



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CTLNs DEFINIDOS POR TORNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CARLOS JOAQUÍN CASTAÑEDA CASTRO

TUTOR

DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A todos los que han sido mi inspiración
y mi apoyo a lo largo de esta travesía,
especialmente a mi familia.*

Índice general

1. Sobre la combinatoria de los torneos	4
1.1. Teoremas de combinatoria	6
1.2. Sobre los torneos sin 3-subtorneos regulares	12
1.3. Secuencias de grados de entrada	15
2. Combinatorial Threshold Linear Networks (CTLNs)	20
2.1. Introducción a los CTLNs	20
2.2. Los TLNs como collage de sistemas lineales	22
2.3. Gráfica de regiones	24
2.3.1. Análisis cualitativo de la solución de equilibrio de un CTLN definido por un 3-ciclo (con los parámetros estándar)	25
2.3.2. El ciclo límite como un hexágono	47
3. Predicción de secuencias de disparo a partir de la estructura gráfica	49
3.1. Algoritmo de predicción de secuencias (para una gráfica dirigida sin sumideros)	50
3.2. Gráfica de 3-ciclos	51
3.3. Ejemplos de deconstrucción de torneos	52
3.4. Propuesta de actualización al algoritmo de predicción de secuencias para torneos	87
4. Reglas gráficas y motivos corazón	94
4.1. Reglas gráficas	94
4.2. Ejemplos de aplicación de las reglas gráficas	96
4.3. Sobre los motivos corazón	99
4.3.1. Torneos impares	101
4.3.2. Unión cíclica	105
4.3.3. Torneos pares	107
5. Anexos	111
5.1. Secuencias de grados de entrada	111
5.2. 5-torneos	115
5.3. 6-torneos sin sumideros	117
5.4. Motivos corazón para $n = 7$	121
5.5. Rompiendo motivos corazón	123

Resumen

Dado un conjunto de vértices, podemos dibujar flechas entre ellos, estas flechas pueden ser unidireccionales, bidireccionales o incluso que entren y salgan del mismo vértice. El conjunto de vértices y flechas, a las que llamaremos aristas, forman una gráfica, y la denotaremos por la letra G . Nos enfocaremos en el estudio de una familia especial de gráficas, en donde todos los vértices están conectados por una única arista unidireccional, llamada torneos.

Primero, exploraremos sus propiedades. Por ejemplo, el número de aristas que recibe y envía un vértice específico, y la relación de estos números con la cantidad de ciclos que hay en G . Explicaremos como, en caso de ciclos de tres elementos, la cantidad de ellos está completamente determinado por el número de aristas que recibe cada uno de los vértices.

Si pensamos en los vértices del torneo G como neuronas, entonces las flechas entre ellas nos indican cómo es el flujo de información entre las neuronas. Estudiaremos este flujo de información usando el modelo CTLN [10] y aprovecharemos la teoría ya desarrollada para estudiar la dinámica de las redes inducidas por torneos, empezando con uno de los casos más sencillos: un 3-ciclo.

Los sistemas CTLN nos permiten hacer sorprendentes predicciones sobre la dinámica de las redes con solamente analizar la gráfica asociada al sistema. Por ejemplo, podemos saber si una neurona tiene actividad o no, encontrar los conjuntos de neuronas en donde se concentra la dinámica, llamados soportes, y también podemos predecir el orden en el que disparan las neuronas de la red. Pondremos a prueba los algoritmos existentes [9, 11] y propondremos mejoras para en análisis de torneos que podrían ser estudiadas para, posteriormente, ser incluidas en un algoritmo general.

Aprovechando que los CTLNs son sorprendentemente dóciles, se han desarrollado una serie de reglas gráficas [3] que permiten encontrar los soportes de G mediante un análisis gráfico. Cuando G tiene un único soporte y este está formado por todas las neuronas de G , diremos que es un motivo corazón. Este tipo de gráficas han sido esenciales para predecir en dónde se concentra la actividad de una red. Demostraremos que una familia especial de gráficas, los torneos cíclicamente simétricos, son motivos corazón. Finalizaremos explicando como, siguiendo unas reglas de pegado [4], podemos crear gráficas cuyo sistema CTLN asociado tenga una dinámica predefinida.

Capítulo 1

Sobre la combinatoria de los torneos

Introducción

La proposición y las definiciones en esta sección tienen como referencia a Govc, Levi, y Smith (2021) [6].

Únicamente consideraremos gráficas dirigidas finitas y simples. Por simple nos referimos a que no contienen lazos, es decir aristas de la forma (v, v) . Dichas gráficas pueden contener aristas recíprocas (v, w) y (w, v) pero no se permite más de una arista en la misma dirección.

Definición 1.1. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas dirigidas, definimos a un **morfismo** $f : G \rightarrow G'$ como un par de funciones (ϕ, ψ) , $\phi : V \rightarrow V'$ y $\psi : E \rightarrow E'$, tales que si $e = (v, w)$ es una arista dirigida en G , entonces $\psi(e) = (\phi(v), \phi(w))$ es una arista dirigida en G' .

Sea G cualquier gráfica dirigida, denotamos por \hat{G} a la gráfica formada por el mismo conjunto de vértices ignorando la orientación de las aristas, es decir $(v, v') = (v', v)$.

Definición 1.2. Dada una gráfica no dirigida $G = (V, E)$, un **clan o clique** es una subgráfica completa de G .

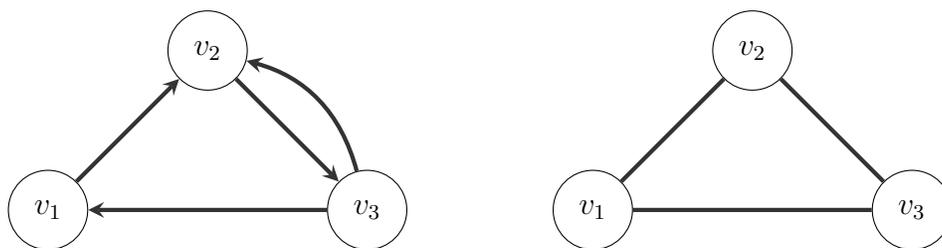


Figura 1.1: G (izquierda) y \hat{G} (derecha).

Definición 1.3. Para un entero no negativo n , un n -torneo es una gráfica dirigida sin aristas recíprocas cuya gráfica no dirigida subyacente es un n -clan.

Definición 1.4. Dada una gráfica dirigida $G = (V, E)$ y un vértice $v \in V$, definimos:

- El **grado de entrada de v respecto a G** , denotado por $e_G(v)$, como el número de aristas que llegan al vértice v en G .
- El **grado de salida de v respecto a G** , denotado por $s_G(v)$, como número de aristas que salen del vértice v en G .

Definición 1.5. Sea $G = (V, E)$ un n -torneo, decimos que G es:

- **Transitivo** si $\forall u, v, w \in V$, si $(u, v) \in E$ y $(v, w) \in E$ entonces $(u, w) \in E$.
- **Semi-regular** si por cada vértice $v \in V$ su grado de entrada y su grado de salida difieren a lo más por uno.
- **Regular** si para todo vértice $v \in V$, su grado de entrada es igual a su grado de salida.

Proposición 1.1. Dado un torneo G , si G es regular, entonces G tiene un número impar de vértices y, si existe un vértice $v \in V$ tal que $|e_G(v) - s_G(v)| = 1$, entonces G tiene un número par de vértices.

Demostración. Fijemos un vértice $v \in G$. Notemos que, como los torneos no tienen aristas recíprocas y hay una arista entre cada par de vértices, el número de vértices de G es igual a $e_G(v) + s_G(v) + 1$.

Así, si G es regular, para cualquier vértice v se cumple que $e_G(v) = s_G(v) = k$ para algún entero positivo k . De esta manera $e_G(v) + s_G(v) + 1 = 2k + 1$, que es impar.

Ahora, supongamos que existe un vértice tal que $|e_G(v) - s_G(v)| = 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_G(v) = e_G(v) + 1$.

Entonces, $e_G(v) + s_G(v) + 1 = e_G(v) + e_G(v) + 1 + 1$. Si $e_G(v) = k$ concluimos que el número de vértices en G es igual a $2k + 2$, un número par. \square

Definición 1.6. Sea G una gráfica dirigida. Para un vértice $v \in V$ y $U \subset V$, definimos:

- El **grado dirigido de v en G** como: $sd_G(v) = e_G(v) - s_G(v)$.
- El **grado dirigido de U respecto a G** como: $sd_G(U) = \sum_{v \in U} sd_G(v)$.
- La **direccionalidad de U respecto a G** como: $Dr_G(U) = \sum_{v \in U} sd_G(v)^2$.

Definición 1.7. Para cualquier n -torneo $\tau \subseteq G$, denotamos como V_τ al conjunto de vértices de τ y definimos:

- **La direccionalidad local** de τ como $\text{Dr}(\tau) = \text{Dr}_\tau(V_\tau)$.
- $c_3(\tau)$ como el número de 3-ciclos dirigidos en τ .
- **La direccionalidad global** de τ como $\text{Dr}_G(\tau) = \text{Dr}_G(V_\tau)$.

1.1. Teoremas de combinatoria

Dado un torneo G , las Proposiciones 1.2 y 1.3 nos indican cómo cambian $\text{Dr}(G)$ y $c_3(G)$ si se modifica el sentido de una sola arista. Ambas son originales de este trabajo y están disponibles en inglés [2].

Proposición 1.2. Sea $G = (V, E)$ un n -torneo con direccionalidad $\text{Dr}(G)$ y dos vértices $v, w \in V$ tales que cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{sd}_G(v) \geq \text{sd}_G(w)$.
- $e_G(v) - e_G(w) = k$.

Sea τ el torneo formado al cambiar el sentido de la arista entre los vértices v y w . Tenemos dos casos posibles.

- **Caso 1:** $(v, w) \in E$, entonces $\text{Dr}(\tau) = \text{Dr}(G) + 8(k + 1)$.
- **Caso 2:** $(w, v) \in E$, entonces $\text{Dr}(\tau) = \text{Dr}(G) - 8(k - 1)$.

Demostración. Primero veamos que si $e_G(v) - e_G(w) = k$, entonces $\text{sd}_G(v) - \text{sd}_G(w) = 2k$.

Para cualquier vértice $u \in V$ se cumple que $e_G(u) + s_G(u) = n - 1 = m$. De esta manera, $s_G(u) = m - e_G(u)$. Calculemos:

$$\begin{aligned} \text{sd}_G(v) - \text{sd}_G(w) &= [e_G(v) - s_G(v)] - [e_G(w) - s_G(w)] = e_G(v) - s_G(v) - e_G(w) + s_G(w) \\ &= e_G(v) - [m - e_G(v)] - e_G(w) + [m - e_G(w)] = e_G(v) - m + e_G(v) - e_G(w) + m - e_G(w) \\ &= 2e_G(v) - 2e_G(w) = 2[e_G(v) - e_G(w)] = 2k. \end{aligned}$$

Si hacemos $\text{sd}_G(v) = a$ y $\text{sd}_G(w) = b$, entonces $a - b = 2k$.

- **Caso 1:** Para formar τ cambiamos el sentido la arista (v, w) , modificando los grados dirigidos de v y de w , de manera que $\text{sd}_\tau(v) = a + 2$ y $\text{sd}_\tau(w) = b - 2$. Por lo tanto,

$$\text{Dr}(\tau) = \text{Dr}(G) - a^2 - b^2 + (a + 2)^2 + (b - 2)^2 = \text{Dr}(G) + 4(a - b) + 8$$

$$= \text{Dr}(G) + 4(2k) + 8 = \text{Dr}(G) + 8k + 8 = \text{Dr}(G) + 8(k + 1).$$

- **Caso 2:** Al cambiar de sentido la arista (w, v) solamente modificamos los grados dirigidos de w y de v , de manera que $\text{sd}_\tau(v) = a - 2$ y $\text{sd}_\tau(w) = b + 2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Dr}(\tau) &= \text{Dr}(G) - a^2 - b^2 + (a - 2)^2 + (b + 2)^2 = \text{Dr}(G) + 4(b - a) + 8 \\ &= \text{Dr}(G) + 4(-2k) + 8 = \text{Dr}(G) - 8k + 8 = \text{Dr}(G) - 8(k - 1). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3. Sean $G = (V, E)$ un torneo con direccionalidad $\text{Dr}(G)$ y dos vértices $v, w \in V$ tales que cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{sd}_G(v) \geq \text{sd}_G(w)$.
- $e_G(v) - e_G(w) = k$.

Sea τ el torneo formado al cambiar el sentido de la arista ente los vértices v y w . Tenemos dos casos posibles.

- **Caso 1:** $(v, w) \in E$, entonces $c_3(\tau) = c_3(G) - (k + 1)$.
- **Caso 2:** $(w, v) \in E$, entonces $c_3(\tau) = c_3(G) + (k - 1)$.

Demostración.

- **Caso 1:** Fijemos $v, w \in V$, si elegimos arbitrariamente un tercer vértice $u \in V$, entonces la tripleta $\{u, v, w\}$ pertenece a una de las siguientes tres categorías:
 - **Tipo 1:** El vértice u envía una arista a v y recibe de w , entonces $\{u, v, w\}$ regular y al cambiar el sentido de la arista (v, w) deja de ser regular.
 - **Tipo 2:** El vértice u envía una arista a w y recibe de v , entonces $\{u, v, w\}$ no es regular y al cambiar el sentido de la arista (v, w) se vuelve regular.
 - **Tipo 3:** El vértice u envía aristas a v y a w , entonces $\{u, v, w\}$ no es regular y sigue sin ser regular después de cambiar el sentido de la arista (v, w) .

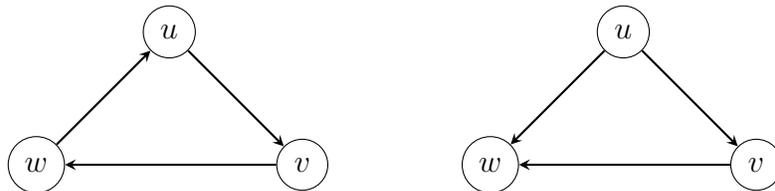


Figura 1.2: 3-ciclos del Tipo 1 (izquierda) y del Tipo 3 (derecha) en G .

Dada una tripleta $\{u, v, w\}$, si dos de las aristas que lo forman son (u, v) y (v, w) , entonces el 3-subtorneo correspondiente es del Tipo 1 (si $(w, u) \in E$) o del Tipo 3 (si $(u, w) \in E$). Por lo que el número máximo de 3-ciclos que pueden ser destruidos al cambiar el sentido de la arista (v, w) , es decir, el número máximo de tripletas del Tipo 1, es igual a $e_\tau(v) - 1$, pero por lo general no podemos decir con exactitud cuántas de las tripletas dejan de ser regulares y cuántas no.

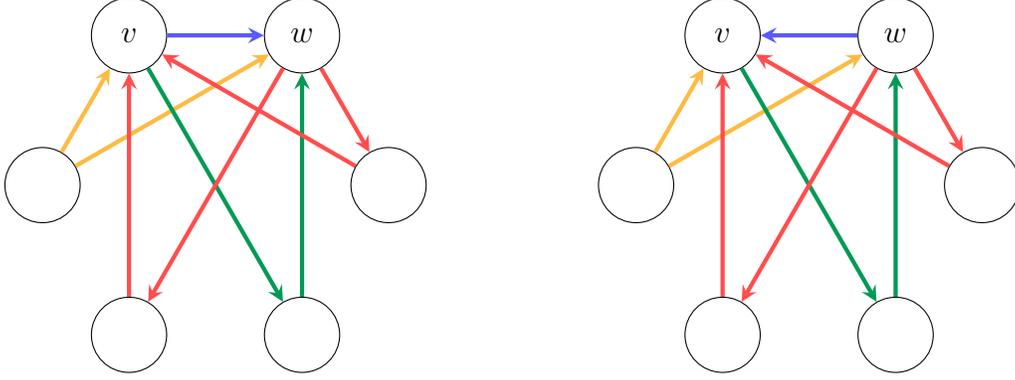


Figura 1.3: Ejemplo del Caso 1: Torneo original G (izquierda) y el nuevo torneo τ (derecha). Las tripletas del Tipo 1 están representadas en color rojo, las tripletas del Tipo 2 en verde y las tripletas del Tipo 3 en amarillo.

Ahora, las tripletas $\{u, v, w\}$ del Tipo 2 son aquellos formados por las aristas (u, w) y (v, w) . De nuevo, no podemos decir exactamente cuántos se vuelven regulares y cuántos siguen sin ser regulares, pero el número máximo de 3-subtorneos que pueden volverse regulares es igual a $e_\tau(w)$. Lo que si podemos decir es que los 3-subtorneos que siguen sin ser regulares son exactamente aquellos que contienen la arista (u, v) es decir, las tripletas de Tipo 3.

De esta manera, $c_3(G) - c_3(\tau) = [e_\tau(v) - 1] - e_\tau(w)$, en donde $e_\tau(v) - 1$ es el número de 3-ciclos potencialmente destruidos (Tipo 1 o Tipo 3) y $e_\tau(w)$ es el número máximo de tripletas que pueden volverse regulares (Tipo 2 o Tipo 3).

Notemos que $e_\tau(w) = e_G(w) - 1$ y $e_\tau(v) = e_G(v) + 1$. Calculando:

$$\begin{aligned} [e_\tau(v) - 1] - e_\tau(w) &= e_\tau(v) - e_\tau(w) - 1 = e_G(v) + 1 - [e_G(w) - 1] - 1 \\ &= e_G(v) + 1 - e_G(w) + 1 - 1 = e_G(v) - e_G(w) + 1. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $e_G(v) - e_G(w) = k$ y así $[e_\tau(v) - 1] - e_\tau(w) = k + 1$

Entonces, $c_3(G) - c_3(\tau) = k + 1$ es decir, al cambiar el sentido de la arista (v, w) se destruyen $(k + 1)$ 3-ciclos.

Por lo tanto, $c_3(\tau) = c_3(G) - (k + 1)$.

- **Caso 2:** La demostración es muy similar a la del caso anterior, ahora la cantidad

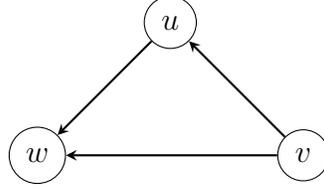


Figura 1.4: 3-ciclos del Tipo 2 en G.

$e_\tau(w) - 1$ denota el número máximo de 3-ciclos que pueden dejar de ser regulares (Tipo 1 o Tipo 3) y el número máximo de 3-subtorneos que se pueden volver regulares es igual a $e_\tau(v)$ (Tipo 2 o Tipo 3).

De nuevo, al hacer la resta $e_\tau(v) - [e_\tau(w) - 1]$ estamos considerando tripletas $\{u, v, w\}$ que no eran regulares y que después del cambio siguen sin ser regulares (Tipo 3) en ambas partes. De esta manera, $e_\tau(v) - e_\tau(w) + 1 = c_3(\tau) - c_3(G)$.

Notemos que $e_\tau(w) = e_G(w) + 1$ y $e_\tau(v) = e_G(v) - 1$. Calculando:

$$\begin{aligned} e_\tau(v) - e_\tau(w) + 1 &= [e_G(v) - 1] - [e_G(w) + 1] + 1 = e_G(v) - 1 - e_G(w) - 1 + 1 \\ &= e_G(v) - e_G(w) - 1. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $e_G(v) - e_G(w) = k$ y así $c_3(\tau) - c_3(G) = k - 1$.

Por lo tanto, al cambiar el sentido de la arista (w, v) se crean $(k - 1)$ 3-ciclos es decir, $c_3(\tau) = c_3(G) + (k - 1)$.

□

Govc, Levi, y Smith (2021) presentan el siguiente teorema sin embargo, la demostración es original.

Teorema 1.1. [6] Sea $G = (V, E)$ un n -torneo, entonces $\text{Dr}(G) = 2 \binom{n+1}{3} - 8 c_3(G)$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n .

Para $n = 3$, $2 \binom{n+1}{3} = 8$ además, un 3-torneo puede ser regular o transitivo. Si es regular, entonces cada uno de los vértices tiene grado dirigido igual a cero y así $\text{Dr}(G) = 0$. Si G es transitivo, entonces los grados dirigidos de sus vértices son 2, -2, y 0, por lo tanto $\text{Dr}(G) = 2^2 + (-2)^2 + 0 = 8$.

Supongamos que el teorema es válido para n y probemos que es válido para $n + 1$.

Caso Particular: Sea G un n -torneo. Agreguemos un nuevo vértice v y formaremos un $(n + 1)$ -torneo τ en donde, para toda $u \in V_G$, todas las nuevas aristas son de la forma (v, u) o todas las nuevas aristas son de la forma (u, v) es decir, todas las nuevas aristas salen de v

o entran a v . Demostraremos que se cumple el teorema para τ , para ello hay que probar la siguiente igualdad:

$$\text{Dr}(\tau) = \sum_{u \in \tau} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 = 2 \binom{n+2}{3} - 8c_3(\tau).$$

Observemos que $c_3(\tau) = c_3(G)$, pues cualquier 3-torneo que contenga al vértice v es transitivo, ya que está formado por dos aristas que salen o entran a v .

De esta manera, si el teorema es cierto, entonces $\text{Dr}(\tau) - \text{Dr}(G) = 2 \binom{n+2}{3} - 2 \binom{n+1}{3}$, dado que τ y G tienen el mismo número de 3-ciclos.

Notemos que $\binom{n+2}{3}$ es el número total de 3-subtorneos que hay en un $(n+2)$ -torneo χ y $\binom{n+1}{3}$ es el número total de 3-subtorneos que hay en $\psi = \chi \setminus \{w\}$ donde w es cualquiera de sus vértices. De esta manera $\left[\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{3} \right]$ es igual al número de 3-subtorneos de χ que no están en ψ , estos son tales que tienen dos aristas en el vértice w y la tercer arista es una arista en ψ . Por lo tanto, en $\chi \setminus \psi$ hay el mismo número de 3-subtorneos que de aristas en ψ . En ψ hay un total de $\binom{n+1}{2}$ aristas. Así,

$$2 \binom{n+2}{3} - 2 \binom{n+1}{3} = 2 \left[\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{3} \right] = 2 \left[\binom{n+1}{2} \right] = \frac{2(n+1)(n)}{2} = n^2 + n.$$

Por otro lado, $\text{Dr}(\tau) - \text{Dr}(G) = \sum_{u \in \tau} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 - \sum_{u \in G} [e_G(u) - s_G(u)]^2$. Además, $\text{Dr}(\tau) = \sum_{u \in G} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 + [e_\tau(v) - s_\tau(v)]^2$.

Si todas las aristas de $\tau \setminus G$ salen de v , entonces $e_\tau(v) = 0$ y $s_\tau(v) = n$. En el caso en donde todas entran a v , $e_\tau(v) = n$ y $s_\tau(v) = 0$. De cualquier manera, $[e_\tau(v) - s_\tau(v)]^2 = n^2$.

Así, $\text{Dr}(\tau) - \text{Dr}(G) = \sum_{u \in G} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 + n^2 - \sum_{u \in G} [e_G(u) - s_G(u)]^2$ por lo que, para demostrar que el teorema se cumple, basta con demostrar que:

$$\sum_{u \in G} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 - \sum_{u \in G} [e_G(u) - s_G(u)]^2 = \sum_{u \in G} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 - [e_G(u) - s_G(u)]^2 = n.$$

Calculemos los grados de entrada de los vértices de τ . Si las aristas en $\tau \setminus G$ salen de v entonces, para cualquier $u \in V$, $s_\tau(u) = s_G(u)$ y $e_\tau(u) = e_G(u) + 1$. Para el caso en donde las aristas en $\tau \setminus G$ entran a v entonces, $s_\tau(u) = s_G(u) + 1$ y $e_\tau(u) = e_G(u)$. En cualquiera de los casos, sustituyendo estos valores en la suma obtenemos:

$$\sum_{u \in G} [e_\tau(u) - s_\tau(u)]^2 - [e_G(u) - s_G(u)]^2 = \sum_{u \in G} [1 + (e_G(u) - s_G(u))]^2 - [e_G(u) - s_G(u)]^2.$$

Desarrollando el primer sumando

$$= \sum_{u \in G} 1 + 2[e_G(u) - s_G(u)] + [e_G(u) - s_G(u)]^2 - [e_G(u) - s_G(u)]^2$$

$$= \sum_{u \in G} 1 + 2[e_G(u) - s_G(u)] = n + 2\left(\sum_{u \in G} e_G(u) - \sum_{u \in G} s_G(u)\right).$$

Por último $\sum_{u \in G} e_G(u) - \sum_{u \in G} s_G(u) = 0$, pues cada arista que sale de algún vértice entra en algún otro.

$$\text{Así, } \sum_{u \in G} 1 + 2[e_G(u) - s_G(u)] = n + 2(0) = n.$$

Por lo tanto, el teorema es válido para este caso particular.

Caso general: Para este caso, digamos que el torneo τ tiene m aristas que entran al vértice nuevo v , entonces podemos construir el torneo τ_0 en donde todas las aristas nuevas salen de v e ir cambiando, una a una, el sentido de las aristas adecuadas. En cada paso formaremos el torneo τ_i y, con ayuda de las Proposiciones 1.2 y 1.3 tendremos que:

$$\text{Dr}(\tau_i) = \text{Dr}(\tau_{i-1}) - 8c_3(\tau_i \setminus \tau_{i-1}).$$

En donde $c_3(\tau_i \setminus \tau_{i-1}) = c_3(\tau_i) - c_3(\tau_{i-1})$, pues es el número de 3-ciclos que se forman o destruyen al cambiar el sentido de la arista i . Después de cambiar el sentido de todas las aristas y como τ_0 es nuestro caso particular obtenemos:

$$\text{Dr}(\tau) = 2\binom{n+2}{3} - 8c_3(\tau_0) - 8c_3(\tau \setminus \tau_0) = 2\binom{n+2}{3} - 8c_3(\tau_0) - 8[c_3(\tau) - c_3(\tau_0)].$$

Por lo tanto:

$$\text{Dr}(\tau) = 2\binom{n+2}{3} - 8c_3(\tau).$$

□

Observación 1.1. *A partir de $n = 4$ no es posible formar un n -torneo en donde todos sus 3-subtorneos sean regulares, así que el número total de 3-ciclos dentro de un n -torneo debe de estar acotado. El siguiente teorema nos da una cota superior para $c_3(G)$.*

Teorema 1.2. [6] [7] *Sea $G = (V, E)$ un n -torneo, entonces:*

$$c_3(G) \leq \begin{cases} \frac{n^3 - 4n}{24} & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{n^3 - n}{24} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Observemos que:

$$2\binom{n+1}{3} = \frac{2(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{2(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3} = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Si n es impar podemos construir un n -torneo regular, en el que para todo vértice $v \in V$, $\text{sd}_G(v) = 0$, por lo que $\text{Dr}(G) = 0$. Los torneos cíclicamente simétricos presentados en la Sección 4 son ejemplos de torneos regulares.

Si $c_3(G) = k$, podemos usar el teorema anterior para obtener la ecuación $2\binom{n+1}{3} - 8k = 0$. Despejando k obtenemos:

$$k = 2\binom{n+1}{3} \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{n^3 - n}{3}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{n^3 - n}{24}.$$

Por otro lado, si n es par podemos tomar un $(n-1)$ -torneo regular, agregar un vértice y dibujar las aristas de una manera, que de hecho es única, tal que para todo vértice $v \in V$, $\text{sd}_G(v) = \pm 1$, por lo que $\text{Dr}(G) = n$. Este n -torneo es semi-regular.

Nuevamente, asignamos $c_3(G) = k$ y usamos el teorema anterior para obtener la ecuación $2\binom{n+1}{3} - 8k = n$. De donde fácilmente podemos despejar el valor de k .

$$k = \left(2\binom{n+1}{3} - n\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{n^3 - n}{3} - \frac{3n}{3}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{n^3 - 4n}{24}.$$

□

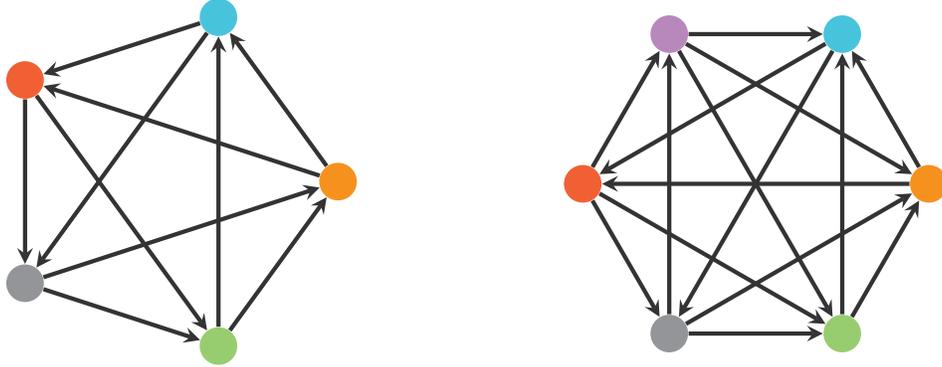


Figura 1.5: 5-torneo regular (izquierda) y 6-torneo semi-regular (derecha).

1.2. Sobre los torneos sin 3-subtorneos regulares

Construcción de un n -torneo sin 3-ciclos

1. Toma un conjunto ordenado de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

2. Toma el vértice v_1 y traza aristas que salgan de él hacia todos los demás vértices, de esta manera $sd_G(v_1) = -(n-1)$.
3. Recursivamente, para cada i traza la arista (v_i, v_j) hacia los vértices v_j tales que $j < i$.

Así, para cada vértice v_i , $e(v_i) = i-1$, $s(v_i) = n-i$ y $sd_G(v_i) = 2i-n-1$. De esta manera los grados dirigidos de los vértices serán:

- $(n-1)$, $-(n-3)$, $-(n-5)$, ..., -1 , 1 , ..., $n-5$, $n-3$, $n-1$ si G es un torneo par y
- $(n-1)$, $-(n-3)$, $-(n-5)$, ..., 0 , ..., $n-5$, $n-3$, $n-1$ si G es un torneo impar.

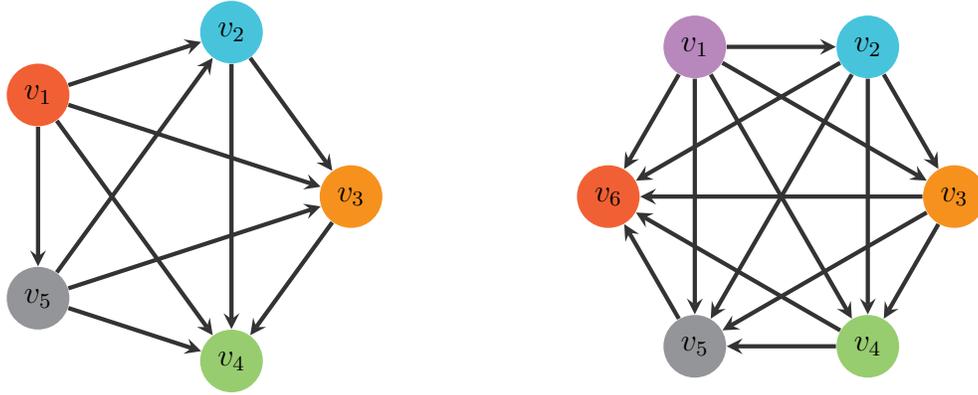


Figura 1.6: 5-torneo (izquierda) y 6-torneo (derecha) sin 3-ciclos.

Definición 1.8. [3] Dada una gráfica $G = (V, E)$. Diremos que un vértice $v \in V$ es una **fuerza** si $e_G(v) = 0$. A una fuerza la llamaremos **fuerza propia** si $s_G(v) > 0$.

Definición 1.9. Dada una gráfica $G = (V, E)$. Diremos que un vértice $v \in V$ es un **sumidero** si $s_G(v) = 0$.

En el caso de los torneos, toda fuerza es fuerza propia y podemos tener a lo más un sumidero y una fuerza.

Proposición 1.4. En un n -torneo G construido siguiendo el método anterior, ninguno de sus 3-subtorneos es regular.

Demostración. La construcción de $G = G_0$ viene con una numeración de sus vértices. Notemos que v_1 es fuerza en G_0 , por lo que ningún 3-subtorneo que contenga a v_1 es regular. Ahora, fijémonos en el subtorneo $G_1 = G \setminus \{v_1\}$, por construcción, v_2 es sumidero en G_1 , por lo que todos los 3-subtorneos que contienen a v_2 son transitivos.

Podemos continuar removiendo vértices de manera recursiva. En general, si i es par, v_i es un sumidero en G_{i-1} y, si i es impar, v_i es una fuerza en G_{i+1} . En cada paso podemos concluir que todos los 3-subtorneos que incluyen al vértice v_i son transitivos.

Por lo tanto, ninguno de los 3-subtorneos de G es regular es decir, G no contiene 3-ciclos. \square

Definición 1.10. Decimos que una gráfica dirigida G es una **gráfica acíclica dirigida** si no contiene ningún ciclo dirigido.

Proposición 1.5. Sea $G = (V, E)$ un torneo tal que $c_3(G) = 0$, entonces G es una gráfica acíclica dirigida.

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que G es un torneo sin 3-ciclos que contiene un ciclo \mathcal{C} . Llamaremos $V_{\mathcal{C}}$ al subconjunto de vértices que forman parte de \mathcal{C} . Supondremos que $|V_{\mathcal{C}}| = n \geq 4$ y enumeremos a los vértices de $V_{\mathcal{C}}$ siguiendo su orden de aparición en \mathcal{C} .

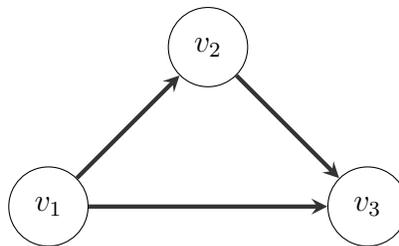


Figura 1.7: Ciclo $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Como G no tiene 3-ciclos, $G|_{V_{\mathcal{C}}}$ tampoco los tiene. Las aristas (v_1, v_2) y (v_2, v_3) son parte de \mathcal{C} , por lo que la arista $(v_1, v_3) \in E$, pues de no ser así, $\{v_1, v_2, v_3\}$ sería un 3-ciclo.

Ahora, fijémonos en el subciclo $\{v_1, v_3, v_4, \dots, v_n\}$. Podemos aplicar el mismo argumento para deducir que la arista $(v_1, v_4) \in E$. Podemos continuar con este argumento recursivamente para concluir que la arista $(v_1, v_i) \in E$ para toda $i \in \{2, \dots, (n - 2)\}$. De esta manera obtenemos un 4-ciclo formado por los vértices $\{v_1, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$.

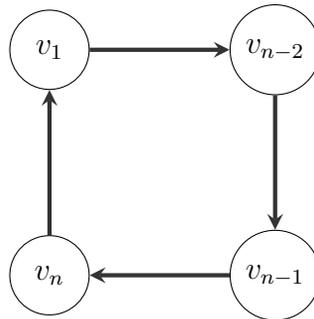


Figura 1.8: Ciclo $\{v_1, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$.

Como G es un torneo, debe de existir una arista entre cada par de vértices. Así, debe de existir una arista entre v_1 y v_{n-1} . Sin embargo, sin importar qué sentido tenga dicha arista, se formará un 3-ciclo. Esto es una contradicción.

Por lo tanto no existen ciclos en G es decir, G es una gráfica acíclica dirigida. \square

1.3. Secuencias de grados de entrada

A cualquier torneo $G = (V, E)$ se le puede asignar una matriz de ceros y unos, en donde la entrada $(ij) = 1$ si la arista $(j, i) \in E$ y la entrada $(ij) = 0$ si no existe dicha arista, a tal matriz la llamaremos **matriz de adyacencia asociada a G** . Ahora, a cada matriz le podemos asignar una n -ada de enteros, en donde la i -ésima entrada representa el grado de entrada del i -ésimo vértice, esto lo podemos lograr sumando las entradas de la matriz de adyacencia renglón por renglón.

Nota: En Teoría de Gráficas la matriz de adyacencia es la transpuesta de la que estamos definiendo aquí. Debido a la relación con la matriz de pesos del sistema CTLN que se definirá en el capítulo siguiente, trabajaremos con la matriz transpuesta en lugar de la matriz de adyacencia tradicional.

Como punto de partida se construyeron todos los 3-torneos distintos que existen si tomamos en cuenta la numeración de los vértices, dicha numeración se hizo en el sentido de las manecillas del reloj.

Para un entero n , $m = \sum_{i=1}^{n-1} i$, es el número de aristas en un n -torneo. Observamos que cada secuencia de grados de entrada es una partición de m . Sin embargo, hay particiones de m a las cuales no les corresponde ningún torneo, por ejemplo la secuencia $[0, 0, 3]$.

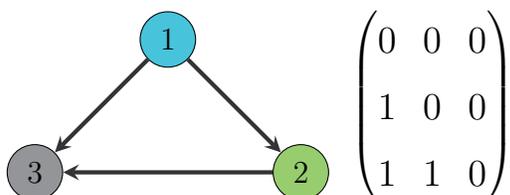


Figura 1.10: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[0, 1, 2]$.

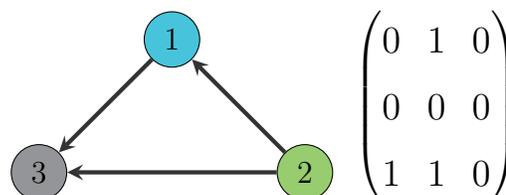


Figura 1.11: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[1, 0, 2]$.

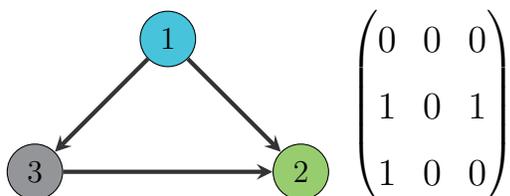


Figura 1.12: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[0, 2, 1]$.

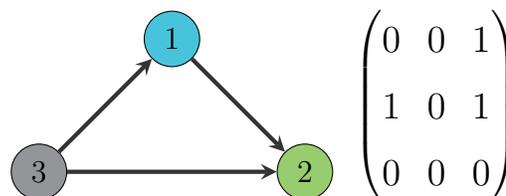


Figura 1.13: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[1, 2, 0]$.

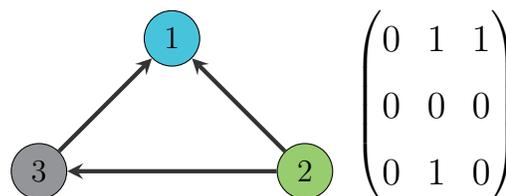
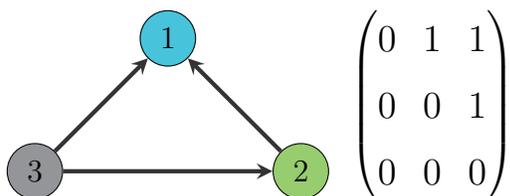


Figura 1.14: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[2, 1, 0]$.

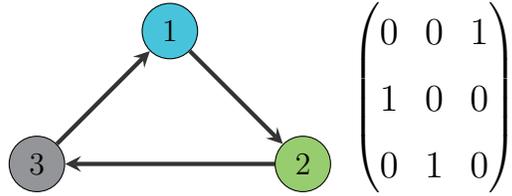


Figura 1.16: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[1, 1, 1]$.

Figura 1.15: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[2, 1, 0]$.

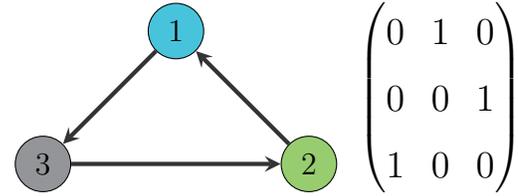


Figura 1.17: 3-torneo con secuencia de grados de entrada $[1, 1, 1]$.

Dado un n -torneo podemos formar las secuencias válidas de grados de entrada siguiendo el proceso descrito en Alway (1962) [1]. En el artículo se explica un algoritmo recursivo que toma cada una de las secuencias válidas para los $(n - 1)$ -torneos y suma, entrada a entrada, las siguientes n -adas de enteros. La entrada n simplemente se agrega al final de la secuencia.

$$\begin{aligned} & [0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, n - 1] \\ & [0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, n - 2] \\ & [0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, n - 2] \\ & \vdots \\ & [1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, n - 2] \\ & [0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, n - 3] \\ & [0, 0, 0, \dots, 1, 1, 0, n - 3] \\ & \vdots \\ & [1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0, n - 3] \end{aligned}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a la secuencia

$$[1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 0].$$

Si no tomamos en cuenta la numeración de los vértices es decir, si nos fijamos solamente en los torneos no isomorfos, para $n = 3$ tenemos dos secuencias válidas: $[0, 1, 2]$ y $[1, 1, 1]$. Procederemos a mostrar el algoritmo calculando las secuencias válidas para $n = 4$.

Las n -adas de enteros que vamos a sumar son las siguientes:

$$[0, 0, 0, 3], [0, 0, 1, 2], [0, 1, 0, 2], [1, 0, 0, 2], [0, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], \text{ y } [1, 1, 1, 0].$$

A continuación tenemos que sumar entrada a entrada cada una de las secuencias válidas para los 3-torneos con cada una de las n -adas, en donde la cuarta entrada simplemente se añade como la última entrada de la nueva secuencia. Se resume este proceso en la siguiente tabla.

	$[0,1,2]$	$[1,1,1]$
$[0,0,0,3]$	$[0,1,2,3]$	$[1,1,1,3]$
$[0,0,1,2]$	$[1,1,2,2]$	$[1,1,2,2]$
$[0,1,0,2]$	$[0,2,2,2]$	$[1,2,1,2]$
$[1,0,0,2]$	$[0,1,3,2]$	$[2,1,1,2]$
$[0,1,1,1]$	$[1,2,2,1]$	$[1,2,2,1]$
$[1,1,0,1]$	$[0,2,3,1]$	$[2,2,1,1]$
$[1,0,1,1]$	$[1,1,3,1]$	$[2,1,2,1]$
$[1,1,1,0]$	$[1,2,3,0]$	$[2,2,2,0]$

Cuadro 1.2: Cálculo de las secuencias de grados de entrada válidas para $n = 4$.

Si no tomamos en cuenta la numeración de los vértices, podemos eliminar listas de grados de entrada repetidos, obteniendo una lista de cuatro secuencias de grados de entrada válidas:

$$[0, 1, 2, 3], [0, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], \text{ y } [1, 1, 2, 2].$$

Además, como solamente existen cuatro 4–torneos no isomorfos, las secuencias que tienen los mismos elementos corresponden a torneos isomorfos. Esto no es cierto para $n \geq 5$.

Dado un torneo G , $Dr(G)$ depende únicamente de los valores en la secuencia de grados de entrada, así el Teorema 1.1 nos permite calcular $c_3(G)$ fácilmente. Esto es una propiedad especial que observamos en los torneos.

Las siguientes tablas muestran las secuencias válidas para torneos de hasta cinco vértices. Para cada secuencia se presenta la direccionalidad y el número total de 3-ciclos que tendría un torneo asociado a dicha secuencia. En el Anexo 5.1 se encuentra el código desarrollado para calcularlas junto con las secuencias válidas para $n = 6$ y $n = 7$.

3 vértices					
Secuencia	$Dr(G)$	$c_3(G)$	Secuencia	$Dr(G)$	$c_3(G)$
$[0, 1, 2]$	0	6	$[1, 1, 1]$	8	1

4 vértices					
Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$	Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$
[0, 1, 2, 3]	20	0	[1, 1, 1, 3]	12	1
[0, 2, 2, 2]	12	1	[1, 1, 2, 2]	4	2

5 vértices					
Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$	Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$
[0, 1, 2, 3, 4]	40	0	[1, 1, 2, 2, 4]	24	2
[0, 1, 3, 3, 3]	32	1	[1, 1, 2, 3, 3]	16	3
[0, 2, 2, 2, 4]	32	1	[1, 2, 2, 2, 3]	8	4
[0, 2, 2, 3, 3]	24	2	[2, 2, 2, 2, 2]	0	5
[1, 1, 1, 3, 4]	32	1			

n	Número total de secuencias válidas	Número de torneos no isomorfos	Número de torneos no isomorfos sin sumideros
3	2	2	1
4	4	4	2
5	9	12	8
6	22	56	44
7	59	456	400
8	167	6,880	6,424
9	490	191,536	184,656
10	1,486	9,733,056	9,541,520
11	4,639	903,753,248	894,020,192
12	14,805	+1,000,000,000	+1,000,000,000

Logramos obtener las secuencias válidas para torneos con hasta doce vértices. A continuación se presenta una tabla que indica el número total de secuencias válidas distintas para n -torneos con $n \leq 12$.

Para $n \leq 11$ también se presenta el número total de torneos no isomorfos y el número total de torneos no isomorfos sin sumideros. Esto último fue posible gracias a un código elaborado por las doctoras Caitlyn Parmelee y Sarah Behrens. Además de aportar esta información, dicho código fue esencial para analizar las gráficas presentadas en los Anexos de este trabajo.

Capítulo 2

Combinatorial Threshold Linear Networks (CTLNs)

2.1. Introducción a los CTLNs

Una red neuronal recurrente está dada por una gráfica G junto a una descripción de la dinámica en sus vértices, que representan neuronas. Estas redes son estudiadas en diferentes contextos, entre los que se encuentran la neurociencia, ecología, y economía.

Un *threshold-linear network* (TLN) es modelo formado por n vértices cuya dinámica está gobernada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + b_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

Las variables $x_i(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ representan la actividad (tasa de disparo) de la neurona i . Los valores W_{ij} son entradas de una matriz real W de dimensiones $n \times n$ y representan las conexiones entre cada par de vértices. El vector $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es un impulso externo hacia cada uno de los vértices.

Particularmente, estamos interesados en los TLNs *competitivos* es decir, aquellos donde $W_{ij} \leq 0$, $W_{ii} = 0$ y $b_i \geq 0$ para toda $i, j = 1, \dots, n$. Esto permite que la interacción entre cada par de vértices sea inhibitoria.

La función de umbral lineal, también conocida como ReLU, $[y]_+ := \max\{y, 0\}$ nos permite tener comportamientos complejos no lineales tales como multiestabilidad, ciclos límites, quasiperiodicidad e incluso caos. Sin esta función, el sistema sería lineal.

El modelo CTLN fue introducido por primera vez en [10] y modela una red de neuronas

excitatorias rodeadas de una atmósfera global inhibitoria. Los CTLNs son un caso especial de TLNs en donde la matriz W solamente admite dos valores:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ -1 + \epsilon, & \text{si } j \rightarrow i \in E(G) \\ -1 - \delta, & \text{si } j \not\rightarrow i \in E(G) \end{cases} \quad (2.2)$$

Se considera que el impulso externo $b_i = \theta$ es constante. Un CTLN está completamente dado por una gráfica dirigida G y tres parámetros: ϵ , δ , y θ . Además, se requiere que $\delta > 0$ y $0 < \epsilon < \frac{\delta}{\delta + 1}$; cuando estas condiciones se cumplen, decimos que los parámetros están dentro del rango legal [9]. La cota superior de ϵ implica que $\epsilon < 1$, y así se garantiza que la matriz W es inhibitoria. Los parámetros estándar son $\epsilon = 0,25$, $\delta = 0,5$, y $\theta = 1$.

Cuando $j \not\rightarrow i$ decimos que j inhibe fuertemente a i ; si $j \rightarrow i$, decimos que j inhibe débilmente a i . Estas diferencias en la fuerza de inhibición provocan que la actividad tienda a seguir las flechas de la gráfica [12].

Definición 2.1. [3] *Un punto fijo x^* de la red es un punto en el espacio fase que satisface $\frac{dx_i}{dt} \Big|_{x=x^*} = 0$ para cada neurona $i \in [n]$, en donde $[n] = \{1, \dots, n\}$. En otras palabras,*

$$x_i^* = \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j^* + b_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

El **soporte** de un punto fijo es el subconjunto de neuronas activas,

$$\text{supp}(x^*) = \{i \in [n] \mid x_i^* > 0\}.$$

Definición 2.2. [9] *Dada una gráfica G , denotamos por $\text{FP}(G)$ a la **colección de soportes** de puntos fijos (estables o inestables), es decir:*

$$\text{FP}(G) = \text{FP}(G, \epsilon, \delta) = \{\sigma \subseteq [n] \mid \sigma \text{ es soporte de un punto fijo del CTLN } W(G, \epsilon, \delta)\}.$$

Un punto fijo x^* de un CTLN con gráfica G es también un punto fijo de cualquier subgráfica que contenga su soporte. Dado $\sigma \subset [n]$, $G|_\sigma$ es la subgráfica obtenida al restringir G a los vértices de σ , esta gráfica solamente mantiene las aristas $i \rightarrow j$ para $i, j \in \sigma$. En particular, si $\sigma \in \text{FP}(G)$, entonces $\sigma \in \text{FP}(G|_\sigma)$. Sin embargo, la implicación inversa no es cierta, pues puede existir un soporte $\sigma \in \text{FP}(G|_\sigma)$ cuyo punto fijo no sobreviva en la gráfica completa, es decir $\sigma \notin \text{FP}(G)$.

2.2. Los TLNs como collage de sistemas lineales

La ecuación (2.1) puede ser escrita de una manera más compacta de la siguiente manera:

$$\frac{dX}{dt} = -x + [Wx + b]_+ \quad (2.4)$$

La función $[\cdot]_+$ es crucial para producir dinámicas no lineales sin embargo, la no linealidad de los sistemas está dada por partes, lo que nos permite analizar a los TLNs como un collage de sistemas lineales.

Para cada $i = 1, \dots, n$, sea

$$y_i = \sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + b_i,$$

podemos reescribir cada ecuación del sistema en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + [y_i]_+.$$

Si $y_i < 0$, entonces la ecuación asociada a la neurona i es $\frac{dx_i}{dt} = -x_i$ y si $y_i > 0$, tenemos $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + y_i$. Así, el conjunto de hiperplanos $\mathcal{H} = \{y_i = 0\}$ divide al ortante positivo en a lo más 2^n recámaras. En cada una de dichas recámaras el sistema se comporta como un sistema de ecuaciones puramente lineales.

Si asumimos que las matrices $(I - W)_\sigma$ son invertibles para toda $\sigma \subseteq [n]$, cada uno de los sistemas lineales tendrá solamente un punto fijo, esto nos permite distinguir a los puntos fijos del sistema por su soporte $\sigma = \text{supp}(x^*) = \{i \mid y_i > 0\} \subset [n]$.

Hay que recalcar que si x^* es un punto fijo con soporte σ , este puede estar dentro o fuera de la recámara correspondiente a σ . Para cada soporte σ , el correspondiente punto fijo x^* va a ser un punto fijo del sistema TLN si x^* está dentro de la recámara apropiada.

Por ejemplo, el punto fijo $x^* = 0$ correspondiente a $\sigma = \emptyset$ (cuando todas las neuronas están apagadas) nunca estará dentro de la recámara apropiada, dado que $b_i > 0$ y, por lo tanto, nunca será punto fijo de un sistema TLN. Ver Figura 2.1.

Si x^* es un punto fijo de un sistema CTLN, $x_i = [y_i]_+$ para cada $i \in [n]$ así que, para que el punto fijo del sistema lineal asociado a σ esté en la recámara correcta, el sistema debe de satisfacer las siguientes dos condiciones:

- $x_i^* > 0$ para toda $i \in \sigma$.
- $y_k^* \leq 0$ para toda $k \notin \sigma$, en donde y_k^* es obtenido al evaluar y_k en x^* .

Cuando x^* cumple estas condiciones decimos que el sistema CTLN tiene un punto fijo con soporte σ [9].

Definición 2.3. Diremos que una matriz cuadrada A es **reducible** si existe una permutación de sus filas tal que

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

En donde B , C , y D son matrices cuadradas.

Diremos que A es **irreducible** si no es reducible.

Teorema 2.1. [5] (**Perron-Frobenius**) Sea A una matriz cuadrada, no negativa e irreducible. Entonces A tiene un valor propio real λ_1 con las siguientes propiedades:

1. $\lambda_1 \geq 0$.
2. λ_1 tiene un vector propio estrictamente positivo.
3. Para cualquier otro valor propio λ , $|\lambda| \leq \lambda_1$.
4. λ_1 tiene multiplicidad algebraica igual a uno.

Notemos que si A es una matriz cuadrada e irreducible tal que $A_{ij} \leq 0$ para toda i, j , podemos aplicar el teorema anterior a la matriz $-A$ y obtener conclusiones análogas sobre A es decir, que A tiene un valor propio real y negativo λ_1 , con vector propio estrictamente negativo, de módulo menor y con multiplicidad algebraica igual a uno.

Denotamos a W_σ como la matriz obtenida al restringir las filas y columnas de la matriz W a los índices de σ . Un punto fijo correspondiente a $\sigma \in \text{FP}(G)$ es estable si y solo si todos los valores propios de $(-I + W_\sigma)$ tienen parte real negativa.

Recordemos que W es una matriz en donde todas sus entradas son negativas o iguales a cero. Esto nos permite aplicar el Teorema de Perron-Frobenius a la matriz $(-I + W_\sigma)$ y garantizar que el valor propio más grande es real y negativo. El vector propio correspondiente nos proporciona una dirección que atrae la dinámica hacia el punto fijo. Además, nos permite concluir que los puntos fijos inestables son puntos silla [4].

2.3. Gráfica de regiones

A cada una de las regiones definidas por \mathcal{H} le corresponde una tupla de signos dependiendo del valor de la función $[y_i]_+$ para $i = 1, \dots, n$. Si $[y_i]_+ = 0$ colocaremos un signo negativo ($-$) en la i -ésima entrada, por otro lado colocaremos un signo positivo ($+$) si $[y_i]_+ = y_i$. Transformamos dicha tupla a binario para poder asociar un número entero a cada una de las regiones.

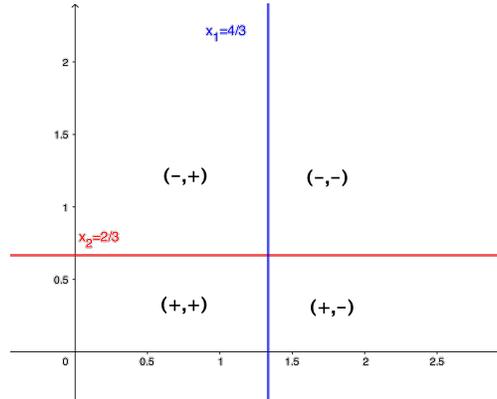


Figura 2.1: Ejemplo: Arreglo de hiperplanos del sistema CTLN asociado a G usando los parámetros estándar. G consiste de dos vértices y una sola arista $1 \rightarrow 2$. $\sigma = \emptyset$ está representada por la región $(-, -)$ (región cero), el punto fijo $x^* = 0$ no está dentro de la recámara correspondiente.

En la gráfica de regiones, cada una de ellas estará representada por un vértice y sólo existirán aristas entre regiones vecinas. Dos regiones son vecinas si tienen asociados vectores de signos que solamente difieren en una coordenada. La región que tiene más signos positivos es la más cercana al origen. Si existe una arista, su dirección dependerá de la dirección en la que las curvas solución cruzan el hiperplano frontera correspondiente.

Necesitamos un vector normal N_i por cada hiperplano y_i y el campo vectorial del sistema lineal asociado a alguna de las dos regiones vecinas. Para esta construcción escogemos el vector normal unitario que apunta hacia el semiespacio que contiene al origen entonces, N_i apunta hacia adentro si la región vecina está más lejos del origen, y N_i apunta hacia afuera si la región vecina está más cerca del origen. Podemos usar también a la i -ésima fila de la matrix W como vector normal

Denotamos por R_j a las regiones, cada región tiene asociado un sistema ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, y denotamos por R_j a los campos vectoriales correspondientes.

Supongamos que tenemos dos regiones vecinas $R1$ y $R2$. Supongamos también que el vector de signos asociado a $R2$ se obtiene cambiando el signo de la i -ésima coordenada en el vector correspondiente a $R1$. Por ejemplo, digamos que la i -ésima coordenada del vector de signos es $-$ en $R1$ y $+$ en $R2$. Bajo estas condiciones, las regiones tienen por frontera el hiperplano y_i y el vector N_i apunta de $R1$ a $R2$. Queremos ver cómo se comportan las

soluciones del sistema lineal asociado a $R1$ al cruzar hacia $R2$ o viceversa es decir, queremos conocer el comportamiento de los puntos en la región $y_i = 0$.

Escojamos al sistema lineal asociado a $R1$. Si el producto punto $R_1 \cdot N_i$ es siempre mayor que cero significa que las soluciones van en dirección $R1 \rightarrow R2$, de esta manera la arista correspondiente tendrá la misma dirección en la gráfica de regiones. Dicha arista tendrá la dirección opuesta si $R_1 \cdot N_i \leq 0$ para todos los puntos en la frontera de ambas regiones. En el caso de que para algunos puntos $R_1 \cdot N_i$ se mayor que cero y para otros puntos sea menor que cero, colocaremos una arista bidireccional.

Como $R1$ y $R2$ son vecinas, en la frontera $y_i = 0$, ambos campos vectoriales R_1 y R_2 coinciden. Por lo tanto, si analizamos $R_1 \cdot N_i$, ya no es necesario analizar $R_2 \cdot N_i$.

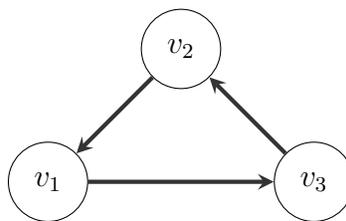
Como hay tantas regiones como vectores de signos con n coordenadas y, en la gráfica ponemos un vértice por cada región, la gráfica tendrá 2^n vértices. Más aún, formará un n-cubo.

El análisis previamente mencionado aporta una asignación de las direcciones de las aristas, así la gráfica de regiones ayuda a visualizar el flujo en el sistema.

Procederemos a analizar un 3-torneo regular utilizando esta nueva herramienta.

2.3.1. Análisis cualitativo de la solución de equilibrio de un CTLN definido por un 3-ciclo (con los parámetros estándar)

Llamaremos G al siguiente 3-ciclo:



Asociado a la matriz de adyacencia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usaremos los parámetros estándar: $\epsilon = 0,25$, $\delta = 0,5$, y $\theta = 1$. Con estos parámetros, el sistema CTLN correspondiente es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + [-0,75x_2 - 1,5x_3 + 1]_+ \\x'_2 &= -x_2 + [-1,5x_1 - 0,75x_3 + 1]_+ \\x'_3 &= -x_3 + [-0,75x_1 - 1,5x_2 + 1]_+\end{aligned}$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, podemos reescribir cada una de las ecuaciones del sistema en la forma $\frac{dx_i}{dt} = -x_i + [y_i]_+$. En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_1 &= -0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 \\y_2 &= -1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 \\y_3 &= -0,75x_1 - 1,5x_2 + 1\end{aligned}$$

El conjunto de planos $\mathcal{H} = \{y_i = 0\}$ nos divide a \mathbb{R}^3 en $2^3 = 8$ regiones.

Los vectores normales que utilizaremos para realizar los cálculos son:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -1,5 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \\ -0,75 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} -0,75 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

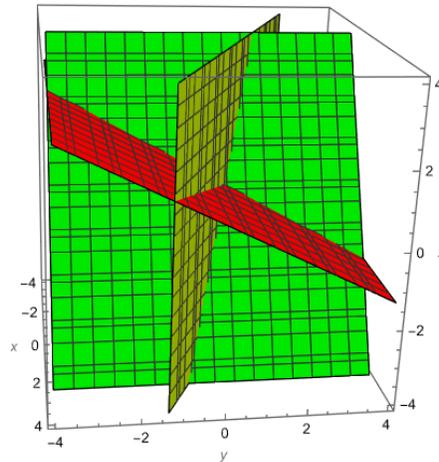


Figura 2.2: Arreglo de planos para G. $y_1 = 0$ en rojo, $y_2 = 0$ en verde, y $y_3 = 0$ en amarillo.

Región cero: $(-, -, -)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, +)$, $(-, +, -)$, y $(+, -, -)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 \\x'_2 &= -x_2 \\x'_3 &= -x_3\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_0 = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{bmatrix}$$

A continuación analizamos el comportamiento del campo vectorial en cada uno de los planos frontera.

Vecina: Región $(-, -, +)$

El plano frontera entre estas dos regiones es y_3 . Aparentemente, los puntos en la frontera van en dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, -, +)$, comprobémoslo.

$$R_0 \cdot N_3 = 0,75x_1 + 1,5x_2$$

La ecuación del plano y_3 es $-0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 = 0$. Sustituyendo obtenemos:

$$-0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 = 0 \implies 1 = 0,75x_1 + 1,5x_2$$

Por lo que

$$R_0 \cdot N_3 = 0,75x_1 + 1,5x_2 = 1$$

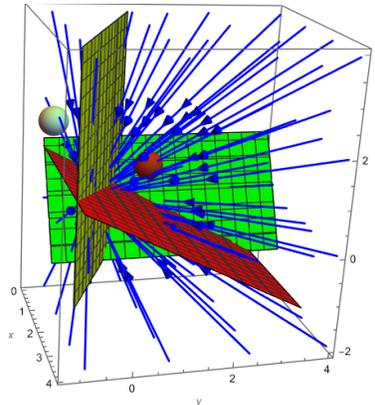


Figura 2.3: $(-, -, -)$ está representada por un punto rojo y $(-, -, +)$ por uno blanco.

Esto comprueba que, para los puntos sobre la frontera de las regiones $(-, -, -)$ y $(-, -, +)$, las curvas solución tienen dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, -, +)$.

Vecina: Región $(-, +, -)$

El plano frontera entre estas dos regiones es y_2 . Se observa que los puntos en la frontera van en dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, +, -)$, comprobémoslo.

$$R_0 \cdot N_2 = 1,5x_1 + 0,75x_3$$

La ecuación del plano y_2 es $-1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 = 0$. Sustituyendo obtenemos:

$$-1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 = 0 \implies 1 = 1,5x_1 + 0,75x_3$$

Por lo que

$$R_0 \cdot N_2 = 1,5x_1 + 0,75x_3 = 1$$

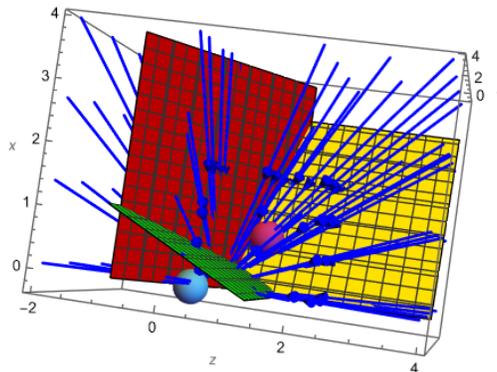


Figura 2.4: $(-, -, -)$ está representada por un punto rosa y $(-, +, -)$ por uno azul.

Esto comprueba que, para los puntos sobre la frontera de las regiones $(-, -, -)$ y $(-, +, -)$, las curvas solución tienen dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, +, -)$.

Vecina: Región $(+, -, -)$

El plano frontera entre estas dos regiones es y_1 . A simple vista parece que los puntos en la frontera van en dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, +, +)$, comprobémoslo.

$$R_0 \cdot N_1 = 0,75x_2 + 1,5x_3$$

La ecuación del plano y_1 es $-0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 = 0$. Sustituyendo obtenemos:

$$-0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 = 0 \implies 1 = 0,75x_2 + 1,5x_3$$

Por lo que

$$R_0 \cdot N_2 = 0,75x_2 + 1,5x_3 = 1$$

Esto comprueba que, para los puntos sobre la frontera de las regiones $(-, -, -)$ y $(-, +, +)$, las curvas solución tienen dirección $(-, -, -) \rightarrow (-, +, +)$.

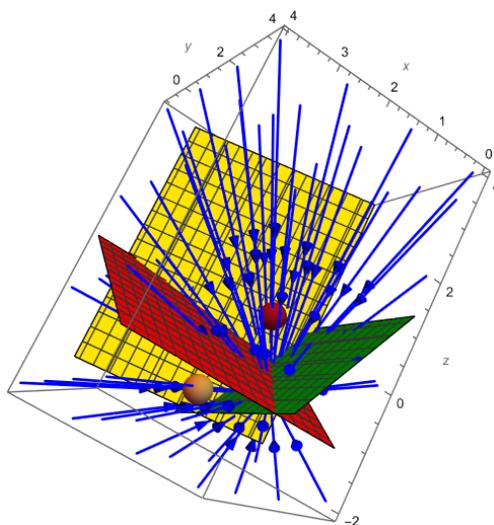


Figura 2.5: $(-, -, -)$ está representada por un punto rosa y $(-, +, +)$ por uno naranja.

Región uno: $(-, -, +)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, -)$, $(-, +, +)$, y $(+, -, +)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= -x_2 \\ x'_3 &= -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 \end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_1 = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Ya hemos analizados el comportamiento en la frontera con la región $(-, -, -)$, continuamos con el análisis en los planos frontera con las regiones vecinas restantes.

Vecina: Región $(-, +, +)$

El plano frontera de estas dos regiones es y_2 . En la Figura 2.5 se pueden observar puntos en la frontera van en dirección $(-, -, +) \rightarrow (-, +, +)$ y otros para los cuales la dirección es la opuesta, comprobémoslo.

$$R_1 \cdot N_2 = 1,5x_1 - 0,75(1 - 0,75x_1 - 1,5x_2 - x_3)$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $1,5x_1 + 0,75x_3 - 1 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $1,5x_1 + 0,75x_3 = 1$.

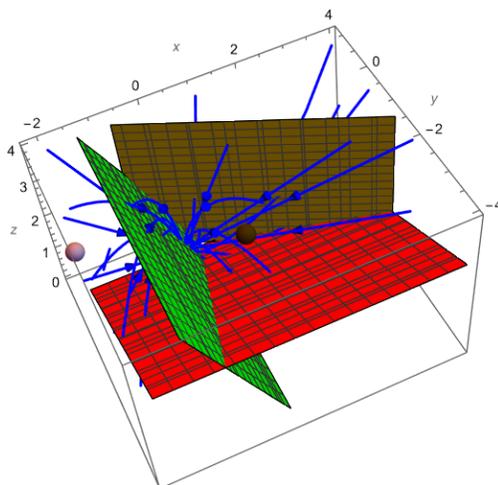


Figura 2.6: $(-, -, +)$ está representada por un punto café y $(-, +, +)$ por uno rosa.

Para comprobar cómo es $R_1 \cdot N_2$ usamos las funciones *Minimize* y *Maximize* en Mathematica, dichas funciones nos permiten conocer el mínimo y el máximo de una función dadas ciertas condiciones, en este caso analizamos la función $R_1 \cdot N_2$ con las condiciones $1,5x_1 + 0,75x_3 = 1$ y $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$. La última condición es para no permitir tasas de disparo negativas. En lo que resta del análisis se evaluaron las funciones *Minimize* y *Maximize* con los parámetros y condiciones correspondientes.

El valor mínimo de $R_1 \cdot N_2$ es 0,25 y el valor máximo es 1. En la gráfica de regiones colocaremos la arista $(-, -, +) \rightarrow (-, +, +)$. No tomamos en cuenta a las curvas que salen de $(-, -, +)$ y después regresan a $(-, +, +)$ porque, al entrar en otra recámara, el sistema CTLN está gobernado por un sistema de ecuaciones lineales distinto.

Vecina: Región $(+, -, +)$

El plano frontera de estas dos regiones es y_1 . A simple vista se observa que los puntos sobre la frontera van en dirección $(+, -, +) \rightarrow (-, -, +)$, comprobémoslo.

$$R_1 \cdot N_1 = 0,75x_2 - 1,5(1 - 0,75x_1 - 1,5x_2 - x_3)$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_1 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $0,75x_2 + 1,5x_3 = 1$.

El valor mínimo de la ecuación $R_1 \cdot N_1$ es $-0,125$ y su valor máximo es 1 , por lo que en la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre $(-, -, +)$ y $(+, -, +)$.

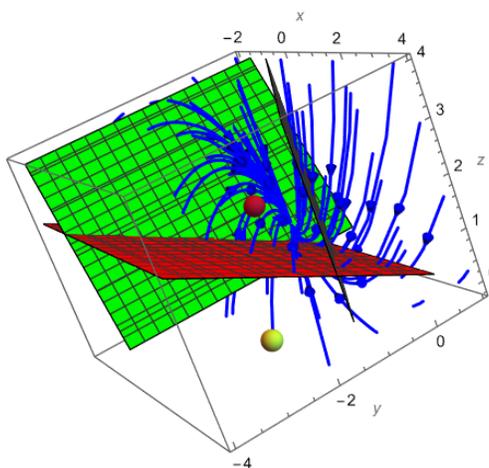


Figura 2.7: $(-, -, +)$ está representada por un punto rojo y $(+, -, +)$ por uno amarillo.

Región dos: $(-, +, -)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, -)$, $(-, +, +)$, y $(+, +, -)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 \\x'_2 &= -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 \\x'_3 &= -x_3\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_2 = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 & -x_3 \end{bmatrix}$$

Ya hemos analizado el comportamiento en la frontera con la región $(-, -, -)$, continuamos con el análisis en los planos frontera con las regiones vecinas restantes.

Vecina: Región $(-, +, +)$

El plano frontera entre las regiones es y_3 , a simple vista parece que los puntos en la frontera van en dirección $(-, +, +) \rightarrow (-, +, -)$, comprobémoslo.

$$R_2 \cdot N_3 = 0,75x_1 - 1,5(1 - 1,5x_1 - x_2 - 0,75x_3)$$

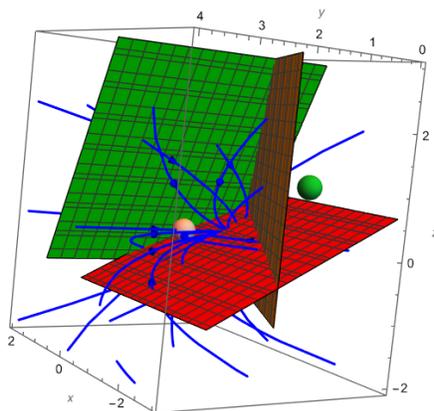


Figura 2.8: $(-, +, -)$ está representada por un punto rosa y $(-, +, +)$ por uno verde.

Queremos ver qué comportamiento tienen los puntos que cumplen la ecuación $y_3 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $0,75x_1 + 1,5x_3 = 1$.

El valor mínimo de $R_2 \cdot N_3$ es $-0,125$ y el valor máximo es 1 , de esta manera, en la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre $(-, +, -)$ y $(-, +, +)$.

Vecina: Región $(+, +, -)$

El plano frontera entre estas regiones es y_1 . En la Figura 2.8 se observa un comportamiento similar al que hay entre $(-, -, +)$ y $(-, +, +)$, en donde hay puntos sobre la frontera que cruzan de $(-, +, -)$ a $(+, +, -)$ y otros que cruzan en dirección opuesta pero cuyas curvas solución cruzan nuevamente el plano y_1 en dirección a $(+, +, -)$, por lo que en la gráfica de regiones solamente tendríamos la arista $(-, +, -) \rightarrow (+, +, -)$, comprobémoslo.

$$R_2 \cdot N_1 = -0,75(1 - 1,5x_1 - x_2 - 0,75x_3) + 1,5x_3$$

Queremos ver qué comportamiento tienen los puntos que cumplen la ecuación $y_1 = 0$ es decir, los puntos que cumplen la ecuación $0,75x_2 + 1,5x_3 = 1$.

El valor mínimo de $R_2 \cdot N_1$ es 0 y el valor máximo es 1, por lo que en la gráfica de regiones colocaremos la arista $(-, +, -) \rightarrow (+, +, -)$.

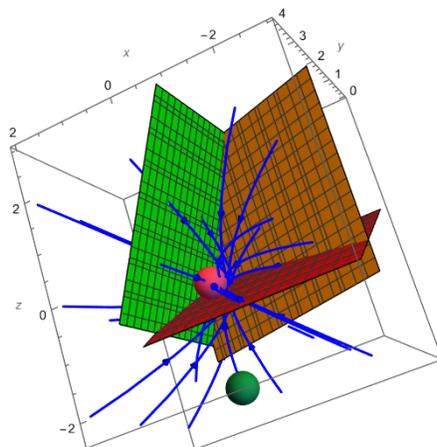


Figura 2.9: $(-, +, -)$ está representada por un punto rosa y $(+, +, -)$ por uno verde.

Región tres: $(-, +, +)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, +)$, $(-, +, -)$, y $(+, +, +)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 \\x'_2 &= -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 \\x'_3 &= -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_3 = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 & -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Ya analizamos el comportamiento del sistema lineal entre esta región y las regiones $(-, -, +)$ y $(-, +, -)$. Solamente analizaremos el comportamiento de los puntos sobre la frontera con la región $(+, +, +)$.

Vecina: Región $(+, +, +)$

El plano frontera de estas dos regiones es y_1 . Claramente se observa que los puntos en la frontera van en dirección $(+, +, +) \rightarrow (-, +, +)$, comprobémoslo.

$$R_3 \cdot N_1 = -1,5(1 - 0,75x_1 - 1,5x_2 - x_3) - 0,75(1 - 1,5x_1 - x_2 - 0,75x_3)$$

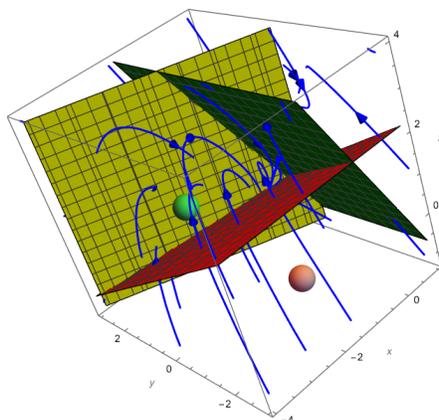


Figura 2.10: $(-, +, +)$ está representada por un punto verde y $(+, +, +)$ por uno rosa.

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_1 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $0,75x_2 + 1,5x_3 = 1$.

El valor mínimo de $R_3 \cdot N_1$ es $-0,825$ y el valor máximo es 1 . En la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre $(-, +, +)$ y $(+, +, +)$.

Región cuatro: $(+, -, -)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, -)$, $(+, -, +)$, y $(+, +, -)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 \\x'_2 &= -x_2 \\x'_3 &= -x_3\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_4 = \begin{bmatrix} -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 & -x_2 & -x_3 \end{bmatrix}$$

Ya conocemos el comportamiento del sistema lineal en la frontera con la región $(-, -, -)$, continuamos el análisis con las vecinas restantes.

Vecina: Región $(+, -, +)$

El plano frontera entre las regiones es y_3 . A simple vista parece que tenemos puntos sobre la frontera que la cruzan en dirección $(+, -, -) \rightarrow (+, -, +)$ y otros que cruzan en dirección opuesta cuyas curvas solución vuelven a cruzar el plano y_3 en dirección a $(+, -, +)$, comprobémoslo.

$$R_4 \cdot N_3 = 1,5x_2 - 0,75(1 - x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3)$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_3 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $0,75x_1 + 1,5x_2 = 1$.

El valor mínimo de $R_4 \cdot N_3$ es 0,25 y el valor máximo es 1, por lo que en la gráfica de regiones colocaremos la arista $(+, -, -) \rightarrow (+, -, +)$.

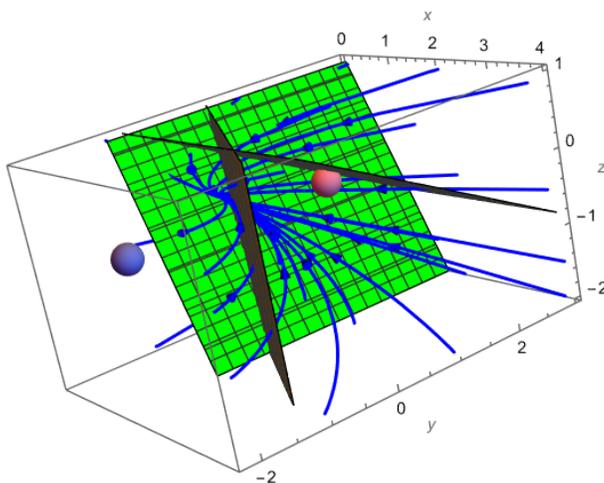


Figura 2.11: $(+, -, -)$ está representada por un punto rosa y $(+, -, +)$ por uno azul.

Vecina: Región $(+, +, -)$

El plano frontera entre las dos regiones es y_2 . La figura 2.11 muestra que los puntos sobre la frontera van en dirección $(+, +, -) \rightarrow (+, -, -)$, comprobémoslo.

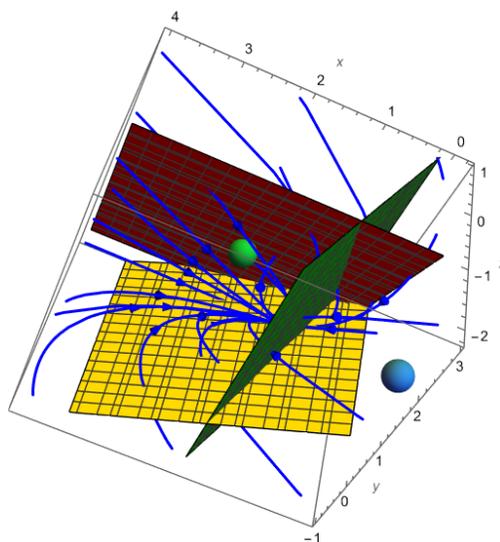


Figura 2.12: $(+, -, -)$ está representada por un punto azul y $(+, +, -)$ por uno verde.

$$R_4 \cdot N_2 = -1,5(1 - x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3) + 0,75x_3$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_2 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $1,5x_1 + 0,75x_3 = 1$.

El valor mínimo de $R_4 \cdot N_2$ es $-0,125$ y el valor máximo es 1 , por lo que en la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre las regiones $(+, -, -)$ y $(+, +, -)$.

Región cinco: $(+, -, +)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, -, +)$, $(+, -, -)$, y $(+, +, +)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 \\x'_2 &= -x_2 \\x'_3 &= -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_5 = \begin{bmatrix} -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 & -x_2 & -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Ya hemos analizado las curvas solución de este sistema lineal en la frontera con las regiones $(-, -, +)$ y $(+, -, -)$, por lo que solamente analizaremos el comportamiento de los puntos en la frontera con la región $(+, +, +)$.

Vecina: Región $(+, +, +)$

El plano frontera de estas dos regiones es y_2 . Claramente se observa que los puntos en la frontera van en dirección $(+, +, +) \rightarrow (+, -, +)$, comprobémoslo.

$$R_5 \cdot N_2 = -1,5(1 - x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3) - 0,75(1 - 0,75x_1 - 1,5x_2 - x_3)$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_2 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $1,5x_1 + 0,75x_3 = 1$.

El valor mínimo de $R_5 \cdot N_2$ es $-0,825$ y el valor máximo es 1 , por lo que en la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre $(+, -, +)$ y $(+, +, +)$.

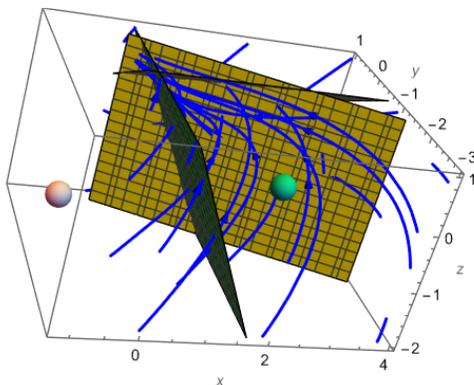


Figura 2.13: $(+, -, +)$ está representada por un punto verde y $(+, +, +)$ por uno blanco.

Región seis: $(+, +, -)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, +, -)$, $(+, -, -)$, y $(+, +, +)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 \\x'_2 &= -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 \\x'_3 &= -x_3\end{aligned}$$

El campo vectorial correspondiente es

$$R_6 = \begin{bmatrix} -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 & -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 & -x_3 \end{bmatrix}$$

Anteriormente analizamos las curvas solución de este sistema lineal en las fronteras con las regiones $(-, +, -)$ y $(+, -, -)$. Continuemos el análisis de los puntos en la frontera con la región $(+, +, +)$.

Vecina: Región $(+, +, +)$

El plano frontera de estas dos regiones es y_3 . A simple vista podemos observar que los puntos en la frontera van en dirección $(+, +, +) \rightarrow (+, +, -)$, comprobémoslo.

$$R_6 \cdot N_3 = -0,75(1 - x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3) - 1,5(1 - 1,5x_1 - x_2 - 0,75x_3)$$

Queremos conocer el comportamiento de los puntos que cumplen la ecuación $y_3 = 0$ es decir, los que cumplen la ecuación $0,75x_1 + 1,5x_2 = 1$.

El valor mínimo de $R_6 \cdot N_3$ es $-0,825$ y el valor máximo es 1 , por lo que en la gráfica de regiones colocaremos una arista bidireccional entre $(+, +, -)$ y $(+, +, +)$.

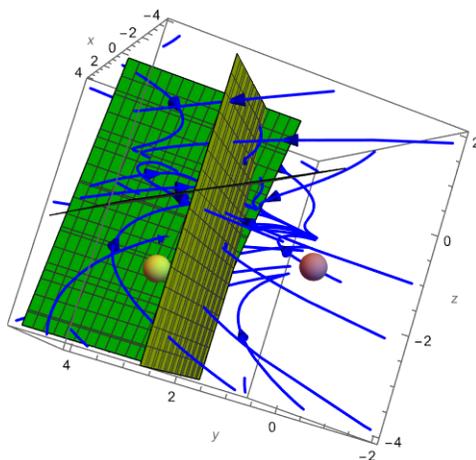


Figura 2.14: $(+, +, -)$ está representada por un punto amarillo y $(+, +, +)$ por uno rosa.

Región siete $(+, +, +)$

Esta región tiene por vecinas a las regiones $(-, +, +)$, $(+, -, +)$, y $(+, +, -)$. El sistema lineal asociado a esta región es el siguiente:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 - 0,75x_2 - 1,5x_3 + 1 \\x'_2 &= -x_2 - 1,5x_1 - 0,75x_3 + 1 \\x'_3 &= -x_3 - 0,75x_1 - 1,5x_2 + 1\end{aligned}$$

Ya hemos analizado el comportamiento de las curvas solución del sistema lineal en los puntos sobre las fronteras con todas sus regiones vecinas.

Gráfica de Regiones

En la Figura 2.14 se presenta la gráfica de regiones que obtuvimos siguiendo el análisis anterior. En ella destacamos en rojo un ciclo en donde, si seguimos las aristas en el sentido de las manecillas del reloj, se describe la dinámica de las soluciones antes de entren a la región $(+, +, +)$.

Por ejemplo, si tenemos condiciones iniciales en la región $(-, +, -)$, la curva solución podría pasar por las regiones en el siguiente orden: $(-, +, -) \rightarrow (+, +, -) \rightarrow (+, +, +)$.

Simulando el sistema CTLN con condiciones iniciales en todas las regiones observamos que, después de la solución entra a la región $(+, +, +)$, denotada por $R7$, este entra en el ciclo:

$$R7 \rightarrow R3 \rightarrow R7 \rightarrow R6 \rightarrow R7 \rightarrow R5 \rightarrow R7 \rightarrow R3 \dots$$

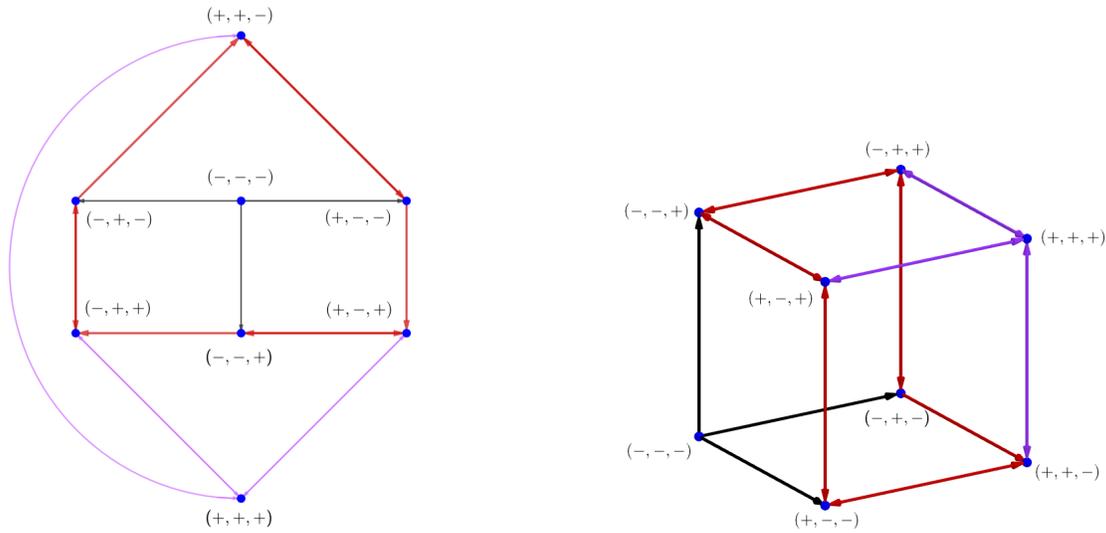


Figura 2.15: Izquierda: Gráfica de regiones para un 3-ciclo. Derecha: Misma gráfica representada como un n -cubo.

En la Figura 2.14, dicho ciclo está representado en color morado. $R3$ es la región $(-, +, +)$, $R5$ corresponde a la región $(+, -, +)$ y $R6$ denota a la región $(+, +, -)$. Analizaremos este ciclo en la siguiente sección. Las aristas en negro recalcan el hecho de que el vértice asociado a la región $(-, -, -)$ es una fuente.

El ciclo límite como pegado de curvas solución de sistemas lineales.

Analizaremos el ciclo límite como un polígono, en el cual cada lado representa una curva solución de uno de los sistemas lineales. Analizaremos a profundidad los sistemas lineales correspondientes a las regiones $R3$, $R5$, $R6$, y $R7$.

Calcularemos los valores y vectores propios de la matriz asociada a cada sistema lineal, un espacio propio y su correspondiente espacio ortogonal. Esto nos ayudará a comprender por qué se forma el ciclo límite y concluiremos encerrándolo en un plano que nos ayudará a formar el polígono.

Región tres: $(-, +, +)$

La matriz correspondiente al sistema lineal es la siguiente:

$$M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1,5 & -1 & -0,75 \\ -0,75 & -1,5 & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación presentamos los valores y vectores propios.

Valor Propio	Vector Propio
$\frac{1}{4}(-4 - 3\sqrt{2})$	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$
-1	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right)$
$\frac{1}{4}(3\sqrt{2} - 4)$	$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

Calcularemos el espacio propio asociado a $\lambda_2 = -1$.

$$B_3 = M_3 - (-1)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & -0,75 \\ -0,75 & -1,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo B_3 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_3 \end{aligned}$$

El espacio propio asociado a λ_2 , al que denotaremos por EP_2 , es una recta que pasa por el origen y el punto $(-2, 1, 4)$.

El espacio nulo asociado a $(-2, 1, 4)$ es $\{(2, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, estos vectores son la base del plano perpendicular a EP_2 . En este caso se hizo pasar al plano por el punto $(0, -2, 4)$, que es el punto de equilibrio del sistema lineal asociado a $R3$.

Tenemos dos valores propios negativos (λ_1 y λ_2) y uno positivo, lo que indica que las soluciones del sistema se alejan del punto fijo. En particular, la Figura 2.15 muestra simulaciones

del sistema lineal con condiciones iniciales en la región $(+, +, +)$. Estas soluciones salen de $R7$ hacia las demás regiones con dirección al plano más cercano.

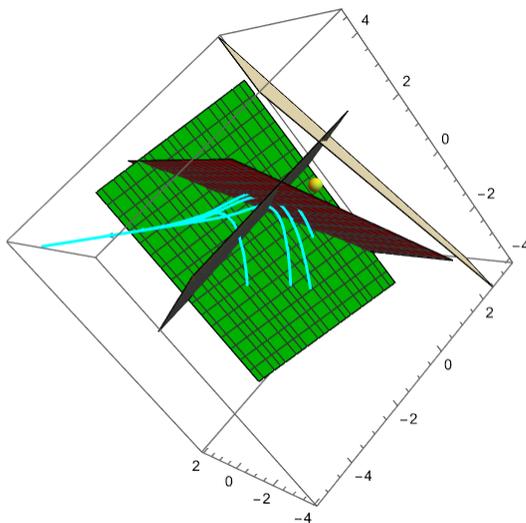


Figura 2.16: Plano perpendicular a EP_2 (en blanco) y soluciones del sistema lineal correspondiente. $R3$ está representado con un punto amarillo.

Veremos que los sistemas lineales correspondientes a las regiones $R5$ y $R6$ tienen comportamientos similares.

Región cinco: $(+, -, +)$

La matriz correspondiente al sistema lineal es la siguiente:

$$M_5 = \begin{bmatrix} -1 & -0,75 & -1,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0,75 & -1,5 & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación presentamos los valores y vectores propios.

Valor Propio	Vector Propio
$\frac{1}{4}(-4 - 3\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 0, 1)$
-1	$(4, -2, 1)$
$\frac{1}{4}(3\sqrt{2} - 4)$	$(-\sqrt{2}, 0, 1)$

Únicamente calcularemos el espacio propio asociado a $\lambda_2 = -1$.

$$B_5 = M_5 - (-1)I = \begin{bmatrix} 0 & -0,75 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,75 & -1,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo B_5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}$$

De esta manera, EP_2 es una recta que pasa por el origen y el punto $(4, -2, 1)$.

El espacio nulo de $(4, -2, 1)$ es $\{(-1, 0, 4), (1, 2, 0)\}$, estos vectores son la base del plano perpendicular a EP_2 . En este caso se hizo pasar al plano por el punto $(4, 0, -2)$, que es el punto de equilibrio del sistema lineal asociado a R_5 .

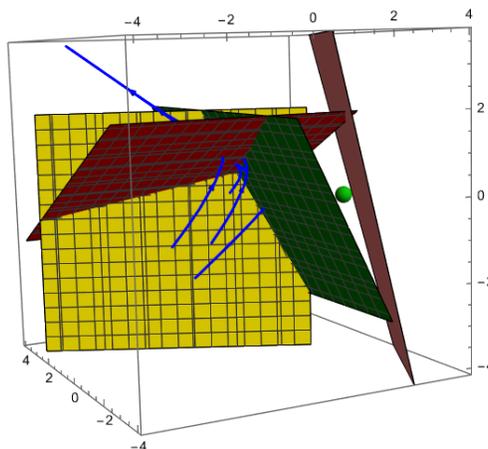


Figura 2.17: Plano perpendicular a EP_2 (en café) y soluciones del sistema lineal correspondiente. R_5 está representado con un punto verde.

Tenemos los mismos valores propios que en el sistema asociado a $R3$. Presentamos una imagen con curvas solución cuyas condiciones iniciales son idénticas a las de las simulaciones presentadas para $R3$.

Región seis: $(+, +, -)$

La matriz correspondiente al sistema lineal es la siguiente:

$$M_6 = \begin{bmatrix} -1 & -0,75 & -1,5 \\ -1,5 & -1 & -0,75 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación presentamos los valores y vectores propios.

Valor Propio	Vector Propio
$\frac{1}{4}(-4 - 3\sqrt{2})$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0\right)$
-1	$\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right)$
$\frac{1}{4}(3\sqrt{2} - 4)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0\right)$

De nuevo, calcularemos el espacio propio asociado a $\lambda_2 = -1$.

$$B_6 = M_6 - (-1)I = \begin{bmatrix} 0 & -0,75 & -1,5 \\ -1,5 & 0 & -0,75 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo B_6 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos las ecuaciones

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$

$$x_2 = -2x_3$$

En este caso, EP_2 es una recta que pasa por el origen y el punto $(-\frac{1}{2}, -2, 1)$.

El espacio nulo asociado a $(-\frac{1}{2}, -2, 1)$ es $\{(2, 0, 1), (-4, 1, 0)\}$, estos vectores son la base del plano perpendicular a EP_2 . En este caso se hizo pasar al plano por el punto $(-2, 0, 4)$, que es el punto de equilibrio del sistema lineal asociado a $R6$.

Tenemos los mismos valores propios que en los sistemas asociados a $R3$ y $R5$. Presentamos una simulación con soluciones cuyas condiciones iniciales son idénticas a las usadas para las simulaciones presentadas anteriormente.

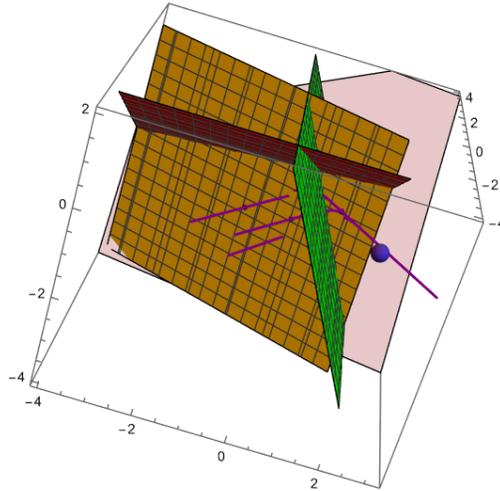


Figura 2.18: Plano perpendicular a EP_2 (en rosa) y soluciones del sistema lineal correspondiente. $R6$ está representado con un punto azul.

Región siete: (+, +, +)

La matriz correspondiente al sistema lineal es la siguiente:

$$M_7 = \begin{bmatrix} -1 & -0,75 & -1,5 \\ -1,5 & -1 & -0,75 \\ -0,75 & -1,5 & -1 \end{bmatrix}$$

A continuación presentamos los valores y vectores propios.

Valor Propio	Vector Propio
$-\frac{13}{4}$	$(1, 1, 1)$
$\frac{1}{8}(1 + 3i\sqrt{3})$	$\left(\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), 1\right)$
$\frac{1}{8}(1 - 3i\sqrt{3})$	$\left(\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), 1\right)$

Procedemos a calcular el espacio propio asociado a $\lambda_1 = -\frac{13}{4}$.

$$B_7 = M_7 - \left(-\frac{13}{4}\right)I = \begin{bmatrix} 2,25 & -0,75 & -1,5 \\ -1,5 & 2,25 & -0,75 \\ -0,75 & -1,5 & 2,25 \end{bmatrix}$$

Reduciendo B_7 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos las ecuaciones

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 = x_3$$

Así, EP_1 es una recta que pasa por el origen y el punto $(1, 1, 1)$.

El espacio nulo asociado a $(1, 1, 1)$ es $\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$, estos vectores son la base del plano perpendicular a EP_1 .

En este caso se hizo pasar al plano por el punto de equilibrio del sistema lineal asociado a $R7$ (y del sistema CTLN) es decir, por el punto $(0,307692, 0,307692, 0,307692)$.

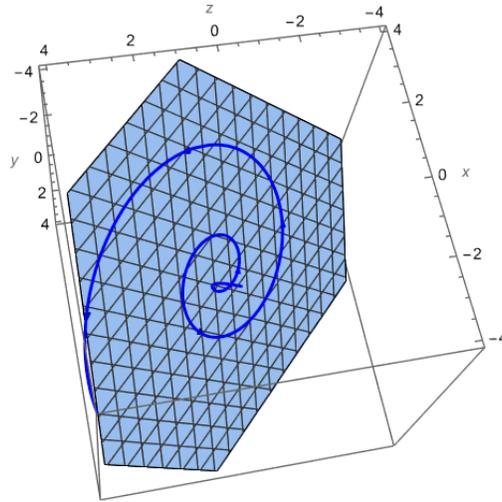


Figura 2.19: Una solución del sistema lineal asociado a $R7$ y el plano perpendicular a EP_1 en azul.

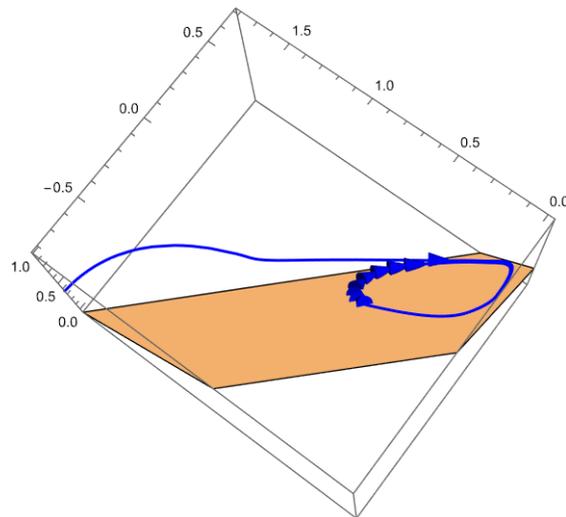


Figura 2.20: Una solución del sistema CTLN y el plano ortogonal a EP_1 en naranja.

En este caso tenemos un valor propio negativo y dos valores propios complejos con parte real positiva, lo que indica que las soluciones de este sistema lineal son espirales que se alejan del punto de equilibrio. Sin embargo, en la simulación observamos que primero se acercan al punto de equilibrio antes de alejarse. Se muestra una simulación con condiciones iniciales $x_1(0) = -0,5$, $x_2(0) = -0,5$ y $x_3(0) = 0$.

Observamos que la solución estaba mayormente contenida en el plano perpendicular a EP_1 , por lo que decidimos probar si el ciclo límite del sistema CTLN se quedaba dentro de este mismo plano.

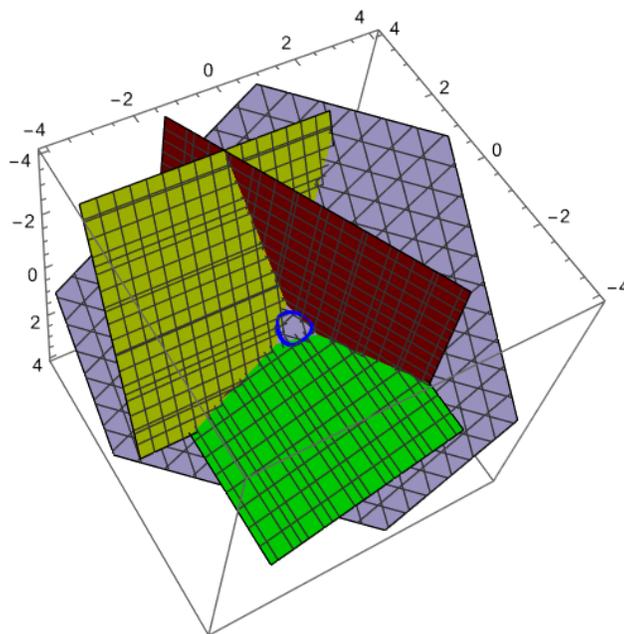


Figura 2.21: La misma solución de la imagen anterior, el plano ortogonal a EP_1 en morado y los planos $y_i = 0$.

2.3.2. El ciclo límite como un hexágono

Intentamos encerrar al ciclo límite en un triángulo formado por las intersecciones de los planos y_i con el plano ortogonal a EP_1 , obteniendo como resultado la Figura 2.21.

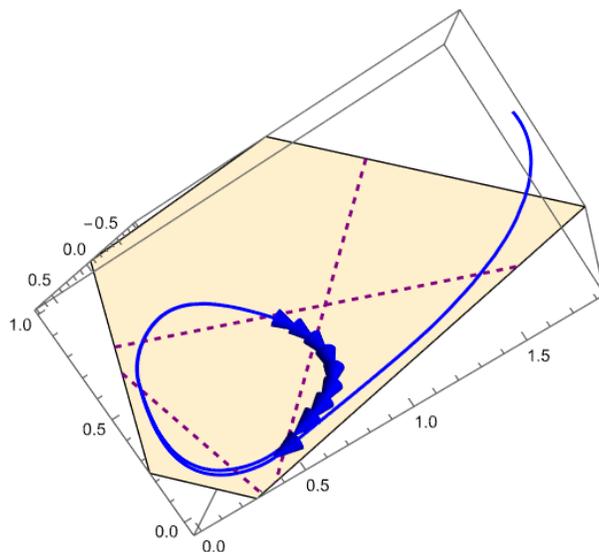


Figura 2.22: Una solución del sistema CTLN encerrada en un triángulo.

Recordemos que $R3$ representa a la región $(-, +, +)$, $R5$ a la región $(+, -, +)$, $R6$ a la

región $(+, +, -)$ y $R7$ a la región $(+, +, +)$.

En la figura anterior, una vez que la solución entra en el ciclo límite, dentro del triángulo actúa el sistema lineal asociado a $R7$ y fuera de él actúan los sistemas lineales asociados a $R3$, $R5$, y $R6$. Así, podemos formar un hexágono, en donde tenemos tres aristas representando a $R7$ y una arista por cada una de las demás regiones mencionadas en esta sección.

Así, podemos ver al ciclo límite del sistema CTLN asociado a un 3-ciclo como pegado de soluciones de los sistemas lineales asociados a las regiones $(-, +, +)$ (en rojo), $(+, -, +)$ (en verde), $(+, +, -)$ (en naranja), y $(+, +, +)$ (en azul). En donde, a pesar de que las soluciones de los sistemas lineales asociados a $R3$, $R5$, y $R6$ tienen a alejarse del punto de equilibrio del sistema CTLN, estas cruzan hacia $R7$ antes de alejarse lo suficiente. Al cambiar de región, otro sistema de ecuaciones entra en acción y lleva a la solución a una espiral que la saca de la región siete y el ciclo se repite.

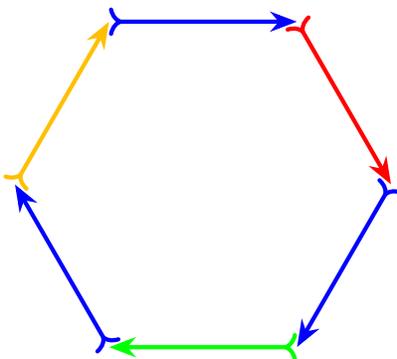


Figura 2.23: El ciclo límite del sistema CTLN definido por un 3-ciclo visto como pegado de soluciones de sistemas lineales.

En [8] se hace un análisis general del arreglo de hiperplanos, en esta ocasión, formado por las nulclinas. En dicho trabajo se muestra que, para los sistemas TLN, las regiones $(-, -, \dots, -)$ y $(+, +, \dots, +)$ son repelentes, y que la actividad se concentra en la unión de las regiones con signos mixtos.

En este capítulo estudiamos los hiperplanos definidos por las funciones y_i . Podemos conjeturar que, en el caso de un sistema CTLN definido por un torneo, la actividad se concentra en la unión de las regiones de signos mixtos y la región $(+, +, \dots, +)$. Por el momento, lo que podemos asegurar es que la región $(-, -, \dots, -)$ es repelente, pues el punto fijo del sistema lineal asociado a dicha recámara $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ es atractor, ya que los valores propios son todos iguales a -1 sin embargo, x^* no está en dicha región. Por lo tanto, las curvas solución con condiciones iniciales en la región $(-, -, \dots, -)$ saldrán de ella y, de hecho, nunca regresarán.

Capítulo 3

Predicción de secuencias de disparo a partir de la estructura gráfica

En este capítulo usaremos el algoritmo presentado en [9], utilizamos este artículo como referencia principal para este capítulo. Retomaremos la versión original del algoritmo, introducido en [11], y compararemos la efectividad de ambas versiones para distintos torneos. Presentamos también una nueva herramienta, la gráfica de 3-ciclos, que nos muestra otra perspectiva de la dinámica del sistema CTLN.

El siguiente teorema nos da las condiciones necesarias para garantizar que un sistema CTLN tenga atractores dinámicos tales como ciclos límite y atractores quasiperiódicos.

Teorema 3.1. [10] *Sea G una gráfica orientada sin sumideros, consideramos el sistema CTLN asociado a $W = W(G, \epsilon, \delta)$ para ϵ , y δ en el rango legal. Entonces la actividad en la red es acotada y no tiene puntos fijos estables.*

En los sistemas CTLN, las neuronas generalmente tienden a disparar en secuencias, algunas pueden ser intuitivas, como en el caso del 3-ciclo. En general, las secuencias son difíciles de predecir incluso para redes pequeñas. Esto es debido a que las propiedades locales de la red, como los grados de entrada o salida de los vértices, son insuficientes para predecir la participación y orden de disparo de las neuronas en las secuencias emergentes. Sin embargo, la secuencia está completamente determinada por la estructura de G [4].

Definición 3.1. *Supongamos que σ es tal que $G|_{\sigma}$ tiene grado de entrada uniforme d . Un vértice $k \notin \sigma$ es **destino** de σ si k recibe al menos $d + 1$ aristas desde los vértices en σ . Si σ no tiene destinos decimos que es **libre de destino**.*

Definición 3.2. *Decimos que un vértice $k \in V(G)$ es **libremente removible** si al remover k de G se cumplen las siguientes dos propiedades simultáneamente:*

- *No se crea un sumidero en $G \setminus \{k\}$.*

- No se crea un 3-ciclo libre de destino en $G \setminus \{k\}$, en el caso de que k no fuera destino de ese 3-ciclo.

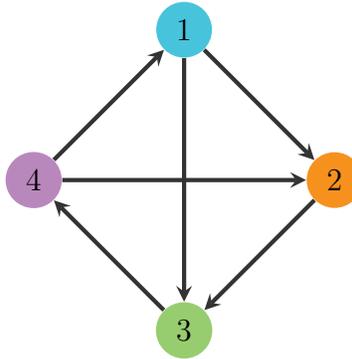


Figura 3.1: En este torneo, el vértice 2 es destino del ciclo $\{134\}$. Por otro lado, el ciclo $\{234\}$ es libre de destino.

Definición 3.3. Decimos que una gráfica G es **irreducible** si es cíclicamente simétrica o no tiene vértices libremente removibles.

Para cualquier entero n , el n -ciclo es una gráfica irreducible. Los torneos cíclicamente simétricos son ampliamente estudiados en el Capítulo 4, algunos ejemplos de ellos son el 3-ciclo y la Figura 4.2.

El algoritmo que se muestra a continuación consiste de dos fases; en la primera eliminaremos los vértices de G uno a uno hasta obtener subgráficas irreducibles y en la segunda fase reconstruiremos la o las secuencias obtenidas.

3.1. Algoritmo de predicción de secuencias (para una gráfica dirigida sin sumideros)

Primero presentaremos la versión actual del algoritmo, nos referiremos a esta versión del algoritmo como versión 2019.

Fase I: Deconstrucción de la gráfica

Si en cualquiera de los pasos se elimina un vértice, se debe de regresar al Paso 1 con la subgráfica resultante al eliminar dicho vértice. Si ningún vértice puede ser removido, proceder con el siguiente paso. Puede haber pasos en los que dos o más vértices sean candidatos a ser removidos, se deben considerar todas las posibles elecciones, así que se deben de examinar todos los casos por separado y determinar si las subgráficas resultantes son distintas. La deconstrucción termina en el momento en el que se obtiene una subgráfica irreducible.

1. Remover todos los vértices cuyo grado de entrada es igual a cero (fuentes).

En el caso de los torneos, podemos tener como máximo una fuente.

2. Remover un vértice con grado de entrada igual a uno cuya remoción no produzca un sumidero en la subgráfica resultante.
3. Remover uno de los vértices con menor grado de entrada que sea libremente removible.

Al terminar esta fase obtendremos una lista de subgráficas irreducibles que depende de las elecciones de los vértices que se eliminen. Si la gráfica final es irreducible, pero no es cíclicamente simétrica, entonces el algoritmo falla para tal subgráfica. A las subgráficas irreducibles resultantes las llamaremos **ciclos corazón** y serán el punto de partida para la Fase II.

Fase II: Reconstrucción de la secuencia

Cada uno de los ciclos corazón da lugar a una secuencia diferente que es obtenida de la siguiente manera:

1. Enlista los vértices del ciclo corazón en el orden en que aparecen cíclicamente. Estos serán los vértices con alta tasa de disparo en la secuencia.

Los siguientes vértices que se inserten en el siguiente paso tendrán una tasa de disparo baja y se muestran subrayados en la secuencia.

2. Por cada vértice i que no esté en el ciclo corazón, hay que insertarlo en la secuencia si y solo si i recibe alguna arista de al menos un vértice perteneciente al ciclo corazón de acuerdo a las siguientes condiciones:

- a) Considerar la subgráfica inducida $G|_{\omega}$ de vértices del ciclo corazón que tienen aristas hacia el vértice i . Inserta el vértice i en la secuencia después de cada vértice que es un sumidero en $G|_{\omega}$.
- b) Si dos vértices i y j deben de ser insertados en el mismo lugar, se debe revisar la interacción entre ellos. Si existe la arista $i \rightarrow j$, entonces insertar i antes que j y viceversa si tenemos la arista $j \rightarrow i$. Si no hay ninguna arista entre i y j , ambos vértices disparan al mismo tiempo y en la secuencia se escribirá (ij) .

En el caso de los torneos, siempre tendremos una arista entre cada par de vértices sin embargo, presentamos ejemplos donde dos o más neuronas disparan simultáneamente.

3.2. Gráfica de 3-ciclos

Definición 3.4. Dado un torneo G construimos la **gráfica de 3-ciclos asociada a G** , denotada por $GC(G)$, como sigue:

- Tendremos exactamente un vértice por cada 3-ciclo en G .

- *Dados dos vértices $u, v \in GC(G)$, existirá una arista dirigida entre ellos si y sólo si los 3-ciclos correspondientes comparten una arista en G . La dirección de la arista entre los vértices disjuntos de los 3-ciclos decidirá la dirección la arista correspondiente en $GC(G)$.*

Ejemplifiquemos el segundo punto de la definición. Supongamos que u representa al 3-ciclo $(ijk) \in G$ y v al 3-ciclo (jkl) . En $GC(G)$ tendremos la arista $u \rightarrow v$ si, en G , existe la arista $i \rightarrow l$ y viceversa si la arista entre i y l tiene el sentido opuesto.

Dada G , la dinámica del sistema CTLN asociado tiende a seguir las aristas de G . La gráfica de 3-ciclos se aprovecha de este hecho para mostrar hacia donde se dirige la dinámica en un sistema CTLN. Por ejemplo, un sumidero indican que las neuronas implicadas en el 3-ciclo correspondiente tienen actividad. Un ciclo puede indicar que la dinámica se queda concentrada en esas neuronas.

Fijemos un vértice $v \in GC(G)$, si existe una arista saliente de v , entonces el 3-ciclo asociado a v tiene un vértice destino en G . Sin embargo, si v es un sumidero en $GC(G)$, el 3-ciclo asociado no es necesariamente libre de destino.

Mediante esta herramienta se puede detectar las neuronas que tienen actividad, mas no se pueden identificar con certeza las neuronas con alta o baja tasa de disparo sin embargo, podemos predecir que la tasa de disparo incrementa con el grado de entrada en $GC(G)$.

A continuación presentamos distintos torneos, para cada uno de ellos se muestran: la deconstrucción de G , la secuencia reconstruida siguiendo el algoritmo de predicción, la gráfica de 3-ciclos correspondiente y una simulación numérica del sistema CTLN. De este último se muestran dos figuras, las curvas de disparo y una escala de grises. Ambas fueron obtenidas mediante la paquetería de Matlab proporcionada en [9]. A menos de que se indique lo contrario, todas las simulaciones fueron realizadas con los parámetros estándar.

3.3. Ejemplos de deconstrucción de torneos

5-torneos

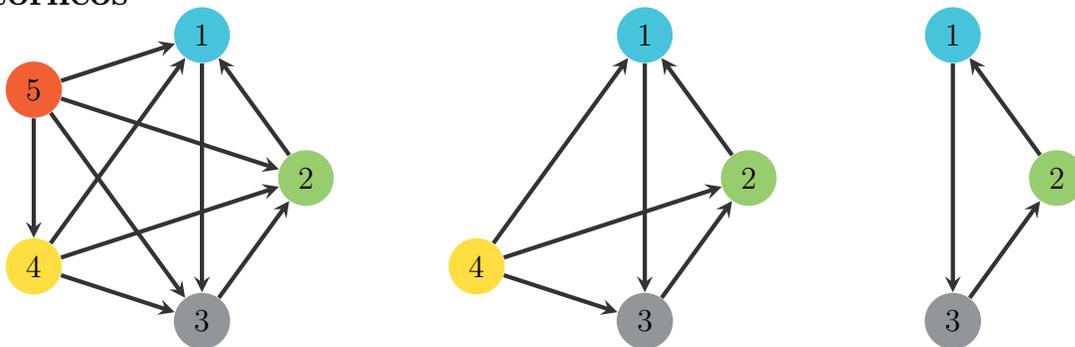


Figura 3.2: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 33310.

Fase I: Eliminamos el vértice 5 en el Paso 1 por ser fuente. Reiniciamos el algoritmo. En la subgráfica $G|_{\{1234\}}$, el vértice 4 es fuente, por lo que se elimina siguiendo el Paso 1. El resultado es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 132, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. Los vértices 4 y 5 no reciben ninguna arista desde el ciclo corazón, por lo tanto no se insertan en la secuencia. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **132**.

132

Gráfica de 3-ciclos: En G solamente existe un 3-ciclo, así $GC(G)$ consiste de un solo vértice sin aristas. Interpretamos que los vértices 1, 2, y 3 serán los únicos con actividad, mientras que las neuronas 4 y 5 mueren.

Efectivamente, el sistema CTLN asociado a G tiene solamente un punto fijo cuyo soporte es $\{123\}$. Al simular el sistema nos damos cuenta que, tanto el algoritmo como la gráfica de 3-ciclos predicen la secuencia de disparo correctamente.

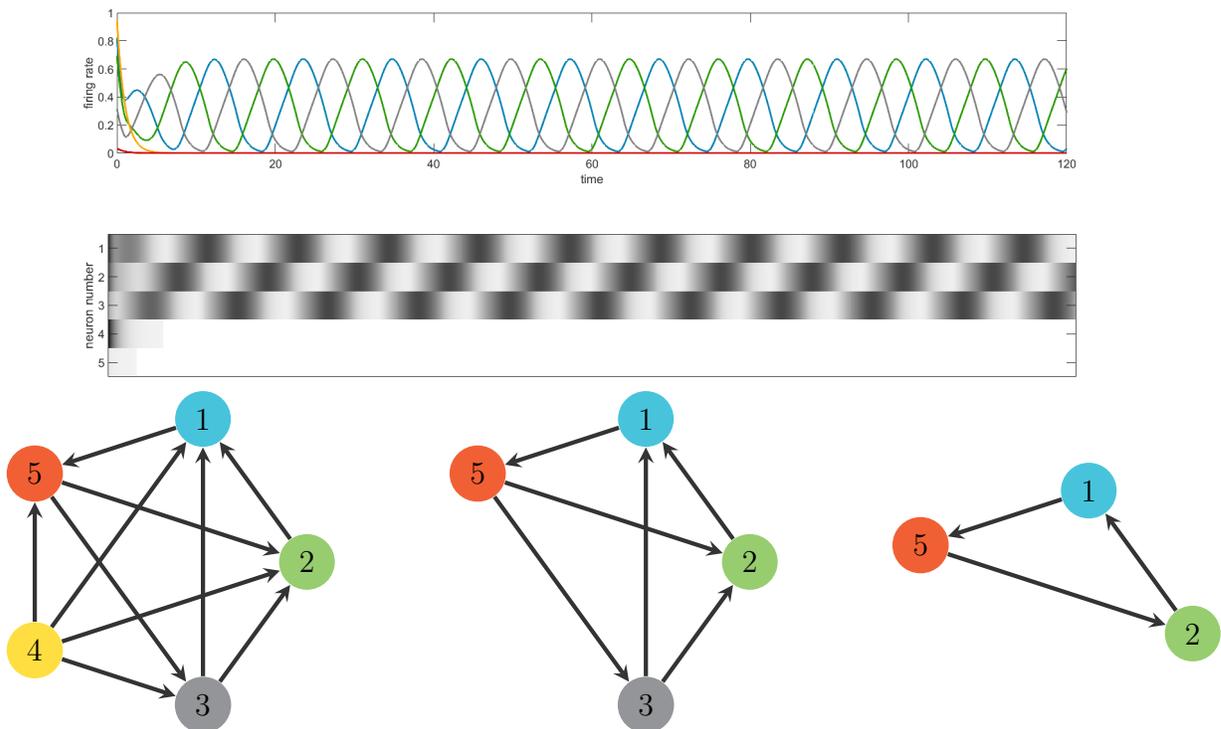


Figura 3.3: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 33220.

Fase I: Eliminamos el vértice 4 en el Paso 1 por ser fuente. Reiniciamos el algoritmo. En la subgráfica $G|_{\{1235\}}$ no existe ninguna fuente, por lo que continuamos con el Paso 2. Se elimina el vértice 3 ya que, si se elimina el vértice 5 se crearía un sumidero en el vértice 1. El resultado de la remoción del vértice 5 es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 152, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de

disparo. De los vértices restantes, solamente el vértice 3 recibe una arista de uno de los nodos en el ciclo corazón, concretamente recibe una arista desde el vértice 5. Por lo tanto, se inserta el vértice 3 después del 5. Se subraya indicando que tendrá una baja tasa de disparo. El vértice 4 muere. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es 1532.



Gráfica de 3-ciclos: En G existen dos 3-ciclos: $\{153\}$ y $\{152\}$. La arista $3 \rightarrow 2 \in G$, por lo tanto en $GC(G)$ tendremos la arista $\{153\} \rightarrow \{152\}$. Interpretamos que los vértices 1, 2, y 5 tendrán una alta tasa de disparo y que el vértice 4 no tendrá actividad en el sistema.

El sistema CTLN asociado a G tiene un punto fijo con soporte $\{125\}$. Al simular el sistema observamos que, tanto el algoritmo como la gráfica de 3-ciclos predicen el soporte correctamente además, la secuencia de disparo simulada y la predicha por el algoritmo coinciden.

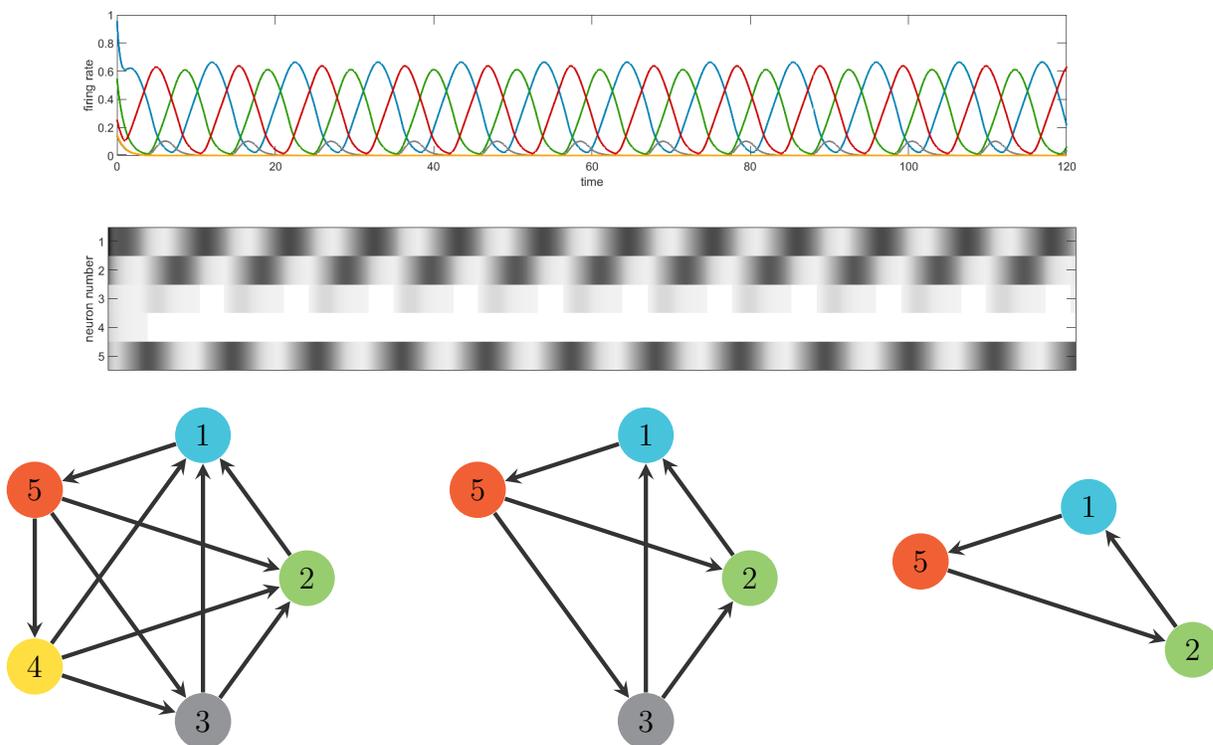


Figura 3.4: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 33211.

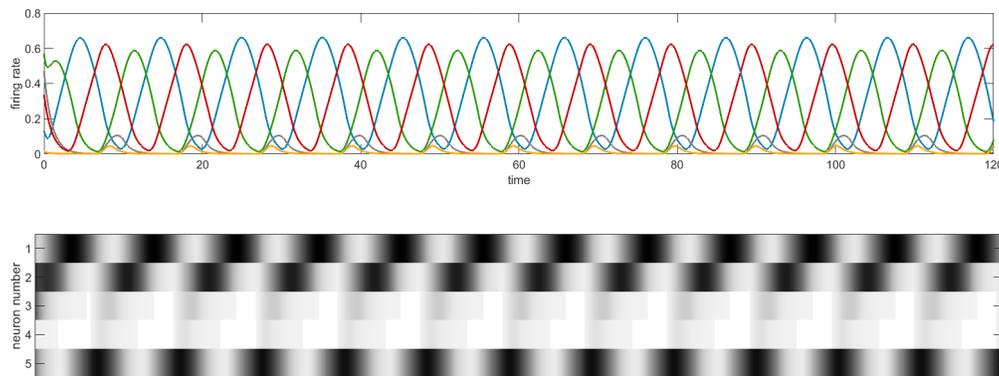
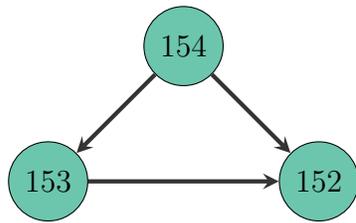
Fase I: No existe ningún sumidero en G . Procedemos con el Paso 2. Existen dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 4 y 5. Eliminamos el vértice 4, pues la remoción del vértice 5 crearía un sumidero en 1. Reiniciamos el algoritmo. En la subgráfica $G|_{\{1235\}}$ no hay fuentes. Se elimina el vértice 3 en el Paso 2 pues, si removemos el vértice 5, el vértice 1 se convertiría en sumidero. El resultado de la remoción del vértice 3 es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 152, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. Los vértices 3 y 4 reciben una arista desde el vértice 5, por lo que ambos serán

insertados en la secuencia después de este. Para determinar el orden de aparición seguimos el punto 2b). Observamos que la arista $4 \rightarrow 3 \in G$, así que insertaremos el vértice 4 antes que el 3. Ambos serán subrayados indicando que tendrán una baja tasa de disparo. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **15432**.

El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo con soporte $\{125\}$. Tanto el algoritmo como la gráfica de 3-ciclos predicen el soporte correctamente. Además, la secuencia de disparos predicha por el algoritmo coincide con la observada en las simulaciones.

Gráfica de 3-ciclos: G tiene tres 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Observemos que el flujo se dirige hacia el 3-ciclo formado por los vértices 1, 5, y 2, estos tendrán una alta tasa de disparo.



Los siguientes tres ejemplos son 5-torneos con la misma secuencia de grados de entrada: 32221. Por lo tanto, tienen el mismo grado dirigido, direccionalidad y mismo número de 3-ciclos sin embargo, no son isomorfos. Ejemplifican la dependencia que tiene estructura de una gráfica con la dinámica del sistema CTLN asociado a ella.

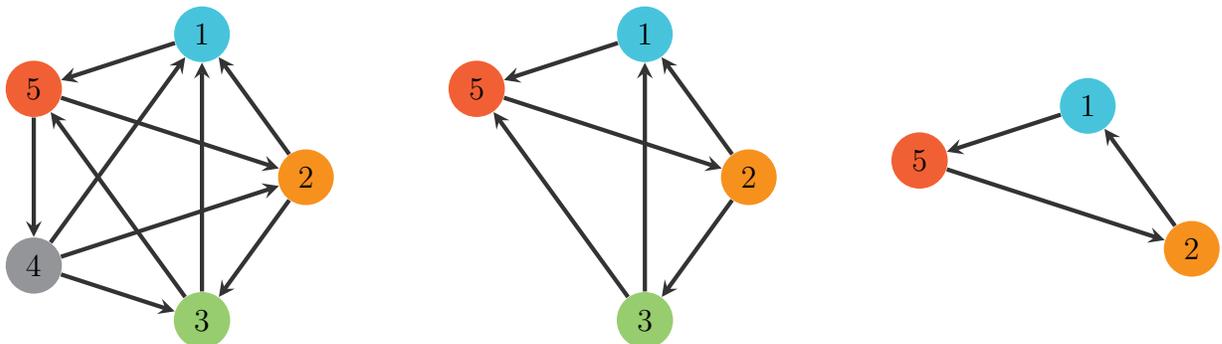
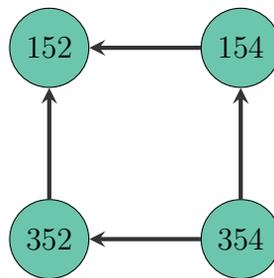


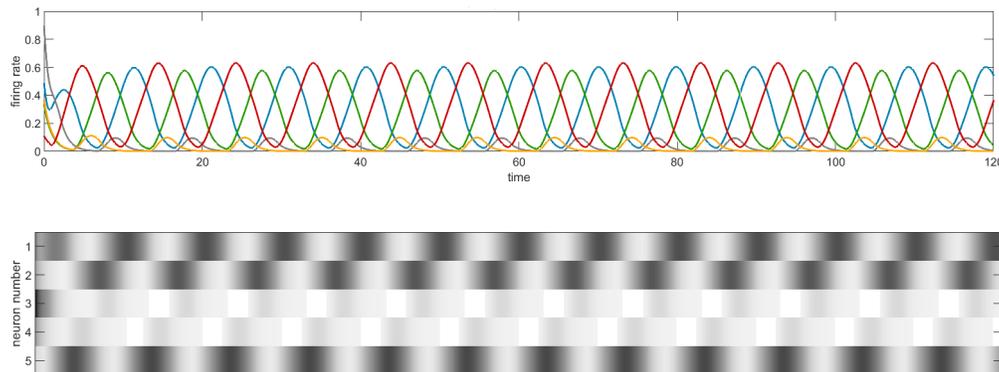
Figura 3.5: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 32212.

Fase I: G no tiene fuentes. Procedemos con el Paso 2, el único vértice con grado de entrada igual a uno es el vértice 4, lo eliminamos pues su remoción no crea ningún sumidero. Reiniciamos el algoritmo. En la subgráfica $G|_{\{1235\}}$ no hay fuentes. Procedemos con el Paso 2. Hay dos vértices con grado de entrada igual a uno, estos son los vértices 2 y 3. Si se elimina el vértice 2, el vértice 5 se vuelve sumidero, esto no pasa si eliminamos el vértice 3, por lo que se remueve. El resultado de la remoción del vértice 3 es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 152, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. Los vértices 3 y 4 sí reciben una arista de alguno de los vértices del ciclo corazón. Así, insertaremos al vértice 3 después de 2 y al vértice 4 después del 5. Ambos se subrayan indicando que tienen una baja tasa de disparo. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **15423**.



Gráfica de 3-ciclos: G contiene cuatro 3-ciclos, cada uno de ellos está representado por un vértice. El vértice 152 es un sumidero, indicando que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo.



El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{152\}$. Al simular el sistema nos damos cuenta que, tanto el algoritmo como la gráfica de 3-ciclos predicen el soporte correctamente. Además, el algoritmo funciona de manera adecuada.

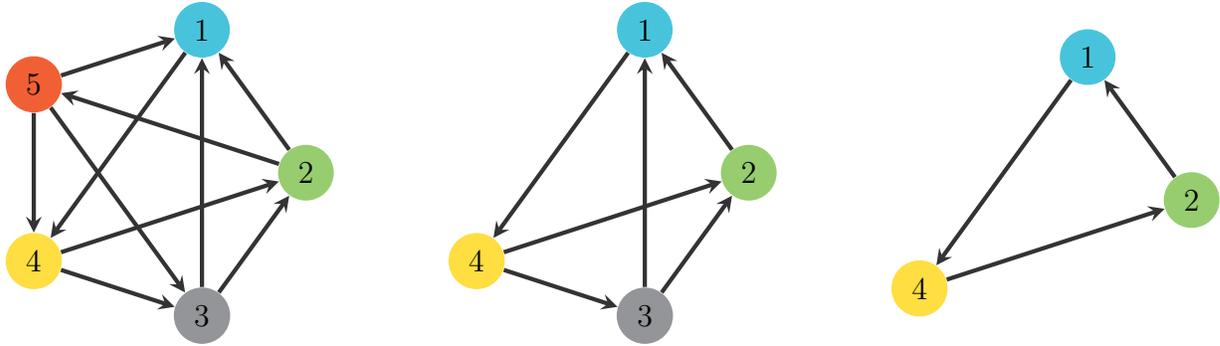
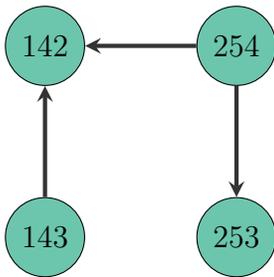


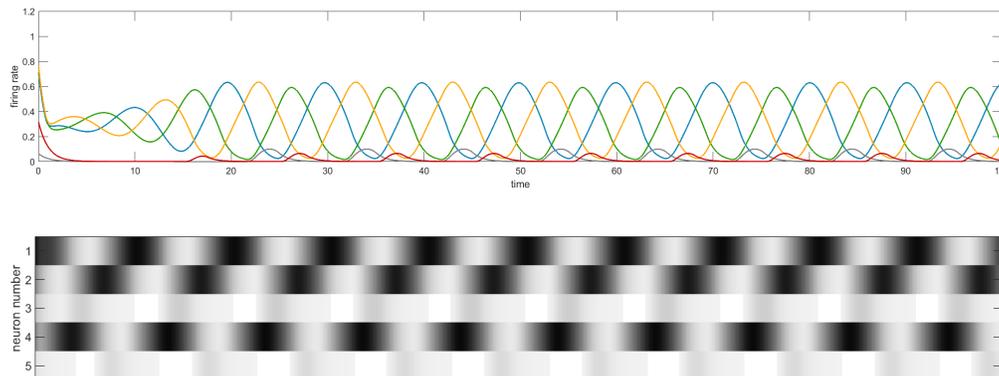
Figura 3.6: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 32221.

Fase I: G no tiene fuentes. Procedemos con el Paso 2. El único vértice con grado de entrada igual a uno es el 5, lo eliminamos pues al hacerlo no se crean sumideros. Reiniciamos el algoritmo. En la subgráfica $G|_{\{1234\}}$ no hay fuentes. Procedemos con el Paso 2. Hay dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 3 y 4. Si se elimina el vértice 4, el vértice 1 se vuelve sumidero, no obtenemos sumideros si removemos el vértice 3, por lo que se elimina. El resultado de la remoción del vértice 3 es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 142, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. Los vértices 3 y 5 sí reciben una arista desde el ciclo corazón. Así, insertaremos al vértice 3 después del 4 y al vértice 5 después del 2. Ambos se subrayan indicando que tienen una baja tasa de disparo. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es 14325.



Gráfica de 3-ciclos: G contiene cuatro 3-ciclos, cada uno de ellos está representado por un vértice. El vértice 142 es un sumidero, indicando que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. El vértice 253 también es un sumidero, indicando que las neuronas 5 y 3 también tendrán actividad, esta será menor debido a que el vértice 253 tiene un grado de entrada menor. Notemos que, en G , el nodo 1 es un destino del ciclo 253.



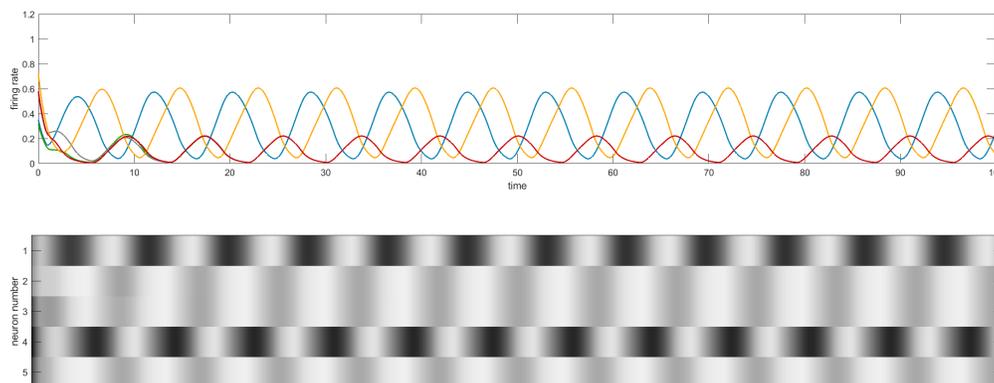
El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo con soporte $\{142\}$. Al simular el sistema corroboramos que, tanto el algoritmo como la gráfica de 3-ciclos predicen el soporte correctamente. Además, el algoritmo funciona de manera correcta.



Figura 3.7: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 32212 (izquierda) y la gráfica de 3-ciclos correspondiente (derecha). Este torneo es la unión cíclica del 3-ciclo 253 con dos vértices. Es un motivo corazón (ver Sección 4.3). Nos referiremos a este torneo como 5-CU.

Fase I: G no tiene fuentes. El único vértice con grado de entrada igual a uno es el vértice 4, pero no puede ser eliminado pues, al hacerlo creamos un sumidero en 1. Procedemos con el Paso 3. Recordemos que un destino de un 3-ciclo es libremente removible si el 3-ciclo tiene algún otro destino. En G tenemos cuatro 3-ciclos: El 3-ciclo $\{143\}$ tiene por único destino al vértice 2, por lo que 2 no es libremente removible. El 3-ciclo $\{145\}$ solamente tiene al vértice 3 como destino, así que el vértice 3 no es libremente removible. El 3-ciclo $\{142\}$ solamente tiene un destino, el vértice 5, por lo tanto 5 no es libremente removible. Por último, el vértice 1 tampoco es libremente removible ya que es el único destino del 3-ciclo $\{253\}$. Como vemos, no se puede eliminar ninguno de los vértices en G y no es un torneo cíclicamente simétrico. Declaramos el algoritmo como fallido para esta gráfica.

Gráfica de 3-ciclos: La gráfica esta formada por un ciclo y un vértice aislado. El ciclo involucra a todos los vértices de G , así que podemos esperar que todos los vértices tengan actividad. Podríamos esperar que los vértices del 3-ciclo $\{253\}$ dispararan en secuencia cíclica. Veamos una solución numérica.



El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo con soporte $\{12345\}$, es decir tiene soporte completo. Al resolver numéricamente el sistema notamos que las neuronas 1 y 4 tienen alta tasa de disparo, mientras que las demás tienen una tasa de disparo menor y disparan al mismo tiempo, no en serie.

En [11] se presenta una primer versión del algoritmo de predicción de secuencias y de hecho, se usa para analizar a los 5-torneos. Rescatamos esta versión ya que no falla para el torneo 5-CU.

Algoritmo de predicción de secuencias (versión 2017)

Fase I: En cada paso del algoritmo borramos el vértice cuyo grado de entrada sea menor tal que el subtorneo resultante no tenga sumideros. Continuamos haciéndolo hasta que obtenemos un 3-ciclo, este será el ciclo corazón.

Fase II: Es idéntica a la Fase II de la versión 2019 del algoritmo.

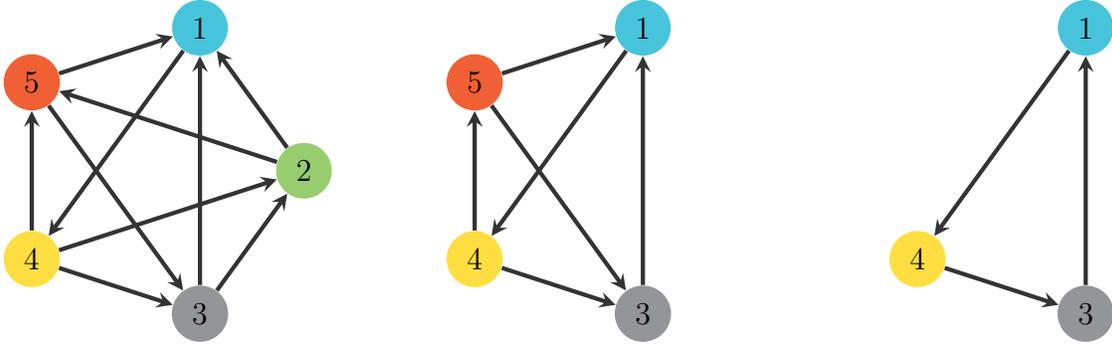
Nota: Al reconstruir la secuencia, si el vértice que borramos es un sumidero en G , no lo añadimos. Si dicho vértice tiene grado de entrada uno en G y dicha arista viene de un vértice que no está en el ciclo corazón, entonces tampoco lo añadimos al reconstruir la secuencia.

Secuencia Final: Hay que considerar primero todas las posibles secuencias. Si hay dos posibilidades que son idénticas salvo un vértice, escogemos la secuencia más corta. Si las posibles secuencias son diferentes pero de la misma longitud, puede que algunas neuronas disparen sincronamente. Se predice la sincronía de un subconjunto de neuronas si dicho subconjunto aparece (para todas las secuencias) en el mismo orden cíclico pero con diferente punto de comienzo. Además, las neuronas que no están en este subconjunto aparecen en el mismo orden para todas las posibilidades. Por ejemplo, si el algoritmo produce las secuencias **14532**, **14253**, y **14325**, entonces predecimos que las neuronas 2, 3, y 5 disparan al mismo tiempo. Representaremos a la secuencia final con estas neuronas dentro de un paréntesis, por ejemplo: **14(253)**.

Notemos que, en esta versión no se hace distinción entre las neuronas con alta y baja tasa de disparo sin embargo, adoptamos la idea de que las neuronas en el ciclo corazón tendrán una alta tasa de disparo y subrayamos las neuronas que sean insertadas durante la Fase II, indicando que tienen baja tasa de disparo.

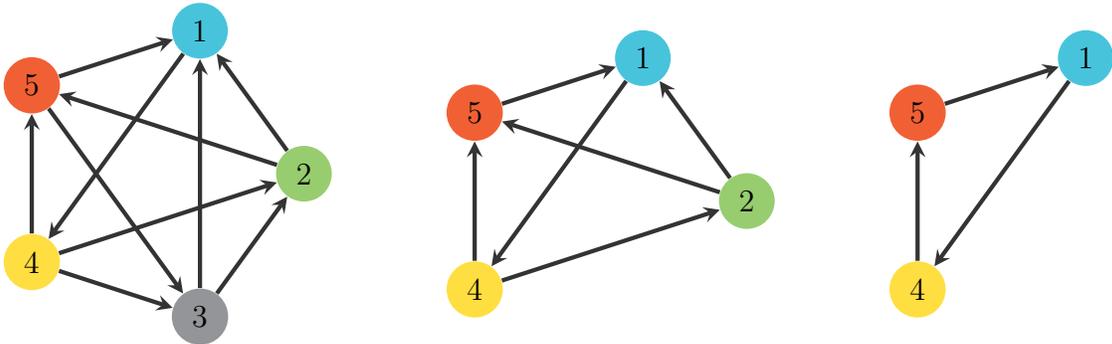
Analizaremos el torneo 5-CU siguiendo este último algoritmo.

Fase I: Analicemos los vértices según su grado de entrada: El único vértice con grado de entrada igual a uno es el vértice 4, nuevamente no lo podemos eliminar pues se crearía un sumidero en el vértice 1. Tenemos tres vértices con grado de entrada igual a dos, estos son 2, 3, y 5, la remoción de cualquiera de estos no crea ningún sumidero, por lo que se divide la Fase I en tres posibilidades y por lo tanto, obtendremos tres secuencias distintas.



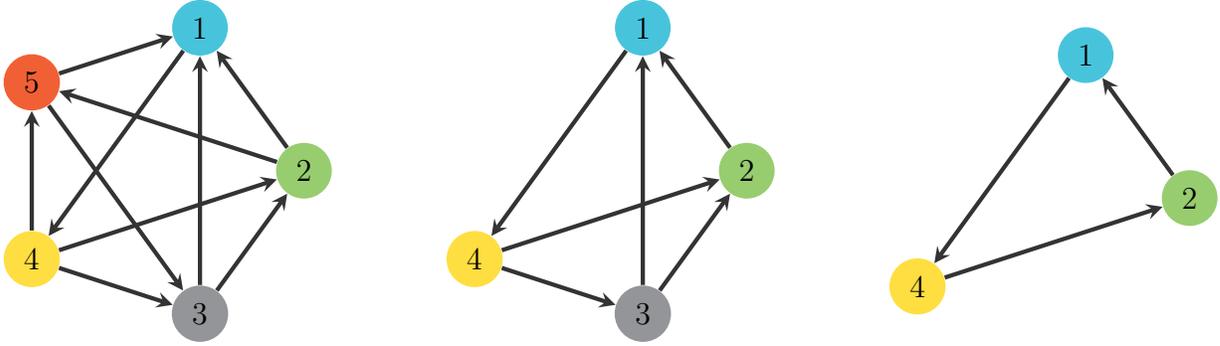
Primer posibilidad: Eliminamos el vértice 2. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 4 y 5. Eliminamos el vértice 5, pues si removemos el vértice 4 crearíamos un sumidero en 1. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 143, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 5 recibe una arista del vértice 4, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 2 recibe aristas de los vértices 4 y 3. El vértice 3 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{4,3\}}$, así que insertamos el vértice 2 después del 3. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es 14532.



Segunda posibilidad: Eliminamos el vértice 3. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 4 y 2. Eliminamos el vértice 2, pues si removemos el vértice 4 crearíamos un sumidero en 1. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 145, estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 2 recibe una arista del vértice 4, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 3 recibe aristas de los vértices 4 y 5. El vértice 5 es sumidero en la subgráfica $G|_{\{4,5\}}$, así que insertamos el vértice 3 después del 5. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es 14253.



Tercer posibilidad: Eliminamos el vértice 5. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 4 y 3. Eliminamos el vértice 3, pues si removemos el vértice 4 crearíamos un sumidero en el vértice 1. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, una gráfica irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 142, estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 3 recibe una arista del vértice 4, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 5 recibe aristas de los vértices 2 y 4. El vértice 2 es sumidero en la subgráfica $G|_{\{2,4\}}$, así que insertamos el vértice 5 después del 2. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **14325**.

Secuencia final: El algoritmo nos da tres secuencias: **14532**, **14253** y **14325**. Las neuronas 1 y 4 aparecen en el mismo orden en todas las secuencias, mientras que las neuronas 2, 3, y 5 aparecen en el mismo orden cíclico para todas las posibilidades. Por lo tanto predecimos que las neuronas 2, 3, y 5 disparan al mismo tiempo además, dos de estas neuronas siempre tienen baja tasa de disparo, como su disparo es simultaneo predecimos que todas tendrán una baja tasa de disparo. La secuencia final es **14(253)**.

Nota: A pesar de que esta versión del algoritmo predice correctamente la secuencia, al simular el sistema CTLN con parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$ encontramos condiciones iniciales con las que las neuronas disparan siguiendo otra secuencia, en la cual las neuronas 2, 3, y 5 pierden la sincronía.

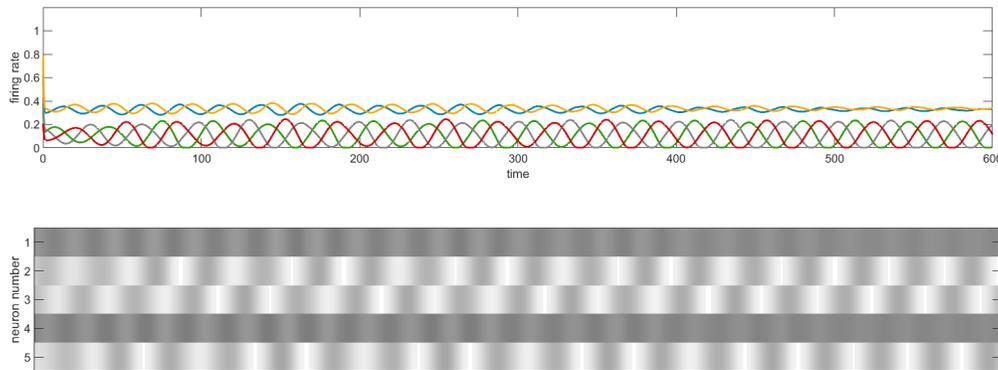




Figura 3.8: Deconstrucción de un 5-torneo con secuencia de grados de entrada 22222. Esta gráfica es un 5-torneo cíclicamente simétrico, al que llamaremos también 5-estrella.

Analizamos la 5-estrella siguiendo la versión 2019.

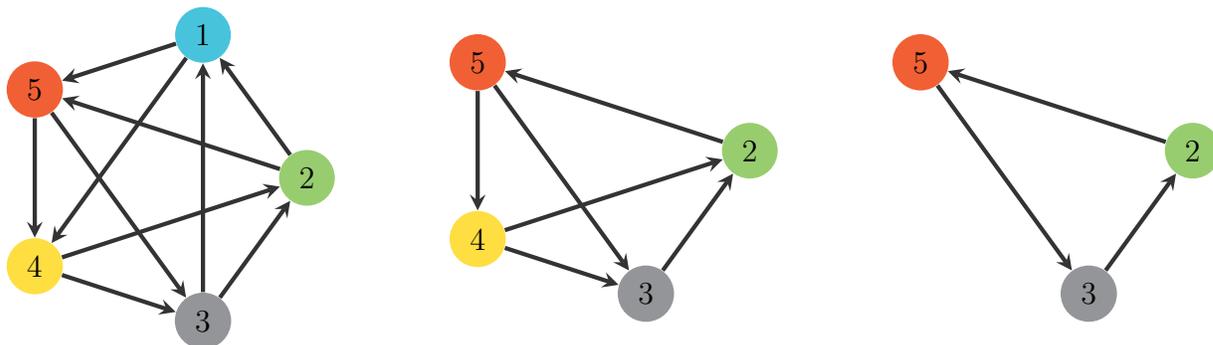
Fase I: El torneo original es cíclicamente simétrico, por lo que se considera irreducible y no se elimina ningún vértice.

Fase II: El ciclo corazón es 54321, por lo que estas serán las neuronas con alta tasa de disparo. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **54321**.

Gráfica de 3-ciclos: G tiene cinco 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Observamos que la gráfica es un ciclo, indicando que todas las neuronas tienen la misma implicación en la dinámica. Por lo tanto, todas las neuronas tienen una alta tasa de disparo.

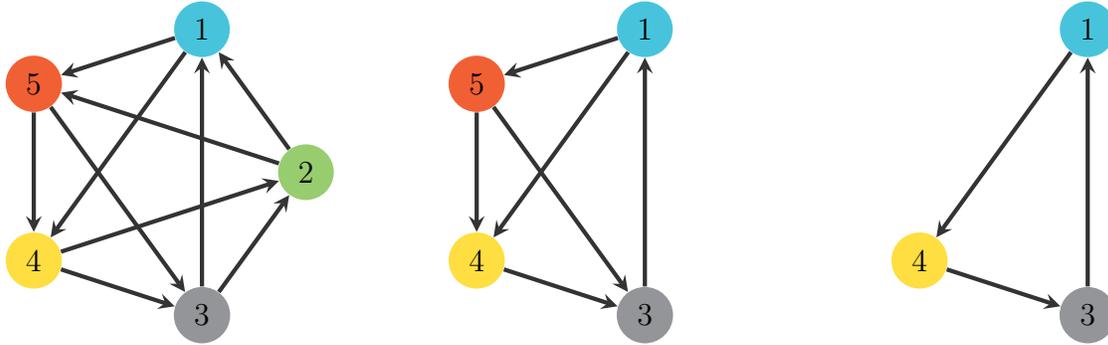
A pesar de que la versión 2019 funciona correctamente, analizaremos también la 5-estrella con la versión 2017 del algoritmo, pues la usaremos como referencia para el análisis de algunos torneos que aparecerán más adelante.

La simetría del torneo hace que los vértices sean indistinguibles por lo que tendremos cinco posibles secuencias, una por cada 3-ciclo en G .



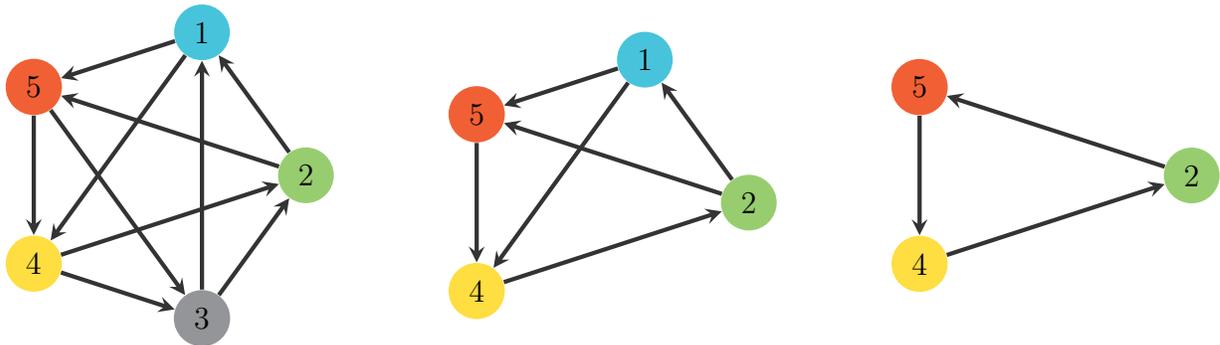
Primer posibilidad: Eliminamos el vértice 1. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 4 y 5. Eliminamos el vértice 4, pues si removemos el vértice 5 crearíamos un sumidero en el vértice 2. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, esta es irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 253, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 4 recibe una arista del vértice 5, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 1 recibe aristas de los vértices 2 y 3. El vértice 2 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{2,3\}}$, así que insertamos el vértice 1 después del 2. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **21543**.



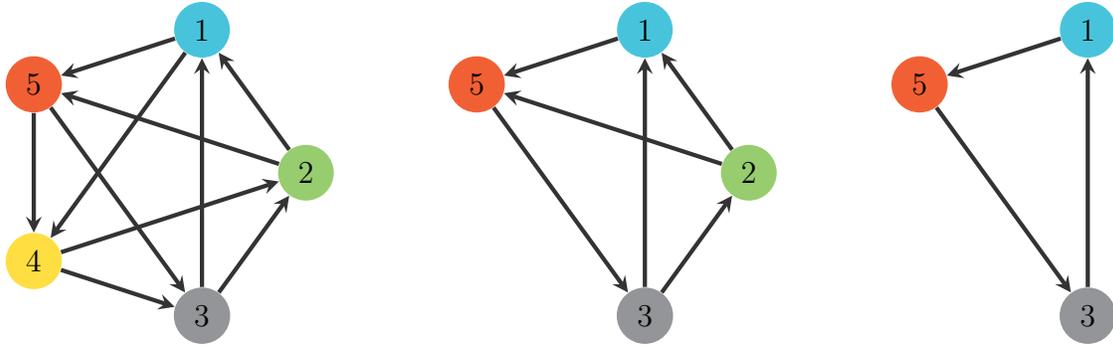
Segunda posibilidad: Eliminamos el vértice 2. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 1 y 5. Eliminamos el vértice 5, pues si removemos el vértice 1 crearíamos un sumidero en el vértice 3. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, esta es irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 143, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 5 recibe una arista del vértice 1, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 2 recibe aristas de los vértices 3 y 4. El vértice 3 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{3,4\}}$, así que insertamos el vértice 2 después del 3. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **15432**.



Tercer posibilidad: Eliminamos el vértice 3. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 1 y 2. Eliminamos el vértice 1, pues si removemos el vértice 2 crearíamos un sumidero en el vértice 4. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, esta es irreducible, concluyendo la Fase I.

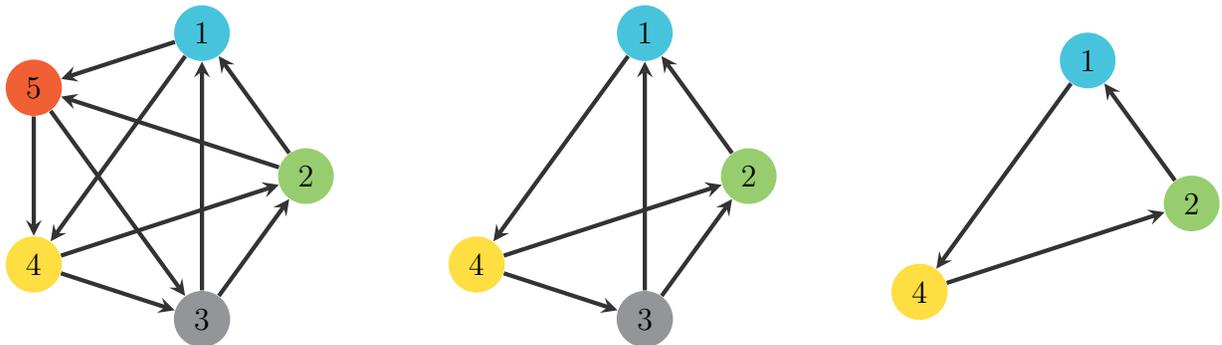
Fase II: El ciclo corazón es 254, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 1 recibe una arista del vértice 2, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 3 recibe aristas de los vértices 4 y 5. El vértice 4 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{4,5\}}$, así que insertamos el vértice 3 después del 4. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **21543**.



Cuarta posibilidad: Eliminamos el vértice 4. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 2 y 3. Eliminamos el vértice 2, pues si removemos el vértice 3 crearíamos un sumidero en el vértice 5. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, esta es irreducible, concluyendo la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 153, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 2 recibe una arista del vértice 3, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 4 recibe aristas de los vértices 1 y 5. El vértice 5 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{15\}}$, así que insertamos el vértice 4 después del 5. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **15432**.

Quinta posibilidad: Eliminamos el vértice 5. Reiniciamos el algoritmo. Tenemos dos vértices con grado de entrada igual a uno, a saber los vértices 3 y 4. Eliminamos el vértice 3, pues si removemos el vértice 4 crearíamos un sumidero en el vértice 1. La subgráfica resultante es un 3-ciclo, esta es irreducible, concluyendo la Fase I.

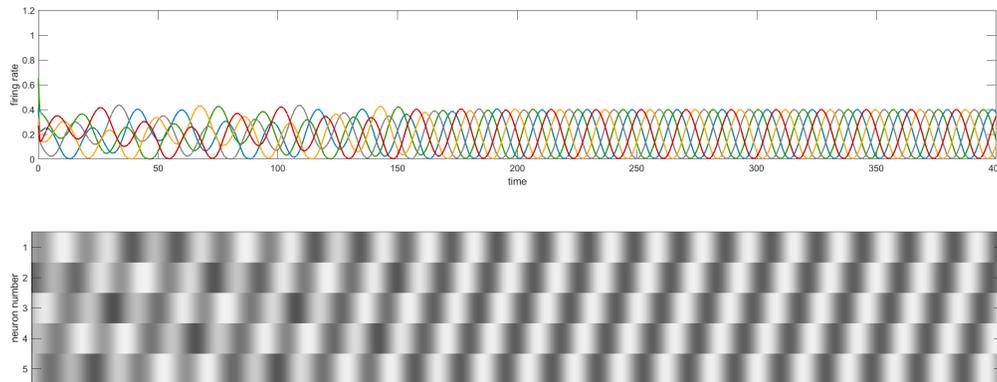


Fase II: El ciclo corazón es 142, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo. El vértice 3 recibe una arista del vértice 4, así que lo incorporamos a la secuencia después de este. El vértice 5 recibe aristas de los vértices 1 y 2. El vértice 1 es un sumidero en la subgráfica $G|_{\{12\}}$, así que insertamos el vértice 5 después del 1. El algoritmo termina. La secuencia obtenida es **15432**.

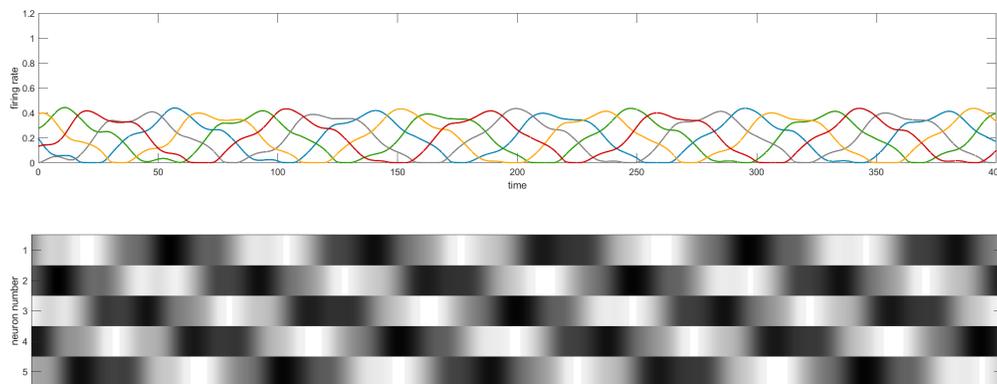
Secuencia Final: El algoritmo arroja cinco secuencias diferentes: **21543**, **15432**, **21543**, **15432** y **15432**. Todas las secuencias incluyen a todas las neuronas disparando en exactamente el mismo orden cíclico sin embargo, no queda claro cuales serán las que tienen alta tasa de disparo ya que en cada una de las posibilidades, las neuronas con alta y baja tasa de disparo cambian y, considerando todas las secuencias como la misma, cada neurona aparece

tres veces con alta tasa de disparo en dos con baja. Concluimos, gracias a la simetría del torneo, que la tasa de disparo va a ser la misma para todas las neuronas y por lo tanto la secuencia será **54321**.

El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$, por lo tanto la gráfica es un motivo corazón (ver Capítulo 4). Al simular el sistema nos damos cuenta que ambas herramientas funcionan correctamente.



En este caso, a pesar de que solamente se tiene un soporte $\sigma = \{12345\}$ y este está garantizado para todos los valores de ϵ , δ , y θ dentro del rango legal, observamos dos atractores diferentes. El primero es claramente periódico, el segundo no. Ambos fueron obtenidos con los mismos parámetros, $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$, pero con distintas condiciones iniciales. Al atractor quasiperiódico se le ha nombrado como *Atractor de Gaudí* y se tienen la conjetura de que la energía total $\sum_{i=1}^5 x_i$ es constante [4]. Curiosamente, este atractor sigue la secuencia **14253**, que es el ciclo que se forma siguiendo las aristas que forman la estrella.



En cuanto al torneo 5-CU, la versión 2017 predijo correctamente la secuencia, mientras que la versión 2019 indica que la gráfica es irreducible. Hasta cierto punto esto es correcto, pues el sistema CTLN tiene un punto fijo con soporte completo sin embargo, el algoritmo falla en dar la secuencia.

En cuanto a la 5-estrella, el algoritmo actualizado indica que la gráfica es irreducible y la secuencia obtenida es la correcta. Por otro lado, si queremos aplicar la versión 2017, esta se

dividiría en bastantes casos, haciendo el análisis mucho más extenso que con la versión 2019.

El error para el torneo 5-CU podría ser evitado si, en lugar de detener el algoritmo en gráficas cíclicamente simétricas lo hacemos en gráficas con soporte completo (motivos corazón). Sin embargo, no se tiene conocimiento de todos los motivos corazón para $n > 5$ y además no todos reconocibles a simple vista. Exploraremos esta conjetura usando los dos últimos 5-torneos como base para construir 6-torneos. Los analizaremos con ambas versiones del algoritmo y veremos qué sucede si tomamos ambos torneos como irreducibles.

6-torneos

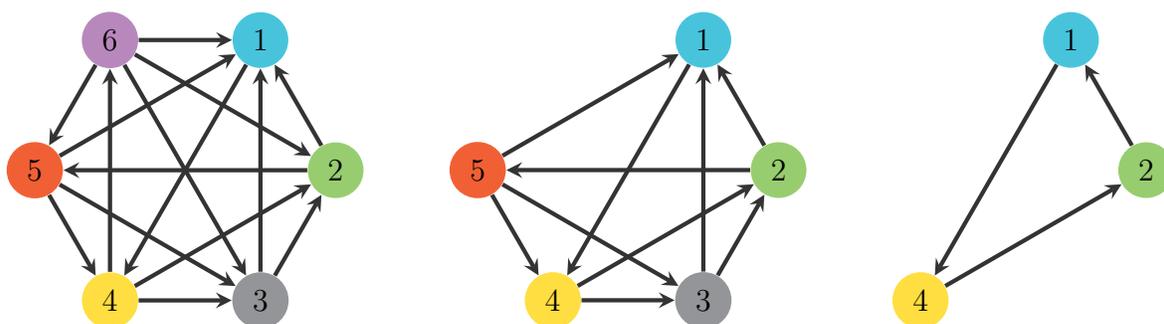


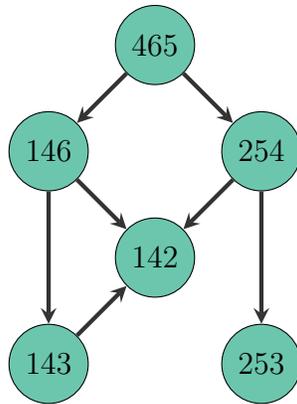
Figura 3.21: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 433221.

Comenzamos el análisis de 6-torneos estudiando una gráfica que se reduce a un 3-ciclo, comprobando que ambas versiones del algoritmo de predicción de secuencias coinciden cuando en cada paso hay exactamente un posible vértice para eliminar. Es decir, cuando ambos algoritmos finalizan la Fase I con solamente un ciclo corazón y, por lo tanto el algoritmo arroja una única secuencia de disparo.

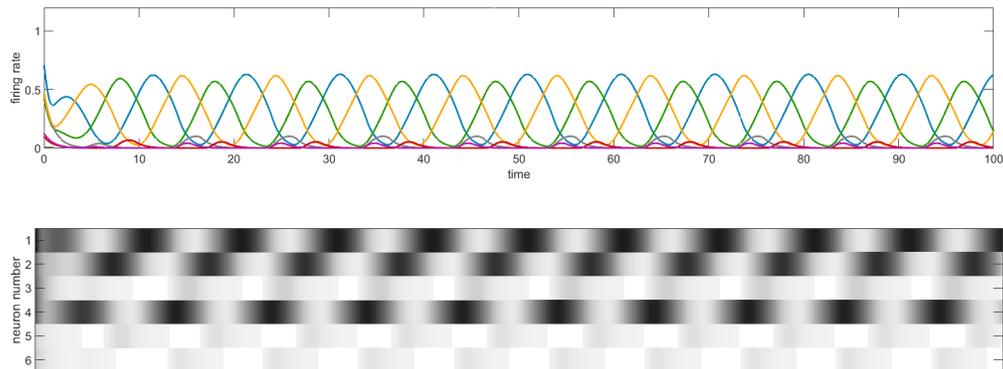
Fase I: G no tiene fuentes. Procedemos con el Paso 2. Solamente hay un vértice con grado de entrada igual a uno, a saber el vértice 6, lo eliminamos pues al hacerlo no se crea ningún sumidero. La subgráfica obtenida $G|_{\{12345\}}$ es la misma que en la Figura 3.6. Siguiendo los mismos pasos obtenemos el 3-ciclo 142.

Fase II: El ciclo corazón es 142. Para la Figura 3.6 tenemos la secuencia **14325**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4, que forma parte del ciclo corazón. De esta manera, debemos de insertar en la secuencia al vértice 6 después del 4. Como tenemos la arista $6 \rightarrow 3$, este debe ser insertado antes del vértice 3. La secuencia final es **146325**.

Gráfica de 3-ciclos: G contiene seis 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Tenemos sumideros en los vértices 142 y 253, como el grado de entrada del vértice 142 es mayor al del 253, concluimos que las neuronas 1, 2, y 4 tendrán una alta tasa de disparo. Mientras que los vértices 3 y 5 tendrán una tasa de disparo menor. $GC(G)$ no refleja el comportamiento del vértice 6.



El sistema CTLN asociado a G tiene solamente un punto fijo cuyo soporte es $\{142\}$. Ambas versiones del algoritmo y la gráfica de 3-ciclos predicen correctamente las neuronas con alta tasa de disparo sin embargo, la gráfica de 3-ciclos falla en mostrar la actividad de uno de los vértice.



Los siguientes ejemplos tienen como base al torneo 5-CU (Figura 3.7), al que le agregamos el vértice 6 y colocamos distintos conjuntos de aristas. Usaremos la versión 2017 del algoritmo y, en caso de que el vértice 6 sea removido primero, aprovecharemos el análisis que ya se ha hecho sobre $G_{\{12345\}}$. Cabe señalar que en 5-CU, los vértices 2, 3, y 5 son equivalentes en el sentido de que están encajados de la misma manera en el torneo, por lo que solo analizaremos los casos que son no isomorfos.

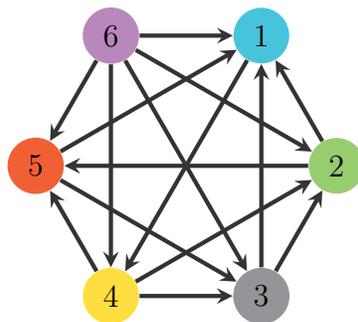


Figura 3.10: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 433230.

Fase I: Eliminamos el vértice 6 por ser fuente. Reiniciamos el algoritmo. La subgráfica $G|_{\{12345\}}$ ya ha sido analizada.

Fase II: La secuencia para $G|_{\{12345\}}$ es **14(253)**. El vértice 6, al ser fuente no debe de ser insertado en la secuencia, así que concluimos que la secuencia final es **14(253)**. Observamos que ambas versiones del algoritmo funcionan para este torneo.

La dinámica en este torneo es la esperada, pues el vértice 6 no debe de tener ninguna influencia en la dinámica de G . Nos abstenemos de mostrar la gráfica de 3-ciclos y las simulaciones de la dinámica ya que son idénticas a las del análisis 5-CU. Ahora analizaremos qué sucede si el vértice 6 tiene grado de entrada igual a uno.



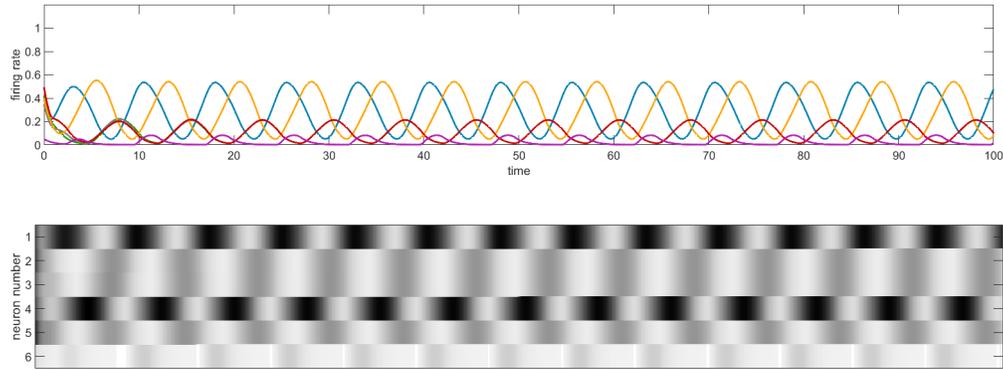
Figura 3.11: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 333231.

Fase I: G no tiene fuentes. Eliminamos el vértice 6 pues tiene grado de entrada uno y $G|_{\{12345\}}$ no tiene ningún sumidero. Reiniciamos el algoritmo. La subgráfica $G|_{\{12345\}}$ ya fue analizada previamente.

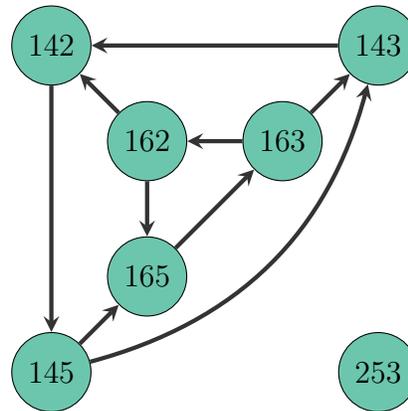
Fase II: La versión 2017 del algoritmo aplicada al subtorneo $G|_{\{12345\}}$ nos arroja tres secuencias distintas, las retomamos y exploramos una por una.

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **14532**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 1, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **164532**.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 y la secuencia preliminar es **14253**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 1, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **164253**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **14325**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 1, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **164325**.

Secuencia final: Tenemos tres posibles secuencias. En todas ellas, los vértices 1, 4, y 6 disparan en el mismo orden y los vértices restantes disparan en el mismo orden cíclico, así que predecimos que las neuronas 2, 3, y 5 dispararán al mismo tiempo y tendrán una baja tasa de disparo. La secuencia final es **164(253)**.

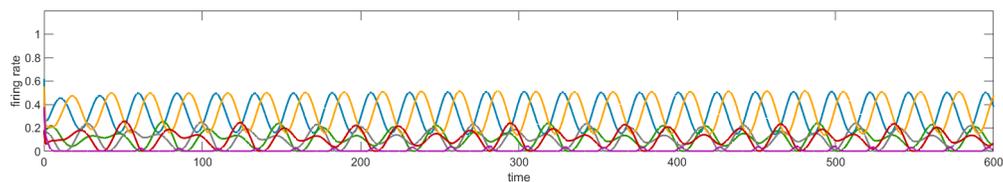


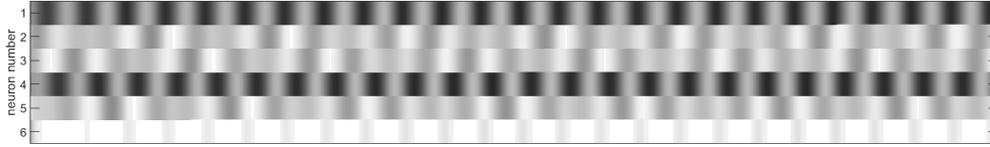
El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$. La versión 2017 del algoritmo predice la secuencia de disparo correctamente.



Gráfica de 3-ciclos: G tiene siete 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. $GC(G)$ tiene dos ciclos, uno exterior que es idéntico a la gráfica de 3-ciclos asociado al torneo 5-CU y el interior, en el que está involucrada la neurona 6. Como el 3-ciclo 253 siempre tiene actividad podemos predecir que el vértice 6 tendrá actividad y tendrá baja tasa de disparo, pues el ciclo interno tiene aristas hacia el externo. Las neuronas 1 y 4 mantienen su alta tasa de disparo.

Nota: La versión 2019 del algoritmo funciona para esta gráfica. Si consideramos a la gráfica 5-CU como irreducible, el algoritmo señala que el vértice 6 tiene que ser removido en el Paso 2 de la Fase I y en la Fase II este debe de ser insertado en la secuencia después del vértice 1. Ambos algoritmos arrojan la misma secuencia. A pesar de esto al cambiar los parámetros encontramos condiciones iniciales con las cuales el sistema CTLN sigue la secuencia pero pierde la sincronía.





Analicemos el torneo para el cual, la arista que entra al vértice 6 viene de uno de los vértices del 3-ciclo principal, en este caso del vértice 2 para investigar si la neurona 6 mantiene su actividad en el sistema.



Figura 3.12: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 423231.

Fase I: Eliminamos el vértice 6 en el Paso 2, pues tiene grado de entrada uno y $G|_{\{12345\}}$ no tiene ningún sumidero. Reiniciamos el algoritmo. La subgráfica $G|_{\{12345\}}$ ya fue analizada previamente.

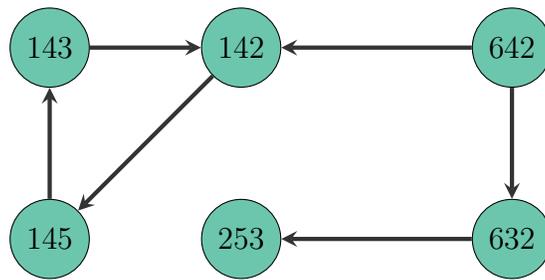
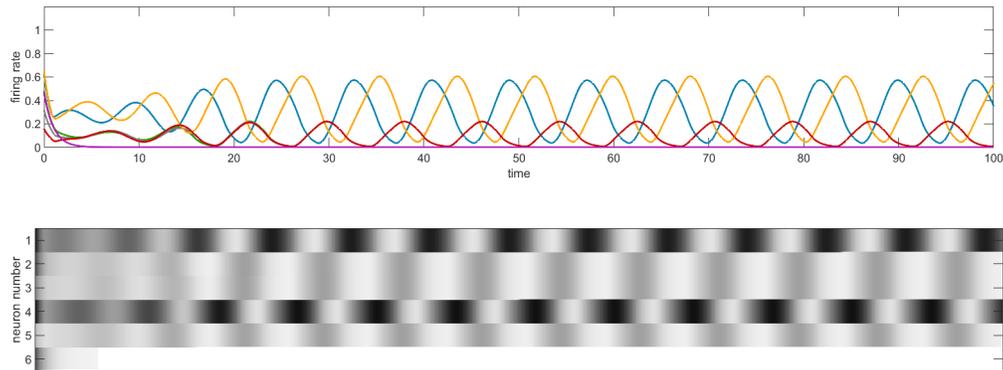
Fase II: La versión 2017 del algoritmo aplicada al subtorneo $G|_{\{12345\}}$ nos arroja tres secuencias distintas, las retomamos y exploramos una por una.

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **14532**. El vértice 6 no recibe aristas desde alguno de los vértices en el ciclo corazón, así que no se inserta en la secuencia.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 y la secuencia preliminar es **14253**. El vértice 6 no recibe aristas desde alguno de los vértices en el ciclo corazón, así que no se inserta en la secuencia.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **14325**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 2, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. Como el vértice 5 está después del 2, la arista $6 \rightarrow 5$ nos indica que primero debemos colocar el vértice 6. La secuencia obtenida es **143265**.

Secuencia final: Las secuencias que arrojan las posibilidades uno y dos son equivalentes, pues las neuronas 2, 3 y 5 siguen el mismo orden cíclico y dispararán simultáneamente, nuestro conocimiento previo nos permite predecir que tendrán baja tasa de disparo. La secuencias que obtenemos son **14(253)** y **143265**.

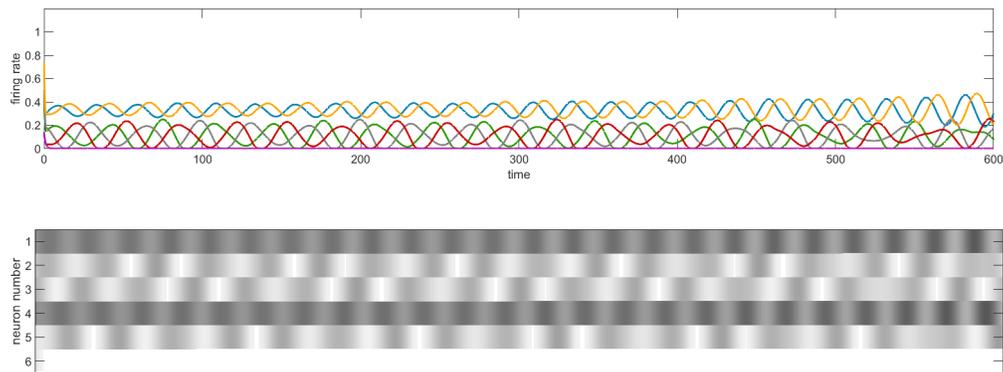
El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$. La versión

2017 del algoritmo predice una de las secuencias de disparo correctamente.



Gráfica de 3-ciclos: G tiene seis 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. La parte izquierda de $GC(G)$ es idéntica a la de la Figura 2.7. Sin embargo añadimos dos vértices y ahora la gráfica es conexa. El ciclo y el sumidero nos indican que todas las neuronas excepto por la 6 disparan.

Nota: La versión 2019 del algoritmo fallaría para esta gráfica. Si suponemos que la gráfica 5-CU es irreducible, el algoritmo señala el vértice 6 tiene que disparar después del 2 y esto no sucede.



Al igual que en ejemplos anteriores, exploramos el comportamiento del sistema CTLN con diferentes parámetros, en este caso, para $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$ encontramos condiciones iniciales con las cuales la sincronía de las neuronas 2, 3, y 5 parece que se pierde sin embargo, a partir de $T = 1000$ recuperamos el mismo comportamiento de la simulación anterior. No encontramos secuencias en las que la neurona 6 tiene actividad.



Figura 3.13: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 433131.

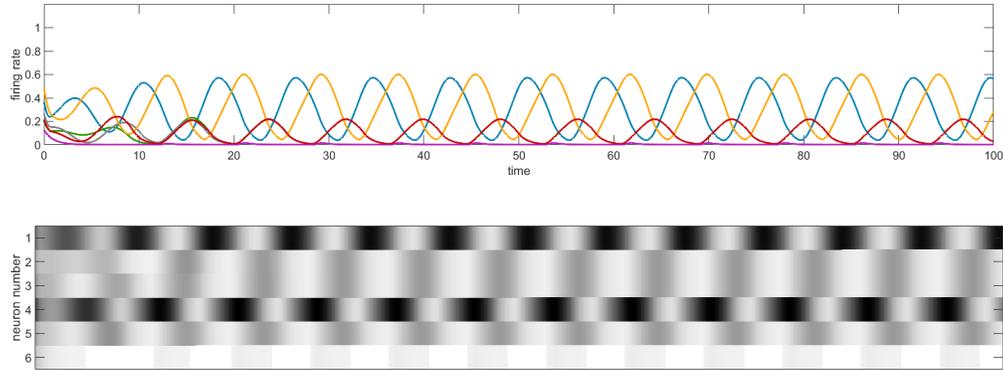
Fase I: G tiene dos vértices con grado de entrada uno, a saber los vértices 4 y 6. Eliminamos el vértice 6, pues $G|_{\{12345\}}$ no tiene ningún sumidero. Además, si eliminamos el vértice 4, crearíamos un sumidero en 1. Reiniciamos el algoritmo. La subgráfica $G|_{\{12345\}}$ ya fue analizada previamente.

Fase II: La versión 2017 del algoritmo aplicada al subtorneo $G|_{\{12345\}}$ nos arroja tres secuencias distintas, las retomamos y exploramos una por una. Podemos intuir que, como el vértice 4 está en los tres ciclos corazón y tenemos la arista $4 \rightarrow 6$, entonces tendremos secuencias análogas a las del análisis de la Figura 3.11 y siempre insertaremos el vértice 6 después del 4. Así que solamente tenemos que determinar su lugar exacto en la secuencia.

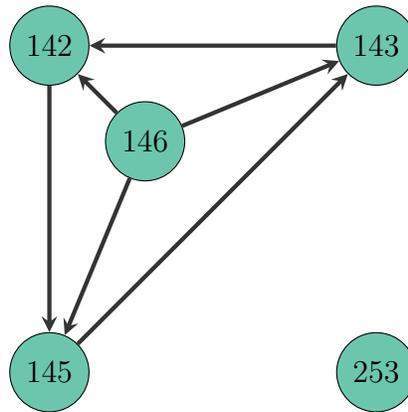
- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **14532**. El vértice 6 debe ser insertado después del vértice 4. Tenemos la arista $6 \rightarrow 5$, así que lo colocamos antes del 5. La secuencia obtenida es **146532**.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 y la secuencia preliminar es **14253**. El vértice 6 debe ser insertado después del vértice 4. Tenemos la arista $6 \rightarrow 2$, así que lo colocamos antes del 2. La secuencia obtenida es **146253**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **14325**. El vértice 6 debe ser insertado después del vértice 4 y antes del 3, pues tenemos la arista $6 \rightarrow 3$. La secuencia obtenida es **146325**.

Secuencia final: Tenemos tres posibles secuencias de la misma longitud. Las neuronas 2, 3, y 5 disparan en el mismo orden cíclico, así que predecimos que disparan al mismo tiempo. Nuestro conocimiento previo nos permite predecir que tendrán baja tasa de disparo. La secuencia final es **146(253)**.

El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$. El algoritmo predice la secuencia de disparo correctamente. La actividad del vértice 6 es muy pequeña y no puede ser notada en las curvas de disparo.



Gráfica de 3-ciclos: G tiene cinco 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. $GC(G)$ es casi idéntica a la gráfica de 3-ciclos asociado al torneo 5-CU, salvo por el vértice 146 que, al ser fuente no afecta a la predicción de la dinámica. De la gráfica podemos concluir que la dinámica del sistema CTLN asociado será idéntica al 5-CU. Por lo tanto, $GC(G)$ falla al no predecir la actividad del vértice 6.



Nota: La versión 2019 del algoritmo funciona para esta gráfica. Si suponemos que la gráfica 5-CU es irreducible, el algoritmo señala que tiene el vértice 6 tiene que disparar después del 4 y así sucede.

Ahora analizaremos la dinámica si el vértice 6 tiene grado de entrada igual a dos. Ya sabemos que, si una de las aristas viene del vértice 1 o del 4, la neurona 6 va a tener actividad. Por lo que podemos decir (y de hecho así sucede) que, si a los torneos de las Figuras 3.11 y 3.13 les cambiamos el sentido de una de las aristas que tienen dirección $6 \rightarrow i$, en donde i es el vértice 2, 3 o 5, el vértice 6 se vuelve libremente removible y, por lo tanto la dinámica sigue gobernada por la subgráfica $G|_{\{12345\}}$.

Los torneos mencionados están representados en la Figura 3.14, tienen un único punto fijo con soporte $\{12345\}$ y las seis neuronas están involucradas en la dinámica sin embargo, se pierde la sincronía de las neuronas 2, 3, y 5.

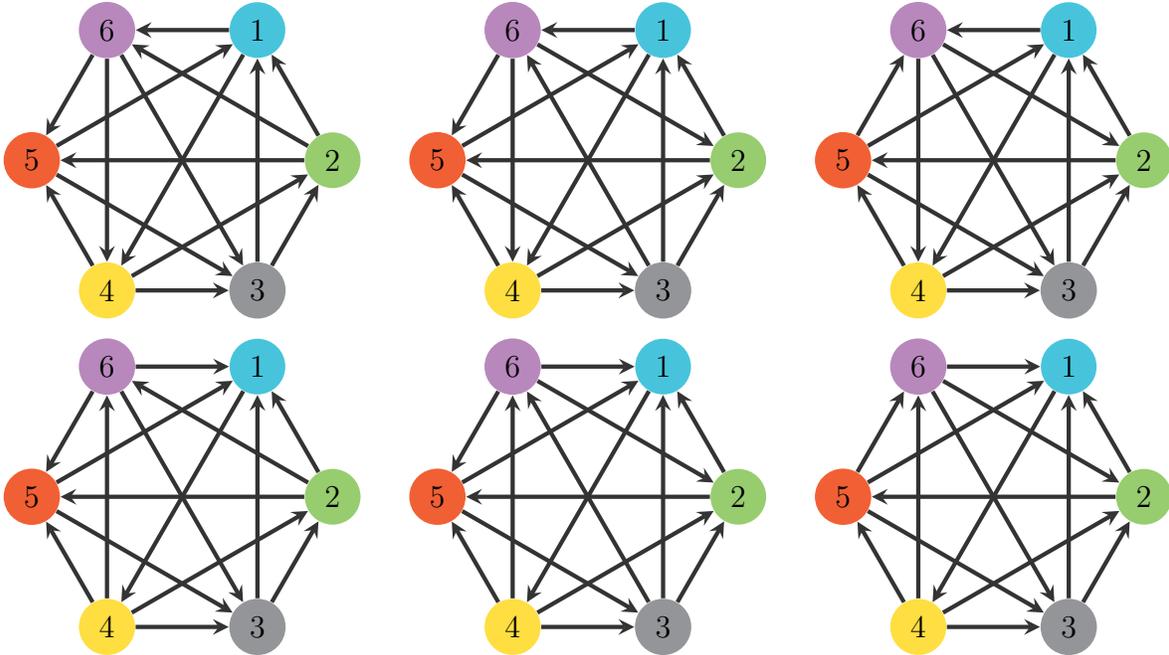


Figura 3.14: 6-torneos con secuencias no ordenadas de grados de entrada 323232 (arriba) y 423132 (abajo). Los torneos son isomorfos por renglones.

Si a la Figura 3.11 le cambiamos la dirección de la arista $6 \rightarrow 4$ y a la Figura 3.13 le cambiamos la dirección de la arista $6 \rightarrow 1$, obtenemos una gráfica isomorfa al torneo de la Figura 3.11. Así que los casos de interés son obtenidos al cambiar la dirección de las aristas $6 \rightarrow 3$ y/o $6 \rightarrow 5$ del torneo representado en la Figura 3.12.

Analizamos estos dos torneos siguiendo la versión 2017 del algoritmo pero priorizando la eliminación de los vértices libremente removibles según su grado de entrada.



Figura 3.15: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 422232.

Fase I: Todos los vértices de G tienen grado de entrada mayor a uno, procedemos investigando los vértices libremente removibles. Solamente hay un 3-ciclo con dos destinos, a saber el ciclo $\{253\}$, cuyos destinos son los vértices 1 y 6. Removemos el último pues el que tiene grado de entrada menor. La subgráfica resultante $G|_{\{12345\}}$ ya ha sido analizada con anterioridad y tiene soporte completo.

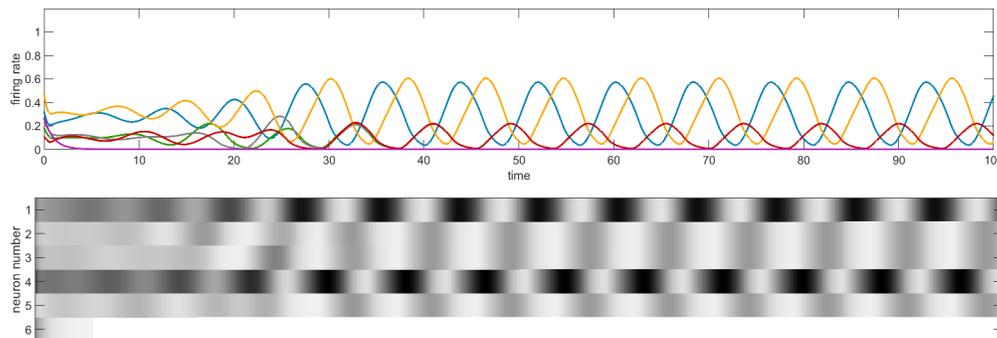
Fase II: Una vez eliminado el vértice 6, el algoritmo arroja tres posibles secuencias para

la subgráfica $G|_{\{12345\}}$. Analizaremos caso por caso.

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **14532**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 3, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. Tenemos la arista $2 \rightarrow 6$, así que colocamos el vértice 6 después del 2. La secuencia obtenida es **145326**.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 y la secuencia preliminar es **14253**. El vértice 6 no recibe aristas desde alguno de los vértices en el ciclo corazón, así que no se inserta en la secuencia.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **14325**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 2, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. Como el vértice 5 también va después del 2, la arista $6 \rightarrow 5$ nos indica que primero debemos colocar el vértice 6. La secuencia obtenida es **143265**.

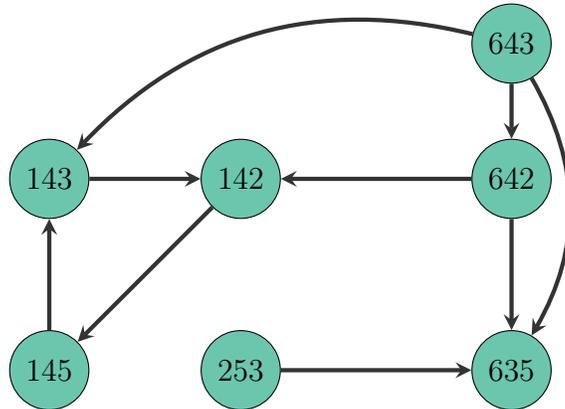
Secuencia final: Consideraremos a las posibles secuencias uno y tres como la misma, pues las neuronas 2, 3, 5, y 6 disparan en el mismo orden cíclico, así que las colocaremos entre paréntesis. Para la segunda posibilidad tomamos la idea de que los vértices 2, 3, y 5 disparan al mismo tiempo. Las secuencias obtenidas son **14(253)** y **14(5326)**.

Nota: La versión 2019 del algoritmo fallaría para esta gráfica. Si suponemos que la gráfica 5-CU es irreducible, el algoritmo señala que el vértice 6 tiene que disparar después del 2, pues tenemos la arista $3 \rightarrow 2$ y esto no sucede.



El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$. La versión 2017 del algoritmo predice la secuencia de disparo correctamente.

Gráfica de 3-ciclos: G tiene siete 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. La parte izquierda de $GC(G)$ es idéntica a la de la Figura 2.7. El ciclo y el sumidero nos indican que todas las neuronas, incluyendo la 6, disparan. Por lo que, $GC(G)$ no predice correctamente las neuronas activas.



Con parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 1,12$, y $\theta = 1$ observamos otra secuencia para la cual la neurona 6 tampoco tiene actividad y se pierde la sincronía en las neuronas 2, 3, y 5.

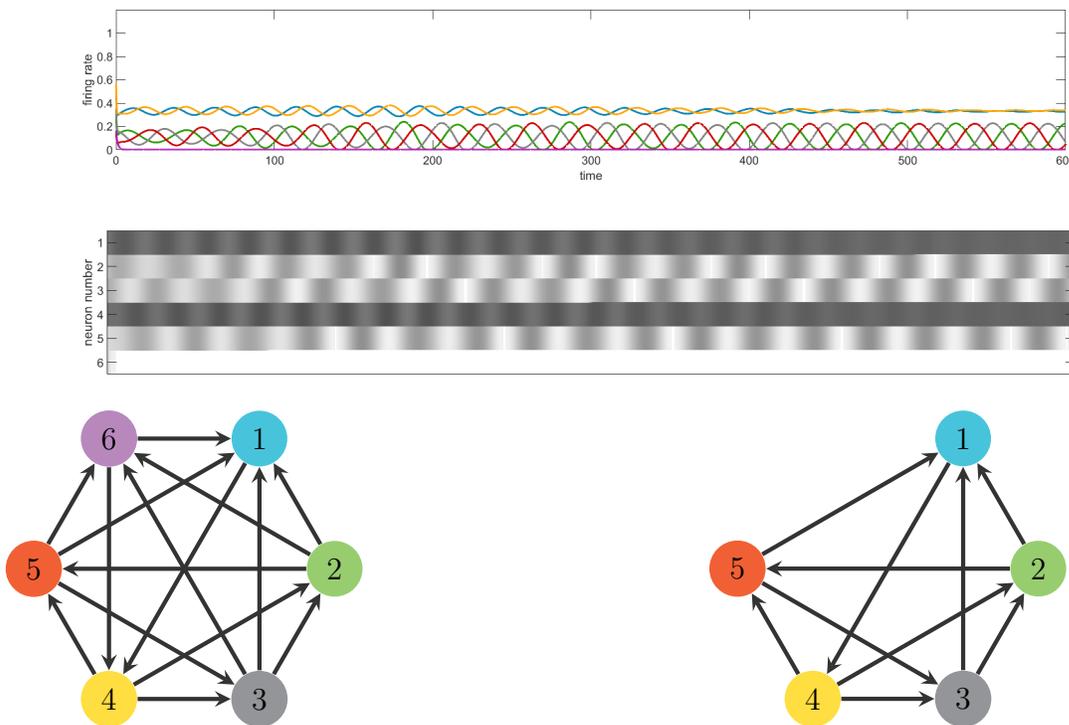


Figura 3.16: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 422223.

Fase I: Al igual que en el torneo anterior, el único 3-ciclo con más de un destinos es $\{253\}$, cuyos destinos son los vértices 1 y 6. Removemos el último pues tiene menor grado de entrada. La subgráfica resultante $G|_{\{12345\}}$ ya ha sido analizada con anterioridad y tiene soporte completo.

Fase II: Una vez eliminado el vértice 6, para la subgráfica $G|_{\{12345\}}$, el algoritmo arroja tres posibles secuencias, analizaremos caso por caso.

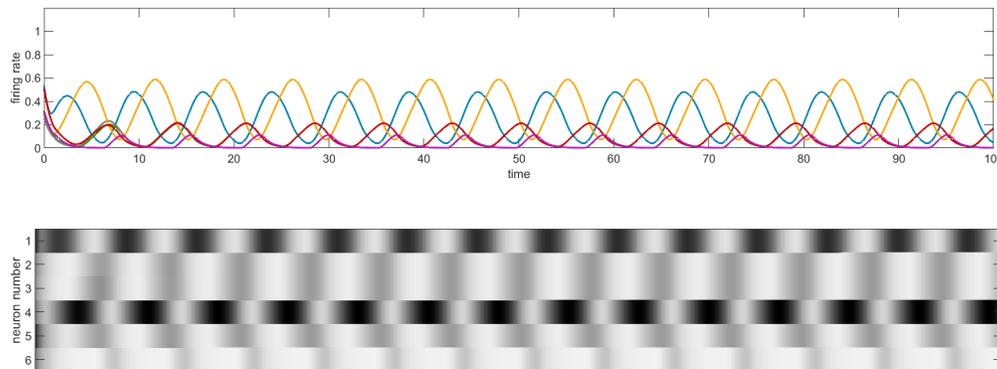
- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **14532**.

El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 3, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. La arista $2 \rightarrow 6$ nos indica que hay que colocarlo después del vértice 2. La secuencia obtenida es **145326**.

- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 y la secuencia preliminar es **14253**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 5, por lo que debe de ser insertado después de este y después del 3, pues tenemos la arista $3 \rightarrow 6$. La secuencia final es **142536**
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **14325**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 2, así que debe de ser insertado en la secuencia después de este. La arista $5 \rightarrow 6$ nos indica que hay que colocarlo después del vértice 5. La secuencia obtenida es **143256**.

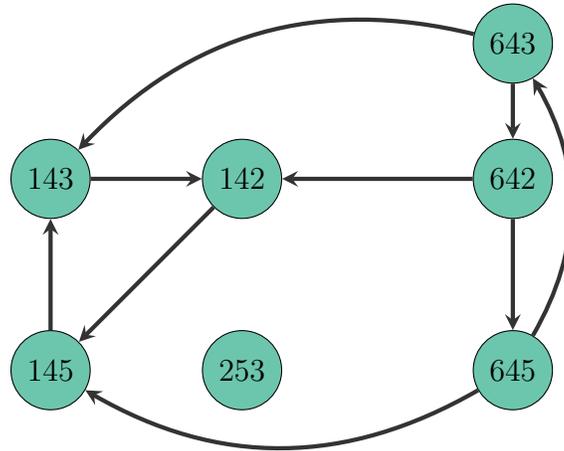
Secuencia final: Tenemos tres posibles secuencias, todas con la misma longitud. En todas las posibilidades, las neuronas 2, 3, y 5 disparan el el mismo orden cíclico, mientras que las restantes tienen la misma posición. Nuevamente, predecimos que estas tendrán baja tasa de disparo. Por lo tanto, el algoritmo arroja una sola secuencia: **14(253)6**.

Nota: Usando la versión 2019 del algoritmo, si consideramos a la gráfica 5-CU como irreducible, el algoritmo señala que tiene el vértice 6 tiene ser introducido en la secuencia pero no indica en qué posición, pues debe de disparar después de cada vértice que es un sumidero en $G|_{\{235\}}$ sin embargo, esta subgráfica es un ciclo.

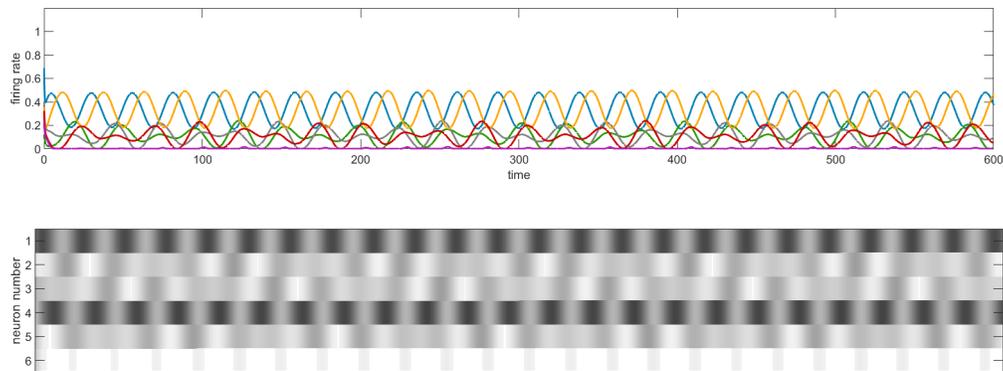


El sistema CTLN asociado a G tiene un sólo punto fijo cuyo soporte es $\{12345\}$. La versión 2017 del algoritmo predice la secuencia de disparo correctamente.

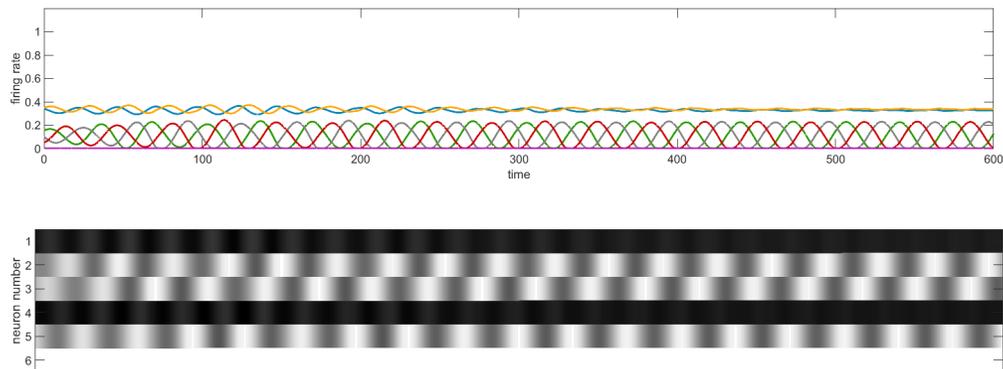
Gráfica de 3-ciclos: G tiene siete 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Tenemos dos ciclos que involucran a las seis neuronas, indicando que todas disparan. Por lo que, $GC(G)$ predice de manera correcta las neuronas activas. De nuevo, tenemos un vértice aislado, indicando que las neuronas del ciclo $\{235\}$ disparan, pero no necesariamente al mismo tiempo.



Con parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 1,12$, y $\theta = 1$ observamos otra secuencia en la cual todas las neuronas están activas pero se pierde la sincronía de las neuronas 2, 3, y 5. Las tres herramientas predicen correctamente las neuronas activas sin embargo, la versión 2019 del algoritmo falla en dar una secuencia.



A pesar del hecho de que el algoritmo predice actividad en el vértice 6 para todas las secuencias posibles, con los mismos parámetros que la simulación anterior, observamos otra secuencia en la cual las neuronas 1 y 4 disparan constantemente, los vértices 2, 3, y 5 disparan en perfecto orden cíclico y el vértice 6 no tiene actividad.



Supervivencia del atractor de la 5-estrella

Construimos 6-torneos tomando como base a la 5-estrella (Figura 3.8). Los analizamos siguiendo la versión 2017, pero priorizamos la remoción de vértices libremente removibles. La 5-estrella es una gráfica irreducible y, debido a la simetría del torneo, los cinco vértices son indistinguibles. Usaremos esta propiedad para analizar la menor cantidad de ejemplos.

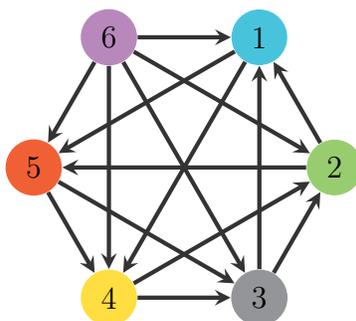


Figura 3.17: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 333330.

Fase I: Eliminamos el vértice 6 por ser fuente. Reiniciamos el algoritmo. La subgráfica $G|_{\{12345\}}$ ya ha sido analizada anteriormente y es irreducible.

Fase II: La secuencia para $G|_{\{12345\}}$ es **54321**. El vértice 6, al ser fuente no debe de ser insertado en la secuencia. La secuencia final es **54321**. Ambas versiones del algoritmo funcionan para este torneo.

La dinámica es la esperada. El vértice 6, al ser fuente, no debería influir en ella. G tiene un único punto fijo con soporte $\{12345\}$. No mostramos la gráfica de 3-ciclos ni simulaciones pues estas son idénticas a la de la 5-estrella.

Ahora veamos qué sucede si el vértice 6 recibe una arista. Como los vértices son indistinguibles, supongamos sin pérdida de generalidad que dicha arista viene desde el vértice 4.



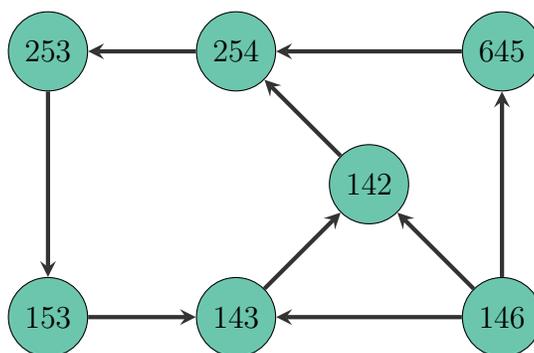
Figura 3.18: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 333231.

Fase I: G no tiene fuentes. Procedemos con el Paso 2. Solamente existe un vértice con grado de entrada uno, a saber el vértice 6. Lo removemos pues al hacerlo no creamos ningún sumidero. La subgráfica resultante $G|_{\{12345\}}$ es irreducible y ya ha sido analizada previamente.

Fase II: El algoritmo nos arroja cinco posibles secuencias, analizaremos caso por caso:

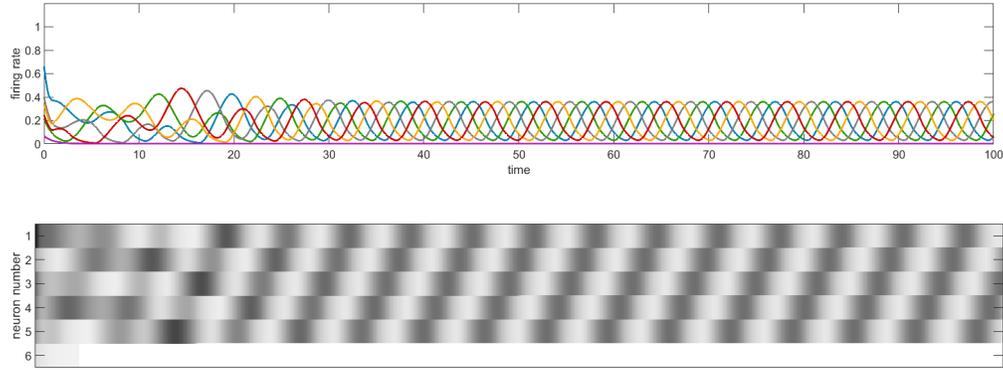
- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 253 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 no recibe aristas desde el ciclo corazón así que no se inserta en la secuencia.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4 y se debe de insertar en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **154632**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 254 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4 y se debe de insertar en la secuencia después de este, como tenemos la arista $6 \rightarrow 3$, se insertará antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **215463**.
- **Cuarta posibilidad:** El ciclo corazón es 153 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 no recibe aristas desde el ciclo corazón así que no se inserta en la secuencia.
- **Quinta posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4 y se debe de insertar en la secuencia después de este, como tenemos la arista $6 \rightarrow 3$, se insertará antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **154632**.

Secuencia final: Las secuencias de las posibilidades uno y cuatro son equivalentes, pues las neuronas disparan en un orden cíclico idéntico. Lo mismo sucede con las tres posibilidades restantes sin embargo, no podemos deducir cuales son las neuronas con alta o baja tasa de disparo así que no las diferenciaremos. Por lo tanto, tenemos dos secuencias que difieren por un vértice: **32154** y **321546**. El algoritmo indica que hay que elegir la más corta. Por lo tanto, concluimos que la secuencia de disparo es **54321** y así, predecimos que el vértice 6 no influye en la dinámica.

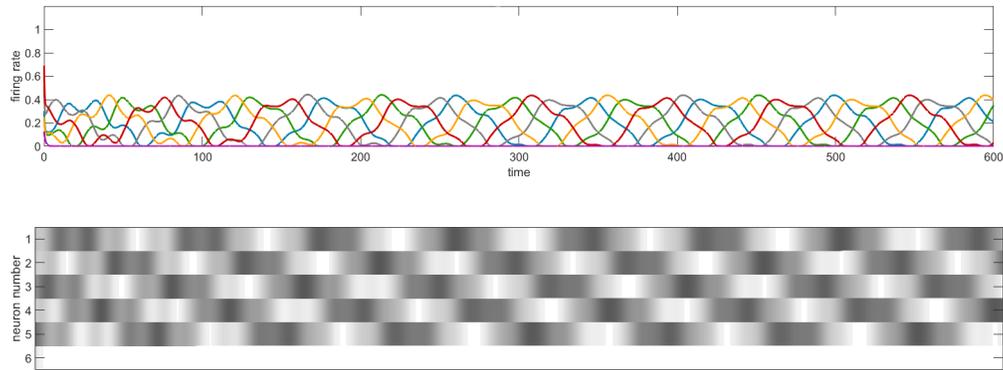


Gráfica de 3-ciclos: G tiene siete 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Conservamos el ciclo que observamos en el análisis de la 5-estrella, y los dos vértices restantes lo alimentan. $GC(G)$ no predice actividad en la neurona 6.

El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo con soporte $\{12345\}$, la simulación numérica no muestra actividad para el vértice 6.



Nota: Siguiendo la versión 2019 del algoritmo, la subgráfica $G|_{\{12345\}}$ es irreducible, por lo que el ciclo corazón es 12345. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4, por lo que debería de incluirse en la secuencia y tener actividad. Esto no sucede. Observamos un atractor similar al Atractor de Gaudí, los parámetros utilizados fueron $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$.



Continuemos con en análisis del mismo torneo pero cambiando el sentido a la arista $6 \rightarrow 1$. Por la Proposición 1.3 sabemos que este cambio provocará que exista un 3-ciclo más en comparación al torneo anterior.



Figura 3.19: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 233232.

En este caso, el vértice 6 tiene grado de entrada igual a dos y es destino de dos 3-ciclos, estos tienen otro destino: El ciclo $\{143\}$ tiene por destinos a los vértices 6 y 2, mientras que el ciclo $\{142\}$ tiene por destinos a los vértices 6 y 5. Por lo tanto, 6 es libremente removible,

al contrario de lo que sucede con los vértices 4 y 1, que no son libremente removibles ya que son los únicos destinos de los ciclos $\{153\}$ y $\{253\}$ respectivamente.

Fase I: G no tiene fuentes ni vértices con grado de entrada uno. Existen tres vértices con grado de entrada dos, a saber 1, 4, y 6, eliminamos el vértice 6 pues es libremente removible. La subgráfica resultante $G|_{\{12345\}}$ es irreducible y ya ha sido analizada previamente.

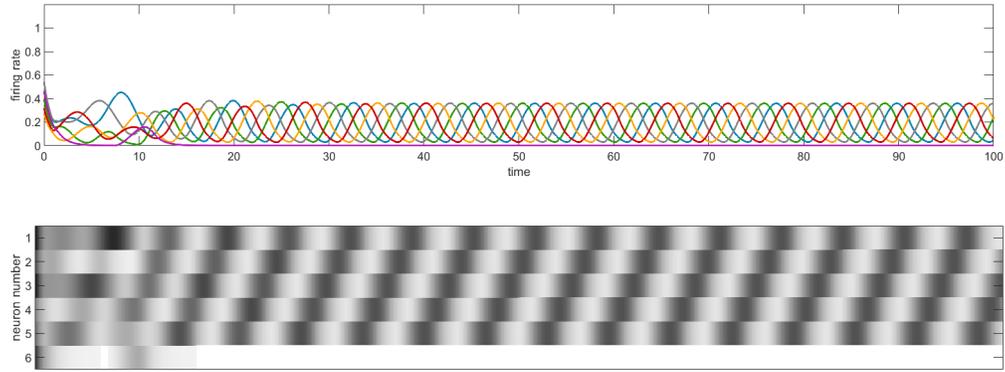
Fase II: El algoritmo nos arroja cinco posibles secuencias, analizaremos caso por caso:

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 253 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 no recibe aristas desde el ciclo corazón así que no se inserta en la secuencia.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe aristas desde los vértices 1 y 4, por lo que se debe de insertar en la secuencia. Lo hacemos después del vértice 4, ya que este es un sumidero en $G|_{\{14\}}$. La secuencia obtenida es **154632**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 254 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 recibe una arista desde el 4 así que se debe de insertar en la secuencia después de este. La arista $6 \rightarrow 3$ indica que dispara antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **215463**.
- **Cuarta posibilidad:** El ciclo corazón es 153 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 1 y debe de ser insertado en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **165432**.
- **Quinta posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe aristas desde los vértices 1 y 4, por lo que se debe de insertar en la secuencia. Lo hacemos después del vértice 4 ya que este es un sumidero en $G|_{\{14\}}$. La arista $6 \rightarrow 3$ indica que se debe de insertar antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **154632**.

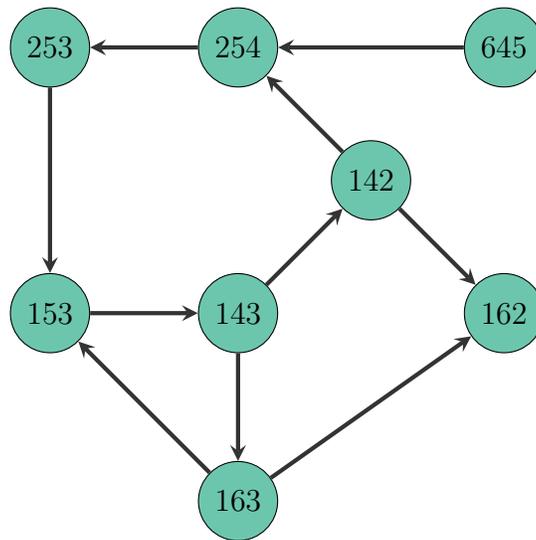
Secuencia final: Las secuencias de las posibilidades dos, tres y cinco son la misma: **321546** pues las neuronas disparan en un orden cíclico idéntico sin embargo, no podemos deducir cuales son las que tiene alta o baja tasa de disparo así que no las diferenciaremos. Esta secuencia y la primer posibilidad: **32154** difieren por un vértice, así que tomamos la más corta. Hemos reducido las posibles secuencias a dos **54321** y la cuarta posibilidad: **654321**. Como son idénticas excepto un vértice, tomamos la más corta. Finalmente, la secuencia obtenidas es **54321**.

El sistema CTLN asociado a G tiene tres puntos fijos. $FP(G) = \{12456, 12345, 123456\}$. Con los parámetros estándar, la simulación numérica no muestra actividad en el vértice 6.

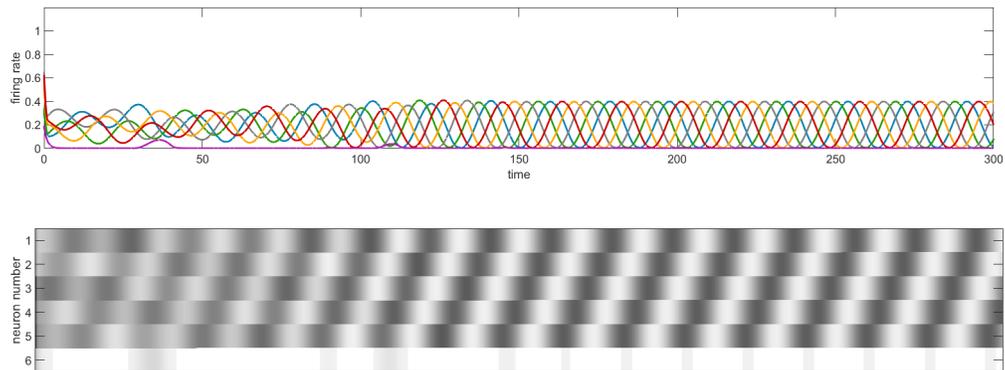
$G|_{12456}$ es la gráfica 5-CU, así que puede existir otro atractor de la red que tenga a 12456 como su corazón. Por lo tanto, en este ejemplo, la supervivencia del atractor 5-CU es dependiente de los parámetros.



Nota: Siguiendo la versión 2019 del algoritmo, la subgráfica $G|_{\{12345\}}$ es irreducible, por lo que el ciclo corazón es 12345. El vértice 6 recibe una aristas desde los vértices 1 y 4, por lo que debería de incluirse en la secuencia y tener actividad.



Gráfica de 3-ciclos: G tiene ocho 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. Conservamos el ciclo que observamos en el análisis de la 5-estrella. El vértice 162 es un sumidero, prediciendo actividad en la neurona 6.



Observación: El vértice 6 sí muestra actividad si cambiamos los valores de los parámetros a $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$ sin embargo, el programa solamente arroja un soporte en lugar de los tres que presentamos anteriormente. Con estos parámetros, $FP(G) = \{12345\}$. La actividad el vértice 6 es casi nula y no se aprecia en las curvas de disparo. Esta simulación sigue la secuencia **543216**.

En el torneo anterior, el vértice 6 recibía aristas desde neuronas que no son consecutivas en el ciclo exterior de la 5-estrella. Veamos qué sucede si el vértice 6 recibe aristas desde neuronas que sí lo son. Gracias a la simetría de la 5-estrella, podemos suponer sin pérdida de generalidad que estas aristas son $4 \rightarrow 6$ y $5 \rightarrow 6$.

Nuevamente, el vértice 6 es libremente removible, pues el 3-ciclo $\{254\}$ tiene dos destinos, los vértices 1 y 6. Al contrario, los ciclos $\{142\}$ y $\{153\}$ solamente tienen por destino a los vértices 5 y 4 respectivamente.



Figura 3.20: Deconstrucción de un 6-torneo con secuencia de grados de entrada 333222.

Fase I: G solamente tiene un vértice libremente removible, a saber el 6. Lo eliminamos. La subgráfica resultante $G|_{\{12345\}}$ es irreducible y ya ha sido analizada previamente.

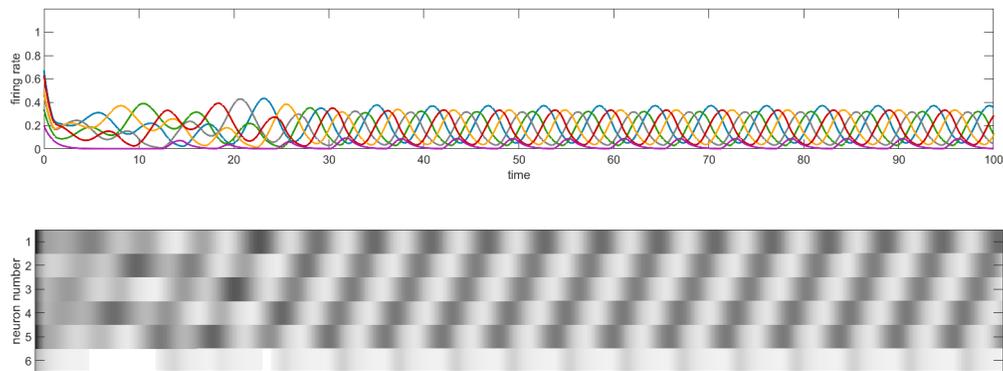
Fase II: El algoritmo nos arroja cinco posibles secuencias, analizaremos caso por caso:

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 253 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 5 así se debe de insertar en la secuencia después de este. La arista $4 \rightarrow 6$ nos indica que el vértice 6 va después del 4. La secuencia obtenida es **215463**.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 143 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4 y se debe de insertar en la secuencia después de este. La secuencia obtenida es **154632**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 254 y la secuencia preliminar es **21543**. El vértice 6 recibe aristas desde los vértices 4 y 5, así se debe de insertar en la secuencia. Lo haremos después del vértice 4, ya que este es un sumidero en $G|_{\{45\}}$, como tenemos la arista $6 \rightarrow 3$, se insertará antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **215463**.
- **Cuarta posibilidad:** El ciclo corazón es 153 y la secuencia preliminar es **15432**. El

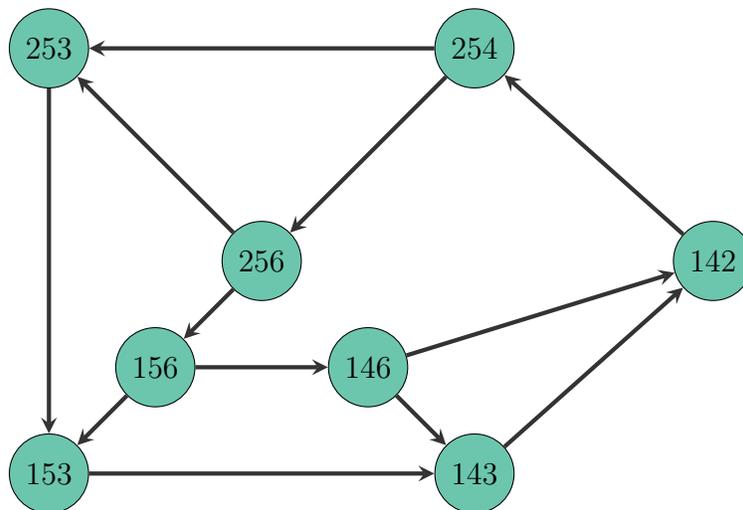
vértice 6 recibe una arista desde el vértice 5 así se debe de insertar en la secuencia después de este. La arista $4 \rightarrow 6$ nos indica que el vértice 6 va después del 4. La secuencia obtenida es **154632**.

- **Quinta posibilidad:** El ciclo corazón es 142 y la secuencia preliminar es **15432**. El vértice 6 recibe una arista desde el vértice 4 y se debe de insertar en la secuencia después de este. La arista $6 \rightarrow 3$ nos indica que se debe de insertar antes del vértice 3. La secuencia obtenida es **154632**.

Secuencia final: Las cinco secuencias son equivalentes, pues las neuronas disparan en un orden cíclico idéntico. El vértice 6 es el único que tiene baja tasa de disparo en todas las posibles secuencias, así que predecimos que tendrá baja tasa de disparo en la secuencia final. No podemos concluir lo mismo sobre los vértices restantes. La secuencia final es **321546**.



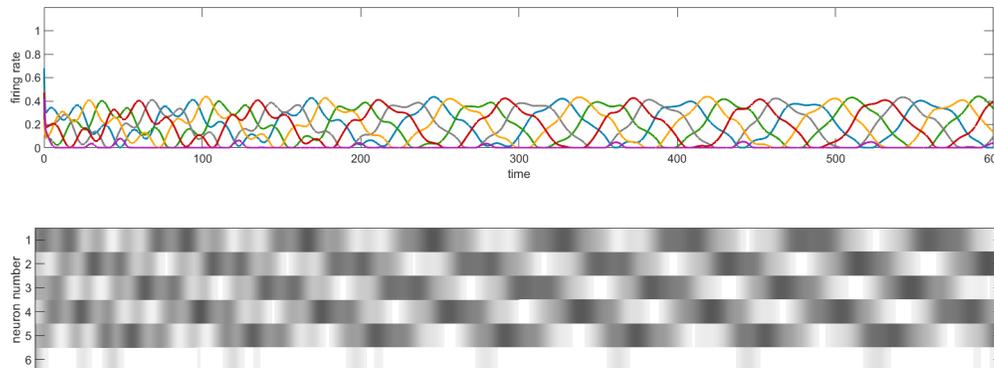
El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo con soporte $\{12345\}$, la simulación numérica sí muestra actividad para el vértice 6.



Gráfica de 3-ciclos: G tiene ocho 3-ciclos, cada uno está representado por un vértice. El ciclo exterior es el mismo que observamos en el análisis de la 5-estrella. Hay otros ciclos que incluyen al vértice 6, por ejemplo el ciclo $\{254, 256, 156, 146, 142\}$. Así que podemos predecir

que todas las neuronas tendrán actividad.

Nota: Siguiendo la versión 2019 del algoritmo, la subgráfica $G|_{\{12345\}}$ es irreducible, por lo que el ciclo corazón es 12345. El vértice 6 recibe aristas desde los vértices 4 y 5, por lo que debería de incluirse en la secuencia después del vértice 4. Obteniendo la secuencia **546321**. Esto coincide con la secuencia encontrada con la versión 2017 del algoritmo. También observamos un atractor similar al Atractor de Gaudí, los parámetros utilizados fueron $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$. Este último atractor sigue la secuencia **142653**.



La predicción de las secuencias de disparo es una tarea bastante compleja sin embargo, para los sistemas CTLN es un problema que ha sido estudiado y se ha demostrado que es posible predecir con éxito las secuencias de un gran número de gráficas.

Inicialmente se planteó un algoritmo de predicción que fue probado para torneos con $n \leq 5$ vértices [11]. Al modificarlo un poco, funcionó correctamente para todos los torneos que mostramos. La versión 2019 muestra fallas para torneos relativamente pequeños, como la Figura 3.18. Además, falla en torneos para los que la versión 2017 funciona (Figura 3.7).

El análisis que hemos hecho durante este capítulo nos sirve como evidencia para proponer una nueva versión del algoritmo de predicción de secuencias que incluye las ideas de la versión 2017 y resuelve las fallas que se tienen en la versión 2019.

Por ahora, solamente se da una versión del algoritmo para torneos sin embargo, los cambios deben estudiarse más a fondo para poder proponer una versión general. Los cambios a la versión 2019 están remarcados en negritas. Usaremos el hecho de que los torneos cíclicamente simétricos tienen un único soporte y es completo (Teorema 4.1).

Los torneos en las Figuras 3.7, 3.11-3.16 nos ayudan a entender que, si G tiene soporte completo, lo podemos considerar como irreducible solamente si G es cíclicamente simétrico. El Paso 4 en la Fase I de la nueva versión permite seguir descomponiendo torneos que la versión 2019 considera como irreducibles.

3.4. Propuesta de actualización al algoritmo de predicción de secuencias para torneos

Fase I: Deconstrucción del torneo

Si en cualquiera de los pasos se elimina un vértice, regresar al Paso 1 con la subgráfica resultante al eliminar dicho vértice. Si ningún vértice puede ser removido, proceder con el siguiente paso. Puede haber pasos en los que dos o más vértices sean candidatos a ser removidos, se deben considerar todas las posibles elecciones.

Se deben de examinar todos los casos por separado y determinar si las subgráficas resultantes son distintas. La deconstrucción termina en el momento en el que se obtiene un **torneo cíclicamente simétrico**.

1. Remover todos los vértices cuyo grado de entrada es igual a cero.
2. Remover el vértice con grado de entrada igual a uno cuya remoción no produzca un sumidero en el subtorneo resultante.
3. Remover el vértice libremente removible con menor grado de entrada.
4. **Remover el vértice con menor grado de entrada cuya remoción no produzca un sumidero en el subtorneo resultante.**

Al terminar esta fase obtendremos una lista de subgráficas irreducibles que depende de las elecciones de los vértices que se eliminen. **La Fase I terminará siempre en un torneo cíclicamente simétrico, siendo el ejemplo más pequeño un 3-ciclo [11].** A las subgráficas resultantes las llamaremos ciclos corazón y los denotaremos con la letra Ω .

Fase II: Reconstrucción de la secuencia

Cada ciclo corazón Ω da lugar a una secuencia diferente que es obtenida de la siguiente manera:

1. Enlista los vértices de Ω en el orden en que aparecen cíclicamente. Estos serán los vértices con alta tasa disparo en la secuencia.

Los vértices que se inserten en el siguiente paso tendrán una tasa de disparo baja y se mostrarán subrayados en la secuencia.

2. Por cada vértice i que no esté en el ciclo corazón, hay que insertarlo en la secuencia si y solo si i **recibe al menos** $\frac{|\Omega| - 1}{2}$ **aristas desde** Ω de acuerdo a las siguientes condiciones:

a) Considerar la subgráfica inducida $G|_{\omega}$ de vértices del ciclo corazón Ω que tienen

aristas hacia el vértice i . Inserta el vértice i en la secuencia después de cada vértice que es un sumidero en $G|_{\omega}$.

- b) Si dos vértices i y j deben de ser insertados en el mismo lugar, se debe revisar cómo interactúan entre ellos. Si existe la arista $i \rightarrow j$, entonces insertar i antes que j y viceversa si se tiene la arista $j \rightarrow i$.

El algoritmo puede arrojar más de una secuencia.

Los siguientes puntos están inspirados en el análisis de los 6-torneos y en la versión 2017 del algoritmo. Se escriben como conjeturas que pueden ser exploradas para posteriormente ser incluidas en el algoritmo.

- Si hay dos posibilidades que son idénticas salvo un vértice, escogemos la más corta.
- Si las posibles secuencias son diferentes pero de la misma longitud, puede que algunas neuronas disparen sincronamente. Se predice la sincronía de un subconjunto de neuronas si dicho subconjunto aparece, para todas las secuencias, en el mismo orden cíclico pero con diferente punto de comienzo. Además, las neuronas que no están en este subconjunto aparecen en el mismo orden para todas las posibilidades.

Hemos visto que, a pesar de que este comportamiento existe, no se garantiza la sincronía para todos los valores legales de los parámetros (Figuras 3.11-3.13 y 3.15-3.16).

- **Una neurona tendrá baja tasa de disparo si esta tiene baja tasa de disparo en todas las posibles secuencias** (Figura 3.20). **En el caso de que exista sincronía, si en todas las posibles secuencias la mayoría los vértices involucrados en la sincronía tienen baja tasa de disparo, los vértices restantes la heredan** (Figuras 3.11-3.13 y 3.15-3.16).
- **Si i recibe exactamente $\frac{|\Omega| - 1}{2}$ aristas desde Ω y los vértices que mandan dichas aristas no son consecutivos en Ω , entonces se debe de considerar también la secuencia sin el vértice i como una de las secuencias finales.** (Figuras 3.16 y 3.19).

A pesar de estos cambios, esta propuesta no muestra las secuencias de atractores como los de Gaudí (Figuras 3.8, 3.18 y 3.20). Por lo tanto, este algoritmo no garantiza que la lista final de secuencias sea completa.

A continuación pondremos este algoritmo a prueba. Consideraremos las conjeturas mencionadas anteriormente.

7-torneos

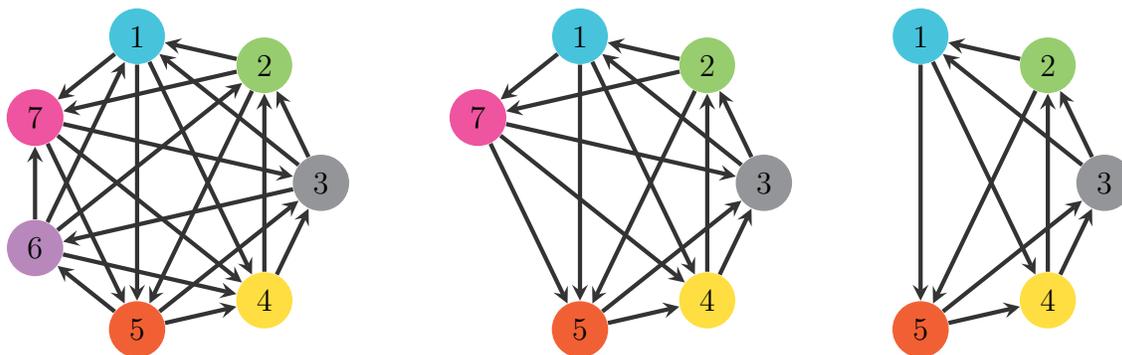


Figura 3.21: Deconstrucción de un 7-torneo con secuencia de grados de entrada 3334323.

Fase I: G no tiene fuentes ni vértices con grado de entrada uno. Procedemos a investigar los vértices libremente removibles. El vértice 6 tiene grado de entrada dos y es destino de dos ciclos, a saber $\{315\}$ y $\{325\}$. Los ciclos mencionados tienen otros destinos, respectivamente los vértices 4 y 1. Por lo tanto 6 es libremente removible, lo eliminamos según el Paso 3.

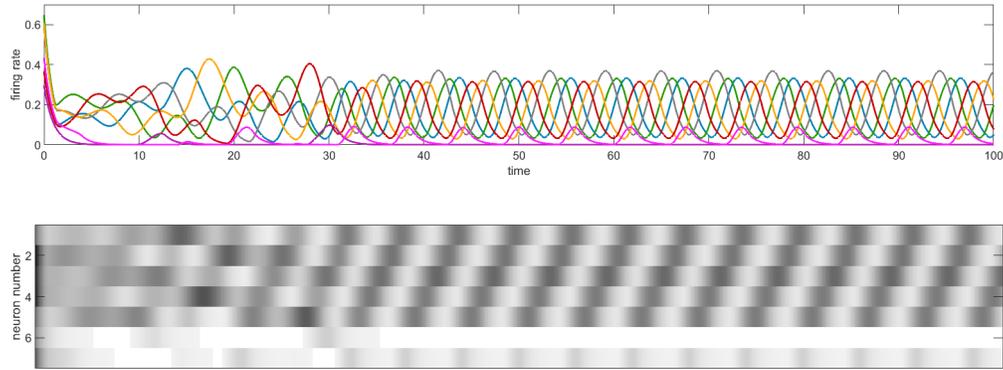
En el subtorneo $G|_{\{123457\}}$ los vértices con menor grado de entrada son 1, 2, y 7, exploraremos si alguno de ellos es libremente removible. El vértice 1 no lo es, ya que el ciclo $\{235\}$ no tiene otro destino además de este vértice. Lo mismo ocurre con el ciclo $\{143\}$, que tiene por único destino al vértice 2. Por otro lado, el vértice 7 es destino del ciclo 124 y este tiene también por destino al vértice 5. Por lo tanto el vértice 7 es libremente removible, lo eliminamos según el Paso 3. La subgráfica resultante es un 5-torneo cíclicamente simétrico, concluyendo así la Fase I.

Fase II: El ciclo corazón es 12345, así que estas neuronas tendrán alta tasa de disparo y aparecerán en el orden **54321**. El vértice 7 recibe aristas desde los vértices 1 y 2, 1 es sumidero en $G|_{\{12\}}$, por lo que se debe de insertar en la secuencia después del vértice 1. La secuencia preliminar es **543217**. Ahora, el vértice 6 también recibe aristas desde los vértices 3 y 5. 3 es un sumidero en $G|_{\{35\}}$, así que el vértice 6 debe de ser insertado en la secuencia después del 3. La secuencia resultante es **5436217**.

Resultado: Notemos que el vértice 6 recibe aristas desde vértices que no son consecutivos en $G|_{\{12345\}}$, así que consideraremos también a la secuencia excluyendo al vértice 6. El algoritmo arroja dos secuencias: **5436217** y **543217**.

El sistema CTLN asociado a G tiene tres puntos fijos. $FP G) = \{12345, 23456, 123456\}$, el primer soporte es la 5-estrella y el segundo es el 5-torneo unión cíclica. Realizamos una primer simulación usando los parámetros estándar y, sin importar las condiciones iniciales, el sistema cae en el atractor correspondiente al primer soporte.

Notemos que el vértice 6 no tiene actividad y que, sin los cambios propuestos, las versiones anteriores del algoritmo no arrojan la secuencia **543217**.



Al modificar los parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$ encontramos condiciones iniciales cuyas secuencias sí muestran una muy ligera actividad en el vértice 6 que solamente es perceptible en la representación en escala de grises.

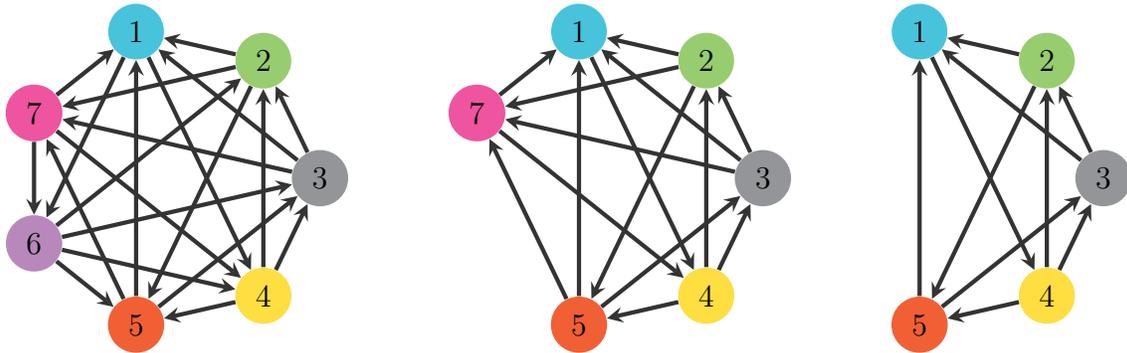
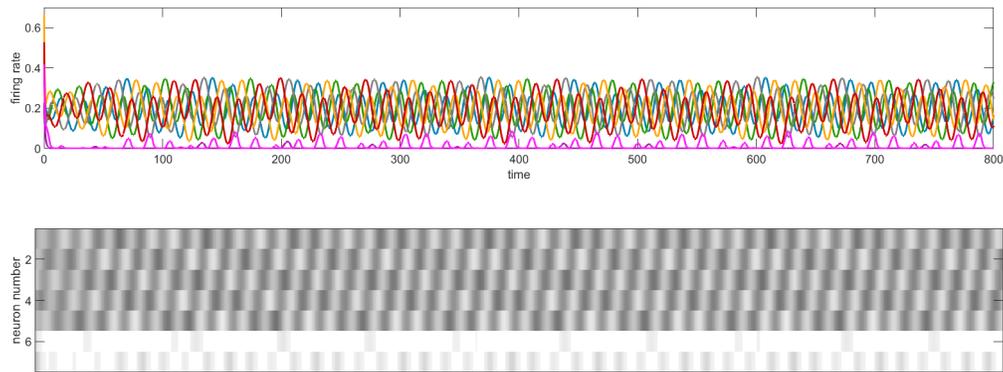


Figura 3.22: Deconstrucción de un 7-torneo con secuencia de grados de entrada 4333323.

Fase I: G no tiene sumideros ni vértices con grado de entrada uno. El vértice 6 es el único que tiene grado de entrada dos y no es destino de ningún 3-ciclo, así que es libremente removible. Lo eliminamos en el Paso 3. La gráfica resultante es $G|_{\{123457\}}$. Reiniciamos el algoritmo.

$G|_{\{123457\}}$ tiene cuatro vértices con grado de entrada dos, revisemos uno por uno: El vértice 2 es el único destino del ciclo $\{143\}$, así que no es libremente removible. El vértice 3 tampoco es libremente removible, pues es el único destino del ciclo $\{145\}$. No podemos eliminar el

vértice 4, debido a que se crearía un sumidero en 1 y por último, el ciclo $\{142\}$ solamente tiene un destino, a saber el vértice 5, por lo que este tampoco es libremente removible. El vértice 7 es destino del ciclo $\{235\}$, pero es libremente removible ya que este ciclo también tiene por destino al vértice 1. Lo eliminamos y reiniciamos el algoritmo.

La gráfica resultante es $G|_{\{12345\}}$. Los vértices 2, 3, 4, y 5 no pueden ser removidos de $G|_{\{12345\}}$ por los mismos argumentos por los que no fueron eliminados de $G|_{\{123457\}}$ y esta vez, el vértice 1 tampoco es libremente removible, ya que es el único destino del ciclo $\{253\}$. Procedemos con el Paso 4. El análisis se divide en tres diferentes posibilidades, pues hay que considerar los casos en los que eliminamos a los vértices 2, 3, y 5 por separado. $G|_{\{12345\}}$ es el torneo unión cíclica del 3-ciclo $\{253\}$ y dos vértices. Ya lo hemos analizado anteriormente, por lo que usaremos el análisis hecho para la Figura 3.7. Este arroja tres ciclos corazón diferentes: 143, 145, y 142 con las secuencias **14532**, **14253** y **14325** respectivamente.

Nota: La versión 2019 del algoritmo hubiera fallado para la gráfica $G|_{\{12345\}}$ pues, según esa versión, es irreducible. Podemos continuar con el análisis gracias a la inclusión del Paso 4. Por otro lado, la versión 2017 del algoritmo hubiera indicado que, para la gráfica $G|_{\{123457\}}$, el algoritmo debería continuar dividiendo en tres casos al eliminar los vértices 2, 3, y 5 antes del 7. Haciendo el análisis aún más extenso.

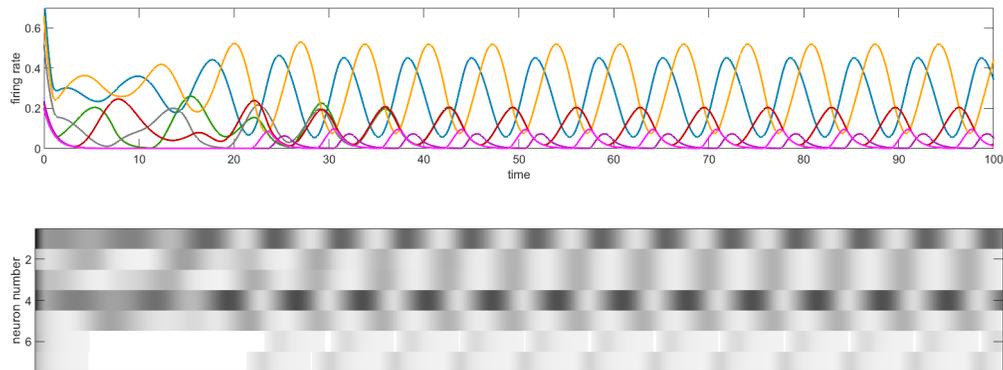
Fase II: Exploraremos cada una de las posibilidades.

- **Primer posibilidad:** El ciclo corazón es 143 con secuencia preliminar **14532**. El vértice 7 recibe una arista del vértice 3, por lo que tiene que insertarse en la secuencia después de este, la arista $2 \rightarrow 7$ nos indica que hay que insertarlo después del 2. Por otro lado, insertaremos al vértice 6 después del 1, ya que tenemos la arista $1 \rightarrow 6$. La secuencia obtenida es **1645327**.
- **Segunda posibilidad:** El ciclo corazón es 145 con secuencia preliminar **14253**. El vértice 7 recibe una arista del vértice 5, por lo que tiene que insertarse en la secuencia después de este, la arista $3 \rightarrow 7$ nos indica que hay que insertarlo después del 3. Por otro lado, insertaremos al vértice 6 después del 1, ya que tenemos la arista $1 \rightarrow 6$. La secuencia obtenida es **1642537**.
- **Tercer posibilidad:** El ciclo corazón es 142 con secuencia preliminar **14325**. El vértice 7 recibe una arista del vértice 2, por lo que tiene que insertarse en la secuencia después de este, la arista $5 \rightarrow 7$ nos indica que hay que insertarlo después del 5. Por otro lado, insertaremos al vértice 6 después del 1, ya que tenemos la arista $1 \rightarrow 6$. La secuencia obtenida es **1643257**.

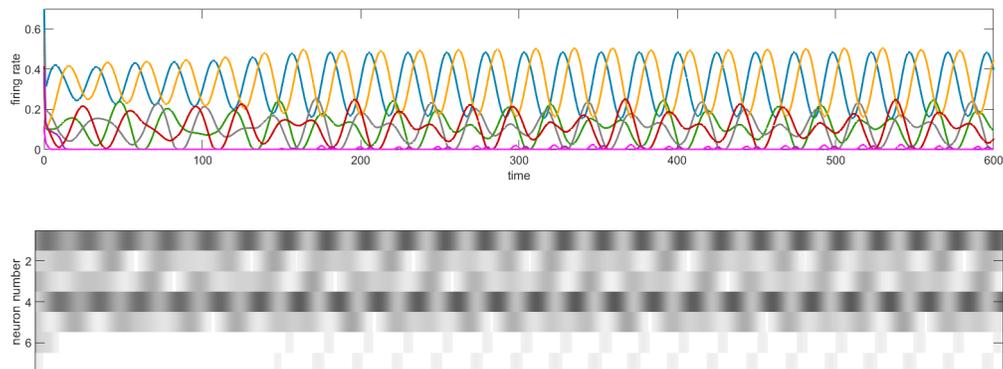
Resultado: La Fase II nos arroja tres secuencias diferentes sin embargo, para todas las posibles secuencias, las neuronas 1, 4, 6, y 7 se encuentran en la misma posición. Mientras que las neuronas 2, 3, y 5 disparan en el mismo orden cíclico, así que predecimos que dispararán al mismo tiempo. Además, como al menos dos de esas tres neuronas tienen baja tasa de disparo en todas las secuencias, las tres tendrán baja tasa de disparo. La secuencia final es: **164(253)7**. Recordemos que la sincronía no está garantizada para todos los valores legales

de los parámetros.

El sistema CTLN asociado a G tiene un único punto fijo que tiene por soporte al 5-torneo unión cíclica. $FP(G) = \{12345\}$. Usando los parámetros estándar observamos que la simulación sigue la secuencia predicha por el algoritmo.



Al modificar los parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$ encontramos condiciones iniciales para las cuales la secuencia pierde la sincronía de las neuronas 2, 3, y 5.



Es de esperar que, para los n -torneos cíclicamente simétricos, las neuronas disparen en secuencia siguiendo el ciclo exterior sin embargo, ya hemos observado que estos torneos no siempre siguen una única secuencia para el caso $n = 5$.

En las siguientes figuras presentamos los n -torneos cíclicamente simétricos para $n = 7$ y $n = 9$, en ellos observamos dos atractores con distintas secuencias, la primera (arriba) es la que puede ser encontrada mediante el algoritmo, la segunda (abajo) no. Todas las simulaciones fueron conseguidas con los parámetros $\epsilon = 0,1$, $\delta = 0,12$, y $\theta = 1$, solamente se cambiaron las condiciones iniciales.

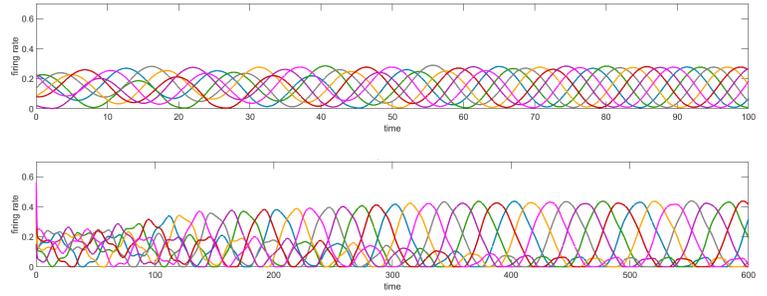
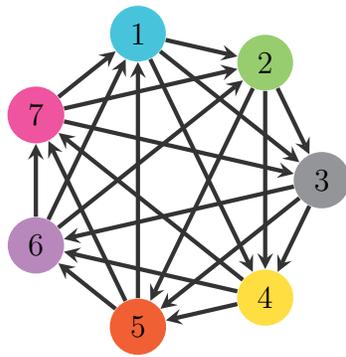


Figura 3.23: 7-estrella y dos de sus atractores.

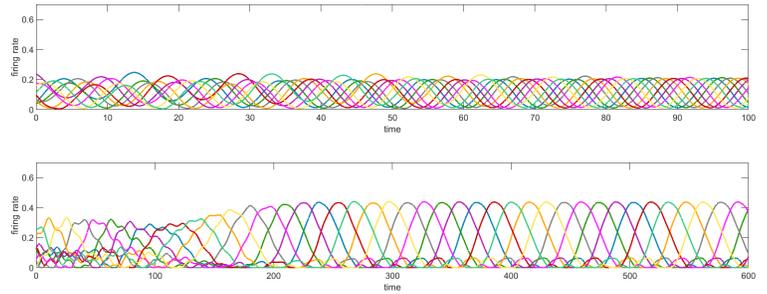
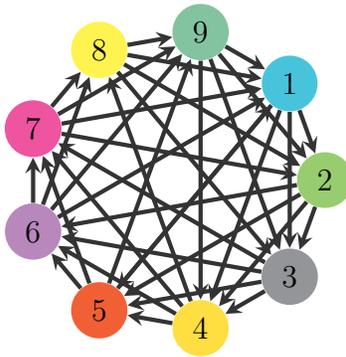


Figura 3.24: 9-estrella y dos de sus atractores.

Recientemente se han hecho avances en la investigación de las secuencias de disparo emergentes y su relación con la arquitectura de la gráfica [13]. Estudiar las secuencias de disparo es importante no solo para su predicción, sino también para poder tomar gráficas cuyas secuencias sean conocidas y, a partir de ellas, construir otras cuyo sistema CTLN tenga las secuencias deseadas.

Capítulo 4

Reglas gráficas y motivos corazón

En este capítulo estudiamos una serie de reglas gráficas que permiten determinar por completo al conjunto de soportes asociados a los puntos fijos de un sistema CTLN únicamente mediante el análisis de la gráfica G . Demostraremos que todos los torneos cíclicamente simétricos son motivos corazón y finalizaremos construyendo nuevos motivos corazón usando uniones cíclicas. A partir de la sección 4.2, todos los resultados que presentamos son originales y fueron desarrollados en colaboración con la Dra. Carina Curto.

4.1. Reglas gráficas

Los sistemas CTLN presentan una rica variedad de dinámicas no lineales, incluso para redes pequeñas se han visto comportamientos quasiperiódicos y caóticos [9]. Las siguientes reglas son independientes de la elección de los parámetros ϵ , δ , y θ (siempre y cuando estos estén dentro del rango legal), por lo que relacionan directamente la estructura de G con el conjunto de soportes de puntos fijos $FP(G)$. Las reglas gráficas fueron presentadas y demostradas en [3], en esta tesis se muestra solamente un subconjunto de ellas. La lista completa puede ser consultada en [4]. Usaremos la notación introducida anteriormente.

1. Soportes únicos:

Dada una gráfica dirigida G y un subconjunto σ de $[n]$, existe a lo más un punto fijo que tiene por soporte a σ . Por lo tanto podemos etiquetar a los puntos fijos del sistema CTLN con su soporte $\sigma \in FP(G)$.

2. Paridad:

El número total de puntos fijos, $FP(G)$, es impar.

3. Sumideros:

Si $\sigma = \{i\}$ es un singulete, entonces $\sigma \in FP(G)$ si y sólo si i es un sumidero en G .

4. Grado de entrada uniforme:

Supongamos que $G|_\sigma$ tiene grado de entrada uniforme d . Para $k \notin \sigma$, denotemos por $d_k = |\{i \in \sigma \mid i \rightarrow k\}|$ al número de aristas que el vértice k recibe de σ , entonces:

- a) $\sigma \in \text{FP}(G|_\sigma)$, y
- b) $\sigma \in \text{FP}(G|_{\sigma \cup k}) \Leftrightarrow d_k \leq d$ en $G|_{\sigma \cup k}$.

En particular, $\sigma \in \text{FP}(G)$ si y sólo si no existe un vértice $k \notin \sigma$ que recibe más de d aristas desde σ .

Definición 4.1. [3] Sean $k, j \in V(G)$. Decimos que k **domina gráficamente a j con respecto a σ** si $\sigma \cap \{j, k\} \neq \emptyset$ y las siguientes tres condiciones se satisfacen simultáneamente:

- Para cada $i \in \sigma \setminus \{j, k\}$, si $i \rightarrow j$ entonces $i \rightarrow k$.
- Si $j \in \sigma$, entonces $j \rightarrow k$.
- Si $k \in \sigma$, entonces $k \not\rightarrow j$.

5. Reglas de dominación:

Supongamos que k domina gráficamente a j con respecto a σ .

- a) **Interna-interna:** Si $j, k \in \sigma$, entonces $\sigma \notin \text{FP}(G|_\sigma)$ y por lo tanto $\sigma \notin \text{FP}(G)$.
- b) **Externa-interna:** Si $j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$, entonces $\sigma \notin \text{FP}(G|_{\sigma \cup k})$ y por lo tanto $\sigma \notin \text{FP}(G)$.
- c) **Interna-externa:** Si $k \in \sigma$ y $j \notin \sigma$, entonces $\sigma \in \text{FP}(G|_\sigma) \Rightarrow \sigma \in \text{FP}(G|_{\sigma \cup j})$.
- d) **Externa-externa:** Si $j, k \notin \sigma$, entonces $\sigma \in \text{FP}(G|_{\sigma \cup k}) \Rightarrow \sigma \in \text{FP}(G|_{\sigma \cup j})$.

A continuación presentamos tres corolarios de las reglas de dominación aplicadas a torneos.

Corolario 4.1. Sea G un torneo y $k \in V(G)$ un sumidero en G , entonces $\text{FP}(G) = \{k\}$.

Demostración. Supongamos un torneo G y k un sumidero en G . Dado que G es un torneo no acepta aristas recíprocas, así que solamente existe un sumidero. Entonces, si v es cualquier otro vértice de G , $v \rightarrow k$ es una arista en G .

Sea $\sigma \subseteq [n] \setminus \{k\}$ y $j \in \sigma \setminus \{k\}$. Entonces, k domina gráficamente a j respecto a σ . Si $|\sigma| \geq 2$ y $j, k \in \sigma$, podemos aplicar la regla de dominación interna-interna y concluir que $\sigma \notin \text{FP}(G)$. Si $j \in \sigma$ y $k \notin \sigma$, entonces por dominación externa-interna, $\sigma \notin \text{FP}(G)$. Por la regla de sumideros sabemos que $\{k\} \in \text{FP}(G)$. Ya hemos analizado todos los subconjuntos

de vértices posibles. Por lo tanto solamente existe un punto fijo y tiene por soporte a k es decir, $\text{FP}(G) = \{k\}$. \square

Corolario 4.2. *Sea G un torneo en n vértices, $\sigma \subseteq [n]$ y $j \in V(G)$ una fuente propia en $G|_\sigma$. Entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$.*

Demostración. De la Definición 1.8, j es una fuente propia si su grado de entrada es igual a cero y su grado de salida es al menos uno. Como G es un torneo, entonces para cualquier otro vértice $k \in \sigma$, $j \rightarrow k$ es una arista en G y no hay aristas recíprocas. De esta manera, en $G|_\sigma$, cualquier vértice k domina gráficamente a j . Así, si $\sigma \neq \{j\}$, la regla de dominación interna-interna nos permite concluir que $\sigma \notin \text{FP}(G|_\sigma)$ y por lo tanto, $\sigma \notin \text{FP}(G)$. Por otro lado, j no es un sumidero en G , pues tiene al menos una arista saliente. Por la regla de sumideros, $\{j\} \notin \text{FP}(G)$. Por lo tanto, si G es un torneo y j es una fuente propia en $G|_\sigma$, entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$. \square

Este resultado puede ser extendido a cualquier gráfica dirigida G , por lo que todas las fuentes propias de una gráfica dirigida puede ser removidas sin que exista algún cambio en $\text{FP}(G)$, de hecho se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.1. [3] *Sea G una gráfica en n vértices y $k \in [n]$. Si k es una fuente propia en G , entonces $\text{FP}(G) = \text{FP}(G|_{[n]\setminus\{k\}})$.*

Corolario 4.3. *Sea G un torneo en n vértices y $\sigma \subset [n]$ de cardinalidad dos. Entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$.*

Demostración. Como G es un torneo, entonces existe una arista unidireccional entre cada par de vértices. Si σ es de cardinalidad dos, $G|_\sigma$ es un torneo y alguno de los dos vértices en $G|_\sigma$ es fuente propia. Por el Corolario 4.2, $\sigma \notin \text{FP}(G|_\sigma)$ y, por lo tanto $\sigma \notin \text{FP}(G)$. \square

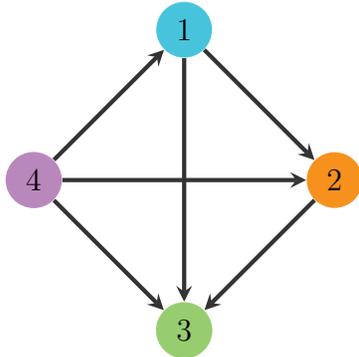
4.2. Ejemplos de aplicación de las reglas gráficas

Para hacer uso de las reglas gráficas es necesario analizar, uno a uno, todos los subconjuntos del conjunto potencia de $[n]$. Ya sabemos que $\sigma = \emptyset$ nunca va a ser elemento de $\text{FP}(G)$, por lo que no lo consideraremos. Además, como solamente analizaremos torneos, el Corolario 4.3 nos permite no considerar a los subconjuntos σ de tamaño dos.

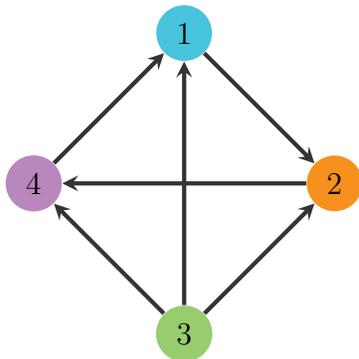
4-torneos

En la Sección 1.3 presentamos el número total de secuencias de grados de entrada para $n \leq 12$. En particular, para $n = 4$ encontramos cuatro secuencias distintas: $[0, 1, 2, 3]$, $[0, 2, 2, 2]$, $[1, 1, 1, 3]$, y $[1, 1, 2, 2]$. Recordemos que las entradas en las secuencias son no ordenadas. En la misma sección se muestra una tabla con el número de torneos no isomorfos, para $n = 4$

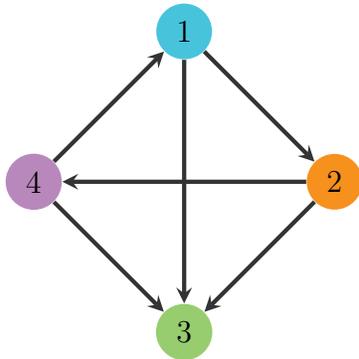
tenemos un total de cuatro, por lo tanto tendremos un torneo por secuencia. Procederemos a analizar exhaustivamente cada uno de los 4-torneos no isomorfos.



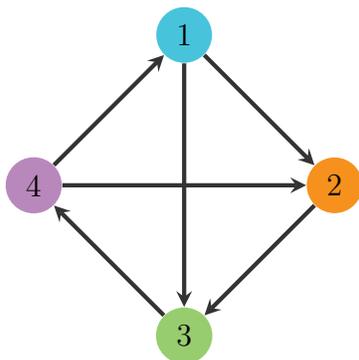
Este torneo está asociado a la secuencia $[0, 1, 2, 3]$. $\{1\}, \{2\}, \{4\} \notin \text{FP}(G)$ ya que 3 domina gráficamente a los demás vértices respecto a cualquier σ , $\{3\} \in \text{FP}(G)$ porque es sumidero. Todos los subconjuntos que contengan al vértice 3, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4\}$, no pueden ser soporte de un punto fijo por la regla de dominación interna-interna. $\{1, 2, 4\} \notin \text{FP}(G)$ por dominación externa-interna. Por lo tanto, $\text{FP}(G) = \{3\}$.



Este torneo está asociado a la secuencia $[0, 2, 2, 2]$. Los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{4\} \notin \text{FP}(G)$ por dominación interna-externa, ya que cada uno de los vértices domina gráficamente a 3 respecto a cualquier σ . Por la misma razón, todos los subconjuntos que contengan al vértice 3, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4\}$, no pueden ser soporte de un punto fijo por la regla de dominación interna-interna. Solamente queda por analizar al conjunto $\{1, 2, 4\}$. Por la regla de paridad $\{1, 2, 4\} \in \text{FP}(G)$. Por lo tanto, $\text{FP}(G) = \{124\}$.



Este torneo está asociado a la secuencia $[1, 1, 1, 3]$. De nuevo, los singuletes $\{1\}, \{2\}, \{4\} \notin \text{FP}(G)$ ya que 3 domina gráficamente a los demás respecto a cualquier σ , $\{3\} \in \text{FP}(G)$ porque es sumidero. Todos los subconjuntos que contengan al vértice 3, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4\}$, no pueden ser soporte de un punto fijo por la regla de dominación interna-interna. $\{1, 2, 4\} \notin \text{FP}(G)$ por dominación externa-interna. Por lo tanto, $\text{FP}(G) = \{3\}$.



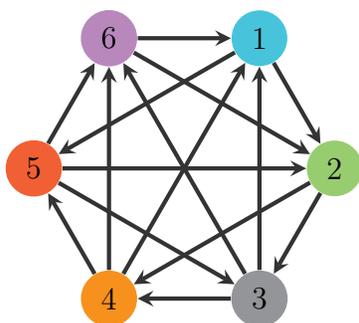
Este torneo está asociado a la secuencia $[1, 1, 2, 2]$. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \notin \text{FP}(G)$ porque ningún vértice es sumidero. $\{1, 3, 4\}$ es un 3-ciclo, por lo que tiene grado de entrada uniforme igual a uno sin embargo, el vértice 2 recibe aristas de 1 y 4. Por la regla de grado de entrada uniforme, $\{1, 3, 4\} \notin \text{FP}(G)$. Los conjuntos $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \notin \text{FP}(G)$, ya que 2 domina gráficamente a 1 con respecto a esos subconjuntos, por lo que podemos aplicar la regla de dominación interna-interna para descartarlos. Por la regla de paridad o por la regla de grado de entrada uniforme, el conjunto $\{2, 3, 4\} \in \text{FP}(G)$. Por lo tanto, $\text{FP}(G) = \{234\}$.

Proposición 4.2. Sea G un torneo, entonces $FP(G)$ no contiene soportes de tamaño cuatro.

Demostración. Notemos que, para todos los 4-torneos, el subconjunto $\sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ siempre fue descartado de $FP(G)$ usando la regla de dominación interna-interna. Por lo tanto, si G es un torneo, $FP(G)$ no tendrá soportes de tamaño cuatro. □

6-torneo sin dominación interna

A continuación analizaremos un 6-torneo diseñado para no tener relaciones de dominación en el soporte entero.



Para todos los singuletes, $\{i\} \notin FP(G)$ porque ningún vértice es sumidero. G es un torneo así que ningún subconjunto de tamaño dos puede ser soporte de un punto fijo. Usaremos la regla de grado de entrada uniforme para descartar a los ocho 3-ciclos de G , estos son: $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{1, 5, 3\}$, y $\{2, 4, 6\}$. Recordemos que los ciclos son gráficas con grado de entrada uniforme uno.

Para $\sigma = \{1, 2, 3\}$, el vértice 4 recibe dos aristas de σ . Por la regla de entrada uniforme, $\{1, 2, 3\} \notin FP(G)$. El vértice 6 recibe dos aristas desde $\{3, 4, 5\}$. El vértice 2 recibe dos aristas desde $\{1, 5, 6\}$. El vértice 5 recibe dos aristas desde $\{1, 2, 4\}$. El vértice 4 recibe dos aristas desde $\{2, 3, 6\}$. El vértice 6 recibe dos aristas desde $\{2, 4, 5\}$. El vértice 6 recibe dos aristas desde $\{1, 5, 3\}$. El vértice 1 recibe dos aristas desde $\{2, 4, 6\}$. Por la regla de grado de entrada uniforme, ninguno de estos subconjuntos están en $FP(G)$.

Los subconjuntos de tres elementos que no se encuentran en la lista anterior forman un 3-torneo transitivo, tomemos por ejemplo al subconjunto $\sigma = \{2, 3, 4\}$. σ contiene una fuente propia así, por el Corolario 4.2, $\{2, 3, 4\} \notin FP(G)$. Todos los subconjuntos de tres elementos restantes, a saber $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$, y $\{4, 5, 6\}$ son descartados por un argumento análogo al anterior.

Gracias a la Proposición 4.2 sabemos que no hay soportes de tamaño cuatro, procedamos con los de tamaño cinco. Usaremos la regla de dominación interna-interna para descartar a los primeros cuatro subconjuntos. $\{2, 3, 4, 5, 6\} \notin FP(G)$, ya que 6 domina a 5 respecto a este conjunto. $\{1, 3, 4, 5, 6\} \notin FP(G)$, ya que los vértices 6 y 1 dominan a 4 respecto a este conjunto. $\{1, 2, 3, 5, 6\} \notin FP(G)$, ya que 2 domina a 5 respecto a este conjunto. $\{1, 2, 3, 4, 6\} \notin FP(G)$, ya que 4 domina a 3 respecto a este conjunto. El subconjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tiene grado de entrada uniforme igual a dos y el vértice 6 recibe tres aristas de este subconjunto, aplicando la regla de grado de entrada uniforme concluimos que $\{1, 2, 3, 4, 5\} \notin FP(G)$.

Restan dos subconjuntos por analizar, estos son: $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por la re-

gla de paridad $|\text{FP}(G)|$ es impar, entonces solamente uno de estos subconjuntos pertenece a $\text{FP}(G)$. Además, no existe ninguna relación de dominación en ninguno de los dos subconjuntos. Por lo tanto, ninguna de las reglas que hemos presentado nos sirve para determinar a $\text{FP}(G)$. Sin embargo, la subgráfica restringida a $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ resulta ser un motivo corazón (es isomorfa a la Figura 3.7). Simulando numéricamente el 6-torneo nos damos cuenta de que $\text{FP}(G) = \{12346\}$. Estudiaremos los motivos corazón en la siguiente sección.

4.3. Sobre los motivos corazón

Se ha observado que, en los sistemas CTLN, los puntos fijos pueden dar lugar a atractores dinámicos. Hasta ahora sabemos que los sumideros dan lugar a los puntos fijos estables pero, ¿todos los puntos fijos inestables dan lugar a atractores dinámicos? o ¿cómo podemos identificar a los que sí? y de ser así, ¿pueden estos estar determinados por alguna estructura específica en G ?

Todos los torneos que hemos analizado tienen un único punto fijo, esto no es siempre así. El primer torneo que tiene más de un punto fijo es un 6-torneo semi-regular (ver Sección 5), otro ejemplo es el 8-torneo presentado en la Figura 4.9 y es más, hemos encontrado 9-torneos con hasta 27 soportes, entonces ¿a cuáles de estos puntos fijos les corresponde un atractor? El siguiente ejemplo es tomado de [12] y, a pesar de no ser un torneo, nos ayudará a comprender mejor las preguntas que planteamos.

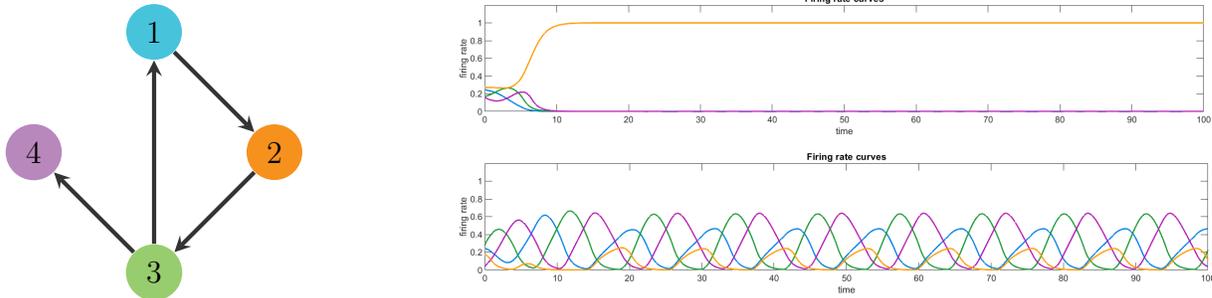


Figura 4.1: Un CTLN y sus atractores

Primero, usemos las reglas gráficas para conocer los elementos de $\text{FP}(G)$. Por la regla de los sumideros, $\{4\} \in \text{FP}(G)$ y este es el único singulete que es soporte de un punto fijo. Los conjuntos $\sigma = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\} \notin \text{FP}(G)$, pues a cada uno de ellos les corresponde una arista unidireccional en G y por lo tanto, uno de los dos vértices es fuente propia en $G|_{\sigma}$. El subconjunto $\{1, 4\}$ tiene grado de entrada uniforme cero y el vértice 2 recibe una arista de este subconjunto, aplicando la regla de grado de entrada uniforme concluimos que $\{1, 4\} \notin \text{FP}(G)$. Podemos aplicar el mismo argumento para el subconjunto $\{2, 4\}$ y el vértice 3. Por otro lado, la regla de grado de entrada uniforme implica que $\{1, 2, 3\} \in \text{FP}(G)$ y los demás subconjuntos con tres elementos son descartados por tener una fuente propia. Por último, aplicamos la regla de paridad para concluir que $\{1, 2, 3, 4\} \in \text{FP}(G)$. Por lo tanto, $\text{FP}(G) = \{4, 123, 1234\}$.

Simulando el sistema CTLN podemos darnos cuenta de que este tiene solamente dos atractores, el vértice 4 tiene asociado a un punto fijo estable mientras que el soporte 123 da a lugar a un ciclo límite. El último punto fijo, correspondiente al soporte 1234, no tiene asociado ningún atractor. En la figura anterior se muestran dos simulaciones con condiciones iniciales cercanas al punto fijo asociado a 1234. Como se puede observar, ambas simulaciones convergen hacia alguno de los otros dos soportes. Por lo tanto, podemos considerar al punto fijo asociado a 1234 como un punto silla.

En el ejemplo anterior, 3 y 123 son soportes mínimos bajo inclusión en $FP(G)$ y a cada uno de estos les corresponde un atractor. Sin embargo, en [12] se presenta un ejemplo que muestra que no es suficiente que un soporte $\sigma \in FP(G)$ sea mínimo para asegurar que tiene asociado un atractor. Necesitamos una condición extra, que el soporte sea mínimo en $FP(G|_\sigma)$ es decir, que $G|_\sigma$ solamente tenga un punto fijo y este tenga por soporte a σ . Llamaremos motivos corazón a las subgráficas que cumplan esta característica.

Definición 4.2. [4] *Sea G la gráfica asociada a un CTLN en n vértices. La subgráfica inducida $G|_\sigma$ es un **motivo corazón** de la red asociada a G si $FP(G|_\sigma) = \{\sigma\}$.*

*Llamaremos **puntos fijos corazón** a los puntos fijos cuyo soporte sean motivos corazón.*

Podemos pensar a los motivos corazón como redes irreducibles, ya que estas tienen solamente un punto fijo con soporte completo. Además, cada punto fijo corazón tiene por soporte a un motivo corazón, pero no todos los motivos corazón en una gráfica dan lugar a un punto fijo corazón. Esto sucede porque el punto fijo corazón puede no sobrevivir a la inclusión en una red más grande [12]. Por ejemplo, todos los 3-ciclos son motivos corazón, pero como vimos en el 6-torneo analizado en la sección anterior, ninguno de los puntos fijos corazón asociados sobrevive.

Dada una gráfica G , podemos usar las reglas gráficas para computar por completo a $FP(G)$, los soportes que no sean mínimos no pueden ser motivos corazón. Entre los soportes restantes podemos identificar a los motivos corazón y aplicar la regla de grado de entrada uniforme para saber si los puntos fijos asociados sobreviven a la inclusión en la gráfica completa. Sin embargo, la regla de grado de entrada uniforme no es siempre suficiente para determinar la supervivencia del soporte.

En [12] se menciona la siguiente conjetura: Dada una gráfica G y su sistema CTLN asociado, los puntos fijos corazón estables predicen los atractores estáticos de la red mientras los puntos fijos corazón inestables predicen los atractores dinámicos. La segunda parte de esta hipótesis fue puesta a prueba en el mismo artículo, en donde se analizan las 152 gráficas orientadas de tamaño $n = 5$ sin sumideros. Se observaron 185 atractores. Cada uno de ellos tuvo asociado un punto fijo corazón. Además, se han encontrado redes sin puntos fijos corazón cuya dinámica sí presentó atractores dinámicos. A pesar de esto, los motivos corazón y los puntos fijos corazón son un primer paso para conectar la dinámica de un sistema CTLN con la estructura de su red.

Los motivos corazón más simples son los singuletes, las gráficas dirigidas con aristas bi-

direccionales entre cada par de vértices y los ciclos. Para $n \leq 4$, están identificados todos los motivos corazón. Para $n = 5$ se cuenta con la lista de todos los motivos corazón que son gráficas orientadas [12]. A continuación mostraremos que los torneos cíclicamente simétricos son motivos corazón.

Primero introduzcamos la siguiente notación.

Definición 4.3. Dada una gráfica dirigida G y $v \in V(G)$ definimos:

- La **vecindad de salida** de v respecto a G , denotada por $N_G^{out}(v)$, como el conjunto:

$$N_G^{out}(v) = \{w \in V(G) \mid v \rightarrow w \in E(G)\}$$

- La **vecindad de entrada** de v respecto a G , denotada por $N_G^{in}(v)$, como el conjunto:

$$N_G^{in}(v) = \{w \in V(G) \mid w \rightarrow v \in E(G)\}$$

Observación 4.1. Si G es un torneo, entonces $\forall v \in V(G)$, $|N_G^{out}(v)| + |N_G^{in}(v)| = n - 1$.

Observación 4.2. Dada una gráfica dirigida G y $v \in V(G)$, entonces:

- $e_G(v) = |N_G^{in}(v)|$.
- $s_G(v) = |N_G^{out}(v)|$.

4.3.1. Torneos impares

Definición 4.4. Decimos que G es un **torneo cíclicamente simétrico** de tamaño n si existe una enumeración $\{1, 2, \dots, n\}$ de sus vértices tal que, para toda $i \in V(G)$,

$$N_G^{out}(i) = \left\{ i + d \pmod n \mid d \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \right\}.$$

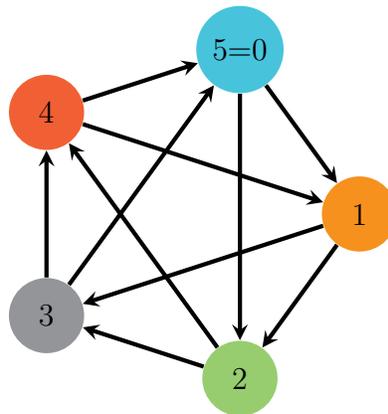


Figura 4.2: El 5-torneo cíclicamente simétrico.

Observación 4.3. Si G es un torneo cíclicamente simétrico de tamaño n , entonces G es regular. Aplicando la Proposición 1.1 concluimos que $n = 2k + 1$ es impar y además, para cada $v \in V(G)$, $e_G(v) = s_G(v) = k$. Por lo tanto, G tiene grado de entrada uniforme k .

Observación 4.4. Para un torneo cíclicamente simétrico G en $n = 2k + 1$ vértices y para cada $i = 0, \dots, n - 1$ (identificando 0 con $n = 2k + 1$), $N_G^{\text{out}}(i) = N_G^{\text{in}}(i + k + 1 \pmod n)$ y $N_G^{\text{in}}(i) = N_G^{\text{out}}(i + k \pmod n)$.

Por ejemplo, para un 5-torneo cíclicamente simétrico (Figura 4.2), $k = 2$, $N_G^{\text{out}}(5) = \{1, 2\} = N_G^{\text{in}}(3)$ y $N_G^{\text{in}}(5) = \{3, 4\} = N_G^{\text{out}}(2)$. Note que $5 \equiv 0 \pmod 5$.

Proposición 4.3. Sea G un torneo regular en n vértices y $\sigma \subset V(G)$ tal que $|\sigma| < n$. Si $G|_\sigma$ es un subtorneo regular de G , entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$.

Demostración. Sea $n = 2k + 1$ y $|\sigma| = 2m + 1$. Notemos que $G|_\sigma$ tiene grado de entrada uniforme $\frac{|\sigma|-1}{2} = m$, así que $\sigma \in \text{FP}(G|_\sigma)$. Demostraremos que el punto fijo no sobrevive a G , por lo que $\sigma \notin \text{FP}(G)$.

Usando la regla de grado de entrada uniforme, $\sigma \notin \text{FP}(G)$ si existe un vértice $w \in \bar{\sigma}$ tal que $|N_G^{\text{in}}(w) \cap \sigma| > m$.

Contaremos el número de aristas que salen desde σ hacia los vértices en $\bar{\sigma}$ y el número de vértices que los pueden recibir.

Para cada vértice $v \in \sigma$, $s_G(v) = \frac{n-1}{2} = k$ y $s_{G|_\sigma}(v) = m$. Así, el número total de aristas salientes desde σ hacia $\bar{\sigma}$ es $|\sigma|(k - m)$.

El número de vértices en $G|_{\bar{\sigma}}$ es $|\bar{\sigma}| = n - |\sigma| = 2k + 1 - (2m + 1) = 2(k - m)$.

Entonces, para $w \in \bar{\sigma}$, el número promedio de aristas recibidas desde σ es:

$$\frac{|\sigma|(k - m)}{2(k - m)} = \frac{|\sigma|}{2} > m.$$

Por lo tanto, existe un vértice $w \in \bar{\sigma}$ que recibe más de m aristas desde σ y, por la regla de grado de entrada uniforme, $\sigma \notin \text{FP}(G)$. \square

Teorema 4.1. Si G es un n -torneo cíclicamente simétrico, entonces G es un motivo corazón es decir, $\text{FP}(G) = \{[n]\}$.

Demostración. Por la observación 4.3 sabemos que G es un n -torneo regular y que $n = 2k + 1$. Procedamos por inducción sobre k .

Si $k = 1$, G es el 3-ciclo. Ya hemos analizado esta gráfica y sabemos que satisface la definición de motivo corazón.

Supongamos que el teorema es válido para los torneos cíclicamente simétricos en $n = 2k + 1$ vértices.

Sea G un $(n + 2)$ -torneo cíclicamente simétrico. Ordenemos los vértices de G siguiendo la definición de torneo cíclicamente simétrico.

De la Definición 4.4:

$$N_G^{\text{out}}(n + 2) = \{1, 2, \dots, k + 1\} \text{ y } N_G^{\text{in}}(n + 2) = \{k + 2, k + 3, \dots, 2k + 2\}.$$

$$N_G^{\text{out}}(k + 1) = \{k + 2, k + 3, \dots, 2k + 2\} \text{ y } N_G^{\text{in}}(k + 1) = \{1, 2, \dots, k\} \cup \{n + 2\}.$$

$$N_G^{\text{out}}(k + 2) = \{k + 3, k + 4, \dots, 2k + 2, n + 2\} \text{ y } N_G^{\text{in}}(k + 2) = \{1, 2, \dots, k + 1\}.$$

Recordemos que, $n + 2 = 2k + 3$ y $n + 1 = 2k + 2$.

Por la Observación 4.4, $N_G^{\text{in}}(k + 2) = N_G^{\text{out}}(n + 2)$ y $N_G^{\text{out}}(k + 1) = N_G^{\text{in}}(n + 2)$.

Como G es cíclicamente simétrico, cualquier subgráfica propia de G es isomorfa a una subgráfica de $G' = G|_{[n+1]}$. Además, estas gráficas isomorfas están incrustadas de la misma manera en G . Demostraremos que $(k + 2)$ domina gráficamente a $(k + 1)$ con respecto a G' . Calculemos las vecindades de $(k + 1)$ y $(k + 2)$ respecto a G' (Figura 4.3).

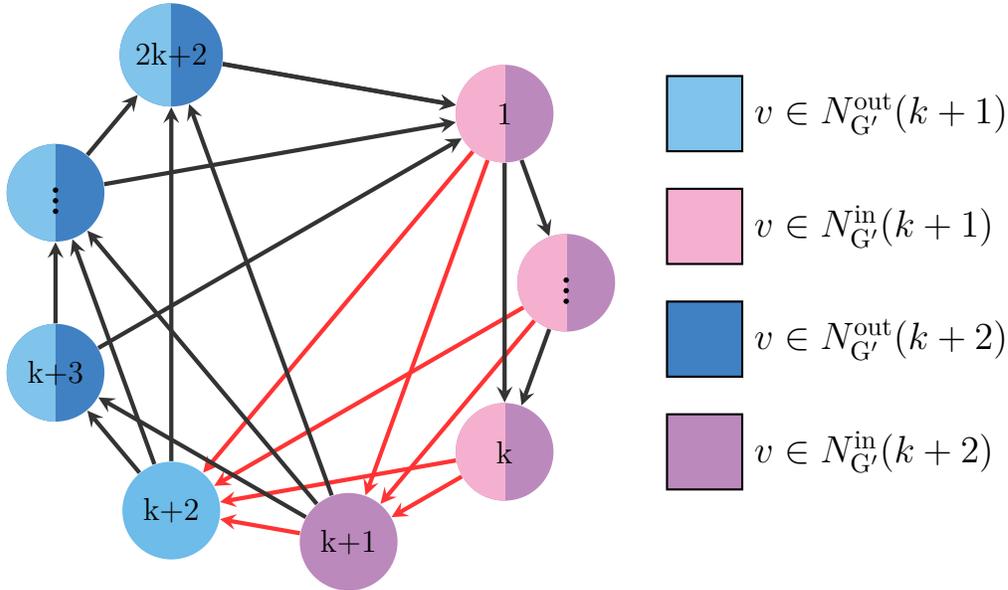


Figura 4.3: Vecindades de los vértices $(k + 1)$ y $(k + 2)$ respecto a G' .

$$N_{G'}^{\text{out}}(k + 1) = \{k + 2, k + 3, \dots, 2k + 2\} \text{ y } N_{G'}^{\text{in}}(k + 1) = \{1, 2, \dots, k\}.$$

$$N_{G'}^{\text{out}}(k + 2) = \{k + 3, k + 4, \dots, 2k + 2\} \text{ y } N_{G'}^{\text{in}}(k + 2) = \{1, 2, \dots, k + 1\}.$$

Notemos que $N_G^{\text{in}}(k+1) \subset N_G^{\text{in}}(k+2)$ y $(k+1) \rightarrow (k+2) \in E(G')$. Por lo tanto, $(k+2)$ domina gráficamente a $(k+1)$ con respecto a G' . Es más, si $(k+1), (k+2) \in \sigma$, por dominación interna-interna, $\sigma \notin \text{FP}(G')$ y por lo tanto $\sigma \notin \text{FP}(G)$. Si $(k+1) \in \sigma$ pero $(k+2) \notin \sigma$, dominación externa-interna descarta a σ de $\text{FP}(G')$ y por lo tanto de $\text{FP}(G)$.

Si, por otro lado, $(k+1) \notin \sigma$. Sea $\tau = [n+1] \setminus \{k+1\}$, entonces $G|_\tau \subset G'$ es el subtorneo resultante de remover el vértice $(k+1)$ de G' y $\sigma \subset \tau$.

Probaremos ahora que $G|_\tau$ es un torneo cíclicamente simétrico de tamaño n al que podemos aplicar la hipótesis de inducción. Primero, corroboremos que $G|_\tau$ es de grado de entrada uniforme k .

Notemos que, para cada vértice $v \in V(G)$, $e_G(v) = k+1$ y cada vértice en τ recibía una arista desde el vértice $(k+1)$ o desde el vértice $(n+2)$, pero nunca desde ambos. Así, como $\tau = [n+2] \setminus \{n+2, k+1\}$, $G|_\tau$ tiene grado de entrada uniforme k . Renumerando los vértices de τ notamos que $G|_\tau$ es un torneo cíclicamente simétrico. Ver Figura 4.4.

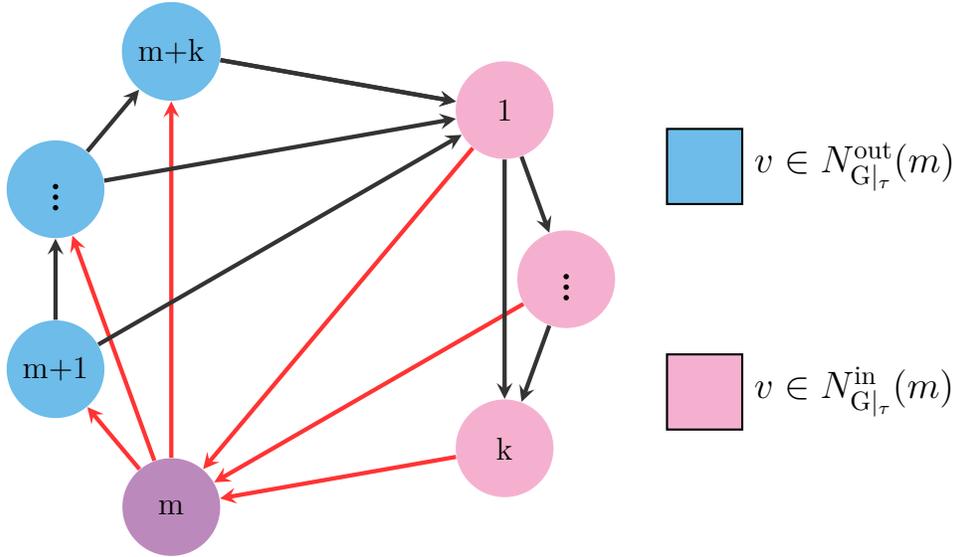


Figura 4.4: $G|_\tau$ hereda la simetría cíclica de G . $m = k+2$.

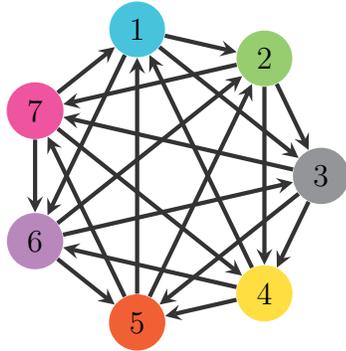
Entonces $G|_\tau$ es un n -torneo cíclicamente simétrico y, por hipótesis de inducción, es un motivo corazón. Así, para cualquier conjunto $\sigma \subset \tau$, $\sigma \notin \text{FP}(G|_\tau)$ y así $\sigma \notin \text{FP}(G)$.

De esta manera, los únicos candidatos a ser elementos de $\text{FP}(G)$ son aquellos soportes σ tales que $G|_\sigma$ es isomorfa a $G|_\tau$ y $[n+2]$. $G|_\tau$ es, en particular, un subtorneo regular de G . De la Proposición 4.2 concluimos que $\tau \notin \text{FP}(G)$.

Por lo tanto, por la regla de paridad, $\text{FP}(G) = \{[n+2]\}$ es decir, G es un motivo corazón. \square

Cabe recalcar que no todo torneo regular es cíclicamente simétrico. Por lo tanto, no todo torneo regular es motivo corazón (ver Figura 4.5) y, si G es un torneo impar y motivo corazón, G puede no ser cíclicamente simétrico (Figuras 3.7 y 4.7).

A pesar de que la simetría cíclica es una característica muy específica en un torneo, el Teorema 4.1 nos da toda una familia de motivos corazón que podemos usar como bloques de construcción para formar nuevas gráficas dirigidas (no solo torneos) y garantizar que serán motivos corazón, esto gracias a la unión cíclica.



$$\text{Dr}(G) = 0$$

$$c_3(G) = 14$$

$$\text{FP}(G) = \{12456, 123456, 13457, 23567, 134567, 234567, 1234567\}$$

Figura 4.5: 7-torneo regular para el cual $|\text{FP}(G)| = 7$.

4.3.2. Unión cíclica

En [4] se presentan las **reglas de pegado**, la Definición 4.5 y el Teorema 4.2 son extractos de este artículo. Las reglas de pegado junto con las reglas gráficas son sumamente útiles para crear redes relativamente grandes y hacer predicciones sorprendentemente precisas sobre su dinámica. Esto nos permite modelar situaciones complejas como el almacenamiento y la recuperación de memorias en secuencia (por ejemplo, recordar un número telefónico) y actividades rítmicas como la locomoción [10]. Aunque la lista de reglas de pegado es extensa, nos centraremos en la unión cíclica.

Definición 4.5. Consideremos una gráfica G con subgráficas inducidas $\{G|_{\tau_i}\}$ correspondientes a una partición de sus vértices $\mathcal{U} = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$. Entonces G es una **unión cíclica** si contiene todas las aristas posibles de τ_i hacia τ_{i+1} para $i = 1, \dots, N-1$, al igual que todas las posibles aristas de τ_N hacia τ_1 , pero ninguna otra arista entre las demás componentes.

Teorema 4.2. Si G es una unión cíclica de subgráficas $\{G|_{\tau_i}\}_{i=1}^N$, con $\mathcal{U} = \{\tau_i\}_{i=1}^N$, entonces $\text{FP}(G) = \{\bigcup_{i=1}^N \sigma_i \mid \sigma_i \in \text{FP}(G|_{\tau_i}) \forall i \in [N]\}$.

Observación 4.5. Si G es una unión cíclica y cada componente $G|_{\tau_i}$ es un motivo corazón, podemos usar el teorema anterior para computar $\text{FP}(G)$ fácilmente: $\text{FP}(G) = \{\bigcup_{i=1}^N \sigma_i \mid \sigma_i \in \text{FP}(G|_{\tau_i}) \forall i \in [N]\} = \{\bigcup_{i=1}^N \tau_i\} = \{[n]\}$. Por lo tanto, si G es una unión cíclica de motivos corazón, G es motivo corazón.

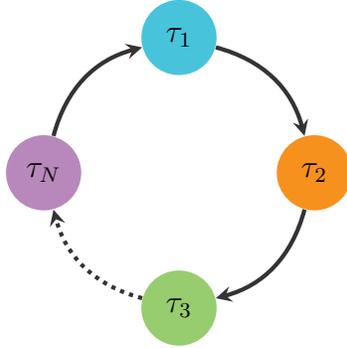
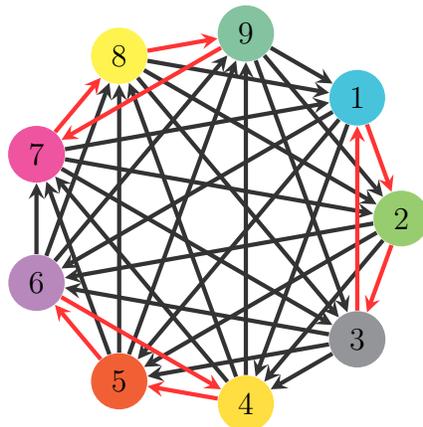


Figura 4.6: Unión cíclica.

La observación anterior junto con el Teorema 4.1 nos permiten construir una infinidad de gráficas dirigidas usando torneos cíclicamente simétricos como componentes y asegurar que serán motivos corazón.

Recordemos que los singuletes son motivos corazón así que, refiriéndonos a torneos, el motivo corazón más simple que podemos construir mediante una unión cíclica es la de un 3-ciclo y dos vértices, anteriormente presentada como torneo 5-CU (Figura 3.7). Además, podemos usar uniones cíclicas para formar motivos corazón más complejos. Por ejemplo, podemos usar el torneo 5-CU para formar un 7-torneo que es motivo corazón. Esto lo logramos haciendo la unión cíclica de él con dos vértices (ver sección 5.4). Otro ejemplo es hacer la unión cíclica de tres 3-ciclos (Figura 4.7), el torneo resultante es regular y no tiene simetría cíclica.



$$\begin{aligned} \text{Dr}(G) &= 0 \\ c_3(G) &= 30 \\ \text{FP}(G) &= \{123456789\} \end{aligned}$$

Figura 4.7: 9-torneo regular, unión cíclica de tres 3-ciclos (en rojo). Este torneo no es isomorfo al torneo cíclicamente simétrico pues su grupo de automorfismos es $\{(5, 6, 7), (1, 2, 5)(3, 6, 8)(4, 7, 9)\}$ mientras el grupo de automorfismos de la 9-estrella es $\{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)\}$. Este torneo es motivo corazón.

Para $n = 3$ y $n = 5$, todos los torneos motivo corazón son torneos cíclicamente simétricos y uniones cíclicas de estos. Sin embargo, a partir de $n = 7$ encontramos torneos motivo corazón que no pertenecen a ninguno de estos dos grupos. En el Capítulo 5 mostramos, entre otros

torneos, todos los torneos motivo corazón para $n = 7$. Para $n = 9$ se encontraron un total de 110 torneos motivo corazón.

Notemos que, si G es una unión cíclica en donde cada componente $G|_{\tau_i}$ es un torneo, para que G sea también un torneo es necesario tener exactamente tres componentes. Los torneos cíclicamente simétricos tienen un número impar de vértices, por lo que todos los torneos obtenidos mediante uniones cíclicas de estos también tendrán un número impar de vértices. Naturalmente, esta observación nos llevó a preguntarnos sobre la existencia de torneos motivo corazón con un número par de vértices.

4.3.3. Torneos pares

Proposición 4.4. *Sea G un n -torneo par semi-regular con $n = 2k$ y sea $\sigma \subset G$ un subtorneo regular tal que $|\sigma| < k$, entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1, $|\sigma| = 2q + 1$ y $\forall v \in \sigma$, $e_\sigma(v) = s_\sigma(v) = q$.

Como G es semi-regular, para cualquier $v \in G$, $|e_G(v) - s_G(v)| = 1$, entonces la mitad de los vértices en G tienen grado de salida igual $k - 1$ y la otra mitad tienen grado de salida igual a k . Acotemos por abajo el número de aristas que salen de σ es decir, tomemos en cuenta el caso en el que tendremos menos aristas salientes de σ . Así, supongamos que $\forall v \in \sigma$, $s_G(v) = k - 1$.

De esta manera, el número mínimo de aristas que salen de σ a $G \setminus \sigma = \bar{\sigma}$ es:

$$|\sigma|(s_G(v) - s_\sigma(v)) = (2q + 1)(k - 1 - q)$$

Ahora, el número de vértices en $\bar{\sigma}$ es:

$$|G| - |\sigma| = 2k - (2q + 1) = 2k - 2q - 1$$

Desarrollando:

$$(2q + 1)(k - 1 - q) = 2kq - 2q^2 - q + k - 1 - 2q = (2k - 2q - 1)q + (k - (2q + 1)) = (2k - 2q - 1)q + (k - |\sigma|)$$

Como $|\sigma| < k$, entonces

$$(2q + 1)(k - 1 - q) > (2k - 2q - 1)q$$

Entonces, para $k > 2q + 1$, existe un vértice $w \in \bar{\sigma}$ que recibe al menos $q + 1$ aristas de σ .

Por lo tanto, aplicando la regla de grado de entrada uniforme concluimos que $\sigma \notin \text{FP}(G)$. \square

Corolario 4.4. *Sea G un n -torneo par semi-regular tal que $n > 6$ y σ un 3-ciclo, entonces $\sigma \notin \text{FP}(G)$.*

La Figura 4.8 muestra un 6-torneo semi-regular para la cual, $\text{FP}(G)$ es un 3-ciclo. Por otro lado, el 6-torneo analizado en la Sección 4.2 también es semi-regular sin embargo, ningún 3-ciclo es soporte de un punto fijo. Estos ejemplos muestran la necesidad de la hipótesis $|\sigma| < k$.

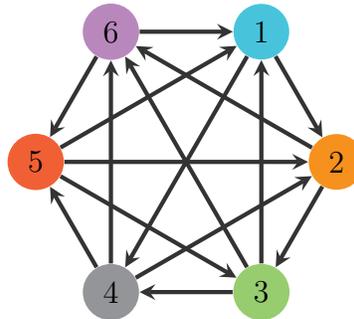


Figura 4.8: $|G| = 6$, $\text{FP}(G) = \{126\}$, $\sigma = \{1, 2, 6\}$ es un 3-ciclo y $|\sigma| = 3$.

Todos los resultados de esta sección nos facilitan, especialmente, el cálculo de $\text{FP}(G)$ para n -torneos semi-regulares con $n > 6$.

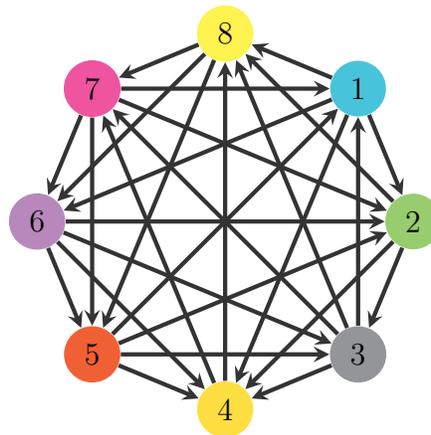


Figura 4.9: $|G| = 8$, $\text{FP}(G) = \{13678, 123678, 135678, 1235678, 1345678, 2345678, 12345678\}$, $\sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ es un subtorneo regular y $|\sigma| = 7$. Notemos que $[8] \in \text{FP}(G)$.

Por ejemplo, si G es un 8-torneo semi-regular, G no tiene sumideros, así que $\text{FP}(G)$ no contiene soportes de tamaño uno, el Corolario 4.3 descarta a todos los soportes de cardinalidad dos, el Corolario 4.4 descarta a todos los 3-ciclos y por último, la Proposición 4.2 descarta a todos los soportes con cuatro elementos. Por lo tanto, si $\sigma \in \text{FP}(G)$, $|\sigma| \geq 5$ y de hecho, solo existen dos gráficas inducidas que pueden ser soportes: la 5-estrella y el torneo

5-CU. Reduciendo el cómputo de $FP(G)$ a analizar los subconjuntos $\sigma \subseteq [n]$ de tamaño seis, siete, y ocho es más, si dejamos al último al soporte completo, podemos incluirlo o excluirlo de $FP(G)$ mediante la regla de paridad.

En la búsqueda de torneos pares motivos corazón, analizamos uno a uno todos los torneos sin sumideros para $n = 6$ (ver Sección 5.3), $n = 8$ y un gran número de torneos para $n = 10$. Se encontraron torneos en donde $[n] \in FP(G)$ (ver Figura 4.9) pero no motivos corazón. Esto nos llevó a plantear la siguiente conjetura.

Conjetura: Sea G un torneo en $n = 2k$ vértices, entonces G no es motivo corazón.

Un posible camino hacia la demostración de la conjetura es la siguiente conjetura.

Conjetura: Sea G un n -torneo en $n = 2k$ vértices. Supongamos que $[n] \in FP(G)$, entonces existe $\sigma \in FP(G)$ tal que $|\sigma| < n$.

Para $n = 6$ y $n = 8$ es suficiente con $|\sigma| = n - 1$. La Figura 4.10 muestra que esto no es cierto para $n = 10$.

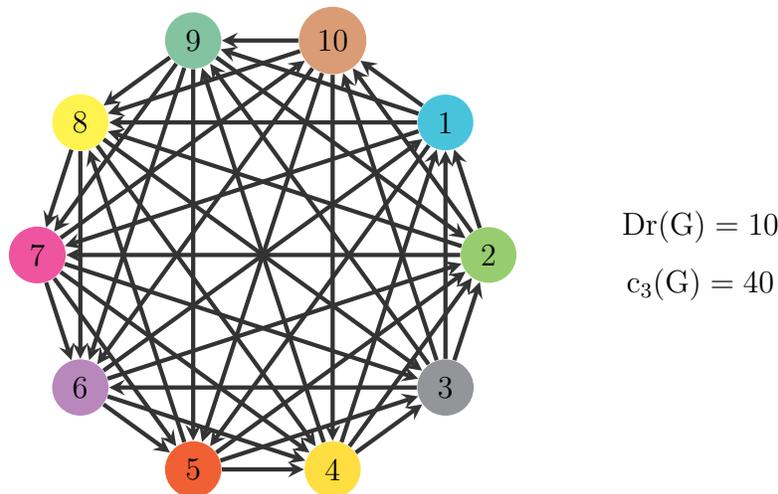


Figura 4.10: 10-torneo semi-regular con secuencia de grado de entrada 4545554544. Tiene soporte completo y soportes de tamaño siete, pero no de tamaño nueve. $FP(G) = \{1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8, 1\ 2\ 4\ 7\ 8\ 9\ 10, 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\}$.

Discusión

Los torneos, especialmente los torneos cíclicamente simétricos, son gráficas que tienen un gran número de restricciones. A pesar de ello, los torneos han sido un gran objeto de estudio. Son lo suficientemente simples para ser estudiados y lo suficientemente complejos para encontrar un número variado de dinámicas y soportes en los CTLNs asociados a ellos.

Los CTLNs son matemáticamente dóciles y de gran interés. Pueden ser estudiados desde diferentes puntos de vista y con múltiples herramientas matemáticas. Por ejemplo, podríamos

estudiar los arreglos de hiperplanos desde distintas perspectivas. Podríamos empezar con el análisis puro de las ecuaciones, como se hizo en este trabajo, y mediante la gráfica de regiones. También se puede considerar el análisis usando teoría de matroides y geometría tropical. Otro punto de vista son las reglas gráficas y de pegado. Aunque la lista de estas no está completa, han inspirado y seguirán inspirando resultados nuevos, como los del Capítulo 4.

Por otro lado, los CTLNs proponen un emocionante ambiente de colaboración entre diferentes áreas de la ciencia. A pesar de que, en mi opinión, sus aplicaciones están más enfocadas a modelar dinámicas artificiales y no biológicas, abren una interesante brecha para estudiar e intentar modelar otros procesos fisiológicos o biológicos, entre otros, los cuales podrían ser puestos a prueba experimentalmente.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a los profesores Vinicio Gómez, Carina Curto, Katherine Morrison y Caitlyn Parmelee por su colaboración, aliento y sus valiosos comentarios. Este trabajo fue financiado por el Programa para el Impulso a la Titulación por Actividades Académicas en el Extranjero (PITAAE) 2022.

Capítulo 5

Anexos

5.1. Secuencias de grados de entrada

El siguiente código fue utilizado en la Sección 1.3 y está basado en el trabajo realizado por Alway [1].

```
1 n = int(input("Número de vértices del torneo: "))
2
3 un_torneo = [[0]]
4 dos_torneo = [[0,1]]
5 tres_torneos = [[0,1,2], [1,1,1]]
6
7 def generar_listas(n,x):
8     # Crea una lista inicial de n-1 elementos con valor 0 y un último elemento
9     # con el valor de n-1.
10    lista_inicial = [0] * (n-1)
11    lista_inicial.append(n-1)
12    # Crea una lista con la lista inicial.
13    listas = [lista_inicial]
14    # Mientras el último elemento de la última lista en "listas" no sea igual
15    # a "x", entra en un ciclo while
16    while listas[-1][-1] != x:
17        # Crea una lista vacía llamada "nuevas_listas"
18        nuevas_listas = []
19        # Itera sobre cada lista en "listas"
20        for l in listas:
21            # Itera sobre el rango de n-2
22            for i in range(n-1):
23                # Crea una nueva lista llamada "nueva_lista" que es una copia
24                # de "l"
25                nueva_lista = l.copy()
26                # Si el elemento en el índice "i" de "nueva_lista" es igual a
27                # 0, se establece ese elemento en 1 y se reduce el valor del último elemento
28                # en 1
29                if nueva_lista[i] == 0:
30                    nueva_lista[i] = 1
```

```

26         nueva_lista[-1] -= 1
27         # Agrega la "nueva_lista" a "nuevas_listas"
28         nuevas_listas.append(nueva_lista)
29         # "listas" se vuelve a asignar a "nuevas_listas"
30         listas = nuevas_listas
31         # retorna una lista con las sublistas de "listas" donde la suma de los
32         # elementos es igual a n-1.
33         return [l for l in listas if sum(l) == n-1]
34 def generar_todas_listas(n): #Llama a la función generar_listas(n, x) para x
35     # menores que n.
36     resultados = []
37     for x in range(0, n):
38         resultados.extend(generar_listas(n, x))
39     return [list(l) for l in set(tuple(l) for l in resultados)]
40 def suma_listas(A, B):
41     resultado = []
42     for lista in B:
43         lista.append(0) #Agrega un cero al final de la lista B
44     for i in range(len(B)):
45         for j in range(len(A)):
46             resultado.append([x+y for x,y in zip(B[i], A[j])]) #Suma entrada a
47             # entrada cada elemento de la lista A con cada elemento de la lista B.
48     resultado = [sorted(i) for i in resultado]
49     resultado = list(set(tuple(i) for i in resultado)) # Elimina las listas
50     # duplicadas
51     resultado = [list(i) for i in resultado]
52     return resultado
53 def generar_todas_listas_recursiva(n):
54     if n == 1:
55         return un_torneo
56     elif n == 2:
57         return dos_torneo
58     elif n == 3:
59         return tres_torneos
60     elif n >= 4:
61         A = generar_todas_listas(n)
62         B = generar_todas_listas_recursiva(n-1)
63         return suma_listas(A,B)
64     else:
65         print("El valor ingresado no es válido.")
66 Lista_final = generar_todas_listas_recursiva(n)
67 Lista_final.sort()
68 print(Lista_final)
69 print(len(Lista_final))

```

Las siguientes tablas muestran las secuencias válidas para torneos con seis y siete vértices. Para cada secuencia se presenta la direccionalidad y el número total de 3-ciclos que tendría un torneo asociado a dicha secuencia.

6 vértices					
Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$	Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$
[0, 1, 2, 3, 4, 5]	70	0	[1, 1, 2, 2, 4, 5]	54	2
[0, 1, 2, 4, 4, 4]	62	1	[1, 1, 2, 3, 3, 5]	46	3
[0, 1, 3, 3, 3, 5]	62	1	[1, 1, 2, 3, 4, 4]	38	4
[0, 1, 3, 3, 4, 4]	54	2	[1, 1, 3, 3, 3, 4]	30	5
[0, 2, 2, 2, 4, 5]	62	1	[1, 2, 2, 2, 3, 5]	38	4
[0, 2, 2, 3, 3, 5]	54	2	[1, 2, 2, 2, 4, 4]	30	5
[0, 2, 2, 3, 4, 4]	46	3	[1, 2, 2, 3, 3, 4]	22	6
[0, 2, 3, 3, 3, 4]	38	4	[1, 2, 3, 3, 3, 3]	14	7
[0, 3, 3, 3, 3, 3]	30	5	[2, 2, 2, 2, 2, 5]	30	5
[1, 1, 1, 3, 4, 5]	62	1	[2, 2, 2, 2, 3, 4]	14	7
[1, 1, 1, 4, 4, 4]	54	2	[2, 2, 2, 3, 3, 3]	6	8

7 vértices					
Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$	Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]	112	0	[0, 2, 2, 3, 4, 4, 6]	88	3
[0, 1, 2, 3, 5, 5, 5]	104	1	[0, 2, 2, 3, 4, 5, 5]	80	4
[0, 1, 2, 4, 4, 4, 6]	104	1	[0, 2, 2, 4, 4, 4, 5]	72	5
[0, 1, 2, 4, 4, 5, 5]	96	2	[0, 2, 3, 3, 3, 4, 6]	80	4
[0, 1, 3, 3, 3, 5, 6]	104	1	[0, 2, 3, 3, 3, 5, 5]	72	5
[0, 1, 3, 3, 4, 4, 6]	96	2	[0, 2, 3, 3, 4, 4, 5]	64	6
[0, 1, 3, 3, 4, 5, 5]	88	3	[0, 2, 3, 4, 4, 4, 4]	56	7
[0, 1, 3, 4, 4, 4, 5]	80	4	[0, 3, 3, 3, 3, 3, 6]	72	5
[0, 1, 4, 4, 4, 4, 4]	72	5	[0, 3, 3, 3, 3, 4, 5]	56	7
[0, 2, 2, 2, 4, 5, 6]	104	1	[0, 3, 3, 3, 4, 4, 4]	48	8
[0, 2, 2, 2, 5, 5, 5]	96	2	[1, 1, 1, 3, 4, 5, 6]	104	1
[0, 2, 2, 3, 3, 5, 6]	96	2	[1, 1, 1, 3, 5, 5, 5]	96	2

7 vértices (continuación)					
Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$	Secuencia	Dr(G)	$c_3(G)$
[1, 1, 1, 4, 4, 4, 6]	96	2	[1, 2, 2, 4, 4, 4, 4]	40	9
[1, 1, 1, 4, 4, 5, 5]	88	3	[1, 2, 3, 3, 3, 3, 6]	56	7
[1, 1, 2, 2, 4, 5, 6]	96	2	[1, 2, 3, 3, 3, 4, 5]	40	9
[1, 1, 2, 2, 5, 5, 5]	88	3	[1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]	32	10
[1, 1, 2, 3, 3, 5, 6]	88	3	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 5]	32	10
[1, 1, 2, 3, 4, 4, 6]	80	4	[2, 2, 2, 2, 2, 5, 6]	72	5
[1, 1, 2, 3, 4, 5, 5]	72	5	[2, 2, 2, 2, 3, 5, 5]	48	8
[1, 1, 2, 4, 4, 4, 5]	64	6	[2, 2, 2, 3, 3, 3, 6]	48	8
[1, 1, 3, 3, 3, 4, 6]	72	5	[2, 2, 2, 3, 3, 4, 5]	32	10
[1, 1, 3, 3, 3, 5, 5]	64	6	[2, 2, 2, 3, 4, 4, 4]	24	11
[1, 1, 3, 3, 4, 4, 5]	56	7	[2, 2, 3, 3, 3, 3, 5]	24	11
[1, 1, 3, 4, 4, 4, 4]	48	8	[1, 3, 3, 3, 3, 4, 4]	24	11
[1, 2, 2, 2, 3, 5, 6]	80	4	[2, 2, 2, 2, 3, 4, 6]	56	7
[1, 2, 2, 2, 4, 4, 6]	72	5	[2, 2, 2, 2, 4, 4, 5]	40	9
[1, 2, 2, 2, 4, 5, 5]	64	6	[2, 2, 3, 3, 3, 4, 4]	16	12
[1, 2, 2, 3, 3, 4, 6]	64	6	[2, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	8	13
[1, 2, 2, 3, 3, 5, 5]	56	7	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]	0	14
[1, 2, 2, 3, 4, 4, 5]	48	8			

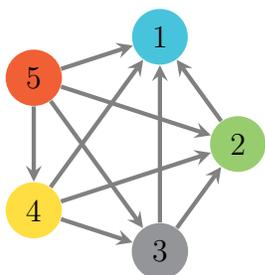
En los siguientes anexos presentamos un compendio de torneos en donde se utilizan distintos colores para las aristas. Dado un torneo G , las aristas negras remarcan los subtorneos que son soportes de G . Las aristas de color rojo pertenecen a una componente de una unión cíclica, mientras que las aristas grises no pertenecen a ninguna de estas dos categorías.

Para algunos torneos se muestra una simulación numérica, en la parte de arriba de la gráfica que muestra las de curvas de disparo se muestra la actividad total en color azul. Todas las simulaciones fueron realizadas usando los parámetros estándar.

5.2. 5-torneos

En este anexo se muestran los doce posibles 5-torneos. Para cada uno de ellos se proporcionan: la secuencia ordenada de grados de entrada, direccionalidad, número de 3-ciclos y soporte.

Como se menciona en la Sección 1.3, solamente existen nueve secuencias de grados de entrada válidas. Sin tomar en cuenta el orden, la secuencia $[1, 1, 2, 3, 3]$ se repite dos veces, mientras que la secuencia $[1, 2, 2, 2, 3]$ se repite tres veces, una de ellas en un torneo motivo corazón.

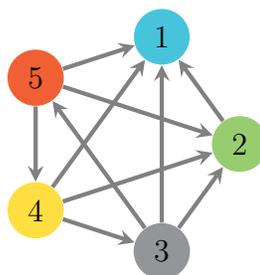


$$[4, 3, 2, 1, 0]$$

$$\text{Dr}(G) = 40$$

$$c_3(G) = 0$$

$$\text{FP}(G) = \{1\}$$

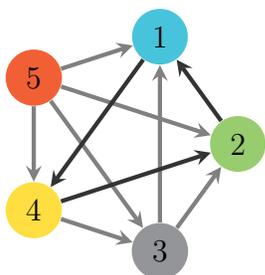


$$[4, 3, 1, 1, 1]$$

$$\text{Dr}(G) = 32$$

$$c_3(G) = 1$$

$$\text{FP}(G) = \{1\}$$

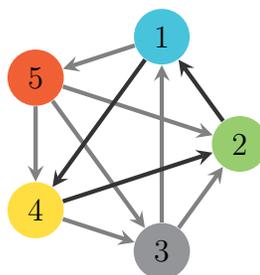


$$[3, 3, 2, 2, 0]$$

$$\text{Dr}(G) = 24$$

$$c_3(G) = 2$$

$$\text{FP}(G) = \{124\}$$

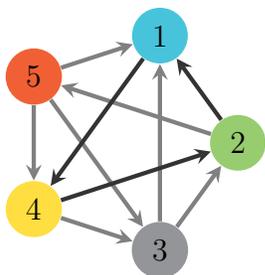


$$[2, 3, 2, 2, 1]$$

$$\text{Dr}(G) = 8$$

$$c_3(G) = 4$$

$$\text{FP}(G) = \{124\}$$

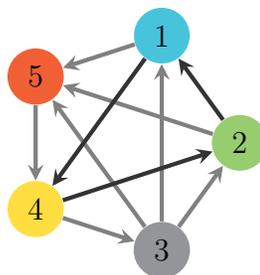


$$[3, 2, 2, 2, 1]$$

$$\text{Dr}(G) = 8$$

$$c_3(G) = 4$$

$$\text{FP}(G) = \{124\}$$

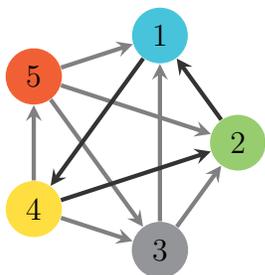


$$[3, 3, 1, 2, 1]$$

$$\text{Dr}(G) = 16$$

$$c_3(G) = 3$$

$$\text{FP}(G) = \{124\}$$

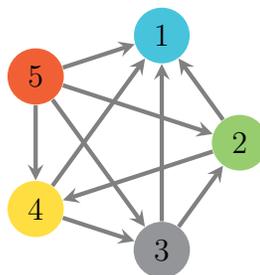


$$[3, 3, 2, 1, 1]$$

$$\text{Dr}(G) = 16$$

$$c_3(G) = 3$$

$$\text{FP}(G) = \{124\}$$

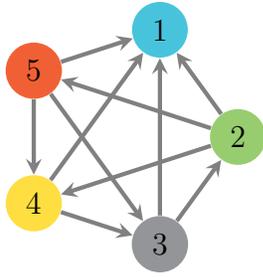


$$[4, 2, 2, 2, 0]$$

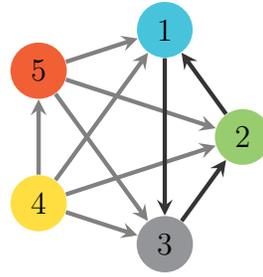
$$\text{Dr}(G) = 32$$

$$c_3(G) = 1$$

$$\text{FP}(G) = \{1\}$$

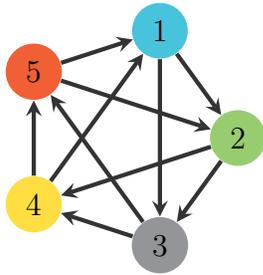


$[4, 1, 2, 2, 1]$
 $\text{Dr}(G) = 24$
 $c_3(G) = 2$
 $\text{FP}(G) = \{1\}$



$[3, 3, 3, 1, 0]$
 $\text{Dr}(G) = 32$
 $c_3(G) = 1$
 $\text{FP}(G) = \{123\}$

Motivos corazón para $n = 5$

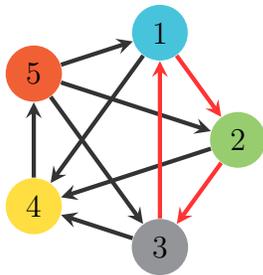
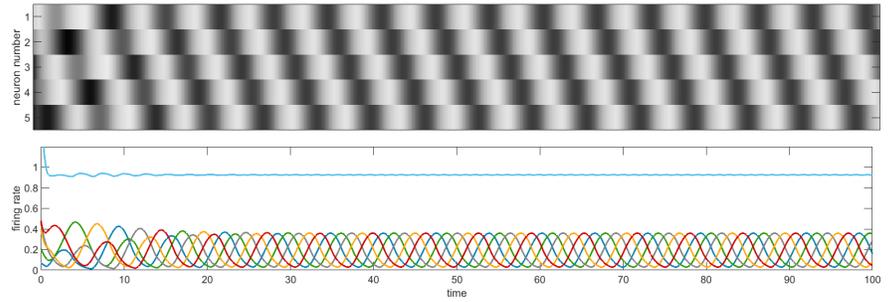


$[2, 2, 2, 2, 2]$

$\text{Dr}(G) = 0$

$c_3(G) = 5$

Cíclicamente simétrico (5-estrella)

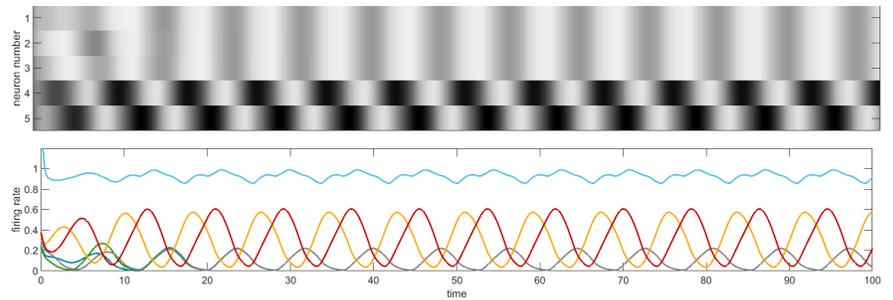


$[3, 2, 2, 2, 1]$

$\text{Dr}(G) = 8$

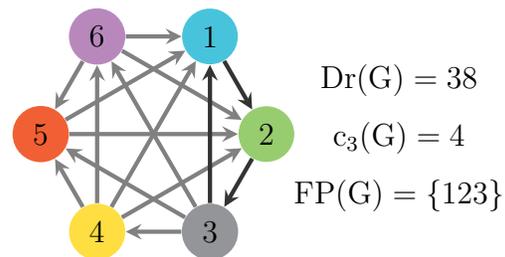
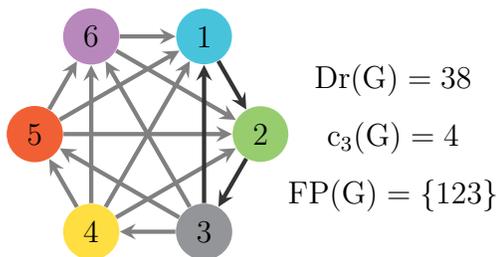
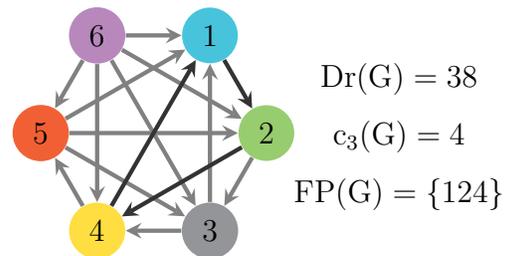
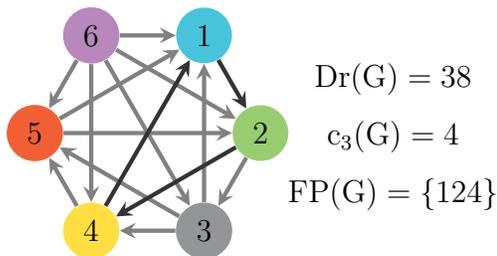
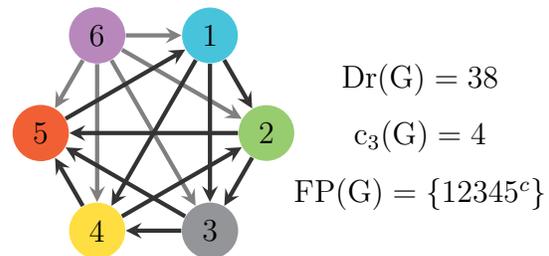
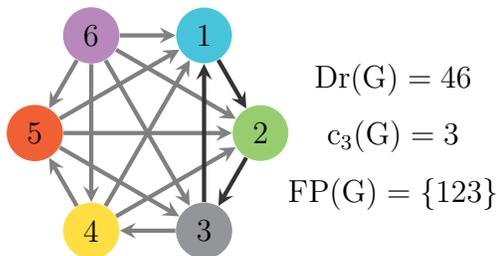
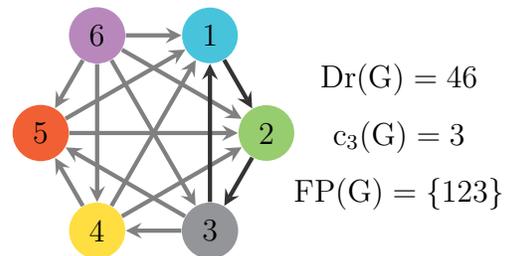
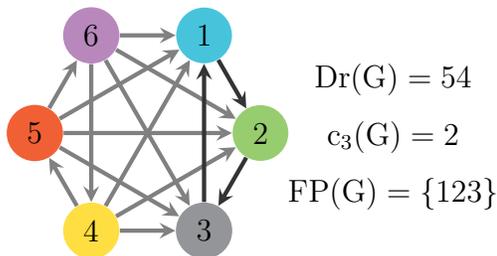
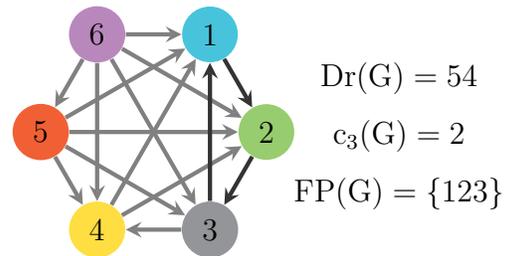
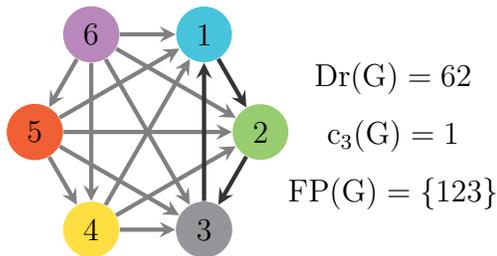
$c_3(G) = 4$

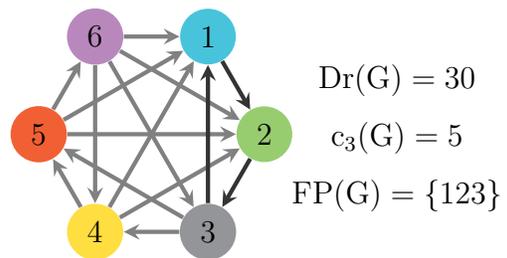
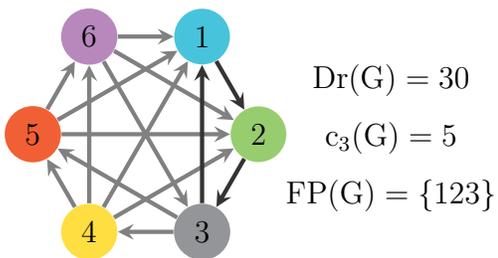
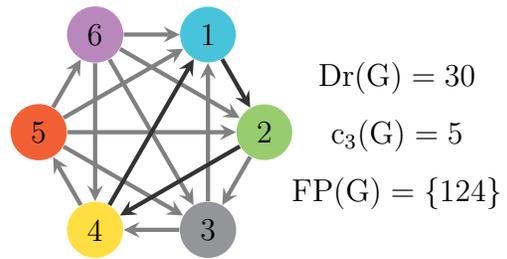
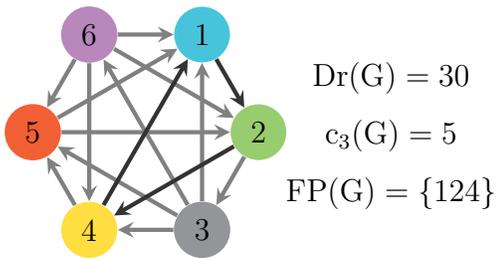
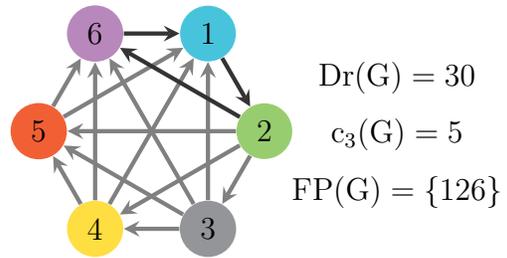
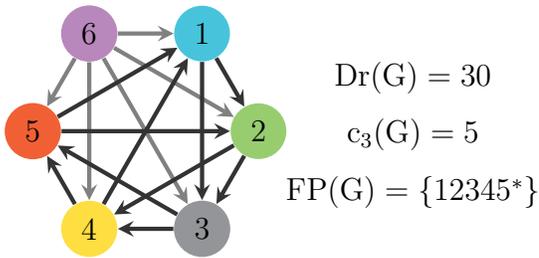
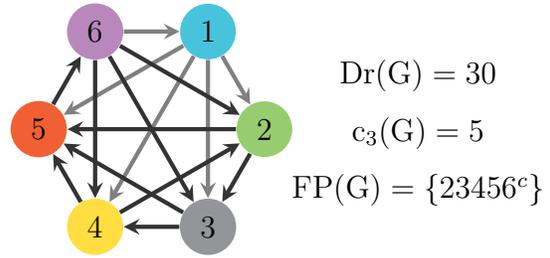
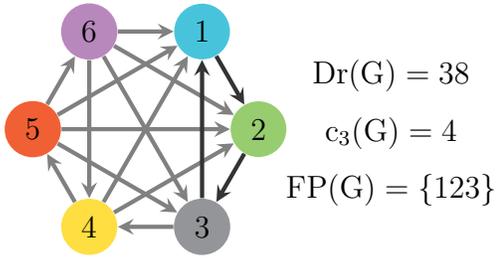
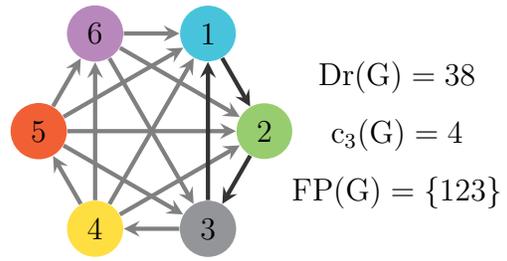
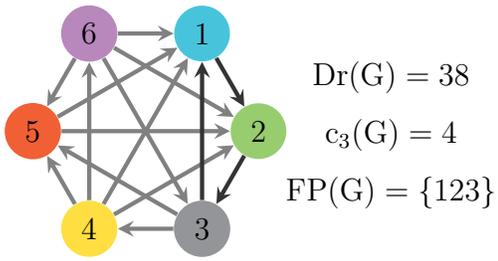
Unión cíclica de un 3-ciclo y dos vértices

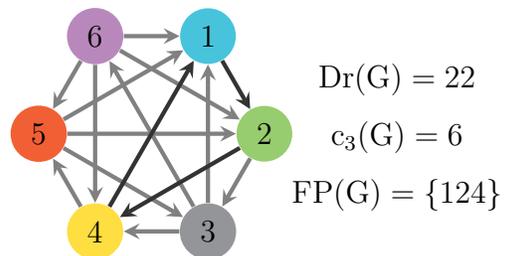
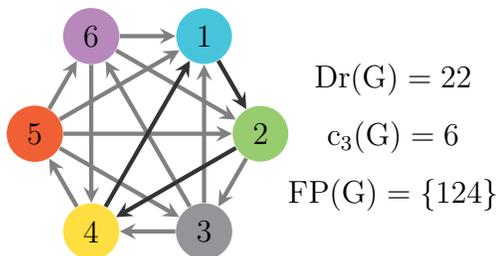
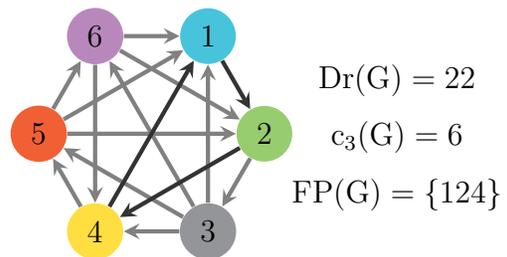
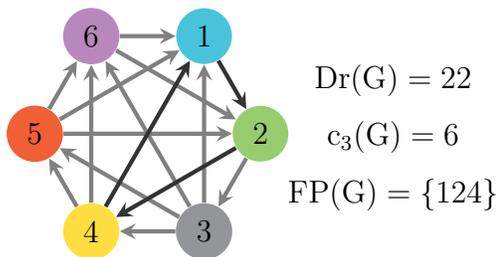
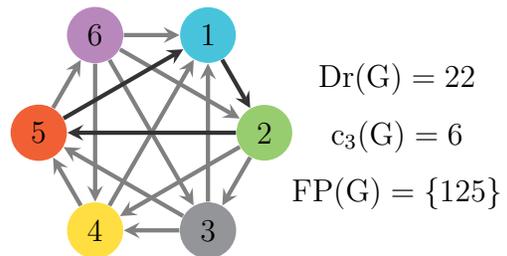
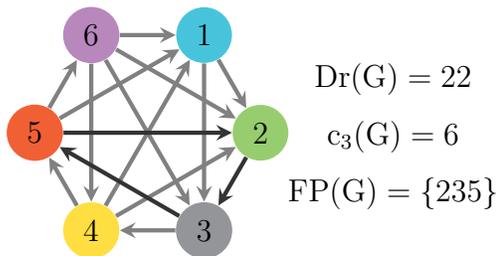
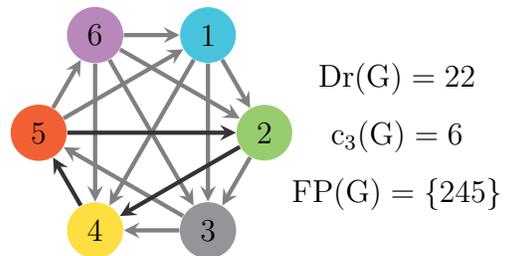
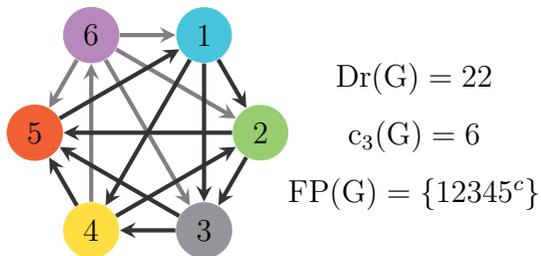
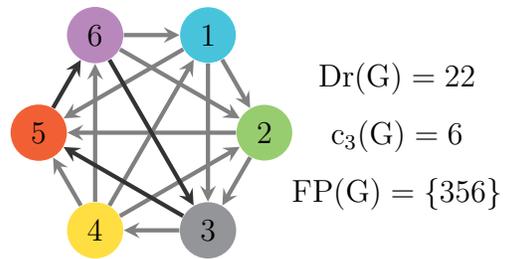
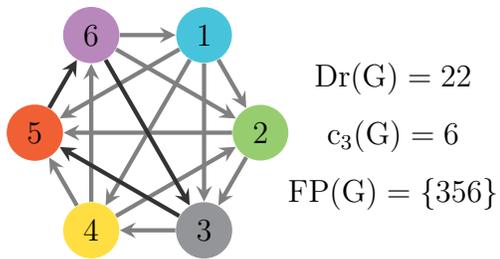


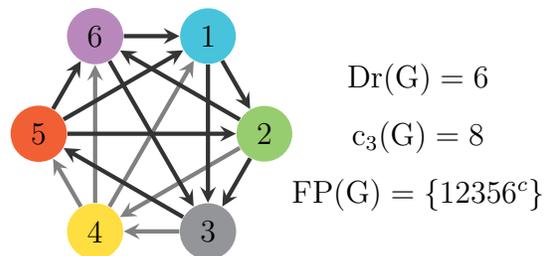
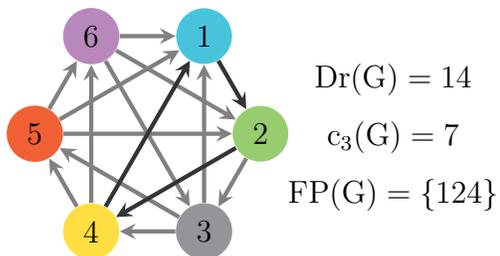
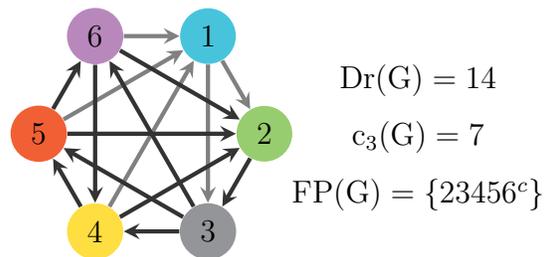
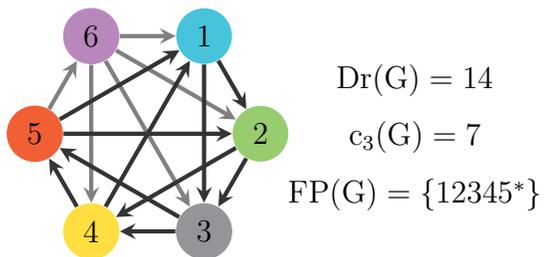
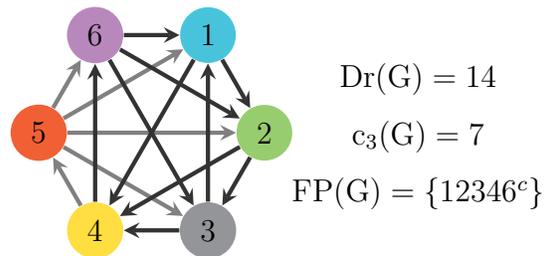
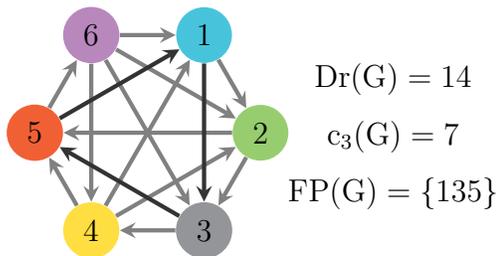
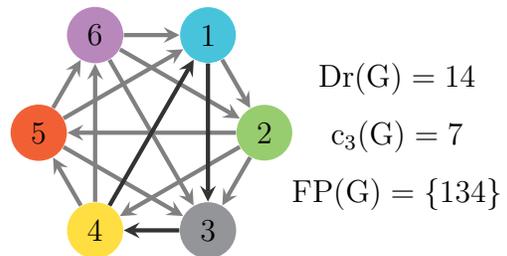
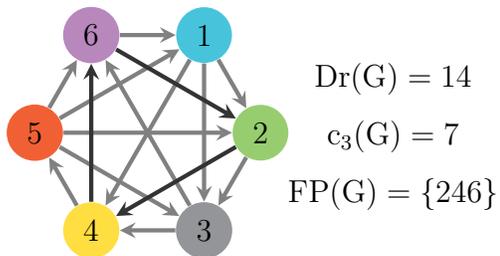
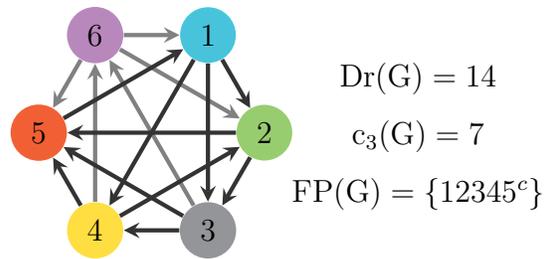
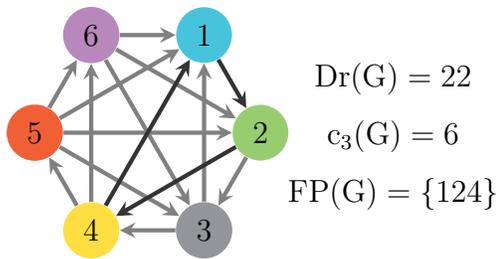
5.3. 6-torneos sin sumideros

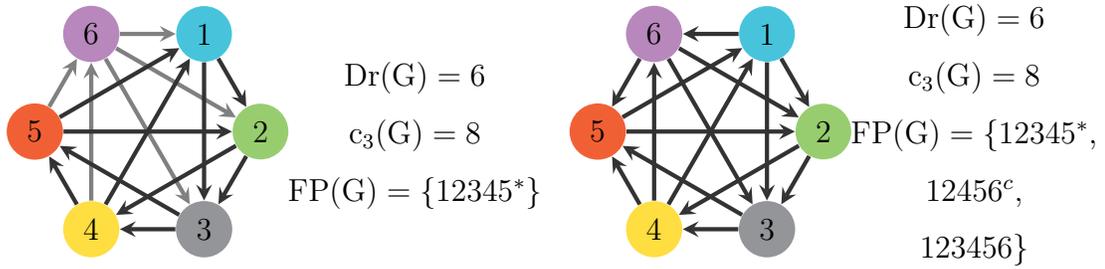
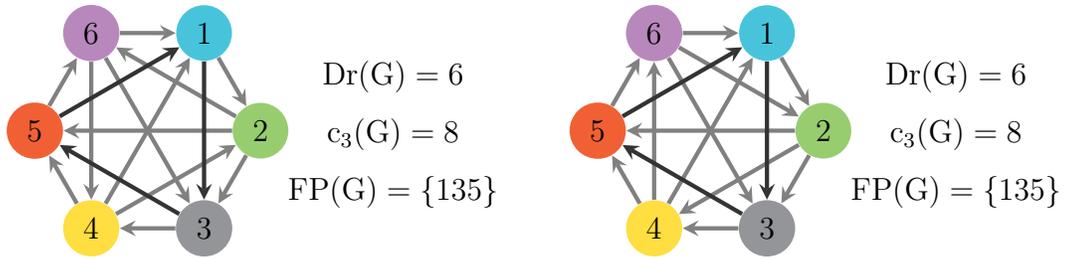
Se muestran todos los 6-torneos sin sumideros no isomorfos. Para cada uno se presentan: la direccionalidad, el número de 3-ciclos y $FP(G)$, en este último * señala que el soporte en cuestión es una 5-estrella, mientras que c significa que dicho soporte es el torneo 5-CU.



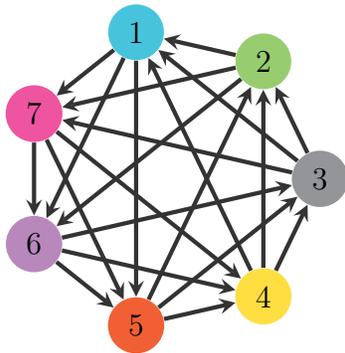








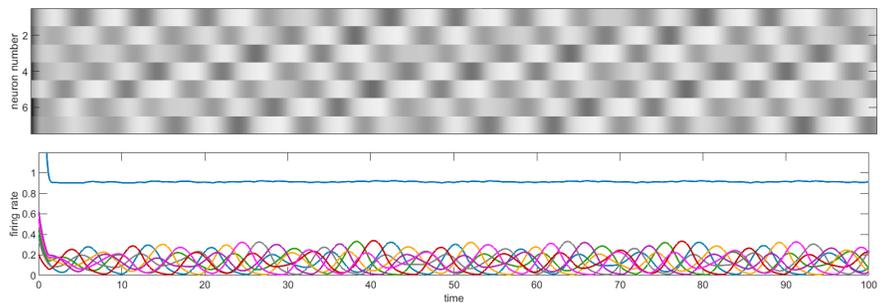
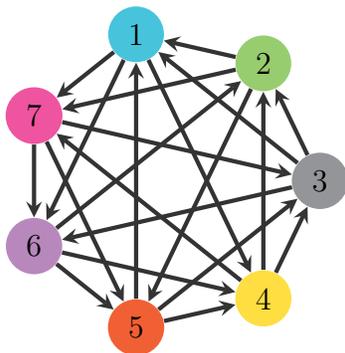
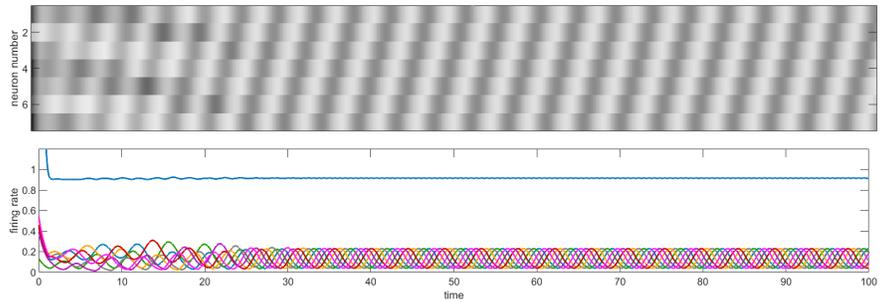
5.4. Motivos corazón para $n = 7$



$Dr(G) = 0$

$c_3(G) = 14$

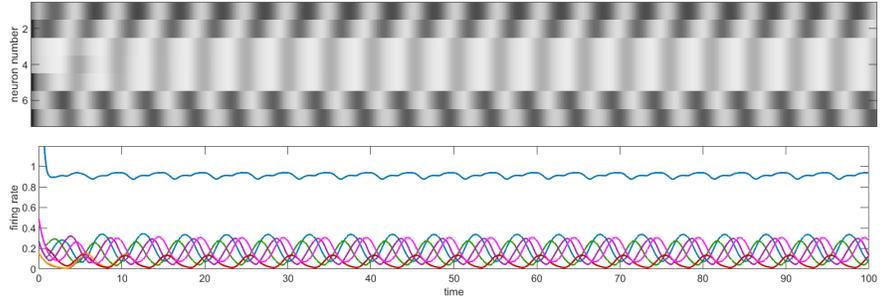
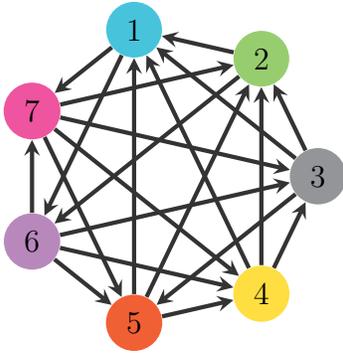
Cíclicamente simétrico (7-estrella)



$$Dr(G) = 0$$

$$c_3(G) = 14$$

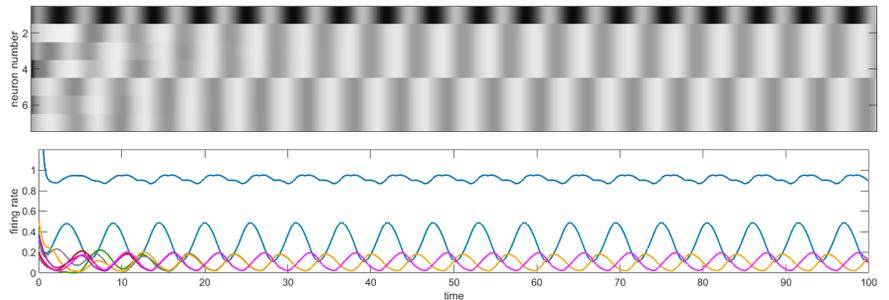
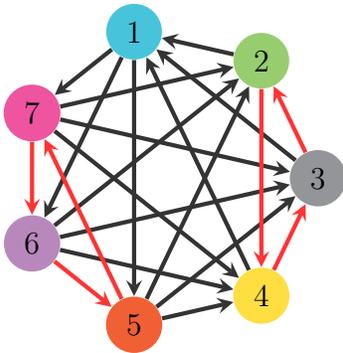
No es cíclicamente simétrico



$$Dr(G) = 16$$

$$c_3(G) = 12$$

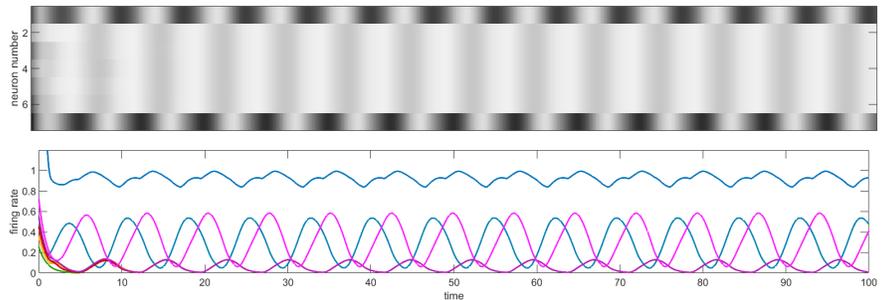
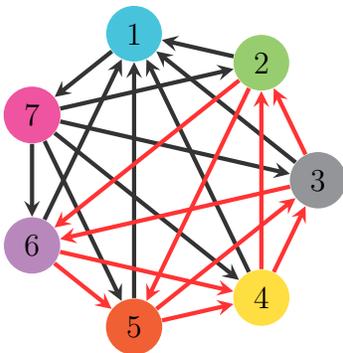
No es unión cíclica



$$Dr(G) = 24$$

$$c_3(G) = 11$$

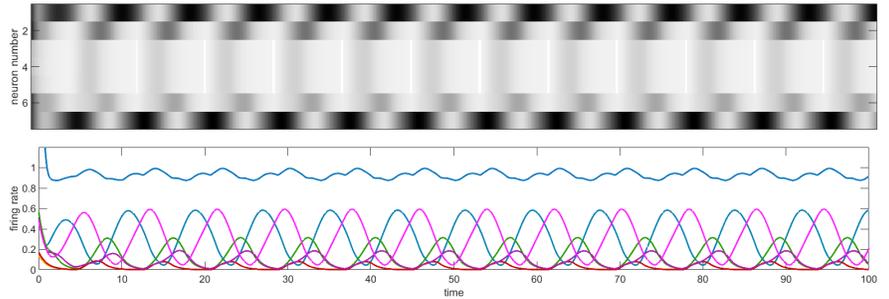
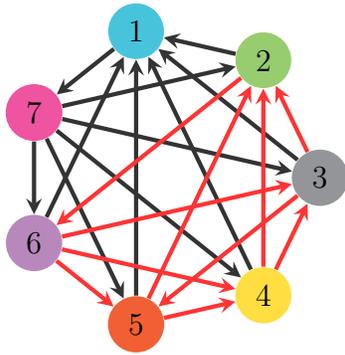
Unión cíclica de dos 3-ciclos y un vértice



$$Dr(G) = 32$$

$$c_3(G) = 10$$

Unión cíclica de una 5-estrella y dos vértices



$$Dr(G) = 40$$

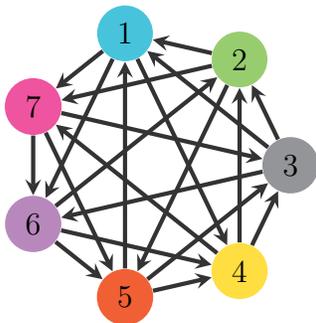
$$c_3(G) = 9$$

Unión cíclica del torneo 5-CU y dos vértices

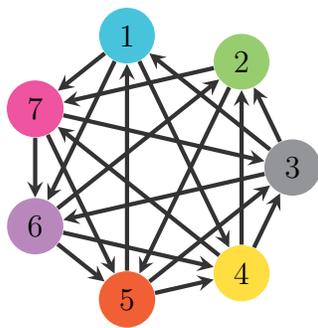
5.5. Rompiendo motivos corazón

Este anexo fue inspirado por la simetría sorpresa que se da cuando al remover una arista específica del torneo 5-CU se mantienen tanto el atractor como el soporte del punto fijo [4]. Nos preguntamos si este comportamiento podría ser replicado en otros torneos para obtener gráficas (no torneos) motivos corazón. Exploramos esto en los motivos corazón para $n = 7$. Se presenta el torneo original y, a menos que se diga lo contrario, se menciona qué arista fue removida de la gráfica anterior para obtenerla. Todas las gráficas que se presentan son motivos corazón.

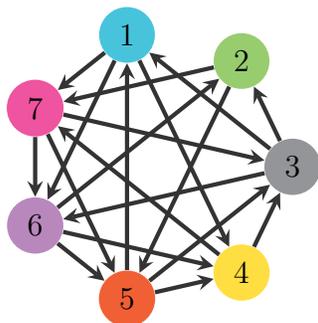
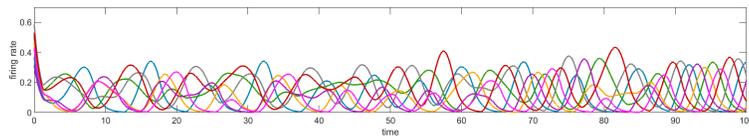
No se encontraron nuevos motivos corazón al remover aristas de torneos cíclicamente simétricos, por lo que queda como conjetura el que los torneos cíclicamente simétricos son irreducibles, no solo en el sentido de que no tienen soportes más pequeños al total (Teorema 4.1), si no que tampoco se pueden romper para obtener motivos corazón más pequeños.



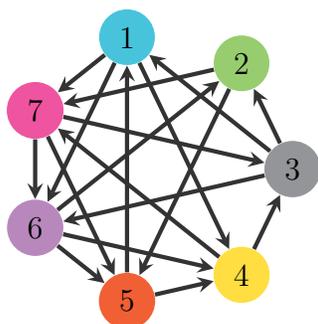
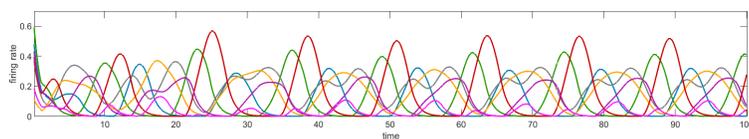
Torneo original. No es cíclicamente simétrico.



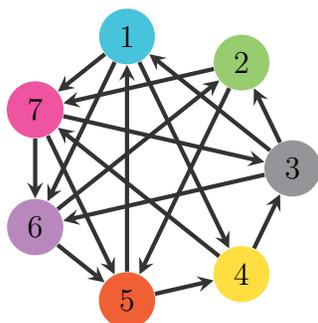
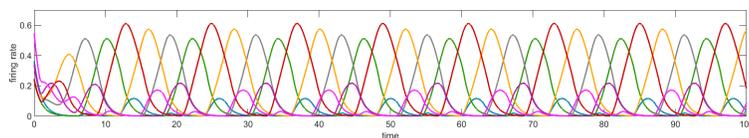
Se elimina la arista $2 \rightarrow 1$.



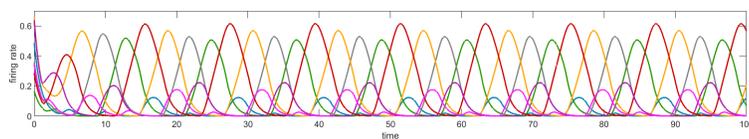
Se elimina la arista $4 \rightarrow 2$.

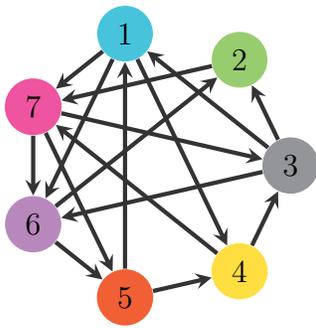


Se elimina la arista $5 \rightarrow 3$.

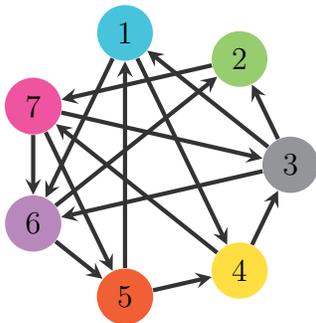
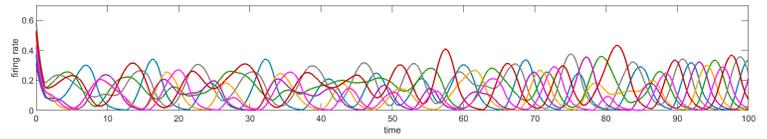


Se elimina la arista $6 \rightarrow 4$.

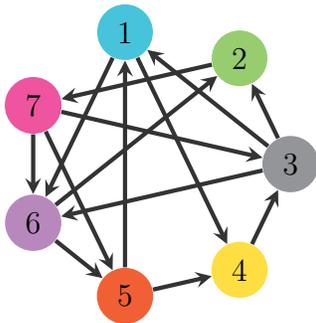
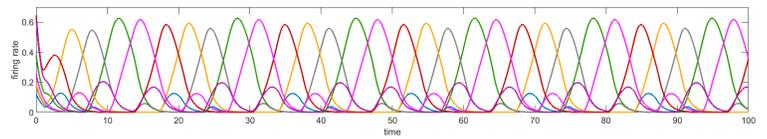




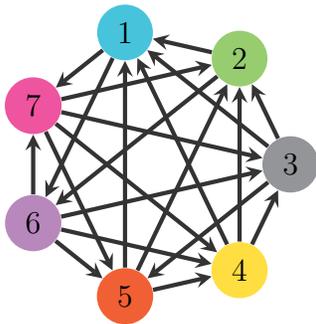
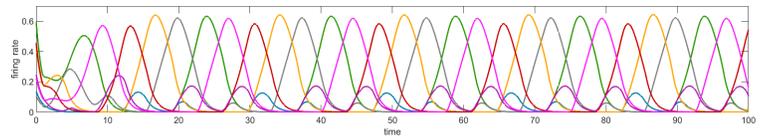
Se elimina la arista $2 \rightarrow 5$.



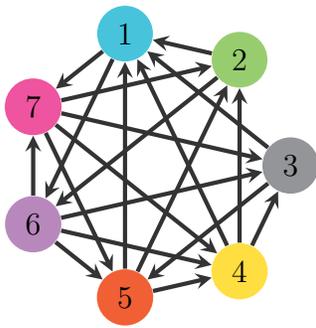
Se elimina la arista $1 \rightarrow 7$.



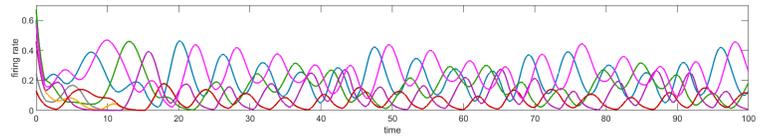
Se elimina la arista $4 \rightarrow 7$.



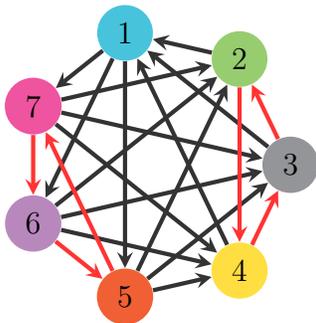
Torneo original. No es unión cíclica.



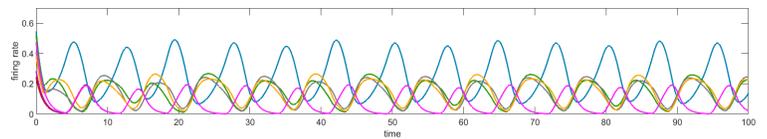
Se elimina la arista $3 \rightarrow 2$.



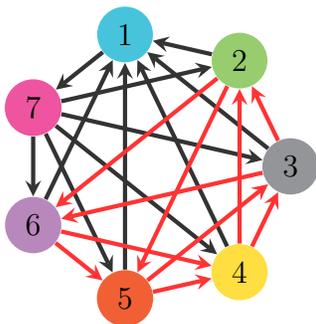
Torneo original. Unión cíclica de dos 3-ciclos y un vértice.

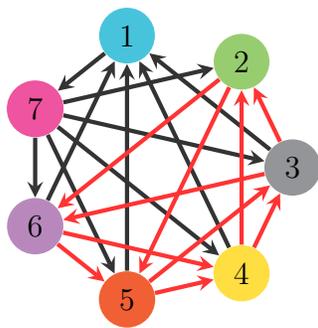


Se elimina la arista $2 \rightarrow 1$.

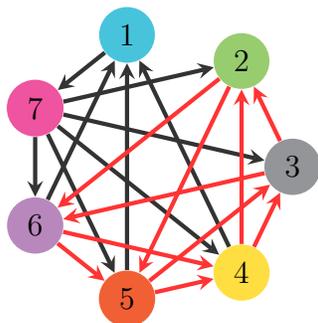
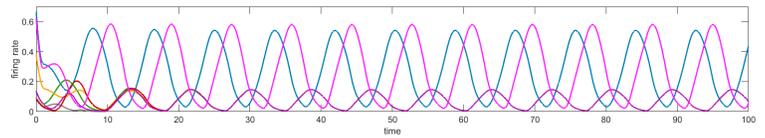


Torneo original. Unión cíclica de una 5-estrella y un vértice.

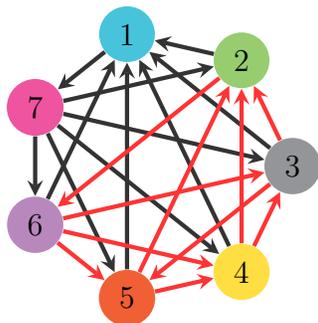
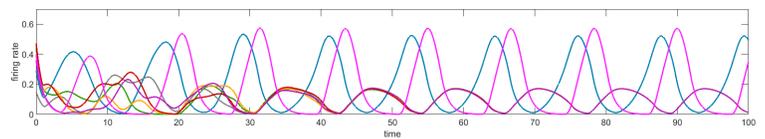




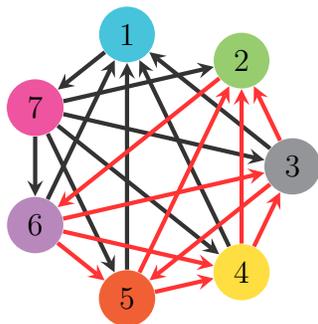
Se elimina la arista $2 \rightarrow 1$.



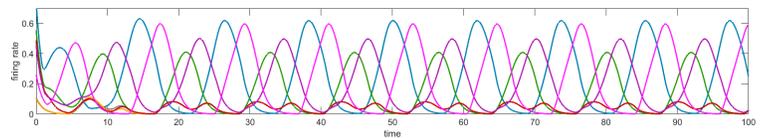
Se elimina la arista $3 \rightarrow 1$.

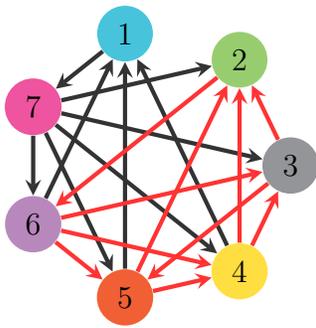


Torneo original. Unión cíclica de una 5-CU y dos vértices.

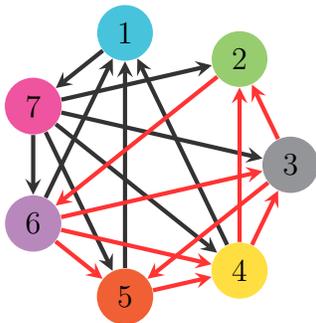
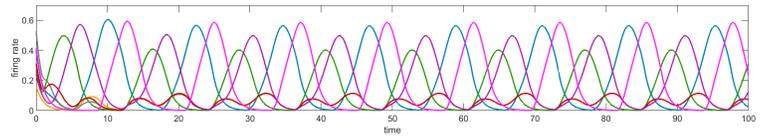


Se elimina la arista $2 \rightarrow 1$.

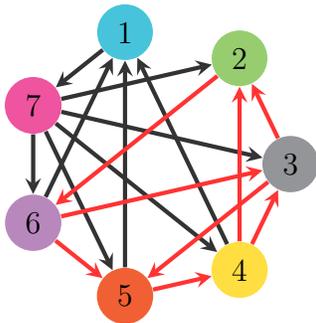
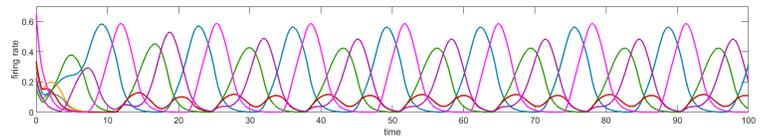




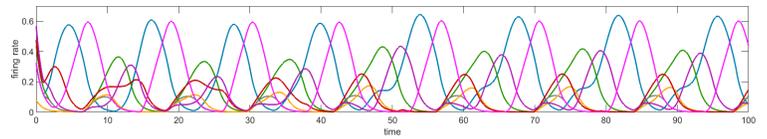
Se elimina la arista $3 \rightarrow 1$.



Se elimina la arista $5 \rightarrow 2$.



Se elimina la arista $6 \rightarrow 4$.



Bibliografía

- [1] G. Alway. «The Distribution of the Number of Circular Triads in Paired Comparisons.» En: *Biometrika* 49.1-2 (1962), págs. 265-269. DOI: <https://doi.org/10.2307/2333494>.
- [2] J. Castañeda Castro y V. Gómez Gutiérrez. *On tournaments combinatorics*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.01377>.
- [3] C. Curto, J. Geneson y K. Morrison. «Fixed points of competitive threshold-linear networks.» En: *Neural computation* 31.1 (2019), págs. 94-155. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.00794>.
- [4] C. Curto y K. Morrison. *Graph rules for recurrent neural network dynamics: extended version*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.12638>.
- [5] F.R Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, 1960.
- [6] D. Govc, R. Levi y J. P. Smith. «Complexes of tournaments, directionality filtrations and persistent homology.» En: *Journal of applied and computational topology* 5.2 (2021), págs. 313-337. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.00324>.
- [7] M.G. Kendall y B. Babington Smith. «On the method of paired comparisons.» En: *Biometrika* 31.3-4 (1940), págs. 324-345. DOI: <https://doi.org/10.1093/biomet/31.3-4.324>.
- [8] C. Lienkaemper. *Combinatorial geometry of neural codes, neural data analysis, and neural networks*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.07583>.
- [9] K. Morrison y C. Curto. *Predicting neural network dynamics via graphical analysis*. Algebraic and Combinatorial Computational Biology. Academic Press, 2019.
- [10] K. Morrison et al. *Diversity of emergent dynamics in competitive threshold-linear networks*. 2016. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1605.04463>.
- [11] C. Parmelee. *Applications of Discrete Mathematics for Understanding Dynamics of Synapses and Networks in Neuroscience*. 2017. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.06538>.
- [12] C. Parmelee et al. «Core motifs predict dynamic attractors in combinatorial threshold-linear networks.» En: *PLoS ONE* 17 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0264456>.
- [13] C. Parmelee et al. «Sequential attractors in combinatorial threshold-linear networks.» En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 21.2 (2022), págs. 1597-1630. DOI: <https://doi.org/10.1137/21M1445120>.