descrito el fenómeno del enredamiento aunque no es mencionado como tal. En 1935 y 1936 Schrödinger publica dos artículos secuenciales [68, 69] donde trata el asunto de los interacción de sistemas microscópicos distantes en referencia al artículo de EPR. Es en el de 1935 en donde introduce propiamente el nombre de “Verschränkung”(enredamiento).

Las conclusiones del artículo EPR sobre la completitud de la Mecánica Cuántica fueron retomadas por John S. Bell en un artículo de 1964 [70]. En el artículo, Bell formalizada las hipótesis de EPR sobre una realidad física determinista en términos de un modelo de variables locales ocultas (en inglés LHVM, Local Hidden-Variable Model) y demuestra matemáticamente que tal modelo es incompatible con las predicciones de la Mecánica Cuántica. Para ello calcula una desigualdad, llamada “desigualdad de Bell”, que debe de satisfacer las correlaciones estadísticas de un sistema bipartito bajo las suposiciones de LHVM. Luego, él demuestra que el valor obtenido con las mediciones hechas a un sistema bipartito enredado viola tal desigualdad. Es a partir de estos resultados cuando el enredamiento empieza a ser considerado como una de las características que identifican a los sistemas cuánticos. Las ideas propuestas por Bell sobre los sistemas enredados y las contradicciones que muestran bajo predicciones de LHVM, fueron luego aplicadas a sistemas tripartitos por Greenberger, Horne y Zeilinger en 1989 [71], así como algunas otras generalizaciones [72, 73]. El desarrollo de las desigualdades de Bell, permitió que el enredamiento cuántico pudiera ser probado de manera experimental a través del cálculo de la desigualdad. Así, los primeros experimentos se realizaron a mediados de 1960 [74, 75], pero es el trabajo realizado por Alan Aspect y compañía [76, 77] quién solidifica de manera experimental el fenómeno del enredamiento.

Más allá de ser un concepto teórico y de interés en los debates filosóficos sobre los fundamentos de la física, el enredamiento cuántico ha ganado atracción debido al desarrollo de las ciencias de la información y la computación cuántica, contexto en el cual el enredamiento es visto como un recurso primordial para el procesamiento y la transmisión de información usando los fenómenos cuánticos [78–80]. En el contexto de la información cuántica su uso se ha propuesto para la distribución cuántica de claves (QKD) [81], la codificación superdensa [82], teleportación de un estado cuántico de una posición del espacio a otro [83]. Y en general, en la creación de una red cuántica que permita la transmisión de información [1–3], etc. Además, el uso del enredamiento en la metrología cuántica tiene el potencial de incrementar la precisión en las mediciones a través del uso de estados enredados en interferómetros [84].

2.4.1. Medidas de enredamiento

Hecha la descripción cualitativa del enredamiento, en esta sección definiremos de manera formal cuando un sistema cuántico está enredado, además de describir las variables que nos permiten medir que “tan enredado” está un sistema. Cabe aclarar que la descripción la haremos para un sistema bipartito, que es el único caso que abordaremos a través de este trabajo.

El enredamiento es una propiedad que se presenta en un sistema cuántico compuesto de dos o más subsistemas interactuantes entre ellas. Si consideramos solo dos subsistemas tendremos para cada una un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , respectivamente. Además, a cada espacio podemos asociarle una base ortonormal $\{|i_{A,B}\rangle\}$. Cuando trabajamos con un sistema total que abarque ambos subsistemas estamos inmersos en un espacio del Hilbert igual a $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, en la que podemos asociar como base ortonormal el conjunto $\{|i_A\rangle \otimes |i_B\rangle\}$. Por el principio de superposición un estado puro del sistema total $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ tendrá de manera general la siguiente forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle. \quad (2.39)$$

Diremos que un estado de \mathcal{H}_{AB} está enredado si no es posible escribirlo de la forma

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.40)$$

con $|\psi_{A,B}\rangle \in \mathcal{H}_{A,B}$. A los estados que pueden ser escritos de la forma (2.40) los llamaremos *estados separables*.

Es posible generalizar lo anterior a estado mixtos. Para ello tomamos el espacio de Liouville de cada subsistema \mathcal{L}_A y \mathcal{L}_B . Cada uno de estos espacios pueden expandirse usando la base de operadores ortonormales $\{|i\rangle\langle j|_{A,B}\}$, los cuales es importante recordar que no necesariamente representan estados físicos, y por tanto no son operadores de estado. Así, un estado en el sistema total $\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_A \otimes \mathcal{L}_B$ en general puede escribirse como

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} \sum_{kl} u_{ij} v_{kl} |i\rangle\langle j|_A \otimes |k\rangle\langle l|_B. \quad (2.41)$$

donde u_{ij} y v_{kl} son constantes de una superposición lineal de operadores. En especial, una fracción de los estados de \mathcal{L}_{AB} tienen la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \quad (2.42)$$

donde w_i representa los valores de una distribución de probabilidad, y cada uno de los operadores $\hat{\rho}_{A,B}^i \in \mathcal{L}_{A,B}$ representan estados mixtos. Los estados (2.42) son nombrados *estados separables*, de forma que los demás estados que no sigan tal forma son los estados enredados.

Entropía de enredamiento

Las representaciones (2.40) y (2.42) dependen de la base en la que expandamos al espacio. Por tanto, dado un estado enredado del espacio total necesitamos tener la certeza de que no existe base alguna que nos permita escribir al estado como uno separable.

El primer caso que podemos considerar es cuando tenemos un estado bipartito puro de la forma (2.39). Dadas cualesquiera dos bases ortonormales $\{|i\rangle_{A,B}\}$, podemos encontrar otras bases ortonormales $\{|A_i\rangle\}$ y $\{|B_j\rangle\}$ tal que

$$|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |A_i\rangle \otimes |B_i\rangle \quad (2.43)$$

es la expansión con menor número de sumandos posible, y donde las constantes λ_i sean reales no-negativas. Tales constantes son únicas salvo el orden en que pueden aparecer, y todo esto podemos garantizarlo para un sistema bipartito por el método de descomposición de Schmidt [85]. Una primera variable que podemos considerar para decidir si nuestro estado es separable, es el número de λ_i distintos de cero que tenemos en la descomposición. A tal cantidad se le como como *número de Schmidt* R . De forma que si $R = 1$ obtenemos un estado de la forma $|\Psi\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle$, el cual es separable. Y si $R > 1$ podemos decir que nuestro estado es enredado. Una propiedad importante que satisfacen las constantes λ_i es que no varían ante transformaciones unitarias que se hagan de manera local sobre cada subespacio $\mathcal{H}_{A,B}$. Ejemplo de ello es el operador $\hat{U} = \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$ actuando sobre el sistema total. Ante esta transformación tendremos que la descomposición de Schmidt de nuestro estado transformado es $\hat{U}|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i (\hat{U}_A|A_i\rangle) \otimes (\hat{U}_B|B_i\rangle)$, siendo el número de Schmidt el mismo. Una propiedad que nos asegura que el enredamiento no se modifica por transformaciones locales en cada subespacio, sino que estas son debido a interacciones entre subespacios.

Otras de las características de la descomposición de Schmidt es que diagonaliza a los operadores de estados reducidos. Es más, los operadores reducidos tienen el mismo espectro, pues

$$\hat{\rho}_A = tr_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_i \lambda_i^2 |A_i\rangle\langle A_i|, \quad \hat{\rho}_B = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_i \lambda_i^2 |B_i\rangle\langle B_i|. \quad (2.44)$$

Notemos que, si el estado $|\Psi\rangle$ es enredado (el número de Schmidt $R > 1$) los operadores de estados reducido serán mixtos. Lo cuál nos puede llevar a otro criterio de enredamiento que es: el estado $|\Psi\rangle$ es enredado solo si el operador de estado reducido $\hat{\rho}_{A,B}$ describe un estado mixto. De otro modo diremos que $|\Psi\rangle$ es separable.

Como hemos visto tenemos dos criterios para decidir si un estado puro bipartito es enredado o no. Aún así, falta cuantificar está cantidad lo cual deseamos que sea a través de una función E . Algo deseable, es que tal cantidad se comporte de forma que⁸:

1. E sea invariante ante operaciones unitarias locales.
2. E sea continua.
3. E sea aditiva, de forma que $E(|\psi_{AB}\rangle \otimes |\phi_{AB}\rangle) = E(|\psi_{AB}\rangle) + E(|\phi_{AB}\rangle)$

El punto (1) se cumple si consideramos que la función E sea una función con los coeficientes λ_i de la descomposición de Schmidt. El punto (3) puede satisfacerse considerando la entropía de Von-Neumann definido para operadores de estado ρ de la forma

$$S(\hat{\rho}) = -\text{tr}(\hat{\rho} \log(\hat{\rho})),$$

función que satisface la condición de subaditividad [87]

$$S(\hat{\rho}_{12}) \leq S(\hat{\rho}_1) + S(\hat{\rho}_2)$$

igualdad que se da solo cuando $\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$. Esto nos lleva a definir como medida de enredamiento a la entropía de Von-Neumann de los operadores de estados reducidos el cual llamaremos *entropía de enredamiento* y es igual a

$$E(|\Psi\rangle) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = -\sum_i \lambda_i^2 \log(\lambda_i^2), \quad (2.45)$$

recordando que las λ_i^2 son los eigenvalores de los operadores de estado reducido. Esta variable ha demostrado ser una buena medida para la cuantificación del enredamiento, en el sentido que satisfacen los tres requerimientos arriba mostrados, junto con con otros más [79, 88, 89].

Enredamiento de formación y Concurrencia

Cabe recalcar que la entropía de enredamiento es una medida que ha sido definida para estados bipartitos puros. Pero este no es el caso general, pues no hemos considerado que el estado sea mixto como el de la expresión (2.41) o (2.13). Para un sistema bipartito cualquier estado mixto es por definición una combinación de estados puros de la forma

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_{AB}^i\rangle \langle \psi_{AB}^i|. \quad (2.46)$$

Así, uno estaría tentado a definir una medida de enredamiento para tal estado como un promedio de la entropía de enredamiento de cada estado puro de la forma $\sum_i P_i E(|\psi_{AB}^i\rangle)$. Pero a diferencia de los estados puros donde podemos considera una descomposición cuasi-única, en el caso de los estados mixtos existe una infinidad de formas en las que podemos escribir al estado de la forma (2.46). Aún así, una solución natural será la de minimizar la función sobre todas las realizaciones posibles, de forma que, para el caso mixto llegamos definir el *enredamiento de formación* como [90]

$$E_F(\hat{\rho}) = \min_{\{P_i, |\psi_{AB}^i\rangle\}} \sum_i P_i E(|\psi_{AB}^i\rangle). \quad (2.47)$$

⁸Requerimientos tomados textualmente de [86]

Aunque la definición (2.47) en la mayoría de los casos sea difícil de calcular, se ha podido obtener una expresión analítica cuando el sistema está compuesto por dos qubits, descrito por un operador de estado con no más de dos eigenvalores distintos de cero. En este caso se obtiene [91]

$$E_F(\hat{\rho}) = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - C^2(\hat{\rho})}\right)$$

donde de manera auxiliar se introduce la *función de entropía binaria*

$$H(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \quad (2.48)$$

y se define la *conurrencia* $\mathcal{C}(\hat{\rho})$, que está dada por

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad (2.49)$$

donde los valores λ_i representan los eigenvalores de la matriz no-hermitiana $\hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$, listados de forma decreciente. Además, $\hat{\rho}^*$ es el valor conjugado del operador de densidad y tenemos la matriz de Pauli

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aunque E_F es la función de enredamiento propiamente, podemos considerar también a $\mathcal{C}(\hat{\rho})$ como una medida de enredamiento pues E_F es una función monótona de la conurrencia que tiene su dominio en el $[0, 1]$ [92]. Así, tener $\mathcal{C}(\hat{\rho}) = 0$ significaría que $\hat{\rho}$ es un estado separable, mientras que $\mathcal{C}(\hat{\rho}) = 1$ implica que es un estado con la máxima medida de enredamiento.

Capítulo 3

Electrodinámica Cuántica en nanofibras

3.1. Elementos de Electrodinámica Cuántica

3.1.1. Cuantización del campo Electromagnético en el vacío

Para ejemplificar el método y los conceptos que utilizaremos para la descripción del campo electromagnético dentro de un medio (la guía de onda), primeramente comenzaremos resumiendo las ideas que encontramos al cuantizar al campo en el vacío. En el espacio vacío los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ clásicos satisfacen las ecuaciones de Maxwell dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (3.1)$$

donde ε_0, μ_0 son la permitividad y permeabilidad del espacio vacío. Si introducimos el vector potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, el cual se relaciona con el campo electromagnético como $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, entonces de las ecuaciones de Maxwell obtenemos la relación

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}. \quad (3.2)$$

Para la igualdad anterior haremos uso de la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Debido a la forma de las ecuaciones de Maxwell podemos escoger el vector potencial de forma que satisfaga $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$, elección conocida como *norma de Coulomb*. Usando esto llegamos a

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.3)$$

donde la velocidad de la luz en el vacío está dado por $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

El método más usado para resolver la ecuación (3.3) es expandir cualquier solución a través de las funciones propias del operador diferencial $\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2$ [31], funciones que llamaremos los *modos del campo*. Podemos descomponer una solución propia en una parte espacial que es vectorial y en una parte temporal escalar, de la forma $\mathbf{Q}_k(\mathbf{r}) A_k(t)$. Usando el método de separación de variables tendremos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_\lambda^2 \right) A_\lambda(t) = 0 \quad (3.4)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \right) \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.5)$$

siendo ω_λ los eigenvalores de la parte temporal del problema. Vemos que la ecuación (3.5) representa la *ecuación de un oscilador armónico* el cual tiene soluciones $A_\lambda(t) = a_\lambda e^{-i\omega_\lambda t}$. Por otro lado la ecuación (3.5) representa una *ecuación de Helmholtz* que nos dará el *perfil espacial de los modos* \mathbf{Q}_λ , y cuya solución dependerá de la geometría del problema así como las condiciones de frontera que tengamos. Cabe mencionar que λ puede etiquetar más de una variable pues los eigenvalores están diferenciados tanto por características espaciales como temporales.

Encontradas estas funciones podemos expandir cualquier solución de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} (c_\lambda a_\lambda \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{r}) e^{-i\omega_\lambda t} + \text{c.c.}) , \quad (3.6)$$

donde al considerar el complejo conjugado aseguramos que nuestro vector potencial sea real. Además los c_λ , que son coeficientes de la combinación lineal, podemos escogerlos de forma que las \mathbf{Q}_λ sean ortonormales entre sí para distintos modos, de la forma

$$|c_\lambda|^2 \int d^3r \mathbf{Q}_\lambda^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Q}_{\lambda'}(\mathbf{r}) = \delta_{\lambda, \lambda'} . \quad (3.7)$$

Es así que, dado (3.6) tenemos ya definidos nuestros campos. Especialmente nuestro campo eléctrico tomará la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\lambda} \omega_\lambda (c_\lambda a_\lambda \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{r}) e^{-i\omega_\lambda t} - \text{c.c.}) . \quad (3.8)$$

El método de cuantización canónico para pasar de campos clásico a los campos cuánticos, es a través del Hamiltoniano. De forma clásica, tal función toma la forma

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right) . \quad (3.9)$$

Para el caso en que expandamos nuestros campos como ondas planas, el Hamiltoniano se reduce a

$$H = \varepsilon_0 \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ,$$

que al hacer uso del campo eléctrico con la forma (3.8) y la relación (3.7) nos da

$$H = 2\varepsilon_0 \sum_{\lambda} \omega_\lambda^2 a_\lambda^* a_\lambda . \quad (3.10)$$

Pasando al lado cuántico, podemos relacionar lo anterior con el Hamiltoniano de varios osciladores cuánticos, igual a

$$\hat{H} = \sum_{\lambda} \hbar \omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.11)$$

Lo anterior nos permite hacer la identificación

$$\hat{a}_\lambda \rightarrow \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega_\lambda}{\hbar}} a_\lambda . \quad (3.12)$$

Así los operadores de creación/anihilación están relacionados con nuestras amplitudes a_λ obtenidas de una ecuación de onda. De esta forma identificamos al operador para el campo eléctrico, en el esquema de interacción de Heisenberg, como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2\varepsilon_0}} (\mathbf{q}_\lambda(\mathbf{r}) \hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} - \text{H.c.}) , \quad (3.13)$$

en donde hemos introducido \mathbf{q}_λ indicando funciones espaciales normalizadas.

3.1.2. Interacción átomos-campo

Nuestro objetivo es el estudio de la dinámica de un sistema atómico de varias partículas con un campo electromagnético cuantizado. El Hamiltoniano que describe tal dinámica tiene la forma

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{\text{int}}. \quad (3.14)$$

El primer término representa la energía libre del sistema atómico, que consideraremos un sistema de N emisores de dos niveles¹. Para el r -ésimo emisor tendremos un espacio cuya base es $\{|g\rangle_r, |e\rangle_r\}$ ², que representan los estados base y excitado respectivamente. Así, para la energía libre atómica tenemos

$$\hat{H}_a = \sum_{r=1}^N \left(E_e^{(r)} |e\rangle\langle e|_r + E_g^{(r)} |g\rangle\langle g|_r \right).$$

Si definimos como $\omega_0^{(r)}$ a la frecuencia de transición entre los niveles atómicos del r -ésimo emisor, donde podemos tomar como convención $E_e^{(r)} = \hbar\omega_0^{(r)}/2$ y $E_g^{(r)} = -\hbar\omega_0^{(r)}/2$, podemos reescribir al operador como

$$\hat{H}_a = \sum_{r=1}^N \frac{\hbar\omega_0^{(r)}}{2} (|e\rangle\langle e|_r - |g\rangle\langle g|_r) = \sum_{r=1}^N \frac{\hbar\omega_0^{(r)}}{2} \hat{\sigma}_3^{(r)}, \quad (3.15)$$

donde hemos usado el operador atómico $\hat{\sigma}_3^{(r)}$ introducido en (2.26).

Como segundo término tenemos el Hamiltoniano de la energía libre del campo, el cual toma la forma (3.11) independientemente de la expansión del perfil espacial en ondas planas o en otras geometrías [93]. Omitiendo la energía del punto cero³ el operador es igual a

$$\hat{H}_c = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}, \quad (3.16)$$

donde usamos α para etiquetar a los modos del campo electromagnético.

Finalmente tenemos el término de interacción entre el campo y el sistema atómico. Una buena aproximación para modelar el Hamiltoniano en nuestro caso, es considerar la *interacción dipolar*⁴. Suponiendo que cada átomo está localizado en la posición \mathbf{r}_r , este operador tiene la forma

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_r \hat{\mathbf{p}}^{(r)} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_r), \quad (3.19)$$

¹En la sección (3.8.2) justificaremos esta elección.

²A lo largo de este trabajo, usaremos indistintamente $|g\rangle = |0\rangle$ y $|e\rangle = |1\rangle$ para denotar los niveles de un qubit.

³Que al ser una constante podemos definirla como el origen de la energía para nuestro sistema.

⁴Una forma de modelar la interacción átomo-campo es través del Hamiltoniano de acoplamiento multipolar [93]. Los primeros términos del operador son (para un átomo localizado en \mathbf{r}_0)

$$\hat{H} = -\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) - \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_0) - \nabla \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) : \hat{\mathbf{Q}}, \quad (3.17)$$

donde tenemos los momentos dipolar eléctrico y magnético, $\hat{\mathbf{p}}$ y $\hat{\mathbf{m}}$. Y el momento cuadrupolar eléctrico del átomo $\hat{\mathbf{Q}}$. Finalmente tenemos el producto diádico $\nabla \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) : \hat{\mathbf{Q}} = \sum_{ij} \partial_i \hat{E}_j(\mathbf{r}_0) Q_{ij}$.

Una forma de comparar la contribución es calculando la tasa de transición de un estado atómico $|i\rangle$ a otro $|f\rangle$, separados por una frecuencia ω_0 , dado por la regla de oro de Fermi. Estos valores están dados por [94]

$$\gamma_{ED} = \frac{\omega_0^3 |\mathbf{p}|^2}{3\pi\hbar\epsilon_0 c^3}, \quad \gamma_{MD} = \frac{\omega_0^3 |\mathbf{m}|^2}{3\pi\hbar\epsilon_0 c^5}, \quad \gamma_{EQ} = \frac{\omega_0^5 \sum_{ij} |Q_{ij}|^2}{10\pi\hbar\epsilon_0 c^5}.$$

Una estimación rápida que es válida para los sistemas atómicos que consideraremos es [94] tomar $p_x = ea_0$, con a_0 el radio de Bohr, $m_z = \mu_B$ el magnetón de Bohr y $Q_{xy} = Q_{yx} = ea_0^2$, lo que nos da

$$\gamma_{ED} \sim 10^7 \text{ Hz}, \quad \gamma_{MD} \sim 10^3 \text{ Hz}, \quad \gamma_{EQ} \sim 10 \text{ Hz}. \quad (3.18)$$

Por lo que concluimos que en la transición domina la interacción dipolar eléctrica, así que podemos despreciar las demás contribuciones.

donde $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_r)$ es el operador de campo eléctrico, dado en (3.13), en el esquema de Schrödinger y evaluado en la posición del r -ésimo emisor. Por otro lado, $\hat{\mathbf{p}}^{(r)} = e\hat{\mathbf{r}}$ es el *operador de momento dipolar*, descrito por la carga e de un electrón y el operador de posición $\hat{\mathbf{r}}$. Siendo este, un operador que actúa en el espacio atómico, podemos expandir al operador de momento dipolar como

$$\hat{\mathbf{p}}^{(r)} = \mathbf{d}_{eg}^{*(r)}\hat{\sigma}_-^{(r)} + \mathbf{d}_{eg}^{(r)}\hat{\sigma}_+^{(r)}, \quad (3.20)$$

donde hacemos uso de los operadores atómicos de (2.26) y podemos considerar los elementos de matriz $\mathbf{d}_{eg}^{(r)} = {}_r\langle e|\hat{\mathbf{r}}|g\rangle_r$ como reales (siendo los términos diagonales cero). De esta forma

$$\hat{H}_{\text{int}} = -i \sum_r \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2\varepsilon_0}} \mathbf{d}_{eg}^{(r)} \left(\hat{\sigma}_-^{(r)} + \hat{\sigma}_+^{(r)} \right) \cdot \left(\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{r}_r)\hat{a}_\alpha - \mathbf{q}_\alpha^*(\mathbf{r}_r)\hat{a}_\alpha^\dagger \right) \quad (3.21)$$

$$= i\hbar \sum_r \sum_\alpha \left[G_{\alpha r}^* \hat{a}_\alpha^\dagger \left(\hat{\sigma}_-^{(r)} + \hat{\sigma}_+^{(r)} \right) - G_{\alpha r} \hat{a}_\alpha \left(\hat{\sigma}_-^{(r)} + \hat{\sigma}_+^{(r)} \right) \right], \quad (3.22)$$

donde se define $G_{\alpha r}$, la *constante de acoplamiento* entre el átomo y el campo, como

$$G_{\alpha r} = \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2\hbar\varepsilon_0}} \mathbf{d}_{eg}^{(r)} \cdot \mathbf{q}_\alpha(\mathbf{r}_r), \quad (3.23)$$

Como se expuso en la sección (2.3.2), ya que el Hamiltoniano está dividido en una evolución libre ($\hat{H}_0 = \hat{H}_a + \hat{H}_c$) y un acoplamiento entre subsistemas (\hat{H}_{int}) podemos usar el esquema de interacción. En tal esquema, la dinámica está dada por el Hamiltoniano de interacción transformado de la siguiente forma (tomando $t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}}(t) &= \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_{\text{int}} \hat{U}_0(t); \quad \hat{U}_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \\ &= -i\hbar \sum_r \sum_\alpha \left[G_{\alpha r} \hat{a}_\alpha \left(\hat{\sigma}_+^{(r)} e^{-i(\omega_\alpha - \omega_0)t} + \hat{\sigma}_-^{(r)} e^{-i(\omega_\alpha + \omega_0)t} \right) - G_{\alpha r}^* \hat{a}_\alpha^\dagger \left(\hat{\sigma}_-^{(r)} e^{i(\omega_\alpha - \omega_0)t} + \hat{\sigma}_+^{(r)} e^{i(\omega_\alpha + \omega_0)t} \right) \right] \end{aligned}$$

De los cuatro términos, tenemos $\hat{a}_\alpha \hat{\sigma}_-^{(r)}$ y $\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{\sigma}_+^{(r)}$ llamados *términos contra-rotantes*, cuya contribución podemos despreciar de la siguiente forma. Asumiremos que los términos que más contribuirán a nuestra dinámica son los casi-resonantes $\omega_\alpha \sim \omega_0$. Además, estamos interesados en una dinámica para tiempos mucho mayores a $|\omega_\alpha - \omega_0|^{-1}$. Cuando esto sucede, los términos $e^{\pm i(\omega_\alpha + \omega_0)t}$ oscilan mucho más rápido que los demás términos, por tanto podemos suponer que estos promedian a cero en los tiempos largos considerados. De esta forma podemos quedarnos solo con los términos $e^{\pm i(\omega_\alpha - \omega_0)t}$. Esta hipótesis es llamada *aproximación de onda-rotante* (RWA), y asumiéndolo nos queda el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = -i\hbar \sum_r \sum_\alpha \left(G_{\alpha r} \hat{a}_\alpha \hat{\sigma}_+^{(r)} e^{-i\Delta_\alpha t} - G_{\alpha r}^* \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{\sigma}_-^{(r)} e^{i\Delta_\alpha t} \right), \quad (3.24)$$

donde hemos introducido la *desintonía* $\Delta_\alpha = \omega_\alpha - \omega_0$.

3.1.3. Sistemas abiertos y ecuaciones maestras

Como ya mencionamos en el capítulo 2.3 un modelo de sistema compuesto que analizaremos en este trabajo es el de un subsistema \mathcal{H}_S que nos interesa estudiar, o podemos controlar, en interacción con otro \mathcal{H}_A que no conocemos completamente. Este segundo subsistema típicamente tiene un enorme número de grados de libertad, lo que nos impide controlarla o medirla de manera completa. A este subsistema lo denominaremos *ambiente*. En estos casos decimos que \mathcal{H}_S es un *sistema abierto*. En general, este modelo suele ser la descripción más realista para un sistema cuántico experimental, puesto que en general es difícil de aislar a un sistema cuántico de interés de otros subsistemas alrededor.

Ejemplo de ello es un sistema atómico compuesto de N partículas en interacción con los modos del campo electromagnético. En varias situaciones, el número de modos a considerar no solo es infinito sino que también continuo, por tanto deseamos tener un formalismo que nos permita estudiar solo las variables de nuestro interés.

Dado un sistema $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$, a través del formalismo del operador de estado reducido de la expresión (2.21), somos capaces de calcular los valores esperados de las observables de nuestro subsistema \mathcal{H}_S . Pero, como solo conocemos la evolución del estado cuántico del sistema total (ya sea con la ecuación de Schrödinger (2.9) para estados puros, o con la ecuación de Liouville-Von Neumann (2.16) para estados mixtos) necesitamos tomar en cuenta los estados de \mathcal{H}_A para conocer como evolucionan los valores esperados. Por tanto, nos gustaría tener una ecuación que solo nos permita conocer la evolución del operador de estado reducido $\hat{\rho}_S(t)$.

Para ello, consideremos un sistema cuántico **S** acoplado débilmente a un ambiente **A**. Supongamos que el Hamiltoniano del sistema total está dado por $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_A + g\hat{H}_{\text{int}}$, siendo \hat{H}_S y \hat{H}_A los Hamiltonianos libres y \hat{H}_{int} el que describe la interacción entre subsistemas, donde g es la constante de acoplamiento entre **S** y **A**. En el esquema de interacción la ecuación de Liouville Von Neumann del sistema total es

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{ig}{\hbar} \left[\hat{H}_{\text{int}}(t), \hat{\rho}(t) \right]. \quad (3.25)$$

Ahora consideremos la siguiente operación. La ecuación anterior la integramos de t_0 a t , y el resultado lo sustituimos en (3.25), para volver a integrar nuevamente. Finalmente trazamos los grados de libertad del ambiente. Haciendo esto llegamos a

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S(t) - \hat{\rho}_S(t_0) &= -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(\tau), \hat{\rho}(t_0) \right] \right) \\ &\quad + \frac{i^2 g^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(\tau), \left[\hat{H}_{\text{int}}(\tau'), \hat{\rho}(\tau') \right] \right] \right). \end{aligned}$$

Nuestro propósito es obtener una ecuación de movimiento que solo considere los grados de libertad de \mathcal{H}_S , pero en la expresión anterior aún tenemos variables pertenecientes a \mathcal{H}_A . Hasta el momento seguimos teniendo una ecuación exacta, pero ahora asumiremos dos hipótesis. La primera es que la condición inicial sea un estado separable, de forma que

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_A. \quad (3.26)$$

Lo segundo es suponer que $\text{tr}_A \left(\hat{H}_{\text{int}}(t) \hat{\rho}(t_0) \right) = 0$, lo cual se cumple si inicialmente el ambiente se encuentra en equilibrio térmico [95]. Considerando esto y haciendo el cambio de variables $t' = \tau$ y $t'' = \tau - \tau'$ encontramos

$$\hat{\rho}_S(t) = \hat{\rho}_S(t_0) - \frac{g^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_0^{t'-t_0} dt'' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(t'), \left[\hat{H}_{\text{int}}(t' - t''), \hat{\rho}(t' - t'') \right] \right] \right),$$

que al derivar respecto de t nos da

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{g^2}{\hbar^2} \int_0^{t-t_0} dt' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(t), \left[\hat{H}_{\text{int}}(t - t'), \hat{\rho}(t - t') \right] \right] \right). \quad (3.27)$$

Ya hemos conseguido una ecuación de movimiento para el operador de densidad reducido. Pero todavía hay una dependencia explícita con el ambiente. Para lograr nuestro objetivo, adicionalmente vamos a asumir que el operador de estado total a todo tiempo puede ser escrito como

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_A(t) + \hat{\chi}_{SA}(t),$$

donde $\hat{\chi}_{SA}(t)$ describe un estado enredado entre el sistema **S** y el ambiente al tiempo t . Dado lo anterior supondremos que el acoplamiento entre subsistemas es muy débil de forma que $\hat{\chi}_{SA} \sim O(g)$. Al pedir esto logramos dos cosas: la primera es que la expresión (3.27) sea suficiente para poder describir la ecuación de movimiento y no necesitemos más términos en la serie. La segunda es que podemos aproximar nuestro estado total a todo tiempo como

$$\hat{\rho}(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_A. \quad (3.28)$$

De otra forma, asumimos que el enredamiento entre los subsistemas **S** y **A** es despreciable debido a una interacción débil entre ellos. A esta aproximación se le llama *aproximación de Born* [34]. Asumiendo todo lo anterior llegamos a

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -\frac{g^2}{\hbar^2} \int_0^{t-t_0} dt' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(t), \left[\hat{H}_{\text{int}}(t-t'), \hat{\rho}_S(t-t') \otimes \hat{\rho}_A \right] \right] \right). \quad (3.29)$$

En la expresión anterior ya podemos tomar la traza parcial sobre el ambiente. Para poder ver esto, consideremos \hat{H}_{int} en el esquema de interacción de la forma

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hbar \sum_i \hat{s}_i(t) \hat{A}_i(t) \quad (3.30)$$

siendo \hat{s}_i operadores que actúan en \mathcal{H}_S y \hat{A}_i operadores en el espacio de \mathcal{H}_A . Sustituyendo (3.30) en (3.29) y usando la propiedades cíclicas de la traza veremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) &= -g^2 \sum_{i,j} \int_0^{t-t_0} dt' \left\{ F_{ij}(t-t') \left[\hat{s}_i(t) \hat{s}_j(t-t') \hat{\rho}_S(t-t') - \hat{s}_j(t-t') \hat{\rho}_S(t-t') \hat{s}_i(t) \right] \right. \\ &\quad \left. + F_{ij}^*(t-t') \left[\hat{\rho}_S(t-t') \hat{s}_j(t-t') \hat{s}_i(t) - \hat{s}_i(t) \hat{\rho}_S(t-t') \hat{s}_j(t-t') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde hemos definido las *funciones de correlación temporal*

$$F_{ij}(t-t') = \text{tr}_A \left(\hat{\rho}_A \hat{A}_i(t) \hat{A}_j(t-t') \right).$$

La relación anterior da lugar a una ecuación diferencial manejable cuando la funciones de correlación pueden considerarse funciones delta de Dirac, es decir, $F_{ij}(t-t') \sim \delta(t')$. Es posible aproximar las funciones de correlación de está forma cuando consideramos que el intervalo de tiempo τ_S en que podemos apreciar, como observadores, un cambio en el estado $\hat{\rho}_S(t)$ es mucho mayor al tiempo τ_c en que las funciones F_{ij} decaen [33,34]. A está hipótesis se le conoce como *Aproximación de Markov* y su uso tiene dos consecuencias sobre la expresión (3.29). Una de ellas, conocida como *primera aproximación de Markov*, es que podemos hacer el intercambio $\hat{\rho}_S(t-t') = \hat{\rho}_S(t)$. De esto obtenemos

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = - \int_0^{t-t_0} dt' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(t), \left[\hat{H}_{\text{int}}(t-t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_A \right] \right] \right), \quad (3.32)$$

relación conocida como *ecuación de Redfield*. La otra, conocida como *segunda aproximación de Markov* implica extender el límite superior de la integral a ∞ . Así,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = - \int_0^{\infty} dt' \text{tr}_A \left(\left[\hat{H}_{\text{int}}(t), \left[\hat{H}_{\text{int}}(t-t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_A \right] \right] \right). \quad (3.33)$$

Es importante mencionar que la escala de tiempo $\tau_c \ll \tau_S$ está relacionada a la condición de acoplamiento débil $g \ll 1$. De hecho, cuando $g \rightarrow 0$ tendremos que $\tau_S \rightarrow \infty$, por lo que las aproximaciones de Markov son más fáciles de satisfacer [95]. Por tanto, el asumir $\tau_c \ll \tau_S$ nos da la *aproximación*

de *Born-Markov* que es cuando podemos asumir la aproximación de Born y las aproximaciones de Markov, los cuales pueden ocurrir aunque el acoplamiento g no sea pequeño. Cuando la dinámica que estudiamos puede asumir tales aproximaciones la llamaremos *Markoviana*. Finalmente, aplicando la aproximación de Born-Markov a la expresión (3.31) nos da la *ecuación maestra de Lindblad*⁵.

Todo lo anterior lo podemos aplicar a nuestro sistema de N qubits interactuando con los modos α del campo electromagnético en el vacío. Si queremos describir una dinámica Markoviana para la evolución del subsistema atómico, entonces debemos resolver la ecuación de Lindblad para el operador de estado reducido de los átomos. Usando la expresión (3.31) junto con nuestro Hamiltoniano (3.24) además de las aproximaciones de Born-Markov, llegamos a la ecuación maestra

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_a(t) = -i \sum_{r,s} \Omega_{rs} \left[\hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)}, \hat{\rho}_a(t) \right] + \sum_{r,s} \gamma_{rs} \left(\hat{\sigma}_-^{(s)} \hat{\rho}_a(t) \hat{\sigma}_+^{(r)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \hat{\rho}_a(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a(t) \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \right). \quad (3.34)$$

El primer término de la ecuación anterior describe una interacción unitaria entre los átomos, que puede considerarse una interacción tipo dipolo-dipolo [29]. El *acoplamiento dipolar* de esta interacción está dado por

$$\Omega_{rs} = -\text{PV} \sum_{\alpha} \left(\frac{G_{\alpha r} G_{\alpha s}^*}{\omega_{\alpha} - \omega_0} - (-1)^{rs} \frac{G_{\alpha r}^* G_{\alpha s}}{\omega_{\alpha} + \omega_0} \right), \quad (3.35)$$

donde hemos usado las constantes $G_{\alpha r}$ de (3.23), y PV hace referencia al valor principal de Cauchy. Los términos diagonales Ω_{rr} describen un *corrimiento de frecuencias de Lamb* y pueden considerarse una contribución que podemos absorber en (3.15). Por otro lado, los términos no-diagonales Ω_{rs} para $r \neq s$ representan la *fuerza electrostática de Van der Waals* [29]. Finalmente la segunda contribución que encontramos en (3.34) son elementos que corresponden a una evolución no-Hermitiana. Estos términos codifican un proceso disipativo en donde los átomos emiten fotones en los distintos modos electromagnéticos α a costa de que pierdan su excitación atómica. Tal proceso es llamado *emisión espontánea* y su contribución está cuantificada por la tasas de decaimiento iguales a

$$\gamma_{rs} = 2\pi \sum_{\alpha} G_{\alpha r} G_{\alpha s}^* \delta(\omega_{\alpha} - \omega_0). \quad (3.36)$$

3.1.4. Efectos colectivos: superradianza

Los *efectos colectivos* surgen en los sistemas compuestos y son aquéllos que aparecen debido a la interacción entre varias partículas. Para el caso de los N qubits acoplados a un campo electromagnético en común podemos observar dos principales tipos de efectos [27]. Uno debido a la evolución Hermitiana (también llamado *coherente*) del sistema y son las interacciones tipo dipolo-dipolo entre los átomos que surgen del intercambio virtual de fotones entre los átomos [96]. El otro producto de un proceso no-Hermitiano (o *incoherente*) y es la emisión colectiva de fotones, donde las tasas de decaimiento del sistema colectivo aumenta (*superradianza*) o disminuye (*subradianza*) en comparación con las tasas de decaimiento de un emisor aislado.

Para ilustrar la superradianza consideremos un sistema de N átomos idénticos de dos niveles. Como ya mencionamos, para el objetivo de este trabajo podemos omitir el proceso coherente en el sistema compuesto. Enfocándonos solo en la parte incoherente un primer caso ideal es tomar a todos los emisores con la misma tasa de decaimiento $\gamma = \gamma_{rs}$. Así la ecuación (3.34) toma la forma de la *ecuación maestra superradiante* [29, 97–99] dada por

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_a(t) = \gamma \left[\hat{J}_- \hat{\rho}_a(t) \hat{J}_+ - \frac{1}{2} \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho}_a(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a(t) \hat{J}_+ \hat{J}_- \right], \quad (3.37)$$

donde hemos usado los operadores colectivos atómicos (2.28). Como vemos, esta ecuación es invariante ante las permutaciones de partículas lo que implica que es posible usar el subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ para

⁵Para que sea considerada ecuación maestra además se pide que se use la aproximación de onda rotante.

resolver la dinámica. Pero en lugar de usar la base de operadores simétricos (2.29), en este caso es más conveniente usar una base con los estados de Dicke. Para mayor claridad, notaremos los estados de Dicke como [63]

$$|j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{N!(j-m)!}} \left(\sum_{r=1}^N \sigma_-^{(r)} \right)^{j-m} |1, 1, 1, \dots, 1, 1\rangle \quad (3.38)$$

donde $j = N/2$ y $-j \leq m \leq j$ toma valores semi enteros. En tal notación representamos a un estado con $j+m$ átomos excitados y $j-m$ átomos en el estado base. En esta notación la acción de los operadores atómicos es

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle.$$

Así, para resolver (3.37) podemos tomar la base $\{|j, m\rangle \langle j', m'|\}$.

Al resolver la ecuación, uno de los resultados que podemos obtener es que $d\langle \hat{J}_3 \rangle / dt = -\gamma \langle \hat{J}_+ \hat{J}_- \rangle$ lo que implica que la tasa con que el sistema atómico pierde excitaciones es igual a $\langle \hat{J}_+ \hat{J}_- \rangle$, que es la intensidad de emisión [27]. Mientras que para una partícula la intensidad de la emisión es proporcional a $\langle \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(r)} \rangle$. [29]. Como resolvemos la dinámica usando los estados $|j, m\rangle$, algo que podemos observar inmediatamente es que

$$\langle j, m | \hat{J}_+ \hat{J}_- | j, m \rangle = (j+m)(j-m+1) \quad (3.39)$$

Del resultado anterior vemos que la intensidad de emisión incrementa de un valor $2j = N$ para $m = j$ (todos los átomos excitados) a un valor $j(j+1) = \frac{1}{2}N(\frac{1}{2}N+1)$ para $m = 0$ (la mitad del sistema desexcitado). Así la tasa de emisión de fotones va aumentando a medida que el sistema va desexcitándose hasta llegar a un máximo de emisión proporcional a N^2 para $M = 0$. Eventualmente este sistema termina con $m = -j$ donde la intensidad se hace cero, y el proceso de emisión termina.

La intensidad de emisión que escala hasta un valor N^2 está directamente relacionado con la creación de correlaciones entre los distintos dipolos individuales. Debido a que en el estado simétrico, el valor de expectación del producto $\hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)}$ para $r \neq s$ no debe de depender de las etiquetas r, s entonces podemos escribir [29]

$$\langle \hat{J}_+ \hat{J}_- \rangle = \left\langle \sum_k \hat{\sigma}_+^{(k)} \sum_l \hat{\sigma}_-^{(l)} \right\rangle = N \langle \hat{\sigma}_+^{(k)} \hat{\sigma}_-^{(k)} \rangle + N(N-1) \langle \hat{\sigma}_+^{(k)} \hat{\sigma}_-^{(l)} \rangle.$$

Así, el término N^2 está directamente relacionado con las correlaciones entre distintos átomos, y la superradianza se manifestará cuando tales correlaciones sean distintas de cero. Para nuestros estados de Dicke (3.38) obtenemos que la correlación entre átomos es igual a

$$\langle j, m | \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} | j, m \rangle = \frac{j^2 - m^2}{N(N-1)}. \quad (3.40)$$

Se observa que las correlaciones incrementan de 0 a $1/4$ en el intervalo de $m = N/2$ a $m = 0$, y vuelven a disminuir para valores menores a $m = 0$ hasta ser cero nuevamente en el caso $m = -N/2$.

El estudio de la superradianza comienza con Dicke en 1954, cuando investiga la emisión de un sistema de muchos átomos [28]. Dicke considero N átomos de dos niveles, todos ellos inicialmente en el estado excitado. En el proceso de desexcitación del sistema para alcanzar el estado base, se tendrán N fotones emitidos al espacio libre. Dicke explicó que si el sistema atómico se encuentra confinado en un volumen mucho menor a λ_0^3 (un sistema denso) entonces los emisores son indistinguibles. En este caso, el campo emitido tendrá un proceso de interferencia constructiva, de forma que la intensidad de la emisión será proporcional a N^2 . Esto contrasta con el decaimiento de un sistema mucho más diluido, donde la emisión de los átomos puede considerarse como independiente uno de otro, y la luz emitida es incoherentemente con una intensidad proporcional a N .

3.2. ¿Por qué considerar átomos acoplados a nanofibras?

3.2.1. Eficacia de la plataforma

Todo lo anterior lo queremos aplicar a un sistema en específico y es el de átomos acoplados a los modos del campo electromagnético de una nanofibra óptica. Por tanto cabe preguntar, ¿por qué queremos considerar la fibra nanométrica para estudiar electrodinámica cuántica? La primera razón que podemos dar para el estudio y desarrollo de sistemas atómicos en nanofibras es la ‘eficiente’ interacción entre luz (el campo electromagnético para ser más precisos) y materia que ofrece la plataforma [19]. Pero, ¿qué queremos expresar con *eficiente*? Para describir la interacción luz-materia, consideremos un solo átomo de dos niveles en el que incide un haz láser cuya frecuencia resuena con la transición atómica ω_0 (el cual tiene asociado una longitud de onda λ_0). La probabilidad de que un fotón del haz sea absorbido y re-emitado por el átomo en alguna otra dirección la podemos definir como [23]

$$p_{\text{int}} = \frac{A_{\text{atomo}}}{A_{\text{modo}}},$$

donde A_{modo} es el área en el que se enfoca el haz sobre el átomo. Por otro lado A_{atomo} expresa el ‘área transversal’ del átomo, que podemos modelarla como la sección transversal de dispersión $\sigma_0 = 3\lambda_0^2/2\pi$ [15]. Así, nuestra noción de eficiencia estará relacionada con poder obtener altas probabilidades de interacción luz-materia. Por lo que un objetivo es incrementar el valor de p_{int} , que puede hacerse de dos formas: disminuyendo A_{modo} lo que implica confinar cada vez más a los modos del campo, o aumentando el espacio ocupado por la materia A_{atomo} .

Una propuesta para disminuir el valor A_{modo} es enfocar el haz láser de tal manera que se logre una región (llamada *cintura del haz*), en la que el radio del láser sea el menor posible y confinar en esta región al sistema atómico. Propuestas para reducir el área de los modos del campo a través del enfoque son: usando lentes con una gran apertura numérica [100, 101], o a través del uso de espejos parabólicos [102, 103]. Tales propuestas han llegado a reportar valores similares a $p_{\text{int}} \sim 0.05$ para la interacción atómica. Por tanto, vemos que el valor de p_{int} no es tan alto, y esto es debido a que la difracción de la luz evita que los haces sean enfocados en una radio menor a las escalas de la longitud de onda [104]. Así que en general se tendrán valores $A_{\text{modo}} \gg \lambda_0^2$ lo que implica que $p_{\text{int}} \ll 1$ [23].

La propuesta más efectiva al problema de la interacción ha sido el uso de cavidades ópticas, en el cual se colocan átomos individuales entre dos espejos que permiten que la luz realice muchos viajes de ida dentro de la cavidad. De esta forma, la luz puede atravesar varias veces la sección del átomo, lo que permite incrementar la probabilidad de interacción [105]. Para las cavidades, la ‘eficacia’ está caracterizada por la *cooperatividad* definida por $C_1 \propto N_{\text{via}} A_{\text{atomo}}/A_{\text{modo}}$, donde $N_{\text{via}}/2$ indica el número de vueltas que da la luz. A diferencia de p_{int} , la cooperatividad ya no tiene el carácter de probabilidad pues es posible $C_1 > 1$ [15]. Aún así es un buen parámetro que nos interesará maximizar para cuantificar una mayor interacción entre el campo y los átomos. Para cavidades Fabry-Perot ha sido posible obtener valores $C_1 \sim 10 - 100$, lo cual se ha conseguido debido a la calidad de los espejos que permiten $N_{\text{via}} > 10^5$ [105]. Si en nuestra descripción introducimos la longitud L y la tasa de decaimiento κ de la cavidad, tendremos que $N_{\text{via}} = c/\kappa L$ y de esta forma $C_1 \propto Q\lambda_0^3/V_{\text{eff}}$, donde V_{eff} es el volumen del modo y $Q = \omega_c/\kappa$ es el factor de calidad [23] (donde ω_c denota la frecuencia del modo de la cavidad, que en general es $\omega_c \approx \omega_0$). Esta redefinición de C_1 permite ilustrar nuevamente que uno de los ingredientes esenciales para mejorar la interacción en el sistema es disminuir el confinamiento espacial de la luz, esta vez descrito por V_{eff} . La reducción del volumen del modo se ha conseguido en cavidades de galería susurrantes (*whispering gallery* en inglés) en donde se ha logrado reducir V_{eff} en un orden de magnitud comparado con los conseguidos en cavidades Fabry-Perot [106, 107].

El segundo ingrediente para aumentar los valores de p_{int} es el incrementar el espacio que ocupa la materia. En este aspecto, la tecnología de la superconductividad ha posibilitado la creación de circuitos cuánticos que se comportan como ‘átomos artificiales’ [108]. En tales sistemas, pueden fabricarse emisores cuánticos de tamaños efectivos $\sim 10^{-6} m$ que son significativamente mayores a los tamaños de los

modo empleados en la interacción, en contraposición a los átomos en donde tenemos $\sim 10^{-10} m$ [54]. Otra estrategia que podemos abordar es incrementar el área considerando un ensamble atómico con una gran número de emisores cuánticos N en lugar de átomos individuales. Para estos ensambles, un parámetro clave que nos permite caracterizar la interacción es la *profundidad óptica* (*optical depth* en inglés) [109], definido como

$$OD = N \frac{A_{\text{atomo}}}{A_{\text{modo}}}.$$

Vemos que para un sólo átomo el parámetro OD equivale a lo definíamos previamente como p_{int} . Una primera lectura del parámetro OD es ser el exponente con el que disminuye la intensidad transmitida (T) de un haz incidente sobre el ensamble de N átomos, es decir, $T = \exp(-OD)$ [23].

En resumen, para conseguir interacciones luz-átomos eficientes podemos fijarnos en dos ingredientes: confinar cada vez más los modos de luz, y/o aumentar el número de átomos. Como se mencionó previamente, para un solo átomo y haces enfocados de luz se han obtenido valores $OD \sim 0.05$. Pero una limitante para aumentar este valor con un gran número de átomos es la rápida divergencia de la cintura del haz enfocado. La longitud en la que podemos considerar que el haz está enfocado, en sistemas atómicos usuales, es $\sim 1 \mu m$ [19]. Es aquí donde el uso de fibras ópticas, con radios menores a las longitudes de onda del campo (de orden de nanómetros), toma relevancia. Primeramente porque permiten un estrecho confinamiento de los haces de luz. Como se describirá en subsecuentes secciones, una fracción significativa de la energía de los modos que se propagan a lo largo de la fibra viaja en los alrededores de la guía de onda (a lo que llamaremos *campo evanescente*). Así, para un sólo átomo acoplado a una nanofibra se ha obtenido un valor de hasta $OD \sim 0.3$ [22]. Por otro lado, este confinamiento es posible de realizar en longitudes del orden de centímetros, que es el largo en el que se produce una nanofibra hasta el momento [15]. Esta longitud hace más cómodo atrapar un mayor número de emisores, haciendo posible atrapar hasta un número $N \sim 10^3$ átomos en arreglos unidimensionales alrededor de la guía de onda [10]. Otro experimento con un número de emisores $N \approx 800$ ha reportado un valor de $OD \sim 66$ [20]. Estos altos valores para OD motivan la viabilidad de los sistemas átomos-nanofibras como una plataforma eficiente para el estudio de la interacción luz-materia [15].

3.2.2. Posibilidades de la plataforma

No solo la eficiencia nos motiva a considerar las nanofibras, pues vemos que hay otros sistemas que hasta el momento son más eficientes, como las cavidades ópticas. Además de la eficiencia que nos ofrecen los sistemas atómicos acoplados a nanofibras, una de las mayores motivaciones para considerar esta plataforma es la existencia de modos del campo electromagnético que se propagan a lo largo de una sola dimensión (y que llamaremos *modos guiados*). Estos modos al acoplarse a las partículas permiten que las emisiones atómicas sean en una dirección controlada, que incluso puede ser favorecida sobre las emisiones no deseadas al espacio libre [15]. Más aún, tales modos guiados, permiten interacciones atómicas de largo alcance que posibilitan las aparición de fenómenos colectivos en el sistema [8, 110]. Ejemplo de ello es la observación de superradianza. Si la tasa de emisión de un átomo a los modos de la fibra γ , al considerar sistemas compuestos de varias partículas podemos aumentar tal tasa de emisión a $N\gamma$. Podemos lograr esto mientras que la tasa de emisión a los modos del espacio libre se mantiene como el de una partículas, igual a $\Gamma - \gamma$ [23]. Esto permite describir a los arreglos atómicos unidimensionales cercanos a una nanofibra como *espejos perfectos*, pues la condición $N\gamma \ll \Gamma - \gamma$ implica una mayor probabilidad de que los modos guiados sean reflejados por los átomos en vez de ser dispersados a distintas direcciones [11]. Idealmente la fracción de luz que podemos reflejar es $\sim 2(\Gamma - \gamma)/N\gamma$ [111], resultado teórico que ha podido ser observado para un sistema de $N \approx 2000$ átomos, donde la reflectancia es alrededor de 75% [112]. Aunque tales modos guiados también están presentes en otros sistemas como en cavidades Fabry-Perot, las condiciones de frontera de una fibra circular ofrecen características ventajosas. Ejemplo de ello es un número continuo de frecuencias para

los modos guiados [113], o modos con distintas configuraciones geométricas (como se describirá en la siguiente sección) lo que permite el desarrollo de trampas ópticas con distintas configuraciones transversales [114, 115] o longitudinales [116] a lo largo de la nanofibra.

Por otro lado, el confinamiento estrecho del campo que permite una nanofibra posibilita la observación de efectos no-lineales como la Transparencia Electromagnéticamente Inducida (*EIT* en inglés) [15]. En este efecto, un *campo de prueba* con frecuencia cercana al de una transición atómica $|0\rangle$ y $|1\rangle$, incide sobre un ensamble de átomos. Un segundo campo más intenso que el primero llamado *campo de control* acopla uno de los dos estados a otro tercero $|s\rangle$. Esto provoca que el medio se vuelva transparente a las frecuencias cercanas a la transición atómica. Así, el campo de prueba se propaga a través del medio atómico, pero en forma de excitaciones acopladas de luz y átomos. Si adiabáticamente apagamos el campo de control, se reduce la velocidad de grupo del campo de prueba a cero. De esta forma mapeamos los modos cuánticos del campo de prueba a excitaciones puramente atómicas. Encendiendo nuevamente el campo de control podemos revertir el proceso, convirtiendo las excitaciones atómicas en excitaciones ópticas que puede seguir propagándose fuera del ensamble [117]. Esto puede explotarse para el desarrollo de dispositivos llamados *memorias cuánticas*, los cuales pueden almacenar información a nivel cuántico, permitiendo que la información pueda ser recuperada posteriormente [118]. La EIT ha sido tratada teóricamente para arreglos unidimensionales de átomos de tres niveles en la vecindad de una nanofibra donde los campos de prueba y de control se propagan a través de la guía de onda [119]. Tal fenómeno también ha podido ser observado experimentalmente, usando átomos de cesio en configuración Λ , se ha podido reducir la velocidad de grupo de pulsos de luz a 50 m/s y almacenar fotones por $2\ \mu\text{s}$ [120].

Finalmente resalta el hecho de que en sistemas nanofotónicos es posible usar la polarización del campo confinado en la guía para conseguir una dirección de propagación preferencial. Así los átomos pueden tener una mayor probabilidad de emisión hacia una de las direcciones de la fibra, fenómeno que abre el campo de la *Óptica Cuántica Quiral* [56]. Tal fenómeno ha podido ser observado al excitar los niveles de Zeeman de átomos de cesio, mediante un bombeo óptico con polarización circular definida y propagándose en una dirección transversal al eje de la fibra. Haciendo esto se reportó la diferencia entre las intensidades del campo que se propaga en dirección $+z$ y $-z$ de la fibra igual a $D = (|E_+|^2 - |E_-|^2) / (|E_+|^2 + |E_-|^2)$, llegándose a medir hasta un valor $|D| \approx 0.85$ [121]. Este fenómeno abre las puertas al desarrollo de diodos ópticos que puedan operar en escalas de intensidades muy pequeñas llegando al nivel de fotones individuales [122], lo cual es importantes para el desarrollo de redes de información cuántica [1]. Tal control de la luz a niveles cuánticos posibilita también la realización de los llamados *sistemas abiertos en cascada*, donde los fotones emitidos por un subsistema pueda ser coherentemente reabsorbido por otro subsistema, todo esto de manera recursiva para múltiples sistemas cuánticos acoplados a un mismo ambiente unidireccional [123]. Entender y poder realizar estos procesos permiten el desarrollo de la transmisión de información cuántica entre distintos nodos a través de un canal de comunicación [124].

3.3. Campo electromagnético en fibras ópticas

Ya en secciones anteriores hemos descrito como podemos cuantizar al campo electromagnético⁶ en el vacío. Toda esa discusión es aplicable en su totalidad al campo alrededor de una nanofibra. Pero en esta sección vamos a detallar las particularidades que tenemos al considerar una nanofibra y los campos que se propagan dentro de ella. Así, primeramente resumiremos la descripción clásica de los modos EM clásicos que se propagan alrededor y dentro de una fibra óptica, todo esto basado en [125–127].

De manera simple, una fibra óptica consiste en dos cilindros coaxiales dieléctricos que podemos considerar sin absorción para longitudes de onda ópticas e infrarrojas. Tal estructura es creada para transportar energía a través de ondas EM, en general para longitudes de ondas que se encuentran en la parte visible e infrarrojo del espectro de frecuencias. Al dieléctrico central lo denominaremos *núcleo*,

⁶En lo sucesivo, a veces usaremos *EM* para abreviar *electromagnético/a*

de radio a e índice de refracción $n_1(\mathbf{r}, \omega)$. De manera general el índice es una función de la posición y de la frecuencia de la onda que se propaga en la fibra, pero a lo largo de este trabajo vamos a hacer una “descripción básica” de los fenómenos que aparecen así que asumiremos que n_1 es una constante real. Es importante hacer énfasis de que el valor que tomamos es real puesto que esto implica que estamos despreciando los efectos de absorción del material. Por otro lado, el dieléctrico que rodea al núcleo lo denominaremos *revestimiento* con índice de refracción n_2 real y constante. Se debe de cumplir que $n_1 > n_2$ para que existan ondas EM que puedan propagarse a través de la fibra óptica. Este sistema de dos dieléctricos (representado en la Fig. 3.1) suele aislarse y protegerse mediante un tercer material denominado *cubierta*. Pero no la tomaremos en cuenta ya que en los experimentos con sistemas cuánticos la cubierta no está presente, de tal forma que el revestimiento lo consideraremos con extensión infinita.

Como ya describimos, podemos expandir los campos EM sin fuentes mediante funciones propias del operador diferencial $\nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2$, los cuales denominamos *modos del campo*. Estos están etiquetados por variables temporales (como la frecuencia) y por variables espaciales. Las fibras ópticas pueden guiar un número finito de modos espaciales del campo, es decir, un número finitos de perfiles espaciales. Basados en esta propiedad, clasificaremos a las fibras ópticas en dos tipos. Diremos que la fibra es *unimodal* cuando puede guiar un solo modo espacial del campo (y sus dos polarizaciones ortogonales). Por otro lado, suele llamarse guía *multimodal* a aquellos que soportan cientos o miles de modos espaciales. Para cuantificar está clasificación se utiliza el *parámetro* V definido como

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}, \quad (3.41)$$

siendo λ la longitud de onda que se propaga en la fibra. Si una fibra circular tiene un parámetro V de valor menor o igual a $V_0 = 2.405$ entonces la fibra será unimodal [125]. De la ecuación (3.41) podemos concluir que este comportamiento unimodal depende de la longitud de onda, por tanto habrá una longitud de corte

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{V_0} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}, \quad (3.42)$$

tal que si $\lambda > \lambda_c$ solo se propagará un modo espacial a lo largo de la fibra. Cabe aclarar que supondremos que $\lambda_0 \gg \lambda_c$ [8], por tanto la transición atómica se encuentra en la región de operación unimodal de la fibra.

3.3.1. Propagación del campo en fibras cilíndricas

Ahora calculemos que tipos de modos se propagan alrededor y dentro de una fibra óptica circular. Como ya comentamos, consideremos los medios dieléctricos que conforman a la fibra como lineales e isotrópicos, cuya permitividad eléctrica se relaciona con el índice de refracción de la forma $\varepsilon(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r})\varepsilon_0$. Considerando coordenadas cilíndricas tenemos

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & \text{para } r < a \\ n_2, & \text{para } r \geq a \end{cases}. \quad (3.43)$$

Vale la pena mencionar que en general la permitividad es una función de la frecuencia pero al dar un modelo básico de la interacción, aproximaremos la función como constante y real, lo que omite los efectos de absorción en el material. Además consideraremos los medios como no-magnéticos de forma que las permeabilidades pueden considerarse como las del vacío, $\mu = \mu_0$.

Bajos estas condiciones los campos $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}. \quad (3.44)$$

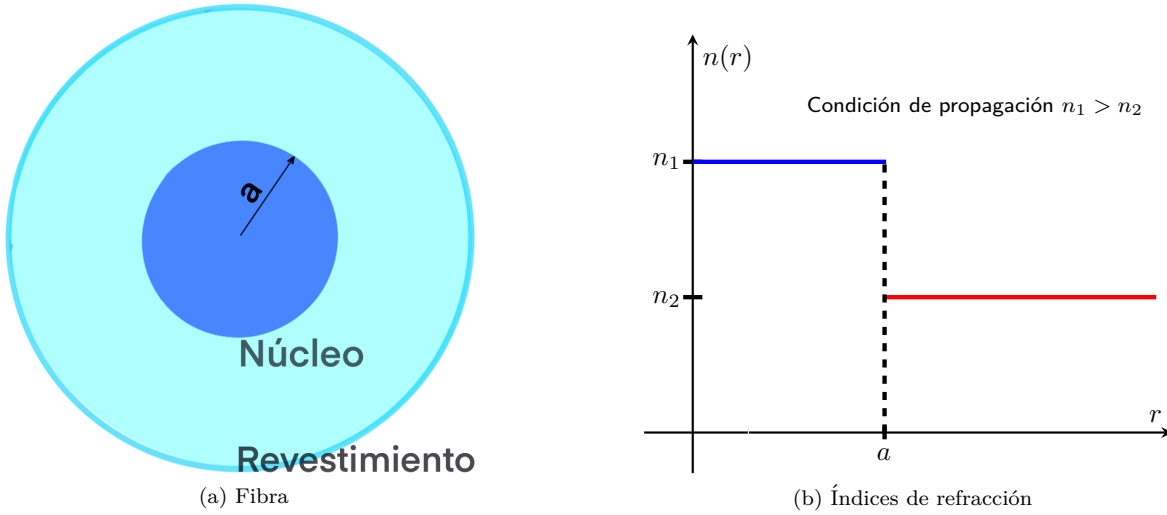


Figura 3.1: Representación esquemática de una fibra óptica. (a) Tenemos dos dieléctricos coaxiales. El dieléctrico del interior tiene radio a y lo denominamos *núcleo*. Este está rodeado por otro material llamado *revestimiento*. (b) Perfiles radiales del índice de refracción para los dieléctricos de la fibra. Consideraremos a ambos índices como constantes y reales. Para que se dé la condición de guía en la fibra se necesita que el índice del núcleo n_1 sea mayor al del revestimiento n_2 .

Podemos desacoplar estas ecuaciones y encontrar que el campo eléctrico satisface

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}.$$

Debido a la forma de $n(\mathbf{r})$ se satisface que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, así nuestra ecuación toma una forma similar a (3.3), pero difiere en que la velocidad de la onda es una función del espacio. De esta forma podemos proponer una separación de variables de forma que la parte temporal satisface que $\mathbf{E}(t) \sim e^{-i\omega t}$. Así, para la parte espacial se satisface que

$$(\nabla^2 - k^2 n^2(\mathbf{r})) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.45)$$

siendo $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ el número de onda.

Al trabajar con una fibra cilíndrica con corte transversal circular consideraremos las coordenadas cilíndricas $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$, donde el eje z es paralelo al tendido de la fibra óptica. Proponemos que sobre este eje se propagan las ondas a lo largo de la fibra, por tanto podemos proponer el perfil espacial de nuestro campo como $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \phi) e^{-i\beta z}$, siendo β una constante de propagación sobre z . Considerando esto, la ecuación de Helmholtz de nuestro problema toma la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - (\beta^2 - n^2(r)k^2) \right) \mathbf{E}(r, \phi) = 0.$$

Viendo la ecuación anterior concluimos que nuevamente podemos hacer una separación de variables. Esta separación se puede hacer de forma que proponemos $\mathbf{E}(\phi) \sim e^{-im\phi}$. Como se debe de cumplir que $\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}(2\pi)$ obtenemos $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, es decir, m es un entero. Por tanto llegamos finalmente a una ecuación para la parte radial dada por

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - (\beta^2 - n^2(r)k^2) \right) \mathbf{E}(r) = 0, \quad (3.46)$$

el cual es una ecuación diferencial de Bessel.

Encontrada la solución para la parte radial, podemos escribir el perfil espacial de los modos del campo eléctrico dados por la siguiente forma. Tendremos para el campo eléctrico en el núcleo, $r < a$, los modos [125]

$$\begin{aligned} E_{r,\pm}^m(r, \phi, z) &= -\frac{i\beta}{h^2} \left[AhJ'_m(hr) \pm \frac{i\mu_0\omega m}{\beta r} BJ_m(hr) \right] e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}, \\ E_{\phi,\pm}^m(r, \phi, z) &= -\frac{i\beta}{h^2} \left[-\frac{\mu_0\omega h}{\beta} BJ'_m(hr) \pm \frac{im}{r} AJ_m(hr) \right] e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}, \\ E_{z,\pm}^m(r, \phi, z) &= AJ_m(hr) e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}. \end{aligned}$$

donde recordemos que β es la constante de propagación del modo a lo largo del eje z . El parámetro m es un entero positivo que identifica el orden del modo y su momento angular. En las soluciones encontramos que hay una elección de signo \pm , que hace referencia a las dos polarizaciones del campo. La parte radial nos da las funciones de Bessel de orden m , J_m , y su derivada, J'_m . Para simplificar la expresión, se ha introducido la *constante de propagación modificada* $h = \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}$. Finalmente introducimos A , B constantes que podemos encontrar imponiendo las condiciones de frontera.

Por otro lado, el campo en el revestimiento, $r \geq a$, los modos espaciales del campo eléctrico tiene como solución [125]

$$\begin{aligned} E_{r,\pm}^m(r, \phi, z) &= \frac{i\beta}{q^2} \left[Chf'_m(qr) \pm \frac{i\mu_0\omega m}{\beta r} Df_m(qr) \right] e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}, \\ E_{\phi,\pm}^m(r, \phi, z) &= \frac{i\beta}{q^2} \left[-\frac{\mu_0\omega q}{\beta} Df'_m(qr) \pm \frac{im}{r} Cf_m(qr) \right] e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}, \\ E_{z,\pm}^m(r, \phi, z) &= Cf_m(qr) e^{i(\omega t - \beta z \pm m\phi)}. \end{aligned}$$

Otra constante de propagación modificada que introducimos es $q = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2}$, y C , D son otras dos constantes que encontramos por las condiciones de frontera. Para la parte radial introducimos f_m para denotar dos tipos de funciones que son solución. Si la función $f_m(qr)$ es igual a,

1. **$\mathbf{K}_m(\mathbf{qr})$, funciones modificadas de Bessel de segundo tipo de orden m :**

estamos considerando soluciones que únicamente se propagan a lo largo de la guía de onda. Para observar esto notemos que si $qr \gg 1$, en el perfil radial podemos aproximar $K_m(qr) \sim \sqrt{\pi/(2qr)} e^{-qr}$ para cualquier orden m [128], lo que significa que estos modos están ligados a la fibra. A estas soluciones las llamaremos *modos guiados* o *modos ligados* pues únicamente pueden propagarse cerca de la fibra óptica.

2. **$\mathbf{H}_m(\mathbf{qr})$, funciones de Hankel de primer tipo de orden m :**

tenemos soluciones que también se propagan en la coordenada r , pues para $qr \gg 1$ podemos hacer la aproximación $H_m(qr) \sim \sqrt{2/(\pi qr)} e^{-i(qr - m\pi/2 - \pi/4)}$ [128]. A estas soluciones que pueden seguir propagándose lejos de la guía de onda les llamaremos *modos radiados*.

Como mencionamos, la fibra óptica nos provee de condiciones de frontera que debemos satisfacer. En la interfaz entre el núcleo y el revestimiento los campos deben de cumplir

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}|_{r \geq a} - \mathbf{E}|_{r < a})|_{r=a} = 0, \quad \hat{n} \cdot (\mathbf{H}|_{r \geq a} - \mathbf{H}|_{r < a})|_{r=a} = 0,$$

donde $\hat{n} = \hat{r}$, $\hat{\phi}$. Aquí solo hemos mostrado explícitamente las soluciones del campo eléctrico, pues es el único que nos interesa para escribir la interacción dipolar entre átomos y los modos, pero las formas del campo magnético pueden consultarse en [15, 125]. Las condiciones de frontera nos impondrán los valores de las constantes B/A , C/A y D/A . Por tanto, el campo eléctrico estará completamente especificado si encontramos los valores de A y las constantes de propagación β . Para los campos clásicos, la constante A se determina usando la conservación de la energía. Para ello se normaliza el promedio temporal del vector de Poynting en la dirección z respecto a la potencia de entrada [15]. Tal energía de entrada es la de un campo eléctrico, como el de un láser, llamado *campo de sondeo*.

3.3.2. Constante de propagación β

Como ya comentamos, la fibra óptica solo puede transportar un número finito de modos espaciales. Para ser más precisos, solo habrá un número finito de modos guiados propagándose a lo largo del eje z , pues los modos radiados tienen la capacidad de propagarse radialmente. La condición que nos permitirá conocer que modos guiados pueden propagarse a lo largo de la fibra está dado por la constante de propagación β .

Teniendo las constantes A, B, C y D solo nos falta encontrar la constante de propagación en la dirección z . Para los modos guiados estas constantes satisfacen [15]

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \pm \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{qa} \right)^2 \right] \left[\frac{J'_m(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right]^{-1} \\ \frac{C}{A} &= \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)} \\ \frac{D}{A} &= \frac{B}{A} \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)} - \frac{m^2\beta^2}{k^2} \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{qa} \right)^2 \right]^2.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Volviendo a colocar las componentes E_r, E_ϕ, E_z en la ecuación (3.45) obtenemos las condiciones para β , el cual satisface la ecuación

$$\frac{J_{m-1}(ha)}{haJ_m(ha)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{4n_1^2} \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} + \frac{1}{h^2a^2} \pm R, \quad (3.48)$$

donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{4n_1^2} \right)^2 \left[\frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right]^2 + \frac{m^2\beta^2}{n_1^2k^2} \left[\left(\frac{1}{ha} \right)^2 + \left(\frac{1}{qa} \right)^2 \right]^2}.$$

La elección del signo \pm corresponde a modos EH y HE⁷, respectivamente. Así, dado un valor para el parámetro V y un orden m la ecuación (3.48) tendrá l soluciones posibles de β . Por tanto, los modos espaciales los etiquetaremos mediante dos variables que son m, l . Dado un modo del campo $\mathbf{E}_{m,l}$ recordemos que la expresión (3.42) nos da una condición de corte para el cual, a partir de cierta λ_c , la fibra se comporta de forma unimodal y los distintos modos ya no pueden propagarse, excepto HE₁₁ llamado *modo fundamental de la fibra*. En este trabajo consideramos fibras unimodales, cuyas $V < 2.405$, por lo que solo se propagará a través de la guía el *modo fundamental* con $m = 1, l = 1$, y sus dos polarizaciones [8]. Esto considerando longitudes de onda alrededor de $\lambda_0 \gg \lambda_c$.

Es de utilidad puntualizar que la constante de propagación está limitada por la desigualdad $n_1k > \beta > n_2k$. [127]. Por tanto, dada la única solución del modo fundamental podemos definir un índice de refracción efectivo n_{ef} tal que

$$|\beta| = n_{\text{ef}}k = n_{\text{ef}} \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v_g}; \quad n_1 > n_{\text{ef}} > n_2. \quad (3.49)$$

Así, para el modo fundamental definimos la velocidad de onda $v_g = c/n_{\text{ef}}$, el cual coincide con la *velocidad de grupo* de un pulso dentro de la fibra. Finalmente para los modos radiados no tenemos condiciones que limiten su propagación en la dirección z , y esencialmente son soluciones cuyas distribuciones de intensidad llenan la región del revestimiento. Por lo que únicamente se requerirá que $-n_2k < \beta < n_2k$, lo que implica que los valores de β forman un continuo [125]. De esta forma, al tener descrito los modos clásicos del problema, podemos proceder a la cuantización de los campos electromagnéticos.

⁷Esta notación hace referencia a la polarización de los modos. Tenemos modos TE ($E_z = 0$), modos TM ($H_z = 0$) y modos híbridos ($E_z \neq 0, H_z \neq 0$). Dentro de los modos híbridos tenemos HE y EH que denotan si el campo eléctrico o magnético tiene mayor contribución sobre el eje de propagación z .

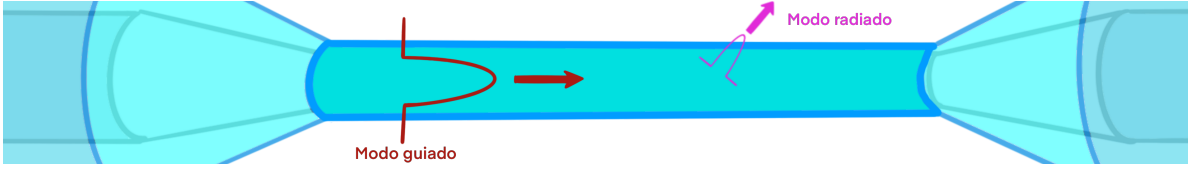


Figura 3.2: Representación esquemática de los modos en una nanofibra donde consideramos al vacío como el revestimiento. Los *modos guiados* son aquellos que se encuentran ligados a la fibra y que solo se propagan a través de ella. Los *modos radiados* pueden propagarse fuera de la fibra y alejarse de ella.

3.4. Cuantización del campo eléctrico alrededor de una nanofibra

En la sección 3.1.1 mostramos el método canónico para cuantizar los campos EM en el vacío. Ahora mostraremos la cuantización para un medio dieléctrico lineal y sin absorción como lo es nuestro modelo de una nanofibra circular. Cabe recalcar que el método general para hacer la cuantización en un material dieléctrico lineal ha sido descrito por Glauber y Lewenstein [129], pero la descripción que se hará a continuación fue derivada por Le Kien *et al* y publicada en [8]. Recordemos que estamos considerando una fibra cuyo núcleo tiene radio a e índice de refracción n_1 real debido a que podemos despreciar los efectos de absorción en la nanofibra⁸. El revestimiento de la fibra lo supondremos el vacío, por lo que el índice de refracción es $n_2 = 1$ ⁹. Como vimos en la sección anterior, el campo eléctrico se descompone en *modos guiados* y *modos radiados*, así la parte del campo eléctrico con frecuencias positivas $\mathbf{E}^{(+)}$ (ilustrados en la Fig. 3.2) podemos escribirla como

$$\mathbf{E}^{(+)} = \mathbf{E}_{\text{rad}}^{(+)} + \mathbf{E}_{\text{guiado}}^{(+)} . \quad (3.52)$$

Describimos este vector usando las coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , siendo la coordenada z un eje paralelo al eje de la fibra. Finalmente consideramos a la nanofibra como unimodal de forma que solo se propaga el modo fundamental para longitudes de onda alrededor de λ_0 .

La parte del campo para los modos guiados estará etiquetado por los índice $\mu = (\omega, f, p)$. Siendo

⁸Esta aproximación puede cuantificarse considerando las tasas de decaimiento de los *modos evanescentes* de la fibra [130]. En el caso de materiales con permitividad eléctrica compleja $\varepsilon(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}$, la constante de propagación β será en general compleja. En este caso podemos agregar una clasificación más a los modos guiados, que es

- *Modos propagantes* para $\Im(\beta) = 0$ (parte imaginaria).
- *Modos evanescentes* para $\Re(\beta) = 0$ (parte real).

Cuando consideramos los modos evanescentes las excitaciones atómicas pueden disiparse no solo como emisión de fotones sino además como energía térmica en la fibra, proceso cuantificado por la tasa de decaimiento térmica γ_{th} . Se satisface que

$$\frac{\gamma_{\text{th}}}{\Gamma} = \Im\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right) \frac{3}{32k^3(r - a)^3} , \quad (3.50)$$

donde Γ es la tasa de emisión total (modos radiados más modos propagantes) y r la posición indica la posición radial de los átomos. Así, la tasa térmica domina sobre las de emisión cuando

$$\frac{r - a}{\lambda} < \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{32} \frac{\Im(\varepsilon)}{\Re(\varepsilon)^2}} \sim 10^{-5} \quad (3.51)$$

donde hemos considerado que para el silicio $\Re(\varepsilon) \sim 1.5$ y $\Im(\varepsilon) \sim 10^{-9}$. Esto implica que γ_{th} solo tiene relevancia cuando $r - a < 1\text{Å}$. Esta discusión puede consultarse en [131]. Finalmente cabe aclarar que cuando nos referiremos a los modos propagantes como modos guiados.

⁹Cabe aclarar que durante el escrito en ocasiones se hará explícito la etiqueta n_2 , y en ciertas ocasiones solo se usará su valor

ω la frecuencia del modo y $f = \pm 1$ denota la dirección de propagación del modo sobre el eje z ¹⁰. Finalmente tenemos $p = \pm 1$, que denota el sentido de rotación de la polarización (anti-horario u horario). Así, para los modos guiados el operador del campo es

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{guiado}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{f,p} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega\beta'}{4\pi\epsilon_0}} \hat{a}_\mu \mathbf{e}^{(\mu)}(r) e^{-i(\omega t - f\beta z - p\phi)}. \quad (3.53)$$

Hemos introducido $\beta' = d\beta/d\omega = 1/v_g$, y la función de perfil transversal $\mathbf{e}^{(\mu)} = \mathbf{e}^{(\mu)}(r)$, que como ya hemos visto está descrito en términos de funciones de Bessel. En el Apéndice B se muestra la forma explícita de las funciones de perfil para la nanofibra. Estas funciones satisfacen la condición de normalización dada por

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr n^2(r) \left| \mathbf{e}^{(\mu)} \right|^2 r = 1, \quad (3.54)$$

donde el índice de refracción es igual a (3.43). Finalmente tenemos el operador de aniquilación de fotones \hat{a}_μ el cual obedece la regla de conmutación

$$\left[a_\mu, a_{\mu'}^\dagger \right] = \delta(\omega - \omega') \delta_{f, f'} \delta_{p, p'}. \quad (3.55)$$

Para los modos radiados usaremos la etiqueta $\nu = (\omega, \beta, m)$. En este caso, β ya no es una constante como ocurre con los modos guiados, sino que su valor varía continuamente de $-kn_2$ a kn_2 con $k = \omega/c$ [132]. Adicionalmente agregamos el valor m correspondiente al orden del modo el cual toma valores enteros. Así, el campo eléctrico del modo de radiación tiene la forma

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{rad}}^{(+)}(r, \phi, z, t) = i \sum_m \int_0^\infty d\omega \int_{-kn_2}^{kn_2} d\beta \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}} \hat{a}_\nu \mathbf{e}^{(\nu)}(r) e^{-i(\omega t - \beta z - m\phi)}. \quad (3.56)$$

Las funciones de perfil (dadas explícitamente en B) siguen la regla de normalización

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr n^2(r) \left| \mathbf{e}^{(\nu)} \right|^2 r = 1, \quad (3.57)$$

y para los operadores de aniquilación y creación tendremos

$$\left[a_\nu, a_{\nu'}^\dagger \right] = \delta(\omega - \omega') \delta(\beta - \beta') \delta_{m, m'}. \quad (3.58)$$

3.5. Interacción de N átomos con el campo de una nanofibra

Una vez identificado el operador del campo eléctrico de nuestro problema podemos observar que es posible aplicar todo lo expuesto en la sección 3.1.2 para modelar la interacción átomos-campo. Para ello, consideremos N átomos idénticos, donde el r -ésimo emisor está localizado en (r_r, ϕ_r, z_r) . Recordemos que nuestra interacción entre átomos y modos lo modelamos bajo la interacción dipolar de la ecuación (3.19), pero ahora usaremos los campos cuantizados (3.53) y (3.56). Bajo el esquema de interacción el Hamiltoniano es

$$\hat{H}_{\text{int}} = -i\hbar \sum_\alpha \sum_{r=1}^N G_{\alpha r} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{a}_\alpha e^{-i\Delta_\alpha t} + \text{H.c.} \quad (3.59)$$

¹⁰Como convención diremos que los modos son *propagantes* cuando $f = +1$ y *contra-propagantes* en el otro caso

Seguimos usando la etiqueta α englobando con ello a los modos guiados y radiados, de forma que $\alpha = \mu, \nu$. Y para la nanofibra ya podemos identificar que la suma de modos es igual a $\sum_{\alpha} = \sum_{\mu} + \sum_{\nu} = \sum_{fp} \int_0^{\infty} d\omega + \sum_m \int_0^{\infty} d\omega \int_{-kn_2}^{kn_2} d\beta$. Los coeficientes $G_{\mu r}$ y $G_{\nu r}$ son el acoplamiento del r -ésimo átomo con el modo guiado y con el modo radiado respectivamente, y explícitamente tienen la forma

$$\begin{aligned} G_{\mu r} &= \sqrt{\frac{\omega_{\mu}}{4\pi\epsilon_0\hbar v_g}} \left[\mathbf{d}_{eg}^{(r)} \cdot \mathbf{e}^{(\mu)}(r_r) \right] e^{i(f\beta z_r + p\phi_r)}, \\ G_{\nu r} &= \sqrt{\frac{\omega_{\nu}}{4\pi\epsilon_0\hbar}} \left[\mathbf{d}_{eg}^{(r)} \cdot \mathbf{e}^{(\nu)}(r_r) \right] e^{i(\beta z_r + m\phi_r)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Si queremos describir una dinámica Markoviana podemos usar la ecuación maestra de Lindblad (3.34). Para las tasas de decaimiento y los coeficientes de acoplamiento dipolar entre átomos podemos hacer la división entre las contribuciones de los modos guiados y los modos radiados, iguales a

$$\gamma_{rs} = \gamma_{rs}^{(g)} + \gamma_{rs}^{(rad)}, \quad \Omega_{rs} = \Omega_{rs}^{(g)} + \Omega_{rs}^{(rad)}.$$

Definiendo la etiqueta $\nu_0 = (\omega_0, \beta, m)$, podemos escribir las contribuciones de los modos radiados como

$$\begin{aligned} \gamma_{rs}^{(rad)} &= 2\pi \sum_m \int_{-kn_2}^{kn_2} d\beta G_{\nu_0 r} G_{\nu_0 s}^*, \\ \Omega_{rs}^{(rad)} &= -\text{PV} \left[\int_0^{\infty} d\omega \sum_m \int_{-\omega n_2/c}^{\omega n_2/c} d\beta \left(\frac{G_{\nu r} G_{\nu s}^*}{\omega - \omega_0} - (-1)^{r+s} \frac{G_{\nu r}^* G_{\nu s}}{\omega + \omega_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, la contribución de los modos guiados está dado por

$$\begin{aligned} \gamma_{rs}^{(g)} &= 2\pi \sum_{fp} G_{\mu_0 r} G_{\mu_0 s}^*, \\ \Omega_{rs}^{(g)} &= -\text{PV} \left[\int_0^{\infty} d\omega \sum_{fp} \left(\frac{G_{\mu r} G_{\mu s}^*}{\omega - \omega_0} - (-1)^{r+s} \frac{G_{\mu r}^* G_{\mu s}}{\omega + \omega_0} \right) \right], \end{aligned}$$

con $\mu_0 = (\omega_0, f, p)$. Siendo más específicos, si consideremos que el vector de momento dipolar de todos los átomos apunta sobre el eje z y tiene una magnitud d_r encontraremos que [9]

$$\gamma_{rs}^{(g)} = \frac{2\omega_0}{\epsilon_0 \hbar v_g} d_r d_s e_z^{(\mu_0)}(r_r) e_z^{*(\mu_0)}(r_s) \cos(\phi_r - \phi_s) \cos \left[\frac{\omega_0}{v_g} (z_r - z_s) \right], \quad (3.61)$$

$$\gamma_{rs}^{(rad)} = \frac{2\omega_0}{\epsilon_0 \hbar} d_r d_s \sum_m \int_0^{\omega_0 c} d\beta e_z^{(\nu)}(r_r) e_z^{*(\nu)}(r_s) \cos[m(\phi_r - \phi_s)] \cos[\beta(z_r - z_s)], \quad (3.62)$$

$$\Omega_{rs}^{(g)} \approx \frac{\omega_0}{\epsilon_0 \hbar v_g} d_r d_s e_z^{(\mu_0)}(r_r) e_z^{*(\mu_0)}(r_s) \cos(\phi_r - \phi_s) \sin \left[\frac{\omega_0}{v_g} (z_r - z_s) \right]. \quad (3.63)$$

No mostramos la expresión de $\Omega_{rs}^{(rad)}$ porque es una cantidad difícil de evaluar incluso de manera numérica. Pero una aproximación a su valor sería considerar la solución del acoplamiento dipolar en el vacío (sin la presencia de la fibra), lo que nos ayuda a justificar que $\Omega_{ij}^{(rad)}$ suele decaer rápidamente a medida que $|z_r - z_s|$ va aumentando, de forma que podemos despreciar su contribución cuando la separación entre átomos es similar a λ_0 [133] o mayor. Lo mismo se ha reportado para el término no-diagonal de $\gamma^{(rad)}$, que decae con la separación interatómica de forma que a distancias similares a λ_0 podemos considerar solo el término diagonal [132]. Así para el caso Markoviano podemos hacer la aproximación $\Omega_{rs} \approx \Omega_{rs}^{(g)}$, el cual no decae con la separación entre átomos. Sino que decrecerá conforme

los átomos se vayan alejando de la superficie de la fibra, comportamiento que también comparten las tasas de decaimiento dadas por los modos guiados. Como en este trabajo vamos a explorar el comportamiento de la emisión de fotones, vamos a omitir la contribución del acoplamiento dipolar. Esto es posible debido a la expresión (3.63), en donde podemos considerar átomos en un arreglo dimensional y elegir separaciones iguales a $\omega_0(z_r - z_s)/v_g = n\pi$ siendo n un entero, lo que resulta en $\Omega_{rs} = 0$. Agregando esta hipótesis nuestra ecuación maestra de (3.34) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_a(t) = \sum_{r,s} \gamma_{rs} \left(\hat{\sigma}_-^{(s)} \hat{\rho}_a(t) \hat{\sigma}_+^{(r)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \hat{\rho}_a(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}_a(t) \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \right). \quad (3.64)$$

Para átomos idénticos también podemos tomar tasas de decaimiento iguales, de forma que definimos $\gamma_{10} = \gamma_{rr}^{(rad)}$ y $\gamma = \gamma_{rs}^{(g)}$. En base a esto, para un sólo átomo podemos definir la tasa de decaimiento total $\Gamma = \gamma_{10} + \gamma$. Esta ecuación maestra de Lindblad y bajo los parámetros definidos es la que usaremos en la primera parte de este proyecto.

3.6. Superradianza en nanofibras

En la sección 3.1.4 dimos una primera descripción a la superradianza y su conexión con el subespacio simétrico. Pero para la ecuación maestra superradiante (3.37) no consideramos el término hermitiano, $-\hbar \sum_{rs} \Omega_{rs} [\hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)}, \hat{\rho}_a(t)]$. El efecto de este término hermitiano ha sido estudiado en detalle, y se ha observado que tal interacción lleva una pérdida de las correlaciones dipolo-dipolo [134]. Si como en el caso de Dicke [28] consideramos un sistema atómico denso (por ejemplo con separaciones interatómicas mucho menores a λ_0) ya hemos visto que no podemos omitir ninguna contribución de Ω_{rs} . Así se introduce un problema en nuestro sistema, y es que $\Omega_{rs}^{(rad)}$ rompe la simetría ante el intercambio de partículas, pues el término depende de las configuraciones entre vecinos [29]. Por tanto, la ecuación superradiante se considera como un caso ideal del problema. Pero la introducción de sistemas atómicos alrededor de nanofibras nos permite una interacción dipolo-dipolo de largo alcance, que en ciertas configuraciones atómicas es simétrica ante cualquier permutación [8, 110], incluso podemos prescindir de ella como vimos en la sección pasada. Es así que el estudio del decaimiento colectivo ha sido posibilitado por la nanofibras [9].

Aún así, una deficiencia de usar la ecuación maestra superradiante es que solo considera el decaimiento colectivo de los átomos, sin considerar términos de decaimiento individual de cada emisor (dados por los modos guiados en el caso de la nanofibra). En este aspecto, Clemens y Carmichael [135] comentan que al inicio de un proceso de emisión se tiene una competencia entre los decaimientos colectivos y no-colectivos, y los términos no-colectivos (decaimiento independiente) se vuelven más relevantes en sistemas con pocos átomos, pues no hay suficiente tiempo para que el efecto colectivo se desarrolle antes de que todas las excitaciones sean emitidas. Pero la inclusión de las emisiones independientes en la ecuación superradiante (3.37) abona una enorme cantidad de grados de libertad lo que dificulta el estudio de las emisiones colectivas e independientes. Por lo que en la literatura se han hecho estudios analíticos para un número menor a 6 átomos [6, 136–140], y para ensambles con un número mayor de partículas se han usando métodos numéricos como el *método de trayectorias cuánticas* [6, 135, 141]. Para una solución más general de N átomos previamente ha habido resultados analíticos para una excitación [7, 8]. Bajo este contexto, uno de los resultados de esta tesis doctoral es mostrar la solución de la dinámica de la emisión de N átomos en general, pero considerando que el sistema atómico tiene a lo más cuatro excitaciones iniciales [58], lo cual se describirá en el siguiente capítulo.

La introducción de la nanofibra para la interacción entre sistemas atómicos permite, entre otras cosas, que las ecuaciones que describen la disipación individual y/o el término de interacción dipolo-dipolo también puedan ser simétricas ante permutaciones de átomos [8, 64], como podemos observar mediante los coeficientes (3.61)-(3.63), donde vemos una estructura periódica en las expresiones. Pero si consideramos la disipación independiente en la descripción, el uso de los estados de Dicke $|N, k\rangle\langle N', k'|$

resultan inconvenientes e incompletos para tratar tal término [6, 135]. Aún más, si consideramos sistemas con separaciones interatómicas mucho mayores a lo permitido en el modelo de Dicke (posible en átomos-nanofibras), los estados de Dicke (3.38) empiezan a ser incompletos pues el sistema atómico ya no es indistinguible. Aún en estas condiciones, es posible seguir considerando simetrías si consideramos átomos idénticos e idénticamente preparados. En este caso las simetrías ante permutaciones se darán en el *subespacio de operadores* $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$, donde podemos hacer uso *base de operadores simétricos* (2.29) [64, 65].

3.6.1. Observación experimental de superradianza

El modelo de Dicke (un sistema atómico denso y simétrico) ya comentado es difícil de realizar de forma experimental pues implica preparar un gran número de átomos, cuyas configuraciones vecinales sean iguales para todos los emisores, y esto todo en un volumen más pequeño que las longitudes de onda emitidas [29]. La configuración atómica regular idéntica para todas las partículas, necesaria para considerar la simetría en la interacción dipolo-dipolo es la más complicada de realizar. Por lo que es común proponer directamente eliminar tal término considerando un confinamiento más grande. Una forma de lograr esto es poniendo al sistema atómico en una cavidad óptica lo que permite lograr la emisión colectiva aún para sistemas atómicos diluidos [142], donde ha sido posible observar los fenómenos de superradianza para átomos colocados en arreglos cuya separación es $\sim \lambda_0/2$ [143–145].

Además de los sistemas atómicos en cavidades, de manera más reciente se han considerado sistemas atómicos acoplados a guías de onda. Estos nos ofrecen interacciones de largo alcance que no se limitan al tamaño de una cavidad ($\sim 100 \mu m$ para el caso de una cavidad Fabry-Perot [105]), lo que nos permite llegar a acoplar emisores cuánticos separados en el orden de metros, incluso kilómetros, necesarios en la implementación de redes cuánticas a gran escala [146]. Sumado a esto, las nanofibras permiten acoplar a los átomos con un número continuo de modos del campo (en el rango de $600 - 1200 nm$ para una gran transmitancia [147]), contrario a las cavidades donde el acoplamiento se da a un número discreto de modos. Esto relaja las restricciones que aparecen al trabajar con espectros de frecuencias tan estrechos ($\Delta\omega_{FWHM} \sim 10 MHz \rightarrow \Delta\lambda \sim 10^{-4} nm$ para las cavidades [146]), como el afinar y mantener el modo de la cavidad en resonancia con la frecuencia de transición atómica [113]. Finalmente, las interacciones dipolo-dipolo dado por Ω_{ij} pueden ser simétricas para arreglos de átomos [8], eliminando los inconvenientes dados por la parte unitaria de la evolución. Así, los sistemas átomos-nanofibras también han posibilitado la observación de la super-radianza en el régimen óptico [14], aún para átomos con separaciones del orden de decenas y centenas de veces la longitud de onda emitida λ_0 [9].

3.7. Más allá de la dinámica Markoviana

La interacción N átomos con los modos del campo electromagnético presentan como obstáculo para su estudio el enorme número de grados de libertad que presenta. Primeramente por un espacio atómico $\mathcal{H}_2^{\otimes N}$ de dimensión 2^N (o 4^N si queremos también introducir un estudio a los estados mixtos), sino que aparte la descripción de infinitos modos del campo electromagnético que hay cercanos a una nanofibra, que incluso son etiquetados por variables continuas como la frecuencia. Para sortear al menos los grados de libertad del campo podemos usar la descripción Markoviana del sistema, lo cual nos da la evolución del sistema atómico reducido a través de la ecuación maestra (3.34), así que cabe preguntarnos: ¿hasta dónde podemos fiarnos de esta descripción y tratar de prescindir las variables del campo?

Una de las primeras interpretaciones que se da a una dinámica Markoviana en el contexto del formalismo cuántico, es aquella en la que el subsistema ambiente A no guarda información que pueda modificar la evolución del subsistema de interés S en tiempos subsecuentes, de forma que la emisión de información cuántica del subsistema al ambiente sea irreversible [148]. Estos efectos de memoria no siempre pueden ser despreciados, de forma que durante la evolución de un subsistema S hay pérdida y

recuperación de propiedades cuánticas como la coherencia cuántica, las correlaciones, el enredamiento cuántico, etc. Cuando esto suceda estaremos hablando de que el sistema sigue una evolución no-Markoviana. En la literatura existen varias propuestas para tratar de definir y medir de manera clara y exacta cuando un sistema es Markoviano o no-Markoviano, o para medir el grado de memoria de un sistema [149–154]. Así, nuestra definición para el presente estudio será considerarla como los casos en los que no podemos asumir en su totalidad a la aproximación de Born y/o a las aproximaciones de Markov descritas en la sección 3.1.3. Existen varias fuentes para el comportamiento no-Markoviano en los sistemas cuánticos abiertos, como por ejemplo densidades espectrales ambientales estructuradas, correlaciones no-locales entre grados de libertad del ambiente, un fuerte acoplamiento entre sistema-ambiente, bajas temperaturas, correlaciones iniciales entre sistema-ambiente, entre otros [95, 148, 155, 156]. El estudio de sistemas no-Markovianos se han llevado a cabo en estados atómicos colectivos acoplados a ambientes estructurados [157, 158] y para el régimen de acoplamiento fuerte [159].

Entonces, ¿en que situaciones de interés para el presente trabajo no se puede asumir la dinámica Markoviana? Los modos electromagnéticos presentes en una nanofibra permiten que los átomos interactúen mediante un ambiente en común unidimensional, lo que hace posible la interacción incluso a largas distancias [15, 53, 55]. Este aspecto es esencial para el envío de información cuántica a largas distancias, lo que posibilita la construcción de una red a gran escala que permita la interacción y evolución de sistemas cuánticos [1, 2]. Si la distancia entre los emisores es menor, o incluso centenas de veces, la longitud de onda emitida, se puede estudiar al sistema en un régimen en el que se desprecien los *efectos de retroalimentación* en el sistema dado por la existencia de *tiempos de retardo*. Es decir, si consideramos que el tiempo que le toma viajar a un fotón emitido de un átomo a otro es muchísimo menor a los tiempos en que observamos el decaimiento de excitaciones (igual $1/\Gamma$) podemos usar la descripción Markoviana [160]. Pero consideremos lo siguiente, a medida que aumenta la distancia entre los emisores el tiempo que le toma viajar un fotón va ser cada vez más relevante. Durante este tiempo, una excitación atómica pasa al ambiente y un tiempo después podríamos observar que excita a otro átomo en el sistema. Este fenómeno que es debido a la existencia de un tiempo de retardo ya no puede ser ignorado, y debe de tomarse en cuenta en sistema cuánticos separados por un retardo que ya no puede ser ignorado, incluso llegando a distancias macroscópicas hasta de cientos de kilómetros [161–163].

Es en el interés de tener sistemas de información cuántica a largas distancias lo que nos lleva a estudiar fenómenos no-Markovianos. Cuando los átomos están separados a distancias comparables a c/Γ , el sistema entra en una dinámica llamada *retroalimentación coherente retardada en el tiempo*, en el que las aproximaciones de Born-Markov ya no son completamente válidas [45, 164], especialmente porque no es posible despreciar el enredamiento entre el subsistema atómico y el ambiente como se demostrará en el capítulo 5. Ejemplo de ello ha sido el estudiado de dos átomos distantes con una excitación, en donde se ha observado nuevos efectos colectivos como tasas de emisión colectiva que superan las de la superradianza de Dicke (fenómeno llamado *superduperradianza*) y la formación de estados ligados átomo-fotón altamente deslocalizados [45, 47, 165–167].

3.8. Parámetros físicos y experimentales para átomos-nanofibra

Para dar un mejor contexto sobre el modelo físico en el que se desarrolla el proyecto, se darán a continuación algunos datos obtenidos de grupos experimentales en átomos-nanofibras localizados en Maryland¹¹, Okinawa¹² y Berlín¹³, haciéndose mayor énfasis en el primer grupo debido a las observaciones que han realizado de sub- y super- radianza para separaciones interatómicas mayores a las longitudes de luz emitidas [9].

¹¹<https://groups.jqi.umd.edu/rolston/research/atoms-squids>

¹²<https://groups.oist.jp/light>

¹³https://www.physics.hu-berlin.de/en/gop-en/research_en/nanofiber-based-atom-trap

3.8.1. La fibra

La fabricación de nanofibras usualmente consiste en calentar y alargar una fibra óptica comercial sin romperla. Las fibras comerciales usadas tienen un revestimiento cuyo diámetro exterior es $\sim 125 \mu\text{m}$, y un núcleo de diámetro $\sim 5 \mu\text{m}$ [51]. La guía de onda es modificada hasta obtener una zona nanométrica denominada *cintura*, que es una región donde el núcleo original ha sido forzado a desaparecer y el revestimiento inicial pasa a tomar el rol de núcleo. El núcleo conseguido (donde se llevarán a cabo las interacciones con los átomos) tiene un diámetro de alrededor de $\sim 500 \text{nm}$, puede alcanzar una longitud del rango de decenas de milímetros, y tiene un índice de refracción $n_1 \sim 1.45$ [51, 52, 168]. En la Fig. 3.3 se muestra un esquema de la fibra después del proceso de modificación.

Para un modo fundamental con una longitud de onda igual a 780nm se ha observado una transmisión del 99.95% [52], lo que justifica la omisión de los efectos de absorción o difracción en el modelo. Así, considerando una nanofibra de radio 250nm con $n_1 = 1.5$ y modos de longitud de onda 780nm encontraremos un parámetro $V \approx 2.25$, lo que nos asegura que podamos trabajar con una fibra unimodal. Valores de $V \sim 2$ ya son estándares en experimentos con nanofibras, pero V puede reducirse aún más al considerar núcleos de menor radio, donde se han podido reportar hasta $a \sim 150 \text{nm}$ [15].

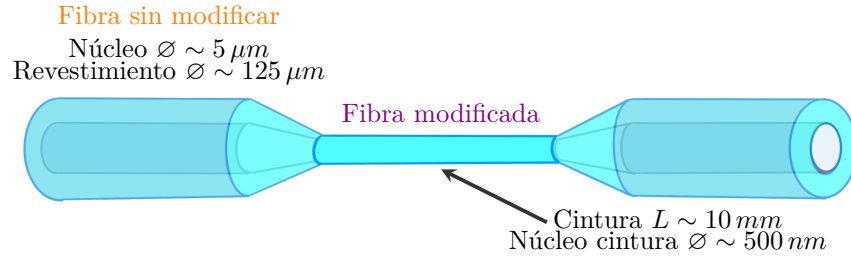


Figura 3.3: Esquema de la fibra usada en interacciones átomos-nanofibra. Se modifica una fibra comercial para lograr una región (cintura) en donde se tiene un dieléctrico con núcleo nanométrico. L denota el largo de la región, y \varnothing el diámetro.

3.8.2. El sistema atómico

En la cintura de la fibra se coloca una nube atómica, usualmente de átomos de ^{87}Rb atrapados por una MOT [15, 19], donde la nube atómica está compuesta de alrededor de $\sim 10^8$ partículas [169]. Como el estado base tomamos $|0\rangle = |5^2S_{1/2}\rangle$, y para el estado excitado $|1\rangle = |5^2S_{3/2}\rangle$. Esto nos otorga una transición atómica cuya longitud de onda es $\lambda_0 = 780 \text{nm}$ [9, 169]. Cabe mencionar, que otra opción usada es la transición $6^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$ de átomos de ^{133}Cs de 852nm [19, 112, 168]. Retomando los átomos de ^{87}Rb tendremos una tasa de emisión $\Gamma^{-1} = 26.24 \text{ns}$ [9].

De la nube atómica es posible extraer un arreglo unidimensional de átomos [15, 19]. Para ello se envían a través de la nanofibra dos haces láser en el primer modo fundamental del modo guiado ($m = 1, l = 1$). Un láser hacia el rojo ($\sim 1060 \text{nm}$) y fuera de resonancia con λ_0 , crea un potencial atractivo, mientras que un láser hacia el azul ($\sim 750 \text{nm}$) crea un potencial repulsivo, resultando de ambas un mínimo de potencial donde los átomos pueden mantenerse a distancia r constante de la nanofibra, atrapados a una temperatura de decenas [15] o centenas de μK [112] dependiendo de la distancia. El confinamiento longitudinal de los átomos puede lograrse enviando otros dos haces láser fuera de resonancia y hacia el rojo, contra-propagantes de forma que se crea una onda estacionaria. De esta forma se puede crear un arreglo unidimensional sobre el eje z [9, 10, 15, 19, 112]. Finalmente el confinamiento azimutal es posible usando haces con polarización cuasi-lineal [20, 168].

De esta forma se han reportado arreglos con 2000 átomos [112], así como otros con decenas de átomos [9, 20]. Para experimentos de sub- y super- radianza, los átomos están separados una distancia de $\sim 30 \text{nm}$ de la superficie de la fibra para lo cual se ha reportado que la tasa de decaimiento $\gamma \sim 0.13 \Gamma$.

En otros experimentos con separaciones mayores a 200 nm han reportado $\gamma \sim 0.01\Gamma$ [112, 168]. Y para la separación interatómica normalmente se tienen distancias de $\lambda_0/2$ [19], pero se han logrado separaciones de $\sim 200\text{--}300\ \mu\text{m}$, el cual se encuentra en el orden de centenas de longitudes de onda de la luz emitida [9]. Finalmente recordemos que para que consideremos efectos no-Markovianos pedimos que la distancia interatómica sea del orden de $|z_r - z_s| \sim c/\Gamma$. Considerando los datos arriba mostrados podemos estimar que la distancia interatómica debe de ser del orden de 1 m para poder observar los efectos de retardo. Esta estimación es la que tendremos en mente al hablar de los efectos no-Markovianos.

Capítulo 4

Sistema Markoviano

En este capítulo resolvemos la dinámica de la emisión de fotones por parte de un sistema de N átomos de dos niveles cercanos a una nanofibra, de forma que los modos radiados y guiados descritos en el capítulo anterior, dan paso a procesos de emisión independientes y colectivos. Asumiremos que los átomos se encuentran en un arreglo unidimensional, cuya separación entre vecinos es del orden de λ_0 (la longitud de onda que emiten los átomos) de forma que podemos suponer que las condiciones para considerar una dinámica Markoviana se cumplen (ver sección 3.1.3). Así, una de las aproximaciones que aceptamos es la de Born, la que nos permite despreocuparnos de los grados de libertad del ambiente. Por tanto, nos podemos enfocar en la parte atómica, para poder dar soluciones a un sistema general de N de átomos. Parte de los resultados que presentamos en este capítulo forman parte del artículo [58].

La ecuación maestra completa que gobierna esta dinámica es

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\rho}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, |\tilde{\rho}(t)\rangle \right] + \check{L} |\tilde{\rho}(t)\rangle. \quad (4.1)$$

En la parte unitaria de la evolución tenemos el Hamiltoniano libre de los átomos encontrado en (3.15) dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sum_{r=1}^N \hat{\sigma}_3^{(r)}, \quad (4.2)$$

donde al tener partículas idénticas consideramos que la frecuencia de emisión es la misma para todos los átomos, $\omega_0^{(r)} = \omega_0$. Por otra parte tenemos la interacción dipolar-dipolar entre átomos mediados por el campo que hemos encontrado en (3.34)

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{r,s} \Omega_{r,s} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)}. \quad (4.3)$$

Para el acoplamiento dipolar tenemos dos términos, esto debido a los modos de una nanofibra, $\Omega_{rs} = \Omega_{rs}^{(g)} + \Omega_{rs}^{(rad)}$. La contribución de los modos radiados $\Omega_{rs}^{(rad)}$ puede desprejarse a separaciones interatómicas del orden de λ_0 . Y la parte de los modos guiados $\Omega_{rs}^{(g)}$ podemos omitirlos cuando $|z_r - z_s| = n\pi v_g/\omega_0$, siendo v_g la velocidad del modo fundamental en la nanofibra (ver sección 3.5). Asumiendo estas suposiciones podremos prescindir de (4.3) en la ecuación maestra.

La parte no-Hermitiana de la evolución está descrita por el Lindbladiano $\check{L} = \check{L}'_i + \check{L}'_c$. El primer término corresponde al decaimiento independiente de los átomos y está dado por los términos diagonales de la tasa de decaimiento γ_{rr} . Este término está modelado por

$$\check{L}'_i \bullet = (\gamma_{10} + \gamma) \sum_{r=1}^N \left(\hat{\sigma}_-^{(r)} \bullet \hat{\sigma}_+^{(r)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(r)} \bullet - \frac{1}{2} \bullet \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(r)} \right), \quad (4.4)$$

donde $\gamma_{10} = \gamma_{rr}^{(rad)}$ y $\gamma = \gamma_{rr}^{(g)}$, que serán iguales para todos los átomos. Por otro lado, el segundo Lindbladiano corresponde a la emisión colectiva que en el sistema átomos-nanofibra está dado por los modos guiados [170], y que está cuantificado por los términos no-diagonales de la tasa de decaimiento γ_{rs} con $r \neq s$

$$\check{L}'_{c\bullet} = \gamma \sum_{r \neq s=1}^N \left(\hat{\sigma}_-^{(s)} \bullet \hat{\sigma}_+^{(r)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \bullet - \frac{1}{2} \bullet \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(s)} \right). \quad (4.5)$$

Recordemos que para lo anterior hemos supuesto que podemos despreciar $\gamma_{rs}^{(rad)}$ y definimos $\gamma = \gamma_{rs}^{(g)} = \gamma_{rr}^{(g)}$.

Una variable que es de utilidad es la tasa de decaimiento total de un emisor igual a $\Gamma = \gamma_{10} + \gamma$. Notemos que podemos considerar que los átomos no interactúan entre ellos cuando $\gamma = 0$ y $\Gamma = \gamma_{10}$. Con el uso de Γ podemos redefinir nuestros el Lindbladiano total de la forma $\check{L} = \check{L}_i + \check{L}_c$, donde

$$\check{L}_i \bullet = (\Gamma - \gamma) \sum_{\mu=1}^N \left(\hat{\sigma}_-^{(\mu)} \bullet \hat{\sigma}_+^{(\mu)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \bullet - \frac{1}{2} \bullet \hat{\sigma}_+^{(\mu)} \hat{\sigma}_-^{(\mu)} \right), \quad (4.6)$$

$$\check{L}_c \bullet = \gamma \left[\hat{J}_- \bullet \hat{J}_+ - \frac{1}{2} \hat{J}_+ \hat{J}_- \bullet - \frac{1}{2} \bullet \hat{J}_+ \hat{J}_- \right]. \quad (4.7)$$

Notemos que (4.7) es el término que aparece en la ecuación maestra superradiante (3.37). Pero en nuestro modelo agregamos un término de emisión independiente \check{L}_i . Aún así todos los términos en nuestra ecuación son simétricos ante cualquier intercambio de etiquetas por lo que podemos restringir la evolución del sistema dentro del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$. Esto, cuando consideremos condiciones iniciales dentro de tal subespacio. Cabe aclarar que el uso del subespacio simétrico en el contexto de sistemas cuánticos abiertos no implica que el sistema atómico sea indistinguible. Aún más, ya que permitimos que los fotones emitidos interactúen con el ambiente, los átomos son distinguibles en el sentido de que podemos describir de donde proviene cada fotón emitido. Hacemos uso del subespacio simétrico ya que la ecuación (4.1) es totalmente simétrica. Esto se debe a que consideramos átomos con las mismas condiciones, i.e., mismas frecuencias de transición, mismos acoplamientos con el campo, etc. Ejemplos donde aparecen los términos de disipación independientes y colectivos que se consideran en este proyecto son: átomos cercanos a nanoguías de onda [132] (que es el caso de estudio de este trabajo, y el cual ilustramos en la Fig. 4.1) o átomos dentro de cavidades imperfectas [6]. Sistemas que ya han sido tratados anteriormente, pero para pocos átomos o considerando simulaciones numéricas [6, 36–38, 62, 64, 66, 135–137]

Simplificaremos aún más la ecuación maestra (4.1) trabajando la evolución en el esquema de interacción definido en 2.3.2. Para ello consideramos

$$|\rho(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\tilde{\rho}(t)\rangle \hat{U}(t, t_0)$$

con $\hat{U}(t, t_0) = \exp(-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar)$. Por simplicidad usaremos el tiempo inicial $t_0 = 0$. Para la transformación del Lindbladiano total usamos que $\hat{U}^\dagger(t) \hat{\sigma}_\pm^{(r)} \hat{U}(t) = e^{\pm i\omega_0 t} \hat{\sigma}_\pm^{(r)}$ por lo que \check{L} queda invariante ante la transformación. Así la ecuación maestra que queda es

$$\frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle = \check{L} |\rho(t)\rangle, \quad (4.8)$$

el cual modela dos procesos de emisión espontánea: el primero es la disipación independiente donde los átomos emiten fotones hacia los modos de radiación; y segundo tenemos la disipación colectiva debido al acoplamiento entre átomos producto de los modos guiados.

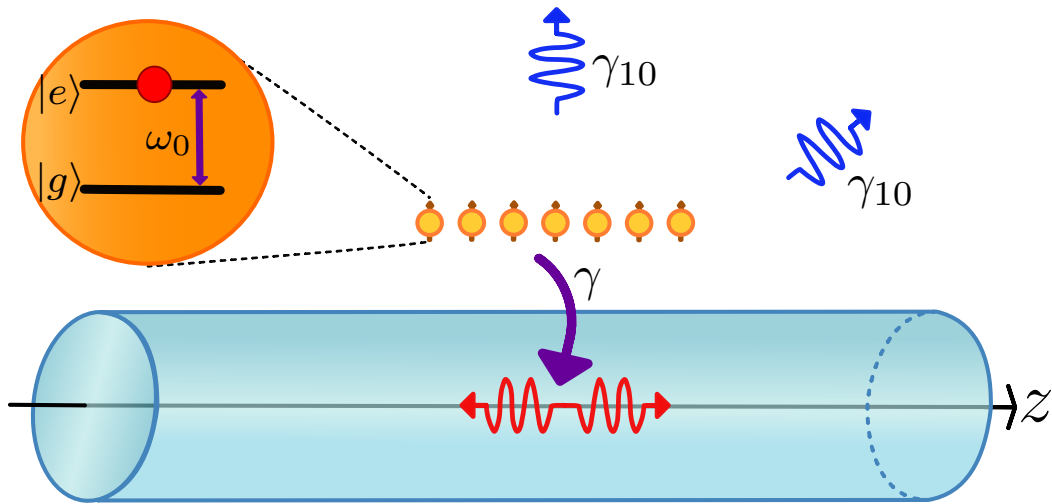


Figura 4.1: Representación de los dos canales de disipación en un sistema abierto de N átomos de dos niveles cercanos a una nanofibra. Se muestran los modos de radiación, representados por \check{L}_i , en el cual los átomos emiten al espacio libre con una tasa de decaimiento γ_{10} y a cualquier dirección. Por otra parte tenemos los modos guiados, \check{L}_c , en donde los átomos emiten a lo largo de la nanofibra con tasa γ . Los modos guiados son los que permiten que los átomos interactúen aunque estén separados a largas distancias.

4.1. Base de decaimiento para la emisión independiente

Notemos que nuestra ecuación de movimiento es de la forma (2.17) para un superoperador no-Hermitiano, por tanto haremos uso del método de la base de decaimiento descrito en la sección (2.2.2). Ya que podemos trabajar en el subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$, haremos uso de la base de operadores simétricos (2.29) para expandir al operador de estado $|\rho(t)\rangle$. Mientras que, cualquier observable o superoperador podemos expresarlo con los superoperadores colectivos (2.30).

El primer método que aplicamos es obtener la base de decaimiento para el decaimiento independiente dado por el Lindbladiano \check{L}_i . Para ello, lo primero que podemos hacer es reescribir al superoperador \check{L}_i en términos de los superoperadores colectivos \check{A}_+^{ij} , como resultado obtenemos que

$$\check{L}_i |\rho\rangle = \gamma_{10} \left[\check{A}_+^{00} - \check{A}_+^{11} - \frac{1}{2} \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{01} \right) \right] |\rho\rangle, \quad (4.9)$$

donde por usamos la variable $\gamma_{10} = \Gamma - \gamma$. Para reescribir este mapeo podemos usar el diccionario entre superoperadores mostrado en el Apéndice A. Dado lo anterior podemos proponer las ecuaciones de eigenvalores. Para ello, proponemos que cualquier operador eigenvector puede escribirse como la siguiente combinación lineal

$$|\rho_{sym}\rangle = \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01} n_{10} n_{11}} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}, \quad (4.10)$$

donde las c son constantes de la expansión, y que queremos determinar. Usando la acción de los superoperadores colectivos vemos que la acción de \check{L}_i sobre la base de operadores simétricos es igual a

$$\check{L}_i \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} = \gamma_{10} \left[n_{11} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}-1}^{n_{00}+1 n_{01}} - n_{11} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} - \frac{n_{10} + n_{01}}{2} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right].$$

Usando esta igualdad llegamos a la relación de recurrencia que necesitamos resolver para obtener los eigenvectores. Tal ecuación nos da que los coeficientes siguen la regla

$$c \begin{matrix} n_{00}-1 & n_{01} \\ n_{10} & n_{11}+1 \end{matrix} = \frac{1}{n_{11}+1} \left(\frac{N}{2} + \frac{n_{11}-n_{00}}{2} + \frac{\lambda}{\gamma_{10}} \right) c \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix}. \quad (4.11)$$

Al resolver tal relación de recurrencia encontramos que los eigenvalores son

$$\lambda_{\alpha,\delta} = -\gamma_{10} \left[\frac{N-\alpha}{2} + \delta \right], \quad (4.12)$$

donde $\alpha = n_{00} + n_{11}$ y $0 \leq \delta \leq \alpha$ es un entero. Por lo tanto los eigenvectores derechos del problema del decaimiento independiente son los siguientes

$$|\alpha, \delta\rangle_n = (-1)^\delta \binom{N}{\alpha} \binom{N-\alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \hat{Q}^{\alpha-n_{11} \quad N-\alpha-n}_{n \quad n_{11}}, \quad (4.13)$$

donde por simplicidad denotamos $n = n_{10}$, etiqueta que nos permite diferenciar a los distintos eigenvectores degenerados. Cabe mencionar que el eigenvector con $\alpha = N$ y $\delta = 0$ representa al estado base del sistema atómico, que es elemento del subespacio simétrico y puede representarse por \hat{Q}^0_0 . Es importante recalcar que este eigenvector es el único que representa un operador de estado por sí mismo, ya que los otros eigenvectores obtenidos no representan estados físicos debido a que su traza es igual cero. Aún así, cualquier estado físico que pertenezca al subespacio $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ puede ser representado por combinaciones lineales de estos operadores $|\alpha, \delta\rangle_n$.

Los eigenvectores derechos (4.13) son degenerados debido a que la etiqueta n puede tomar distintos valores, específicamente $0 \leq n \leq N - \alpha$. Pero al hacer un conteo de todos los eigenvectores distintos que podemos formar dado N , encontraremos que el número de eigenvectores $|\alpha, \delta\rangle_n$ que se tiene es

$$\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\delta=0}^{\alpha} (N - \alpha + 1) = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6},$$

el cual corresponde a la dimensión del subespacio simétrico $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$. Ya que por construcción los (4.13) son linealmente independientes y el número de eigenvectores es igual a la dimensión del subespacio podemos concluir que el conjunto de $|\alpha, \delta\rangle_n$ es efectivamente una base del subespacio.

Una vez demostrado que los eigenvectores derechos de \check{L}_i forman una base, entonces necesitamos encontrar los operadores duales de los eigenvectores. Estos serán los eigenvectores izquierdos del superoperador. Es importante encontrarlos para poder calcular los coeficientes necesarios para expandir cualquier operador en esta base. Para esto, resolveremos la ecuación de eigenvalores izquierdos

$$(\rho_{sym} | \check{L}_i = \lambda (\rho_{sym} |. \quad (4.14)$$

cuya solución es igual a caso de los eigenvalores derechos. Como resultado encontramos que los eigenvalores son los mismos y tienen asociados los eigenvectores izquierdos

$${}_n \langle \alpha, \delta | = \sum_{n_{11}=\delta}^{\alpha} \binom{\alpha-\delta}{\alpha-n_{11}} \hat{Q}^{\alpha-n_{11} \quad N-\alpha-n}_{n \quad n_{11}}. \quad (4.15)$$

Así, entre estos operadores y los eigenvectores derechos efectivamente se satisface la relación de dualidad

$${}_{n'} \langle \alpha', \delta' | \alpha, \delta \rangle_n = \delta_{\alpha',\alpha} \delta_{\delta',\delta} \delta_{n',n}.$$

Con la base de eigenvectores derechos e izquierdos, podemos reescribir cualquier operador como combinación lineal de estos. Especialmente podemos re-exresar los operadores (2.29), de la forma

$$\hat{Q} \begin{matrix} \alpha - n_{11} & N - \alpha - n \\ n & n_{11} \end{matrix} = \sum_{k=0}^{n_{11}} c_k |\alpha, k\rangle_n, \quad (4.16)$$

donde encontramos que

$$c_k = \left[\binom{\alpha}{n_{11}} \binom{N - \alpha}{n} \binom{N}{\alpha} \right]^{-1} \binom{\alpha - k}{\alpha - n_{11}}. \quad (4.17)$$

Consecuencia directa de estos resultados es que podemos solucionar la evolución de la disipación independiente $d|\rho(t)\rangle/dt = \check{L}_i |\rho(t)\rangle$, tomando como condición inicial $|\rho(0)\rangle = \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - \delta & N - \alpha - n \\ n & \delta \end{matrix}$. Así la solución a tal problema es

$$|\rho(t)\rangle = \exp\left(-\frac{N - \alpha}{2} \gamma_{10} t\right) \frac{n!(N - \alpha - n)!}{N!} \sum_{i=0}^{\delta} d_i(t) \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - i & N - \alpha - n \\ n & i \end{matrix}, \quad (4.18)$$

donde tenemos los coeficientes

$$d_i(t) = \sum_{j=i}^{\delta} (-1)^i c_j \binom{j}{i} i! (\alpha - i)! e^{-j\gamma_{10} t}. \quad (4.19)$$

4.1.1. Método perturbativo para la emisión colectiva

Como primer resultado hemos encontrado una base de decaimiento y con ella resuelto la dinámica del decaimiento independiente. Pero, nuestro objetivo es dar una descripción al proceso de emisión independiente y colectiva del sistema atómico. Así que, para encontrar soluciones a la ecuación maestra (2.17) con $\gamma \neq 0$ introduciremos una teoría de perturbaciones en el espacio de Liouville, con el objetivo de encontrar los eigenvectores del Lindbladiano \check{L} como perturbación de la base $|\alpha, \delta\rangle_n$. Usando esta base perturbada podemos dar soluciones analíticas a la evolución de la emisión colectiva.

Teoría de perturbación en el espacio de Liouville

Aunque se han descrito varios métodos perturbativos en el espacio de operadores de Liouville [171–173], consultando la literatura no encontré un método que tome en cuenta el caso de una base de operadores degenerado. Aún así, pude obtener un método para el caso degenerado extrapolando los métodos expuestos en [173, 174]. Así que como un resultado de este proyecto, a continuación se resume el método encontrado y en la siguiente sección describimos un uso explícito al método.

Supongamos que hemos solucionado el problema de eigenvalores para el Lindbladiano \check{L}_0 . Denotamos por $|\kappa\rangle$ y $\langle\kappa|$ a los eigenvectores derechos e izquierdos de \check{L}_0 respectivamente, mientras que los eigenvalores del sistema los denotaremos mediante $\lambda_{\kappa}^{(0)}$. Si introducimos el mapeo \check{L}_{pert} como una perturbación al sistema, de entrada nos gustaría poder resolver la ecuación de eigenvalores

$$\left(\check{L}_0 + \bar{\gamma} \check{L}_{\text{pert}} \right) |\phi_{\kappa}\rangle = \lambda_{\kappa} |\phi_{\kappa}\rangle, \quad (4.20)$$

siendo $\bar{\gamma}$ la magnitud de la perturbación, el cual podemos suponer como $\bar{\gamma} \ll 1$.

Como queremos estudiar el caso de eigenvalores degenerados, centrémonos en un eigenvalor $\lambda_{\kappa}^{(0)}$, el cual es degenerado y el cual crea el subespacio $\{|\kappa\rangle\}$. En este subespacio podemos formar los proyectores

$$\mathbb{Q}_{\kappa} = \sum_{\kappa} |\kappa\rangle \langle\kappa|, \quad \mathbb{P}_{\kappa} = \mathbb{I} - \mathbb{Q}_{\kappa},$$

los cuales son idempotentes, conmutan entre sí y conmutan con \check{L}_0 . Si usamos estos proyectores en la ecuación de eigenvalores (4.20) obtenemos

$$\check{L}_0 (\mathbb{Q}_\kappa + \mathbb{P}_\kappa) |\phi_\kappa\rangle + \bar{\gamma} \check{L}_{\text{pert}} (\mathbb{Q}_\kappa + \mathbb{P}_\kappa) |\phi_\kappa\rangle = \lambda_\kappa (\mathbb{Q}_\kappa + \mathbb{P}_\kappa) |\phi_\kappa\rangle. \quad (4.21)$$

De la ecuación anterior queremos obtener solo una expresión que contenga a $\mathbb{Q}_\kappa |\phi_\kappa\rangle$ pero que no contenga el término $\mathbb{P}_\kappa |\phi_\kappa\rangle$. Para lograr esto, multiplicamos la ecuación (4.21) por \mathbb{P}_κ y despejamos $\mathbb{P}_\kappa |\phi_\kappa\rangle$. Luego a la expresión (4.21) lo multiplicamos por \mathbb{Q}_κ y sustituimos la expresión obtenida para $\mathbb{P}_\kappa |\phi_\kappa\rangle$ en el paso previo. Esto nos lleva al resultado

$$\left(\lambda_\kappa - \check{L}_0 - \bar{\gamma} \mathbb{Q}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{Q}_\kappa \right) \mathbb{Q}_\kappa |\phi_\kappa\rangle = \bar{\gamma}^2 \mathbb{Q}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \left(\lambda_\kappa - \check{L}_0 - \bar{\gamma} \mathbb{P}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{P}_\kappa \right)^{-1} \mathbb{P}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{Q}_\kappa |\phi_\kappa\rangle,$$

que al aproximar a primer orden en $\bar{\gamma}$ se reduce a

$$\left(\lambda_\kappa - \lambda_\kappa^{(0)} - \bar{\gamma} \mathbb{Q}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{Q}_\kappa \right) \mathbb{Q}_\kappa |\phi_\kappa\rangle = 0. \quad (4.22)$$

Para esta expresión, sea $|a\rangle \equiv \mathbb{Q}_\kappa |\phi_\kappa\rangle$ el cual satisface $\mathbb{Q}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{Q}_\kappa |a\rangle = a |a\rangle$, con a un escalar. Entonces $|a\rangle$ es un eigenvector de la ecuación (4.22) con eigenvalor $\lambda_\kappa = \lambda_\kappa^{(0)} + \gamma a$. Así, para encontrar los eigenvalores y el conjunto de eigenvectores derechos $|a\rangle$ tenemos que diagonalizar $\mathbb{Q}_\kappa \check{L}_{\text{pert}} \mathbb{Q}_\kappa$ al superoperador, el cual puede mapearse a una matriz. Para encontrar los eigenvectores izquierdos $\langle a|$ construimos la matriz \mathbf{A} que tiene como columnas los eigenvectores derechos. Los eigenvectores izquierdos serán los vectores fila de la matriz \mathbf{A}^{-1} [175, 176].

4.1.2. Aplicación del método perturbativo

Usamos lo anterior para el caso en que consideramos a la emisión colectiva una perturbación a la emisión independiente. Esto lo podemos cuantificar pidiendo que $1 \gg \gamma/\Gamma = \bar{\gamma}$. Con este requerimiento estamos considerando sistemas en donde la mayor parte de los fotones son emitidos al espacio libre, y solo una pequeña fracción viaja a lo largo de la fibra como modos guiados. Para introducir el término colectivo, primeramente reescribimos \check{L}_c en términos de los superoperadores colectivos. Esto podemos hacerlo con la ayuda del Apéndice A, y tendremos como resultado

$$\begin{aligned} \check{L} |\hat{\rho}\rangle = & \gamma \left[\check{A}_+^{00} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{00} - \frac{1}{2} \left(\check{A}_+^{10} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{10} \check{A}_+^{01} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{00} \right. \right. \\ & \left. \left. + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{01} \right) \right] |\hat{\rho}\rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Cabe hacer una anotación al superoperador anterior. Si proponemos una ecuación de eigenvalores como los operadores de la forma (4.10) así como hicimos con \check{L}_i , obtenemos una ecuación de recurrencia para los coeficientes $c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}$ que es cuadrática, y por tanto más difícil de resolver analíticamente. Por tanto, como se exploró usar un método perturbativo para incluir los efectos de \check{L}_c .

Para aplicar el método expuesto debemos de identificar cada subespacio degenerado. Para esto, recordemos que dados los eigenvectores $|\alpha, \delta\rangle_n$ tendremos $N - \alpha + 1$ eigenvectores degenerados que etiquetamos por la variable n . En adición a esta degeneración, debemos considerar que diferentes etiquetas α, δ que pueden dar el mismo eigenvalor. Específicamente se satisface que $\lambda_{\alpha, \delta} = \lambda_{\alpha-2m, \delta-m}$ siendo m un entero que debe de satisfacer que $0 \leq \alpha - 2m \leq N$ y $0 \leq \delta - m \leq \alpha - 2m$. Por tanto, denotaremos al conjunto $\{\alpha, \delta\}$ como aquellos valores de etiquetas α, δ que satisfacen esta condición.

Una vez identificado cada subespacio degenerado para los eigenvalores $\lambda_{\alpha, \delta}$ podremos construir el proyector de este subespacio que es igual a $\mathbb{Q}_{\alpha, \delta} = \sum_{\{\alpha, \delta\}, n} |\alpha, \delta\rangle_n \langle n(\alpha, \delta)|$. Por tanto para encontrar

los eigenvalores y eigenvectores perturbados debemos de diagonalizar al superoperador

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\alpha,\delta} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\alpha,\delta} = & -\gamma \sum_{\{\alpha,\delta\}} \sum_{n=0}^{N-\alpha} \left[(\delta+1)(\alpha-\delta+1) |\alpha+2, \delta+1\rangle_{n-1} \langle \alpha, \delta| + \left\{ \frac{(N-\alpha)(\alpha+1)}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta \right\} |\alpha, \delta\rangle_n \langle \alpha, \delta| + (n+1)(N-\alpha-n+1) |\alpha-2, \delta-1\rangle_{n+1} \langle \alpha, \delta| \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como resultado solo necesitamos identificar cada subespacio generado por los eigenvalores, y evaluar la ecuación (4.24). Cada recalcar que este método es válido para sistemas de átomos acoplados a nanofibras que satisfagan $\bar{\gamma} \ll 1$, como por ejemplo Vetsch y colaboradores han reportado sistemas con $\bar{\gamma} \sim 0.05$ [10].

Ejemplo: N átomos con a lo más 4 excitaciones

Usaremos la perturbación independiente del tiempo para calcular la evolución de N átomos bajo la ecuación maestra (4.8), cuando tenemos inicialmente a los más $M = 4$ átomos excitados. Esto es posible debido a que en la ecuación maestra no estamos considerando fuentes de excitación externa, por lo que la evolución del sistema no puede exceder las M excitaciones. Como conjetura adicional a todo lo planteado, consideraremos como cero a todos aquellos eigenvectores que contengan términos con menos de $N - 4$ átomos en el estado base (es decir, se satisface que $n_{00} > N - 4$). Bajo estas aproximaciones el sistema evoluciona en un subespacio de dimensión igual a $(M+1)(M+2)(M+3)/6$.

De manera explícita escribimos a continuación los eigenvalores y eigenvectores de \check{L}_i para el caso de $M = 3$ excitaciones, lo anterior por practicidad pero cabe recalcar que durante este proyecto se logró estudiar hasta el caso $M = 4$:

$$\begin{aligned} \lambda_{N-3,0} = -\frac{3\gamma_{10}}{2} : & \quad |N-3,0\rangle_0 = \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \hat{Q}_{0^3 0}^{N-3 3}, \quad |N-3,0\rangle_1 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2} \hat{Q}_{1^3 0}^{N-3 2}, \\ & \quad |N-3,0\rangle_2 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2} \hat{Q}_{2^3 0}^{N-3 1}, \quad |N-3,0\rangle_3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \hat{Q}_{3^3 0}^{N-3 0} \\ \lambda_{N-2,0} = -\gamma_{10} : & \quad |N-2,0\rangle_0 = \frac{N(N-1)}{3} \hat{Q}_{0^2 0}^{N-2 2}, \quad |N-2,0\rangle_1 = N(N-1) \hat{Q}_{1^2 0}^{N-2 1}, \\ & \quad |N-2,0\rangle_2 = \frac{N(N-1)}{2} \hat{Q}_{2^2 0}^{N-2 0} \\ \lambda_{N-2,1} = -2\gamma_{10} : & \quad |N-2,1\rangle_0 = -\frac{N(N-1)(N-2)}{2} \left(\hat{Q}_{0^2 0}^{N-2 2} - \hat{Q}_{0^3 1}^{N-3 2} \right), \\ & \quad |N-2,1\rangle_1 = -N(N-1)(N-2) \left(\hat{Q}_{1^2 0}^{N-2 1} - \hat{Q}_{1^3 1}^{N-3 1} \right), \\ & \quad |N-2,1\rangle_2 = -\frac{N(N-1)(N-2)}{2} \left(\hat{Q}_{2^2 0}^{N-2 0} - \hat{Q}_{2^3 1}^{N-3 0} \right) \\ \lambda_{N-1,0} = -\frac{\gamma_{10}}{2} : & \quad |N-1,0\rangle_0 = N \hat{Q}_{0^1 0}^{N-1 1}, \quad |N-1,0\rangle_1 = N \hat{Q}_{1^1 0}^{N-1 0} \\ \lambda_{N-1,1} = -\frac{3\gamma_{10}}{2} : & \quad |N-1,1\rangle_0 = -N(N-1) \left(\hat{Q}_{0^1 0}^{N-1 1} - \hat{Q}_{0^2 1}^{N-2 1} \right), \\ & \quad |N-1,1\rangle_1 = -N(N-1) \left(\hat{Q}_{1^1 0}^{N-1 0} - \hat{Q}_{1^2 1}^{N-2 0} \right) \\ \lambda_{N-1,2} = -\frac{5\gamma_{10}}{2} : & \quad |N-1,2\rangle_0 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2} \left(\hat{Q}_{0^1 0}^{N-1 1} - 2\hat{Q}_{0^2 1}^{N-2 1} + \hat{Q}_{0^3 2}^{N-3 1} \right), \\ & \quad |N-1,2\rangle_1 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2} \left(\hat{Q}_{1^1 0}^{N-1 0} - 2\hat{Q}_{1^2 1}^{N-2 0} + \hat{Q}_{1^3 2}^{N-3 0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{N,0} = 0 : & \quad |N,0\rangle_0 = \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\
\lambda_{N,1} = -\gamma_{10} : & \quad |N,1\rangle_0 = -N \left(\hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} - \hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \\
\lambda_{N,2} = -2\gamma_{10} : & \quad |N,2\rangle_0 = \frac{N(N-1)}{2} \left(\hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} - 2\hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right) \\
\lambda_{N,3} = -3\gamma_{10} : & \quad |N,3\rangle_0 = -\frac{N(N-1)(N-2)}{6} \left(\hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} - 3\hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} + 3\hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} - \hat{Q} \begin{matrix} N-3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

Una vez que tenemos lo anterior podemos aplicar nuestro método de perturbaciones para eigenvalores degenerados en el espacio de Liouville. Así, para el ejemplo anterior, la base perturbada es

$$\begin{aligned}
\Lambda_{0,1} = 0 : & \quad |\phi_{0,1}\rangle = |N,0\rangle_0 \\
\Lambda_{1,1} = -\frac{1}{2}\gamma_{10}(1+N\gamma) : & \quad |\phi_{1,1}\rangle = |N-1,0\rangle_0 \\
\Lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma_{10}(1+N\gamma) : & \quad |\phi_{1,2}\rangle = |N-1,0\rangle_1 \\
\Lambda_{2,1} = -\gamma_{10}[1+(N-1)\gamma] : & \quad |\phi_{2,1}\rangle = |N-2,0\rangle_0 \\
\Lambda_{2,2} = -\gamma_{10}[1+(N-1)\gamma] : & \quad |\phi_{2,2}\rangle = |N-2,0\rangle_2 \\
\Lambda_{2,3} = -\gamma_{10}(1+N\gamma) : & \quad |\phi_{2,3}\rangle = |N-2,0\rangle_1 + |N,1\rangle_0 \\
\Lambda_{2,4} = -\gamma_{10} : & \quad |\phi_{2,4}\rangle = -\frac{1}{N-1}|N-2,0\rangle_1 + |N,1\rangle_0 \\
\Lambda_{3,1} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}[1+(N-2)\gamma] : & \quad |\phi_{3,1}\rangle = |N-3,0\rangle_0 \\
\Lambda_{3,2} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}[1+(N-2)\gamma] : & \quad |\phi_{3,2}\rangle = |N-3,0\rangle_3 \\
\Lambda_{3,3} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{3N-2}{3}\gamma\right) : & \quad |\phi_{3,3}\rangle = |N-3,0\rangle_1 + |N-1,1\rangle_0 \\
\Lambda_{3,4} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{N-2}{3}\gamma\right) : & \quad |\phi_{3,4}\rangle = -\frac{2}{N-2}|N-3,0\rangle_1 + |N-1,1\rangle_0 \\
\Lambda_{3,5} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{3N-2}{3}\gamma\right) : & \quad |\phi_{3,5}\rangle = |N-3,0\rangle_2 + |N-1,1\rangle_1 \\
\Lambda_{3,6} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{N-2}{3}\gamma\right) : & \quad |\phi_{3,6}\rangle = -\frac{2}{N-2}|N-3,0\rangle_2 + |N-1,1\rangle_1 \\
\Lambda_{4,1} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{N}{2}\gamma\right) : & \quad |\phi_{4,1}\rangle = |N-2,1\rangle_0 \\
\Lambda_{4,2} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{N}{2}\gamma\right) : & \quad |\phi_{4,2}\rangle = |N-2,1\rangle_2 \\
\Lambda_{4,3} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{N+2+\nu}{4}\gamma\right) : & \quad |\phi_{4,3}\rangle = \frac{N-2+\nu}{4N-8}|N-2,1\rangle_1 + |N,2\rangle_0 \\
\Lambda_{4,4} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{N+2-\nu}{4}\gamma\right) : & \quad |\phi_{4,4}\rangle = \frac{N-2-\nu}{4N-8}|N-2,1\rangle_1 + |N,2\rangle_0 \\
\Lambda_{5,1} = -\frac{5}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{N+4}{5}\gamma\right) : & \quad |\phi_{5,1}\rangle = |N-1,2\rangle_0 \\
\Lambda_{5,2} = -\frac{5}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{N+4}{5}\gamma\right) : & \quad |\phi_{5,2}\rangle = |N-1,2\rangle_1 \\
\Lambda_{6,1} = -3\gamma_{10}(1+\gamma) : & \quad |\phi_{6,1}\rangle = |N,3\rangle_0
\end{aligned}$$

donde en este caso definimos $\nu = \sqrt{(N+6)(N-2)}$.

Con la base perturbada de eigenvectores ya podemos resolver la evolución de un sistema de N átomos. En este proyecto estamos interesados en la evolución de dos estados iniciales muy usados en la literatura: los *estados simétricos mixtos* y los *estados simétricos de Dicke*. El primer estado ejemplifica un estado inicial en el que no existen correlaciones entre las partículas, mientras que en el segundo estado propuesto existen correlaciones iniciales, incluso los átomos se encuentran en un estado enredado. De esta forma, planteamos estudiar el proceso de creación y modificación de correlaciones durante el proceso de decaimiento, usando estados mixtos y de Dicke respectivamente.

El estado simétrico mixto está dado por

$$\left| \rho_{\text{mixed}}^{(M)} \right\rangle = \hat{Q} \begin{matrix} N-M & 0 \\ 0 & M \end{matrix}. \quad (4.25)$$

Este estado consiste de M átomos excitados de un total de N , pero de los que no sabemos cuales están excitados o no. Usando la expresión ec. (4.16) podemos reescribir $\left| \rho_{\text{mixed}}^{(M)} \right\rangle$ en términos de la base de decaimiento $|\alpha, \delta\rangle_n$. Para luego reescribir al estado en términos de la base perturbada que hemos mostrado arriba. Haciendo esto para el caso $M = 3$ encontramos que el operador de estado al tiempo

t es

$$\begin{aligned}
|\rho^{(3)}(t)\rangle &= |\phi_{0,1}\rangle + \frac{3k_1 e^{-(\gamma_{10}+N\gamma_c)t}}{N^2} |\phi_{2,3}\rangle + \frac{3k_2 e^{-\gamma_{10}t}}{N^2} |\phi_{2,4}\rangle + \frac{3k_3 e^{-2\left(\gamma_{10}+\frac{N+2+\sqrt{(N+6)(N-2)}}{4}\gamma_c\right)t}}{N(N-1)} |\phi_{4,3}\rangle \\
&+ \frac{3k_4 e^{-2\left(\gamma_{10}+\frac{N+2-\sqrt{(N+6)(N-2)}}{4}\gamma_c\right)t}}{N(N-1)} |\phi_{4,4}\rangle + \frac{6e^{-3(\gamma_{10}+\gamma_c)t}}{N(N-1)(N-2)} |\phi_{6,1}\rangle, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes son

$$k_1 = 1, \quad k_2 = N - 1, \quad k_3 = \frac{N + 6 \mp \sqrt{(N + 6)(N - 2)}}{N + 6}. \tag{4.27}$$

Cabe recalcar que el operador $|\rho^{(3)}(t)\rangle$ es solución a la ecuación (4.8) para el caso $\Gamma \gg \gamma$, y que es válido para cualquier número de átomos N .

Ya que tenemos el estado podemos calcular las observables del sistema, recordando que todo cálculo de valores esperados debe de hacerse en el esquema de interacción y que cualquier observable de $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ puede ser reescrito en términos de los superoperadores colectivos. Como ejemplo de una observable para el sistema tenemos el número promedio de excitaciones P que es igual a

$$P(t) = \left\langle \sum_r \hat{\sigma}_+^{(r)}(t) \hat{\sigma}_-^{(r)}(t) \right\rangle = \text{tr} \left[\left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) |\rho(t)\rangle \right], \tag{4.28}$$

donde se ha usado que en el esquema de interacción $\hat{\sigma}_\pm^{(r)}(t) = e^{\pm i\omega_0 t} \hat{\sigma}_\pm^{(r)}$. Para el estado simétrico mixto de $M = 1, 2, 3, 4$ podemos resumir los resultados mediante la expresión

$$P_{\text{mixto}}^{(M)}(t) = M \left[\frac{N-1}{N} e^{-(\Gamma-\gamma)t} + \frac{1}{N} e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t} \right]. \tag{4.29}$$

De este resultado ya podemos tener una discusión sobre los aspectos físicos que ocurren en el sistema. Cuando los átomos no interactúan entre ellos ($\gamma = 0$), el promedio de excitaciones decae como $M e^{-\Gamma t}$ lo cual coincide con casos particulares ya estudiados [29]. Pero cuando los átomos interactúan, el promedio de excitaciones está compuesto de una parte subradiante, que decae con una tasa $\Gamma - \gamma$ (que es menor a Γ la tasa de decaimiento de átomos sin interacción), y una parte superradiante cuya tasa de decaimiento es $\Gamma + (N + 1)\gamma$ (que es mayor a Γ), el cual va decayendo más rápido conforme N incrementa. Vemos que las tasas de decaimiento solo tienen dependencia con el número de átomos y no con el número de excitaciones atómicas iniciales. Notemos que inicialmente el estado no contiene coherencia alguna entre los distintos átomos, pero conforme el sistema evoluciona la propia interacción entre los átomos mediado a través de los modos guiados empieza a crear la coherencia, lo que explica la aparición del comportamiento sub- y super- radiantes. Este efecto también ha sido reportado en átomos que espacialmente se encuentran con separaciones menores a λ_0 en el espacio libre, pero la solución usada ha sido a través de métodos numéricos y para un número finito de átomos [6]. Cuando $N \gg 1$, la parte subradiante de la contribución $P_{\text{mixed}}^{(M)}$ domina la evolución (ya que el peso del término es $(N - 1)/N$) respecto a la aportación de la parte superradiante (que contribuye con $1/N$ en la evolución). Una señal de que la parte subradiante domina la evolución del sistema es que $P_{\text{mixed}}^{(M)}(t) \geq M e^{-\Gamma t}$ para todo tiempo t . Además, notemos que la contribución de la parte subradiante con respecto a la parte superradiante tampoco depende de M sino solo de N . Si $N > 1$ siempre tendremos estas contribuciones sub- y super- radiantes lo que puede explicarse por el hecho de el estado inicial puede escribirse como superposición de estados sub- y super- radiantes.

Al observar la ecuación (4.29) nos damos cuenta que tiene una forma simple. Esto lo podemos explicar a través del formalismo de trayectorias cuánticas [33]. Bajo este formalismo, el decaimiento atómico es modelado como la trayectoria del estado cuántico dado por una serie de saltos cuánticos

aleatorios, y una evolución Hermitiana entre saltos. El valor de expectación de una observable se obtiene sumando con distintos pesos el valor de expectación de cada trayectoria. Como ejemplo, asumamos como condición inicial al estado $|1\rangle_1|1\rangle_2$. Consideremos la trayectoria en donde el primer átomo decae a través del canal independiente de disipación, por lo que el estado colapsa a $|0\rangle_1|1\rangle_2$, el cual puede escribirse como

$$|0\rangle_1|1\rangle_2 = \frac{1}{2} \left(|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 \right) - \frac{1}{2} \left(|1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2 \right). \quad (4.30)$$

El primer término en la suma es un estado simétrico de Dicke con una excitación, el cuál es un estado superradiante que decae como $e^{-(\Gamma+\gamma)t}$; el segundo término es un estado subradiante que decae como $e^{-(\Gamma-\gamma)t}$. Se obtiene un análisis similar si consideremos el decaimiento del segundo átomo. Podemos hacer un análisis similar para un estado inicial de tres excitaciones $|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3$. El primer átomo al decaer independientemente hará que el estado colapse a

$$\begin{aligned} |0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 &= \frac{1}{3} \left(|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \right) + \\ &\frac{1}{3} \left(|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 \right) + \frac{1}{3} \left(|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

El primer término es un estado simétrico de Dicke de dos excitaciones, el cuál es un estado superradiante que decae como $e^{-(\Gamma+2\gamma)t}$; el segundo y tercer términos son subradiantes, ambos decaen como $e^{-(\Gamma-\gamma)t}$. Resultados similares se obtienen con el decaimiento independiente de los demás átomos. La forma simple de la ecuación (4.29) es una consecuencia de la trayectoria cuántica creada por el proceso de decaimiento independiente, el domina cuando tenemos la condición $\Gamma \gg \gamma$, el cual puede escribirse como una superposición de estados con dos distintas tasas de decaimiento: un decaimiento subradiante y uno superradiante.

La otra condición inicial de interés es el estado simétrico de Dicke con M excitaciones. Este está dado por

$$\left| \rho_{\text{dicke}}^{(M)} \right\rangle = \sum_{0=i+j \leq M} \frac{M!}{i!j!(M-i-j)!} \hat{Q}_j^{N-M} \hat{Q}_{M-i-j}^i, \quad (4.32)$$

y representa a un estado puro de M excitaciones en N átomos, esto descrito mediante una superposición de estados. Usando la ecuación (4.16) podemos reescribir $\left| \rho_{\text{dicke}}^{(M)} \right\rangle$ usando la base de decaimiento y la base perturbada para calcular la evolución. Nuevamente usamos como un ejemplo el caso $M = 3$, donde la evolución tomará también la forma (4.26), pero en este caso los coeficientes son

$$k_1 = N - 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = \pm \frac{3N - 10 \pm \sqrt{(N+6)(N-2)}}{\sqrt{(N+6)(N-2)}}. \quad (4.33)$$

También para los estados simétricos de Dicke calculamos el promedio de excitaciones en el sistema para $M = 1, 2, 3, 4$ excitaciones. El resultado puede resumirse como

$$P_{\text{dicke}}^{(M)}(t) = M \left[\frac{N-M+1}{N} e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t} + \frac{M-1}{N} e^{-(\Gamma-\gamma)t} \right]. \quad (4.34)$$

Similar al caso de los estados mixtos, ahora también tendremos contribuciones sub- y super- radiantes al decaimiento. Pero a diferencia del caso previo, ahora M determina el peso de las contribuciones pero sigue sin tener efecto en las tasas de decaimiento. Notemos que cuando $M = 1$ no tenemos contribución subradiante: el estado inicial es un estado superradiante, y una vez que decae el átomo el sistema se encuentra en su estado base. De manera general podemos apreciar que para los estados simétricos

de Dicke se tiene $P_{\text{dicke}}^{(M)}(t) \leq M e^{\Gamma t}$ para tiempos cortos. Y el decaimiento superradiante domina inicialmente en la evolución, pero a tiempos largos $P_{\text{dicke}}^{(M)}(t) \geq M e^{\Gamma t}$ y la parte subradiante empieza a dominar la evolución. Y a diferencia de los estados mixtos, vemos que cuanto mayor número de átomos consideramos, el estado superradiante dominará. De forma inversa, conforme consideramos un mayor número de excitaciones iniciales vemos que es la contribución subradiante la que va ganando peso.

4.2. Base de decaimiento para la emisión total

El cálculo de la base de decaimiento para \check{L}_i y la introducción de \check{L}_c como una perturbación fue la primera propuesta de este proyecto para resolver el problema. Pero, otro de los resultados del proyecto ha sido el obtener bases de decaimiento para el Lindbladiano total $\check{L}_i + \check{L}_c$, pero el precio a pagar es que nos restringimos a un subespacio de $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ mucho más pequeño. Aún así, tal subespacio contiene los estados (4.25) y (4.32). Por lo que podemos obtener soluciones exactas a la ecuación maestra (4.8) para estos estados sin asumir ninguna restricción a los valores de Γ y γ . Lograr esto permite que las soluciones obtenidas sean aplicadas a un mayor número de sistemas físicos, como por ejemplo átomos acoplados a cristales fotónicos ($\gamma/\Gamma \sim 1$) [14], y puntos cuánticos acoplados a guías de onda ($\gamma/[\Gamma - \gamma] \gg 1$) [177].

La idea general para resolver la ecuación maestra sin restricciones es escribir a \check{L} como una matriz en un subespacio de $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$, y encontrar los eigenvectores y eigenvalores. El subespacio que usaremos es aquel que contiene la evolución de los estados simétricos mixtos y de Dicke de a los más M excitaciones. Para el caso $M = 3$, los estados mixtos y de Dicke pueden describirse considerando solamente el subespacio generado por el conjunto

$$\{\hat{Q}_{0\ 0}^{N\ 0}, \hat{Q}_{0\ 1}^{N-1\ 0}, \hat{Q}_{1\ 0}^{N-2\ 1}, \hat{Q}_{0\ 2}^{N-2\ 0}, \hat{Q}_{1\ 1}^{N-3\ 1}, \hat{Q}_{2\ 0}^{N-4\ 2}, \hat{Q}_{0\ 3}^{N-3\ 0}, \hat{Q}_{1\ 2}^{N-4\ 1}, \hat{Q}_{2\ 1}^{N-5\ 2}, \hat{Q}_{3\ 0}^{N-6\ 3}\} \quad (4.35)$$

En tal subespacio la matriz del Lindbladiano total $\check{L}_i + \check{L}_c$ para el caso $M = 3$ toma la forma

$$- \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & \gamma & -2\Gamma & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (N-1)\gamma & \Gamma + (N-2)\gamma & -2\gamma & -\Gamma - 2\gamma & -4\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Gamma & \gamma & 0 & -3\Gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(N-2)\gamma & 2\Gamma + (N-2)\gamma & 4\gamma & -6\gamma & -2(\Gamma + 2\gamma) & -4\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (N-3)\gamma & 2[\Gamma + (N-4)\gamma] & 0 & -2\gamma & -\Gamma - 4\gamma & -9\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\Gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3(N-3)\gamma & 3\Gamma + (N-2)\gamma & 4\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(N-4)\gamma & 3\Gamma + 2(N-4)\gamma & 9\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (N-5)\gamma & 3[\Gamma + (N-6)\gamma] \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores y eigenvectores de la matriz anterior nos permiten obtener la solución de los estados simétricos mixto y de Dicke sin perturbación.

Un operador de estado perteneciente al subespacio (4.35) tiene la forma

$$|\rho(t)\rangle = \alpha_1(t)\hat{Q}_{0\ 0}^{N\ 0} + \alpha_2(t)\hat{Q}_{0\ 1}^{N-1\ 0} + \alpha_3(t)\hat{Q}_{1\ 0}^{N-2\ 1} + \alpha_4(t)\hat{Q}_{0\ 2}^{N-2\ 0} + \alpha_5(t)\hat{Q}_{1\ 1}^{N-3\ 1} + \alpha_6(t)\hat{Q}_{2\ 0}^{N-4\ 2} \\ + \alpha_7(t)\hat{Q}_{0\ 3}^{N-3\ 0} + \alpha_8(t)\hat{Q}_{1\ 2}^{N-4\ 1} + \alpha_9(t)\hat{Q}_{2\ 1}^{N-5\ 2} + \alpha_{10}(t)\hat{Q}_{3\ 0}^{N-6\ 3}. \quad (4.36)$$

Por tanto, en este subespacio el promedio de excitaciones es igual a $P^{(M)}(t) = \alpha_2(t) + 2\alpha_4(t) + 3\alpha_7(t)$. En el apéndice C mostramos las soluciones analíticas de $P^{(M)}$ para los estados simétricos y de Dicke con $M = 1, 2, 3$. Para $M = 1$, las ecs. (C.1) and (C.2) coinciden con las ecs. (4.29) and (4.34), obtenidas con el método perturbativo. Cuando $M = 2, 3$ la evolución es igual a una suma de decaimientos exponenciales. Cuando $\gamma \ll \Gamma$ solo dos decaimientos exponenciales son relevantes: $e^{-(\Gamma-\gamma)t}$ y $e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t}$ y recuperamos los resultados obtenidos con la teoría de perturbaciones. Cuando la teoría de perturbaciones ya no es válida, para un estado inicial simétrico de Dicke de $M = 2$ excitaciones, el decaimiento del promedio de excitaciones es una suma de tres exponenciales. Vemos que tenemos los dos términos que aparecen en la teoría de perturbación más $e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t}$. En el caso de un estado inicial simétrico mixto de $M = 2$ excitaciones, el decaimiento del número de excitaciones es la suma de cuatro términos exponenciales. Se encuentran los tres que aparecen en la evolución del estado simétrico de Dicke más el término $e^{-[2\Gamma+(N-4)\gamma]t}$.

En la figura 4.2 se gráfica el promedio del número de átomos excitados considerando como condiciones iniciales los estados de Dicke y mixto con $M = 3$, $N = 10$ and $\gamma = 0.5\Gamma$. En la evolución de las curvas puede identificarse dos pendientes, una pendiente identificada a tiempos cortos y otra pendiente para tiempos largos. Para ambas condiciones iniciales, se observa que el comportamiento subradiante domina para tiempos largos. Para los tiempos cortos la evolución del estado simétrico de Dicke es superradiante. En la figura 4.3a se comparó, para un estado mixto con $M = 2$ como condición inicial, el número de átomos excitados usando la teoría de perturbaciones Ec. (4.29) y sin usar la teoría de perturbaciones Ec. (C.4). Esto tomando el valor de $\gamma = 0.8\Gamma$. Cabe aclarar que bajo estas condiciones el uso de la teoría de perturbaciones ya no está justificada, sin embargo las curvas muestran que cuando $N \gg 2$ no hay diferencia discernible entre las curvas calculadas por métodos distintos (la teoría de perturbaciones y los resultados exactos). Cuando $M = N = 2$ y $M = 2$, $N = 8$ los dos métodos muestran que el decaimiento es el mismo al principio y al final de la evolución, y la diferencia entre ambos resultados coincide con el intervalo en el que la parte subradiante empieza a dominar. En la figura 4.3b se repite la comparación pero para el estado simétrico de Dicke de $M = 2$, la diferencia entre ambos resultados nuevamente se da en el intervalo en el que la parte subradiante empieza a dominar.

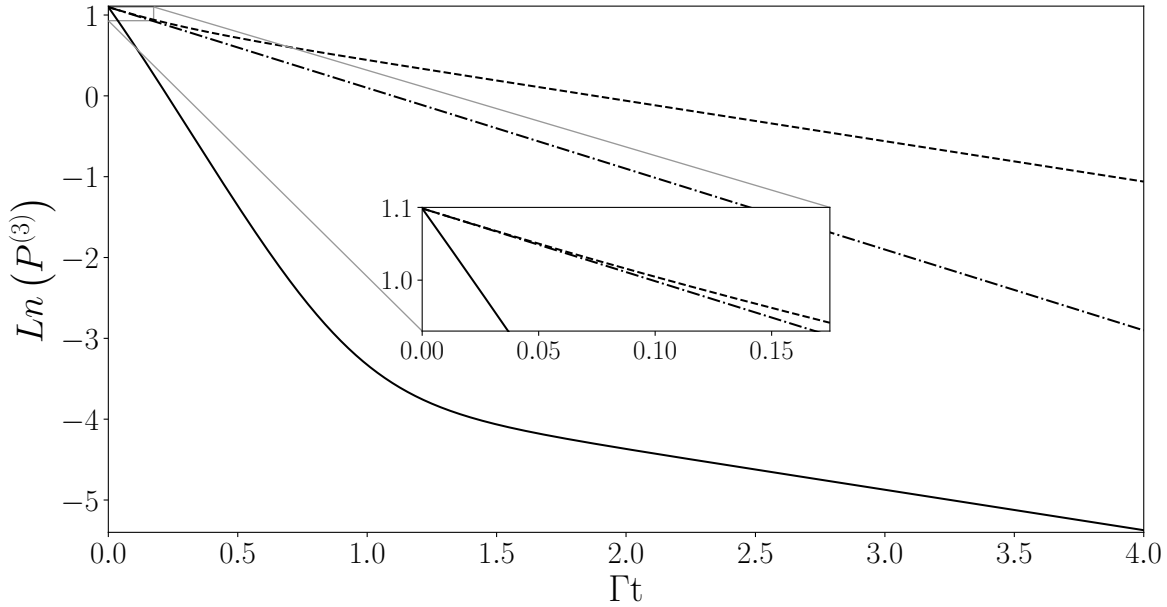


Figura 4.2: Promedio del número de átomos excitados, en escala logarítmica, como función del tiempo, y para el estado simétrico de Dicke (línea sólida) y el estado simétrico mixto (línea punteada) para $M = 3$, $N = 10$, $\gamma_c = 0.5\Gamma$. Como referencia se muestra el comportamiento considerando solo decaimiento independiente en los átomos $\gamma_c = 0$ (curva punteada-rayada). Para tiempos largos el decaimiento sub-radiante domina en ambos casos (estados simétricos de Dicke y mixto). Para tiempos cortos, el estado simétrico de Dicke muestra un comportamiento super-radiante; mientras que para el estado simétrico mixto la parte sub-radiante domina (ver recuadro).

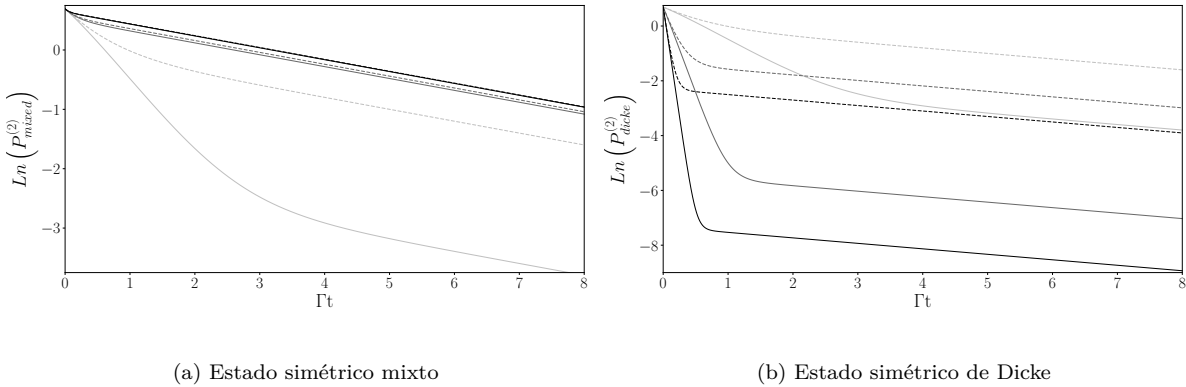


Figura 4.3: Promedio del número de átomos excitados, en escala logarítmica, como función del tiempo y calculada usando teoría de perturbaciones (línea rayada) y calculada sin aproximaciones (línea sólida). Se usó $\gamma_c = 0.8\Gamma$ y $M = 2$. Las soluciones están graficadas para $N = 2$ (línea gris clara), $N = 8$ (línea gris oscura) y $N = 20$ (línea negra). En (a) comparamos las soluciones (4.29) y (C.4). En (b) graficamos las expresiones (4.34) y (C.3). Aunque las soluciones perturbadas fueron obtenidas para $\gamma_c \ll \Gamma$, los resultados parecen seguir siendo válidos para $N \gg 1$.

Para todos los casos ($M = 1, 2, 3$, estados iniciales simétricos mixto y de Dicke) solo hay un término subradiante que es igual a la exponencial $e^{-(\Gamma-\gamma)t}$. Este término siempre domina la evolución cuando $t \gg 1/(N\gamma)$. Notemos que este término aparece para todas las condiciones iniciales si $\Gamma \neq \gamma$ y $M > 1$.

Dadas las soluciones encontramos algunos casos de interés. El primer caso es cuándo la interacción entre los átomos es máxima, es decir $\Gamma = \gamma$. Esto implica que la ecuación maestra (4.8) solo describe la emisión colectiva de los átomos, y es igual a la ecuación maestra superradiante [97]. Como ya se mencionó, la ecuación (3.37) puede resolverse en el subespacio simétrico considerando los estados simétricos de Dicke como base [135]. Pero nuestro tratamiento en el espacio de Liouville usando la base de operadores simétricos (2.29) y/o la base de decaimiento (4.13) nos permite obtener resultados no considerados anteriormente. Por ejemplo, cuando el estado inicial es $M = N = 2$ obtenemos que el número de átomos excitados es

$$P^{(2)}(t) = 2e^{-2\Gamma t}(\Gamma t + 1), \quad (4.37)$$

que es un resultado que coincide con lo reportado en estudios anteriores [136], y lo cual nos da pauta para validar los resultados obtenidos. Pero, considerar $M = N = 3$ nos da como resultado el valor

$$P^{(3)}(t) = e^{-3\Gamma t}(12\Gamma t - 3) + 6e^{-4\Gamma t}, \quad (4.38)$$

el cual ya no se encuentra en la literatura.

Pero, un resultado físico interesante es cuando la condición inicial es un estado simétrico mixto (4.25). Tal estado ya no puede calcularse en el espacio de Hilbert como los resultados anteriormente mostrados y forma parte de los resultados físicos novedosos de este proyecto. Para la condición inicial $\left| \rho_{\text{mixed}}^{(2)} \right\rangle$ con $N > 2$ (ver ec. (4.25)) se obtiene

$$P_{\text{mixed}}^{(2)}(t) = 2 + \frac{2}{N} - \frac{4}{N-1} - \frac{4e^{-2(N-1)\Gamma t}}{N(N-1)(N-2)} + \frac{2e^{-(N-2)\Gamma t}}{N} + \frac{4e^{-N\Gamma t}}{(N-2)N}. \quad (4.39)$$

De esta ecuación se desprende que para $t \rightarrow \infty$, el promedio de átomos excitados ya no tiende a cero sino que va a $2 + 2/N - 4/(N-1)$, es decir llegamos a un estado con excitaciones atómicas y que ya no emite fotones. Así que hay una componente la cual es estacionaria (que no decae), cosa que no existe si tomamos como condición inicial el estado puro con $M = N = 2, 3$ ni para los estados de Dicke considerados. También para $M = 3$ podemos observar que el estado tiende a un estado estacionario que no radia, ya que el promedio de átomos excitados satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{mixed}}^{(3)}(t) = 3 + \frac{12}{N-1} - \frac{3}{N} - \frac{12}{N-2}. \quad (4.40)$$

Cabe resaltar que a $N \gg 1$ la parte subradiante es la dominante, y en este límite no hay decaimiento.

Por completez, cuando la condición inicial es el estado simétrico de Dicke $|\rho_{\text{dicke}}^{(2)}\rangle$ con $N > 2$ (ec. (4.32)) el número de átomos excitados es

$$P_{\text{dicke}}^{(2)}(t) = \frac{2(N-1)e^{-\Gamma N t}}{N-2} - \frac{2e^{-2\Gamma(N-1)t}}{N-2}, \quad (4.41)$$

esta solución al igual que las Ecs. (4.37) y (4.38) decae a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Un caso a aclarar es el de $\gamma = \Gamma/3$ donde tenemos dos términos en la Ec. (C.4) en las que el denominador parece hacerse cero (es decir, parece haber singularidad por parte de las soluciones). Pero si tomamos el límite $\gamma \rightarrow \Gamma/3$ nos daremos cuenta que el límite está definido y es igual a

$$P_{\text{mixed}}^{(2)}(t) = \frac{2e^{-\frac{1}{3}\Gamma(N+2)t}[\Gamma t(2N-4) + 3N+6]}{3N^2} + \frac{2(N^3 - N^2 - 2N + 2)e^{-\frac{2\Gamma t}{3}}}{N^3} - \frac{4e^{-\frac{2}{3}\Gamma(N+1)t}}{N^3}, \quad (4.42)$$

lo cual asegura que las soluciones mostradas en esta sección pueden asegurar un buen comportamiento matemático en un todos los casos de Γ, γ . Nuevamente en el caso anterior, vemos que el resultado puede escribirse como la suma de un decaimiento sub- y super- radiante, más un término que es una exponencial multiplicada por el tiempo. Cuando $t \gg 1/(N\Gamma)$ el término subradiante, con razón de decaimiento $(2/3)\Gamma$, domina la evolución.

Como conclusión, el subespacio de operadores considerado en esta sección es útil para obtener la evolución de los estados simétricos de Dicke (4.25) y mixtos (4.32) para cualquier valor de tasas de decaimiento. En contraparte, no nos permite tener la evolución de cualquier otro estado simétrico con a los más $M = 3$ excitaciones, como si lo permite el método perturbativo mostrado en la sección anterior. Ejemplo de ello es la superposición de estados simétricos de Dicke con distintas excitaciones. La ventaja del método perturbativo desarrollado en la sección 4.1.2, es que dado el número máximo de excitaciones en el sistema el subespacio es más fácil de obtener pues solo necesitamos de evaluar el mapeo (4.24) en lugar de (4.23).

4.3. Propiedades del campo emitido

4.3.1. Fracción de energía emitida en los modos guiados

Del promedio de excitaciones $P(t)$ dado en (4.28) podemos obtener el promedio de las intensidades de fotones emitidos en los modos radiados y los modos guiados. La relación de $P(t)$ con las distintas intensidades de emisión son respectivamente [132]

$$I_{\text{rad}}(t) = (\Gamma - \gamma)P(t), \quad I_g(t) = -(\Gamma - \gamma)P(t) - \frac{dP(t)}{dt}.$$

Si consideramos operadores de la forma (4.36) obtenemos que el valor esperado de la observable es $I_{\text{rad}}(t) = (\Gamma - \gamma)[\alpha_2(t) + 2\alpha_4(t) + 3\alpha_6(t)]$. Una relación útil para la intensidad en los modos guiados es [135, 178]

$$I_g(t) = \gamma \langle \hat{J}_+(t)\hat{J}_-(t) \rangle = \gamma \text{tr} \left\{ \left(\check{A}_+^{10} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{10} \check{A}_+^{01} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{01} \right) |\rho(t)\rangle \right\},$$

el cual nos permite obtener $I_g(t) = \gamma[\alpha_2(t) + 2\alpha_4(t) + 3\alpha_7(t) + \alpha_3(t) + \alpha_5(t) + \alpha_8(t)]$. Asociado a los promedios de intensidad tenemos la fracción de la energía que es emitida en los modos guiados. Esta fracción está dada por [132]

$$f = \frac{U_g}{U_{\text{rad}} + U_g}, \quad (4.43)$$

donde $U_g = \hbar\omega_0 \int_0^\infty I_g(t)dt$ y $U_{\text{rad}} = \hbar\omega_0 \int_0^\infty I_{\text{rad}}(t)dt$ son la energía emitida en los modos guiados y radiados, respectivamente. Cabe recalcar que debido a la naturaleza indivisible de los fotones, aunque se hable de la fracción de energía emitida al canal guiado, este valor hace referencia a la probabilidad de que la energía total emitida por los átomos se propague a lo largo de la nanofibra y no hacia el espacio libre [8].

Primero consideramos las soluciones obtenidas mediante el método perturbativo, para el cual tenemos el promedio de excitaciones estados simétricos mixto y Dicke. Los promedios de excitaciones de estos estados están dados por las ecuaciones (4.29) y (4.34). Usando estos resultados encontramos

$$f_{\text{mixed}}^{(M)} = \frac{\tilde{\gamma}}{1 + [N - 1]\tilde{\gamma}}, \quad (4.44)$$

$$f_{\text{dicke}}^{(M)} = \frac{N - M + 1}{1 + [N - 1]\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}, \quad (4.45)$$

donde por simplicidad hemos definido $\tilde{\gamma} = \gamma/(\Gamma - \gamma)$.

Para estados mixtos encontramos que la fracción de energía que es emitida a la nanofibra no depende del número de excitaciones M . Además, conforme aumenta el número de átomos N la probabilidad de que los fotones sean emitidos hacia los modos guiados va disminuyendo, y como caso límite el sistema no emite hacia la nanofibra cuando $N \rightarrow \infty$. En los estados simétricos de Dicke observamos que sí hay una dependencia con el número de excitaciones M . Si las excitaciones iniciales aumentan encontramos que la fracción de energía que es emitida en la guía de onda disminuye. Pero, el sistema será cada vez más eficiente en la emisión hacia la nanofibra conforme aumenta el número de átomos N , siendo que todos los fotones serán emitidos en el modo guiado para $N \rightarrow \infty$.

Lo siguiente a realizar es calcular la fracción (4.43) para las soluciones obtenidas sin el método perturbativo. Para ello se usaron los promedios de excitaciones calculados para estados simétricos de Dicke y mixtos hasta para 4 excitaciones. Tales cantidades se muestran en el Apéndice C, donde por practicidad se ha omitido el caso $M = 4$. Tales expresiones nos permiten extraer la fracción emitida en la nanofibra de manera analítica. Por ejemplo, para el caso de Dicke de 3 excitaciones tenemos

$$f_{\text{dicke}}^{(3)} = (N - 2)\tilde{\gamma} \frac{3(N - 2)(N - 1)N\tilde{\gamma}^3 + (3N(4N - 7) + 8)\tilde{\gamma}^2 + 3(5N - 4)\tilde{\gamma} + 6}{3[1 + (N - 2)\tilde{\gamma}][2 + (N - 2)\tilde{\gamma}][1 + (N - 1)\tilde{\gamma}][1 + N\tilde{\gamma}]}.$$

Vemos que la expresión es más complicada, pero para el caso $N \gg 1$ podemos hacer la aproximación

$$f_{\text{dicke}}^{(3)} \approx \frac{(N - 2)\tilde{\gamma}}{1 + (N - 1)\tilde{\gamma}} \left[1 + \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right].$$

Si solo consideramos el primer término obtenemos el mismo resultado encontrado con el método perturbativo $\tilde{\gamma} \ll 1$, dado por (4.45). En la expresión anterior tenemos que el segundo término correctivo no depende del valor de $\tilde{\gamma}$, solo depende del valor de N . En todo caso, el comportamiento de la fracción descrito con el método perturbativo predice con mucha precisión el comportamiento general si consideramos una N muy grande, es decir para sistema de muchos de átomos. Finalmente, es posible afirmar que el valor de la fracción aumenta conforme γ lo hace, lo cual se explica por el hecho de que el sistema cada vez está más acoplado a los modos guiados.

Se procedió a graficar las fracciones obtenidas como función del número de átomos N . Esto para $M = 1, 2, 3, 4$ excitaciones y un valor $\tilde{\gamma} = 1$. Las curvas obtenidas son mostradas en la Fig. 4.4, y muestran que la fracción sigue los mismos patrones observados con las soluciones del método perturbativo. Pero, ahora las soluciones exactas nos muestran que la fracción emitida en la nanofibra por los estados simétricos mixtos depende de las excitaciones en el sistema M (comparar con la expresión (4.44) obtenido mediante el método perturbativo, donde la expresión no depende de M). Pero, caso contrario a lo que pasa con los estados de Dicke, la fracción será mayor conforme aumenta M .

4.3.2. Funciones de correlación para el campo

Una forma de acceder y caracterizar al campo electromagnético emitido por los átomos es a través de fotodetectores que hacen uso del efecto fotoeléctrico, los cuales podemos modelarlos de la siguiente forma. Supongamos que queremos detectar la intensidad del campo en un punto del espacio \mathbf{r} y a un tiempo t . Para ello podemos pensar en colocar un átomo en cierto estado inicial $|i\rangle$ en tal posición. Detectaremos la radiación del campo al medir la corriente de electrones producido por la fotoionización del átomo por parte de los fotones del campo. Entonces, la probabilidad de detectar la radiación del campo en la posición \mathbf{r} entre los tiempos t y $t + dt$ es proporcional a $G^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t') dt$ [179], donde introducimos la *función de coherencia de primer orden*

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle,$$

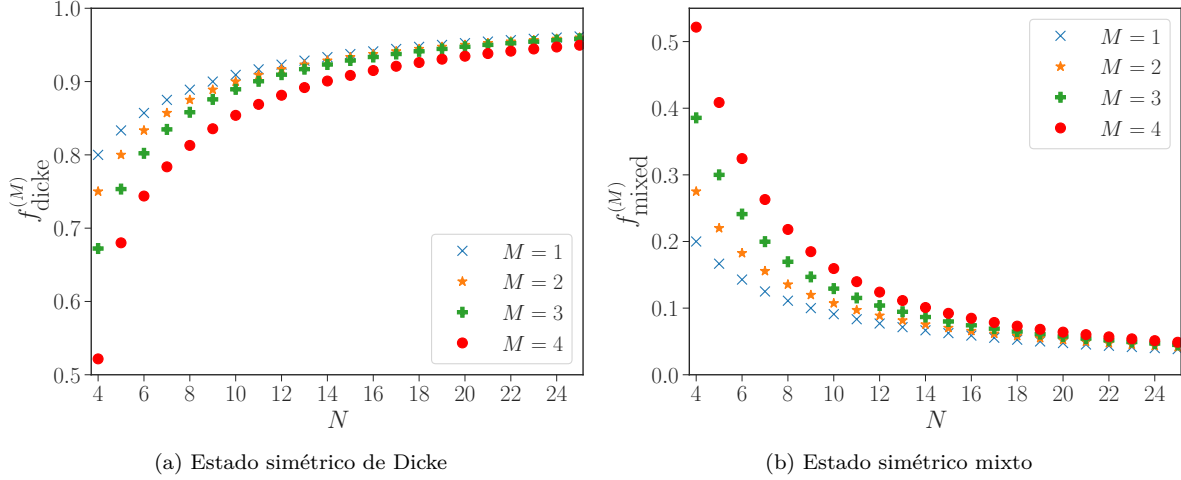


Figura 4.4: Gráficas de la fracción de energía emitida a lo largo del modo guiado como función del número de átomos N en el sistema. Todas las curvas corresponden a un valor $\tilde{\gamma} = 1$. (a) Estados de Dicke con a los más $M = 4$ excitaciones como condición inicial. Se observa que la fracción es menor para estados con mayor número de excitaciones iniciales. (b) Estados mixtos como condición inicial. Cuando el número de excitaciones en el sistema M crece, también el valor de la fracción incrementa en los estados mixtos. Los resultados muestran que en general los estados de Dicke son más efectivos para guiar la emisión de los fotones por el canal guiado que los estados mixtos. A manera que el número de átomos crece, es más probable que el sistema de los estados de Dicke emita toda la energía a través de la nanofibra. Caso contrario ocurre con los estados mixtos en donde el sistema tiende a dejar de emitir los fotones por los modos radiados.

el cual puede calcularse incluso si el estado inicial es un operador de estado. El mismo razonamiento es válido para la probabilidad conjunta para n detectores, cada detección hecha en \mathbf{r}_i entre el tiempo t_i y $t_i + dt_i$. Esta probabilidad será proporcional a $G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n; \mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n) dt_1 \dots dt_n$ donde se define la *función de coherencia de orden n* como [180]

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n; \mathbf{r}'_1, t'_1; \dots; \mathbf{r}'_n, t'_n) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}'_n, t'_n) \rangle. \quad (4.46)$$

Para describir el campo emitido se suele considerar una función normalizada igual a

$$g^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n; \mathbf{r}'_1, t'_1; \dots; \mathbf{r}'_n, t'_n) = \frac{G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n; \mathbf{r}'_1, t'_1; \dots; \mathbf{r}'_n, t'_n)}{\sqrt{\prod_{i=1}^n G^{(1)}(\mathbf{r}_i, t_i; \mathbf{r}_i, t_i) G^{(1)}(\mathbf{r}'_i, t'_i; \mathbf{r}'_i, t'_i)}}, \quad (4.47)$$

objeto que llamaremos *función de correlación de orden n* .

A continuación presentamos el cálculo de algunas de estas funciones para el campo emitido a la nanofibra, es decir usando solo los modos guiados. Para ello consideramos nuestras soluciones exactas de la sección 4.2. Para el cálculo será útil escribir el campo eléctrico en función de operadores colectivos. Para ello podemos usar que en la dinámica Markoviana [9]

$$\hat{a}_\alpha \approx 2\pi \sum_r G_{\alpha r}^* \hat{\sigma}_-^{(r)} \delta(\omega_\alpha - \omega_0).$$

Esto considerando que el campo se encuentra inicialmente en el vacío. Si usamos lo anterior en (3.53), y consideramos las condiciones de nuestro modelo, podremos escribir al campo como

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{guiado}}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \kappa(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} \hat{J}_{\mp}, \quad (4.48)$$

siendo κ un vector, y donde hemos usado los operadores colectivos (2.28)

Función de correlación de segundo orden

La función $g^{(2)}(t, \tau) = g^{(2)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t + \tau)$ ¹ nos describe la correlación de las intensidades así como la probabilidad de detectar un fotón al tiempo $t + \tau$ dado que previamente fue detectado uno en el tiempo t , en una misma posición \mathbf{r} [180]. Para los modos guiados el campo puede ser aproximado como (4.48), que al ser sustituido en (4.47) nos da

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_+(t + \tau) \hat{J}_-(t + \tau) \hat{J}_-(t) \rangle}{\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(t) \rangle \langle \hat{J}_+(t + \tau) \hat{J}_-(t + \tau) \rangle}.$$

Cabe aclarar que la normalización usada en la expresión anterior, así como en (4.47), es útil cuando la intensidad de emisión de fotones es distinto de cero en toda la evolución, ya que de lo contrario la función de correlación diverge. Como en nuestro caso la intensidad de fotones emitidos va decayendo a cero, es conveniente usar otra normalización, y en el caso presentado en este trabajo es funcional usar la siguiente

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_+(t + \tau) \hat{J}_-(t + \tau) \hat{J}_-(t) \rangle}{\langle \hat{J}_+(0) \hat{J}_-(0) \rangle^2}. \quad (4.49)$$

Si a $g^{(2)}$ lo evaluamos a $\tau = 0$ tendremos un punto de referencia para caracterizar las fuentes de fotones individuales. Por ejemplo, una fuente clásica de luz coherente produce fotones con estadística Poissoniana y satisface que $g^{(2)}(0) = 1$. Mientras que una fuente que produce un solo fotón en el tiempo se caracteriza por $g^{(2)}(0) = 0$. Podemos identificar una fuente pura de solo dos fotones por $g^{(2)}(0) = 1/2$, que es el resultado que nos da un estado de Fock de dos excitaciones con una misma frecuencia [181]. En general, si observamos la distribución del arribo de dos fotones, $g^{(2)}(0)$ nos describe que tan estrecha es la distribución del arribo de las dos excitaciones. Para $g^{(2)}(0) = 1$ la distribución de las detecciones sería *Poissoniana*, donde la varianza es igual a la media. Por tanto $g^{(2)}(0) > 1$ o $g^{(2)}(0) < 1$ son llamadas *super-Poissoniana* y *sub-Poissoniana* respectivamente pues implicarían que la varianza es más grande o más pequeña que la mediana. Cabe mencionar que, aunque está cantidad nos ayude a caracterizar las fuentes de fotones es un reto el hacer mediciones precisas de estas cantidades, por lo que para la caracterización se suelen contrastar más de una función de correlación.

Para el caso que estamos estudiando podemos usar el *teorema de la regresión cuántica* para calcular los valores esperados de la forma [33]

$$\langle \hat{O}_1(t) \hat{O}_2(t + \tau) \hat{O}_3(t) \rangle = \text{tr} \left\{ \hat{O}_2(0) e^{\check{L}\tau} [\hat{O}_3(0) |\rho(t)\rangle \hat{O}_1(0)] \right\}.$$

Para nuestro caso tenemos $\hat{O}_1 = \hat{J}_+ = \hat{O}_3^\dagger$ y $\hat{O}_2 = \hat{J}_+ \hat{J}_-$. Así se satisface

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_+(t + \tau) \hat{J}_-(t + \tau) \hat{J}_-(t) \rangle &= \text{tr} \left\{ \hat{J}_+ \hat{J}_- e^{\check{L}\tau} [\hat{J}_- |\rho(t)\rangle \hat{J}_+] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) \left(\check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) e^{\check{L}\tau} \left(\check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) |\rho(t)\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde también hemos escrito a la observable con los superoperadores colectivos. Para el estado general simétrico de $M = 3$ excitaciones dado por (4.36) calculamos la función de correlación de (4.49), y llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t, \tau) &= \frac{4e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]\tau}}{N[\Gamma-3\gamma][\Gamma+(N-3)\gamma(n-3)][\alpha_{0,2}+2\alpha_{0,4}+3\alpha_{0,7}+\alpha_{0,3}+\alpha_{0,5}+\alpha_{0,8}]^2} \left\{ \right. \\ &18\gamma(\Gamma-3\gamma)(1-e^{N\gamma\tau})[\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}] - 6N\gamma^2 e^{N\gamma\tau} [6\alpha_7+5\alpha_8+4\alpha_9+3\alpha_{10}] + \\ &2N\gamma e^{N\gamma\tau} (\Gamma+N\gamma) [3\alpha_7+2\alpha_8+\alpha_9] + Ne^{[\Gamma+(N-3)\gamma]\tau} \left(-(\Gamma-3\gamma)[\Gamma+(N-3)\gamma][\alpha_4+\alpha_5] - \right. \\ &\Gamma(\Gamma+N\gamma)[\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8+\alpha_9] + N\gamma^2 [3\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8+\alpha_9] + \gamma\Gamma [6\alpha_6+12\alpha_7+8\alpha_8+4\alpha_9] \\ &\left. \left. + 3\gamma^2 [-3\alpha_6+3\alpha_7+4\alpha_8+5\alpha_9+6\alpha_{10}] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

¹Debido a la forma de nuestro campo (4.48) la expresión anterior no depende del detector dentro de la fibra óptica. Así que omitiremos la etiqueta \mathbf{r}

donde $\alpha_{0,i} = \alpha_i(t=0)$. Además, cabe mencionar que la dependencia temporal está en los coeficientes $\alpha_i = \alpha_i(t)$, ya que estas codifican la evolución en el operador de estado $|\rho(t)\rangle$.

El resultado anterior es general para el subespacio (4.35), y lo podemos aplicar a las soluciones exactas obtenidas mediante el método de la sección 4.2. El primer caso que podemos evaluar es el estado simétrico de Dicke con $M=2$ excitaciones como condición inicial. En este caso obtenemos

$$g_{2, \text{dicke}}^{(2)}(t, \tau) = \frac{N}{2(N-1)} e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t - [\Gamma+(N-1)\gamma]\tau}. \quad (4.52)$$

Nótese que $g_{2, \text{dicke}}^{(2)}(0, 0) = N/[2(N-1)] < 1$ para todos los valores del dominio de $N > 2$. Y para $N \rightarrow \infty$ lo anterior se acerca a $1/2$. Mientras que al tomar el estado simétrico mixto como estado inicial, el resultado al que llegamos es

$$g_{2, \text{mixto}}^{(2)}(t, \tau) = e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t - [\Gamma+(N-1)\gamma]\tau}. \quad (4.53)$$

Ahora tenemos $g_{2, \text{mixto}}^{(2)}(0, 0) = 1$, lo que implica que la emisión a lo largo del canal guiado es la de una fuente con estadística Poissoniana, independientemente del número de átomos N . Este caso $M = 2$ nos permite darle una clara lectura a la función de correlación. Notemos que entre (4.52) y (4.53) sólo hay una diferencia en la amplitud. Esta amplitud afecta la probabilidad de detección del primer fotón emitido por el sistema atómico. Pero después de que el primer fotón es detectado, el sistema asume un estado superradiante, independientemente de la existencia de correlaciones previas (estado Dicke) o no (estado mixto).

El siguiente cálculo que se realizó es la de sistemas con $M = 3$ excitaciones iniciales como condición inicial. Para el estado simétrico de Dicke de tres excitaciones obtenemos

$$g_{3, \text{dicke}}^{(2)}(t, \tau) = \frac{2(N-1)}{3(N-2)} \left\{ e^{-3[\Gamma+(N-3)\gamma]t - 2[\Gamma+(N-2)\gamma]\tau} + \frac{[\Gamma+(N-1)\gamma]e^{-[3\Gamma+(3N-4)\gamma]t - [2\Gamma+(2N-1)\gamma]\tau}}{[\Gamma+(N-5)\gamma][\Gamma+(N-3)\gamma]} \times \right. \\ \left. \left([\Gamma+(N-3)\gamma]e^{[\Gamma+N\gamma](t+\tau)} - e^{5\gamma t} [2e^{[\Gamma+N\gamma]\tau} + [\Gamma+(N-5)\gamma]e^{3\gamma\tau}] \right) \right\}, \quad (4.54)$$

y de manera más puntual se cumple que

$$g_{3, \text{dicke}}^{(2)}(0, 0) = \frac{2(N-1)}{3(N-2)} \quad (4.55)$$

el cual es igual a 1 para $N = 3$, por tanto el sistema totalmente excitado emite fotones con una estadística Poissoniana, pero el valor de la correlación es menor a 1 para $N > 3$. Finalmente, también es posible obtener expresiones analíticas para el estado simétrico mixto de tres excitaciones, cuyo resultado es igual a

$$g_{3, \text{mixto}}^{(2)}(t, \tau) = \frac{4e^{-3[\Gamma+(N-3)\gamma]t}}{3N} \left\{ -\frac{2(N-3)\gamma(\Gamma-\gamma)}{\Gamma^2 - 8\gamma\Gamma + 15\gamma^2} e^{N\gamma t - [\Gamma+(N-1)\gamma]\tau} - \frac{2(N-3)\gamma}{\Gamma-3\gamma} e^{N\gamma t - [2\Gamma+(N-4)\gamma]\tau} \right. \\ \left. + \frac{N[\Gamma^2 + (N-6)\gamma\Gamma - (N+7)\gamma^2]}{[\gamma-5\gamma][\Gamma+(N-5)\gamma]} - \frac{6\gamma[\Gamma+(N-1)\gamma]}{[\Gamma+(N-3)\gamma][\Gamma+(N-5)\gamma]} e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]\tau} - \frac{6\gamma}{\Gamma+(N-3)\gamma} e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]\tau} \right\}, \quad (4.56)$$

que se reduce a

$$g_{3, \text{mixto}}^{(2)}(0, 0) = \frac{4}{3}, \quad (4.57)$$

lo cual nos da una fuente con estadística super-Poissoniana independientemente del valor de N .

Función de correlación de tercer orden

El cálculo de la $g^{(2)}$ nos ayuda a caracterizar nuestra fuente de fotones. Pero debido a que su medición puede no ser precisa para varios sistemas, el cálculo de la $g^{(3)}$ también puede ser útil en la caracterización de la fuente. La función $g^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2) = g^{(3)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t + \tau_1; \mathbf{r}, t + \tau_1 + \tau_2)$ nos da la probabilidad de realizar, en una misma posición, una fotodetección al tiempo $t + \tau_1 + \tau_2$, dado que se midió un primer fotón al tiempo

t y otro segundo al tiempo $t + \tau_1$. A parte de lo anterior, otra descripción que podemos hacer usando esta función es para una fuente de luz donde dominan componentes de dos fotones se satisface que $g^{(2)}(0) > 1$ y $g^{(3)}(0, 0) < 1$ [181].

Para los modos guiados la función de correlación a tercer orden (considerando la normalización antes mencionada) está dada por

$$g^{(3)}(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{\langle \hat{J}_+(t)\hat{J}_+(t+\tau_1)\hat{J}_+(t+\tau_1+\tau_2)\hat{J}_-(t+\tau_1+\tau_2)\hat{J}_-(t+\tau_1)\hat{J}_-(t) \rangle}{\langle \hat{J}_+(0)\hat{J}_-(0) \rangle^3}, \quad (4.58)$$

considerando mediciones en una misma posición. Aquí no podemos hacer lo hecho con $g^{(2)}$. Por tanto, nos limitaremos a calcular $g^{(3)}(t, 0, 0)$. Nuevamente, usamos un estado de la forma (4.36). Recordemos que la dependencia temporal de la evolución se encuentra codificado en los coeficientes α_i . Así, de manera general obtenemos

$$g^{(3)}(t, 0, 0) = \frac{36[\alpha_7(t) + \alpha_8(t) + \alpha_9(t) + \alpha_{10}(t)]}{[\alpha_{0,2} + 2\alpha_{0,4} + 3\alpha_{0,7} + \alpha_{0,3} + \alpha_{0,5} + \alpha_{0,8}]^3} \quad (4.59)$$

Lo anterior lo evaluamos en nuestros dos casos de interés. Recordemos que al ser una función ligada a la fotodetección de tres fotones, solo podemos aplicarlo a estados de $M = 3$ excitaciones iniciales. Primeramente, para el estado de Dicke de tres excitaciones obtenemos

$$g_{3, \text{dicke}}^{(3)}(t, 0, 0) = \frac{2N(N-1)}{9(N-2)^2} e^{-3[\Gamma+(N-3)\gamma]t} \quad (4.60)$$

que para $t = 0$, el valor es menor a 1 para $N > 3$. Para el estado mixto de tres excitaciones la expresión es igual a

$$g_{3, \text{mixto}}^{(3)}(t, 0, 0) = \frac{4}{3} e^{-3[\Gamma+(N-3)\gamma]t}, \quad (4.61)$$

que a $t = 0$, no hay valor de N que haga que $g_{3, \text{mixto}}^{(3)} < 1$.

4.4. Caso particular: N=2

Finalizamos este capítulo resolviendo un caso ya estudiado que es un sistema atómico de dos átomos [4, 29]. Aún así, poner aquí las soluciones al problema con los métodos ya introducidos será muy útil para contrastar los resultados de la dinámica Markoviana con las que mostraremos en el siguiente capítulo. Para mayor claridad en los resultados, trabajaremos con la base de los operadores colectivos (2.29). Ya que podemos tener a lo más dos excitaciones trabajaremos en el subespacio

$$\{\hat{Q}_{00}^{20}, \hat{Q}_{01}^{10}, \hat{Q}_{10}^{01}, \hat{Q}_{02}^{00}\}, \quad (4.62)$$

en donde el Lindbladiano toma la forma

$$\check{L}_i + \check{L}_c \equiv \begin{pmatrix} 0 & \Gamma & \gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma & -\gamma & 2\Gamma \\ 0 & -\gamma & -\Gamma & 2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -2\Gamma \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Esta base, al menos para $N = 2$, nos permite una fácil lectura de los resultados. Supongamos que tenemos un operador de estado escrito de la siguiente forma

$$|\rho(t)\rangle = P^{(0)}(t)\hat{Q}_{00}^{20} + P^{(1)}(t)\hat{Q}_{01}^{10} + 2P^{(eg)}(t)\hat{Q}_{10}^{01} + P^{(2)}(t)\hat{Q}_{02}^{00}. \quad (4.64)$$

Entonces el coeficiente $P^{(M)}$ es la probabilidad de que el sistema atómico tenga M excitaciones. Si $M = 0$ tenemos que ambos átomos están en el estado base. Y $P^{(eg)}(t) = \langle \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)} \rangle$ es la correlación entre ambos átomos, cuya valor distinto de cero nos permite saber si hay fenómenos de sub- o super- radianza, como los discutimos en la sección 3.1.4.

4.4.1. Una excitación atómica

Para una excitación atómica podemos distinguir entre estados mixtos simétricos y estados de Dicke como condiciones iniciales. Respectivamente estos estados están dados por

$$\left| \rho_{\text{mixed}}^{(1)}(0) \right\rangle = \hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0}, \quad \left| \rho_{\text{dicke}}^{(1)}(0) \right\rangle = \hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0} + \hat{Q}_{1\ 0}^{0\ 1}.$$

Así, la solución del problema con las distintas condiciones iniciales es

$$\left| \rho_{\text{mixed}}^{(1)}(t) \right\rangle = [1 - e^{-\Gamma t} \cosh(\gamma t)] \hat{Q}_{0\ 0}^{2\ 0} + e^{-\Gamma t} \cosh(\gamma t) \hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0} - e^{-\Gamma t} \sinh(\gamma t) \hat{Q}_{1\ 0}^{0\ 1} \quad (4.65)$$

$$\left| \rho_{\text{dicke}}^{(1)}(t) \right\rangle = [1 - e^{-(\Gamma+\gamma)t}] \hat{Q}_{0\ 0}^{2\ 0} + e^{-(\Gamma+\gamma)t} \hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0} + e^{-(\Gamma+\gamma)t} \hat{Q}_{1\ 0}^{0\ 1} \quad (4.66)$$

Notemos que en el caso $\gamma = 0$, que es cuando no hay presencia de la nanofibra la probabilidad de tener una excitación atómica decae de la misma forma en ambos estados, aunque el estado de Dicke tenga correlación iniciales y el estado mixto no. Cosa que cambia al tener $\gamma \neq 0$. Si observamos la correlación entre átomos veríamos que para el estado de Dicke siempre será positiva, mientras que el estado mixto tendrá una correlación siempre negativa. Es más, la correlación del estado mixto tenderá a un valor estacionario a $t \rightarrow \infty$ cuando $\gamma = \Gamma$. Esto repercute al comparar las probabilidades de tener una excitación atómica con el de un sistema independiente ($\gamma = 0$). Veríamos que la presencia de la fibra permite un decaimiento superradiante para el estado de Dicke. Mientras que en el estado mixto siempre será subradiante. Y llega a un valor estacionario cuando se tiene el acoplamiento perfecto con la fibra. Esto último podemos explicarlo a través de la ecuación (4.30). El estado mixto de dos átomos y una excitación está compuesto de una mezcla estadística clásica de estados que pueden escribirse como estados de Bell $|\Psi^{(\pm)}\rangle = (|e_1 g_2\rangle \pm |g_1 e_2\rangle)/\sqrt{2}$. El estado $|\Psi^{(+)}\rangle$ es lo que denominamos un estado de Dicke. Y como vemos este decae a cero en la fibra. Pero el estado $|\Psi^{(-)}\rangle$ decae debido a los modos radiados. Y cuando no los consideramos este estado es estacionario. Por tanto vemos que para el caso del estado mixto, la nanofibra actúa como un filtro que a tiempos largos solo nos da la evolución de $|\Psi^{(-)}\rangle$. Esta explicación puede generalizarse de forma que justificamos de manera similar nuestras soluciones (4.39) y (4.40).

4.4.2. Dos excitaciones atómicas

Cuando tenemos a los dos átomos inicialmente excitados solo tendremos como condición inicial

$$\left| \rho^{(2)}(0) \right\rangle = \hat{Q}_{0\ 2}^{0\ 0},$$

cuya evolución en el proceso de emisión total está dado como

$$\begin{aligned} \left| \rho^{(2)}(t) \right\rangle &= 2e^{-\Gamma t} \frac{(\Gamma^2 + \gamma^2)[\cosh(\Gamma t) - \cosh(\gamma t)] + 2\gamma[\Gamma \sinh(\gamma t) - \gamma \sinh(\Gamma t)]}{\Gamma^2 - \gamma^2} \hat{Q}_{0\ 0}^{2\ 0} + e^{-2\Gamma t} \hat{Q}_{0\ 2}^{0\ 0} \\ &+ 2e^{-\Gamma t} \frac{(\Gamma^2 + \gamma^2) \cosh(\gamma t) - 2\Gamma\gamma \sinh(\gamma t) - (\Gamma^2 + \gamma^2)e^{-\Gamma t}}{\Gamma^2 - \gamma^2} \hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0} \\ &- \frac{(\Gamma - \gamma)^2 e^{-(\Gamma-\gamma)t} - (\Gamma + \gamma)^2 e^{-(\Gamma+\gamma)t} + 4\Gamma\gamma e^{-2\Gamma t}}{\Gamma^2 - \gamma^2} \hat{Q}_{1\ 0}^{0\ 1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

La solución anterior parece estar indefinida para el caso $\Gamma = \gamma$, pero en el límite se tiene

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \gamma} \left| \rho^{(2)}(t) \right\rangle = [1 - e^{-2\gamma t}(1 + 2\gamma t)] \hat{Q}_{0\ 0}^{2\ 0} + 2\gamma t e^{-2\gamma t} \left(\hat{Q}_{0\ 1}^{1\ 0} + \hat{Q}_{1\ 0}^{0\ 1} \right) + e^{-2\Gamma t} \hat{Q}_{0\ 2}^{0\ 0}. \quad (4.68)$$

Lo primero a resaltar del resultado, es que la probabilidad de tener dos átomos excitados no depende del acoplamiento de los átomos a la fibra. En todos los casos tendremos $P_2^{(2)}(t) = e^{-2\Gamma t}$, lo cual no pasa con $P_2^{(1)}(t)$ que sí depende de Γ, γ . La lectura que podemos dar a esto es que, la aparición de cambios en la tasa de decaimiento surgen después de que un primer fotón haya sido emitido. Esto para un estado inicial totalmente excitado, tal como se explica en la sección 3.1.4. Esta dependencia podemos relacionarla con la correlación entre los átomos $\langle \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \rangle_2$. A $\gamma = 0$ la correlación entre los átomos es cero para todo tiempo. En la Fig. 4.5 vemos que conforme γ empieza a aumentar, la correlación empieza tomando valores positivos para

luego tomar valores negativos. De las expresiones podemos asegurar que siempre las correlaciones tenderán a cero a tiempos largos. Finalmente a $\gamma = \Gamma$ la correlación es siempre positiva, por lo que podemos concluir que el sistema presenta efectos de superradianza en este caso.

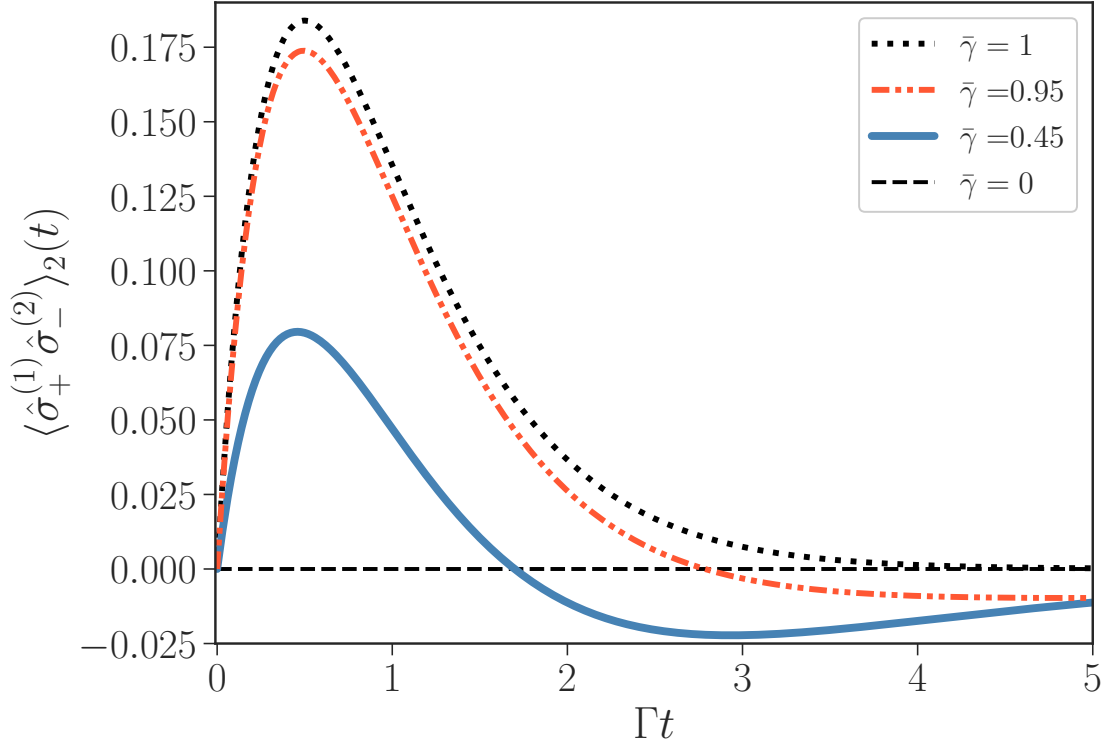


Figura 4.5: Gráfica de las correlaciones creadas en la evolución de dos átomos totalmente excitados, con $\bar{\gamma} = \gamma/\Gamma \in [0, 1]$. Para átomos desacoplados nunca hay correlación. Conforme $\bar{\gamma}$ aumenta, la correlación empieza a tomar valores positivos cada vez más grandes y conforme pasa el tiempo la correlación tomará valores negativos cada vez más pequeños. A tiempos largos la correlación tiende a cero. Para $\bar{\gamma} = 1$ la correlación siempre es positiva.

Como comentamos, esperamos ver los efectos de la correlación en la evolución de $P_2^{(1)}(t)$, ya que la probabilidad de dos excitaciones no varía. En la Fig. 4.6a podemos ver que la máxima amplitud de esta probabilidad es para $\gamma = 0$ que es cuando la correlación entre átomos es cero. Y conforme $\gamma \rightarrow \infty$, la amplitud va disminuyendo. Por tanto, para observar los efectos colectivos nos fijaremos en la pendiente de la probabilidad de tener una excitación, $P^{(1)}(t)$. Este valor lo podemos considerar como una tasa de decaimiento, lo que nos motiva a introducir una tasa de decaimiento efectiva definida como

$$\gamma^{\text{eff}}(t) = -\frac{d}{dt}P^{(1)}(t) \quad (4.69)$$

En la Fig. 4.6b graficamos la tasa de decaimiento efectiva para el caso de dos excitaciones. Vemos que en el caso $\gamma = \Gamma$ la tasa tiene un valor máximo instantáneo que rebasa el máximo del caso $\gamma = 0$. Este hecho lo tomaremos como un signo de superradianza, pues es el acoplamiento de los átomos lo que permite que haya un decaimiento más rápido. Conforme γ empieza a variar desde cero, vemos que el máximo de la tasa efectiva nunca supera el del caso independiente. A este hecho lo consideramos como un signo de subradianza. Pero hay un punto en que esto se revierte, pues conforme $\gamma \rightarrow \Gamma$ el sistema empieza a ser superradiante. Aún así para ningún valor de γ el máximo de las tasas efectivas exceden al del acoplamiento perfecto $\gamma = \Gamma$.

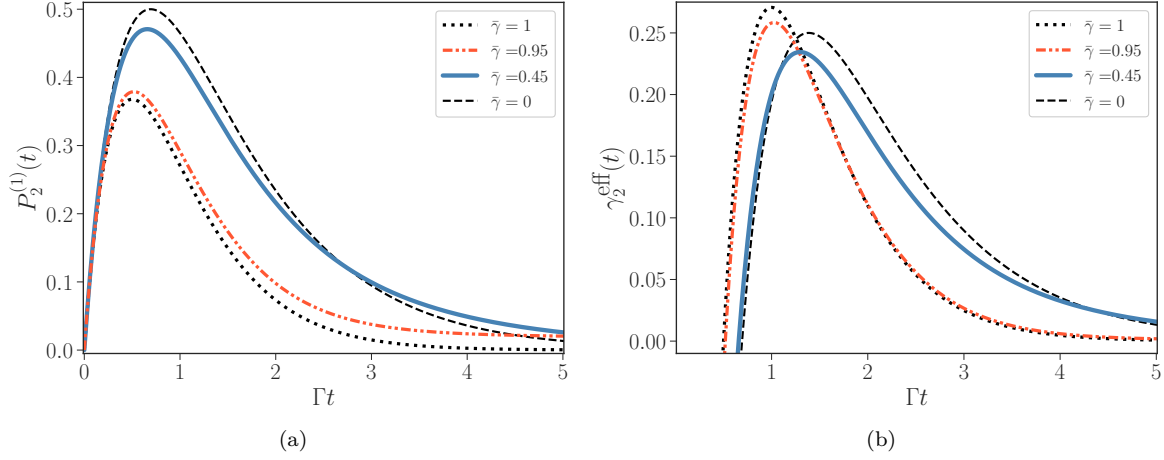


Figura 4.6: Gráficas obtenidas a partir de la probabilidad de tener solo una excitación atómica en el sistema, para distintos valores de $\bar{\gamma} = \gamma/\Gamma \in [0, 1]$. (a) Probabilidad de una excitación atómica. Vemos que la máxima amplitud se da cuando los átomos están desacoplados, y el menor valor es cuando tenemos átomos con acoplamiento perfecto. Para saber si las emisiones son más rápidas o lentas debemos de conocer la pendiente de esta curva. (b) Tasa de decaimiento efectivo, que es igual a menos la derivada de $P_2^{(1)}(t)$. Un mayor (menor) valor de esta variable implica una emisión más rápida (lenta) del sistema atómico. Observamos que se alcanza una tasa efectiva máxima cuando $\gamma = \Gamma$ comparado con la emisión independiente $\gamma = 0$. Lo que consideramos como una marca de superradianza. Pero para algunos valores $\bar{\gamma}$ el máximo no supera nunca la máxima tasa efectiva del decaimiento independiente. Esto implica la presencia de subradianza.

4.4.3. Enredamiento entre átomos

Cuando hablamos de correlaciones entre átomos es imposible en no pensar en enredamiento cuántico, el cual surge debido a la interacción entre los subsistemas. Ya que tenemos emisores cuánticos interactuando a través de un campo electromagnético común es natural en pensar que los subsistemas deben de enredarse. Aún así introducimos hasta este caso el enredamiento, ya que el cuantificarlo es muy complicado y no existe una medida o variable que sea estándar para medirlo. Excepto para un sistema bipartito puro, o un sistema bipartito mixto de qubits. Debido a que una de nuestras hipótesis para la dinámica Markoviana es que despreciamos el enredamiento entre el sistema átomos-campo, lo único que nos queda es cuantificar el enredamiento entre los dos emisores.

Ya que el estado de nuestro sistema atómico está descrito por operadores, usaremos la concurrencia definida en la sección 2.4.1 para nuestro propósito. Dado un estado de la forma (4.64), si usamos la base $\{|0_1 0_2\rangle, |0_1 1_2\rangle, |1_1 0_2\rangle, |1_1 1_2\rangle\}$ podemos escribir al operador de estado con la forma matricial

$$|\rho(t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} P^{(0)}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{(1)}(t)/2 & P^{*(eg)}(t) & 0 \\ 0 & P^{(eg)}(t) & P^{(1)}(t)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{(2)}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Cabe aclarar que está matriz es un poco general, pues suponemos que la correlación entre átomos es una función compleja. Pero lo escribimos de este modo ya que los resultados que obtengamos en esta sección lo retomaremos en el siguiente capítulo. Dada la matriz, tenemos que calcular los eigenvalores de

$$|\rho\rangle (\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)}) |\rho\rangle^* (\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)}) \equiv \begin{pmatrix} P^{(0)}P^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{(1)2}/4 + |P^{(eg)}|^2 & P^{(1)}P^{*(eg)}/2 & 0 \\ 0 & P^{(1)}P^{(eg)}/2 & P^{(1)2}/4 + |P^{(eg)}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{(0)}P^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Para lo anterior tenemos los eigenvalores

$$\lambda_1 = \left(\frac{P^{(1)}}{2} + |P^{(eg)}| \right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\frac{P^{(1)}}{2} - |P^{(eg)}| \right)^2, \quad \lambda_{3,4} = P^{(0)}P^{(2)}.$$

Debido a la definición de la concurrencia (2.49), la única forma de que lo anterior sea distinto de cero es tomar $\lambda_1 \geq \lambda_{3,4}$. Así tendremos que

$$\mathcal{C} = \max \left(0, \frac{P^{(1)}}{2} + |P^{(eg)}| - \left| \frac{P^{(1)}}{2} - |P^{(eg)}| \right| - 2\sqrt{P^{(0)}P^{(2)}} \right) \quad (4.71)$$

Empezando con el caso de $M = 1$ excitación inicial, vemos que podemos asegurarnos que $P^{(1)} \geq 2P^{(eg)}$ para todo tiempo. Y ya que $P^{(2)}(t) = 0$, entonces la concurrencia es igual a $\mathcal{C}(t) = 2|P^{(eg)}(t)|$. Entonces, para el estado de Dicke tenemos $\mathcal{C}_{1,\text{dicke}}(t) = e^{-(\Gamma+\gamma)t}$. Este resultado concuerda con la condición inicial cuando tenemos un estado de máximo enredamiento, lo que implica $\mathcal{C} = 1$. Pero de manera curiosa, cuando el acoplamiento entre átomos y nanofibra es cada vez más fuerte entonces el enredamiento entre átomos decae a cero cada vez más rápido. Otro resultado aún más sorprendente es el caso el estado mixto con $\mathcal{C}_{1,\text{mixed}}(t) = e^{-\Gamma t} \sinh(\gamma t)$. A $t = 0$ la concurrencia es igual a cero, lo que concuerda con la condición inicial. Pero notemos que conforme $\gamma \rightarrow \Gamma$, el enredamiento comienza a ser mayor, y comienza a decaer cada vez más lento. Hasta el acoplamiento perfecto, cuando la concurrencia es $\mathcal{C} = 1/2$ y es estacionario. Es decir, este sistema en la dinámica Markoviana genera un enredamiento estacionario.

Para dos excitaciones podemos empezar evaluando el caso de acoplamiento perfecto. Cuando $\gamma = \Gamma$ tenemos

$$\mathcal{C}_2(t) = \max \left(0, 2\gamma t e^{-2\gamma t} - 2e^{-\gamma t} \sqrt{1 - e^{-2\gamma t}(1 + 2\gamma t)} \right). \quad (4.72)$$

Lo anterior es distinto de cero si $\gamma t + 1 > e^{\gamma t}$, lo cual nunca ocurre. Por tanto la concurrencia en este caso es cero. Notemos que esto es sorprendente pues como observamos en la Fig. 4.5 la correlación alcanza su máximo en este valor. Otro caso que podemos calcular directamente es el de átomos desacoplados, $\gamma = 0$. Para este caso el estado (4.67) tendrá coeficientes iguales a

$$P_2^{(0)}(t) = (1 - e^{-\Gamma t})^2, \quad P_2^{(1)}(t) = 2e^{-\Gamma t}(1 - e^{-\Gamma t}), \quad P_2^{(eg)}(t) = 0, \quad P_2^{(2)}(t) = e^{-2\Gamma t},$$

el cual nos llevará a qué la concurrencia es cero, como cabría esperar. Finalmente, para casos más generales podemos evaluar la expresión concurrencia como se muestra en la Fig. 4.7 en donde vemos condiciones en las que el enredamiento entre átomos existe. Conforme γ va aumentando a partir de cero, los átomos empiezan a enredarse pero en un tiempo que decae rápidamente. La magnitud del enredamiento comienza a incrementar así como el tiempo que dura, hasta un valor máximo. A partir de cierto valor de γ el enredamiento empieza a decrecer tanto en amplitud así como en tiempo, hasta ser nuevamente cero para el caso de acoplamiento perfecto.

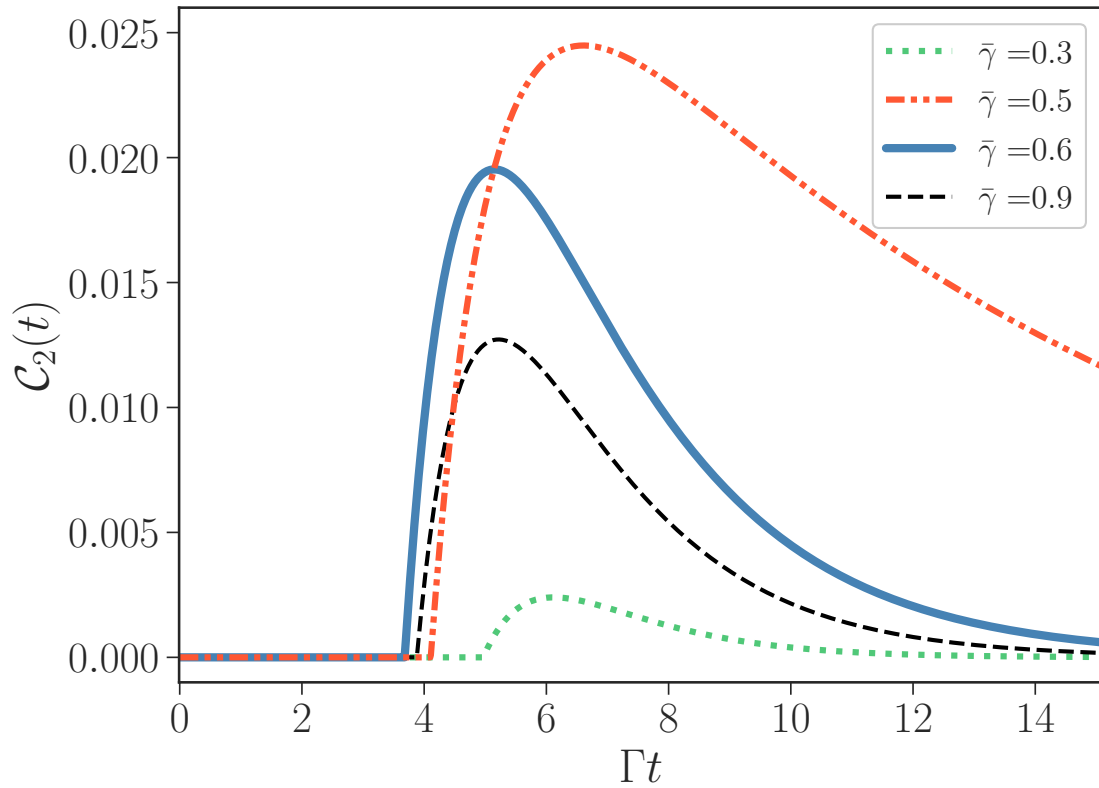


Figura 4.7: Gráfica de la Concurrencia entre los dos átomos, para el decaimiento de ambos inicialmente excitados, para distintos valores de $\bar{\gamma} = \gamma/\Gamma \in [0, 1]$. Para $\bar{\gamma} = 0$, el enredamiento es cero. Vemos que conforme $\bar{\gamma}$ crece, el enredamiento aparece, y su amplitud como tiempo en que decae crece también. Esto sucede hasta cierto valor de $\bar{\gamma}$, a partir del cual el enredamiento empieza a decrecer, hasta ser cero para el caso de acoplamiento perfecto $\bar{\gamma} = 1$.

Capítulo 5

Sistema no-Markoviano

Para el desarrollo de las redes cuánticas, necesarias para las tecnologías cuánticas, se requiere que pueda haber un acoplamiento entre sistemas cuánticos a distancias cada vez más largas. Una plataforma que puede habilitar esto es el uso de la nanofibra, y en general las guías de onda [15,23]. Pero los resultados y los métodos mostrados en el capítulo anterior mediante una dinámica Markoviana dejan de ser válidos cuando la separación entre los emisores es $\sim c/\Gamma$, que implica ordenes de magnitud macroscópicas (centímetros o mayores). A estas distancias y debido a una velocidad de propagación finita del campo electromagnético dentro de las guías de onda, los efectos de retardo empiezan a ser relevantes en la dinámica. Como mostraremos en este capítulo, ya no podemos suponer que el enredamiento entre los emisores y los modos del campo puede ser despreciado, por tanto la aproximación de Born ya no es posible de asumir. Es así que la ecuación maestra en la forma de Lindblad ya no describirá adecuadamente la dinámica (como en el capítulo anterior), por lo que consideraremos el espacio de Hilbert completo del sistema átomos-modos del campo. Esto implica lidiar con los infinitos grados de libertad para el campo. Todo esto nos restringe a estudiar un sistema de pocos átomos, como sería $N = 2$ partículas. Este es el único *sistema atómico con retardo* que puede tener estados totalmente simétricos, ya que el Hamiltoniano será totalmente simétrico ante cualquier permutación de partículas si y sólo si todos los átomos tiene la misma separación entre sí, cosa que solo sucede ante el caso mencionado.

Así, consideremos un sistema de dos emisores cuánticos de dos niveles. Para dar un tratamiento más general al problema, diremos que estos están acoplados a una guía de onda¹. Ambas partículas tiene una frecuencia de transición ω_0 entre el estado base $|g\rangle$ y el estado excitado $|e\rangle$. Alrededor de la guía de onda podemos describir al campo electromagnético mediante dos conjuntos de soluciones de la ecuación de Helmholtz: los modos guiados y los modos radiados [132]. Los modos guiados permiten que los emisores cuánticos interactúen entre ellos independientemente de la distancia que los separe. Así que estos modos nos permitirán estudiar los efectos que se producen en la evolución por el retardado que sufre un fotón al viajar de un átomo a otro. Por tanto vamos a usar el Hamiltoniano (3.24), en donde supondremos que $G_{\alpha r} = g_{\alpha}(r_r, \phi_r)e^{-k_{\alpha}z_r}$ siendo z_r la posición del r -ésimo emisor con operador atómico $\hat{\sigma}_+^{(r)} = |e\rangle_r\langle g|$. Además denotaremos a la constante propagación sobre el eje z como k_{α}^2 . Las suposiciones hechas funcionan para la plataforma de nanofibras donde el acoplamiento está dado por (3.60), pero al mismo tiempo nos da pauta a hacer una tratamiento más general. Para que el Hamiltoniano sea totalmente simétrico, consideraremos que $g_{\alpha}(r_1, \phi_1) = g_{\alpha}(r_2, \phi_2) = g_{\alpha}$, lo que implica que ambos átomos tengan la misma distancia radial r y el mismo ángulo azimutal ϕ . Bajo estas condiciones obtenemos

$$\hat{H}_{\text{int}} = -i\hbar \sum_{r=1}^2 \sum_{\alpha} g_{\alpha} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{a}_{\alpha} e^{-i\Delta_{\alpha}t} e^{ik_{\alpha}z_r} + \text{H.c.} \quad (5.1)$$

Recordemos que en la ecuación (3.24) usamos α para identificar a los modos guiados si $\alpha = \mu$ y a los modos radiados cuando $\alpha = \nu$. En este capítulo solo consideramos los modos guiados de forma que $\gamma = \Gamma$. Para

¹Ejemplo de estas guías de onda son nanoalambres plasmónicos [182, 183], cristales fotónicos [22, 184], nanofibras ópticas [169, 185] y circuitos superconductores [186].

²Está variable es la misma que β de la sección 3.3.2. Y motivados por la expresión (3.49) podemos hacer la relación $k_{\alpha} = \pm\omega_{\alpha}/v_g$.

simplificar las operaciones vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, que $z_1 = -z_2 = d/2$, siendo d la separación entre los átomos. Finalmente, al igual que en la sección 4.4 cuando tenemos $N = 2$ podemos obtener soluciones para $M = 1, 2$ excitaciones.

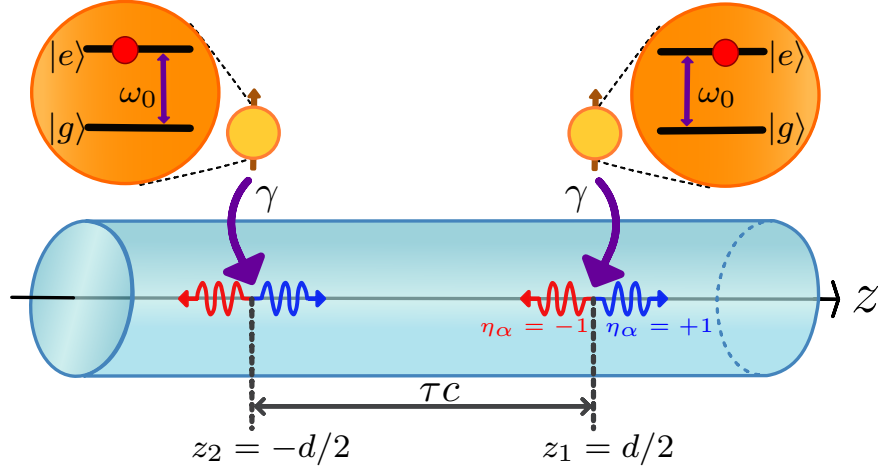


Figura 5.1: Dos átomos tienen la misma dirección de momento dipolar y frecuencia de transición ω_0 . Ambos están acoplados a una guía de onda en las posiciones $z_{1,2} = \pm d/2$. Los emisores pueden interactuar entre ellos a través de los modos guiados del campo electromagnético.

5.1. Sistema atómico simétrico con una excitación

A continuación se mostrará el problema y la solución para un estado simétrico de dos átomos con una excitación. Esta solución ha sido desarrollada por Kanupriya Sinha y colaboradores en el artículo [45]. Ocupamos este caso para introducir los métodos usados en este capítulo ya que el problema de una excitación contiene un menor número de grados de libertad. Como condición inicial simétrica vamos a considerar el producto de un estado de Dicke de una excitación y el campo en el vacío. Este estado es representado por $|\psi_1(0)\rangle = (|e_1g_2\rangle + |g_1e_2\rangle) \otimes |\{0\}\rangle / \sqrt{2}$ donde $|\{0\}\rangle$ representa el vacío del campo electromagnético cuantizado. Debido al uso de la aproximación de onda rotante (RWA), uno de los valores conservados del sistema cuántico es el total excitaciones atómicas más las excitaciones del campo. Este hecho nos ayuda a proponer para todo tiempo la siguiente forma del estado

$$|\psi_1(t)\rangle = \left\{ \sum_{s=1}^2 b^{(s)}(t) \hat{\sigma}_+^{(s)} + \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \right\} |\emptyset\rangle, \quad (5.2)$$

en donde $b^{(s)}(t)$ es la amplitud de probabilidad de que el s -ésimo átomo este excitado, y $c_{\alpha}(t)$ es la amplitud de tener una excitación del modo α . Acorde a nuestra condición inicial tenemos a $t = 0$ que se satisface $b^{(s)}(0) = 1/\sqrt{2}$ y $c_{\alpha}(0) = 0$ para todo α . Además denotamos el estado base del sistema total como $|\emptyset\rangle = |g_1g_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle$.

La dinámica del sistema cuántico está dado por la ecuación de Schrödinger en el esquema de interacción (2.33), el cual nos dará un sistema de ecuaciones diferenciales para encontrar las amplitudes de probabilidad del estado (5.2). Por tanto, lo primero a calcular es la acción del Hamiltoniano (5.1) al estado propuesto (5.2), lo que nos da

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{-i\hbar} |\psi_1(t)\rangle &= \sum_r \sum_{\alpha} \left[-\sum_s b^{(s)}(t) g_{\alpha}^* e^{-ik_{\alpha} z_r} e^{i\Delta_{\alpha} t} \hat{\sigma}_-^{(r)} \hat{\sigma}_+^{(s)} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} + \sum_{\beta} c_{\beta}(t) g_{\alpha} e^{ik_{\alpha} z_r} e^{-\Delta_{\alpha} t} \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{a}_{\alpha} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \right] |\emptyset\rangle \\ &= \sum_r \sum_{\alpha} \left[-b^{(r)}(t) g_{\alpha}^* e^{-ik_{\alpha} z_r} e^{i\Delta_{\alpha} t} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} + c_{\alpha}(t) g_{\alpha} e^{ik_{\alpha} z_r} e^{-\Delta_{\alpha} t} \hat{\sigma}_+^{(r)} \right] |\emptyset\rangle, \end{aligned}$$

en donde hemos usado que $\hat{\sigma}_-^{(r)}\hat{\sigma}_+^{(s)}|\varnothing\rangle = \delta_{rs}|\varnothing\rangle$ y $\hat{a}_\alpha\hat{a}_\beta^\dagger|\varnothing\rangle = (\hat{a}_\beta^\dagger\hat{a}_\alpha + \delta_{\alpha\beta})|\varnothing\rangle = \delta_{\alpha\beta}|\varnothing\rangle$. Al tener en cuenta lo anterior en la ecuación de Schrödinger y al agrupar en término de los estados vectores, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{b}^{(r)}(t) = -\sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{ik_{\alpha}z_r} e^{-i\Delta_{\alpha}t} c_{\alpha}(t), \quad (5.3)$$

$$\dot{c}_{\alpha}(t) = g_{\alpha} e^{i\Delta_{\alpha}t} \sum_r e^{-ik_{\alpha}z_r} b^{(r)}(t). \quad (5.4)$$

Cabe resaltar que, en principio el sistema de ecuaciones tiene un infinito número de ecuaciones acopladas. Esto porque en la ecuación (5.3), la amplitud de probabilidad $b^{(r)}$ está acoplada con todos los modos α que es una variable continua.

Pero es posible desacoplar el número infinito de ecuaciones de la siguiente forma. Primeramente integraremos la ecuación (5.4) lo que nos da

$$c_{\alpha}(t) = \int_0^t dt' g_{\alpha}^* e^{i\Delta_{\alpha}t'} \sum_r e^{-ik_{\alpha}z_r} b^{(r)}(t') = \sum_r g_{\alpha}^* e^{-ik_{\alpha}z_r} \int_0^t b^{(r)}(t-T) e^{i\Delta_{\alpha}(t-T)} dT, \quad (5.5)$$

en donde hemos hecho el cambio de variable $t' = t - T$ y hemos usado la condición inicial $c_{\alpha}(0) = 0$. Luego, sustituimos la ecuación (5.5) en (5.3) para obtener

$$\dot{b}^{(r)}(t) = -\sum_s \int_0^t dT b^{(s)}(t-T) e^{i\omega_0 T} \sum_{\alpha} |g_{\alpha}|^2 e^{-i\omega_{\alpha} T} e^{ik_{\alpha}(z_r - z_s)}. \quad (5.6)$$

En esta parte es importante enfatizar que hemos pasado de un sistema acoplado de infinitas ecuaciones diferenciales, a un sistema de dos ecuaciones integro-diferenciales para $b^{(1)}(t)$ y $b^{(2)}(t)$. Lo que nos falta calcular en la expresión anterior es todo el término dentro de la suma de modos α , cuyo resultado se puede consultar en el Apéndice D. Si introducimos γ , la tasa de decaimiento a los modos guiados que es el mismo que se usó en la dinámica Markoviana, y $\tau = |z_r - z_s|/v_g$ es el tiempo que le toma a un fotón de ir de la posición z_r a z_s , viajando dentro de la guía de onda con velocidad de grupo v_g , la ecuación (5.6) es igual a

$$\dot{b}^{(r)}(t) = -\frac{\gamma}{2} b^{(r)}(t) - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} b^{(s)}(t-\tau) \Theta(t-\tau); \quad s \neq r. \quad (5.7)$$

Donde además introducimos $\phi = \omega_0 \tau$, que es una fase que acumula el campo a consecuencia de la distancia entre átomos, y $\Theta(t-\tau)$ la función escalón de Heaviside nos asegura que la retroalimentación del campo a los átomos solo es posible a tiempo mayores que el retardo. Por tanto, tenemos una ecuación en donde el r -ésimo emisor experimenta una retroalimentación del átomo $b^{(s)}$ en un tiempo retardado $t-\tau$.

La ecuación (5.7) describe un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo entre $b^{(1)}(t)$ y $b^{(2)}(t)$. Uno de los métodos para resolver tales sistemas de ecuaciones es usar la transformada de Laplace, lo que nos permite convertir el sistema anterior a uno algebraico [187–189]. Para una función $f(t)$ denotaremos tal transformación como $\mathcal{L}(f(t)) = \tilde{f}(s)$. Bajo la transformada de Laplace, se tienen las siguientes identidades

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\tilde{f}(s) - f(0), \quad \mathcal{L}(f(t-a)\Theta(t-a)) = e^{-sa}\tilde{f}(s).$$

Aplicando las reglas anteriores a la ecuación (5.7) y considerando las condiciones iniciales $b^{(r)}(0) = 1/\sqrt{2}$ llegamos a

$$s\tilde{b}^{(r)}(s) - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\gamma}{2} [\tilde{b}^{(r)}(s) + e^{i\phi} e^{-s\tau} \tilde{b}^{(u)}(s)], \quad r \neq u.$$

Lo anterior al ser un sistema algebraico es más fácil de resolver que el sistema diferencial, y tiene como resultado

$$\tilde{b}^{(r)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{s + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau}}. \quad (5.8)$$

Ya que queremos una solución en el dominio temporal y no en el espacio transformado, realizamos la transformación inversa de Laplace a nuestra solución anterior. Bajo la forma (5.8), la opción sería hacer la

transformada inversa de manera numérica. Para poder obtener una expresión de la transformada inversa, primeramente escribiremos la fracción en (5.8) como una expansión en fracciones de polinomios. Esto lo logramos usando la siguiente formula [190]

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_k \frac{1}{h'(\alpha_k)} \frac{1}{z - \alpha_k} \quad (5.9)$$

donde h' es la derivada de la función $h(z)$ y α_i representa los polos de la fracción. En nuestro caso, los polos son encontrados resolviendo la ecuación característica

$$s + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_k = -\frac{\gamma}{2} + \frac{W_k(-r)}{\tau} \equiv -\frac{\gamma_k}{2}, \quad (5.10)$$

en donde W_k denota la k -ésima rama de la función W de Lambert. Estas ramas están definidas para todos los números enteros, de forma que al hacer la expansión la etiqueta $k \in \mathbb{Z}$ [191]. Además por simplicidad definimos $r = \gamma\tau e^{\gamma\tau/2+i\phi}/2$, y por convención introducimos la variable $\gamma_k = -2s_k$ considerando que los polos encontrados ‘actuarán como tasas de decaimiento’. Así, se satisface que

$$\frac{1}{s + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{s + \frac{\gamma_k}{2}}; \quad A_k = \frac{1}{1 + W_k(-r)}. \quad (5.11)$$

La forma anterior nos permite usar la siguiente identidad para la transformada inversa de Laplace (denotada como \mathcal{L}^{-1})

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}, \quad (5.12)$$

con a una constante. De esto se desprende que

$$b^{(r)}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{b}^{(r)}(s)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + \frac{\gamma_k}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-\gamma_k t/2}. \quad (5.13)$$

Finalmente para dar una solución completa debemos dar la amplitud $c_\alpha(t)$. Para esto, aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación (5.4) para obtener

$$\tilde{c}_\alpha(s) = \frac{g_\alpha^*}{s} \sum_r e^{-ik_\alpha z_r} \tilde{b}^{(r)}(s + i\Delta_\alpha),$$

en donde hemos usado que $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \tilde{f}(s-a)$. En la ecuación anterior necesitamos evaluar la transformada de $b^{(r)}$, cosa que ya tenemos y está dado por (5.8). Por tanto

$$\tilde{c}_\alpha(s) = \frac{g_\alpha^*}{\sqrt{2}s} \sum_r \frac{e^{-ik_\alpha z_r}}{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_\alpha)\tau}} = \frac{g_\alpha^*}{\sqrt{2}s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma_k}{2}} \sum_r e^{-ik_\alpha z_r}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, y teniendo en cuenta que $z_1 = -z_2$ obtendremos

$$\begin{aligned} c_\alpha(t) &= \sqrt{2}g_\alpha^* \cos(k_\alpha z_r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma_k}{2})}\right) \\ &= -i\sqrt{2}g_\alpha^* \cos(k_\alpha z_r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{1 - e^{-(\gamma_k/2+i\Delta_\alpha)t}}{\Delta_\alpha - i\frac{\gamma_k}{2}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2. Sistema atómico con dos excitaciones

Mostrado lo anterior, lo siguiente a resolver es el caso de dos átomos inicialmente excitados. Para este caso el estado cuántico inicial es $|\psi_2(0)\rangle = |e_1 e_2, 0\rangle$. Si seguimos considerando la validez de la aproximación de onda rotante (RWA), nuevamente el total de excitaciones atómicas más las excitaciones del campo se conservan, así proponemos que el estado a todo tiempo tiene la forma

$$|\psi(t)\rangle = \left\{ a(t)\hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_+^{(2)} + \sum_{s=1}^2 \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{(s)}(t)\hat{\sigma}_+^{(s)}\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} + \sum_{\alpha \neq \beta} \sum \frac{c_{\alpha\beta}(t)}{2}\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\beta}^{\dagger} + \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}(t)}{\sqrt{2}}\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \right\} |\emptyset\rangle. \quad (5.15)$$

En lo anterior tenemos cuatro términos. El primer término $a(t)$ describe la amplitud probabilidad de que ambos átomos estén excitados. El segundo término $b_{\alpha}^{(r)}(t)$ nos da la probabilidad de una excitación del modo α en la guía de onda y que el r -ésimo átomo esté excitado. Los últimos dos términos implican la amplitud de probabilidad de tener dos modos excitados, en el cual diferenciamos dos casos: $c_{\alpha}(t)$ es cuando ambos modos son iguales y $c_{\alpha\beta}(t)$ cuando haya dos modos distintos α y β .

5.2.1. Derivación de las ecuaciones de movimiento

La dinámica del sistema está dada por la ecuación de Schrödinger en el esquema de interacción. Al usar el Hamiltoniano (5.1) y el estado propuesto (5.15) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las amplitudes de probabilidad

$$\dot{a}(t) = - \sum_{\alpha} \sum_{s=1}^2 g_{\alpha} e^{-i\Delta_{\alpha}t} b_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha}z_s}, \quad (5.16)$$

$$\dot{b}_{\alpha}^{(r)}(t) = g_{\alpha}^* e^{i\Delta_{\alpha}t} a(t) e^{ik_{\alpha}z_r} - \sum_{\beta} g_{\beta} e^{-i\Delta_{\beta}t} c_{\alpha\beta}(t) e^{ik_{\beta}z_r} - \sqrt{2}g_{\alpha} e^{-i\Delta_{\alpha}t} c_{\alpha}(t) e^{ik_{\alpha}z_r}, \quad (5.17)$$

$$\dot{c}_{\alpha\beta}(t) = 2g_{\alpha}^* e^{i\Delta_{\alpha}t} \sum_{s=1}^2 b_{\beta}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha}z_s} + 2g_{\beta}^* e^{i\Delta_{\beta}t} \sum_{s=1}^2 b_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\beta}z_s}, \quad (5.18)$$

$$\dot{c}_{\alpha}(t) = \sqrt{2}g_{\alpha}^* e^{i\Delta_{\alpha}t} \sum_{s=1}^2 b_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha}z_s}, \quad (5.19)$$

donde hemos usado que las posiciones atómicas satisfacen $z_1 = -z_2$.

El primer paso para la resolución del sistema de ecuaciones es integrar la ecuación (5.18) usando la condición inicial $c_{\alpha\beta}(0) = 0$, y sustituir el resultado en la expresión (5.17). Haciendo esto obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{b}_{\alpha}^{(r)}(t) &= g_{\alpha}^* e^{i\Delta_{\alpha}t} a(t) e^{ik_{\alpha}z_r} - \sqrt{2}g_{\alpha} e^{-i\Delta_{\alpha}t} c_{\alpha}(t) e^{ik_{\alpha}z_r} \\ &\quad - 2g_{\alpha}^* \sum_{s=1}^2 \int_0^t dT e^{i\Delta_{\alpha}(t-T)} e^{-ik_{\alpha}z_s} \sum_{\beta} g_{\beta} e^{-i\Delta_{\beta}t} b_{\beta}^{(s)}(t-T) e^{ik_{\beta}z_r} \\ &\quad - 2 \sum_{s=1}^2 \int_0^t dT b_{\alpha}^{(s)}(t-T) \sum_{\beta} |g_{\beta}|^2 e^{-i\Delta_{\beta}T} e^{ik_{\beta}(z_r-z_s)}. \end{aligned}$$

El tercer término en el lado derecho de la igualdad puede ser aproximado a cero. Para esto asumiremos que $g_{\beta} = g_{\beta}(\omega_{\beta})$ es constante y puede ser evaluada en la frecuencia de resonancia $\omega_{\beta} \approx \omega_0$. Para que este se satisfaga asumiremos que las funciones $b_{\beta}^{(s)}(t)$ evolucionan lo suficientemente lento. Estas hipótesis son consistentes si consideramos la aproximación de Wigner-Weisskopf, y la cual asumimos que se cumple en este problema (ver Apéndice D). Finalmente, para el cuarto término usamos la identidad (D.2), la que nos da funciones evaluadas a tiempos retardados. Por simplicidad definimos $B_{\alpha}^{(r)} = b_{\alpha}^{(r)}(t) e^{-i\Delta_{\alpha}t}$ y $C_{\alpha} = c_{\alpha}(t) e^{-2i\Delta_{\alpha}t}$, así la ecuación de

Schrödinger nos da el siguiente sistema de ecuaciones con retardo

$$\dot{a}(t) = -\sum_{\alpha} \sum_{s=1}^2 g_{\alpha} B_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha} z_s}, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\alpha}^{(r)}(t) &= -i\Delta_{\alpha} B_{\alpha}^{(r)}(t) + g_{\alpha}^* a(t) e^{ik_{\alpha} z_r} - \sqrt{2} g_{\alpha} C_{\alpha}(t) e^{ik_{\alpha} z_r} - \frac{\gamma}{2} B_{\alpha}^{(r)}(t) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-i\Delta_{\alpha} t} B_{\alpha}^{(s)}(t-\tau) \Theta(t-\tau); \quad r \neq s, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\dot{C}_{\alpha}(t) = -2i\Delta_{\alpha} C_{\alpha}(t) + \sqrt{2} g_{\alpha}^* \sum_{s=1}^2 B_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha} z_s}, \quad (5.22)$$

siendo γ la tasa de decaimiento en los modos radiados y $\tau = d/v_g$ es el retardo en la interacción entre los átomos debido a que el campo se propaga a una velocidad finita v_g dentro de la guía de onda.

5.2.2. Solución al sistema de ecuaciones retardadas

El sistema de ecuaciones con retardo (5.20)-(5.22) puede ser resuelto usando la transformada de Laplace con las condiciones iniciales $a(0) = 1$ y $B_{\alpha}(0) = 0 = C_{\alpha}(0)$. Una vez hecha la transformada, por comodidad introducimos las variables

$$\tilde{B}_{\alpha}^{(\pm)}(s) = \tilde{B}_{\alpha}^{(1)}(s) e^{-ik_{\alpha} z_1} \pm \tilde{B}_{\alpha}^{(2)}(s) e^{-ik_{\alpha} z_2}. \quad (5.23)$$

Así nuestro sistema diferencial (5.20)-(5.22) es equivalente al sistema algebraico

$$s\tilde{a}(s) - 1 = -\sum_{\alpha} g_{\alpha} \tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) \quad (5.24)$$

$$\left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} + \frac{4|g_{\alpha}|^2}{s + 2i\Delta_{\alpha}} \right] \tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) = 2g_{\alpha}^* \tilde{a}(s) - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau - s\tau} \left\{ \cos(k_{\alpha} d) \tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) + i \sin(k_{\alpha} d) \tilde{B}_{\alpha}^{(-)}(s) \right\} \quad (5.25)$$

$$\left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} \right] \tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) = \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau - s\tau} \left\{ \cos(k_{\alpha} d) \tilde{B}_{\alpha}^{(-)}(s) + i \sin(k_{\alpha} d) \tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) \right\}, \quad (5.26)$$

donde hemos reemplazado previamente la función

$$\tilde{C}_{\alpha}(s) = \sqrt{2} g_{\alpha}^* \frac{\tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s)}{s + 2i\Delta_{\alpha}}, \quad (5.27)$$

El sistema de ecuaciones (5.24)-(5.26) es un sistema algebraico fácil de resolver, cuya solución es

$$\tilde{B}_{\alpha}^{(+)}(s) = \frac{-2g_{\alpha}^* \tilde{a}(s) \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \cos(k_{\alpha} d) \right]}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \sin(k_{\alpha} d) \right]^2 + \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \cos(k_{\alpha} d) \right] \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \cos(k_{\alpha} d) + \frac{4|g_{\alpha}|^2}{s+2i\Delta_{\alpha}} \right]}, \quad (5.28)$$

$$\tilde{B}_{\alpha}^{(-)}(s) = \frac{-2g_{\alpha}^* \tilde{a}(s) i \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \sin(k_{\alpha} d)}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \sin(k_{\alpha} d) \right]^2 + \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \cos(k_{\alpha} d) \right] \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-(s+i\Delta_{\alpha})\tau} \cos(k_{\alpha} d) + \frac{4|g_{\alpha}|^2}{s+2i\Delta_{\alpha}} \right]}, \quad (5.29)$$

y

$$\tilde{a}(s) = \left\{ s - 2 \sum_{\alpha} |g_{\alpha}|^2 \times \frac{s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau} \cos(k_{\alpha} d)}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau} \sin(k_{\alpha} d) \right]^2 + \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau} \cos(k_{\alpha} d) \right] \left[s + i\Delta_{\alpha} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_{\alpha} \tau} \cos(k_{\alpha} d) + \frac{4|g_{\alpha}|^2}{s+2i\Delta_{\alpha}} \right]} \right\}^{-1}. \quad (5.30)$$

Recordemos que queremos soluciones en el dominio temporal. Para ello, realizamos la transformada inversa de Laplace en nuestras ecuaciones (5.28), (5.29) y (5.30). Tal cual están las expresiones, es difícil obtener alguna expresión para la transformada inversa, así que la transformada se realizaría de manera numérica. Para

conseguir una expresión en el dominio temporal consideraremos la siguiente aproximación. En el denominador de las expresiones vamos a desprejir el término $4|g_\alpha|^2/(s+i\Delta_\alpha)$. Esto es posible ya que $|g_\alpha|^2/\Gamma \lesssim 10^{-4}$ para los modos EM alrededor de una guía de onda en el rango visible [192]. Físicamente, hacer esta aproximación significaría que desestimamos la contribución de la probabilidad de tener dos modos excitados iguales α en comparación a tener dos modos excitados distintos α, β .

Solución para la amplitud $a(t)$

Tomando en cuenta la aproximación comentada en el párrafo anterior, la amplitud de probabilidad de tener dos emisores excitados a satisface

$$\tilde{a}(s) \approx \left\{ s - \sum_{\alpha} \frac{|g_\alpha|^2 \left[s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} \cos(k_\alpha d) \right]}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} \right] \left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s - i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2} \right]} \right\}^{-1}. \quad (5.31)$$

Recordemos que nos enfocamos en el caso de un acoplamiento perfecto entre los emisores y la guía de onda. Motivados por lo expuesto en la sección (3.5) la suma sobre los modos α podemos transformarlo en una integral de la forma $\sum_{\alpha} \rightarrow \sum_{\eta_\alpha=\pm 1} \int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$. Para nuestros intereses solo consideramos la integral sobre las frecuencias ω_α y la suma en la dirección de propagación η_α ³. Todo lo demás lo podemos considerar parte de la densidad de modos $\rho(\omega_\alpha)$. Esto lo hacemos para considerar una mayor gama de guías de onda y no solo las nanofibras. Cabe mencionar que usando la aproximación de Weisskopf-Wigner evaluaremos las funciones $\rho(\omega_\alpha) \approx \rho(\omega_0)$ y $g_\alpha(\omega_\alpha) \approx g_\alpha(\omega_0) = g_0$. Tales aproximaciones permiten que nuestra solución solo contenga efectos físicos debido al retardo y no a la estructura de las guías (ver Apéndice D).

Con las consideraciones anteriores calculamos la suma sobre los modos α y obtenemos que $\tilde{a}(s) = 1/(s+\gamma)$. Este resultado es válido para todo valor de γ y τ (ver Apéndice E). Es fácil realizar la transformada inversamente de Laplace de esta expresión, lo que nos da $a(t) = e^{-\gamma t}$ que es la amplitud de probabilidad dependiente del tiempo de tener los dos emisores excitados. Cabe recalcar que este resultado no depende del retardo de tiempo que hay entre los átomos τ , lo que implica que la probabilidad es la misma ya sea que los emisores sean coincidentes ($\tau = 0$, dinámica Markoviana⁴) o que los átomos sean independientes ($\tau \rightarrow \infty$ ⁵).

Solución para las amplitudes $b_\alpha^{(1,2)}$

Luego de obtener $a(t)$ podemos calcular la amplitud de que tener solo a uno de los átomos excitados, y que haya en la fibra algún modo α del campo. Teniendo (5.28) y (5.29), pasamos a las variables $\tilde{B}^{(1,2)}(s)$, usando la inversa en la ecuación (5.23) igual a

$$\tilde{B}_\alpha^{(1)}(s) = \frac{\tilde{B}_\alpha^{(+)}(s) \pm \tilde{B}_\alpha^{(-)}(s)}{2} e^{\pm i k_\alpha d/2}, \quad (5.32)$$

donde hemos sustituido que $z_1 = d/2 = -z_2$. Recordando que desprejimos el término $4|g_\alpha|^2/(s+i\Delta_\alpha)$ en el denominador de las ecuaciones (5.28) y (5.29), y que $\tilde{a}(s) = (s+\gamma)^{-1}$, llegamos a la igualdad

$$\tilde{B}_\alpha^{(1)}(s) \approx -g_\alpha^* \frac{e^{\pm i k_\alpha d/2}}{s+\gamma} \frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} e^{\mp i k_\alpha d}}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} \right] \left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s - i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2} \right]}. \quad (5.33)$$

Tomando la transformada inversa y usando la definición $b_\alpha^{(1,2)}(t) = B_\alpha^{(1,2)}(t) e^{i\Delta_\alpha t}$ llegamos a la siguiente solución para las amplitudes (ver Apéndice F para mayores detalles)

³ $\eta_\alpha = +1$ implica que el modo es propagante mientras que $\eta_\alpha = -1$ que es contra-propagante. Usando la variable η_α podemos escribir a la constante de propagación en z como $k_\alpha = \eta_\alpha \omega_\alpha / v_g$

⁴Cuando decimos dinámica Markoviana en este capítulo solo nos referimos a los resultados de la sección 4.67 para el caso de acoplamiento perfecto $\Gamma = \gamma$. También nos referiremos a este resultado como el de *átomos coincidentes* $\tau = 0$

⁵Recordemos que en la dinámica Markoviana estudiada en el capítulo anterior consideramos que los átomos son independientes cuando $\gamma = 0$ lo que implicaba que $\Gamma = \gamma_{10}$. En el presente capítulo tenemos $\gamma \neq 0$, pero aún podemos considerar el caso de átomos independientes cuando la separación interatómica es infinita. Esto implica $\tau \rightarrow \infty$. Así que en ambos casos las soluciones deben de coincidir.

$$b_{\alpha}^{(1)}(t) = -\frac{ig_{\alpha}^* \tau}{2} e^{i\Delta_{\alpha} t} e^{\pm i\eta_{\alpha}(\Delta_{\alpha} \tau + \phi)/2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^{\sigma}}{W_k(\sigma r)} \frac{e^{-\gamma t}}{\Delta_{\alpha} + i(\gamma - \gamma_k^{\sigma}/2)} \left[\frac{\gamma}{2} - i\Delta_{\alpha} + \right. \quad (5.34)$$

$$\left. \frac{W_k(\sigma r)}{\tau} e^{[\gamma - \gamma_k^{\sigma}/2 - i\Delta_{\alpha}]t} + \frac{\gamma}{2} e^{i(1-\eta_{\alpha})\phi - i(1+\eta_{\alpha})\Delta_{\alpha} \tau + \gamma \tau} \Theta(t - \tau) \left\{ 1 - e^{[\gamma - \gamma_k^{\sigma}/2 - i\Delta_{\alpha}](t - \tau)} \right\} \right],$$

donde aparecen las variables

$$A_k^{\sigma} = \frac{1}{1 + W_k(\sigma r)}, \quad \gamma_k^{\sigma} = \gamma - \frac{2W_k(\sigma r)}{\tau}, \quad (5.35)$$

siendo Θ la función escalón de Heaviside, W_k denota la k -ésima rama de la función W de Lambert y nuevamente usamos $r = \frac{\gamma \tau}{2} e^{\gamma \tau/2 + i\phi}$. Cabe recalcar que tenemos en los modos α la etiqueta $\eta_{\alpha} = \pm 1$ que indica que el fotón viaja a la derecha o a la izquierda del eje de la guía de onda, respectivamente. Mientras que la etiqueta $\sigma = \pm 1$ es una variable auxiliar que nos ayuda a acortar la expresión.

Solución para las amplitudes $c_{\alpha, \beta}$

Recordemos que despreciamos el proceso de tener dos modos iguales α en la guía de onda, así que no ponemos la solución de la amplitud $c_{\alpha}(t)$ en esta sección, pero puede consultarse en el Apéndice G. Por otro lado, la contribución del proceso de tener dos modos distintos en la guía está dado por $c_{\alpha\beta}(t)$. Este valor lo obtendremos reescribiendo la ecuación (5.18) con la variable $C_{\alpha\beta}(t) = c_{\alpha\beta}(t) e^{-i(\Delta_{\alpha} + \Delta_{\beta})t}$, lo que nos da

$$\dot{C}_{\alpha\beta}(t) + i(\Delta_{\alpha} + \Delta_{\beta})C_{\alpha\beta}(t) = 2g_{\alpha}^* \sum_{s=1}^2 B_{\beta}^{(s)}(t) e^{-ik_{\alpha} z_s} + 2g_{\beta}^* \sum_{s=1}^2 B_{\alpha}^{(s)}(t) e^{-ik_{\beta} z_s}$$

Después podemos transformar la expresión anterior mediante la transformada de Laplace y usar la expresión (5.33) para obtener

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}(s) = 2g_{\alpha}^* \sum_{r=1}^2 \frac{\tilde{B}_{\beta}^{(r)}(s) e^{-ik_{\alpha} z_r}}{s + i(\Delta_{\alpha} + \Delta_{\beta})} + 2g_{\beta}^* \sum_{r=1}^2 \frac{\tilde{B}_{\alpha}^{(r)}(s) e^{-ik_{\beta} z_r}}{s + i(\Delta_{\alpha} + \Delta_{\beta})}, \quad (5.36)$$

en el cual podemos sustituir las soluciones (5.33). Pero ya que necesitamos una función en el dominio temporal, a parte de sustituir $B_{\alpha}^{(1,2)}(s)$ vamos a usar los polos (F.1). Lo anterior nos ayuda a realizar la transformada inversa de Laplace y obtener la expresión

$$c_{\alpha, \beta}(t) = 2\tau g_{\alpha}^* g_{\beta}^* \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^{\sigma} e^{i(\Delta_{\alpha} + \Delta_{\beta})t}}{W_k(\sigma r)} \left[\cos[(k_{\alpha} - k_{\beta})d/2] \left\{ M_{\alpha, \beta}^{(k, \sigma)}(t) + M_{\beta, \alpha}^{(k, \sigma)}(t) \right\} \right. \quad (5.37)$$

$$\left. - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} \cos[(k_{\alpha} + k_{\beta})d/2] \left\{ N_{\alpha, \beta}^{(k, \sigma)}(t) e^{-i\Delta_{\alpha} \tau} + N_{\beta, \alpha}^{(k, \sigma)}(t) e^{-i\Delta_{\beta} \tau} \right\} \right],$$

donde hemos introducido las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
M_{\alpha,\beta}^{(k,\sigma)}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}}{[s + i(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)][s + \gamma][s - s_{k,\alpha}^\sigma]} \right) \\
&= \frac{\gamma - 2i\Delta_\alpha}{[\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)][\Delta_\alpha + \Delta_\beta + i\gamma]} \frac{e^{-\gamma t}}{2} - \frac{\gamma - 2i\Delta_\beta}{[\Delta_\beta + i\gamma_k^\sigma/2][\Delta_\alpha + \Delta_\beta + i\gamma]} \frac{e^{-i(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)t}}{2} \\
&\quad + \frac{W_k(\sigma r)}{\tau} \frac{e^{-\gamma_k^\sigma t/2 - i\Delta_\alpha t}}{[\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)][\Delta_\beta + i\gamma_k^\sigma/2]}, \tag{5.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\alpha,\beta}^{(k,\sigma)}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s\tau}}{[s + i(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)][s + \gamma][s - s_{k,\alpha}^\sigma]} \right) \\
&= - \left(\frac{e^{-\gamma(t-\tau)}}{[\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)][\Delta_\alpha + \Delta_\beta + i\gamma]} + \frac{e^{-i(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)(t-\tau)}}{[\Delta_\beta + i\gamma_k^\sigma/2][\Delta_\alpha + \Delta_\beta + i\gamma]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\gamma_k^\sigma(t-\tau)/2 - i\Delta_\alpha(t-\tau)}}{[\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)][\Delta_\beta + i\gamma_k^\sigma/2]} \right) \Theta(t - \tau). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Notemos que estas funciones no son simétricas ante el intercambio de las etiquetas α, β .

5.3. Discusión de resultados

5.3.1. Estado BIC⁶ y superduperradianza

Resuelta la dinámica del sistema cuántico a través de la ecuación de Schrödinger, vamos a discutir el comportamiento de la emisión colectiva en base a las soluciones encontradas. Al igual que en la sección 4.4 usaremos tres variables atómicas para hacer esto. La primera variable es la correlación entre los átomos $P^{(eg)}(t) = \langle \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \rangle(t)$. Luego tenemos la probabilidad de una excitación $P^{(1)}(t)$ y finalmente consideraremos la tasa de decaimiento efectiva $\gamma^{\text{eff}}(t)$ (4.69). Cabe mencionar que la discusión será en base a los resultados originales obtenidos en este proyecto, que es el caso de $M = 2$ excitaciones. Introducimos el caso de $M = 1$ excitación pues consideramos que este es un buen ejemplo para detallar los métodos utilizados en la resolución del problema [45, 46].

Resueltas todas la amplitudes del estado (5.15) podemos calcular el operador de estado reducido $\hat{\rho}_a$, el cual nos permitirá calcular las observables atómicas. Para nuestros resultados este operador es igual a

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_a(t) &= \text{tr}_c \{ |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \} \\
&= (1 - P^{(1)}(t) - P^{(2)}(t)) \hat{Q}_{00}^{20} + P^{(1)}(t) \hat{Q}_{01}^{10} + P^{(2)}(t) \hat{Q}_{02}^{00} + \\
&\quad P^{(eg)}(t) |e_1 g_2\rangle \langle g_1 e_2| + P^{(eg)}(t)^* |g_1 e_2\rangle \langle e_1 g_2|. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Lo primero que podemos notar es que el operador de estado reducido pertenece al subespacio simétrico en todo tiempo de la evolución. Lo que se explica debido a que el Hamiltoniano (5.1) es invariante ante el intercambio de partículas. Esto es directo de ver de la expresión (5.40), excepto para el término de coherencia. Pero, ya que la coherencia entre átomos es igual a

$$P^{(eg)}(t) = \text{tr} \left[\hat{\rho}_a(t) \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \right] = \sum_\alpha b_\alpha^{(1)}(t) b_\alpha^{(2)}(t)^*, \tag{5.41}$$

podemos observar que la función ante el intercambio de etiquetas $1 \leftrightarrow 2$ se produce el intercambio $P^{(eg)} \leftrightarrow P^{(eg)*}$.

Dentro de la expresión para nuestro operador tenemos la probabilidad de tener dos excitaciones

$$P^{(2)}(t) = |a(t)|^2 = e^{-2\gamma t}. \tag{5.42}$$

⁶Abreviatura para *bound state in the continuum*, estado ligado en el continuo.

Y finalmente la probabilidad de tener una excitación

$$P^{(1)}(t) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\alpha} |b_{\alpha}^{(r)}(t)|^2.$$

Al igual que en el caso Markoviano tenemos el mismo resultado de $P^{(2)}(t)$. Ahora bajo la descripción no-Markoviana podemos agregar que esta probabilidad no depende tampoco del retardo entre átomos. Pasando a la probabilidad de tener una excitación lo primero que podemos hacer es calcular los límites $\tau = 0$ (átomos coincidentes) y $\tau \rightarrow \infty$ (átomos independientes) de la función $P^{(1)}(t)$, lo que nos da

$$P^{(1)}(t) = \begin{cases} 2\gamma t e^{-2\gamma t} & \text{for } \tau = 0 \\ 2e^{-\gamma t}(1 - e^{-\gamma t}) & \text{for } \tau \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (5.43)$$

Resultados que concuerdan con las soluciones de la sección 4.4.2. El comportamiento de la probabilidad para algunos valores de τ y ϕ se muestran en la Fig. 5.2 (a). Cabe mencionar que para el cálculo de las funciones W de Lambert se usó la función `LambertW` de `SciPy` [193], donde en la suma de las ramas usamos el conjunto $k \in [-100, 100]$. Y las integrales se calcularon usando el paquete `integrate.quad` también de `SciPy`. Lo primero que podemos apreciar es que a tiempos $t < \tau$, la evolución de los átomos es igual al de un sistema independiente. Al tiempo $t = \tau$ un modo del campo que haya sido emitido a $t = 0$ ha alcanzado ya al otro emisor, y es cuando empezamos a ver diferencias entre las dinámicas de $\tau \neq 0$ y $\tau \rightarrow \infty$. Tal dinámica tiene una dependencia con ϕ , siendo lo más notable que cuando $\phi = m\pi$, la probabilidad llega a un valor estacionario, y la amplitud de este valor estacionario tiene dependencia con el retardo τ .

Podemos obtener este valor estacionario aproximando nuestras probabilidades en el límite de tiempo largos. En el apéndice H mostramos como aproximar el resultado (5.34) cuando $\gamma t \gg 1$. Así, la expresión (H.2) nos muestra como las amplitudes $b_{\alpha}^{(1,2)}$ también llegan a un estado estacionario, lo que supone un efecto físico interesante. Si consideramos el comportamiento del estado total (5.15) tendremos a tiempos largos que

$$|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle \approx |\psi_{\text{BIC}}\rangle + |g_1 g_2\rangle \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta}(t \rightarrow \infty) |1_{\alpha} 1_{\beta}\rangle, \quad (5.44)$$

donde definimos el estado

$$|\psi_{\text{BIC}}\rangle = |e_1 g_2\rangle \sum_{\alpha} b_{\alpha, ss}^{(1)} |1_{\alpha}\rangle + |g_1 e_2\rangle \sum_{\alpha} b_{\alpha, ss}^{(2)} |1_{\alpha}\rangle. \quad (5.45)$$

El estado $|\psi_{\text{BIC}}\rangle$ representa un estado en donde una excitación es compartida entre los átomos (como una excitación atómica) y los modos (como un fotón propagándose entre los emisores). Este estado que es estacionario es llamado *estado ligado en el continuo* (*Bound state in the continuum*, abreviado *BIC* en inglés). El cual se ha reportado en sistemas con retardo y se ha etiquetado como un efecto no-Markoviano [45, 48, 165]. Este estado ligado solo aparece cuando $\phi = m\pi$ y la probabilidad de observar este estado es igual a

$$|\langle \psi_{\text{BIC}} | \psi(t \rightarrow \infty) \rangle|^2 = 2P_{ss}^{(1)}; \quad P_{ss}^{(1)} = \frac{\sinh\left(\frac{\gamma\tau}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma\tau}{2}\right)^2 e^{\frac{\gamma\tau}{2}}}, \quad (5.46)$$

donde $P_{ss}^{(1)}$ es el valor estacionario que se observa en la Fig. 5.2 (a), y el cual tiene un máximo global para $\gamma\tau \approx 0.895$, lo que nos dice que la máxima probabilidad de terminar en un estado BIC es 0.282, es decir, de cada 10 experimentos que realicemos aproximadamente en 3 de ellos observaremos el estado ligado. Cabe mencionar que el estado BIC es un estado no-separable de átomos y campo, cuya probabilidad de que el sistema evolucione a este estado no es despreciable en nuestra dinámica. Esto confirma que la aproximación de Born ya no es posible de asumir. Finalmente, cabe recalcar que los estados BIC ya han sido reportados previamente en guías de onda. Pero, los trabajos previos hacen uso de estados inicialmente enredados [45, 49, 194] o grados de libertad externos como dispersión de múltiples fotones o emisión quiral frente de espejos [40, 48, 50, 165]. En contraposición, nuestro trabajo reporta la generación espontánea de un estado BIC.

Todo lo anterior puede explicarse mediante la correlación entre átomos, al menos para $\phi = m\pi$. La correlación se muestra en la Fig. 5.2 (b), donde se observa que los átomos no tienen correlación hasta el tiempo $t = \tau$, y la correlación llega también a un valor estacionario. Como demostramos en el Apéndice H, el valor

estacionario de la correlación es $P_{ss}^{(1)}/2$, todo esto para $\phi = m\pi$. Por otro lado, vemos que la correlación llega a ser igual a cero para todo tiempo cuando consideramos $\phi = (m + 1/2)\pi$. Aún así es apreciable un cambio en la dinámica de $P^{(1)}(t)$ en este caso, como podemos observar en la Fig. 5.2 (a). Por tanto, el proceso colectivo para este caso no puede describirse mediante las correlaciones entre átomos.

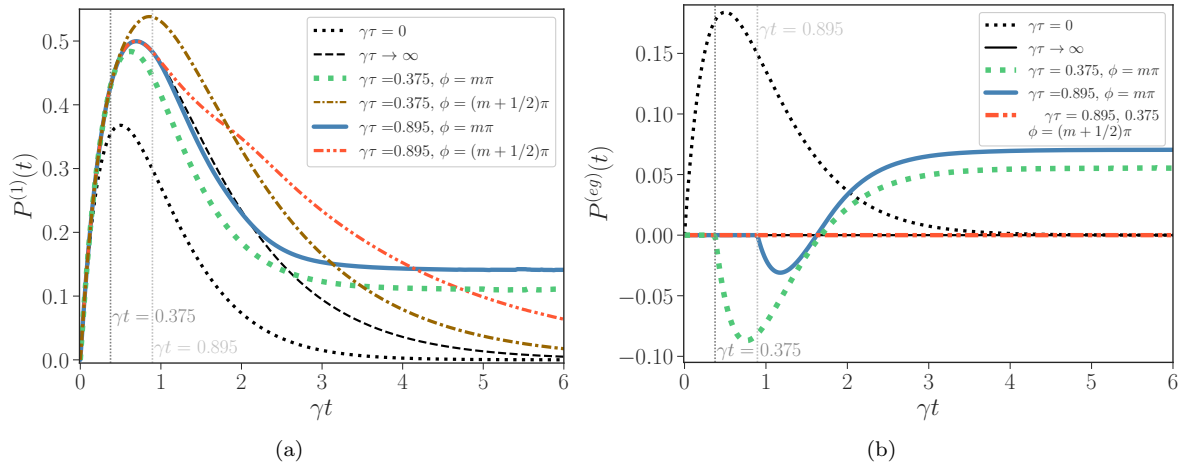


Figura 5.2: (a) Probabilidad de tener una excitación atómica, $P^{(1)}(t)$. Mostramos la dinámica para retrasos iguales a $\gamma\tau = 0.375, 0.895$, comparándolos con los resultados de átomos coincidentes ($\gamma\tau = 0$) y átomos independientes ($\gamma\tau \rightarrow \infty$). Cuando la fase es $\phi = n\pi$ se crea un estado estacionario donde una excitación se comparte como excitación atómica y un fotón atrapado entre átomos, que puede describirse por el estado (5.45). La formación de este estado ligado explica la existencia de valores estacionarios para $P^{(1)}(t)$ en tiempos largos. Para $\phi = (m + 1/2)\pi$, aunque no existan valores estacionarios, vemos que la dinámica de la probabilidad cambia también en $t = \tau$, haciendo que el decaimiento de la probabilidad sea más lenta que los casos límite. (b) Correlación entre átomos $P^{(eg)}(t)$. Para $\phi = m\pi$ los átomos decaen independientemente mientras $t < \tau$. A $t = \tau$, observamos la creación de las correlaciones entre átomos, de forma que a tiempos largos se llega a un estado estacionario cuya amplitud depende de $\gamma\tau$. Cuando $\phi = (m + 1/2)\pi$ la correlación será cero para todo tiempo, e independientemente del valor de $\gamma\tau$. Por tanto, el cambio de la dinámica por fenómenos no-Markovianos no puede ser explicado en términos de la correlación entre átomos, al menos en este caso.

Lo siguiente a responder es que tan rápido se da el proceso de emisión en el sistema no-Markoviano. Para ello nos fijaremos en la tasa de decaimiento efectiva (4.69). En la Fig. 5.3 (a) mostramos la evolución para algunos valores de $\gamma\tau$ y ϕ , donde normalizamos la tasa efectiva con el valor

$$\gamma_0^{\text{eff}} = \max_{\tau \rightarrow \infty} \gamma^{\text{eff}}(t).$$

En la figura, podemos ver que en el caso $\phi = m\pi$, la máxima tasa que hay en el decaimiento excede a lo que se puede obtener con la dinámica Markoviana. Recordemos que en la Fig. 4.6b, el caso de acoplamiento perfecto $\gamma = \Gamma$ nos daba la máxima tasa instantánea de decaimiento Markoviano. Pues bien, la dinámica no-Markoviana puede exceder estas tasas superradiantes, fenómeno que llamamos *superduperradianza*, término que ha sido introducido en [45] en el estudio de $M = 1$ excitación inicial. Pero tal trabajo previo así como otros [46–50] parten de un sistema con correlaciones iniciales que ha sido preparado externamente. Así, es importante resaltar que los fenómenos aquí presentados, como es la aparición de superduperradianza, se da en un contexto en donde las correlaciones se crean de manera espontánea, y por tanto los fenómenos aquí descritos también se presentan por un proceso espontáneo. Por otro lado, cuando $\phi = (m + 1/2)\pi$ vemos que el máximo de las tasas de decaimiento en ambos valores de $\gamma\tau$, no superan el máximo del decaimiento de átomos independientes $\tau \rightarrow \infty$ lo que es una marca de subradianza. En la Fig. 5.3 (b) graficamos solo el máximo que alcanza la tasa efectiva en todo el decaimiento dados $\gamma\tau$ y ϕ , esto lo denotamos como $\gamma_{\text{max}}^{\text{eff}}(\tau, \phi)$. Nuevamente

normalizamos el valor con γ_0^{eff} . Así, la franja blanca nos indica el máximo valor de superradianza que se alcanza en el caso Markoviano. Por tanto las áreas azules indican los casos en que se observa la superduperradianza. Vemos que el caso $\phi = m\pi$ siempre será super- o superduper- radiante. Por el otro lado $\phi = (m + 1/2)\pi$ es siempre subradiante. Además podemos apreciar que el caso $\gamma\tau \approx 0.895$ no corresponde al máximo de $\gamma_{\text{max}}^{\text{eff}}$, sino que este se encuentra en el valor $\gamma\tau = 0.375$.

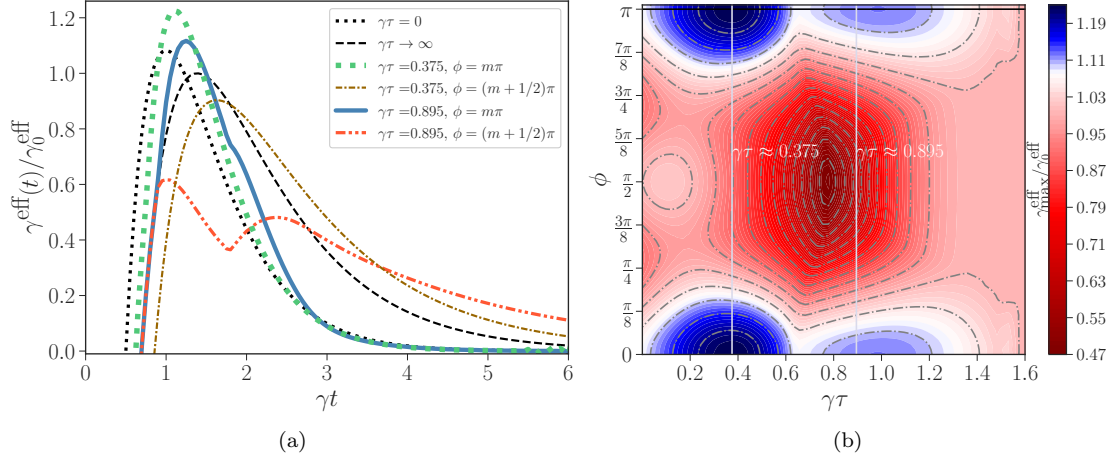


Figura 5.3: Tasa de decaimiento efectivo $\gamma^{\text{eff}}(t)$ normalizado por γ_0^{eff} . (a) Gráficas para $\gamma\tau$ igual a 0.375 y 0.895, comparadas con los casos de átomos coincidentes e independientes. Cuando $\phi = m\pi$ observamos *superduperradianza*, que es el incremento de las tasas instantáneas de decaimiento que exceden a lo que se puede obtener con la superradianza en el caso Markoviano ($\tau = 0$). Cuando $\phi = (m + 1/2)\pi$ el sistema es subradiante. (b) Máximo valor de las tasas efectivas $\gamma_{\text{max}}^{\text{eff}}(\tau, \phi)$. La región blanca corresponde a un decaimiento superradiante que es semejante al caso de átomos coincidentes $\tau = 0$. El área roja oscura implica que el decaimiento es subradiante, es decir, la tasa máxima efectiva es menor que el caso $\tau \rightarrow \infty$. Finalmente la región azul implica un decaimiento superduperradiante, donde las tasas máximas superan a las que se obtienen en la dinámica Markoviana. En general, la máxima tasa superduperradiante se observa para $\phi = m\pi$ y $\gamma\tau \approx 0.375$.

5.3.2. Enredamiento átomo-átomo y subfluorescencia

Ya que hemos observado que en la dinámica no-Markoviana se crea y se modifican las correlaciones $P^{(eg)}$ debido a la presencia del retardo, también cabe preguntarse específicamente qué sucede con el enredamiento entre los átomos. Este fenómeno lo vamos a cuantificar usando la concurrencia $\mathcal{C}(t)$ [91] de la matriz reducida $\hat{\rho}_a(t)$ mostrada en (5.40). Este operador admite la forma matricial (4.70) y cuya concurrencia ya hemos calculado, dando como resultado (4.71). Si calculamos primero los casos límite, podemos asegurar que para $\tau \rightarrow \infty$ efectivamente la concurrencia es cero en toda la evolución, lo cual era de esperarse ya que tenemos átomos sin correlación inicial que evolucionan independientemente uno de otro. También podemos demostrar que en el caso $\tau = 0$, la concurrencia es también cero en toda la evolución y, como mostramos en la figura 4.7, esto ocurre para el acoplamiento perfecto $\gamma = \Gamma$. Aún así, el resultado sorprende pues este caso muestra un comportamiento superradiante, lo que ejemplifica que el enredamiento no es necesario para la superradianza.

Para otros valores de τ , estudiamos la dinámica de la concurrencia evaluando numéricamente nuestra expresión y es lo mostrado en la figura Fig. 5.4 (a). En la gráfica contrastamos dos valores que son: $\gamma\tau \approx 0.895$ (correspondiente al máximo valor estacionario $P_{ss}^{(1)}$ así como la máxima probabilidad de formar un estado BIC) y $\gamma\tau \approx 0.375$ (que tiene el máximo valor de la tasa $\gamma_{\text{max}}^{\text{eff}}$, es decir, es cuando se observa la mayor superduperradianza). En la gráfica podemos observar que inicialmente la concurrencia es cero, lo que concuerda con que nuestro estado inicial $|\psi(0)\rangle$ sea un estado separable. Este valor nulo de la concurrencia se mantiene desde $t = 0$ a un cierto tiempo que denotamos t_{SBE} , que es donde hay un nacimiento súbito del enredamiento

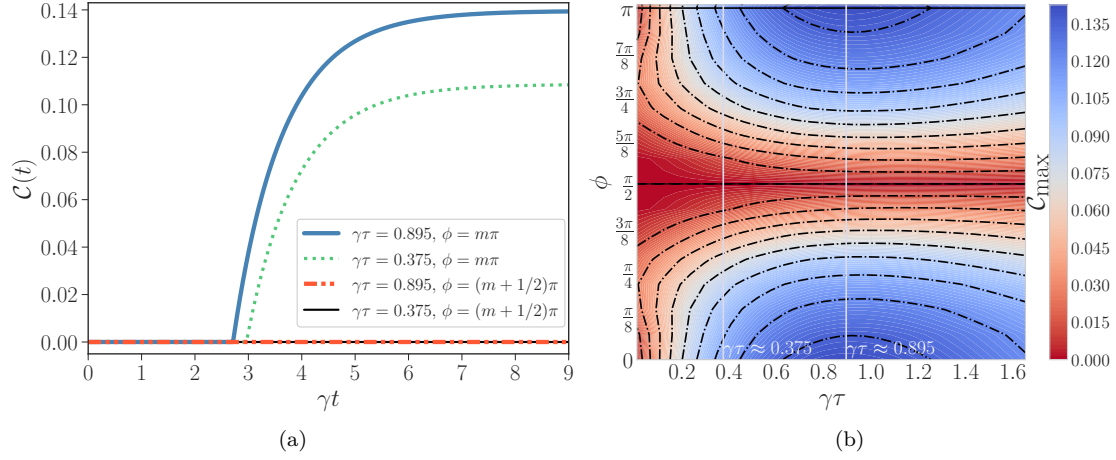


Figura 5.4: Concurrencia entre los átomos \mathcal{C} . (a) Concurrencia como una función del tiempo. Ya que el estado inicial es un estado separable tenemos $\mathcal{C}(0) = 0$, y después de un tiempo t_{SBE} podemos observar un *nacimiento súbito de enredamiento*. Para $\phi = (m + 1/2)\pi$ tenemos $\mathcal{C}(t) = 0$ para todo tiempo. Si $\phi = m\pi$ la concurrencia alcanza un valor estacionario $\mathcal{C}_{\text{ss}} = P_{\text{ss}}^{(1)}$, dado por la expresión (5.46). (b) Máximo valor que toma la concurrencia, $\mathcal{C}_{\max}(\tau, \phi)$. Para $\phi = (m + 1/2)\pi$ la concurrencia es cero sin importar el valor de $\gamma\tau$. Desde este valor, la concurrencia alcanza valores máximos cada vez más altos conforme se acerca a $\phi = m\pi$, que es donde se da el máximo valor que puede alcanzar la concurrencia dado $\gamma\tau$. Así, el máximo de concurrencia que puede alcanzar el sistema está dado por $\phi = m\pi$ y $\gamma\tau \approx 0.895$, que es donde tenemos la mayor probabilidad de formar un estado BIC.

(*Sudden Birth of Entanglement*, abreviado SBE) [195–201]. Para $\phi = m\pi$ la concurrencia va creciendo hasta alcanzar un valor estacionario, mientras que para $\phi = (m + 1/2)\pi$ su valor siempre es cero. De manera general, para otros valores de ϕ , una vez que la concurrencia es distinta de cero empieza a crecer hasta llegar a un máximo valor, después del cuál empieza a decaer a cero, excepto para el caso $\phi = m\pi$ donde el máximo valor es el estado estacionario. Estos valores máximos para la concurrencia, que denotamos \mathcal{C}_{\max} , se muestran en la Fig. (5.4) (b) como una función del retardo $\gamma\tau$ y la fase ϕ . En general $\gamma\tau \approx 0.895$ nos da el máximo valor de la concurrencia que podemos tener en el sistema y que también es un valor estacionario. Aún más, usando los valores estacionarios mostrados en el Apéndice H podemos demostrar que la concurrencia estacionaria es igual a $\mathcal{C}_{\text{ss}} = P_{\text{ss}}^{(1)}$.

Podemos explicar la creación de un enredamiento estacionario para $\phi = m\pi$, calculando el límite para tiempo largos del operador de estado reducido (5.40). Este límite es igual a

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_a(t \rightarrow \infty) &= (1 - P_{\text{ss}}^{(1)}) \hat{Q}_{00}^{20} + P_{\text{ss}}^{(1)} \hat{Q}_{01}^{10} + 2P_{\text{ss}}^{(eg)} \hat{Q}_{11}^{01} \\ &= (1 - P_{\text{ss}}^{(1)}) \hat{Q}_{00}^{20} + P_{\text{ss}}^{(1)} \begin{cases} |\Psi^{(+)}\rangle\langle\Psi^{(+)}| & \text{para } \phi = (2m+1)\pi \\ |\Psi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(-)}| & \text{para } \phi = 2m\pi \end{cases}, \end{aligned}$$

donde recordemos que tenemos los estados de Bell $|\Psi^{(\pm)}\rangle = (|e_1g_2\rangle \pm |g_1e_2\rangle)/\sqrt{2}$, los cuales son estados de máxima concurrencia. Por tanto la interacción retardada entre emisores acopla al estado inicial totalmente excitado a estados de Bell. Así, un estado atómico totalmente excitado evolucionará espontáneamente a un estado enredado oscuro (es decir que no radia o emite fotones) en presencia del retardo. A este efecto lo bautizamos como *subfluorescencia inducida por retardo*, considerándolo como una contrapartida al efecto *superfluorescente* que es cuando un estado totalmente excitado se convierte en superradiante. Es así que el sistema estudiado es un buen ejemplo de como el ambiente puede ayudar en la generación de enredamiento espontáneo.

5.3.3. Enredamiento átomos-campo

A diferencia del caso Markoviano en donde una de las hipótesis principales es suponer que el enredamiento entre los átomos y el campo es despreciable, hemos obtenido en (5.44) que a tiempos largos no es posible hacer esto, ya que los átomos y el campo forman un estado estacionario que no es separable. Esto al menos para el caso $\phi = m\pi$ que es cuando obtenemos el estado BIC. En general, es difícil decir si nuestro estado total (5.15) puede ser separable o no en cualquier valor de tiempo t . Pero ya que tenemos un estado puro para un sistema bipartito (átomos-campo) podemos cuantificar el enredamiento entre subsistemas a través de la entropía de enredamiento (2.45). El cálculo de esta función se hace usando uno de los operadores de estado reducido, es así que usaremos $\hat{\rho}_a(t)$ de (5.40).

El cálculo de la entropía de Von-Neumann para el operador reducido lo haremos para el caso en que la correlación entre átomos $P^{(eg)}(t)$ es real. Si esto sucede podemos escribir la ecuación (5.40) como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_a(t) = & P^{(0)}(t)|g_1g_2\rangle\langle g_1g_2| + \frac{P^{(1)}(t) + 2P^{(eg)}(t)}{2}|\Psi^{(+)}\rangle\langle\Psi^{(+)}| + \\ & \frac{P^{(1)}(t) - 2P^{(eg)}(t)}{2}|\Psi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(-)}| + P^{(2)}(t)|e_1e_2\rangle\langle e_1e_2|, \end{aligned} \quad (5.47)$$

recordando que $P^{(0)}(t) = 1 - P^{(1)}(t) - P^{(2)}(t)$. Ya que en esta base el operador es diagonal podemos calcular la entropía evaluando en los eigenvalores de la matriz tal como en la Ec. (2.45). Así que el enredamiento de formación es igual a

$$\begin{aligned} E(|\psi(t)\rangle) = & -P^{(0)}(t)\log P^{(0)}(t) - \frac{P^{(1)}(t) + 2P^{(eg)}(t)}{2}\log\frac{P^{(1)}(t) + 2P^{(eg)}(t)}{2} \\ & - \frac{P^{(1)}(t) - 2P^{(eg)}(t)}{2}\log\frac{P^{(1)}(t) - 2P^{(eg)}(t)}{2} - P^{(2)}(t)\log P^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (5.48)$$

En la Fig 5.5 graficamos la entropía de enredamiento para nuestros dos valores de $\gamma\tau = 0.375, 0.895$ y $\phi = m\pi, (m + 1/2)\pi$. Cabe aclarar que antes de realizar el cálculo de enredamiento, nos aseguramos que la correlación $P^{(eg)}(t)$ sea real en los casos evaluados. Comenzando desde $E(|\psi(0)\rangle) = 0$ donde $|\psi(0)\rangle$ es separable, podemos observar como las correlaciones entre átomos y el campo comienza a darse desde los primeros momentos de la evolución. En general, la entropía comienza a crecer hasta alcanzar un máximo, y de allí empieza a disminuir. Vemos que para el caso $\phi = m\pi$ el enredamiento disminuye hasta un valor estacionario. Resultado que concuerda con la formación del estado BIC (5.44). Para $\phi = (m + 1/2)\pi$ lo primero a destacar es que el valor de entropía es distinto de cero, caso contrario a las correlaciones átomo-átomo estudiadas en la sección anterior. Este hecho nos permite relacionar la modificación de $P^{(1)}$ y la subradianza de γ^{eff} con el enredamiento átomos-campo, al menos en una dinámica no-Markoviana. Además, sorprende observar como el valor de la entropía no puede ser despreciado, incluso en los primeros momentos de la evolución. Más aún, para $\phi = m\pi$ hay siempre un enredamiento átomos-campo, que imposibilita la suposición de la aproximación de Born en el sistema.

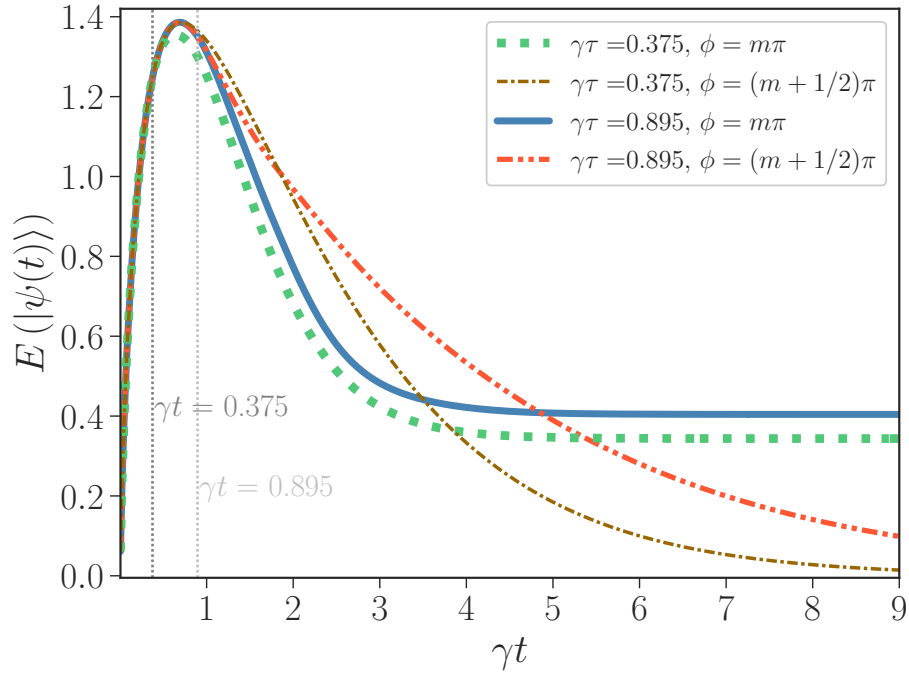


Figura 5.5: Entropía de enredamiento como función del tiempo, el cual cuantifica el enredamiento entre el sistema atómico y los modos del campo electromagnético. Podemos ver que desde los primeros tiempo de evolución se forma un enredamiento en los átomos y el campo. Este enredamiento decae a cero, excepto para $\phi = m\pi$, que es cuando tenemos el estado BIC, y el enredamiento toma un valor estacionario. A diferencia del enredamiento entre átomos, vemos que las correlaciones cuánticas entre átomos-campo es distinto de cero para $\phi = (m + 1/2)\pi$. Por tanto, podemos suponer que las modificaciones de las tasas de decaimiento subradiantes observadas en la Fig. 5.3 (a), se relacionan con el enredamiento átomo-campo en lugar del enredamiento átomo-átomo.

Capítulo 6

Conclusiones

En este proyecto se ha presentado el estudio de los sistemas atómicos ubicados en un arreglo unidimensional y acoplados a nanofibras. El estudio fue dividido en dos casos dependiendo de la separación interatómica entre átomos vecinos $|z_r - z_s|$. En el primer caso consideramos que la separación entre átomos es del orden de λ_0 , la longitud de onda de la transición atómica. En este caso, usamos la aproximación de Born-Markov para resolver una ecuación de movimiento solo para el operador de estado reducido atómico. Adicionalmente, hacemos uso del subespacio simétrico para disminuir los grados de libertad del sistema. En el segundo caso, consideramos separaciones atómicas del orden de c/Γ , siendo Γ la tasa de decaimiento de los átomos. En estas separaciones no podemos despreciar los efectos de retardo en el proceso de emisión. De forma que las suposiciones hechas en el primer caso no se satisfacen. Por lo que mostramos soluciones a la ecuación de Schrödinger para la evolución del estado total átomos-modos del campo.

La primera contribución original de este proyecto se muestra en el capítulo 4, en el cual tratamos el primer caso, llamado dinámica Markoviana. Esta dinámica nos permite considerar solo los grados de libertad del subsistema atómico, por lo que nuestro obstáculo es lidiar con un espacio de Hilbert que crece exponencialmente con el número de partículas N . Considerando una ecuación de movimiento que es simétrica ante cualquier permutación de partículas pudimos restringir la evolución a un espacio cuya dimensión escala como N^3 . Hay que aclarar que, aunque la discusión física ya ha sido tratada anteriormente con soluciones para pocos átomos o simulaciones numéricas [6, 36–38, 62, 64, 66, 135–137], la contribución aquí presentada describe un método que nos brinda soluciones analíticas para casos generales de N átomos, lo que permite estudiar la física del problema de forma unificada y clara. Aún más, como resultado de este proyecto, describimos como pasar de espacios que dependen del número de átomos, a espacios que escalan con el número de excitaciones atómicas iniciales M en el sistema. Para estos subespacios vectoriales pudimos describir una base de vectores a través del método de la *base de decaimiento*. De esta forma describimos un método que nos permite estudiar sistemas atómicos simétricos con $M = 1, 2, 3, 4$ excitaciones iniciales de un total de N átomos.

Después, aplicamos nuestro método para estudiar el proceso de emisión para dos tipos de estados iniciales. Primeramente consideramos los estados de Dicke, los cuales tienen correlaciones entre átomos, mientras que como segunda opción tomamos los estados mixtos que no contienen correlación inicial. Al estudiar la emisión vimos como aparecen en la evolución términos superradiantes y subradiantes en ambos casos. Para la evolución de los estados mixtos las componentes subradiantes dominan en la evolución conforme el número de átomos incrementa. Para los estados de Dicke, el término superradiante es el que incrementa con el número de átomos. Pero la componente subradiante empieza a contribuir más conforme M empieza a aumentar. Además, calculando la fracción de energía emitida sabemos que aunque haya modos radiados y los fotones puedan emitirse al espacio libre, la probabilidad de que el fotón solo se emita a los modos guiados es cada vez mayor conforme el número de átomos crece pero disminuye con las excitaciones iniciales M . Esto para un estado de Dicke. Mientras que en el estado mixto, la probabilidad de emitir a la nanofibra empeora conforme N aumenta, pero incrementa con M .

Uno de los efectos que aparecen en este trabajo es que el estado mixto decae a un estado estacionario cuando el acoplamiento átomos-nanofibra es perfecto. El caso $N = 2$ nos permite observar como el acoplamiento de los átomos con la guía de onda funciona como un filtro pues el estado inicial mixto puede escribirse como combinación de estados sub- y super- radiantes. De forma que a tiempos largos, todas las componentes decaen

a cero excepto por un estado subradiante que no decae, y que evoluciona a un estado enredado estacionario. Este resultado nos motiva a trabajar en un futuro analizando como es afectado el enredamiento entre los distintos átomos durante el proceso de decaimiento para casos más generales de N y M , para el caso Markoviano.

La segunda contribución original del proyecto es presentado en el capítulo 5. En este caso, estudiamos al sistema físico considerando los grados de libertad atómicos más lo grados de libertad del campo electromagnético. Como ya describimos, los primeros escalan exponencialmente con el número de partículas, mientras que los segundos tienen grados de libertad infinitos y continuos. Así que en este caso, nos restringimos a considerar $N = 2$ átomos para lidiar con los infinitos modos del campo electromagnético. Específicamente, analizamos el proceso de emisión de dos átomos totalmente excitados y acoplados perfectamente a una guía de onda, de forma que podemos considerar interacciones de largo alcance entre emisores mediados a través de los modos del campo electromagnético. Esta descripción total del sistema nos permite considerar distancias que no se limitan a decenas de veces λ_0 , sino que podemos tomar separaciones arbitrarias entre los átomos, lo que permite incluir el estudio de la modificación en los procesos de emisión debido a los efectos de retardo que experimenta un fotón que viaja de un emisor a otro.

Una de las hipótesis fundamentales para resolver la ecuación de Schrödinger del sistema total es considerar la validez de la aproximación de onda-rotante, de forma que el número de excitaciones atómicas más fotónicas se conservan en el sistema. Esto nos permitió proponer la forma del estado total a todo tiempo, y usando la ecuación de movimiento obtuvimos un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo para las amplitudes del estado. Transformamos las ecuaciones diferenciales a un sistema algebraico usando la transformada de Laplace, lo que nos permitió resolver fácilmente el sistema de ecuaciones. Pero, un obstáculo para dar expresiones en el dominio temporal fue la de realizar la transformada inversa. En este punto, una de las aproximaciones que usamos fue despreciar la probabilidad de tener dos modos iguales excitados. Al hacer esto, logramos expandir las soluciones para las amplitudes en términos de las k -ésimas ramas de la función de Lambert. Finalmente usamos el límite de átomos coincidentes (cuando el retardo es cero) y átomos independientes (cuando el retardo es infinito) para validar el correcto comportamiento de las soluciones. Cabe mencionar que la solución en estos límites se obtuvieron en el capítulo 4, lo que facilitó la comparación de los resultados.

Dadas las soluciones, pudimos hacer una discusión del comportamiento del sistema físico. En primer lugar observamos que la probabilidad de tener dos excitaciones atómicas en el sistema no se modifica con la separación interatómica. Tampoco con el valor de las tasas de decaimiento en los modos guiados y radiados, como demostramos en el capítulo 4 con las soluciones Markovianas. Este hecho puede explicarse considerando que un sistema totalmente excitado las correlaciones átomo-átomo empiezan a modificarse una vez se halla emitido un primer fotón, tal como discutimos en el capítulo 3 donde introducimos los conceptos de electrodinámica cuántica. Una vez que el sistema atómico haya emitido un fotón, y solo quede una excitación atómica, vemos que las modificaciones en el proceso de decaimiento empiezan a aparecer cuando el fotón emitido haya arribado a la posición del otro átomo.

Uno de los resultados importantes es que bajo ciertos parámetros, el sistema puede decaer a un estado BIC, el cual es un estado estacionario donde se comparte una excitación entre los átomos y modos localizados del campo. De forma que, a tiempos largos habrá una probabilidad distinta de cero de tener siempre una excitación dentro del sistema atómico. Este fenómeno trae consigo la creación de correlaciones entre átomo-átomo y átomos-campo que también llegan a ser estacionarias. Para el caso del enredamiento entre átomos observamos que este, partiendo de un estado separable que implica concurrencia cero, después de un tiempo que es mayor al retardo observamos que el enredamiento nace de manera súbita. En general después de que la concurrencia tomó un valor máximo esta empieza a decaer hasta llegar nuevamente a cero, excepto para el estado BIC en el cual la correlación cuántica crece a un valor estacionario. A todo este proceso mencionado lo bautizamos como *subfluorescencia inducido por retardo*, que es causado por los efectos no-Markovianos que trae consigo la retroalimentación retardada del campo a los emisores.

Otra de las marcas no-Markovianas en la dinámica se observa al considerar las tasas instantáneas de decaimiento de los átomos. Es así que, en ciertos instantes durante la evolución, las tasas de decaimiento colectivo en presencia de retardo puede exceder cualquier tasa que podamos obtener en el caso Markoviano. A este fenómeno se le conoce como *superduperradianza*. Por otro lado, para ciertos valores del retardo es posible ver subradianza en el proceso de decaimiento. Pero este comportamiento no puede ser explicado mediante las correlaciones átomo-átomo, pues hay casos en los que se presenta subradianza pero el enredamiento atómico es cero. Es así que el estudio del sistema no-Markoviano nos brinda la oportunidad de explicar este fenómeno a través del enredamiento átomo-campo, el cual es distinto de cero en los casos subradiantes, hecho que demarca la importancia del estudio no-Markoviano más allá de verlo como una falla a la aproximación de Born.

Los resultados anteriores tienen un gran potencial en el desarrollo de las tecnologías cuánticas, donde uno de los principales recursos son las correlaciones entre los distintos subsistemas como por ejemplo el enredamiento entre átomos. Así, la generación espontánea de un estado estacionario enredado inducido por el retardo es un fenómeno que puede ayudar en el crecimiento de aplicaciones de la electrodinámica cuántica en guías de onda, como en la construcción de circuitos cuánticos [3, 202–204] y de redes de información cuántica [205–208]. Aplicaciones que pueden beneficiarse de la creación de estados enredados sin la necesidad de campos externos [39, 209–211], enredamiento inicial [45], o espejos [42, 212]. Pero no solo de la generación sino que la estabilización de estados enredados puede ayudar a una mayor eficiencia de los dispositivos cuánticos [213]. Es así que el uso de modos infinitos, que pueden considerarse como un baño térmico, ayudan a generar enredamiento estacionario al considerar los efectos no-Markovianos, lo cual contrasta con la idea de que la interacción de un sistema cuántico cerrado en interacción con su ambiente genera decoherencia y con ello puede degradar el enredamiento en el sistema [214]. Así, el ambiente puede ser propuesto para generar [215, 216] y estabilizar enredamiento [217], ejemplo de ello es el estudio con retardo aquí mostrado.

El estudio aquí presentado para el sistema con retardo abre camino a nuevos temas de investigación. Por una parte, queda pendiente ir considerando un mayor número de átomos para la dinámica no-Markoviana. Sin embargo, esta propuesta implica el uso de grados de libertad cuyo número crece exponencialmente. Y el método descrito en este trabajo basado en ecuaciones de movimiento para el operador atómico reducido no puede seguir considerándose válida pues la aproximación de Born-Markov ya no puede asumirse. Además, sistemas con un número de átomos $N > 2$ ya no son totalmente simétricos e implican introducir una descripción de enredamiento para sistemas multipartitos, que por si mismos son un campo de estudio. Por otra parte, es requerible considerar estructuras más complejas para las guías de onda, codificadas en el índice de refracción que puede ser complejo así como tener una dependencia con la frecuencia de los modos guiados, en cuyo caso la cuantización del campo electromagnético ya no es trivial, y debe de considerarse otros métodos y más detalles técnicos para el proceso [110, 218–220]. Este hecho puede ser relevante para la transmisión de información cuántica a largas distancias. Finalmente, para el carácter experimental puede ser necesario considerarse los efectos de desfase dados por interacción dipolo-dipolo entre átomos (y que en este estudio hemos considerado posiciones atómicas donde este factor es cero), así como los procesos de emisión independiente causados por los modos radiados que modifican los tiempos en los decaimientos así como causar la decoherencia del BIC.

Apéndice A

Mapeos lineales a superoperadores de ascenso

Para describir el comportamiento de los superoperadores colectivos \check{A}_+^{ij} , podemos definir sobre espacio de Liouville de cada partícula \mathcal{L}_4 los superoperadores bosónicos $\check{b}_{mn}^{(r)}, \check{b}_{mn}^{(r)\dagger}$ con $m, n = 0, 1$. El superoperador $\check{b}_{mn}^{(r)}$ aniquila al producto exterior $|mn\rangle_r$, mientras que $\check{b}_{mn}^{(r)\dagger}$ lo crea. Para dar una mejor idea del actuar de estos superoperadores, para la base de \mathcal{L}_4 usemos la notación

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |(00)^1(01)^0(10)^0(11)^0\rangle, \\ |01\rangle &= |(00)^0(01)^1(10)^0(11)^0\rangle, \\ |10\rangle &= |(00)^0(01)^0(10)^1(11)^0\rangle, \\ |11\rangle &= |(00)^1(01)^0(10)^0(11)^1\rangle. \end{aligned}$$

Sea en este subespacio los superoperadores $\check{b}_{10}, \check{b}_{10}^\dagger$. Para la base anterior tendremos que

$$\begin{aligned} \check{b}_{10}^\dagger |(00)^{\alpha_{00}}(01)^{\alpha_{01}}(10)^{\alpha_{10}}(11)^{\alpha_{11}}\rangle &= |(00)^{\alpha_{00}}(01)^{\alpha_{01}}(10)^{\alpha_{10}+1}(11)^{\alpha_{11}}\rangle, \\ \check{b}_{10} |(00)^{\alpha_{00}}(01)^{\alpha_{01}}(10)^{\alpha_{10}}(11)^{\alpha_{11}}\rangle &= \alpha_{10} |(00)^{\alpha_{00}}(01)^{\alpha_{01}}(10)^{\alpha_{10}-1}(11)^{\alpha_{11}}\rangle. \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \{0, 1\}$. Así, usando estos superoperadores bosónicos definimos los *superoperadores colectivos* como [64]

$$\check{A}_+^{ij} = \sum_{r=1}^N \check{b}_{ij}^{(r)\dagger} \check{b}_{kl}^{(r)}. \quad (\text{A.1})$$

Cabe mencionar que los superoperadores bosónicos satisfacen las reglas usuales de conmutación $[\check{b}_{ij}^{(r)}, \check{b}_{kl}^{(r)\dagger}] = \delta_{ij, kl}$ y $[\check{b}_{ij}^{(r)}, \check{b}_{kl}^{(r)}] = [\check{b}_{ij}^{(r)\dagger}, \check{b}_{kl}^{(r)\dagger}] = 0$. Cabe aclarar que estos superoperadores bosónicos solo se introducen como un apoyo para definir los superoperadores colectivos.

A continuación se muestra la equivalencia de algunos mapeos lineales de $\mathcal{L}_4^{\otimes N}$ reescritos con superoperadores colectivos.

$$\begin{aligned} \sum_r \hat{\sigma}_-^{(r)} |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^{(r)} &= \check{A}_+^{00} |\rho\rangle \\ \sum_r \hat{\sigma}_+^{(r)} |\rho\rangle \hat{\sigma}_-^{(r)} &= \check{A}_+^{11} |\hat{\rho}\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+ |\rho\rangle &= \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) |\rho\rangle \\
|\rho\rangle \hat{J}_+ &= \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \right) |\rho\rangle \\
\hat{J}_- |\rho\rangle &= \left(\check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) |\rho\rangle \\
|\rho\rangle \hat{J}_- &= \left(\check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{01} \right) |\rho\rangle \\
\sum_r \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(r)} |\rho\rangle \mathbb{I}^{(r)} &= \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) |\rho\rangle \\
\sum_r \mathbb{I}^{(r)} |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^{(r)} \hat{\sigma}_-^{(r)} &= \left(\check{A}_+^{01} + \check{A}_+^{11} \right) |\rho\rangle \\
\sum_r \hat{\sigma}_-^{(r)} \hat{\sigma}_+^{(r)} |\rho\rangle \mathbb{I}^{(r)} &= \left(\check{A}_+^{01} + \check{A}_+^{00} \right) |\rho\rangle \\
\sum_r \mathbb{I}^{(r)} |\rho\rangle \hat{\sigma}_-^{(r)} \hat{\sigma}_+^{(r)} &= \left(\check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \right) |\rho\rangle
\end{aligned}$$

Para calcular estos mapeos, consideramos la base de productos externos de \mathcal{L}_4 y vemos como actúan los superoperadores del espacio completo. El resultado lo podemos escribir con los superoperadores bosónicos del párrafo anterior, lo que nos da directamente el mapeo a superoperadores colectivos.

Apéndice B

Calculo de la constante de propagación

A continuación mostramos explícitamente las identidades que tenemos para el modo fundamental, de forma que podamos hacer la cuantización en la sección 3.4 todo esto obtenido en [132]. Primeramente, para encontrar los valores de la constante de propagación β del único modo espacial debemos de resolver

$$\frac{J_0(ha)}{haJ_1(ha)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{4n_1^2} \frac{K_1'(qa)}{qaK_1(qa)} + \frac{1}{h^2a^2} \pm \left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{4n_1^2} \frac{K_1'(qa)}{qaK_1(qa)} \right)^2 + \frac{\beta^2}{n_1^2k^2} \left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{h^2a^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{B.1})$$

donde por simplicidad se han introducido las contantes de propagación modificadas $h = \sqrt{n_1^2k^2 - \beta^2}$ y $q = \sqrt{\beta^2 - n_2^2k^2}$. Cabe mencionar que se denota como J_n a las funciones de Bessel de primer tipo y como K_n a las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo.

B.1. Funciones de perfil para los modos guiados

Las funciones de perfil para el campo eléctrico de los modos guiados está dado por

$$e_r^{(\mu)}(r) = \begin{cases} iA \frac{q}{h} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) - (1+s)J_2(hr)] & \text{para } r < a, \\ iA [(1-s)K_0(qr) + (1+s)K_2(qr)] & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$e_\phi^{(\mu)}(r) = \begin{cases} -pA \frac{q}{h} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) + (1+s)J_2(hr)] & \text{para } r < a, \\ -pA [(1-s)K_0(qr) - (1+s)K_2(qr)] & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$e_z^{(\mu)}(r) = \begin{cases} fA \frac{2q}{\beta} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} J_1(hr) & \text{para } r < a, \\ fA \frac{2q}{\beta} K_1(qr) & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

donde A es una constante de normalización de forma que se satisfaga (3.54), identidad que nos da

$$1 = 2\pi|A|^2a^2(P_1n_1^2 + P_2n_2^2) \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left[\frac{q}{h} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} \right]^2 \left\{ (1-s)^2 [J_0^2(ha) + J_1^2(ha)] + (1+s)^2 [J_2^2(ha) - J_1(ha)J_3(ha)] \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{h^2}{\beta^2} [J_1^2(ha) - J_0(ha)J_2(ha)] \right\} \\
P_2 &= (1-s)^2 [K_1^2(qa) - K_0^2(qa)] + (1+s)^2 [K_1(qa)K_3(qa) - K_2^2(qa)] \\
&\quad + 2 \frac{q^2}{\beta^2} [K_0(qa)K_2(qa) - K_1^2(qa)].
\end{aligned}$$

En todo lo anterior se tiene definido

$$s = \left(\frac{1}{q^2 a^2} + \frac{1}{h^2 a^2} \right) \left[\frac{J_1'(ha)}{ha J_1(ha)} + \frac{K_1'(qa)}{qa K_1(qa)} \right]^{-1}.$$

B.2. Funciones de perfil para los modos radiados

Para los modos radiados las constantes de propagación modificadas $h = \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}$ y $q = \sqrt{n_2^2 k^2 - \beta^2}$. Así, las funciones de perfil del campo eléctrico son

$$e_r^{(\nu)} = \begin{cases} \frac{i}{h^2} (\beta h A J_m'(hr) + im \frac{\omega \mu_0}{r} B J_m(hr)) & \text{para } r < a, \\ \frac{i}{q^2} \sum_{j=1,2} \left(\beta q C_j H_m^{(j)'}(qr) + im \frac{\omega \mu_0}{r} D_j H_m^{(j)}(hr) \right) & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$e_\phi^{(\nu)} = \begin{cases} \frac{i}{h^2} (im \frac{\beta}{r} A J_m(hr) - h \omega \mu_0 B J_m'(hr)) & \text{para } r < a, \\ \frac{i}{q^2} \sum_{j=1,2} \left(im \frac{\beta}{r} C_j H_m^{(j)}(qr) - q \omega \mu_0 D_j H_m^{(j)'}(qr) \right) & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$e_z^{(\nu)} = \begin{cases} A J_m(hr) & \text{para } r < a, \\ \sum_{j=1,2} C_j H_m^{(j)}(qr) & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Donde B , C_j y D_j se relaciona a A de la forma

$$\begin{aligned}
B &= \pm i \varepsilon_0 c \sqrt{\frac{n_2 |V_j|^2 + |L_j|^2}{|V_j|^2 + n_2^2 |M_j|^2}} A; \quad \text{para } \text{sgn}(m) = \pm \\
C_j &= (-1)^j \frac{i \pi q^2 a}{4 n_2^2} (A L_j + i \mu_0 c B V_j), \\
D_j &= (-1)^{j-1} \frac{i \pi q^2 a}{4} (i \varepsilon_0 c A V_j - B M_j).
\end{aligned}$$

y para simplificar las expresiones se definen

$$\begin{aligned}
V_j &= \frac{mk\beta}{ah^2 q^2} (n_2^2 - n_1^2) J_m(ha) H_m^{(j)*}(qa), \\
M_j &= \frac{1}{h} J_m'(ha) H_m^{(j)*}(qa) - \frac{1}{q} J_m(ha) H_m^{(j)*'}(qa), \\
L_j &= \frac{n_1^2}{h} J_m'(ha) H_m^{(j)*}(qa) - \frac{n_2^2}{q} J_m(ha) H_m^{(j)*'}(qa).
\end{aligned}$$

Finalmente de la identidad de normalización (3.58) se tiene

$$1 = \frac{8\pi\omega}{q^2} \left(n_2^2 |C_j|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |D_j|^2 \right).$$

Apéndice C

Población de átomos excitados

El promedio de átomos excitados $P^{(M)}$ como función del tiempo es presentado abajo para $M = 1, 2, 3$ excitaciones, y considerando como condición inicial los estados simétricos mixtos (4.25) y los estados simétricos de Dicke (4.32). Esto, usando el método exacto presentado en la sección 4.2. Recordemos que se tiene $\gamma_{10} = \Gamma - \gamma$ y por comodidad se usará una u otra forma, así

$$P_{\text{dicke}}^{(1)}(t) = e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t}, \quad (\text{C.1})$$

$$P_{\text{mixed}}^{(1)}(t) = \frac{N-1}{N}e^{-(\Gamma-\gamma)t} + \frac{1}{N}e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t}, \quad (\text{C.2})$$

$$P_{\text{dicke}}^{(2)}(t) = \frac{2}{N[\gamma_{10} + (N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-1)\gamma]} \left[\left\{ (N-2)\gamma_{10}\gamma + \gamma_{10}^2 \right\} e^{-(\Gamma-\gamma)t} + \left\{ \gamma_{10}\gamma(3N^2 - 5N + 2) + (N-1)\gamma_{10}^2 + 2N(N-1)^2\gamma^2 \right\} e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t} - 2N(N-1)\gamma^2 e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t} \right], \quad (\text{C.3})$$

$$P_{\text{mixed}}^{(2)}(t) = 2 \left[\left(\frac{N-1}{N} - \frac{2\gamma[\gamma_{10} + 2(N-2)\gamma]}{N[\gamma_{10} + (N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-1)\gamma]} \right) e^{-(\Gamma-\gamma)t} + \left(\frac{1}{N} + \frac{2\gamma[\gamma_{10} + (N-4)\gamma]}{N[\gamma_{10} - 2\gamma][\gamma_{10} + (N-2)\gamma]} \right) \times e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t} - \frac{4\gamma^2 e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t}}{N[\gamma_{10} + (N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-1)\gamma]} - \frac{2(N-2)\gamma^2 e^{-2[\Gamma+(N-4)\gamma]t}}{N[\gamma_{10} - 2\gamma][\gamma_{10} + (N-2)\gamma]} \right], \quad (\text{C.4})$$

$$P_{\text{dicke}}^{(3)}(t) = 3 \left[\frac{4(N-2)\gamma^3[\gamma_{10} + 3(N-2)\gamma]e^{-[3\Gamma+(3N-7)\gamma]t}}{[\gamma_{10} + (N-4)\gamma][\gamma_{10} + (N-3)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-2)\gamma][2\gamma_{10} + 3(N-2)\gamma]} - \frac{4\gamma_{10}(N-2)\gamma^2 e^{-[2\Gamma+(N-4)\gamma]t}}{N[\gamma_{10} - 2\gamma][\gamma_{10} + (N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-2)\gamma]} + \frac{4(N-2)(N-1)(\gamma_{10} + N\gamma)\gamma^2 e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t}}{N[\gamma_{10} + (N-4)\gamma][\gamma_{10} + (N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-1)\gamma]} + \frac{2\gamma_{10}(2\gamma_{10}^2 + (5N-6)\gamma_{10}\gamma + (N-2)(3N-4)\gamma^2) e^{-(\Gamma-\gamma)t}}{N[\gamma_{10} + (N-2)\gamma][2\gamma_{10} + 3(N-2)\gamma][\gamma_{10} + 2(N-1)\gamma]} + \frac{(N-2)(\gamma_{10}^3 + (2N-3)\gamma_{10}^2\gamma + (N-4)(N-1)\gamma_{10}\gamma^2 - 2N(N-1)\gamma^3) e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t}}{N[\gamma_{10} - 2\gamma][\gamma_{10} + (N-3)\gamma][\gamma_{10} + (N-2)\gamma]} \right], \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{mixed}}^{(3)}(t) = & 3 \left[\frac{4(N-4)(N-3)\gamma^3 e^{-[3\Gamma+(N-7)\gamma]t}}{(N-2)(N-1)[\gamma_{10}-2\gamma]^2 [2\gamma_{10}+(N-4)\gamma]} + \frac{16(N-3)[\gamma_{10}+(N-6)\gamma]\gamma^3 e^{-[3\Gamma+(2N-9)\gamma]t}}{N(N-2)[\gamma_{10}-4\gamma][2\gamma_{10}+(N-6)\gamma][\gamma_{10}+(N-4)\gamma][\gamma_{10}+(N-3)\gamma]} \right. \\
& + \frac{24[\gamma_{10}+3(N-2)\gamma_c]\gamma^3 e^{-3[\Gamma+(N-3)\gamma]t}}{N(N-1)[\gamma_{10}+(N-4)\gamma][\gamma_{10}+(N-3)\gamma][\gamma_{10}+2(N-2)\gamma][2\gamma_{10}+3(N-2)\gamma]} - \\
& \frac{8[\gamma_{10}^2+(N-4)\gamma\gamma_{10}-12\gamma^2]\gamma^2 e^{-2[\Gamma+(N-2)\gamma]t}}{N[\gamma_{10}-4\gamma][\gamma_{10}+(N-4)\gamma][\gamma_{10}+(N-2)\gamma][\gamma_{10}+2(N-1)\gamma]} - \\
& \frac{4[(N-2)\gamma_{10}^3+[12+N(3N-14)]\gamma\gamma_{10}^2+2\{N[14+N(N-8)]+4\}\gamma^2\gamma_{10}-8(N-3)(N-2)\gamma^3]\gamma^2 e^{-[2\Gamma+(N-4)\gamma]t}}{N[\gamma_{10}-2\gamma]^2[\gamma_{10}+(N-4)\gamma][\gamma_{10}+(N-2)\gamma][\gamma_{10}+2(N-2)\gamma]} + \\
& \left. \frac{[2\gamma_{10}^5+(5N-16)\gamma\gamma_{10}^4+[26+N(4N-27)]\gamma^2\gamma_{10}^3+\{N[12+N(N-11)]+44\}\gamma^3\gamma_{10}^2-8[3+N(N-7)]\gamma^4\gamma_{10}+24(N-6)\gamma^5]}{N[\gamma_{10}-2\gamma]^2[2\gamma_{10}+(N-6)\gamma][\gamma_{10}+(N-3)\gamma][\gamma_{10}+(N-2)\gamma]} \right] \\
& \times e^{-[\Gamma+(N-1)\gamma]t} + \frac{e^{-(\Gamma-\gamma)t}}{N[2\gamma_{10}+(N-4)\gamma][\gamma_{10}+(N-3)\gamma][\gamma_{10}+(N-2)\gamma][2\gamma_{10}+3(N-2)\gamma][\gamma_{10}+2(N-1)\gamma]} \left(4(N-1)\gamma_{10}^5 \right. \\
& + 8[3N(N-3)+4]\gamma\gamma_{10}^4 + \{N[5N(11N-57)+378]-52\}\gamma^2\gamma_{10}^3 + 6(N-4)(N-3)(N-2)(N^3-4N^2+N-2)\gamma^5 + \\
& \left. (N\{3N[N(20N-151)+357]-730\}-88)\gamma^3\gamma_{10}^2 + (N-3)(N\{N[N(31N-221)+446]-192\}-16)\gamma^4\gamma_{10} \right) \Big]. \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

Apéndice D

Suma con las constantes de acoplamiento g_α

Una de las identidades que aparece al resolver las ecuaciones en el capítulo 5 es la suma sobre los modos guiados $\sum_\alpha |g_\alpha|^2 e^{-i\omega_\alpha T} e^{ik_\alpha(z_r - z_s)}$. Para transformar la suma sobre los modos a integrales sobre la frecuencia ω_α debemos de tener la relación de dispersión $k_\alpha = k_\alpha(\omega_\alpha)$. Para los modos guiados tal relación es $k_\alpha = \eta_\alpha \frac{\omega_\alpha}{v_g}$ donde v_g es la velocidad de grupo del modo fundamental dentro de la guía de onda. Introducimos la etiqueta $\eta_\alpha = \pm 1$ para indicar la dirección en la que viaja del campo (propagante o contra-propagante) a lo largo del eje de la guía de onda. Así, usando la frecuencia del modo y la dirección de propagación transformamos la suma de los modos guiados como $\sum_\alpha \rightarrow \sum_{\eta_\alpha = \pm 1} \int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha)$ en donde $\rho(\omega_\alpha)$ es la densidad de modos [221]. En este trabajo consideramos que las guías de onda son homogéneas de forma que no hay una dirección de propagación preferente, por lo que la densidad solo depende de la frecuencia. Haciendo uso de lo expuesto arriba, podemos escribir nuestra expresión como

$$\sum_\alpha |g_\alpha|^2 e^{-i\omega_\alpha T} e^{ik_\alpha(z_r - z_s)} = \int_0^\infty d\omega_\alpha \rho(\omega_\alpha) |g_\alpha(\omega)|^2 \left\{ e^{-i\omega_\alpha(T - \tau_{rs})} + e^{-i\omega_\alpha(T + \tau_{rs})} \right\},$$

donde $\tau_{rs} = \frac{z_r - z_s}{v_g}$.

Para estudiar solo los efectos no-Markovianos asociados al retardo y no por la estructura del reservatorio ni de las guías de onda, asumiremos que la densidad de estados y la constante de acoplamiento es aproximadamente el mismo en todo el espectro de frecuencias. A está hipótesis se le llama *Aproximación de Weisskopf-Wigner*. Esto nos permite evaluar $\omega_\alpha \approx \omega_0$ en las funciones $\rho(\omega_\alpha)$ y g_α . Bajo esto tenemos

$$\sum_\alpha |g_\alpha|^2 e^{-i\omega_\alpha T} e^{ik_\alpha(z_r - z_s)} \approx \rho(\omega_0) |g_0|^2 \int_0^\infty d\omega_\alpha \left\{ e^{-i\omega_\alpha(T - \tau_{rs})} + e^{-i\omega_\alpha(T + \tau_{rs})} \right\}.$$

Para continuar, haremos uso de la formula de Sokhotski-Plemelj

$$\int_0^\infty d\omega_\alpha e^{-i\omega_\alpha a} = -i\text{PV} \left(\frac{1}{a} \right) + \pi\delta(a), \quad (\text{D.1})$$

donde PV hace referencia al valor principal de Cauchy, y su contribución la podemos absorber en la frecuencia de transición atómica ya que solo es un corrimiento de frecuencia de Lamb [29]. Así llegamos a

$$\sum_\alpha |g_\alpha|^2 e^{-i\Delta_\alpha T} e^{ik_\alpha(z_r - z_s)} = \frac{\gamma e^{i\omega_0 T}}{2} \frac{\delta(T - \tau_{rs}) + \delta(T + \tau_{rs})}{2}. \quad (\text{D.2})$$

donde hemos definido que las tasas de decaimiento en los modos guiado son $\gamma \equiv 4\pi\rho(\omega_0)|g_0|^2$. Cabe aclarar que este valor es el mismo que obtenemos para la dinámica Markoviana (3.36), lo que nos permite comparar los procesos de emisión en una dinámica u otra.

Apéndice E

Resolución de la integral sobre frecuencias de \tilde{a}

La expresión (5.30) puede escribirse como una integral sobre frecuencias en lugar de una suma sobre modos. Esto es igual a

$$\begin{aligned}\tilde{a}(s) &\simeq \left\{ s - \frac{\gamma}{\pi} \tilde{a}(s) \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} \cos(\Delta_\alpha\tau + \phi)}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} \right] \left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s - i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2} \right]} d\Delta_\alpha \right\}^{-1} \\ &= \left\{ s - \frac{\gamma}{\pi} \tilde{a}(s) I(s, \gamma, \tau, \phi) \right\}^{-1},\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

donde $\Delta_\alpha = \omega_\alpha - \omega_0$, y ya que estamos trabajando con frecuencias ópticas podemos extender el límite inferior de la integral a $-\infty$.

Para calcular $I(s, \gamma, \tau, \phi)$ primeramente vamos a reescribir el denominador dentro de la integral usando los polos de la expresión para la variable Δ_α . Los polos están dados por la ecuación característica

$$\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} - \sigma \left(s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_k^\sigma = i \left\{ s + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{\tau} W_k(\sigma r) \right\}, \quad (\text{E.2})$$

donde usamos las ramas k -ésimas de la función W de Lambert W_k [191] y $\sigma = \pm 1$. Además introducimos la variable $r = \frac{\gamma\tau}{2} e^{\gamma\tau/2 + i\phi}$. Así usamos la Descomposición en Fracciones Parciales obtenemos que

$$\frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} \right] \left[\frac{\gamma}{2} e^{i\phi} e^{-s\tau} e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s - i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2} \right]} = \frac{\tau}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{A_k^\sigma}{W_k(\sigma r)} \frac{i}{\Delta_\alpha - \Delta_k^\sigma}, \quad (\text{E.3})$$

donde $A_k^\sigma = (1 + W_k(\sigma r))^{-1}$. Usado la fórmula integral de Cauchy obtenemos las identidades

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}}{\Delta_\alpha - \Delta_k^\sigma} d\Delta_\alpha = 2\pi i \frac{W_k(\sigma r)}{\tau}, \quad (\text{E.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Delta_\alpha\tau} \cos(\Delta_\alpha\tau + \phi)}{\Delta_\alpha - \Delta_k^\sigma} d\Delta_\alpha = 2\pi i e^{i\phi}. \quad (\text{E.5})$$

Para la segunda integral hemos usado que $\Im(\Delta_\alpha^\sigma) > 0$ ya que la parte real de s puede tomarse tan grande como se necesite. Así llegamos a

$$I(s, \gamma, \tau, \phi) = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{1 + W_k(\sigma r)} \left(1 + \frac{\tau e^{i\phi}}{2W_k(\sigma r)} \right), \quad (\text{E.6})$$

Finalmente usamos las siguientes identidades para las funciones de Lambert [222]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + W_k(z)} = \frac{1}{2}, \quad (\text{E.7})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{W_k(z) + W_k^2(z)} = \frac{1}{z}, \quad (\text{E.8})$$

y llegamos a que $I(s, \gamma, \tau, \phi) = -\pi$. Por tanto (E.1) nos da que $\tilde{a}(s) = (s + \gamma)^{-1}$.

Apéndice F

Transformada inversa de Laplace de $\tilde{B}_\alpha^{(1,2)}$

Para obtener $B_\alpha^{(1,2)}(t)$ debemos aplicar la transformada inversa de Laplace a la expresión (5.33). Para ello, similar a lo hecho en el Apéndice E escribimos la fracción dentro de la suma usando los polos del denominador. Pero en este caso los polos los calculamos para la variables s , de forma que encontramos

$$s_{k,\alpha}^\sigma = -\frac{\gamma}{2} - i\Delta_\alpha + \frac{1}{\tau} W_k(\sigma r) = -\frac{\gamma_k^\sigma}{2} - i\Delta_\alpha. \quad (\text{F.1})$$

Recordando que $\tilde{a}(s) = (s + \gamma)^{-1}$ obtenemos

$$B_\alpha^{(1)}(t) = -\frac{g_\alpha^* \tau e^{\pm i k_\alpha d/2}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{A_k^\sigma}{W_k(\sigma r)} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}}{(s + \gamma)(s - s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) - \frac{\gamma}{2} e^{i\phi \mp k_\alpha d} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s\tau}}{(s + \gamma)(s - s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) \right]$$

donde \mathcal{L}^{-1} denota la transformada inversa de Laplace. Usando las siguientes identidades

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s + i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}}{(s + \gamma)(s - s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) = \frac{\frac{\gamma}{2} - i\Delta_\alpha}{s_{k,\alpha}^\sigma + \gamma} e^{-\gamma t} + \frac{\frac{\gamma}{2} + i\Delta_\alpha + s_{k,\alpha}^\sigma}{s_{k,\alpha}^\sigma + \gamma} e^{s_{k,\alpha}^\sigma t} \quad (\text{F.2})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s\tau}}{(s + \gamma)(s - s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) = \left[e^{s_{k,\alpha}^\sigma (t-\tau)} - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \frac{\Theta(t-\tau)}{s_{k,\alpha}^\sigma + \gamma} \quad (\text{F.3})$$

y tomando $b_\alpha^{(r)} = B_\alpha^{(r)}(t) e^{i\Delta_\alpha t}$ obtenemos la expresión (5.34), donde hemos usado explícitamente que para los modos guiados se satisface que $k_\alpha d = \eta_\alpha (\Delta_\alpha \tau + \phi)$.

Apéndice G

Solución de las amplitudes c_α

Para dar una solución completa a continuación presentamos la solución de la amplitud de probabilidad de tener dos modos iguales excitados $c_\alpha(t)$. Aunque como hemos descrito, en lo subsecuente podemos despreciar la probabilidad de este proceso. Para calcular la función recordemos que $c_\alpha(t) = C_\alpha(t)e^{2i\Delta_\alpha t}$, y acordé a las ecuaciones (5.27) y (5.28) podemos deducir que se satisface que

$$\tilde{C}_\alpha(s) = -\frac{2\sqrt{2}g_\alpha^{*2}}{(s+\gamma)(s+2i\Delta_\alpha)} \frac{s+i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}e^{i\phi}e^{-s\tau}e^{-i\Delta_\alpha\tau} \cos[k_\alpha(z_1 - z_2)]}{\left[\frac{\gamma}{2}e^{i\phi}e^{-s\tau}e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s+i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}\right] \left[\frac{\gamma}{2}e^{i\phi}e^{-s\tau}e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s-i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2}\right]}, \quad (\text{G.1})$$

en donde hemos aproximado $4|g_\alpha|^2/(s+i\Delta_\alpha) \approx 0$. Usando los polos (F.1) tendremos

$$\frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2}e^{i\phi}e^{-s\tau}e^{-i\Delta_\alpha\tau} + s+i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}\right] \left[\frac{\gamma}{2}e^{i\phi}e^{-s\tau}e^{-i\Delta_\alpha\tau} - s-i\Delta_\alpha - \frac{\gamma}{2}\right]} = -\frac{\tau}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{A_k^\sigma}{W_k(\sigma r)} \frac{1}{s - s_{k,\alpha}^\sigma},$$

Al pasar al dominio temporal obtendremos

$$\begin{aligned} c_\alpha(t) &= \sqrt{2}g_\alpha^{*2}\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{A_k^\sigma e^{2i\Delta_\alpha t}}{W_k(\sigma r)} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s+i\Delta_\alpha + \frac{\gamma}{2}}{(s+\gamma)(s+2i\Delta_\alpha)(s-s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2}e^{i\phi-i\Delta_\alpha\tau} \cos(k_\alpha d) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s\tau}}{(s+\gamma)(s+2i\Delta_\alpha)(s-s_{k,\alpha}^\sigma)} \right) \right] \\ &= \frac{g_\alpha^{*2}\tau}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{A_k^\sigma}{W_k(\sigma r)} \left[\frac{i}{\Delta_\alpha + i\gamma_k^\sigma/2} - \frac{ie^{-\gamma t + 2i\Delta_\alpha t}}{\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma)} + \frac{2W_k(\sigma r)}{\tau} \frac{e^{-\gamma_k^\sigma t/2 + i\Delta_\alpha t}}{[\Delta_\alpha + i\gamma_k^\sigma/2][\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2}e^{i\phi} \cos(k_\alpha d) \Theta(t - \tau) \left\{ \frac{e^{i\Delta_\alpha\tau}}{[\Delta_\alpha + i\gamma/2][\Delta_\alpha + i\gamma_k^\sigma/2]} + \frac{e^{-\gamma(t-\tau) + i\Delta_\alpha(2t-\tau)}}{[\Delta_\alpha + i\gamma/2][\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2e^{-\gamma_k^\sigma(t-\tau)/2 + i\Delta_\alpha t}}{[\Delta_\alpha + i\gamma_k^\sigma/2][\Delta_\alpha + i(\gamma - \gamma_k^\sigma/2)]} \right\} \right]. \quad (\text{G.2}) \end{aligned}$$

Apéndice H

Valores estacionarios

En el límite de tiempo largos tal que $\gamma t > \infty$ la expresión (5.34) puede aproximarse como

$$b_\alpha^{(\frac{1}{2})}(t \rightarrow \infty) = -\frac{ig_\alpha^* \tau}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k^\sigma e^{-\gamma_k^\sigma t/2}}{W_k(\sigma \tau)} \frac{e^{\pm i \eta_\alpha (\Delta_\alpha \tau + \phi)/2}}{\Delta_\alpha + i \left(\gamma - \frac{\gamma_k^\sigma}{2} \right)} \left[\frac{W_k(\sigma \tau)}{\tau} - \frac{\gamma}{2} e^{i(1-\eta_\alpha)\phi - i \eta_\alpha \Delta_\alpha \tau} e^{\gamma_k^\sigma \tau/2} \right],$$

Lo anterior no decae a cero si la parte real de γ_k^σ es cero. Esto implica que

$$\Re \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma \tau} W_k \left(\sigma \frac{\gamma \tau}{2} e^{\gamma \tau/2} e^{i\phi} \right) \right] = 0. \quad (\text{H.1})$$

Así el único término en la expansión de ramas de Lambert que no será cero en el límite de tiempo largo es $k=0$, y $\{\sigma = +1, \phi = 2\pi n\}$ o $\{\sigma = -1, \phi = (2n+1)\pi\}$, con $n \in \mathbb{N}^0$. Esta única rama satisface

$$W_0 \left(\frac{\gamma \tau}{2} e^{\gamma \tau/2} \right) = \frac{\gamma \tau}{2}.$$

Tomando en cuenta lo anterior nos damos cuenta que la función b_α toma un valor estacionario dado por

$$b_{\alpha, \text{ss}}^{(\frac{1}{2})} = -\frac{g_\alpha^*}{2} \frac{e^{\pm i \eta_\alpha (\Delta_\alpha \tau + n\pi)/2}}{1 + \frac{\gamma \tau}{2}} \frac{1 - e^{\mp i \eta_\alpha \Delta_\alpha \tau}}{\gamma - i \Delta_\alpha}. \quad (\text{H.2})$$

Tal valor estacionario implica que la probabilidad de tener una excitación también tome un valor estacionario. Este valor lo podemos calcular por

$$P^{(1)}(t \rightarrow \infty) = \frac{\rho(\omega_0) |g_0|^2}{2(1 + \frac{\gamma \tau}{2})^2} \sum_{\eta_\alpha = \pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta_\alpha \left| \frac{1 - e^{-i \eta_\alpha \Delta_\alpha \tau}}{\gamma - i \Delta_\alpha} \right|^2,$$

lo cual nos da la expresión $P_{\text{ss}}^{(1)}$ de (5.46). De igual forma, la correlación entre los átomos toma el valor estacionario

$$\begin{aligned} P_{\text{ss}}^{(eg)} &= \frac{\rho(\omega_0) |g_0|^2 \cos(n\pi)}{4(1 + \frac{\gamma \tau}{2})^2} \sum_{\eta_\alpha = \pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta_\alpha \frac{(1 - e^{-i \eta_\alpha \Delta_\alpha \tau})^2}{|\gamma - i \Delta_\alpha|^2} \\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{2} \frac{\sinh\left(\frac{\gamma \tau}{2}\right)}{(1 + \frac{\gamma \tau}{2})^2 e^{\frac{\gamma \tau}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Lo que implica que $P_{\text{ss}}^{(eg)} = P_{\text{ss}}^{(1)}/2$.

Bibliografía

- [1] H. J. Kimble. The quantum internet. *Nature*, 453(7198):1023–1030, Jun 2008.
- [2] L.-M. Duan and C. Monroe. Colloquium: Quantum networks with trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1209–1224, Apr 2010.
- [3] C. Monroe, R. Raussendorf, A. Ruthven, K. R. Brown, P. Maunz, L.-M. Duan, and J. Kim. Large-scale modular quantum-computer architecture with atomic memory and photonic interconnects. *Phys. Rev. A*, 89:022317, Feb 2014.
- [4] R. H. Lehberg. Radiation from an n -atom system. i. general formalism. *Phys. Rev. A*, 2:883–888, Sep 1970.
- [5] G. S. Agarwal. Master-equation approach to spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 2:2038–2046, Nov 1970.
- [6] J. P. Clemens, L. Horvath, B. C. Sanders, and H. J. Carmichael. Collective spontaneous emission from a line of atoms. *Phys. Rev. A*, 68:023809, Aug 2003.
- [7] Anatoly Svidzinsky and Jun-Tao Chang. Cooperative spontaneous emission as a many-body eigenvalue problem. *Phys. Rev. A*, 77:043833, 2008.
- [8] Fam Le Kien, S. Dutta Gupta, K. P. Nayak, and K. Hakuta. Nanofiber-mediated radiative transfer between two distant atoms. *Phys. Rev. A*, 72:063815, Dec 2005.
- [9] P Solano, P Barberis-Blostein, F K Fatemi, L A Orozco, and S L Rolston. Super-radiance reveals infinite-range dipole interactions through a nanofiber. *Nature Communications*, 8:1857, 2017.
- [10] E. Vetsch, D. Reitz, G. Sagué, R. Schmidt, S. T. Dawkins, and A. Rauschenbeutel. Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber. *Phys. Rev. Lett.*, 104:203603, May 2010.
- [11] D E Chang, L Jiang, A V Gorshkov, and H J Kimble. Cavity QED with atomic mirrors. *New Journal of Physics*, 14(6):063003, jun 2012.
- [12] A. González-Tudela, V. Paulisch, H. J. Kimble, and J. I. Cirac. Efficient multiphoton generation in waveguide quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 118:213601, May 2017.
- [13] Yang Wang, Alexander N. Craddock, Rourke Sekelsky, Mael Flament, and Mehdi Namazi. Field-deployable quantum memory for quantum networking. *Phys. Rev. Appl.*, 18:044058, Oct 2022.
- [14] A. Goban, C.-L. Hung, J. D. Hood, S.-P. Yu, J. A. Muniz, O. Painter, and H. J. Kimble. Superradiance for atoms trapped along a photonic crystal waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 115:063601, Aug 2015.
- [15] Pablo Solano, Jeffrey A. Grover, Jonathan E. Hoffman, Sylvain Ravets, Fredrik K. Fatemi, Luis A. Orozco, and Steven L. Rolston. Chapter seven - optical nanofibers: A new platform for quantum optics. volume 66 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 439–505. Academic Press, 2017.
- [16] J.-H. Kim, S. Aghaeimeibodi, C. J. K. Richardson, R. P. Leavitt, and E. Waks. Super-radiant emission from quantum dots in a nanophotonic waveguide. *Nano Letters*, 18:4734, 2018.
- [17] P. Y. Wen, K.-T. Lin, A. F. Kockum, B. Suri, H. Ian, J. C. Chen, S. Y. Mao, C. C. Chiu, P. Delsing, F. Nori, G.-D. Lin, and I.-C. Hoi. Large collective lamb shift of two distant superconducting artificial atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 123:233602, 2019.

- [18] Alexandra S. Sheremet, Mihail I. Petrov, Ivan V. Iorsh, Alexander V. Poshakinskiy, and Alexander N. Poddubny. Waveguide quantum electrodynamics: collective radiance and photon-photon correlations. *arXiv:2103.06824*, 2021.
- [19] Thomas Nieddu, Vandna Gokhroo, and Síle Nic Chormaica. Optical nanofibres and neutral atoms. *Journal of Optics*, 18(5):053001, mar 2016.
- [20] A. Goban, K. S. Choi, D. J. Alton, D. Ding, C. Lacroûte, M. Pototschnig, T. Thiele, N. P. Stern, and H. J. Kimble. Demonstration of a state-insensitive, compensated nanofiber trap. *Phys. Rev. Lett.*, 109:033603, Jul 2012.
- [21] H. L. Sørensen, J.-B. Béguin, K. W. Kluge, I. Iakoupov, A. S. Sørensen, J. H. Müller, E. S. Polzik, and J. Appel. Coherent backscattering of light off one-dimensional atomic strings. *Phys. Rev. Lett.*, 117:133604, Sep 2016.
- [22] A. Goban, C.-L. Hung, S.-P. Yu, J. D. Hood, J. A. Muniz, J. H. Lee, M. J. Martin, A. C. McClung, K. S. Choi, D. E. Chang, O. Painter, and H. J. Kimble. Atom–light interactions in photonic crystals. *Nature Communications*, 5(1):3808, May 2014.
- [23] D. E. Chang, J. S. Douglas, A. González-Tudela, C.-L. Hung, and H. J. Kimble. Colloquium: Quantum matter built from nanoscopic lattices of atoms and photons. *Rev. Mod. Phys.*, 90:031002, Aug 2018.
- [24] Ravitej Uppu, Leonardo Midolo, Xiaoyan Zhou, Jacques Carolan, and Peter Lodahl. Quantum-dot-based deterministic photon–emitter interfaces for scalable photonic quantum technology. *Nature Nanotechnology*, 16(12):1308–1317, Dec 2021.
- [25] Alexey V. Gorshkov, Axel André, Michael Fleischhauer, Anders S. Sørensen, and Mikhail D. Lukin. Universal approach to optimal photon storage in atomic media. *Phys. Rev. Lett.*, 98:123601, Mar 2007.
- [26] B. Gouraud, D. Maxein, A. Nicolas, O. Morin, and J. Laurat. Demonstration of a memory for tightly guided light in an optical nanofiber. *Phys. Rev. Lett.*, 114:180503, May 2015.
- [27] Michael Reitz, Christian Sommer, and Claudiu Genes. Cooperative quantum phenomena in light-matter platforms. *PRX Quantum*, 3:010201, Jan 2022.
- [28] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, 1954.
- [29] M. Gross and S. Haroche. Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*, 93(5):301 – 396, 1982.
- [30] Alexey Tiranov, Vasiliki Angelopoulou, Cornelis Jacobus van Diepen, Björn Schirnski, Oliver August Dall’Alba Sandberg, Ying Wang, Leonardo Midolo, Sven Scholz, Andreas Dirk Wieck, Arne Ludwig, Anders Søndberg Sørensen, and Peter Lodahl. Collective super- and subradiant dynamics between distant optical quantum emitters. *Science*, 379(6630):389–393, 2023.
- [31] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999.
- [32] R. Bonifacio and L. A. Lugiato. Cooperative radiation processes in two-level systems: Superfluorescence. *Phys. Rev. A*, 11:1507–1521, May 1975.
- [33] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. Texts and Monographs in Physics. Wiley-VCH, 1999.
- [34] H. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [35] Roy J. Glauber and Fritz Haake. Superradiant pulses and directed angular momentum states. *Phys. Rev. A*, 13:357–366, Jan 1976.
- [36] Bradley A. Chase and J. M. Geremia. Collective processes of an ensemble of spin-1/2 particles. *Phys. Rev. A*, 78:052101, Nov 2008.
- [37] Michael Gegg and Marten Richter. Psiquasp—a library for efficient computation of symmetric open quantum systems. *Scientific reports*, 7(1):16304, 2017.
- [38] Nathan Shammah, Shahnawaz Ahmed, Neill Lambert, Simone De Liberato, and Franco Nori. Open quantum systems with local and collective incoherent processes: Efficient numerical simulations using permutational invariance. *Phys. Rev. A*, 98:063815, Dec 2018.
- [39] Huaixiu Zheng and Harold U. Baranger. Persistent quantum beats and long-distance entanglement from waveguide-mediated interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 110:113601, Mar 2013.

- [40] Tommaso Tufarelli, M. S. Kim, and Francesco Ciccarello. Non-markovianity of a quantum emitter in front of a mirror. *Phys. Rev. A*, 90:012113, Jul 2014.
- [41] Pierre-Olivier Guimond, Alexandre Roulet, Huy Nguyen Le, and Valerio Scarani. Rabi oscillation in a quantum cavity: Markovian and non-markovian dynamics. *Phys. Rev. A*, 93:023808, Feb 2016.
- [42] Bin Zhang, Sujian You, and Mei Lu. Enhancement of spontaneous entanglement generation via coherent quantum feedback. *Phys. Rev. A*, 101:032335, Mar 2020.
- [43] Alberto Del Ángel, P. Solano, and P. Barberis-Blostein. Effects of environment correlations on the onset of collective decay in waveguide qed. *arXiv:2212.01972*, 2022.
- [44] P. Solano, P. Barberis-Blostein, and K. Sinha. Dissimilar collective decay and directional emission from two quantum emitters. *Phys. Rev. A*, 107:023723, Feb 2023.
- [45] Kanupriya Sinha, Pierre Meystre, Elizabeth A. Goldschmidt, Fredrik K. Fatemi, S. L. Rolston, and Pablo Solano. Non-markovian collective emission from macroscopically separated emitters. *Phys. Rev. Lett.*, 124:043603, Jan 2020.
- [46] Kanupriya Sinha, Alejandro González-Tudela, Yong Lu, and Pablo Solano. Collective radiation from distant emitters. *Phys. Rev. A*, 102:043718, Oct 2020.
- [47] F. Dinç and A. M. Brańczyk. Non-markovian super-superradiance in a linear chain of up to 100 qubits. *Phys. Rev. Research*, 1:032042(R), 2019.
- [48] G. Calajó, Y.-L. L. Fang, H. U. Baranger, and F. Ciccarello. Exciting a bound state in the continuum through multiphoton scattering plus delayed quantum feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 122:073601, 2019.
- [49] P. Facchi, D. Lonigro, S. Pascazio, F. V. Pepe, and D. Pomarico. Bound states in the continuum for an array of quantum emitters. *Phys. Rev. A*, 100:023834, 2019.
- [50] L. Guo, A. F. Kockum, F. Marquardt, and G. Johansson. Oscillating bound states for a giant atom. *Phys. Rev. Research*, 2:043014, 2020.
- [51] Gilberto Brambilla, Vittoria Finazzi, and David J. Richardson. Ultra-low-loss optical fiber nanotapers. *Opt. Express*, 12(10):2258–2263, May 2004.
- [52] J. E. Hoffman, S. Ravets, J. A. Grover, P. Solano, P. R. Kordell, J. D. Wong-Campos, L. A. Orozco, and S. L. Rolston. Ultrahigh transmission optical nanofibers. *AIP Advances*, 4(6):067124, 2014.
- [53] Gershon Kurizki, Patrice Bertet, Yuimaru Kubo, Klaus Mølmer, David Petrosyan, Peter Rabl, and Jörg Schmiedmayer. Quantum technologies with hybrid systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(13):3866–3873, 2015.
- [54] Ze-Liang Xiang, Sahel Ashhab, J. Q. You, and Franco Nori. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 85:623–653, Apr 2013.
- [55] Sahand Mahmoodian, Peter Lodahl, and Anders S. Sørensen. Quantum networks with chiral-light-matter interaction in waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 117:240501, Dec 2016.
- [56] Peter Lodahl, Sahand Mahmoodian, Søren Stobbe, Arno Rauschenbeutel, Philipp Schneeweiss, Jürgen Volz, Hannes Pichler, and Peter Zoller. Chiral quantum optics. *Nature*, 541(7638):473–480, Jan 2017.
- [57] Alexandra S. Sheremet, Mihail I. Petrov, Ivan V. Iorsh, Alexander V. Poshakinskiy, and Alexander N. Poddubny. Waveguide quantum electrodynamics: Collective radiance and photon-photon correlations. *Rev. Mod. Phys.*, 95:015002, Mar 2023.
- [58] W Alvarez-Giron and P Barberis-Blostein. The atomic damping basis and the collective decay of interacting two-level atoms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(43):435301, oct 2020.
- [59] William Alvarez-Giron, Pablo Solano, Kanu Sinha, and Pablo Barberis-Blostein. Delay-induced spontaneous dark state generation from two distant excited atoms. *arXiv:2303.06559*, 2023.
- [60] V. Tarasov. *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. Elsevier, 2008.
- [61] Yuto Ashida, Zongping Gong, and Masahito Ueda. Non-hermitian physics. *Advances in Physics*, 69(3):249–435, 2020.

- [62] Hans-Jürgen Briegel and Berthold-Georg Englert. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *Phys. Rev. A*, 47:3311–3329, Apr 1993.
- [63] A.B. Klimov and S.M. Chumakov. *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, 2009.
- [64] Marduk Bolaños and Pablo Barberis-Blostein. Algebraic solution of the lindblad equation for a collection of multilevel systems coupled to independent environments. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(44):445301, oct 2015.
- [65] Stephan Hartmann. Generalized dicke states. *Quantum Info. Comput.*, 16(15-16):1333–1348, November 2016.
- [66] Minghui Xu, D. A. Tieri, and M. J. Holland. Simulating open quantum systems by applying $su(4)$ to quantum master equations. *Phys. Rev. A*, 87:062101, Jun 2013.
- [67] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [68] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563, 1935.
- [69] E. Schrödinger. Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):446–452, 1936.
- [70] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964.
- [71] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, and Anton Zeilinger. *Going Beyond Bell’s Theorem*, pages 69–72. Springer Netherlands, Dordrecht, 1989.
- [72] N. Gisin. Bell’s inequality holds for all non-product states. *Physics Letters A*, 154(5):201–202, 1991.
- [73] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. Generic quantum nonlocality. *Physics Letters A*, 166(5):293–297, 1992.
- [74] Carl A. Kocher and Eugene D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18:575–577, Apr 1967.
- [75] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, Apr 1972.
- [76] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460–463, Aug 1981.
- [77] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982.
- [78] Chiara Macchiavello. On the role of entanglement in quantum information. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338(1):68–75, 2004. Proceedings of the conference A Nonlinear World: the Real World, 2nd International Conference on Frontier Science.
- [79] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009.
- [80] Géza Tóth and Iagoba Apellaniz. Quantum metrology from a quantum information science perspective. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(42):424006, oct 2014.
- [81] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991.
- [82] Charles H. Bennett. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3121–3124, May 1992.
- [83] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.
- [84] Hwang Lee, Pieter Kok, and Jonathan P. Dowling. A quantum rosetta stone for interferometry. *Journal of Modern Optics*, 49(14-15):2325–2338, 2002.

- [85] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 1995.
- [86] Luigi Amico, Rosario Fazio, Andreas Osterloh, and Vlatko Vedral. Entanglement in many-body systems. *Rev. Mod. Phys.*, 80:517–576, May 2008.
- [87] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [88] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53:2046–2052, Apr 1996.
- [89] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight. Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2275–2279, Mar 1997.
- [90] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824–3851, Nov 1996.
- [91] Sam A. Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5022–5025, Jun 1997.
- [92] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998.
- [93] D. Vogel, W. y Welsh. *Quantum optics*. WILEY-VCH, Weinheim, 3 edition, 2006.
- [94] Miriam Kosik, Oleksandr Burlayenko, Carsten Rockstuhl, Ivan Fernandez-Corbaton, and Karolina Słowik. Interaction of atomic systems with quantum vacuum beyond electric dipole approximation. *Scientific Reports*, 10(1):5879, Apr 2020.
- [95] Inés de Vega and Daniel Alonso. Dynamics of non-markovian open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 89:015001, Jan 2017.
- [96] S. Haroche and J. Raimond. *Exploring the Quantum. Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2006.
- [97] R. Bonifacio, P. Schwendimann, and Fritz Haake. Quantum statistical theory of superradiance. i. *Phys. Rev. A*, 4:302–313, Jul 1971.
- [98] Ching Tsung Lee. Exact solution of the superradiance master equation. i. complete initial excitation. *Phys. Rev. A*, 15:2019–2031, May 1977.
- [99] Anatolii V Andreev, Vladimir I Emel'yanov, and Yu A Il'inskiĭ. Collective spontaneous emission (dicke superradiance). *Soviet Physics Uspekhi*, 23(8):493–514, aug 1980.
- [100] Meng Khoon Tey, Zilong Chen, Syed Abdullah Aljunid, Brenda Chng, Florian Huber, Gleb Maslennikov, and Christian Kurtsiefer. Strong interaction between light and a single trapped atom without the need for a cavity. *Nature Physics*, 4(12):924–927, Dec 2008.
- [101] Erik W. Streed, Andreas Jechow, Benjamin G. Norton, and David Kielpinski. Absorption imaging of a single atom. *Nature Communications*, 3(1):933, Jul 2012.
- [102] A. Golla, B. Chalopin, M. Bader, I. Harder, K. Mantel, R. Maiwald, N. Lindlein, M. Sondermann, and G. Leuchs. Generation of a wave packet tailored to efficient free space excitation of a single atom. *The European Physical Journal D*, 66(7):190, Jul 2012.
- [103] Robert Maiwald, Andrea Golla, Martin Fischer, Marianne Bader, Simon Heugel, Benoît Chalopin, Markus Sondermann, and Gerd Leuchs. Collecting more than half the fluorescence photons from a single ion. *Phys. Rev. A*, 86:043431, Oct 2012.
- [104] A. Lipson, S.G. Lipson, and H. Lipson. *Optical Physics*. Cambridge University Press, 2010.
- [105] Andreas Reiserer and Gerhard Rempe. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Rev. Mod. Phys.*, 87:1379–1418, Dec 2015.
- [106] Danny O'Shea, Christian Junge, Jürgen Volz, and Arno Rauschenbeutel. Fiber-optical switch controlled by a single atom. *Phys. Rev. Lett.*, 111:193601, Nov 2013.
- [107] Takao Aoki, Barak Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, and H. J. Kimble. Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator. *Nature*, 443(7112):671–674, Oct 2006.

- [108] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, and Alexander Shnirman. Quantum-state engineering with josephson-junction devices. *Rev. Mod. Phys.*, 73:357–400, May 2001.
- [109] Klemens Hammerer, Anders S. Sørensen, and Eugene S. Polzik. Quantum interface between light and atomic ensembles. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1041–1093, Apr 2010.
- [110] A. Asenjo-Garcia, J. D. Hood, D. E. Chang, and H. J. Kimble. Atom-light interactions in quasi-one-dimensional nanostructures: A green’s-function perspective. *Phys. Rev. A*, 95:033818, Mar 2017.
- [111] A. Asenjo-Garcia, M. Moreno-Cardoner, A. Albrecht, H. J. Kimble, and D. E. Chang. Exponential improvement in photon storage fidelities using subradiance and “selective radiance” in atomic arrays. *Phys. Rev. X*, 7:031024, Aug 2017.
- [112] Neil V. Corzo, Baptiste Gouraud, Aveek Chandra, Akihisa Goban, Alexandra S. Sheremet, Dmitriy V. Kupriyanov, and Julien Laurat. Large bragg reflection from one-dimensional chains of trapped atoms near a nanoscale waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 117:133603, Sep 2016.
- [113] Dibyendu Roy, C. M. Wilson, and Ofer Firstenberg. Colloquium: Strongly interacting photons in one-dimensional continuum. *Rev. Mod. Phys.*, 89:021001, May 2017.
- [114] Daniel Reitz and Arno Rauschenbeutel. Nanofiber-based double-helix dipole trap for cold neutral atoms. *Optics Communications*, 285(23):4705 – 4708, 2012. Special Issue: Optical micro/nanofibers: Challenges and Opportunities.
- [115] C.F. Phelan, T. Hennessy, and Th. Busch. Shaping the evanescent field of optical nanofibers for cold atom trapping. *Opt. Express*, 21(22):27093–27101, Nov 2013.
- [116] G Sagué, A Baade, and A Rauschenbeutel. Blue-detuned evanescent field surface traps for neutral atoms based on mode interference in ultrathin optical fibres. *New Journal of Physics*, 10(11):113008, nov 2008.
- [117] Michael Fleischhauer, Atac Imamoglu, and Jonathan P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, 77:633–673, Jul 2005.
- [118] Alexander I. Lvovsky, Barry C. Sanders, and Wolfgang Tittel. Optical quantum memory. *Nature Photonics*, 3(12):706–714, Dec 2009.
- [119] Fam Le Kien and A. Rauschenbeutel. Electromagnetically induced transparency for guided light in an atomic array outside an optical nanofiber. *Phys. Rev. A*, 91:053847, May 2015.
- [120] C. Sayrin, C. Clausen, B. Albrecht, P. Schneeweiss, and A. Rauschenbeutel. Storage of fiber-guided light in a nanofiber-trapped ensemble of cold atoms. *Optica*, 2(4):353–356, Apr 2015.
- [121] R. Mitsch, C. Sayrin, B. Albrecht, P. Schneeweiss, and A. Rauschenbeutel. Quantum state-controlled directional spontaneous emission of photons into a nanophotonic waveguide. *Nature Communications*, 5(1):5713, Dec 2014.
- [122] Clément Sayrin, Christian Junge, Rudolf Mitsch, Bernhard Albrecht, Danny O’Shea, Philipp Schneeweiss, Jürgen Volz, and Arno Rauschenbeutel. Nanophotonic optical isolator controlled by the internal state of cold atoms. *Phys. Rev. X*, 5:041036, Dec 2015.
- [123] H. J. Carmichael. Quantum trajectory theory for cascaded open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2273–2276, Apr 1993.
- [124] K Stannigel, P Rabl, and P Zoller. Driven-dissipative preparation of entangled states in cascaded quantum-optical networks. *New Journal of Physics*, 14(6):063014, jun 2012.
- [125] A .W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Springer, 1 edition, 1983.
- [126] D. Marcuse. *Principles of Optical Fiber Measurements*. Elsevier Science, 2012.
- [127] K. Okamoto. *Fundamentals of Optical Waveguides*. Optics and Photonics. Elsevier Science, 2000.
- [128] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
- [129] Roy J. Glauber and M. Lewenstein. Quantum optics of dielectric media. *Phys. Rev. A*, 43:467–491, Jan 1991.
- [130] T. Søndergaard and B. Tromborg. General theory for spontaneous emission in active dielectric microstructures: Example of a fiber amplifier. *Phys. Rev. A*, 64:033812, Aug 2001.

- [131] V. V. Klimov and M. Ducloy. Spontaneous emission rate of an excited atom placed near a nanofiber. *Phys. Rev. A*, 69:013812, Jan 2004.
- [132] Fam Le Kien and K. Hakuta. Cooperative enhancement of channeling of emission from atoms into a nanofiber. *Phys. Rev. A*, 77:013801, Jan 2008.
- [133] Fam Le Kien and A. Rauschenbeutel. Nanofiber-mediated chiral radiative coupling between two atoms. *Phys. Rev. A*, 95:023838, Feb 2017.
- [134] B. Coffey and R. Friedberg. Effect of short-range coulomb interaction on cooperative spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 17:1033–1048, Mar 1978.
- [135] James P. Clemens and H. J. Carmichael. Stochastic initiation of superradiance in a cavity: An approximation scheme within quantum trajectory theory. *Phys. Rev. A*, 65:023815, Jan 2002.
- [136] R. H. Lehberg. Radiation from an n -atom system. ii. spontaneous emission from a pair of atoms. *Phys. Rev. A*, 2:889, 1970.
- [137] Salman Makhlespour, J. E. M. Haverkort, Gregory Slepyan, Sergey Maksimenko, and A. Hoffmann. Collective spontaneous emission in coupled quantum dots: Physical mechanism of quantum nanoantenna. *Phys. Rev. B*, 86:245322, Dec 2012.
- [138] T. Wang, S. F. Yelin, R. Côté, E. E. Eyler, S. M. Farooqi, P. L. Gould, M. Koštrun, D. Tong, and D. Vrinceanu. Superradiance in ultracold rydberg gases. *Phys. Rev. A*, 75:033802, Mar 2007.
- [139] Wei Feng, Yong Li, and Shi-Yao Zhu. Cooperative spontaneous emission of three identical atoms. *Phys. Rev. A*, 88:033856, Sep 2013.
- [140] François Damanet and John Martin. Competition between finite-size effects and dipole–dipole interactions in few-atom systems. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(22):225501, oct 2016.
- [141] Ryan Nowak and James P. Clemens. Quantum trajectory theory of superradiant emission from randomly distributed atomic samples. *J. Opt. Soc. Am. B*, 25(4):564–570, Apr 2008.
- [142] L. Moi, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, C. Fabre, and S. Haroche. Rydberg-atom masers. i. a theoretical and experimental study of super-radiant systems in the millimeter-wave domain. *Phys. Rev. A*, 27:2043–2064, Apr 1983.
- [143] Matthew A. Norcia, Matthew N. Winchester, Julia R. K. Cline, and James K. Thompson. Superradiance on the millihertz linewidth strontium clock transition. *Science Advances*, 2(10), 2016.
- [144] Adam T. Black, James K. Thompson, and Vladan Vuletić. On-demand superradiant conversion of atomic spin gratings into single photons with high efficiency. *Phys. Rev. Lett.*, 95:133601, Sep 2005.
- [145] Hilton W. Chan, Adam T. Black, and Vladan Vuletić. Observation of collective-emission-induced cooling of atoms in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 90:063003, Feb 2003.
- [146] Nicolas Sangouard, Christoph Simon, Hugues de Riedmatten, and Nicolas Gisin. Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics. *Rev. Mod. Phys.*, 83:33–80, Mar 2011.
- [147] Murata. *Handbook of Optical Fibers and Cables*. Optical Science and Engineering. CRC Press, 2 edition, 1996.
- [148] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, and Bassano Vacchini. Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 88:021002, Apr 2016.
- [149] M. M. Wolf, J. Eisert, T. S. Cubitt, and J. I. Cirac. Assessing non-markovian quantum dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 101:150402, Oct 2008.
- [150] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, and Jyrki Piilo. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 103:210401, Nov 2009.
- [151] Ángel Rivas, Susana F. Huelga, and Martin B. Plenio. Entanglement and non-markovianity of quantum evolutions. *Phys. Rev. Lett.*, 105:050403, Jul 2010.
- [152] Shunlong Luo, Shuangshuang Fu, and Hongting Song. Quantifying non-markovianity via correlations. *Phys. Rev. A*, 86:044101, Oct 2012.

- [153] Heinz-Peter Breuer. Foundations and measures of quantum non-markovianity. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(15):154001, jul 2012.
- [154] Ángel Rivas, Susana F Huelga, and Martin B Plenio. Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection. *Reports on Progress in Physics*, 77(9):094001, aug 2014.
- [155] B. L. Hu, Juan Pablo Paz, and Yuhong Zhang. Quantum brownian motion in a general environment. ii. nonlinear coupling and perturbative approach. *Phys. Rev. D*, 47:1576–1594, Feb 1993.
- [156] Ruggero Vasile, Fernando Galve, and Roberta Zambrini. Spectral origin of non-markovian open-system dynamics: A finite harmonic model without approximations. *Phys. Rev. A*, 89:022109, Feb 2014.
- [157] A. González-Tudela and J. I. Cirac. Markovian and non-markovian dynamics of quantum emitters coupled to two-dimensional structured reservoirs. *Phys. Rev. A*, 96:043811, Oct 2017.
- [158] Ioannis Thanopoulos, Vasilios Karanikolas, Nikos Iliopoulos, and Emmanuel Paspalakis. Non-markovian spontaneous emission dynamics of a quantum emitter near a mos₂ nanodisk. *Phys. Rev. B*, 99:195412, May 2019.
- [159] Daniele De Bernardis, Tuomas Jaako, and Peter Rabl. Cavity quantum electrodynamics in the nonperturbative regime. *Phys. Rev. A*, 97:043820, Apr 2018.
- [160] Yao-Lung L Fang, Francesco Ciccarello, and Harold U Baranger. Non-markovian dynamics of a qubit due to single-photon scattering in a waveguide. *New Journal of Physics*, 20(4):043035, apr 2018.
- [161] C. Monroe and J. Kim. Scaling the ion trap quantum processor. *Science*, 339(6124):1164–1169, 2013.
- [162] Eleni Diamanti, Hoi-Kwong Lo, Bing Qi, and Zhiliang Yuan. Practical challenges in quantum key distribution. *npj Quantum Information*, 2(1):16025, Nov 2016.
- [163] Wojciech Kozłowski and Stephanie Wehner. Towards large-scale quantum networks. In *Proceedings of the Sixth Annual ACM International Conference on Nanoscale Computing and Communication*, NANOCOM '19, New York, NY, USA, 2019. Association for Computing Machinery.
- [164] Arne L. Grimsmo. Time-delayed quantum feedback control. *Phys. Rev. Lett.*, 115:060402, Aug 2015.
- [165] Fatih Dinc, İlke Ercan, and Agata M. Brańczyk. Exact Markovian and non-Markovian time dynamics in waveguide QED: collective interactions, bound states in continuum, superradiance and subradiance. *Quantum*, 3:213, December 2019.
- [166] Gavin Crowder, Howard Carmichael, and Stephen Hughes. Quantum trajectory theory of few-photon cavity-qed systems with a time-delayed coherent feedback. *Phys. Rev. A*, 101:023807, Feb 2020.
- [167] Ahreum Lee, Hyok Sang Han, Fredrik K. Fatemi, S. L. Rolston, and Kanu Sinha. Collective quantum beats from distant multilevel emitters. *Phys. Rev. A*, 107:013701, Jan 2023.
- [168] E. Vetsch, S. T. Dawkins, R. Mitsch, D. Reitz, P. Schneeweiss, and A. Rauschenbeutel. Nanofiber-based optical trapping of cold neutral atoms. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 18(6):1763–1770, 2012.
- [169] J. A. Grover, P. Solano, L. A. Orozco, and S. L. Rolston. Photon-correlation measurements of atomic-cloud temperature using an optical nanofiber. *Phys. Rev. A*, 92:013850, Jul 2015.
- [170] A. Le-Kien, F. y Rauschenbeutel. Propagation of nanofiber-guided light through an array of atoms. *Phys. Rev. A*, 90:063816, 2014.
- [171] Mathias Michel, Jochen Gemmer, and Günter Mahler. Quantum heat transport: Perturbation theory in liouville space. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 29(1):129–135, 2005. *Frontiers of Quantum*.
- [172] Jeremy Moix, Eli Pollak, and Jiushu Shao. Generalized liouville time-dependent perturbation theory. *Phys. Rev. A*, 80:052103, Nov 2009.
- [173] Andy C. Y. Li, F. Petruccione, and Jens Koch. Perturbative approach to markovian open quantum systems. *Scientific Reports*, 4(1):4887, May 2014.
- [174] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics. Revised Edition*. Addison-Wesley, 1994.
- [175] B.C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduated Text in Mathematics. Springer, 2013.

- [176] C. R. Horn, R. A. y Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2012.
- [177] M. Arcari, I. Söllner, A. Javadi, S. Lindskov Hansen, S. Mahmoodian, J. Liu, H. Thyrrerstrup, E. H. Lee, J. D. Song, S. Stobbe, and P. Lodahl. Near-unity coupling efficiency of a quantum emitter to a photonic crystal waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 113:093603, Aug 2014.
- [178] D. Meiser and M. J. Holland. Steady-state superradiance with alkaline-earth-metal atoms. *Phys. Rev. A*, 81:033847, Mar 2010.
- [179] M.O. Scully and M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [180] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130:2529–2539, Jun 1963.
- [181] Armand Rundquist, Michal Bajcsy, Arka Majumdar, Tomas Sarmiento, Kevin Fischer, Konstantinos G. Lagoudakis, Sonia Buckley, Alexander Y. Piggott, and Jelena Vučković. Nonclassical higher-order photon correlations with a quantum dot strongly coupled to a photonic-crystal nanocavity. *Phys. Rev. A*, 90:023846, Aug 2014.
- [182] Darrick E. Chang, Anders S. Sørensen, Eugene A. Demler, and Mikhail D. Lukin. A single-photon transistor using nanoscale surface plasmons. *Nature Physics*, 3(11):807–812, Nov 2007.
- [183] A. V. Akimov, A. Mukherjee, C. L. Yu, D. E. Chang, A. S. Zibrov, P. R. Hemmer, H. Park, and M. D. Lukin. Generation of single optical plasmons in metallic nanowires coupled to quantum dots. *Nature*, 450(7168):402–406, Nov 2007.
- [184] D. E. Chang, J. I. Cirac, and H. J. Kimble. Self-organization of atoms along a nanophotonic waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 110:113606, Mar 2013.
- [185] B. Gouraud, D. Maxein, A. Nicolas, O. Morin, and J. Laurat. Demonstration of a memory for tightly guided light in an optical nanofiber. *Phys. Rev. Lett.*, 114:180503, May 2015.
- [186] Xiu Gu, Anton Frisk Kockum, Adam Miranowicz, Yu xi Liu, and Franco Nori. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 718-719:1–102, 2017. Microwave photonics with superconducting quantum circuits.
- [187] S. Yi, P.W. Nelson, and A.G. Ulsoy. *Time-delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. World Scientific, 2010.
- [188] Eckehard Schöll, Philipp Hövel, Valentin Flunkert, and Markus A. Dahlem. *Time-Delayed Feedback Control: From Simple Models to Lasers and Neural Systems*, pages 85–150. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [189] Xian-Ming Zhang and Qing-Long Han. Time-delay systems and their applications. *International Journal of Systems Science*, 53(12):2477–2479, 2022.
- [190] K. R. Rao and N. Ahmed. Recursive techniques for obtaining the partial fraction expansion of a rational function. *IEEE Transactions on Education*, 11(2):152–154, 1968.
- [191] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the lambertw function. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1):329–359, Dec 1996.
- [192] William L Barnes, Simon A R Horsley, and Willem L Vos. Classical antennas, quantum emitters, and densities of optical states. *Journal of Optics*, 22(7):073501, jun 2020.
- [193] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [194] Qing-Yang Qiu, Ying Wu, and Xin-You Lü. Collective radiance of giant atoms in non-markovian regime. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 66(2):224212, Jan 2023.
- [195] C. E. López, G. Romero, F. Lastra, E. Solano, and J. C. Retamal. Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems. *Phys. Rev. Lett.*, 101:080503, Aug 2008.

- [196] L. Mazzola, S. Maniscalco, J. Piilo, K.-A. Suominen, and B. M. Garraway. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. *Phys. Rev. A*, 79:042302, Apr 2009.
- [197] Z. Ficek and R. Tanaś. Entanglement induced by spontaneous emission in spatially extended two-atom systems. *Journal of Modern Optics*, 50(18):2765–2779, 2003.
- [198] R. Tanaś and Z. Ficek. Entangling two atoms via spontaneous emission. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 6(3):S90, mar 2004.
- [199] Z. Ficek and R. Tanaś. Spontaneously induced sudden birth of entanglement. In *Quantum-Atom Optics Downunder*, page QME11. Optica Publishing Group, 2007.
- [200] Zbigniew Ficek and Ryszard Tanaś. Delayed sudden birth of entanglement. *Phys. Rev. A*, 77:054301, May 2008.
- [201] Maryam Ashrafi and M.H. Naderi. Entanglement sudden birth and sudden death in a system of two distant atoms coupled via an optical element. *Journal of Modern Optics*, 60(4):331–341, 2013.
- [202] Huaixiu Zheng, Daniel J. Gauthier, and Harold U. Baranger. Waveguide-qed-based photonic quantum computation. *Phys. Rev. Lett.*, 111:090502, Aug 2013.
- [203] A. Javadi, I. Söllner, M. Arcari, S. Lindskov Hansen, L. Midolo, S. Mahmoodian, G. Kiršanskė, T. Pregnolato, E. H. Lee, J. D. Song, S. Stobbe, and P. Lodahl. Single-photon non-linear optics with a quantum dot in a waveguide. *Nature Communications*, 6(1):8655, Oct 2015.
- [204] Zhaohua Tian, Pu Zhang, and Xue-Wen Chen. Static hybrid quantum nodes: Toward perfect state transfer on a photonic chip. *Phys. Rev. Appl.*, 15:054043, May 2021.
- [205] Wei-Bin Yan, Bao Liu, Ling Zhou, and Heng Fan. All-optical router at single-photon level by interference. *Europhysics Letters*, 111(6):64005, oct 2015.
- [206] R. J. Coles, D. M. Price, J. E. Dixon, B. Royall, E. Clarke, P. Kok, M. S. Skolnick, A. M. Fox, and M. N. Makhonin. Chirality of nanophotonic waveguide with embedded quantum emitter for unidirectional spin transfer. *Nature Communications*, 7(1):11183, Mar 2016.
- [207] H.-S. Chang, Y. P. Zhong, A. Bienfait, M.-H. Chou, C. R. Conner, É. Dumur, J. Grebel, G. A. Peairs, R. G. Povey, K. J. Satzinger, and A. N. Cleland. Remote entanglement via adiabatic passage using a tunably dissipative quantum communication system. *Phys. Rev. Lett.*, 124:240502, Jun 2020.
- [208] Youpeng Zhong, Hung-Shen Chang, Audrey Bienfait, Étienne Dumur, Ming-Han Chou, Christopher R. Conner, Joel Grebel, Rhys G. Povey, Haoxiong Yan, David I. Schuster, and Andrew N. Cleland. Deterministic multi-qubit entanglement in a quantum network. *Nature*, 590(7847):571–575, Feb 2021.
- [209] V Paulisch, H J Kimble, and A González-Tudela. Universal quantum computation in waveguide qed using decoherence free subspaces. *New Journal of Physics*, 18(4):043041, apr 2016.
- [210] Maximilian Zanner, Tuure Orell, Christian M. F. Schneider, Romain Albert, Stefan Oleschko, Mathieu L. Juan, Matti Silveri, and Gerhard Kirchmair. Coherent control of a multi-qubit dark state in waveguide quantum electrodynamics. *Nature Physics*, 18(5):538–543, May 2022.
- [211] A. Gonzalez-Tudela, D. Martin-Cano, E. Moreno, L. Martin-Moreno, C. Tejedor, and F. J. Garcia-Vidal. Entanglement of two qubits mediated by one-dimensional plasmonic waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 106:020501, Jan 2011.
- [212] Andreas Ask and Göran Johansson. Non-markovian steady states of a driven two-level system. *Phys. Rev. Lett.*, 128:083603, Feb 2022.
- [213] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009.
- [214] M. B. Plenio and P. L. Knight. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, 70:101–144, Jan 1998.
- [215] B. Kraus, H. P. Büchler, S. Diehl, A. Kantian, A. Micheli, and P. Zoller. Preparation of entangled states by quantum markov processes. *Phys. Rev. A*, 78:042307, Oct 2008.
- [216] Frank Verstraete, Michael M. Wolf, and J. Ignacio Cirac. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nature Physics*, 5(9):633–636, Sep 2009.

- [217] F. Tacchino, A. Auffèves, M. F. Santos, and D. Gerace. Steady state entanglement beyond thermal limits. *Phys. Rev. Lett.*, 120:063604, Feb 2018.
- [218] T. Gruner and D.-G. Welsch. Green-function approach to the radiation-field quantization for homogeneous and inhomogeneous kramers-kronig dielectrics. *Phys. Rev. A*, 53:1818–1829, Mar 1996.
- [219] Ho Trung Dung, Ludwig Knöll, and Dirk-Gunnar Welsch. Resonant dipole-dipole interaction in the presence of dispersing and absorbing surroundings. *Phys. Rev. A*, 66:063810, Dec 2002.
- [220] Navin A. R. Bhat and J. E. Sipe. Hamiltonian treatment of the electromagnetic field in dispersive and absorptive structured media. *Phys. Rev. A*, 73:063808, Jun 2006.
- [221] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Clarendon Press, Oxford, second edition, 1983.
- [222] Henri Cohen. Lambert w -function branch identities. *arXiv:2012.11698*, 2020.