



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DETERMINACIÓN FINITA Y TEOREMA DE  
DIVISIÓN DE MALGRANGE-MATHER**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A :**

**GESSURI MALDONADO ROA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALBERTO LEÓN KUSHNER SCHNUR**

**CIUDAD UNIVERSITARIA CD. MX.**

**2023**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**1. Datos del alumno**

Maldonado  
Roa  
Gessuri  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
307237239

**2. Datos del tutor**

Dr  
Alberto León  
Kushner  
Schnur

**3. Datos del sinodal 1**

Dr  
Santiago  
López de Medrano  
Sánchez

**4. Datos del sinodal 2**

Dra  
Shirley Thelma  
Bromberg  
Silverstein

**5. Datos del sinodal 3**

Dr  
Germán Aubin  
Arroyo  
Camacho

**6. Datos del sinodal 4**

Dr  
Adolfo  
Guillot  
Santiago

**7. Datos del trabajo escrito**

Determinación finita y teorema de división de Malgrange-Mather

107 p

2023

*Porque de tal manera amó Dios al mundo, que ha dado a su Hijo unigénito,  
para que todo aquel que en él cree, no se pierda, mas tenga vida eterna.*  
*Juan 3:16*

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a sólo aquel que es digno de recibir la gloria y honra. Gracias a Dios por ser mi salvador y Señor.

A mis padres Francisco y Rosenda por darme siempre su apoyo, por su cariño y amor muchas veces más del que yo merecía.

A mis amigos de la facultad Oscar, Carlos, Jonathan, Iván y varios más por su gusto por las matemáticas y por pasar buenos ratos ahí.

A mi tutor León Kushner por su infinita paciencia y apoyo durante todo este tiempo. Increíble su perfeccionismo.

A mis sinodales, los doctores Santiago, Shirley, Aubin y Adolfo por sus comentarios y correcciones del trabajo.

Determinación Finita  
y  
Teorema de División de  
Malgrange-Mather

Gessuri Maldonado Roa

# Introducción

En muchas ramas de las ciencias exactas tales como la física, matemáticas e incluso economía existen ciertos objetos conocidos como *singularidades*, las cuales se caracterizan por tener ciertas propiedades diferentes en un entorno y que se pueden estudiar indirectamente.

Si bien es cierto que los matemáticos de principios del siglo pasado ya conocían el concepto de singularidad, su estudio sistemático y detallado llegó hasta los años cincuenta de ese mismo siglo con los trabajos de Hassler Whitney, quién analizó inmersiones de variedades en el espacio euclídeo. Por tanto, el nacimiento de la *teoría de singularidades* data hasta los trabajos de Whitney (1955) donde él demostró que los mapeos que van del plano en el plano tienen, en general, las singularidades conocidas como pliegue y cúspide. Al mismo tiempo, René Thom desarrollaba algunas aplicaciones de la teoría de singularidades a las cuales llamó *teoría de catastrofes*; y es en este campo donde Thom realiza una clasificación de tipos de singularidades, o tipos de castastrofes.

Después, Mather (1968) introdujo en sus artículos publicados, grupos que actúan sobre el conjunto de *gérmenes* y sentó las bases para el estudio de la *determinación finita* de gérmenes, el cual es el objeto de estudio de los primeros capítulos de este trabajo. Y no fue hasta 1967 que Vladimir Arnold dio una clasificación de *gérmenes simples*.

El objetivo principal de este trabajo es la demostración del *teorema de división de Malgrange-Mather*, por lo cual, el formato de la tesis será el siguiente.

En el primer capítulo lo que hacemos es sentar las bases fundamentales de esta tesis, empezamos con un repaso de cálculo diferencial e integral y ahí vemos la definición de funciones diferenciables, y también damos la definición de variedades diferenciables; por otro lado, vemos dos temas importantes también que son los *Jets* y terminamos con la sección llamada topología de



Whitney en la cual damos una relación de esta topología con los espacios de Baire.

En el capítulo dos comenzamos con la definición de germen, y vemos la determinación finita de estos, que es uno de los temas principales de este trabajo, de hecho, parte del nombre de la tesis lleva este tema. En este capítulo demostramos dos de los resultados fundamentales en la teoría de singularidades, que son el *lema de Nakayama* y el *teorema de Mather*.

Para el capítulo tres vemos un tema importante que son la singularidades simples, donde además de ver su definición y algunos ejemplos, vemos una clasificación de este tipo de singularidades que es atribuida al matemático ruso Vladimir Arnold, es importante decir que cuando nos referimos a clasificar las singularidades simples nos referimos a que la forma de hacerlo usamos una relación de equivalencia la cual explicamos de manera más clara a lo largo de este capítulo de nuestro trabajo.

El capítulo cuatro es una introducción al resultado principal que queremos demostrar en este trabajo, este capítulo lo llamamos *teoremas de división de Weierstrass y Malgrange-Mather*, pero es preciso aclarar que en este capítulo sólo demostramos completamente el teorema de división Weierstrass y no el de Malgrange-Mather, puede parecer contradictorio pero en nuestro trabajo explicamos que hasta este momento aún no tenemos las herramientas suficientes para su demostración porque aún nos falta algunos resultados más profundos que veremos en el capítulo cinco; sin embargo, la demostración del teorema de Malgrange-Mather la hacemos a detalle en el capítulo seis.

En el capítulo cinco vemos un resultado fundamental para la demostración del teorema de división de Malgrange-Mather, que es el *lema de extensión de Stein*; aquí el problema fundamental a considerar es el de extender funciones suaves que están definidas en un dominio con frontera en  $\mathbb{R}^n$  a funciones suaves sobre todo  $\mathbb{R}^n$ . Definiremos una función distancia de un punto de  $\mathbb{R}^n$  a un subconjunto cerrado la cual está relacionada con una cierta condición de Lipschitz, a esta distancia la nombramos distancia regularizada.

René Thom, medalla Fields en 1958, en una ocasión estaba exponiendo su novedosa teoría de catástrofes, y en particular el teorema de división de Weierstrass, en el cual era posible la división de polinomios pero en el campo de los números complejos. Al terminar su exposición sugirió que el teorema de división también podría ser cierto pero en el campo de los números reales, con lo que se producía una conjetura y un gran reto, demostrar el teorema de división de polinomios en el campo de los números reales. A raíz de esa plática, Bernard Malgrange, se propuso como reto la demostración de ésta

conjetura, por lo que dos años después la demostración estaba completa. El capítulo seis es el último de la tesis; a este capítulo lo llamamos *demostración del teorema de división de Malgrange-Mather*. Hemos de decir que el capítulo sólo está concentrado en demostrar este teorema, por lo que para ello usamos los resultados del lema de extensión de Stein y la demostración del teorema de división genérica.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Variedades diferenciables . . . . .	2
1.1.1. Funciones diferenciables . . . . .	2
1.1.2. Regla de la cadena . . . . .	5
1.1.3. Teorema de la función inversa . . . . .	5
1.2. Jets . . . . .	8
1.3. Topología de Whitney . . . . .	13
<b>2. Gérmenes finitamente determinados</b>	<b>16</b>
2.1. Gérmenes de funciones . . . . .	16
2.2. Lema de Hadamard y determinación finita . . . . .	18
2.3. Lema de Nakayama . . . . .	20
2.4. Teorema de Mather . . . . .	21
<b>3. Singularidades simples y clasificación</b>	<b>31</b>
3.1. Gérmenes simples y codimensión . . . . .	31
3.2. Teorema de Gromoll-Meyer . . . . .	41
3.3. Lema de Stefan . . . . .	49
<b>4. Teoremas de división de Weierstrass y de Malgrange-Mather</b>	<b>60</b>
4.1. Teorema de división de Weierstrass . . . . .	60
4.2. Teorema de división de Malgrange-Mather . . . . .	68
4.3. Un resultado de Whitney . . . . .	76

<b>5. Lema de extensión de Stein</b>	<b>83</b>
5.1. Distancia regularizada . . . . .	83
5.2. Lema de extensión de Stein . . . . .	88
<b>6. Demostración del teorema de división de Malgrange-Mather</b>	<b>95</b>
6.1. Teorema de división genérica . . . . .	95
<b>Bibliografía</b>	<b>108</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

Iniciamos este capítulo introductorio con bases de cálculo diferencial, estudiamos el concepto de variedad diferencial y hacemos un repaso de funciones diferenciables, de la regla de la cadena y del teorema de la función inversa. También introducimos el concepto de *k-jet*; el cual vamos a definir como una clase de equivalencia donde éste será identificado con el polinomio de Taylor de grado  $k$ . Por último estudiaremos también la topología de Whitney para sentar las bases de lo que veremos en el capítulo 2.

### 1.1. Variedades diferenciables

El objetivo de esta sección es generalizar algunos conceptos de cálculo diferencial e integral y el análisis vectorial a ciertos espacios topológicos  $M$  conocidos como variedades diferenciables, los cuales son espacios que localmente pueden ser tratados como subconjuntos abiertos del espacio  $\mathbb{R}^n$  a través de sistemas de coordenadas locales. Queremos aclarar que a lo largo de este trabajo estaremos usando los nombres de función y mapeo indistintamente.

#### 1.1.1. Funciones diferenciables

**Definición 1.1.1.1.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se define la derivada parcial de  $f$  con respecto a la  $i$ -ésima variable  $x_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Nos damos cuenta fácilmente que la derivada parcial no es más que un cierto tipo de derivada direccional.

**Definición 1.1.1.2.** Sea una función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que la función  $T$  es *lineal* si cumple con las siguientes propiedades:

1.  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para todas  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$  para toda  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Por tanto, explícitamente, nuestra definición de diferenciabilidad será la siguiente.

**Definición 1.1.1.3.** Sea la función  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in U$ . Diremos que  $f$  es *diferenciable* en  $x_0$  si existe una función lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (T(x - x_0) + f(x_0))}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Ahora, generalizando para el caso de funciones de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  tenemos la definición que sigue.

**Definición 1.1.1.4.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $x_0 \in U$ . Se define la *derivada parcial* de  $f$  en  $x_0$  respecto a la  $i$ -ésima variable como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

siempre que este límite exista.

**Observación 1.1.1.5.** Tenemos que el siguiente límite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

existe, si y sólo si el límite que sigue

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(x_0 + he_i) - f_j(x_0)}{h}$$

existe para  $1 \leq j \leq m$ . Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0) \right).$$

Así, para la definición de la derivada de la función  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , nos basaremos en la misma idea que usamos para las funciones de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$ .

Por tanto, como lo vimos anteriormente, la función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será lineal si cumple con las propiedades de la definición 1.1.1.2.

Entonces vamos a definir la derivada de la función  $f$  como sigue.

**Definición 1.1.1.6.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $x_0 \in U$ . Decimos que  $f$  es diferenciable en  $x_0$  si existe una función lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (T(x - x_0) + f(x_0))}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - (T(x - x_0) + f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Vemos que si una función tiene derivadas parciales en un punto no implica que la función sea diferenciable en ese punto, para ello vamos a dar un ejemplo de una función de este tipo.

**Ejemplo 1.1.1.7.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Pero,  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ . Por lo tanto,  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

Por último, cuando hagamos cálculos con derivadas parciales de funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^n$  será conveniente usar notación con multiíndices. Un

múltiple  $l$  será una  $n$ -tupla de enteros no negativos  $l = (l_1, \dots, l_n)$ . Escribiremos  $|l| = l_1 + \dots + l_n$  y  $l! = l_1! \dots l_n!$ . Por otro lado, si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , escribiremos  $x^l = x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$ . Usaremos la siguiente notación para las derivadas parciales de una función diferenciable

$$D^l f = \frac{\partial^{|l|} f}{\partial x^l} = \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n} f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}.$$

### 1.1.2. Regla de la cadena

Ahora formularemos un resultado muy importante en el cual se establecen las condiciones para asegurar la diferenciabilidad de una composición de funciones que van de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  y de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^k$ .

Por tanto, sean  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  funciones, donde  $g_1, g_2, \dots, g_k$  son las funciones coordenadas de  $g$ , y tal que  $f(U) \subset V$ . Entonces, tenemos que la composición  $g \circ f$  está bien definida y las funciones  $g_i \circ f$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , serán las funciones coordenadas de  $g \circ f$ .

**Teorema 1.1.2.1 (regla de la cadena).** *Sean las funciones  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $x_0 \in U$  tales que  $f(U) \subset V$ . Si  $f$  es derivable en  $x_0$  y  $g$  es derivable en  $y_0 = f(x_0)$ , entonces  $g \circ f$  es derivable en  $x_0$  y, además, se tiene que*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [6]. □

**Observación 1.1.2.2.** Como lo vimos en el ejemplo 1.1.1.7., lo mismo aplica con la regla de la cadena; es decir, que dos funciones tengan derivadas parciales en un punto no implica que su composición sea diferenciable.

Por ejemplo, la función  $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$  posee derivadas parciales en  $(0, 0)$  y la función  $g(x) = (x, x)$  es diferenciable en  $x = 0$ . Sin embargo, la función compuesta  $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$  no es diferenciable en  $x = 0$ .

### 1.1.3. Teorema de la función inversa

En el álgebra lineal, un cambio de base se efectúa por medio de una función lineal invertible. Por ejemplo, si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V$ , y



$A \in GL(n, \mathbb{R})$ , entonces  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  con  $e'_i = Ae_i$  es otra base ya que  $A$  es invertible. Las coordenadas de un vector  $v \in V$  con respecto a la base  $e_i$  son los coeficientes de la expresión  $v = \sum x_i e_i$ . Al cambiar a la nueva base las coordenadas también cambian y por tanto los coeficientes son  $x'_i$  en la expresión  $v = \sum x'_i e'_i$ . Así, los coeficientes se relacionan por medio de la expresión  $x = Ax'$ , por tanto  $x' = Bx$ , donde  $B = A^{-1}$ .

Con esta idea en mente podemos definir lo que entendemos como difeomorfismo, el cual nos ayudará a enunciar el teorema de la función inversa que veremos más adelante.

**Definición 1.1.3.1.** Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos abiertos. Decimos que la función biyectiva y diferenciable (o suave)  $f : U \rightarrow V$  es un *difeomorfismo* si tiene una inversa suave; esto es, existe una función  $h : V \rightarrow U$  suave tal que  $f \circ h = h \circ f = id$ . Escribimos  $h = f^{-1}$  para denotar la inversa de  $f$ .

**Ejemplo 1.1.3.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x^2$ . Esta función no es invertible, por tanto no es un difeomorfismo.

**Ejemplo 1.1.3.3.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definida como  $f(x) = x^2$ . Esta función sí es invertible pues  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ , además  $f$  y  $f^{-1}$  son suaves ya que  $0 \notin \text{dom}(f^{-1})$  y  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}y^{-1/2}$ .

Ya estamos en condición de enunciar el teorema de la función inversa, el cual nos dice que si la mejor aproximación lineal a un mapeo suave en un punto  $x_0$  es invertible, entonces el mapeo es invertible, o al menos en una vecindad de  $x_0$ . Lo enunciamos de manera formal como sigue.

**Teorema 1.1.3.4 (de la función inversa).** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo suave con  $x_0 \in \text{dom}(f)$ ,  $y_0 = f(x_0)$  y  $Df(x_0)$  invertible. Entonces existe  $U$  abierto con  $x_0 \in U$  tal que*

- i)  $f(U)$  es abierto.
- ii)  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo.

Para terminar con esta sección, damos la definición de variedad diferencial y la completamos con algunos ejemplos básicos.

**Definición 1.1.3.5.** Un espacio topológico  $M$  es llamado una *variedad topológica* de dimensión  $n$  ó *n-variedad topológica* si cumple con las siguientes condiciones:

- i)  $M$  es un espacio de Hausdorff.
- ii) Para cualquier punto  $x_0 \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $x_0$  que es homeomorfa a un subconjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$ .
- iii)  $M$  es segundo numerable.

**Ejemplo 1.1.3.6.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  es una variedad topológica, pues  $\mathbb{R}^n$  es un espacio de Hausdorff, es segundo numerable y para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo.

**Definición 1.1.3.7.** Sea  $M$  un espacio topológico. Una carta sobre  $M$  es una función biyectiva  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, además  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$  es continua y  $V = \varphi(U)$  es un abierto. A una carta la denotaremos como  $(U, \varphi)$ .

**Definición 1.1.3.8.** Dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  son *compatibles* en  $M$  si  $U \cap V = \emptyset$  o bien  $V \cap U \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\varphi(U \cap V)$  y  $\psi(U \cap V)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y las funciones  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  y  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  son difeomorfismos.

Con lo visto anteriormente ya estamos listos para definir uno de los conceptos fundamentales de este capítulo.

**Definición 1.1.3.9.** Sea  $M$  una variedad topológica. Un *atlas diferenciable* en  $M$  es una familia de cartas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  tal que satisface las siguientes condiciones:

- i)  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ .
- ii) Para todo par de índices  $\alpha$  y  $\beta$ , las cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  son compatibles.

**Definición 1.1.3.10.** Se dice que el atlas  $\mathcal{A}$  es maximal si contiene todas las cartas de  $M$  que son compatibles con  $\mathcal{A}$ .

Diremos que el atlas  $\mathcal{A}$  determina una *estructura diferenciable* sobre  $M$  si es maximal para las condiciones anteriores.

**Definición 1.1.3.11.** Una *variedad diferenciable* de dimensión  $n$  es un par  $(M, \mathcal{A})$  formado por un espacio topológico  $M$  y una estructura diferenciable  $\mathcal{A}$  sobre  $M$ .

**Ejemplo 1.1.3.12.** La esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  es una variedad de dimensión  $n$  cuyas cartas están dadas por las proyecciones estereográficas; es decir, el atlas es  $\mathcal{A} = \{(S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}, \varphi), (S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}, \psi)\}$  y las cartas son

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{2x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{2x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

$$\psi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{2x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{2x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

**Ejemplo 1.1.3.13.** El grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{R})$  admite una estructura diferenciable de dimensión  $n^2$ .

$GL(n, \mathbb{R})$ , el conjunto de las matrices reales de tamaño  $n \times n$  con determinante no nulo, se identifica de forma natural con un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ ; así, si  $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función determinante, entonces

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\});$$

y como la función determinante es continua,  $GL(n, \mathbb{R})$  se identifica con un abierto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

## 1.2. Jets

La idea que está detrás del concepto de *jet* tiene que ver con funciones de orden superior que son *tangentes* (también se dice que tienen *contacto*) en un punto de una variedad suave.

**Definición 1.2.1.** Sean  $U, V$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Decimos que dos funciones suaves  $f, g : U \rightarrow V$  son *k-tangenciales* en un punto  $x \in U$  si

$$D^l f(x) = D^l g(x) \text{ para toda } l \in \mathbb{N}^n \text{ con } \|l\| \leq k.$$

Es claro que la *k-tangencialidad* nos define una relación de equivalencia en  $x$ . Diremos que el *k-jet* de una función suave de  $U$  en  $V$ , donde a  $x$  le llamaremos el *punto de salida* y a  $y$  lo llamaremos el *punto de llegada*, es una clase de equivalencia de funciones suaves  $f : U \rightarrow V$  tal que  $f(x) = y$ .

Vamos a denotar como  $J^k(U, V)_{x,y}$  al conjunto de los *k-jets* de funciones de  $U$  a  $V$  con punto de salida  $x$  y punto de llegada  $y$ .

Por otro lado, denotaremos como  $z$  a una clase de equivalencia de  $f$  en  $J^k(U, V)_{x,y}$ . De esta forma, si  $z \in J^k(U, V)_{x,y}$  es una clase de equivalencia de  $f$  entonces diremos que  $z$  es el  $k$ -jet de  $f$  en  $x$ , y lo vamos a representar como  $z = j^k f(x)$ .

Por lo tanto, a  $j^k f(x)$  lo podemos identificar con el polinomio de Taylor de orden  $k$  en el punto  $x$ .

Para entenderlo de manera más intuitiva mostramos la siguiente definición y algunos ejemplos en dimensión 1.

**Definición 1.2.2.** Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave en un punto  $x_0 \in U$ . Por el teorema de Taylor tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{R_{k+1}(x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

donde  $|R_{k+1}(x)| \leq \sup_{x \in U} |f^{(k+1)}(x)|$ .

Identificamos el  $k$ -jet de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $x_0$  como el polinomio de Taylor de orden  $k$  de la siguiente manera

$$j^k f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)x + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^k.$$

Generalmente sólo escribiremos  $j^k f(x)$  para referirnos al  $k$ -jet de  $f$ , ya que nos interesará estudiar los jets en el origen y el polinomio tendrá a  $x$  como su indeterminada.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido como  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Entonces el polinomio de Taylor en  $x_0 = 0$  de  $f$  muestra que

$$j^k f(x_0) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^k.$$

**Ejemplo 1.2.4.** Veamos un ejemplo con dos variables.

Sea  $f(x, y) = e^x \cos(x + y)$  Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} j^2 f(0, 0) &= 1 + (1 \cdot x + 0 \cdot y) + \frac{1}{2} (0 \cdot x^2 - 1 \cdot xy - 1 \cdot yx - 1 \cdot y^2) \\ &= 1 + x - xy - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Como hemos visto, podemos identificar los  $k$ -jets con el conjunto de polinomios en  $n$  variables con grado menor o igual que  $k$ . Así, para hacer la identificación tomemos la siguiente función, sea

$$T : J^k(U, V)_{x,y} \rightarrow P^k$$

definida por  $T(z) = T_f^k$ , donde  $P^k = \{p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] : \text{grad}(p) \leq k\}$ , es decir,  $P^k$  es el conjunto de polinomios en  $n$  variables con grado menor o igual que  $k$  y  $T_f^k$  es el polinomio de Taylor de  $f$  de orden  $k$ .

**Observación 1.2.5.** La función  $T : J^k(U, V)_{x,y} \rightarrow P^k$  es biyectiva.

Denotaremos al conjunto de los jets como  $J^k(U, V)$  y este conjunto será la unión disjunta de los  $k$ -jets de  $U$  a  $V$  como sigue

$$J^k(U, V) = \bigsqcup_{\substack{x \in U \\ y \in V}} J^k(U, V)_{x,y}$$

Y también denotaremos a la siguiente función,

$$\pi : J^k(U, V) \rightarrow U \times V,$$

donde  $\pi$  es la proyección canónica definida como

$$\pi(J^k(U, V)_{x,y}) = (x, y).$$

Sean  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Estas coordenadas nos inducen unas funciones coordenadas  $(x_i, y_j^l)$  en el conjunto  $J^k(U, V)$  con  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $l \in \mathbb{N}^n$  y  $\|l\| \leq k$ , de la siguiente manera.

Si  $z \in J^k(U, V)$  es un jet con punto de salida  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , y  $z$  está representado por una función suave  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} x_i(z) &= x_i^0, \\ y_j^l(z) &= D^l f_j(x^0) \text{ con } \|l\| \leq k. \end{aligned}$$

Estas funciones definen una estructura de producto topológico en el espacio de los  $k$ -jets de la manera que sigue

$$J^k(U, V) = U \times V \times J^k(n, m),$$

donde  $J^k(n, m)$  es un espacio vectorial de dimensión finita, tal que

$$j^k f(x) = \left( x, f(x), \left( D^l f_j(x) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ \|l\| \leq k}} \right).$$

[ $J^k(n, m)$  es isomorfo a

$$H_1(n, 1) \times H_2(n, 1) \times \cdots \times H_k(n, 1),$$

donde  $H_k(n, 1)$  es el espacio de los polinomios homogéneos de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$  de grado  $k$ .

Por tanto, bajo este isomorfismo,

$$j^k f(x) = \left( x, f(x), Df(x), \dots, D^k f(x) \right),$$

donde  $D^k f(x) \in H_k(n, 1)$  denota la  $k$ -ésima derivada de  $f$  en  $x$ .]

Al espacio de polinomios homogéneos en  $n$  variables de grado menor o igual que  $k$  lo vamos a denotar como  $H_{n,m}^k = \bigoplus_{i=1}^m H_k(n, 1)$  y también vamos a calcular su dimensión. Y esto lo haremos por inducción.

La idea que deseamos plasmar aquí es que queremos demostrar que la dimensión del espacio de los polinomios homogéneos está dada por la fórmula  $\binom{n+k-1}{k}$ .

Por tanto, cuando  $k = 0$ , que son los polinomios de grado 0, el resultado que tendremos es que el espacio de estos polinomios homogéneos tienen dimensión  $\binom{n+0-1}{0} = \binom{n-1}{0} = \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} = 1$ .

Ahora, cuando  $k = 1$ , que serían los polinomios de grado 1, el espacio tendrá dimensión  $\binom{n+1-1}{1} = n$ .

Entonces, supongamos que la dimensión de los polinomios homogéneos de grado  $k$  es  $\binom{n+k-1}{k}$ .

Así, para calcular la dimensión de los polinomios de grado  $k+1$ , al término  $x_n^0$  le corresponde un espacio de dimensión  $\binom{n+k-1}{k}$ , al término  $x_n^1$  le corresponde un espacio de dimensión  $\binom{n+k-2}{k-1}$ , y así, siguiendo este

paso inductivo, tendríamos que al término  $x_n^{k+1}$  le corresponde un espacio de dimensión  $\binom{n}{0}$ . Entonces, sumando tenemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} + \cdots + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-1}{k}$$

Ahora, usando la fórmula  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ , tenemos que los dos primeros términos de la suma anterior nos da  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1}$ , y reescribiendo obtenemos la suma siguiente

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+k-1}{k}.$$

Haciendo el mismo procedimiento anterior  $k$  veces tenemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} + \cdots + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k}.$$

Así, hemos visto que la fórmula inductiva sí se cumple para toda  $k$ . Por lo tanto, la dimensión del espacio de polinomios homogéneos  $H_{n,m}^k$  será

$$\dim(H_{n,m}^k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Y así concluimos que la dimensión del espacio de los  $k$ -jets es

$$\dim(J^k(U, V)) = n + m + \dim(H_{n,m}^k).$$

Hasta ahora sólo hemos considerado a  $U$  y  $V$  como subconjuntos de espacios euclidianos, sin embargo podemos generalizar las definiciones y ver su comportamiento cuando  $M$  y  $N$  son variedades. Por tanto, sean  $M$  y  $N$  variedades suaves y  $f, g : M \rightarrow N$  mapeos suaves. Decimos que  $f$  y  $g$  son  $k$ -tangenciales en  $x_0 \in M$  si para algunas cartas locales  $(U, \phi)$  de  $M$  en  $x_0$  con  $\phi(x_0) = 0$  y  $(V, \psi)$  de  $N$  en  $f(x_0)$  con  $\psi(f(x_0)) = 0$ , los mapeos

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \quad \text{y} \quad \psi \circ g \circ \phi^{-1}$$

son  $k$ -tangenciales en  $\phi(x_0)$ . Esta condición es independiente de la elección de las cartas; y para ver esto debemos probar que

$$j^k(\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}) = j^k(\psi_1 \circ g \circ \phi_1^{-1}).$$

Entonces, tenemos que  $j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) = j^k(\psi \circ g \circ \phi^{-1})$ , así

$$\begin{aligned} j^k(\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1})(0) &= j^k(\psi_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi_1^{-1})(0) \\ &= j^k(\psi_1 \circ \psi^{-1})(0) \cdot j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) \cdot j^k(\phi \circ \phi_1^{-1})(0) \\ &= j^k(\psi_1 \circ \psi^{-1})(0) \cdot j^k(\psi \circ g \circ \phi^{-1})(0) \cdot j^k(\phi \circ \phi_1^{-1})(0) \\ &= j^k(\psi_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ g \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi_1^{-1})(0) \\ &= j^k(\psi_1 \circ g \circ \phi_1^{-1})(0). \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar.

Ahora, si definimos  $J^k(M, N)_{x,y}$ ,  $J(M, N)$  y  $j^k f(x)$  como antes y además

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

son los sistemas coordenados en  $U$  y  $V$  respectivamente, entonces las funciones  $(x_i, y_j^l)$  definen un sistema coordenado en  $J^k(U, V)$ . Entonces  $J^k(U, V)$  puede ser usado como una carta local que hace de  $J^k(M, N)$  una variedad suave. La proyección canónica

$$\pi : J^k(M, N) \rightarrow M \times N$$

es la proyección de un haz fibrado, y las secciones de los jets  $j^k f$  son suaves.

### 1.3. Topología de Whitney

El concepto de topología nos sugiere estudiar la *cercanía* entre dos objetos. En este apartado desarrollamos lo más elemental de la topología de Whitney, la cual estudiaremos en el espacio de funciones de clase  $C^\infty$  de  $M$  a  $N$  que se denota como  $C^\infty(M, N)$  y para hacerlo nos ayudaremos del concepto de los  $k$ -jets.

Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves. Vamos a denotar como  $C^k(M, N)$  al conjunto de funciones de clase  $C^k$  de  $M$  a  $N$ . Para cualquier subconjunto  $U$  de  $J^k(M, N)$  definimos

$$\mathcal{M}(U) := \{f \in C^\infty(M, N) \mid j^k f(M) \subset U\}.$$



Es claro que

$$\mathcal{M}(U) \cap \mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(U \cap V).$$

De esta manera, la familia de conjuntos  $\{\mathcal{M}(U)\}$  donde  $U \subset J^k(M, N)$  es un subconjunto abierto forman una base para una topología en  $C^k(M, N)$ . A esta topología la llamaremos la *topología  $C^k$  de Whitney*. A los abiertos de esta topología los denotaremos como  $W_k$ .

Llamaremos *topología  $C^\infty$  de Whitney* (o simplemente *topología de Whitney*) a la topología cuya base es  $W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$ . Esto se deduce del hecho que los abiertos  $W_k$  en  $C^k(M, N)$  inducen una nueva topología en  $C^\infty(M, N)$ . Además, como  $W_k \subset W_l$  siempre que  $k \leq l$ , entonces  $W$  es una base bien definida para una topología en  $C^\infty(M, N)$  ya que el mapeo canónico  $\pi_k^l : J^l(M, N) \rightarrow J^k(M, N)$  es una sumersión.

**Observación 1.3.1.** Hasta ahora no habíamos pedido que las variedades  $M$  y  $N$  tuvieran alguna propiedad en especial, pero, por ejemplo, si pedimos que  $M$  sea compacta entonces la topología  $C^k$  de Whitney coincide con la topología estandar  $C^k$  (es decir, una sucesión de funciones  $\{f_j\}$  en  $C^k(M, N)$  converge en la topología  $C^k$ , si la sucesión  $\{j^k f_j\}$  converge uniformemente en  $M$ ).

Esto lo podemos ver de la siguiente manera. Sabemos que  $J^k(M, N)$  es una variedad, por tanto existe una métrica  $d$  que es compatible con la topología, esto es, si  $f \in C^\infty(M, N)$  podemos definir una bola como sigue

$$B_\delta(f) = \left\{ g \in C^\infty(M, N) \mid \forall x \in M, d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x) \right\},$$

donde  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función continua. Así, se prueba que  $B_\delta(f)$  es abierto en  $J^k(M, N)$  y por tanto obtendremos que  $\mathcal{M}(B_\delta(f))$  es una vecindad abierta de  $f$  en  $C^\infty(M, N)$ .

El siguiente teorema nos dice que la convergencia en  $W$  es más fuerte que la convergencia uniforme de los  $k$ -jets, por tanto, se dice que la topología de Whitney es una topología más fina.

**Teorema 1.3.2.** Sean  $M$  y  $N$  variedades y sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(M, N)$ . La sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  en la topología  $C^k$  si y sólo si existe un compacto  $K \subset M$  tal que  $j^k f_n$  converge uniformemente a  $j^k f$  en  $K$  y sólo un número finito de  $f_n$  son diferentes a  $f$  fuera de  $K$ .

*Demostración.* La suficiencia es obvia, así que nada más tenemos que demostrar la necesidad. Lo haremos por contradicción. Supongamos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  pero no existe un compacto  $K$  con la propiedad deseada. Sean  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M$  una sucesión de compactos tales que  $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$  y  $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ . Existe una función  $f_{n_1}$  distinta a  $f$ . Entonces existe  $x_{n_1} \in M$  tal que

$$d(j^k f_{n_1}(x_1), j^k f(x_1)) = a_{n_1} > 0,$$

entonces existe  $m_1$  tal que  $x_{n_1} \in K_{m_1}$ . Sea  $\delta_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\delta(K_{m_1}) = a_{n_1}$ . Inductivamente elegimos  $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$  con  $m_1 < m_2 < \dots < m_s$  tal que para cada  $s$  existirá una  $x_{n_s} \in K_{m_s}$  y una función continua  $\delta_s : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  tales que  $d(j^k f_{n_s}(x_{n_s}), j^k f(x_{n_s})) > \delta_s(x_{n_s})$ .

Ahora elegimos  $f_{n_{s+1}}$  tal que sea distinta a  $f$  fuera de algún compacto  $K_{m_{s+1}}$ , donde  $m_{s+1} > m_s$ . Sea  $x_{n_{s+1}} \notin K_{m_{s+1}}$  con

$$d(j^k f_{n_{s+1}}(x_{n_{s+1}}), j^k f(x_{n_{s+1}})) = a_{n_{s+1}} > 0.$$

Entonces  $x_{n_{s+1}} \in K_{m_{s+1}}$  para algún  $m_{s+1}$ , y elegimos  $\delta_{s+1}$  de la misma manera. Elegimos una partición de la unidad asociada a nuestra cubierta de  $K_i$  y pegamos las  $\delta_s$  en una función  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua, que vale  $a_{n_{s+1}} \in (K_{m_{s+1}} - \text{int}(K_{m_s}))$ . Entonces estamos construyendo una subsucesión  $\{f_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  y una función  $\delta$  tal que para toda  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n_i} \notin B_\delta(f)$ , es decir,  $\{f_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  no converge a  $f$ .  $\square$

**Definición 1.3.3.** Un espacio topológico  $X$  se dice que es un *espacio de Baire* si toda intersección numerable de abiertos densos de  $X$  es densa.

**Teorema 1.3.4 (de la categoría de Baire).** *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

**Observación 1.3.5.** El espacio de funciones suaves  $C(M, N)$  con la topología  $C^\infty$  tiene la estructura de un espacio métrico completo. Por tanto, por el teorema de la categoría de Baire, es un espacio de Baire.

La demostración de la siguiente proposición escapa de los propósitos de este trabajo, por lo que sólo la mencionaremos y daremos una fuente donde su demostración pueda consultarse.

**Proposición 1.3.6.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves. Entonces  $C^\infty(M, N)$  es un espacio de Baire con la topología  $C^\infty$  de Whitney.*

La demostración de esta proposición se puede ver en [4].

# Capítulo 2

## Gérmenes finitamente determinados

Hasta este momento sólo hemos discutido algunas propiedades de funciones suaves en un punto en particular; por tanto, a partir de ahora podríamos deducir otras propiedades de las funciones, por ejemplo, propiedades que se cumplen en un subconjunto abierto o en una vecindad de un punto.

Al discutir las propiedades locales de funciones suaves es conveniente introducir la noción de *germen*. Es importante señalar que, a partir de ahora, podremos estudiar las propiedades locales de las funciones suaves sin hacer referencia a una vecindad en particular de un punto en el dominio de la función.

### 2.1. Gérmenes de funciones

Esta sección la comenzamos dando las definiciones básicas de lo que entendemos como el *germen* de una función y que nos será de gran utilidad a lo largo de este capítulo.

**Definición 2.1.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves. El *germen* de una función suave de  $M$  a  $N$  en un punto  $x \in M$  es una clase de equivalencia de funciones suaves, donde la relación de equivalencia será la siguiente: dadas dos funciones  $f, g : M \rightarrow N$ , se dice que son equivalentes en  $x \in M$  si existe una vecindad  $W$  de  $x$  tal que las restricciones coinciden; es decir,  $f|_W = g|_W$ .

**Observación 2.1.2.** Denotaremos la clase de equivalencia de todas las funciones equivalentes a  $f$  en  $x$  como  $[f]_x$ .

Podríamos generalizar la definición 2.1.1. a subconjuntos de una variedad, haciéndolo de la manera que sigue.

**Definición 2.1.3.** Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves, sea  $x_0 \in M$  y  $U, V$  vecindades abiertas de  $x_0$ , entonces los mapeos  $f$  y  $g$  son equivalentes en  $x_0 \in U \cap V$  si existe  $W$  abierto con  $x_0 \in W \subset U \cap V$  tal que  $f|_W = g|_W$ .

Así, diremos que  $f$  es un representante de  $[f]_x$ . Por otro lado, si  $W = x$ , entonces a  $x$ , como lo habíamos dicho en el capítulo anterior, lo llamaremos el *punto de salida* de  $f$  y a  $f(x)$  lo llamaremos el *punto de llegada* de  $f$ .

Nuestro interés es estudiar los gérmenes de funciones de  $M$  en  $N$  donde  $M$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $N$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ , es decir, estaremos trabajando en un subconjunto del espacio de funciones suaves de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . Más aún, nos interesará estudiar los gérmenes de funciones suaves en el origen, para ello damos la siguiente definición que resume todo esto.

**Definición 2.1.4.** Sean  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{E}_n$  que tienen al 0 contenido en sus dominios y sea  $U$  una vecindad del 0. Decimos que  $f$  y  $g$  son equivalentes en 0 si  $f|_U = g|_U$ . Definimos las siguientes operaciones como:

- a)  $[f]_0 + [g]_0 = [f + g]_0$ .
- b)  $[f]_0 [g]_0 = [fg]_0$ .
- c)  $\alpha [f]_0 = [\alpha f]_0$  para cualquier escalar  $\alpha$ .

Donde  $[f]_0$  denota el germen de  $f$  en el origen.

Con las operaciones de la definición anterior definimos  $\mathcal{E}_n$  como el conjunto de gérmenes en el origen de funciones suaves de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . El conjunto  $\mathcal{E}_n$  tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra, la cual es inducida por la estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra local de  $\mathbb{R}$ .

**Observación 2.1.5.** Un elemento  $f \in \mathcal{E}_n$  será invertible si y sólo si  $f(0) \neq 0$ ; por lo tanto, los elementos no invertibles forman un ideal, el cual denotaremos como  $m_n$ ; es decir,  $m_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}$ . De esta forma  $\mathcal{E}_n$  es un anillo local y  $m_n$  es su ideal maximal.

De ahora en adelante para que no haya peligro de confusión, o a menos que se indique lo contrario, en lugar de escribir  $[f]_x$ , escribiremos simplemente  $f$  para referirnos al germen de la función  $f$ .

## 2.2. Lema de Hadamard y determinación finita

Probaremos el siguiente teorema, el cual nos será de gran ayuda para poder demostrar de manera automática el lema de Hadamard, que es el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto con  $0 \in U$ . Si  $f$  es una función suave, entonces existen  $n$  funciones  $g_1, \dots, g_n$  suaves tal que para toda  $x \in U$*

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

donde  $x_i$  es la proyección de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Consideremos la función  $g$  sobre  $[0, 1] \times U$  definida como  $g(t, x) = f(tx)$ , esta función claramente es suave pues es composición de funciones suaves. Por tanto, derivando con respecto a  $t$  y aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) &= f'(tx) \frac{\partial(tx)}{\partial t} = \left( \frac{\partial f(tx)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(tx)}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i. \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= g(1, x) - g(0, x) = \int_0^1 g'(t, x) dt \\ &= \int_0^1 f'(tx) x dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i dt, \end{aligned}$$

al factorizar  $x_i$  y usando la linealidad de la integral tenemos que

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt.$$

Ahora, si definimos las funciones  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt, \quad i = 1, \dots, n$$

tenemos que  $g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} dt = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \int_0^1 dt = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$ .

Como  $f$  es suave,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es suave también, y en consecuencia  $g_i$  es suave.

Por tanto,  $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n g_i(x)x_i$ . □

**Lema 2.2.2 (Hadamard).** *El ideal maximal  $m_n$  está generado por los gérmenes en 0 de las funciones coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ .*

*Demostración.* Por el teorema anterior tenemos que para toda  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple que  $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ .

Por tanto, si el germen  $f$  pertenece a  $m_n$  entonces  $f(0) = 0$  por lo que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

donde  $g_i(x) \in \mathcal{E}_n$ . □

Definimos  $Diff(n)$  como el conjunto de gérmenes de difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  con punto de salida y punto de llegada en 0. Así, de esta forma, el conjunto  $Diff(n)$  tiene estructura de grupo en donde la composición de difeomorfismos es su ley del producto.

**Definición 2.2.3.** Sean  $f, g \in \mathcal{E}_n$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son equivalentes por la derecha si existe  $h \in Diff(n)$  tal que  $g = f \circ h$ .

**Definición 2.2.4.** Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Decimos que  $f$  es (o está) *determinada* por su  $k$ -jet (o  $k$ -determinada por la derecha) si cada  $g \in \mathcal{E}_n$ , la cual tiene el mismo  $k$ -jet en 0 que  $f$ , es equivalente a  $f$  por la derecha. Asimismo, decimos que  $f$  es (o está) *finitamente determinada* (o *finitamente determinada por la derecha*) si es  $k$ -determinada por la derecha para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

**Observación 2.2.5.** Si  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{E}_n$ , denotaremos como  $\langle g_i \rangle$  al ideal generado por  $g_1, \dots, g_m$ .

## 2.3. Lema de Nakayama

En esta sección mostramos que a menudo es necesario probar que un ideal está contenido en otro; y esto se hace, por ejemplo, cuando se quiere mostrar que un ideal es de dimensión finita. Para hacer esto, usamos el *lema de Nakayama*, que ahora lo presentaremos en su forma más general. La demostración de este lema será de vital importancia pues nos ayudará a probar el teorema de Mather que viene más adelante.

Vamos a denotar como  $A$  a un anillo conmutativo con unidad.

**Definición 2.3.1.** Si  $A$  es cualquier anillo, a la intersección de todos los ideales maximales de  $A$  se le llama el *radical de Jacobson* de  $A$  y lo denotaremos por  $J(A)$ .

La definición anterior y la siguiente son equivalentes.

**Definición 2.3.2.** El radical de Jacobson se define como

$$\{a \mid 1 - ab \text{ es unidad para toda } b \in A\}.$$

**Lema 2.3.3 (Nakayama).** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado y sea  $I \subseteq A$  un ideal tal que  $I \subseteq J(A)$ .*

- i) *Si  $M = IM$ , entonces  $M = 0$ .*
- ii) *Si  $N$  es un submódulo de  $M$  tal que  $M = N + IM$ , entonces  $M = N$ .*

*Demostración.* i) Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de generadores de  $M$ . Por hipótesis podemos escribir

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

con  $a_{ij} \in I$ ; de aquí, es claro que  $x_1, \dots, x_n$  son soluciones del sistema de ecuaciones de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = 0$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker; entonces, por la regla de Cramer, para toda  $i$ ,  $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \cdot x_j = 0$ . Observemos ahora que en la expansión del determinante anterior todos los sumandos tienen un factor en  $I$  excepto el

término correspondiente a la diagonal que es de la forma  $(1 - a_{11}) \cdots (1 - a_{nn})$ ; por lo tanto el determinante anterior se expande como un 1 más una suma de elementos de  $I$ , digamos  $1 + c$  con  $c \in I \subseteq J(A)$ . Se sigue que  $d = \det(\delta_{ij} - a_{ij})$  es una unidad, pues de lo contrario existiría un ideal maximal  $m$  tal que  $d$  pertenece  $m$ , y como  $d = 1 + c$  con  $c \in J(A)$ , entonces  $c \in m$ , en consecuencia,  $1 \in m$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\det(\delta_{ij} - a_{ij})$  es una unidad. Así, la igualdad  $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \cdot x_i = 0$  implica que  $x_i = 0$  para todo  $i$  y por lo tanto  $M = 0$ .

ii) Tenemos que

$$M/N = (N + IM)/N = I(M/N)$$

y así, por i) se sigue que  $M/N = 0$ , por tanto,  $M = N$ .  $\square$

**Observación 2.3.4.** Con las hipótesis del lema de Nakayama se deduce también que si  $M \subset N + IM$  entonces  $M \subset N$ .

## 2.4. Teorema de Mather

Para empezar con esta sección vamos a enunciar el *teorema de Mather*, pero dejaremos su demostración para el final ya que primero queremos probar un corolario y hacer algunos ejemplos para entender de manera más clara el teorema.

**Teorema 2.4.1 (Mather).** *Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Si*

$$m_n^{k+1} \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

*entonces  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha. Si  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha, entonces*

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Como lo aclaramos antes, por ahora no tenemos las herramientas suficientes para probar este teorema; por tanto, dejaremos su demostración para más adelante, sin embargo, con la ayuda de este teorema vamos a probar el siguiente corolario.



**Corolario 2.4.2.** Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Entonces  $f$  es finitamente determinada por la derecha si y sólo si

$$m_n^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

para algún  $k$  entero positivo.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $f \in \mathcal{E}_n$  y supongamos que  $f$  es finitamente determinada por la derecha, entonces, en particular para algún  $k$ ,  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha, así, por el teorema de Mather se sigue que

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

y por lo tanto

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

$\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que para algún  $k$  entero positivo se cumple que

$$m_n^k \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

ahora, multiplicando esta contención por  $m_n^2$  obtenemos

$$m_n^{k+2} \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

entonces por el teorema de Mather,  $f$  es  $(k+1)$ -determinada por la derecha, y en consecuencia,  $f$  es finitamente determinada por la derecha.  $\square$

**Ejemplo 2.4.3.** Si  $f \in m_n - m_n^2$ , entonces  $f$  es 1-determinada por la derecha. Esto lo vemos fácilmente por el teorema de la función implícita.

**Ejemplo 2.4.4.** Sea  $f(x) = x^{k+1}$ . Entonces

$$m_1^{k+1} = m_1 \left\langle \frac{df}{dx} \right\rangle = \langle x \rangle \langle x^k \rangle = \langle x^{k+1} \rangle.$$

Pero  $f$  no es  $k$ -determinada, pues la función  $f$  y la función idénticamente 0 tienen el mismo  $k$ -jet en el origen.

**Ejemplo 2.4.5.** Sea  $f(x, y) = x^3 + y^3$ , entonces

$$\begin{aligned} m_2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle &= \langle x, y \rangle \langle x^2, y^2 \rangle \\ &= \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle \\ &= m_2^3. \end{aligned}$$

Por tanto  $f$  es 3-determinada.

**Ejemplo 2.4.6.** Sea  $f(x, y) = x^3 + xy^3$ , entonces

$$\begin{aligned} m_2^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle &= \langle x^2, xy, y^2 \rangle \langle x^2 + y^3, xy^2 \rangle \\ &= \langle x^4 + x^2y^3, x^3y^2, x^3y + xy^4, x^2y^3, x^2y^2 + y^5, xy^4 \rangle \\ &= \langle x^4, x^3y^2, x^3y, x^2y^3, x^2y^2 + y^5, xy^4 \rangle. \end{aligned}$$

Veamos que  $m_2^6 \subset m_2^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ , es decir, veamos que  $f$  es 5-determinada.

Sea  $h_1(x, y) = x^4$ ,  $h_2(x, y) = x^3y^2$ ,  $h_3(x, y) = x^3y$ ,  $h_4(x, y) = x^2y^3$ ,  $h_5(x, y) = x^2y^2 + y^5$  y  $h_6(x, y) = xy^4$ .

Ahora, sea

$$h = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4 + \alpha_5 h_5 + \alpha_6 h_6.$$

Por otro lado, sabemos que  $m_2^6 = \langle x^6, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^5, y^6 \rangle$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} x^6 &= x^2(x^4), \quad x^5y = x^2(x^3y), \quad x^4y^2 = x(x^3y^2), \quad x^3y^3 = x(x^2y^3), \\ x^2y^4 &= x(xy^4), \quad xy^5 = y(xy^4), \quad y^6 = y(x^2y^2 + y^5) - x^2y^3. \end{aligned}$$

Por tanto  $f$  es 5-determinada.

Ahora bien, si la ecuación

$$\begin{aligned} y^5 &= \alpha_1(x, y)x^4 + \alpha_2(x, y)x^3y^2 + \alpha_3(x, y)x^3y + \alpha_4(x, y)x^2y^3 \\ &\quad + \alpha_5(x, y)(x^2y^2 + y^5) + \alpha_6(x, y)xy^4 \end{aligned}$$

tiene solución para algunos gérmenes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  del anillo  $\mathcal{E}_2$  entonces al aplicar los operadores  $\frac{\partial^5}{\partial y^5}$  y  $\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2}$  a la ecuación anterior y evaluando

en cero tenemos que para el primer caso nos da que  $\alpha_5(0,0) = 1$  y para el segundo caso tenemos que  $\alpha_5(0,0) = 0$  lo cual no puede ser cierto, de esta forma la ecuación

$$y^5 = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_6 h_6$$

no tiene solución, es decir,  $m_2^5 \not\subset m_2^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ . Sin embargo, veremos en el capítulo 3 que, a pesar de esto,  $f$  es 4-determinada.

El teorema de Mather lo enunciamos al principio de esta sección, pero aún no teníamos las herramientas suficientes para su demostración. Ahora, con la ayuda del lema de Nakayama de la sección 2.3. y los resultados del lema y proposición que veremos a continuación ya podremos asegurar que hemos demostrado el teorema.

Empezamos con el siguiente lema que será la base de la demostración del teorema de Mather, y en el cual se hará uso del teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

**Lema 2.4.7.** *Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Si*

$$m_n^{k+1} \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + m_n^{k+2},$$

*entonces  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha.*

*Demostración.* Sea  $g \in \mathcal{E}_n$  y supongamos que  $f$  y  $g$  tienen el mismo  $k$ -jet en 0. Es decir,  $j^k f(0) = j^k g(0)$ . Lo que queremos probar es que  $g$  es equivalente por la derecha con  $f$ .

Sea  $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$  y consideremos la función  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x),$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Vemos que  $F$  es una homotopía. Ahora, consideremos la restricción de  $F$  a  $\mathbb{R}^n \times \{t\}$  y la definimos como  $F_t(x) = F(x,t)$ , entonces  $F$  es un germen definido en  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , y por tanto, por como definimos a  $F_t$ , tenemos que  $F_0 = f(x)$  y  $F_1 = g(x)$ .

Por otro lado, demostraremos que para toda  $t_0 \in [0,1]$  existe un germen  $H$  en el punto  $(0, t_0)$  de una función suave que va de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^n$ , tal que para todo  $(x,t)$  en un vecindad de  $(x, t_0)$  se cumplen las condiciones que siguen:

$$(1) \quad H(x, t_0) = x.$$

$$(2) \quad H(0, t) = 0.$$

$$(3) \quad F(H(x, t), t) = F(x, t_0).$$

Estas tres condiciones nos dicen que si  $t$  está en una vecindad pequeña de  $t_0$ , entonces el germen  $F_t$  es equivalente por la derecha a  $F_{t_0}$ . Esto se sigue del hecho que  $F_{t_0} = F_t(H(x, t))$ . Por tanto, como  $t \in [0, 1]$ , y el intervalo  $[0, 1]$  es compacto y conexo, además como  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ ; entonces  $g$  es equivalente por la derecha a  $f$ .

Ahora, derivamos la condición (3) con respecto a  $t$ ; y así, por la regla de la cadena, tenemos lo siguiente

$$(3') \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0.$$

así, con el resultado obtenido en la condición (3') y usando (1), vemos que las condiciones (1), (2) y (3) de arriba son equivalentes a (1), (2) y (3') respectivamente .

Ahora probaremos la existencia de un germen  $\xi$  en  $(0, t_0)$  de una función suave que va de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \xi_i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0.$$

$$(5) \quad \xi_i(0, t) = 0.$$

Entonces, por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, al ser  $\xi$  diferenciable existe un único germen  $H$  definido en  $(0, t_0)$  de una función suave que va de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^n$  tal que (1) se cumple y

$$(6) \quad \frac{\partial H_i(x, t)}{\partial t} = \xi_i(H(x, t), t).$$

Así, (3') se sigue de (4) y (6) y por otro lado (2) se sigue de (5) y la unicidad de  $H$  que a su vez satisface (1) y (6).

De este modo, sólo nos queda probar la existencia de  $\xi_i$  y que satisface (4) y (5). Para hacer esto, sea  $A$  el anillo de gérmenes en  $(0, t_0)$  de funciones suaves en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Entonces, la proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  induce un homomorfismo de anillos  $\pi^* : \mathcal{E}_n \rightarrow A$ , definido como  $\pi^*(f) = f \circ \pi$ . Dándole a  $A$  la estructura de  $\mathcal{E}_n$ -álgebra inducida por  $\pi^*$ , de modo que el ideal  $m_n^k A$

está definido. Ahora, como  $f$  y  $g$  tienen el mismo  $k$ -jet, es decir,  $g - f \in m_n^{k+1}$ , entonces tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \frac{\partial(g - f)}{\partial x_i} \in m_n^k A.$$

Por tanto, la hipótesis del lema implica que

$$\begin{aligned} m_n^{k+1} A &\subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle A + m_n^{k+2} A \\ &\subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle A + m_n^{k+2} A. \end{aligned}$$

Entonces, por el lema de Nakayama,

$$m_n^{k+1} A \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle A,$$

de modo que

$$g - f = \frac{\partial F}{\partial t} \in m_n^{k+1} A \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle A.$$

Y por lo tanto, la existencia de  $\xi_i$  que satisface (4) y (5) se sigue de inmediato.

Y así la demostración está completa.  $\square$

Recordemos que  $J^k(n, m)$  es el espacio de los  $k$ -jets de funciones suaves de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  con punto de salida y punto de llegada en el origen y además es un espacio vectorial real. Denotamos como  $L^k(n)$  al subconjunto de  $J^k(n, n)$  de  $k$ -jets que son invertibles bajo la composición. Es decir,  $L^k(n)$  es el grupo de  $k$ -jets en el origen que a su vez pertenecen al grupo  $Diff(n)$ .

Notemos que un elemento en  $J^k(n, n)$  está en  $L^k(n)$  si y sólo si su 1-jet es un elemento de  $L^1(n)$ , esto se debe al teorema de la función inversa; además,  $L^1(n)$  puede ser identificado con el grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  de matrices invertibles  $n \times n$  con entradas reales.

El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  es un *grupo de Lie* de dimensión finita. Mas aún,  $GL(n, \mathbb{R})$  es un subconjunto abierto del espacio de matrices  $n \times n$  con entradas reales y por tanto es una variedad de dimensión  $n^2$ .

Así,  $L^k(n)$  también tiene estructura de un grupo de Lie de dimensión finita.

Denotaremos como  $\mathcal{E}_{n,m}$  al conjunto de gérmenes en el origen de funciones suaves que van de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Hay una operación natural de  $Diff(n)$  sobre  $\mathcal{E}_{n,m}$  definida como  $h \cdot f = f \circ h^{-1}$ , donde  $f \in \mathcal{E}_{n,m}$  y  $h \in Diff(n)$ . Entonces, la operación anterior induce una nueva operación, pero ahora, de  $L^k(n)$  sobre  $J^k(n,m)$  definida como  $\gamma \cdot z = j^k(h \cdot f)(0)$ , con  $z = j^k f(0) \in J^k(n,m)$  y  $\gamma = j^k h(0) \in L^k(n)$ . Por tanto, la operación de  $L^k(n)$  sobre  $J^k(n,m)$  es una *acción suave* del grupo de Lie  $L^k(n)$ . Esto es, el mapeo definido como  $(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z$  que va de  $L^k(n) \times J^k(n,m)$  a  $J^k(n,m)$  es suave, y satisface las siguientes dos condiciones:

1. Si  $\gamma_1, \gamma_2 \in L^k(n)$  y  $z \in J^k(n,m)$ , entonces  $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot z) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot z$ .
2. Para cualquier  $z \in J^k(n,m)$ ,  $e \cdot z = z$ , donde  $e$  es el elemento identidad de  $L^k(n)$ .

Si  $z \in J^k(n,m)$ , entonces la imagen del mapeo  $\gamma \mapsto \gamma \cdot z$  de  $L^k(n)$  en  $J^k(n,m)$  es llamada la *órbita* de  $z$  y se denota como  $L^k(n) \cdot z$ .

La segunda parte del teorema de Mather quedará demostrada con las pruebas de las siguientes proposición y lema.

**Proposición 2.4.8.** *Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Supongamos que el  $(k+1)$ -jet de  $f$  es determinado por la derecha por su  $k$ -jet; es decir, si  $g \in \mathcal{E}_n$  tiene el mismo  $k$ -jet que  $f$ , entonces existe un  $h \in Diff(n)$  tal que  $g$  tiene el mismo  $(k+1)$ -jet que  $f \circ h$ . Entonces  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha.*

*Demostración.* Supongamos que  $f(0) = 0$ , y sea  $z = j^{k+1} f(0)$ . Sea  $U \subset J^{k+1}(n,1)$ ; es decir,  $U$  es un subconjunto donde todos sus elementos tienen el mismo  $k$ -jet que  $f$  en 0.

Sea  $V = L^{k+1}(n) \cdot z$  la órbita de  $z$  bajo la acción de  $L^{k+1}(n)$ . Entonces,  $U$  y  $V$  son subvariedades de  $J^{k+1}(n,1)$ , además si suponemos que  $f$  es  $k$ -determinada entonces tiene el mismo  $k$ -jet que cualquier elemento de la órbita  $V$  y por tanto son equivalentes por la derecha; es decir,  $U \subset V$ . Por tanto,  $T_z U \subset T_z V$ .

Sea  $\pi : m_n \rightarrow J^{k+1}(n,1)$  la proyección canónica, esto es,  $\pi(f) = j^{k+1} f(0)$  para toda  $f \in m_n$ . Entonces

$$T_z U = \pi \left( m_n^{k+1} \right),$$

ya que  $U$  es el subespacio afín  $j^{k+1} f(0) + \pi \left( m_n^{k+1} \right)$  de  $J^{k+1}(n,1)$ . Por otro lado, probemos que

$$T_z V = \pi \left( m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right).$$

Entonces, como  $L^{k+1}(n)$  es un grupo de Lie de dimensión finita y además es un subconjunto abierto del espacio lineal  $J^{k+1}(n, n)$  esto garantiza la existencia del espacio tangente; así, cada elemento de  $T_e(L^{k+1}(n))$  puede ser visto como el vector tangente  $\gamma'(0)$  de una curva suave  $\gamma(t) = j^{k+1}h_t(0)$ , donde  $h_t(x) = Id(x) + tv(x)$ , con  $v \in \mathcal{E}_{n,n}$  y  $v(0) = 0$ , y con  $Id$  como la función identidad; es decir, queremos unir al germen  $Id$  con el germen  $h = Id + v$  mediante la curva continua de gérmenes  $h_t$ . Por tanto, la tangente a la curva en  $t = 0$  está dada por la siguiente derivada evaluada en cero, entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (\gamma(t) \cdot z) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (\pi (f \circ h_t^{-1})) \right|_{t=0} \\ &= \pi \left( \left. \frac{d}{dt} (f \circ h_t^{-1}) \right|_{t=0} \right) \\ &= \pi \left( \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h_t^{-1}}{\partial t} \right|_{t=0} \right), \end{aligned}$$

en consecuencia  $T_z V \subset \pi \left( m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \right)$ .

Ahora, de manera inversa, sea  $\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i$ , donde  $v_i \in m_n$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Entonces

$$\xi = \frac{d}{dt} (f \circ h_t),$$

donde  $h_t = Id + tv$ , con  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Por tanto

$$\pi \left( m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \right) \subset T_z V.$$

Por último, que se cumpla la contención  $T_z U \subset T_z V$  significa que

$$\pi \left( m_n^{k+1} \right) \subset \pi \left( m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \right),$$

por lo tanto se sigue que

$$m_n^{k+1} + \ker(\pi) \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + \ker(\pi)$$

y como

$$m_n^{k+1} \subset m_n^{k+1} + \ker(\pi)$$

concluimos que

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n^{k+2},$$

pues  $\ker(\pi) = m_n^{k+2}$ .

De esta forma, por el lema 2.4.7. tenemos que  $f$  es  $(k+1)$ -determinada, ya que el  $(k+1)$ -jet de  $f$  es determinado por la derecha por su  $k$ -jet, entonces  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha.  $\square$

Por último demostraremos el siguiente lema y por tanto la demostración del teorema de Mather estará completa.

**Lema 2.4.9.** *Si  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha, entonces*

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

*Demostración.* Por la proposición 2.4.8. tenemos que

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + m_n^{k+2},$$

y entonces, por el lema de Nakayama se sigue que

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

$\square$

Vamos a terminar este capítulo con un criterio geométrico donde  $f \in \mathcal{E}_n$  es finitamente determinada pero en el caso que  $f$  es analítica. Queremos adelantar que no haremos las pruebas de los resultados, ya que esto escapa de los planes de este trabajo, sin embargo vamos a dar una fuente donde las demostraciones pueden consultarse.

Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Denotamos como  $\Sigma(f)$  el conjunto

$$\Sigma(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \right\}.$$

$\Sigma(f)$  es el germen en 0 de un conjunto en  $\mathbb{R}^n$ .



Denotaremos como  $f^{\mathbb{C}}$  al germen en 0 de una función holomorfa de  $\mathbb{C}^n$  que extiende  $f$ . Sea  $\Sigma(f^{\mathbb{C}})$  el germen

$$\Sigma(f^{\mathbb{C}}) = \left\{ x \in \mathbb{C}^n \mid \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial x_n}(x) = 0 \right\}.$$

Entonces  $\Sigma(f^{\mathbb{C}})$  es el germen en 0 de un subconjunto analítico de  $\mathbb{C}^n$ .

**Proposición 2.4.10.**  $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subset \{0\}$  si y sólo si  $m_n^k \subset \left\langle \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\mathbb{C}}}{\partial x_n} \right\rangle$  para alguna  $k$ .

**Corolario 2.4.11.** Si  $f \in \mathcal{E}_n$  es analítica, entonces  $f$  es finitamente determinada por la derecha si y sólo si  $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subset \{0\}$ .

**Corolario 2.4.12.** Si  $f \in \mathcal{E}_{n,m}$  es analítica, entonces  $f$  es finitamente determinada por la derecha si y sólo si  $\Sigma(f^{\mathbb{C}}) \subset \{0\}$ .

La demostración de estos resultados se pueden consultar en [3].

# Capítulo 3

## Singularidades simples y clasificación

En la *teoría de singularidades*, la clasificación e identificación de singularidades de gérmenes con respecto a una relación de equivalencia es un problema fundamental que surge de manera natural. Y al hacer este tipo de clasificación, básicamente lo que estamos haciendo es encontrar una lista de gérmenes y mostrar que todos los gérmenes son equivalentes a un tipo de germen en la lista de clasificación, es decir, lo que estamos argumentando es que queremos encontrar un criterio que describa cómo encontrar un germen en la lista. En este capítulo veremos una clasificación de las *singularidades simples* dada por el matemático ruso Vladimir Arnold (1972).

### 3.1. Gérmenes simples y codimensión

Empezaremos esta sección con nuestra definición de germen simple.

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un germen suave con punto de salida y punto de llegada en 0 y que además sus primeras derivadas parciales se anulan en 0. Se dice que  $f$  es *simple* si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1)  $f$  es finitamente determinada por la derecha.
- 2) Para un  $k$  suficientemente grande, existe una vecindad del jet  $j^k f(0)$  en  $J^k(n, 1)$  que interseca solamente una cantidad finita de órbitas de la acción del grupo  $L^k(n)$  sobre  $J^k(n, 1)$ .

Para tratar de entender todo esto, vamos a dar el siguiente ejemplo y éste nos servirá para ir familiarizandonos con nuestra definición.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $f \in \mathcal{E}_1$  un germen definido como  $f(x) = x^k$ . Lo que queremos ver es que  $f$  es simple.

Entonces, para ver que  $f$  es simple debemos probar primero que es finitamente determinada por la derecha. Pero esto es claro ya que vimos en el teorema de Mather 2.4.1 que si se cumplía que

$$m_n^{k+1} \subset m_n^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

entonces  $f$  era  $k$ -determinada por la derecha. Así, en este caso tenemos que  $n = 1$ , entonces

1.  $m_1^{k+1} = \langle x \rangle^{k+1} = \langle x^{k+1} \rangle$ .
2.  $m_1^2 = m_1 \cdot m_1 = \langle x \rangle \cdot \langle x \rangle = \langle x^2 \rangle$ .
3.  $\left\langle \frac{df}{dx} \right\rangle = \langle kx^{k-1} \rangle = \langle x^{k-1} \rangle$ .

Vemos que

$$\langle x^{k+1} \rangle = \langle x^2 \rangle \langle x^{k-1} \rangle,$$

es decir, debido a la igualdad, también se cumple la contención

$$m_1^{k+1} \subset m_1^2 \left\langle \frac{df}{dx} \right\rangle.$$

Por lo tanto,  $f$  es finitamente determinada por la derecha.

Ahora debemos ver que para un  $k$  grande, existe una vecindad del jet  $j^k f(0)$  en  $J^k(1, 1)$  que intersecta a una cantidad finita de órbitas de la acción del grupo  $L^k(1)$  sobre  $J^k(1, 1)$ .

Pero vemos que cuando  $l \geq k$  entonces el  $l$ -jet de  $f$  es  $j^l f(0) = x^k$ ; así, cualquier vecindad de  $j^l f(0)$  intersecta sólo a las órbitas de los gérmenes de tipo  $\pm x^j$ , pero esto se da porque las órbitas son precisamente los jets cuando  $j < k$  y los  $j$ -jets tienen la misma forma que los gérmenes. Por lo tanto,  $f$  es simple.

Ahora damos el siguiente ejemplo de un germen finitamente determinado pero no simple.

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $f \in \mathcal{E}_2$  definida como  $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)$ . Veremos que  $f$  no es simple, aunque sí finitamente determinada.

Por corolario 2.4.11, vemos fácilmente que  $f$  es finitamente determinada.

Ahora, consideremos la familia de funciones de parámetro 1 definidas como

$$f_\lambda(x, y) = xy(x + y)(x - \lambda y), \quad |\lambda - 1| < 1/2.$$

Entonces, para cada  $\lambda$ , el conjunto de ceros de  $f_\lambda$  son cuatro líneas en  $\mathbb{R}^2$ .

La razón cruzada de estas cuatro líneas es invariante bajo un automorfismo lineal. Así, dadas las cuatro líneas en coordenadas homogéneas  $(\xi_i : \eta_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , tenemos que  $Y_i = \frac{\xi_i}{\eta_i}$ , y esto nos define la razón cruzada como

$$\frac{(Y_3 - Y_1)(Y_4 - Y_2)}{(Y_4 - Y_1)(Y_3 - Y_2)} \text{ si } Y_2 \neq \infty,$$

$$\frac{Y_3 - Y_1}{Y_4 - Y_1} \text{ si } Y_2 = \infty.$$

Entonces, al variar el orden de las líneas, obtenemos seis razones cruzadas, que son

$$-\lambda, \quad -\frac{1}{\lambda}, \quad 1 + \lambda, \quad \frac{1}{1 + \lambda}, \quad \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad \frac{1 + \lambda}{\lambda}.$$

Por tanto, los gérmenes de  $f_\lambda$  no son equivalentes por la derecha, ya que el mapeo tangente de una equivalencia debería preservar las razones cruzadas. Por ende, existe una cantidad no numerable de órbitas en  $J^k(2, 1)$ ,  $k \geq 4$ , que intersectan al jet  $j^k f(0)$ .

**Observación 3.1.4.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un germen de una función suave con punto de salida y punto de llegada en 0. Si para alguna  $i$ , se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$ , entonces  $f$  es 1-determinada por la derecha.

En lo que resta de este capítulo trabajaremos con los gérmenes  $f$  donde todas sus primeras derivadas parciales se anulan en 0, es decir, consideraremos sólo gérmenes  $f \in m_n^2$ .

El siguiente teorema, debido a Vladimir Arnold, clasifica los gérmenes simples en cinco categorías. La demostración de este teorema la iremos haciendo en varios pasos, ya que, debido a su complejidad tenemos que ayudarnos de algunos lemas, teoremas y definiciones. Lo vamos a enunciar ahora y al final de este capítulo señalaremos cuando su demostración esté completa.

**Teorema 3.1.5 (Arnold).** *Si  $f \in \mathcal{E}_n$  es simple, entonces  $f$  es equivalente por la derecha a uno de los siguientes gérmenes.*  
*(En lo que sigue vamos a suponer que  $x_1, \dots, x_n$  son las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ , y además  $Q$  denotará una forma cuadrática no degenerada en las variables indicadas).*

$$\begin{array}{ll}
 A_k & Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \pm x^{k+1}, \quad k \geq 1 \\
 D_k & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2 x \pm x^{k-1}, \quad k \geq 4 \\
 E_6 & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm x^4 \\
 E_7 & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + yx^3 \\
 E_8 & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + x^5
 \end{array}$$

**Lema 3.1.6 (Morse).** *Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de  $f$ . Entonces existe un sistema de coordenadas local  $(x'_1, \dots, x'_n)$  en una vecindad  $U$  de  $p$ , de tal forma que  $x'_i(p) = 0$  con  $1 \leq i \leq n$ , y tal que en  $U$  se cumple que*

$$f = f(p) - x_1'^2 - \dots - x_k'^2 + x_{k+1}'^2 + \dots + x_n'^2.$$

Un resultado fundamental que se estudia en los cursos de álgebra lineal es la *ley de inercia de Sylvester*. A continuación escribimos este teorema, el cual nos ayudará en la clasificación de los gérmenes simples mencionados en el teorema de Arnold.

**Teorema 3.1.7 (ley de inercia de Sylvester).** *Sea  $Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica sobre el espacio  $V$  de dimensión  $n$ . Entonces existen enteros  $r$  y  $s$  con  $1 \leq s \leq r \leq n$  y una base  $\{b_1, \dots, b_n\}$  de  $V$  tal que para cualquier vector  $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$  en  $V$  se cumple que*

$$Q(x, x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

El resultado del teorema anterior es posible hacerlo mediante un cambio de coordenadas lineal; por lo tanto, se sigue que cada uno de los grupos  $A_k, D_k, E_6, E_7$  y  $E_8$  representan sólo un número finito de clases de equivalencia por la derecha de gérmenes.

Como habíamos dicho anteriormente, iremos haciendo la demostración del teorema de Arnold paso a paso; y vamos a empezar por dar la siguiente definición que corresponde a la noción de *codimensión* de un germen. También enunciaremos dos teoremas que nos ayudarán a desarrollar la prueba que necesitamos.

**Definición 3.1.8.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un germen suave con punto de salida y punto de llegada en 0, donde además las primeras derivadas parciales se anulan en 0. La *codimensión* de  $f$  se define como

$$\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \overbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle}^{m_n}.$$

Cuando consideramos a  $m_n$  y  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$  como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales tenemos que  $\overbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle}^{m_n}$  también es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, además puede tener dimensión finita o infinita, por lo tanto, la codimensión puede ser finita o infinita.

En lo que sigue de este trabajo, estaremos usando indistintamente la notación  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$  ó  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle$  para referirnos al *ideal jacobiano* generado por las derivadas parciales de  $f$ .

Ahora enunciaremos el siguiente lema, el cual relaciona la codimensión con la determinación de gérmenes.

**Lema 3.1.9.** *Si  $f$  es finitamente determinada por la derecha, entonces  $\text{cod}(f)$  es finita. Inversamente, si  $\text{cod}(f)$  es finita, entonces  $f$  es finitamente determinada por la derecha; más aún,  $f$  es determinada por la derecha por su jet de orden  $\text{cod}(f) + 2$ .*

*Demostración.* Para la primera parte del lema, supongamos que  $f$  es finitamente determinada. Entonces, tenemos que

$$\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \overbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}^{m_n} \leq \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{m_n^k},$$

y como  $\frac{m_n}{m_n^k}$  es un subespacio vectorial de  $\frac{\mathcal{E}_n}{m_n^k}$  el cual es de dimensión finita se sigue que la codimensión de  $f$  es finita.

Para la segunda parte vamos a suponer el lema de Stefan 3.3.3, el cual veremos en la sección 3.3; y también supongamos que  $\text{cod}(f)$  es finita. Entonces, sabemos que

$$m_n = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n \supset \cdots \supset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n^k \supset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n^{k+1} \supset \cdots$$

por tanto, para cada  $j = 1, 2, \dots$ , se cumple que

$$m_n^{j+1} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \subset m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \Rightarrow \frac{m_n^{j+1} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \subset \frac{m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle},$$

por tanto

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n^{j+1} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \leq \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle},$$

y además

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \leq \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} = \text{cod}(f).$$

Esto último se cumple porque la identificación

$$\frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \rightarrow \frac{m_n + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}$$

es un epimorfismo.

Por tanto, por el lema de Nakayama tenemos que  $m_n^j \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle$ ; así, para alguna  $j \leq \text{cod}(f) + 1$  obtenemos

$$m_n^j + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = m_n^{j+1} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Como  $j \leq \text{cod}(f) + 1$ , se sigue del teorema de Mather 2.4.1 que  $f$  es determinada por la derecha por su  $(\text{cod}(f) + 2)$ -jet.  $\square$

**Lema 3.1.10.** *Supóngase que  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha. Entonces la órbita de  $z = j^k f(0)$  bajo la acción de  $L^k(n)$  sobre  $J^k(n, 1)$  tiene codimensión  $n + \text{cod}(f)$ .*

*Demostración.* Para esta prueba nos ayudaremos del resultado visto en la proposición 2.4.8 que nos habla acerca del espacio tangente y su relación con la codimensión.

Por tanto, primero vamos a definir  $V = L^k(n) \cdot z$  como la órbita del jet  $z$  bajo la acción del grupo  $L^k(n)$ .

Ahora, sea

$$\pi : m_n \rightarrow J^k(n, 1)$$

la proyección canónica.

Entonces, en la proposición 2.4.8 vimos que  $T_z V = \pi \left( m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \right)$ ; así, por medio de la proyección canónica podemos identificar el espacio tangente de la forma que sigue

$$T_z V = \frac{m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n^{k+1}}{m_n^{k+1}}.$$

Ahora, por el teorema de Mather  $m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle$ , por consiguiente

$$\begin{aligned} \text{cod}(V) &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + m_n^{k+1}} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}. \end{aligned}$$

Así, lo que debemos probar es que  $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} = n$ . Y esto lo vamos



a hacer por contradicción; por tanto, supongamos que

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle}{m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \neq n.$$

Es decir, que la dimensión sea diferente a  $n$  sería lo mismo decir que el conjunto  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  no es linealmente independiente módulo  $m_n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle$ . Por lo tanto, deben existir elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  no todos cero, y también elementos  $u_1, \dots, u_n \in m_n$ , tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

de aquí, es claro que

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - u_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Lo anterior nos da una idea para definir un operador sobre un campo vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto, sea  $X$  el germen en 0 de un campo vectorial sobre el espacio  $\mathbb{R}^n$  definido como

$$X = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - u_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

entonces  $X \cdot f = 0$ .

Como antes habíamos dicho que no todos los elementos  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  son cero, esto nos apunta que al menos uno de los  $\alpha_i \neq 0$ ; es decir, este hecho nos muestra que el germen  $X$  no se anula en 0. Por tanto, existe un sistema de coordenadas local suave de la forma  $(x'_1, \dots, x'_n)$  en 0, tal que

$$X = \frac{\partial}{\partial x'_1}.$$

Entonces, el hecho que  $X \cdot f = 0$  pero ahora en el nuevo sistema coordinado, significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x'_1} = 0;$$

es decir,  $f$  es una función solamente en las coordenadas  $x'_2, \dots, x'_n$ .

Se sigue, por tanto, que el conjunto

$$x'_1, x_1'^2, x_1'^3, \dots$$

es linealmente independiente módulo  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right\rangle$ , y como este conjunto es infinito, entonces tenemos que

$$\text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} = \infty.$$

Lo cual, por el lema anterior es una contradicción pues al ser  $f$  finitamente determinada por la derecha, su codimensión es finita.  $\square$

**Observación 3.1.11.** Si el germen  $f$  junto con sus primeras derivadas parciales se anulan en el origen entonces podemos considerar la órbita de  $j^k f(0)$  bajo la acción de  $L^k(n)$  sobre  $m_n^2/m_n^{k+1}$  más que sobre  $J^k(n, 1) = m_n/m_n^{k+1}$ . El lema anterior nos asegura que la codimensión de esta órbita en  $m_n^2/m_n^{k+1}$  es la  $\text{cod}(f)$  para cualquier  $k$  tal que  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha.

El siguiente teorema solamente lo mencionaremos pero no lo demostramos, pero su demostración nos ayudará para comprender de mejor manera los lemas y teoremas posteriores. La prueba se puede encontrar en [2]. Comenzamos dando las siguientes definiciones.

**Definición 3.1.12.** Sea  $\mathcal{F} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Sea  $\mathcal{F}[x] = \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios en  $n$  variables con coeficientes en  $\mathcal{F}$ . Un subconjunto algebraicamente cerrado  $X$  de  $\mathcal{F}^n$  es el conjunto de ceros de un conjunto finito de polinomios  $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}[x]$ ; es decir, el conjunto de todos los  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^n$  tal que

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

A  $X$  lo denotamos como  $X = V(f_1, \dots, f_m)$ .

El espacio  $J^k(n, m)$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Denotamos como  $\pi_k : J(n, m) \rightarrow J^k(n, m)$  a la proyección canónica. Si  $k' > k$ , denotamos como  $\pi_{k, k'}$ , a la proyección canónica de  $J^{k'}(n, m) \rightarrow J^k(n, m)$ .

Si suponemos que para toda  $k$  tenemos un subconjunto algebraicamente cerrado  $X_k$  de  $J^k(n, m)$  tal que  $\pi_{k, k+1}(X_{k+1}) \subset X_k$ . Entonces la sucesión  $d_k = \text{cod}_{J^k(n, m)}(X_k)$  es no decreciente.

**Definición 3.1.13.** Sea  $X = \bigcap_{k \geq 1} \pi_k^{-1}(X_k) \subset J(n, m)$ . Decimos que  $X$  es un subconjunto proalgebraico de  $J(n, m)$  de codimensión  $d = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k$ . Donde  $d$  es un entero positivo ó  $\infty$ .

**Teorema 3.1.14 (Tougeron).** Sea  $\Sigma$  el conjunto de elementos de  $J(n, 1) = m$  que no son finitamente determinados por la derecha. Entonces  $\Sigma$  es un subconjunto proalgebraico de codimensión infinita.

La siguientes definición y observación se deben al teorema de Tougeron.

**Definición 3.1.15.** Si  $z \in J^k(n, 1)$  y  $k$  es un entero positivo, se define

$$\tau(z) = \tau_k(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{m_n^k + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle},$$

donde  $z = j^k f(0)$ .

**Observación 3.1.16.** El subconjunto definido como

$$\Sigma_k = \left\{ z \in J^k(n, 1) \mid \tau(z) \geq k \right\},$$

es un subconjunto algebraicamente cerrado de  $J^k(n, 1)$ .

**Lema 3.1.17.** El jet  $j^k f(0) \in \Sigma_k$  si y sólo si  $\text{cod}(f) > k - 2$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $z = j^k f(0) \in \Sigma_k$ , entonces  $\tau(z) > k - 1$ . Por otro lado, como

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \subset m_n^k + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \Rightarrow \frac{m_n}{m_n^k + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \subset \frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle},$$

y así, como

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \geq \dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{m_n^k + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \geq k - 1,$$

se sigue que  $\text{cod}(f) > k - 2$ .

$\Leftrightarrow$ ) Lo vamos a hacer por contradicción. Por tanto, supongamos que  $\text{cod}(f) > k - 2$ , y también supongamos que  $\tau_k(f) \leq k - 1$ . Así, por el lema de Nakayama, para alguna  $j < k$  tenemos que  $m_n^j \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle$ . Por consiguiente

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{m_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle} \leq k - 1,$$

esto quiere decir que  $\text{cod}(f) \leq k - 2$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Los tres teoremas que siguen no los vamos a probar por ahora, su demostración estará completa con la prueba del lema 3.3.1 de la sección 3.3, pero los mencionamos ahora porque son preliminares al importante teorema de Gromoll-Meyer que veremos y demostraremos en la siguiente sección. Empezamos con el siguiente teorema, el cual nos da las codimensiones de los gérmenes simples.

**Teorema 3.1.18.** *Las codimensiones de los gérmenes simples son:*

$$\begin{aligned} \text{cod}(A_k) &= k - 1, \quad k \geq 1 \\ \text{cod}(D_k) &= k - 1, \quad k \geq 4 \\ \text{cod}(E_6) &= 5 \\ \text{cod}(E_7) &= 6 \\ \text{cod}(E_8) &= 7 \end{aligned}$$

**Teorema 3.1.19.** *Todos los gérmenes de codimensión menor o igual a 6 son simples.*

**Teorema 3.1.20.**  $\Sigma_8 \subset J^8(n, 1)$  con  $\text{cod}(\Sigma_8) = n + 6$ . Suponer que  $f \in \mathcal{E}_n$  se anula en el origen junto con sus primeras derivadas parciales. Si  $j^8 f(0) \notin \Sigma_8$  entonces  $f$  es un germen simple con  $\text{cod}(f) \leq 6$ .

## 3.2. Teorema de Gromoll-Meyer

Como lo dijimos anteriormente, al final del capítulo todas las demostraciones de los teoremas pasados estarán completas; por ahora, vamos a empezar por demostrar el *teorema de Gromoll-Meyer* el cual relaciona un germen con

una forma cuadrática no degenerada por medio de la equivalencia por la derecha.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un germen suave con punto de salida y punto de llegada en 0 cuyas primeras derivadas parciales se anulan en 0.

**Teorema 3.2.1 (Gromoll-Meyer).** *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable con  $Df(0) = 0$  y  $D^2f(0)$  de rango  $r$ , entonces existe un difeomorfismo  $\varphi : W \rightarrow V$  con  $0 \in W, V$  y  $V \subset U$  tal que*

$$(f \circ \varphi)(x) = f(0) + \sum_{j=1}^r \varepsilon_j x_j^2 + g(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

con  $g(0) = Dg(0) = D^2g(0) = 0$  y  $|\varepsilon_j| = 1$ .

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  tenemos que

$$f(t) = f(0) + t^2g(t) = f(0) \pm (t|g(t)|^{1/2})^2$$

donde  $g(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$ .

Si  $g(0) = 0$  es claro. Ahora, si  $g(0) \neq 0$  definimos  $\varphi(t) = t|g(t)|^{1/2}$ , entonces se sigue que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = |g(0)|^{1/2} \neq 0$  y  $(f(0) \pm t^2) \circ \varphi(t) = f(0) \pm \varphi(t)^2 = f(t)$ .

Ahora supongamos que se cumple para  $n - 1$ .

Así, consideremos  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como arriba y sea  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , de la

forma  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  tal que  $D^2(f \circ A)(0)$  tiene en el lugar  $(1, 1)$  un

elemento  $\neq 0$ , entonces, por la regla de la cadena tenemos que

$$D(f \circ A)(x) = Df(A(x)) \cdot A \Rightarrow D(f \circ A)(0) = Df(0)A = 0,$$

y por tanto

$$D(f \circ A)(x) = \left( \sum_{l=1}^n a_{l1} \frac{\partial f}{\partial x_l}(A(x)), \dots, \sum_{l=1}^n a_{ln} \frac{\partial f}{\partial x_l}(A(x)) \right)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{l=1}^n a_{li} \frac{\partial f}{\partial x_l}(A(x)) \right) &= \sum_{l=1}^n a_{li} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_l}(A(x)) \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{li} \sum_{m=1}^n a_{mj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_l}(A(x)) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{li} a_{mj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_l}(A(x)) \end{aligned}$$

entonces  $D^2(f \circ A) = A^t D^2 f(A(x)) A$ .

Por otro lado, como  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$  es una forma cuadrática simétrica,

existe  $A$  tal que  $A^t Df(0)A$  es de la forma 
$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea  $h = f \circ A$ , entonces, por el lema de Hadamard tenemos que

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= h(0, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial h}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n) x_1 \\ &\quad + \bar{h}(x_1, x_2, \dots, x_n) x_1^2 \end{aligned}$$

donde  $\bar{h}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(0) \neq 0$ .

Ahora, consideremos  $\frac{\partial h}{\partial x_1} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\frac{\partial h}{\partial x_1}(0) = 0$  y  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)(0) \neq$

0. Entonces, por el teorema de la función implícita existe un difeomorfismo  $g : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  si y sólo si  $x_1 = g(x_2, \dots, x_n)$ .

Por tanto, sea  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$  con

- 1)  $\psi(0) = 0$ .
- 2)  $D\psi(0)$  es invertible.
- 3)  $\psi(0, x_2, \dots, x_n) = (g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ .

En el inciso 2), tenemos que  $D\psi = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \vdots & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ .

Ahora, por lema de Hadamard tenemos que para  $h \circ \psi$  con  $h = f \circ A$  se sigue que

$$(h \circ \psi)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (h \circ \psi)(0, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial(h \circ \psi)}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n)x_1 + \bar{h}(x_1, \dots, x_n)x_1^2$$

y así,

$$\frac{\partial(h \circ \psi)}{\partial x_1}(x) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) (\psi(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \circ \psi(x)$$

además

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h \circ \psi)}{\partial x_1}(0, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\partial h}{\partial x_1}(\psi(0, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_1}(g(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\frac{\partial^2(h \circ \psi)}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \circ \psi(x)$$

y

$$\frac{\partial^2(h \circ \psi)}{\partial x_1^2}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \psi(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(0) \neq 0.$$

entonces, reescribiendo  $h \circ \psi$  de arriba, nos queda

$$(h \circ \psi)(x_1, \dots, x_n) = (h \circ \psi)(0, x_2, \dots, x_n) \pm \left( \bar{h}(x_1, \dots, x_n)^{1/2} x_1 \right)^2$$

Ahora, sea

$$\varsigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( |\bar{h}(x_1, \dots, x_n)|^{1/2} x_1, x_2, \dots, x_n \right)$$

entonces  $\varsigma(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$ , de esta manera

$$\varsigma^{-1} = (g(y_1, y_2, \dots, y_n)y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y  $\varsigma \circ \varsigma^{-1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  entonces

$$\left( |\bar{h}(x_1, \dots, x_n)|^{1/2} x_1 \right) \circ (g(y_1, \dots, y_n)y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1,$$

por tanto

$$(h \circ \psi) \circ \varsigma^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \pm y_1^2 + (h \circ \psi)(0, y_2, \dots, y_n).$$

Por último, aplicando inducción a  $(h \circ \psi)(0, y_2, \dots, y_n)$ , existe un difeomorfismo  $\mu : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  tal que

$$\left( (h \circ \psi) \circ \varsigma^{-1} \right) \circ \mu(z_2, \dots, z_n) = \sum_{i=2}^r \varepsilon_i z_i^2 + k(z_{r+1}, \dots, z_n)$$

con  $|\varepsilon_i| = 1$  y  $k(0) = Dk(0) = D^2k(0) = 0$ , y además

$$(h \circ \psi \circ \varsigma^{-1})(Id \times \mu)(z_1, z_2, \dots, z_n) = \pm z_1^2 + \sum_{i=2}^r \varepsilon_i z_i^2 + k(z_{r+1}, \dots, z_n)$$

con  $k(0) = Dk(0) = D^2k(0) = 0$ , y así

$$\left( f \circ A \circ \psi \circ \varsigma^{-1} \right) (Id \times \mu)(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i z_i^2 + k(z_{r+1}, \dots, z_n)$$

con  $|\varepsilon_i| = 1$  y  $k(0) = Dk(0) = D^2k(0) = 0$ .

Por último queremos hacer notar que si  $r = n$  entonces

$$\left( f \circ A \circ \psi \circ \varsigma^{-1} \right) (Id \times \mu)(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i^2,$$

con  $|\varepsilon_i| = 1$ . □

**Observación 3.2.2.** El número entero  $r$  en el teorema anterior es llamado el *rango hermitiano* de  $f$ ; es decir,  $r$  es el rango de la matriz hermitiana de la forma

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right).$$



**Proposición 3.2.3.** *Si  $f$  es simple, entonces el rango hermitiano de la matriz  $r \geq n - 2$ .*

*Demostración.* El 2-jet  $j^2f(0)$ , al ser un polinomio, define una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^n$  en el que su rango es  $r$ . El núcleo de esta forma cuadrática es un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$  tal que su dimensión es  $n - r$ , en donde el 3-jet  $j^3f(0)$  define una forma cúbica que es independiente del sistema coordenado.

Si  $\phi \in Diff(n)$  entonces la derivada  $d\phi(0)$ , vista como un operador

$$d\phi : j^2f \rightarrow j^2(f \circ \phi^{-1})$$

mapea el núcleo de  $j^2f(0)$  en el núcleo de  $j^2(f \circ \phi^{-1})(0)$ , en donde  $d\phi(0)$  es un isomorfismo.

Por tanto, la acción del grupo  $L^3(n)$  sobre  $J^3(n, 1)$  induce otra acción pero ahora en el grupo  $GL(n - r, \mathbb{R})$  sobre el espacio de las formas cúbicas en  $n - r$  variables.

Así, si dos gérmenes  $f, g$  donde sus formas cúbicas tienen rango Hermítico  $r$  caen en órbitas diferentes de la acción del grupo  $GL(n - r, \mathbb{R})$ , entonces, esto nos dice que los 3-jet de los dos gérmenes  $f$  y  $g$ ,  $j^3f(0)$  y  $j^3g(0)$  están en órbitas diferentes del grupo  $L^3(n)$ . Y por lo tanto, si los 3-jet,  $j^3f(0)$  y  $j^3g(0)$  están en órbitas diferentes del grupo  $L^3(n)$  sobre  $J^3(n, 1)$ , entonces los  $k$ -jets,  $j^kf(0)$  y  $j^kg(0)$  están en órbitas diferentes del grupo  $L^k(n)$  sobre  $J^k(n, 1)$  para toda  $k \geq 3$ .

Por último, el espacio de las formas cúbicas en  $n - r$  variables es un espacio vectorial real de dimensión

$$\binom{n - r}{3} + (n - r)(n - r - 1) + (n - r) = \binom{n - r + 2}{3}.$$

Por otro lado, la

$$\dim(GL(n - r, \mathbb{R})) = (n - r)^2.$$

Así, si  $n - r \geq 3$ , entonces

$$\binom{n - r + 2}{3} > (n - r)^2,$$

entonces, cualquier vecindad de una forma cúbica en  $n - r$  variables intersecta una cantidad infinita de órbitas del grupo  $GL(n - r, \mathbb{R})$ . Esto nos dice que,

si  $n - r \geq 3$  y  $k \geq 3$ , entonces cualquier vecindad del  $j^k f(0)$  en  $J^k(n, 1)$  interseca a una cantidad infinita de órbitas de  $L^k(n)$ .

Con lo cual  $f$  no sería simple, y por lo tanto, forzosamente debemos concluir que  $r \geq n - 2$ .  $\square$

**Observación 3.2.4.** Si  $k \geq 2$ , entonces el conjunto de  $k$ -jets que tienen rango hermitiano  $r \leq n - 3$  es un subconjunto algebraicamente cerrado de  $J^k(n, 1)$  y además su codimensión es  $n + 6$ . Esto se sigue del hecho de que las matrices simétricas de  $n \times n$  de rango menor o igual a  $n - 3$  forman un subconjunto algebraicamente cerrado de las matrices simétricas  $n \times n$  de codimensión 6.

**Lema 3.2.5.** Si el rango hermitiano de  $f$  es  $n$ , entonces  $f$  es un germen simple de tipo  $A_1$ ; es decir,  $f$  es equivalente por la derecha a una forma cuadrática no degenerada en  $n$  variables.

*Demostración.* La hipótesis nos dice que  $r = n$ , entonces por el teorema de Gromoll-Meyer,  $f$  es equivalente por la derecha a una forma cuadrática no degenerada de la forma  $Q(x_1, \dots, x_n)$ .

Por otro lado, la ley de inercia de Sylvester nos dice que cualquier forma cuadrática no degenerada  $Q(x_1, \dots, x_n)$  puede ser descrita como:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2,$$

por lo que  $k = 1$ , y por lo tanto  $f$  es simple y de tipo  $A_1$ .  $\square$

**Lema 3.2.6.** Si el rango hermitiano de  $f$  es  $n - 1$  entonces se cumple que:

- 1)  $f$  es un germen simple de tipo  $A_k$ , con  $k \geq 2$ ; es decir,  $f$  es equivalente por la derecha a la forma cuadrática no degenerada  $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \pm x_n^{k+1}$ , con  $k \geq 2$ , ó
- 2) para toda  $k$ , el jet  $j^k f(0)$  es equivalente por la derecha a una forma cuadrática no degenerada en  $n - 1$  variables. El conjunto de los  $k$ -jets de esa forma, es una subvariedad de  $J^k(n, 1)$  de codimensión  $n + k - 1$ . En este caso, la  $\text{cod}(f) = \infty$ , por lo tanto,  $j^k f(0) \in \Sigma_k$  para toda  $k$ .

*Demostración.* Por el teorema de Gromoll-Meyer, como  $f$  es un germen cuyas primeras derivadas parciales se anulan en 0, entonces  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) + g(x_n),$$

donde, nuevamente,  $Q$  es una forma cuadrática no degenerada en las variables  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , y  $g$  es un germen en 0 de una función suave que se anula en el origen junto con sus primera y segunda derivadas parciales.

Ahora, si  $f$  es simple, entonces para alguna  $k$  se tiene que

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_n^k}(0) \neq 0.$$

Esto es otra forma de decir que, al considerar la  $k$  más pequeña posible, obtendríamos que

$$g(x_n) = ax_n^k + \text{términos de orden mayor},$$

donde  $a \neq 0$ .

En consecuencia, por el teorema de Mather, la forma

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) + ax_n^k$$

es  $k$ -determinada por la derecha, y por lo tanto  $f$  será equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) + ax_n^k.$$

Y es claro que esta última expresión es también equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \pm ax_n^k.$$

Por otro lado, si para toda  $k$  se cumple que

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_n^k}(0) = 0,$$

entonces el jet  $j^k f(0)$  será equivalente por la derecha a la forma cuadrática en sus primeras  $n - 1$  variables; es decir, será equivalente a  $Q(x_1, \dots, x_{n-1})$ , para toda  $k$ .

Por tanto, el conjunto de los  $k$ -jets de este tipo, forman una unión finita de órbitas, que por la fórmula que vimos en el lema 3.1.10 para la codimensión de una órbita, se sigue que cada una de estas órbitas tiene codimensión  $n + \text{cod}(f)$ , pero como estamos trabajando con gérmenes simples de tipo  $A_k$ , por el teorema ADDENDUM, tenemos que la codimensión de este tipo de gérmenes es  $k - 1$ ; en consecuencia, la codimensión de estas órbitas es  $n + k - 1$ .

Así, la  $\text{cod}(f) = \infty$  y por el lema 3.1.17 concluimos que, para toda  $k$ ,  $j^k f(0) \in \Sigma_k$ .  $\square$

### 3.3. Lema de Stefan

En esta sección nos centraremos en demostrar el lema 3.3.1; que nos habla acerca del rango hermitiano de un germen y como podemos clasificarlo con uno de los 5 tipos de gérmenes vistos en el teorema de Arnold.

Queremos aclarar que la demostración de este lema es extensa, por lo que en el transcurso de la demostración vamos a demostrar un sublema, el cual dice que para cada  $k \geq 3$  entonces  $j^k g(0)$  es equivalente a  $y^2 x$ . También demostraremos un lema al que se le conoce como *lema de Stefan*, el cual hace una relación entre el teorema de Mather y los gérmenes simples. Por último, queremos apuntar que al final de esta sección, el teorema de Arnold y los últimos tres teoremas de la sección 3.1 estarán demostrados.

**Lema 3.3.1.** *Si el rango hermitiano  $r$  de  $f$  es  $n - 2$  entonces se cumple que:*

- 1)  *$f$  es un germen simple de tipo  $D_k$  cuando  $k \geq 4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  o  $E_8$ ; es decir,  $f$  es equivalente por la derecha a uno de los gérmenes siguientes:*

$$\begin{aligned} & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2 x \pm x^{k-1}, \quad \text{con } k \geq 4 \\ & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm x^4 \\ & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + yx^3 \\ & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + x^5 \end{aligned}$$

*Aquí,  $Q(x_1, \dots, x_{n-2})$  es una forma cuadrática no degenerada en las variables  $x_1, \dots, x_{n-2}$ .*

- 2)  *$f$  no es un germen simple de una de las siguientes clases:*
- a)  *$j^3 f(0)$  es equivalente por la derecha a una forma cuadrática no degenerada en  $n - 2$  variables. El conjunto de  $k$ -jets de tales gérmenes forman una subvariedad de  $J^k(n, 1)$  de codimensión  $n + 7$ .*
- b)  *$j^5 f(0)$  es equivalente por la derecha a uno de los siguientes gérmenes:*

$$\begin{aligned} & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \\ & Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm yx^4 \end{aligned}$$

*El conjunto de  $k$ -jets de gérmenes del primer tipo forman una subvariedad de  $J^k(n, 1)$  de codimensión  $n + 9$ , y los del segundo tipo forman una subvariedad de codimensión  $n + 8$ .*

- c) para toda  $k$ , el jet  $j^k f(0)$  es equivalente a  $Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2 x$ . El conjunto de  $k$ -jets de estos gérmenes es una subvariedad del espacio  $J^k(n, 1)$  de codimensión  $n + k + 1$ . En este caso,  $\text{cod}(f) = \infty$ , por tanto, para toda  $k$ , se tiene que  $j^k f(0) \in \Sigma_k$ .

*Demostración.* Por el teorema de Gromoll-Meyer, el germen  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + g(y, x),$$

donde  $g$  se anula en 0 junto con sus primera y segunda derivadas parciales.

Ahora, el 3-jet,  $j^3 g(0)$ , es un polinomio homogéneo en las variables  $y, x$ ; y por tanto, se puede factorizar a  $j^3 g(0)$  en factores (ó formas) lineales sobre el espacio  $\mathbb{C}$ , el espacio de los números complejos. Vamos a considerar los siguientes cuatro casos:

- 1)  $j^3 g(0)$  se factoriza en tres formas lineales distintas.
- 2) un factor aparece dos veces.
- 3)  $j^3 g(0)$  es un cubo perfecto.
- 4)  $j^3 g(0) = 0$ .

Iremos probando este lema caso por caso.

**Caso 1.** Veamos el caso cuando el 3-jet se puede factorizar en factores lineales. Entonces, como por hipótesis,  $j^3 g(0)$  se puede factorizar en formas lineales diferentes, entonces es equivalente por la derecha, ya sea al factor

$$y^2 x + x^3$$

o al factor

$$y^2 x - x^3.$$

Por tanto,  $j^3 f(0)$  es equivalente por la derecha a la forma

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2 x \pm x^3$$

Así, por el lema 2.4.7 la forma

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2 x \pm x^3,$$

es 3-determinada por la derecha.

Por lo tanto,  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2x \pm x^3,$$

y, por el teorema de Arnold, es de tipo  $D_4$ .

**Caso 2.** Ahora veamos que un factor de  $j^3g(0)$  ocurre dos veces. Así, en este caso, el 3-jet es equivalente por la derecha a la forma  $y^2x$ . Entonces, para ver esto, probemos el sublema del que hablamos al inicio de esta sección.

**Sublema 3.3.2.** *Para cualquier  $k \geq 3$ , se cumple que:*

- a)  $j^k g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^2x$ , ó
- b) existe un entero  $l$  con  $3 < l \leq k$ , tal que  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^2x \pm x^l$ .

*Demostración.* Haremos esta prueba haciendo inducción sobre  $k$ .

Por tanto, para  $k = 3$  se sigue que  $j^3g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^2x$ . Entonces, para  $k = 3$  se cumple.

Ahora, supongamos que  $k > 3$ , y supongamos que se cumple para  $k - 1$ . Así, si la hipótesis se cumple para  $j^{k-1}g(0)$ , entonces también se cumplirá para  $j^k g(0)$ .

Entonces, supongamos que se cumple para  $k - 1$ , es decir, que el jet  $j^{k-1}g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^2x$ . Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$j^{k-1}g(0) = y^2x.$$

Entonces,

$$j^k g(0) = y^2x + p(y, x),$$

en donde  $p$  es un polinomio homogéneo de grado  $k$  en las variables  $y$  y  $x$ .

Por tanto, debemos encontrar una función  $\phi \in Diff(2)$  de tal forma que

$$j^k (g \circ \phi) (0) = y^2x + ax^k.$$

Así, podemos definir la función  $\phi \in Diff(2)$  de la forma siguiente

$$\begin{aligned} y \circ \phi &= y + \phi_{n-1}(y, x) \\ x \circ \phi &= x + \phi_n(y, x), \end{aligned}$$

donde  $\phi_{n-1}$  y  $\phi_n$  son de orden  $k - 2$ . Por tanto,

$$j^k(g \circ \phi) = y^2x + p(y, x) + y^2\phi_n + 2yx\phi_{n-1}.$$

Entonces podemos elegir a  $\phi_{n-1}$  y  $\phi_n$  de tal forma que

$$j^k(g \circ \phi)(0) = y^2x + ax^k.$$

Por tanto,  $j^k g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^2x + ax^k$ . Se sigue que  $j^k g(0)$  es equivalente por la derecha ya sea a  $y^2x \pm x^k$  ó a  $y^2x$ .

Por último queda demostrar que  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^2x \pm x^k$ , pero, por el lema 2.4.7., el término  $y^2x \pm x^k$  es  $k$ -determinado por la derecha, y como  $j^k g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^2x \pm x^k$ , entonces  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^2x \pm x^k$ .  $\square$

Se sigue del sublema anterior que, para todo  $k$  entero positivo,  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2x \pm x^l,$$

para algún  $l$ , con  $3 < l \leq k$ , o por otro lado,  $j^k f(0)$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2x.$$

Por tanto, se cumplen una de las dos cosas, que  $f$  es un germen de tipo  $D_k$ , con  $k \geq 5$ , ó para toda  $k$ ,  $j^k f(0)$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2x.$$

Cuando se cumple el último caso, la  $\text{cod}(f) = \infty$ , pues  $y^2x$  ni siquiera es finitamente determinada, entonces  $j^k f(0) \in \Sigma_k$  para toda  $k$ .

El conjunto de  $k$ -jets que son equivalentes por la derecha a la forma

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^2x,$$

forman una unión finita de órbitas, donde cada órbita tiene codimensión  $n + k + 1$ .

**Caso 3.** Seguiremos los pasos de la demostración del sublema 3.3.2. Entonces, en este caso, el 3-jet  $j^3 g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3$ . Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$j^3 g(0) = y^3.$$

Entonces

$$j^4 g(0) = y^3 + p(y, x),$$

donde,  $p$  es un polinomio homogéneo de orden 4. Nos tomamos a  $\phi \in Diff(2)$  y la definimos como

$$\begin{aligned} y \circ \phi &= y + \phi_{n-1}(y, x) \\ x \circ \phi &= x, \end{aligned}$$

donde  $\phi_{n-1}$  es de orden 2. Entonces

$$j^4(g \circ \phi)(0) = y^3 + p(y, x) + 3y^2\phi_{n-1}.$$

Por tanto, con una adecuada  $\phi_{n-1}$ , podemos hacer un arreglo y el 4-jet quedaría de la forma que sigue

$$j^4(g \circ \phi)(0) = y^3 + ayx^3 + bx^4.$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$j^4 g(0) = y^3 + ayx^3 + bx^4.$$

De esta manera, supongamos que  $b \neq 0$ . Por otro lado, podemos definir  $\phi \in Diff(2)$  como

$$\begin{aligned} y \circ \phi &= y \\ x \circ \phi &= x - \frac{a}{4b}y, \end{aligned}$$

entonces

$$j^4(g \circ \phi)(0) = y^3 + bx^4 + 3y^2p(y, x),$$

donde  $p$  es un polinomio homogéneo de orden 2. Ahora, definimos  $\phi \in Diff(2)$  como

$$\begin{aligned} y \circ \phi_1 &= y - p(y, x) \\ x \circ \phi_1 &= x, \end{aligned}$$

y así,

$$j^4(g \circ \phi \circ \phi_1)(0) = y^3 + bx^4.$$

Por tanto,  $j^4 g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3 \pm x^4$ .



Además, por el lema 2.4.7 vemos que  $y^3 \pm x^4$  es 4-determinada por la derecha. Por tanto,  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^3 \pm x^4$ . Y así, se sigue que  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) + y^3 \pm x^4.$$

Concluyendo que  $f$  es de tipo  $E_6$ .

Ahora, supongamos que  $b = 0$  y  $a \neq 0$ . Entonces

$$j^4 g(0) = y^3 + ayx^3.$$

En este caso, podemos suponer que  $a = 1$ . Como lo dijimos en el ejemplo 2.4.6, mostraremos que  $y^3 + yx^3$  es 4-determinada.

Para eso, vamos a demostrar el siguiente lema, el cual se conoce como *lema de Stefan*.

**Lema 3.3.3 (Stefan).** *Sea  $f \in \mathcal{E}_n$ . Supongamos que para cada  $g \in \mathcal{E}_n$  donde  $j^k f(0) = j^k g(0)$ , se cumple que si*

$$m_n^{k+1} \subset m_n \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right\rangle + m_n^{k+2},$$

*entonces  $f$  es  $k$ -determinada por la derecha.*

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{E}_n$  y supongamos que  $j^k f(0) = j^k g(0)$  para  $g \in \mathcal{E}_n$ . Entonces, por la proposición 2.4.8 basta demostrar que el  $(k+1)$ -jet  $j^{k+1} g(0)$  es equivalente por la derecha a  $j^{k+1} f(0)$ .

Entonces, sea  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  el germen en  $\{0\} \times \mathbb{R}$  definido como

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

donde  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Por otro lado, sea  $A$  el anillo de gérmenes en el punto  $(0, t)$  de funciones suaves en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Entonces, por el lema 2.4.7., es suficiente mostrar que

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in m_n \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle A + m_n^{k+2} A.$$

Pero como  $j^k F = j^k f$ , es decir  $F$  y  $f$  tienen el mismo  $k$ -jet, la hipótesis nos dice que

$$m_n^{k+1} A \subset m_n \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle A + m_n^{k+2} A,$$

y como  $\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in m_n^{k+2}A$ , el resultado se sigue.  $\square$

Ahora nos vamos a centrar en demostrar que  $y^3 + yx^3$  es 4-determinada por la derecha. Para esto, consideremos cualquier 5-jet de la forma

$$y^3 + yx^3 + p(y, x),$$

donde  $p$  es un polinomio homogéneo de grado 5. Entonces, por el lema de Stefan, sólo basta probar que cada monomio de la forma  $y^i x^j$ , donde  $i+j = 5$ , puede ser escrito como

$$y^i x^j = \xi_i \left( 3y^2 + x^3 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \xi_2 \left( 3yx^2 + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \text{términos de orden } \geq 6$$

y donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son gérmenes con  $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$ .

Para el monomio  $y^i x^j$ , donde  $1 \leq i \leq 3$ , nos podemos tomar los gérmenes  $\xi_1(y, x) = 0$  y  $\xi_2(y, x) = \frac{1}{3}y^{i-1}x^{j-2}$ .

Y para el monomio  $y^i x^j$ , cuando  $i = 4, 5$ , tomamos los gérmenes  $\xi_1(y, x) = \frac{1}{3}y^{i-2}x^j$  y  $\xi_2(y, x) = -\frac{1}{9}y^{i-3}x^{j+1}$ .

Y finalmente

$$x^5 = x^2 \left( 3y^2 + x^3 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) - y \left( 3yx^2 + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + y \frac{\partial p}{\partial x} + \text{términos de orden mayor.}$$

Como  $y \frac{\partial p}{\partial x}$  es la forma que se buscaba, entonces lo es  $x^5$ .

Por tanto,  $y^3 + yx^3$  es 4-determinada por la derecha. Y como  $j^4 g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3 + yx^3$  entonces el germen  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^3 + yx^3$ . Entonces,  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) + y^3 + yx^3.$$

De esta manera, concluimos que es de tipo  $E_7$ .

Ahora, supongamos que  $a = 0$  y que  $b = 0$ . Entonces  $j^4 g(0) = y^3$ , y por lo tanto

$$j^5 g(0) = y^3 + p(y, x),$$

donde  $p$  es un polinomio homogéneo de orden 5. Sea  $\phi \in \text{Diff}(2)$  definida como

$$\begin{aligned} y \circ \phi &= y + \phi_y(y) \\ x \circ \phi &= x \end{aligned}$$

donde  $\phi_y$  es de orden 3. Entonces

$$j^5(g \circ \phi)(0) = y^3 + 3y^2\phi_y + p(y, x).$$

Entonces, eligiendo a  $\phi_y$  apropiadamente, podemos escribir

$$j^5(g \circ \phi)(0) = y^3 + cyx^4 + dx^5.$$

Vamos a considerar dos casos.

Primero supongamos que  $d \neq 0$ . Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$j^5(g)(0) = y^3 + cyx^4 + dx^5.$$

Entonces, la función  $\phi \in \text{Diff}(2)$  la definimos como

$$\begin{aligned} y \circ \phi &= y \\ x \circ \phi &= x - \frac{c}{5d}y, \end{aligned}$$

por tanto

$$j^5(g \circ \phi)(0) = y^3 + dx^5 + 3y^2p(y, x),$$

donde  $p$  es un polinomio homogéneo de orden 3. Ahora, la función  $\phi_1 \in \text{Diff}(2)$  la definimos como

$$\begin{aligned} y \circ \phi_1 &= y - p(y, x) \\ x \circ \phi_1 &= x, \end{aligned}$$

entonces

$$j^5(g \circ \phi \circ \phi_1)(0) = y^3 + dx^5.$$

De esta forma, se sigue que  $j^5g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3 + x^5$ . Además, por el lema 2.4.7, el término  $y^3 + x^5$  es 5-determinado por la derecha. Así,  $g$  es equivalente por la derecha a  $y^3 + x^5$ . Por lo tanto  $f$  es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + x^5.$$

Y así,  $f$  es de tipo  $E_8$ .

Ahora, para el segundo caso, supongamos que  $d = 0$ . Entonces podemos asumir que

$$j^5g(0) = y^3 + cyx^4.$$

Si  $c \neq 0$ , entonces el jet  $j^5g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3 \pm yx^4$ . En este caso, vamos a probar que  $j^6g(0)$  es equivalente por la derecha a

$$y^3 \pm yx^4 + ex^6.$$

Ahora, consideremos el 6-jet de la forma

$$y^3 \pm yx^4 + p(y, x),$$

donde  $p$  es un polinomio homogéneo de grado 6. Así, por el lema de Stefan, sólo necesitaríamos probar que cada monomio de la forma  $y^i x^j$ , con  $i \geq 1$  y  $i + j = 6$ , puede ser escrito como

$$y^i x^j = \xi_1 \left( 3y^2 \pm x^4 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \xi_2 \left( \pm 4yx^3 + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \text{términos de orden } \geq 6$$

donde los gérmenes  $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$ .

Cuando  $1 \leq i \leq 3$ , podemos elegir

$$\xi_1 = 0 \quad \text{y} \quad \xi_2 = \pm \frac{y^{i-1} x^{j-3}}{4},$$

y cuando  $4 \leq i \leq 6$ , podemos tomar

$$\xi_1 = y^{i-2} y^j \quad \text{y} \quad \xi_2 = 0.$$

Por tanto,  $j^6g(0)$  es equivalente por la derecha a  $y^3 \pm yx^4 + ex^6$ .

Igualmente, cualquier 6-jet en donde su 5-jet es de la forma

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm yx^4$$

es equivalente por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm yx^4 + ex^6.$$

Ahora, vamos a probar que cualquier vecindad de un 6-jet de esta forma intersecta a una cantidad infinita de órbitas en  $J^6(n, 1)$ , y por tanto, aquellos gérmenes cuyos 5-jets son equivalentes por la derecha a

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 + cyx^4$$

no son simples. Entonces, bastará con probar que el espacio tangente de la órbita del 6-jet

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm yx^4 + ex^6,$$

no contiene la dirección del término  $x^6$ ; es decir, no podría ser que

$$x^6 = \pm 2\xi_1 x_1 \pm \dots \pm 2\xi_{n-2} x_{n-2} + \xi_y (3y^2 \pm x^4) + \xi_x (\pm 4yx^3 + 6ex^5) / m^7,$$

es decir, módulo términos de orden al menos 7, para  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_y, \xi_x$ . Así, para ver esto, escribimos

$$\begin{aligned} x_1 = \dots = x_{n-2} &= 0 \\ y &= \varepsilon \sqrt{\frac{1}{3}} x^2, \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$x^6 = \xi_x \left( 0, \dots, 0, \varepsilon \sqrt{\frac{1}{3}} x^2, x \right) \left( \pm 4\varepsilon \sqrt{\frac{1}{3}} x^2 + 6e \right) x^5 + \text{términos de orden } \geq 7$$

Por tanto, se sigue que

$$\xi_x \left( 0, \dots, 0, \varepsilon \sqrt{\frac{1}{3}} x^2, x \right) = \alpha x$$

mas términos de orden al menos 2, donde  $\alpha$  es una constante independiente y no depende de  $\varepsilon = \pm 1$ . Por tanto

$$\alpha \left( \pm 4\varepsilon \sqrt{\frac{1}{3}} + 6e \right) = 1 \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1,$$

lo cual es imposible.

Por último, se concluye que la órbita del 5-jet

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3$$

tiene codimensión 9, y la órbita del 5-jet

$$Q(x_1, \dots, x_{n-2}) + y^3 \pm yx^4$$

tiene codimensión  $n + 8$ .

Para finalizar, nos queda por hacer el caso 4, y al hacer éste, las demostraciones de los teoremas estarán completas.

**Caso 4.** En este caso  $j^3g(0) = 0$ . Entonces, el 4-jet  $j^4f(0)$  determina una forma de grado 4 sobre el plano de la segunda diferencial, el cual no depende del sistema coordenado. Entonces, esta forma determina cuatro líneas el plano complejo tal que su razón cruzada es invariante bajo la acción del grupo  $L^4(n)$ . Por lo tanto existe una cantidad infinita de órbitas que intersecta cualquier vecindad de  $j^4f(0)$ , por lo que  $f$  no es simple.

Otra forma de ver esto es que la acción del grupo  $L^4(n)$  sobre  $J^4(n, 1)$  induce una acción del grupo  $GL(2, \mathbb{R})$  sobre el espacio de polinomios homogéneos de grado 4 en 2 variables. La dimensión de este espacio de polinomios es 5, y  $\dim(GL(2, \mathbb{R})) = 4$ .

El conjunto de 3-jets que son equivalentes por la derecha a una forma cuadrática en  $n - 2$  variables es una unión finita de órbitas de la acción de  $L^3(n)$  sobre  $J^3(n, 1)$ . Por lo tanto, cada una de esta órbitas tiene codimensión  $n + 7$ .

Por tanto, esto completa la demostración del lema 3.3.1.

Por otro lado, el teorema de Arnold se sigue inmediatamente de la proposición 3.2.3 y de los lemas 3.2.5, 3.2.6 y 3.3.1.

Además de los lemas 3.1.10, 3.2.5, 3.2.6 y 3.3.1. que si  $\text{cod}(f) \leq 6$ , entonces se sigue que  $f$  es simple o que el rango Hermitiano de  $f$  es  $r \leq n - 3$ . El teorema 3.1.19 se prueba descartando el último caso. De echo, usando el lema 3.1.10 y la fórmula en su demostración para la codimensión de una órbita, es fácil calcular que si  $f$  tiene rango hermitiano  $r = n - k$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{cod}(f) &\geq \binom{k+1}{2} + \binom{k+2}{3} - k^2 \\ &= k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3}. \end{aligned}$$

En particular si  $k \geq 3$ , entonces  $\text{cod}(f) \geq 7$ .

La segunda parte del teorema 3.1.20 es una consecuencia inmediata del lema 3.1.17 y del teorema 3.1.19 Y la primera parte del teorema 3.1.20 se sigue usando la observación 3.2.5 y los lemas 3.2.5, 3.2.6 y 3.3.1

Por tanto, las demostraciones de los teoremas 3.1.5, 3.1.19 y 3.1.20 están completas.  $\square$

# Capítulo 4

## Teoremas de división de Weierstrass y de Malgrange-Mather

En lo que resta de este trabajo trataremos de probar el resultado principal de éste, que es el *teorema de división de Malgrange-Mather*, el cual ha tenido un desarrollo significativo en la teoría de singularidades.

A lo largo de este capítulo estaremos demostrando algunos teoremas que son importantes para ir introduciendo poco a poco las herramientas necesarias para la demostración principal del teorema de división. En la primera sección probamos el *teorema de división de Weierstrass*, el cual tiene como característica principal que su demostración utiliza funciones holomorfas y como estas funciones se relacionan con un tipo de polinomio conocido como polinomio de Weierstrass. Después probamos el *teorema de preparación de Malgrange-Mather* para funciones suaves en  $\mathbb{R}^n$ , y el capítulo termina con un *teorema de Whitney* y su relación con subconjuntos residuales de  $C(N, M)$  con dos propiedades de algunas curvas.

### 4.1. Teorema de división de Weierstrass

El teorema de división de Weierstrass relaciona a las funciones que están en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas con un polinomio de Weierstrass. Vamos a usar la notación  $\mathcal{H}(U)$  para denotar al conjunto de funciones holomorfas definidas en  $U$ .

Por ahora, empezaremos por tratar de entender el objetivo de esta sección, y éste es comprender de manera general el teorema clásico de división de Weierstrass. Entonces, sea

$$P(t) = t^m + \sum_{i=1}^m c_i t^{m-i}$$

un polinomio de grado  $m$ , con  $c_i \in \mathbb{C}$  y cuyas raíces están en una vecindad  $U$  del 0 en  $\mathbb{C}$ . Si  $f \in \mathcal{H}(U)$ , entonces existe una función única  $Q \in \mathcal{H}(U)$ , y un polinomio único  $R$  que tiene como grado,  $\text{grad}(R) \leq m - 1$ , tal que

$$f(t) = P(t)Q(t) + R(t).$$

Si  $\xi_1, \dots, \xi_k$  son las raíces del polinomio  $P$  y estas raíces tienen multiplicidad  $n_1, \dots, n_k$  respectivamente, y  $n_1 + \dots + n_k = m$ , entonces  $f$  es un múltiplo de  $P$  si y sólo si  $f^{(j)}(\xi_i) = 0$ , donde  $j = 0, \dots, n_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ , y  $f^{(n_i)}(\xi_i) \neq 0$ . Además el polinomio  $R$  está dado por la fórmula de interpolación de Lagrange; es decir, para  $j = 0, \dots, n_i - 1$  y  $i = 1, \dots, k$ , se tiene que

$$R^{(j)}(\xi_i) = f^{(j)}(\xi_i).$$

Ahora supongamos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathcal{H}(V)$  donde  $V \subset \mathbb{C}^n$  es abierto, tal que para toda  $x \in V$ , las raíces del polinomio

$$P(t, x) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) t^{m-i}$$

están en  $U$ .

Así, siguiendo los mismos pasos que en la fórmula de división, tenemos que si  $f \in \mathcal{H}(U \times V)$ , entonces para toda  $x \in V$ , existe una única función holomorfa  $Q(\cdot, x)$  en  $U$ , y un único polinomio de la forma

$$R(t, x) = \sum_{j=1}^m R_j(x) t^{m-j},$$

tal que

$$f(t, x) = P(t, x)Q(t, x) + R(t, x).$$

Comenzamos con el teorema siguiente, el cual hemos llamado *teorema de división de Weierstrass (1)*, lo nombramos así, porque en esta sección vamos a ver otra versión de este mismo teorema. Antes de empezar, cabe enfatizar que el hecho más importante en el teorema de división de Weierstrass es que  $Q$  y  $R$  son holomorfas en  $U \times V$ .



**Teorema 4.1.1 (de división de Weierstrass (1)).** Sean  $U \subset \mathbb{C}$  y  $V \subset \mathbb{C}^n$  subconjuntos abiertos. Supongamos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son funciones holomorfas en  $V$ , tal que para cada  $x \in V$  las raíces del polinomio

$$P(t, x) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)t^{m-i}$$

están en  $U$ . Si  $f \in \mathcal{H}(U \times V)$ , entonces existe una única  $Q \in \mathcal{H}(U \times V)$  y  $R_1, \dots, R_m \in \mathcal{H}(V)$  tal que

$$f(t, x) = P(t, x)Q(t, x) + R(t, x),$$

donde

$$R(t, x) = \sum_{j=1}^m R_j(x)t^{m-j}.$$

*Demostración.* Como  $f$  es holomorfa, la fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z, x)}{z-t} dz.$$

Ahora, para cada  $k = 1, \dots, m$ , escribimos

$$P^k(t, x) = t^k + \sum_{i=1}^k \lambda_i(x)t^{k-i},$$

es claro que si  $k = m$ , entonces  $P = P^m$ . De esta forma, podemos usar inducción sobre  $k$ , y por tanto, se cumple la siguiente identidad

$$\frac{P^k(z, x) - P^k(t, x)}{z-t} = \sum_{j=1}^k P^{j-1}(z, x)t^{k-j},$$

ahora, cuando  $k = m$ , podemos dividir ambos lados de la igualdad anterior por el término  $P(z, x)$  y obtenemos

$$\frac{1}{z-t} = \frac{P(t, x)}{P(z, x)(z-t)} + \sum_{j=1}^m \frac{P^{j-1}(z, x)}{P(z, x)} t^{m-j}.$$

Sean  $(t, x) \in U \times V$  y  $\gamma$  una curva orientada simple cerrada y positiva en  $\mathbb{C}$  que contiene a  $t$  y a todas las raíces de  $P$  en su interior. Entonces, reemplazando en la fórmula de Cauchy, tenemos que

$$f(t, x) = P(t, x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z, x)}{P(z, x)(z-t)} dz + \sum_{j=1}^m t^{m-j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P^{j-1}(z, x)}{P(z, x)} f(z, x) dz.$$

Por lo tanto, se deduce que

$$Q(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z, x)}{P(z, x)(z - t)} dz,$$

y

$$R_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P^{j-1}(z, x)}{P(z, x)} f(z, x) dz,$$

el cual es un polinomio en la variable  $t$  de grado menor que  $m$ . □

**Ejemplo 4.1.2.** El teorema anterior tiene una peculiaridad, ya que su análogo para el caso real es falso; como lo vemos en este ejemplo.

Sea  $\varepsilon = 1 > 0$ , y supongamos que

$$\frac{1}{t^2 + \varepsilon} = \frac{1}{t^2 + 1} = (t^2 + x) Q(t, x) + R_1(x)t + R_2(x).$$

Si  $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ , esto nos dice que  $t = \pm\sqrt{-x}$  está bien definida, y al sustituir en la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{1}{1 - x} = \pm R_1(x)\sqrt{-x} + R_2(x),$$

esta ecuación tiene como única solución  $R_1(x) = 0$  y  $R_2(x) = \frac{1}{1 - x}$ .

La función  $R_2(x) = \frac{1}{1 - x}$  no puede extenderse a una función analítica en todo  $\mathbb{R}$ , ya que no está definida en  $x = 1$ .

Es claro que esto se cumple también para cualquier  $\varepsilon > 0$ .

**Definición 4.1.3.** Sea  $\mathcal{F} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Vamos a definir como

$$\mathcal{O}_n = \mathcal{F} \{x_1, \dots, x_n\}$$

al anillo de las series de potencias convergentes en las variables  $x_1, \dots, x_n$ .

Y a su vez,

$$\mathcal{O}_{1+n} = \mathcal{F} \{t, x_1, \dots, x_n\},$$

será el anillo de las series de potencias convergentes en las variables  $t, x_1, \dots, x_n$ .

**Definición 4.1.4.** Se dice que  $f \in \mathcal{O}_{1+n}$  es *regular de orden  $m$*  en  $t$  si  $f(t, 0, \dots, 0) = t^m g(t)$  con  $g(0) \neq 0$ . Un polinomio de la forma

$$t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i t^{m-i},$$

con coeficientes  $\lambda_i \in \mathcal{O}_n$  es llamado *distinguido* si  $\lambda_i(0) = 0$  con  $i = 1, \dots, m$ .

Como lo habíamos mencionado anteriormente, el teorema que sigue lo llamaremos *teorema de división de Weierstrass (2)* ya que es otra versión del teorema de división de Weierstrass (1), su particularidad es que es para series de potencias regulares.

**Teorema 4.1.5 (de división de Weierstrass (2)).** *Sea  $\phi \in \mathcal{O}_{1+n}$  regular de orden  $m$  en  $t$ . Para toda  $f \in \mathcal{O}_{1+n}$ , existen  $q \in \mathcal{O}_{1+n}$  y  $r \in \mathcal{O}_n[t]$  donde  $\text{grad}(r) < m$ , tal que*

$$f = \phi q + r.$$

*Además,  $q$  y  $r$  están determinados de manera única por estas condiciones.*

*Demostración.* Haremos el caso cuando  $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ .

El reto de esta prueba es tratar de definir cuanto vale  $q$  y  $r$  en el teorema de división. Entonces, para hacer esto, sea  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  y  $P(t, \mu) = t^m + \sum_{i=1}^m \mu_i t^{m-i}$ , entonces, por el teorema de división de Wierstrass (1), existen  $Q \in \mathcal{O}_{1+m+n}$  y  $R_j \in \mathcal{O}_{m+n}$ , con  $j = 1, \dots, m$ , donde además son únicas, tal que

$$\phi(t, x) = Q(t, \mu, x)P(t, \mu) + \sum_{j=1}^m R_j(\mu, x)t^{m-j}. \quad (4.1)$$

Veamos primero que  $Q(0, 0, 0) \neq 0$  y  $R_j(0, 0) = 0$  cuando  $1 \leq j \leq m$ ; para hacer esto, basta evaluar  $\mu = 0$  y  $x = 0$  en la ecuación anterior, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) &= Q(t, 0, 0)P(t, 0) + \sum_{j=1}^m R_j(0, 0)t^{m-j} \\ &= Q(t, 0, 0)t^m + \sum_{j=1}^m R_j(0, 0)t^{m-j}, \end{aligned}$$

ahora bien, como  $\phi$  es regular de orden  $m$  en  $t$ , es de la forma

$$\phi(t, 0) = t^m g(t), \quad \text{con } g(0) \neq 0.$$

Así, sustituyendo en la igualdad anterior, tenemos que

$$t^m g(t) = Q(t, 0, 0)t^m + \sum_{j=1}^m R_j(0, 0)t^{m-j},$$

y por otro lado, igualando los coeficientes en esta última igualdad, lo que nos queda es que  $Q(0, 0, 0) = g(0) \neq 0$  y  $R_j(0, 0) = 0$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

Ahora, la idea es hallar a las  $\mu_j$  tal que  $R_j(\mu(x), x) = 0$ , entonces derivamos la ecuación (4.1) con respecto a  $\mu_i$ , y nos queda

$$0 = Q t^{m-i} + P \frac{\partial Q}{\partial \mu_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_j}{\partial \mu_i} t^{m-j}$$

ahora derivamos con respecto a  $t^j$ , es decir, aplicamos  $\frac{\partial^{j+1}}{\partial t^j \partial \mu_i}$  en  $(0, 0, 0)$ , con  $j = 0, \dots, m-1$ , y tenemos que

$$0 = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial Q}{\partial \mu_i} P \right) + \frac{\partial^j}{\partial t^j} (Q t^{m-i}) + j! \frac{\partial R_{m-j}}{\partial \mu_i};$$

como  $j < m$ , el primer término de la suma evaluada en 0, nos dará cero

$$\left( \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left( \frac{\partial Q}{\partial \mu_i} P \right) \right)_{(0,0,0)} = 0$$

mientras que para el segundo término, si  $j < m-i$ , entonces

$$\left( \frac{\partial^j}{\partial t^j} (Q t^{m-i}) \right)_{(0,0,0)} = 0,$$

y si  $j = m-i$ , entonces

$$\left( \frac{\partial^j}{\partial t^j} (Q t^{m-i}) \right)_{(0,0,0)} \neq 0$$

Por tanto, la matriz  $\left( \frac{\partial R_{m-j}}{\partial \mu_i} \right)$  evaluada en  $(0, 0)$  es invertible, es decir, es distinta de 0 en la diagonal y además tiene puros ceros arriba de la diagonal.

Por lo que el teorema de la función implícita asegura que para  $j = 1, \dots, m$ , existen funciones  $\mu(x)$  tal que

$$R_j(\mu(x), x) = 0,$$

además, estas ecuaciones tienen una única solución holomorfa que es de la forma  $\mu(x) = \lambda(x)$  en  $(0, 0)$ .

Por lo tanto,

$$\phi(t, x) = Q(t, \lambda(x), x) P(t, \lambda(x)),$$

donde  $Q(t, \lambda(x), x)$  es una unidad.  $\square$

**Observación 4.1.6.** El módulo  $\mathcal{O}_{1+n}/\phi \cdot \mathcal{O}_{1+n}$  es un  $\mathcal{O}_n$ -módulo libre como lo veremos más a detalle en el lema 4.1.9., ya que admite una base y además su rango es  $m$ .

Queremos mencionar que el teorema de división de Weierstrass (2) también nos proporciona la demostración del *teorema de preparación de Weierstrass*, el cual redactamos a continuación, sólo que ahora se debe probar la existencia de un polinomio distinguido. Algunos autores lo prueban como un corolario del teorema.

**Teorema 4.1.7 (de preparación de Weierstrass).** *Si  $\phi \in \mathcal{O}_{1+n}$  es regular de orden  $m$  en la primera variable  $t$ , entonces existe un polinomio distinguido  $P \in \mathcal{O}_n[t]$  de grado  $m$ , y  $q \in \mathcal{O}_{1+n}$  con  $q(0) \neq 0$ , tal que*

$$\phi = qP.$$

**Observación 4.1.8.** Si  $m = 1$  en el teorema de preparación de Weierstrass, entonces, el teorema es equivalente al teorema de la función implícita.

Sea  $\phi \in \mathcal{O}_{1+n}$  tal que

$$\phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(0) \neq 0,$$

entonces, por el teorema de la función implícita, existe una única función analítica  $\lambda(x_1, \dots, x_n)$  tal que

$$\lambda(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(-\lambda(x), x) = 0.$$

La condición  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0) \neq 0$  nos dice que  $\phi$  es regular en la variable  $t$  y es de orden 1. Entonces

$$\phi(y - \lambda(x), x) = yQ(y, x),$$

donde  $Q$  es analítica. Si hacemos el cambio  $t = y - \lambda(x)$ , entonces

$$\phi(t, x) = (t + \lambda(x))Q(t + \lambda(x), x).$$

**Lema 4.1.9.** *Supongamos que  $f \in \mathcal{F}_n = \mathcal{F}[[x_1, \dots, x_n]]$  y  $f \neq 0$ . Sea  $\omega(f)$  el entero más pequeño  $q$  tal que la parte homogénea  $f_q$  de  $f$  de grado  $q$  es distinto de cero. Entonces mediante un cambio lineal de coordenadas, podemos asumir que  $f$  es regular de orden  $\omega(f)$  en la variable  $x_n$ .*

*Demostración.* Sea  $m = \omega(f)$ . Vamos a denotar como  $f_m$  a la parte homogénea de  $f$  de grado  $m$ . Sea  $a \in \mathcal{F}$  tal que  $f_m(a) \neq 0$ , entonces intercambiando variables para  $a = (a_1, \dots, a_n)$  podemos suponer que  $a_n \neq 0$ ; así, podemos suponer que  $a_n = 1$ , entonces tenemos que

$$f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0.$$

Hacemos el siguiente cambio de coordenadas, por medio de la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

entonces, el cambio de coordenadas en forma vectorial nos queda como

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n),$$

por tanto

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n).$$

Ahora, sea  $g(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ , entonces

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n),$$

así,

$$\begin{aligned} g(0, \dots, 0, y_n) &= f(a_1 y_n, \dots, a_{n-1} y_n, y_n) \\ &= f_m(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) y_n^m + \text{monomios de grado mayor a } m, \end{aligned}$$

por tanto,  $g$  es regular de orden  $m$  en la variable  $y_n$ .  $\square$

Para terminar esta sección probamos la siguiente proposición, la cual nos dice que el anillo  $\mathcal{O}_n$  es Noetheriano; y para su demostración haremos uso del teorema de división de Weierstrass (2).

**Proposición 4.1.10.**  $\mathcal{O}_n$  es un anillo Noetheriano.

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre  $n$ .

Sabemos que cualquier campo es un anillo Noetheriano, entonces, para  $n = 0$  se cumple, pues tenemos que  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{F}$ .

Ahora supongamos que  $n > 0$ . Entonces, lo que queremos probar es que cualquier ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_n$  distinto de cero, es finitamente generado.

Entonces, para hacer esto vamos a tomarnos un  $\phi \in I$  con  $\phi \neq 0$ . Así, por el lema 4.1.9, podemos suponer que, mediante un cambio lineal de coordenadas,  $\phi$  es regular de orden  $m$  en la variable  $x_n$ . Y en consecuencia, por el teorema de división de Weierstrass (2), tenemos que  $\mathcal{O}_n / \phi \cdot \mathcal{O}_n$  es un módulo finitamente generado sobre

$$\mathcal{O}_{n-1} = \mathcal{F} \{x_1, \dots, x_{n-1}\}.$$

Ahora, por hipótesis de inducción tenemos que  $\mathcal{O}_{n-1}$  es Noetheriano, esto implica que  $I / \phi \cdot \mathcal{O}_n$  es un módulo finitamente generado sobre  $\mathcal{O}_{n-1}$ , y por tanto, también lo es sobre  $\mathcal{O}_n$ .

Al escoger  $f_1, \dots, f_k \in I$ , cuyas clases módulo  $\phi \cdot \mathcal{O}_n$  generan  $I / \phi \cdot \mathcal{O}_n$ . Entonces, aseguramos que  $\langle f_1, \dots, f_k, \phi \rangle = I$ .  $\square$

## 4.2. Teorema de división de Malgrange-Mather

El teorema de división de Malgrange-Mather es básicamente el mismo que el teorema de división de Weierstrass; la diferencia, por decirlo de alguna manera, es que el teorema de división de Malgrange-Mather es para funciones suaves en  $\mathbb{R}^n$ , y el de Weierstrass para funciones holomorfas o analíticas.

Empezaremos tratando de ver de manera intuitiva una forma general del teorema de división de Malgrange-Mather; y para hacer esto, primero supongamos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son funciones suaves (de clase  $C^\infty$ ) que están definidas en  $U$ . Sea

$$p(t, x) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) t^{m-1}.$$

Entonces, como lo hicimos para las funciones holomorfas, si tenemos que  $f(t, x)$  es una función suave definida en  $\mathbb{R} \times U$ , nos hacemos la pregunta sobre si existen funciones suaves  $q(t, x)$  y  $r_1(x), \dots, r_m(x)$  tales que

$$f(t, x) = p(t, x)q(t, x) + \sum_{j=1}^m r_j(x)t^{m-j},$$

bueno, pues la respuesta a la que llegamos es que sí existen tales funciones que cumplen esta característica, pero una particularidad importante es que la solución no es única a menos que todas las raíces del polinomio definido como

$$t \mapsto p(t, x)$$

sean raíces reales para cada  $x$ . Ya que, de otra forma, sería parecido al caso complejo.

**Ejemplo 4.2.1.** Por ejemplo, si usamos el polinomio definido como

$$p(t, x) = t^2 + 1,$$

entonces podríamos elegir a  $r_1$  y  $r_2$  de manera arbitraria ya que es obvio que el polinomio no tiene raíces reales, además  $p(t, x) = t^2 + 1$  es un polinomio invertible.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto. Vamos a denotar como  $\mathcal{E}(U)$  al espacio de funciones suaves sobre  $U$ , con la topología  $C^\infty$ . El conjunto  $\mathcal{E}(U)$  es un espacio vectorial topológico completo metrizable y localmente convexo; es decir, es un *espacio de Frechet*. A su topología la definimos por la seminorma

$$|f|_p^K = \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leq p}} \left| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}(x) \right|,$$

donde  $p \in \mathbb{N}$  y  $K \subset U$  es compacto.

El siguiente teorema es el más importante de todo este trabajo, el cual, como lo hemos venido diciendo, lo conocemos como *teorema de división de Malgrange-Mather*, queremos advertir que, por ahora, no lo vamos a probar porque aún no tenemos las herramientas necesarias para su demostración, de hecho, dedicamos el último capítulo de este trabajo, el capítulo 6, para su demostración completa y detallada; además, también queremos decir que, por ahora, tampoco vamos a probar el teorema 4.2.3, es decir, sólo lo vamos a mencionar ya que de estos dos teoremas nos salen de manera inmediata los teoremas subsiguientes pero de manera local.



**Teorema 4.2.2 (de división de Malgrange-Mather).** *Suponer que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto, y  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathcal{E}(U)$ . Sea*

$$p(t, x) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)t^{m-i}.$$

*Entonces existe un mapeo lineal continuo*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R} \times U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R} \times U) \times (\mathcal{E}(U))^m,$$

*definido como*

$$f \mapsto (q_f, r_{1,f}, \dots, r_{m,f})$$

*tal que para toda  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times U)$ , se cumple que*

$$f = pq_f + r_f,$$

*en donde,*

$$r_f(t, x) = \sum_{j=1}^m r_{j,f}(x)t^{m-j}.$$

Fue el matemático Bernard Malgrange (1928 - ) quien demostró la existencia local de un cociente y un residuo, esto sin considerar la dependencia lineal continua de la función  $f$ .

En este trabajo, daremos la demostración desarrollada por el matemático ruso Pierre Milman (1945 - ), quién a su vez usa un lema del matemático belga Elias Stein (1931 - 2018), conocido como *lema de extensión de Stein*, y dedicamos el capítulo 5 para su demostración.

Como habíamos mencionado antes, el teorema principal de este trabajo es la demostración del teorema de división de Malgrange-Mather, pero en el capítulo 6 veremos que bastará con demostrar el teorema siguiente, el cual hemos nombrado como *teorema de división genérica*.

**Teorema 4.2.3 (de división genérica).** *Sea  $P$  el polinomio genérico definido como*

$$P(t, \mu) = t^m + \sum_{i=1}^m \mu_i t^{m-i}.$$

*Entonces existe un mapeo continuo y lineal*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R} \times U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{1+m} \times U) \times (\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times U))^m,$$

definido como

$$f \mapsto (Q_f, R_{1,f}, \dots, R_{m,f})$$

tal que para toda  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times U)$ , se tiene que

$$f(t, x) = P(t, \mu)Q_f(t, \mu, x) + R_f(t, \mu, x),$$

en donde,

$$R_f(t, \mu, x) = \sum_{j=1}^m R_{j,f}(\mu, x)t^{m-j}.$$

El teorema 4.2.4 que sigue y el teorema de preparación de Malgrange son idénticos al teorema de división de Weierstrass (2) y al teorema de preparación de Weierstrass. Sus demostraciones también son idénticas, pues son obtenidas del teorema de división de Malgrange-Mather.

**Teorema 4.2.4.** *Supongamos que  $\phi \in \mathcal{E}_{1+n}$  es regular de orden  $m$  en la primera variable  $t$ ; es decir,  $\phi(t, 0)$  tiene un cero de orden  $m$  en  $t = 0$ . Entonces para toda  $f \in \mathcal{E}_{1+n}$ , existen  $q \in \mathcal{E}_{1+n}$  y  $r_1, \dots, r_m \in \mathcal{E}_n$  tal que*

$$f(t, x) = \phi(t, x)q(t, x) + \sum_{j=1}^m r_j(x)t^{m-j}.$$

**Teorema 4.2.5 (de preparación de Malgrange).** *Si  $\phi \in \mathcal{E}_{1+n}$  es regular de orden  $m$  en la primera variable  $t$ , entonces existe un polinomio distinguido de la forma*

$$p(t, x) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)t^{m-i},$$

donde  $\lambda_i \in \mathcal{E}_n$  y para  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_i(0) = 0$ , además existe una unidad  $q \in \mathcal{E}_{1+n}$  con  $q(0) \neq 0$ , tal que

$$\phi = qp.$$

Para ir concluyendo con esta sección, a continuación vamos a ver una forma algebraica del teorema de división 4.2.4 y del teorema de preparación 4.2.5. Para ello, damos la siguiente definición.

**Definición 4.2.6.** Supongamos que  $A$  es un anillo local y  $u$  su ideal maximal. Se dice que un homomorfismo  $\phi : A \rightarrow B$  es *excelente* si cada  $B$ -módulo finitamente generado  $M$ , tal que

$$M/u \cdot M$$

es un espacio vectorial finito sobre el campo  $A/u$ , es finitamente generado sobre  $A$ .

**Observación 4.2.7.** Los homomorfismos suprayectivos son excelentes. Además, si  $\phi : A \rightarrow B$  y  $\psi : B \rightarrow C$  son homomorfismos excelentes, y  $\phi$  mapea al ideal maximal de  $A$  al maximal de  $B$ , entonces  $\psi \circ \phi$  es excelente.

**Teorema 4.2.8 (de preparación de Malgrange-Mather).** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un germen suave con punto de salida y punto de llegada en 0. Entonces el homomorfismo inducido

$$f^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$$

es excelente.

*Demostración.* Recordemos que  $f^*$  está definido como

$$f^*(h) = h \circ f,$$

para toda  $h \in \mathcal{E}_m$ .

Como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un germen, lo podemos descomponer (ó factorizar) de la forma que sigue

$$(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f_{n+1}} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{f_n} (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, 0) \xrightarrow{f_1} (\mathbb{R}^m, 0).$$

Por tanto, es claro que  $f_{n+1}(x) = (x, f(x))$  y para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$f_i : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^m,$$

el cual está definido como

$$f_i(x_1, \dots, x_i, y) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y)$$

es un germen en 0.

Ahora, como

$$f = f_1 \circ \dots \circ f_{n+1} \quad \Rightarrow \quad f^* = f_{n+1}^* \circ \dots \circ f_1^*.$$

Por tanto, sólo nos bastaría probar que cada homomorfismo  $f_i^*$  es excelente; probando eso y además por la observación 4.2.7, como el homomorfismo  $f_{n+1}^*$  será suprayectivo se sigue que  $f_{n+1}^*$  es excelente. Por otro lado, claramente vemos que  $f_i$  es una proyección para  $i = 1, \dots, n$  y por tanto esto implica que cada uno de los homomorfismos inducidos

$$f_1^*, \dots, f_n^*$$

son excelentes. Así, como  $f^*$  es composición de homomorfismos excelentes resulta que  $f^*$  es excelente.  $\square$

La última afirmación del teorema anterior, de que los homomorfismos  $f_1^*, \dots, f_n^*$  son excelentes, la veremos más a detalle en el siguiente lema.

**Lema 4.2.9.** *Sea  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  el germen en 0 de la proyección natural definida como  $\pi(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces el homomorfismo*

$$\pi^* : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_{n+1}$$

*es excelente.*

*Demostración.* Sea  $M$  un  $\mathcal{E}_{n+1}$ -módulo finitamente generado de tal forma que  $M/m_n \cdot M$  es un espacio vectorial real de dimensión finita.

Lo que queremos demostrar es que  $M$  es un  $\mathcal{E}_n$ -módulo finitamente generado. Lo hacemos de la siguiente manera.

Sea

$$\{m_1, \dots, m_m\}$$

una familia de generadores de  $M$ , el cual es un  $\mathcal{E}_{n+1}$ -módulo, y cuyas imágenes módulo  $m_n M$  generan el espacio vectorial  $M/m_n \cdot M$ . Así, para  $i = 1, \dots, m$  podemos escribir lo siguiente

$$tm_i = \sum_{j=1}^m (c_{ij} + b_{ij}) m_j,$$

para algunas  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  y  $b_{ij} \in m_n \cdot \mathcal{E}_{n+1}$ .

Definimos

$$\phi = \det(t\delta_{ij} - c_{ij} - b_{ij}) \in \mathcal{E}_{n+1},$$

entonces, por la regla de Cramer, para  $i = 1, \dots, m$ , se tiene que

$$\phi \cdot m_i = 0.$$

Como  $b_{ij} \in m_n \cdot \mathcal{E}_{n+1}$ , entonces para alguna  $q \leq m$ ,  $\phi$  es regular de orden  $q$  en la variable  $t$ .

Sea  $m \in M$ . Entonces, para alguna  $b_i \in \mathcal{E}_{n+1}$  tenemos que

$$m = \sum_{i=1}^m b_i m_i.$$

Por el teorema 4.2.4 el cual es una versión local del teorema de división, existen  $q_i \in \mathcal{E}_{n+1}$  y  $r_{ij} \in \mathcal{E}_n$  tal que

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^m \left( \phi q_i + \sum_{j=1}^q r_{ij} t^{q-j} \right) m_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q r_{ij} t^{q-j} m_i. \end{aligned}$$

Por tanto, para  $i = 1, \dots, m$ , y  $j = 1, \dots, q$ , los elementos  $t^{q-j} m_i$  generan a  $M$  sobre  $\mathcal{E}_n$ .  $\square$

**Corolario 4.2.10.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un germen con punto de salida y punto de llegada en 0, y sea  $M$  un  $\mathcal{E}_m$ -módulo finitamente generado. Entonces los elementos  $m_1, \dots, m_k$  de  $M$  generan a  $M$  sobre  $\mathcal{E}_n$  si y sólo si sus clases módulo  $m_n \cdot M$  generan el espacio vectorial  $M/m_n \cdot M$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Cumple con las hipótesis del lema anterior, por tanto es trivial.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que las clases de  $m_1, \dots, m_k$ , módulo  $m_n \cdot M$  generan al espacio  $M/m_n \cdot M$ . Entonces, por el teorema de preparación de Malgrange-Mather,  $M/\mathcal{E}_n$  es un espacio finitamente generado.

Entonces, tenemos que

$$M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle + m_n \cdot M$$

así, como  $M$  está finitamente generado como  $\mathcal{E}_m$ -módulo, se sigue del lema de Nakayama que

$$M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle,$$

es decir,  $M$  está generado sobre  $\mathcal{E}_n$  por los elementos  $m_1, \dots, m_k$ .  $\square$

**Corolario 4.2.11.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un germen suave con punto de salida y punto de llegada en 0. Sean  $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{E}_n$ . Entonces  $b_1, \dots, b_k$  generan a  $\mathcal{E}_n$  sobre  $\mathcal{E}_m$  si y sólo si sus clases módulo  $m_m \cdot \mathcal{E}_n$  generan al espacio vectorial real

$$\mathcal{E}_n / m_m \cdot \mathcal{E}_n.$$

*Demostración.* A este corolario lo podemos ver como el teorema de preparación de Malgrange. Por tanto, sea  $M = \mathcal{E}_m$  en el corolario anterior y la demostración es la misma.  $\square$

**Observación 4.2.12.** El teorema de preparación de Malgrange-Mather 4.2.8 lo obtuvimos del teorema local de división 4.2.4. E inversamente, también podríamos deducir el teorema local de división del corolario 4.2.11.

Sea  $\phi \in \mathcal{E}_{1+n}$  regular de orden  $m$  en la primera variable  $t$ . Consideramos el germen suave

$$\phi(t, x_1, \dots, x_n) = (\phi(t, x), x_1, \dots, x_n).$$

Como  $\phi$  es regular de orden  $m$  en la variable  $t$ , entonces podemos representar el homomorfismo inducido como

$$\phi^* (m_{1+n}) \cdot \mathcal{E}_{1+n} = (t^m, x_1, \dots, x_n) \cdot \mathcal{E}_{1+n}.$$

Por el corolario 4.2.11,  $\mathcal{E}_{1+n}$  es finitamente generado como un  $\mathcal{E}_{1+n}$ -módulo por los elementos  $1, t, \dots, t^{m-1}$ . Por tanto si  $f \in \mathcal{E}_{1+n}$ , para alguna  $g_i \in \mathcal{E}_{1+n}$ , entonces a  $f$  lo podemos escribir como

$$f(t, x) = \sum_{i=1}^m g_i(\phi(t, x), x) t^{m-i},$$

para  $1 \leq i \leq m$  y  $g_i \in \mathcal{E}_{1+n}$ .

Ahora, escribiendo

$$g_i(s, x) = g_i(0, x) + sh_i(s, x),$$

tenemos que  $f = \phi q + r$ , donde

$$q(t, x) = \sum_{i=1}^m h_i(\phi(t, x), x) t^{m-i}$$

y

$$r(t, x) = \sum_{i=1}^m g_i(0, x) t^{m-i}.$$

### 4.3. Un resultado de Whitney

Este capítulo lo terminamos con un teorema de Whitney que es una aplicación del teorema de transversalidad de Thom y del teorema de preparación de Malgrange.

Es importante señalar que el teorema de preparación de Malgrange lo utilizamos porque unos de los objetivos del teorema de Whitney es obtener formas normales de funciones suaves que están cerca de puntos críticos degenerados; esta idea fue primero concebida por Thom.

Vamos a escribir el teorema de transversalidad de Thom y un corolario del teorema de inmersión y encaje de Whitney, los cuales nos ayudaran en el proceso de demostración del teorema de Whitney.

**Teorema 4.3.1 (de transversalidad de Thom).** Sean  $N$  y  $M$  variedades suaves, y  $Q$  una subvariedad suave de  $J^k(N, M)$ . Entonces

$$\mathcal{T} = \{f \in C(N, M) \mid j^k f \text{ es transversal a } Q\}$$

es un conjunto residual de  $C(N, M)$  en la topología de Whitney. Además, si  $Q$  es cerrado, entonces  $\mathcal{T}$  es abierto.

**Corolario 4.3.2.**  $\Sigma_k(N, M)$  es una subvariedad de  $J^1(N, M)$  de codimensión  $(n - k)(m - k)$ . De hecho  $\Sigma_k(N, M)$  es un subhaz con fibra  $\Sigma_k$ .

**Teorema 4.3.3 (Whitney).** Sea  $N$  y  $M$  variedades suaves de dimensión 2. Entonces, el subconjunto de funciones suaves  $f : N \rightarrow M$  que satisfacen las siguientes dos propiedades forman un subconjunto residual de  $C(N, M)$ .

1. para cada punto  $p \in N$ , podemos elegir sistemas coordenados con orígenes  $p$  y  $f(p)$ , en el que  $f$  tiene una de las siguientes formas:

- a)  $f(x, y) = (x, y)$
- b)  $f(x, y) = (x, y^2)$
- c)  $f(x, y) = (x, -xy + y^3)$ .

Al punto  $p$ , cuando es de la forma como en el inciso b), se le llama punto de pliegue ó punto dobléz, y cuando es de la forma como en el inciso c) se le llama punto cúspide.

2. las imágenes de las curvas dobles se intersectan transversalmente en, a lo más dos puntos. Los puntos cúspide tienen imágenes distintas, las cuales están aislados dentro de curvas de dobleces.

*Demostración.* Para  $k = 0, 1, 2$ , por el corolario 4.3.2, se denota como  $\Sigma_k(N, M)$ , al conjunto de los 1-jets de rango  $k$ ; además, este conjunto forma una subhaz de  $J^1(N, M)$ .

La codimensión del conjunto es

$$\text{cod}(\Sigma_k(N, M)) = (n - k)(m - k).$$

Por lo tanto, para  $k = 0, 1, 2$ , y  $n = m = 2$ , las codimensiones son las siguientes:

$$\text{cod}(\Sigma_0(N, M)) = 4,$$

$$\text{cod}(\Sigma_1(N, M)) = 1,$$

$$\text{cod}(\Sigma_2(N, M)) = 0.$$

Como  $\Sigma_k(N, M)$  es un subhaz de  $J^1(N, M)$ , el teorema de transversalidad de Thom, nos dice que  $j^1 f(N)$  es transversal a  $\Sigma_k(N, M)$ , entonces, en particular,

$$j^1 f(N) \cap \Sigma_0(N, M) = \emptyset,$$

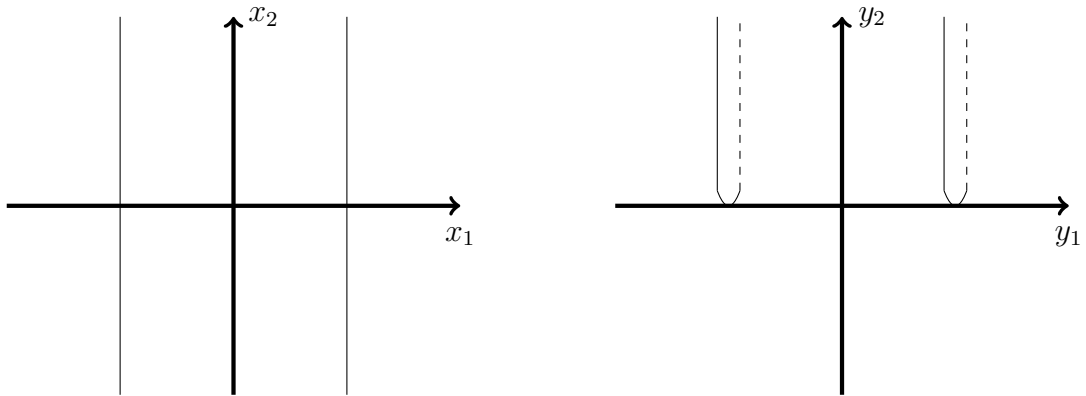
de esta forma, podemos elegir sistemas coordenados en vecindades de cada punto singular y en las imágenes de estos puntos singulares, donde la función  $f$  es de la forma

$$f(x, y) = (x, g(x, y)).$$

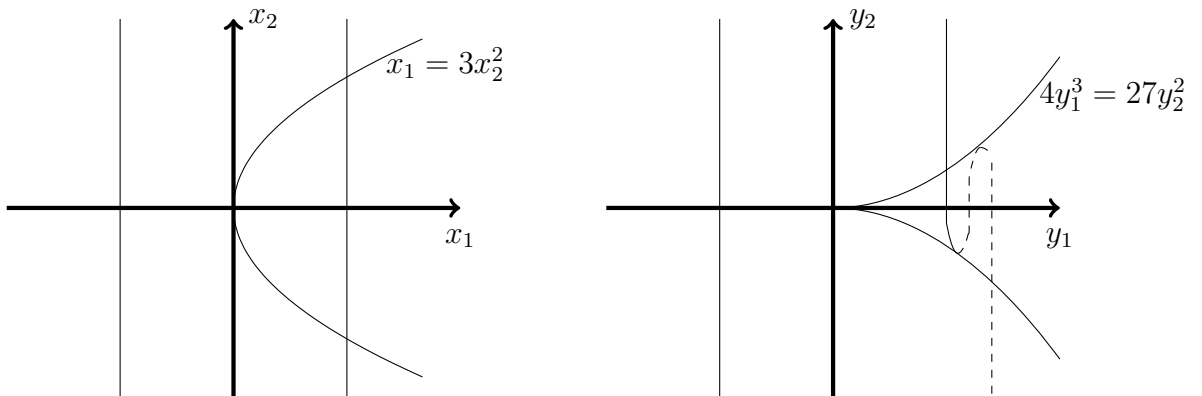
Entonces, al derivar en estas coordenadas tenemos que

$$df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$





El mapeo  $(y_1, y_2) = (x_1, x_2^2)$



El mapeo  $(y_1, y_2) = (x_1, -x_1x_2 + x_2^3)$

de modo que  $j^1 f$  es transversal a  $\Sigma_1(N, M)$  en un punto singular si y sólo si  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \neq 0$  ó  $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \neq 0$  en ese mismo punto singular.

Ahora, si  $j^1 f$  es transversal a  $\Sigma_1(N, M)$ , entonces

$$(j^1 f)^{-1}(\Sigma_1(N, M))$$

es una variedad de dimensión 1, que está definida localmente por  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ .

Supongamos que

$$j^1 f(p) \in \Sigma_1(N, M)$$

y que  $j^1 f$  es transversal a  $\Sigma_1(N, M)$  en  $p$ . Entonces, lo que estas condiciones nos dicen es que

$$j^2 f(p) \in \Sigma_1^{*2}$$

donde  $\Sigma_1^{*2} \subset \Sigma_1^2(N, M)$ , y el conjunto  $\Sigma_1^2(N, M)$  se define como una imagen inversa de la siguiente forma

$$\Sigma_1^2(N, M) = \Psi^{-1}(\Sigma_1(N, M)),$$

con  $\Sigma_1(N, M) = \Sigma_1^1(N, M)$ , y la función  $\Psi$  la definimos como

$$\Psi : J^2(N, M) \rightarrow J^1(N, M).$$

Vamos a descomponer  $\Sigma_1^{*2} = \Sigma_{1,0}^{*2} \cup \Sigma_{1,1}^{*2}$  de la siguiente forma. Si  $f$  es un mapeo suave que satisface las condiciones del párrafo anterior, entonces  $j^2 f(p) \in \Sigma_{1,j}^{*2}$  si la restricción de  $f$  a  $(j^1 f)^{-1}(\Sigma_1^1(N, M))$  tiene rango  $j$  en el punto  $p$ . Si

$$f(x, y) = (x, g(x, y)),$$

entonces

i)  $j^2 f(p) \in \Sigma_{1,1}^{*2}$  si y sólo si  $\frac{\partial^2 g}{\partial y} (p) \neq 0$ ; es decir,  $p$  es un punto regular de

$$f \text{ restringido a } \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

ii)  $j^2 f(p) \in \Sigma_{1,0}^{*2}$  si y sólo si  $\frac{\partial g}{\partial y} (p) = 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (p)$ .

En el caso ii), decimos que  $j^2f$  es transversal a  $\Sigma_{1,0}^{*2}$  en  $p$  si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} & \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 en el punto  $p$ . Ahora, como  $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p) = 0$ , entonces  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p) \neq 0$  y  $\frac{\partial^3 g}{\partial y^3}(p) \neq 0$ .

El teorema de transversalidad de Thom nos dice que podemos elegir sistemas de coordenadas locales  $(x, y)$  y  $(w, z)$  en cada punto singular y en su imagen, en donde  $f(x, y) = (x, g(x, y))$ ,  $g(0) = 0$ , y además

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) \neq 0; \quad (4.2)$$

ó

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(0) = 0 &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0) &\neq 0, \quad \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}(0) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

En cualquiera de los dos casos vamos a hacer uso de el teorema de preparación de Malgrange, pues nuestro objetivo será reescribir a  $f$  en su forma normal.

Para esto, vamos a denotar como  $\mathcal{E}_2(\alpha)$  y como  $\mathcal{E}_2(\beta)$  a los anillos de gérmenes en el origen de funciones suaves en sus respectivos punto de salida y punto de llegada. De esta manera,  $f$  induce un homomorfismo de anillos

$$f^* : \mathcal{E}_2(\beta) \rightarrow \mathcal{E}_2(\alpha),$$

definido como

$$\phi(w, z) \mapsto \phi(x, g(x, y)).$$

Ahora, como lo vimos en la sección anterior, en el caso (4.2) los gérmenes  $\{1, y\}$  forman una base del espacio vectorial

$$\mathcal{E}_2(\alpha) / m_2(\beta) \cdot \mathcal{E}_2(\alpha).$$

Así, por el corolario 4.2.11 tenemos que

$$\langle 1, y \rangle = \mathcal{E}_2(\alpha) / \mathcal{E}_2(\beta),$$

entonces, existen gérmenes  $\phi, \psi \in \mathcal{E}_2(\beta)$  tal que

$$y^2 = \phi(x, g(x, y)) + 2\psi(x, g(x, y))y. \quad (4.4)$$

De esta forma, tenemos que  $\phi(0) = \psi(0) = 0$ .

Poniendo

$$x' = x, \quad y' = y - \psi(x, g(x, y)),$$

y

$$w' = w, \quad z' = \phi(w, z) + \psi^2(w, z).$$

Usando (4.2) y (4.4) vemos que estos son los cambios de coordenadas que necesitamos cerca del origen. Entonces, como lo dijimos antes, nuestro objetivo era reescribir  $f$  en forma normal, así, en las nuevas coordenadas, nuestro mapeo toma la forma normal

$$w' = x', \quad z' = (y')^2.$$

Para el caso de las ecuaciones en (4.3), de igual manera por el corolario 4.2.11, tenemos que

$$\langle 1, y, y^2 \rangle = \mathcal{E}_2(\alpha) / \mathcal{E}_2(\beta),$$

entonces, existen los gérmenes  $\phi, \psi, \theta \in \mathcal{E}_2(\beta)$  tal que

$$y^3 = \phi(x, g(x, y)) + \psi(x, g(x, y))y + 3\theta(x, g(x, y))y^2. \quad (4.5)$$

Donde las funciones  $\phi, \psi$  y  $\theta$  son funciones definidas en una vecindad de  $g(0)$  y cumplen que  $\phi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0$ . Podemos suponer que  $\theta \equiv 0$ . Y si hacemos el cambio de coordenadas

$$x' = x, \quad y' = y - \theta(x, g(x, y)),$$

entonces, en las nuevas coordenadas del caso (4.3), se siguen satisfaciendo las condiciones, y el caso (4.5) se satisface con los gérmenes  $\phi, \psi$ , y con  $\theta \equiv 0$ .

Ahora, suponiendo que  $\theta \equiv 0$  en (4.5), escribimos

$$x' = \psi(x, g(x, y)), \quad y' = y,$$

y

$$w' = \psi(w, z), \quad z' = \phi(z, w).$$

Entonces, (4.3) y (4.5) nos muestran que estos son los cambios de coordenadas que necesitabamos. Y así, en las nuevas coordenadas, el mapeo tiene la forma normal

$$w' = x', \quad z' = -x'y' + (y')^3.$$

Que era lo que queríamos probar. □

# Capítulo 5

## Lema de extensión de Stein

El problema central de este capítulo será el de tener una noción de extensión de funciones suaves definidas sobre un dominio con frontera en  $\mathbb{R}^n$  a funciones suaves en  $\mathbb{R}^n$ .

Como lo hemos hablado anteriormente, lo que veamos en este capítulo nos servirá para demostrar el *teorema de división de Malgrange-Mather* del capítulo 6. Y para dar la introducción a esto, fue Elias Stein (1970) quien demostró que si la frontera del dominio es localmente la gráfica de una función que satisface una cierta condición de Lipschitz, entonces existe un operador de extensión que es lineal y continuo en la topología  $C^\infty$ .

### 5.1. Distancia regularizada

Empezaremos esta sección construyendo una *función de distancia regularizada*, para la cual estaremos descomponiendo un subconjunto del espacio  $\mathbb{R}^n$  en cubos.

**Definición 5.1.1.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto cerrado. Denotamos como  $d(x, X)$  la distancia de  $x$  a  $X$ .

Para demostrar el teorema 5.1.5, que vendrá más adelante, haremos uso de los siguientes dos lemas, pero antes queremos aclarar que cuando mencionemos la frase, una *colección de cubos*, a lo que en realidad nos estaremos refiriendo es a una subdivisión de  $\mathbb{R}^n - X$  donde sus interiores serán disjuntos y su unión será  $\mathbb{R}^n - X$ .

**Lema 5.1.2.** *Existe una subdivisión de  $\mathbb{R}^n - X$  en una colección numerable  $\mathcal{I}$  de cubos cerrados  $L$  con lados paralelos a los ejes coordenados, tal que*

$$\text{diam}(L) \leq d(L, X) \leq 4 \text{diam}(L).$$

Aquí,  $\text{diam}(L)$  denota el diámetro de  $L$  y  $d(L, X)$  la distancia de  $L$  a  $X$ .

*Demostración.* Para cada  $p \in \mathbb{Z}$ , vamos a subdividir a  $\mathbb{R}^n$  en cubos cerrados con lados de longitud  $\frac{1}{2^p}$ , y estos cubos están definidos por los hiperplanos  $x_i = \frac{j_i}{2^p}$  con  $1 \leq i \leq n$  y  $j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ . Sea  $\Sigma_p$  el conjunto de tales cubos construidos.

Ahora, sea

$$\Omega_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{c}{2^p} < d(x, X) < \frac{c}{2^{p-1}} \right\},$$

donde  $c$  será una constante que definiremos más adelante; por otro lado, sea  $S_p \subset \Sigma_p$  un subconjunto conformado por los cubos de  $\Sigma_p$  que intersectan a  $\Omega_p$ .

Si  $L \in \Sigma_p \Rightarrow \text{diam}(L) = \frac{\sqrt{n}}{2^p}$ ; por otro lado, si  $L \in S_p \Rightarrow \exists x_0 \in L \cap \Omega_p$  tal que

$$d(L, X) \leq d(x_0, X) < \frac{c}{2^{p-1}},$$

y

$$\begin{aligned} d(L, X) &\geq d(x_0, X) - \text{diam}(L) \\ &\geq \frac{c}{2^p} - \frac{\sqrt{n}}{2^p} \end{aligned}$$

entonces, si definimos  $c = 2\sqrt{n}$ , obtenemos que  $\bigcup_p S_p = \mathbb{R}^n - X$ , y así, para toda  $L \in \bigcup_p S_p$  se cumple que

$$\text{diam}(L) \leq d(L, X) \leq 4 \text{diam}(L). \quad (5.1)$$

□

**Observación 5.1.3.** Los cubos en  $\bigcup_p S_p$ , no necesariamente tienen intersección disjunta, es decir, si  $L_1 \in S_{p_1}$  y  $L_2 \in S_{p_2}$  y se cumple que  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  entonces un cubo está contenido en el otro; es decir, si  $p_1 \geq p_2$  entonces se sigue que  $L_1 \subset L_2$ .

Ahora vamos a definir lo que es un *cubo maximal*. Dado  $L \in \bigcup_p S_p$  consideramos el cubo maximal que contiene a  $L$ , esto es, por (5.1) si  $L \subset L'$  entonces  $\text{diam}(L') \leq 4 \text{diam}(L)$ . Ahora, si  $L$  está contenido en dos cubos, entonces esos dos cubos tienen una intersección obvia,  $L$  mismo, esto nos dice que cada cubo  $L \in \bigcup_p S_p$  tiene un único cubo maximal que lo contiene.

Vamos a denotar como  $\mathcal{I}$  a la colección de cubos maximales de  $\bigcup_p S_p$ .

**Lema 5.1.4.** a) *cada cubo  $L \in \mathcal{I}$  intersecciona solamente a cubos  $L' \in \mathcal{I}$  tal que*

$$\frac{1}{4} \text{diam}(L') \leq \text{diam}(L) \leq 4 \text{diam}(L').$$

b) *si  $L \in \mathcal{I}$ , entonces existen a lo sumo  $12^n$  cubos en  $\mathcal{I}$  que tocan a  $L$ .*

*Demostración.* a) Por el lema anterior tenemos que  $d(L, X) \leq 4 \text{diam}(L)$ . Por tanto, si  $L \cap L' \neq \emptyset$ , esto nos dice que se tocan en su frontera, es decir, tienen al menos un punto en común en la frontera, entonces

$$d(L', X) \leq d(L, X) + \text{diam}(L) \leq 4 \text{diam}(L) + \text{diam}(L) = 5 \text{diam}(L),$$

se sigue

$$\text{diam}(L') \leq d(L', X) \leq 5 \text{diam}(L).$$

Pero  $\text{diam}(L') = 2^k \text{diam}(L)$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ , por tanto, necesariamente,  $\text{diam}(L') \leq 4 \text{diam}(L)$  y entonces  $\frac{1}{4} \text{diam}(L') \leq \text{diam}(L)$ .

Usando el mismo razonamiento de forma simétrica, tenemos que  $\frac{1}{4} \text{diam}(L) \leq \text{diam}(L')$ , es decir,  $\text{diam}(L) \leq 4 \text{diam}(L')$ .

b) Si  $L \in \Sigma_p$  entonces, se prueba por inducción que hay  $3^n$  cubos en  $\Sigma_p$  que tocan a  $L$  (incluyendo a  $L$  mismo).

Por otro lado, cada cubo en  $\Sigma_p$  puede contener a lo mucho  $4^n$  cubos maximales de diámetro  $\frac{1}{4} \text{diam}(L)$ . Entonces, el número máximo de cubos que pueden tocar a  $L$  es  $3^n 4^n = 12^n$ .  $\square$

Como lo habíamos dicho al principio de esta sección, con las demostraciones de los dos lemas anteriores, ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente teorema.



**Teorema 5.1.5.** *Existe una función  $\Delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n - X)$  y constantes  $b_k, k \in \mathbb{N}^n$ ,  $c_1, c_2$  todas independientes de  $X$ , tal que*

$$1) \quad c_1 d(x, X) \leq \Delta(x) \leq c_2 d(x, X) \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^n - X.$$

$$2) \quad \left| \frac{\partial^k \Delta}{\partial x^k}(x) \right| \leq b_k d(x, X)^{1-|k|} \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}^n \text{ y } x \in \mathbb{R}^n - X.$$

*Demostración.* Sea  $L \in \mathcal{I}$ , sea  $x_L$  el centro de  $L$  y sea  $\lambda_L$  la longitud de sus lados de tal forma que  $\text{diam}(L) = \sqrt{n}\lambda_L$ .

Vamos a trabajar con un nuevo tipo de cubos los cuales denotaremos como  $L^*$ , y para ver que forma tienen fijamos una  $\delta$  con  $0 < \delta < \frac{1}{4}$ , donde además  $L^*$  tendrá el mismo centro que  $L$  pero  $L^*$  estará expandido por el factor  $1 + \delta$ , es decir

$$L^* = (1 + \delta)(L - x_L) + x_L.$$

Ahora, cada punto en  $\mathbb{R}^n - X$  está contenido en a lo mucho  $12^n$  cubos  $L^*$ . Así, es claro ver que si  $L, L_1 \in \mathcal{I}$  entonces  $L_1^*$  interseca a  $L$  si y sólo si  $L_1$  interseca a  $L$ , pues sus lados varían en  $\frac{1}{2^p}$ . Para ver esto, vamos a considerar la unión de  $L_1$  con todos los cubos en  $\mathcal{I}$  que tocan a  $L_1$  y así, por el inciso b) del lema anterior, estos cubos tienen diámetro de longitud al menos  $\frac{1}{4}\text{diam}(L_1)$ , esto nos dice que  $L_1^*$  está contenido en la unión de estos cubos, entonces cualquier punto en  $\mathbb{R}^n - X$  tiene una vecindad que interseca a lo más  $12^n$  cubos  $L^*$ .

Ahora, sea  $L_0$  el cubo que tiene lados de longitud 1 unidad y está centrado en el origen y sea también  $\Psi$  una función suave con  $0 \leq \Psi \leq 1$  que se define como

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in L_0 \\ 0 & \text{si } x \notin (1 + \delta)L_0. \end{cases}$$

Por otro lado, para cada  $L \in \mathcal{I}$ , definimos

$$\Psi_L(x) = \Psi\left(\frac{x - x_L}{\lambda_L}\right),$$

entonces, por la regla de la cadena, se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \Psi_L}{\partial x^k}(x) \right| &= \left| \frac{1}{\lambda_L^{|k|}} \frac{\partial^k \Psi}{\partial x^k}\left(\frac{x - x_L}{\lambda_L}\right) \right| \\ &\leq \frac{a_k}{(\text{diam}(L))^{|k|}} \end{aligned}$$

donde  $a_k$  depende de  $k$  y  $n$ .

Ahora, definimos

$$\Delta(x) = \sum_{L \in \mathcal{I}} (\text{diam}(L)) \Psi_L(x),$$

y de aquí, si  $x \in L$ , por el inciso a) del lema anterior tenemos que

$$d(x, X) \leq d(L, X) + \text{diam}(L) \leq 5 \text{diam}(L),$$

y si  $x \in L^*$ , entonces

$$d(x, X) \geq d(L, X) - \frac{1}{4} \text{diam}(L) \geq \frac{3}{4} \text{diam}(L),$$

pero por como se definió  $\Psi_L(x)$ , si  $x \in L$  entonces  $\Psi_L(x) = 1$  y así

$$\Delta(x) \geq \text{diam}(L) \geq \frac{1}{5} d(x, X),$$

y como habíamos dicho que  $x$  está contenido en a lo mucho  $12^n$  cubos  $L^*$ , entonces

$$\Delta(x) \leq \sum_{x \in L^*} \text{diam}(L) \leq \frac{4}{3} 12^n d(x, X),$$

definiendo  $c_1 = \frac{1}{5}$  y  $c_2 = \frac{4}{3} 12^n$  tenemos el inciso 1) del teorema.

Para el inciso 2), tenemos que si  $x \in L^*$  entonces  $d(x, X) \leq 6 \text{diam}(L)$  y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \Delta}{\partial x^k}(x) \right| &\leq \frac{4}{3} 12^n \text{diam}(L) \frac{a_k}{(\text{diam}(L))^{|k|}} \\ &= \frac{4}{3} 12^n a_k 6^{|k|} d(x, X)^{1-|k|}, \end{aligned}$$

entonces, elegimos  $b_k = \frac{4}{3} 12^n a_k 6^{|k|}$  y así concluimos con la segunda parte del teorema.  $\square$

**Observación 5.1.6.** Si definimos

$$\Phi_L(x) = \frac{\Psi_L(x)}{\sum_{M \in \mathcal{I}} \Psi_M(x)},$$

de tal forma que  $\sum_L \Phi_L(x) = 1$ , obtenemos una *partición de la unidad de Whitney* de  $\mathbb{R}^n - X$ .

## 5.2. Lema de extensión de Stein

**Definición 5.2.1.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface la condición de Lipschitz

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq M |x - x'|$$

para todas  $x, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Consideramos puntos en  $\mathbb{R}^n$  como pares  $(x, y)$ , con  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $y \in \mathbb{R}$ . El subconjunto abierto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y > \phi(x)\}$$

es llamado un *dominio especial de Lipschitz*. Una rotación de este dominio también será llamado un dominio especial de Lipschitz.

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\partial\Omega$  su frontera. Decimos que  $\Omega$  es un *dominio de Lipschitz* si para cada punto  $a \in \partial\Omega$  existe una vecindad abierta  $U_a$  de  $a \in \mathbb{R}^n$  y un dominio especial de Lipschitz  $\Omega_a$  tal que  $\Omega \cap U_a = \Omega_a \cap U_a$ .

**Definición 5.2.2.** Sea  $X$  la cerradura de un dominio de Lipschitz  $\Omega$ . Denotamos como  $\mathcal{E}(X)$  al espacio de funciones continuas  $f$  sobre  $X$  tal que

- a)  $f|_{\Omega} \in \mathcal{E}(\Omega)$ .
- b) todas las derivadas parciales de  $f|_{\Omega}$  se pueden extender continuamente a  $X$ .

Si al espacio  $\mathcal{E}(X)$  lo dotamos con la seminorma

$$|f|_m^K = \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leq m}} |f^k(x)|$$

entonces este espacio tendrá una estructura de un espacio de Fréchet donde  $m \in \mathbb{N}$  y  $K \subset X$  es compacto, y donde  $f^k$  denota la extensión continua de  $\frac{\partial^k (f|_{\Omega})}{\partial x^k}$  a  $X$ .

El lema que sigue lo llamamos *lema de extensión de Stein*, pero no lo vamos a demostrar en su forma más general, pues esto escapa de los propósitos de este trabajo; sin embargo, lo que sí haremos es demostrarlo en el caso cuando  $X$  es un dominio especial de Lipschitz. Más adelante enunciaremos algunos lemas para comprender de mejor manera este resultado.

**Lema 5.2.3 (de extensión de Stein).** *Si  $X$  es la cerradura de un dominio de Lipschitz  $\Omega$ , entonces existe un operador de extensión*

$$E : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

*es decir,  $E : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  es un mapeo lineal continuo tal que  $E(f)|_X = f$  para toda  $f \in \mathcal{E}(X)$ . Además,  $E$  se puede elegir de tal manera que para cada subconjunto compacto  $L$  de  $\mathbb{R}^n$ , existe un subconjunto compacto  $K$  de  $X$  tal que  $E$  satisface la siguiente estimación: para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$|E(f)|_m^L \leq C |f|_m^K.$$

La demostración en su forma más general de este lema se encuentra en [2].

Como habíamos dicho al principio de esta sección, bastaba con probar el lema de extensión de Stein en el caso de un dominio especial de Lipschitz, por tanto, será conveniente trabajar en  $\mathbb{R}^{n+1}$  en lugar de  $\mathbb{R}^n$ . Así pues, consideremos puntos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  como pares  $(x, y)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $y \in \mathbb{R}$ . Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface la condición de Lipschitz

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq M |x - x'| \quad (5.2)$$

para todas  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $\Omega$  el dominio especial de Lipschitz definido como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y > \phi(x)\},$$

y sea  $X = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Comenzaremos enunciando el siguiente teorema, pero lo vamos a demostrar al final de esta sección, pues para la prueba necesitamos los lemas que siguen. Y así, con las pruebas de los lemas y este teorema, la demostración del lema de extensión de Stein estará completa.

**Teorema 5.2.4.** *Existe un operador de extensión*

$$E : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

*que satisface la siguiente estimación. Para toda  $m \in \mathbb{N}$  y cada subconjunto compacto  $L$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , existe un subconjunto compacto  $K = K(L)$  de  $X$  y una constante positiva  $C$ , que depende solamente de  $n, m$  y  $M$  en la desigualdad de Lipschitz, tal que*

$$|E(f)|_m^L \leq C |f|_m^K$$

*para toda  $f \in \mathcal{E}(X)$ .*

**Lema 5.2.5.** Existe una función continua  $\psi : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que decrece de manera rápida en  $\infty$ ; es decir, para cada  $m$ , se tiene que  $\psi(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tal que

$$\int_1^\infty \psi(t) dt = 1$$

y

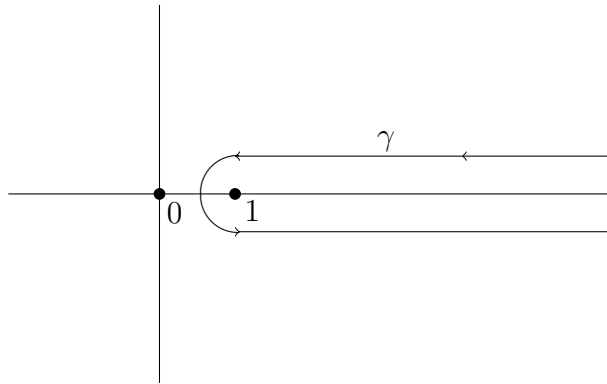
$$\int_1^\infty t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

*Demostración.* Definimos la función

$$\psi(t) = \frac{e}{2\pi t} \operatorname{Im} \left( e^{-\omega(t-1)^{1/4}} \right),$$

donde  $\omega = e^{-i\pi/4}$  e  $\operatorname{Im}$  denota la parte imaginaria.

Para ver que esta función satisface las condiciones del lema, consideremos una función holomorfa de la forma  $f(z) = e^{-\omega(z-1)^{1/4}}$  en el plano complejo que se abre a lo largo del eje real que va de 1 a  $\infty$ . Tomamos el contorno  $\gamma$  que está en la siguiente figura.



Como  $f(z) = e^{-\omega(z-1)^{1/4}}$  decrece de manera rápida cuando  $z \rightarrow \infty$  tenemos que por la fórmula integral de Cauchy

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} e^{-\omega(z-1)^{1/4}} dz = e^{-\omega(z-1)^{1/4}} \Big|_{z=0} = e^{-1}$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^k}{z} e^{-\omega(z-1)^{1/4}} dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Haciendo la justificación de la primera ecuación tenemos que

$$e^{-i\pi/4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sustituyendo tenemos que  $e^{-\omega(z-1)^{1/4}} = e^{-(\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2)(z-1)^{1/4}}$ , y evaluando en  $z = 0$  nos da  $e^{-(\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2)(-1)^{1/4}}$ , pero  $(-1)^{1/4} = (\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$  entonces

$$e^{-(\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)} = e^{-1},$$

que era justo lo que queríamos. La segunda ecuación es inmediata.  $\square$

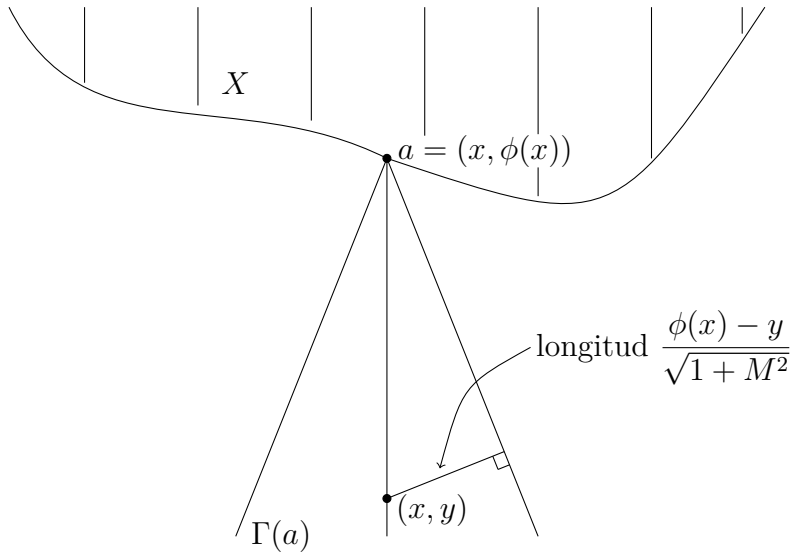
**Lema 5.2.6.** *Sea  $\Delta(x, y)$  la distancia regularizada de  $X$ , como la que fue dada en el teorema 5.1.5. Entonces existe una constante  $c$ , que depende sólo de la cota  $M$  en la desigualdad de Lipschitz, tal que si  $(x, y) \in \mathbb{R}^n - X$ , entonces*

$$c \Delta(x, y) \geq \phi(x) - y.$$

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  la parte inferior del cono con vértice en 0 dado por

$$\Gamma = \{(x, y) \mid M|x| < |y|, y < 0\}.$$

Ahora, para cualquier  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  denotamos como  $\Gamma(a)$  el cono trasladado que tiene vértice en  $a$ , como en la siguiente figura.



Una equivalencia de la condición de Lipschitz (5.2) es que si  $a$  es cualquier punto en la frontera de  $X$  entonces se sigue que  $\Gamma(a) \subset \mathbb{R}^n - \Omega$ . De esta forma, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^n - X$  definamos  $a = (x, \phi(x))$ . Entonces,  $(x, y) \in \Gamma(a)$  y la distancia de cualquier punto de  $X$  a  $(x, y)$  es mayor que la distancia de la frontera de  $\Gamma(a)$  a  $(x, y)$ .

Por otro lado, la distancia es invariante bajo la traslación, por tanto, vemos que la mínima distancia  $d((x, y), \Gamma(a))$  es al menos  $\frac{\phi(x) - y}{\sqrt{1 + M^2}}$ , de esta manera

$$d((x, y), X) \geq \frac{\phi(x) - y}{\sqrt{1 + M^2}},$$

así, en el teorema 5.1.5 vimos que  $\Delta(x, y) \geq \frac{1}{5}d(x, X)$ , entonces

$$c \Delta(x, y) \geq \phi(x) - y,$$

y en consecuencia,  $c = 5\sqrt{1 + M^2}$ . □

Por último, sólo nos queda hacer la demostración del teorema 5.2.4 el cual queremos advertir que es un resultado avanzado.

*Demostración.* Definamos por conveniencia  $\delta(x, y) = 2c\Delta(x, y)$ , de modo que, por el lema anterior

$$\delta(x, y) \geq 2(\phi(x) - y).$$

Así, será suficiente definir el operador extensión sobre funciones  $f \in \mathcal{E}(X)$  donde  $f(x, y) = 0$  cuando  $y > \phi(x) + 1$ . Entonces, dada una  $f$  de esa forma, podemos definir a nuestro operador como

$$E(f)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in X \\ \int_1^\infty f(x, y + t\delta(x, y))\psi(t)dt & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^n - X. \end{cases}$$

Recordemos que  $X = \Omega \cup \partial\Omega$ , donde  $\Omega$  es un dominio especial de Lipschitz. Ahora, la integral del operador está bien definida ya que si  $t \geq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} y + t\delta(x, y) &\geq y + 2(\phi(x) - y) \\ &= \phi(x) + \phi(x) - y \\ &> \phi(x). \end{aligned}$$

Es claro que  $E(f)$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n - X$ . Entonces, lo que queremos probar ahora es que  $E(f)|_{\mathbb{R}^n - X}$  puede extenderse continuamente, junto con todas sus derivadas parciales, a la frontera de  $\Omega$ . Con lo anterior podemos ver un ejemplo tratando de encontrar la derivada parcial del operador  $E$  con respecto a la variable  $x_j$ , es decir, como un ejemplo podemos desarrollar la segunda derivada parcial,  $\frac{\partial^2 E(f)}{\partial x_j^2}$ , y ver cual es su comportamiento.

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(f)}{\partial x_j^2} &= \int_1^\infty f_{jj}(\cdot)\psi(t)dt + \int_1^\infty f_{jy}(\cdot)t\delta_j\psi(t)dt \\ &+ \int_1^\infty f_{yy}(\cdot)(t\delta_j)^2\psi(t)dt + \int_1^\infty f_y(\cdot)t\delta_{jj}\psi(t)dt, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $f_{jj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ ,  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  y  $(\cdot) = (x, y + t\delta)$ .

Sea  $(x, y)$  un punto que se acerca a  $(x^0, y^0) \in \partial\Omega$ . Entonces  $\delta(x, y) \rightarrow 0$  y  $\delta_j$ , por el teorema 5.1.5, está acotada, pues es la derivada de la distancia regularizada, mientras que, por el lema 5.2.5 sabemos que

$$\int_1^\infty \psi(t)dt = 1,$$

$$\int_1^\infty t\psi(t)dt = 0,$$

y

$$\int_1^\infty t^2\psi(t)dt = 0,$$

así, usando estas tres últimas integrales y lo visto en el lema 5.2.5, vemos que al calcular la convergencia cuando  $(x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$ , los primeros tres términos de (5.3), al estar  $\delta_j$  acotada, convergen a un total que equivale a lo siguiente:

$$\lim_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ (x,y) \rightarrow (x^0,y^0)}} \frac{\partial^2 E(f)}{\partial x_j^2} = \lim_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ (x,y) \rightarrow (x^0,y^0)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x, y).$$

Por otro lado, el último término es difícil de calcular, pues nos encontramos con que tiene más que una derivada de la distancia regularizada, lo que hace que no sea acotada; sin embargo, desarrollando alrededor de 1 tenemos que

$$f_y(x, y + t\delta) = f_y(x, y + \delta) + (t - 1)\delta f_{yy}(x, y + \delta) + o\left(\left((t - 1)\delta\right)^2\right).$$



Si sustituimos lo anterior en el último término de (5.3), al ser un polinomio  $t$  y por el lema 5.2.5 obtenemos dos integrales que se anulan junto con un residuo que es

$$o\left(\delta^2 \delta_{jj} \int_1^\infty (t-1)^2 t \psi(t) dt\right).$$

Y como  $\psi$  decrece rápido, entonces se tiene que  $o(d((x, y), X)) \rightarrow 0$  cuando  $(x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$ .

Entonces hemos probado que  $E(f)|_{\mathbb{R}^n - X}$  puede ser extendido de manera continua junto con todas sus derivadas parciales a  $\partial\Omega$ , y por tanto, las extensiones continuas de  $E(f)|_{\mathbb{R}^n - X}$  y sus derivadas parciales a  $\partial\Omega$  son iguales a la extensión continua de  $f$ , es decir,  $E(f) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ . Sólo falta mostrar que  $E(f)$  es  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; así, primero mostraremos que  $E(f)$  es de clase  $C^1$ , entonces, si nos tomamos  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  cuando  $u \rightarrow v$  se debe cumplir que

$$E(f)(u) - E(f)(v) = \nabla(E(f))(u) \cdot (u - v) + o(|u - v|).$$

Pero, si  $v \in \mathbb{R}^n - X$  ó  $v \in \Omega$  ya habríamos terminado pues, por lo visto anteriormente, demostramos que en esos subconjuntos  $E$  es  $C^\infty$ . Falta ver que pasa en  $\partial\Omega$ ; por tanto, supongamos que  $v \in \partial\Omega$  y supongamos también que  $u \in \mathbb{R}^n - \Omega$ . Vemos que  $u$  y  $v$  pueden unirse por segmentos que están totalmente contenidos en  $\mathbb{R}^n - X$  los cuales tienen por longitud total  $c|u - v|$  para alguna constante  $c$ . Por tanto, existe  $w \in \mathbb{R}^n - X$  tal que las curvas que unen a  $u$  con  $w$  y a  $w$  con  $v$  tienen la propiedad de que si  $u \in \Gamma(v)$ , podríamos elegir  $w = u$ ; porque de otra forma los conos  $\Gamma(u)$  y  $\Gamma(v)$  se intersectarían y podemos elegir a  $w$  como el punto de intersección de esos conos.

Ahora

$$E(f)(u) - E(f)(w) = \nabla(E(f))(u) \cdot (u - w) + o(|u - w|)$$

$$E(f)(w) - E(f)(v) = \nabla(E(f))(w) \cdot (w - v) + o(|w - v|)$$

sumando estas igualdades y usando el hecho que

$$\nabla(E(f))(w) - \nabla(E(f))(u) = o(1)$$

cuando  $|u - v| \rightarrow 0$  en  $\mathbb{R}^n - \Omega$  obtenemos el resultado requerido. Usando el mismo razonamiento se prueba también que  $E(f)$  es de clase  $C^m$  para cada  $m$ , y entonces es de clase  $C^\infty$ .  $\square$

## Capítulo 6

# Demostración del teorema de división de Malgrange-Mather

Todo lo que hicimos en los primeros cinco capítulos fue para llegar a este resultado; esto no quiere decir que lo anterior no es importante, al contrario, fue una buena introducción a este resultado final. Este capítulo lo nombramos *demostración del teorema de división de Malgrange-Mather*, en honor a los matemáticos Bernard Malgrange y John Mather, los cuales fueron dos de los mayores impulsores de la teoría de singularidades en el siglo XX.

El teorema de preparación de Weierstrass que vimos en el capítulo 4 fue propuesto por R. Thom para funciones de clase  $C^\infty$ ; sin embargo, fue Malgrange quien dio una demostración completa de este resultado. En este capítulo vamos a demostrar el teorema de división con la ayuda de un polinomio genérico, que lo vimos en el teorema 4.2.3, y que lo enunciaremos más adelante, además, queremos advertir que la base de la demostración de este trabajo fue hecha por P. Milman (1977).

### 6.1. Teorema de división genérica

Como lo mencionamos en el capítulo 4, para que la prueba del teorema de división de Malgrange-Mather esté completa bastará con demostrar el teorema de división genérica 4.2.3 donde apuntamos la importancia del polinomio genérico que definiremos a continuación.

Por tanto, primero vamos a definir el polinomio del que hablamos ya en el capítulo 4 y de esta manera iremos introduciendo los conceptos que

necesitaremos poco a poco. Así, consideremos para cualquier  $m$  entero no negativo el polinomio genérico de la forma

$$P^m(t, \lambda) = t^m + \sum_{i=1}^m \lambda_i t^{m-i},$$

donde  $P^0(t, \lambda) = 1$ . Entonces para cada  $m \in \mathbb{Z}^+$ , definimos el mapeo

$$\lambda^m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

por la siguiente identidad de polinomios en  $t$

$$P^m(t, \lambda^m(s, \mu)) = (t - s)P^{m-1}(t, \mu),$$

donde  $(s, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ , entonces el mapeo  $\lambda^m$  se define como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 - s, \\ \lambda_j &= \mu_j - \mu_{j-1}s, \quad 2 \leq j \leq m-1 \\ \lambda_m &= -\mu_{m-1}s. \end{aligned}$$

Así, con lo anterior, vamos a demostrar los dos teoremas siguientes que necesitamos para la prueba completa del teorema de división. Primero enunciaremos los teoremas 6.1.1 y 6.1.3, pero por ahora sólo vamos a demostrar el teorema 6.1.1 y vamos a dar por hecho el teorema 6.1.3 y este se demostrará después.

**Teorema 6.1.1 (de división genérica).** *Supongamos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto. Entonces para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe un mapeo lineal y continuo de la forma*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R} \times U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{1+m} \times U) \times (\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times U))^m$$

definido como

$$f \mapsto (Q_f^m, R_{1,f}^m, \dots, R_{m,f}^m)$$

tal que

- 1) para toda  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times U)$  se tiene que  $f(t, x) = P^m(t, \lambda)Q_f^m(t, \lambda, x) + R_f^m(t, \lambda, x)$ , donde

$$R_f^m(t, \lambda, x) = \sum_{j=1}^m R_{j,f}^m(\lambda, x)t^{m-j}.$$

2) para cada entero positivo  $m$

$$Q_f^m(t, \lambda^m(s, \mu), x) = \frac{Q_f^{m-1}(t, \mu, x) - Q_f^{m-1}(s, \mu, x)}{t - s}.$$

**Observación 6.1.2.** La ecuación  $P^m(t, \lambda) = 0$  define un subconjunto algebraicamente cerrado de  $\mathbb{R}^{1+m}$  el cual vamos a denotar como  $X = X^m$ . De hecho, al conjunto  $X$  lo podemos ver como la gráfica de la función

$$\lambda_m = -t^m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i t^{m-i},$$

así,  $X$  es una subvariedad diferenciable de tal forma que la proyección que va de  $\mathbb{R}^{1+m}$  a  $\mathbb{R}^m$  definida como

$$(t, \lambda) \mapsto (t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$$

queda restringida a un sistema de coordenadas  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $X$ .

Sea  $\pi : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la proyección canónica definida como  $\pi(t, \lambda) = \lambda$ . Denotemos como  $\mathcal{E}_\pi(X \times U)$  el subespacio cerrado de  $\mathcal{E}(X \times U)$  el cual consiste de todas las funciones que son constantes en las fibras  $\pi^{-1}(\lambda) \times \{x\}$  del mapeo  $\pi \times id|_U$ .

**Teorema 6.1.3.** *Existe un mapeo lineal y continuo*

$$J : \mathcal{E}_\pi(X \times U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times U)$$

tal que si  $h \in \mathcal{E}_\pi(X \times U)$ , entonces

$$(Jh)(\lambda, x) = h(t, \lambda, x)$$

para toda  $(t, \lambda) \in X$  y  $x \in U$ .

Como lo habíamos mencionado anteriormente, primero vamos a demostrar el teorema 6.1.1 pero dando por hecho el teorema 6.1.3.

*Demostración.* Esta prueba la haremos por inducción sobre  $m$ . Entonces, para  $m = 0$  tenemos que

$$f(t) = P^0(t, \lambda)Q_f^0(t, \lambda) + R_f^0(t, \lambda),$$

pero,  $P^0(t, \lambda) = 1$ ,  $R_f^0(t, \lambda) = 0$  y por tanto  $Q_f^0(t, \lambda) = f(t)$ , de esta manera para  $m = 0$  se cumple.

Para  $m = 1$ , tenemos que

$$f(t) = P^1(t, \lambda)Q_f^1(t, \lambda) + R_f^1(t, \lambda)$$

así, el polinomio genérico es  $P^1(t, \lambda) = t + \lambda_1$ . Por otro lado, por el lema de Hadamard, tenemos la igualdad

$$f(t) - f(-\lambda_1) = (t + \lambda_1) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} (st - (1-s)\lambda_1) ds,$$

así, podemos definir a

$$Q_f(t, \lambda) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} (st - (1-s)\lambda_1) ds$$

y

$$R_f^1(t, \lambda) = R_{1,f}^1(\lambda) = f(-\lambda_1).$$

Por tanto, como  $\lambda^1(s, \mu) = -s$ , entonces

$$Q_f^1(t, \lambda^1(s, \mu)) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{Q_f^0(t, \lambda) - Q_f^0(s, \lambda)}{t - s}.$$

Ahora, supongamos que el resultado se cumple para los primeros  $m - 1$  términos. Y por otro lado, vamos a denotar a los puntos  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^{m-1}$  y  $\nu \in \mathbb{R}^{m-2}$  como

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \\ \mu &= (\mu_1, \dots, \mu_{m-1}), \\ \nu &= (\nu_1, \dots, \nu_{m-2}) \end{aligned}$$

y los escribiremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda(s, \mu) &= \lambda^m(s, \mu), \quad (s, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}, \\ \mu(r, \nu) &= \lambda^{m-1}(r, \nu), \quad (r, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P^m(t, \lambda(s, \mu(r, \nu))) &= (t - s)P^{m-1}(t, \mu(r, \nu)) \\ &= (t - s)(t - r)P^{m-2}(t, \nu), \end{aligned}$$

y así, vemos que  $\lambda(s, \mu(r, \nu))$  es simétrica en  $(s, r)$ .

Ahora, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= P^{m-1}(t, \mu) Q_f^{m-1}(t, \mu) + R_f^{m-1}(t, \mu) \\ &= P^m(t, \lambda(s, \mu)) \frac{Q_f^{m-1}(t, \mu) - Q_f^{m-1}(s, \mu)}{t - s} + \sum_{j=1}^m R_{j,f}(s, \mu) t^{m-j}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde  $R_{1,f}, \dots, R_{m,f}$  están dadas como

$$\sum_{j=1}^m R_{j,f}(s, \mu) t^{m-j} = Q_f^{m-1}(s, \mu) P^{m-1}(t, \mu) + R_f^{m-1}(t, \mu).$$

Entonces, probaremos que

$$R_{j,f}(s, \mu(r, \nu)) = R_{j,f}(r, \mu(s, \nu)), \quad \text{con } 1 \leq j \leq m. \quad (6.2)$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{Q_f^{m-1}(t, \mu(r, \nu)) - Q_f^{m-1}(s, \mu(r, \nu))}{t - s} \\ &= \frac{\frac{Q_f^{m-2}(t, \nu) - Q_f^{m-2}(r, \nu)}{t - r} - \frac{Q_f^{m-2}(s, \nu) - Q_f^{m-2}(r, \nu)}{s - r}}{t - s} \\ &= \frac{(s - r)Q_f^{m-2}(t, \nu) - (t - r)Q_f^{m-2}(s, \nu) + (t - s)Q_f^{m-2}(r, \nu)}{(t - r)(t - s)(s - r)} \\ &= \frac{Q_f^{m-1}(t, \mu(s, \nu)) - Q_f^{m-1}(r, \mu(s, \nu))}{t - r}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la ecuación (6.2) se sigue de (6.1) y de la simetría de  $\lambda$ , es decir, del hecho que se cumple que

$$\lambda(s, \mu(r, \nu)) = \lambda(r, \mu(s, \nu)).$$

Por otro lado, el mapeo que va de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$  a  $\mathbb{R}^m$  definido como

$$\begin{aligned} (s, \mu_1, \dots, \mu_{p-1}) &\mapsto (s, \lambda_1^m(s, \mu), \dots, \lambda_{m-1}^m(s, \mu)) \\ &= (s, \mu_1 - s, \mu_2 - \mu_1 s, \dots, \mu_{m-1} - \mu_{m-2} s) \end{aligned}$$

es un mapeo polinomial invertible. Vamos a denotar como  $\eta$  la inversa del mapeo anterior. Entonces, para cada  $j = 1, \dots, m$ , definimos un mapeo  $h_{j,f} \in \mathcal{E}(X)$  como

$$h_{j,f} = R_{j,f} \circ \eta \circ \phi.$$

Entonces, vamos a demostrar que  $h_{j,f}$  es constante en la fibra  $\pi^{-1}(\lambda)$ , es decir, que  $h_{j,f} \in \mathcal{E}_\pi(X)$ . Para ver esto, consideremos dos puntos  $(s, \lambda), (r, \lambda) \in X$  con  $s \neq r$ . Entonces existe  $\nu \in \mathbb{R}^{m-2}$  de tal forma que

$$P^m(t, \lambda) = (t - s)(t - r)P^{m-2}(t, \nu),$$

y por ende

$$\lambda = \lambda(s, \mu(r, \nu)) = \lambda(r, \mu(s, \nu)).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \eta \circ \phi(s, \lambda) &= (s, \mu(r, \nu)) \\ \eta \circ \phi(r, \lambda) &= (r, \mu(s, \nu)), \end{aligned}$$

y así, tenemos que

$$\begin{aligned} h_{j,f}(s, \lambda) &= R_{j,f}(s, \mu(r, \nu)) \\ &= R_{j,f}(r, \mu(s, \nu)) \\ &= h_{j,f}(r, \lambda), \end{aligned}$$

y por tanto,  $h_{j,f} \in \mathcal{E}_\pi(X)$ .

Ahora, para  $j = 1, \dots, m$ , sea  $R_{j,f}^m = J(h_{j,f})$  donde

$$J : \mathcal{E}_\pi(X) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$$

que es el mapeo dado por el teorema 6.1.3. Entonces, para cada  $j = 1, \dots, m$ , el mapeo  $f \mapsto R_{j,f}^m$  que va de  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  a  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$  es lineal y continuo.

Por último, vamos a probar que  $f(t) - \sum_{j=1}^m R_{j,f}^m(\lambda)t^{m-j}$  es divisible por  $P^m(t, \lambda)$ . Entonces, si  $P^m(t, \lambda) = 0$ , se sigue que  $\lambda = \lambda(t, \mu)$  para algún  $\mu \in \mathbb{R}^{m-1}$ , así que

$$\begin{aligned} R_{j,f}^m(\lambda) &= (Jh_{j,f})(\lambda(t, \mu)) \\ &= h_{j,f}(t, \lambda(t, \mu)) \\ &= R_{j,f}(t, \mu). \end{aligned}$$

Por tanto, de (6.1) y del hecho que  $(t, \lambda(t, \mu)) \in X$ , tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) - \sum_{j=1}^m R_{j,f}(\lambda)t^{m-j} &= f(t) - \sum_{j=1}^m R_{j,f}(t, \mu)t^{m-j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces,  $f(t) - \sum_{j=1}^m R_{j,f}(\lambda)t^{m-j}$  se anula en el conjunto de los ceros del polinomio  $P^m(t, \lambda)$ . Por lo tanto, por el lema de Hadamard, esta función es divisible por  $P^m(t, \lambda)$ .

Ahora, tenemos que

$$f(t) = P^m(t, \lambda)Q_f^m(t, \lambda) + \sum_{j=1}^m R_{j,f}^m(\lambda)t^{m-j},$$

donde

$$Q_f^m(t, \lambda) = \frac{f(t) - \sum_{j=1}^m R_{j,f}^m(\lambda)t^{m-j}}{P^m(t, \lambda)}.$$

Y así, el mapeo que va de  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  a  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{1+m})$  definido como  $f \mapsto Q_f^m$  es lineal y continuo. Además si  $\lambda = \lambda(s, \mu)$ , y de (6.1) obtenemos que

$$Q_f^m(t, \lambda(s, \mu)) = \frac{Q_f^{m-1}(t, \mu) - Q_f^{m-1}(s, \mu)}{t - s}.$$

Por tanto, concluimos la prueba del teorema 6.1.1 suponiendo el teorema 6.1.3 el que demostraremos a continuación.  $\square$

Ahora vamos a presentar la demostración del teorema 6.1.3, y con esto terminamos este trabajo. Pero en el transcurso de la demostración usaremos el lema siguiente.

**Lema 6.1.4.** *Sea  $f : K \rightarrow L$  un mapeo continuo suprayectivo con  $K$  compacto y  $L$  es de Hausdorff. Un mapeo  $g$  que va de  $L$  a un espacio topológico cualquiera  $T$  es continuo si y sólo si  $g \circ f$  es continuo.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Es trivial.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $g \circ f$  es continuo. Vamos a probar que  $g$  es continuo. Por tanto, sea  $C$  cerrado en  $T$ , entonces  $(g \circ f)^{-1}(C) = C'$  es cerrado en  $K$ .



De lo anterior tenemos que  $(f^{-1} \circ g^{-1})(C) = C'$ , ahora, si componemos por ambos lados con  $f$  tenemos que  $(f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(C) = f(C') \Rightarrow g^{-1}(C) = f(C')$ , ya que  $f$  es suprayectiva. Entonces  $f(C')$  es compacto en  $L$ , además, como  $L$  es de Hausdorff entonces  $g^{-1}(C)$  es cerrado en  $L$  y por tanto  $g$  es un mapeo continuo.  $\square$

Por último haremos la demostración del teorema 6.1.3 y con esto estamos terminando completamente la demostración del teorema de división de Malgrange-Mather y, por tanto, también este trabajo estará terminado.

*Demostración.* Aquí haremos la demostración del teorema 6.1.3.

Sea  $h \in \mathcal{E}_\pi(X)$ . Vamos a definir a la siguiente función  $H = H^0$  sobre  $\pi(X)$  como

$$H(\lambda) = h(t, \lambda),$$

donde  $\lambda \in \pi(X)$  y  $t \in \mathbb{R}$  de tal forma que  $(t, \lambda) \in X$ .

Por el lema 6.1.4, vemos que como  $\pi|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  es propia y es cerrada, esto nos dice que cuando le aplicamos este mapeo a  $h$ ; es decir, tenemos que el mapeo

$$h \mapsto H$$

nos define un isomorfismo entre los espacios  $\mathcal{E}_\pi^0(X)$  y  $\mathcal{E}^0(\pi(X))$ , donde  $\mathcal{E}_\pi^0(X)$  es el conjunto de las funciones continuas sobre  $X$  que son constantes en las fibras de  $\pi$  y  $\mathcal{E}^0(\pi(X))$  es el espacio de las funciones continuas definidas sobre el subconjunto cerrado  $\pi(X)$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Por lo tanto, primero vamos a ver el caso cuando  $m$  es impar. Entonces, al ser  $m$  impar  $\pi(X) = \mathbb{R}^m$ , pues para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  el polinomio  $P(t, \lambda) = P^m(t, \lambda)$  tiene al menos una raíz real.

Por otro lado, si  $m$  es par, entonces  $\pi(X) \subsetneq \mathbb{R}^m$ , y por tanto, en este caso, como  $P$  es lineal en  $\lambda$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^m - \pi(X)$  si y sólo si  $P(t, \lambda) > 0$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ , concluimos que  $\mathbb{R}^m - \pi(X)$  es un conjunto convexo.

Ahora,  $\pi|_X$  es un difeomorfismo en alguna vecindad de  $(t, \lambda) \in X$  tal que  $\frac{\partial P}{\partial t}(t, \lambda) \neq 0$ .

Entonces, vamos a definir los siguientes conjuntos:

$$U = \left\{ (t, \lambda) \in X \mid \frac{\partial P}{\partial t}(t, \lambda) \neq 0 \right\}$$

y

$$V = \pi(U) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \mid P(t, \lambda) = 0 \text{ y } \frac{\partial P}{\partial t}(t, \lambda) \neq 0 \text{ para alguna } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

De esta manera,  $U$  y  $V$  son abiertos de  $X$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, además, también son densos en  $X$  y  $\pi(X)$  respectivamente. Mas aún,  $\pi|_U$  es un difeomorfismo en alguna vecindad de algún punto en  $U$ , y por tanto  $H|_V \in \mathcal{E}(V)$ .

Para terminar la prueba, vamos a probar los siguientes dos incisos usando inducción sobre  $m$ .

- a) La función  $H$  es de clase  $C^\infty$  en el  $\text{int}(\pi(X))$ , y además todas sus derivadas parciales se extienden continuamente a la frontera.
- b) El mapeo  $h \mapsto H$  de  $\mathcal{E}_\pi(X)$  sobre  $\mathcal{E}(\pi(X))$  es lineal y continuo.

Cuando  $m$  es impar, definimos  $J(H) = H$  y concluimos. Por otro lado, si  $m$  es par definimos  $J(H)$  extendiendo  $H$  a una función suave en  $\mathbb{R}^m$ , usando el lema de extensión de Stein 5.2.3.

Ahora, vamos a ver que para probar los incisos a) y b) será suficiente con demostrar las siguientes dos afirmaciones, las cuales también probaremos por inducción sobre el orden  $p = |k|$  del multiíndice  $k = (k_1, \dots, k_m)$ .

- 1) Sea  $|k| = p$ . Entonces la parcial definida en  $V$ ,  $\frac{\partial^k H}{\partial \lambda^k}$ , se extiende de manera única a una función  $H^k$  sobre  $\pi(X)$ . Además, por un lado,  $H^k \circ \pi \in \mathcal{E}(X)$  y por otro lado, el mapeo que va del espacio  $\mathcal{E}_\pi(X)$  sobre si mismo definido como  $h \mapsto H^k \circ \pi$  es lineal y continuo.
- 2) Sea  $|l| = p - 1$ , y sea  $(j)$  el multiíndice cuya  $j$ -ésima componente es 1 y las otras componentes son 0. Entonces  $H^l$  es continuamente diferenciable en  $\text{int}(\pi(X))$ , y

$$\frac{\partial H^l}{\partial \lambda_j} = H^{l+(j)}.$$

Pero para hacer esto bastará con probar el caso cuando  $p = 1$ , ya que el proceso es repetitivo, pues al hacerlo con cada  $H^{(j)} \circ \pi$  en lugar de  $h$  y de esta manera obtendríamos para el caso  $p = 2$ . Para entender todo esto, lo que queremos probar es que:

- 1') Cada derivada parcial definida en  $V$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}$  se extiende de manera única a una función continua  $H^{(j)}$  sobre  $\pi(X)$ . Además,  $H^{(j)} \circ \pi \in \mathcal{E}(X)$  y el mapeo definido como  $h \mapsto H^{(j)} \circ \pi$  de  $\mathcal{E}_\pi(X)$  sobre si mismo es lineal y continuo.
- 2') La función  $H$  es continuamente diferenciable en  $\text{int}(\pi(X))$ , y  $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}$ .

Entonces, para probar 1'), recordemos que la proyección

$$(t, \lambda) \mapsto (t, \bar{\lambda}) = (t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$$

de  $\mathbb{R}^{1+m}$  a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$  se restringe a un sistema global de coordenadas  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $X$ . Entonces, componiendo cada lado de la ecuación  $H \circ \pi|_X = h$  con  $\phi^{-1}$ , tenemos que

$$H \left( \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, -t^m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i t^{m-i} \right) = (h \circ \phi^{-1})(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}).$$

Si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m) = \left( \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, -t^m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i t^{m-i} \right) \in V$ , entonces

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t} (t, \bar{\lambda}), \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial \lambda_1} (t, \bar{\lambda}), \dots, \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial \lambda_{m-1}} (t, \bar{\lambda}) \right) \\ &= \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(\lambda), \dots, \frac{\partial H}{\partial \lambda_m}(\lambda) \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\partial P}{\partial t} (t, \bar{\lambda}) & -t^{m-1} & -t^{m-2} & \dots & -t \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial t} (t, \bar{\lambda}), \frac{\partial H}{\partial \lambda_m}(\lambda), \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(\lambda) - t^{m-1} \frac{\partial H}{\partial \lambda_m}(\lambda), \dots, -t \frac{\partial H}{\partial \lambda_m}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Así, para terminar con la prueba del inciso 1'), bastará con mostrar que  $\frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial t}$  es divisible por

$$\frac{\partial P}{\partial t} (t, \bar{\lambda}) = mt^{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\lambda_i t^{m-i-1},$$

que no es más que una operación lineal continua. Entonces, ya con esto, y por el lema de Hadamard, tendríamos que mostrar que  $\frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial t}$  se anula cuando  $\frac{\partial P}{\partial t}$  se hace cero.

De este modo, supongamos que  $\frac{\partial P}{\partial t}(t, \bar{\lambda}) = 0$ . Entonces,  $P(t, \lambda) = 0$ , donde

$$\lambda = \left( \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, -t^m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i t^{m-i} \right),$$

por tanto  $t$  es una raíz real de multiplicidad al menos 2 del polinomio  $P(\cdot, \lambda) = 0$ . Entonces, existen sucesiones  $\{\lambda^k\}$  en  $\mathbb{R}^m$  y  $\{r^k\}$ ,  $\{s^k\}$  en  $\mathbb{R}$ , tal que para toda  $k$  con  $(r^k, \lambda^k) \in X$  y  $(s^k, \lambda^k) \in X$  se cumple que  $\lim_k \lambda^k = \lambda$ , y  $\lim_k r^k = \lim_k s^k = t$ . Como  $h$  es constante en las fibras de  $\pi$ , entonces

$$\frac{\partial(h \circ \phi^{-1})}{\partial t}(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(h \circ \phi^{-1})(s^k, \bar{\lambda}^k) - (h \circ \phi^{-1})(r^k, \bar{\lambda}^k)}{s^k - r^k} = 0,$$

que era lo que queríamos demostrar.

Ahora, para probar 2'), sea

$$\Gamma = \{\lambda \in \pi(X) \mid P(t, \lambda) = (t - a)^m \text{ para alguna } a \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos a probar que  $H$  es continuamente diferenciable en todos los puntos de  $\text{int}(\pi(X)) - \Gamma$ . Y así, la prueba se completa en el caso cuando  $m$  es par, ya que  $\Gamma$  estaría contenido en la frontera de  $\pi(X)$ .

Por tanto, consideremos  $(t^0, \lambda^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  tal que  $t^0$  es una raíz real del polinomio  $P(t, \lambda^0)$  y tiene multiplicidad  $k < m$ . Entonces

$$P(t, \lambda^0) = (t - t^0)^k P^{m-k}(t, \eta^0)$$

para algún  $\eta^0 \in \mathbb{R}^{m-k}$ . Por tanto,  $P^{m-k}(t^0, \eta^0) \neq 0$ .

Así, definimos el mapeo  $\lambda : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^m$  por la siguiente identidad polinomial

$$P^m(t, \lambda(\xi, \eta)) = P^k(t, \xi) P^{m-k}(t, \eta),$$

donde  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ . Entonces  $\lambda$  es un difeomorfismo local definido en todos los puntos  $(\xi, \eta)$  donde la resultante de  $P^k(t, \xi)$  y  $P^{m-k}(t, \eta)$  no es

cero, debido a que no tienen factores comunes y además esta resultante es el jacobiano  $\frac{D\lambda(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)}$ .

Ahora, definamos  $\xi^0 \in \mathbb{R}^k$  como  $P^k(t, \xi^0) = (t - t_0)^k$ . Entonces,  $\lambda^0 = \lambda(\xi^0, \eta^0)$ , y los mapeos  $\lambda(\xi, \eta)$  y  $(t, \lambda(\xi, \eta))$  son difeomorfismos en algunas vecindades de los puntos  $(\xi^0, \eta^0)$  y  $(t^0, \xi^0, \eta^0)$  respectivamente. Como  $P^{m-k}(t^0, \eta^0) \neq 0$ , entonces  $P^{m-k}(t, \eta) \neq 0$  en una vecindad de  $(t^0, \eta^0)$ . Si  $P^m(t, \lambda(\xi, \eta)) = P^k(t, \xi)P^{m-k}(t, \eta) = 0$ , se sigue que  $P^k(t, \xi) = 0$  en esta vecindad. Por tanto, el mapeo  $(t, \xi, \eta) \mapsto (t, \lambda(\xi, \eta))$  induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X^k \times \mathbb{R}^{m-k} & \longrightarrow & X^m \\ \pi^k \times id \downarrow & & \downarrow \pi^m \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

donde las flechas de arriba y abajo son difeomorfismos en algunas vecindades de los puntos  $(t^0, \xi^0, \eta^0)$  y  $(\xi^0, \eta^0)$  respectivamente.

Por hipótesis de inducción sobre  $m$ , se sigue que  $H$  es continuamente diferenciable en  $\text{int}(\pi(X)) - \Gamma$ .

Por último, para el caso cuando  $m$  es impar, debemos mostrar que  $H$  es diferenciable en todos los puntos de  $\Gamma$  y  $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}$  con  $j = 1, \dots, m$ . Por tanto, vamos a probar que para cada  $\lambda^0 \in \Gamma$

$$H(\lambda) - H(\lambda^0) = \sum_{j=1}^m H^{(j)}(\lambda) (\lambda_j - \lambda_j^0) + o(|\lambda - \lambda^0|)$$

cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^0$ .

Recordemos que  $\Gamma = \{\lambda \in \pi(X) \mid P(t, \lambda) = (t - a)^m \text{ para alguna } a \in \mathbb{R}^m\}$ , es decir,  $\Gamma$  es la curva parametrizada definida por  $\lambda_i = (-1)^i \binom{p}{i} a^i$  con  $i = 1, \dots, m$ . Entonces, se sigue que  $\lambda$  y  $\lambda^0$  se pueden unir por segmentos de líneas que están contenidos en  $\mathbb{R}^m - \Gamma$  exceptuando los puntos  $\lambda$  y  $\lambda^0$  y su longitud es a lo más  $c|\lambda - \lambda^0|$  para alguna  $c$ . Y así, por tanto, existe  $\mu \in \mathbb{R}^m - \Gamma$  tal que los segmentos que unen  $\lambda^0$  con  $\mu$  y  $\mu$  con  $\lambda$  tiene la propiedad requerida.

Como  $H$  es continuamente diferenciable y  $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = H^{(j)}$  en  $\mathbb{R}^m - \Gamma$ , entonces

$$H(\lambda) - H(\mu) = \sum_{j=1}^m H^{(j)}(\lambda) (\lambda_j - \mu_j) + o(|\lambda - \mu|)$$

y

$$H(\mu) - H(\lambda^0) = \sum_{j=1}^m H^{(j)}(\mu) (\mu_j - \lambda_j^0) + o(|\mu - \lambda^0|).$$

Entonces, usando el hecho que  $H^{(j)}(\lambda) - H^{(j)}(\mu) = o(1)$  cuando  $|\lambda - \lambda^0| \rightarrow 0$ , obtenemos el resultado requerido.  $\square$

# Bibliografía

- [1] Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T. Manifolds, Tensor Analysis and Applications. Series Title: Applied Mathematical Sciences (AMS, vol. 75) 1988.
- [2] Bierstone, Edward. An Introduction to Singularities of Smooth Functions, University of Toronto, (1978).
- [3] Bierstone, Edward. Extension of Whitney fields from sub-analytic sets, Inventiones Mathematicae (1978). Volume:46, pages 277-300
- [4] Golubitsky, M., Guillemin, V. Stable Mappings and their Singularities, Springer, New York (1973). Graduate Text in Mathematics, vol 14.
- [5] Martinet, Jean. Singularities of smooth functions and maps.-(London Mathematical Society lecture note series; 58) Cambridge University Press (1982).
- [6] Páez Cárdenas, Javier. Cálculo diferencial de varias variables, 1<sup>a</sup>. Edición. Editorial: Prensas de Ciencias, 2017, 514 pp.
- [7] Wasserman, Gordon. Stability of Unfoldings; (Lecture Notes in Mathematics 393.) Springer-Verlag, NY, 1974.
- [8] Zeeman, E. C. Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977, Vol. 234, Addison-Wesley, 1976.