



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ESTRELLAS DE  $\ell$ -PROCA: GENERALIZACIÓN  
MULTICAMPO EN SIMETRÍA ESFÉRICA DE ESTRELLAS DE  
PROCA CON MOMENTO ANGULAR

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
CLAUDIO CESAR LAZARTE MELGAR

TUTOR PRINCIPAL  
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COMITÉ TUTORAL  
DR. NÉSTOR ENRIQUE ORTIZ MADRIGAL  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Para mi abuelo Willy,  
a quien le agradezco una infancia llena  
de mitología griega y abstracción matemática.*



# Agradecimientos

---

Este trabajo de investigación materializa mi paso de dos años en México y la UNAM, el país y la universidad que me han permitido continuar mi formación como físico. Espero a lo largo de mi camino poder retribuir a ambos y a la Física mexicana todo lo que me han brindado.

Los resultados de este trabajo no se hubieran logrado sin: la excelente guía y visión del Dr. Miguel Alcubierre, mi primer curso de Relatividad Numérica impartido por el Dr. Néstor Ortiz y el invaluable apoyo en métodos espectrales brindado por el Dr. Víctor Jaramillo. Estoy agradecido de todo lo que he aprendido de ustedes y deseo que en un futuro podamos colaborar en próximas investigaciones.

Mi soporte emocional también fue fundamental para llegar al final de esta etapa. Mis días difíciles siempre fueron mejor soportados al evocar el recuerdo de mi familia en Perú. Aunque lejos de ustedes, saber que estoy trabajando por un buen futuro que podamos compartir juntos siempre me llenó de fuerzas ante cualquier dificultad. Gracias por ser mi faro.

Gracias también a las amistades extraordinarias que México me permitió conocer, sobre todo a la mujer que amo, mi novia. Gracias por elegir vivir nuestras maestrías y celebrar nuestros logros juntos, por cuidarme y permitirme cuidarte, y por planear y soñar conmigo nuestra futura vida de físicos en pareja. Sin ti mi maestría no estaría completa.



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estrellas de Proca . . . . .	1
1.2. Estrellas de $\ell$ -bosones . . . . .	3
1.3. Estrellas de $\ell$ -Proca . . . . .	4
<b>2. Formalismo 3+1</b>	<b>7</b>
2.1. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo . . . . .	7
2.2. Ecuaciones de constricción y evolución de ADM . . . . .	12
2.3. Espacio-tiempo estático con simetría esférica . . . . .	15
2.4. Ecuaciones de datos iniciales . . . . .	16
2.4.1. Ecuaciones radiales en 1er orden . . . . .	18
2.4.2. Ecuaciones radiales en 2do orden . . . . .	20
<b>3. Sistema de Einstein-(multi)Proca</b>	<b>23</b>
3.1. Formulación lagrangiana . . . . .	23
3.2. Formalismo 3+1 . . . . .	29
3.2.1. Potenciales y campos en 3+1 . . . . .	29
3.2.2. Ecuaciones de campo de Proca en 3+1 . . . . .	32
3.2.3. Cantidades de materia en 3+1 . . . . .	37
3.3. Espacio-tiempo con simetría esférica . . . . .	40
3.4. Estrella de Proca . . . . .	42
<b>4. Estrella de <math>\ell</math>-Proca</b>	<b>47</b>
4.1. Propuesta multi-campo para simetría esférica . . . . .	47
4.2. Tensor energía-momento esféricamente simétrico . . . . .	52
4.3. Ecuaciones de evolución y constricción . . . . .	61
4.4. Solución de estrella bosónica: Estrella de $\ell$ -Proca . . . . .	69
4.5. Ecuaciones de datos iniciales en primer orden . . . . .	77
4.6. Ecuaciones de datos iniciales en segundo orden . . . . .	81



4.7. Soluciones en las fronteras . . . . .	87
<b>5. Resultados Numéricos</b>	<b>93</b>
5.1. Código espectral de colocación multi-dominio . . . . .	93
5.2. Soluciones de datos iniciales . . . . .	95
5.3. Familias de soluciones . . . . .	104
5.4. Convergencia Espectral . . . . .	109
<b>6. Conclusiones</b>	<b>113</b>
<b>A. Singularidades coordenadas en los campos magnéticos</b>	<b>117</b>
<b>B. Soluciones locales de datos iniciales cerca al origen</b>	<b>123</b>
<b>C. Métodos Espectrales</b>	<b>133</b>
C.1. Representación espectral de funciones . . . . .	134
C.2. Polinomios de Chebyshev . . . . .	136
C.3. Método de colocación para ODEs . . . . .	139
C.4. Método de colocación multi-dominio . . . . .	141
<b>Bibliografía</b>	<b>147</b>

# Capítulo 1

## Introducción

---

### 1.1. Estrellas de Proca

Hasta el momento, la totalidad de ondas gravitacionales (OGs) detectadas han sido identificadas como emisiones de fusiones orbitales de sistemas binarios de agujeros negros (ANs) o de estrellas de neutrones. Colocando a estos sistemas en el primer lugar entre los sistemas de objetos compactos (OCs) con emisión de radiación gravitatoria. Este hecho podría cambiar con la detección del evento GW190521 [1], pues esta señal difiere de otras al poseer una fase orbital de pre-fusión débilmente observable, y aunque su fase de fusión es consistente con una fusión de binaria de ANs, bajo esta interpretación, la masa de una de las dos fuentes cae en una banda de masas que desafía los actuales escenarios de formación de ANs [2]. Ante esta situación, un reciente estudio [3] muestra que la señal de GW190521 es consistente con la simulación numérica de una fusión frontal de estrellas de Proca [4], eliminando el desafío anterior y motivando el estudio de sistemas binarios de dichas estrellas.

Las estrellas de Proca, originalmente motivadas por la búsqueda de candidatos de materia oscura [4], son sistemas de gravedad fuerte formados por campos complejos de Proca (esto es, campos bosónicos vectoriales) con dependencia temporal armónica, y acoplados mínimamente a la gravedad. El campo bosónico de estas estrellas, así como de sus primas conocidas como estrellas de bosones [5, 6] (formadas por un campo escalar en lugar de vectorial), posee una frecuencia de oscilación bien definida que determina la masa y compacidad de la estrella. Lo cual nos abre la posibilidad de estudiar sistemas con compacidades cercanas y tan masivos como los ANs, clasificando así a las estrellas bosónicas (EBs)<sup>1</sup>, como OCs exóticos.

Es importante preguntarnos por la viabilidad de las EBs como modelos de OCs

---

<sup>1</sup>Para efectos de esta sección, nos referiremos como EBs a las estrellas de bosones y las estrellas de Proca constituidas por solo un campo bosónico. Luego extenderemos esta clasificación a configuraciones multi-campo.

astrofísicos. Desde el punto de vista microscópico, las EBs pueden ser interpretadas como estados de muchas partículas bosónicas ligadas por la gravedad. Por lo tanto, al aplicarle el principio de incertidumbre a una EB, asumiendo que: (i) esta es un estado cuántico macroscópico, (ii) su campo bosónico constituyente tiene masa  $\mu$  y no presenta autointeracción, y (iii) se encuentra localizada dentro de un radio de Schwarzschild, se obtiene un estimado de su masa máxima  $M_{max}$  [7]. Dicho estimado escrito en unidades de Planck ( $\hbar = G = c = 1$ ) es

$$\left(\frac{M_{max}}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{\mu}{10^{-10} \text{ eV}}\right) \sim 1.$$

Por ejemplo si consideramos a los bosones vectoriales fundamentales masivos y al único bosón escalar del Modelo Estándar de Partículas, cuyas masas son  $\mu_{W^{\pm}} \sim 80$  GeV,  $\mu_{Z^0} \sim 91$  GeV y  $\mu_{Higgs} \sim 125$  GeV [8] respectivamente, obtenemos EBs con masas (no astrofísicas) de  $M_{max} \sim 10^{-21} M_{\odot}$ . Este resultado nos enseña que debemos imponer que los constituyentes de una EB sean bosones ultraligeros para poder lograr masas en el rango de ANs astrofísicos. En efecto, para masas bosónicas dentro de  $10^{-13} \leq \mu \leq 10^{-10} \text{ eV}$ , se producen estrellas con masas máximas en el intervalo de  $10^3 \geq M_{max} \geq 1 M_{\odot}$ , respectivamente. Ante la ausencia de bosones conocidos con masas dentro de aquel rango, una opción para promover el estudio de las EBs es invocar la hipotética existencia de bosones ultraligeros en modelos más allá del Modelo Estándar de Partículas. Sin embargo, una interesante posibilidad que no depende de nueva física fue presentada en [9], argumentando que los fotones podrían comportarse como partículas de Proca cerca de ANs con masas estelares, debido a que adquieren una masa efectiva inducida de  $\mu \sim 10^{-10} - 10^{-12} \text{ eV}$  al propagarse a través del plasma galáctico circundante.

Por otro lado, desde el punto de vista dinámico, un OC real debe permanecer estable en su evolución incluso si este es sometido a pequeñas perturbaciones en su sistema, de lo contrario, no podríamos esperar encontrarlo en un ambiente astrofísico. Para realizar dichos análisis de estabilidad debemos tener en cuenta que las EBs pueden corresponder a espacio-tiempos estáticos, cuyas soluciones son esféricamente simétricas, o espacio-tiempos rotantes, cuyas soluciones son axisimétricas. Estudios numéricos de estabilidad dinámica mediante perturbaciones esféricas han sido realizados tanto en estrellas de bosones [10] como estrellas de Proca [11] encontrándose similitudes importantes. En ambos casos, el espacio de soluciones del estado base o fundamental<sup>2</sup> está dividido en dos ramas, una rama estable, que inicia en el límite Newtoniano (región donde las soluciones son poco compactas) y termina en la solución de máxima masa, y una rama inestable, que inicia en dicha solución y se extiende por

---

<sup>2</sup>Configuraciones donde el perfil radiales de las funciones solución de los campos bosónicos poseen el mínimo número de nodos.

todo el espacio de soluciones restante (región donde las soluciones son más compactas).

Con el fin de acercarnos cada vez más a modelos reales, debemos exigir que los OC exóticos no solo sean estables ante perturbaciones esféricas o también conocidas como 1-dimensionales, sino también ante perturbaciones 3-dimensionales, esto es, perturbaciones donde no se imponga ninguna simetría espacial. Es en este contexto donde las diferencias entre estrellas de Proca y estrellas de bosones empiezan a ser más notables. Simulaciones numéricas 3-dimensionales tanto en estrellas rotantes de bosones como estrellas rotantes de Proca (ambas con número azimutal  $m = 1$ ) muestran que solo estas últimas son estables ante perturbaciones no-axisimétricas, mientras que las estrellas rotantes de bosones decaen a agujeros negros rotantes [12]. Este resultado coloca a las estrellas de Proca por encima de las estrellas de bosones como OCs con mayor robustez dinámica y por lo tanto con mayor posibilidad de existir en la naturaleza. En consecuencia, estudios dinámicos más complejos, tales como simulaciones de sistemas binarios de estrellas de Proca [13], se encuentran bien motivados.

## 1.2. Estrellas de $\ell$ -bosones

Hasta aquí, nos hemos referido a la configuración estándar de las EBs, esto es, aquellas que poseen un solo campo bosónico como contenido de materia. Sin embargo, nada nos impide a considerar sistemas multi-campo. Tal es así, que hace unos años se propuso un nuevo tipo de estrella de bosones multi-campo apodada como estrella de  $\ell$ -bosones [14]. Estos nuevos objetos auto-gravitantes consisten en un número impar  $N = 2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , de campos escalares complejos clásicos únicamente interactuando gravitatoriamente entre sí, con la misma masa, amplitud radial y frecuencia de oscilación temporal. Tal que para un  $\ell > 0$  fijo, los  $2\ell + 1$  campos constituyentes poseen un momento angular dado mediante la dependencia angular de los correspondientes  $2\ell + 1$  armónicos esféricos  $Y^{\ell m}$ , lo cual, asegura que el espacio-tiempo sea esféricamente simétrico y estático. Así, la estrella de  $\ell$ -bosones generaliza la estrella de bosones estándar, siendo esta última su caso  $\ell = 0$ .

Originalmente, la estrella de  $\ell$ -bosones se presentó como una solución regular localizada de un sistema de campos clásicos. Sin embargo, la naturaleza es cuántica a nivel fundamental, y tales objetos deben tener una interpretación en la teoría cuántica de campos. En [15] se presentó la interpretación semiclásica de esta estrella, la cual resulta mucho más natural que su presentación original clásica [14]: corresponde a un excitación particular de un único campo cuántico escalar real de espín cero que describe un sistema auto-gravitante de  $2(\ell + 1)n$  partículas cuánticas idénticas con una misma energía definida y un mismo momento angular (donde  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario).

Así, es más natural considerar a la estrella de  $\ell$ -bosones como un sólo campo cuántico sin la necesidad de postular la existencia de un número independiente fijo de campos clásicos, como es en este caso de  $2\ell + 1$  campos escalares complejos.

Regresando a los estudios bajo la interpretación clásica, estudios recientes de estabilidad dinámica han mostrado que las estrellas de  $\ell$ -bosones presentan por un lado similitudes a las estrella de bosones estándar, pero también interesantes características que nos podrían conducir a OC exóticos más generales. Con respecto a las similitudes, simulaciones dinámicas en simetría esférica [16] muestran que para cada valor de  $\ell$ , existe una rama estable y una rama inestable ante perturbaciones esféricas con el punto de transición dado por la solución de máxima masa. Además, en [14, 17] se encontró que la masa máxima y la compacidad de la estrella aumentan con  $\ell$ . De esta manera, resulta interesante que sin la necesidad de agregar términos de autointeracción en los campos bosónicos, mediante la configuración de la estrella de  $\ell$ -bosones podamos acceder a objetos estables más masivos y compactos.

Con respecto a las nuevas características, en [18] se exploró la estabilidad no esférica de la estrella de  $\ell$ -bosones para  $\ell = 1$  mediante simulaciones 3-dimensionales, encontrándose nuevas configuraciones multi-campo estáticas pero no esféricas, lo cual permitió hipotetizar la existencia de una familia de soluciones de estrellas de bosones estáticas, no necesariamente esféricas, del sistema de Einstein-(multi)Klein-Gordon, donde la estrella de  $\ell$ -bosones corresponde a la solución de máxima isometría en dicha familia. Dicha hipótesis fue confirmada en [19], donde se construye una familia de soluciones de estrellas de bosones multi-campo y multi-frecuencia para  $\ell = 1$  y se explica que las soluciones estáticas y no esféricas del anterior estudio [18] corresponden a una configuración en la que los campos constituyentes poseen diferentes frecuencias temporales. Además, concluyen que la estrella de  $\ell$ -bosones, la solución de máxima isometría, es la única configuración estable en esta familia. En ese mismo estudio se conjetura la existencia de una familia de soluciones multi-campo y multi-frecuencia similar para estrellas de Proca.

### 1.3. Estrellas de $\ell$ -Proca

Con la intención de convertir dicha conjetura en una afirmación debidamente sustentada, debemos iniciar buscando la solución de máxima isometría de la familia estrellas de Proca multi-campo y multi-frecuencia. En esa dirección, hemos desarrollado una propuesta análoga a la estrella de  $\ell$ -bosones, donde hemos reemplazado los  $2\ell + 1$  campos complejos escalares por campos complejos de Proca, consiguiendo también un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático. Como era de esperar,

hemos apodado a esta nueva configuración como estrella de  $\ell$ -Proca, la cual tiene como caso particular a la estrella de Proca cuando  $\ell = 0$ .

Según lo expuesto en las anteriores secciones, encontramos que el estudio de una configuración como nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca se encuentra suficientemente motivado. En primer lugar, desde el punto de vista teórico esta configuración representa una nueva solución al sistema de Einstein-(multi)Proca, por lo cual, podemos afirmar que esta estrella es una consecuencia de la teoría de la Relatividad General de ser el caso que exista campos de Proca ultraligeros, fundamentales o efectivos, en la naturaleza.

En segundo lugar, recordando que la estrella de  $\ell$ -bosones corresponde a la única solución estable de su familia de estrellas de bosones multi-campo y multi-frecuencia, la estrella de  $\ell$ -Proca puede ser el punto de partida para encontrar que la familia completa de estrellas de Proca multi-campo y multi-frecuencia o al menos un subconjunto de esta es estable. En efecto, esta hipótesis se basa en que la estabilidad no-axisimétrica de las estrellas de Proca rotantes puede ser heredada a las estrellas de  $\ell$ -Proca y sus configuraciones perturbadas. Si esto es así, podríamos tener a disposición un conjunto de estrellas de Proca multi-campo y multi-frecuencia estables y más masivas y compactas que la estrella de Proca estándar. Lo cual a su vez, nos acerca más a la viabilidad de que estas estrellas de Proca generalizadas existan como OCs astrofísicos.

En tercer lugar, esperamos que la estrella de  $\ell$ -Proca presente nuevas características astrofísicas interesantes producto de las diferencias provenientes del carácter vectorial de sus campos en comparación con su prima escalar. Por ejemplo, y como se mostrará en esta tesis de maestría, nuestra configuración de estrella de  $\ell$ -Proca necesita tener más funciones variables del sistema para que pueda generar la simetría esférica deseada. Tal es así, que en nuestra generalización, los campos vectoriales ya existentes en la estrella de Proca<sup>1</sup> no son solo radiales sino que poseen componentes angulares e incluso existirán campos magnéticos diferentes de cero.

Establecida estas motivaciones, nuestros objetivos en este primer estudio de las estrellas de  $\ell$ -Proca son: (i) proponer un ansatz auto-consistente que nos permita establecer las ecuaciones de evolución y de constricción de este sistema, y (ii) analizar analíticamente y obtener numéricamente sus datos iniciales, lo cual, nos permitirá realizar las primeras comparaciones con la estrella de Proca estándar y la estrella de  $\ell$ -bosones.

---

<sup>1</sup>Como se expondrá más adelante, la simetría esférica de la estrella de Proca estándar estática, implica que su campo 3-vectorial potencial y su campo 3-vectorial eléctrico solo poseen componentes radiales. También, debido a la simetría esférica, esta configuración de un solo campo, posee un campo 3-vectorial magnético igual a cero.



# Capítulo 2

## Formalismo 3+1

---

Cuando estamos interesados en estudiar, analítica o numéricamente, la evolución de un sistema físico, recurrimos a formularlo como un problema de Cauchy. Este problema consiste en resolver un sistema de ecuaciones de evolución, a partir de un adecuado conjunto de valores o datos iniciales de las funciones solución. Si bien en este trabajo no realizaremos evoluciones temporales de nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca, sí obtendremos todos los ingredientes básicos y faltantes para dicho estudio, esto es, las expresiones de las ecuaciones de evolución temporal para los campos de Proca<sup>1</sup> así como los datos iniciales del sistema.

En consecuencia y con el fin de desarrollar una exposición ordenada, en este capítulo nos enfocaremos únicamente en la formulación como un problema de Cauchy de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los campos gravitacionales, es decir, las ecuaciones de Einstein; dejando para el siguiente capítulo la formulación de las ecuaciones de campo de Proca. Además, a diferencia de los capítulos siguientes, en las dos primeras secciones de este capítulo no presentaremos una deducción detallada de cada expresión, sino que tomaremos los elementos y resultados del capítulo 2 de [22] que sean indispensables para nuestro objetivo de obtener los datos iniciales de nuestra propuesta. Adicionalmente, haremos uso directo de los conceptos básicos y algunos avanzados de la teoría de la Relatividad General, tomados de [23].

### 2.1. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo

Como se sabe, las ecuaciones de campo de Einstein están escritas de forma covariante, es decir, en ellas se les da el mismo tratamiento de coordenadas al tiempo y al

---

<sup>1</sup>Con respecto a las ecuaciones de evolución para el campo gravitacional, existen diferentes formalismos que nos las otorgan (formulación de ADM, formulación en coordenadas generalizadas armónicas, etc), sin embargo, este trabajo tomará en cuenta el formalismo de Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) [20, 21], por tratarse del formalismo más estandarizado para la implementación de simulaciones dinámicas estables [22].



espacio. Sin embargo, para estudiar la evolución temporal de un campo gravitacional se debe tener en claro cuál es la coordenada temporal. Por lo tanto, es necesario separar los roles del espacio y del tiempo de una forma clara. La formulación de la Relatividad General (RG) resultado de esta separación se conoce como *Formalismo 3+1*.

Este formalismo asegura su predictibilidad sosteniéndose en resultados formales del estudio matemático de la estructura causal del espacio-tiempo. El cual nos lleva a asumir que el espacio-tiempo astrofísico que abordamos en este trabajo es un espacio-tiempo *globalmente hiperbólico*. Para entender qué implica esta suposición, acudamos brevemente a los siguientes conceptos:

Sea un espacio-tiempo  $(M^4, g)$ , una superficie de Cauchy  $\Sigma$  *corresponde*<sup>1</sup> a una subvariedad 3-dimensional de tipo espacio inmersa en  $M^4$  cuyos eventos son suficientes para conocer completamente todo evento futuro o pasado en la variedad, es decir, la historia completa del espacio-tiempo. Una superficie de Cauchy puede ser considerada como un *instante de tiempo* a través del universo. Luego, un espacio-tiempo que posea una superficie de Cauchy recibe el nombre de espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Gracias al teorema 8.3.14 presentado en [23], se afirma que en todo espacio-tiempo globalmente hiperbólico se puede definir una función temporal global,  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que cada superficie con  $t = \text{const}$  es una superficie de Cauchy. Así, el espacio-tiempo puede ser completamente foliado en superficies de Cauchy parametrizadas por la imagen de  $t$ ,  $\Sigma_t$ , lo cual hace a este espacio-tiempo homeomorfo a  $\mathbb{R} \times \Sigma_t$ .

Por lo tanto, asumir que estamos trabajando en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, nos asegura poder foliarlo en hipersuperficies espaciales  $\Sigma_t$  que representan distintos instantes de tiempo y tomando cualquiera de ellos tenemos las condiciones para predecir o retrodecir completamente la historia futura o pasada, respectivamente, del espacio-tiempo. Ahora, consideremos una foliación arbitraria, y representemos gráficamente dos hipersuperficies adyacentes  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$  en la Figura 2.1. Siguiendo esta figura, se puede caracterizar la geometría entre dichas hipersuperficies mediante las siguientes cantidades:

1. Una métrica 3-dimensional  $\gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) que mide las distancias propias dentro de la hipersuperficie

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j . \quad (2.1)$$

2. El lapso de tiempo propio  $d\tau$  entre ambas hipersuperficies medido por lo observadores *eulerianos* ( observadores moviéndose a lo largo de la dirección normal

---

<sup>1</sup>Esta presentación del concepto de superficie de Cauchy no pretender ser una definición formal, sino una introducción de la idea física. La definición formal se puede encontrar en el capítulo 8 de [23] o en el capítulo 5 de [24].

a la hipersuperficie)

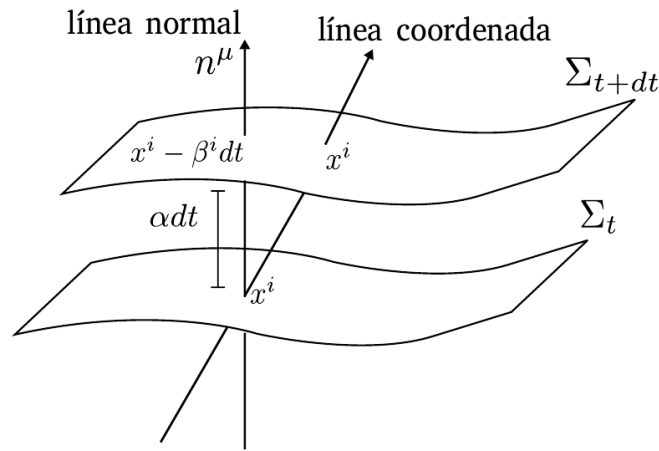
$$d\tau = \alpha(t, x^i)dt, \quad (2.2)$$

donde  $\alpha$  recibe el nombre de *función de lapso*.

3. La velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores eulerianos y las líneas de coordenadas espaciales constantes

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i)dt, \quad (2.3)$$

donde el 3-vector  $\beta^i$  recibe el nombre de vector de *corrimiento*.



**Figura 2.1:** Foliación con dos hipersuperficies espaciales adyacentes, caracterizadas por la función de lapso  $\alpha$  y el vector de corrimiento  $\beta^i$ .

Nótese que el vector de corrimiento  $\vec{\beta}$  es un vector definido en la hipersuperficie espacial cuya métrica es  $\gamma_{ij}$ , por lo tanto, podemos obtener su componente covariante como  $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ . Luego, en términos de las funciones  $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$  la métrica del espacio-tiempo en el sistema coordenado adaptado a la foliación se escribe como

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.4)$$

Con esta métrica el elemento de volumen 4-dimensional del espacio-tiempo se puede expresar en función del volumen 3-dimensional de la hipersuperficie espacial como

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}, \quad (2.5)$$

con  $g := \det(g_{\mu\nu})$  y  $\gamma := \det(\gamma_{ij})$ .

Guiándonos de la Figura 2.1, notamos que el vector tangente  $\vec{t}$  a las líneas de flujo de tiempo, es decir, las líneas con coordenadas espaciales constantes, deben construirse a partir de  $\alpha$  y  $\beta^i$ . Para ello, denotamos como  $n^\mu$  al vector unitario normal

a la hipersuperficie, el cual es un vector tipo-tiempo debido a que la hipersuperficie es tipo-espacio, y tomando en cuenta que en el sistema coordenado adaptado a la foliación el 4-vector de corrimiento tiene que ser  $\beta^\mu = (0, \beta^i)$ , entonces

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu. \quad (2.6)$$

De aquí, se deduce las componentes covariante y contravariante de  $\vec{n}$

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (2.7)$$

La cual usaremos constantemente para proyectar cualquier cantidad 4-dimensional a lo largo de la dirección normal a la hipersuperficie. Por otro lado, también necesitaremos proyectar tales cantidades sobre la hipersuperficie, estas se consiguen al utilizar como operador de proyección a la métrica espacial  $\gamma^i_j$ , la cual se define a partir de la métrica inducida por la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  sobre cada hipersuperficie  $\Sigma_t$

$$\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.8)$$

donde al escribirla en las coordenadas adaptadas a la foliación sus componentes temporales se vuelven triviales.

Finalmente, ahora que estamos estudiando foliaciones con hipersuperficies espaciales inmersas en el espacio-tiempo, podemos extraer su curvatura extrínseca. Esta se expresa mediante el tensor de curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ , el cual cuantifica el cambio del vector normal paralelamente transportado sobre la hipersuperficie espacial

$$K_{\mu\nu} := -\gamma^\alpha_\mu \nabla_\alpha n_\nu. \quad (2.9)$$

A partir de esta definición se puede demostrar que este es un tensor simétrico. Además, debido a que esta cantidad se define mediante un proyección sobre la hipersuperficie, este tensor es de tipo-espacio. Por lo tanto,  $n_\mu K^{\mu\nu} = n_\nu K^{\mu\nu} = 0$ . Luego, en un sistema coordenado adaptado a la foliación sus componentes temporales contravariantes son triviales,  $K^{00} = K^{i0} = 0$ , mientras que sus componentes temporales covariantes toman la forma  $K_{00} = \beta^i \beta^j K_{ij}$  y  $K_{i0} = \beta^j K_{ij}$ . En consecuencia, bastará especificar solo las componentes espaciales  $K_{ij}$  cuando nos refiramos al tensor de curvatura extrínseca.

La introducción hasta el momento de las cantidades  $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}, K_{ij}\}$  no es arbitraria. En efecto, cada una de ellas jugará un rol específico en la formulación de la RG como un problema de Cauchy, y que es conocido gracias a la formulación hamiltoniana de la RG, que establece lo siguiente:

1.  $\gamma_{ij}$  y  $K_{ij}$  son las variables dinámicas del sistema, por lo tanto, portan los grados de libertad dinámicos del campo gravitacional. Estrictamente, el par de variables

canónicas conjugadas es  $(\gamma_{ij}, \pi^{ij})$ , donde  $\pi^{ij}$  es el momento conjugado canónico asociado a  $\gamma_{ij}$ . Sin embargo, ya que existe una relación invertible entre  $\pi^{ij}$  y  $K_{ij}$ , dada por

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K) \iff K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\pi\right),$$

el carácter de variable dinámica de  $\pi^{ij}$  se transmite a  $K_{ij}$ . La variación del Hamiltoniano respecto a las variables canónicas resulta en dos ecuaciones de evolución, que fueron originalmente presentadas por Arnowitt, Dese y Misner (ADM) en 1962 [25] y son conocidas como ecuaciones de evolución de ADM.

2.  $\alpha$  y  $\beta_i$  no son variables dinámicas sino que expresan las libertades de norma del sistema. En este formalismo, a ambas funciones les corresponde un momento conjugado igual a cero, por lo que en realidad, representan multiplicadores de Lagrange y por lo tanto, las variaciones del Hamiltoniano respecto de estas generan ecuaciones de restricción. La presencia de estas restricciones indica que, a pesar de no estar considerando a  $\alpha$  y  $\beta_i$  como variables dinámicas, aún el espacio de fase  $(\gamma_{ij}, \pi^{ij})$  contiene grados de libertad no dinámicos expresados mediante una libertad de norma..

En particular, el formalismo 3+1 de la RG presenta dos libertades de norma. La libertad de elección de cómo foliamos del espacio-tiempo, que se expresa mediante la elección del lapso  $\alpha$ . Y la libertad de norma asociada a la invariancia por difeomorfismos espaciales de la métrica  $\gamma_{ij}$  en cada hipersuperficie espacial  $\Sigma_t$ , la cual se aprovecha para elegir cómo los sistemas de coordenadas espaciales se propagan desde un hipersuperficie hacia la siguiente. Esta última se expresa mediante la elección del vector de corrimiento  $\beta^i$ . Ambas libertades de norma se puede observar en la Figura 2.1 y ya que  $\alpha$  y  $\beta^i$  contienen esta información de nuestra elección de sistema coordenado adaptado a la foliación son conocidos como *funciones de norma*.

En este trabajo no utilizaremos el formalismo hamiltoniano para obtener las ecuaciones de evolución y restricción del sistema. En su lugar, utilizaremos otro método que será presentado en la siguiente sección y que se complementa con el siguiente análisis. De la expresión del tensor de curvatura extrínseca (2.9), se demuestra que este corresponde a una derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo de la dirección normal

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{ij}, \quad (2.10)$$

lo cual gracias a la definición del  $\vec{t}$ , en (2.6), se puede reexpresar como

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\right)\gamma_{ij}. \quad (2.11)$$

De aquí, resulta sencillo obtener una ecuación de evolución para las 6 componentes independientes de  $\gamma_{ij}$ , la cual corresponde a la primera ecuación de evolución de ADM. Así, al tener en cuenta que en el sistema coordenado adaptado a la foliación tenemos que  $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ . Tal ecuación es

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} . \quad (2.12)$$

## 2.2. Ecuaciones de constricción y evolución de ADM

Como se mencionó en la sección anterior, el formalismo hamiltoniano de la RG nos conduce a un conjunto de ecuaciones de constricción y evolución específicas necesarias para formular el problema de Cauchy. Sin embargo, existe otro procedimiento que nos lleva a las mismas ecuaciones, salvo ciertas diferencias a su versión original presentada por ADM que mencionaremos al final de esta sección. Este método consiste en realizar proyecciones de las ecuaciones de Einstein a lo largo de la dirección normal mediante  $n^\mu$  y sobre la hipersuperficie espacial usando al operador de proyección  $\gamma_{\nu}^\mu$ . La razón de presentar este método se basa en que también será usado para formular las ecuaciones de campo de Proca como parte del problema de Cauchy del sistema Einstein-(multi)Proca.

Sean las ecuaciones de Einstein para un espacio con contenido de materia representado por su tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.13)$$

donde  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}/2)R$  es el tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci, y adoptamos unidades geométricas ( $G = c = 1$ ). Luego, tenemos las siguientes opciones de proyección en el sistema coordenado adaptado a la foliación:

1. Proyección completa sobre la dirección normal de (2.13)

$$n^\mu n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0 . \quad (2.14)$$

Gracias a las ecuaciones de Gauss-Codazzi [22] y definiendo a la densidad de energía medida por los observadores eulerianos como

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} , \quad (2.15)$$

dicha ecuación se reexpresa como

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho , \quad (2.16)$$

donde hemos denotado a  ${}^{(3)}R$  como el escalar de Ricci sobre la hipersuperficie obtenido a partir de la métrica espacial  $\gamma_{ij}$  y sus derivadas espaciales. Observamos que esta ecuación no contiene derivadas temporales de las variables dinámicas del sistema, por lo que corresponde a una ecuación de constricción. En efecto, esta ecuación de constricción es aquella que resulta de la variación del lapso  $\alpha$  en el formalismo hamiltoniano y se conoce como *constricción hamiltoniana*.

2. Proyección mixta de (2.13)

$$\gamma^{i\mu}n^\nu(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0 . \quad (2.17)$$

Gracias a las ecuaciones de Codazzi-Mainardi [22] y definiendo a la densidad de momento medida por los observadores eulerianos como

$$j^i := -\gamma^{i\mu}n^\nu T_{\mu\nu} , \quad (2.18)$$

dicha ecuación proyectada se reexpresa como

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i , \quad (2.19)$$

donde  $D_j$  denota a la derivada covariante asociada a la métrica espacial  $\gamma_{ij}$  definida en  $\Sigma_t$ . Nuevamente, observamos la ausencia de derivadas temporales de las variables dinámicas del sistema, por lo que identificamos a esta ecuación como una ecuación de constricción. Esta ecuación es aquella ecuación de constricción que resulta de la variación del Hamiltoniano con respecto a  $\beta_i$  y recibe el nombre de *constricción de momentos*.

3. Proyección completa sobre la hipersuperficie espacial de (2.13)

$$\gamma^{i\mu}\gamma^{j\nu}(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0 , \quad (2.20)$$

la cual, se reemplaza en una expresión obtenida de considerar proyecciones sobre la hipersuperficie del tensor de Riemann, siguiendo el procedimiento presentado en [22], se expresa como

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] \\ &\quad + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] , \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde hemos definido al tensor espacial de esfuerzos medido por los observadores eulerianos como

$$S_{ij} := \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu} . \quad (2.22)$$

y su traza como  $S := \gamma^{ij} S_{ij}$ . Así, la ecuación que se obtiene es la ecuación de evolución para las 6 componentes independientes de  $K_{ij}$ . Junto a la ecuación de evolución para

$\gamma_{ij}$  (2.12) se tienen los ingredientes iniciales para escribir las ecuaciones de campo de RG como un problema de Cauchy. El siguiente paso será imponer una adecuada condición de norma y analizar la hiperbolicidad del sistema buscando un sistema de ecuaciones bien planteado que se pueda implementar numéricamente [26].

Para que este problema de Cauchy sea finalmente establecido, se debe especificar los datos iniciales de  $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ . Para ello, notamos 2 características importantes sobre ecuaciones de restricción encontradas. (i) Estas no dependen de las funciones de norma  $\alpha$  y  $\beta_i$  sino que únicamente de las variables dinámicas definidas íntegramente sobre  $\Sigma_t$ , por lo tanto, las restricciones son relaciones que refieren exclusivamente a una hipersuperficie dada. (ii) Gracias, a que las ecuaciones de restricción no cuentan con derivadas temporales, deben ser satisfechas en todo instante de tiempo, es decir, en cada hipersuperficie espacial  $\Sigma_t$ . Así, si fijamos el instante  $t = 0$  o nos ubicamos en la hipersuperficie espacial inicial  $\Sigma_{t=0}$ , el cumplimiento de las ecuaciones de restricción nos otorgará los valores iniciales de  $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ , de los cuales no tendremos 12 valores independientes, sino 8, debido a las 4 ecuaciones de restricción. Además, si las restricciones se satisfacen a  $t = 0$ , se muestra que las ecuaciones de evolución garantizan que las restricciones permanecerán satisfechas en todo instante [22].

En conclusión, la RG formulada como un problema de Cauchy se establece mediante la resolución de las ecuaciones (2.12) y (2.21) tomando como datos iniciales las soluciones de las ecuaciones de restricción hamiltoniana (2.16) y de momentos (2.19), imponiendo adecuadas condiciones de norma que aseguren la hiperbolicidad y por lo tanto el buen comportamiento del sistema de ecuaciones a implementar.

Es importante mencionar que las ecuaciones de ADM que acabamos de mostrar corresponden a una versión presentada por York en [27], diferenciándose de su versión original presentada por ADM [25] en lo siguiente: (i) Todas las ecuaciones de restricción y evolución originales, usan al momento conjugado canónico  $\pi^{ij}$  como variable dinámica en lugar de la curvatura extrínseca  $K_{ij}$ . (ii) Si se escriben las ecuaciones originales de ADM en términos de  $K_{ij}$ , la ecuación de evolución resultante para  $K_{ij}$  difiere de la que se mostró en esta sección, (2.21), por la adición de un término proporcional a la restricción hamiltoniana, cambiando la manera en que la evolución dada por estos sistema de ecuaciones reaccionan a pequeñas violaciones de las restricciones. Precisamente, estas propiedades dan pie a un análisis de hiperbolicidad que muestran que el sistema original de ecuaciones de evolución de ADM como el sistema reescrito por York no son bien-comportados con algunas elecciones de las funciones de norma<sup>1</sup> y por lo tanto, en esos casos, no servirán para evoluciones numéricas del espacio-tiempo estables y robustas. Sin

---

<sup>1</sup>Este último formalismo, las ecuaciones de ADM *à la* York resultan ser fuertemente hiperbólicos, y por lo tanto bien-comportados si se elige una adecuada norma, como se muestra en [26].

embargo, en este trabajo y con respecto al espacio-tiempo, no es nuestro objetivo implementar las evoluciones temporales de este, sino obtener los datos iniciales de las funciones métricas que participan en la estrella de  $\ell$ -Proca. Para esto último, podemos aprovechar el hecho que estas condiciones iniciales, correspondientes a espacio-tiempos estacionarios, solo dependen de las elecciones de las funciones de norma y las ecuaciones de constricción, las cuales son las mismas en un sistema mal-comportado, como son las ecuaciones de ADM con normas incorrectas, o bien-comportado, como las ecuaciones de BSSN que usaremos en simulaciones futuras.

### 2.3. Espacio-tiempo estático con simetría esférica

Para nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca buscamos un espacio-tiempo estático con simetría esférica. Por lo tanto, en esta sección mencionaremos las condiciones que este debe cumplir para ser clasificado de esta manera y sus consecuencias en las ecuaciones de constricción y evolución de ADM.

Primero iniciemos con la simetría esférica. Sea  $\Sigma_t$  simétricamente esférico, su métrica espacial toma la siguiente forma general [28]

$$dl^2 = \psi^4(t, r) (A(t, r)dr^2 + r^2B(t, r)d\Omega^2), \quad (2.23)$$

con  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  el elemento de ángulo sólido, y siendo  $\psi(t, r)$ ,  $A(t, r)$  y  $B(t, r)$  funciones positivas. Dicha generalidad, se reduce al imponer estaticidad sobre el espacio-tiempo esférico, pues nos permite elegir normas que fijan el valor de dos de estas tres funciones, como veremos en la siguiente sección al obtener datos iniciales simétricos en el tiempo.

Retornando al caso esféricamente simétrico sin estaticidad, la métrica del espacio-tiempo corresponde a

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r\beta^r)dt^2 + 2\beta_r dr dt + dl^2, \quad (2.24)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta^r$  solo dependen de  $(t, r)$ , el vector de corrimiento solo posee componente radial debido a la simetría esférica y  $\beta_r = \psi^4 A \beta^r$ .

Luego, si adicionalmente el espacio-tiempo en estudio es estático, cumple dos condiciones: (i) ninguna componente de la métrica 4-dimensional depende de la coordenada temporal. (ii) El espacio-tiempo tiene que ser invariante por reflexiones temporales, lo cual equivale a imponer que  $g_{t0} = 0$ . En consecuencia, para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico se cumple:



1. El vector de corrimiento es cero, esto es,  $\beta^r = 0$ . Por lo tanto, la métrica espacio-temporal toma la forma

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \psi^4(r) (A(r)dr^2 + r^2B(r)d\Omega^2), \quad (2.25)$$

2. Luego, todos los componentes de la curvatura extrínseca son cero. En efecto, gracias a (2.11)

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha(r)} \left[ \partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \right] \gamma_{ij}(r) \Rightarrow K_{ij} = 0, \quad \forall(t, r).$$

Esto implica, que la ecuación de evolución de ADM para  $\gamma_{ij}$ , (2.12), se cumple trivialmente. Además, debido a que el espacio-tiempo es estático en todo instante, se cumple  $\partial_t K_{ij} = 0$ , por lo tanto, la ecuación de evolución para  $K_{ij}$ , (2.21), se simplifica en una ecuación radial para el lapso

$$D_i D_j \alpha = \alpha^{(3)}R_{ij} + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]. \quad (2.26)$$

3. La constricción hamiltoniana (2.16) toma la sencilla forma de

$${}^{(3)}R = 16\pi\rho. \quad (2.27)$$

4. De la constricción de momentos (2.19)

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i \Rightarrow j^i = 0 \quad \forall(t, r). \quad (2.28)$$

Esto significa que ya no será necesario resolver la constricción de momentos, sino asegurar que, si el espacio-tiempo es estático, el contenido de materia conduce a  $j^i = 0$ . Además, si el espacio-tiempo se mantiene estático para todo  $t$ , entonces  $\partial_t j^i = 0$ .

De esta manera, solo queda disponible la ecuación de constricción Hamiltoniana y la ecuación radial de  $\alpha$  resultado de la ecuación de evolución de  $K_{ij}$ . Con ambas ecuaciones, obtendremos los datos iniciales de las funciones métricas que participan en nuestro sistema.

## 2.4. Ecuaciones de datos iniciales

En la sección anterior mencionamos que estamos interesados en estudiar un espacio-tiempo estático. Por lo tanto, la estaticidad asegura que los datos iniciales del espacio-tiempo nos dan las soluciones para todo instante. Sin embargo, aparece la siguiente pregunta, ¿siendo el espacio-tiempo estático, qué podemos decir de la

evolución temporal del contenido de materia?

Como veremos más adelante, la estrella de  $\ell$ -Proca se propone a estar formada por campos complejos que poseen una dependencia temporal armónica dada mediante una fase compleja,  $e^{i\omega t}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación de la estrella. Aunque esto producirá un tensor de energía-momento total independiente del tiempo, que a su vez genera un espacio-tiempo estático, cada campo de materia si evolucionará temporalmente. Así, establecidos los datos iniciales para los campos métricos y los de materia, los primeros mantendrán la misma dependencia espacial para todo instante, mientras los últimos variarán armónicamente en el tiempo.

Es importante mencionar para nuestros objetivos futuros que en un estudio sobre la estabilidad de nuestra propuesta mediante la simulación dinámica de perturbaciones, el espacio-tiempo dejará de ser estático durante la evolución temporal. En ese caso, buscaremos *datos iniciales simétricos en el tiempo*, lo que significa que nuestro sistema perturbado es momentáneamente estático en  $t = 0$ . Así, todas las simplificaciones derivadas de la estaticidad en la sección anterior se cumplen ( excepto  $\partial_t K_{ij} = 0$  y  $\partial_t j^i = 0$  ), lo cual nos facilita la obtención de datos iniciales.

Para la obtención de datos iniciales simétricos en el tiempo se hace indispensable una elección de norma mediante condiciones de foliación, las cuales consisten en elegir una manera de calcular la función de lapso  $\alpha$ . En particular, las que nos serán de utilidad son la condición de foliación polar ( $K_{\theta\theta} = \partial_t K_{\theta\theta} = 0$ ) y de foliación maximal ( $K = \partial_t K = 0$ ). Es interesante notar que estas condiciones de foliación se satisfacen automáticamente para un espacio-tiempo estático, pues como vimos en la sección anterior la estaticidad a todo tiempo implica que  $K_{ij} = \partial_t K_{ij} = 0$ . Por lo tanto, en esta sección será suficiente asumir datos iniciales simétricos en el tiempo y condiciones de foliación para deducir las ecuaciones radiales que necesitamos para calcular los datos iniciales, teniendo en cuenta que lo obtenido también será válido para un espacio-tiempo estático.

En los siguientes capítulos, presentaremos la necesidad de expresar el sistema de ecuaciones radiales de datos iniciales como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, así como de segundo orden. De primer orden porque nos facilitará obtener soluciones cercanas al origen, y de segundo orden para implementar los algoritmos de métodos espectrales. Para ello, intencionalmente elegiremos una norma espacial y una condición de foliación diferente para cada caso, que nos permita lograr el orden diferencial deseado.

Antes de proseguir, será de utilidad tener en cuenta las siguientes cantidades geométricas definidas en  $\Sigma_{t=0}$ , obtenidas de la métrica espacial momentáneamente

estática y con simetría esférica presente en (2.25) y de sus derivadas espaciales denotadas con ( )'.

1. Símbolos de Christoffel (diferentes de cero)

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{rr}^r &= \frac{A'}{2A} + \frac{2\psi'}{\psi}, \\ {}^{(3)}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r^2 B}{A} \left( \frac{1}{r} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi} \right), \quad {}^{(3)}\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r^2 B \sin^2 \theta}{A} \left( \frac{1}{r} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi} \right), \\ {}^{(3)}\Gamma_{\theta r}^\theta &= {}^{(3)}\Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi}, \quad {}^{(3)}\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad {}^{(3)}\Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta. \end{aligned}$$

2. Tensores de Ricci

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{rr} &= -\frac{4\psi''}{\psi} - \frac{B''}{B} + 4 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{A'B'}{2AB} + \frac{2A'\psi'}{A\psi} - \frac{2B'\psi'}{B\psi} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{A'}{A} - \frac{2B'}{B} - \frac{4\psi'}{\psi} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{B}{A} + \frac{rB}{A} \left( \frac{A'}{2A} - \frac{B'}{B} - \frac{6\psi'}{\psi} \right) \\ &\quad + \frac{r^2 B}{A} \left[ -\frac{2\psi''}{\psi} - \frac{B''}{2B} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{A'\psi'}{A\psi} - \frac{3B'\psi'}{B\psi} - 2 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

$${}^{(3)}R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta {}^{(3)}R_{\theta\theta}. \quad (2.31)$$

3. Escalar de Ricci

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= \frac{1}{A\psi^4} \left[ -\frac{8\psi''}{\psi} - \frac{2B''}{B} - \frac{8B'\psi'}{B\psi} + \frac{4A'\psi'}{A\psi} + \frac{1}{2} \left( \frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{A'B'}{AB} \right] \\ &\quad + \frac{1}{rA\psi^4} \left( \frac{2A'}{A} - \frac{6B'}{B} - \frac{16\psi'}{\psi} \right) + \frac{2}{r^2 A\psi^4} \left( \frac{A}{B} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.4.1. Ecuaciones radiales en 1er orden

Elegimos escribir la métrica espacial esféricamente simétrica en la norma radial de área, donde la coordenada radial  $r$  se elige de tal manera que el área propia de las esferas de  $r$  constante es siempre  $4\pi r^2$ , por lo tanto, se debe exigir que  $\psi^4 B = 1$  en la métrica (2.25). Luego el factor conforme puede ser absorbido por la componente

radial de la métrica, por lo que en resumen, elegir una norma radial de área equivale a imponer  $\psi = B = 1$ . En esta norma, la métrica del espacio-tiempo estática en  $t = 0$  y con simetría esférica es

$$ds^2 = \alpha^2(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 . \quad (2.33)$$

Por lo tanto, necesitamos dos ecuaciones radiales para obtener los datos iniciales de  $\{A(r), \alpha(r)\}$ . La primera ecuación proviene de la constricción hamiltoniana (2.27). Gracias a que la expresión anterior para el escalar de Ricci en esta norma es

$${}^{(3)}R = \frac{2}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{(A-1)}{r} \right) , \quad (2.34)$$

la constricción hamiltoniana toma la siguiente forma

$$A' = A \left( \frac{(1-A)}{r} + 8\pi r A \rho \right) . \quad (2.35)$$

La segunda ecuación de datos iniciales proviene de la condición de foliación polar  $K_{\theta\theta} = \partial_t K_{\theta\theta} = 0$ . Esta equivale a pedir que la norma de radio de área se mantenga en la evolución. Esta condición impuesta en la ecuación de evolución para  $K_{ij}$ , (2.21), nos permite tener una ecuación para  $\alpha$ , la cual es

$$D_\theta D_\theta \alpha = \alpha^{(3)}R_{\theta\theta} + 4\pi\alpha[r^2(S - \rho) - 2S_{\theta\theta}] . \quad (2.36)$$

Esta se reexpresa como una ecuación radial en  $\alpha$ . En efecto, ya que la componente  $\theta\theta$  del tensor de Ricci, (2.30) en esta norma es

$${}^{(3)}R_{\theta\theta} = \frac{r}{A} \left( \frac{(A-1)}{r} + \frac{A'}{2A} \right) , \quad (2.37)$$

y además, como el término  $D_\theta D_\theta \alpha(r)$  se puede expresar abriendo las derivadas covariantes, usando el símbolo de Christoffel  ${}^{(3)}\Gamma_{\theta\theta}^r$  en esta norma y teniendo en cuenta que  $D_\theta \alpha = \partial_\theta \alpha = 0$ , como

$$D_\theta D_\theta \alpha(r) = \partial_\theta(D_\theta \alpha) - {}^{(3)}\Gamma_{\theta\theta}^k D_k \alpha = -{}^{(3)}\Gamma_{\theta\theta}^r \alpha' = \frac{r}{A} \alpha' , \quad (2.38)$$

se tiene que la ecuación anterior para  $\alpha$  es

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{(A-1)}{r} + \frac{A'}{2A} + 4\pi A \left[ r(S - \rho) - \frac{2S_{\theta\theta}}{r} \right] \right) . \quad (2.39)$$

Finalmente, en simetría esférica se cumple que  $S_\theta^\theta = S_\varphi^\varphi$ , por lo tanto la traza del tensor espacial de esfuerzos es  $S = S_r^r + 2S_\theta^\theta$ . Luego, como  $S_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} S_\theta^\theta = r^2 S_\theta^\theta$ , la anterior ecuación se simplifica en

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{(A-1)}{r} + \frac{A'}{2A} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) . \quad (2.40)$$

Esta ecuación se puede simplificar aún más si reemplazamos  $A'$  por el resultado de la constricción hamiltoniana. Al realizar este reemplazo y conociendo el contenido de materia dado por  $\rho$  y  $S_r^r$ , concluimos que tenemos que resolver las siguientes ecuaciones radiales de primer orden para obtener las condiciones iniciales de las funciones métricas  $\{A(r), \alpha(r)\}$  en la norma de radial de área

$$A' = A \left( \frac{(1-A)}{r} + 8\pi r A \rho \right), \quad (2.41)$$

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{(A-1)}{2r} + 4\pi r A S_r^r \right). \quad (2.42)$$

### 2.4.2. Ecuaciones radiales en 2do orden

Elegimos escribir la métrica espacial en la norma conformalmente plana, esto es  $A = B = 1$ . Así, la métrica del espacio-tiempo estática en  $t = 0$  y con simetría esférica es

$$ds^2 = \alpha^2(r) dt^2 + \psi^4(r) (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (2.43)$$

Nuevamente, necesitaremos dos ecuaciones de datos iniciales para  $\{\psi(r), \alpha(r)\}$ . La primera ecuación se obtiene de la constricción hamiltoniana (2.27). Como el escalar de Ricci en esta norma es

$${}^{(3)}R = -\frac{8}{\psi^5} \left( \psi'' + \frac{2\psi'}{r} \right), \quad (2.44)$$

la constricción hamiltoniana en la norma conformalmente plana resulta en una ecuación radial de segundo orden en  $\psi$

$$\psi'' + \frac{2\psi'}{r} + 2\pi\psi^5\rho = 0. \quad (2.45)$$

Por otro lado, la ecuación radial de segundo orden para  $\alpha$  se obtiene de la condición de foliación maximal, donde se demanda que el elemento de volumen asociado al observador euleriano permanezca constante. Esto equivale a imponer que  $K = \partial_t K = 0$ , donde  $K = \gamma^{ij} K_{ij}$ ; demostrándose que bajo este requerimiento el volumen de  $\Sigma_t$  es máximo con respecto a pequeñas variaciones en la misma hipersuperficie, lo cual da el nombre a la condición.

Entonces, partimos de la ecuación de evolución de  $K$  (sin asumir aún simetría esférica), que se obtiene a partir de las ecuaciones de evolución para  $K_{ij}$  y  $\gamma^{ij}$

$$\partial_t K = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K - D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + \rho)], \quad (2.46)$$

donde  $D^2\alpha := D_i D^i \alpha$ . Luego, al imponer la condición de foliación maximal, la ecuación anterior toma la forma como

$$D^2\alpha = \alpha[K_{ij}K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] . \quad (2.47)$$

Lo cual se reduce aún más si el espacio-tiempo es momentáneamente estático, pues  $K_{ij} = 0$  con  $i, j = r, \theta, \varphi$ .

$$D^2\alpha = 4\pi\alpha(S + \rho) . \quad (2.48)$$

Aún sin considerar la norma conformalmente plana, pero sí la simetría esférica general, expresamos el laplaciano del lapso mediante

$$\begin{aligned} D_i D^i \alpha &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \partial_r (\gamma^{1/2} \gamma^{rr} \partial_r \alpha) \\ &= \frac{1}{A\psi^4} \left[ \alpha'' + \alpha' \left( \frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi} \right) \right], \end{aligned}$$

donde hemos usamos el elemento de volumen espacial  $\gamma^{1/2} = \psi^6 A^{1/2} B r^2 \sin \theta$  . Así, la ecuación radial para  $\alpha$  resulta en

$$\alpha'' + \alpha' \left( \frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi} \right) - 4\pi\alpha A\psi^4(S + \rho) = 0 . \quad (2.49)$$

Finalmente, usando la norma conformalmente plana se tiene

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\alpha'\psi'}{\psi} - 4\pi\alpha\psi^4(S + \rho) = 0 . \quad (2.50)$$

En conclusión, las ecuaciones radiales que tenemos que resolver para obtener los datos iniciales para  $\{\psi(r), \alpha(r)\}$  son

$$\psi'' + \frac{2\psi'}{r} + 2\pi\psi^5\rho = 0 , \quad (2.51)$$

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\alpha'\psi'}{\psi} - 4\pi\alpha\psi^4(S + \rho) = 0 . \quad (2.52)$$



# Capítulo 3

## Sistema de Einstein-(multi)Proca

---

Continuando con nuestro objetivo de establecer las ecuaciones de evolución, así como de obtener los datos iniciales de nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca, en este capítulo estudiaremos el sistema de *Einstein-(multi)Proca*, esto es, un conjunto de campos de Proca complejos acoplados mínimamente a la gravedad.

Este capítulo se resume en presentar todos los ingredientes relacionados a los campos de materia de Proca necesarios para postular la configuración de la estrella de  $\ell$ -Proca. Por lo cual, iniciaremos obteniendo el tensor de energía-momento y las ecuaciones de campo de Proca mediante la formulación lagrangiana del sistema de Einstein-(multi)Proca. Luego, estas ecuaciones covariantes serán formuladas como un Problema de Cauchy usando el formalismo 3+1. Finalmente, con las herramientas obtenidas, nos enfocaremos en el caso con simetría esférica y revisaremos una solución particular de este sistema, la estrella de Proca, la cual servirá de base para proponer su generalización multi-campo.

### 3.1. Formulación lagrangiana

Nos interesa estudiar  $N$  campos de Proca complejos, los cuales, son campos vectoriales complejos con masa definidos mediante 1-formas de potencial complejas  $(X_m)_\mu$ , con  $m = 1, \dots, N$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Análogamente al formalismo lagrangiano del electromagnetismo de Maxwell, el cual se basa en un campo vectorial real sin masa, se puede definir un *tensor de campo* para cada campo de Proca mediante 2-formas dadas por

$$(W_m)_{\mu\nu} = \nabla_\mu(X_m)_\nu - \nabla_\nu(X_m)_\mu . \quad (3.1)$$

De esta manera, manteniendo la analogía con el electromagnetismo de Maxwell, la acción del sistema Einstein-(multi)Proca, cuyos campos de Proca tienen la misma masa  $\mu$ , es

$$S = S_{E-H} + S_{Proca} , \quad (3.2)$$



donde la contribución de la gravedad al sistema está dada por la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{E-H} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi}, \quad (3.3)$$

y la contribución de los campos de Proca es

$$S_{Proca} = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} \sum_{m=1}^N [ (W_m)_{\mu\nu} (\bar{W}_m)^{\mu\nu} + 2\mu^2 (X_m)_\mu (\bar{X}_m)^\mu ], \quad (3.4)$$

donde a su vez, hemos denotado con una barra arriba a las conjugadas complejas de las cantidades presentes en la acción. Dado que esta acción de materia cuenta con la misma masa para los  $N$  campos complejos de Proca, es invariante bajo transformaciones del grupo de simetría global  $U(N)$ . Lo cual implica, mediante el teorema de Noether, que poseerá un conjunto de 4-corrientes conservadas dando resultado a una 4-corriente conservada total. El cálculo de estas cantidades se postergará para un estudio posterior cuando abordemos el análisis de estabilidad dinámica de la estrella de  $\ell$ -Proca, donde es necesaria la carga conservada total de Noether para caracterizar el resultado de perturbar el sistema.

Una vez identificada la acción del sistema, sus ecuaciones de movimiento se obtienen mediante el principio de acción estacionaria al tomar igual a cero la derivada funcional de la acción del sistema respecto a cada campo. En primer lugar, con respecto a la métrica  $g^{\mu\nu}$ , la ecuación

$$0 = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_{E-H}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{Proca}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.5)$$

nos brinda las ecuaciones de campo de Einstein. En efecto, al considerar el cálculo

$$\frac{\delta S_{E-H}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right), \quad (3.6)$$

y la siguiente definición del tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{Proca}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.7)$$

se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Cabe resaltar que la definición del tensor  $T_{\mu\nu}$ , es una definición general que se aplica a todo campo de materia interactuando mínimamente con la gravedad. En particular, en el capítulo anterior obtuvimos que las ecuaciones de evolución como

de datos iniciales tienen presente las cantidades 3+1 del tensor  $T_{\mu\nu}$ , por lo tanto, para resolverlas será indispensable conocer el tensor de energía-momento total de los campos de Proca. Así, con el fin de usar la definición (3.7), tomamos la variación de la acción de Proca, (3.4), respecto a la métrica  $g^{\mu\nu}$

$$\delta S_{Proca} = - \int dx^4 \frac{1}{16\pi} \sum_{m=1}^N \left\{ \delta(\sqrt{-g}) [ (W_m)_{\mu\nu} (\bar{W}_m)^{\mu\nu} + 2\mu^2 (X_m)_\mu (\bar{X}_m)^\mu ] \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \delta [ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (W_m)_{\mu\nu} (\bar{W}_m)_{\alpha\beta} + 2\mu^2 g^{\alpha\mu} (X_m)_\mu (\bar{X}_m)_\alpha ] \right\} .$$

Despejando término por término en esta expresión, en el primer sumando de la derecha consideramos la identidad  $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ . Mientras que en el segundo sumando tenemos las siguientes variaciones: La primera corresponde a

$$\delta [ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (W_m)_{\mu\nu} (\bar{W}_m)_{\alpha\beta} ] = \delta g^{\mu\alpha} (W_m)_{\mu\lambda} (\bar{W}_m)_\alpha^\lambda + \delta g^{\nu\beta} (W_m)_{\lambda\nu} (\bar{W}_m)^\lambda_\beta \\ = -2 \delta g^{\mu\alpha} (W_m)_{\lambda(\mu} (\bar{W}_m)_{\alpha)}^\lambda ,$$

donde, al pasar de la primera a la segunda línea hemos utilizado la antisimetría del tensor  $(W_m)_{\mu\nu}$  para invertir índices, el hecho que los índices contraídos son mudos para escribir una expresión más compacta y la notación de índices simétricos  $A_{(\mu\alpha)}$  gracias a que  $\delta g^{\mu\alpha}$  asegura dicha simetría en la expresión. La variación restante en el segundo sumando es

$$\delta [ 2\mu^2 g^{\alpha\mu} (X_m)_\mu (\bar{X}_m)_\alpha ] = 2 \mu^2 \delta g^{\alpha\mu} (X_m)_{(\mu} (\bar{X}_m)_{\alpha)} .$$

Así reuniendo todos los términos anteriores en  $\delta S_{Proca}$  y usando la definición (3.7), el tensor de energía-momento del sistema Einstein-(multi)Proca es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \left\{ - (W_m)_{\lambda(\mu} (\bar{W}_m)_{\nu)}^\lambda - \frac{g_{\mu\nu}}{4} (W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta} \right. \\ \left. + \mu^2 \left[ (X_m)_{(\mu} (\bar{X}_m)_{\nu)} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (X_m)_\lambda (\bar{X}_m)^\lambda \right] \right\} . \quad (3.9)$$

Este tensor está formado por la suma de los tensores de energía-momento de cada campo de Proca complejo que forma el sistema. A su vez, cada uno de estos posee dos tipos de contribuciones. La primera, expresada mediante sus dos primeros términos, corresponde al tensor de energía-momento de un campo de Maxwell complejo. Mientras que los 2 últimos términos multiplicados por el factor  $\mu^2$  aparecen debido a la presencia de la masa de Proca al campo electromagnético complejo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Resulta interesante reconocer que el tensor formado por estos dos últimos términos tiene la misma forma que el tensor de energía-momento de un campo de Maxwell complejo en un espacio-tiempo 2-dimensional [29].

Por otro lado, para formular el problema de Cauchy del sistema necesitamos las ecuaciones de campo para cada campo de Proca complejo. Por lo tanto, tomamos la derivada funcional igual a cero de la acción del sistema respecto a los campos potenciales conjugados  $(\bar{X}_m)^\mu$ ,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta(\bar{X}_m)_\nu} = \frac{\delta S_{Proca}}{\delta(\bar{X}_m)_\nu}, \quad (3.10)$$

lo cual, resulta en la siguiente ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{Proca}}{\partial(\bar{X}_m)_\nu} - \nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{Proca}}{\partial(\nabla_\mu(\bar{X}_m)_\nu)} \right), \quad (3.11)$$

donde la densidad lagrangiana de los campos de Proca proviene de la acción (3.4), y es

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \sum_{m'=1}^N [ (W_{m'})^{\alpha\beta} (\bar{W}_{m'})_{\alpha\beta} + 2\mu^2 (X_{m'})^\alpha (\bar{X}_{m'})_\alpha ], \quad (3.12)$$

Luego, las expresiones para los sumandos de la ecuación anterior de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Proca}}{\partial(\bar{X}_m)_\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \sum_{m'=1}^N [ 2\mu^2 (X_{m'})^\alpha \delta_\alpha^\nu \delta_{mm'} ] = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi} \mu^2 (X_m)^\nu, \quad (3.13)$$

y

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{Proca}}{\partial(\nabla_\mu(\bar{X}_m)_\nu)} \right) &= -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \sum_{m'=1}^N \nabla_\mu \left[ (W_{m'})^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\nabla_\mu(\bar{X}_m)_\nu)} (\nabla_\alpha(\bar{X}_{m'})_\beta - \nabla_\beta(\bar{X}_{m'})_\alpha) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \sum_{m'=1}^N \nabla_\mu [ (W_{m'})^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) ] \delta_{mm'} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi} \nabla_\mu (W_m)^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego, juntando ambos términos, se obtienen las ecuaciones conocidas como ecuaciones de campo de Proca, en este caso, para cada campo de Proca constituyente con  $m = 1, \dots, N$

$$\nabla_\mu (W_m)^{\mu\nu} - \mu^2 (X_m)^\nu = 0, \quad (3.15)$$

De manera análoga al electromagnetismo de Maxwell, esta ecuación covariante nos otorga solos 2 de las 4 leyes del electromagnetismo de Proca. En consecuencia, para obtener una ecuación covariante que nos conduzca a las 2 ecuaciones de Proca

restantes se considera la estructura matemática de la 1-forma  $(X_m)_\mu$ . Para ello, definimos a  $(W_m^*)_{\mu\nu}$  como el dual del tensor de campo

$$(W_m^*)_{\alpha\beta} := -\frac{1}{2}E_{\alpha\beta\mu\nu}(W_m)^{\mu\nu} , \quad (3.16)$$

donde  $E_{\alpha\beta\mu\nu}$  es el tensor de Levi-Civita, definido en términos del símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita como

$$E_{\alpha\beta\mu\nu} := \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (3.17)$$

donde

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares de } 0,1,2,3. \\ -1 & \text{permutaciones impares de } 0,1,2,3. \\ 0 & \text{dos o más índices repetidos.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Al subir todos los índices de este tensor, tenemos

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} / \sqrt{-g} , \quad (3.19)$$

con  $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$ . Además, gracias a la definición de derivada covariante de densidades tensoriales se puede mostrar que  $\nabla_\rho |g|^{1/2} = 0$  y por lo tanto,  $\nabla_\rho E_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ . Por otro lado, será muy útil para los cálculos siguientes recordar que la contracción de este tensor completamente antisimétrico con cualquier tensor simétrico se anula.

La ecuación covariante que nos permite extraer las 2 ecuaciones del electromagnetismo de Proca en 3+1 faltantes es la siguiente identidad del tensor de campo dual

$$\nabla_\mu (W_m^*)^{\mu\nu} = 0. \quad (3.20)$$

Esta resulta de tomar la derivada covariante de  $(W_m^*)^{\mu\nu}$  y operar como sigue

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (W_m^*)^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}E^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu (W_m)_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}E^{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu (W_m)_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda (W_m)_{\lambda\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda (W_m)_{\alpha\lambda}] \\ &= -\frac{1}{2}E^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu (W_m)_{\alpha\beta} , \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de anular las contracciones del tensor de Levi-Civita con los símbolos de Christoffel. Luego, ya que el tensor de campo debido a su antisimetría toma la forma

$$W_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}X_{\nu]} = 2\partial_{[\mu}X_{\nu]} - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda X_\lambda = 2\partial_{[\mu}X_{\nu]} .$$

Al reemplazar esto en la expresión anterior de  $\nabla_\mu(W_m^*)^{\mu\nu}$  y considerar que las derivadas parciales intercambiables representan índices simétricos, obtenemos la identidad buscada

$$\nabla_\mu(W_m^*)^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}E^{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu\partial_\alpha(X_m)_\beta - \partial_\mu\partial_\beta(X_m)_\alpha] = 0.$$

Finalmente, enfatizamos que la densidad lagrangiana de Proca, (3.12), no será invariante por transformaciones de norma del tipo

$$(X_m)_\mu \rightarrow (X'_m)_\mu = (X_m)_\mu + \nabla_\mu\chi_m ,$$

donde  $\chi_m$  es una función escalar arbitraria del espacio-tiempo. Dicha invariancia se incumple por la presencia del término de masa en la densidad lagrangiana, a diferencia del electromagnetismo de Maxwell, que no lo presenta y por lo tanto, es invariante bajo transformaciones de norma. Sin embargo, este hecho no nos impide obtener una expresión análoga a la condición de norma de Lorenz. Para ello, aplicamos la derivada covariante  $\nabla_\nu$  a la ecuación de campo de Proca (3.15) y consideramos que el término  $\nabla_\nu\nabla_\mu(W_m)^{\mu\nu}$  resulta ser cero. En efecto, debido a la siguiente propiedad

$$[\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu](W_m)^{\alpha\beta} = R_{\lambda\mu\nu}^\alpha(W_m)^{\lambda\beta} + R_{\lambda\mu\nu}^\beta(W_m)^{\alpha\lambda},$$

a partir de la cual, contraemos  $\alpha$  con  $\mu$  y  $\beta$  con  $\nu$ , e identificamos la presencia de tensores de Ricci, obteniendo

$$[\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu](W_m)^{\mu\nu} = R_{\lambda\nu}(W_m)^{\lambda\nu} - R_{\lambda\mu}(W_m)^{\mu\lambda},$$

en esta expresión, los términos del lado derecho se anulan entre sí debido a la simetría de  $R_{\mu\nu}$ , y por lo tanto  $\nabla_\mu\nabla_\nu(W_m)^{\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu(W_m)^{\mu\nu}$ . Luego, usamos la antisimetría de  $(W_m)^{\mu\nu}$  en el término del lado derecho de esta igualdad e invertimos las etiquetas de sus índices  $\mu \leftrightarrow \nu$  observando que la igualdad implica que ambos términos deben ser cero.

Por lo tanto, retornando a la derivada covariante de la ecuación de campo de Proca (3.15), se cumple para cada  $m$

$$\nabla_\nu(X_m)^\nu = 0. \tag{3.21}$$

Ecuación que llamaremos ecuación de Lorenz para campos de Proca. Cabe destacar que a diferencia de su versión análoga en el electromagnetismo de Maxwell, en este caso no es una elección de norma sino una ecuación que se debe satisfacer siempre. Además, esta ecuación nos permite reescribir la ecuación de campo de Proca como una ecuación de onda no homogénea. En efecto, pues expresando el tensor de campo en función de los campos potenciales en (3.15), se tiene

$$\nabla_\mu\nabla^\mu(X_m)^\nu - \nabla_\mu\nabla^\nu(X_m)^\mu - \mu^2(X_m)^\nu = 0 , \tag{3.22}$$

luego, podemos reexpresar el segundo término de la izquierda usando la propiedad  $\nabla_\mu \nabla_\nu (X_m)^\mu - \nabla_\nu \nabla_\mu (X_m)^\mu = R_{\sigma\nu} (X_m)^\sigma$  e identificar la ecuación de Lorenz para campos de Proca, obteniendo

$$\nabla_\mu \nabla^\mu (X_m)_\nu - R_{\mu\nu} (X_m)^\mu - \mu^2 (X_m)_\nu = 0 . \quad (3.23)$$

Esta ecuación en particular nos servirá para obtener ecuaciones de segundo orden que usaremos en nuestra implementación numérica.

## 3.2. Formalismo 3+1

En el capítulo anterior ya establecimos el formalismo 3+1 para las variables del espacio-tiempo. En consecuencia, para un sistema de Einstein-(multi)Proca nos queda formular las ecuaciones de campo de Proca que obtuvimos en la sección anterior como un problema de Cauchy. Estas son

$$\nabla_\mu (W_m)^{\mu\nu} - \mu^2 (X_m)^\nu = 0 , \quad \nabla_\mu (W_m^*)^{\mu\nu} = 0 , \quad \nabla_\nu (X_m)^\nu = 0 .$$

Para ello, utilizaremos el formalismo 3+1 sobre los campos que participan en estas ecuaciones, los cuales son, los campo potenciales, los tensores de campo y sus tensores duales. En otras palabras, descompondremos dichas cantidades en proyecciones a lo largo de la dirección normal y paralela a  $\Sigma_t$ . Luego, resultará sencillo reexpresar las ecuaciones de campo de Proca como ecuaciones de evolución y constricción al reemplazar las cantidades descompuestas.

### 3.2.1. Potenciales y campos en 3+1

Sabemos que cualquier tensor puede ser descompuesto ortogonalmente usando el vector unitario  $n^\mu$  normal a  $\Sigma_t$  (2.7), y la métrica espacial  $\gamma_{\mu\nu}$  inducida sobre  $\Sigma_t$  (2.8). Así, en esta subsección conseguiremos la descomposición en 3+1 de los campos potenciales  $(X_m)_\mu$ , los tensores de campo  $(W_m)_{\mu\nu}$  y sus tensores duales  $(W_m^*)_{\mu\nu}$ . Sin embargo, con el fin de evitar expresiones con notaciones recargadas, omitiremos la etiqueta  $m = 1, \dots, N$ , dejando implícito que todas las cantidades que definamos y las expresiones que deduzcamos serán válidas para cada campo de Proca etiquetado con  $m$ .

Iniciamos con el campo potencial  $X_\mu$ , el cual posee la siguiente descomposición ortogonal

$$X_\mu = \delta_\mu^\alpha X_\alpha = (\gamma_\mu^\alpha - n^\alpha n_\mu) X_\alpha = \gamma_\mu^\alpha X_\alpha + n_\mu (-n^\alpha X_\alpha),$$

esto es, usamos la descomposición en 3+1 de la métrica 4-dimensional  $g_{\alpha\mu} = \gamma_{\alpha\mu} - n_\alpha n_\mu$ , e identificamos que podemos definir las siguientes cantidades basadas en proyecciones

$$\Phi := -n^\alpha X_\alpha, \quad a_\mu := \gamma^\alpha_\mu X_\alpha, \quad (3.24)$$

donde,  $\Phi$  recibe el nombre de *potencial escalar*, mientras que  $a_\mu$ , el nombre de *potencial vectorial 3-dimensional*. Sobre este último, el adjetivo 3-dimensional está justificado, pues es ortogonal a  $n^\mu$ . En efecto

$$n^\mu a_\mu = n^\mu \gamma^\alpha_\mu X_\alpha = n^\mu (\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu) X_\alpha = n^\mu X_\mu - n^\alpha X_\alpha = 0.$$

Además, al considerar que  $n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$  y  $n_\mu = (-\alpha, 0)$ , se tiene

$$a^\mu n_\mu = 0 \Leftrightarrow a^0 = 0, \quad (3.25)$$

$$a_\mu n^\mu = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_i \beta^i, \quad (3.26)$$

y como  $a^i = \gamma^{ij} a_j$ , bastará con conocer las componentes espaciales  $a_j$  para estudiar a esta cantidad. Por lo tanto, con las definiciones anteriores podemos expresar  $X_\mu$  como

$$X_\mu = a_\mu + n_\mu \Phi. \quad (3.27)$$

donde sus componentes covariantes son

$$X_0 = a_i \beta^i - \alpha \Phi, \quad (3.28)$$

$$X_i = a_i. \quad (3.29)$$

Mientras que sus componentes contravariantes son

$$X^0 = \Phi/\alpha, \quad (3.30)$$

$$X^i = a^i - \beta^i \Phi/\alpha. \quad (3.31)$$

El siguiente paso es descomponer ortogonalmente al tensor de campo  $W_{\mu\nu}$  y su dual  $W_{\mu\nu}^*$ . Para el primero tenemos

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta W_{\alpha\beta} \\ &= (\gamma^\alpha_\mu - n^\alpha n_\mu)(\gamma^\beta_\nu - n^\beta n_\nu) W_{\alpha\beta} \\ &= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta} + n_\mu (-n^\alpha \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta}) + (-n^\beta \gamma^\alpha_\mu W_{\alpha\beta}) n_\nu + n_\mu n_\nu (n^\alpha n^\beta W_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

donde, el último término se anula debido a que el tensor antisimétrico  $W_{\alpha\beta}$  se contrae con un tensor simétrico  $n^\alpha n^\beta$ . Por lo tanto, repitiendo este mismo procedimiento para  $W_{\mu\nu}^*$ , las descomposiciones que buscamos son

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta} + n_\mu (-n^\alpha \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta}) + (-n^\beta \gamma^\alpha_\mu W_{\alpha\beta}) n_\nu, \\ W_{\mu\nu}^* &= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta}^* + n_\mu (-n^\alpha \gamma^\beta_\nu W_{\alpha\beta}^*) + (-n^\beta \gamma^\alpha_\mu W_{\alpha\beta}^*) n_\nu. \end{aligned}$$

Las cuales se pueden reexpresar de una manera más sencilla al definir un *campo eléctrico*  $\mathcal{E}_\mu$  y un *campo magnético*  $\mathcal{B}_\mu$  de la forma

$$\mathcal{E}_\mu := -n^\alpha \gamma^\beta{}_\mu W_{\alpha\beta} = -n^\alpha W_{\alpha\mu} , \quad (3.32)$$

$$\mathcal{B}_\mu := -n^\alpha \gamma^\beta{}_\mu W_{\alpha\beta}^* = -n^\alpha W_{\alpha\mu}^* , \quad (3.33)$$

donde, las últimas igualdades son posibles gracias a que hemos reexpresado  $\gamma^\beta{}_\mu = \delta_\mu^\beta - n^\beta n_\mu$  y anulado los términos que son contracciones totales entre los tensores antisimétricos de la teoría y el tensor simétrico  $n^\alpha n^\beta$ . Usando esta misma propiedad, de las expresiones anteriores deducimos que los campos eléctrico y magnético son puramente espaciales, pues son ortogonales a  $n^\mu$ , esto es,  $n_\mu \mathcal{E}^\mu = n_\mu \mathcal{B}^\mu = 0$  y por lo tanto,  $\mathcal{E}^0 = \mathcal{B}^0 = 0$ ,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^i \beta_i$  y  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}^i \beta_i$ . Debido a esto, solo es necesario conocer sus componentes espaciales  $\mathcal{E}^i$  y  $\mathcal{B}^i$  para estudiar estas cantidades.

Así, usando estas definiciones, la descomposición ortogonal de  $W_{\mu\nu}$  y  $W_{\mu\nu}^*$  toma la forma de

$$W_{\mu\nu} = {}^{(3)}W_{\mu\nu} + n_\mu \mathcal{E}_\nu - n_\nu \mathcal{E}_\mu , \quad (3.34)$$

$$W_{\mu\nu}^* = {}^{(3)}W_{\mu\nu}^* + n_\mu \mathcal{B}_\nu - n_\nu \mathcal{B}_\mu , \quad (3.35)$$

donde hemos denotado como  ${}^{(3)}W_{\mu\nu} := \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu W_{\alpha\beta}$  y  ${}^{(3)}W_{\mu\nu}^* := \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu W_{\alpha\beta}^*$  a los tensores de campo y su dual puramente espaciales resultado de las proyecciones sobre la hipersuperficie espacial. Sin embargo, estas notaciones no serán necesarias pues estas últimas cantidades se expresan en función de  $\mathcal{E}_\mu$  y  $\mathcal{B}_\mu$ , y por lo tanto, las descomposiciones ortogonales anteriores se pueden expresar únicamente en función de tales campos. En efecto, para confirmar esta conclusión para  ${}^{(3)}W_{\mu\nu}$  usamos la definición del campo magnético (3.33) y la definición del tensor de campo dual (3.16) como sigue

$$\mathcal{B}^\beta = -n_\alpha W^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} n_\alpha E^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n_\alpha E^{\alpha\beta\mu\nu} {}^{(3)}W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} E^{\beta\mu\nu} {}^{(3)}W_{\mu\nu} .$$

Nótese que en la penúltima igualdad resulta de reemplazar la descomposición ortogonal de  $W_{\mu\nu}$  que tenemos hasta el momento (3.34) y anular las contracciones entre el tensor 4-dimensional de Levi-Civita con los tensores simétricos  $n_\alpha n_\mu$  y  $n_\alpha n_\nu$ . Mientras que la última igualdad resulta del uso del tensor 3-dimensional de Levi-Civita definido como<sup>1</sup>  $E^{\mu\nu\lambda} := n_\alpha E^{\alpha\mu\nu\lambda}$ . Luego, contraemos la expresión resultante con  $E_{\rho\alpha\beta}$  obteniendo

$$E_{\rho\alpha\beta} \mathcal{B}^\beta = \frac{1}{2} E_{\rho\alpha\beta} E^{\beta\mu\nu} {}^{(3)}W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_\rho^\mu \delta_\alpha^\nu - \delta_\alpha^\mu \delta_\rho^\nu) {}^{(3)}W_{\mu\nu} = {}^{(3)}W_{\rho\alpha} ,$$

<sup>1</sup>Esta definición es consistente con la forma de definir los tensores de Levi-Civita, como por ejemplo el caso 4-dimensional en (3.17). Así, para el caso 3-dimensional se tiene que  $E^{123} = -\alpha E^{0123} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , con  $\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = 1$ . Además, notamos que  $n_\mu E^{\mu\nu\lambda} = 0$  por lo que  $E^{0\nu\lambda} = 0$  para cualquier  $\nu, \lambda = 1, 2, 3$ .



donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de los símbolos 3-dimensionales de Levi-Civita  $E_{\rho\alpha\beta}E^{\beta\mu\nu} = \epsilon_{\rho\alpha\beta}\epsilon^{\beta\mu\nu} = \delta_\rho^\mu\delta_\alpha^\nu - \delta_\alpha^\mu\delta_\rho^\nu$ . Así, la descomposición de  $W_{\mu\nu}$  se expresa únicamente en función del campo eléctrico y magnético como

$$W_{\mu\nu} = n_\mu\mathcal{E}_\nu - n_\nu\mathcal{E}_\mu + E_{\mu\nu\lambda}\mathcal{B}^\lambda, \quad (3.36)$$

Por otro lado, con respecto a la descomposición ortogonal de  $W_{\mu\nu}^*$ , podemos partir de la definición del campo eléctrico (3.32) y de la expresión del dual del dual del tensor de campo, lo cual resulta<sup>1</sup> en

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\mu\nu\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^*. \quad (3.37)$$

Nótese que esta expresión difiere por un signo menos al compararla con la expresión del tensor de campo dual (3.16). Luego, siguiendo el mismo procedimiento realizado líneas arriba para  ${}^{(3)}W_{\mu\nu}$ , pero ahora para  ${}^{(3)}W_{\mu\nu}^*$ , al tomar en cuenta el cambio de signo de la expresión anterior se obtiene que

$$E_{\mu\nu\lambda}\mathcal{E}^\lambda = -{}^{(3)}W_{\mu\nu}^*.$$

Así, tenemos que la descomposición en 3+1 de  $W_{\mu\nu}^*$  es

$$W_{\mu\nu}^* = n_\mu\mathcal{B}_\nu - n_\nu\mathcal{B}_\mu - E_{\mu\nu\lambda}\mathcal{E}^\lambda. \quad (3.38)$$

En síntesis, tenemos las siguientes descomposiciones para el tensor de campo y su dual

$$W_{\mu\nu} = n_\mu\mathcal{E}_\nu - n_\nu\mathcal{E}_\mu + E_{\mu\nu\lambda}\mathcal{B}^\lambda, \quad (3.39)$$

$$W_{\mu\nu}^* = n_\mu\mathcal{B}_\nu - n_\nu\mathcal{B}_\mu - E_{\mu\nu\lambda}\mathcal{E}^\lambda. \quad (3.40)$$

### 3.2.2. Ecuaciones de campo de Proca en 3+1

Habiendo obtenido la descomposición en 3+1 de las cantidades presentes en las ecuaciones de Proca, específicamente, la ecuación de movimiento de campo de Proca (3.15), la identidad del tensor de campo dual (3.20) y la ecuación de Lorenz (3.21), procedemos a reemplazarlas y obtener dichas ecuaciones en el lenguaje 3+1. Para ello, será útil recordar que la divergencia de un 4-tensor arbitrario  $Y^\mu$  definido en

<sup>1</sup>Esta expresión resulta al contraer el tensor dual  $W_{\alpha\beta}^*$  con  $E^{\sigma\rho\alpha\beta}$ , y usar la identidad  $E^{\sigma\rho\alpha\beta}E_{\alpha\beta\mu\nu} = -2(\delta_\mu^\sigma\delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma\delta_\mu^\rho)$  de la siguiente manera

$$E^{\sigma\rho\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{2}(E^{\sigma\rho\alpha\beta}E_{\alpha\beta\mu\nu})W^{\mu\nu} = 2W^{\sigma\rho}.$$

el espacio-tiempo y la divergencia de un 3-tensor arbitrario  $Y^i$  definido en  $\Sigma_t$  son respectivamente

$$\nabla_\mu Y^\mu = \frac{1}{|g|^{1/2}} \partial_\mu (|g|^{1/2} Y^\mu) , \quad (3.41)$$

$$D_i Y^i = \frac{1}{\gamma^{1/2}} \partial_i (\gamma^{1/2} Y^i) , \quad (3.42)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y  $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ . Además, para mantener la claridad de las expresiones, dejamos implícito que todas las cantidades y ecuaciones se cumplen para cada campo de Proca etiquetado con  $m = 1, \dots, N$ .

### 1. Ecuación de evolución para $\Phi$ :

Esta ecuación se obtiene de la ecuación de Lorenz para campos de Proca (3.21), al abrir la suma de la expresión de la divergencia covariante (3.41) aplicada a  $X^\mu$

$$\nabla_\mu X^\mu = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{\gamma^{1/2}} \partial_t (\alpha \gamma^{1/2} X^0) = -\frac{1}{\gamma^{1/2}} \partial_i (\alpha \gamma^{1/2} X^i) , \quad (3.43)$$

donde, hemos considerado que  $|g| = \alpha^2 \gamma$  y convenientemente hemos simplificado el factor  $-1/\alpha$ . Luego, si reemplazamos las componentes covariantes del potencial  $X^\mu$ ,  $X^0 = \Phi/\alpha$  (3.30) y  $X^i = a^i - \beta^i \Phi/\alpha$  (3.31) en la expresión anterior, identificamos las 3-divergencias usando (3.42) y despejamos la derivada temporal de  $\Phi$ , obtenemos

$$\partial_t \Phi = -\Phi \frac{\partial_t \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}} - D_i (\alpha a^i) + \Phi D_i \beta^i + \beta^i \partial_i \Phi . \quad (3.44)$$

Finalmente, el primer término al lado derecho de la igualdad puede reexpresarse usando la propiedad  $\delta \gamma^{1/2} = \frac{1}{2} \gamma^{1/2} \gamma^{ij} \delta \gamma_{ij}$  y la ecuación de evolución de ADM para  $\gamma_{ij}$ , (2.12), como sigue

$$\frac{\partial_t \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}} = \frac{1}{2} \gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma^{ij} (-2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i) = -\alpha K + D_i \beta^i . \quad (3.45)$$

Así, al reemplazar este término e identificando que  $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi = \beta^i \partial_i \Phi$ , la ecuación de evolución para  $\Phi$  resulta ser

$$\partial_t \Phi - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi = -D_i (\alpha a^i) + \alpha \Phi K . \quad (3.46)$$

### 2. Ecuación de evolución para $a_i$ :

Expandimos la suma en la definición del campo eléctrico (3.32) como sigue

$$\mathcal{E}_i = n^\nu W_{i\mu} = n^0 W_{i0} + n^k W_{ik} = \frac{1}{\alpha} (\partial_i X_0 - \partial_t X_i) - \frac{\beta^k}{\alpha} (\partial_i X_k - \partial_k X_i) . \quad (3.47)$$

Luego, reemplazamos las expresiones para las componentes covariantes de  $X_\mu$ , (3.28) y (3.29), en la expresión anterior obteniendo

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{\alpha} [\partial_i(-\alpha\Phi + a_k\beta^k) - \partial_t a_i] - \frac{\beta^k}{\alpha} (\partial_i a_k - \partial_k a_i) . \quad (3.48)$$

Finalmente, despejando la derivada temporal de  $a_i$ , cancelando términos e identificando la presencia de la derivada de Lie de  $a_i$  a lo largo del vector de corrimiento  $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} a_i = \beta^k \partial_k a_i + a_k \partial_i \beta^k$ , se obtiene la ecuación de evolución para el potencial vectorial 3-dimensional

$$\partial_t a_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} a_i = -\alpha \mathcal{E}_i - \partial_i(\alpha\Phi) . \quad (3.49)$$

### 3. Ecuación de evolución para $\mathcal{E}_i$ :

Esta ecuación se obtiene de proyectar sobre la hipersuperficie espacial la ecuación de campo (3.15), y operar como sigue

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_\nu^i \nabla_\mu W^{\mu\nu} - \mu^2 \gamma_\nu^i X^\nu \\ &= (\delta_\nu^i + n^i n_\nu) \nabla_\mu W^{\mu\nu} - \mu^2 a^i \\ &= \nabla_\mu W^{\mu i} + \beta^i \nabla_\mu W^{\mu 0} - \mu^2 a^i , \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde en la segunda igualdad optamos por expresar  $\gamma_\nu^i = \delta_\nu^i + n^i n_\nu$  y hemos usado la definición del potencial vectorial 3-dimensional (3.24). Mientras que en la tercera igualdad usamos  $n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$  y  $n_\mu = (-\alpha, 0)$ . De esta expresión, reescribimos los dos primeros términos como sigue:

Para el segundo término  $\beta^i \nabla_\mu W^{\mu 0}$ , abrimos la 4-divergencia usando (3.41), reemplazamos a  $W^{k0}$  usando la definición de campo eléctrico  $\mathcal{E}^k = -n_\nu W^{\nu k} = -\alpha W^{k0}$  e identificamos la 3-divergencia usando (3.42)

$$\nabla_\mu W^{\mu 0} = \frac{1}{|g|^{1/2}} \partial_k (|g|^{1/2} W^{k0}) = -\frac{1}{\alpha \gamma^{1/2}} \partial_k (\gamma^{1/2} \mathcal{E}^k) = -\frac{1}{\alpha} D_k \mathcal{E}^k . \quad (3.51)$$

Para el primer término, operamos de manera similar al anterior

$$\begin{aligned} \nabla_\mu W^{\mu i} &= \frac{1}{\alpha \gamma^{1/2}} \partial_\mu (\alpha \gamma^{1/2} W^{\mu i}) \\ &= \frac{1}{\alpha \gamma^{1/2}} [\partial_t (\gamma^{1/2} \mathcal{E}^i) + \partial_k (\alpha \gamma^{1/2} W^{ki})] \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[ \partial_t \mathcal{E}^i + \mathcal{E}^i \frac{\partial_t \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}} + D_k (\alpha W^{ki}) \right] , \end{aligned}$$

y despejamos los términos dentro del corchete. Para el término  $D_k(\alpha W^{ki})$  usamos la descomposición 3+1 del tensor de campo (3.39),  $W^{ki} = n^k \mathcal{E}^i - n^i \mathcal{E}^k + E^{kij} \mathcal{B}_j$ , obteniendo

$$\begin{aligned} D_k(\alpha W^{ki}) &= D_k(-\beta^k \mathcal{E}^i + \beta^i \mathcal{E}^k + E^{kij} \alpha \mathcal{B}_j) \\ &= -\mathcal{E}^i D_k \beta^k - \beta^k D_k \mathcal{E}^i + \mathcal{E}^k D_k \beta^i + \beta^i D_k \mathcal{E}^k + E^{kij} D_k(\alpha \mathcal{B}_j) \\ &= -\mathcal{E}^i D_k \beta^k - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E}^i + \beta^i D_k \mathcal{E}^k + E^{kij} D_k(\alpha \mathcal{B}_j), \end{aligned}$$

donde identificamos  $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E}^i = \beta^k D_k \mathcal{E}^i - \mathcal{E}^k D_k \beta^i$ . Mientras que para el término  $\mathcal{E}^i \partial_t \gamma^{1/2} / \gamma^{1/2}$  usamos la ecuación que obtuvimos líneas arriba en (3.45)

$$\mathcal{E}^i \frac{\partial_t \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}} = -\alpha K \mathcal{E}^i + \mathcal{E}^i D_k \beta^k .$$

Así, reemplazando estos términos en el corchete anterior y anulando términos adecuadamente, tenemos

$$\nabla_\mu W^{\mu i} = \frac{1}{\alpha} [ \partial_t \mathcal{E}^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E}^i - \alpha K \mathcal{E}^i + \beta^i D_k \mathcal{E}^k - E^{ikj} D_k(\alpha \mathcal{B}_j) ] . \quad (3.52)$$

Finalmente agrupando las expresiones (3.51) y (3.52) en (3.50), y anulando términos con signo contrario, obtenemos la ecuación de evolución para el campo eléctrico

$$\partial_t \mathcal{E}^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E}^i = [D \times (\alpha \mathcal{B})]^i + \alpha (K \mathcal{E}^i + \mu^2 a^i) , \quad (3.53)$$

donde identificamos el rotacional definido como

$$D \times (\alpha \mathcal{B})^i := E^{ikj} D_k(\alpha \mathcal{B}_j) = E^{ikj} \partial_k(\alpha \mathcal{B}_j). \quad (3.54)$$

#### 4. Ecuación de evolución para $\mathcal{B}_i$ :

De manera completamente análoga a la deducción de la ecuación anterior, obtenemos a la ecuación de evolución del campo magnético a partir de la proyección sobre la hipersuperficie espacial de la identidad que cumple el tensor dual (3.20)

$$\gamma_\nu^i \nabla_\mu W^{*\mu\nu} = 0, \quad (3.55)$$

con la diferencia que en este caso usamos  $\mathcal{B}^k = -\alpha W^{*k0}$  y  $W^{*ki} = n^k \mathcal{B}^i - n^i \mathcal{B}^k - E^{kij} \mathcal{B}_j$ . Así, se obtiene

$$\partial_t \mathcal{B}^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{B}^i = -[D \times (\alpha \mathcal{E})]^i + \alpha K \mathcal{B}^i. \quad (3.56)$$

### 5. Ecuaciones de constricción de Gauss:

Las ecuaciones de evolución que acabamos de obtener para los campos  $\mathcal{E}^i$  y  $\mathcal{B}^i$  son resultado de proyectar las ecuaciones de campo para  $W^{\mu\nu}$  y  $W^{*\mu\nu}$  sobre la hipersuperficie espacial  $\Sigma_t$ . Sin embargo, las proyecciones de estas ecuaciones sobre la dirección normal a  $\Sigma_t$  nos brinda ecuaciones de constricción, de la misma manera como vimos en el capítulo anterior al proyectar en la dirección normal a las ecuaciones de campo de Einstein resultando en la constricciones hamiltoniana y de momentos.

Iniciemos con la proyección de la ecuación (3.15), considerando la definición del campo escalar (3.24) y  $n_\mu = (-\alpha, 0)$

$$n_\nu \nabla_\mu W^{\mu\nu} = \mu^2 n_\nu X^\nu \implies \alpha \nabla_\mu W^{\mu 0} = \mu^2 \Phi. \quad (3.57)$$

Luego, usamos la expresión de  $\nabla_\mu W^{\mu 0} = -\frac{1}{\alpha} D_i \mathcal{E}^i$ , obtenida líneas arriba en (3.51), obteniendo

$$D_i \mathcal{E}^i + \mu^2 \Phi = 0. \quad (3.58)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, pero partiendo ahora de la ecuación de campo para  $W^{*\mu\nu}$ , (3.20), se obtiene

$$D_i \mathcal{B}^i = 0. \quad (3.59)$$

Ambas ecuaciones no poseen derivadas temporales y reciben el nombre de constricciones de Gauss para el electromagnetismo de Proca. Además, la última ecuación de constricción se satisface trivialmente, en efecto, al considerar la definición de campo magnético (3.33), la definición del tensor de campo dual (3.16) y el hecho de que  $W_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha} X_{\beta]}$ , se tiene

$$\mathcal{B}^i = -n_\mu W^{*\mu i} = \frac{1}{2} n_\mu E^{\mu i \alpha \beta} W_{\alpha \beta} = E^{i \alpha \beta} \partial_\alpha X_\beta = E^{ijk} \partial_j X_k,$$

donde para la penúltima igualdad hemos considerado que  $n_\mu E^{\mu i \alpha \beta} = E^{i \alpha \beta}$  y retirado los corchetes en los índices  $\alpha \beta$ , pues estos aseguran su antisimetría al estar contraídos a los índices del tensor de Levi-Civita. Mientras que para la última igualdad, solo tenemos disponible componentes de  $E^{i \alpha \beta}$  no cero con  $\alpha, \beta = j, k = 1, 2, 3$ . Luego, consideramos la descomposición ortogonal de  $X_k = a_k + n_k \Phi$  deducida en (3.27) con  $n_\mu = (-\alpha, 0)$ , obteniendo

$$\mathcal{B}^i = E^{ijk} \partial_j a_k = [D \times a]^i. \quad (3.60)$$

Al aplicar la 3-divergencia a esta expresión y anular la contracción del tensor 3-dimensional de Levi-Civita con los símbolos de Christoffel definidos en  $\Sigma_t$ , se tiene

$$D_i \mathcal{B}^i = E^{ijk} (\partial_i \partial_j a_k - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l \partial_l a_k - {}^{(3)}\Gamma_{ik}^l \partial_j a_l) = E^{ijk} \partial_i \partial_j a_k = 0.$$

Por lo tanto, en lugar de obtener el campo magnético a partir de la ecuación de constricción (3.59), usaremos el rotacional del potencial vectorial 3-dimensional dado en (3.60).

### 3.2.3. Cantidades de materia en 3+1

En el formalismo 3+1 para el espacio-tiempo, se definió las cantidades derivadas de la descomposición ortogonal del tensor de energía-momento y se observó que aparecen en las ecuaciones de evolución y constricción de ADM. Por lo tanto, para completar las ecuaciones del sistema Einstein-(multi)Proca, será necesario especificar la expresión de tales cantidades, a las cuales simplemente nos referiremos como cantidades de materia en 3+1. Para ello, descomponemos ortogonalmente la expresión covariante de  $T_{\mu\nu}$  dada en (3.9) y generada por las contribuciones de los  $N$  campos complejos de Proca vistos como materia

$$T_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^N (T_m)_{\mu\nu} ,$$

donde para cada  $m$

$$(T_m)_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ - (W_m)_{\lambda(\mu} (\bar{W}_m)_{\nu)}{}^\lambda - \frac{g_{\mu\nu}}{4} (W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta} + \mu^2 \left[ (X_m)_{(\mu} (\bar{X}_m)_{\nu)} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (X_m)_\lambda (\bar{X}_m)^\lambda \right] \right\}. \quad (3.61)$$

De manera que en lugar de campos potenciales  $(X_m)^\mu$  y tensores de campo  $(W_m)_{\mu\nu}$ , las cantidades de materia estén expresados en función de las cantidades  $\Phi_m$ ,  $(a_m)^i$ ,  $(\mathcal{E}_m)^i$  y  $(\mathcal{B}_m)^i$ . Nótese que para el desarrollo que mostraremos a continuación, retomamos el uso del índice  $m = 1, \dots, N$  que etiqueta a cada campo de Proca en el sistema.

**1. Densidad de energía:** Siguiendo la definición (2.15), se tiene

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^N n^\mu n^\nu (T_m)_{\mu\nu},$$

la cual, gracias a la expresión (3.61), identificamos para cada  $m$  cuatro términos por reescribir. El primero es

$$-n^\mu n^\nu (W_m)_{\lambda(\mu} (\bar{W}_m)_{\nu)}{}^\lambda = -n^\mu n^\nu (W_m)_{\lambda\mu} (\bar{W}_m)_{\nu}{}^\lambda = (\mathcal{E}_m)_\lambda (\mathcal{E}_m)^\lambda,$$

donde, para lograr la primera igualdad simplemente retiramos la simetrización de los índices  $\mu\nu$  ya que estos se simetrizan al contraerse con  $n^\mu n^\nu$ . Y para la segunda igualdad hemos considerado la definición del campo eléctrico dada en (3.32),  $\mathcal{E}_\lambda = n^\mu (W_m)_{\lambda\mu}$ .

Para el segundo término, tenemos

$$-\frac{1}{4} n^\mu n^\nu g_{\mu\nu} (W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [ \mathcal{B}_m^2 - \mathcal{E}_m^2 ] ,$$

donde hemos usado el desarrollo de  $(W_m)_{\alpha\beta}(\bar{W}_m)^{\alpha\beta}$ , el cual se deduce, de considerar la descomposición ortogonal de  $(W_m)_{\alpha\beta} = n_\alpha(\mathcal{E}_m)_\beta - n_\beta(\mathcal{E}_m)_\alpha + E_{\alpha\beta\lambda}(\mathcal{B}_m)^\lambda$ , y la identidad  $E_{\alpha\beta\lambda}E^{\alpha\beta\rho} = 2\delta_\lambda^\rho$

$$\begin{aligned} (W_m)_{\alpha\beta}(\bar{W}_m)^{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta\lambda}E^{\alpha\beta\rho}(\mathcal{B}_m)^\lambda(\bar{\mathcal{B}}_m)_\rho - 2(\mathcal{E}_m)_i(\bar{\mathcal{E}}_m)^i \\ &= 2[ (\mathcal{B}_m)_i(\bar{\mathcal{B}}_m)^i - (\mathcal{E}_m)_i(\bar{\mathcal{E}}_m)^i ] \\ &= 2[ \mathcal{B}_m^2 - \mathcal{E}_m^2 ], \end{aligned} \quad (3.62)$$

con la notación la notación  $\mathcal{E}_m^2 := (\mathcal{E}_m)_i(\bar{\mathcal{E}}_m)^i$  y  $\mathcal{B}_m^2 := (\mathcal{B}_m)_i(\bar{\mathcal{B}}_m)^i$ .

Para el tercer término, considerando la simetrización de  $n^\mu n^\nu$  y la definición del potencial escalar  $\Phi_m = -n^\mu(X_m)_\mu$  tenemos

$$\mu^2 n^\mu n^\nu (X_m)_{(\mu}(\bar{X}_m)_{\nu)} = \mu^2 \Phi_m^2,$$

donde hemos usado la notación  $\Phi_m^2 := \Phi_m \bar{\Phi}_m$ .

Finalmente, el cuarto y último término, es

$$-\frac{1}{2}\mu^2 n^\mu n^\nu g_{\mu\nu} (X_m)_\lambda(\bar{X}_m)^\lambda = \frac{1}{2}\mu^2 (X_m)_\lambda(\bar{X}_m)^\lambda = \frac{1}{2}\mu^2 [ a_m^2 - \Phi_m^2 ],$$

donde hemos reemplazado el desarrollo de  $(X_m)_\lambda(\bar{X}_m)^\lambda$  empleando la descomposición ortogonal  $(X_m)_\mu = (a_m)_\mu - n_\mu \Phi_m$  como sigue

$$\begin{aligned} (X_m)_\lambda(\bar{X}_m)^\lambda &= [ (a_m)_\mu - n_\mu \Phi_m ] [ (\bar{a}_m)^\mu - n^\mu \bar{\Phi}_m ] \\ &= a_m^2 - \Phi_m^2, \end{aligned} \quad (3.63)$$

usando la notación  $a_m^2 := (a_m)_i(\bar{a}_m)^i$ . Juntando las expresiones anteriores, se obtiene una densidad de energía dada por

$$\rho = \sum_{m=1}^N \frac{1}{8\pi} [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 + \mu^2 ( \Phi_m^2 + a_m^2 ) ] \quad (3.64)$$

**2. Densidad de momento:** usando la definición (2.18)

$$\begin{aligned} j^i &:= -\gamma^{i\nu} n^\mu T_{\mu\nu} = \sum_{m=0}^N -\gamma^{i\mu} n^\nu (T_m)_{\mu\nu} \\ &= \sum_{m=0}^N -\frac{1}{4\pi} \gamma^{i\mu} n^\nu \{ -(W_m)_{\lambda(\mu}(\bar{W}_m)_{\nu)}^\lambda + m^2 (X_m)_{(\mu}(\bar{X}_m)_{\nu)} \}, \end{aligned}$$

donde hemos anulado los términos con el factor  $\gamma^{i\mu}n^\nu g_{\mu\nu} = \gamma^{i\mu}n_\mu = 0$ , que resultan de reemplazar (3.61) en la sumatoria anterior. Por lo tanto, para cada  $m$  tenemos que reexpresar dos términos. El primero resulta ser

$$\begin{aligned}\gamma^{i\mu}n^\nu(W_m)_{\lambda(\mu}(\bar{W}_m)_{\nu)}^\lambda &= \frac{1}{2}\gamma^{i\mu}n^\nu[(W_m)_{\lambda\mu}(\bar{W}_m)_\nu^\lambda + c.c. ] \\ &= -\frac{1}{2}\gamma^{i\mu}[(W_m)_{\lambda\mu}(\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda + c.c. ],\end{aligned}$$

donde c.c. indica conjugado complejo. Luego de descomponer  $(W_m)_{\lambda\mu} = n_\lambda(\mathcal{E}_m)_\mu - n_\mu(\mathcal{E}_m)_\lambda + E_{\lambda\mu\nu}(\mathcal{B}_m)^\nu$ , anulamos los términos de la expresión anterior que posean los factores  $n_\lambda(\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda = 0$  y  $\gamma^{i\mu}n_\mu = 0$ . Así, resulta en

$$\begin{aligned}\gamma^{i\mu}n^\nu(W_m)_{\lambda(\mu}(\bar{W}_m)_{\nu)}^\lambda &= -\frac{1}{2}[\gamma^{i\mu}E_{\lambda\mu\nu}(\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda(\mathcal{B}_m)^\nu + c.c. ] \\ &= \frac{1}{2}[E^i{}_{\lambda\nu}(\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda(\mathcal{B}_m)^\nu + c.c. ]\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando las definiciones  $\gamma^{i\mu}(X_m)_\mu = (a_m)^i$  y  $\Phi_m = -n^\nu(X_m)_\nu$ , el segundo término resulta ser

$$\begin{aligned}-\mu^2\gamma^{i\mu}n^\nu(X_m)_{(\mu}(\bar{X}_m)_{\nu)} &= -\frac{1}{2}\mu^2\gamma^{i\mu}n^\nu[(X_m)_\mu(\bar{X}_m)_\nu + c.c. ] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2[(a_m)^i\bar{\Phi}_m + c.c. ].\end{aligned}$$

Reemplazando estos términos en la sumatoria de la densidad de momento se obtiene

$$j^i = \sum_{m=1}^N \frac{1}{8\pi} [ E^i{}_{\lambda\nu}(\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda(\mathcal{B}_m)^\nu + \mu^2(a_m)^i\bar{\Phi}_m + c.c. ], \quad (3.65)$$

esto es, el vector de Poynting total correspondiente a los  $N$  campos complejos de Proca.

**3. Tensor de esfuerzos espacial:** Usando la definición (2.22) se tiene

$$S_{ij} := \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^N \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu (T_m)_{\mu\nu}$$

Nuevamente, usando la expresión de  $(T_m)_{\mu\nu}$  dada en (3.61), identificamos cuatro términos a reescribir. Para el primero, será útil identificar que

$$\begin{aligned}\gamma_i^\mu W_{\mu\lambda} &= \gamma_i^\mu [ n_\mu(\mathcal{E}_m)_\lambda - (\mathcal{E}_m)_\mu n_\lambda + E_{\mu\lambda\nu}(\mathcal{B}_m)^\nu ] \\ &= -n_\lambda(\mathcal{E}_m)_i + E_{i\lambda\nu}(\mathcal{B}_m)^\nu ,\end{aligned}$$



de donde podemos encontrar

$$\begin{aligned}\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu (W_m)_{\mu\lambda} (\bar{W}_m)_\nu^\lambda &= [ -n_\lambda (\mathcal{E}_m)_i + E_{i\lambda\nu} (\mathcal{B}_m)^\nu ] [ -n^\lambda (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + E_j^\lambda (\bar{\mathcal{B}}_m)^\rho ] \\ &= -(\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + E_{lni} E_{rj}^l (\mathcal{B}_m)^n (\bar{\mathcal{B}}_m)^r ,\end{aligned}$$

luego, utilizando la propiedad  $E_{lni} E_{rj}^l = \gamma_{ij} \gamma_{nr} - \gamma_{ir} \gamma_{jn}$ , encontramos

$$\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu (W_m)_{\mu\lambda} (\bar{W}_m)_\nu^\lambda = -(\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + \gamma_{ij} \mathcal{B}_m^2 - (\bar{\mathcal{B}}_m)_i (\mathcal{B}_m)_j$$

gracias a esta expresión, el primer término que estamos buscando reescribir es

$$\begin{aligned}-\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu W_{\lambda(\mu} \bar{W}_{\nu)}^\lambda &= \gamma_{(i}^\mu \gamma_{j)}^\nu W_{\lambda\mu} \bar{W}_\nu^\lambda \\ &= -(\mathcal{E}_m)_{(i} (\bar{\mathcal{E}}_m)_{j)} - (\mathcal{B}_m)_{(i} (\bar{\mathcal{B}}_m)_{j)} + \gamma_{ij} \mathcal{B}_m^2 .\end{aligned}$$

El segundo término resulta inmediato al considerar que  $\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu g_{\mu\nu} = \gamma_{ij}$  y el desarrollo de  $(W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta}$  dado en (3.62)

$$-\frac{1}{4} \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu g_{\mu\nu} (W_m)_{\alpha\beta} (\bar{W}_m)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} [ \mathcal{E}_m^2 - \mathcal{B}_m^2 ]$$

El tercer término, se obtiene al considerar la definición  $(a_m)_i = \gamma_i^\mu (X_m)_\mu$

$$\mu^2 \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu (X_m)_{(\mu} (\bar{X}_m)_{\nu)} = \mu^2 (a_m)_{(i} (a_m)_{j)} .$$

Finalmente, el cuarto y último se obtiene al usar la expresión (3.63)

$$-\frac{1}{2} \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu g_{\mu\nu} (X_m)_\lambda (X_m)^\lambda = -\frac{1}{2} \gamma_{ij} [ a_m^2 - \Phi_m^2 ] .$$

Así, reuniendo todas las expresiones anteriores en la sumatoria del tensor espacial de esfuerzos, se obtiene

$$\begin{aligned}S_{ij} &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{8\pi} \{ \gamma_{ij} [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 ] - [ (\mathcal{B}_m)_i (\bar{\mathcal{B}}_m)_j + (\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + c.c. ] \\ &\quad + \mu^2 [ ((a_m)_i (\bar{a}_m)_j + c.c.) - \gamma_{ij} (a_m^2 - \Phi_m^2) ] \} .\end{aligned}\quad (3.66)$$

### 3.3. Espacio-tiempo con simetría esférica

Como se estableció desde el capítulo introductorio, nuestro objetivo es estudiar un sistema de varios campos complejos de Proca acoplados mínimamente a la gravedad en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, considerando el caso más general, en el que los campos de Proca individuales no sean esféricamente simétricos, aunque su contribución conjunta sí genere un espacio-tiempo con simetría esférica. En esta

sección daremos un paso adelante hacia ese objetivo estableciendo las ecuaciones de evolución y constricción de los campos de Proca de este sistema. Para ello, consideraremos las ecuaciones de evolución y

$$\partial_t \Phi_m - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi_m = -D_i[\alpha(a_m)^i] + \alpha K \Phi_m, \quad (3.67)$$

$$\partial_t(a_m)_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}(a_m)_i = -\alpha(\mathcal{E}_m)_i - \partial_i(\alpha\Phi_m), \quad (3.68)$$

$$\partial_t(\mathcal{E}_m)^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}(\mathcal{E}_m)^i = [D \times (\alpha\mathcal{B}_m)]^i + \alpha[K(\mathcal{E}_m)^i + \mu^2(a_m)^i], \quad (3.69)$$

$$\partial_t(\mathcal{B}_m)^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}(\mathcal{B}_m)^i = -[D \times (\alpha\mathcal{E}_m)]^i + \alpha K(\mathcal{B}_m)^i. \quad (3.70)$$

y constricción

$$0 = D_i(\mathcal{E}_m)^i + \mu^2\Phi_m, \quad (3.71)$$

$$(\mathcal{B}_m)^i = [D \times a_m]^i, \quad (3.72)$$

de los campos de Proca en un espacio-tiempo general que obtuvimos de la sección 3.2.2. Luego, impondremos la simetría esférica del espacio-tiempo usando las herramientas mencionadas en la sección 2.3. del capítulo anterior. Concretamente al considerar un espacio-tiempo esféricamente simétrico, usamos el siguiente elemento de línea 4-dimensional al cuadrado (2.24)

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r\beta^r)dt^2 + 2\beta_r dr dt + dl^2,$$

con una métrica 3-dimensional (2.23) correspondiente a

$$dl^2 = \psi^4 (A dr^2 + r^2 B d\Omega^2),$$

donde debido a la simetría esférica todas las funciones métricas dependen solo de  $(r, t)$ .

Para reescribir las ecuaciones de evolución y constricción anteriores con la métrica del espacio-tiempo que se acaba de establecer, será útil conocer la expresión de la 3-divergencia (3.42) en este contexto. Sea un campo 3-vectorial arbitrario  $Y_i = (Y_r, Y_\theta, Y_\varphi)$ , al considerar que  $\gamma^{1/2} = A^{1/2}B\psi^6 r^2 \sin\theta$  y un poco de álgebra simplificando factores, se tiene que

$$\begin{aligned} D_i Y^i &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \partial_i (\gamma^{1/2} \gamma^{ii} Y_i) \\ &= \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} \partial_r \left( \frac{B \psi^2 r^2}{A^{1/2}} Y_r \right) + \frac{1}{B \psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta Y_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi Y_\varphi \right], \end{aligned}$$

luego, aplicando la regla de Leibniz en la derivada parcial de la coordenada radial y simplificando adecuadamente se obtiene

$$\begin{aligned} D_i Y^i &= \frac{1}{A \psi^4} \left[ \partial_r Y_r + Y_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{B \psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta Y_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi Y_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Así, al usar este resultado específicamente en la ecuación de evolución de  $\Phi_m$  y la ecuación de constricción de Gauss para el campo eléctrico, se tienen las siguientes ecuaciones de evolución para los campos de Proca complejos etiquetados con  $m$

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_m - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi_m = & -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ \partial_r (a_m)_r + (a_m)_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ & - \frac{\alpha}{B\psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta (a_m)_\theta] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi (a_m)_\varphi \right] + \alpha K \Phi_m, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\partial_t (a_m)_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} (a_m)_i = -\alpha (\mathcal{E}_m)_i - \partial_i (\alpha \Phi_m), \quad (3.75)$$

$$\partial_t (\mathcal{E}_m)^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} (\mathcal{E}_m)^i = \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha (\mathcal{B}_m)_k] + \alpha [K (\mathcal{E}_m)^i + \mu^2 (a_m)^i], \quad (3.76)$$

$$\partial_t (\mathcal{B}_m)^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} (\mathcal{B}_m)^i = -\frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha (\mathcal{E}_m)_k] + \alpha K (\mathcal{B}_m)^i. \quad (3.77)$$

Así, como las siguientes ecuaciones de constricción de Gauss

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{A\psi^4} \left[ \partial_r (\mathcal{E}_m)_r + (\mathcal{E}_m)_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] \\ & + \frac{1}{B\psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta (\mathcal{E}_m)_\theta] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi (\mathcal{E}_m)_\varphi \right] + \mu^2 \Phi_m, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$(\mathcal{B}_m)^i = \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j (a_m)_k, \quad (3.79)$$

donde se tiene a  $\epsilon^{ijk}$  como el símbolo 3-dimensional de Levi-Civita con  $\epsilon^{123} = 1$ . Y debido a la simetría esférica, en todas estas ecuaciones se tiene como índices vectoriales a  $i = r, \theta, \varphi$ , el determinante de la métrica espacial  $\gamma^{1/2} = A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta$  y un vector de corrimiento puramente radial  $\vec{\beta} = (\beta^r, 0, 0)$ .

### 3.4. Estrella de Proca

Finalizamos este capítulo utilizando todo lo obtenido hasta el momento para estudiar la configuración conocida como estrella de Proca. Esta corresponde al caso particular de nuestro sistema de Einstein-(multi)Proca en un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático cuando solo existe un campo complejo de Proca constituyente, es decir,  $N = 1$ , con dependencia temporal armónica.

La intención de esta sección es realizar un análisis preliminar de la solución de la estrella de Proca estándar para establecer las ideas que nos guiarán a la generalización

multi-campo deseada. Por ello, no será necesario deducir paso a paso las ecuaciones de la estrella de Proca, pues éstas se obtendrán al considerar el caso  $\ell = 0$  de nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca, la cual será presentada a detalle en el siguiente capítulo.

Al tener un solo campo de Proca, este tiene que generar un tensor energía-momento esféricamente simétrico que sirva de fuente a la simetría esférica del espacio-tiempo. Por lo tanto, para asegurar la simetría esférica de  $T_{\mu\nu}$  se impone que los campos 3-vectoriales del sistema sean solo radiales, es decir,

$$a_i = (a_r(t, r), 0, 0), \quad \mathcal{E}^i = (\mathcal{E}^r(t, r), 0, 0), \quad \mathcal{B}^i = (\mathcal{B}^r(t, r), 0, 0) . \quad (3.80)$$

Sin embargo, si utilizamos la expresión equivalente a la constricción de Gauss para el campo magnético, esta es, la forma de expresar a  $\mathcal{B}^i$  como las componentes del rotacional de  $a^i$ , dada en (3.79), se tiene que

$$\mathcal{B}^r = \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j a_k = \frac{1}{\gamma^{1/2}} (\epsilon^{r\theta\varphi} \partial_\theta a_\varphi + \epsilon^{r\varphi\theta} \partial_\varphi a_\theta) = 0 .$$

En consecuencia, cuando se tiene solo un campo de Proca como contenido de materia, la simetría esférica impone que  $\vec{B} = \vec{0}$ . Luego, las ecuaciones de evolución presentadas en la sección anterior que no son triviales en este escenario, considerando que ya no es necesario la etiqueta  $m$ , son

$$\partial_t \Phi - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi = -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ \partial_r a_r + a_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] + \alpha K \Phi , \quad (3.81)$$

$$\partial_t a_r - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} a_r = -\alpha \mathcal{E}_r - \partial_r (\alpha \Phi) , \quad (3.82)$$

$$\partial_t \mathcal{E}^r - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E}^r = \alpha \left( K \mathcal{E}^r + \mu^2 \frac{a_r}{A\psi^4} \right) . \quad (3.83)$$

Y la constricción de Gauss para el campo eléctrico es

$$0 = \frac{1}{A\psi^4} \left[ \partial_r \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] + \mu^2 \Phi , \quad (3.84)$$

mientras que la constricción de Gauss para el campo magnético se satisface trivialmente.

Ahora, este sistema recibe el nombre de estrella de Proca, cuando imponemos una dependencia temporal armónica con una misma frecuencia  $\omega$  sobre los campos potenciales y el campo eléctrico de la forma

$$\Phi(t, r) = \phi(r)e^{-i\omega t}, \quad a_r(t, r) = ia(r)e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{E}^r(t, r) = E(r)e^{-i\omega t} , \quad (3.85)$$

donde  $\phi(r)$ ,  $a(r)$  y  $e(r)$  son funciones radiales reales. La consecuencia inmediata de este ansatz se deduce de considerar la forma del tensor de energía-momento dada en (3.61) que a su vez se hereda a las cantidades en 3+1 de materia (3.64), (3.65) y (3.66). Esto es, estar formados por términos que son productos de cantidades complejas con sus respectivas conjugadas. Así, es fácil observar que el tensor de energía-momento es independiente del tiempo y por lo tanto puede generar un espacio-tiempo estático. Luego, siguiendo las consecuencias de estaticidad espacio-temporal presentadas en la sección 2.3. del capítulo anterior, se tiene que

$$\beta^i = 0, \quad K_{ij} = 0, \quad j^i = 0. \quad (3.86)$$

Justamente, para satisfacer  $j^r = 0$ , el ansatz para la componente radial del potencial 3-vectorial lleva la unidad imaginaria  $i$ . En efecto, si consideramos la densidad de momento para la estrella de Proca a partir de (3.65), se tiene

$$j_r = \frac{\mu^2}{8\pi} [a_r \bar{\Phi} + c.c.] = \frac{\mu^2}{8\pi} [ia\phi + c.c.] = 0 ,$$

lo cual claramente se anula por tratarse de la suma un número imaginario con su complejo conjugado.

Con respecto a los datos iniciales de la estrella de Proca, estos son

$$\Phi(0, r) = \phi(r), \quad a_r(0, r) = ia(r), \quad \mathcal{E}^r(0, r) = E(r) , \quad (3.87)$$

y se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones radiales derivado de reemplazar el ansatz original (3.85) en las ecuaciones de evolución mostradas líneas arriba fijando  $t = 0$ .

Si elegimos la norma radial de área, esto es, en la métrica espacial se tiene  $B = \psi = 1$ , aparentemente debemos resolver un sistema de ecuaciones radiales para  $(\phi(r), a(r), E(r), A(r), \alpha(r))$ . Sin embargo, no será necesario incluir a este sistema a la función radial  $E(r)$ , pues se determina a partir de los otros datos iniciales. En efecto, de la ecuación de evolución para  $\mathcal{E}^r$  dada en (3.76), se deduce que

$$\partial_t \mathcal{E}^r = \alpha \mu^2 \frac{a_r}{A} \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{\alpha \mu^2 a}{\omega A} . \quad (3.88)$$

Luego, el sistema de ecuaciones radiales de datos iniciales escrito como un sistema de primer orden para la 4-tupla  $\vec{u} = (F(r), a(r), A(r), \alpha(r))$  de la forma

$$\vec{u}' = S(\vec{u}) ,$$

donde  $S(\vec{u})$  representa la función fuente construida solo de los valores de las funciones en  $\vec{u}$  y no de sus derivadas radiales, y donde convenientemente hemos reemplazado  $\phi$

por  $F := \alpha\phi$  para conseguir la forma deseada del sistema, es

$$F' = \omega a \left( \frac{\alpha^2 \mu^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad (3.89)$$

$$a' = \frac{\omega A}{\alpha^2} F - a \left( \frac{1}{r}(A+1) + 4\pi r A(S_r^r - \rho) \right), \quad (3.90)$$

$$A' = A \left( \frac{1}{r}(1-A) + 8\pi r A\rho \right), \quad (3.91)$$

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{1}{2r}(A-1) + 4\pi r A S_r^r \right). \quad (3.92)$$

que a su vez al combinarlas satisfacen la constricción de Gauss para  $E(r)$  y donde las cantidades de materia en 3+1 esféricamente simétricas son

$$\rho = +\frac{\mu^2}{8\pi} \left[ \frac{\alpha^2 \mu^2 a^2}{A\omega^2} + \left( \frac{F^2}{\alpha^2} + \frac{a^2}{A} \right) \right], \quad (3.93)$$

$$S_r^r = -\frac{\mu^2}{8\pi} \left[ \frac{\alpha^2 \mu^2 a^2}{A\omega^2} - \left( \frac{F^2}{\alpha^2} + \frac{a^2}{A} \right) \right], \quad (3.94)$$

de lo cual, se observa que

$$S_r^r - \rho = -\frac{\mu^4 \alpha^2 a^2}{4\pi A \omega^2}. \quad (3.95)$$

Este sistema de ecuaciones radiales toma la forma de un problema no lineal de autovalores cuyo autovalor será la frecuencia temporal  $\omega$  cuando se impone condiciones de frontera, las cuales, son:

- Para  $\alpha$ : Se exige que sea regular en el origen y asintóticamente Minkowski.

$$\alpha'(r=0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 1. \quad (3.96)$$

- Para  $A$ : Se exige regularidad en el origen y para evitar divisiones  $1/0$  en la ecuación radial para  $A$ , que el espacio sea localmente plano en el origen

$$A'(r=0) = 0, \quad A(r=0) = 1. \quad (3.97)$$

- Para  $F$ : Se exige que sea regular en el origen y por ser un campo de materia, debe ser asintóticamente cero

$$F'(r=0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} F = 0. \quad (3.98)$$

- Para  $a$ : ya que esta función corresponde a la componente radial del potencial 3-vectorial, en el origen debe ser cero para no quebrar la simetría esférica. Y por su calidad de campo de materia, debe ser asintóticamente cero

$$a(r=0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a = 0. \quad (3.99)$$

Finalmente, estas condiciones de frontera deben de concordar por un lado, con las soluciones locales cerca al origen y por otro lado, con las soluciones asintóticas, es decir, para distancias lejanas al origen, de los campos de materia

Para las soluciones cerca al origen ( $r \sim 0$ ), tenemos que  $A \rightarrow 1$  y  $\alpha \rightarrow \alpha_0 = cte$ , por lo que las ecuaciones radiales para  $(F, a)$  son

$$F' \approx 0, \quad a' \approx \frac{\omega F}{\alpha_0^2} - \frac{2a}{r}.$$

Al integrar la primera ecuación, se tiene que  $F \approx F_0 = cte$ , lo cual, implica que  $F(r)$  es una función par. Mientras que en la segunda ecuación, la paridad de  $F$  implica que  $a$  debe ser una función impar. Luego, para evitar divisiones  $1/0$ , basta que aseguremos que  $a \sim r$  y por lo tanto

$$a' \approx \frac{\omega F_0}{\alpha_0^2} - 2a' \quad \Rightarrow \quad a' \approx \frac{1}{3} \frac{\omega F_0}{\alpha_0^2} \quad \Rightarrow \quad a \approx \frac{1}{3} \frac{\omega F_0}{\alpha_0^2} r.$$

Así, las soluciones cerca al origen concuerdan con las condiciones de frontera en  $r = 0$ .

Con respecto a las soluciones asintóticas, ya que para  $r \rightarrow \infty$  se tiene que  $F \rightarrow 0$  y  $a \rightarrow 0$ , de la ecuación radial para  $A$ , se deduce que  $A$  es asintóticamente Minkowski

$$A' \approx 8\pi r A^2 \rho \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad A \rightarrow cte = 1.$$

Luego, las ecuaciones radiales para  $(F, a)$  son e implican

$$F' \approx \omega a \left( \frac{\mu^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad a' \approx \omega F \quad \Rightarrow \quad F'' \approx (\mu^2 - \omega^2) F,$$

cuyas soluciones al cumplir la condición  $\mu > \omega$ , son reales convergentes y concuerdan con las condiciones de frontera

$$F \sim e^{-\sqrt{\mu^2 - \omega^2} r}, \quad a \sim -\frac{\omega}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}} e^{-\sqrt{\mu^2 - \omega^2} r}$$

# Capítulo 4

## Estrella de $\ell$ -Proca

---

Luego, de haber especificado las herramientas necesarias para el estudio del espacio-tiempo y los campos de Proca en el lenguaje en 3+1, en este capítulo finalmente estableceremos la primera parte de nuestro aporte al estudio de generalizaciones de las estrellas de Proca: la obtención de una generalización multi-campo con momento angular y simetría esférica de la estrella de Proca, la cual, como se motivará en este capítulo, bautizamos como estrella de  $\ell$ -Proca.

En concreto, en este capítulo iniciamos proponiendo un ansatz de campos de Proca que logre generar un espacio-tiempo esféricamente simétrico en el sistema de Einstein-(multi)Proca. Luego, como se establece en las estrellas bosónicas, la estrella de  $\ell$ -Proca se obtiene al imponer la dependencia temporal armónica a las soluciones del sistema anterior. Así, todas las herramientas del capítulo anterior nos conducen a obtener las ecuaciones de evolución y constricción, las cantidades de materia y las ecuaciones de datos iniciales (en primer y en segundo orden) de la estrella de  $\ell$ -Proca. Cuyo caso particular, cuando  $\ell = 0$ , se evidenciará en este capítulo que corresponde a la estrella de Proca estándar (con un campo) en simetría esférica, lo cual sustentará el carácter de generalización de nuestra propuesta.

### 4.1. Propuesta multi-campo para simetría esférica

En la sección 3.4. del capítulo anterior, obtuvimos las ecuaciones de evolución (3.74-3.77) y constricción (3.78-3.79) de los campos de Proca asumiendo que se encuentran en un espacio-tiempo con simetría esférica. Sin embargo, no se menciona cómo es que se logra dicha simetría.

Gracias a las ecuaciones de campo de Einstein (3.8), sabemos que las simetrías del espacio-tiempo expresadas en el tensor de Einstein, las cuales las hereda de la métrica espacio-temporal, provienen de las simetrías del tensor de energía-momento total del sistema, y no necesariamente de los tensores energía-momento de cada campo de



materia constituyente. Aprovechando esta idea, en [30] se estudió el posible efecto del momento angular en el colapso crítico esféricamente simétrico de un sistema de  $N = 2\ell + 1$  campos clásicos escalares reales y sin masa, con  $\ell \in N_0$ , donde cada campo constituyente posee un momento angular, que a su vez está relacionado a su dependencia angular expresada mediante una función de armónico esférico  $Y^{\ell m}$ , y comparte la misma amplitud radial con los demás campos escalares constituyentes, asegurando así la simetría esférica del sistema. Este mismo método fue luego utilizado para proponer la configuración de la estrella de  $\ell$ -bosones en [14], donde, en lugar de campos constituyentes reales sin masa, se consideró campos escalares complejos masivos formando un estrella bosónica. Esta es nombrada como tal, ya que considera un número de momento angular  $\ell$  fijo, que se comparte con todos los  $2\ell + 1$  campos constituyentes, y por lo tanto,  $\ell$  parametriza el sistema. Además, la estrella de  $\ell$ -bosones resulta ser una generalización, pues para el caso  $\ell = 0$  se recobra la estrella de bosones estándar esféricamente simétrica.

Así, para conseguir que el espacio-tiempo en el sistema de Einstein-(multi)Proca posea simetría esférica, vamos a utilizar campos de Proca con momento angular dado por funciones de armónicos esféricos. Aunque la extensión de este método del caso escalar al vectorial parece natural, posee nuevas características debido al carácter vectorial de los campos de Proca, por lo que debemos proponer una dependencia angular de estos campos que no solo genere un tensor de energía-momento total esféricamente simétrico, sino que también satisfaga las ecuaciones de constricción de Gauss para los campos eléctricos y magnéticos (3.71-3.72). Siguiendo estas dos ideas, proponemos el siguiente ansatz:

Sean los  $N = 2\ell + 1$  campos de Proca complejos  $(X_m)_\mu$  con  $m = -\ell, \dots, \ell$ . La descomposición ortogonal de estos, de sus respectivos tensores de campo  $(W_m)_{\mu\nu}$  y de sus duales  $(W_m^*)_{\mu\nu}$ , expresada como un sistema de  $10(2\ell + 1)$  funciones de materia  $\{\Phi_m, (a_m)_i, (\mathcal{E}_m)_i, (\mathcal{B})^i\}$  se propone como:

$2\ell + 1$  campos potenciales escalares

$$\Phi_m(x) = \phi_\ell(r, t) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) , \quad (4.1)$$

$2\ell + 1$  campos potenciales 3-vectoriales<sup>1</sup>

$$(a_m)_i(x) = ( \aleph_\ell(r, t) Y^{\ell m}, \beth_\ell(r, t) \partial_\theta Y^{\ell m}, \beth_\ell(r, t) \partial_\varphi Y^{\ell m} ) , \quad (4.2)$$

$2\ell + 1$  campos 3-vectoriales eléctricos

$$(\mathcal{E}_m)_i(x) = ( \epsilon_\ell(r, t) Y^{\ell m}, \xi_\ell(r, t) \partial_\theta Y^{\ell m}, \xi_\ell(r, t) \partial_\varphi Y^{\ell m} ) , \quad (4.3)$$

y  $2\ell + 1$  campos 3-vectoriales magnéticos

$$(\mathcal{B}_m)^i(x) = \left( 0, \zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta}, -\zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) . \quad (4.4)$$

Donde  $\ell$  es el número de momento angular y  $m$ , los números magnéticos de las funciones de armónico esférico  $Y^{\ell m}$ . Estos últimos parámetros también sirven para enumerar los  $2\ell + 1$  campos de Proca del sistema. Finalmente, sea un  $\ell$  fijo, nuestra propuesta presenta las mismas amplitudes  $\phi_\ell(r, t)$ ,  $\aleph_\ell(r, t)$ ,  $\beth_\ell(r, t)$ ,  $\epsilon_\ell(r, t)$ ,  $\xi_\ell(r, t)$ ,  $\zeta_\ell(r, t)$  para todos los valores de  $m = -\ell, \dots, \ell$ .

Es interesante notar la generalidad de este ansatz. Por ejemplo si consideramos que los campos potenciales de Proca  $(X_m)_\mu = 0$  para todo  $t$ , es decir, campos potenciales de Proca estáticos con componentes iguales a cero, se muestra usando (3.24) y (3.32-3.33), que el ansatz (4.1) y las componentes de (4.2) se anulan, mientras que las componentes de (4.3-4.4) no necesariamente son cero. Por otro lado, si tomamos campos de Proca homogéneos espacialmente,  $(X_m)_\mu = 0 \forall \vec{x}$ , se puede demostrar que solo las componentes de (4.3) son no nulas, siendo cero los demás términos del ansatz. Asimismo esta ansatz también es válido si hacemos cero la masa de los campos de Proca, es decir, para un sistema Einstein-(multi)Maxwell complejo.

Es importante mencionar que las funciones de armónicos esféricos estándar  $\tilde{Y}^{\ell m}$  cumplen con la conocida identidad

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tilde{Y}^{\ell m}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi} , \quad (4.5)$$

sin embargo, las funciones de armónicos esféricos que usamos en nuestro ansatz anterior se definen tal que normalizan esta identidad. Es decir,

$$Y^{\ell m} := \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \tilde{Y}^{\ell m} . \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>En el cual usamos las letras hebreas *aleph*  $\aleph$  y *beth*  $\beth$ , debido a que sus correspondientes  $a$  y  $b$  en el alfabeto latino como  $\alpha$  y  $\beta$  en el griego, son usadas para otras cantidades en este escrito.

Además, será clave para nuestra obtención de la simetría esférica del tensor energía-momento total y la posterior obtención de las ecuaciones radiales de la estrella de  $\ell$ -Proca, tener en cuenta la ecuación diferencial que define a las funciones de armónico esférico, así como una serie de identidades que estas satisfacen, las cuales, han sido tomadas del apéndice del artículo [14], donde también se pueden encontrar sus respectivas demostraciones. Las identidades que usaremos son:

Identidad 1:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}(\theta, \varphi)|^2 = 1 . \quad (4.7)$$

Identidad 2:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \bar{Y}^{\ell m} \hat{\nabla}_A Y^{\ell m} = 0 , \quad (4.8)$$

donde  $\bar{Y}^{\ell m}$  es la conjugada compleja de  $Y^{\ell m}$  y  $\hat{\nabla}_A$  es la derivada covariante asociada a la métrica 2-dimensional  $\hat{g}_{AB}$  de la 2-esfera cuyo elemento de línea al cuadrado es

$$dl_{S^2}^2 = d\Omega^2 = \hat{g}_{AB} dx^A dx^B = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (4.9)$$

Identidad 3:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} (\hat{\nabla}^A Y^{\ell m})(\hat{\nabla}_A \bar{Y}^{\ell m}) = \ell(\ell + 1) . \quad (4.10)$$

o su versión explícita, la cual usaremos frecuentemente

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \partial_\theta Y^{\ell m} \partial_\theta \bar{Y}^{\ell m} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi Y^{\ell m} \partial_\varphi \bar{Y}^{\ell m} \right) = \ell(\ell + 1) . \quad (4.11)$$

Identidad 4:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} (\hat{\nabla}_A Y^{\ell m})(\hat{\nabla}^A \bar{Y}^{\ell m}) = \frac{\ell(\ell + 1)}{2} \hat{g}_{AB} . \quad (4.12)$$

Y finalmente la ecuación diferencial que define a las funciones de armónico esférico, el laplaciano de  $Y^{\ell m}$ ,  $\hat{\nabla}_A \hat{\nabla}^A Y^{\ell m} = -\ell(\ell + 1)Y^{\ell m}$ , o explícitamente,

Definición de  $Y^{\ell m}$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y^{\ell m} = -\ell(\ell + 1)Y^{\ell m} . \quad (4.13)$$

Por otro lado, con el fin de entender cómo nuestro ansatz conducirá a una generalización multi-campo de la estrella de Proca, debemos entender cómo se reduce nuestro sistema para el caso  $\ell = 0$ . En ese sentido, al tomar  $\ell = 0$ , se tiene como único caso

que  $m = 0$  y por lo tanto, el contenido de materia está descrito por un solo campo de Proca ( $N = 1$ ), cuya función de armónico esférico es  $Y^{00}(\theta, \varphi) = 1$  y cuyas derivadas angulares son  $\partial_\theta Y^{00} = \partial_\varphi Y^{00} = 0$ . Este hecho anula las componentes angulares de los campos 3-vectoriales potenciales, eléctricos y magnéticos, reduciendo así nuestro ansatz a

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) &= \phi_\ell(r, t) , & (a_0)_i(x) &= (\aleph(r, t), 0, 0) , \\ (\mathcal{E}_0)_i(x) &= (\epsilon_\ell(r, t), 0, 0) , & (\mathcal{B}_0)_i(x) &= (0, 0, 0) .\end{aligned}$$

Lo cual, concuerda con el ansatz de la estrella de Proca estándar esféricamente simétrica presentado en el capítulo anterior y expresado en (3.85). Nótese que en ese ansatz, la componente radial del campo eléctrico posee un índice contravariante, sin embargo, en nuestro ansatz multi-campos hemos considerado los campos eléctricos con índices covariantes, debido a que esto nos permitirá obtener ecuaciones de evolución de manera más sencilla cuando comparemos al campo 3-vectorial potencial  $(a_m)_i$  con el campo  $(\mathcal{E}_m)_i$ , como se verá más adelante en la sección 4.3.

Retomando la reducción al caso  $\ell = 0$ , entonces en este caso nuestro estudio se reducirá a solo considerar las ecuaciones de evolución del campo potencial escalar y las componentes radiales de los campos 3-vectoriales que forman nuestro ansatz, y únicamente la constricción de Gauss para los campos eléctricos. Y al mismo tiempo, debemos eliminar las ecuaciones de evolución de las amplitudes  $\beth_\ell, \xi_\ell, \zeta_\ell$  dado que las componentes angulares de los campos 3-vectoriales se anulan, y dejar de tomar en cuenta la ecuación de constricción de Gauss para los campos magnéticos, pues esta se satisface trivialmente. Este procedimiento se aplicará al final de la sección 4.5 para corroborar que, para  $\ell = 0$ , las ecuaciones de datos iniciales en primer orden y las cantidades de materia en 3+1 de la estrella de  $\ell$ -Proca se reducen a las correspondientes expresiones de la estrella de Proca estándar esféricamente simétrica, que presentamos en la sección 3.5. del capítulo anterior.

Antes de proseguir con el análisis de las consecuencias de nuestro ansatz, debemos llamar la atención que los campos magnéticos constituyentes  $(\mathcal{B}_m)^i$  de nuestra propuesta, por poseer una función seno en el denominador de sus componentes angulares, aparentemente poseen una singularidad angular polar en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . En consecuencia, en el apéndice A, estudiamos a detalle las componentes de cada campo magnético para todo valor de  $\ell$ , mostrando que, en efecto, sí existen aquellas singularidades únicamente en las componentes vectoriales azimutales con  $m = \pm 1$ . Sin embargo, demostramos que dichas singularidades no deben generar preocupación pues son singularidades coordenadas. Esto se concluye al obtener: (1) que los módulos al cuadrado de cada campo constituyente son regulares en su dominio angular, lo cual, asegura que las mediciones de tales campos magnéticos, así como el tensor energía-momento por cada campo de Proca también sean regulares, y además, (2) que

dichas singularidades en los campos magnéticos desaparecen al realizar un cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cuasi-cartesianas.

Finalmente, aunque la forma que proponemos en nuestro ansatz (4.1-4.4) se consiguió completamente mediante cuidadosas elecciones de términos que asegurasen la simetría esférica del tensor energía-momento total y al mismo tiempo otorgasen ecuaciones diferenciales radiales que no violen las constricciones de Gauss, posterior al descubrimiento de este ansatz se encontró que las dependencias angulares que presentamos mediante las derivadas angulares de las funciones de armónicos esféricos y la presencia de factores  $1/\sin\theta$  en las componentes contravariantes del campo magnético se pueden justificar mediante el uso de los *armónicos esféricos vectoriales* con la notación presentada en [31, 32].

## 4.2. Tensor energía-momento esféricamente simétrico

Aprovechando que nuestro ansatz está propuesto en cantidades escritas en el lenguaje 3+1 de los campos de Proca, será conveniente analizar la simetría espacial del tensor energía-momento usando también estas cantidades. Siguiendo la misma idea de descomposición ortogonal realizada para otros tensores en el capítulo anterior, la descomposición ortogonal del tensor energía-momento es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta T_{\alpha\beta} \\ &= (\gamma_\mu^\alpha - n^\alpha n_\mu)(\gamma_\nu^\beta - n^\beta n_\nu) T_{\alpha\beta} \\ &= n_\mu n_\nu (n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}) + n_\mu (-n^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}) + (-n^\beta \gamma_\mu^\alpha T_{\alpha\beta}) n_\nu + \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta} , \end{aligned}$$

luego, identificando las definiciones para  $\rho$  (2.15),  $j^i$  (2.18) y  $S_{ij}$  (2.22), tenemos

$$T_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu \rho + n_\mu j_\nu + j_\nu n_\mu + S_{\mu\nu} . \quad (4.14)$$

Donde, tenemos el vector normal  $n_\mu = (-\alpha(t, r), 0, 0, 0)$  y la métrica espacial en simetría esférica está dada mediante

$$d^2l = \psi^4 (A dr^2 + r^2 B d\Omega^2) , \quad (4.15)$$

Será útil identificar que esta métrica tiene las siguientes componentes no nulas  $\gamma_{rr} = \psi^4 A$ ,  $\gamma_{\theta\theta} = \psi^4 B r^2$  y  $\gamma_{\varphi\varphi} = \psi^4 B r^2 \sin^2\theta$ , donde todas las funciones solo dependen de  $(t, r)$ . Mientras que las componentes de la métrica espacial inversa son  $\gamma^{rr} = 1/\psi^4 A$ ,  $\gamma^{\theta\theta} = 1/\psi^4 B r^2$  y  $\gamma^{\varphi\varphi} = 1/\psi^4 B r^2 \sin^2\theta$ .

Si la métrica espacio-temporal posee simetría esférica, entonces el tensor energía-momento total también la debe poseer. Por lo tanto, para demostrar esto, observamos la expresión (4.14) y notamos que, sea una métrica espacio-temporal con simetría esférica, bastará con demostrar que las cantidades totales del sistema  $\rho$ ,  $j_\mu$  y  $S_{\mu\nu}$  corresponden a cantidades con simetría esférica al reemplazar nuestro ansatz (4.1-4.4) en ellas. Para ello, usaremos las expresiones obtenidas de la subsección 3.2.3 del capítulo anterior.

**1. Densidad de energía (3.64):**

$$\rho = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 + \mu^2 ( \Phi_m^2 + a_m^2 ) ].$$

Reemplazamos nuestro ansatz en la expresión anterior, y operamos término por término. Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{E}_m^2 &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \gamma^{ii} (\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_i \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} (\mathcal{E}_m)_r (\bar{\mathcal{E}}_m)_r + \frac{1}{\psi^4 B r^2} \left[ (\mathcal{E}_m)_\theta (\bar{\mathcal{E}}_m)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\mathcal{E}_m)_\varphi (\bar{\mathcal{E}}_m)_\varphi \right] \right\} \\ &= \frac{|\epsilon_\ell|^2}{\psi^4 A} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 + \frac{|\xi_\ell|^2}{\psi^4 B r^2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \partial_\theta Y^{\ell m} \partial_\theta \bar{Y}^{\ell m} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi Y^{\ell m} \partial_\varphi \bar{Y}^{\ell m} \right] \end{aligned}$$

Así, usando la identidad de armónicos esféricos 1, (4.7), y 3, (4.11), obtenemos

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{E}_m^2 = \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 B r^2} |\xi_\ell|^2.$$

Para el segundo término, reemplazando las componentes necesarias del ansatz

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{B}_m^2 &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \gamma_{ii} (\mathcal{B}_m)^i (\bar{\mathcal{B}}_m)^i \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ \psi^4 B r^2 (\mathcal{B}_m)^\theta (\bar{\mathcal{B}}_m)^\theta + \psi^4 B r^2 \sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi (\bar{\mathcal{B}}_m)^\varphi \right\} \\ &= \psi^4 B r^2 |\zeta_\ell|^2 \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \partial_\theta Y^{\ell m} \partial_\theta \bar{Y}^{\ell m} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi Y^{\ell m} \partial_\varphi \bar{Y}^{\ell m} \right] \end{aligned}$$

y usando la identidad 3, (4.11), se reduce a

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{B}_m^2 = \ell(\ell+1)\psi^4 Br^2 |\zeta_\ell|^2.$$

Para el tercer término, su expresión se consigue de inmediato al reemplazar el ansatz para los potenciales escalares y la identidad 1, (4.7)

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \Phi_m^2 = |\phi_\ell|^2 \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 = |\phi_\ell|^2.$$

y finalmente, el cuarto término se obtiene siguiendo una secuencia de pasos completamente análogos a los realizados para reexpresar el primer término líneas arriba, así se obtiene

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_m^2 = \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 Br^2} |\beth_\ell|^2.$$

Por lo tanto, al reunir estos cuatro términos en la expresión de la densidad de energía y reordenando adecuadamente, se obtiene una densidad de energía sin dependencia angular

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 + |\phi_\ell|^2 \right] + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 Br^2} (|\xi_\ell|^2 + \mu^2 |\beth_\ell|^2) + \psi^4 Br^2 |\zeta_\ell|^2 \right] \right\}. \quad (4.16)$$

## 2. Densidad de momentos (3.65) :

$$j_i = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} [ E_{i\lambda\nu} (\bar{\mathcal{E}}_m)^\lambda (\mathcal{B}_m)^\nu + \mu^2 (a_m)_i \bar{\Phi}_m + c.c. ].$$

Nótese que en un sistema coordenado adaptado a la foliación, solo será necesario calcular sus componentes espaciales ya que a partir de estas se obtienen las componentes temporales covariante y contravariante. En efecto, la definición  $j_\mu := -n^\alpha \gamma_\mu^\beta T_{\alpha\beta}$  nos conduce a que  $j_\mu$  es ortogonal a  $\Sigma_t$ , luego de  $n^\mu j_\mu = 0$  se obtiene que  $j_0 = \beta^i j_i$  y de  $n_\mu j^\mu = 0$  se obtiene que  $j^0 = 0$ .

Empezaremos por el índice  $i = r$  de la expresión anterior

$$j_r = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} [ E_{rjk} (\bar{\mathcal{E}}_m)^j (\mathcal{B}_m)^k + \mu^2 (a_m)_r \bar{\Phi}_m + c.c. ].$$

Para el primer término, abrimos las sumas en los índices espaciales considerando que  $E_{ijk} = \sqrt{\gamma}\epsilon_{ijk}$  donde  $\epsilon_{r\theta\varphi} = -\epsilon_{r\varphi\theta} = 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{rjk}(\bar{\mathcal{E}}_m)^j(\mathcal{B}_m)^k &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{rjk}\gamma^{jj}(\bar{\mathcal{E}}_m)_j(\mathcal{B}_m)^k \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ (\sqrt{\gamma}\epsilon_{r\theta\varphi})\gamma^{\theta\theta}(\bar{\mathcal{E}}_m)_\theta(\mathcal{B}_m)^\varphi + (\sqrt{\gamma}\epsilon_{r\varphi\theta})\gamma^{\varphi\varphi}(\bar{\mathcal{E}}_m)_\varphi(\mathcal{B}_m)^\theta \right\}, \end{aligned}$$

luego, reemplazando nuestro ansatz en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{rjk}(\bar{\mathcal{E}}_m)^j(\mathcal{B}_m)^k &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\psi^4 B r^2} (\bar{\xi}_\ell \partial_\theta \bar{Y}^{\ell m}) \left( -\zeta_\ell \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\gamma}}{\psi^4 B r^2 \sin^2 \theta} (\bar{\xi}_\ell \partial_\varphi \bar{Y}^{\ell m}) \left( \zeta_\ell \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) \right\}, \end{aligned}$$

y reemplazando el valor del elemento de volumen 3-dimensional  $\sqrt{\gamma} = A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta$ , simplificando y reordenando adecuadamente se obtiene

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{rlk}(\bar{\mathcal{E}}_m)^l(\mathcal{B}_m)^k = -A^{1/2} \psi^2 \bar{\xi}_\ell \zeta_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \partial_\theta Y^{\ell m} \partial_\theta \bar{Y}^{\ell m} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi Y^{\ell m} \partial_\varphi \bar{Y}^{\ell m} \right),$$

y empleando la identidad de armónicos esféricos 3, (4.11), se obtiene

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{rlk}(\bar{\mathcal{E}}_m)^l(\mathcal{B}_m)^k = -\ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2\bar{\xi}_\ell\zeta_\ell.$$

Mientras que para el segundo término de la expresión de  $j_r$ , usamos la identidad 1, (4.7), obteniendo

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu^2 (a_m)_r \bar{\Phi}_m = \mu^2 \aleph_\ell \bar{\phi}_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 = \mu^2 \aleph_\ell \bar{\phi}_\ell.$$

Así, reuniendo los resultados anteriores, obtenemos una componente radial  $j_r$  sin dependencia angular

$$j_r = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2\bar{\xi}_\ell\zeta_\ell + \mu^2\aleph_\ell\bar{\phi}_\ell + c.c. \right\}. \quad (4.17)$$

Por otro lado, con respecto a las componentes angulares, analizamos primero para  $i = \theta$ , teniendo como expresión

$$j_\theta = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} \left[ E_{\theta jk}(\bar{\mathcal{E}}_m)^j(\mathcal{B}_m)^k + \mu^2 (a_m)_\theta \bar{\Phi}_m + c.c. \right].$$



Luego, el primer término de esta se reexpresa como

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{\theta j k} (\bar{\mathcal{E}}_m)^j (\mathcal{B}_m)^k &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{\theta j k} \gamma^{j j} (\bar{\mathcal{E}}_m)_j (\mathcal{B}_m)^k \\ &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ (\sqrt{\gamma} \epsilon_{\theta r \varphi}) \gamma^{r r} (\bar{\mathcal{E}}_m)_r (\mathcal{B}_m)^\varphi + (\sqrt{\gamma} \epsilon_{\theta \varphi r}) \gamma^{\varphi \varphi} (\bar{\mathcal{E}}_m)_\varphi (\mathcal{B}_m)^r \right\}, \end{aligned}$$

y reemplazando nuestro ansatz en la expresión anterior teniendo en cuenta que  $(\mathcal{B}_m)^r = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} E_{\theta j k} (\bar{\mathcal{E}}_m)^j (\mathcal{B}_m)^k &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ -\frac{\sqrt{\gamma}}{\psi^4 A} (\bar{\epsilon}_\ell \bar{Y}^{\ell m}) \left( -\zeta_\ell \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma} \bar{\epsilon}_\ell \zeta_\ell}{\psi^4 A \sin \theta} \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \bar{Y}^{\ell m} \partial_\theta Y^{\ell m} \right) = 0. \end{aligned}$$

Lo cual, resulta igual a cero al utilizar la identidad 2 de los armónicos esféricos (4.8), pues anula el término dentro del paréntesis en la última línea. Luego, el segundo término de  $j_\theta$  también se anula gracias a esta identidad. En efecto, este se expresa como

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu^2 (a_m)_\theta \bar{\Phi}_m = \mu^2 \bar{\zeta}_\ell \bar{\phi}_\ell \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \bar{Y}^{\ell m} \partial_\theta Y^{\ell m} \right) = 0$$

Así, considerandos estos resultados y sin necesidad de calcular los conjugados complejos de los términos que acabamos de calcular, pues  $0^* = 0$ , tenemos como componente polar de la densidad de momento a  $j_\theta = 0$ .

El mismo procedimiento análogo se puede realizar para  $j_\varphi$ , reemplazando nuestro ansatz en su expresión y utilizando la propiedad 2, (4.8), lo cual nos lleva a una componente azimutal igual a cero. Por lo que las componentes angulares de la densidad de momentos son cero

$$j_\theta = j_\varphi = 0. \quad (4.18)$$

Siendo consistente con el hecho que un 3-vector que representa la contribución total de materia en simetría esférica solo tiene componente radial.

### 3. Tensor espacial de esfuerzos (3.66):

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} \left\{ \gamma_{ij} [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 ] - [ (\mathcal{B}_m)_i (\bar{\mathcal{B}}_m)_j + (\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + c.c. ] \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 [ ((a_m)_i (\bar{a}_m)_j + c.c.) - \gamma_{ij} (a_m^2 - \Phi_m^2) ] \right\}. \end{aligned}$$

Nótese que en un sistema coordenado adaptado a la foliación, solo será necesario obtener las componentes espaciales de  $S_{\mu\nu}$ , pues estas bastan para encontrar las componentes que tengan un índices temporales. En efecto, ya que la definición del tensor espacial de esfuerzos es  $S_{\mu\nu} := \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ , este es ortogonal a la dirección normal a  $\Sigma_t$ . Luego, a partir de  $n_\mu S^{\mu\nu} = 0$  se obtiene  $S^{0\nu} = 0$  con  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Y a de partir de  $n^\mu S_{\mu\nu} = 0$  se deduce que  $S_{0k} = \beta^i S_{ik}$  y  $S_{00} = \beta^i \beta^j S_{ij}$ .

Expresaremos primero las componentes de  $S_{ij}$  no diagonales. En este caso, debido a que la métrica espacial  $\gamma_{\mu\nu}$  en simetría esférica es diagonal la expresión anterior de  $S_{ij}$  con  $i \neq j$  resulta en

$$S_{ij} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} \left\{ - [ (\mathcal{B}_m)_i (\bar{\mathcal{B}}_m)_j + (\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_j + c.c. ] + \mu^2 [ ((a_m)_i (\bar{a}_m)_j + c.c.) ] \right\}.$$

Analizamos esta expresión por casos. El primer caso será tomar  $i = r$ , y  $j = A = \theta, \varphi$ , donde consideramos la notación de índices espaciales en la métrica de la 2-esfera usadas en la propiedad 2 de los armónicos esféricos (4.8).

$$S_{rA} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} \left\{ - [ (\mathcal{B}_m)_r (\bar{\mathcal{B}}_m)_A + (\mathcal{E}_m)_r (\bar{\mathcal{E}}_m)_A + c.c. ] + \mu^2 [ ((a_m)_r (\bar{a}_m)_A + c.c.) ] \right\},$$

luego, identificamos las expresiones de cada término entre llaves. De nuestro ansatz sabemos que  $(\mathcal{B}_m)^r = 0$ , entonces el primer término se anula, pues

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mathcal{B}_m)_r (\bar{\mathcal{B}}_m)_A = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \gamma_{rr} (\mathcal{B}_m)^r (\bar{\mathcal{B}}_m)_A = 0,$$

mientras que los términos restantes se anulan por la propiedad 2, (4.8). En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mathcal{E}_m)_r (\bar{\mathcal{E}}_m)_A &= \epsilon_\ell \bar{\xi}_\ell \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^{\ell m} \partial_A \bar{Y}^{\ell m} \right) = 0 \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} (a_m)_r (\bar{a}_m)_A &= \varkappa_\ell \bar{\varkappa}_\ell \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^{\ell m} \partial_A \bar{Y}^{\ell m} \right) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene  $S_{r\theta} = S_{r\varphi} = 0$ . Por otro lado, si tomamos en la expresión para  $S_{ij}$  con  $i \neq j$  los índices  $i, j = A, B = \theta, \varphi$ , es decir  $ij = \theta\varphi$  o  $ij = \varphi\theta$ , se tiene

$$S_{AB} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{8\pi} \left\{ - [ (\mathcal{B}_m)_A (\bar{\mathcal{B}}_m)_B + (\mathcal{E}_m)_A (\bar{\mathcal{E}}_m)_B + c.c. ] + \mu^2 [ ((a_m)_A (\bar{a}_m)_B + c.c.) ] \right\},$$

donde todos los términos dentro de las llaves se anulan al aplicar la identidad 4 de los armónicos esféricos (4.12), ya que la métrica de la 2-esfera (4.9) con índices diferentes es cero,  $\hat{g}_{AB} = 0$ . En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mathcal{B}_m)_A (\bar{\mathcal{B}}_m)_B &= -\frac{|\zeta_\ell|^2}{\sin^2 \theta} \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_B \bar{Y}^{\ell m} \partial_A Y^{\ell m} \right) = -\frac{|\zeta_\ell|^2}{\sin^2 \theta} \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{AB} = 0. \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mathcal{E}_m)_A (\bar{\mathcal{E}}_m)_B &= |\xi_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_A Y^{\ell m} \partial_B \bar{Y}^{\ell m} \right) = |\xi_\ell|^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{AB} = 0 \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} (a_m)_A (\bar{a}_m)_B &= |\varpi_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_A Y^{\ell m} \partial_B \bar{Y}^{\ell m} \right) = |\varpi_\ell|^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{AB} = 0 \end{aligned}$$

Así, se tiene que  $S_{\theta\varphi} = S_{\varphi\theta} = 0$ . En resumen, las componentes no diagonales del tensor espacial de esfuerzos son todas iguales a cero

$$S_{r\theta} = S_{r\varphi} = S_{\theta\varphi} = 0. \quad (4.19)$$

Finalmente, expresaremos las componentes diagonales de  $S_{ij}$ . Donde, factorizamos el término  $\gamma_{ii}$ , como sigue

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\gamma_{ii}}{8\pi} \left\{ [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 ] - \frac{1}{\gamma_{ii}} [ (\mathcal{B}_m)_i (\bar{\mathcal{B}}_m)_i + (\mathcal{E}_m)_i (\bar{\mathcal{E}}_m)_i + c.c. ] \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 [ \frac{1}{\gamma_{ii}} ((a_m)_i (\bar{a}_m)_i + c.c.) - (a_m^2 - \Phi_m^2) ] \right\}, \end{aligned}$$

téngase en cuenta que en los términos de esta expresión no tenemos una sumatoria en  $ii$ . Luego, en primer lugar tenemos a  $S_{rr}$  dado por

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\psi^4 A}{8\pi} \left\{ [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 ] - \frac{1}{\psi^4 A} [ (\mathcal{B}_m)_r (\bar{\mathcal{B}}_m)_r + (\mathcal{E}_m)_r (\bar{\mathcal{E}}_m)_r + c.c. ] \right. \\ &\quad \left. + \mu^2 [ \frac{1}{\psi^4 A} ((a_m)_r (\bar{a}_m)_r + c.c.) - (a_m^2 - \Phi_m^2) ] \right\}, \end{aligned}$$

donde, usando los términos calculados líneas arriba para reexpresar la densidad de energía, tenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2) &= \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 B r^2} |\xi_\ell|^2 + \psi^4 B r^2 |\zeta_\ell|^2 \right], \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu^2 (a_m^2 - \Phi_m^2) &= \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 - |\phi_\ell|^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 B r^2} |\varpi_\ell|^2 \right]. \end{aligned}$$

Estas expresiones junto a los términos que cuentan con conjugadas complejas en la expresión de  $S_{rr}$ , los cuales al reemplazar nuestro ansatz, son

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{B}_m)_r(\bar{\mathcal{B}}_m)_r + c.c.] &= 0, \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{E}_m)_r(\bar{\mathcal{E}}_m)_r + c.c.] &= 2|\epsilon_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 \right) = 2|\epsilon_\ell|^2, \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu^2 [(a_m)_r(\bar{a}_m)_r + c.c.] &= 2\mu^2 |\aleph_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 \right) = 2\mu^2 |\aleph_\ell|^2, \end{aligned}$$

nos permiten reexpresar  $S_{rr}$ , al reemplazarlos, restarlos y factorizarlos adecuadamente. Así, tenemos

$$\begin{aligned} S_{rr} = \frac{\psi^4 A}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 + |\phi_\ell|^2 \right] \right. \\ \left. + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 Br^2} (|\xi_\ell|^2 - \mu^2 |\beth_\ell|^2) + \psi^4 Br^2 |\zeta_\ell|^2 \right] \right\}. \quad (4.20) \end{aligned}$$

En segundo lugar, tenemos a  $S_{AA}$ , con  $AA = \theta\theta$  o  $AA = \varphi\varphi$ , dado por

$$\begin{aligned} S_{AA} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{\psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA}}{8\pi} \left\{ [ \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2 ] - \frac{1}{\psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA}} [ (\mathcal{B}_m)_A(\bar{\mathcal{B}}_m)_A + (\mathcal{E}_m)_A(\bar{\mathcal{E}}_m)_A + c.c. ] \right. \\ \left. + \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA}} ((a_m)_A(\bar{a}_m)_A + c.c.) - (a_m^2 - \Phi_m^2) \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado  $\gamma_{AA} = \psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA}$ . Esta cantidad en función de nuestro ansatz se expresa con los resultados obtenidos líneas arriba para  $\sum_m (\mathcal{E}_m^2 + \mathcal{B}_m^2)$  y  $\sum_m \mu^2 (a_m^2 - \Phi_m^2)$  y las siguientes expresiones, donde usamos la identidad 4, (4.12)

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{B}_m)_A(\bar{\mathcal{B}}_m)_A + c.c.] &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\gamma_{AA})^2 [(\mathcal{B}_m)^A(\bar{\mathcal{B}}_m)^A + c.c.] \\ &= 2(\psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA})^2 \frac{|\zeta_\ell|^2}{\sin^2 \theta} \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_B Y^{\ell m} \partial_B Y^{\ell m} \right) \\ &= (\psi^4 Br^2 \hat{g}_{AA})^2 \frac{|\zeta_\ell|^2}{\sin^2 \theta} \ell(\ell+1) \hat{g}_{BB}, \end{aligned}$$

donde, hemos empleado los índices  $BB$ , los cuales son  $BB = \theta\theta$  cuando  $AA = \varphi\varphi$  y

viceversa. Así, usando  $\hat{g}_{\theta\theta} = 1$  y  $\hat{g}_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{B}_m)_\theta(\bar{\mathcal{B}}_m)_\theta + c.c.] &= \ell(\ell+1)(\psi^4 Br^2)^2 |\zeta_\ell|^2, \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{B}_m)_\varphi(\bar{\mathcal{B}}_m)_\varphi + c.c.] &= \ell(\ell+1)(\psi^4 Br^2)^2 \sin^2 \theta |\zeta_\ell|^2. \end{aligned}$$

Mientras que para los demás términos de  $S_{AA}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(\mathcal{E}_m)_A(\bar{\mathcal{E}}_m)_A + c.c.] &= 2|\xi_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_A Y^{\ell m} \partial_A \bar{Y}^{\ell m} \right) = \ell(\ell+1) \hat{g}_{AA} |\xi_\ell|^2, \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu^2 [(a_m)_A(\bar{a}_m)_A + c.c.] &= 2\mu^2 |\mathfrak{A}_\ell|^2 \left( \sum_{m=-\ell}^{\ell} \partial_A Y^{\ell m} \partial_A \bar{Y}^{\ell m} \right) = \ell(\ell+1) \hat{g}_{AA} \mu^2 |\mathfrak{A}_\ell|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, reuniendo estos resultados en  $S_{AA}$ , considerando explícitamente  $AA = \theta\theta$  o  $AA = \varphi\varphi$  y empleando un poco de álgebra, tenemos

$$S_{\theta\theta} = \frac{\psi^4 Br^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 - \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\mathfrak{N}_\ell|^2 - |\phi_\ell|^2 \right] \right\}, \quad (4.21)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\psi^4 Br^2 \sin^2 \theta}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 - \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\mathfrak{N}_\ell|^2 - |\phi_\ell|^2 \right] \right\}. \quad (4.22)$$

En resumen, encontramos que el tensor energía-momento del sistema de Einstein-(multi)Proca, con los campos de Proca dados por nuestro ansatz (4.1-4.4), y expresado mediante su descomposición ortogonal

$$T_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu \rho + n_\mu j_\nu + j_\nu n_\mu + S_{\mu\nu}.$$

con  $n_\mu = (-\alpha(t, r), 0, 0, 0)$  y  $n^\mu = (1/\alpha(t, r), -\beta^i(t, r)/\alpha(t, r))$  y con la métrica espacial en simetría esférica (4.15), es simétricamente esférico. Siendo sus cantidades

de materia en 3+1 no nulas las siguientes

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 + |\phi_\ell|^2 \right] + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 B r^2} (|\xi_\ell|^2 + \mu^2 |\beth_\ell|^2) + \psi^4 B r^2 |\zeta_\ell|^2 \right] \right\}, \quad (4.23)$$

$$j_r = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\ell(\ell+1) A^{1/2} \psi^2 \bar{\xi}_\ell \zeta_\ell + \mu^2 \aleph_\ell \bar{\phi}_\ell + c.c. \right\}, \quad (4.24)$$

$$S_{rr} = \frac{\psi^4 A}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 + \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 + |\phi_\ell|^2 \right] + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 B r^2} (|\xi_\ell|^2 - \mu^2 |\beth_\ell|^2) + \psi^4 B r^2 |\zeta_\ell|^2 \right] \right\}, \quad (4.25)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{\psi^4 B r^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 - \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 - |\phi_\ell|^2 \right] \right\}, \quad (4.26)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\psi^4 B r^2 \sin^2 \theta}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\psi^4 A} |\epsilon_\ell|^2 - \mu^2 \left[ \frac{1}{\psi^4 A} |\aleph_\ell|^2 - |\phi_\ell|^2 \right] \right\}, \quad (4.27)$$

donde todas las funciones de materia  $\{\phi_\ell, \aleph_\ell, \beth_\ell, \epsilon_\ell, \xi_\ell, \zeta_\ell\}$  y las funciones métricas espaciales  $\{\psi, A, B\}$  solo dependen de las coordenadas  $(t, r)$  asegurando así la simetría esférica.

### 4.3. Ecuaciones de evolución y constricción

El resultado de la sección anterior demuestra que nuestro ansatz (4.1-4.4) genera un espacio-tiempo esféricamente simétrico, por lo tanto, podemos usar las ecuaciones de evolución (3.74-3.77) y de constricción (3.78-(3.79)) de los campos de Proca en 3+1 que deducimos en la sección 3.4. del capítulo anterior, donde impusimos la simetría esférica en el espacio-tiempo a un sistema de Einstein-(multi)Proca.

Se espera que estas ecuaciones no presenten expresiones que dependen de las coordenadas angulares, sino que resulten ser ecuaciones que nos permitan determinar a las amplitudes radiales  $\{\phi_\ell, \aleph_\ell, \beth_\ell, \epsilon_\ell, \xi_\ell, \zeta_\ell\}$  dependientes del tiempo. Así, procederemos a reemplazar nuestro ansatz en cada ecuación de evolución y constricción, teniendo una consideración adicional. Fijaremos una norma tal que el vector de corrimiento tenga componente radial igual a cero,  $\beta^r = 0$ , lo que equivale que  $\vec{\beta} = \vec{0}$  y que las derivadas de Lie respecto a este vector presentes en las ecuaciones de evolución se anulen. Esta elección de norma se debe a dos motivos: (1) Estamos buscando proponer la estrella de  $\ell$ -Proca como una estrella bosónica en un espacio-tiempo

estático. En ese caso, sabemos por el análisis realizado en la sección 2.3. que  $\vec{\beta} = \vec{0}$  en todo instante de tiempo. (2) Para nuestros futuros estudios de estabilidad dinámica, al momento de utilizar datos iniciales, consideraremos que estos sean simétricos en el tiempo, por lo que debemos asegurar un espacio-tiempo inicialmente estático fijando  $\vec{\beta} = \vec{0}$  a  $t = 0$ , además de la independencia temporal de la métrica. En este caso, debido a que el espacio-tiempo es regular en todo punto, no será necesario emplear un vector de corrimiento diferente de cero y podemos fijar mediante una elección de norma que  $\vec{\beta} = \vec{0}$  en toda la evolución temporal.

Sea la ecuación de evolución para cada campo escalar (3.74)

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_m = & -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ \partial_r (a_m)_r + (a_m)_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ & - \frac{\alpha}{B\psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta (a_m)_\theta] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi (a_m)_\varphi \right] + \alpha K \Phi_m , \end{aligned}$$

al reemplazar nuestro ansatz, tenemos

$$\begin{aligned} (\partial_t \phi_\ell) Y^{\ell m} = & -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ (\partial_r \aleph_\ell) Y^{\ell m} + \aleph_\ell Y^{\ell m} \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ & - \frac{\alpha}{B\psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi (\partial_\varphi Y^{\ell m}) \right] \beth_\ell + \alpha K \phi_\ell Y^{\ell m} , \end{aligned}$$

luego, utilizamos la ecuación que define a los armónicos esféricos dada en (4.13)

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y^{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y^{\ell m} .$$

y simplificamos la función de armónico esférico que aparece en ambos lados de la ecuación de evolución, obteniendo una ecuación de evolución para la amplitud radial  $\phi_\ell(t, r)$

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\ell = & -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ (\partial_r \aleph_\ell) + \aleph_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ & + \frac{\ell(\ell + 1)}{B\psi^4 r^2} \alpha \beth_\ell + \alpha K \phi_\ell . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nótese que el resultado de las  $2\ell + 1$  ecuaciones de evolución para  $\Phi_m$  es sólo una ecuación de evolución para  $\phi_\ell$ , ya que esta amplitud radial es la misma para los  $2\ell + 1$  campos de Proca constituyentes etiquetados con los valores de  $m$ , dado un  $\ell$  fijo. Esta misma idea se repetirá en las ecuaciones que deduzcamos a continuación.

Con respecto a los campos potenciales 3-vectoriales, sus ecuaciones de evolución en un espacio-tiempo con simetría esférica son (3.75)

$$\partial_t(a_m)_i = -\alpha(\mathcal{E}_m)_i - \partial_i(\alpha\Phi_m) .$$

Es en esta ecuación, que se hace útil tener nuestros ansatz para  $(\mathcal{E}_m)_i$  escritos en componentes covariantes de la misma manera que  $(a_m)_i$ , tal como puntualizamos en la sección 4.1. Así, a partir de esta ecuación, tomamos el índice  $i = r$  y reemplazamos nuestro ansatz, obteniendo

$$\partial_t(\aleph_\ell Y^{\ell m}) = -\alpha\epsilon_\ell Y^{\ell m} - \partial_r(\alpha\phi_\ell Y^{\ell m}) ,$$

luego, simplificando la función de armónico esférico, obtenemos una única ecuación de evolución para la amplitud radial  $\aleph_\ell(t, r)$

$$\partial_t\aleph_\ell = -\alpha\epsilon_\ell - \partial_r(\alpha\phi_\ell) . \quad (4.29)$$

Por otro lado, al tomar un índice angular  $i = A = \theta, \varphi$  en la ecuación (3.75) y reemplazar nuestro ansatz, tenemos

$$\partial_t(\beth_\ell \partial_A Y^{\ell m}) = -\alpha\xi_\ell \partial_A Y^{\ell m} - \partial_A(\alpha\phi_\ell Y^{\ell m}) ,$$

luego, teniendo en cuenta la dependencia no angular de  $\alpha(t, r)$  y  $\phi_\ell(t, r)$ , presentes en el último término a la derecha de la igualdad, podemos simplificar en todos los términos el factor  $\partial_A Y^{\ell m}$ , obteniendo una única ecuación de evolución para  $\beth_\ell(t, r)$

$$\partial_t\beth_\ell = -\alpha\xi_\ell - \alpha\phi_\ell , \quad (4.30)$$

De esta manera, obtenemos las ecuaciones de evolución para las amplitudes radiales de los potenciales de Proca en 3+1.

Con respecto a las ecuaciones de evolución de las amplitudes radiales de los campos eléctricos, tenemos las ecuaciones de evolución (3.76) para cada uno de los  $2\ell + 1$  campos eléctricos dadas por

$$\partial_t(\mathcal{E}_m)^i = \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j[\alpha(\mathcal{B}_m)_k] + \alpha[\mu^2(a_m)^i + K(\mathcal{E}_m)^i] .$$

Sin embargo, debido a que nuestro ansatz considera las componentes covariantes de los campos potenciales 3-vectoriales (4.2) y los campos eléctricos (4.3), será conveniente reexpresar la ecuación anterior con el índice  $i$  covariante. Esto se logra considerando que la métrica espacial es diagonal y usando la ecuación de ADM para la componente  $\gamma_{ii}$  dada por (2.12), la cual es con  $\vec{\beta} = \vec{0}$

$$\partial_t\gamma_{ii} = -2\alpha K_{ii} .$$



Así, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_t(\mathcal{E}_m)_i &= \partial_t[\gamma_{ij}(\mathcal{E}_m)^j] = \partial_t[\gamma_{ii}(\mathcal{E}_m)^i] \\ &= -2\alpha K_{ii}(\mathcal{E}_m)^i + \gamma_{ii} \left\{ \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] + \alpha[\mu^2(a_m)^i + K(\mathcal{E}_m)^i] \right\} \\ &= -2\alpha K_i^i(\mathcal{E}_m)_i + \gamma_{ii} \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] + \alpha[\mu^2(a_m)_i + K(\mathcal{E}_m)_i].\end{aligned}$$

Nótese que en esta expresión el índice  $i$  está fijo y los términos con aparente suma en  $i$  no lo son debido, debido a que esta ya se desarrolló tomando en cuenta la diagonalidad de  $\gamma_{ij}$ . Luego, agrupando adecuadamente se obtiene

$$\partial_t(\mathcal{E}_m)_i = \gamma_{ii} \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] + \alpha[\mu^2(a_m)_i + (K - 2K_i^i)(\mathcal{E}_m)_i]. \quad (4.31)$$

Ahora, pasamos a analizar el caso con  $i = r$

$$\partial_t(\mathcal{E}_m)_r = \gamma_{rr} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] + \alpha[\mu^2(a_m)_r + (K - K_r^r)(\mathcal{E}_m)_r]. \quad (4.32)$$

Convenientemente expresamos término por término, iniciando con el primero, aquel relacionado con el rotacional del campo magnético

$$\begin{aligned}\gamma_{rr} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] &= \frac{\gamma_{rr}}{\gamma^{1/2}} \epsilon^{rjk} \partial_j [\alpha \gamma_{kk}(\mathcal{B}_m)^k] \\ &= \frac{\gamma_{rr}}{\gamma^{1/2}} \left\{ \epsilon^{r\theta\varphi} \partial_\theta [\alpha \gamma_{\varphi\varphi}(\mathcal{B}_m)^\varphi] + \epsilon^{r\varphi\theta} \partial_\varphi [\alpha \gamma_{\theta\theta}(\mathcal{B}_m)^\theta] \right\}\end{aligned}$$

Reemplazando nuestro ansatz, las componentes métricas espaciales y el valor de la raíz cuadrada del determinante  $\gamma^{1/2} = A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta$ , y considerando que  $\epsilon^{r\theta\varphi} = 1$  se obtiene

$$\begin{aligned}\gamma_{rr} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] &= \frac{\psi^4 A}{A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta} \left\{ \partial_\theta [\alpha \psi^4 B r^2 \sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi] - \partial_\varphi [\alpha \psi^4 B r^2 (\mathcal{B}_m)^\theta] \right\} \\ &= \frac{A^{1/2}}{B \psi^2 r^2 \sin \theta} \left\{ \alpha \psi^4 B r^2 \partial_\theta [\sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi] - \alpha \psi^4 B r^2 \partial_\varphi [(\mathcal{B}_m)^\theta] \right\} \\ &= \frac{A^{1/2} \psi^2 \alpha}{\sin \theta} \left\{ \partial_\theta (-\zeta_\ell \sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) - \partial_\varphi \left( \frac{\zeta_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) \right\} \\ &= -A^{1/2} \psi^2 \alpha \zeta_\ell \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y^{\ell m} \right\}\end{aligned}$$

lo cual, gracias a la ecuación de definición de las función de armónicos esféricos, (4.13), identificamos que

$$\gamma_{rr} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{B}_m)_k] = \ell(\ell + 1) A^{1/2} \psi^2 \alpha \zeta_\ell Y^{\ell m}.$$

Luego, reemplazando este resultado en la ecuación de evolución de arriba (4.32) y reemplazando nuestro ansatz en los términos faltantes de esta, se tiene

$$\partial_t(\epsilon_\ell Y^{\ell m}) = \ell(\ell + 1)A^{1/2}\psi^2\alpha \zeta_\ell Y^{\ell m} + \alpha[\mu^2\aleph_\ell Y^{\ell m} + (K - K_r^r)\epsilon_\ell Y^{\ell m}] ,$$

así, simplificando  $Y^{\ell m}$  en todos los términos, se obtiene una única ecuación de evolución para la amplitud radial  $\epsilon_\ell$

$$\partial_t\epsilon_\ell = \ell(\ell + 1)A^{1/2}\psi^2\alpha \zeta_\ell + \alpha[\mu^2\aleph_\ell + (K - K_r^r)\epsilon_\ell] . \quad (4.33)$$

Por otro lado, analizamos el caso  $i = A = \theta, \varphi$  de la ecuación de evolución de las componentes covariantes de los campos eléctricos (4.31). En particular analizamos el caso  $i = \theta$ , el cual se expresa como

$$\partial_t(\mathcal{E}_m)_\theta = \gamma_{\theta\theta}\frac{\epsilon^{\theta j k}}{\gamma^{1/2}}\partial_j[\alpha\gamma_{kk}(\mathcal{B}_m)^k] + \alpha[\mu^2(a_m)_\theta + (K - K_\theta^\theta)(\mathcal{E}_m)_\theta] . \quad (4.34)$$

este caso, llegaremos a una única ecuación de evolución considerando que  $(\mathcal{B}_m)^r = 0$ , que  $\epsilon^{\theta r \varphi} = -1$  y reemplazando nuestro ansatz adecuadamente

$$\begin{aligned} (\partial_t\xi_\ell)\partial_\theta Y^{\ell m} &= \frac{\psi^4 Br^2 \epsilon^{\theta r \varphi}}{A^{1/2} Br^2 \psi^6 \sin\theta} \partial_r[\alpha\psi^4 Br^2 \sin^2\theta(\mathcal{B}_m)^\varphi] + \alpha[\mu^2\beth_\ell + (K - K_\theta^\theta)\xi_\ell] \partial_\theta Y^{\ell m} \\ &= \frac{-1}{A^{1/2}\psi^2 \sin\theta} \partial_r \left[ \alpha\psi^4 Br^2 \sin^2\theta(-\zeta_\ell) \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin\theta} \right] + \alpha[\mu^2\beth_\ell + (K - K_\theta^\theta)\xi_\ell] \partial_\theta Y^{\ell m} \end{aligned}$$

Simplificando los factores  $\sin\theta$  y luego el factor  $\partial_\theta Y^{\ell m}$  presente en todos los términos de la ecuación, se obtiene una única ecuación de evolución para  $\xi_\ell$

$$\partial_t\xi_\ell = \frac{1}{A^{1/2}\psi^2} \partial_r (\alpha\psi^4 Br^2 \zeta_\ell) + \alpha[\mu^2\beth_\ell + (K - K_\theta^\theta)\xi_\ell] . \quad (4.35)$$

Si procedemos a analizar el caso faltante  $i = \varphi$  de (4.31), siguiendo un procedimiento completamente análogo al anterior y considerando que en un espacio-tiempo con simetría esférica se cumple que  $K_\theta^\theta = K_\varphi^\varphi$ , encontramos la misma ecuación de evolución para  $\xi_\ell$  que acabamos de obtener. Además, es importante resaltar que los términos  $K_r^r, K_\theta^\theta, K_\varphi^\varphi$ , así como la traza de la curvatura extrínseca  $K = \sum_i K_i^i$ , no quiebran la simetría esférica pues como  $K_i^i = -\partial_t\gamma_i^i/2\alpha$ , estos términos solo dependen de  $(t, r)$  debido a la dependencia que heredan de  $\gamma_A^A$  y  $\alpha$ .

Para finalizar con las ecuaciones de evolución, analicemos dichas ecuaciones de correspondientes para los  $2\ell + 1$  campos magnéticos (3.77)

$$\partial_t(\mathcal{B}_m)^i = -\frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}}\partial_j[\alpha(\mathcal{E}_m)_k] + \alpha K(\mathcal{B}_m)^i .$$

El caso  $i = r$  se satisface trivialmente. En efecto, esto se obtiene al considerar que  $(\mathcal{B}_m)^r = 0$  y que el término asociado al rotacional resulta ser cero también

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{E}_m)_k] &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \epsilon^{r\theta\varphi} \partial_\theta [\alpha(\mathcal{E}_m)_\varphi] + \epsilon^{r\varphi\theta} \partial_\varphi [\alpha(\mathcal{E}_m)_\theta] \} \\ &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \partial_\theta [\alpha \xi_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m}] - \partial_\varphi [\alpha \xi_\ell \partial_\theta Y^{\ell m}] \} = 0. \end{aligned}$$

Mientras que el caso  $i = \theta$ ,  $\varphi$  nos resulta en una misma ecuación de evolución. Por ejemplo, para el caso  $i = \theta$ , al abrir las sumas en el término rotacional, la ecuación resulta

$$\begin{aligned} \partial_t (\mathcal{B}_m)^\theta &= -\frac{\epsilon^{\theta jk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j [\alpha(\mathcal{E}_m)_k] + \alpha K (\mathcal{B}_m)^\theta \\ &= -\frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \epsilon^{\theta r\varphi} \partial_r [\alpha(\mathcal{E}_m)_\varphi] + \epsilon^{\theta\varphi r} \partial_\varphi [\alpha(\mathcal{E}_m)_r] \} + \alpha K (\mathcal{B}_m)^\theta, \end{aligned}$$

y al reemplazar nuestro ansatz y el valor de  $\gamma^{1/2}$ , se tiene la ecuación

$$\partial_t \left( \zeta_\ell \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right) = -\frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta} \{ -\partial_r [\alpha \xi_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m}] + \partial_\varphi [\alpha \epsilon_\ell Y^{\ell m}] \} + \alpha K \zeta_\ell \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta},$$

luego, simplificando el factor  $\partial_\varphi Y^{\ell m} / \sin \theta$  en todos los elementos de la ecuación, se obtiene una única ecuación de evolución para la amplitud radial  $\zeta_\ell$

$$\partial_t \zeta_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} [\partial_r (\alpha \xi_\ell) - \alpha \epsilon_\ell] + \alpha K \zeta_\ell. \quad (4.36)$$

Luego, al analizar el caso  $i = \varphi$ , siguiendo los mismos pasos, se obtiene la misma ecuación de evolución anterior.

Ahora, procedamos a obtener las ecuaciones de las constricciones que cumplen las amplitudes radiales de nuestro ansatz. Primero, sea la ecuación de Gauss para el campo eléctrico (3.78)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{A \psi^4} \left[ \partial_r (\mathcal{E}_m)_r + (\mathcal{E}_m)_r \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{B \psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta (\mathcal{E}_m)_\theta] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi (\mathcal{E}_m)_\varphi \right] + \mu^2 \Phi_m. \end{aligned}$$

Al reemplazar nuestro ansatz, queda como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{A \psi^4} \left[ \partial_r (\epsilon_\ell Y^{\ell m}) + \epsilon_\ell Y^{\ell m} \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{B \psi^4 r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y^{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y^{\ell m} \right] \xi_\ell + \mu^2 \phi_\ell Y^{\ell m}, \end{aligned}$$

y al utilizar la ecuación que define a los armónicos esféricos, (4.13), y luego simplificar en todos los términos el factor  $Y^{\ell m}$ , se obtiene

$$0 = \frac{1}{A\psi^4} \left[ \partial_r \epsilon_\ell + \epsilon_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \xi_\ell + \mu^2 \phi_\ell . \quad (4.37)$$

Esto es la única ecuación de constricción de Gauss para las amplitudes radiales  $\epsilon_\ell, \xi_\ell, \phi_\ell$  de nuestro ansatz.

Y finalmente la expresión para el campo magnético dado como un campo solenoidal (3.79), es decir, con divergencia nula es

$$(\mathcal{B}_m)^i = \frac{\epsilon^{ijk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j (a_m)_k , \quad (4.38)$$

Esta expresión, como mencionamos en el capítulo anterior, equivale a la constricción de Gauss para cada uno de los campos magnéticos. Resulta que la componente  $i = r$  de esta ecuación se cumple trivialmente con nuestro ansatz. En efecto, esto se obtiene al considerar que  $(\mathcal{B}_m)^r = 0$  y

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{rjk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j (a_m)_k &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \epsilon^{r\theta\varphi} \partial_\theta (a_m)_\varphi + \epsilon^{r\varphi\theta} \partial_\varphi (a_m)_\theta \}, \\ &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \partial_\theta (\beth_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m}) - \partial_\varphi (\beth_\ell \partial_\theta Y^{\ell m}) \} = 0, \end{aligned}$$

Por otro lado, al analizar el caso  $i = \theta$  se tiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_m)^\theta &= \frac{\epsilon^{\theta jk}}{\gamma^{1/2}} \partial_j (a_m)_k \\ (\mathcal{B}_m)^\theta &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} \{ \epsilon^{\theta\varphi r} \partial_\varphi (a_m)_r + \epsilon^{\theta r\varphi} \partial_r (a_m)_\varphi \} \\ \zeta_\ell \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta} &= \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2 \sin \theta} \{ \aleph_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m} - \partial_r \beth_\ell \partial_\varphi Y^{\ell m} \} , \end{aligned}$$

luego, al simplificar el factor  $\partial_\varphi Y^{\ell m} / \sin \theta$  en ambos términos se obtiene una ecuación de constricción

$$\zeta_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} \{ \aleph_\ell - \partial_r \beth_\ell \} . \quad (4.39)$$

Al analizar el caso  $i = \varphi$  siguiendo el mismo procedimiento que el caso anterior, se obtiene la misma ecuación de constricción, por lo que esta es la única ecuación de constricción que involucra a la vez las amplitudes radiales  $\zeta_\ell, \aleph_\ell, \beth_\ell$ .

En resumen, hemos obtenido el siguiente sistema de ecuación de 6 ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_\ell = & -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ (\partial_r \aleph_\ell) + \aleph_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] \\ & + \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha \beth_\ell + \alpha K \phi_\ell , \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\partial_t \aleph_\ell = -\alpha \epsilon_\ell - \partial_r (\alpha \phi_\ell) , \quad (4.41)$$

$$\partial_t \beth_\ell = -\alpha \xi_\ell - \alpha \phi_\ell , \quad (4.42)$$

$$\partial_t \epsilon_\ell = \ell(\ell+1) A^{1/2} \psi^2 \alpha \zeta_\ell + \alpha [ \mu^2 \aleph_\ell + (K - K_r^r) \epsilon_\ell ] , \quad (4.43)$$

$$\partial_t \xi_\ell = \frac{1}{A^{1/2} \psi^2} \partial_r (\alpha \psi^4 B r^2 \zeta_\ell) + \alpha [ \mu^2 \beth_\ell + (K - K_\theta^\theta) \xi_\ell ] , \quad (4.44)$$

$$\partial_t \zeta_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} [\partial_r (\alpha \xi_\ell) - \alpha \epsilon_\ell] + \alpha K \zeta_\ell . \quad (4.45)$$

junto a 2 ecuaciones de constricción para un sistema de Einstein-(multi)Proca con un espacio-tiempo en simetría esférica

$$0 = \frac{1}{A\psi^4} \left[ \partial_r \epsilon_\ell + \epsilon_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} \right) \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \xi_\ell + \mu^2 \phi_\ell , \quad (4.46)$$

$$0 = \zeta_\ell - \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} (\aleph_\ell - \partial_r \beth_\ell) . \quad (4.47)$$

A pesar que en las siguientes secciones de este trabajo solo usaremos este sistema de ecuaciones para estudiar un espacio-tiempo estático, su utilidad no se limita a este caso, pues nos servirán para realizar posteriores estudios de espacio-tiempos dinámicos con simetría esférica tales como análisis de estabilidad dinámica ante perturbaciones 1-dimensionales y estudios de formación dinámica.

Finalmente, observamos que este sistema de ecuaciones de evolución y constricción obtenidos de nuestro ansatz multi-campo de Proca con momento angular (4.1-4.4) generaliza el sistema de ecuaciones de evolución y constricción de la estrella de Proca estándar en simetría esférica. En efecto, siguiendo las instrucciones descritas en la sección 4.1., al considerar el caso  $\ell = 0$ , eliminamos las ecuaciones de evolución para  $\beth_\ell, \xi_\ell, \zeta_\ell$  y la segunda ecuación de constricción (4.47) derivada de la ecuación de Gauss para los campos magnéticos. Y así, obtenemos: (1) un sistema de ecuaciones de evolución para  $\phi_\ell, \aleph_\ell, \epsilon_\ell$  que se reduce al sistema de ecuaciones de evolución de la estrella de Proca estándar dados en (3.81-3.83), con la salvedad que debemos subir índice de la ecuación de evolución de  $\mathcal{E}_r$  para establecer la comparación, y (2) una ecuación de constricción de Gauss para el campo eléctrico que se reduce a la ecuación de constricción correspondiente de estrella de Proca estándar (3.84).

## 4.4. Solución de estrella bosónica: Estrella de $\ell$ -Proca

Las estrellas bosónicas se caracterizan por tener una configuración de materia localizada formada por uno o varios campos bosónicos complejos tal que su campo gravitacional sea estacionario y regular. Para lograr esto, no es necesario eliminar la dependencia temporal del o de los campos constituyentes de la estrella, sino aprovechar que un sistema bosónico tiene un tensor de energía-momento total que depende de los módulos de los campos bosónicos, como por ejemplo, encontramos con el tensor energía-momento del sistema de Einstein-(multi)Proca con simetría esférica usando las cantidades de materia dadas en (4.23-4.27).

Por lo tanto, las estrellas bosónicas se proponen usando campos de materia complejos donde todos estos poseen dependencia armónica temporal dada mediante una fase compleja  $e^{-i\omega t}$  con una frecuencia real definida  $\omega$ . Lo cual, logra que el tensor energía-momento total sea estacionario. Existen propuestas multi-campo, donde los campos constituyentes poseen frecuencias temporales diferentes aún manteniendo la independencia temporal del tensor energía-momento total [11]. Sin embargo, como mencionamos en la sección 1.3. del capítulo 1, buscamos una configuración análoga a la estrella de  $\ell$ -bosones que pueda ser la solución de máxima simetría de una familia de estrellas de Proca multi-campo y multi-frecuencia. Por ello, nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca poseerá la misma frecuencia angular real  $\omega$  para todos sus  $2\ell + 1$  campos de Proca.

Así, el ansatz de los campos de Proca complejos en un espacio-tiempo con simetría esférica, dado mediante las cantidades ortogonales (4.1-4.4) de la sección 4.1., generan una estrella bosónica al imponer la dependencia temporal armónica en las amplitudes radiales  $\{\phi_\ell, \aleph_\ell, \beth_\ell, \epsilon_\ell, \xi_\ell, \zeta_\ell\}$ :

$$\phi_\ell(r, t) = \varphi_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad \aleph_\ell(r, t) = ia_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad \beth_\ell(r, t) = ib_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad (4.48)$$

$$\epsilon_\ell(r, t) = e_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad \xi_\ell(r, t) = d_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad \zeta_\ell(r, t) = iz_\ell(r)e^{-i\omega t}, \quad (4.49)$$

donde todas las funciones radiales  $\varphi_\ell(r), a_\ell(r), b_\ell(r), e_\ell(r), d_\ell(r), z_\ell(r)$  son reales. Ahora, gracias a que este nuevo ansatz asegura la simetría esférica e independencia temporal del tensor de energía-momento total, este es compatible con un espacio-tiempo estático al asegurar una norma donde  $\vec{\beta} = 0$  para todo instante de tiempo. Elegida dicha norma, nuestra propuesta de estrella bosónica consiste en un sistema de Einstein-(multi)Proca en simetría esférica con un espacio-tiempo estático y con  $2\ell + 1$  campos de Proca complejos con momento angular y la misma dependencia armónica temporal, lo cual bautizamos como estrella de  $\ell$ -Proca.

Es importante resaltar que la elección de colocar un número imaginario como factor en las funciones radiales para el ansatz de  $\aleph_\ell$  y  $\zeta_\ell$  se debe a que así aseguramos que la densidad de momento radial, (4.24), se anule, como debe de ser en un espacio-tiempo estático. En efecto, ya que  $j_r$  consiste en sumas de cantidades junto a su conjugadas complejas

$$j_r = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2\bar{\xi}_\ell\zeta_\ell + \mu^2\aleph_\ell\bar{\phi}_\ell + c.c. \right\} ,$$

entonces, al reemplazar nuestro ansatz (4.48-4.49) se tiene

$$j_r = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2id_\ell z_\ell + \mu^2ia_\ell\varphi_\ell + c.c. \right\} ,$$

es decir, sumas de cantidades imaginarias junto a sus conjugadas complejas, que a su vez, resultan ser sus inversos aditivos, y por lo tanto, estas sumas son cero. Asimismo, el hecho de que incluyamos el factor imaginario en  $\beth_\ell$  es para lograr que la ecuación de constricción (4.47) que involucra a  $\aleph_\ell$ ,  $\beth_\ell$  y  $\zeta_\ell$  sea consistente, como se mostrará líneas adelante.

Procedamos a expresar las cantidades de materia en 3+1 diferentes de cero de la estrella de  $\ell$ -Proca. Usando nuestro ansatz (4.48-4.49) en las cantidades de materia (4.23-4.27) y anulando adecuadamente las fases complejas, obtenemos

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{e_\ell^2}{\psi^4 A} + \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4 A} + \varphi_\ell^2 \right] + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 B r^2} (d_\ell^2 + \mu^2 b_\ell^2) + \psi^4 B r^2 z_\ell^2 \right] \right\} , \quad (4.50)$$

$$S_{rr} = \frac{\psi^4 A}{8\pi} \left\{ -\frac{e_\ell^2}{\psi^4 A} + \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4 A} + \varphi_\ell^2 \right] + \ell(\ell+1) \left[ \frac{1}{\psi^4 B r^2} (d_\ell^2 - \mu^2 b_\ell^2) + \psi^4 B r^2 z_\ell^2 \right] \right\} , \quad (4.51)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{\psi^4 B r^2}{8\pi} \left\{ \frac{e_\ell^2}{\psi^4 A} - \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4 A} - \varphi_\ell^2 \right] \right\} , \quad (4.52)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\psi^4 B r^2 \sin^2 \theta}{8\pi} \left\{ \frac{e_\ell^2}{\psi^4 A} - \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4 A} - \varphi_\ell^2 \right] \right\} , \quad (4.53)$$

lo cual significa que obtenemos un tensor energía-momento estático consistente con una métrica espacio-temporal estática, donde el lapso  $\alpha$  como las componentes métricas espaciales  $\psi$ ,  $A$ ,  $B$ , presentes en las cantidades de materia anteriores, dependen solo de la coordenada radial. Nótese que debido a la estaticidad en todo instante, y

en particular para  $t = 0$ , podemos fijar una norma espacial de modo que podamos tener coordenadas de área polar ( $B = \psi = 1$ ) o coordenadas isotrópicas ( $A = B = 1$ ). Sin embargo, estas elecciones de norma que nos reducen los grados de libertad del sistema se realizarán en las siguientes secciones cuando formulemos las ecuaciones de datos iniciales para la estrella de  $\ell$ -Proca.

Establecida la dependencia temporal mediante nuestra elección de ansatz (4.48-4.49), para conocer completamente la configuración de la estrella de  $\ell$ -Proca, debemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales radiales para  $\{\varphi_\ell(r), a_\ell(r), b_\ell(r), e_\ell(r), d_\ell(r), z_\ell(r)\}$ . Este sistema de ecuaciones se obtiene al reemplazar nuestro ansatz en las ecuaciones de evolución y constricción (4.40-4.47). Para ello, notemos en primer lugar que dado un espacio-tiempo estático, las componentes del tensor de curvatura extrínseca son cero. Por lo tanto, eliminaremos tales componentes en las ecuaciones de evolución que utilizamos a continuación.

Sea la ecuación de evolución para  $\phi_\ell$

$$\partial_t \phi_\ell = -\frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ (\partial_r \aleph_\ell) + \aleph_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r \psi}{\psi} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} \right) \right] + \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha \beth_\ell ,$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar el factor  $-ie^{-i\omega t}$ , se obtiene

$$\omega \varphi_\ell = \frac{\alpha}{A\psi^4} \left[ a'_\ell + a_\ell \left( \frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha b_\ell , \quad (4.54)$$

donde hemos denotado la derivada total respecto a la coordenada radial como  $()'$ . Con el fin de facilitar la demostración de la consistencia entre las ecuaciones radiales del sistema que estamos buscando con las ecuaciones de constricción, expresamos la ecuación anterior en una forma más compacta. Es sencillo verificar que esta es

$$\omega \varphi_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 B r^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B \psi^4 r^2} \alpha b_\ell , \quad (4.55)$$

Sea la ecuación de evolución para  $\aleph_\ell$  y  $\beth_\ell$ , respectivamente

$$\begin{aligned} \partial_t \aleph_\ell &= -\alpha e_\ell - \partial_r (\alpha \phi_\ell) , \\ \partial_t \beth_\ell &= -\alpha \xi_\ell - \alpha \phi_\ell , \end{aligned}$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar el factor  $e^{-i\omega t}$ , se obtiene

$$\omega a_\ell = -\alpha e_\ell - (\alpha \varphi_\ell)' , \quad (4.56)$$

$$\omega b_\ell = -\alpha d_\ell - \alpha \varphi_\ell . \quad (4.57)$$



Sean la ecuación de evolución para  $\epsilon_\ell$  y  $\xi_\ell$ , respectivamente

$$\begin{aligned}\partial_t \epsilon_\ell &= \ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2\alpha\zeta_\ell + \mu^2\alpha\aleph_\ell, \\ \partial_t \xi_\ell &= \frac{1}{A^{1/2}\psi^2}\partial_r(\alpha\psi^4Br^2\zeta_\ell) + \alpha\mu^2\beth_\ell,\end{aligned}$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar en ambos lados de las ecuaciones el factor  $-ie^{-i\omega t}$ , se obtiene

$$\omega e_\ell = -\alpha[\ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2z_\ell + \mu^2a_\ell], \quad (4.58)$$

$$\omega d_\ell = -\left[\frac{1}{A^{1/2}\psi^2}(\alpha\psi^4Br^2z_\ell)' + \mu^2\alpha b_\ell\right]. \quad (4.59)$$

Sea la ecuación de evolución para  $\zeta_\ell$

$$\partial_t \zeta_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6r^2}[\partial_r(\alpha\xi_\ell) - \alpha\epsilon_\ell] + \alpha K\zeta_\ell,$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar en ambos lados de la ecuación el factor  $e^{-i\omega t}$ , se obtiene

$$\omega z_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6r^2}[(\alpha d_\ell)' - \alpha e_\ell]. \quad (4.60)$$

Y a partir de las ecuaciones de constricción, sea la ecuación correspondiente a la constricción de Gauss para el campo eléctrico (4.46)

$$0 = \frac{1}{A\psi^4}\left[\partial_r\epsilon_\ell + \epsilon_\ell\left(\frac{2}{r} - \frac{\partial_r A}{2A} + \frac{\partial_r B}{B} + \frac{2\partial_r\psi}{\psi}\right)\right] - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4r^2}\xi_\ell + \mu^2\phi_\ell,$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar el factor  $e^{-i\omega t}$  se obtiene

$$0 = \frac{1}{A\psi^4}\left[e'_\ell + e_\ell\left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{B} + \frac{2\psi'}{\psi}\right)\right] - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4r^2}d_\ell + \mu^2\varphi_\ell. \quad (4.61)$$

Será conveniente, como se verá líneas adelante, expresar esta ecuación de constricción de una forma más compacta. Esta es

$$0 = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6r^2}\left(\frac{\psi^2Br^2}{A^{1/2}}e_\ell\right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4r^2}d_\ell + \mu^2\varphi_\ell. \quad (4.62)$$

Y sea la constricción de Gauss para el campo magnético (4.47)

$$0 = \zeta_\ell - \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6r^2}(\aleph_\ell - \partial_r\beth_\ell),$$

al reemplazar nuestro ansatz y simplificar el factor  $ie^{-i\omega t}$  se obtiene

$$0 = z_\ell - \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} (a_\ell - b'_\ell) . \quad (4.63)$$

En resumen, para encontrar las funciones radiales de la estrella de  $\ell$ -Proca, debemos resolver un sistema de 6 ecuaciones radiales

$$\omega\varphi_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 Br^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha b_\ell , \quad (4.64)$$

$$\omega a_\ell = -\alpha e_\ell - (\alpha\varphi_\ell)' , \quad (4.65)$$

$$\omega b_\ell = -\alpha d_\ell - \alpha\varphi_\ell , \quad (4.66)$$

$$\omega e_\ell = -\alpha [ \ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2 z_\ell + \mu^2 a_\ell ] , \quad (4.67)$$

$$\omega d_\ell = - \left[ \frac{1}{A^{1/2}\psi^2} (\alpha\psi^4 Br^2 z_\ell)' + \mu^2 \alpha b_\ell \right] , \quad (4.68)$$

$$\omega z_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} [(\alpha d_\ell)' - \alpha e_\ell] , \quad (4.69)$$

que deben ser consistentes con dos ecuaciones de constricción

$$0 = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 Br^2}{A^{1/2}} e_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} d_\ell + \mu^2 \varphi_\ell , \quad (4.70)$$

$$0 = z_\ell - \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} (a_\ell - b'_\ell) . \quad (4.71)$$

Dado este resultado, mostremos la consistencia entre el sistema de 6 ecuaciones radiales que acabamos de encontrar y las dos ecuaciones de constricción. Para la primera ecuación de constricción (4.70), esta se satisface a partir de las ecuaciones radiales (4.64), (4.67) y (4.68). En efecto, de la ecuación (4.67)

$$\omega e_\ell = -\alpha [ \ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2 z_\ell + \mu^2 a_\ell ] ,$$

podemos despejar  $\alpha a_\ell$  de la forma

$$\alpha a_\ell = -\frac{\ell(\ell+1)}{\mu^2} A^{1/2}\psi^2 \alpha z_\ell - \frac{\omega}{\mu^2} e_\ell .$$

Si luego, reemplazamos esta expresión para  $\alpha a_\ell$  en la ecuación (4.64), la cual está dada por

$$\omega\varphi_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 Br^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha b_\ell ,$$

simplificamos y distribuimos adecuadamente la derivada espacial, y obtenemos

$$\omega\varphi_\ell = -\frac{\ell(\ell+1)}{\mu^2} \frac{(\psi^4 Br^2 \alpha z_\ell)'}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} - \frac{\omega}{\mu^2} \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 Br^2}{A^{1/2}} e_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha b_\ell . \quad (4.72)$$

Afortunadamente, la primera derivada radial del lado derecho de la igualdad en esta expresión se puede despejar de la ecuación (4.68)

$$\omega d_\ell = - \left[ \frac{(\alpha \psi^4 B r^2 z_\ell)'}{A^{1/2} \psi^2} + \mu^2 \alpha b_\ell \right] ,$$

y es

$$\frac{-(\psi^4 B r^2 \alpha z_\ell)'}{A^{1/2} \psi^2} = \omega d_\ell + \mu^2 \alpha b_\ell .$$

Así, reemplazando esta derivada en la expresión (4.72), se obtiene

$$\omega \varphi = \frac{1}{\mu^2} \frac{\ell(\ell+1)}{B \psi^4 r^2} (\omega d_\ell + \mu^2 \alpha b_\ell) - \frac{\omega}{\mu^2} \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 B r^2}{A^{1/2}} e_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B \psi^4 r^2} \alpha b_\ell ,$$

Y finalmente, anulando el término  $\ell(\ell+1)\alpha b_\ell/B\psi^4 r^2$  y multiplicando ambos lados de la expresión resultante por  $\mu^2/\omega$  se obtiene

$$\mu^2 \varphi = \frac{\ell(\ell+1)}{B \psi^4 r^2} d_\ell - \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 B r^2}{A^{1/2}} e_\ell \right)' ,$$

que por simple inspección, corresponde a la primera ecuación de constricción que buscamos satisfacer (4.70).

Para mostrar la consistencia con la segunda ecuación de constricción (4.71), el procedimiento es más directo que el anterior y basta con usar las ecuaciones radiales (4.65), (4.66) y (4.69) de nuestro sistema de 6 ecuaciones radiales. Así, a partir de (4.65) y (4.66)

$$\begin{aligned} \omega a_\ell &= -\alpha e_\ell - (\alpha \varphi_\ell)' , \\ \omega b_\ell &= -\alpha d_\ell - \alpha \varphi_\ell , \end{aligned}$$

despejamos  $\alpha e_\ell$  y  $\alpha d_\ell$ , respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha e_\ell &= -\omega a_\ell - (\alpha \varphi_\ell)' , \\ \alpha d_\ell &= -\omega b_\ell - \alpha \varphi_\ell . \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos estas expresiones en la ecuación radial (4.69)

$$\omega z_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} [(\alpha d_\ell)' - \alpha e_\ell] ,$$

obteniendo

$$\omega z_\ell = \frac{1}{A^{1/2} B \psi^6 r^2} [(-\omega b_\ell - \alpha \varphi)' + \omega a_\ell + (\alpha \varphi)'] .$$

Finalmente, al eliminar el término  $(\alpha\varphi)'$  y simplificar en todos los términos el factor  $\omega$ , se obtiene

$$z_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} (a_\ell - b'_\ell).$$

Esto es, la segunda ecuación de constricción que buscamos satisfacer (4.71). Así, concluimos que nuestro sistema de 6 ecuaciones radiales (4.64-4.69) satisface las ecuaciones de constricción (4.70-4.71) para las funciones radiales de la estrella de  $\ell$ -Proca.

Finalmente, es interesante notar que nuestro sistema de 6 ecuaciones radiales en realidad se puede reducir a un sistema de 3 ecuaciones radiales donde las funciones solución son  $\{\varphi_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ . Para ello, usamos 3 de las 6 ecuaciones radiales del sistema original. De la ecuación (4.67), despejamos  $e_\ell$

$$e_\ell = -\frac{1}{\alpha} [ (\alpha\varphi_\ell)' + \omega a_\ell ].$$

De la ecuación (4.68), despejamos  $d_\ell$

$$d_\ell = -\frac{1}{\alpha} [ \alpha\varphi_\ell + \omega b_\ell ].$$

de estos resultados, observamos la aparición frecuente del término  $\alpha\varphi_\ell$ , el cual también aparecerá en las cantidades de materia en 3+1 dadas en (4.50-4.53) y si deseamos evitar tener que distribuir la derivada radial de  $(\alpha\varphi_\ell)'$  en las diferentes expresiones, nos será útil redefinir la función solución  $F_\ell := \alpha\varphi_\ell$ . Con la cual las anteriores expresiones serían

$$e_\ell = -\frac{1}{\alpha} ( F'_\ell + \omega a_\ell ), \quad (4.73)$$

$$d_\ell = -\frac{1}{\alpha} ( F_\ell + \omega b_\ell ). \quad (4.74)$$

y a partir de la tercera ecuación (4.69), que ya mostramos que al reemplazarle  $e_\ell$  y  $d_\ell$  obtenemos la segunda ecuación de constricción (4.71), despejamos la expresión de  $z_\ell$

$$z_\ell = \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} ( a_\ell - b'_\ell ). \quad (4.75)$$

Así, estas 3 expresiones nos permiten encontrar  $\{e_\ell, d_\ell, z_\ell\}$  a partir de  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ , por lo que las 3 ecuaciones restantes de nuestro sistema de 6 ecuaciones radiales original debe darnos las soluciones de este último trío de funciones radiales. En efecto, al reemplazar las expresiones que acabamos de obtener para  $e_\ell$ ,  $d_\ell$  y  $z_\ell$  en las ecuaciones

(4.64), (4.67) y (4.68), que son respectivamente

$$\begin{aligned}\omega\varphi_\ell &= \frac{1}{A^{1/2}B\psi^6r^2} \left( \frac{\psi^2Br^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4r^2} \alpha b_\ell, \\ \omega e_\ell &= -\alpha [ \ell(\ell+1)A^{1/2}\psi^2z_\ell + \mu^2a_\ell ], \\ \omega d_\ell &= - \left[ \frac{1}{A^{1/2}\psi^2} (\alpha\psi^4Br^2z_\ell)' + \mu^2\alpha b_\ell \right],\end{aligned}$$

y considerando nuestra definición  $F_\ell = \alpha\varphi_\ell$ , se obtiene un sistema de 3 ecuaciones radiales para  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$

$$\omega F_\ell = \frac{\alpha}{A^{1/2}B\psi^6r^2} \left( \frac{\psi^2Br^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4r^2} \alpha^2 b_\ell, \quad (4.76)$$

$$F'_\ell + \omega a_\ell = \frac{\alpha^2}{\omega} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4Br^2} (a_\ell + b'_\ell) + \mu^2 a_\ell \right], \quad (4.77)$$

$$F_\ell + \omega b_\ell = \frac{\alpha}{\omega} \left[ \frac{1}{A^{1/2}\psi^2} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}\psi^2} (a_\ell + b'_\ell) \right)' + \mu^2 \alpha b_\ell \right]. \quad (4.78)$$

Además, las cantidades de materia en 3+1 de la estrella de  $\ell$ -Proca en este nuevo sistema  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ , toman la forma

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2\psi^4A} + \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4A} + \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4Br^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} + \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{\psi^4A} \right] \right\}, \quad (4.79)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{rr} &= \frac{\psi^4A}{8\pi} \left\{ - \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2\psi^4A} + \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4A} + \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4Br^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} - \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{\psi^4A} \right] \right\}, \quad (4.80)\end{aligned}$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{\psi^4Br^2}{8\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2\psi^4A} - \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4A} - \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right] \right\}, \quad (4.81)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\psi^4Br^2 \sin^2\theta}{8\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2\psi^4A} - \mu^2 \left[ \frac{a_\ell^2}{\psi^4A} - \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right] \right\}, \quad (4.82)$$

De estas expresiones, resulta útil obtener algunas expresiones que usaremos para expresar las ecuaciones de datos iniciales en las secciones siguientes. Estas son

$$S_r^r - \rho = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2\psi^4A} + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4Br^2} \mu^2 b_\ell^2 \right\}, \quad (4.83)$$

la traza del tensor espacial de esfuerzos  $S := \gamma^{ij} S_{ij}$

$$S = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2 \psi^4 A} + \mu^2 \left[ \frac{3F_\ell^2}{\alpha^2} - \frac{a_\ell^2}{\psi^4 A} \right] + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 Br^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} - \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{\psi^4 A} \right] \right\}, \quad (4.84)$$

y por último

$$S + \rho = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(F'_\ell + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2 \psi^4 A} + 2\mu^2 \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 Br^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{\psi^4 A} \right] \right\}. \quad (4.85)$$

## 4.5. Ecuaciones de datos iniciales en primer orden

Una vez establecidas las ecuaciones radiales que deben satisfacer las estrellas de  $\ell$ -Proca, procedamos a obtener las ecuaciones de datos iniciales que resolveremos numéricamente. En principio, nuestra intención es resolverlas mediante métodos en diferencias finitas aplicando un método de Runge-Kutta. En ese caso, necesitamos tener a disposición un sistema de ecuaciones de datos iniciales en primer orden de la forma  $u'_i = S_i(\vec{u})$  donde  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  es una  $n$ -tupla formada por las funciones solución que conforman los datos iniciales del sistema y  $S_i(\vec{u})$  contiene solo a las funciones  $u_i$ , mas no a sus derivadas.

Al ubicarnos en la hipersuperficie  $\Sigma_{t=0}$ , nuestros datos iniciales se componen de funciones radiales métricas y funciones radiales de materia. Enunciaremos las primeras para iniciar esta sección, aprovechando que ya hemos conseguido las ecuaciones de datos iniciales de las funciones métricas en primer orden en la sección 2.4.1 del capítulo 2. En dicha sección se mostró que, con el fin de obtener ecuaciones diferenciales en primer orden para los datos iniciales de la métrica espacial, necesitamos elegir coordenadas radiales de área ( $\psi = B = 1$ ). En ese caso, la métrica espacio-temporal esféricamente simétrica y estática en  $t = 0$  se escribe como

$$ds^2 = \alpha(r)^2 dt^2 + A(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Luego, la constricción Hamiltoniana se reduce a una ecuación diferencial ordinaria para  $A(r)$ , (2.41),

$$A' = A \left( \frac{1}{r} (1 - A) + 8\pi r A \rho \right), \quad (4.86)$$

y al imponer la condición de foliación polar, la ecuación de ADM para la componente  $K_{\theta\theta}$  se reduce a una ecuación diferencial ordinaria para  $\alpha(r)$ , (2.42),

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{1}{2r} (A - 1) + 4\pi r A S_r^r \right), \quad (4.87)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $S_r^r$ , la componente mixta radial del tensor de esfuerzos espaciales, cuyas expresiones en la norma de radio de área se mostrarán al final de la sección cuando reunamos todas las ecuaciones de datos iniciales.

Con respecto a los datos iniciales de los campos de materia, para  $t = 0$ , nuestro ansatz para las amplitudes radiales (4.48-4.49) se reduce a

$$\phi_\ell(r, t = 0) = \varphi_\ell(r) , \quad \aleph_\ell(r, t = 0) = ia_\ell(r) , \quad \beth_\ell(r, t = 0) = ib_\ell(r) , \quad (4.88)$$

$$\epsilon_\ell(r, t = 0) = e_\ell(r) , \quad \xi_\ell(r, t = 0) = d_\ell(r) , \quad \zeta_\ell(r, t = 0) = iz_\ell(r) . \quad (4.89)$$

Siendo las funciones radiales  $\{\varphi_\ell, a_\ell, b_\ell, e_\ell, d_\ell, z_\ell\}$  las que establecen la dependencia radial de la estrella de  $\ell$ -Proca para  $t = 0$ , entonces podemos tomar los resultados obtenidos en la sección anterior, los cuales muestran que basta con resolver un sistema para las 3 funciones  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ , con  $F_\ell = \alpha\varphi_\ell$ , ya que las 3 funciones radiales restantes se expresan en función de estas 3 primeras. En coordenadas radiales de área, dichas expresiones son

$$e_\ell = -\frac{1}{\alpha}(F'_\ell + \omega a_\ell) , \quad (4.90)$$

$$d_\ell = -\frac{1}{\alpha}(F_\ell + \omega b_\ell) , \quad (4.91)$$

$$z_\ell = \frac{1}{r^2 A^{1/2}}(a_\ell - b'_\ell) . \quad (4.92)$$

Así, el sistema de 3 ecuaciones diferenciales radiales (4.76-4.78) al escribirlos en coordenadas radiales de área y que junto a las ecuaciones de datos iniciales para las funciones  $A$  y  $\alpha$  resuelven  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ , son

$$\omega F_\ell = \frac{\alpha}{A^{1/2} r^2} \left( \frac{r^2 \alpha}{A^{1/2}} a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \alpha^2 b_\ell, \quad (4.93)$$

$$F'_\ell + \omega a_\ell = \frac{\alpha^2 \ell(\ell+1)}{\omega r^2} (a_\ell - b'_\ell) + \frac{\alpha^2 \mu^2}{\omega} a_\ell, \quad (4.94)$$

$$F_\ell + \omega b_\ell = \frac{\alpha}{\omega} \left[ \frac{1}{A^{1/2}} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}} (a_\ell - b'_\ell) \right)' + \alpha \mu^2 b_\ell \right]. \quad (4.95)$$

Como mencionamos al inicio de esta sección, necesitamos tener escrito el sistema de ecuaciones de datos iniciales en primer orden en la forma  $u'_i = S_i(\vec{u})$ . Para lograr esto, será necesario definir una nueva función solución  $G_\ell := b'_\ell$  en nuestro sistema de funciones radiales, con el fin de lograr que la ecuación (4.94) se exprese en la forma deseada y que la ecuación (4.95) sea de primer orden, como veremos a continuación.

Si tomamos la ecuación (4.94), resulta sencillo obtener una ecuación radial en primer orden para  $F_\ell$ , al despejar y factorizar sus términos adecuadamente. Así, se obtiene

$$F'_\ell = \omega a_\ell \left( \frac{\alpha^2 \mu^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\ell(\ell+1)\alpha^2}{r^2} \frac{1}{\omega} (a_\ell - G_\ell). \quad (4.96)$$

Mientras que si tomamos la ecuación (4.93), operamos la derivada radial y despejamos al lado izquierdo de la igualdad la derivada  $a'_\ell$ , tenemos luego de un poco de álgebra

$$a'_\ell = \frac{\omega A F_\ell}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} A b_\ell - a_\ell \left( \frac{2}{r} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{2A} \right).$$

Luego, para deshacernos de las derivadas de las funciones métricas presentes en el paréntesis del lado derecho, hacemos uso de las ecuaciones radiales para  $A$  y  $\alpha$  dadas en (4.86) y (4.87) respectivamente. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{2A} &= \frac{(A-1)}{2r} + 4\pi r A S_r^r - \left( \frac{(1-A)}{2r} + 4\pi r A \rho \right) \\ &= \frac{(A-1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho), \end{aligned}$$

lo cual reemplazado en la ecuación diferencial anterior resulta en

$$a'_\ell = \frac{\omega A F_\ell}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} A b_\ell - a_\ell \left( \frac{(A+1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right). \quad (4.97)$$

Finalmente, si tomamos la ecuación (4.95) considerando que  $G_\ell = b'_\ell$ , al multiplicar toda la expresión por  $\omega/\alpha^2$  y operar la derivada radial presente, tenemos

$$\frac{\omega}{\alpha^2} (F_\ell + \omega b_\ell) = \frac{1}{\alpha A^{1/2}} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}} \right)' (a_\ell - G_\ell) + \frac{a'_\ell}{A} - \frac{G'_\ell}{A} + \mu^2 b_\ell,$$

luego, multiplicamos toda la expresión por  $A$  y despejamos a  $G'_\ell$  a la izquierda de la igualdad

$$G'_\ell = \frac{A^{1/2}}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}} \right)' (a_\ell - G_\ell) + a'_\ell + \mu^2 A b_\ell - \frac{\omega A}{\alpha^2} (F_\ell + \omega b_\ell),$$

además, identificamos la presencia de 2 términos con derivadas: (i)  $a'_\ell$  que se reemplazará usando la ecuación para  $a_\ell$  que obtuvimos líneas atrás y (ii) el término  $\frac{A^{1/2}}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}} \right)'$  que se reexpresa usando las ecuaciones radiales en primer orden para  $A$  y  $\alpha$

$$\frac{A^{1/2}}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{A^{1/2}} \right)' = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{A'}{2A} = \frac{(A-1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho).$$



Por lo tanto, siguiendo estos pasos, tenemos

$$\begin{aligned} G'_\ell &= (a_\ell - G_\ell) \left( \frac{(A-1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) \\ &\quad + \frac{\omega A F_\ell}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} A b_\ell - a_\ell \left( \frac{(A+1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) \\ &\quad + \mu^2 A b_\ell - \frac{\omega A}{\alpha^2} (F_\ell + \omega b_\ell) , \end{aligned}$$

luego, restando y reordenando términos adecuadamente, obtenemos una ecuación diferencial radial en primer orden para  $G_\ell$  dada por

$$G'_\ell = \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) A b_\ell - \frac{2a_\ell}{r} - G_\ell \left( \frac{(A-1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) . \quad (4.98)$$

Por lo tanto, los datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca que forman un sistema en primer orden son  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, G_\ell, \alpha_\ell, A_\ell\}$  y satisfacen las siguientes ecuaciones

$$F'_\ell = \omega a_\ell \left( \frac{\alpha^2 \mu^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{\alpha^2}{\omega} (a_\ell - G_\ell) , \quad (4.99)$$

$$a'_\ell = \frac{\omega A}{\alpha^2} F_\ell + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} A b_\ell - a_\ell \left( \frac{(A+1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) , \quad (4.100)$$

$$b'_\ell = G_\ell , \quad (4.101)$$

$$G'_\ell = \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) A b_\ell - \frac{2a_\ell}{r} - G_\ell \left( \frac{(A-1)}{r} + 4\pi r A (S_r^r - \rho) \right) , \quad (4.102)$$

$$A' = A \left( \frac{1}{r} (1-A) + 8\pi r A \rho \right) , \quad (4.103)$$

$$\alpha' = \alpha \left( \frac{1}{2r} (A-1) + 4\pi r A S_r^r \right) , \quad (4.104)$$

donde  $\rho$ ,  $S_r^r$  y  $S_r^r - \rho$ , están dados respectivamente por (4.80), (4.81) y (4.83) utilizando las coordenadas de radio de área. Nótese que estos presentan una derivada  $F'_\ell$  que nos imposibilita expresar el sistema con solo derivadas al lado izquierdo de la igualdad, por lo tanto, usamos la ecuación (4.94) para reemplazar aquella derivada. Así, las

cantidades de materia que necesitamos son

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\alpha^2}{\omega^2 A} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (a_\ell - G_\ell) + \mu^2 a_\ell \right]^2 + \mu^2 \left( \frac{a_\ell^2}{A} + \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} + \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{A} \right] \right\}, \quad (4.105)$$

$$S_r^r = \frac{1}{8\pi} \left\{ -\frac{\alpha^2}{\omega^2 A} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (a_\ell - G_\ell) + \mu^2 a_\ell \right]^2 + \mu^2 \left( \frac{a_\ell^2}{A} + \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} - \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b'_\ell)^2}{A} \right] \right\}, \quad (4.106)$$

$$S_r^r - \rho = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\alpha^2}{\omega^2 A} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (a_\ell - G_\ell) + \mu^2 a_\ell \right]^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \mu^2 b_\ell^2 \right\}. \quad (4.107)$$

Al finalizar la sección 4.3. mostramos que el sistema de ecuaciones de evolución y constricción derivados del ansatz (4.1-4.4) generalizaba el sistema de las ecuaciones de evolución y constricción de la estrella de Proca estándar al caso multi-campo con momento angular. Ese resultado junto a las ecuaciones de datos iniciales que acabamos de encontrar para la estrella de  $\ell$ -Proca, ya nos permiten finalmente concluir que nuestra propuesta de estrella bosónica corresponde a la generalización multi-campo con momento angular de la estrella de Proca esféricamente simétrica. En efecto, al tomar el caso  $\ell = 0$ , se eliminan las ecuaciones radiales en primer orden para  $b_\ell$  y  $G_\ell$  dado que provienen de la ecuación de evolución para la amplitud radial  $\xi_\ell$ , correspondiente a la componente angular de los campos eléctricos, las cuales son iguales a cero para  $\ell = 0$ . Y así, el anterior sistema de ecuaciones radiales en primer orden se reduce al sistema de ecuaciones radiales en primer orden (3.89-3.92) presentado para la estrella de Proca estándar en simetría esférica en la sección 3.5. Nótese también que las cantidades de materia en 3+1 presentadas aquí se reducen, para  $\ell = 0$ , a las cantidades de materia dadas en (3.93-3.95) de la estrella de Proca estándar.

## 4.6. Ecuaciones de datos iniciales en segundo orden

Como mencionamos en la sección anterior, inicialmente se tenía planeado implementar un método numérico en diferencias finitas para resolver el sistema de ecuaciones de datos iniciales en primer orden. Dicho método estaría basado en un método de *shooting* unidimensional para la frecuencia  $\omega$  y el uso de integraciones en la malla radial mediante algoritmos de Runge-Kutta. Sin embargo, como mostraremos

en la siguiente sección, las soluciones locales de los datos iniciales cerca al origen para los campos de materia, poseen dos soluciones independientes y por lo tanto, se necesita fijar 2 parámetros libres independientes para iniciar las integraciones numéricas, a diferencia del método de *shooting* unidimensional, que solo necesita fijar un parámetro libre para iniciar dicha integración.

Por lo tanto, cambiaremos de estrategia e implementaremos otro tipo de método numérico. El método elegido será un método de colocación espectral multi-dominio, el cual, será expuesto a detalle en el apéndice C. Para lo que nos concierne en este capítulo, es necesario mencionar que este método numérico consiste en resolver ecuaciones de segundo orden descompuestas en una base finita de polinomios especiales donde las condiciones de regularidad en el origen se dan mediante una correcta elección de base par ó impar para cada una de las funciones solución, sin necesidad de tener conocimiento de los parámetros libres de las soluciones independientes en la vecindad del origen.

En ese sentido, en lugar de un sistema de ecuaciones de datos iniciales en primer orden, necesitaremos un sistema de segundo orden para la estrella de  $\ell$ -Proca, el cual, conseguiremos en esta sección.

De manera similar a la sección 4.5, primero presentaremos las ecuaciones de datos iniciales de los campos métricos. Recordamos que en la sección 2.4.2. del capítulo 2, elegimos coordenadas conformalmente planas o isotrópicas ( $A = B = 1$ ) para escribir la métrica espacio-temporal con simetría esférica y estática a  $t = 0$ , como

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt + \psi^4(dr^2 + r^2d\Omega^2).$$

En estas coordenadas la constricción Hamiltoniana se reduce a una ecuación diferencial de segundo orden para el factor conforme  $\psi(r)$ , (2.51),

$$\psi'' + \frac{2\psi'}{r} + 2\pi\psi^5\rho = 0 ,$$

y al imponer la condición de foliación maximal, la ecuación de evolución para la traza de la curvatura extrínseca se reduce a una ecuación diferencial de segundo orden para  $\alpha(r)$ , (2.52),

$$\alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\alpha'\psi'}{\psi} - 4\pi\alpha\psi^4(S + \rho) = 0 ,$$

donde  $\rho$  y  $S$  en coordenadas isotrópicas se mostrarán al final de la sección cuando reunamos todas las ecuaciones de datos iniciales en segundo orden de la estrella de  $\ell$ -Proca.

Con respecto a los campos de materia, aunque en el sistema figuren 6 funciones radiales  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, e_\ell, d_\ell, z_\ell\}$ , se demostró en la sección 4.4., que  $e_\ell$ ,  $d_\ell$  y  $z_\ell$  se pueden expresar en función de  $F_\ell$ ,  $a_\ell$  y  $b_\ell$  usando las expresiones (4.73-4.75) escritas en coordenadas isotrópicas

$$e_\ell = -\frac{1}{\alpha} ( F'_\ell + \omega a_\ell ) , \quad (4.108)$$

$$d_\ell = -\frac{1}{\alpha} ( F_\ell + \omega b_\ell ) , \quad (4.109)$$

$$z_\ell = \frac{1}{\psi^6 r^2} ( a_\ell - b'_\ell ) . \quad (4.110)$$

Por lo tanto, solo necesitamos encontrar las ecuaciones de segundo orden para las funciones de materia  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ . En ese caso, recordamos que en la sección 3.1., donde se presentó la formulación lagrangiana de un sistema de Einstein-(multi)Proca, se obtuvo ecuaciones diferenciales en segundo orden para los campos de Proca  $(X_m)_\mu$ , (3.23),

$$\nabla_\mu \nabla^\mu (X_m)_\nu - R^\mu{}_\nu (X_m)_\mu - \mu^2 (X_m)_\nu = 0 . \quad (4.111)$$

Estas ecuaciones son las que nos otorgarán las ecuaciones en segundo orden que buscamos para  $F_\ell$ ,  $a_\ell$  y  $b_\ell$ . En efecto, primero observamos que usando nuestro ansatz para los campos potenciales de la estrella de  $\ell$ -Proca dados como

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \varphi_\ell(r) Y^{\ell m} e^{-i\omega t} , \\ (a_m)_i &= (ia_\ell(r) Y^{\ell m}, ib_\ell(r) \partial_\theta Y^{\ell m}, ib_\ell(r) \partial_\varphi Y^{\ell m}) e^{-i\omega t} , \end{aligned}$$

nos permite expresar las componentes de  $(X_m)_\mu = n_\mu \Phi_m + (a_m)_\mu$ , considerando que  $(a_m)_0 = (a_m)_i \beta^i = 0$  para un espacio-tiempo estático en  $t = 0$  y la definición  $F_\ell := \alpha \varphi_\ell$ , de la forma

$$\begin{aligned} (X_m)_t &= n_0 \Phi_m = -F_\ell(r) Y^{\ell m} e^{-i\omega t} , \\ (X_m)_r &= (a_m)_r = ia_\ell(r) Y^{\ell m} e^{-i\omega t} , \\ (X_m)_\theta &= (a_m)_\theta = ib_\ell(r) \partial_\theta Y^{\ell m} e^{-i\omega t} , \\ (X_m)_\varphi &= (a_m)_\varphi = ib_\ell(r) \partial_\varphi Y^{\ell m} e^{-i\omega t} . \end{aligned}$$

Luego, usando la métrica espacio-temporal en coordenadas isotrópicas, se calculó

mediante un sencillo código en *MATHEMATICA*, los símbolos de Christoffel no nulos

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \frac{\alpha'}{\alpha}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{\alpha'\alpha}{\psi^4}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{2\psi'}{\psi}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{2\psi'}{\psi} \right), \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r^2 \sin\theta \left( \frac{1}{r} + \frac{2\psi'}{\psi} \right), \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} + \frac{2\psi'}{\psi}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\cos\theta \sin\theta, \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} + \frac{2\psi'}{\psi}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta.\end{aligned}$$

Los cuales permitieron luego, usando el mismo código, calcular las componentes mixtas no nulas del tensor de Ricci, dadas por

$$\begin{aligned}R^t_t &= -\frac{1}{\psi^4} \left[ \frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{2\alpha'}{r\alpha} + \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} \right], \\ R^r_r &= -\frac{1}{\psi^4} \left[ \frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{4\psi''}{\psi} + \frac{4\psi'}{r\psi} - 4 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 - \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} \right], \\ R^\theta_\theta &= -\frac{1}{\psi^4} \left[ \frac{2\psi''}{\psi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{6\psi'}{\psi} \right) + 2 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} \right], \\ R^\varphi_\varphi &= -\frac{1}{\psi^4} \left[ \frac{2\psi''}{\psi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{6\psi'}{\psi} \right) + 2 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} \right].\end{aligned}$$

Y finalmente, el mismo código, realizó el cálculo del D'Alembertiano en derivadas covariantes presente en la ecuación de segundo orden (4.111) y reunió los resultados anteriores para obtener las siguientes ecuaciones radiales. Para  $\nu = t$ , se obtuvo una ecuación diferencial radial en segundo orden para  $F_\ell$

$$0 = F_\ell'' + \frac{2F_\ell'}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} F_\ell + \frac{2\psi'}{\psi} F_\ell' - \frac{\alpha'}{\alpha} (F_\ell' + 2\omega a_\ell) - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) F_\ell,$$

mientras que para  $\nu = r$ , se obtuvo una ecuación diferencial radial en segundo orden para  $a_\ell$

$$\begin{aligned}0 &= a_\ell'' + \frac{2a_\ell'}{r} - \frac{2a_\ell}{r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} a_\ell + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\psi'}{\psi} \right) a_\ell' + \frac{2\psi^4 \alpha'}{\alpha^2} \omega F_\ell + \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3} b_\ell \\ &+ \frac{4\ell(\ell+1)\psi'}{r^2 \psi} b_\ell - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) a_\ell \\ &+ a_\ell \left[ \frac{2\psi''}{\psi} + \frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{8\psi'}{r\psi} - 10 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 - \frac{4\alpha'\psi'}{\alpha\psi} - \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Y finalmente, para  $\nu = \theta$  ó  $\varphi$ , se obtuvo la misma ecuación diferencial radial de segundo orden para  $b_\ell$

$$0 = b_\ell'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} b_\ell + \frac{2a_\ell}{r} + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\psi'}{\psi} \right) b_\ell' + \frac{4\psi'}{\psi} a_\ell - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) b_\ell .$$

Estas ecuaciones fueron corroboradas mediante cálculos *a mano*, utilizando las cantidades geométricas antes presentadas y las componentes del potencial de Proca, considerando que en todas las ecuaciones se simplificó el factor complejo  $e^{-i\omega t}$  y una función de armónico esférico o alguna de sus derivadas angulares, y además, se aplicaron las identidades de los armónicos esféricos presentadas en la sección 4.1.

Con el fin de implementar las ecuaciones que acabamos de presentar mediante métodos espectrales, debemos notar que la ecuación para  $a_\ell$ , posee derivadas en segundo orden de  $\alpha$  y  $\psi$ , por lo tanto, similar a cómo se realizó en la sección 4.5., las reemplazaremos por otras expresiones usando las ecuaciones de datos iniciales en segundo orden de tales funciones métricas. Es decir, podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{2\psi''}{\psi} + \frac{\alpha''}{\alpha} &= -\frac{4}{r} \frac{\psi'}{\psi} - 4\pi\psi^4\rho + \left( -\frac{2}{r} \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} + 4\pi\psi^4(S + \rho) \right) \\ &= -\frac{2}{r} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{2\psi'}{\psi} \right) - \frac{2\alpha'\psi'}{\alpha\psi} + 4\pi\psi^4 S . \end{aligned}$$

Lo cual, al reemplazar en la ecuación de  $a_\ell$  y realizar un poco de álgebra, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= a_\ell'' + \frac{2a_\ell'}{r} - \frac{2a_\ell}{r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} a_\ell - \frac{2a_\ell}{r} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{6\psi'}{\psi} \right) + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\psi'}{\psi} \right) a_\ell' \\ &+ \frac{2\psi^4}{\alpha^2} \frac{\alpha'}{\alpha} \omega F_\ell + \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3} b_\ell + \frac{4\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{\psi'}{\psi} b_\ell - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) a_\ell \\ &- a_\ell \left[ 10 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{6\alpha'\psi'}{\alpha\psi} + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right] + 4\pi\psi^4 a_\ell S . \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de datos iniciales en segundo orden para la estrella de

$\ell$ -Proca son

$$0 = F_\ell'' + \frac{2F_\ell'}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}F_\ell + \frac{2\psi'}{\psi}F_\ell' - \frac{\alpha'}{\alpha}(F_\ell' + 2\omega a_\ell) - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) F_\ell , \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} 0 = & a_\ell'' + \frac{2a_\ell'}{r} - \frac{2a_\ell}{r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}a_\ell - \frac{2a_\ell}{r} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{6\psi'}{\psi} \right) + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\psi'}{\psi} \right) a_\ell' \\ & + \frac{2\psi^4}{\alpha^2} \frac{\alpha'}{\alpha} \omega F_\ell + \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3} b_\ell + \frac{4\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{\psi'}{\psi} b_\ell - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) a_\ell \\ & - a_\ell \left[ 10 \left( \frac{\psi'}{\psi} \right)^2 + \frac{6\alpha'\psi'}{\alpha\psi} + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right] + 4\pi\psi^4 a_\ell S , \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$0 = b_\ell'' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} b_\ell + \frac{2a_\ell}{r} + \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2\psi'}{\psi} \right) b_\ell' + \frac{4\psi'}{\psi} a_\ell - \psi^4 \left( \mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) b_\ell , \quad (4.114)$$

$$0 = \psi'' + \frac{2\psi'}{r} + 2\pi\psi^5 \rho , \quad (4.115)$$

$$0 = \alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\alpha'\psi'}{\psi} - 4\pi\alpha\psi^4(S + \rho) . \quad (4.116)$$

Donde las cantidades de materia en 3+1 presentes  $\rho$ ,  $S$  y  $S + \rho$ , obtenidas en la sección 4.4. y dadas respectivamente por (4.80), (4.84) y (4.85), escritas en coordenadas conformalmente planas son

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(F_\ell' + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2 \psi^4} + \mu^2 \left[ \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} + \frac{a_\ell^2}{\psi^4} \right] \right. \\ \left. + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 r^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} + \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b_\ell)^2}{\psi^4} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{(F_\ell' + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2 \psi^4} + \mu^2 \left[ \frac{3F_\ell^2}{\alpha^2} - \frac{a_\ell^2}{\psi^4} \right] \right. \\ \left. + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 r^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} - \mu^2 b_\ell^2 + \frac{(a_\ell - b_\ell)^2}{\psi^4} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$S + \rho = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(F_\ell' + \omega a_\ell)^2}{\alpha^2 \psi^4} + 2\mu^2 \frac{F_\ell^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\psi^4 r^2} \left[ \frac{(F_\ell + \omega b_\ell)^2}{\alpha^2} + \frac{(a_\ell - b_\ell)^2}{\psi^4} \right] \right\} . \quad (4.119)$$

## 4.7. Soluciones en las fronteras

Una vez establecido el sistema de ecuaciones de datos iniciales en segundo orden, debemos imponer apropiadas condiciones de frontera para asegurar que el sistema se comporte como una estrella bosónica, es decir, que las soluciones sean regulares y asintóticamente planas. Además, dado que el sistema (4.112-4.116) aún posee un parámetro libre, la frecuencia de oscilación de la estrella bosónica  $\omega$ , imponer condiciones de frontera adecuadas al sistema de ecuaciones, lo constituirá en un problema de autovalores no lineal con autovalor  $\omega$ .

Las fronteras en un sistema con simetría esférica se encuentran en el origen,  $r = 0$ , y a distancias lejanas del sistema,  $r \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, debemos buscar qué condiciones cumplen las funciones radiales  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, \psi_\ell, \alpha_\ell\}$  en ambas fronteras. Estas se consiguen analizando el sistema de ecuaciones en las vecindades de dichas fronteras y obteniendo sus respectivas soluciones, tal es así, que para las condiciones de frontera en  $r = 0$ , debemos conocer las soluciones locales cerca al origen, y para las condiciones de frontera a distancias muy lejanas  $r \rightarrow \infty$ , debemos conocer sus soluciones asintóticas.

Iniciemos con el análisis para las funciones radiales métricas. Con respecto a soluciones locales cerca al origen, para el factor conforme  $\psi$  tenemos el término  $2\psi'/r$  en su ecuación de dato inicial (4.115)

$$0 = \psi'' + \frac{2\psi'}{r} + 2\pi\psi^5\rho.$$

En simetría esférica cualquier función regular en el origen debe tener paridad bien definida. En consecuencia,  $\psi$  debe ser una función par, pues de lo contrario, tendríamos que  $\psi$  es impar, esto es  $\psi \sim \mathcal{O}(r)$ , y por lo tanto, el término  $\psi'/r \sim \mathcal{O}(r^{-1})$  no es regular en el origen. Entonces, se tiene que

$$\psi \sim \psi_0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (4.120)$$

lo cual es consistente con la regularidad en el origen dada mediante la condición

$$\psi'(r = 0) = 0. \quad (4.121)$$

De manera análoga, la presencia del término  $2\alpha'/r$  en la ecuación de dato inicial (4.116) para  $\alpha$

$$0 = \alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\alpha'\psi'}{\psi} - 4\pi\alpha\psi^4(S + \rho),$$

nos indica que la solución local cerca al origen para esta función debe ser par

$$\alpha \sim \alpha_0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (4.122)$$



lo cual, es consistente con una condición de regularidad

$$\alpha'(r = 0) = 0. \quad (4.123)$$

Nótese que los valores  $\psi_0$  y  $\alpha_0$  no son 1, aunque si corresponden a valores constantes, lo cual es consistente con que el espacio-tiempo sea localmente Minkowski en el origen para asegurar regularidad.

Respecto a las soluciones asintóticas para  $\psi$  y  $\alpha$ , estas se obtienen al considerar que deben de ser convergentes y que el contenido de materia converja a cero a distancias lejanas de la estrella bosónica. Esta última suposición se deducirá al final de esta sección. Por ejemplo, para la ecuación de dato inicial de  $\psi$ , (4.115), el término  $2\pi\psi^5\rho$  se anula bajo este argumento. Luego, gracias a que el término  $2\psi'/r \rightarrow 0$  pues  $r \rightarrow \infty$ , la ecuación de dato inicial queda como  $\psi'' \approx 0$ , lo cual, tiene como única solución convergente consistente con un espacio asintóticamente plano, a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 1. \quad (4.124)$$

Usando este resultado y el argumento anterior en la ecuación de dato inicial para  $\alpha$ , (4.116), esta resulta en  $\alpha'' \approx 0$ , lo cual, tiene como única solución convergente imponiendo que el espacio-tiempo sea asintóticamente Minkowski, a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 1. \quad (4.125)$$

Ahora procedamos con el análisis de las soluciones locales en la vecindad de  $r = 0$  para las funciones de materia  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ . Para ello, aplicamos las condiciones de regularidad en el origen para  $\psi$  y  $\alpha$ , lo cual nos permite anular todas las derivadas radiales de dichas funciones métricas en el sistema de 3 ecuaciones de segundo orden dado por (4.112-4.114). Tal sistema resulta entonces en

$$F_\ell'' + \frac{2F_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] F_\ell \approx 0, \quad (4.126)$$

$$a_\ell'' + \frac{2a_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{(2 + \ell(\ell+1))}{r^2} \right] a_\ell \approx - \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3} b_\ell \quad (4.127)$$

$$b_\ell'' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] b_\ell \approx - \frac{2a_\ell}{r}. \quad (4.128)$$

La ecuación que resulta para  $F_\ell$ , es una ecuación diferencial homogénea, la cual, podemos resolver sin necesidad de conocer las soluciones de  $a_\ell$  o de  $b_\ell$ . Sin embargo,

las ecuaciones para  $a_\ell$  y  $b_\ell$  son ecuaciones diferenciales no homogéneas, cuyo término no homogéneo en la ecuación para  $a_\ell$  depende de  $b_\ell$  y viceversa. Lo conveniente sería expresar de alguna manera el término no homogéneo de la ecuación para  $a_\ell$  por un término no homogéneo que dependa exclusivamente de  $F_\ell$  y no de  $b_\ell$ . De manera que podamos resolver la primera ecuación diferencial para  $F_\ell$  y luego usar esta solución como término no homogéneo en la ecuación para  $a_\ell$ , así, resolvemos esta y usamos su solución como término no homogéneo en la ecuación para  $b_\ell$  y así resolver todo el sistema.

Para proceder de esta forma, buscamos una relación que cuente con términos del sistema  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$  con derivadas hasta del primer orden. Así, recordando que el sistema de ecuaciones radiales de Proca inicialmente se expresó como un sistema de primer orden, tomamos la ecuación (4.76)

$$\omega F_\ell = \frac{\alpha}{A^{1/2}B\psi^6 r^2} \left( \frac{\psi^2 B r^2}{A^{1/2}} \alpha a_\ell \right)' - \frac{\ell(\ell+1)}{B\psi^4 r^2} \alpha^2 b_\ell .$$

Escribiéndola en coordenadas isotrópicas ( $A = B = 1$ ), considerando que  $\alpha \approx \alpha_0 = cte$  y  $\psi \approx \psi_0 = cte$  cerca de  $r = 0$ , y despejando adecuadamente, se obtiene

$$\frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} F_\ell \approx a'_\ell + \frac{2a_\ell}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} b_\ell .$$

O equivalentemente

$$-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} b_\ell \approx -a'_\ell - \frac{2a_\ell}{r} + \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} F_\ell .$$

Si reemplazamos esta expresión en el término no homogéneo de la ecuación diferencial en la vecindad del origen para  $a_\ell$ , el sistema de ecuaciones que debemos resolver resulta en

$$F_\ell'' + \frac{2F_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] F_\ell \approx 0 , \quad (4.129)$$

$$a_\ell'' + \frac{4a_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) + \frac{(2 - \ell(\ell+1))}{r^2} \right] a_\ell \approx \frac{2\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} \frac{F_\ell}{r} , \quad (4.130)$$

$$b_\ell'' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] b_\ell \approx -\frac{2a_\ell}{r} . \quad (4.131)$$

La parte homogénea de estas ecuaciones se puede resolver usando aproximaciones con  $r \approx 0$  de las funciones de Bessel, mientras que la parte no homogénea se puede resolver usando el método de variación de parámetros. Dichos procedimientos se

emplean y muestran a detalle en el Apéndice B, los cuales conducen a las siguientes soluciones locales con paridad bien definida y regulares en el origen

$$F_\ell \approx c_1 r^\ell, \quad (4.132)$$

$$a_\ell \approx \ell c_2 r^{\ell-1} + \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 - 2\ell \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+1}}{(2\ell+3)}, \quad (4.133)$$

$$b_\ell \approx c_2 r^\ell - \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + 2(\ell+3) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+2}}{(\ell+1)(2\ell+3)}, \quad (4.134)$$

donde  $\kappa$  es una cantidad positiva tal que  $\kappa^2 = \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right)$ . Además, como adelantamos al inicio de la sección anterior, estas soluciones poseen dos parámetros independientes,  $c_1$  y  $c_2$ , lo cual motivó la elección de métodos espectrales para la obtención numérica de los datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca.

Con estos resultados, podemos también estudiar las expresiones cerca del origen de las funciones radiales que determinan el campo eléctrico y magnético en  $t = 0$  de la estrella de  $\ell$ -Proca. Para la función radial  $e_\ell$ , (4.108), que determina la componente radial de los campos eléctricos, tenemos

$$\begin{aligned} e_\ell &\approx -\frac{1}{\alpha_0} (F'_\ell + \omega a_\ell) \\ &\approx -\frac{\ell}{\alpha_0} (c_1 + \omega c_2) r^{\ell-1} - \frac{\omega}{\alpha_0} \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 - 2\ell \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+1}}{(2\ell+3)}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Mientras que para la función radial  $d_\ell$ , (4.109), que determina las componentes angulares de los campos eléctricos, tenemos

$$\begin{aligned} d_\ell &\approx -\frac{1}{\alpha_0} (F_\ell + \omega b_\ell) \\ &\approx -\frac{1}{\alpha_0} (c_1 + \omega c_2) r^\ell + \frac{\omega}{\alpha_0} \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + (2\ell+3) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+2}}{(\ell+1)(2\ell+3)}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Y para la función radial  $z_\ell$ , (4.110), que determina las componentes angulares de los campos magnéticos, se tiene

$$z_\ell \approx \frac{1}{\psi_0^6 r^2} (a_\ell - b'_\ell) \approx \left[ \frac{\omega}{\psi_0^2 \alpha_0^2} c_1 + \frac{(5\ell+6)}{(2\ell+3)} \frac{1}{\psi_0^6} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell-1}}{(\ell+1)} \quad (4.137)$$

Nótese que estas expresiones son solo válidas para valores naturales de  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ ; además, dado que las soluciones de estrellas bosónicas son regulares en toda su extensión espacial, debemos verificar que nuestras soluciones (4.132-4.137) son regulares en la vecindad del origen.

Sobre la regularidad de una función en un punto, usaremos la definición dada en [33], la cual establece que una función es regular en un punto si es convergente en dicho punto. Vistas como funciones 1-dimensionales, nuestras soluciones locales anteriores son regulares para todo  $\ell$ , sin embargo, vistas como funciones 3-dimensionales formadas del producto de estas soluciones radiales con las funciones de armónicos esféricos, para asegurar la regularidad específicamente en el origen, la función radial debe ser cero en tal punto. Si esta última condición no se cumple, la función 3-dimensional será multi-valuada en el origen y por lo tanto dejará de ser convergente en dicho punto.

Evaluando para  $r = 0$ , encontramos que nuestras soluciones radiales (4.132-4.137) son cero en el origen para todo  $\ell > 1$ . Para el caso  $\ell = 1$ , encontramos que las siguientes soluciones no son cero en el origen

$$a_1(r = 0) = c_2, \quad e_1(r = 0) = -\frac{1}{\alpha_0}(c_1 + \omega c_2), \quad z_1(r = 0) = \frac{\omega}{2\psi_0^2 \alpha_0^2} c_1 + \frac{11}{10\psi_0^6} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 c_2,$$

pues presentan parámetros constantes que no podemos imponer sean necesariamente cero. Por lo tanto, este resultado parece indicarnos que debemos descartar la configuración  $\ell = 1$  de nuestra estrella de  $\ell$ -Proca como estrella bosónica al no ser regular en el origen. Cabe destacar que aunque no presente regularidad en el origen, el sistema sigue siendo esféricamente simétrico, tal como sucede con el potencial de Coulomb.

Finalmente, con respecto a las soluciones asintóticas, cuando  $r \rightarrow \infty$ , tomamos nuevamente las ecuaciones de datos iniciales en segundo orden para los campos de materia  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell\}$ , (4.112-4.114), y consideramos que: (i) los términos con factores como  $1/r$  o  $1/r^2$  tienen a cero, (ii) las soluciones asintóticas convergen a cero por lo que generan cantidades de materia que se anula a distancias lejanas de la estrella, por lo que despreciamos el término  $a_\ell S$  en la ecuación para  $a_\ell$ , (iii) tenemos las soluciones asintóticas para  $\alpha \rightarrow 1$  y  $A \rightarrow 1$ , por lo que los términos con derivadas de estas cantidades también se anulan. Así, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones radiales

$$F_\ell'' \approx (\mu^2 - \omega^2) F_\ell, \quad a_\ell'' \approx (\mu^2 - \omega^2) a_\ell, \quad b_\ell'' \approx (\mu^2 - \omega^2) b_\ell. \quad (4.138)$$

Por ejemplo, la solución general para esta ecuación de  $F_\ell$  es

$$F_\ell = f_1 e^{-(\sqrt{\mu^2 - \omega^2})r} + f_2 e^{(\sqrt{\mu^2 - \omega^2})r}.$$

De las dos soluciones, la única viable físicamente es la solución real que converge a cero para distancias muy lejanas, para la cual, se debe asegurar que el exponente sea real, lo que equivale a imponer la condición  $\mu > \omega$ . Así, la solución asintótica para  $F_\ell$  es

$$F_\ell \sim e^{-(\sqrt{\mu^2 - \omega^2})r}. \quad (4.139)$$

Análogamente, las soluciones asintóticas convergentes para los campos de materia restantes son

$$a_\ell \sim e^{-\left(\sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right)r} , \quad (4.140)$$

$$b_\ell \sim e^{-\left(\sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right)r} . \quad (4.141)$$

Así, encontramos que las funciones de materia decaen exponencialmente de la misma forma, lo cual es consistente con nuestra suposición que el contenido de materia de la estrella de  $\ell$ -Proca se encuentra localizado en una región y que a distancias lejanas debe tender exponencialmente a cero, dando lugar a un espacio-tiempo plano.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

---

En este capítulo presentaremos los resultados numéricos de nuestra búsqueda de datos iniciales para la estrella de  $\ell$ -Proca usando métodos espectrales. Para la adecuada presentación de estos, será necesario describir brevemente el código espectral que fue escrito para este trabajo. Luego, mostraremos las soluciones de datos iniciales, analizándolos e identificando las diferencias y similitudes con los datos iniciales de la estrella de Proca estándar y la estrella de  $\ell$ -bosones. Para finalizar, mostraremos los resultados del análisis de convergencia espectral de nuestras soluciones encontradas.

### 5.1. Código espectral de colocación multi-dominio

Siguiendo los pasos descritos en la sección C.4. del Apéndice C, se escribió un código espectral en Python, basado en el método de colocación multi-dominio que nos permite resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca para diferentes valores de  $\ell$ . Este sistema, dado por (4.112-4.116), se compone por cinco ecuaciones diferenciales radiales de segundo orden para las funciones  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, \psi, \alpha\}$ , con términos de fuentes no-lineales y donde cada ecuación posee un operador laplaciano radial aplicado a una sola de las cinco funciones solución. Debido a esto, aplicamos el método de colocación multi-dominio a cada ecuación por separado, obteniendo 5 sistemas de ecuaciones residuales

$$\vec{R}_{F_\ell}(\vec{F}_\ell) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{R}_{F_\ell}^{(1)}}{\vec{R}_{F_\ell}^{(d)}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{R}_{F_\ell}^{(d)}}{\vec{R}_{F_\ell}^{(d)}} \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_{a_\ell}(\vec{a}_\ell) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{R}_{a_\ell}^{(1)}}{\vec{R}_{a_\ell}^{(d)}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{R}_{a_\ell}^{(d)}}{\vec{R}_{a_\ell}^{(d)}} \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_{b_\ell}(\vec{b}_\ell) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{R}_{b_\ell}^{(1)}}{\vec{R}_{b_\ell}^{(d)}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{R}_{b_\ell}^{(d)}}{\vec{R}_{b_\ell}^{(d)}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{R}_\psi(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{R}_\psi^{(1)}}{\vec{R}_\psi^{(d)}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{R}_\psi^{(d)}}{\vec{R}_\psi^{(d)}} \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_\alpha(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{R}_\alpha^{(1)}}{\vec{R}_\alpha^{(d)}} \\ \vdots \\ \frac{\vec{R}_\alpha^{(d)}}{\vec{R}_\alpha^{(d)}} \end{pmatrix}.$$

Donde el dominio físico radial se ha dividido en  $d$  dominios, siendo el primero un dominio de tipo núcleo, el  $d$ -ésimo dominio un dominio compactificado y los dominios intermedios dominios de tipo cascarón. Además, los vectores solución de estos sistemas son los coeficientes espectrales en cada dominio de las funciones  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, \psi, \alpha\}$  respectivamente

$$\vec{F}_\ell^T = ( \{ \tilde{F}_{\ell, k_1}^{(1)} \}, \dots, \{ \tilde{F}_{\ell, k_d}^{(d)} \} ), \quad \vec{a}_\ell^T = ( \{ \tilde{a}_{\ell, k_1}^{(1)} \}, \dots, \{ \tilde{a}_{\ell, k_d}^{(d)} \} ), \quad \vec{b}_\ell^T = ( \{ \tilde{b}_{\ell, k_1}^{(1)} \}, \dots, \{ \tilde{b}_{\ell, k_d}^{(d)} \} ),$$

$$\vec{\psi}^T = ( \{ \tilde{\psi}_{k_1}^{(1)} \}, \dots, \{ \tilde{\psi}_{k_d}^{(d)} \} ), \quad \vec{\alpha}^T = ( \{ \tilde{\alpha}_{k_1}^{(1)} \}, \dots, \{ \tilde{\alpha}_{k_d}^{(d)} \} ).$$

En cada sistema de ecuaciones residuales imponemos las condiciones de pegado descritas en la sección C.4. del apéndice C. Por otro lado, las condiciones de frontera asintóticas, impuestas en la última ecuación residual de cada dominio compactificado, se deducen de las soluciones para  $r$  lejanos obtenidas en (4.124-4.125) para las funciones métricas y en (4.139-4.141) para las funciones de materia que convergen exponencialmente a cero. Por lo tanto, las ecuaciones de condiciones de frontera asintótica que usaremos son

$$F_\ell(r \rightarrow \infty) = 0, \quad a_\ell(r \rightarrow \infty) = 0, \quad b_\ell(r \rightarrow \infty) = 0,$$

$$\psi(r \rightarrow \infty) = 1, \quad \alpha(r \rightarrow \infty) = 1.$$

Nótese que con estas condiciones no estamos imponiendo que la convergencia a cero de las funciones de materia sea de forma exponencial, sin embargo, se espera que las mismas ecuaciones nos brinden este tipo de comportamiento asintótico, lo cual verificaremos en los resultados.

Las condiciones de frontera restantes son las condiciones de regularidad en el origen, las cuales se impondrán restringiendo la base espectral de cada dominio de tipo núcleo a una base de Chebyshev o Galerkin de paridad definida, dependiendo del comportamiento cerca al origen de nuestras funciones solución. Dicho comportamiento está dado por las potencias dominantes de las soluciones locales en la vecindad del origen, obtenidas en (4.132-4.134) y (4.120-4.122):

$$F_\ell(r \simeq 0) \simeq r^\ell, \quad a_\ell(r \simeq 0) \simeq r^{\ell-1}, \quad b_\ell(r \simeq 0) \simeq r^\ell,$$

$$\psi(r \simeq 0) \simeq \psi_0, \quad \alpha(r \simeq 0) \simeq \alpha_0.$$

Una vez impuestas todas las condiciones de fronteras, el sistema total de ecuaciones residuales se compone por la concatenación de los cinco sistemas de ecuaciones residuales mostrados y la adición de una ecuación para el eigenvalor dado por la

frecuencia  $\omega$

$$\vec{R}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \vec{R}_{F_\ell} \\ \vec{R}_{a_\ell} \\ \vec{R}_{b_\ell} \\ \vec{R}_\psi \\ \vec{R}_\alpha \\ \text{Ec. para } \omega \end{pmatrix},$$

cuyo vector solución esta dado por

$$\vec{u}^T = (\vec{F}_\ell^T, \vec{a}_\ell^T, \vec{b}_\ell^T, \vec{\psi}^T, \vec{\alpha}^T, \omega).$$

Este se obtiene al implementar el algoritmo iterativo de Newton-Raphson(N-R), descrito al final del apéndice C. Luego, obtenidos los valores de estos coeficientes y de la frecuencia, mediante la formula del interpolante (C.9) podemos reconstruir las soluciones de datos iniciales. Es importante mencionar, que en el caso  $\ell = 0$  de la estrella de  $\ell$ -Proca, la ecuación para  $\omega$  que se usó en nuestro código fue el valor de la función  $F_0$  en el origen, es decir,  $F_0(r = 0) = F_{0,0}$ . De esta manera, las soluciones se parametrizan mediante el valor de  $F_{0,0}$ . En cambio, para  $\ell \neq 0$ , se usó como ecuación para  $\omega$  a la ecuación  $\alpha(r = 0) = \alpha_0$  y así, el parámetro de estas soluciones será  $\alpha_0$ . Una vez obtenida una solución de este sistema mediante el método de N-R para un valor dado del parámetro, para buscar una nueva solución en nuestro código modificamos ligeramente el valor de dicho parámetro y usamos la solución anterior como estimación inicial. Así, podemos recorrer el espacio de parámetros encontrando sus correspondientes soluciones de datos iniciales.

## 5.2. Soluciones de datos iniciales

Con nuestro código espectral descrito en la sección anterior, se obtuvieron soluciones de datos iniciales para  $\ell = 0, 1, 2, 3$ . En las cuales, por simplicidad se tomó a la masa de los campos de Proca como  $\mu = 1$ , teniendo en cuenta que las soluciones de datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca pueden ser reescaladas a un valor arbitrario de  $\mu$  usando la invariancia de su sistema de ecuaciones (4.112-4.116) bajo la transformación

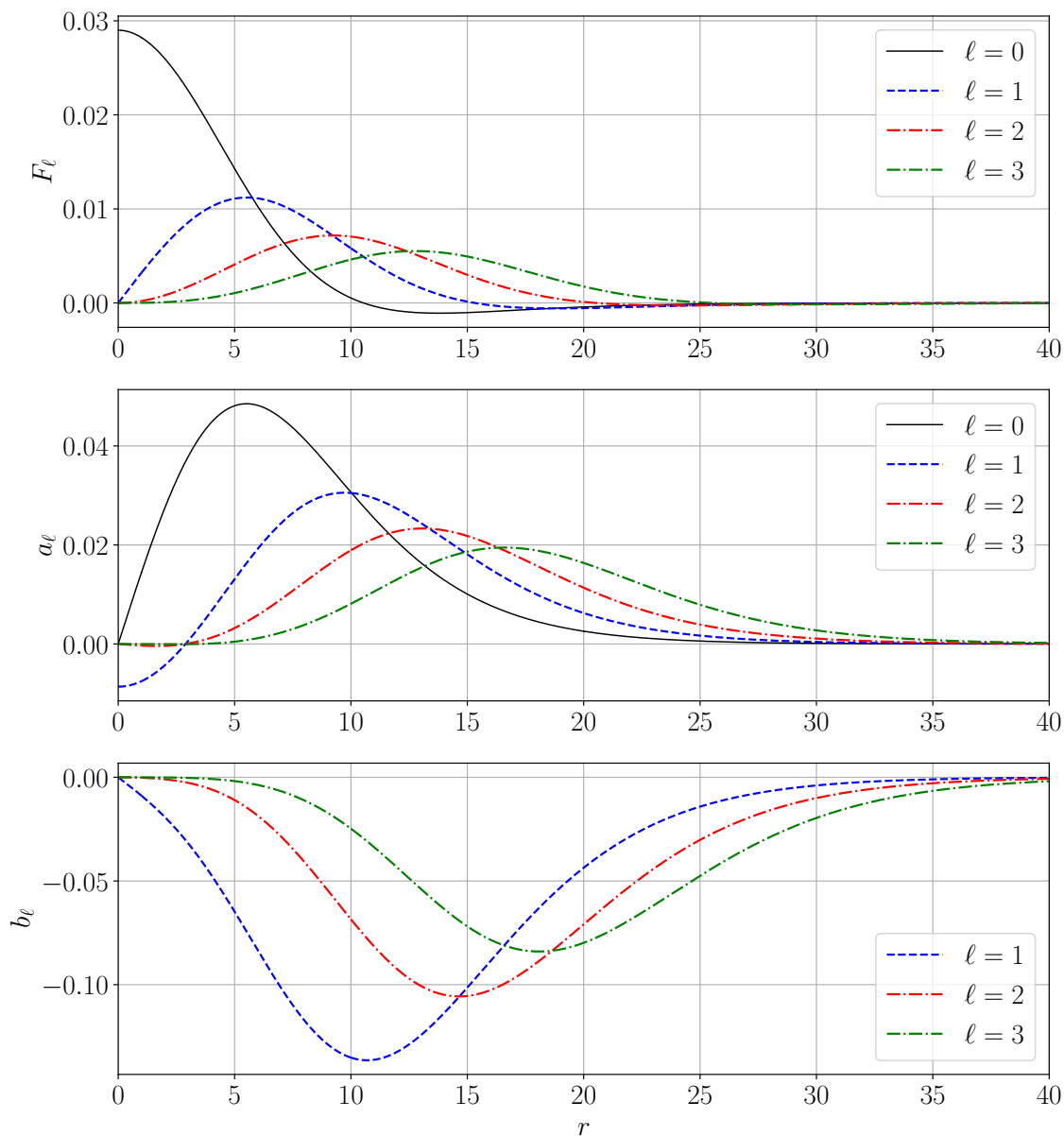
$$\mu \mapsto \lambda\mu, \quad \omega \mapsto \lambda\omega, \quad r \mapsto \lambda^{-1}r, \quad b_\ell \mapsto \lambda^{-1}b_\ell, \quad (5.1)$$

manteniendo sin cambiar las funciones  $F_\ell, a_\ell, \alpha, \psi$ .

Con el fin de realizar comparaciones consistentes, las soluciones que mostraremos a continuación tienen el mismo valor de parámetro  $\alpha_0 = 0.880$  cuando  $\ell \neq 0$ . Dado que la solución con  $\ell = 0$ , está parametrizada con el valor radial del campo



escalar en el origen  $F_{0,0}$ , elegimos uno que nos produzca un valor de  $\alpha_0$  que se aproxime a  $\alpha_0 = 0.880$ . Así, la solución para  $\ell = 0$  que mostraremos corresponde a  $F_{0,0} = 0.029$ . Además, estas soluciones tienen las siguientes frecuencias temporales: para  $\ell = 0 : \omega = 0.936$ ,  $\ell = 1 : \omega = 0.929$ ,  $\ell = 2 : \omega = 0.926$ ,  $\ell = 3 : \omega = 0.924$ .



**Figura 5.1:** Soluciones fundamentales para las funciones potenciales  $F_\ell, a_\ell$  y  $b_\ell$  con  $\ell = 0, 1, 2, 3$  y  $\alpha_0 = 0.880$ .

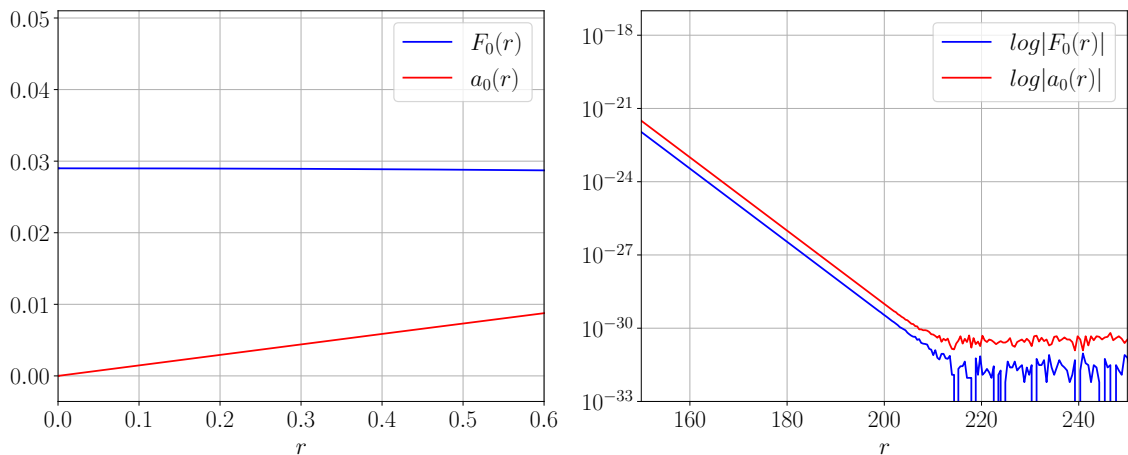
En la figura 5.1 presentamos los perfiles radiales de las soluciones fundamentales

de las funciones potenciales  $F_\ell$  (panel superior),  $a_\ell$  (panel intermedio),  $b_\ell$  (panel inferior) con los diferentes valores de  $\ell$  mencionados.

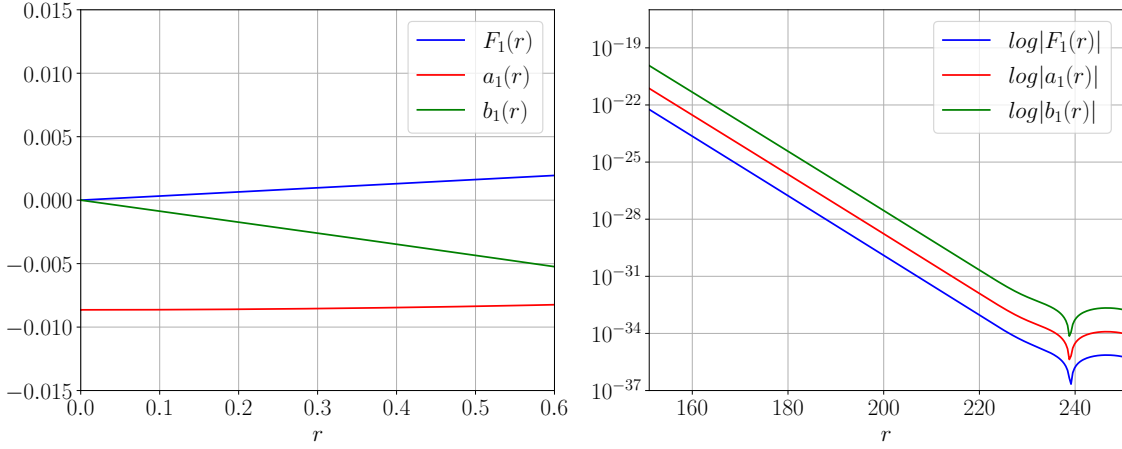
En primer lugar, nuestro código espectral reprodujo el mismo perfil radial de las funciones  $F_0$  y  $a_0$  (líneas negras en el panel superior e intermedio de 5.1, respectivamente) que pertenecen a la estrella de Proca estándar y fueron por primera vez obtenidas mediante un método en diferencias finitas de *shooting* unidimensional y presentadas en el artículo original de las estrellas de Proca [4]. Dado que el caso particular  $\ell = 0$  de la estrella de  $\ell$ -Proca corresponde a la estrella de Proca estándar no rotante, como se mostró en el capítulo anterior, esta no posee función  $b_\ell$  y, en consecuencia, no se muestra en el panel inferior de 5.1.

La figura 5.1 también presenta los perfiles radiales de las funciones potenciales para  $\ell = 1, 2, 3$ . Antes de acreditar la validez de estos, es necesario verificar que cumplan con el comportamiento aproximado en las vecindades de las fronteras obtenido en la sección 4.7. del capítulo anterior. Dado que la figura 5.1 no permite realizar este análisis a simple vista, presentamos para cada valor de  $\ell$  una pareja de gráficas donde: (i) el panel izquierdo corresponde a una ampliación de los perfiles radiales cerca al origen. (ii) El panel derecho corresponde a los perfiles radiales para valores de  $r$  lejanos al origen donde el eje vertical está representado en escala logarítmica. Para cada valor de  $\ell$ , encontramos el siguiente comportamiento cerca al origen  $r \simeq 0$

- Figura 5.2:  $F_0 \propto 1$  y  $a_0 \propto r$ .
- Figura 5.3:  $F_1 \propto r$ ,  $a_1 \propto 1$  y  $b_1 \propto r$ .



**Figura 5.2:** Soluciones en las fronteras para  $\ell = 0$ .

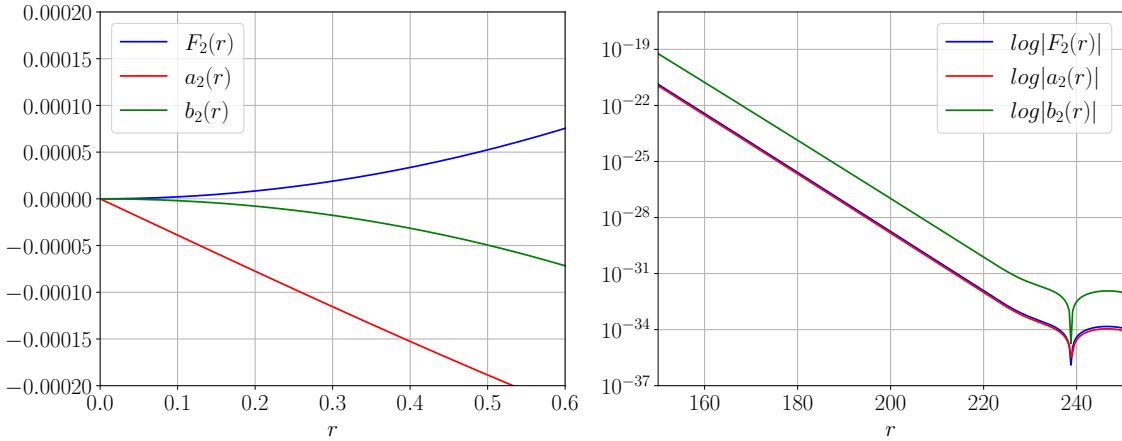


**Figura 5.3:** Soluciones en las fronteras para  $\ell = 1$ .

- Figura 5.4:  $F_2 \propto r^2$ ,  $a_2 \propto r$  y  $b_2 \propto r^2$ .
- Figura 5.3:  $F_3 \propto r^3$ ,  $a_3 \propto r^2$  y  $b_3 \propto r^3$ .

Lo cual, es consistente con el comportamiento de las potencias dominantes de las soluciones aproximadas cerca al origen dadas por (4.132-4.134)

$$\begin{aligned} \ell = 0 : F_0 &\simeq c_1, & a_0 &\simeq \frac{\psi_0^4 \omega}{3\alpha_0^2} r. \\ \ell \neq 0 : F_\ell &\simeq c_1 r^\ell, & a_\ell &\simeq \ell c_2 r^{\ell-1}, & b_\ell &\simeq c_2 r^\ell. \end{aligned}$$

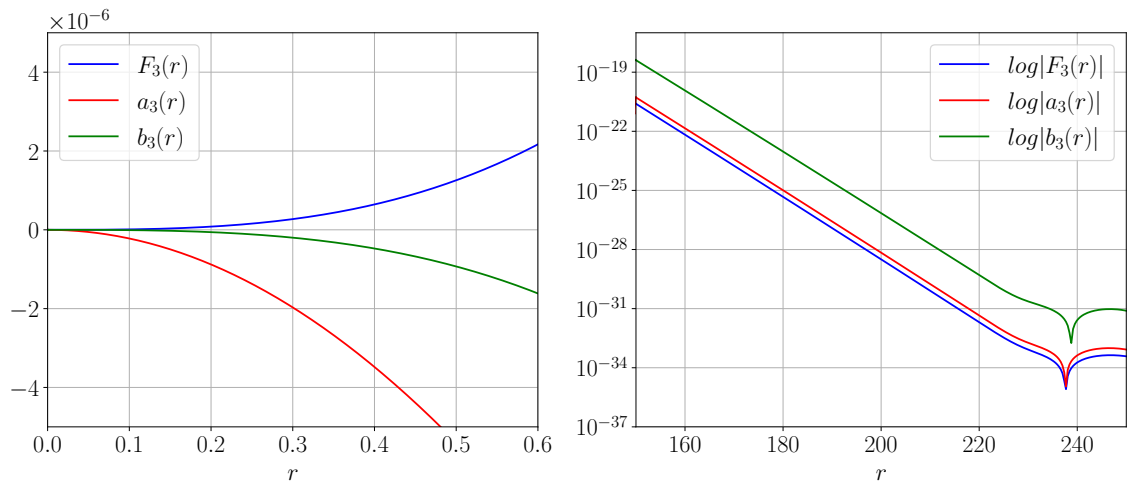


**Figura 5.4:** Soluciones en las fronteras para  $\ell = 2$ .

La diferencia de estas dependencias entre el caso  $\ell = 0$  con los casos  $\ell \neq 0$  se debe a la presencia de términos centrífugos en las ecuaciones de la estrella de  $\ell$ -Proca, los

cuales, son un efecto del momento angular de los campos de Proca constituyentes.

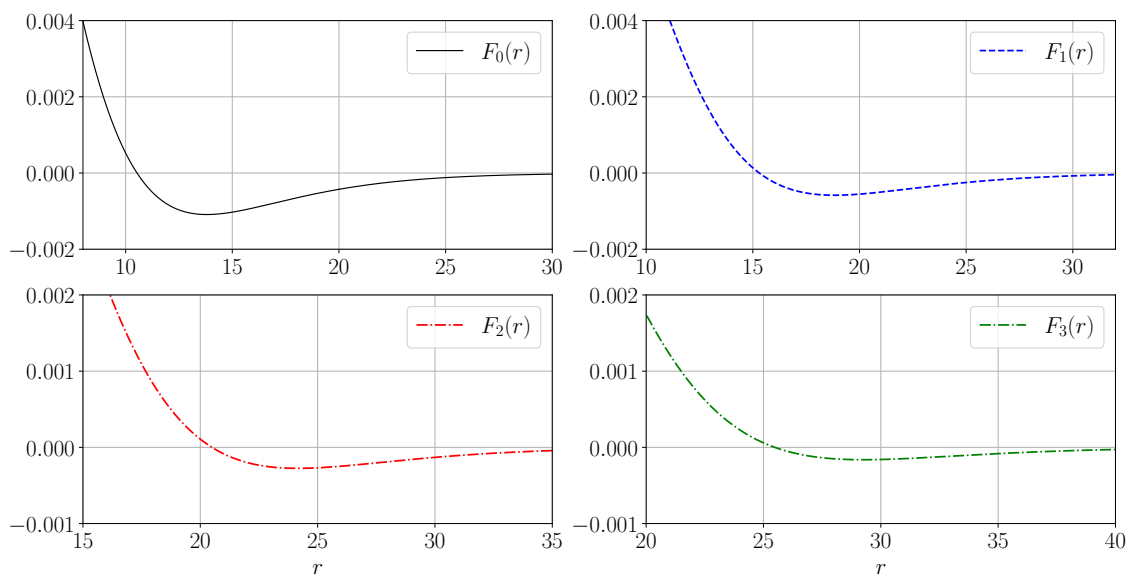
Debemos poner particular énfasis a la solución de  $a_\ell$  con  $\ell = 1$ . Como se observa en la figura 5.1 y en la figura 5.3, esta solución posee un valor constante diferente de cero en el origen. Dado que esta  $a_\ell$  corresponde a la amplitud de la componente radial del 3-vector potencial, al ser diferente de cero en el origen viola la regularidad sistema. En consecuencia debemos descartar esta solución pues no corresponde a una solución regular de estrella de  $\ell$ -Proca. Este resultado se predijo en la sección 4.7. donde expusimos el significado de regularidad para funciones en un espacio 3-dimensional.



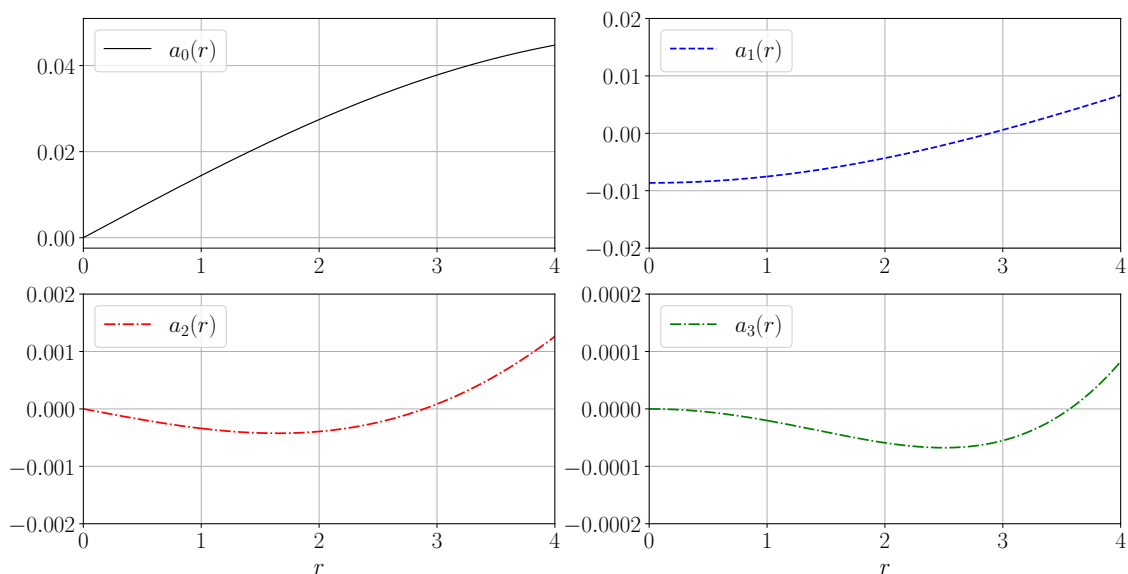
**Figura 5.5:** Soluciones en las fronteras para  $\ell = 3$ .

Por otro lado, los 4 paneles izquierdos de las figuras 5.2-5.5, muestran un comportamiento radial en escala logarítmica consistente con el decaimiento exponencial hacia cero dado por las soluciones para distancias lejanas (4.139-4.141), hasta alcanzar el nivel de precisión de máquina. Con estos resultados concluimos que nuestras soluciones satisfacen el comportamiento predicho en las vecindades de las fronteras.

Otra característica importante que debemos mencionar sobre nuestras soluciones de datos iniciales es que estas corresponden a soluciones fundamentales y no a casos excitados. En ese caso y tal como se presentó por primera vez en el artículo original de las estrellas de Proca [4], la solución fundamental de  $F_\ell$  con  $\ell = 0$ , posee un nodo. Los resultados presentados en el panel superior de la figura 5.1 nos indican que la presencia de un nodo se mantiene para las soluciones fundamentales de  $F_\ell$  con  $\ell \neq 0$ , al menos para los primeros 3 valores de  $\ell \neq 0$  que consideramos en este trabajo. Para poder observar claramente esta característica, dichas soluciones fundamentales con un nodo se muestran amplificadas en la figura 5.6.



**Figura 5.6:** Soluciones fundamentales para  $F_\ell$  con presencia de un nodo para  $\ell = 0, 1, 2, 3$ .

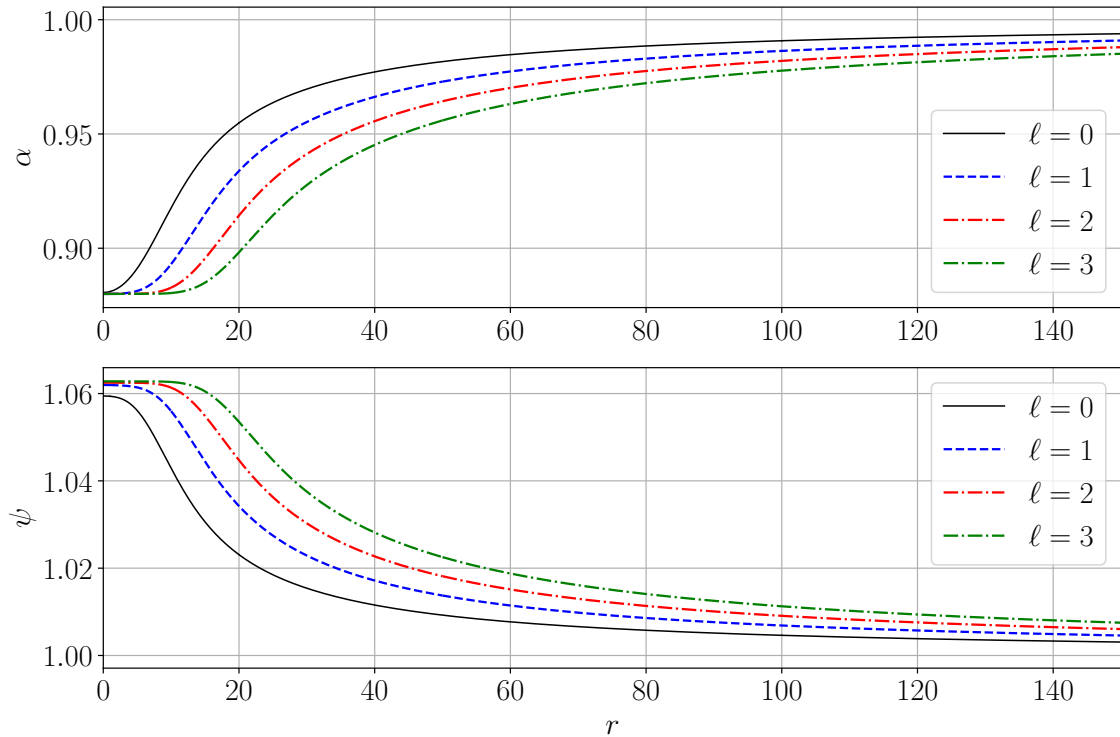


**Figura 5.7:** Soluciones fundamentales para  $a_\ell$  con presencia de un nodo para  $\ell \neq 0$ .

Con respecto a la solución fundamental para  $a_\ell$ , el panel intermedio de la Fig. 5.1 nos muestra que la única solución con un nodo se da aparentemente para  $\ell = 1$ . Sin embargo, las figuras 5.4 y 5.5, nos muestran que  $a_\ell$  sufre de un cambio signo indicándonos la existencia de un nodo cerca al origen. En efecto, al ampliar

adecuadamente  $a_\ell$  encontramos la presencia de un nodo para  $\ell = 2, 3$ , lo cual, presentamos en la figura 5.7. Esta es una nueva característica con respecto a la solución fundamental para  $a_\ell$  con  $\ell = 0$ , la cual no posee nodos y cuyo caso fue reportado en [4].

Para cerrar el sistema de datos iniciales  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, \psi, \alpha\}$  presentamos las soluciones fundamentales de  $\alpha$  y  $\psi$  en la figura 5.8, y como se puede observar, presentan la dependencia radial estándar de un sistema regular en todo su dominio.



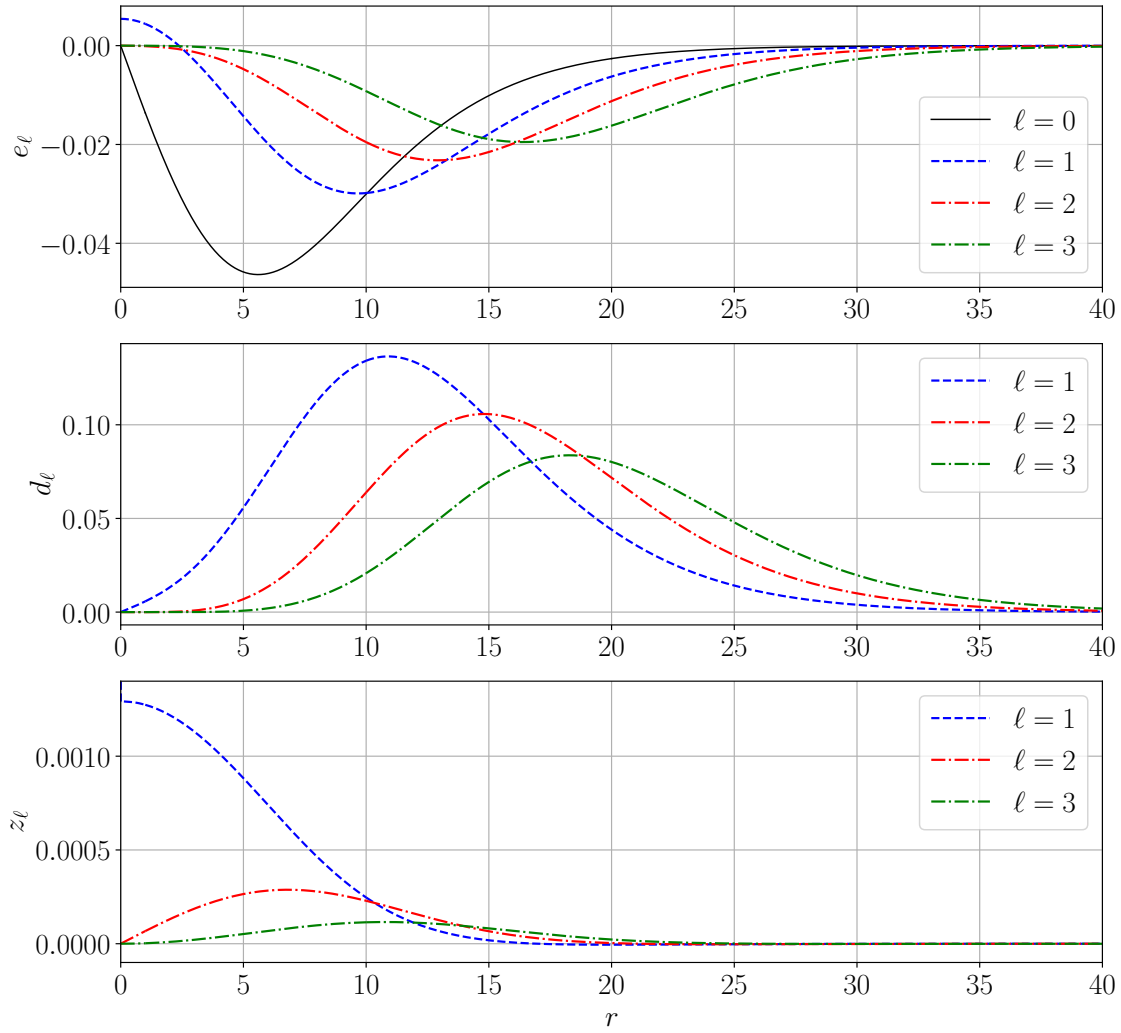
**Figura 5.8:** Soluciones fundamentales para las funciones métricas  $\alpha$  y  $\psi$  con  $\ell = 0, 1, 2, 3$  y  $\alpha_0 = 0.880$ .

Recordemos de la sección 4.4. del capítulo 4, que el contenido de materia de la estrella de  $\ell$ -Proca no solo se caracteriza por sus campos potenciales, sino, también por sus campos electromagnéticos. De entre las soluciones de datos iniciales obtenidas, sabemos que  $F_\ell$ , nos brinda la dependencia radial de los  $2\ell + 1$  potenciales escalares constituyentes, mientras que,  $a_\ell$ , la dependencia radial de la componente radial y  $b_\ell$ , la dependencia radial de las componentes angulares de los  $2\ell + 1$  potenciales 3-vectoriales constituyentes. Estas soluciones radiales junto a las funciones métricas nos permite calcular:

- La dependencia radial de la componentes radial de los  $2\ell + 1$  campos eléctricos, dada por (4.108),  $e_\ell = -(F'_\ell + \omega a_\ell)/\alpha$

- la dependencia radial de las componentes angulares de los  $2\ell + 1$  campos eléctricos, dada por (4.109),  $d_\ell = -(F_\ell + \omega b_\ell)/\alpha$
- la dependencia radial de las componentes angulares de los  $2\ell + 1$  campos magnéticos, dada por (4.110),  $z_\ell = (a_\ell - b'_\ell)/\psi^6 r^2$

Ya que conocemos los perfiles radiales de  $\{F_\ell, a_\ell, b_\ell, \psi, \alpha\}$ , podemos obtener los perfiles radiales de los campos electromagnéticos, lo cuales se presentan en la figura 5.9



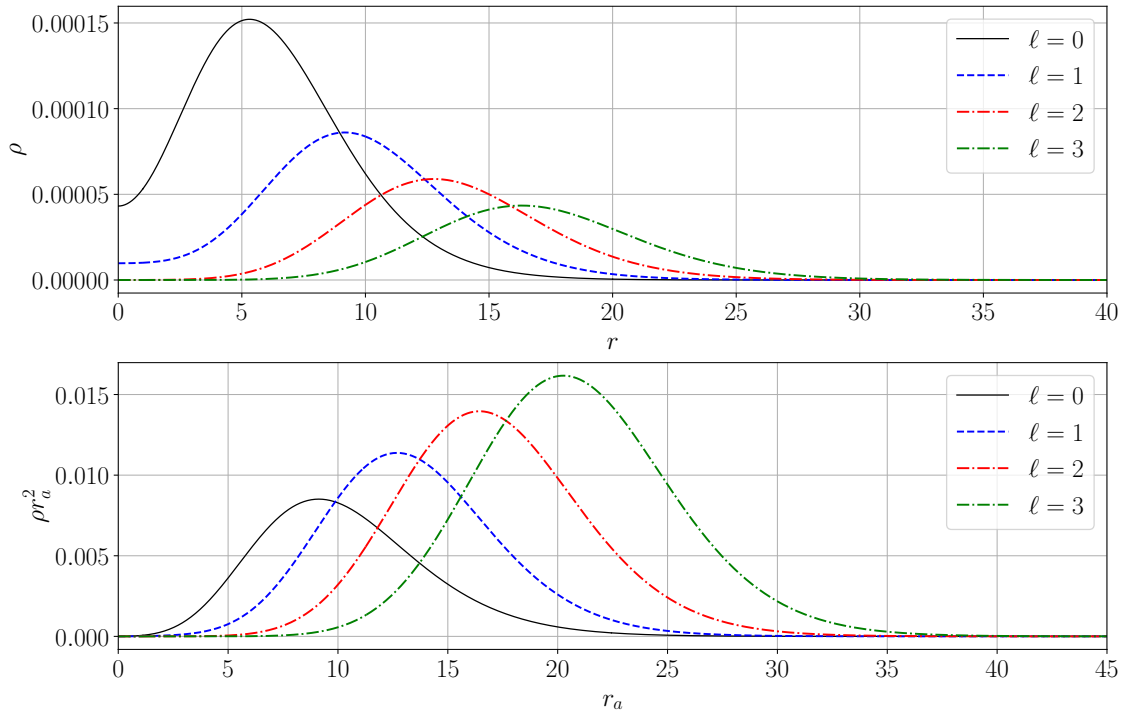
**Figura 5.9:** Soluciones fundamentales para las funciones de campos electromagnéticos  $e_\ell$ ,  $d_\ell$  y  $z_\ell$  con  $\ell = 0, 1, 2, 3$  y  $\alpha_0 = 0.880$ .

Similar a la figura 5.1, el caso  $\ell = 0$  de la estrella de  $\ell$ -Proca, correspondiendo a la estrella de Proca estándar, no posee componentes vectoriales angulares y por lo

tanto, no posee  $d_\ell$  y  $z_\ell$ . Esto se evidencia en los paneles intermedio e inferior de la figura 5.9. Nótese además, que a simple vista el comportamiento cercano al origen de estas funciones concuerda a lo predicho en (4.135-4.137), esto es, a las potencias dominantes con  $\ell \neq 0$

$$e_\ell \propto r^{\ell-1}, \quad d_\ell \propto r^\ell, \quad z_\ell \propto r^{\ell-1}.$$

Nuevamente encontramos la violación de regularidad por parte de las componentes diferentes de cero en el origen de los campos eléctricos y los campos magnéticos constituyentes para  $\ell = 1$ . Junto a esta violación de regularidad también presente en  $a_1$ , concluimos que la configuración  $\ell = 1$  de nuestra propuesta de estrella de  $\ell$ -Proca debe ser descartada como estrella bosónica regular. Siendo que  $\ell = 2, 3$  se mantienen como casos válidos de sistemas regulares en el origen.



**Figura 5.10:** Perfiles radiales de la densidad de energía  $\rho$  (panel superior) y de  $\rho(r_a)r_a^2$  (panel inferior) con  $\ell = 0, 1, 2, 3$  y  $\alpha_0 = 0.880$ , donde  $r_a$  es el radio de área.

Para finalizar esta sección presentaremos los perfiles radiales de la densidad de energía, dada por (4.117), para diferentes valores de  $\ell$  (panel superior de la figura 5.10). Como es de esperarse, la densidad de energía para  $\ell = 0$  concuerda con la presentada en el artículo original de las estrellas de Proca [4], esto es, presenta un mínimo local diferente de cero en el origen. Es interesante observar que este comportamiento también lo presenta la densidad de energía para  $\ell = 1$ , a pesar de haber



sido descartada como solución regular. Sin embargo, este comportamiento muda para  $\ell > 1$  donde observamos que la densidad de energía disminuye monótonamente a cero a medida que nos acercamos al origen, teniendo  $\rho(r=0) = 0$ . Esto se debe al cumplimiento de las condiciones de regularidad implementadas y mencionadas en la sección anterior, que a su vez, son un efecto del momento angular de los campos de Proca constituyentes. Este mismo comportamiento para valores de  $\ell$  no triviales se presenta en las densidades de energía de las estrellas de  $\ell$ -bosones, reportado en su artículo original [14].

Por otro lado, en el panel inferior de la figura 5.10 presentamos los perfiles radiales de la densidad de energía multiplicada por el cuadrado del radio de área  $r_a$ , esto es,  $\rho r_a^2$ . Para ello, fue necesario realizar un cambio de la coordenada radial isotrópica  $r$  con la coordenada radial de área dado por  $r_a = r\psi^2$ . Debido a que al integrar la función  $\rho(r_a)r_a^2$  en  $r_a$  se obtiene la función de masa de Misner-Sharp. Podemos concluir que a pesar que la amplitud de la densidad de energía disminuye a medida que el número de momento angular  $\ell$  aumenta, las configuraciones de estrella de  $\ell$ -Proca se hacen más extendidas, y por lo tanto,  $\rho r_a^2$  crece y reproduce objetos más masivos. Este mismo comportamiento se presentó para las estrellas de  $\ell$ -bosones [14].

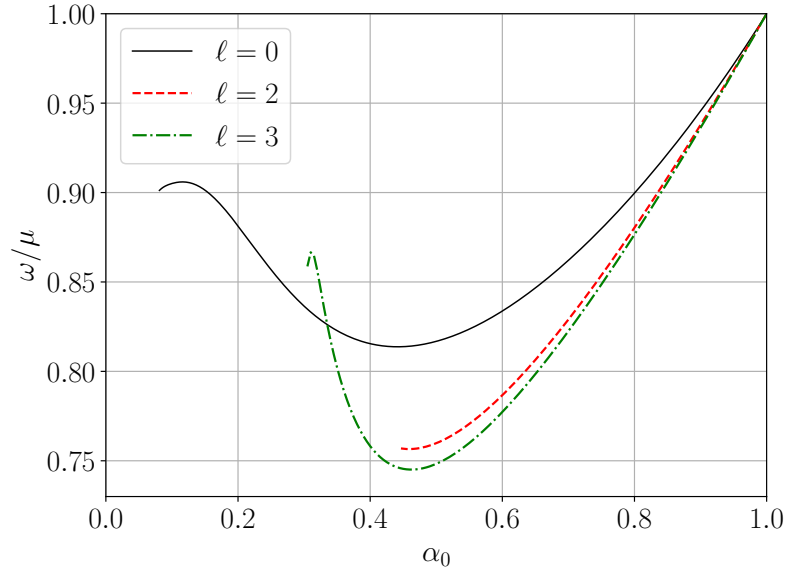
### 5.3. Familias de soluciones

Analizadas las soluciones de datos iniciales para un valor de parámetro  $\alpha_0$  dado, en esta sección evaluaremos las características que presentan las familias de soluciones de datos iniciales con diferentes valores de  $\ell$  a lo largo de sus respectivos espacios de parámetros. Dado, que en la sección anterior concluimos que la configuración con  $\ell = 1$  debe descartarse, en las siguientes gráficas solo mostraremos los casos  $\ell = 0, 2, 3$ .

Existen 2 condiciones que deben satisfacer todas las soluciones de datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca. La primera se debe a la correcta definición de las soluciones locales cerca del origen de las funciones de materia. En efecto, en el apéndice B, se mostró que estas soluciones locales son funciones de Bessel generalizadas y para tener un dominio real bien definido, deben cumplir que  $\omega/\mu > \alpha_0$  para todo  $\ell$ . Para verificar el cumplimiento de esta condición, se muestra en la figura 5.11 la relación entre  $\omega/\mu$  y  $\alpha_0$  para los distintos valores de  $\ell$  mencionados. Mediante trazos horizontales que cortan hasta 2 o 3 veces estas gráficas, observamos que siempre se cumple que  $\omega/\mu > \alpha_0$ .

La segunda condición se debe satisfacer para obtener un comportamiento asintótico convergente a cero de las funciones de materia. Para lograr este tipo de solución se debe cumplir que  $\omega < \mu$ , Nuestras soluciones numéricas también cumplen esta

condición, pues en la figura 5.11 observamos que el rango de  $\omega/\mu$  es  $[0.745, 1.0 >$ , lo cual implica que  $\omega/\mu < 1$ . El cumplimiento de ambas condiciones es un resultado como tal, pues no fueron impuestas como condiciones adicionales en nuestro código espectral.



**Figura 5.11:** Frecuencia  $\omega$  vs. lapso en el origen  $\alpha_0$ .

Podemos caracterizar nuestras soluciones conociendo el parámetro  $\alpha_0$ , la frecuencia  $\omega$ , la masa total de ADM, el radio efectivo  $R_{99}$  y la compacidad efectiva  $C_{99}$ . De estas tres últimas cantidades, la forma de calcular la masa de ADM será explicado en la siguiente sección. Con respecto al radio efectivo de la estrella de  $\ell$ -Proca, debemos tener presente que las estrellas bosónicas no poseen una superficie bien definida, por lo tanto, la única manera de analizar su extensión espacial es usando alguna definición de radio efectivo. La que usaremos en este trabajo es el radio  $R_{99}$  que se define como el radio de área del objeto que contiene el 99% de la masa total. Para calcular esta cantidad hacemos uso de la función de masa de Misner-Sharp  $m(r_a)$ , la cual se define escribiendo la métrica espacial en coordenadas radiales de área, (2.33), y reescribiendo la componente radial  $A(r_a)$  como

$$A(r_a) = \frac{1}{1 - 2m(r_a)/r_a}, \quad (5.2)$$

donde  $r_a$  es la coordenada radial de área. La restricción Hamiltoniana para sistema estáticos permite expresar la función de masa como la siguiente integral

$$m(r_a) = \int_0^{r_a} 4\pi \rho_a^2 dr_a, \quad (5.3)$$

obteniéndose la masa de  $ADM$  cuando el radio de área va hacia el infinito espacial

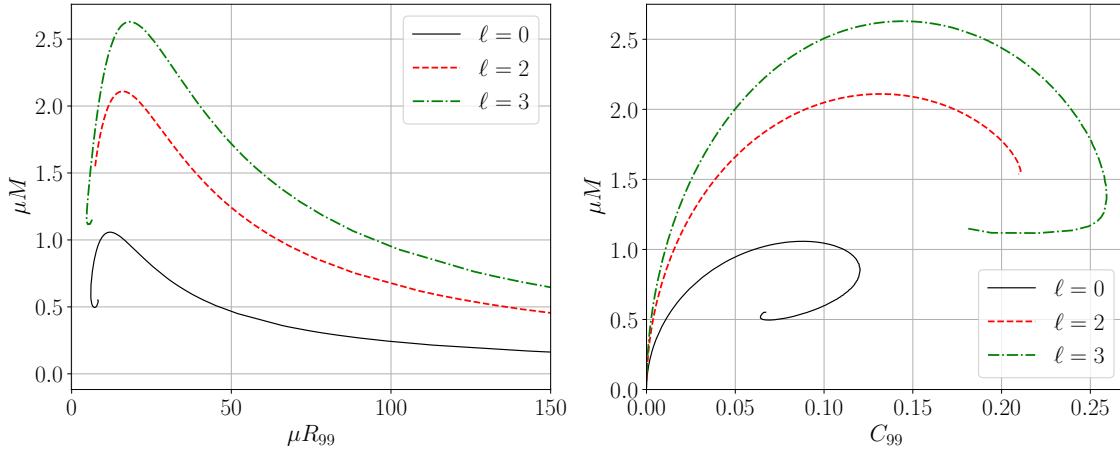
$$\lim_{r_a \rightarrow \infty} m(r_a) = M_{ADM}. \quad (5.4)$$

Nos será más sencillo calcular  $m(r_a)$  realizando un cambio de coordenadas radiales de área a coordenadas isotrópicas en la integral anterior, obteniéndose

$$m(r_a) = -2r^2\psi'(\psi + r\psi'), \quad (5.5)$$

donde  $( )'$  es la derivada radial en la coordenada radial isotrópica  $r$ . Gracias a que contamos con la solución numérica de  $\psi$ , podemos encontrar el radio efectivo  $r_a = R_{99}$  tal que  $m(R_{99}) = 0.99M_{ADM}$ . Luego, elegimos este radio efectivo para calcular la compacidad efectiva  $C_{99}$  como

$$C_{99} = \frac{M_{ADM}}{R_{99}}. \quad (5.6)$$

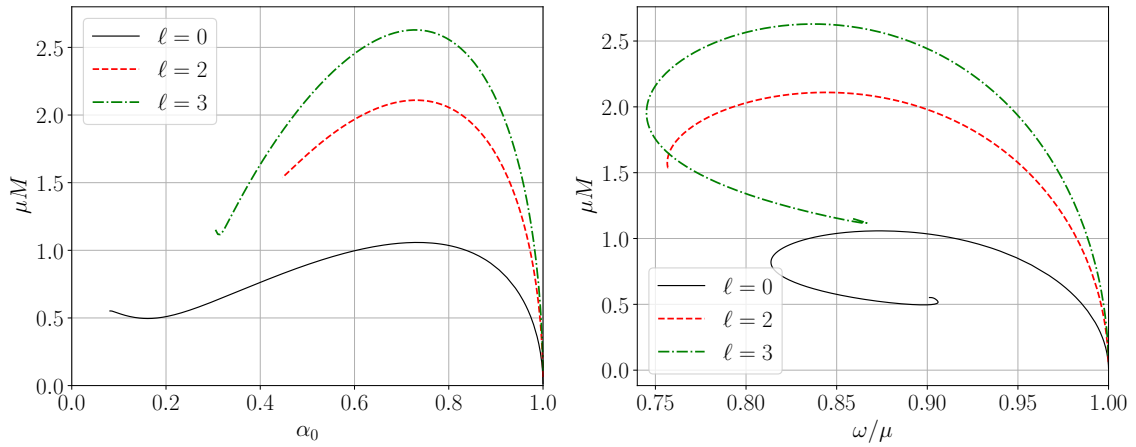


**Figura 5.12:** Panel izquierdo: Masa total de ADM vs. radio efectivo  $R_{99}$ . Panel derecho: Masa total de ADM vs. compacidad efectiva  $C_{99}$ .

En la figura 5.12, presentamos la masa total de ADM en función del radio efectivo (panel izquierdo) y de la compacidad efectiva (panel derecho). Sobre la relación entre  $M$  y  $R_{99}$  observamos para la estrella de  $\ell$ -Proca con  $\ell = 0, 2, 3$ , similar a lo observado con la estrella de  $\ell$ -bosones, que a media que el radio efectivo disminuye a partir de valores muy altos, la masa total incrementa monótonamente hasta alcanzar un valor máximo. Esta relación se traduce en un aumento de la compacidad efectiva desde un valor cero mientras aumentamos la masa total, como se muestra en panel derecho de la figura 5.12. Nótese en esta relación entre  $M$  y  $C_{99}$ , que el punto de máxima masa total para cada familia no corresponde necesariamente a su punto de máxima

compacidad efectiva, además y no menos importante, la compacidad efectiva máxima que reportamos gráficamente aumenta con el aumento de  $\ell$ , por lo menos para los valores que estamos considerando.

En la figura 5.13 presentamos la masa total de ADM en función del lapso en el origen  $\alpha_0$  (panel izquierdo) y en función de la frecuencia  $\omega$  (panel derecho). En particular decidimos presentar la relación entre  $M$  y  $\alpha_0$  pues esta última cantidad corresponde al parámetro de nuestras soluciones espectrales y el caso  $\ell = 0$  es consistente con la relación entre la masa de ADM y la amplitud radial del campo escalar en el origen  $F_{0,0}$  para la estrella de Proca estándar, presentada y obtenida mediante un método de *shooting* 1-dimensional en [4].



**Figura 5.13:** Panel izquierdo: Masa total de ADM vs. valor del lapso en el origen  $\alpha_0$ . Panel derecho: Masa total de ADM vs. frecuencia  $\omega$ .

Por otro lado, la relación entre la masa  $M$  y la frecuencia  $\omega$  forman la espiral característica de las estrella bosónicas. Esta curva en espiral implica la existencia de soluciones en equilibrio degeneradas en su frecuencia  $\omega$  (con diferentes masas  $M$ ) y degeneradas en su masa  $M$  (con diferentes frecuencias  $\omega$ ). Matemáticamente, se puede explicar el comportamiento en espiral de la relación entre  $M$  y  $\omega$ , y por lo tanto la existencia de soluciones degeneradas, al identificar la dependencia de ambas cantidades respecto al parámetro  $\alpha_0$ . En efecto, el panel izquierdo de la figura 5.13 y la figura 5.11 nos muestran respectivamente que  $M$  y  $\omega$  poseen una dependencia parecida a una dependencia oscilatoria amortiguada del parámetro  $\alpha_0$  con los perfiles invertidos y los puntos críticos desfasados. Por ejemplo, si para el caso  $\ell = 3$  identificamos los valores de  $\alpha_0$  de los puntos críticos, entre el máximo global  $M_{max} = M(\alpha_0 = 0.728)$  y el mínimo local  $M_{min} = M(\alpha_0 = 0.315)$  de la masa total  $M$ , se encuentra el mínimo local de la frecuencia  $\omega_{min} = \omega(\alpha_0 = 0.460)$ . Este comportamiento será clave para la formación de la curva espiral de  $M(\omega)$ , pues a

medida que aumentemos la masa  $M$  disminuyendo  $\alpha_0$  a partir de 1, pasamos por  $\alpha_0 = 0.728$  lo cual implica que

$$\frac{dM}{d\alpha_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{d\omega} = \frac{dM}{d\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{d\omega} = 0 .$$

Es decir, en la curva  $M(\omega)$  alcanzamos un máximo valor para la masa total  $M_{max}$ , el cual es global como se observa en la Fig. 5.13. Luego la masa disminuirá a medida que disminuyamos  $\alpha_0$  hasta pasar por el punto  $\alpha_0 = 0.460$ , implicando

$$\frac{d\omega}{d\alpha_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{d\omega} = \frac{dM}{d\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{d\omega} \rightarrow \infty .$$

Para este valor de  $\alpha_0$ , la curva  $M(\omega)$  posee una pendiente vertical alcanzando su mínimo valor de  $\omega$  en su dominio de existencia. Luego,  $\omega$  empieza a aumentar a medida que aumentemos  $\alpha_0$  hasta pasar por  $\alpha_0 = 0.315$  y por lo tanto obtener una mínimo local en la curva  $M(\omega)$  deducido de la misma manera como obtuvimos su máximo global líneas arriba. De esta manera al recorrer los valores de  $\alpha_0$  se obtiene la curva espiral de  $M(\omega)$ . Esta explicación está inspirada en [34], donde se muestra que la relación  $N(\omega)$  se describe mediante una curva espiral para la estrella escalar de bosones estándar, donde  $N$  es el número de bosones del sistema. A su vez, presumimos que esta explicación está inspirada en el análisis, presentado en los capítulos 5 y 6 del libro [35], sobre curvas espirales para la relación  $M(R)$  de estrellas de neutrones con altas densidades centrales de masa, donde  $M$  y  $R$  son, respectivamente, la masa total y el radio de la estrella determinados mediante dependencias armónicas amortiguadas en función de la densidad central de la estrella, con la misma frecuencia y desfasadas entre sí.

Otra característica que podemos observar es que la curva  $M(\omega)$  posee dos ramas divididas por la solución de masa total máxima  $M_{max}$ , siendo la rama a la derecha de  $M_{max}$  aquella que posee en casi toda su extensión soluciones con menores compactidades en comparación con la rama a la izquierda de  $M_{max}$ , que presentará mayores compactidades. Esta identificación se hace clara si comparamos la gráfica de  $M(\omega)$  con la gráfica de  $M(R_{99})$  presentada en la figura 5.12.

Con respecto a las configuraciones con masa total máxima, presentamos sus características principales en unidades de Planck en la tabla 5.1. De la misma forma como se reportó para las estrellas de  $\ell$ -bosones [14], la masa total máxima aumenta con el aumento del parámetro de momento angular  $\ell$ , y aunque el valor de su radio efectivo también aumenta respectivamente, estas configuraciones con masa máxima se hacen cada vez más compactas a medida que aumentamos el valor de  $\ell$ .

Configuración	$\alpha_0$	$\omega$	$M_{max}$	$R_{99}$	$C_{99}$
$\ell = 0$	0.733	0.874	1.058	12.029	0.088
$\ell = 2$	0.730	0.844	2.110	15.992	0.132
$\ell = 3$	0.728	0.836	2.629	18.184	0.146

**Tabla 5.1:** Principales características (en unidades de Planck) de las configuraciones con  $\ell = 0, 2, 3$  de estrellas de  $\ell$ -Proca con masa total máxima.

## 5.4. Convergencia Espectral

Finalizamos nuestra presentación de resultados numéricos presentando un análisis de convergencia de nuestro código numérico para las soluciones obtenidas y presentadas en las secciones anteriores de este capítulo. Dicho análisis se basa en el análisis realizado en [36] y consistirá en la verificación de la convergencia espectral a un valor fijo de la frecuencia  $\omega$  y la convergencia espectral a cero de la diferencia entre la masa de ADM y la masa de Komar de nuestro sistema. Como se explicó en el apéndice C, dicha convergencia se manifiesta cuando aumentamos el grado de descomposición espectral  $N$  y debe ser exponencial para funciones analíticas, lo cual, se asume para las soluciones de una estrella bosónica.

Para realizar el segundo análisis de convergencia tenemos las siguientes consideraciones. La masa de ADM,  $M_{ADM}$ , se define como la energía total contenida en  $\Sigma_t$ , la cual, se obtiene mediante el Hamiltoniano evaluado a  $r \rightarrow \infty$  en las coordenadas de un observador asintóticamente inercial [37]. En el caso de una métrica espacial conformalmente plana y esféricamente simétrica, la expresión para  $M_{ADM}$  se simplifica considerablemente y se reduce a [38, 36]

$$M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \frac{d\psi}{dr} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -2 \frac{d\psi}{dr} r^2, \quad (5.7)$$

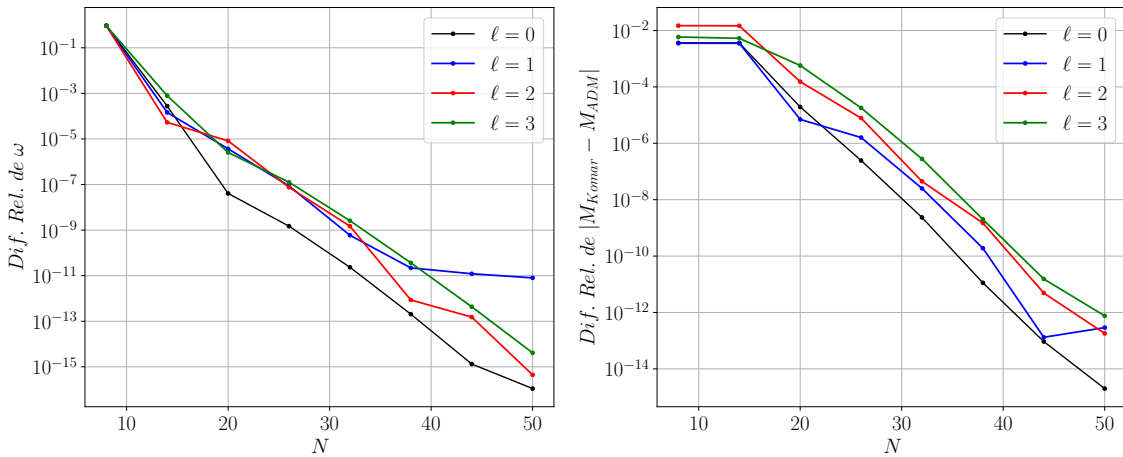
donde  $S$  es la superficie de una 2-esfera en el infinito espacial. Por otro lado, la masa de Komar se define como la integral de flujo de la derivada covariante del vector de Killing asociado a la simetría temporal del sistema, sobre una 2-superficie cerrada envolviendo las fuentes de materia [37]. Cuando tal integración se da en una 2-esfera ubicada en el infinito espacial rodeando una fuente de materia con simetría esférica, se tiene [39, 36]

$$M_{Komar} = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \frac{d\alpha}{dr} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{d\alpha}{dr} r^2. \quad (5.8)$$

Estas expresiones resultan sencillas de calcular, dado que contamos con soluciones numéricas de  $\psi$  y  $\alpha$ . Luego, podremos calcular la diferencia de ambas masas esperan-

do que esta se aproxime a cero pues gracias a los trabajos realizados en [40, 41], se sabe que en un espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano, analíticamente se cumple que  $M_{ADM} = M_{Komar}$ .

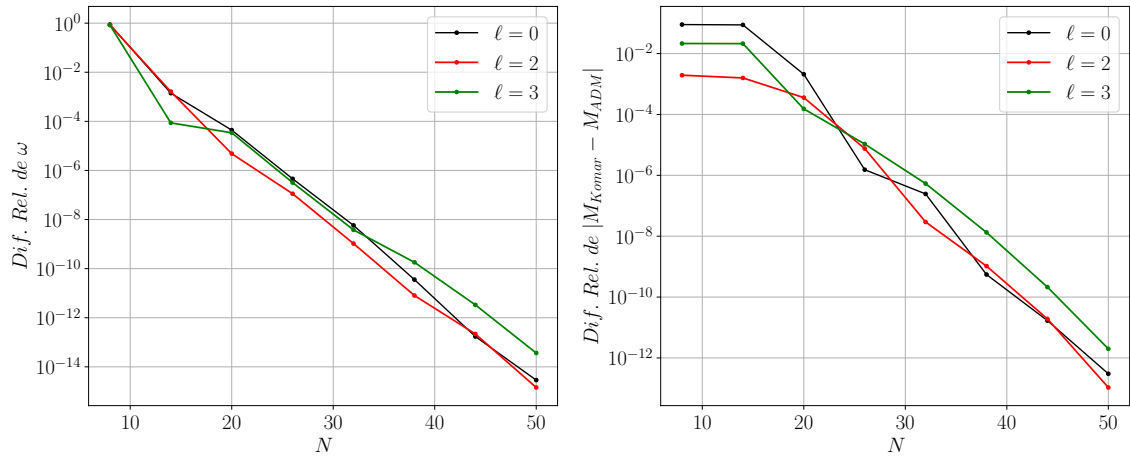
En la figura 5.14 mostramos los resultados de nuestro análisis de convergencia para el primer conjunto de soluciones que mostramos en la sección 5.2, es decir, las soluciones con el mismo parámetro  $\alpha_0 = 0.880$  para diferentes  $\ell$ . En el panel izquierdo mostramos la diferencia relativa entre las frecuencias  $\omega$  obtenidas para diferentes valores de resolución espectral. Mientras que en el panel derecho mostramos la diferencia relativa de  $|M_{Komar} - M_{ADM}|$ . En ambos paneles, los valores de resolución espectral elegidos son  $N = 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50$ , y presentamos el eje vertical en escala logarítmica.



**Figura 5.14:** Análisis de convergencia para soluciones con  $\alpha_0 = 0.880$  y  $\ell = 0, 1, 2, 3$ . Panel izquierdo: Diferencia relativa de  $\omega$  a diferentes resoluciones espectrales. Panel derecho: Diferencia relativa de  $|M_{Komar} - M_{ADM}|$  a diferentes resoluciones espectrales.

De esta figura se observa que nuestro código genera una convergencia espectral para los 4 casos de  $\ell$ , alcanzándose valores de error de aproximadamente  $10^{-14}$ . Resalta el hecho que la saturación característica por error de redondeo en los métodos espectrales sea visible para el caso  $\ell = 1$  en comparación con la convergencia para los otros valores de  $\ell$ . Esto no implica la invalidez de nuestra solución numérica con  $\ell = 1$ , pero evidencia una diferencia que será revisada para próximos trabajos.

En la figura 5.15 presentamos un análisis de convergencia completamente análogo al realizado líneas arriba para las diferentes configuraciones de la estrella de  $\ell$ -Proca que producen la masa total máxima, dados en la tabla 5.1. Nuevamente verificamos la convergencia espectral, lo que nos permite concluir que nuestras soluciones son numéricamente válidas.



**Figura 5.15:** Análisis de convergencia para soluciones de máxima masa total con  $\ell = 0, 2, 3$ .





# Capítulo 6

## Conclusiones

---

Hemos obtenido una nueva solución del sistema de Einstein-(multi)Proca, que describe objetos auto-gravitantes regulares, esféricamente simétricos y con masa finita. Estas configuraciones incorporan efectos del momento angular de sus campos constituyentes manteniendo aún así la simetría esférica del espacio-tiempo y generalizando las estrellas de Proca no-rotantes. El contenido de materia de estos objetos se compone por  $2\ell + 1$  campos de Proca complejos acoplados solo gravitacionalmente, donde  $\ell$  es el número de momento angular que parametriza las soluciones y por eso, las bautizamos como estrellas de  $\ell$ -Proca.

En este trabajo, se lograron nuestros dos objetivos principales establecidos en la sección 1.3: (i) proponer un ansatz auto-consistente que nos permita establecer las ecuaciones de evolución y de constricción de la estrella de  $\ell$ -Proca, y (ii) analizar analíticamente y obtener numéricamente sus datos iniciales, comparándolos con la estrella de Proca estándar y la estrella de  $\ell$ -bosones. En las siguientes líneas desglosaremos lo obtenido en la búsqueda de ambos objetivos.

Para alcanzar nuestro primer objetivo, hicimos uso del formalismo en 3+1 de la Relatividad General aplicado a la deducción de ecuaciones de datos iniciales de la métrica en un espacio-tiempo estático con simetría esférica (Cap. 2). Luego, se estudió el sistema de Einstein-(multi)Proca desde el punto de vista de un problema de Cauchy, obteniéndose las ecuaciones de evolución y constricción de los campos de Proca en un espacio con simetría esférica y las expresiones de las cantidades de materia de este sistema derivadas de su tensor energía-momento (Cap. 3).

Establecidas estas herramientas, se propuso en el capítulo 4 un ansatz (4.1-4.4) para los campos de Proca que genera un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Para ello, se verificó la simetría esférica del tensor energía-momento total del sistema. Con tal ansatz, se obtuvieron las ecuaciones de evolución (4.40-4.45) y constricción (4.46-4.47) del contenido de materia del sistema de Einstein-(multi)Proca en simetría

esférica que corresponderá a la estrella de  $\ell$ -Proca. Además, sobre nuestro ansatz, se tomó en cuenta la presencia de singularidades angulares en sus campos magnéticos. Sin embargo en el apéndice A, se mostró que estas son singularidades coordenadas al demostrarse regularidad en los observables asociados y recobrase la regularidad angular de los campos magnéticos luego de realizar un cambio de coordenadas.

Las ecuaciones de datos iniciales en primer orden (4.99-4.102) y segundo orden (4.112-4.116) resultan de imponer la dependencia temporal armónica a nuestro ansatz inicial, obteniéndose así un ansatz de estrella bosónica (4.48-4.49), aquella que llamamos estrella de  $\ell$ -Proca. Con estos resultados mostramos que nuestra estrella generaliza a la estrella de Proca estándar y presenta una diferencia importante respecto a esta, los casos de  $\ell$  no triviales poseen cantidades adicionales como componentes angulares de los campos potenciales 3-vectoriales y los campos eléctricos y magnéticos. Estas componentes y su dependencia angular con las que fueron propuestas, fueron indispensables para lograr que las ecuaciones radiales derivadas de las ecuaciones de evolución sean consistentes con las ecuaciones de constricción de este sistema.

Con respecto al segundo objetivo, analizamos el sistema de ecuaciones radiales de datos iniciales en las vecindades de las fronteras (sección 4.7.) y encontramos que las soluciones locales de los campos de materia cerca al origen (4.132-4.134) dependen de dos parámetros independientes (Apéndice B). Basándonos en esto se desarrolló un código espectral de colocación multidominio (sección 5.1. y apéndice C) con el cual se obtuvieron las soluciones de datos iniciales para las configuraciones con  $\ell = 0, 1, 2, 3$  satisfactoriamente, esto es, satisfaciendo el comportamiento predicho analíticamente de las soluciones en las fronteras y cumpliendo numéricamente con la convergencia espectral (sección 5.4.).

Adicionalmente, el análisis analítico predijo el descarte de la configuración con  $\ell = 1$  ya que sus campos vectoriales poseen componentes no nulas en el origen violando la regularidad en el origen de las soluciones de estrellas bosónicas. Dicha característica se confirmó en las soluciones numéricas. Las características que encontramos en las soluciones numéricas individuales (sección 5.1.) como en las familias de soluciones (sección 5.2.) podemos resumirlas como:

- Similitudes con la estrella de Proca estándar: Se comprobaron todos los resultados numéricos de datos iniciales para la estrella de Proca no-rotante [4] obtenido en nuestro código como el caso  $\ell = 0$  de la estrella de  $\ell$ -Proca. Además, la presencia de un nodo en la solución fundamental para  $F_\ell$  se mantienen para valores no triviales de  $\ell$ . Finalmente, se obtuvo la curva espiral característica de las estrellas bosónicas entre la masa total y la frecuencia.
- Diferencias con la estrella de Proca: Se reportó la presencia de un nodo en

la solución fundamental de  $a_\ell$  para  $\ell$  no triviales. Además como ya se había anticipado, estas soluciones cuentan con presencia de funciones adicionales  $b_\ell$ ,  $d_\ell$  y  $z_\ell$ . Por último, como efecto de los términos centrífugos asociados al momento angular de los campos constituyentes, la densidad de energía para  $\ell = 2, 3$  pierde el mínimo local en el origen que presenta el caso  $\ell = 0$ .

- Similitud con la estrella de  $\ell$ -bosones: A medida que aumentamos el número de momento angular las configuración se hacen más extendidas, más masivas y más compactas.

El descubrimiento de esta nueva solución de estrella bosónica nos abre la posibilidad de un amplio conjunto de estudios posteriores. En particular, estamos interesados en implementar sus simulaciones dinámicas realizando análisis de estabilidad 1-dimensionales con el sistema de ecuaciones (4.40-4.47), así como 3-dimensionales con el sistema de ecuaciones (3.68-3.72). Mediante estos estudios de estabilidad podremos intentar confirmar o rebatir la hipótesis que la estrella de  $\ell$ -Proca es la solución estable y de máxima isometría de una familia de estrellas de Proca multi-campo y multi-frecuencia, como se conjeturó en [19].

Finalmente, estudios de formación dinámica utilizando las ecuaciones de evolución y constricción del sistema de Einstein-(multi)Proca en simetría esférica y estudios de sistemas binarios de estrellas de  $\ell$ -Proca y su emisión de radiación gravitacional, son los siguientes pasos a los que dirigiremos nuestra investigación sobre la estrella de  $\ell$ -Proca.



# Apéndice A

## Singularidades coordenadas en los campos magnéticos

---

En la sección 4.1. presentamos nuestros ansatz multi-campo de Proca con momento angular (4.1-4.4), con el fin de conseguir un espacio-tiempo con simetría esférica. De entre las distintas cantidades de este ansatz, dado un valor de  $\ell$  fijo, los  $2\ell + 1$  campos magnéticos que forman el contenido de materia del sistema Einstein-(multi)Proca están dados por (4.4)

$$(\mathcal{B}_m)^i(x) = \left( 0, \zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta}, -\zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin \theta} \right), \quad (\text{A.1})$$

donde  $\zeta_\ell$  tiene el mismo valor de amplitud radial para los  $m = -\ell, \dots, \ell$  campos magnéticos.

La presencia de la función seno en el denominador de estas componentes angulares nos conduce a preguntarnos si estas poseen singularidades en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . Para responder esta primer pregunta, recurrimos a la forma explícita de la función de armónico esférico que estamos empleando. Esta es

$$Y^{\ell m}(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $P_\ell^m(\cos \theta)$  es la función asociada de Legendre. Esta a su vez, se define para  $m \geq 0$ , como [33]

$$P_\ell^m(x) := (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad (\text{A.3})$$

y para valores negativos dados por  $-m$ , como

$$P_\ell^{-m}(x) := (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x), \quad (\text{A.4})$$

donde  $P_\ell(x)$  es un polinomio de Legendre de grado  $\ell \in \mathbb{N}_0$  con un dominio  $x \in [-1, 1]$  y definido como solución de la ecuación de Legendre, la cual, al resolverse mediante el método de Frobenius, permite expresar el polinomio de Legendre como la siguiente serie de potencias [42]

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell} \sum_{r=0}^{[\ell/2]} (-1)^r \frac{(2\ell - 2r)!}{r!(\ell - r)!(\ell - 2r)!} x^{\ell - 2r}, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$[\ell/2] = \begin{cases} \ell/2, & \text{para } \ell \text{ par} \\ (\ell - 1)/2, & \text{para } \ell \text{ impar}, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

es decir,  $[\ell/2]$  es el mayor entero menor o igual a  $\ell/2$ . Este límite superior en la anterior serie de potencias en  $r$ , asegura que  $r \leq \ell/2$  y por lo tanto,  $0 \leq \ell - 2r$ . Así, las potencias de dicha serie siempre son no negativas y por lo tanto, siempre regulares para todo  $\ell$  y en su todo su dominio. De estas definiciones y expresiones podemos hacer las siguientes observaciones:

- (1)  $P_0(x) = 1$ .
- (2) De la definición de  $P_\ell^m$ , es claro que  $m$  solo puede tomar valores enteros y además, para  $m \geq \ell$ , genera funciones asociada de Legendre iguales a cero, pues el orden de la derivada supera el grado del polinomio  $P_\ell$ . Por ello, para un valor de  $\ell$  fijo, se tiene que  $m = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$ .
- (3) Para  $\ell = 0$ , entonces  $m = 0$  y  $P_0^0(x) = 1$ .
- (4) Cuando se utiliza las funciones  $P_\ell^m$  como parte de las funciones de armónico esférico  $Y^{\ell m}$ , se toma  $x \equiv \cos \theta$ , por lo tanto, el análisis de singularidad que buscamos, lo podemos realizar analizando la regularidad en  $x = \pm 1$ . Además,  $Y^{00}(\theta, \varphi) = 1$ .

Adicionalmente, podemos expresar  $P_\ell^m(x)$ , como una suma de potencias al utilizar (A.5) en (A.3) y aplicar  $m$  veces la derivada respecto a  $x$ . Esto es

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} S_\ell^m(x), \quad (\text{A.7})$$

donde definimos

$$S_\ell^m(x) := \frac{1}{2^\ell} \sum_{r=0}^{[(\ell-m)/2]} (-1)^r \frac{(2\ell - 2r)!}{r!(\ell - r)!(\ell - m - 2r)!} x^{\ell - m - 2r}. \quad (\text{A.8})$$

Esta cantidad,  $S_\ell^m$ , es regular para todo  $(\ell, m)$  en todo el dominio de  $x$ . En particular, es regular en  $x = \pm 1$ , ya que las potencias siempre serán positivas debido a la cota superior  $r \leq (\ell - m)/2$ . Además, es interesante notar que se cumple la propiedad

$$\frac{d}{dx} S_\ell^m = S_\ell^{m+1}, \quad (\text{A.9})$$

lo que nos lleva a afirmar, que la derivada de  $S_\ell^m(x)$  también es regular en  $x = \pm 1$ .

Establecidas las propiedades anteriores, prosigamos con el análisis de las componentes angulares de  $(\mathcal{B}_m)^i$ , utilizando por comodidad el cambio de variable  $x \equiv \cos \theta$  y buscando si estos son singulares en  $x = \pm 1$ . Además, dado un  $\ell$  fijo pero arbitrario, este análisis solo se realizará para  $0 \leq m \leq \ell$ , ya que gracias a la definición de  $P_\ell^{-m}$ , las características de regularidad que obtengamos para  $m$  positivos, serán las mismas que para  $m$  negativos.

Así, para la componente polar de los campos magnéticos, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_m)^\theta &= \zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{\sin \theta} = \zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\varphi Y^{\ell m}}{(1-x^2)^{1/2}} \\ &= \zeta_\ell(r, t) \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \frac{(-1)^m P_\ell^m(x)}{(1-x^2)^{1/2}} \cdot (im) e^{im\varphi} \\ &= \zeta_\ell(r, t) \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} (-1)^m (1-x^2)^{(m-1)/2} S_\ell^m(x) \cdot (im) e^{im\varphi} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, observamos que para  $m \geq 1$ , esta componente siempre será regular para  $x = \pm 1$ , debido a que  $(1-x^2)^{(m-1)/2}$  es regular. Para  $m = 0$ , esta componente es igual a 0 para todo  $x$ , y en particular para  $x = \pm 1$ , gracias a la regla de L'Hospital. Así concluimos que para todo  $m = -\ell, \dots, \ell$  se tiene que la componente polar de  $(\mathcal{B}_m)^i$  es regular en  $\theta = 0, \pi$ .

Por otro lado, la componente azimutal de  $(\mathcal{B}_m)^i$ , bajo las mismas consideraciones del cálculo anterior, resulta en

$$(\mathcal{B}_m)^\varphi = -\zeta_\ell(r, t) \frac{\partial_\theta Y^{\ell m}}{\sin \theta} = \zeta_\ell(r, t) \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \left( -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} P_\ell^m(x) \right) e^{im\varphi} ,$$

luego, gracias a la regla de la cadena, identificamos que  $-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}$  y por lo tanto,

$$(\mathcal{B}_m)^\varphi = \zeta_\ell(r, t) \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \frac{d}{dx} P_\ell^m(x) e^{im\varphi} ,$$

es decir, para conocer si esta componente posee una singularidad en  $x = \pm 1$ , debemos analizar la derivada  $dP_\ell^m/dx$ . Para  $m = 0$ , es sencillo observar que

$$\frac{d}{dx} P_\ell^0(x) = \frac{d}{dx} P_\ell(x) = S_\ell^1(x),$$



lo cual es regular para  $x = \pm 1$ . Mientras que para  $m > 0$ , esta cantidad se obtiene de derivar la expresión (A.7) y utilizar la propiedad de la función  $S_\ell^m$ , (A.9), teniendo así

$$\frac{d}{dx} P_\ell^m(x) = (-1)^{m+1} x(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} S_\ell^m(x) + (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} S_\ell^{m+1}(x). \quad (\text{A.10})$$

Al analizar esta expresión, observamos que esta es regular mientras  $m \geq 2$ , sin embargo cuando  $m = 1$ , el primer sumando tiene un factor  $(1-x^2)^{-1/2}$ , el cual, sí posee una singularidad en  $x = \pm 1$ . Nótese que no hemos tenido que especificar el valor de  $\ell$  para obtener este resultado, por lo que podemos concluir que para cualquier valor de  $\ell$ , el campo magnético  $(\mathcal{B}_m)^i$  posee singularidades en  $\theta = 0, \pi$  únicamente en sus componentes azimutales con  $m = \pm 1$ .

Esto puede representar un problema si esta singularidad se transmitiese a cantidades medibles como la magnitud de los vectores campos magnéticos, los cuales, al elevarlos al cuadrado y sumarlos para todos los valores de  $m$ , forman parte de las cantidades de materia totales, como podemos observar en (3.64) o en (3.66). Como ya se mostró en la sección 4.2., estas cantidades totales no poseen dependencia angular y por lo tanto tampoco singularidades angulares. Sin embargo, también será necesario que los módulos al cuadrado de los campos magnéticos individuales sean regulares en todos sus ángulos. Estos, son

$$\mathcal{B}_m^2 = \gamma_{ii}(\mathcal{B}_m)^i(\bar{\mathcal{B}}_m)^i = \{ \psi^4 B r^2 (\mathcal{B}_m)^\theta (\bar{\mathcal{B}}_m)^\theta + \psi^4 B r^2 \sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi (\bar{\mathcal{B}}_m)^\varphi \}.$$

Ya que mostramos que  $(\mathcal{B}_m)^\theta$  es regular, bastará con analizar la regularidad angular del siguiente factor perteneciente al segundo sumando

$$\sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi (\bar{\mathcal{B}}_m)^\varphi = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} (1 - x^2) \left( \frac{d}{dx} P_\ell^m(x) \right)^2.$$

Para  $m = 0$ , ya sabemos que será regular por los resultados anteriores, sin embargo, para  $m > 0$  utilizamos la expresión de la derivada de  $P_\ell^m$ , (A.10), y multiplicamos adecuadamente, obteniendo

$$\sin^2 \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi (\bar{\mathcal{B}}_m)^\varphi = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \left( (-1)^{m+1} x(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} S_\ell^m(x) + (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} S_\ell^{m+1}(x) \right)^2$$

Sin necesidad de elevar al cuadrado la expresión dentro del paréntesis, encontramos que esta es regular para cualquier valor de  $m \geq 1$ , eliminándose así, la singularidad presente para el caso con  $m = \pm 1$ .

Este resultado, nos parece indicar que la singularidad encontrada en las componentes de los campos magnéticos no es una singularidad física, sino una singularidad

coordenada. Si esto es así, podemos eliminar dicha singularidad al realizar un cambio de coordenadas. Elegimos entonces, pasar de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  a coordenadas cuasi-cartesianas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Cuyo cambio de coordenadas está dado por las relaciones

$$\bar{x} = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \bar{y} = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \bar{z} = r \cos \theta, \quad (\text{A.11})$$

que a su vez generan las siguientes derivadas parciales en las coordenadas esféricas angulares

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \varphi, & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varphi} &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Luego, considerando que los campos magnéticos están expresados como 3-vectores contravariantes, la transformación de coordenadas que buscamos nos permite encontrar las siguientes componentes del campo magnético  $(\mathcal{B}_m)^i$  en coordenadas cuasi-cartesianas

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_m)^{\bar{z}} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} (\mathcal{B}_m)^\theta + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} (\mathcal{B}_m)^\varphi = -r \sin \theta (\mathcal{B}_m)^\theta, \\ (\mathcal{B}_m)^{\bar{x}} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} (\mathcal{B}_m)^\theta + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi} (\mathcal{B}_m)^\varphi = r \cos \theta \cos \varphi (\mathcal{B}_m)^\theta - r \sin \theta \sin \varphi (\mathcal{B}_m)^\varphi, \\ (\mathcal{B}_m)^{\bar{y}} &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} (\mathcal{B}_m)^\theta + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varphi} (\mathcal{B}_m)^\varphi = r \cos \theta \sin \varphi (\mathcal{B}_m)^\theta + r \sin \theta \cos \varphi (\mathcal{B}_m)^\varphi. \end{aligned}$$

Como  $(\mathcal{B}_m)^\theta$  es regular, concluimos que  $(\mathcal{B}_m)^{\bar{z}}$  es regular para  $\theta = 0, \pi$ . Mientras que para concluir la regularidad de las componentes restantes, debido a que para  $m = 0$  ya se asegura la regularidad, es necesario analizar el siguiente término para  $m > 0$

$$\sin \theta (\mathcal{B}_m)^\varphi = \sqrt{\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \left( (-1)^{m+1} x (1 - x^2)^{\frac{m-1}{2}} S_\ell^m(x) + (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m+1}{2}} S_\ell^{m+1}(x) \right) e^{im\varphi}$$

Este resultado es regular para cualquier valor de  $m > 0$ . Y así,  $(\mathcal{B}_m)^{\bar{x}}$  y  $(\mathcal{B}_m)^{\bar{y}}$  son regulares para  $\theta = 0, \pi$ . Por lo tanto, concluimos que las singularidades angulares presentes en los campos magnéticos son singularidades coordenadas y por lo tanto nos podemos deshacer de ellas bajo un cambio de coordenadas.



# Apéndice B

## Soluciones locales de datos iniciales cerca al origen

---

En la sección 4.7. del capítulo 4, nos enfocamos en obtener las soluciones de datos iniciales para la estrella de  $\ell$ -Proca en las vecindades de las fronteras del dominio espacial radial. En particular, para poder establecer correctamente condiciones de frontera en  $r = 0$ , debemos conocer las soluciones locales en la vecindad del origen. Dichas soluciones se deben obtener de resolver el siguiente sistema de ecuaciones radiales (4.129-4.131)

$$F_\ell'' + \frac{2F_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] F_\ell \approx 0, \quad (\text{B.1})$$

$$a_\ell'' + \frac{4a_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) + \frac{(2 - \ell(\ell+1))}{r^2} \right] a_\ell \approx \frac{2\psi_0^4 \omega F_\ell}{\alpha_0^2 r}, \quad (\text{B.2})$$

$$b_\ell'' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] b_\ell \approx -\frac{2a_\ell}{r}. \quad (\text{B.3})$$

Identificamos que este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) está formado por una EDO homogénea y dos EDO's inhomogéneas. Este segundo tipo de ecuaciones tiene como solución general a las dos soluciones independientes de su ecuación homogénea y a una tercera solución, una solución particular, que se puede obtener usando las soluciones homogéneas mediante el método de variación de parámetros. Por lo tanto, para las tres ecuaciones de este sistema debemos obtener las ecuaciones homogéneas correspondientes. Afortunadamente, la versión homogénea de estas ecuaciones corresponde a una versión generalizada de la ecuación de Bessel, cuyas soluciones se obtienen mediante el siguiente teorema [42]:

**Teorema 1:** Sea la siguiente EDO homogénea,

$$x^2 y'' + (1 - 2\sigma)xy' + [\kappa^2 \lambda^2 x^{2\lambda} + (\sigma^2 - n^2 \lambda^2)]y = 0, \quad (\text{B.4})$$

la cual llamaremos *ecuación generalizada de Bessel*. Esta tiene como solución general a

$$y(x) = Ax^\sigma J_n(\kappa x^\lambda) + Bx^\sigma Y_n(\kappa x^\lambda), \quad (\text{B.5})$$

donde, la función  $J_n(x)$  es la función de Bessel de primer tipo (con  $n$  racional, es decir, puede ser entero como no entero), y  $Y_n(x)$  es la función de Bessel de segundo tipo, definida para un  $n$  no entero, como

$$Y_n(x) := -\frac{1}{\sin n\pi} [J_{-n}(x) - \cos n\pi J_n(x)]. \quad (\text{B.6})$$

Ambas funciones de Bessel tienen un dominio real dado por  $x \in [0, \infty >$ .

Ya que estamos interesados en resolver el sistema de ecuaciones anterior mediante el uso de funciones de Bessel con  $r \approx 0$ , será útil conocer las expresiones como series de potencias de las funciones de Bessel, para que en la aproximación cerca al origen solo tomemos las potencias dominantes. La serie de potencias de  $J_n(x)$  se obtiene usando el método de Frobenius aplicado a la ecuación de Bessel estándar ( $\sigma = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\lambda = 1$ ) con un  $n$  racional [42]

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}. \quad (\text{B.7})$$

Mientras que para obtener la serie de potencias de  $Y_n(x)$  usamos la anterior expresión en la definición de  $Y_n(x)$ , obteniendo

$$Y_n(x) = -\frac{1}{\sin n\pi} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} - \frac{1}{\Gamma(2-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2} + \dots \right. \\ \left. - \cos n\pi \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{\Gamma(2+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \dots \right\} \right],$$

luego, si usamos la siguiente propiedad de las funciones Gamma [33]

$$\frac{1}{\sin n\pi} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{\pi}, \quad (\text{B.8})$$

obtenemos

$$Y_n(x) = -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} + \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{\pi \Gamma(2-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2} + \dots \\ + \cot n\pi \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{\Gamma(2+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \dots \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Ya que no estamos interesados en todos los términos de estas series de potencias, sino, en solo las potencias dominantes cuando  $r \approx 0$ , será útil como veremos más adelante, obtener las funciones de Bessel con argumento  $\kappa r$  y con  $n = \ell + \frac{1}{2}$ , donde  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  (estos valores en concordancia con la estrella de  $\ell$ -Proca), considerando los primeros dos menores órdenes en la serie de potencias. Así, tenemos

$$J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) = \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^{\ell+\frac{5}{2}} + O(r^{\ell+\frac{9}{2}}), \quad (\text{B.10})$$

$$Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) = -\frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\pi} \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^{-\ell-\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \ell)}{\pi \Gamma(\frac{3}{2} - \ell)} \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^{-\ell+\frac{3}{2}} + O(r^{-\ell+\frac{7}{2}}). \quad (\text{B.11})$$

Nótese, que en la serie para  $Y_{\ell+1/2}$ , hemos prescindido de los términos que se multiplican por la función cotangente. Esto se puede justificar considerando dos casos: (i) Para  $\ell = 0$ : ya que  $\cot \pi/2 = 0$ , este factor anula todas las potencias positivas a las cuales multiplica. (ii) Para  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ : los órdenes de las potencias positivas que multiplican al factor  $\cot((\ell + \frac{1}{2})\pi)$  son  $\ell + \frac{1+4s}{2}$ , con  $s \in \mathbb{N}_0$ , por lo que siempre serán diferentes y mayores que las dos primeras potencias de  $Y_{\ell+1/2}$  de este caso. Por otro lado, también será importante observar que debido a la presencia de potencias negativas en  $Y_{\ell+1/2}$ , esta no es regular en el origen para todo  $\ell \in \mathbb{N}_0$ .

Con las expresiones que hemos presentado, ya podemos resolver la ecuación no homogénea para  $F_\ell$ , (B.1). Para ello, multiplicamos por  $r^2$  a esta ecuación, obteniendo así

$$r^2 F_\ell'' + 2r F_\ell' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 - \ell(\ell + 1) \right] F_\ell = 0. \quad (\text{B.12})$$

Luego, aplicamos el teorema 1, e identificamos que los coeficientes de la ecuación generalizada de Bessel en este caso son:

$$\begin{aligned} 1 - 2\sigma = 2 &\Rightarrow \sigma = -1/2, \\ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 = \kappa^2 \lambda^2 r^{2\lambda} &\Rightarrow \lambda = 1, \quad \kappa = \psi_0^2 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right)^{1/2}, \\ \sigma^2 - n^2 \lambda^2 = -\ell(\ell + 1) &\Rightarrow \ell^2 + \ell + \frac{1}{4} = n^2 \Rightarrow \ell + \frac{1}{2} = n. \end{aligned}$$

Así, tenemos como solución general a

$$F_\ell(r) = A_1 r^{-1/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + B_1 r^{-1/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r). \quad (\text{B.13})$$

con  $\kappa = \psi_0^2 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right)^{1/2}$ . Sobre este último factor, debemos mencionar que debido a que las funciones de Bessel están definidas sobre un dominio real,  $\kappa$  debe ser real

y por lo tanto, las soluciones que buscamos deben cumplir con que  $\omega/\alpha_0 > \mu$ , o equivalentemente,  $\omega/\mu > \alpha_0$ . Esta condición en las soluciones la verificaremos en el capítulo 5, dedicado a presentar nuestros resultados numéricos.

Finalmente, la solución local cerca del origen para  $F_\ell$  debe cumplir con ser regular en este punto, por lo tanto, debemos fijar  $B_1 = 0$  en la solución general anterior para evitar la irregularidad de  $Y_{\ell+\frac{1}{2}}$ . Luego, ya que estamos estudiando la solución en la vecindad de  $r = 0$ , utilizamos la serie de potencias de  $J_{\ell+\frac{1}{2}}$  truncada a sus potencias dominantes, dada en (B.10). Luego, multiplicamos el factor  $r^{1/2}$  presente en la solución y obtenemos

$$F_\ell(r) = \frac{A_1}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} r^\ell - \frac{A_1}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell+5/2} r^{\ell+2} + O(r^{\ell+4}) . \quad (\text{B.14})$$

Cómo podemos observar, esta solución para  $F_\ell$  solo posee un parámetro libre  $A_1$ . En consecuencia, para conocer el comportamiento de  $F_\ell$  en el origen bastará mantener solo la primera potencia dominante y aprovechar que podemos redefinir la constante que acompaña esta potencia como  $c_1 := \frac{A_1}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}}$ . Así, la solución local cerca al origen para  $F_\ell$  es

$$F_\ell(r) \approx c_1 r^\ell . \quad (\text{B.15})$$

Ahora proseguimos a buscar las soluciones locales cerca al origen para  $a_\ell$ . Como se observa en (B.2), la ecuación que esta satisface es una EDO inhomogénea, cuya solución general estará formada por 2 soluciones homogéneas independientes y una solución particular. Con el fin de obtener las soluciones homogéneas, aplicamos nuevamente el teorema 1. Para ello, multiplicamos por  $r^2$  la ecuación (B.2), y solo consideramos su parte homogénea. Así, tenemos

$$r^2 a_\ell'' + 4r a_\ell' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 + (2 - \ell(\ell + 1)) \right] a_\ell = 0 . \quad (\text{B.16})$$

Luego, los parámetros de la ecuación generalizada de Bessel son

$$\begin{aligned} 1 - 2\sigma &= 4 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -3/2 , \\ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 &= \kappa^2 \lambda^2 r^{2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \quad \kappa = \psi_0^2 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right)^{1/2} , \\ \sigma^2 - n^2 \lambda^2 &= 2 - \ell(\ell + 1) \quad \Rightarrow \quad \ell^2 + \ell + \frac{1}{4} = n^2 \quad \Rightarrow \quad \ell + \frac{1}{2} = n . \end{aligned}$$

Y por lo tanto, la solución general para la ecuación homogénea de  $a_\ell$  es

$$a_\ell(r) = A_2 r^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + B_2 r^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) . \quad (\text{B.17})$$

Dada las soluciones homogéneas, para obtener la solución particular, recordemos brevemente el método de *Variación de Parámetros* [33]. El cual establece que, sea una EDO no homogénea de la siguiente forma

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x) . \quad (\text{B.18})$$

Su solución general está dada por

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x) , \quad (\text{B.19})$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  son las soluciones linealmente independientes de la versión homogénea de la EDO anterior, mientras que la solución particular  $y_p$  se determina como

$$y_p(x) = y_2(x) \int \frac{y_1(s)R(s)}{W[y_1(s); y_2(s)]} ds - y_1(x) \int \frac{y_2(s)R(s)}{W[y_1(s); y_2(s)]} ds , \quad (\text{B.20})$$

donde a su vez,  $W[y_1(s); y_2(s)]$  es el *Wronskiano* y está dado por el siguiente determinante

$$W[y_1(s); y_2(s)] := \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' , \quad (\text{B.21})$$

donde  $()'$  es la derivada respecto al argumento  $s$ . En particular, nos será útil conocer el Wronskiano cuando las soluciones homogéneas son las funciones de Bessel  $y_1 = J_n$  y  $y_2 = Y_n$ . Afortunadamente, existe una fórmula para dicho Wronskiano y es [33]

$$W[J_n(x); Y_n(x)] = J_n(x)Y_n'(x) - Y_n(x)J_n'(x) = \frac{2}{\pi x} . \quad (\text{B.22})$$

Nótese que, este resultado no depende del índice  $n$  de las funciones de Bessel. Luego, si consideramos la solución general de la ecuación generalizada de Bessel con  $\lambda = 1$ , dada como

$$y(x) = Ax^\sigma J_n(\kappa x) + Bx^\sigma Y_n(\kappa x) , \quad (\text{B.23})$$

su Wronskiano será

$$W[y_1(x); y_2(x)] = \begin{vmatrix} x^\sigma J_n(\kappa x) & x^\sigma Y_n(\kappa x) \\ \{\sigma x^{\sigma-1} J_n(\kappa x) + x^\sigma \frac{d}{dx} J_n(\kappa x)\} & \{\sigma x^{\sigma-1} Y_n(\kappa x) + x^\sigma \frac{d}{dx} Y_n(\kappa x)\} \end{vmatrix} ,$$

el cual, luego de operar el determinante y notar que se elimina el término  $\sigma x^{2\sigma-1} J_n(\kappa x) Y_n(\kappa x)$ , se tiene

$$W[y_1(x); y_2(x)] = x^{2\sigma} \left\{ J_n(\kappa x) \frac{d}{dx} Y_n(\kappa x) - Y_n(\kappa x) \frac{d}{dx} J_n(\kappa x) \right\} . \quad (\text{B.24})$$

Notamos que si multiplicamos y dividimos entre  $\kappa$  la expresión dentro de las llaves, podemos utilizar el Wronskiano (B.22) y así obtenemos

$$W[y_1(x); y_2(x)] = \frac{2}{\pi} x^{2\sigma-1} . \quad (\text{B.25})$$



Esta será la fórmula que usaremos para calcular el Wronskiano de las soluciones homogéneas de  $a_\ell$  y  $b_\ell$ , como veremos a continuación.

Retomamos el cálculo de la solución general de la EDO inhomogénea para  $a_\ell$ , la cual sabemos que es

$$a_\ell'' + \frac{4a_\ell'}{r} + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) + \frac{(2 - \ell(\ell + 1))}{r^2} \right] a_\ell \approx \frac{2\psi_0^4 \omega F_\ell}{\alpha_0^2 r}. \quad (\text{B.26})$$

Siguendo, el método de variaciones de parámetros, su solución general está dada por

$$a_\ell(r) = A_2 r^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + B_2 r^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + a_{\ell,p}(r), \quad (\text{B.27})$$

donde

$$a_{\ell,p}(r) = r^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) \int \frac{s^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa s) R(s)}{W[a_{\ell,1}(s); a_{\ell,2}(s)]} ds - r^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) \int \frac{s^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa s) R(s)}{W[a_{\ell,1}(s); a_{\ell,2}(s)]} ds.$$

Podemos reexpresar esta solución considerando: (i) que la fórmula del Wronskiano (B.25), en este caso nos conduce a

$$W[a_{\ell,1}(s); a_{\ell,2}(s)] = \frac{2}{\pi} s^{-4}, \quad (\text{B.28})$$

y (ii) que el término no homogéneo, usando la solución para  $F_\ell$  en la vecindad de  $r = 0$ , dada en (B.15), es

$$R(s) = \frac{2\psi_0^4 \omega F_\ell(s)}{\alpha_0^2 s} \approx \frac{2\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 s^{\ell-1}. \quad (\text{B.29})$$

Luego, reemplazando estas expresión en la solución particular y factorizando adecuadamente, tenemos

$$a_{\ell,p}(r) = \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{2\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 \right) \left[ r^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) \int J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa s) s^{\ell+\frac{3}{2}} ds - r^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) \int Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa s) s^{\ell+\frac{3}{2}} ds \right].$$

Si denotamos a la primera y segunda integral presentes en esta expresión como  $I_{1,a_\ell}$  y  $I_{2,a_\ell}$ , respectivamente, podemos aplicar las aproximaciones de las funciones de Bessel cuando  $r \approx 0$ , dadas por (B.10) y (B.11), donde solo consideramos explícitamente las dos primeras potencias dominantes. Así, al integrar tenemos

$$I_{1,a_\ell} = \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell+\frac{1}{2}} \frac{r^{2\ell+3}}{(2\ell+3)} - \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell+\frac{5}{2}} \frac{r^{2\ell+5}}{(2\ell+5)} + O(r^{2\ell+7}),$$

$$I_{2,a_\ell} = - \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\pi} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{-\ell-\frac{1}{2}} \frac{r^2}{2} + \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - \ell)}{\pi \Gamma(\frac{3}{2} - \ell)} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{-\ell+\frac{3}{2}} \frac{r^4}{4} - O(r^6).$$

Luego, calculamos los términos presentes en la resta que define a  $a_{\ell,p}$

$$r^{-3/2}Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) I_{1,a_\ell} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left[ -\frac{1}{(2\ell+1)(2\ell+3)}r^{\ell+1} - \frac{12}{(2\ell+1)(2\ell+3)(2\ell+5)(2\ell-1)}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 r^{\ell+3} + O(r^{\ell+5}) \right],$$

$$r^{-3/2}J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) I_{2,a_\ell} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left[ -\frac{1}{2(2\ell+1)}r^{\ell+1} + \frac{(2\ell-5)}{2(2\ell+1)(2\ell+3)(2\ell-1)}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 r^{\ell+3} + O(r^{\ell+5}) \right],$$

Estas series de potencias han sido obtenidas, utilizando nuevamente las aproximaciones de las funciones de Bessel en sus potencias dominantes cerca a  $r = 0$ , (B.10-B.11), y empleando cuidadosamente las siguientes propiedades de las funciones Gamma. Partiendo de la propiedad  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , [33, 42], es sencillo demostrar que

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+n)} = \frac{1}{(z+n-1)\dots(z+1)z}, \quad (\text{B.30})$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, de esta propiedad, se deducen las relaciones entre las funciones Gamma que fueron necesarias para obtener las series de potencias expresadas líneas arriba

$$\frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})} = \frac{2}{(2\ell+1)}, \quad \frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(\ell+\frac{5}{2})} = \frac{4}{(2\ell+3)(2\ell+1)}, \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\ell)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\ell)} = \frac{-2}{(2\ell-1)}.$$

Finalmente, restando adecuadamente dichas series de potencias, obtenemos la solución particular  $a_{\ell,p}$

$$a_{\ell,p}(r) = \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)}r^{\ell+1} - \frac{1}{(2\ell+1)(2\ell+5)}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 r^{\ell+3} + O(r^{\ell+5}) \right\}. \quad (\text{B.31})$$

De esta manera, se obtiene la solución general para la EDO inhomogénea de  $a_\ell$

$$a_\ell(r) = A_2 r^{-3/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + B_2 r^{-3/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + a_{\ell,p}. \quad (\text{B.32})$$

Sin embargo, al considerar regularidad en el origen, debemos fijar  $B_2 = 0$ , de modo que  $a_{\ell,2}$  ya no participa de la solución. Mientras que la solución  $a_{\ell,1}$  se expresa nuevamente mediante sus potencias dominantes utilizando la aproximación (B.10) para  $J_{\ell+\frac{1}{2}}$ , esto es

$$a_{\ell,1} = \frac{A_2}{\Gamma(\ell+\frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} r^{\ell-1} - \frac{A_2}{\Gamma(\ell+\frac{5}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell+\frac{5}{2}} r^{\ell+1} + O(r^{\ell+3}).$$

Sumando adecuadamente las potencias que forman a  $a_{\ell,1}$  y  $a_{\ell,p}$ , se obtiene la solución local de  $a_\ell$  cerca al origen

$$a_\ell(r) = \frac{A_2}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell + \frac{1}{2}} r^{\ell-1} + \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} \frac{c_1}{(2\ell + 3)} - \frac{A_2}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell + \frac{5}{2}} \right] r^{\ell+1} + O(r^{\ell+3}).$$

Para simplificar las constantes presentes en esta expresión, redefinamos una nueva constante  $c_2$ , talque  $\ell c_2 := \frac{A_2}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\ell + \frac{1}{2}}$ . Luego, utilizando la propiedad ya presentada sobre las funciones Gamma,  $\Gamma(\ell + \frac{3}{2})/\Gamma(\ell + \frac{5}{2}) = 2/(2\ell + 3)$ , se obtiene

$$a_\ell(r) = \ell c_2 r^{\ell-1} + \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 - 2\ell \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+1}}{(2\ell + 3)} + O(r^{\ell+3}). \quad (\text{B.33})$$

Nótese que se eligió expresar el primer término con un factor  $\ell$ , la razón se debe a que en el cálculo análogo que haremos para obtener la solución de  $b_\ell$ , aparecerá una división entre  $\ell$  que podrá ser cancelada. Además, es sumamente importante resaltar que la solución general para  $a_\ell$  posee dos parámetros libres, lo cual nos dictaminará que método numérico será el más adecuado implementar.

Finalmente, repetimos los pasos de resolución que acabamos de ver para obtener la solución general de  $b_\ell$ . Iniciamos buscando las soluciones de la ecuación homogénea. Al multiplicar por  $r^2$  la ecuación (B.3), se tiene

$$r^2 b_\ell'' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 - \ell(\ell + 1) \right] b_\ell = 0, \quad (\text{B.34})$$

Al aplicar el teorema 1, los coeficientes de la ecuación generalizada de Bessel, son

$$\begin{aligned} 1 - 2\sigma &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1/2, \\ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) r^2 &= \kappa^2 \lambda^2 r^{2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \quad \kappa = \psi_0^2 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right)^{1/2}, \\ \sigma^2 - n^2 \lambda^2 &= -\ell(\ell + 1) \quad \Rightarrow \quad \ell^2 + \ell + \frac{1}{4} = n^2 \quad \Rightarrow \quad \ell + \frac{1}{2} = n. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, la solución general para la ecuación homogénea de  $b_\ell$  es

$$b_\ell(r) = A_3 r^{1/2} J_{\ell + \frac{1}{2}}(\kappa r) + B_3 r^{1/2} Y_{\ell + \frac{1}{2}}(\kappa r). \quad (\text{B.35})$$

Luego, con el propósito de obtener la solución particular mediante el método de variación de parámetros, notamos que el Wronskiano para este caso es

$$W[b_{\ell,1}; b_{\ell,2}] = \left( \frac{2}{\pi} \right), \quad (\text{B.36})$$

así, considerando que la EDO inhomogénea es

$$b_\ell'' + \left[ \psi_0^4 \left( \frac{\omega^2}{\alpha_0^2} - \mu^2 \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] b_\ell = -\frac{2a_\ell}{r},$$

se tendrá como término no homogéneo a

$$R(s) = -\frac{2a_\ell(s)}{s} = -2\ell c_2 s^{\ell-2} - 2 \left[ \frac{\psi_0^4 \omega c_1}{\alpha_0^2} - 2\ell \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{s^\ell}{(2\ell+3)}, \quad (\text{B.37})$$

expresión donde hemos usado el resultado (B.33) para reemplazar  $a_\ell$ . Luego, gracias al método de variación de parámetros, se tiene la siguiente solución particular

$$b_{\ell,p}(r) = \left( \frac{\pi}{2} \right) \left[ r^{1/2} Y_{\ell+1/2}(\kappa r) \int s^{1/2} J_{\ell+1/2}(\kappa s) R(s) ds - r^{1/2} J_{\ell+1/2}(\kappa r) \int s^{1/2} Y_{\ell+1/2}(\kappa s) R(s) ds \right].$$

Nuevamente, identificamos las dos integrales presentes en la expresión anterior como  $I_{1,b_\ell}$  y  $I_{2,b_\ell}$ , y usando las aproximación de potencias dominantes para las funciones de Bessel se obtiene

$$\begin{aligned} I_{1,b_\ell} &= -\frac{c_2}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell + \frac{1}{2}} r^{2\ell} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left[ 4\ell \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 - \frac{\psi_0^4 \omega c_1}{\alpha_0^2} \right] \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell + \frac{1}{2}} \frac{r^{2\ell+2}}{(2\ell+2)} + O(r^{2\ell+4}), \\ I_{2,b_\ell} &= \left( \frac{2}{\pi} \right) \Gamma(\ell + 1/2) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{-\ell - \frac{1}{2}} \left[ -\ell c_2 r^{-1} + \left( \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + \frac{8\ell c_2}{(2\ell-1)} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 \right) \frac{r}{(2\ell+3)} \right] - O(r^3). \end{aligned}$$

Luego, calculamos los términos presentes en la resta que define a  $b_{\ell,p}$ . Estos son

$$\begin{aligned} r^{1/2} Y_{\ell+1/2}(\kappa r) I_{1,b_\ell} &= \left( \frac{2}{\pi} \right) \left[ \frac{c_2}{(2\ell+1)} r^\ell - \frac{\tilde{c}_1}{(2\ell+1)} r^{\ell+2} + O(r^{\ell+4}) \right], \\ r^{1/2} J_{\ell+1/2}(\kappa r) I_{2,b_\ell} &= \left( \frac{2}{\pi} \right) \left[ -\frac{2\ell c_2}{(2\ell+1)} r^\ell + \frac{\hat{c}_1}{(2\ell+1)} r^{\ell+2} + O(r^{\ell+4}) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{c}_1 := \frac{2(2\ell^2 - 7\ell - 3)}{(2\ell-1)(\ell+1)(2\ell+3)} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 - \frac{2}{(2\ell+3)(2\ell+2)} \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1,$$

y

$$\hat{c}_1 := \frac{4\ell}{(2\ell-1)} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 + \frac{2}{(2\ell+3)} \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 \quad (\text{B.38})$$

Por lo tanto, al restar las expresiones anteriores se tiene la siguiente solución particular

$$b_{\ell,p}(r) = c_2 r^\ell - \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + 2(\ell + 3) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+2}}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} + O(r^{\ell+4}) . \quad (\text{B.39})$$

Finalmente, la solución general de la EDO inhomogénea para  $b_\ell$  es

$$b_\ell(r) = A_3 r^{1/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + B_3 r^{1/2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) + b_{\ell,p}(r) . \quad (\text{B.40})$$

Para asegurar la regularidad en el origen exigimos que  $B_3 = 0$ , lo cual, elimina la segunda solución homogénea. Mientras que con respecto a la primera solución homogénea, consideramos su serie de potencias dominantes, dada por (B.10). Esta es

$$b_{\ell,1} = r^{1/2} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r) = \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell+\frac{1}{2}} r^{\ell+1} - \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{5}{2})} \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{\ell+\frac{5}{2}} r^{\ell+3} + O(r^{\ell+5}) .$$

Al comparar esta serie de potencias con la serie de potencias para la solución particular líneas arriba, notamos que estas tienen diferente paridad para cualquier valor de  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . En consecuencia, si elegimos mantener la contribución de ambas en la solución para  $b_\ell$ , esta función no tendrá una paridad definida y por lo tanto no será regular en el origen. Lo que nos obliga a elegir para  $b_\ell$ , o la contribución de la solución homogénea o la contribución de la solución particular. En este trabajo, nos enfocaremos solo en la segunda opción, por lo que para asegurar una paridad definida para  $b_\ell$ , fijamos que  $A_3 = 0$ . Así la solución local cerca al origen de  $b_\ell$  será

$$b_\ell(r) = c_2 r^\ell - \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + 2(\ell + 3) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+2}}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} + O(r^{\ell+4}) . \quad (\text{B.41})$$

En resumen tenemos las siguientes soluciones locales cerca al origen

$$F_\ell(r) = c_1 r^\ell + O(r^{\ell+2}) , \quad (\text{B.42})$$

$$a_\ell(r) = \ell c_2 r^{\ell-1} + \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 - 2\ell \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+1}}{(2\ell + 3)} + O(r^{\ell+3}) , \quad (\text{B.43})$$

$$b_\ell(r) = c_2 r^\ell - \left[ \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} c_1 + 2(\ell + 3) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^2 c_2 \right] \frac{r^{\ell+2}}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} + O(r^{\ell+4}) , \quad (\text{B.44})$$

Notamos que estas soluciones tienen dos 2 parámetros libres independientes  $c_1$  y  $c_2$ . Además a manera de verificación de estos resultados, revisamos el caso  $\ell = 0$ . En este no debemos considerar la solución para  $b_\ell$ , pues como se explica a lo largo del capítulo 4, ya no habrá contribución alguna de esta función al sistema. Entonces tenemos en los ordenes dominantes

$$F_0(r) \simeq c_1 , \quad a_0(r) \simeq \frac{\psi_0^4 \omega}{\alpha_0^2} \frac{c_1}{3} r . \quad (\text{B.45})$$

Lo cual, salvo el factor  $\psi_0^4$  que se debe al cambio de variables entre coordenadas de área radial y coordenadas isotrópicas, concuerda con las soluciones locales cerca al origen encontradas al final de la sección 3.5 para la estrella de Proca estándar.

# Apéndice C

## Métodos Espectrales

---

Los métodos espectrales, presentados como una alternativa a los métodos en diferencias finitas, dejan de representar funciones mediante sus valores en una cantidad finita de puntos de una malla, sino que las representan mediante sus coeficientes  $\{c_i\}_{i=0,\dots,N}$  en una base finita de funciones conocidas  $\{P_i\}_{i=0,\dots,N}$ . Es decir, sea una función  $f$ , realizan la siguiente descomposición truncada de Fourier

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^N c_i P_i(x) . \quad (\text{C.1})$$

De entre las principales ventajas de este método tenemos:

- (i) Los métodos espectrales convergen más rápido que la convergencia como potencia de  $1/N$  de los métodos en diferencias finitas con orden  $N$ . En particular, para funciones analíticas, la aproximación espectral posee una convergencia exponencial, es decir, el error numérico proveniente de elegir una base finita de  $N$  funciones, decae exponencialmente al aumentar  $N$ .
- (ii) Para sistemas con simetría esférica, las condiciones de regularidad en el origen se podrán implementar restringiendo la base de funciones a funciones con una paridad definida.

En particular, esta última ventaja, que será explicada a mayor detalle en la siguientes líneas, nos condujo a implementar estos métodos para la obtención de datos iniciales de la estrella de  $\ell$ -Proca. Debido a que no necesitaremos implementar condiciones de regularidad en el origen fijando los dos parámetros independientes que poseen las soluciones locales cerca al origen.

El siguiente resumen de ideas mínimas y necesarias sobre métodos espectrales que implementamos en este estudio está basado principalmente en la revisión dada en [43].

## C.1. Representación espectral de funciones

Todo método numérico se enfrenta al problema de representar funciones mediante aproximaciones de estas que puedan ser implementadas con los recursos finitos que posee el cálculo computacional. Debido a que los polinomios son las únicas funciones que la computadora puede evaluar exactamente, los métodos espectrales aprovechan este hecho para aproximar funciones continuas por un polinomio. Para explicar esta representación espectral de las funciones, definamos las siguientes objetos matemáticos.

Sea el espacio  $\mathbb{P}_N$  de todos los polinomios con grado hasta  $N$  y definidos en un intervalo de  $[-1, 1]$ , una base ortogonal de  $\mathbb{P}_N$  es un conjunto de  $N + 1$  polinomios  $\{p_n\}_{n=0, \dots, N}$ , donde  $p_n$  es de grado  $n$  y cuyo producto escalar de cualquier par de estos es cero:  $(p_i, p_j) = 0$ , para  $i \neq j$ . Dicho producto escalar se define en general para dos funciones  $f$  y  $g$  en  $[-1, 1]$  mediante la siguiente integral

$$(f, g) = \int_{[-1,1]} f(x)g(x)\omega(x)dx , \quad (\text{C.2})$$

donde la función positiva  $\omega(x)$  en  $[-1, 1]$  es llamada medida<sup>1</sup>. Dadas tales definiciones, la proyección  $P_N f$  de una función  $f$  en dicha base es entonces

$$P_N f = \sum_{n=0}^N \hat{f}_n p_n , \quad (\text{C.3})$$

donde los coeficientes de la proyección están dados por

$$\hat{f}_n = \frac{(f, p_n)}{(p_n, p_n)} . \quad (\text{C.4})$$

Dada una función continua  $f$  en  $[-1, 1]$ , gracias a un teorema de la autoría de Weierstrass [43], se asegura la existencia de una secuencia de polinomios que converge uniformemente hacia  $f$ . Si en particular, tomamos dicha secuencia dada por proyecciones  $(P_N f)$ , con  $N \in \mathbb{N}$ , entonces se muestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - P_N f\|_{\infty} = 0 , \quad (\text{C.5})$$

donde la norma máxima  $\|\cdot\|_{\infty}$  se define como

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [-1,1]} |f(x)| . \quad (\text{C.6})$$

---

<sup>1</sup>Nótese que estamos denotando la función medida con la letra  $\omega$ . A menos, que se mencione explícitamente, en este apéndice, dicha letra no referirá a la frecuencia armónica temporal de la estrella bosónica.

Con esta característica, a primera vista, la proyección en polinomios ortogonales (C.3) parece una interesante forma de representar numéricamente una función. Sin embargo, no es el caso en la práctica debido que para determinar esta proyección se necesitan calcular numéricamente integrales usando los valores de  $f$  en una gran número de puntos, lo cual, lo hace un método impráctico. Ante esta dificultad, la idea de los métodos espectrales es aproximar los coeficientes (C.4) de la proyección usando *Cuadraturas gaussianas*.

El teorema principal de las cuadraturas gaussianas [43], establece que, dada una medida  $\omega$ , existen  $N + 1$  números reales positivos  $\omega_n$  y  $N + 1$  números reales  $x_n \in [-1, 1]$  tal que, para  $f \in \mathbb{N}_{2N+\delta}$ , es decir, un polinomio de grado hasta  $2N + \delta$ , se cumple

$$\int_{[-1,1]} f(x) \omega(x) dx = \sum_{n=0}^N f(x_n) \omega_n , \quad (\text{C.7})$$

donde  $\omega_n$  reciben el nombre de *pesos* y  $x_n$  se conocen como *puntos de colocación*. Por otro lado, el entero  $\delta$  puede tomar diferentes valores dependiendo de la cuadratura exacta que consideremos. En particular, la cuadratura que elegiremos implementar es la *Cuadratura de Gauss-Lobato*, la cual se define fijando

$$\delta = -1 , \quad x_0 = -1 , \quad x_N = 1 . \quad (\text{C.8})$$

Esta elección se basa en que al coincidir los puntos de colocación más externos con las fronteras del dominio  $[-1, 1]$ , se hace más sencillo imponer numéricamente condiciones de frontera y de pegado, las cuales explicaremos en las siguientes secciones.

Para ver cómo se aproximan los coeficientes (C.4) usando una cuadratura gaussiana, definamos el *interpolante* de una función  $f$  por

$$I_N f := \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n p_n(x) , \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\tilde{f}_n := \frac{1}{\gamma_n} \sum_{i=0}^N f(x_i) p_n(x_i) \omega_i , \quad y \quad \gamma_n := \sum_{i=0}^N p_n^2(x_i) \omega_i . \quad (\text{C.10})$$

Nótese que para el caso particular cuando  $f \in \mathbb{P}_{N+\delta}$ , el coeficiente  $\tilde{f}_n$  del interpolante coincide exactamente con el coeficiente  $\hat{f}_n$  de la proyección de  $f$  gracias a la aplicación de la cuadratura gaussiana. Esto significa que  $I_N f = P_N f$  en este caso. Sin embargo, por lo general, las funciones solución de los sistemas de ecuaciones que deseamos resolver numéricamente no son polinomios, y en ese caso  $\tilde{f}_n \neq \hat{f}_n$  y por lo tanto  $I_N f \neq P_N f$ . Afortunadamente, la diferencia entre estas dos cantidades, conocidas



como el *error de alias*, se reducirá a medida que aumentemos el orden de la suma del interpolante  $N$  para ciertos casos particulares de polinomios que mencionaremos en la siguientes sección.

De esta manera podemos representar o aproximar una función  $f$  mediante su interpolante  $I_N f$ . Siendo la ventaja de utilizar  $\tilde{f}_n$  que estos son calculados al estimar el valor de  $f$  solamente en  $N + 1$  puntos de colocación, en comparación con la gran cantidad de puntos necesarios para integrar y obtener  $\hat{f}_n$ . Además, se puede mostrar [43] que  $I_N f(x_i) = f(x_i)$  con  $x_i$  los puntos de colocación, por lo que  $I_N f$  interpola  $f$  en una malla cuyos nodos son  $x_i$ . En consecuencia, la descripción de  $f$  mediante  $I_N f$  también se conoce como *interpolación espectral*, la cual, se manifiesta de dos maneras:

- En el espacio de configuración: la función es descrita mediante sus valores  $f(x_i)$  en los  $N + 1$  puntos de colocación.
- En el espacio de coeficientes: la función es descrita mediante los  $N + 1$  coeficientes de su interpolante  $I_N f$ .

Dependiendo de la operación que realicemos (derivadas, multiplicaciones por potencias de  $x$ , etc) sobre una función dada, será más adecuado trabajar en alguno de los dos espacios. Contando además con la posibilidad de ir de un espacio a otro mediante las expresiones (C.10) y (C.9).

## C.2. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios ortogonales con dominio  $[-1, 1]$  que usaremos para realizar nuestra representación espectral serán los polinomios de Chebyshev de primer tipo  $T_n$ . Estos son eigenfunciones de un problema de Sturm–Liouville singular<sup>1</sup> dado por

$$(\sqrt{1-x^2} T_n')' + \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} T_n = 0, \quad (\text{C.11})$$

donde su ortogonalidad se define mediante el siguiente producto escalar usando la medida  $\omega = 1/\sqrt{1-x^2}$

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 \frac{T_n T_m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) \delta_{nm}. \quad (\text{C.12})$$

---

<sup>1</sup>Un problema de Sturm-Liouville (ST) dado mediante la siguiente ecuación de eigenvalores

$$-(pu')' + qu = \lambda \omega u,$$

en el intervalo  $[-1, 1]$  y con  $p, q, \omega$  funciones reales que cumplen una serie de condiciones, se dice que es singular si y solo si la función  $p$  se anula en las fronteras  $x = \pm 1$ .

Es conocido que  $T_0 = 1$  y  $T_1 = x$  [43], y los polinomios de órdenes mayores se pueden obtener mediante la siguiente relación de recurrencia válida para  $n \geq 1$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) . \quad (\text{C.13})$$

Lo cual implica las siguientes propiedades:

- (i)  $T_n$  es un polinomio de orden  $n$ .
- (ii)  $T_n$  tiene la misma paridad que  $n$ .
- (iii) Por inducción matemática:  $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ .

Contrario a otras eigenfunciones de problemas singulares de Sturm-Liouville, como los polinomios de Legendre que no poseen formulas analíticas para los elementos de sus cuadraturas gaussianas, los polinomios de Chebyshev poseen fórmulas analíticas para sus pesos y puntos de colocación, lo cual, facilita su implementación numérica y es una de las razones por la cual utilizamos estos polinomios en lugar de otros. En particular, para la cuadratura Chebyshev-Gauss-Lobato, se tiene los siguientes puntos de colocación

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{N} , \quad (\text{C.14})$$

y los pesos

$$\omega_0 = \omega_N = \frac{\pi}{2N} , \quad \omega_i = \frac{\pi}{N} . \quad (\text{C.15})$$

Como mencionamos en la sección anterior, algunas operaciones elementales son más sencillas de realizar en el espacio de coeficientes. En particular, sea una representación espectral de  $f$  dada por coeficientes  $a_n$  y en la base formada por  $T_n$ 's, es decir,

$$f = \sum_{n=0}^N a_n T_n , \quad (\text{C.16})$$

los coeficientes  $b_n$  de

$$Df = \sum_{n=0}^N b_n T_n , \quad (\text{C.17})$$

pueden ser encontrados en función de los  $a_n$ 's, para varios operadores  $D$ . Así, tenemos [43]:

- $D = d/dx$ :

$$b_n = \frac{2}{(1 + \delta_{0n})} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ impar}}}^N p a_p . \quad (\text{C.18})$$

- $D = d^2/dx^2$ :

$$b_n = \frac{1}{(1 + \delta_{0n})} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \text{ par}}}^N p(p^2 - n^2) a_p . \quad (\text{C.19})$$

- $D = x$  (multiplicación por  $x$ ):

$$b_n = \frac{1}{2} [ (1 + \delta_{0,n-1})a_{n-1} + a_{n+1} ] . \quad (\text{C.20})$$

Esta última expresión se demuestra de manera sencilla utilizando la relación de recurrencia válida para  $n \geq 1$  y dada en (C.13), los valores  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$  y el hecho que para la expansión de  $f$  se tiene que  $a_{-1} = a_{N+1} = 0$ . En dicha demostración se ve que la expresión mostrada para  $b_n$  también es válida para  $n = N + 1$ , sin embargo no se toma en cuenta debido a que la expansión espectral de  $xf(x)$  se trunca en el polinomio  $T_N$ .

Una operación elemental en el espacio de coeficientes que no se encuentra en [43] es la división entre  $x$ . La cual, necesitaremos implementar para términos como  $f_\ell/r$  presentes en las ecuaciones de la estrella de  $\ell$ -Proca con el fin de evitar divisiones entre el punto de colocación  $x_{N/2} = \cos \pi/2 = 0$ , cuando  $N$  sea par. De esta manera se puede asegurar regularidad en el origen para estos términos [44]. La expresión de  $b_n$  para  $Df = f/x$  se puede obtener utilizando la notación auxiliar  $g(x) := f(x)/x$ , la cual permite visualizar que

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x) \quad \text{y} \quad xg(x) = f(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) ,$$

es decir, los coeficientes  $a_n$ 's corresponden a los coeficientes de la operación de multiplicación por  $x$  aplicada a la función  $g$ , por lo tanto, aplicando (C.20) se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2} [ (1 + \delta_{0,n-1})b_{n-1} + b_{n+1} ] .$$

Luego, despejando  $b_{n-1}$  se tiene para  $n = 0, \dots, N, N + 1$

$$b_{n-1} = \frac{1}{(1 + \delta_{0,n-1})} ( 2a_n - b_{n+1} ) . \quad (\text{C.21})$$

Notamos que para calcular  $b_{n-1}$  debemos tener un coeficiente dos órdenes arriba, es decir,  $b_{n+1}$ . Los casos especiales son cuando  $n = N + 1$ , en el cual, considerando que  $a_{N+1} = 0$  y  $b_{N+2} = 0$ , se tiene que  $b_N = 0$ . Y cuando  $n = N$ , en el cual, considerando que  $b_{N+1} = 0$ , se tiene que  $b_{N-1} = 2a_N$ . Así tenemos que:

- $D = 1/x$ :

$$b_N = 0, \quad b_{N-1} = 2a_N, \\ b_{n-1} = \frac{1}{(1 + \delta_{0,n-1})} (2a_n - b_{n+1}), \quad \text{para } 1 \leq n \leq N-1. \quad (\text{C.22})$$

Finalmente enfatizamos que la elección de polinomios de Chebyshev como base espectral no es arbitraria, sino que, aparte de la fácil implementación analítica de cuadraturas gaussianas con estos polinomios, su elección se debe en primer lugar a sus propiedades de convergencia. Al ser los polinomios de Chebyshev eigenfunciones solución de un problema de ST singular, se puede mostrar que para una función  $C^\infty$ , el interpolante  $I_N f$  converge a la función  $f$  más rápido que cualquier potencia de  $N$ . Este comportamiento se conoce como *convergencia espectral* [43]. En general, esta propiedad no implica que el decaimiento del error numérico sea exponencial para todas las funciones que se estudien, siendo solo las funciones analíticas las que alcanzan una convergencia exponencial.

### C.3. Método de colocación para ODEs

El método espectral que usaremos en los cálculos numéricos de este trabajo, será el *método de colocación*, el cual, corresponde a un caso particular del *método residual ponderado* (RP). Este último se puede establecer en general para un EDO de la forma

$$Lu(x) = S(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (\text{C.23})$$

donde  $L$  es un operador diferencial lineal de segundo orden y  $S$  es la función fuente donde se encuentran los términos no lineales de la EDO. Además, esta admite una solución única una vez que se ha establecido apropiadas condiciones de frontera en  $x = \pm 1$ .

El método RP afirma, [44], que  $u$  será una solución numérica de la ecuación diferencial si: (i) Satisface las condiciones de frontera (hasta el error de máquina). (ii) Hace cero al siguiente producto escalar

$$(R, \xi_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (\text{C.24})$$

donde  $R$  es el residual dado por

$$R(x) := Lu(x) - S(x), \quad (\text{C.25})$$

y  $\xi_i$  es una de las  $N + 1$  funciones de prueba en  $[-1, 1]$ . Dependiendo de la elección de estas funciones de prueba y la manera en que las condiciones de frontera son

implementadas, se obtienen diferentes métodos espectrales.

Establecido esto, el método de colocación consiste en elegir como funciones de prueba a  $\xi_i(x) = \ell_i(x)$ , donde  $\ell_i(x)$  son los  $N + 1$  polinomios de Lagrange correspondientes a los puntos de colocación  $x_i$ , dada una cuadratura gaussiana elegida. Tales polinomios de Lagrange se definen como

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad (\text{C.26})$$

donde se observa que  $\ell_i(x_n) = 0$  cuando  $n \neq i$ , debido a que algún factor del producto de arriba es cero, y que  $\ell_i(x_i) = 1$ . Por lo tanto, los polinomios de Lagrange evaluados en los puntos de colocación, corresponden a una delta de Kronecker, estos es,  $\ell_i(x_n) = \delta_{in}$ . Así, usando esta propiedad y eligiendo una cuadratura gaussiana, el producto escalar igual a cero del método RP (C.24) puede ser aproximado como

$$\forall i : 0 = (R, \xi_i) = \int_{[-1,1]} R(x) \xi_i(x) \omega(x) dx \simeq \sum_{n=0}^N R(x_n) \xi_i(x_n) \omega_n = R(x_i) \omega_i ,$$

luego, dado que los pesos  $\omega_i$  por lo general son diferentes de cero (lo cual se puede verificar en particular para los pesos de la cuadratura de Chebyshev-Gauss-Lobato (C.15)), por lo tanto,  $R(x_i) = 0$ . Así, los métodos de colocación convierten la condición (ii) de los métodos RP, en la condición de que el residual evaluado en cada uno de los puntos de colocación sea cero. Es decir, una solución numérica  $u$  obtenida mediante el método de colocación debe satisfacer las siguientes  $N + 1$  ecuaciones:

$$R(x_i) = Lu(x_i) - S(x_i) = 0 , \quad i = 0, \dots, N . \quad (\text{C.27})$$

Estas ecuaciones forman un sistema matricial que puede ser resuelto mediante un inversión matricial. En efecto, esto se logra observando que al representar espectralmente la función  $u(x)$  en una bases de polinomios de Chebyshev

$$u(x) \simeq \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n T_n(x) , \quad (\text{C.28})$$

el operador lineal  $L$  sobre  $u$  también se puede representar espectralmente, usando las fórmulas para los coeficientes espectrales de las operaciones elementadas dadas en (C.18-C.22). Ya que estas fórmulas mezclan los coeficientes  $\tilde{u}_k$ , la acción de  $L$  en  $u$  se expresa mediante un matriz con componentes  $L_{nk}$ , teniéndose la siguiente representación espectral

$$Lu(x) \simeq \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^N L_{nk} \tilde{u}_k \right) T_n(x) . \quad (\text{C.29})$$

Luego, el sistema de ecuaciones de los residuales igual a cero (C.27), resulta ser el siguiente sistema matricial de orden  $N + 1$

$$\vec{R}^T = (R(x_0), R(x_1), \dots, R(x_{N-1}), R(x_N)) , \quad (\text{C.30})$$

donde el superíndice  $T$  denota la operación de transposición matricial y cada elemento de este vector está dado por la siguientes ecuaciones

$$R(x_i) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N L_{nk} \tilde{u}_k T_n(x_i) - S(x_i) = 0 , \quad i = 0, \dots, N . \quad (\text{C.31})$$

Además dicho sistema posee como variables desconocidas a los coeficientes  $\tilde{u}_k$ , agrupados en el vector solución

$$\vec{u} = (\tilde{u}_k) . \quad (\text{C.32})$$

Para resolver el sistema, debemos notar que este no admite una única solución, debido a las soluciones homogéneas de  $L$ , lo cual, equivale a afirmar que la matriz asociada a  $L$  no es invertible. Por lo tanto, para poder hacer invertible el sistema se debe imponer condiciones de frontera. Estas se implementan mediante la relajación de las dos ecuaciones de los extremos en el sistema (C.30), es decir, las ecuaciones del residual evaluadas en  $x_0 = -1$  y  $x_N = +1$ , y posterior reemplazo de estas por las ecuaciones que expresan las condiciones de frontera en  $x_0 = -1$  y  $x_0 = +1$ , respectivamente. Así, el sistema matricial se puede invertir y nos brinda como solución los coeficientes  $\tilde{u}_k$ , los cuales permiten luego calcular el interpolante (C.28) y así tener una solución aproximada que converge espectralmente a la solución analítica  $u(x)$ .

## C.4. Método de colocación multi-dominio

Estamos interesados en resolver las ecuaciones de datos iniciales para estrellas bosónicas esféricamente simétricas y en particular, para este trabajo, la estrella de  $\ell$ -Proca por lo cual solo nos concentraremos en la aplicación del método de colocación multidominio para estos tipos de sistemas.

Las ecuaciones de datos iniciales de cualquier estrella bosónica con simetría esférica, y en partículas las correspondientes a la estrella de  $\ell$ -Proca (4.112-4.116), corresponden a ecuaciones diferenciales 1-dimensionales en la coordenada radial  $r \in [0, \infty >$ . Gracias a las soluciones en las fronteras obtenidas en la sección 4.7. del capítulo 4, sabemos que debemos imponer condiciones de regularidad en el origen y condiciones asintóticas en  $r \rightarrow \infty$  para las funciones de materia y las funciones métricas. Sin embargo, al tener en cuenta que el dominio numérico de los elementos de nuestra base espectral es  $x \in [-1, 1]$ , poder imponer los dos tipos de condiciones en las coordenadas físicas radiales usando solo un dominio numérico implica buscar

una mapeo entre  $r$  y  $x$  que podría ser complicado. Una manera sencilla de abordar esta situación es realizar una *descomposición multidominio* del espacio físico. Dicha descomposición consiste en dividir el espacio físico en un número finito de dominios radiales, donde para cada dominio radial existe un mapeo entre la coordenada física  $r$  y la coordenada numérica  $x$  de un respectivo dominio computacional  $[-1, 1]$ , siendo en estos dominios computacionales donde se realice las descomposiciones espectrales. Además, los dominios físicos que consideraremos se mantienen en contacto por un valor dado de la coordenada radial, mas no se traslapan, por lo tanto, serán necesarios imponer condiciones de pegado en las fronteras entre dominios físicos como mencionaremos líneas adelante.

Los tipos de dominios que consideraremos para la coordenada radial son:

- **Dominio tipo núcleo:** Este consiste en un dominio radial que contiene el origen coordenado  $r = 0$  y que se extiende hasta un radio finito  $r_1$ . Es decir,  $r \in [0, r_1]$ , y se tiene el siguiente mapeo

$$r = r_1 x, \quad x \in [0, 1]. \quad (\text{C.33})$$

Dado que las ecuaciones de datos iniciales que deseamos resolver poseen derivadas radiales, por ejemplo de  $F_\ell(r(x)) = F_\ell(x)$ , dichas derivadas en un dominio tipo núcleo deben ser calculadas mediante

$$\frac{d}{dr} F_\ell(r) = \frac{1}{r_1} \frac{d}{dx} F_\ell(x), \quad \frac{d^2}{dr^2} F_\ell(r) = \frac{1}{r_1^2} \frac{d^2}{dx^2} F_\ell(x). \quad (\text{C.34})$$

Además, dado que este dominio posee el origen coordenado, será en este donde se impondrán las condiciones de regularidad en el origen.

- **Dominio tipo cascarón:** corresponde a  $r \in [r_1, r_2]$  y tiene el siguiente mapeo coordenado

$$r = \frac{1}{2}(r_2 - r_1) x + \frac{1}{2}(r_2 + r_1), \quad x \in [-1, 1]. \quad (\text{C.35})$$

Denotando por simplicidad el factor  $d_{12} := \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ , las derivadas radiales en este dominio se calculan como

$$\frac{d}{dr} F_\ell(r) = \frac{1}{d_{12}} \frac{d}{dx} F_\ell(x), \quad \frac{d^2}{dr^2} F_\ell(r) = \frac{1}{d_{12}^2} \frac{d^2}{dx^2} F_\ell(x). \quad (\text{C.36})$$

- **Dominio compacto:** El cual corresponde a  $r \in [r_c, \infty >$  y tiene el siguiente mapeo

$$r = \frac{2r_c}{1 - x}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (\text{C.37})$$

Nótese que este dominio va a  $r \rightarrow \infty$  cuando  $x = 1$ . Por lo tanto, será el dominio donde se impondrán las condiciones de frontera asintóticas. La primera derivada en este dominio se calcula como

$$\frac{d}{dr} F_\ell(r) = \frac{(1-x)^2}{2r_c} \frac{d}{dx} F_\ell(x) , \quad (\text{C.38})$$

mientras que el operador laplaciano en coordenadas radiales en este dominio es

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] F_\ell(r) = \frac{(1-x)^4}{(2r_c)^2} \frac{d^2}{dx^2} F_\ell(x) . \quad (\text{C.39})$$

Regresando a las condiciones de regularidad en el origen, ya podemos describirlas adecuadamente con las herramientas hasta ahora presentadas. Con respecto a los dominios tipo cascarón y dominios compactos donde no es necesario condiciones de regularidad, sus funciones se expandirán de la manera estándar considerando polinomios de Chebyshev pares e impares. Sin embargo, para dominios tipo núcleo, debido a que solo funciones con paridad definida son regulares en el origen en un sistema 1-dimensional, para asegurar dicha regularidad realizaremos expansiones espectrales únicamente en polinomios de Chebyshev pares  $T_{2k}$ , ó impares  $T_{2k+1}$ , dependiendo de la paridad requerida por cada función dada.

Este tipo de expansión espectral con paridad definida, resulta ser suficiente si estudiamos funciones que se aproximan en el origen como  $r^0$  o  $r^1$ . Sin embargo, si estudiamos el caso de soluciones locales cerca al origen dadas como  $r^\ell$  con  $\ell > 1$ , debemos imponer constricciones adicionales para asegurar la regularidad de estas funciones, esto es, que tanto la función como su primera derivada sean iguales a cero en el origen. Se muestra, que estas condiciones adicionales de regularidad son necesarias para lograr una correcta inversión matricial del operador laplaciano de segundo orden en el contexto de los métodos espectrales [44, 45]. En estos casos, la manera de implementar estas constricciones no es realizando expansiones espectrales en la base del espacio de polinomios elegido, sino, en un sub-espacio de este cuyos elementos satisfacen las constricciones que deseamos reforzar en nuestras soluciones. Este método se conoce como *técnica de Galerkin* y en consecuencia, la base de dicho sub-espacio, por lo general no ortogonal, recibe el nombre de *base de Galerkin*.

Por ejemplo, si tenemos el caso de  $F_\ell \simeq r^\ell$  con  $\ell$  par y  $\ell \neq 0$ , expandimos  $F_\ell$  en su dominio tipo núcleo usando la siguiente base de Galerkin

$$G_k(x) := T_{2k+2}(x) - (-1)^{k+1} T_0(x) , \quad (\text{C.40})$$

donde  $k = 0, 1, \dots, N_G$ . Teniendo en cuenta que: (i)  $T_0(x) = 1$  y (ii) los polinomios de Chebyshev se pueden expresar como  $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$ , [42], y por lo tanto,



$T_{2k}(0) = \cos(2k \cos^{-1} 0) = \cos k\pi = (-1)^k$ . Se muestra fácilmente que  $\forall k : G_k(0) = 0$ . Esta propiedad asegura por construcción la primera constricción  $F_\ell(0) = 0$ . Mientras que la segunda constricción  $dF_\ell/dr(0) = 0$  se asegura automáticamente al elegir que  $\{G_k\}$  sea una base par.

Por otro lado, en el caso de  $F_\ell \simeq r^\ell$  con  $\ell$  impar y  $\ell \neq 1$ , expandimos  $F_\ell$  en su dominio tipo núcleo usando la siguiente base de Galerkin

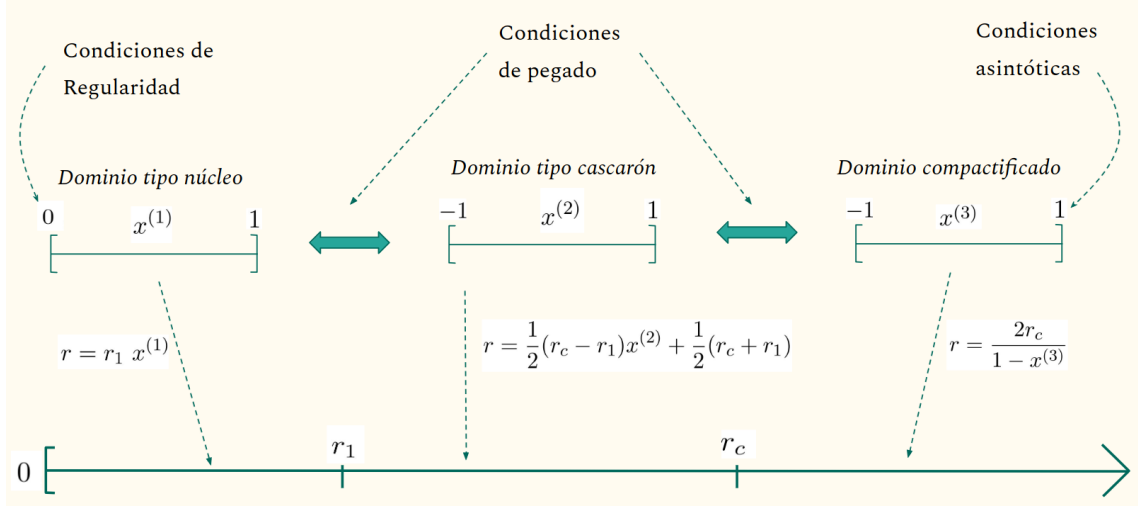
$$G_k(x) := T_{2k+3}(x) - T'_{2k+3}(0)T_1(x), \quad (\text{C.41})$$

donde  $k = 0, 1, \dots, N_G$ . Nuevamente,  $F_\ell$  satisface las dos constricciones de regularidad. La primera,  $F_\ell(0) = 0$ , gracias a que elegimos que la base de Galerkin sea impar y la segunda,  $dF_\ell/dr(0) = 0$ , por construcción, dado que  $T_1(x) = x$  y por lo tanto  $\forall k : G'_k(0) = 0$ .

Nótese que para ambos ejemplos hemos dejado sin especificar el valor de  $N_G$ , este se determinará de tal forma que la resolución espectral en el dominio tipo núcleo, dado por el grado máximo del polinomio de Chebyshev usado de la base de Galerkin, no sobrepase la resolución espectral de los demás dominios físicos. En resumen, las condiciones de regularidad en el origen para una función que se aproxima en la vecindad del origen como  $r^\ell$ , se expresan mediante una expansión en la siguiente base:

- $T_{2k}(x)$  para  $\ell = 0$
- $T_{2k+1}(x)$  para  $\ell = 1$
- $G_k(x) = T_{2k+2}(x) - (-1)^{k+1}T_0(x)$  para  $\ell$  par y  $\ell \neq 0$
- $G_k(x) = T_{2k+3}(x) - T'_{2k+3}(0)T_1(x)$  con  $\ell$  impar y  $\ell \neq 1$ .

Finalmente, aterrizamos todas las ideas de la técnica multi-dominio en el esquema presentado en la figura C.1 donde intentamos resolver una EDO de segundo orden del tipo estrella bosónica para la función  $u(r)$  descomponiendo su dominio físico radial en 3 dominios, uno de cada tipo descrito en las líneas anteriores. Dado que cada dominio numérico posee su propia descomposición espectral, en cada uno de estos buscamos una solución numérica utilizando el método de colocación. El método en conjunto resultado de la aplicación de la técnica multi-dominio junto al método espectral de colocación, será referido como *método de colocación multi-dominio*. Luego, tenemos



**Figura C.1:** Esquema de aplicación de la técnica multidominio para un dominio físico radial dividido en los 3 tipos de dominios numéricos presentados.

el siguiente vector que describe el sistema completo de ecuaciones residuales

$$\vec{R}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \vec{R}^{(1)} \\ \vec{R}^{(2)} \\ \vec{R}^{(3)} \\ \text{Ec. para } \omega \end{pmatrix}, \quad (\text{C.42})$$

donde,  $\vec{R}^{(j)}$  denota el subsistema de ecuaciones residuales dado por (C.30) que resulta de aplicar el método de colocación al  $j$ -ésimo dominio, con  $j = 1, 2, 3$ . Además, notamos que al sistema dado por  $\vec{R}$  hemos agregado una ecuación para el eigenvalor<sup>1</sup>  $\omega$ , de modo que podamos cerrar el sistema de ecuaciones. En efecto, pues las variables incógnitas de este sistema son los coeficientes espectrales de cada dominio numérico y la frecuencia  $\omega$  agrupados en un solo vector solución

$$\vec{u}^T = ( \{ \tilde{u}_{k_1}^{(1)} \}, \{ \tilde{u}_{k_2}^{(2)} \}, \{ \tilde{u}_{k_3}^{(3)} \}, \omega ). \quad (\text{C.43})$$

El método de colocación estándar luego establece que en cada sub-sistema de ecuaciones correspondientes a cada dominio, debemos relajar dos ecuaciones residuales, la primera y la última, y reemplazarlas por dos ecuaciones que impongan condiciones de frontera. Estas se impondrán de la siguiente manera:

- La condiciones de regularidad se impondrán en el primer dominio mediante la adecuada elección de una base con paridad definida de Chebyshev o una

<sup>1</sup>Recordemos que las ecuaciones de datos iniciales de una estrella bosónica junto a sus condiciones de frontera constituyen un problema de eigenvalores con la frecuencia  $\omega$  como eigenvalor.

base de Galerkin, lo cual, manifiestamente constreñirá la solución mediante la reducción del número de coeficientes espectrales independientes en este dominio y por lo tanto no será necesario relajar la primera ecuación residual del sistema completo de ecuaciones.

- La condición asintótica se implementa al relajar la última ecuación residual del sistema total, es decir, la última ecuación del dominio compactificado, y reemplazarla por la ecuación de condición de frontera asintótica.
- Para asegurar la continuidad de nuestras soluciones de ecuaciones de segundo orden en cada interfaz entre dominios radiales físicos, es necesario imponer 2 condiciones de pegado, estas son, la continuidad en la función y en su primera derivada . Ya que tenemos 3 dominios, se tiene las siguientes ecuaciones para  $j = 1, 2$

$$u(r(x^{(j)} = 1)) = u(r(x^{(j+1)} = -1)) , \quad (\text{C.44})$$

$$\frac{d}{dr}u(r(x^{(j)} = 1)) = \frac{d}{dr}u(r(x^{(j+1)} = -1)) . \quad (\text{C.45})$$

En general, si deseamos un descomposición con más dominios radiales, simplemente debemos aumentar el número de dominios de tipo cascarón sin modificar el tipo de dominio del primer (dominio tipo núcleo) y último dominio físico (dominio compactificado) y establecer las mismas condiciones de frontera que se acaban de enunciar con la variación que ahora tendremos más interfaces y por lo tanto más condiciones de pegado.

Finalmente el sistema total de ecuaciones  $\vec{R}(\vec{u})$ , dado en (C.42), es resuelto mediante el método de Newton-Raphson, cuyo algoritmo iterativo es el siguiente:

1. Dar una estimación inicial de la raíz del sistema:  $\vec{u}_0$ .
2. Aplicar  $\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k - \mathbb{J}^{-1}(\vec{u}_k)\vec{R}(\vec{u}_k)$ , donde  $\mathbb{J}(\vec{u}_k) = \left. \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right|_{\vec{u}=\vec{u}_k}$ , para actualizar la estimación anterior.
3. Repetir el paso 2 hasta que la nueva estimación se acerque lo suficiente al valor de la raíz solución.

# Bibliografía

---

- [1] R. Abbott, T.D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R.X. Adhikari, V.B. Adya, C. Affeldt, M Agathos, et al. Gw190521: A binary black hole merger with a total mass of  $150 M_{\odot}$ . *Physical review letters*, 125:101102, Sep 2020. [1](#)
- [2] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, et al. Properties and astrophysical implications of the  $150 M_{\odot}$  binary black hole merger GW190521. *Astrophysical Journal Letters*, 900(1):L13, 2020. [1](#)
- [3] J. Bustillo, N. Sanchis-Gual, A. Torres-Forné, J. A. Font, A. Vajpeyi, R. Smith, C. Herdeiro, E. Radu, and S. H. W. Leong. Gw190521 as a merger of Proca stars: A potential new vector boson of  $8.7 \times 10^{-13}$  eV. *Phys. Rev. Lett.*, 126:081101, Feb 2021. [1](#)
- [4] R. Brito, V. Cardoso, C. A.R. Herdeiro, and E. Radu. Proca stars: Gravitating Bose–Einstein condensates of massive spin 1 particles. *Physics Letters B*, 752, 2016. [1](#), [97](#), [99](#), [101](#), [103](#), [107](#), [114](#)
- [5] D. J. Kaup. Klein-Gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, Aug 1968. [1](#)
- [6] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969. [1](#)
- [7] S. L. Liebling and C. Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Reviews in Relativity*, 26(1):1, 2023. [2](#)
- [8] M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa, K. Nakamura, Y. Sumino, and et al Takahashi. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 98:030001, Aug 2018. [2](#)
- [9] J. P. Conlon and C. Herdeiro. Can black hole superradiance be induced by galactic plasmas? *Physics Letters B*, 780:169–173, 2018. [2](#)
- [10] E. Seidel and W.M. Suen. Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state. *Phys. Rev. D*, 42:384–403, Jul 1990. [2](#)

- [11] N. Sanchis-Gual, C. Herdeiro, E. Radu, J. C. Degollado, and J. A. Font. Numerical evolutions of spherical Proca stars. *Phys. Rev. D*, 95:104028, May 2017. [2](#), [69](#)
- [12] N. Sanchis-Gual, F. Di Giovanni, M. Zilhão, C. Herdeiro, P. Cerdá-Durán, J.A. Font, and E. Radu. Nonlinear dynamics of spinning bosonic stars: formation and stability. *Physical review letters*, 123(22):221101, 2019. [3](#)
- [13] N. Sanchis-Gual, C. Herdeiro, Jo. A. Font, E. Radu, and F. Di Giovanni. Head-on collisions and orbital mergers of Proca stars. *Phys. Rev. D*, 99:024017, Jan 2019. [3](#)
- [14] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, Diez-Tejedor A., M. Megevand, D. Núñez, and O Sarbach.  $\ell$ -boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 35(19), 2018. [3](#), [4](#), [48](#), [50](#), [104](#), [108](#)
- [15] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. Boson stars and their relatives in semiclassical gravity. *Physical Review D*, 107(4):045017, 2023. [3](#)
- [16] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. Dynamical evolutions of  $\ell$ -boson stars in spherical symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, 36(21):215013, 2019. [4](#)
- [17] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, V. Jaramillo, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. Extreme  $\ell$ -boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 39(9):094001, 2022. [4](#)
- [18] V. Jaramillo, N. Sanchis-Gual, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, C. Herdeiro, and D. Núñez. Dynamical  $\ell$ -boson stars: Generic stability and evidence for nonspherical solutions. *Physical Review D*, 101(12):124020, 2020. [4](#)
- [19] N. Sanchis-Gual, F. Di Giovanni, C. Herdeiro, E. Radu, and J. A. Font. Multifield, multifrequency bosonic stars and a stabilization mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, 126:241105, Jun 2021. [4](#), [115](#)
- [20] M. Shibata and T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, 52:5428–5444, Nov 1995. [7](#)
- [21] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. Numerical integration of Einstein’s field equations. *Phys. Rev. D*, 59:024007, Dec 1998. [7](#)
- [22] M. Alcubierre. *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*, volume 140. OUP Oxford, 2008. [7](#), [12](#), [13](#), [14](#)

- [23] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010. [7](#), [8](#)
- [24] S. Hawking and G. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 2023. [8](#)
- [25] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40:1997–2027, 2008. [11](#), [14](#)
- [26] O. Sarbach and M. Tiglio. Continuum and discrete initial-boundary value problems and einstein’s field equations. *Living reviews in relativity*, 15:1–194, 2012. [14](#)
- [27] J. W. York. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 83–126. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979. [14](#)
- [28] M. Alcubierre and M. D. Mendez. Formulations of the 3+ 1 evolution equations in curvilinear coordinates. *General Relativity and Gravitation*, 43:2769–2806, 2011. [15](#)
- [29] N. Wheeler. Electrodynamics in 2-dimensional spacetime. *Reed Colledge Lecture Note*, 1997. [25](#)
- [30] I. (Iñaki) Olabarrieta, J. F. Ventrella, M. W. Choptuik, and W. G. Unruh. Critical behavior in the gravitational collapse of a scalar field with angular momentum in spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, 76:124014, Dec 2007. [48](#)
- [31] R. Barrera, G.A. Estevez, and J. Giraldo. Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics. *European Journal of Physics*, 6(4):287, 1985. [52](#)
- [32] B. Carrascal, G.A. Estevez, P. Lee, and V. Lorenzo. Vector spherical harmonics and their application to classical electrodynamics. *European Journal of Physics*, 12(4):184, 1991. [52](#)
- [33] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical methods for physicists*, 1999. [91](#), [117](#), [124](#), [127](#), [129](#)
- [34] R. Friedberg, T.D. Lee, and Y. Pang. Mini-soliton stars. *Physical Review D*, 35(12):3640, 1987. [108](#)
- [35] B. Kent Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler. *Gravitation theory and gravitational collapse*. *University of Chicago Press*, 1965. [108](#)

- [36] P. Grandclement, C. Somé, and E. Gourgoulhon. Models of rotating boson stars and geodesics around them: new type of orbits. *Physical Review D*, 90(2):024068, 2014. [109](#)
- [37] E. Gourgoulhon. *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, volume 846. Springer Science & Business Media, 2012. [109](#)
- [38] N. O Murchadha and J. W. York Jr. Gravitational energy. *Physical Review D*, 10(8):2345, 1974. [109](#)
- [39] Éric Gourgoulhon. An introduction to the theory of rotating relativistic stars. *arXiv preprint arXiv:1003.5015*, 2010. [109](#)
- [40] R. Beig. Arnowitt-Deser-Misner energy and  $g_{00}$ . *Physics Letters A*, 69(3):153–155, 1978. [110](#)
- [41] A. Ashtekar and A. Magnon-Ashtekar. On conserved quantities in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 20(5):793–800, 07 2008. [110](#)
- [42] W. W. Bell. *Special functions for scientists and engineers*. Courier Corporation, 2004. [118](#), [123](#), [124](#), [129](#), [143](#)
- [43] P. Grandclément and J. Novak. Spectral methods for numerical relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12:1–103, 2009. [133](#), [134](#), [135](#), [136](#), [137](#), [138](#), [139](#)
- [44] P. Grandclement. *KADATH*: a spectral solver for theoretical physics. *Journal of Computational Physics*, 229(9):3334–3357, 2010. [138](#), [139](#), [143](#)
- [45] P. Grandclément, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, and J.-A. Marck. A multidomain spectral method for scalar and vectorial Poisson equations with noncompact sources. *Journal of Computational Physics*, 170(1):231–260, 2001. [143](#)