



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LOS POLÍGONOS
FUNDAMENTALES MODULARES DE KULKARNI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

ANGEL DAVID CHÁVEZ SANTILLÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero iniciar agradeciendo a una persona muy estimada para mí y sin la cual este trabajo no habría sido posible, el Dr. Antonio Lascurain Orive, quien no sólo me ha apoyado y orientado en la realización de este trabajo, sino que también me guió desde el inicio de mis estudios universitarios para lograr mis objetivos académicos y me ayudó a mantener mi meta presente a pesar de las diversas actividades que me desviaban de ella y que por distintas circunstancias tuve que asumir a partir de mis últimos semestres en la facultad. Por lo anterior y también por la enorme paciencia que me tuvo durante la elaboración del presente trabajo le estoy más que agradecido.

Agradezco también a mi familia, mi madre, mis abuelos, mi hermano y mis tíos que han estado siempre para mí cuando los he necesitado, así como yo para ellos, son parte esencial de mi formación no sólo como profesional sino también como persona y me enorgullece llevar conmigo los valores que me han enseñado. Desde hace algunos años hemos venido pasando momentos difíciles como familia. Sin embargo, y pese a todo, pasar tiempo juntos siempre me ha dado la fortaleza para confiar en que habrá mejoría y finalizar este trabajo es prueba de ello. Este logro lo comparto y celebro con todos ellos, lamentando no poder hacerlo con mi abuelo con quien en realidad nunca tuve una buena relación, pero siempre tuve su apoyo para mi educación y lamentablemente falleció antes de ver terminada esta etapa de mi vida.

Después, pero tan importantes como los anteriores, agradezco a mis amigos y compañeros que me acompañaron durante la licenciatura, la lista es larga, pero haré énfasis en dos de ellos, Luis Felipe Sánchez Ascencio, economista que ha sido mi amigo desde la secundaria y me brinda la inspiración para buscar siempre mejorar en cada aspecto de mi vida y Kevin Emanuel Domínguez Lau, quien ha sido mi amigo por tantos años y con quien he tenido la fortuna de compartir el camino de las matemáticas, la música, la programación, los videojuegos, el deporte, la familia y un gran número de

ámbitos más, tener un amigo así, en quien puedo confiar y buscar apoyo para cualquier cosa, desde lo personal hasta lo profesional, es sin duda algo que también debo agradecer en este trabajo pues nunca me faltó su apoyo durante todo este proceso.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México el privilegio de haber sido un estudiante más en sus aulas, que si bien, no siento haber destacado especialmente en ellas, creo que en el ámbito laboral sí lo estoy haciendo y de esta forma intento poner en alto el nombre de la universidad para que continúe siendo un excelente referente como tantas décadas lo ha sido.

Contenido

1. Preliminares	3
2. Regiones fundamentales de subgrupos fuchsianos	7
2.1. Polígonos fundamentales de grupos fuchsianos	7
2.2. Polígonos fundamentales de subgrupos fuchsianos	10
3. El grupo modular y el modular extendido	15
3.1. Generalidades	15
4. Polígonos de Kulkarni	27
4.1. Dominios fundamentales admisibles	29

Introducción

El grupo clásico modular $PSL(2, \mathbb{Z})$, sus subgrupos y sus extensiones son de enorme importancia en la matemática actual por su impacto en muchas áreas. En particular, el subgrupo modular de Hecke de nivel 2 jugó un papel crucial en la prueba de la conjetura de Fermat cf. [9].

La construcción de regiones fundamentales proporciona una importante herramienta para el estudio de estos grupos, ya que de alguna forma refleja las correspondientes superficies de Riemann, las 3-variedades hiperbólicas o los orbifolios. Las regiones fundamentales pueden tener ciclos de vértices que no son puntos fijos llamados vértices accidentales. Es deseable construir regiones que no tengan este tipo de vértices para reducir a lo esencial la estructura geométrica y algebraica. Kulkarni probó que en el caso de los subgrupos modulares de índice finito esto se puede hacer.

El propósito de este trabajo es desarrollar y extender la prueba de este teorema de Kulkarni [2], de manera detallada aportando otras ideas y corrigiendo ciertos errores. En el capítulo 2 se describe un método para construir regiones fundamentales de subgrupos de índice finito, dado un grupo fuchsiano del cual se conoce su región fundamental usando representantes Schreier (Teorema 2.2.2). En el capítulo 3 se prueban propiedades tanto del grupo modular como del grupo modular extendido a nivel de matrices y a nivel de transformaciones (Teorema 3.1.3 y Proposición 3.1.1).

En el capítulo 4 se prueba el teorema principal. Este teorema establece a groso modo que para cualquier subgrupo modular de índice finito existen regiones fundamentales que no tienen vértices accidentales y que los ciclos de vértices elípticos tienen longitud 1 (Teorema 4.1.3). Usando la tesela modular $0, \rho$ e $\infty, \rho = e^{\frac{i\pi}{3}}$, se construyen regiones fundamentales tipo Schreier para subgrupos modulares de índice finito Φ . En el cociente, es decir, en la superficie de Riemann o el orbifolio se hacen los cortes adecuados usando la gráfica de los lados pares, impares y finitos, se prueba que al quitar algunos

de estos lados se obtiene una superficie conexa y simplemente conexa. Posteriormente se desarrolla o *aterriza* en \mathbb{H}^2 tesela por tesela y se obtiene un polígono que tiene las propiedades deseadas y que resulta ser fundamental para el subgrupo Φ .

Se extiende el resultado de Kulkarni, ya que en su artículo el polígono encontrado es fundamental para un subgrupo conjugado de Φ , pero no necesariamente Φ . Moviendo teselas del polígono desarrollado se obtienen otros polígonos que tienen las mismas órbitas, por lo que definen el mismo subgrupo (Lema 4.1.2).

Se muestran ejemplos de la prueba del teorema principal para el subgrupo principal de congruencias de nivel 2 (véase Figura 4.7) y para los subgrupos de congruencias de Hecke niveles 2 y 3 (véase Figuras 4.9 y 4.11). Finalmente, se exhibe un subgrupo de índice 2 del grupo clásico modular que no empata con la descripción de Kulkarni de sus polígonos (véase la Figura 4.12 y [2], pp. 1062-1063, Figura 2.6). Posiblemente este tipo de subgrupos no sea apto para el desarrollo posterior del trabajo de Kulkarni [2], en particular para las sucesiones de Farey. Es decir, es probable que sus teoremas posteriores no necesariamente se apliquen a todos los subgrupos modulares de índice finito.

La prueba del teorema principal, en la parte de desarrollar las teselas de la superficie en \mathbb{H}^2 , tiene similitudes con la función desarrolladora de Thurston cf. [11]. Sin embargo, no se usó esta sofisticada herramienta. En cambio la idea simple de colorear las teselas conforme a la acción del subgrupo en representantes Schreier fue muy útil.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Se identifica el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, el plano complejo junto con el infinito, con la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$, mediante la proyección estereográfica (cf. [4] pp.1-3 y Figura 1.1).

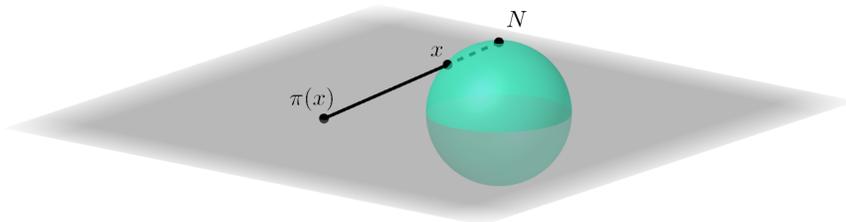


Figura 1.1: La función $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ denota a la proyección estereográfica.

Las transformaciones de Möbius complejas, es decir, las que son de la forma

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

donde $\infty \rightarrow \infty$ cuando $c = 0$, mientras que cuando $c \neq 0$, $\infty \rightarrow \frac{a}{c}$ y $-\frac{d}{c} \rightarrow \infty$, actúan tanto en el plano complejo extendido como en la esfera de Riemann.

Estas transformaciones están determinadas por las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$, es decir, las matrices complejas de 2×2 con determinante 1. Como el producto de matrices se corresponde con la composición de transformaciones, se sigue que, en efecto, éstas últimas forman un grupo.

Es fácil probar que el centro de $SL(2, \mathbb{C})$ consiste de las matrices $\pm Id$. Más aún, resulta que al tomar este grupo módulo su centro, su proyectivización, denotada por $PSL(2, \mathbb{C})$, resulta ser isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas, esto se sigue del primer teorema de isomorfismo de grupos.

Las transformaciones de Möbius se pueden clasificar por sus puntos fijos, si fijan un punto se les llama parabólicas y si fijan dos puntos son conjugadas a roto-homotecias, es decir, funciones de la forma

$$z \rightarrow \alpha z.$$

Si $|\alpha| = 1$, a la transformación se le llama elíptica, si α es un real positivo se le llama hiperbólica, y en los demás casos se le llama loxodrómica.

Un círculo en el plano complejo con centro en a y radio r se describe como

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

y una recta en el plano complejo queda determinada de la siguiente manera

$$R(b, t) = \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot b = t, b \in \mathbb{C} - \{0\}, t \in \mathbb{R}\},$$

donde se interpreta el producto punto como si fuera en \mathbb{R}^2 . Nótese que si el vector b es unitario $|t|$ determina la distancia al origen.

Definición 1. *La reflexión (o inversión) en el círculo $C(a, r)$ está dada por*

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + \frac{r^2(z-a)}{|z-a|^2}, & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq a, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Definición 2. *La reflexión en la recta $R(b, t)$ está dada por*

$$\psi(z) = \begin{cases} z - 2(z \cdot b - t), & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ \infty, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

El grupo general de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{C}}$ (o en $\widehat{\mathbb{R}^2}$), denotado por $GM(\widehat{\mathbb{C}})$ (o $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$) consiste en todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en círculos y rectas. Resulta que $PSL(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo de índice 2 de $GM(\widehat{\mathbb{C}})$, básicamente esto se sigue de que cualquier

transformación de Möbius es una composición de 2 o 4 reflexiones en círculos y rectas.

Por ejemplo, $z \rightarrow z + 1$ es la composición de la reflexión en el eje imaginario seguida de la reflexión en la recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. También la función $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ es la composición de la reflexión en el círculo unitario seguida de la reflexión en el eje imaginario. Esta situación se repite para las transformaciones parabólicas, elípticas e hiperbólicas que se pueden ver como composición de reflexiones en dos círculos o rectas que son tangentes, se intersecan o son ajenos, respectivamente (cf. [4] pp. 78-79).

Las transformaciones que preservan el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$

están dadas por $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir, las transformaciones determinadas por las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$, que tienen entradas reales, este grupo se denota por $SL(2, \mathbb{R})$. También las que preservan el disco unitario Δ , es decir,

$$\{z \mid |z| < 1\}$$

están dadas por las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Trabajaremos esencialmente con $PSL(2, \mathbb{R})$. La métrica hiperbólica en el modelo del semiplano está definida por la densidad $\lambda(z) = 1/\operatorname{Im} z$, o la correspondiente métrica riemanniana, de esta manera este grupo actúa como isometrías hiperbólicas en \mathbb{H}^2 , de hecho el grupo completo de isometrías está generado por este grupo junto con la reflexión en el eje imaginario, (cf. [4], capítulo 2).

La métrica cordal se define en $\widehat{\mathbb{C}}$ usando la proyección estereográfica, explícitamente, si x_1 y x_2 denotan en \mathbb{S}^2 los puntos correspondientes a z_1 y z_2 en $\widehat{\mathbb{C}}$, la distancia cordal de z_1 a z_2 , está dada por $|x_1 - x_2|$, nótese que ∞ está incluido en esta definición. Resulta que ésta en efecto es una métrica que define la misma topología que la métrica euclidiana en \mathbb{C} .

Dado Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ se dice que un punto α es un punto límite de Γ , si existen transformaciones distintas T_n , $n \in \mathbb{N}$, y un punto z en $\widehat{\mathbb{C}}$, tal que $T_n(z) \rightarrow \alpha$ con la métrica cordal. Al conjunto de puntos límite se le llama el conjunto límite, y a su complemento en la esfera de Riemann se

le llama el conjunto ordinario. Si el conjunto ordinario es no vacío al grupo se le llama discontinuo. Ahora un grupo Γ de matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ se dice que es discreto, si no existen matrices distintas A_n en Γ que convergan a una matriz A en $SL(2, \mathbb{C})$. Esta definición se adapta a grupos de transformaciones. Resulta que en $PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo es discontinuo si y sólo si es discreto (cf. [4], p.102).

CAPÍTULO 2

Regiones fundamentales de subgrupos fuchsianos

2.1. Polígonos fundamentales de grupos fuchsianos

Definición 3. *Dado un dominio fundamental D para un grupo G , se dice que D es localmente finito si cada subconjunto compacto de \mathbb{H}^2 interseca sólo un número finito de G -imágenes de \tilde{D} .*

Dado un grupo fuchsiano G , se dice que P es un *polígono fundamental* para G si P es un polígono hiperbólico y un dominio fundamental localmente finito para G . Consideramos a P como el polígono abierto, es decir, sin su frontera.

En general a estos polígonos se les suele pedir que también sean convexos (cf. [1], p. 217) dado que muchos de los resultados para polígonos fundamentales no pueden obtenerse sin este requisito. A estos polígonos se les llama *polígonos fundamentales convexos*. Sin embargo, la convexidad no es necesaria para probar algunos resultados básicos como la existencia de apareamientos en los lados de un polígono y este resultado en particular nos será de mucha utilidad para polígonos no necesariamente convexos en el Capítulo 3.

Definición 4. *Dado un polígono fundamental P para un grupo fuchsiano G , un lado de P es un segmento de geodésica máximo contenido en $\overline{P} \cap g(\overline{P})$ con longitud positiva, donde $g \in G$, $g \neq Id$. Un vértice de P es un punto de la forma $\overline{P} \cap g(\overline{P}) \cap h(\overline{P})$, donde $g, h \in G \setminus \{Id\}$, $g \neq h$.*

Una consideración importante a tener con la definición anterior es que un lado de P no necesariamente es un lado en el sentido convencional, esto porque puede suceder el caso de que en una misma geodésica se encuentren dos o más lados de P , incluso una cantidad infinita (cf. [1], pp. 210-213). Otra consideración es que los extremos de un lado se incluyen dentro del lado y no necesariamente son vértices. En particular, dos lados pueden coincidir en uno de sus extremos y ese punto no necesariamente es un vértice. El hecho determinante para saber si uno de estos puntos es un vértice o no, es si los lados son definidos por transformaciones distintas o no.

Para ilustrar la última observación véase la Figura 2.1, en ella se presenta un polígono fundamental para el grupo generado por la transformación

$$z \rightarrow z + 1,$$

este polígono no es convexo y pueden distinguirse ocho lados. Los puntos visibles en la figura se han resaltado para mostrar que aunque en cada uno de ellos coincide un par de lados, estos puntos no son vértices del polígono ya que todos los lados están definidos por la misma transformación que es $z \rightarrow z + 1$.

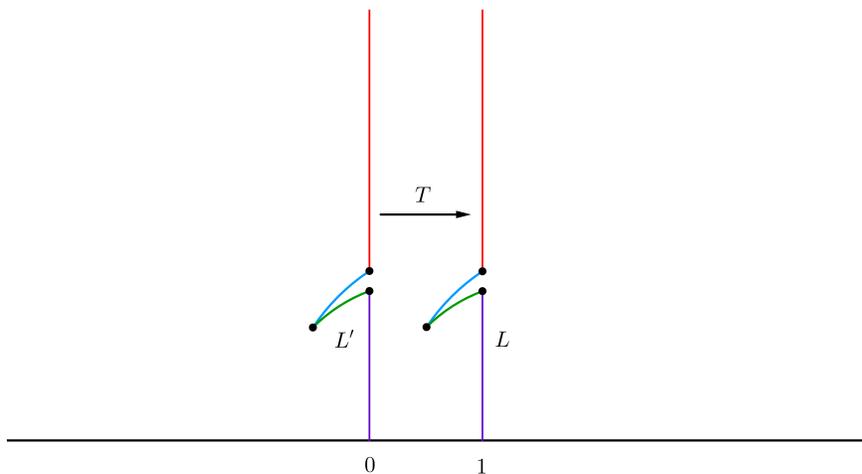


Figura 2.1: Polígono fundamental no convexo para el grupo generado por $T(z) = z + 1$. T apareja el segmento vertical inferior L' con el correspondiente segmento vertical L .

Obsérvese que si P es un polígono fundamental convexo para un grupo fuchsiano G , entonces éste tiene una cantidad a lo sumo numerable de lados y vértices, dado que G es a lo sumo numerable. Más aún, si G es un grupo fuchsiano finitamente generado, entonces cualquier polígono fundamental convexo para G tiene un número finito de lados (cf. [1], pp. 254-258).

En esta tesis trabajaremos con subgrupos del grupo modular con índice finito, sin embargo, necesitaremos trabajar con polígonos no necesariamente convexos. Para nuestro objetivo será suficiente trabajar con polígonos con un número finito de lados.

Nótese que en este caso la frontera euclidiana de P , es decir, la frontera en $\widehat{\mathbb{C}}$, es una curva de Jordan cerrada que es la unión finita de segmentos de geodésica. Además, véase que ∂P es la unión de los lados y vértices de P . Esto dado que al considerar cualquier $w \in \partial P$,

$$w \in \overline{P} \cap g(\overline{P}) \text{ o } w \in \overline{P} \cap g_1(\overline{P}) \cap \dots \cap g_n(\overline{P}),$$

para alguna $n \in \mathbb{N}$. En el caso en el que $w \in \tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ y $w \notin h(\tilde{P})$ para cualquier otra $h \in G \setminus \{Id\}$, $h \neq g$, existen uno o dos segmentos de geodésica (como en la Figura 2.1), que contienen a w y éste está contenido en $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ por lo que w se encuentra en uno o dos lados de P . Nótese que $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ puede ser una colección de segmentos de geodésicas.

Un vértice es la intersección de exactamente dos lados de \tilde{P} de la forma $\tilde{P} \cap h(\tilde{P})$ y $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$, $h \neq g$, y es el extremo de cada uno de estos lados.

Definición 5. Sean L y L' lados de \tilde{P} polígono fundamental finito,

$$L \subset \tilde{P} \cap g(\tilde{P}), L' \subset \tilde{P} \cap g^{-1}(\tilde{P}),$$

tales que $g(L') = L$, se dice entonces que g apareaa L' con L . También g^{-1} apareaa L con L' (véase Figura 2.2). A g y a g^{-1} se les llama apareamientos.

Enunciado de otra manera un apareamiento es una biyección entre el conjunto de lados de \tilde{P} .

En algunos casos cuando el apareamiento es de orden 2 y el punto fijo está en el interior de un segmento de geodésica, se puede considerar a este segmento como un solo lado o convenir que son dos lados en la misma geodésica como en el caso modular en el que $[-\bar{\rho}, i]$ va a $[i, \rho]$.

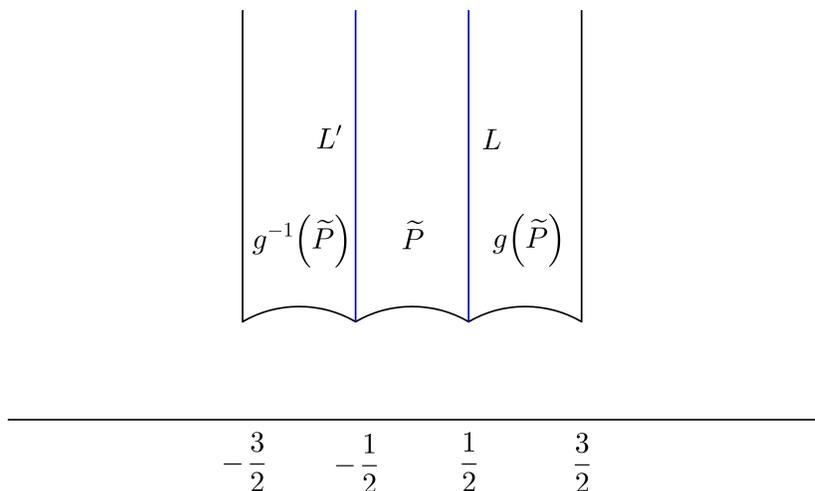


Figura 2.2: La función $g(z) = z + 1$ aparea el lado L' con el lado L , y la función g^{-1} aparea L con el lado L'

2.2. Polígonos fundamentales de subgrupos fuchsianos

Recordamos que dado un subgrupo K de un grupo abstracto G , la relación $x \sim y$, $x, y \in G$ tal que $xy^{-1} \in K$ es de equivalencia y la partición inducida son las clases laterales derechas, es decir,

$$G = \bigcup_{i \in I} Kg_i,$$

donde I es un conjunto de índices.

Durante esta sección consideraremos un grupo abstracto G con generadores g_1, \dots, g_n y K un subgrupo de índice finito de G . Sea $\{s_j\}_{j=1}^m$ un sistema completo de representantes de las clases laterales derechas de K en G , donde cada palabra s_j en los generadores g_1, \dots, g_n está escrita en una forma reducida. Un conjunto completo de representantes $\{s_j\}_{j=1}^m$ es llamado *sistema Schreier*, si el segmento inicial de cada palabra s_j es un representante también. Si se tiene un sistema de representantes para K como subgrupo de G y w es una palabra en G , la asignación $w \rightarrow \bar{w}$, donde \bar{w} denota al representante de la clase lateral derecha de w , es llamada *función representativa de clases laterales derechas*. Es claro que $\bar{w} = 1$ si y sólo si $w \in K$, también

$\bar{w} = \bar{v}$ si y sólo si w y v están en la misma clase lateral derecha.

Se afirma que

$$\overline{wv} = \overline{\bar{w}v}. \quad (2.1)$$

Para probar esto es suficiente mostrar que la clases laterales derechas $K(wv)$ y $K(\bar{w}v)$ son la misma. Nótese primero que

$$(wv)(\bar{w}v)^{-1} = w\bar{w}^{-1}.$$

Además, dado que $w \in K\bar{w}$ porque \bar{w} es el representante de la clase lateral derecha de w , se tiene que $w = k\bar{w}$ para alguna $k \in K$, por lo tanto

$$w\bar{w}^{-1} = k \in K,$$

es decir, las clases laterales derechas $K(wv)$ y $K(\bar{w}v)$ resultan ser la misma.

Usaremos el siguiente resultado, una prueba aparece en [8], p. 93.

Teorema 2.2.1. Sea G un grupo y K un subgrupo propio de índice finito de G , entonces existe un sistema Schreier de representantes para K .

Demostración. Se construye el sistema Schreier de representantes para K de la siguiente manera. Se puede elegir un representante para la clase lateral derecha K que sea la palabra vacía 1.

Como el subgrupo K es propio, existe un generador g_1 de G tal que $g_1 \notin K$. Se denota por K_1 a la clase lateral derecha de g_1 y elegimos este elemento como representante de ella. Si el índice es 2 entonces la prueba está terminada.

Supóngase que el índice es mayor que 2. Se afirma que existe un generador $g_2 \neq g_1^{-1}$, tal que $g_1g_2 \notin K \cup K_1$. Si $g_1g_2 \in K \cup K_1$ para todos los generadores g_2 , entonces se tiene que todas las palabras de longitud 3 están en $K \cup K_1$. Esto se sigue ya que usando (2.1),

$$\overline{g_1g_2g_3} = \overline{\overline{g_1g_2}g_3} = \overline{gg_3},$$

donde $g = g_1$ ó $g = 1$, y $g_3 \in G$. Sucede también que todas las palabras de longitud 4 están en $K \cup K_1$ ya que

$$\overline{g_1g_2g_3g_4} = \overline{\overline{g_1g_2g_3}g_4} = \overline{gg_4},$$

donde $g = g_1$ ó $g = 1$, y $g_3, g_4 \in G$. Se sigue por inducción que $K \cup K_1$ tiene a todas las palabras de cualquier longitud y por ende $K \cup K_1 = G$, lo cual

contradice que el índice de K sea mayor que 2. Si el índice es 3 la prueba ha concluido.

Si ahora el índice es mayor que 3 se denota con K_2 a la clase lateral derecha de g_1g_2 y afirmamos que existe un generador $g_3 \neq (g_1g_2)^{-1}$, tal que $g_1g_2g_3 \notin K \cup K_1 \cup K_2$. Si $g_1g_2g_3 \in K \cup K_1 \cup K_2$ para todos los generadores g_3 , entonces se tiene que todas las palabras de longitud 4 están en $K \cup K_1 \cup K_2$ ya que

$$\overline{g_1g_2g_3g_4} = \overline{g_1g_2g_3g_4} = \overline{gg_4},$$

donde $g = g_1$, $g = g_1g_2$ ó $g = 1$, $g_4 \in G$. Al igual que en el caso anterior se sigue que por inducción $K \cup K_1 \cup K_2$ contiene a todas las palabras de cualquier longitud y entonces el índice de K es 3 llegando nuevamente a una contradicción. Si el índice es 4 la prueba concluye y si no podemos realizar este procedimiento inductivamente obteniendo el sistema de Schreier de representantes para K deseado. \square

Teorema 2.2.2. Sea G un grupo fuchsiano y P un polígono fundamental convexo para la acción de G . Supóngase también que K es un subgrupo de índice finito de G . Entonces existe un sistema Schreier de representantes de clases laterales derechas en G para K , el cual está generado por los apareamientos de P , es decir, si el sistema Schreier es

$$f_1, f_2, \dots, f_m,$$

entonces las funciones f_i son de la forma $g_1, g_1g_2, g_1g_2g_3$, etc., donde las g_i son apareamientos de P . Más aún, si

$$F = \bigcup_{i=1}^m f_i(\tilde{P}),$$

se tiene que $D = (F)^\circ$ es un dominio fundamental para K .

Demostración. Dado que los apareamientos de un polígono fundamental convexo generan al grupo (cf. [1], pp. 220-221), se sigue del Teorema 2.2.1 y su prueba que existe un sistema Schreier determinado por los apareamientos.

Ahora, dado $z \in \mathbb{H}^2$, existe $g \in G$ y $w \in \tilde{P}$ tal que $g(w) = z$. También g es de la forma hf_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, donde $h \in K$. Entonces, $h(f_i(w)) = z$, y $z \sim f_i(w)$ en el subgrupo K . Como $f_i(w) \in \tilde{D}$, todas las órbitas están representadas en \tilde{D} . Nótese que algunos puntos que no son puntos interiores

de \tilde{P} se convierten en puntos interiores de D , por ejemplo los puntos en el interior del lado compartido por \tilde{P} y $f_1(\tilde{P})$.

Se prueba ahora que cualesquiera dos puntos $w, z \in D$ no son K -equivalentes. Supóngase que existe $\varphi \in K$ tal que $\varphi(z) = w$, dado que P es localmente finito, dada una vecindad compacta N de z , por ejemplo

$$\tilde{B}_\varepsilon(z) = \{u \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, u) \leq \varepsilon\},$$

N interseca un número finito de imágenes de P , determinadas por

$$f_{i_1}, \dots, f_{i_t} \in G.$$

Se asume también que sus cerraduras contienen a z y que cada una de las transformaciones es un miembro de la colección $\{f_1, \dots, f_m\}$. Esto se puede lograr dado que z está en el interior de

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(\tilde{P}),$$

de modo que una vecindad suficientemente pequeña interseca sólo imágenes de \tilde{P} de la forma $f_i(\tilde{P})$.

La misma configuración surge para una pequeña vecindad de w , que puede ser tomada como $\varphi(N)$. Las imágenes de P que intersecan a la vecindad $\varphi(N)$ son $f_{j_1}(\tilde{P}), \dots, f_{j_t}(\tilde{P})$, donde al igual que antes se puede asumir que las transformaciones forman parte de la colección $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Ahora, para algunas k y l , $1 \leq k \leq l \leq m$, se tiene que

$$\varphi(f_k(\tilde{P})) = f_l(\tilde{P}).$$

Esto se sigue de que la preimagen bajo φ de cualquier polígono alrededor de w que interseca a $\varphi(N)$, digamos $f_l(\tilde{P})$, resulta ser un polígono alrededor de z que interseca a N , digamos $f_k(\tilde{P})$, de modo que $\varphi f_k = f_l$ por lo que $\varphi = f_l f_k^{-1}$. Dado que f_1, \dots, f_m es un sistema de representantes de clases laterales derechas y $\varphi \in K$, se sigue que $l = k$ y por lo tanto $\varphi = Id$. \square

Usaremos el Teorema de Poincaré para grupos fuchsianos. Este teorema establece que si se tiene un polígono hiperbólico convexo en el semiplano

superior de tal manera que existen transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ que aparean los lados del polígono y los ángulos interiores de los círculos (o clases de equivalencia) de los vértices determinados por los apareamientos forman un ángulo de 2π o $2\pi/k$, $k = 2, 3, \dots$, y se supone también que los vértices al infinito son puntos fijos parabólicos; se concluye que el grupo generado por los apareamientos es fuchsiano y que el polígono es una región fundamental para ese grupo. Un enunciado preciso y una prueba detallada aparece en la parte final del capítulo 9 del libro de Beardon sobre la geometría de los grupos discretos (cf. [1]).

La siguiente figura ilustra la construcción de un polígono fundamental para un subgrupo de índice finito de un grupo fuchsiano, a partir de la región fundamental del grupo.

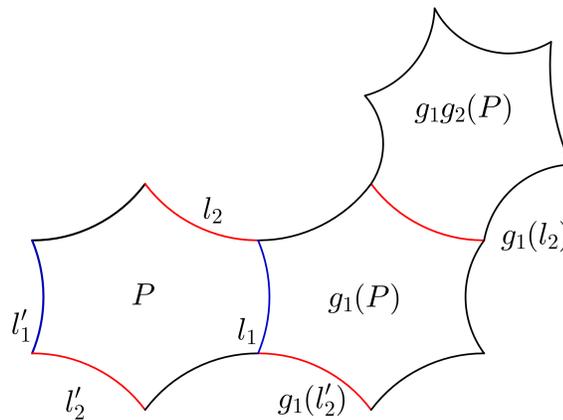


Figura 2.3: P está unido con $g_1(P)$ a lo largo de un lado l_1 , entonces $g_1(P)$ está unido con $g_1g_2(P)$ a lo largo de $g_1(l_2)$. g_i aparear l_i con l'_i , $i = 1, 2$.

CAPÍTULO 3

El grupo modular y el modular extendido

En adelante trabajaremos principalmente con el modelo del semiplano superior \mathbb{H}^2 .

3.1. Generalidades

El grupo de matrices

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\},$$

se asocia de manera natural al grupo clásico modular, es decir, las transformaciones de la forma

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Este grupo se denota en la literatura como $PSL(2, \mathbb{Z})$, en esta tesis lo denotaremos por Γ .

Resulta que una región fundamental para este grupo es el triángulo hiperbólico abierto \mathcal{D} (véase la Figura 3.1), el cual está determinado por los vértices $\rho = e^{\frac{i\pi}{3}}$, $-\bar{\rho}$ e ∞ (cf. [4] Capítulo 4, p. 163). Por lo que se sigue que Γ es el grupo generado por

$$S(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad T(z) = z + 1,$$

(cf. [1] Capítulo 9, p. 229).

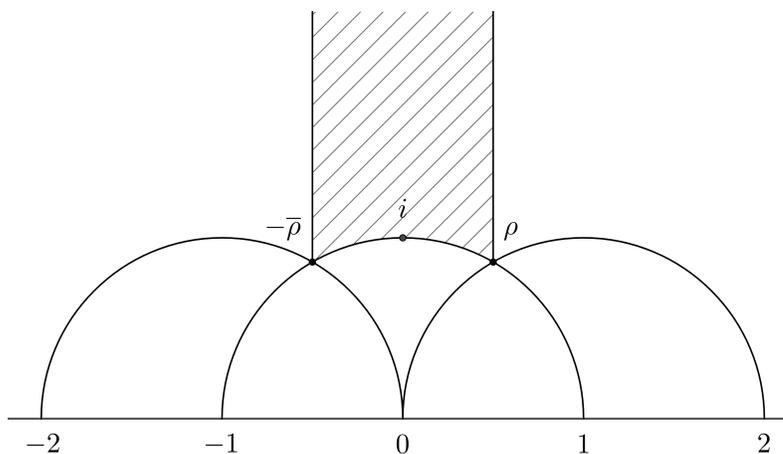
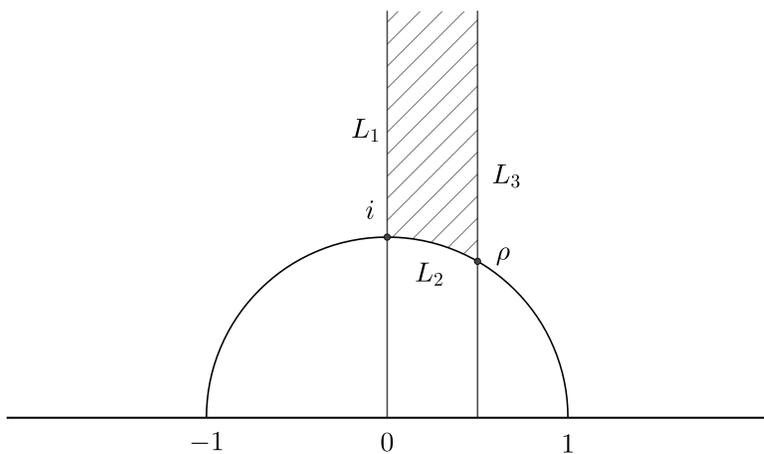


Figura 3.1: Dominio fundamental para el grupo clásico modular

Definición 6. El grupo generado por las transformaciones

$$T(z) = z + 1, \quad S(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad R(z) = -\bar{z}$$

es el grupo modular extendido y lo denotamos por Γ^* .

Figura 3.2: Triángulo hiperbólico abierto \mathcal{D}^*

A partir de la definición anterior es evidente que Γ es un subgrupo de Γ^* y éste a su vez es un subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, ya que Γ^* es generado por las

reflexiones en los lados del triángulo hiperbólico abierto \mathcal{D}^* con vértices i , ρ e ∞ .

Para probar la última afirmación se nombra L_1 al eje imaginario, L_2 a $\partial\Delta$ y L_3 a la h -recta que pasa por ρ e ∞ (véase la Figura 3.2). Ahora notemos que si σ_i es la reflexión en L_i , $i = 1, 2, 3$, entonces $T = \sigma_3\sigma_1$, $S = \sigma_1\sigma_2$ y $R = \sigma_1$.

Definición 7. Se define al subgrupo $SL^*(2, \mathbb{Z}) \subset GL(2, \mathbb{Z})$ como

$$SL^*(2, \mathbb{Z}) = \{A \in GL(2, \mathbb{Z}) \mid |\det(A)| = 1\},$$

y a $PSL^*(2, \mathbb{Z})$ como el grupo cociente de $SL^*(2, \mathbb{Z})$ sobre su centro.

Es sencillo ver que el centro de $SL^*(2, \mathbb{Z})$ es $\langle -Id \rangle$, donde Id es la matriz identidad. Esto se sigue ya que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |ad - bc| = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

está en el centro de $SL^*(2, \mathbb{Z})$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in SL^*(2, \mathbb{Z})$, en particular,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL^*(2, \mathbb{Z}),$$

por lo que se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y así

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix},$$

de donde $c = 0$ y $a = d$. Por otro lado, también

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL^*(2, \mathbb{Z}),$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y así

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix},$$

de donde se llega a que $b = 0$. Además, como $|ad - bc| = 1$ se sigue que $|ad| = 1$ por lo que $a = d = 1$ o $a = d = -1$ y por lo tanto

$$A = \pm Id.$$

Definición 8. Dada una matriz $A \in SL^*(2, \mathbb{Z})$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |ad - bc| = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

se define $\varphi: SL^*(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma^*$ como sigue:

$$\varphi(A) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{si } ad - bc = 1, \\ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, & \text{si } ad - bc = -1. \end{cases}$$

Nótese que φ está bien definida puesto que

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc = -1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

es una transformación en Γ^* . Para probar esto, véase que si

$$g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc = -1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$(g \circ R)(z) = \frac{a\overline{(-\bar{z})} + b}{c\overline{(-\bar{z})} + d} = \frac{(-a)z + b}{(-c)z + d},$$

donde $(-a)d - b(-c) = 1$, de modo que $g \circ R \in \Gamma$, así que si $h = g \circ R$ se sigue que $g = h \circ R$ y por lo tanto $g \in \Gamma^*$.

Proposición 3.1.1. $\Gamma^* \cong PSL^*(2, \mathbb{Z})$.

Demostración. Si $\varphi: SL^*(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma^*$ representa a la asociación que se dio previamente entre ambos grupos, entonces φ es un morfismo de grupos. Es bien sabido que el producto de matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ corresponde a la composición de transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ (cf. [4] p. 9), esto prueba el caso en el que ambas matrices de $SL^*(2, \mathbb{Z})$ tienen determinante 1, más aún, los otros dos casos se reducen a éste ya que la conjugación compleja afecta únicamente a la variable de la transformación, dado que los coeficientes son números enteros cuyos conjugados son ellos mismos. Por ejemplo, si $A_1, A_2 \in SL^*(2, \mathbb{Z})$ están dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 = -1, \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{Z}$$

y

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1, \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}.$$

Mientras que la composición de las transformaciones a las cuales se asocian A_2 y A_1 resulta ser

$$\frac{a_1 \overline{\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right)} + b_1}{c_1 \overline{\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right)} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) \bar{z} + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) \bar{z} + c_1 b_2 + d_1 d_2},$$

la cual claramente es la transformación a la que representa el producto de las matrices A_1 y A_2 .

También puede verse que φ es suprayectiva, esto se sigue ya que si se toma $f \in \Gamma^* \setminus \Gamma$, entonces

$$f = g_1 R g_2 R \dots g_n, \quad f = g_1 R g_2 R \dots g_n R,$$

$$f = R g_1 R g_2 R \dots g_n \quad \text{o} \quad f = R g_1 R g_2 R \dots g_n R,$$

donde $g_i \in \Gamma$, con $i = 1, \dots, n$. En el primer caso $\varphi(C_1 B \dots C_n) = f$, donde $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_i \in SL(2, \mathbb{Z})$ y $\varphi(C_i) = g_i$ para todo i , los demás casos son análogos.

Finalmente, si $\varphi(D) = Id$,

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad |\alpha\delta - \beta\gamma| = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z},$$

evaluando $\varphi(D)$ en 0 e ∞ , se tiene $\beta = \gamma = 0$, por lo que $\alpha\delta = \pm 1$, y el núcleo de φ es $\pm Id$. Aplicando el primer teorema de isomorfismo existe un isomorfismo

$$\psi: PSL^*(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma^*,$$

ya que φ es suprayectiva y por lo tanto $\Gamma^* \cong PSL^*(2, \mathbb{Z})$. □

Corolario 3.1.2. Γ tiene índice 2 en Γ^* .

Demostración. Se tiene que $\Gamma^* = \Gamma \cup R\Gamma$. Esto se sigue ya que si $g \in \Gamma^* \setminus \Gamma$, g es la imagen de una matriz en $SL^*(2, \mathbb{Z}) \setminus SL(2, \mathbb{Z})$, por lo cual $R \circ g$ es la imagen de una matriz en $SL(2, \mathbb{Z})$, es decir, está en Γ . □

Se considera la teselación de \mathbb{H}^2 definida por \mathcal{D} (véase la Figura 3.1), la cual consta de la cerradura de dicho dominio fundamental para el grupo clásico modular y sus Γ -trasladados. Se denota a dicha teselación por \mathcal{T} (véase Figura 3.3 donde cada tesela es un triángulo hiperbólico formado por dos triángulos hiperbólicos, uno blanco y uno negro).

Teniendo en cuenta que Γ es un subgrupo de Γ^* de índice 2 y que la unión de la cerradura de \mathcal{D}^* con su imagen bajo $z \rightarrow -\bar{z}$ es precisamente la cerradura de \mathcal{D} , se concluye que la cerradura de \mathcal{D}^* también tesela \mathbb{H}^2 con sus Γ^* -trasladados. A esta teselación la denotamos por \mathcal{T}^* y la llamamos teselación modular extendida (véase Figura 3.3 donde cada triángulo hiperbólico es una tesela).

Definición 9. *En relación a la teselación modular extendida usaremos las siguientes convenciones.*

- (1) *Los elementos de la Γ^* -órbita de i son llamados vértices pares, los de la Γ^* -órbita de ρ son los vértices impares mientras que los elementos de la Γ^* -órbita de ∞ serán llamados cúspides.*
- (2) *Los elementos de la Γ^* -órbita del lado $[i, \infty]$ serán llamados lados pares, los de la Γ^* -órbita del lado $[\rho, \infty]$ lados impares y los de la Γ^* -órbita del lado $[i, \rho]$ serán los f-lados.*

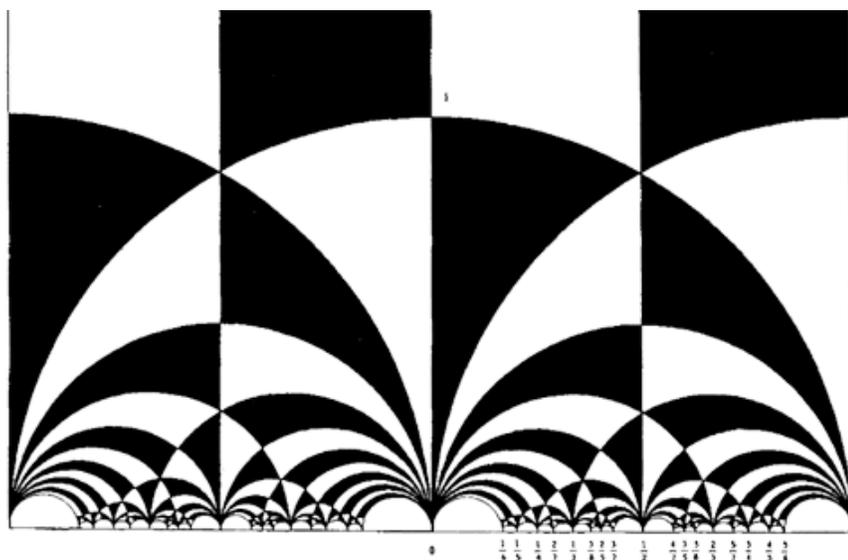


Figura 3.3: Teselación modular de \mathbb{H}^2 .

Nótese que las cúspides de \mathcal{T}^* se encuentran en la frontera de \mathbb{H}^2 (la cual es $\mathbb{R} \cup \infty$) y, salvo ∞ , éstas son los números racionales, pues dado $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$, $(a, c) = 1$, existen $b, d \in \mathbb{Z}$ tales que $ad - bc = 1$ y por lo tanto la transformación $g \in \Gamma$,

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

manda ∞ a $\frac{a}{c}$, además $Rg \in \Gamma^*$ manda ∞ a $-\frac{a}{c}$.

Tanto los lados pares como los impares de \mathcal{T}^* tienen h -longitud infinita, pero los f -lados tienen h -longitud finita, de aquí que se llamen “ f -lados”. A continuación enunciaremos y probaremos algunas propiedades sobre la teselación \mathcal{T}^* .

En el siguiente resultado tomaremos como convención que el 0 se escribe a/c , donde $a = 0$ y $c = 1$, y ∞ se escribe b/d , donde $d = 0$ y $b = 1$.

Teorema 3.1.3.

- (i) Los lados pares vienen en pares, cada par forma una geodésica completa. Estas geodésicas son precisamente aquellas con extremos $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ que satisfacen $|ad - bc| = 1$. Cada una de estas geodésicas contiene

un vértice par. Γ actúa transitivamente en éstas geodésicas y el subgrupo estabilizador de Γ que preserva cualquiera de estas geodésicas es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y fija el vértice par.

- (ii) Un par de lados impares y un par de f -lados forman una geodésica completa. Las geodésicas obtenidas en esta manera son precisamente aquellas con extremos $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ que satisfacen $|ad - bc| = 2$. Cada una de estas geodésicas contiene un vértice par y dos vértices impares. Nuevamente Γ actúa transitivamente en estas geodésicas y el subgrupo estabilizador de Γ que preserva cualquiera de estas geodésicas es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y fija el vértice par.

- (iii) Si $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ son los extremos de una geodésica del tipo (ii), entonces

$$a \equiv b \pmod{2} \quad \text{y} \quad c \equiv d \pmod{2}.$$

Demostración. Claramente la imagen de $[i, \infty]$ bajo S es $[0, i]$ y ambos lados pares resultan en la geodésica completa $[0, \infty]$. Ahora, la transformación

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

manda $[0, \infty]$ a la geodésica determinada por $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ y esta cumple que

$$ad - bc = 1.$$

Además, es claro que esta geodésica tiene un vértice par, ya que $i \in [0, \infty]$ y así $g(i)$ pertenece a la geodésica determinada por $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$.

Viceversa, si ahora tomamos una geodésica con extremos $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, y estos cumplen

$$|ad - bc| = 1.$$

Si $ad - bc = 1$, entonces la transformación

$$g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}, \quad ad - bc = 1$$

lleva la geodésica determinada por $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ a $[0, \infty]$.

Si $ad - bc = -1$, escribiendo

$$h(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

su inversa seguida de R está en Γ y manda la geodésica determinada por $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ a $[0, \infty]$, probando así que Γ actúa transitivamente en estas geodésicas.

Por otro lado las transformaciones de Γ que fijan a $[0, \infty]$ son Id y S , además éstas fijan al vértice par de $[0, \infty]$. De modo que el subgrupo estabilizador de Γ que fija a cualquiera de las geodésicas antes mencionadas es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y fija al vértice par, ya que podemos conjugarlo al subgrupo estabilizador de Γ que fija a $[0, \infty]$.

Antes de probar (ii) observamos que si $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ son tales que $|ad - bc| = n$, entonces dada $g \in \Gamma^*$ tal que $g\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a'}{c'}$ y $g\left(\frac{b}{d}\right) = \frac{b'}{d'}$, tenemos que

$$|a'd' - b'c'| = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esto se sigue de que dados $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ tales que $|ad - bc| = n$, entonces

$$T\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a+c}{c} \quad \text{y} \quad T\left(\frac{b}{d}\right) = \frac{b+d}{d},$$

de donde $|(a+c)(d) - (b+d)(c)| = |ad - bc| = n$. Además las transformaciones S y R también cumplen esta propiedad ya que

$$S\left(\frac{a}{c}\right) = -\frac{c}{a}, \quad S\left(\frac{b}{d}\right) = -\frac{d}{b}, \quad R\left(\frac{a}{c}\right) = -\frac{a}{c} \quad \text{y} \quad R\left(\frac{b}{d}\right) = -\frac{b}{d}.$$

Por lo que al ser estas transformaciones generadoras del grupo Γ^* , cualquier transformación del grupo cumple la propiedad mencionada.

Ahora para probar (ii) los argumentos son similares a los usados en (i), pero usando la geodésica completa $[-1, 1]$, ésta contiene dos lados impares, dos f -lados, un vértice par y dos vértices impares, a saber i , ρ y $-\rho$, véase la Figura 3.1.

Se sigue de la observación anterior y de la conformalidad de las transformaciones de Γ^* que la imagen de $[-1, 1]$ respecto a cualquiera de ellas es una geodésica con extremos $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ que cumplen $|ad - bc| = 2$ dado que $|1 - (-1)| = 2$.

Viceversa, ahora tomamos una geodésica con extremos $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ que cumplen $|ad - bc| = 2$ y consideramos la transformación

$$f(z) = \frac{az + b'}{cz + d'} \quad ad' - b'c = 1,$$

entonces $f^{-1} \in \Gamma$ y

$$f^{-1}\left(\frac{b}{d}\right) = \frac{d'\left(\frac{b}{d}\right) - b'}{-c\left(\frac{b}{d}\right) + a} = \frac{d'b - b'd}{ad - bc} = \frac{d'b - b'd}{\pm 2},$$

ya que $|ad - bc| = 2$. También $f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$.

Nótese que la geodésica $[\frac{1}{2}, \infty]$ es la imagen bajo ST^{-1} de la geodésica $[-1, 1]$ (véase la Figura 3.4). Para terminar, podemos elegir una traslación por un entero adecuado para que f^{-1} seguida de dicha traslación resulte en una transformación que manda $\frac{a}{c}$ a ∞ y $\frac{b}{d}$ a $\frac{1}{2}$, probando así que Γ es transitivo en estas geodésicas.

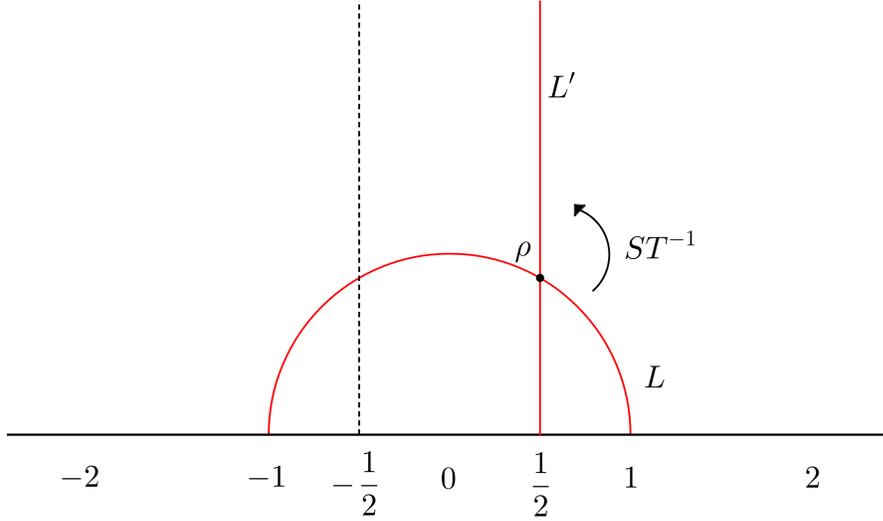


Figura 3.4: Si $L = [-1, 1]$ y $L' = [-1/2, \infty]$, entonces $ST^{-1}(L) = L'$, ya que ST^{-1} es la rotación en ρ de $\frac{2\pi}{3}$

Por otro lado las transformaciones de Γ que fijan a $[-1, 1]$ son $Id(z) = z$ y $S(z)$, esto se sigue ya que una transformación que fija a $[-1, 1]$ tiene que fijar a 1 y -1 o intercambiarlos. Tomamos una transformación

$$k(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z},$$

que fije a $[-1, 1]$.

Si k fija a 1 y -1 , entonces

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad \text{y} \quad -\alpha + \beta = \gamma - \delta,$$

de donde $\beta = \gamma$ y $\alpha = \delta$, luego $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, por lo que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, es decir, $k = Id$.

Si k intercambia a 1 y -1 , se tiene que

$$\alpha + \beta = -\gamma - \delta \quad \text{y} \quad -\alpha + \beta = -\gamma + \delta,$$

de modo que $\beta = -\gamma$ y $\alpha = -\delta$, entonces $-\alpha^2 + \beta^2 = 1$, y así $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, es decir, $k = S$.

Estas transformaciones también fijan al vértice par de $[-1, 1]$, de modo que el subgrupo estabilizador de Γ que fija a cualquiera de las geodésicas anteriores es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y éste fija el vértice en la geodésica a la que corresponde como subgrupo estabilizador.

Finalmente para probar el inciso (iii) veamos que tomando por convención $\infty = \frac{1}{0}$, entonces en la geodésica $[\frac{1}{2}, \frac{1}{0}]$ claramente

$$1 \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{y} \quad 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Probamos el caso general por inducción, si la geodésica determinada por a/c y b/d cumple que $a \equiv b \pmod{2}$ y $c \equiv d \pmod{2}$, hay que probar que sus imágenes bajo R, S y T lo cumplen. Como $R(a/c) = -a/c$ y $R(b/d) = -b/d$, se sigue este caso. También, como $S(a/c) = -c/a$ y $S(b/d) = -d/b$, se sigue fácilmente este otro caso. Finalmente, como $a/c + 1 = \frac{a+c}{c}$ y $b/d + 1 = \frac{b+d}{d}$, se obtiene el último caso.

□

Concluimos definiendo a las *líneas pares* como las geodésicas completas que son unión de dos lados pares y a las *líneas impares* como las geodésicas completas que son la unión de dos f -lados y dos lados impares.

CAPÍTULO 4

Polígonos de Kulkarni

En la siguiente definición nos referimos a polígonos determinados por la tesselación modular descrita en el capítulo anterior. Estos polígonos están formados por un número finito de segmentos de geodésica y se orientan de manera positiva, es decir, al recorrer la frontera, la región acotada queda en el interior.

Definición 10. *Un polígono especial es un polígono hiperbólico convexo P con un apareamiento de lados que invierte la orientación y que satisface las siguientes condiciones:*

- $S_1)$ *Los lados pares de ∂P aparecen en pares y cada par forma una línea par.*
- $S_2)$ *Los lados impares de ∂P aparecen en pares y cada par forma un ángulo interno de $\frac{2\pi}{3}$.*
- $S_3)$ *Un lado impar e es apareado con el lado impar f que forma un ángulo interno de $\frac{2\pi}{3}$ con e .*
- $S_4)$ *Sean e y f dos lados pares en ∂P que forman una línea par, entonces e es apareado con f o en caso contrario e y f forman un lado de P , que llamamos libre (es decir, una geodésica donde no hay vértices finitos del polígono) y dicho lado libre es apareado con otro lado libre de P .*
- $S_5)$ *0 e ∞ son dos vértices de P .*

Esta situación se describe en la figura 4.1. Los lados impares, los lados pares y los lados libres serán llamados lados de P .

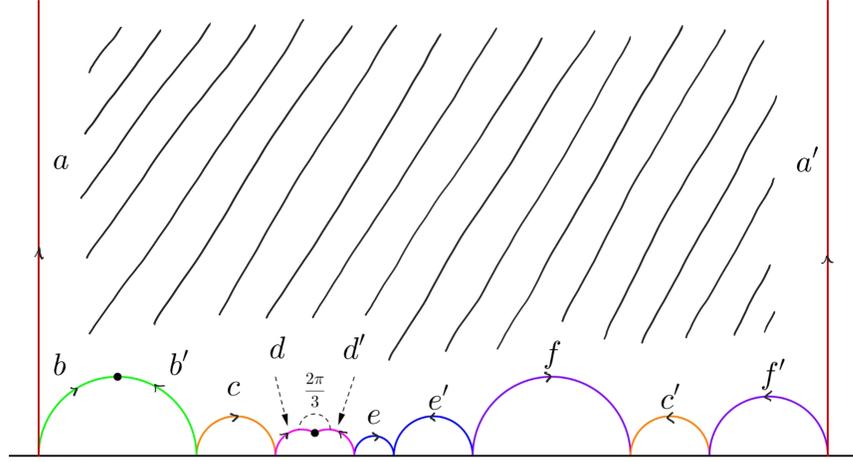


Figura 4.1: Ejemplo de polígono especial

Se sigue de lo anterior que si P es un polígono especial, entonces P no tiene f -lados en su frontera, de hecho, cada lado de P tiene una cúspide. Esta observación, aunada a que el polígono es convexo, implica que se cumple la condición S_2 , ya que de otra manera el ángulo comprendido sería de $4\pi/3$.

Además, si e y f son dos lados de P que son apareados, entonces el Teorema 3.1.3 nos dice que existe una única transformación en Γ que lleva el lado e al lado f , invirtiendo su orientación, ya que si $g, h \in \Gamma$ tienen esta cualidad, tenemos que $h^{-1}g$ es una transformación que preserva e y su orientación, de manera que esta transformación también preserva la geodésica completa que contiene a e y fija sus extremos, pero esta geodésica sólo puede ser una línea par o impar, es decir, de la forma descrita en (i) o (ii) en el Teorema 3.1.3, y por lo tanto, en virtud de ese teorema el estabilizador es \mathbb{Z}_2 . En consecuencia, $h^{-1}g = Id$ y $h = g$.

Como ejemplo de S_1 y S_4 , se tiene la línea par que une 0 con ∞ , en la cual se tiene con la convención ($\infty = 0/1$ y $0 = 0/1$) que $|ad - bc| = 1$, se toma i como un vértice de P si y sólo si se trata de S_1 , es decir, los dos lados pares que se encuentran en i se aparean. Como ejemplo del caso S_2 se tiene la unión de los lados impares que unen ρ con ∞ y ρ con 0 , en este caso ρ siempre va a ser un vértice de P . Nótese también que los vértices-cúspide en estos lados impares también satisfacen $|ad - bc| = 1$, esto es claro en el caso descrito, el caso general se sigue de la prueba del Teorema 3.1.3. En consecuencia, ignorando los vértices de P finitos, se tiene que dos vértices-

cúspide consecutivos de P siempre cumplen la propiedad $|ad - bc| = 1$.

Dado un polígono especial P y e, f dos lados de P que son apareados, a la transformación de Γ que lleva e a f invirtiendo su orientación le llamaremos *transformación de apareamiento de lados de P* (o simplemente *apareamiento*). Al subgrupo de Γ generado por las transformaciones de apareamiento de lados de P lo denotaremos por Φ_P .

4.1. Dominios fundamentales admisibles

En general si se tiene un polígono fundamental convexo para un grupo fuchsiano G , existe un apareamiento de lados, más aún estos apareamientos generan a G (cf. [1], pp. 217-221).

Sea Φ un subgrupo de índice finito de Γ . Trabajaremos con polígonos fundamentales para Φ que están formados por un número finito de teselas de la teselación modular extendida \mathcal{T}^* , de tal manera que se aplican en parejas, para que sean teselas que son imágenes de la tesela $0, \rho, \infty$. Estos polígonos existen, ya que en general se puede formar una región fundamental para un subgrupo de índice finito de un grupo fuchsiano G a partir de una región fundamental para G tomando tantas copias de ésta como el índice del subgrupo mediante un sistema Schreier, como se probó en el capítulo 2, Teorema 2.2.2, véase también [3] o [6]).

En nuestro caso, para subgrupos de Γ , un dominio fundamental con estas características será llamado *admisibile* si sus transformaciones de apareamiento forman un conjunto independiente de generadores para Φ , es decir, si Φ es un producto libre de subgrupos cíclicos $\langle x \rangle$ donde x es una de estas transformaciones de apareamiento.

Teorema 4.1.1. Sea P un polígono especial, y Φ_P el subgrupo de Γ generado por los apareamientos de P . Entonces, P es un dominio fundamental admisibile para Φ_P . Más aún, Φ_P es libre si y sólo si P tiene únicamente lados libres.

Demostración. Se sigue del teorema de Poincaré que P es una región fundamental para Φ_P . Esto en virtud de que los únicos vértices finitos son de orden 2 y 3, los ciclos correspondientes tienen longitud 1 y los ángulos internos son π y $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente. Más aún, la presentación de Φ_P que resulta de la segunda parte del teorema de Poincaré (cf. [6] pp. 230-235) corresponde también a un grupo que es un producto libre de subgrupos cíclicos, por lo

que P es admisible para Φ_P . Finalmente si P tiene únicamente lados libres, entonces no hay ciclos de vértices elípticos y se sigue que el grupo es libre, es decir sin torsión. \square

Una vez probado que un polígono especial es admisible para el subgrupo de Γ definido por sus apareamientos, lo siguiente a probar es que dado cualquier subgrupo de Γ con índice finito tiene un dominio fundamental admisible asociado que también será un polígono especial, lo cual es el resultado principal de la tesis. Ahora probamos un lema que será necesario para este propósito.

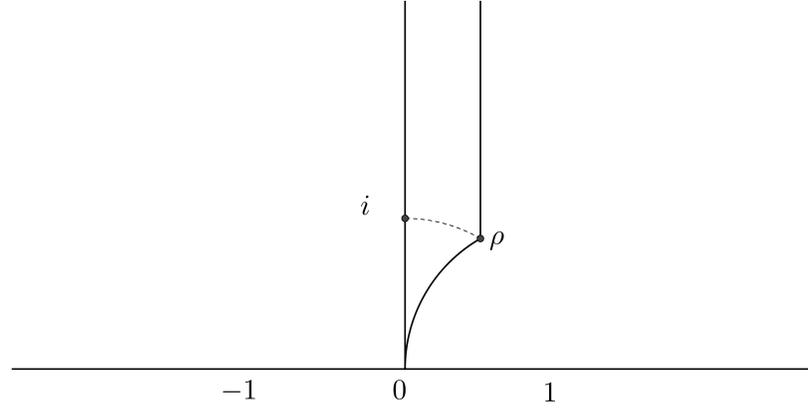


Figura 4.2: Redefinición de la tesela \mathcal{D}

Lema 4.1.2. Sean Φ_1, Φ_2 subgrupos de índice finito de Γ . Si Φ_1 y Φ_2 definen las mismas órbitas, entonces son iguales.

Demostración. Obsérvese que cualquier transformación modular g manda \mathcal{D}^* , es decir, la tesela abierta i, ρ, ∞ , en el interior de la tesela determinada por $g(i), g(\rho)$ y $g(\infty)$. Ahora tomemos $g_1 \in \Phi_1$ y un punto $u \in \mathcal{D}^*$. Como Φ_1 y Φ_2 definen las mismas órbitas, entonces existe una transformación $g_2 \in \Phi_2$ tal que $g_1(u) = g_2(u) \in \mathcal{D}^*$. Por lo cual $g_2^{-1}g_1(\mathcal{D}^*) = \mathcal{D}^*$, ya que como la función fija a u , que está en el interior, necesariamente debe fijar a la tesela que lo contiene, ya que evidentemente las transformaciones modulares mandan teselas en teselas. Por lo tanto $g_2^{-1}g_1$ fija a i, ρ e ∞ por lo que $g_2^{-1}g_1 = Id$,

es decir, $g_1 = g_2$. En consecuencia, $g_1 \in \Phi_2$ y así $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$. Análogamente $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ y $\Phi_1 = \Phi_2$. \square

Para el resultado principal renombramos \mathcal{D} , antes la tesela estándar de la teselación modular \mathcal{T} , por otra más conveniente al no incluir f -lados, la generada por los vértices $0, \rho$ e ∞ , que consiste de dos lados impares y una línea par. Véase la figura 4.2. Con esta nueva notación, convenimos que \mathcal{D}^* es el triángulo generado por i, ρ e ∞ .

Teorema 4.1.3. Todo subgrupo Φ de índice finito en Γ admite un dominio fundamental admisible que es un polígono especial P de modo que $\Phi = \Phi_P$.

Demostración. Haremos esta prueba por construcción.

Primero consideremos un subgrupo Φ de índice k en Γ y sea Q un polígono fundamental para Φ construido con teselas de la teselación generada por \mathcal{D} . Se puede probar que dicho polígono existe y que consta exactamente de k teselas de la teselación generada por \mathcal{D} , más aún, este polígono puede ser obtenido mediante un sistema de representantes de Schreier, como se probó en el Teorema 2.2.2. Este método asegura que el conjunto fundamental obtenido es un polígono conexo, aunque no necesariamente convexo.

Nótese que se puede colorear cada una de las teselas que generan el polígono fundamental Q con colores distintos y esto genera una coloración en \mathbb{H}^2 , donde dos teselas contiguas tienen distintos colores salvo las que tienen puntos fijos de orden 2 o 3 de alguna transformación en Φ , que tienen el mismo color alrededor del vértice que es punto fijo. Evidentemente para puntos fijos distintos, en distintas clases de equivalencia, se tienen distintos colores.

Para formalizar esta idea, se pueden numerar los colores, digamos que son k , y pensarlos como elementos en $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$. La coloración induce un *apareamiento* entre colores vecinos por lados y obtener un subconjunto F de $I_k \times I_k$, que define la colindancia de colores, digamos $(j, i) \in F$ si los colores j e i son vecinos por lados (o (i, j)). Diremos que si aparece (i, j) en F , entonces i y j son *apareados*, escribimos $i \sim j$, esta relación no es de equivalencia. Si j es color de una tesela de puntos fijos aparece (j, j) , de otra manera no. Una tesela que no es de puntos fijos colinda con exactamente 3 teselas de otros colores, es decir, si la tesela es de color j , entonces aparecen en F $(j, i_1), (j, i_2)$ y (j, i_3) , donde j es distinto de i_1, i_2 e i_3 . Sin embargo, dos de éstas i_k pueden ser del mismo color, véase por ejemplo la Figura 4.8.

Denotamos como S_Φ al espacio cociente \mathbb{H}^2/Φ , este resulta ser una superficie de Riemann (cf [1], pp 118 - 120). Se puede pensar así mismo como

una superficie de Riemann marcada cuando hay torsión (también llamado orbifolio). Los elementos de esta estructura corresponden a las órbitas de la acción del grupo Φ en \mathbb{H}^2 .

En general, no es cierto que en un polígono fundamental, aún si es convexo y finito, los lados se aparean (cf [1], pp 210 - 213). Sin embargo, en Q los lados sí se aparean, para probar esto tomamos una tesela, por ejemplo roja contenida en Q , que denotamos por R y que colinde con la frontera de Q en al menos un lado. Por lo que existe otra tesela, V_j digamos verde, tal que esta tesela no está en Q , pero $V_j \cap R$ contiene un lado s (por la construcción de Scherier). Ahora existe una tesela verde V_Q en Q y $\varphi \in \Phi$, tal que $\varphi(V_Q) = V_j$ y por lo tanto existe l segmento de frontera de V_Q , tal que $\varphi(l) \subset R$, es decir, l y $\varphi(l)$ se aparean. Por lo tanto existe un apareamiento entre los lados de Q . Un apareamiento puede aparear dos lados a la vez, véase por ejemplo la Figura 4.8.

Obsérvese que toda tesela en Q o en \mathbb{H}^2 tiene 2 cúspides en la frontera, sin embargo, una tesela puede no tener un lado en la frontera.

En consecuencia S_Φ se obtiene por medio de Q identificando los lados que son apareados. La coloración descrita anteriormente induce una coloración en \mathbb{H}^2/Φ donde cada tesela tiene un color distinto. Obsérvese que el cociente de cualquier tesela que incluya puntos fijos *se dobla*, es decir, por ejemplo, si ρ es un punto fijo y la tesela $0, \rho$ e ∞ aparece en Q , en el cociente se tienen dos *medias* teselas que están pegadas por el cociente de $[i, \rho]$ y el cociente de $[0, \rho]$ y $[\rho, \infty]$, algo análogo sucede para los puntos fijos de orden 2, diremos que la tesela *se dobla*, véase la Figura 4.3.

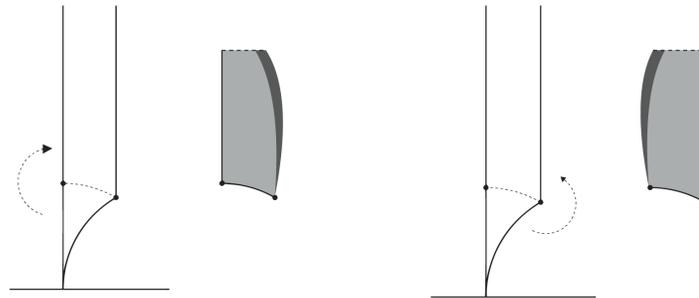


Figura 4.3: Las teselas con torsión dos y tres se *doblan* en el cociente

Si $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_{\Phi}$ es la proyección canónica, entonces \mathcal{T}^* induce una tesselación en S_{Φ} a la que llamaremos \mathcal{T}_{Φ}^* que es precisamente $p(\mathcal{T}^*)$, donde las p -imágenes de los lados pares serán llamadas nuevamente lados pares, las de los impares, lados impares y así respectivamente con los f -lados y los vértices pares e impares. Sin embargo, es preciso notar que hay dos tipos de vértices, tanto pares como impares, los vértices a los que llamaremos de *tipo 1* donde sólo incide un único f -lado y los vértices de *tipo 2* en los cuales incide más de un f -lado, dos en el caso de los pares y tres en los impares. Los vértices de tipo 1 corresponden a los puntos fijos de las transformaciones de Φ .

Sea \mathcal{E}_f la unión de los f -lados en \mathbb{H}^2 . Se afirma que \mathcal{E}_f es conexo. Para probarlo dado un punto $z \in \mathcal{E}_f$, tomemos la geodésica entre z e i , ésta sólo contiene una cantidad finita de vértices pares e impares, por lo que podemos modificarla en una trayectoria γ que evite estos puntos y sólo los rodee obteniendo así una trayectoria γ entre z e i que no contenga vértices pares e impares salvo i y tal vez z . Nótese que la trayectoria γ es una curva simple que cruza un número finito de teselas de \mathcal{T}^* , digamos T_1, \dots, T_k . Es claro que se puede recorrer de una tesela a la subsecuente por caminos en \mathcal{E}_f . Por ejemplo, si T_1 y T_2 comparten un f -lado, entonces nos movemos de z al vértice par o impar que pertenece tanto a T_2 como a T_3 . O si T_1 y T_2 se intersecan en un lado impar o par, nos podemos mover a lo largo de \mathcal{E}_f de z a un punto z_1 que está en el f -lado de T_2 . Inductivamente se sigue la afirmación.

Sea \mathcal{E}_f^* la unión de los f -lados en S_{Φ} que incluye a los vértices pares e impares. Nótese que \mathcal{E}_f^* es una gráfica cuyo conjunto de vértices consta de todos los vértices pares e impares de S_{Φ} y su conjunto de aristas es el de los f -lados de S_{Φ} . Dado que la unión de los f -lados en \mathbb{H}^2 es conexa y la proyección canónica restringida a dicho conjunto es continua y suprayectiva donde \mathcal{E}_f^* es la imagen, entonces \mathcal{E}_f^* es conexa.

Tomamos un árbol maximal T de \mathcal{E}_f^* , es decir, un subconjunto de la gráfica simplemente conexo (no tiene ciclos) que contiene todos los vértices. Nótese que los vértices de tipo 1, pares e impares, necesariamente son vértices terminales en T , es decir, vértices del árbol con valencia 1, donde la valencia se refiere a las aristas que inciden en él. Esto es claro, ya que al tratarse de puntos fijos, donde incidían dos o tres f -lados, en el cociente solamente incide un f -lado. Sin embargo, no todos los vértices terminales de T son vértices de tipo 1, puede haber vértices terminales que sean vértices de tipo 2, pero estos vértices terminales dependen de la elección de T .

Ahora elegimos un conjunto de lados de la siguiente manera:

1. Los lados pares incidentes en algún vértice terminal par de T .
2. Los lados impares incidentes en algún vértice terminal impar de T de tipo 1.

Al conjunto de estos lados le llamaremos A .

El siguiente paso es considerar al conjunto $S_{\mathbb{F}} - A$, obsérvese que este conjunto es una unión de imágenes de teselas de \mathcal{T}^* , sin embargo algunas de éstas, ya no contienen parte de su frontera que son precisamente los lados pares o impares de A . Trabajando tesela por tesela, podemos integrar la frontera mediante la proyección de la tesela correspondiente en \mathbb{H}^2 y tomar el espacio de identificación de la imagen de esa tesela en $S_{\mathbb{F}}$ con $S_{\mathbb{F}} - A$. De esta manera se obtiene una superficie con frontera que denotamos por P_A . En este proceso logramos, como se verá más adelante, *desdoblar* las imágenes de las teselas correspondientes a los puntos fijos, es decir, con este proceso estas teselas ya se verán completas. Nótese que cada lado en A contribuye con dos lados a la frontera de P_A , incluyendo los vértices finitos del lado, y cada par de estos lados es una componente de la frontera que puede ser la unión de dos lados pares o la unión de dos lados impares que comparten un vértice.

Usaremos el hecho de que que todos los f -lados en \mathbb{H}^2 se proyectan en un único f -lado en \mathbb{H}^2/Γ^* . Podemos contraer continuamente $\widetilde{\mathcal{D}}^*$, es decir, la tesela i, ρ, ∞ , al f -lado que contiene, es decir, el segmento de geodésica $[i, \rho]$ con la transformación,

$$H(z, t) = x + i \left(t \left(\frac{y}{|y|} \right) + (1 - t)y \right), \quad z \in \widetilde{\mathcal{D}}^*, z = x + iy, t \in [0, 1].$$

Probaremos que hay una contracción continua de \mathbb{H}^2 en la unión de sus f -lados, de tal manera que esta contracción resulte de realizar simultáneamente una contracción equivalente a H en cada tesela. Específicamente, si B es una tesela de \mathcal{T}^* , entonces $B = g(\mathcal{D}^*)$ para alguna $g \in \Gamma^*$, a partir de ello se define

$$\widehat{g}: \widetilde{\mathcal{D}}^* \times [0, 1] \rightarrow B \times [0, 1]$$

como $\widehat{g}(z, t) = (g(z), t)$. Se sigue que $\widehat{g}H\widehat{g}^{-1}$ es una contracción de B al f -lado que contiene. Además, si B y C son dos teselas contiguas, es decir, comparten un lado (par o impar), y están definidas por g_1 y g_2 respectivamente, entonces \widehat{g}_1 y \widehat{g}_2 coinciden en ese lado, puesto que las distancias entre cada punto de sus imágenes es la misma en ambos casos, dado que tanto g_1 y g_2 son

isometrías hiperbólicas ($g_1(i) = g_2(i)$ o $g_1(\rho) = g_2(\rho)$). Se sigue entonces que la transformación en \mathbb{H}^2 que resulta de realizar simultáneamente una contracción equivalente a H en cada tesela, a la que llamamos

$$\Psi: \mathbb{H}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2,$$

es una contracción continua de \mathbb{H}^2 en sus f -lados dado que

$$\Psi \upharpoonright \mathbb{H}^2 \times \{0\} = Id, \quad \Psi(\mathbb{H}^2, 1) = \mathcal{E}_f \text{ y } \Psi \upharpoonright \mathcal{E}_f \times \{t\} = Id, \quad t \in [0, 1].$$

A este retracto fuerte por deformación se le llama equivariante.

Afirmamos que P_A es conexo y simplemente conexo. Realizamos la prueba de nuestra afirmación en tres pasos.

Primero véase que si $\text{int } P_A$ es conexo y simplemente conexo, entonces también lo es P_A . Claramente si $\text{int } P_A$ es conexo entonces P_A es conexo. Resta ver que si $\text{int } P_A$ es simplemente conexo, también lo es P_A . Para ello se toma una curva cerrada y continua en P_A a la que llamamos C , como C es la imagen continua de un compacto, entonces es compacta, por lo que una componente de $C \cap \partial P_A$ es a lo más un arco compacto, que podemos suponer que es la unión finita de imágenes de las fronteras de teselas en la teselación extendida de \mathbb{H}^2 . Podemos homotopar la curva C a $\text{int } P_A$ de la siguiente manera: un primer caso es si una componente de $C \cap \partial P_A$ es la imagen de una curva C' en una tesela en \mathbb{H}^2 que está en el interior de la tesela salvo un segmento que une dos puntos, w_1 y w_2 , en la frontera de la tesela, tomando dos puntos z_1 y z_2 en la tesela suficientemente cercanos a w_1 y w_2 se puede homotopar C' a una curva completamente contenida en el interior, véase la Figura 4.4, ya que las teselas son simplemente conexas. Otro caso es que una componente de la curva $C \cap \partial P_A$ sea la imagen de la frontera de dos teselas contiguas como aparece en la 4.4, entonces tomando w_1 y w_2 suficientemente cercanos al vértice, w_1 en una tesela y w_2 en la otra, como aparece en la Figura 4.4, se puede homotopar a una curva que no toca el vértice y entonces se tiene la situación del primer caso (el caso en que C' toque en un sólo punto a un lado se resuelve fácilmente con esta técnica). Procediendo de esta manera es claro que la curva C es homotópica a una curva en el interior.

El segundo paso es reducir $\text{int } P_A$ a un conjunto aún más pequeño. Para ello considérese el conjunto V que consta de los vértices terminales de T en las cuales inciden las aristas de A y definimos el conjunto $U = \mathcal{E}_f^* - V$. Nuestra intención es probar que $\text{int } P_A$ se contrae continuamente a U . Esto

sucede por la contracción continua y Γ^* -equivariante Ψ descrita previamente. Componiendo esta contracción Ψ con la proyección p al cociente bajo Φ , vemos que S_Φ se contrae continuamente a \mathcal{E}_f^* . Así que si retiramos de S_Φ las aristas en A , lo que queda, se contrae a \mathcal{E}_f^* menos los puntos en donde las aristas de A se contraían, los cuales resultan ser precisamente los vértices en V . Por lo tanto $\text{int } P_A$ se contrae continuamente a U .

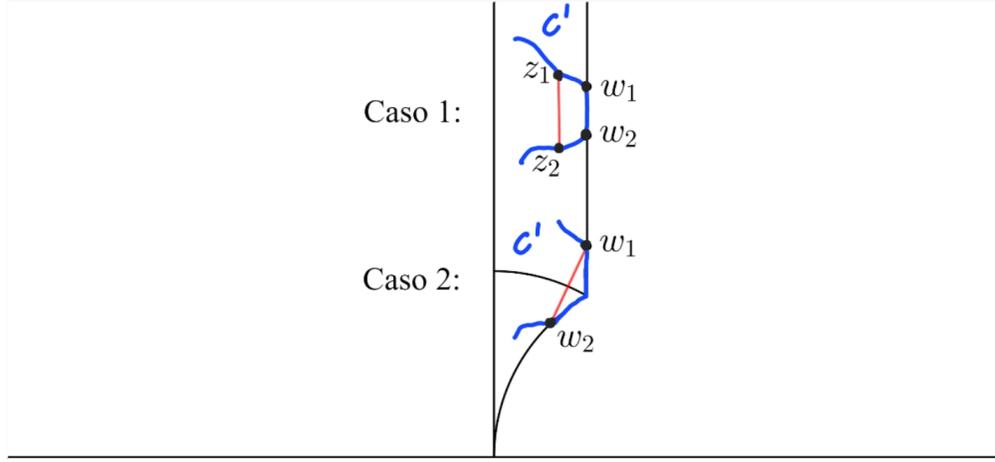


Figura 4.4: La curva C resulta ser la imagen de C' bajo la proyección p .

Finalmente, el tercer paso es contraer continuamente U a $T - V$. Para esto tomemos una arista $e \in \mathcal{E}_f^* - T$, esta arista conecta un vértice par, digamos v , que es necesariamente de tipo 2, con un vértice impar, digamos w , también de tipo 2. Dado que la valencia de v es 2 y e no está en T , se sigue que v es un vértice terminal de T , por lo que $v \in V$. En el caso de w , al ser de tipo 2 no hay aristas de A que incidan en él, por lo que $w \in T - V$. Así, e puede ser contraída continuamente hacia w cuando se retira v de \mathcal{E}_f^* . Procediendo de esta manera en todas las aristas que están en $\mathcal{E}_f^* - T$ se sigue que U se contrae a $T - V$.

Para concluir basta ver que como T es conexo y simplemente conexo por ser un árbol, entonces $T - V$ también lo es, ya que sólo le retiramos algunos vértices terminales. Por lo tanto, se pudo contraer continuamente $\text{int } P_A$ hasta $T - V$, tenemos que $\text{int } P_A$ (y también P_A) es conexo y simplemente conexo.

Continuando con la prueba del teorema, dado que P_A es simplemente conexo, puede ser desarrollado isométricamente sobre \mathbb{H}^2 , de hecho, una vez

desarrollada una tesela de P_A sobre una de \mathcal{T} , el resto de las teselas de P_A se desarrollan de manera única sobre las teselas de \mathcal{T} formando un polígono hiperbólico P . Explicaremos a detalle cómo desarrollar P_A sobre \mathbb{H}^2 .

Primero nótese que el polígono fundamental para Φ , que denotamos como Q , tiene k teselas de \mathcal{T} , entonces la teselación en S_Φ consta exactamente de k teselas, algunas de ellas *dobladas*, las que corresponden a puntos fijos. Por ejemplo, si tiene un punto fijo de orden 3 en Q al tomar el cociente, las tres teselas que lo circundan, una de éstas está en Q , se convierten en una sola que tiene dos partes, digamos 2 triángulos con una cúspide pegados por el f -lado y por el lado impar, véase la Figura 4.3. Algo similar sucede con los puntos fijos de orden 2. En este punto se entiende el por qué de la construcción de la superficie P_A , ya que de esta manera, al desdoblarse se tiene en P_A una tesela del tipo 0, ρ , ∞ , que tiene 1 o 2 lados en la frontera.

Como se mencionó antes la coloración inducida por Q induce una coloración en S_Φ y también en P_A , donde cada tesela tiene un color distinto. Nótese que si una tesela contiene un punto fijo del subgrupo, esta tesela colinda en dos de sus lados con teselas del mismo color si el punto fijo es de orden 3, y con una tesela del mismo color, si es de orden 2. De esta manera, estas teselas de torsión siempre colindan con una o dos teselas de distinto color.

Con lo anterior en mente, se elige la imagen en \mathbb{H}^2 de la tesela en P_A , que corresponde a 0, ρ e ∞ , digamos que es una tesela verde que podemos denotar por W_1 en P_A y por T_1 en \mathbb{H}^2 , es decir, T_1 es la tesela definida por 0, ρ e ∞ . En P_A , W_1 colinda con al menos otra tesela de un color distinto, digamos rojo, que denotamos por W_2 . Necesariamente T_1 colinda en \mathbb{H}^2 con una tesela roja que denotamos por T_2 , de esta manera se obtiene una segunda tesela en la construcción de P . Nótese que las teselas que corresponden a puntos fijos, los lados pares o impares que aparecen, automáticamente se convierten en parte de la frontera de P .

Habiendo instalado teselas T_1, T_2, \dots, T_n conforme a las colindancias de colores que se establecen en el conjunto F , descrito al principio de la prueba, alguna de las teselas restantes en P_A se conecta con alguna de las teselas T_i para alguna i y por inducción y por conexidad (no hay teselas aisladas en P_A) se sigue que P_A puede ser desarrollada (o aterrizada) en P . Si no se han agotado todas las teselas de P_A , siempre quedará una tesela de color distinto por agregar que colinda con lo ya construido.

Podemos denotar por W_1, W_2, \dots, W_n a las teselas en P_A correspondientes a las T_i en \mathbb{H}^2 . Se sigue entonces por inducción que $\bigcup_{i=1}^n W_i$ es homeomorfo a $\bigcup_{i=1}^n T_i$ y al anexar W_{n+1} y T_{n+1} , se conserva el homeomorfismo dado que

se tiene una biyección y hay un homeomorfismo local, independientemente de que T_{k+1} sea pegado con 1, 2 o 3 lados. En consecuencia P es conexo y simplemente conexo. Cada tesela en P_A tiene un color distinto color y aparecen todos los colores de Q , lo mismo sucede en P .

Nótese que P es convexo, ya que es la intersección de semiplanos en \mathbb{H}^2 generados por los lados de su frontera. Más específicamente, los lados pares y los lados libres dividen a \mathbb{H}^2 en dos semiplanos, uno de estos contiene a P . Los impares se comportan como en las Figuras 4.1 y 4.12, éstos forman en P un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ y cada uno de estos, divide a \mathbb{H}^2 en dos semiplanos, P está contenido en cada uno de estos.

Véase que el polígono es especial en el sentido de Kulkarni, ya que la frontera consiste de lados libres, lados pares que se intersecan en un punto fijo formando una geodésica completa y de lados impares que se intersecan en un punto fijo formando un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ como en la Figura 4.1, además incluye los vértices 0 e ∞ . En cuanto a los apareamientos hay que considerar tres casos, en adelante u denota a un vértice terminal de T .

Caso 1 (u es un vértice par de tipo 1). Hay un único f -lado incidente en u en S_Φ y por lo tanto un único lado par que incide en u en S_Φ , este lado par corresponde a dos lados pares en ∂P que forman una línea par y son apareados.

Caso 2 (u es un vértice par de tipo 2). Hay dos f -lados incidentes en u en S_Φ y por lo tanto dos lados pares que inciden en u en S_Φ , estos lados pares corresponden a dos líneas pares en ∂P que son dos lados libres y son apareados.

Caso 3 (u es un vértice impar de tipo 1). Hay un único f -lado incidente en u en S_Φ y por lo tanto un único lado impar que incide en u en S_Φ , este lado impar corresponde a dos lados impares en ∂P que forman un ángulo interno de $\frac{2\pi}{3}$ y son apareados.

También, los lados de P por construcción se aparean, denotamos por Ψ al grupo generado por los apareamientos. Las cúspides de P corresponden a puntos fijos parabólicos. Esto se sigue ya que forman ciclos finitos y los puntos fijos hiperbólicos nunca son vértices de las regiones fundamentales (cf. [1], pp. 224-225). Más aún, al obtener la palabra de los apareamientos que forman el ciclo, esta no puede ser la identidad (cf. [7], pp. 42-44). Además es claro que se cumplen las condiciones para vértices finitos del teorema de Poincaré, esto es, los ciclos de orden 3 tienen un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ y los de orden 2 tienen ángulo π por lo que P es una región fundamental para el grupo Ψ que por lo tanto es discreto.

Nótese que en el polígono Q , por las mismas razones que en P , las cúspides corresponden a puntos fijos parabólicos, ya que Q está formada por un número finito de teselas, imágenes de 0 , ρ e ∞ .

Además, los apareamientos en Q generan el grupo Φ , para probar esto se puede usar el mismo argumento que aparece en [1], pp. 220-221. Una prueba más simple aparece en [5], pp. 7-8.

Ahora, la tesela 0 , ρ e ∞ pertenece tanto a P como a Q por construcción, esta tesela se denotó por T_1 y era verde. Dicha tesela colinda con la tesela T_2 que es roja en P , como se mencionó. La tesela T_2 puede no pertenecer a Q . Sin embargo, sí hay una tesela roja en Q que podemos intercambiar con la tesela roja de P . Más precisamente, podemos denotar esta tesela roja en Q como R_Q y se construye otro polígono

$$Q_1 = (Q - R_Q) \cup T_2.$$

Nótese que necesariamente, R_Q colinda con una tesela verde en \mathbb{H}^2 , digamos V_2 y esta tesela V_2 no está en Q . R_Q tiene tres lados frontera, uno de estos es $R_Q \cap V_2$, el cual es frontera de Q pero no lo es de Q_1 , de hecho no aparece en Q_1 . En este proceso aparecen uno o dos lados en la frontera de Q_1 , determinados por el hueco hecho en Q para formar Q_1 .

Analizamos con más detalle este proceso dependiendo si las teselas rojas T_2 y R_Q son de torsión o no lo son. Observaremos que el caso en el que R_Q tenga un vértice de torsión 3 no puede suceder, ya que en este caso R_Q sus 3 lados serían frontera en Q , los dos lados que inciden en el punto fijo y $R_Q \cap V_2$. Si R_Q contiene un punto fijo de orden 2, entonces R_Q tiene un lado frontera que corresponde a dicho punto otro lado que colinda con la tesela verde V_2 y un tercer lado que colinda con otra tesela en el interior de Q , digamos una azul, en este caso se generan dos lados en la frontera que se aparean en Q_1 y la tesela azul en Q genera un lado frontera en Q_1 . En el tercer caso donde no hay torsión, R_Q colinda con una o dos teselas en el interior de Q , generando uno o dos lados en la frontera de Q_1 , respectivamente que se aparean.

En virtud del Lema 4.1.2, se tiene que el subgrupo modular que definen los apareamientos de Q_1 es Φ , dado que las órbitas que definen los apareamientos, tanto en Q como en Q_1 son las mismas: al quitar una tesela y pegarla en otra parte, las órbitas que definen los puntos interiores son las mismas y también en cuanto los lados se representan de la misma manera, se tapan algunos puntos que eran apareados y se destapan otros que ahora van a ser apareados y la transformación que manda la tesela roja de Q , que es R_Q , a la tesela roja de P , que es T_2 , está en el subgrupo Φ .

Ahora tenemos que las teselas T_1 y T_2 pertenecen tanto a P como a Q_1 . El siguiente paso es tomar la tesela T_3 en P que es de un color, digamos morado (en algunos casos podría ser azul como la que se mencionó previamente), la cual colinda con $T_1 \cup T_2$. Repetimos el mismo proceso que se hizo con Q y P , ahora con Q_1 y P . De esta manera se obtiene un polígono Q_2 cuyos apareamientos definen el subgrupo Φ y que incluye las teselas T_1, T_2 y T_3 . Dada la conexidad, mencionada antes, tanto en P_A , como en P y en Q , y las observaciones de la coloración que todos estos conjuntos contienen teselas de cada uno de estos distintos colores. Se puede iterar el proceso, dado que es un número finito de pasos. Finalmente, se obtiene que los subgrupos Φ y Ψ son los mismos, lo cual concluye la prueba del teorema. \square

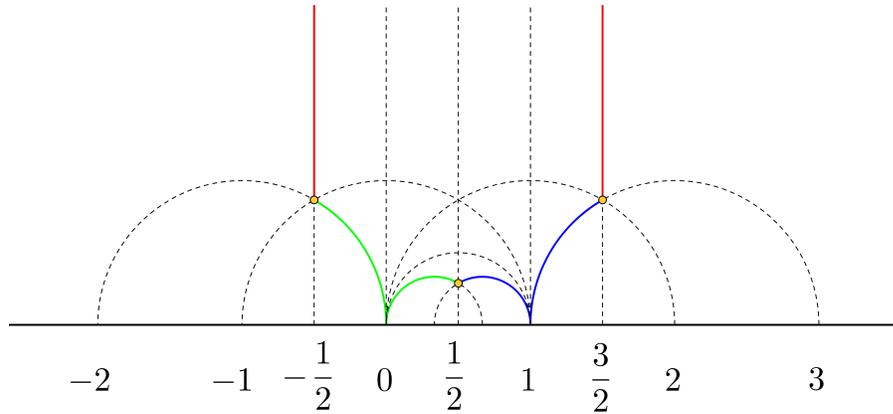


Figura 4.5: Polígono fundamental para $\Gamma(2)$ obtenido por el método Schreier

A continuación damos unos ejemplos para ilustrar mejor la prueba del Teorema 4.1.3. Consideramos primero el grupo principal de congruencias de nivel 2, esto es, el grupo de transformaciones definido por las matrices modulares

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad a, d \equiv 1 \pmod{2}, \quad b, c \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

La Figura 4.5 es un polígono fundamental para este grupo obtenido por el método Schreier, usaremos el hecho de que las líneas verdes en dicha Figura se aparean por la transformación ST^2S , cf. [3]. Nótese que aparece un ciclo

accidental, es decir, un ciclo de vértices finitos que no son puntos fijos. Lo medular del teorema de Kulkarni es construir regiones fundamentales que no contengan ciclos accidentales. En la notación de Teorema 4.1.3, éste sería el polígono Q .

Quitando la tesela $0, -\bar{\rho}$ e ∞ y pegándola a lo largo de la línea $[\rho + 1, \infty]$ se obtiene un polígono, que en el contexto de la prueba se llamaría Q_1 (véase Figura 4.6).

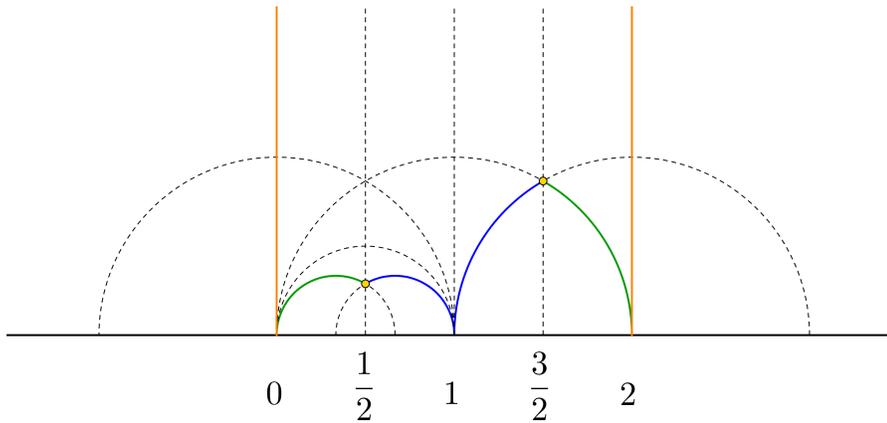


Figura 4.6: Polígono Q_1 para el grupo $\Gamma[2]$

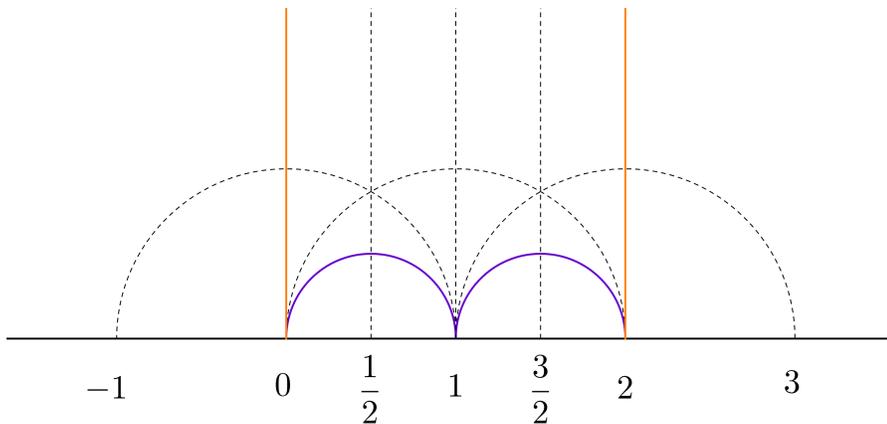


Figura 4.7: Polígono de Kulkarni para $\Gamma(2)$

Finalmente se quita la tesela determinada por $0, 1$ y $ST^{-2}S(-\bar{\rho})$ y se pega a los lados comprendidos por $[1, \rho + 1]$ y $[\rho + 1, 2]$, obteniéndose el polígono de Kulkarni que se muestra en la Figura 4.7.

Los apareamientos en el polígono de Kulkarni P están dados por $z \rightarrow z+2$ y $z \rightarrow \frac{3z-2}{2z-1}$. Para llegar a esto se puede considerar el polígono de Kulkarni determinado por $-1, 0, 1$ e ∞ que también es una región fundamental para $\Gamma[2]$ con apareamientos $z \rightarrow z+2$ y $z \rightarrow \frac{-z}{2z-1}$, y conjugar con $z \rightarrow z+1$.

Analizamos ahora otro ejemplo. Consideramos el grupo de congruencias de Hecke de nivel n , es decir, las transformaciones definidas por las matrices:

$$\Gamma_0[N] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Se puede probar que el índice de $\Gamma_0[N]$ en $SL(2, \mathbb{Z})$ está dado por

$$N \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} \right),$$

cf. [10].

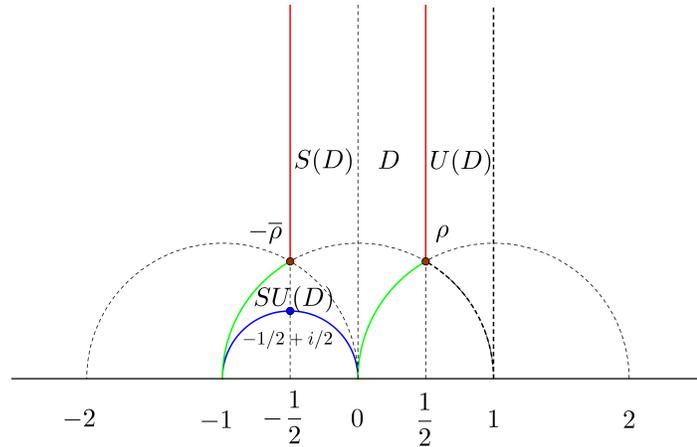


Figura 4.8: Polígono Q para $\Gamma_0[2]$

Mostramos ahora un ejemplo para $\Gamma_0[2]$. Un conjunto de representantes Schreier está dado por $\{Id, S, SU\}$, donde $U = TS$ es una rotación positiva de $\frac{4\pi}{3}$ alrededor de ρ o negativa de $\frac{2\pi}{3}$, $U(z) = T\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{z-1}{z}$.

Nótese que la transformación determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

está en $\Gamma_0[2]$ y fija $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ y este punto es $\Gamma_0[2]$ -equivalente al punto $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ que aparece en nuestro polígono Q para $\Gamma_0[2]$ (véase Figura 4.8). Nótese también que se tiene un ciclo accidental en Q que consta de los vértices ρ y $-\bar{\rho}$.

Trasladando D por -1 , se obtiene el polígono de Kulkarni P (véase la Figura 4.9). De hecho este polígono es también una región de Ford para este grupo. Nótese que en este movimiento no se siguió al pie de la letra la prueba del teorema, ya que se tuvo un cambio simple para pasar de Q a P , sin embargo pudo haberse hecho en dos pasos siguiendo literalmente la prueba del teorema.

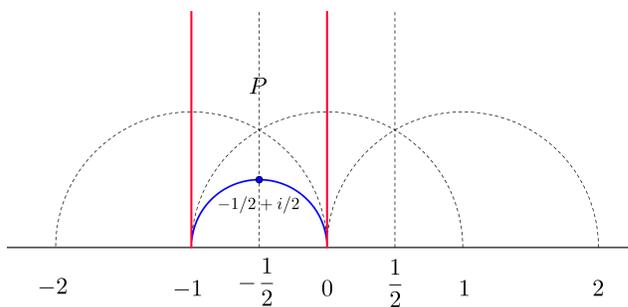


Figura 4.9: Polígono P para $\Gamma_0[2]$

Mostramos otro ejemplo ahora para $\Gamma_0[3]$. Se pueden tomar como representantes Schreier $\{Id, S, SU, SUS\}$. De esta manera se obtiene el polígono fundamental Q como aparece en la Figura 4.10. El punto $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ es un punto fijo de orden 3 para la transformación

$$z \rightarrow \frac{z + 1}{-3z + 2},$$

la cual corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

que es un elemento en $\Gamma_0[3]$. De nuevo se tiene un ciclo accidental en Q que consta de los vértices ρ y $-\bar{\rho}$.

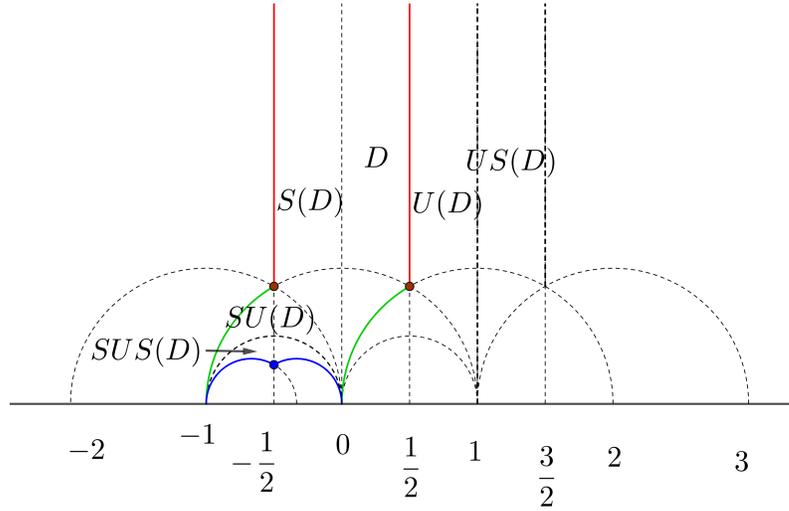


Figura 4.10: Polígono Q para $\Gamma_0[3]$

Trasladando el triángulo determinado por $0, \rho$ e ∞ al triángulo determinado por $-1, -\bar{\rho}$ e ∞ se obtiene un polígono especial, salvo que el proceso no fue exacto como en la prueba del teorema.

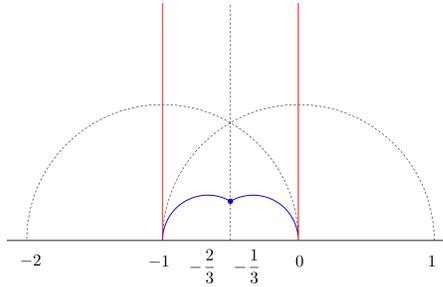


Figura 4.11: Polígono P para $\Gamma_0[3]$

Concluimos la tesis mostrando un ejemplo que muestra cierta incompatibilidad en la definición de Kulkarni de polígono especial. Dado que es especial pero no se presenta como en la Figura 4.1. Esto se obtiene al considerar el subgrupo H generado por las transformaciones W y $V = T^{-1}WT$, donde W

es la rotación en el sentido positivo de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor de ρ , véase la Figura 4.12. Este es un subgrupo de índice 2 de Γ , se pueden tomar como representantes a Id y S . Este subgrupo es discreto, ya que cumple las condiciones del teorema de Poincaré, se tiene dos puntos fijos de orden 3, ρ y $-\bar{\rho}$, y además VW es una traslación. Por lo que el grupo es discreto, sin embargo no aparece como en la Figura 4.1. Véase también [2] pp. 1062-1063, Figura 2.6.

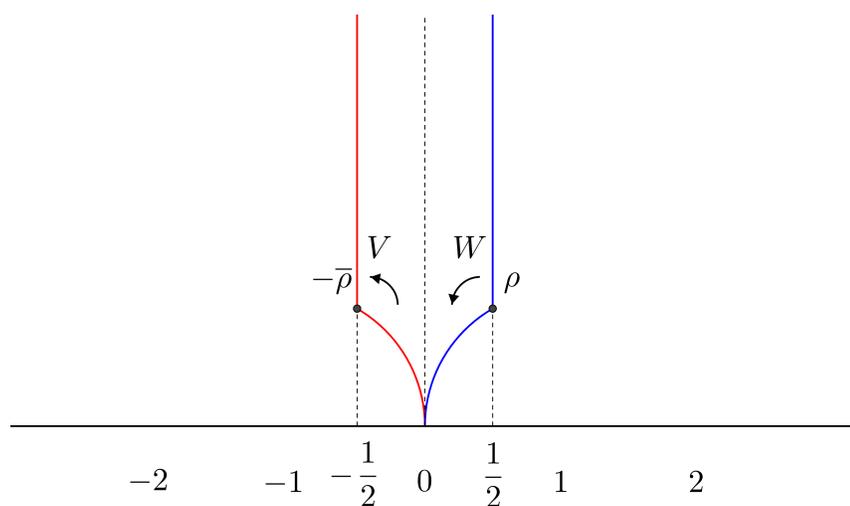


Figura 4.12: Contraejemplo a la descripción de Kulkarni

Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, *Springer-Verlag*, 1995.
- [2] KULKARNI, R. S., *An Arithmetic-Geometric Method in the Study of the Subgroups of the Modular Group*, *American Journal of Mathematics*, Vol. 113, No. 6, 1991, pp. 1053-1133.
- [3] LASCURAIN ORIVE, A. Y MOLINA HERNÁNDEZ, R., *On Fundamental Domains for Subgroups of Isometries Acting in \mathbb{H}^n* , *International Scholarly Research Notices*, Hindawi, 2012.
- [4] LASCURAIN ORIVE, A., *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, Segunda edición, *Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM*, 2015.
- [5] LIZÁRRAGA COLLI, H., *El teorema de Poincaré para grupos fuchsianos, segunda parte*, *Tesina Maestría, UNAM*, 2021.
- [6] LEHNER, J., *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, *American Mathematical Society*, 1964.
- [7] LEHNER, J., *A Short Course in Automorphic Functions*, *Holt, Rinehart & Winston*, 1966.
- [8] MAGNUS, W., KARRASS, A. Y SOLITAR, D. *Combinatorial Group Theory*, *Dover Publications*, 1976.
- [9] MAZUR, B. *Number Theory as Gadfly*, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 98, Issue 7, 1991
- [10] SHIMURA, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, *Tokio Iwanami Shoten and Princeton University*, 1971.

- [11] THURSTON, W. P., Three-dimensional Geometry and Topology, Volume 1, *Princeton Mathematical Series 35*, Princeton University Press, 1997.