



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA MASA DEL QUARK TOP EN EL FORMALISMO DE
SEGUNDA CUANTIZACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

P R E S E N T A :

REBECA SÁNCHEZ RINCÓN

TUTOR

DR. JAIME BESPROSVANY FRIDZON



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A quienes creyeron en mí incluso cuando yo dejé de hacerlo.

Agradecimientos

Al Dr. Jaime Besprosvany Fridzon así como a los proyectos PAPIIT: IN113118 e IN117020 del Instituto de Física que me otorgaron la oportunidad de obtener una beca durante el proceso de la realización de esta tesis.

Resumen

Se presentan los fundamentos del Modelo Estándar de partículas elementales, así como una introducción al modelo de espín extendido y la base que lo genera. En particular, se sugiere una conexión entre los sectores electrodébil y de Yukawa, lo que da lugar a una relación de masas para los quarks pesados. Las componentes fermiónicas (quarks) y bosónicas (escales y vectores) son descritas en términos de segunda cuantización. Después del mecanismo de Higgs, se usa el operador de Higgs del sector electrodébil y de Yukawa que genera masas para conectarlos. Como resultado, se obtiene una relación que conecta el valor de expectación del vacío y la masa de los bosones vectoriales, el bosón escalar y los quarks t y b , ampliando la relación obtenida anteriormente mediante el tratamiento sin cuantizar.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
2. Segunda Cuantización	5
2.1. Espacio de Fock	6
2.2. Operadores de creación y aniquilación	7
2.3. Cuantización de bosones	10
2.4. Cuantización de fermiones	11
2.5. Operador de una partícula o un cuerpo	11
2.6. Antipartículas	12
3. Modelo Estándar	14
3.1. Teorías de norma	14
3.2. Partículas Elementales	17
3.2.1. Sector fermiónico	17
3.2.2. Sector bosónico vectorial	19
3.2.3. Sector bosónico escalar	20
3.3. El Mecanismo de Higgs	21
3.3.1. Rompimiento Espontáneo de Simetría	21

3.3.2. Acoplamientos de Yukawa	26
4. Modelo de Espín Extendido	28
4.1. Espacio Matricial	29
4.2. Formulaci3n Lagrangiana	31
4.2.1. Lagrangiano Escalar-Vector \mathcal{L}_{SV}	32
4.2.2. Lagrangiano Escalar-Fermi3n \mathcal{L}_{SF}	34
5. Mecanismo de Higgs en la Base Fermi3nica	36
5.1. Base fermi3nica	36
5.2. Generadores del Modelo Est3ndar	38
5.3. Bosones en segunda cuantizaci3n	41
5.4. Masas de las Part3culas en Segunda Cuantizaci3n	43
6. Conclusiones	47
A. Relaciones de Conmutaci3n	49
B. Matrices de Pauli y Dirac	50

Índice de tablas

3.1. Configuración de fermiones del Modelo Estándar.	19
5.1. Números cuánticos de las componentes quirales de los quarks t y b del Modelo Estándar, donde Q es la carga eléctrica, B es el número bariónico, Y es la hipercarga, I^3 es la tercera componente de isospín y S_z representa al espín.	39
5.2. Números cuánticos de las componentes de los bosones W_μ^i , Z_μ , H_t y H_b	42

Índice de figuras

- 3.1. Modelo Estándar de partículas elementales. Donde m es la masa, c la carga eléctrica y s el espín [14] compuesto por partículas fermiónicas de espín $1/2$, bosones de norma de espín 1 y el boson de Higgs de espín 0 . 20

Capítulo 1

Introducción

El Modelo Estándar (ME, por sus siglas) es una teoría de norma utilizada para describir el comportamiento de las partículas y sus interacciones con la finalidad de dar una descripción fenomenológica de la estructura fundamental de la materia. A pesar de ser una de las teorías más exitosas, presenta enigmas que son de gran importancia en el estudio de la física y que tratan de ser explicados con las teorías más allá del Modelo Estándar. Dentro de estos enigmas se encuentran: el origen de las tres fuerzas fundamentales y su conexión con la gravedad, no se describe a la materia oscura y energía oscura; para el Modelo Estándar los neutrinos carecen de masa, sin embargo, se sabe que la masa de los neutrinos no es cero; hay 18 parámetros libres (13 en el sector de Yukawa que dan las masas de los fermiones y los ángulos de mezcla entre quarks de la matriz Cabibbo–Kobayashi–Maskawa [1] o por sus siglas CKM, 2 en el sector de Higgs y 3 en el sector de norma) y con las oscilaciones de neutrinos se introducen otros más de la matriz de mezcla Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata [1] o PMNS por sus siglas; los problemas de jerarquía y naturalidad. Estos últimos están relacionados con la presencia de escalas de energías muy diferentes: el problema de jerarquía se refiere a la gran diferencia en los órdenes de magnitud entre los parámetros de las partículas del Modelo Estándar, por ejemplo las masas de los fermiones; el

problema de naturalidad surge de que la teoría no es válida a partir de cierta escala de energía y ésta no tiene una conexión evidente con otras escalas. Para los problemas de jerarquía y naturalidad es necesario introducir un ajuste fino en los parámetros del ME para que éste sea válido.

Dentro del Modelo Estándar se encuentra el sector escalar; describe el mecanismo por el cual las partículas adquieren masa. A altas energías, existe una simetría de norma entre las partículas B y W^i asociadas respectivamente a la hipercarga y la interacción débil; sin embargo, al disminuir la energía y llegar al estado mínimo (el vacío), el sistema adquiere una configuración que rompe la simetría espontáneamente. El valor de expectación del campo de Higgs obtiene un valor distinto de cero y como consecuencia de su interacción con los bosones de norma, aparece una nueva propiedad: los bosones W^i y Z adquieren masa. Además, existe el sector de Yukawa del Lagrangiano el cual describe el acoplamiento de los campos fermiónicos con el campo de Higgs, dotando a los fermiones de masa, nuevamente, gracias al rompimiento espontáneo de simetría. Otro sector del Modelo Estándar describe al Higgs y sus auto interacciones; éste se manifiesta como una sola partícula, después del rompimiento espontáneo de la simetría.

Estas teorías parten de una descripción clásica e incluye campos individuales cuyos modos normales son asociados a partículas, lo que permite una descripción de sistemas multipartículas. Los campos son representados con operadores de campo y son estudiados desde el formalismo de Segunda Cuantización como operadores de creación y aniquilación que, como su nombre lo dice, crean y aniquilan partículas [2] y cuyas propiedades se manifiestan por medio de las relaciones de conmutación y anticonmutación. El término segunda cuantización se entiende en una acepción que incluye el tiempo, en una versión relativista, y en otra, en que la cuantización es sobre

los campos.

El ME predice los valores de las masas para los bosones vectoriales en términos de los parámetros electrodébiles, a través del mecanismo de Higgs. Sin embargo, dentro del sector fermiónico, las masas siguen siendo arbitrarias, ya que surgen de términos Lagrangianos que son independientes de los elementos de bosón. El sector electrodébil sugiere una conexión, dado que los bosones vectores tienen acoplamientos con los fermiones y el campo de Higgs, este último responsable de dar masa en conjunto a fermiones y bosones. Esta conexión se relaciona con que los fermiones estén en la representación fundamental de los grupos de norma y Lorentz y los bosones vectoriales estén en la adjunta de estos, lo que implica que los bosones pueden construirse en términos de fermiones; a su vez, esto sugiere, estructuras compuestas y/o un origen común [4]. El modelo de espín extendido [5] tiene esta característica pues considera dimensiones extras aumentando los grados de libertad en el espacio de espín, conservando la invariancia de Lorentz, relacionando los grados de libertad discretos en un mismo espacio.

Recientemente, en la Ref. [6] se demostró que se puede usar el modelo de espín extendido como base, para la descripción del ME, con nuevas relaciones para la masa del quark top. En este trabajo, se sugiere aplicar la estructura del modelo de espín, aplicando reglas de cuantización, para estudiar consecuencias adicionales de esta descripción. Al reescribir dicho modelo, se obtiene una base fermiónica cuyas componentes conservan sus números cuánticos y grados de libertad. Esta nueva base tiene como característica que los bosones pueden ser descritos por las componentes quirales de los fermiones pesados mediante los operadores de creación y aniquilación. El objetivo principal de este trabajo de tesis es escribir los vértices escalar vector y escalar fermión del ME, en esta base y calcular las masas de bosones vectoriales con

ayuda del bosón escalar, así como las masas de los fermiones en el término Yukawa del vértice escalar fermión.

El contenido de la tesis se ha organizado de la siguiente manera. El capítulo 1 presenta una breve introducción del Modelo Estándar así como el objetivo principal de la tesis. En el capítulo 2 se presentan las bases de segunda cuantización y las reglas de operadores de creación y aniquilación. En el capítulo 3 se estudia el Modelo Estándar y el mecanismo de Higgs. El capítulo 4 está dedicado al modelo de espín extendido. En el capítulo 5 se presenta el mecanismo de Higgs en el nuevo formalismo de operadores fermiónicos, obteniéndose las masas de los bosones en términos de los fermiones pesados y se derivan resultados más allá de la descripción clásica, como es una fase adicional en la fórmula de las masas. El capítulo 6 presenta las conclusiones.

Capítulo 2

Segunda Cuantización

La energía potencial que se encuentra en la naturaleza se comporta como un oscilador armónico, para pequeñas perturbaciones que se alejan del mínimo de energía dado por $\frac{\hbar\omega}{2}$, donde \hbar es la constante de Planck reducida y ω es la frecuencia. En teoría cuántica de campos, las partículas son descritas por campos que, a nivel de partículas libres, se comportan como osciladores. Las soluciones del oscilador armónico se obtienen mediante el uso de operadores de creación y aniquilación, las cuales muestran características de las partículas y antipartículas libres. Estos operadores conforman los elementos principales en el formalismo de segunda cuantización; se utilizan para construir y manejar estados de un número arbitrario o infinito de partículas. Este formalismo describe a los sistemas cuánticos de muchas partículas indistinguibles y los campos quedan representados por operadores. Dichos operadores crean y aniquilan partículas, es decir, se puede obtener la función de onda a partir del estado generado por los campos y al aplicar un operador de creación o aniquilación agregará o quitará una partícula. Se ha demostrado que existe una conexión entre el espín de las partículas y la estadística, que obedecen el teorema de la estadística del espín [7]. Este teorema implica que las funciones de onda de un sistema de n partículas idénticas con espín entero que se llaman bosones, son simétricas ante permutaciones, es decir, si se

intercambian partículas la función de onda no cambia. Por otro lado, las partículas con espín semientero se llaman fermiones y son antisimétricas bajo el intercambio de cualquier par de partículas y la función de onda cambia de signo. La representación de Heisenberg es el marco para trabajar la segunda cuantización ya que se aplican reglas de cuantización para que los campos se conviertan en operadores. A continuación, se presenta el espacio de Fock para el manejo de los sistemas de muchas partículas.

2.1. Espacio de Fock

El formalismo de segunda cuantización describe dos aspectos importantes acerca de los sistemas de muchas partículas: uno, cuántas partículas hay en cada estado y el otro, la simetría de intercambio de los estados. Estos objetos conforman un espacio de Hilbert, llamado de Fock. Este espacio describe a los estados como la suma directa de los subespacios de Hilbert con número fijo de partículas que representan estados de cero partículas, una partícula, dos partículas, etc. [8]; se puede expresar como la suma directa de los productos tensoriales

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) &= \mathcal{H}(0) \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_\pm(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus \mathcal{S}_\pm(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus \dots, \\ \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_\pm \mathcal{H}^{\otimes n},\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $\mathcal{H}(0)$ es el estado con cero partículas o estado del vacío y el operador \mathcal{S}_\pm se define como: \mathcal{S}_+ el operador de simetrización para bosones y \mathcal{S}_- el operador de antisimetrización usado para fermiones. Están definidos como

$$\mathcal{S}_+(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma\tag{2.2}$$

$$\mathcal{S}_-(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma P_\sigma,\tag{2.3}$$

con n el número de partículas del subespacio asociado, P_σ es un operador hermitiano unitario que actúa sobre los vectores de estado para intercambiar a las partículas y σ la permutación, indicando si es par o impar. Dado que es un operador hermitiano, con $P_\sigma^2 = 1$, sus valores propios son $+1$ y -1 . Los estados simétricos y antisimétricos son las eigenfunciones.

2.2. Operadores de creación y aniquilación

Los estados de Fock se construyen aplicando los operadores de creación y aniquilación. Se define al operador de creación $a^\dagger(\phi)$ como el operador que agrega una nueva partícula en el estado $|\phi\rangle(n)$ o simplemente $|\phi\rangle$ al sistema de n partículas existentes, sin modificar sus respectivos estados, obteniendo $n + 1$ partículas correctamente simetrizadas [8]

$$a^\dagger(\phi)\mathcal{S}_\pm(n) |\phi_1, \dots, \phi_n\rangle = \sqrt{n+1}\mathcal{S}_\pm |\phi, \phi_1, \dots, \phi_n\rangle, \quad (2.4)$$

donde $|\phi_1, \dots, \phi_n\rangle$ y $|\phi, \phi_1, \dots, \phi_n\rangle$ son estados en $\mathcal{S}_\pm\mathcal{H}^{\otimes n}$ y $\mathcal{S}_\pm\mathcal{H}^{\otimes n+1}$, respectivamente.

Por el contrario, el operador de aniquilación $a(\phi)$, disminuye el número de partículas una unidad, transformando al estado de n partículas en uno de $n - 1$ partículas y conservando la simetría del estado original. La deducción de la representación del operador de aniquilación puede consultarse en [8], de manera que sólo se presenta la ecuación correspondiente

$$\begin{aligned} a(\phi)\mathcal{S}_\pm(n) |\phi_1, \dots, \phi_n\rangle \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\pm 1)^{i-1} \mathcal{S}_\pm |\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_{i+1}, \dots, \phi_n\rangle \langle \phi | \phi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los operadores a, a^\dagger satisfacen las relaciones de conmutación y anticonmutación, que se etiquetan mediante los estados asociados α, β :

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta^\dagger] = a_\alpha a_\beta^\dagger - a_\beta^\dagger a_\alpha = \langle \alpha | \beta \rangle, \quad [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = [a_\alpha, a_\beta] = 0 \quad (2.6)$$

$$\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = a_\alpha a_\beta^\dagger + a_\beta^\dagger a_\alpha = \langle \alpha | \beta \rangle, \quad \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = \{a_\alpha, a_\beta\} = 0 \quad (2.7)$$

y la ecuación 2.6 aplica el conmutador para bosones y 2.7 el anticonmutador para fermiones. Para bosones y fermiones, la acción de los operadores de creación y aniquilación sobre el vacío $|0\rangle$ es

$$a_\alpha |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_\alpha^\dagger = 0, \quad \langle 0 | 0\rangle = 1. \quad (2.8)$$

Una base para el espacio de Fock se construye especificando el número de las n_α partículas que ocupan el estado de una sola partícula, es decir, primero se enumeran los estados de una sola partícula como $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots$, para luego construir estados de múltiples partículas especificando cuántas partículas están en el estado $|1\rangle$, denotado como n_1 , en el estado $|2\rangle$ como n_2 y así sucesivamente. Se define el número de ocupación como

$$|\{n_\alpha\}\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle. \quad (2.9)$$

El estado que tiene cero en todos los números de ocupación se llama vacío y se denota por $|0\rangle \equiv |0, \dots, 0_\alpha, \dots\rangle$. Asimismo, el estado con un solo número de ocupación distinto de cero es $|n_\alpha\rangle = |\dots, 0, n_\alpha, 0, \dots\rangle$. Los estados de número de ocupación $|\{n_\alpha\}\rangle$ también se conocen como estados de Fock y generan una base ortonormal que

cumple con

$$\begin{aligned} \langle \{n_\alpha\} | \{n'_\alpha\} \rangle &= \delta_{\{n_\alpha\}, \{n'_\alpha\}}, \\ \sum_{\{n_\alpha\}} |\{n_\alpha\}\rangle \langle \{n_\alpha\}| &= 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Además, existe un operador N que indica el número de partículas (así llamado) que hay en un estado

$$N|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n_\alpha |\phi(n_\alpha)\rangle, \quad (2.11)$$

En esta clase de sistema, la suma de todos los números de ocupación debe ser igual al número de partículas en el sistema. Para bosones, n_α puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$, mientras que para fermiones $n_\alpha = 0, 1$, por el principio de exclusión de Pauli [8].

Utilizando las relaciones de conmutación, es posible escribir todos los estados de n partículas independientes partiendo de la ecuación 2.4 mediante el estado

$$|\phi_1, \dots, \phi_n\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{n}} (a^\dagger(\phi_1) \dots a^\dagger(\phi_n)) |0\rangle, \quad (2.12)$$

que puede ser simétrico o antisimétrico, dependiendo si los operadores conmutan o anticonmutan. Si $|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle_{\pm}$ son los estados de número de ocupación correspondientes a la base de una sola partícula $\{|\phi_r\rangle\}$ y $a_r^\dagger = a^\dagger|\phi_r\rangle$, se define como

$$|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle_{\pm} = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_r^\dagger)^{n_r}}{\sqrt{n_r!}} \dots |0\rangle, \quad (2.13)$$

donde $n_r = 0, 1, 2, \dots$ son los valores permitidos para bosones (+) y $n_r = 0, 1$ para fermiones (-).

2.3. Cuantización de bosones

Los estados cuánticos para un sistema de n bosones pueden ser representados a partir del operador S_+ mostrado en la ecuación 2.2, y el estado $|\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_+ &= \sqrt{\frac{n!}{n_{\alpha_1}! \dots}} S_+ |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n! n_{\alpha_1}! \dots}} \sum_P |\alpha_{P_1}, \dots, \alpha_{P_n}\rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde P es el operador de permutación $P(1, \dots, n) = (P_1, \dots, P_n)$ y el operador correspondiente a los estados es $P|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = |\alpha_{P_1}, \dots, \alpha_{P_n}\rangle$. Este formalismo se interpreta como muchos osciladores independientes ya que se cumple la **relación de conmutación** $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ y la ec. 2.9 puede ser escrita como el estado general de muchas partículas

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_+ &= \frac{1}{\sqrt{n! n_{\alpha_1}! \dots}} \left(a_{P_1}^\dagger\right)^{\alpha_{P_1}} \left(a_{P_2}^\dagger\right)^{\alpha_{P_2}} \dots |0\rangle \\ &= \prod_n \frac{1}{\sqrt{\alpha_{P_n}!}} \left(a_{P_n}^\dagger\right)^{\alpha_{P_n}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Las partículas que describen esto son partículas de Bose, es decir, siguen la estadística de Bose-Einstein. La importancia del planteamiento anterior radica en la manera de interpretar a las partículas como una serie infinita de osciladores, por ejemplo, en el oscilador armónico cuántico se describen bosones.

2.4. Cuantización de fermiones

Análogamente, los estados cuánticos para un sistema de n fermiones pueden ser representados a partir del operador S_- mostrado en la ecuación 2.3 y el estado $|\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle$

$$\begin{aligned} |\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle_- &= \sqrt{n!} S_- |\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_P (-1)^P |\alpha_{P_1} \dots \alpha_{P_n}\rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

El estado $|\alpha_{P_1} \dots \alpha_{P_n}\rangle_-$ es antisimétrico con respecto a cualquier permutación de las etiquetas de los estados, por lo que cualquier estado α puede ocurrir sólo una vez en la secuencia $\alpha_1 \dots \alpha_n$, es decir, los números de ocupación factibles son 0 y 1. Se cumple la **relación de anticonmutación** $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j^\dagger\} = \delta_{i,j}$, la cual permite hacer uso de la analogía del oscilador armónico; se pueden describir las partículas de la misma manera que los osciladores independientes. Por otro lado, también se cumple que $a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = -a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle$, lo que indica que el orden en que se colocan los operadores determina una fase.

2.5. Operador de una partícula o un cuerpo

En el espacio de Fock, las observables también se pueden expresar en términos de operadores de creación y aniquilación. Si O_i son las observables de una sola partícula, un operador de un cuerpo asociado a un sistema de n partículas [8], se define como

$$O_p = \sum_{i=1}^n O_i. \quad (2.17)$$

Escrito en términos de los operadores de creación y aniquilación es

$$O_p = \sum_i a^\dagger (O \phi_i) a(\phi_i). \quad (2.18)$$

Introduciendo los elementos de la matriz de O_p en la base $\{|\phi_i\rangle\}$, es decir $\langle i|O|j\rangle = \langle\phi_i|O|\phi_j\rangle$, toma la forma

$$O_p = \sum_{i,j} \langle i|O|j\rangle a_i^\dagger a_j, \quad (2.19)$$

donde $a_i^\dagger = a^\dagger(\phi_i)$. Si $|\phi_i\rangle$ son vectores propios, con α_i los valores propios de O_p , se simplifica a

$$O_p = \sum_r \alpha_r a_r^\dagger a_r. \quad (2.20)$$

El formalismo de segunda cuantización presenta una serie de ventajas significativas en la descripción de sistemas de partículas y el estudio de sistemas de muchos cuerpos. Una de las ventajas clave radica en su capacidad para abordar las propiedades de simetría y permutación de las partículas mediante reglas de conmutación o anticonmutación. Al emplear el formalismo de segunda cuantización, los estados y observables pueden definirse en términos de estados de una sola partícula. Esta característica permite describir el movimiento y comportamiento de sistemas complejos compuestos por múltiples partículas. En otras palabras, al considerar sistemas de muchas partículas, la segunda cuantización proporciona un marco teórico conveniente y eficiente para estudiar su dinámica colectiva. La notación y las reglas de conmutación o anticonmutación simplifican enormemente los cálculos y el análisis de tales sistemas, lo que facilita la comprensión de sus propiedades.

2.6. Antipartículas

Las antipartículas se definen como partículas que tienen una dirección de movimiento que está fuera del cono de luz futuro en el marco de la teoría de la relatividad. El cono de luz futuro es una región en el espacio-tiempo que representa las trayectorias de todas las partículas que pueden ser alcanzadas por un observador en el futuro,

teniendo en cuenta la velocidad máxima de la luz. En la teoría de la relatividad, se postula que ninguna partícula puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Por lo tanto, las partículas en el cono de luz futuro pueden ser alcanzadas por observadores en eventos futuros, mientras que las partículas fuera de ese cono no pueden ser alcanzadas en el futuro. Cuando una partícula viaja fuera de su cono de luz futuro, su dirección de movimiento está más allá de la región que puede ser alcanzada por observadores futuros. Esto implica que no se puede interactuar con esas partículas en eventos futuros.

La teoría cuántica de campos arregla este problema al considerar una expansión que incluye las soluciones negativas en las ecuaciones relativistas de movimiento para el operador de campo de modo que las amplitudes de las partículas se cancelan entre ellas. Los estados de energía negativos se interpretan como antipartículas salientes y los modos de energía positiva representan a las partículas entrantes. Las partículas entrantes son absorbidas por el sistema, es decir, se aniquilan, por el contrario, para las salientes se crea una partícula. La expresión matemática para representar el operador de campo con estas soluciones es

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2E_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \left(\hat{a}_{i\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{j\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \quad (2.21)$$

donde las energías de las partículas y antipartículas están dadas por $E_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$, $\hat{a}_{i\mathbf{p}}$ aniquila partículas y $\hat{a}_{j\mathbf{p}}^\dagger$ crea partículas, el subíndice \mathbf{p} indica que se está en una base de estados momento. Para la teoría del campo escalar cada partícula es su propia antipartícula [3]. Es importante tener en cuenta que esta definición de antipartículas en términos del cono de luz futuro se basa en la teoría de la relatividad y está relacionada con la causalidad. Sin embargo, en el marco de la mecánica cuántica, las antipartículas también se describen en términos de propiedades de carga y simetría de partícula-antipartícula.

Capítulo 3

Modelo Estándar

La formulación del Modelo Estándar de partículas elementales se basa en una serie de teorías y conceptos fundamentales, incluyendo las teorías de norma. Estas teorías proporcionan el marco matemático y conceptual necesario para describir las interacciones entre las partículas fundamentales y entender las propiedades de simetría que subyacen en el modelo. Otro aspecto crucial en la formulación es la clasificación de las partículas en términos de su espín. El espín es una propiedad intrínseca de las partículas y determina cómo se comportan bajo rotaciones espaciales. En el Modelo Estándar, las partículas se clasifican en fermiones, que tienen espín semientero, y bosones, que tienen espín entero. En este capítulo se presentan las bases teóricas para la formulación del Modelo Estándar.

3.1. Teorías de norma

En el contexto del Modelo Estándar, las teorías de norma se refieren a las teorías de campos cuánticos que involucran campos de norma. Estos campos están asociados con las fuerzas fundamentales descritas en el modelo, como el electromagnetismo, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil. Las teorías de norma introducen la idea de simetrías de norma, que son transformaciones matemáticas que dejan invariantes

las ecuaciones que describen las interacciones entre las partículas. Estas simetrías están relacionadas con las propiedades de conservación de ciertas cantidades físicas, como la carga eléctrica, el color y la paridad [12].

Un grupo de simetría es una estructura matemática que describe una invariancia ante transformaciones. En un sistema físico, implica leyes de conservación demostradas por el teorema de Noether, que asegura la presencia de cantidades conservadas asociadas a las transformaciones del grupo [10]. Existen dos tipos de simetrías internas: locales y globales. En las locales, los parámetros continuos de las transformaciones depende de las coordenadas espacio temporales, mientras que en las globales no¹. Una simetría de norma es una simetría local, unitaria e interna que describe las interacciones fundamentales. Las simetrías también pueden ser Abelianas o no Abelianas, por ejemplo, la teoría de norma $U(1)_{EM}$ local que a su vez generaliza a las teorías de norma de interacción débil y fuerte que son no Abelianas como el isospin $SU(2)_L$ [11, 12].

Las teorías de norma tienen su origen en la electrodinámica clásica, cuando se deriva que se pueden elegir diferentes formas del potencial electromagnético, bajo ciertas transformaciones, sin modificar la dinámica del sistema. De manera cuántica, se aplica con la condición que partículas cargadas interactuando con campos electromagnéticos la función de onda se multiplique por una fase dependiente del espacio tiempo. La simetría de norma se implementa en las ecuaciones de campo al introducirse estos campos vectoriales en el Lagrangiano del sistema para cancelar los términos que rompen la invariancia (la invariancia se conoce también como de norma). Considerando teorías de norma, por cada generador de grupo se introduce un campo de norma vectorial que se asocia a las interacciones, y a su vez, un grupo de simetría.

¹Para fines de este trabajo, sólo se consideran las simetrías locales.

Las teorías de norma son la base para el Modelo Estándar que describe las interacciones electrodébil y fuerte de las partículas elementales. A bajas energías, estas teorías pueden o no presentar rompimiento espontáneo de simetría. El Modelo Estándar está basado en los grupos de simetrías locales $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$; en el grupo $SU(3)_C$ el subíndice C indica el color, en el grupo $SU(2)_L$ corresponde a la interacción débil y la L denota que sólo actúa sobre la quiralidad izquierda de los fermiones o derecha para su antipartícula y en el grupo $U(1)_Y$ describe la hipercarga. La interacción electrodébil tiene simetría local con ruptura espontánea $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$.

Se muestra un ejemplo del principio de invariancia de norma para describir fermiones, usando transformaciones locales del grupo de Lie $SU(2)_L$ [13]. Se parte del Lagrangiano

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \quad (3.1)$$

y $\psi(x)$ es un doblete $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Se pide invariancia bajo una transformación de norma local

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \exp\left\{-ig\frac{\tau_i}{2}\theta_i(x)\right\}\psi(x), \quad (3.2)$$

donde g es la constante de acoplamiento asociada al grupo $SU(2)$, τ las matrices de Pauli², $\theta_i(x)$ son tres parámetros reales asociados a τ_i :

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2}, \quad (3.3)$$

siendo ε_{ijk} el símbolo de Levi Civita con $i, j, k = 1, 2, 3$. El Lagrangiano \mathcal{L}_0 no es invariante bajo la ecuación 3.2 y se usa la derivada covariante con $i = 1, 2, 3$ campos potenciales independientes, definida como:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}A_\mu^i. \quad (3.4)$$

²Los tres generadores no son conmutativos, esto hace que el grupo $SU(2)$ sea no Abelian.

Para cada generador, se introduce un campo de norma A_μ^i que se asocia a las interacciones

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{i'} = A_\mu^i + \varepsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i. \quad (3.5)$$

El Lagrangiano interactivo es

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x), \quad (3.6)$$

que es invariante ante transformaciones de norma. Sustituyendo el término cinético para el campo de norma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$, se obtiene un Lagrangiano invariante de norma [12] para ambos campos

$$\mathcal{L}_T = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (3.7)$$

El término cinético del Lagrangiano se representa mediante el término $\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x)$, mientras que el término $-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$ describe la masa del fermión.

3.2. Partículas Elementales

Las partículas elementales son aquellas que no están conformadas por más componentes. Existen tres tipos de partículas conocidas: las que componen a la materia, las portadoras de interacciones y la que dota de masa a las partículas. A continuación, se analizan los sectores y Lagrangianos asociados a estos tipos de partículas.

3.2.1. Sector fermiónico

Los fermiones tienen espín semientero y pueden ser cargados o neutros, siendo que se caracterizan por la carga electromagnética. Los fermiones del ME tienen espín $\frac{1}{2}$ y se clasifican en leptones y quarks; se diferencian porque los quarks están principalmente

involucrados en interacciones fuertes, que son mediadas por la fuerza nuclear fuerte, sin embargo, también pueden participar en interacciones débiles y electromagnéticas. Los leptones tienen carga eléctrica entera mientras que los quarks poseen carga eléctrica fraccionaria. En la naturaleza, sólo se han encontrado combinaciones de quarks cuya carga electromagnética es múltiplo fraccionario de la carga fundamental e y la carga de color es cero. La interacción entre los quarks debido al color ocurre mediante los gluones y se describe mediante la cromodinámica cuántica (QCD), a diferencia de los leptones que son singletes de color [16].

Los quarks y leptones están constituidos por tres generaciones: la primera generación de leptones está conformada por el electrón (e) y el neutrino ν_e , la segunda por muón (μ) y el neutrino ν_μ , finalmente la tercera generación por tau (τ) y el neutrino ν_τ . Los quarks también constituidos por dobletes: el primero contiene a los quarks up (u) y down (d), el segundo charm (c) y strange (s) y el tercero al top (t) y bottom (b). Los quarks son partículas que no se encuentran libres en condiciones de baja energía ya que la energía necesaria para separarlos tiende a infinito a medida que la distancia aumenta. Los quarks se encuentran en la naturaleza confinados en partículas llamadas hadrones, los cuales se clasifican en bariones y mesones. Los bariones son fermiones compuestos por tres quarks o tres antiquarks, por ejemplo, el protón (uud) y el neutrón (udd). Los mesones son bosones formados por un quark y un antiquark, por ejemplo, el pión ($u\bar{d}$) y el kaón ($u\bar{s}$). Los seis sabores diferentes de quarks u, d, s, c, b, t pueden intercambiarse a través de interacciones débiles por medio de los bosones cargados W^\pm y Z .

Los fermiones se conforman de dos componentes quirales. Éstas se derivan mediante el operador γ_5 (ver Apéndice B). $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ define la parte derecha y $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$ la parte izquierda. Para el grupo de norma $SU(2)_L$, los fermiones

izquierdos son dobletes y los derechos singletes (ver tabla 3.1).

		Generación		
		I	II	III
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	
	u_R	c_R	t_R	
	d_R	s_R	b_R	
Leptones	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	
	e_R	μ_R	τ_R	

Tabla 3.1: Configuración de fermiones del Modelo Estándar.

3.2.2. Sector bosónico vectorial

El segundo tipo de partículas elementales son los bosones vectoriales de norma y se asocian al grupo de simetrías $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde $SU(3)_C$ es el grupo subyacente a campos gluónicos relacionados con el color, $SU(2)_L$ a campos electrodébiles relacionados con el isospín débil I y $U(1)_Y$ al campo de hipercarga Y . La hipercarga está definida en términos de la tercera componente del isospín débil y la carga eléctrica Q , relacionados mediante la fórmula de Gell-Mann–Nishijima $Q = I^3 + \frac{1}{2}Y$. Este sector contiene ocho gluones [16] para la interacción fuerte del grupo de simetrías $SU(3)_C$. Después del rompimiento espontaneo de simetría, se manifiesta un bosón sin masa correspondiente a $U(1)_{EM}$ llamado fotón γ , que físicamente lleva la fuerza electromagnética, y tres bosones pertenecientes a $SU(2)_L \times U(1)_Y$ nombrados W^\pm y Z que adquieren masa. Los bosones vectoriales transmiten las interacciones fundamentales: la fuerza electromagnética, electrodébil y de color³.

³La fuerza gravitacional no es incluida ya que se desconoce la forma de unificarla con las otras fuerzas. Se puede ignorar porque es extremadamente débil en comparación con las otras interacciones y al interactuar con las partículas no tiene un efecto significativo a las escalas de laboratorio.

3.2.3. Sector bosónico escalar

Este sector está conformado por el bosón escalar Higgs, el cual da origen a las masas de las partículas subatómicas⁴. El sector escalar parte de un doblete escalar complejo del grupo $SU(2)_L$ con hipercarga $Y = 1$ en $U(1)_Y$ isospín débil de componentes $I^3 = \pm\frac{1}{2}$ y un singlete bajo el grupo $SU(3)_C$. En la siguiente sección, se muestra detalladamente este mecanismo en que las partículas adquieren masa. En la figura 3.1 se exhibe una representación del Modelo Estándar con algunas características principales de las partículas.

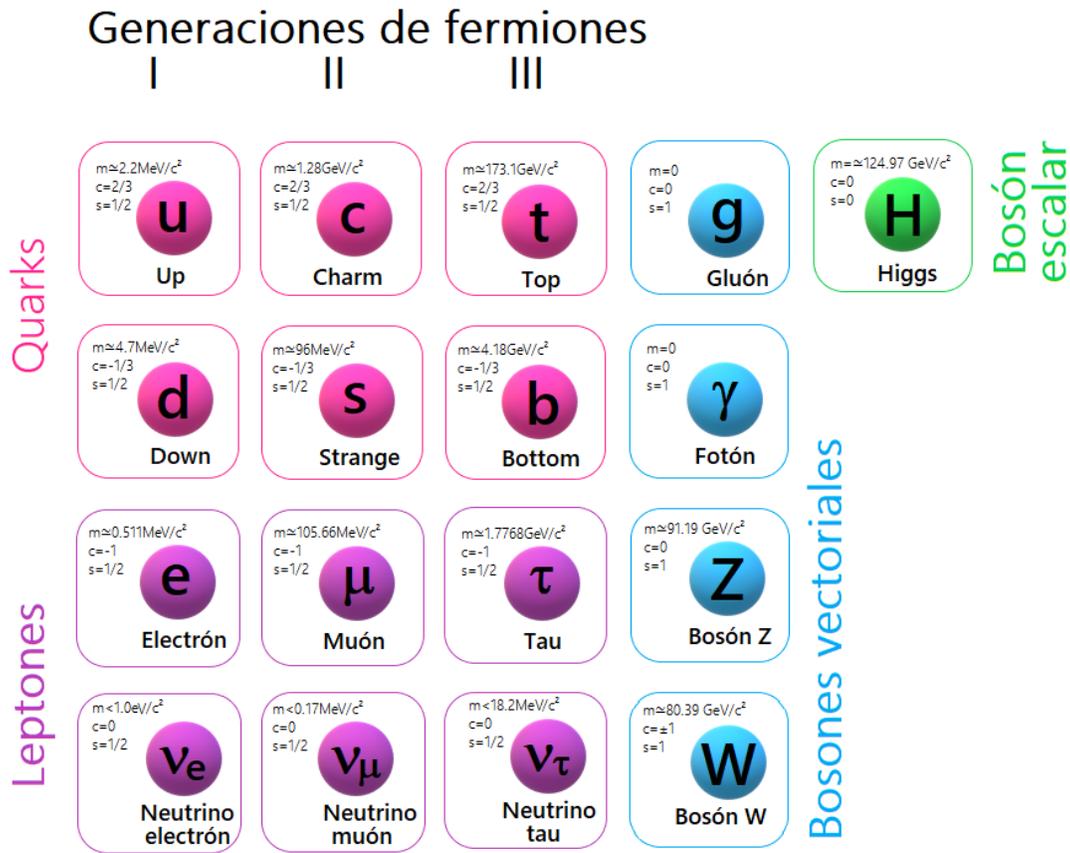


Figura 3.1: Modelo Estándar de partículas elementales. Donde m es la masa, c la carga eléctrica y s el espín [14] compuesto por partículas fermiónicas de espín $1/2$, bosones de norma de espín 1 y el boson de Higgs de espín 0 .

⁴El Modelo Estándar considera a los neutrinos sin masa aunque experimentalmente [15] se ha encontrado que la masa de los neutrinos es diferente de cero, por lo que se requiere hacer una extensión del modelo.

3.3. El Mecanismo de Higgs

En esta sección se presenta el mecanismo de Higgs que manifiesta el rompimiento de simetría en el sector escalar y electrodébil, para obtener bosones de norma masivos.

3.3.1. Rompimiento Espontáneo de Simetría

Un sistema físico presenta rompimiento espontáneo de simetría si el estado del vacío o del mínimo de energía no es invariante bajo un grupo de norma, mientras que el Lagrangiano sí lo es bajo el mismo grupo de transformaciones [10]. Durante el rompimiento espontáneo de simetría aparecen términos no masivos que son explicados mediante el teorema de Goldstone [13] el cual establece que si el Lagrangiano es invariante ante un grupo continuo de simetrías globales, pero el vacío es invariante sólo bajo un subgrupo, aparecen bosones escalares sin masa y espín 0 (bosones de Goldstone) asociados a cada generador de simetría e indican el número de simetrías que se han roto. El rompimiento de simetría bajo transformaciones globales se extiende a simetrías locales con los bosones de Goldstone asociados a grados de libertad físicos. Cuando las simetrías del Lagrangiano son locales como es el caso del Modelo Estándar, el vacío rompe la simetría de norma del sector electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ a $U(1)_{EM}$ siendo que $SU(2)$ tiene tres generadores y $U(1)_Y$ tiene uno. Aparentemente se pierden tres grados de libertad quedando sólo uno, pero en realidad se están produciendo tres bosones de Goldstone que a su vez son absorbidos por grados de libertad longitudinales de los bosones de norma asociados a las simetrías rotas, dotándolos de masa [13]. Este proceso es conocido como el mecanismo de Higgs y se presenta detalladamente a continuación.

Considérese un doblete escalar en el campo complejo del grupo $SU(2)$, con hipercarga débil $Y_h = 1$ dado por

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

con ϕ^+ y ϕ^0 campos escalares complejos cargados positivamente y neutro, respectivamente. El Lagrangiano que describe al sector escalar y electrodébil con este campo complejo y que además es invariante de norma es

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}, \quad (3.9)$$

donde $F_{\mu\nu}^i$ se definió en la sección 3.1. El potencial y la derivada covariante son

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.10)$$

y

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu - i \frac{Y_h}{2} g' B_\mu \right) \phi, \quad (3.11)$$

respectivamente. \mathbf{A}_μ se relaciona con las interacciones débiles y es responsable de mediar las interacciones entre los bosones, es el campo de norma asociado a $SU(2)_L$, mientras que B_μ se relaciona con las interacciones electromagnéticas y está asociado al grupo $U(1)_Y$. Las constantes g y g' son constantes de acoplamiento de norma de los campos mencionados anteriormente, μ^2 y λ son parametros reales. Se pide $\lambda^2 > 0$ para asegurar que el estado del vacío sea estable, además para $\mu > 0$ se tiene un mínimo en ϕ determinado por

$$|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}. \quad (3.12)$$

El rompimiento espontáneo de simetría ocurre cuando el campo adquiere un valor de expectación en el vacío dado por

$$\langle \phi \rangle_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Se introducen los campos reales θ , donde θ representan a los bosones de Goldstone. Estos campos reales cumplen con que el valor de expectación en el vacío es cero, es decir

$$\langle 0 | \theta | 0 \rangle = 0. \quad (3.14)$$

Se realiza una reparametrización del campo complejo con los campos reales mencionados anteriormente a través de la transformación

$$U(\theta) = \exp(i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)/v), \quad (3.15)$$

por lo que el campo ϕ se reescribe como

$$\phi = U^{-1}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Tomando la norma unitaria, se redefinen los campos de la siguiente forma [13]

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\theta)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu \rightarrow \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}'_\mu = U(\theta) \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu U(\theta)^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(\theta)) U^{-1}(\theta) \quad (3.18)$$

y

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu. \quad (3.19)$$

Esta transformación lleva a

$$D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' = \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}'_\mu - \frac{i}{2} g' B'_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x)] \chi \quad (3.20)$$

y

$$V(\phi^\dagger \phi') = -\frac{\mu^2}{2} [v + \eta(x)]^2 \chi^\dagger \chi + \frac{\lambda}{4} [v + \eta(x)]^4 (\chi^\dagger \chi)^2, \quad (3.21)$$

con $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El Lagrangiano queda transformado por una norma unitaria. Al tomar en cuenta sólo el sector escalar, es decir la ecuación 3.20, se originan términos cuadráticos de los campos de norma. Como consecuencia de esto, una parte del Lagrangiano de la ecuación 3.9 queda como el generador de masas de los bosones de norma

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{2} \chi^\dagger \left(g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}'_\mu + \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \left(g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}'^\mu + \frac{g'}{2} B'^\mu \right) \chi. \quad (3.22)$$

Al multiplicar ambos términos y simplificando la expresión se obtiene

$$\mathcal{L}_m = \frac{v^2}{8} \left[g^2 (A'^1_\mu A'^{1\mu} + A'^2_\mu A'^{2\mu}) + (g A'^3_\mu - g' B'_\mu)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Se introducen campos cargados definidos por

$$W_\mu^\pm = \frac{A'^1_\mu \mp i A'^2_\mu}{\sqrt{2}}, \quad (3.24)$$

de forma que

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4} g^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g A'^3_\mu - g' B'_\mu)^2. \quad (3.25)$$

El segundo término de la ecuación 3.25 puede reescribirse como

$$\frac{v^2}{8} (A'^3_\mu, B'_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^{3\mu} \\ B'^\mu \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Considerando la transformación ortogonal

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_w A'_\mu - \sin \theta_w B'_\mu \\ A_\mu &= \sin \theta_w A'_\mu + \cos \theta_w B'_\mu, \end{aligned} \quad (3.27)$$

y diagonalizando la matriz de constantes de acoplamiento, la ecuación 3.26 se escribe como

$$\frac{v^2}{8} (Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (3.28)$$

El Lagrangiano de la ecuación 3.24 se transformó en

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4} g^2 v^2 \cdot W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu, \quad (3.29)$$

donde el primer término significa que los bosones vectores cargados adquieren masa $M_W = \frac{1}{2} g v$, mientras que el segundo término indica que el valor de la masa para el otro bosón es $M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$. Además se obtiene que $M_A = 0$. Las masas de los bosones se pueden relacionar de la siguiente manera

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_w}, \quad (3.30)$$

donde el ángulo θ_w es el ángulo de Weinberg [9]. La ecuación 3.27 da lugar a que los ángulos puedan ser escritos como

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (3.31)$$

Los bosones de Goldstone θ , se mantienen sin masa hasta que se aniquila el vacío, después se convierten en los grados de libertad de los campos de norma que llevan a la aparición de tres bosones vectoriales masivos W^\pm y Z_μ , por lo que el número

de grados de libertad se conserva. De la misma manera, después del rompimiento de simetría, la ecuación 3.21 puede ser reescrita como

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2(x) + \lambda v \eta^3(x) + \frac{\lambda}{4}\eta^4(x), \quad (3.32)$$

donde se puede identificar la masa del bosón de Higgs $\eta(x)$ dada por $M_\eta = \sqrt{2\mu^2}$. El procedimiento mostrado anteriormente es el mecanismo Higgs en la teoría norma no Abeliana [13].

3.3.2. Acoplamientos de Yukawa

En el marco del grupo de simetrías $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se puede considerar la interacción entre el bosón de Higgs y los fermiones. Se acoplan por medio de constantes reales que determinan la intensidad de la interacción, lo que hace que los fermiones adquieran masa [12, 9]. Debido a que estas interacciones conservan los grados de libertad quirales de los fermiones, se utilizan las componentes izquierda y derecha. Como se mencionó en la sección 3.2.1 la primera familia de fermiones está compuesta por $\psi = e_L, e_R, \nu_{eL}, u_L, u_R, d_L, d_R$, con

$$e_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \mathbf{e}, \quad e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \mathbf{e}, \quad \text{etc.} \quad (3.33)$$

El Lagrangiano de Yukawa es

$$\mathcal{L}_Y = f^{(e)} \bar{l}_L \Phi e_R + f^{(u)} \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + f^{(d)} \bar{q}_L \Phi d_R + \text{h.c} \quad (3.34)$$

con h.c el hermitiano conjugado, $f^{(e)}, f^{(u)}, f^{(d)}$ constantes reales de acoplamiento llamadas de Yukawa, e_R, u_R singletes y $\mathbf{l}_L, \mathbf{q}_L$ dobletes de $SU(2)$ dados por

$$\mathbf{l}_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

donde $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ con hipercarga $Y_{\tilde{\Phi}} = -1$. Se replica el procedimiento anterior del rompimiento espontáneo de simetría y se redefinen los campos a través de la norma unitaria dada por las ecuaciones 3.15 y 3.16 como

$$\begin{aligned} l'_L &= U(\theta)l_L, & e'_R &= e_R \\ q'_L &= U(\theta)q_L, & u'_R &= u_R, & d'_R &= d_R. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Después del rompimiento espontáneo de simetría, el Lagrangiano escrito en términos de los nuevos campos es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}'_L e'_R + f^{(u)} \bar{u}'_L u'_R + f^{(d)} \bar{d}'_L d'_R] \\ &+ \frac{v}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}'_L e'_R + f^{(u)} \bar{u}'_L u'_R + f^{(d)} \bar{d}'_L d'_R] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde se identifica que las masas de los fermiones son $m_e = f^{(e)}v/\sqrt{2}$, $m_u = f^{(u)}v/\sqrt{2}$ y $m_d = f^{(d)}v/\sqrt{2}$.

Capítulo 4

Modelo de Espín Extendido

Las partículas elementales obedecen simetrías de los grupos de norma y de Lorentz, según su pertenencia. El hecho que los fermiones estén en la representación fundamental de los grupos de norma y Lorentz, mientras que los bosones en la representación adjunta de éstos, sugiere una conexión entre sus grados de libertad, sugiriendo conexiones adicionales entre las partículas del ME. En todas las partículas el grado de libertad en común es el espacial, sin embargo los grados de libertad discretos asociados con las representaciones fundamentales pueden usarse para construir las demás. El modelo de espín extendido consiste en considerar dimensiones extras aumentando los grados de libertad en el espacio de espín, conservando la invariancia de Lorentz. Relaciona los grados de libertad discretos: escalar y de espín, en un mismo espacio e imponiendo ciertas restricciones puede describir los grados de libertad escalares y de Lorentz del ME. Los grados de libertad escalares se asocian con partículas o campos de espín cero, mientras que los grados de libertad de espín están relacionados con el espín de las partículas y se dividen en espín semientero para los fermiones y espín entero para los bosones. A continuación, se presenta este modelo y algunas de sus características, para más detalles se recomienda consultar [4].

4.1. Espacio Matricial

El espacio de espín extendido utiliza un formalismo matricial para describir las partículas y sus interacciones. Este espacio abarca tanto los grupos de Lorentz como los grupos escalares y permite representar tanto los generadores de simetría como las representaciones de estados utilizando una matriz común. En particular, replica los campos del Modelo Estándar con todas sus características y la multiplicación de matrices toma en cuenta la acción de los operadores sobre los campos [4].

Considérese un espacio generado por un álgebra de Clifford \mathcal{C}_4 con N dimensiones, donde los grados de libertad discretos pueden ser escritos en términos de Lorentz y escalares, utilizando una matriz en común. Para N par, este espacio está representado por matrices gamma de $2^{\frac{N}{2}} \times 2^{\frac{N}{2}}$, que cumplen con $\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2g_{\alpha\beta}$, donde $g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico con signatura $(+, -, \dots -)$ y $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 3, 5, \dots, N$, las cuales al combinarse producen un espacio matricial de dimension $2N$.

Los generadores de Lorentz y las transformaciones que actúan sobre espinores son las mismas para un álgebra de Clifford de 4 dimensiones \mathcal{C}_4 .

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \text{ con } \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (4.1)$$

que genera la transformación

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}}. \quad (4.2)$$

A razón de ello, el espacio-tiempo se sigue comportando con 3 dimensiones espaciales y una temporal, las dimensiones extras sólo se manifiestan en las dimensiones adicionales: las matrices gamma γ_μ de dimension 3+1 transforman como vectores, mientras que las $N - 4$ matrices gamma γ_α restantes, con $\alpha = 5, \dots, N$ y sus productos, conmu-

tan con $\sigma_{\mu\nu}$ y transforman como escalares. Éstas son identificadas como generadores de simetrías continuas de norma o globales. Se obtiene un espacio donde el número de simetrías escalares permitidas está restringido por la dimensión del espacio. Esto, junto con el pseudoescalar 4-d de Lorentz

$$\tilde{\gamma}_5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (4.3)$$

genera a los elementos escalares del espacio, que se pueden escribir como [4]

$$\mathcal{S}_{N-4} = \frac{1}{2} (I + \tilde{\gamma}_5) \text{U} (2^{(N-4)/2}) \oplus \frac{1}{2} (I - \tilde{\gamma}_5) \text{U} (2^{(N-4)/2}), \quad (4.4)$$

donde I es la matriz identidad de $N \times N$. Por otro lado, al combinar el operador que actúa sobre el generador de Lorentz $\mathcal{J}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$, con el espacio de operadores de simetría \mathcal{S}_{N-4} se obtiene el generador de Lorentz

$$\mathcal{J}'_{\mu\nu} = \mathcal{P}\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{P} \left[i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} \right], \quad (4.5)$$

en el subespacio

$$\mathcal{S}'_{N-4} = \mathcal{P}\mathcal{S}_{N-4}, \quad (4.6)$$

donde \mathcal{P} es un operador de proyección que pertenece a \mathcal{S}_{N-4} . Con esto, las transformaciones de Lorentz obtienen la forma

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\mathcal{P}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}, \quad (4.7)$$

y las transformaciones escalares

$$U = \exp[-iI_a\alpha_a(x)], \quad (4.8)$$

con $I_a \in \mathcal{S}'_{N-4}$ y $\alpha_a(x)$ son funciones arbitrarias. En este espacio, un campo en general está compuesto por elementos pertenecientes a $\mathcal{C}_4 \otimes \mathcal{S}_{N-4}$ y el producto interno es definido como

$$\langle \phi | \Psi \rangle = \text{tr} (\phi^\dagger \Psi). \quad (4.9)$$

Cualquier operador hermitiano O_p caracteriza un eigenestado Ψ por medio del conmutador

$$[O_p, \Psi] = \lambda \Psi, \quad (4.10)$$

con λ real. Se dice entonces que los operadores de simetría del grupo de Lorentz y del grupo escalar pueden ser representados como productos tensoriales debido a su propiedad de conmutación.

4.2. Formulación Lagrangiana

En el espacio de espín extendido, se pueden construir Lagrangianos a partir de campos escritos en esta base. Para ello, se necesitan los campos fermiónicos, vectoriales y escalares.

Sea $\Gamma_a^F \in \mathcal{S}'_{N-4}$, L^α una componente de polarización de espín, por ejemplo $L^1 = (\gamma_1 + i\gamma_2)$, P_F el operador de proyección como en la ecuación 4.5, F representa la quiralidad, tal que

$$P_F \gamma^\mu = \gamma^\mu P_F^c, \quad (4.11)$$

con $P_F^c = 1 - P_F$. El campo fermiónico se escribe:

$$\psi_\alpha^a(x) L^\alpha P_F \Gamma_a^F. \quad (4.12)$$

Para U dada como en la ecuación 4.7, los campos fermiónicos transforman como:

$$\Psi \rightarrow U\Psi. \quad (4.13)$$

En conclusión, los fermiones se transforman como la representación fundamental de los grupos de Lorentz y de norma.

El campo vectorial es:

$$A_\mu^a(x)\gamma_0\gamma_\mu I^a, \quad (4.14)$$

donde $\gamma_0\gamma_\mu \in \mathcal{C}_4$ e $I^a \in \mathcal{S}'_{N-4}$ es generador de un grupo unitario dado. Por último, un campo escalar se definen como:

$$\phi^a(x)\gamma_0\Gamma_a^S, \quad (4.15)$$

con $\Gamma_a^S \in \mathcal{S}'_{N-4}$.

Los campos vectoriales y escalares transforman como

$$\Psi(x) \rightarrow U\Psi(x)U^\dagger. \quad (4.16)$$

A continuación, se presentan los Lagrangianos de interés \mathcal{L}_{SV} y \mathcal{L}_{SF} relacionados con el ME, escritos en términos de esta base.

4.2.1. Lagrangiano Escalar-Vector \mathcal{L}_{SV}

En el Modelo Estándar, el Lagrangiano escalar-vector describe las componentes contenidas en el doblete de Higgs, dando masa a vectores de norma en el mecanismo de Higgs. Un bosón físico resulta de la reparametrización de fase y el valor de expectación del vacío, como en el rompimiento espontáneo de simetría que se mostró en la sección 3.3.1. Dentro de la base de espín utilizada, este mecanismo se representa de manera similar. Los campos se representan como elementos en un espacio matricial, con un

solo operador escalar asociado que actúa sobre los otros campos, y su propiedad de generación de masa está relacionada con los coeficientes de estas matrices.

La representación de los escalares en las bases convencional y de espín se relaciona mediante un operador de transformación. Se establecen fases convencionales explícitas que se ajustan a la base de espín, y se utiliza la libertad de elección en la representación de las matrices gamma para lograr esta correspondencia entre las bases [4].

Considerese el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{SV} = \text{tr} \left\{ [\mathbf{F}''(x), \mathbf{H}_{af}(x)]_{\pm}^{\dagger} [\mathbf{F}''(x), \mathbf{H}_{af}(x)]_{\pm} \right\}_{\text{sym}}, \quad (4.17)$$

donde $\mathbf{F}''(x) = [i\partial_{\mu} + gW_{\mu}^i(x)I_i + \frac{1}{2}g'B_{\mu}(x)Y_o] \gamma_0\gamma^{\mu}$, el subíndice sym significa que solo se toman componentes $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}$ simétricos y el índice \pm significa el conmutador y el anticonmutador deben usarse para los componentes temporal y espacial, respectivamente. Además el campo de Higgs en la base de espín extendido puede ser conectado por medio de la expresión $\mathbf{H}_{af}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_t\mathbf{H}_t(x) + \chi_b\mathbf{H}_b(x))$ ¹, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(x) &= \phi_1(x) + \phi_2(x) \\ \mathbf{H}_b(x) &= \phi_1(x) - \phi_2(x). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aplicando el mecanismo de Higgs, se adquiere un valor de expectación en el vacío dado por $\langle \mathbf{H}(x) \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se puede demostrar que

$$\langle \mathbf{H}_{af}(x) \rangle = H_n = \frac{v}{2} (\chi_t H_t^0 + \chi_b H_b^0), \quad (4.19)$$

¹En la base de espín extendido se utiliza una expresión generalizada para el término escalar \mathbf{H} , que incluye términos conjugados por un parámetro λ . Además, se aplica una normalización al término \mathcal{L}_{SV} para hacerlo independiente de λ . Este parámetro puede considerarse como un factor de escala que permite controlar la importancia relativa de los términos conjugados en la expresión del término escalar [4].

donde H_n es el Higgs normalizado, lo que lleva a la expresión

$$\left\langle \mathbf{H}_{af}^\dagger(x) \mathbf{H}_{af}(x) \right\rangle = (|a|^2 + |f|^2) v^2/2 = (|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2) v^2/2 = v^2/2, \quad (4.20)$$

De modo que ahora se pueden determinar las masas de los bosones por el mecanismo de Higgs de manera convencional por medio de la componente de masa de la ecuación 4.17, obteniendo la expresión

$$\text{tr} \frac{1}{g^2 + g'^2} \left[\sqrt{2} H_n, g^2 I_3 - \frac{1}{2} g'^2 Y_o \right]^\dagger \left[\sqrt{2} H_n, g^2 I_3 - \frac{1}{2} g'^2 Y_o \right] = v^2 (g^2 + g'^2) / 4 \quad (4.21)$$

que indica que $m_Z = v \sqrt{g^2 + g'^2} / 2$ y $m_A = 0$.

Por otro lado se obtiene

$$\text{tr} [H_n, W_{o0}^+]^\dagger [H_n, W_{o0}^+] = v^2 g^2 / 4, \quad (4.22)$$

con $W_{o\mu}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} g \gamma_0 \gamma_\mu$, lo que indica que $m_W = vg/2$.

4.2.2. Lagrangiano Escalar-Fermión \mathcal{L}_{SF}

El Lagrangiano escalar-fermión, corresponde a las interacciones entre el campo de Higgs y los fermiones. En el mecanismo de Higgs, el Lagrangiano dota a los fermiones de masa y en la base de espín extendido está representado por

$$-\mathcal{L}_{SF} = \text{tr} \sqrt{2} \left[\Psi_{tR}^\dagger(x) \mathbf{H}_{af}(x) \Psi_{qL}(x) + \Psi_{qL}^\dagger(x) \mathbf{H}_{af}(x) \Psi_{bR}(x) \right] + \{\text{hc}\}. \quad (4.23)$$

Siguiente el mecanismo de Higgs de manera convencional y usando la ecuación 4.20 se obtiene la relación para las masas de los quarks t y b dadas por [4]

$$(|a|^2 + |f|^2) v^2/2 = |m_t|^2 + |m_b|^2 = v^2/2. \quad (4.24)$$

Con lo anterior se muestra que la parte masiva del Lagrangiano del ME se puede reformular en una base de espín extendido y replica los valores de los bosones vectoriales así como de los fermiones t y b .

Capítulo 5

Mecanismo de Higgs en la Base Fermiónica

5.1. Base fermiónica

La base del modelo de espín extendido fue utilizada para describir el Lagrangiano del ME presentando conexiones entre el sector electrodébil y de Yukawa, y permitiendo una restricción a las masas de los quarks pesados [4]. La base fermiónica que se presenta a continuación tiene la característica de que los grados de libertad (momento, espín e isospín) de los bosones pueden ser descritos por las componentes quirales de los fermiones pesados (quarks top y bottom), mediante los operadores de creación y aniquilación. Esta base está inducida por el modelo de espín extendido, que a su vez se basa en un álgebra de Clifford que satisface el teorema de Coleman-Mandula [17, 18]. Dado que el ME provee componentes electrodébiles y de Yukawa que producen las masas para los bosones y fermiones, se busca expresar los bosones en términos de la base fermiónica, reproduciendo las propiedades del ME y finalmente derivar una nueva relación para las masas de los quarks en términos de la base mencionada anteriormente a partir del Lagrangiano escalar vector.

Considérese una base conformada por $q = t, b$ quarks masivos top y bottom, respectivamente, conformada por un producto tensorial de los espacios momento, isospín y espín, con polarizaciones de espín arriba y abajo $i = \uparrow, \downarrow$. Se usa únicamente la componente con momento 0 y se elige el operador de fermión de energía más baja. Para esta base se cumplen las reglas de anticonmutación de los quarks dadas por:

$$\begin{aligned}
 \{q_i^\dagger, q_j'\} &= \delta_{ij}\delta_{qq'}, & \{\bar{q}_i^\dagger, \bar{q}_j'\} &= \delta_{ij}\delta_{\bar{q}\bar{q}'} \\
 \{q_i^\dagger, q_j'^\dagger\} &= \{q_i, q_j'\} = 0, & \{\bar{q}_i^\dagger, \bar{q}_j'^\dagger\} &= \{\bar{q}_i, \bar{q}_j'\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y \bar{q} es el operador de aniquilación de antiquark, cuyos números cuánticos son los conjugados del quark. Se definen los operadores de creación y aniquilación de fermiones como:

$$q_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{Li}^\dagger + q_{Ri}^\dagger),
 \tag{5.2}$$

y

$$\bar{q}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{Li}^\dagger - q_{Ri}^\dagger),
 \tag{5.3}$$

cuya normalización es

$$\langle 0 | q_i q_i^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_i \bar{q}_i^\dagger | 0 \rangle = 1.
 \tag{5.4}$$

Considerando las componentes quirales y las ecuaciones 5.1 5.2 y 5.3 se obtiene la relación de anticonmutación

$$\{q_{Qi}^\dagger, q_{Q'j}'\} = \delta_{ij}\delta_{QQ'}\delta_{qq'},
 \tag{5.5}$$

donde $Q, Q' = R, L$ representan las componentes derecha e izquierda, respectivamente.

La acción de estos operadores en el vacío puede ser impuesta por las siguientes relaciones

$$\bar{q}_i|0\rangle = 0 \Rightarrow q_{Li}^\dagger|0\rangle = q_{Ri}^\dagger|0\rangle, \quad (5.6)$$

y

$$q_i|0\rangle = 0 \Rightarrow q_{Li}|0\rangle = -q_{Ri}|0\rangle. \quad (5.7)$$

5.2. Generadores del Modelo Estándar

En la referencia [4] se mostró cómo reescribir equivalentemente el ME en términos de una base en el espacio de espín que representa a los grados de libertad discretos en el Modelo Estándar. Se obtienen expresiones del Lagrangiano en que los campos multiplican operadores que representan dichos grados de libertad [6]. Conociendo la representación de estos operadores a una base de segunda cuantización, es relevante investigar cómo se traducen relaciones extraídas del ME como la que da lugar a la que restringe la masa de los quarks pesados y, en particular, obtener las restricciones adicionales. A continuación, se obtiene la representación de los operadores relevantes en segunda cuantización y se derivan estas relaciones.

Al aplicar la ecuación 2.19 a los operadores, incluyendo a los que acompañan a los campos bosónicos, se pueden definir estados o vértices del ME. Se muestra la expresión para cada operador principal que genera las masas en el Modelo Estándar, escritos como operadores representados por medio de la base fermiónica.

Las componentes del espín se pueden representar como:

$$S_x = \frac{1}{2} \sum_{qQ} \left(q_{Q\uparrow}^\dagger q_{Q\downarrow} + q_{Q\downarrow}^\dagger q_{Q\uparrow} \right), \quad (5.8)$$

$$S_y = \frac{1}{2i} \sum_{qQ} \left(q_{Q\uparrow}^\dagger q_{Q\downarrow} - q_{Q\downarrow}^\dagger q_{Q\uparrow} \right), \quad (5.9)$$

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{qQ} \left(q_{Q\uparrow}^\dagger q_{Q\uparrow} - q_{Q\downarrow}^\dagger q_{Q\downarrow} \right), \quad (5.10)$$

donde la suma es sobre $q = t, b$ y $Q = R, L$ son las componentes derecha e izquierda y los operadores q y q^\dagger están definidos como en la ecuación 5.2. A partir de las ecuaciones anteriores se pueden definir

$$S^+ = S_x + iS_y = \sum_{qQ} q_{Q\uparrow}^\dagger q_{Q\downarrow} \quad (5.11)$$

$$S^- = S_x - iS_y = \sum_{qQ} q_{Q\downarrow}^\dagger q_{Q\uparrow}. \quad (5.12)$$

Los operadores t top y b bottom con sus respectivas componentes, tienen números cuánticos que se muestran en la Tabla 5.1 y la forma explícita de los operadores se describe a continuación.

Operador	Q	Y	B	I^3	I^2	S_z	\bar{S}^2
$t_{R\uparrow}^\dagger$	2/3	4/3	1/3	0	0	1/2	1/2
$t_{R\downarrow}^\dagger$	2/3	4/3	1/3	0	0	-1/2	1/2
$t_{L\uparrow}^\dagger$	2/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2
$t_{L\downarrow}^\dagger$	2/3	1/3	1/3	1/2	1/2	-1/2	1/2
$b_{R\uparrow}^\dagger$	-1/3	-2/3	1/3	0	0	1/2	1/2
$b_{R\downarrow}^\dagger$	-1/3	-2/3	1/3	0	0	-1/2	1/2
$b_{L\uparrow}^\dagger$	-1/3	1/3	1/3	-1/2	1/2	1/2	1/2
$b_{L\downarrow}^\dagger$	-1/3	1/3	1/3	-1/2	1/2	-1/2	1/2

Tabla 5.1: Números cuánticos de las componentes quirales de los quarks t y b del Modelo Estándar, donde Q es la carga eléctrica, B es el número bariónico, Y es la hipercarga, I^3 es la tercera componente de isospín y S_z representa al espín.

Los generadores del grupo $SU(2)_L$ están dados por la parte izquierda de isospín:

$$I^1 = \frac{1}{2} \sum_i \left(b_{Li} t_{Li}^\dagger + t_{Li} b_{Li}^\dagger \right), \quad (5.13)$$

$$I^2 = \frac{1}{2i} \sum_i \left(b_{Li} t_{Li}^\dagger - t_{Li} b_{Li}^\dagger \right), \quad (5.14)$$

$$I^3 = \frac{1}{2} \sum_i \left(t_{Li}^\dagger t_{Li} - b_{Li}^\dagger b_{Li} \right), \quad (5.15)$$

donde $i = \uparrow, \downarrow$ son las polarizaciones de espín. De la misma manera que con el espín, se definen:

$$I^+ = I^1 + iI^2 = \sum_i b_{Li} t_{Li}^\dagger, \quad (5.16)$$

$$I^- = I^1 - iI^2 = \sum_i t_{Li} b_{Li}^\dagger. \quad (5.17)$$

El operador de hipercarga es

$$Y = \sum_i \left[\frac{4}{3} t_{Ri}^\dagger t_{Ri} - \frac{2}{3} b_{Ri}^\dagger b_{Ri} + \frac{1}{3} \left(t_{Li}^\dagger t_{Li} + b_{Li}^\dagger b_{Li} \right) \right]. \quad (5.18)$$

La carga eléctrica que proviene de la fórmula $Q = I^3 + \frac{1}{2}Y$ es

$$Q = \sum_i \left[\frac{2}{3} \left(t_{Li}^\dagger t_{Li} + t_{Ri}^\dagger t_{Ri} \right) - \frac{1}{3} b_{Li}^\dagger b_{Li} - \frac{1}{3} b_{Ri}^\dagger b_{Ri} \right]. \quad (5.19)$$

El número bariónico es:

$$B = \frac{1}{3} \sum_i \left(t_{Ri}^\dagger t_{Ri} + b_{Ri}^\dagger b_{Ri} + t_{Li}^\dagger t_{Li} + b_{Li}^\dagger b_{Li} \right). \quad (5.20)$$

Las expresiones anteriores cumplen las relaciones de conmutación:

$$[I^3, I^+] = I^+, [I^3, I^-] = -I^-, [I^+, I^-] = 2I^3, [Y, I^{\pm,3}] = 0 \quad (5.21)$$

$$[S_z, B] = 0, [S_z, I^{\pm,3}] = 0, [B, Y] = 0, [B, I^{\pm,3}] = 0 \quad (5.22)$$

5.3. Bosones en segunda cuantización

Los bosones del ME son componentes bilineales, por lo que es posible representarlos en términos de la base de operadores fermiónicos. Esto se logra buscando combinaciones de los estados y los operadores tales que se obtengan los números cuánticos de los bosones ya conocidos del Modelo Estándar.

Para W_μ^i se extraen los términos de la forma $\hat{\tau}^i W_\mu^i(x)$, con $\hat{\tau}^i$ las matrices de Pauli, las cuales se asocian tanto a los números cuánticos de isospín y espín. Sus componentes se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_0^i &= \hat{\tau}^i \\ W_0^+ &= \hat{\tau}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\tau}^1 + i\hat{\tau}^2), \\ W_0^- &= \hat{\tau}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\tau}^1 - i\hat{\tau}^2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

El bosón de Higgs se construye a partir del doblete con números cuánticos $y = 1$ e $i^3 = \pm\frac{1}{2}$, de modo que se siga cumpliendo la invariancia de norma. Se aplica la base fermiónica para los campos, de forma que H puede ser representado como la expansión

$$\begin{aligned} H &= \chi_t \left(t_{L\uparrow}^\dagger t_{R\uparrow} + t_{L\downarrow}^\dagger t_{R\downarrow} \right) + \chi_b \left(b_{L\uparrow}^\dagger b_{R\uparrow} + b_{L\downarrow}^\dagger b_{R\downarrow} \right) \\ &= \chi_t H_t + \chi_b H_b^\dagger, \end{aligned} \quad (5.24)$$

con χ_t, χ_b parámetros y

$$\begin{aligned} H_t &= t_{L\uparrow}^\dagger t_{R\uparrow} + t_{L\downarrow}^\dagger t_{R\downarrow}, \\ H_b &= b_{R\uparrow}^\dagger b_{L\uparrow} + b_{R\downarrow}^\dagger b_{L\downarrow}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Utilizando las definiciones de los operadores de creación y aniquilación así como las ecuaciones 5.2 y 5.7 se obtiene la normalización

$$\langle 0 | H_i^\dagger H_i | 0 \rangle = \frac{1}{2}. \quad (5.26)$$

Finalmente, el bosón Z_μ está construido como el operador con los números cuánticos de la hipercarga y el isospín dados por las ecuaciones 5.18 y 5.15 como

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu). \quad (5.27)$$

Así, para los bosones W_μ^i , Z_μ y H sus componentes junto con sus números cuánticos se muestran en la siguiente tabla.

Operador	Q	Y	I^3	\bar{I}^2	S_z	\bar{S}^2
$W_x^+ = b_{L\downarrow} t_{L\uparrow}^\dagger + b_{L\uparrow} t_{L\downarrow}^\dagger$	1	0	1	0	-	0
$W_y^+ = -i \left(b_{L\downarrow} t_{L\uparrow}^\dagger - b_{L\uparrow} t_{L\downarrow}^\dagger \right)$	1	0	1	0	-	0
$W_z^+ = b_{L\uparrow} t_{L\uparrow}^\dagger - b_{L\downarrow} t_{L\downarrow}^\dagger$	1	0	1	0	0	0
$W_0^+ = b_{L\uparrow} t_{L\uparrow}^\dagger + b_{L\downarrow} t_{L\downarrow}^\dagger$	1	0	1	0	0	0
$W_x^- = t_{L\uparrow} b_{L\downarrow}^\dagger + t_{L\downarrow} b_{L\uparrow}^\dagger$	-1	0	-1	0	-	0
$W_y^- = -i \left(b_{L\downarrow}^\dagger t_{L\uparrow} - b_{L\uparrow}^\dagger t_{L\downarrow} \right)$	-1	0	-1	0	-	0
$W_z^- = t_{L\uparrow} b_{L\uparrow}^\dagger - t_{L\downarrow} b_{L\downarrow}^\dagger$	-1	0	-1	0	0	0
$W_0^- = t_{L\uparrow} b_{L\uparrow}^\dagger + t_{L\downarrow} b_{L\downarrow}^\dagger$	-1	0	-1	0	0	0
$W_x^3 = t_{L\uparrow}^\dagger t_{L\downarrow} - b_{L\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow} + t_{L\downarrow}^\dagger t_{L\uparrow} - b_{L\downarrow}^\dagger b_{L\uparrow}$	0	0	0	0	-	0
$W_y^3 = t_{L\uparrow}^\dagger t_{L\downarrow} - b_{L\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow} - t_{L\downarrow}^\dagger t_{L\uparrow} + b_{L\downarrow}^\dagger b_{L\uparrow}$	0	0	0	0	-	0
$W_z^3 = t_{L\uparrow}^\dagger t_{L\uparrow} - t_{L\downarrow}^\dagger t_{L\downarrow} + b_{L\downarrow}^\dagger b_{L\downarrow} - b_{L\uparrow}^\dagger b_{L\uparrow}$	0	0	0	0	0	0
$W_0^3 = t_{L\uparrow}^\dagger t_{L\uparrow} - b_{L\uparrow}^\dagger b_{L\uparrow} + t_{L\downarrow}^\dagger t_{L\downarrow} - b_{L\downarrow}^\dagger b_{L\downarrow}$	0	0	0	0	0	0
$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu)$	0	0	0	0	1	-
$H_t = t_{L\uparrow}^\dagger t_{R\uparrow} + t_{L\downarrow}^\dagger t_{R\downarrow}$	0	1	-1/2	-1/2	0	0
$H_b = b_{R\uparrow}^\dagger b_{L\uparrow} + b_{R\downarrow}^\dagger b_{L\downarrow}$	0	-1	1/2	1/2	0	0

Tabla 5.2: Números cuánticos de las componentes de los bosones W_μ^i , Z_μ , H_t y H_b .

Cabe mencionar que los estados compuestos están restringidos por el principio de Pauli, o la imposibilidad de construirlos con operadores de creación iguales.

5.4. Masas de las Partículas en Segunda Cuantización

De manera análoga al mecanismo de Higgs convencional, las masas de los bosones se obtienen a partir del término del Lagrangiano escalar-vector. Se cuantizan los operadores pertenecientes a los campos vectoriales, de tal forma sólo se toman las partes masivas dadas por

$$M_W = \left\langle 0 \left| \left[vH, \frac{1}{2}gW_1^+ \right]^\dagger \left[vH, \frac{1}{2}gW_1^+ \right] \right| 0 \right\rangle, \quad (5.28)$$

$$M_Z = \frac{1}{g^2 + g'^2} \left\langle 0 \left| \left[vH, g^2I^3 - \frac{1}{2}g'Y \right]^\dagger \left[g^2I^3 - \frac{1}{2}g'^2Y, vH \right] \right| 0 \right\rangle. \quad (5.29)$$

Usando los W_μ^i presentados en la tabla 5.2 y de las ecuaciones 5.23 haciendo referencia que $W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_x^+ + iW_y^+)$ y $W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_x^- - iW_y^-)$ se obtienen las componentes

$$W_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_x^- - iW_y^-) = 2b_{L\uparrow}^\dagger t_{L\downarrow}. \quad (5.30)$$

$$W_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_x^+ + iW_y^+) = 2t_{L\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow}, \quad (5.31)$$

Se calculan los conmutadores con las relaciones de conmutación mostradas en el Apéndice A, de modo que

$$[H, W_1^+] = [\chi_t H_t + \chi_b H_b^\dagger, 2t_{L\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow}] = 2 \left(\chi_t t_{R\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow} - \chi_b t_{L\uparrow}^\dagger b_{R\downarrow} \right), \quad (5.32)$$

se definen $H_t^1 = t_{R\uparrow}^\dagger b_{L\downarrow}$ y $H_b^{1\dagger} = t_{L\uparrow}^\dagger b_{R\downarrow}$ y la ecuación 5.28 da como resultado

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2 (|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2 + \chi_t^* \chi_b + \chi_t \chi_b^*). \quad (5.33)$$

De la ecuación 5.29, se obtienen las masas de los bosones Z y A . Se calculan los conmutadores

$$[H, I^3] = \left[\chi_t H_t + \chi_b H_b^\dagger, \frac{1}{2} \sum_i t_{Li}^\dagger t_{Li} - b_{Li}^\dagger b_{Li} \right] \quad (5.34)$$

y

$$[H, Y] = \left[\chi_t H_t + \chi_b H_b^\dagger, \sum_i \left[\frac{4}{3} t_{Ri}^\dagger t_{Ri} - \frac{2}{3} b_{Ri}^\dagger b_{Ri} + \frac{1}{3} (t_{Li}^\dagger t_{Li} + b_{Li}^\dagger b_{Li}) \right] \right]. \quad (5.35)$$

Por lo que la masa queda determinada por la siguiente expresión

$$M_Z^2 = \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) (|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2 + \chi_t^* \chi_b + \chi_t \chi_b^*). \quad (5.36)$$

Para que el valor de las masa coincidan con las del ME convencional, se requiere que

$$|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2 + \chi_t^* \chi_b + \chi_t \chi_b^* = 1, \quad (5.37)$$

que implica que debe ser una relación unitaria. Tomando χ_t un parámetro real y χ_b imaginario, satisfacen la condición unitaria para una base de espín extendido [4]

$$|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2 = 1. \quad (5.38)$$

Por otro lado, para la obtención de la masa del bosón H se define el operador

$$H_m = \frac{v}{\sqrt{2}} \left[\chi_t (t_{R\uparrow}^\dagger t_{L\uparrow} + t_{R\downarrow}^\dagger t_{L\downarrow}) + \chi_b (b_{L\uparrow}^\dagger b_{R\uparrow} + b_{L\downarrow}^\dagger b_{R\downarrow}) \right], \quad (5.39)$$

cuya normalización es

$$\left\langle 0 \left| \frac{v}{\sqrt{2}} H_q \right| 0 \right\rangle = -\frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (5.40)$$

El valor de su masa se puede calcular a partir de la expresión

$$M_H = \left\langle 0 \left| \left[H_m, \frac{g}{2} (W_1^+ + W_1^-) \right]^\dagger \left[H_m, \frac{g}{2} (W_1^+ + W_1^-) \right] \right| 0 \right\rangle \quad (5.41)$$

que de igual manera se calculan los conmutadores con las relaciones ya conocidas, por lo que

$$M_H = \frac{1}{4} g^2 v^2 (|\chi_t|^2 + |\chi_b|^2 + \chi_t^* \chi_b + \chi_t \chi_b^*). \quad (5.42)$$

El operador H_m es a su vez el operador de Yukawa el cual dota de masa a los fermiones, definido como

$$: H_m + H_m^\dagger := \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_i \left[\chi_t \left(t_i^\dagger t_i + \bar{t}_i^\dagger \bar{t}_i \right) + \chi_b \left(b_i^\dagger b_i + \bar{b}_i^\dagger \bar{b}_i \right) \right], \quad (5.43)$$

donde $::$ representa el orden normal. Las masas de los fermiones se obtienen por medio de los conmutadores

$$M_{t_i} = \left[H_m + H_m^\dagger, t_i^\dagger \right] = \frac{v \chi_t}{\sqrt{2}} t_i^\dagger = m_t t_i^\dagger, \quad (5.44)$$

$$M_{b_i} \left[H_m + H_m^\dagger, b_i^\dagger \right] = \frac{v \chi_b}{\sqrt{2}} b_i^\dagger = m_b b_i^\dagger, \quad (5.45)$$

ahora los parametros χ_t y χ_b son interpretados como los coeficientes de Yukawa. Así como se impuso la ecuación 5.35, también se cumple para M_H , lo que lleva a que las masas de los fermiones es

$$m_t^2 + m_b^2 = \frac{v^2}{2}. \quad (5.46)$$

Esta relación también se satisface y es proveniente de la base de espín extendido [4]. Con lo anterior, se puede concluir que los campos bosónicos pueden escribirse

en términos de una base fermónica y además reproducen el mecanismo de Higgs obteniendo el mismo valor para sus masas.

Capítulo 6

Conclusiones

El formalismo de segunda cuantización permite una representación de la base de espín extendido por medio de los operadores de creación y aniquilación de una aproximación del mecanismo de Higgs. En esta base los grados de libertad discretos de espín e isospín pueden ser descritos por las componentes quirales de los fermiones pesados. Dichas componentes sin masa mantienen sus números cuánticos y presentan a los bosones vectoriales como una combinación de éstos. Se reescriben los componentes de masa de los vértices escalar-vector y escalar fermión del Modelo Estándar y se obtienen relaciones de conmutación proporcionando las masas de los bosones vectoriales, del bosón escalar y de los mismos fermiones. Esto sucede reproduciendo el mecanismo de Higgs a bajas energías, donde el campo escalar adquiere un valor de expectativa de vacío, generando masa sobre sí mismo y de los otros campos. Utilizando esta expansión de campos fermiónicos se identifica en la masas, un término en común en el campo escalar, el cuál lleva a una restricción para las masas de los quarks dada por la ecuación 5.44. Esta expresión también se cumple para una base de espín [4], lo que comprueba que la aproximación de la reproducción de las masas del mecanismo de Higgs es válida.

Se obtiene entonces, una relación de las masa para los campos fermiónicos que como base refleja la estructura compuesta del ME y que físicamente sugiere una dinámica similar al comportamiento de pares en las teorías de superconductividad [4]. Los operadores también se pueden interpretar como un modelo por sí solo. En este trabajo de tesis se han extendido las ideas del modelo de espín extendido considerando una base que refleja la estructura compuesta del Modelo Estándar, que sugiere una dinámica común similar al comportamiento de pares en las teorías de la superconductividad que pueden ser de ayuda en un futuro para las extensiones del ME así como para consolidar aplicaciones como en modelos compuestos que relacionen los quarks t y b con un condensado escalar de Bose-Einstein. En conclusión, la representación de la base fermiónica en segunda cuantización reproduce las propiedades del ME, ya que los grados de libertad de las partículas pesadas se pueden describir en elementos simples.

Apéndice A

Relaciones de Conmutación

Sean A, B, C y D operadores en el espacio de Hilbert, satisfacen las siguientes propiedades:

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$
3. $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
4. $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$
5. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$
6. $[AB, CD] = -AC\{D, B\} + A\{C, B\}D - C\{D, A\}B + \{C, A\}DB$

Apéndice B

Matrices de Pauli y Dirac

Las matrices de Pauli son un conjunto de matrices que forman una base para el grupo especial unitario $SU(2)$ y están dadas por:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Las matrices de Dirac, también conocidas como matrices gamma son:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \tau_k \\ -\tau_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

con $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, τ_k son las matrices de Pauli para $k = 1, 2, 3$, e I_2 es la matriz identidad de dimensión 2.

Bibliografía

- [1] Miramontes, O. y Volke, K. *Fronteras de la física en el siglo XXI*, (2013), CopIt Ar-Xives, Mexico. TS0011ES. ISBN: 978-1-938128-03-5. DOI:10.13140/2.1.2118.8809.
- [2] Avery, J. *Creation and Annihilation Operators*, McGraw-Hill Inc, US (1976).
- [3] T. Lancaster, S.J. Blundell "Quantum Field Theory for the Gifted Amateur", Oxford University Press (2014)
- [4] Besprosvany, J. y Romero R. *Heavy quarks within the electroweak multiplet* Phys. Rev. D **99**, 073001 (2019), hep-ph/1701.01191.
- [5] Besprosvany, J. y Romero R. *Particles within extended-spin space: Lagrangian connection* Nuclear and Particle Physics Proceedings 267-269, October-December 2015, hep-ph/1512.05395.
- [6] Besprosvany, J. y Sánchez R. *Heavy-quark mass relation from a standard-model boson operator representation in terms of fermions.*
- [7] Fujita, S. Ito, K. y Godoy, S. *Quantum Theory of Conducting Matter, Superconductivity*, Springer (2009).
- [8] Martin, P. A. y Rothen, F. *Many-Body Problems and Quantum Field Theory: An Introduction*, Springer (2002).
- [9] Peskin, M. Schroeder, D. *An Introduction To Quantum Field Theory*, Perseus Books Reading, Massachusetts (1995).

- [10] Kaku, M. *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*, Oxford University Press (1993).
- [11] Böhm, M. Denner, A. y Joos, H. *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner, Stuttgart (2001).
- [12] Morii, T., Lim, C. S. y Mukherjee, S. N. *The Physics of the Standard Model and Beyond*, World Scientific Publishing Company (2004).
- [13] Cheng, T. Li, Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford (1982).
- [14] Wikipedia: *Modelo estándar de partículas elementales* por MissMJ-Trabajo propio del cargador, PBS NOVA, Fermilab, Oficina de Ciencias, Departamento de Energía de los Estados Unidos, Grupo de datos de partículas.
- [15] The Nobel Prize in Physics 2015, <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2015/advanced-information/>>.
- [16] Griffiths, D. *Introduction to elementary particles*, John Willey Sons, Inc (1992).
- [17] Iorio A. *From the Coleman-Mandula Theorem to Supersymmetry Yang-Mills Theories*. M.I.T. (2003), <<https://ipnp.cz/iorio/swlectures.pdf>>.
- [18] Coleman S. y Mandula, J. *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159** 1251 (1967).