



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería
Maestría en Ingeniería de Sistemas
(Investigación de Operaciones)

Estimación de volatilidad de tipo de cambio 2007-2021

T E S I S

que para optar por el grado de:

Maestro en Ingeniería

PRESENTA:

Omar Ruiz Gutiérrez

Tutor principal:

Dr. Treviño Aguilar Erick, Instituto de Matemáticas-Cuernavaca, UNAM

Comité tutor:

Dra. Aguilar Juárez Isabel Patricia, Facultad de Ingeniería, UNAM

Dra. Huerta Barrientos Aida, Facultad de Ingeniería, UNAM

M. en I. Rodríguez Rubio Jorge, Facultad de Ingeniería, UNAM

Dra. Sosa Castro Magnolia Miriam, Facultad de Ingeniería, UNAM

Ciudad Universitaria, CDMX, México. Junio 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidenta: **Dra. Aguilar Juárez Isabel Patricia**

Secretaria: **Dra. Huerta Barrientos Aida**

1er. Vocal: **Dr. Treviño Aguilar Erick**

2do. Vocal: **Dra. Sosa Castro Magnolia Miriam**

3er. Vocal: **M. en I. Rodríguez Rubio Jorge**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad de México, México.

TUTOR DE TESIS

Dr. Erick Treviño Aguilar

FIRMA

Agradecimientos

A la UNAM y a la sociedad mexicana quienes me permitieron acceder a este nivel de estudios en esta gran Institución.

A mi asesor, el Dr. Treviño por confiar en mi y guiar mis esfuerzos para superar las múltiples incertidumbres que enfrenté durante este proceso.

A mis hermanas, madre y abuelas por ayudarme de muchas formas a lograr esta meta y siempre estar apoyándome desde el corazón.

A mis abuelos, mi papá y tíos quienes siempre serán fuente de inspiración.

Al curso de Estimación de Volatilidad impartido en el Instituto de Matemáticas, donde pude aprender y desarrollar gran parte de los conocimientos y códigos que permitieron desarrollar esta tesis.

A la Dra. Aida Huerta, la Dra. Patricia Aguilar, la Dra. Miriam Sosa y el Mtro. Jorge Rubio por su apoyo en la finalización de esta tesis.

A los profesores del Posgrado en Ingeniería por su entrega y dedicación. Especialmente a la la Dra. Aida Huerta, la Dra. Patricia Aguilar, la Dra. Mayra Elizondo, la Dra. Miriam Sosa y el Mtro. Jorge Rodríguez por formarme a este nivel.

A Rosy, Chris y Omar por hacer muy ameno el trayecto. A Vicente García Vilatela por sus amables comentarios. A Leticia, Ana, Orly, Idalia, Brenda, Thalia, Juan Pablo, Mirel, Jorge, Julio, Barbara, Cuau, Dany y Mateo por acompañar y apoyar de muchas maneras este proceso.

RESUMEN

La medición de la volatilidad de activos financieros es esencial para su correcta valuación y la planeación de operaciones de cobertura. En esta tesis se desarrolla la aplicación de una técnica de estimación de la volatilidad instantánea e integrada del tipo de cambio para las cotizaciones EURUSD, GBPUSD, CADUSD, JPYUSD, CHNUSD y MXNUSD de manera semanal para el periodo del 01 de enero 2006 al 31 de diciembre 2022 y diaria para algunas semanas de alta volatilidad. La técnica fue desarrollada por Malliavin y Mancino (2002) y explota la disponibilidad de información tick-by-tick de la plataforma Tickstory para aproximar asintóticamente el proceso de volatilidad instantáneo e integrado mediante la convolución de Bohr de las series de Fourier del proceso de precios. Se proveen algoritmos inspirados en los propuestos en Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017) para estudiar el estimador en datos simulados y reales. Dichos algoritmos se aplican a la información de cotizaciones de las divisas con el fin de probar el valor informativo de la estimación de volatilidad. Se evalúa la relevancia informativa del estimador primero a una escala de semanas y después a días dentro de las semanas de mayor volatilidad estimada. Se muestra que el estimador integrado es consistente con la estimación instantánea cuando se emplean ambas escalas y se muestra que es sensible a eventos informativos como la reciente pandemia de COVID-19, la crisis financiera de 2008 y la evolución de la crisis en la Eurozona. Asimismo, se identifica que la divisa con mayor volatilidad estimada históricamente entre las divisas de estudio fue el peso mexicano, cuya volatilidad de mayor intensidad ocurrió durante la semana del 06 al 10 de octubre de 2008.

ABSTRACT

Measuring financial assets' volatility is crucial for their correct valuation and for hedging operations planning. In this thesis I develop the application of an estimation technique of instantaneous and integrated volatility of foreign exchange for the EURUSD, GBPUSD, CADUSD, JPYUSD, CHNUSD, and MXNUSD quotes on a weekly-basis for the period from January 1, 2006 to December 31, 2022 and on a daily-basis for some weeks with high volatility. This technique was developed by Malliavin y Mancino (2002) and exploits the availability of high-frequency information at the tick-by-tick level from Tickstory to approximate asymptotically the instantaneous and integrated volatility process through the Bohr convolution of the Fourier series of the price process. I provide algorithms inspired in those proposed by Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017) to study the estimator in simulated and real data. Those algorithms are used to measure volatility in the aforementioned quotes to verify the information content of volatility estimation. I assess the information content of the estimator first at the week level and then at the day level for high-volatility weeks. I show that the integrated estimator is consistent to its instantaneous counterpart at both scales and I show that it is sensible to informative events such as the recent COVID19 pandemic outbreak, the 2008 financial crisis and the evolution of the Eurozone crisis. Also, I identify that the quote with the highest historical estimated volatility was the Mexican peso, whose most intense volatility period occurred during the week from October 06 to October 10, 2008.

Índice general

1. Introducción	5
2. Tipos de cambio	8
2.1. Revisión de literatura	8
2.1.1. Los mercados de divisas	8
2.1.2. La evolución estocástica de la volatilidad	15
2.2. Conclusiones del capítulo	23
3. Metodología de estimación de la volatilidad	24
3.1. Análisis de Fourier	25
3.1.1. Coeficientes de Fourier	26
3.1.2. Kernel de Dirichlet	27
3.1.3. Convolución	27
3.1.4. Unicidad y convergencia	29
3.1.5. Buenos kernels	30
3.1.6. Media de Cesàro	30
3.1.7. Teorema del kernel de Fejér	31
3.2. Evolución de precios	31
3.2.1. Matriz de volatilidad	32
3.2.2. Estimadores continuos de volatilidad integrada e instantánea	33
3.2.3. Estimadores discretos de volatilidad integrada e instantánea	35
3.3. Conclusiones del capítulo	38
4. Datos	40
4.1. Simulación de trayectorias	40
4.2. Elección de divisas	43
4.2.1. Fuente de información	45
4.2.2. Tratamiento de información de precios y volumen	48
4.2.3. Tratamiento de marcas de tiempo para el cálculo de volatilidad	48
4.3. Conclusiones del capítulo	50
5. Resultados	51
5.1. Volatilidad integrada semanal	52
5.2. Volatilidad y covolatilidad instantánea: semana 145 (10 de Octubre 2008)	55

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
5.3. Volatilidad y covolatilidad instantánea: semanas 741 y 742 (9 a 20 de marzo 2020)	57
5.4. Volatilidad y covolatilidad: Crisis eurozona	61
5.5. Conclusiones del capítulo	65
6. Conclusiones	66
Anexo	69
Bibliografía	80

Índice de figuras

3.1. Función ejemplo	26
3.2. Función seno, coseno	26
4.1. Simulación y estimación de la volatilidad instantánea de un precio	41
4.2. Error del retorno estandarizado estimado de un precio	43
4.3. Error del retorno estandarizado inmediato estimado de un precio a través de 100 simulaciones	44
4.4. Distribución del comercio <i>Over The Counter</i> de divisas por par de divisas	45
5.1. Estimación de la cotización USDEUR	52
5.2. Estimación de la cotización USDGBP	52
5.3. Estimación de la cotización USDJPY	53
5.4. Estimación de la cotización USDCAD	53
5.5. Estimación de la cotización USDMXN	53
5.6. Estimación de la cotización USDCNH	53
5.7. Estimación de la cotización USDMXN tick-by-tick	57
5.8. Estimación de la volatilidad integrada empleando información tick-by-tick, semana 09-13 Marzo 2020.	58
5.9. Estimación de la volatilidad integrada empleando información tick-by-tick, semana 16-20 Marzo 2020.	59
5.10. Estimación de volatilidad instantánea durante el día 9 de Marzo a partir de información tick-by-tick.	59
5.11. Estimación de volatilidad instantánea durante el día 12 de Marzo a partir de información tick-by-tick.	60
5.12. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, dólar canadiense.	62
5.13. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, renminbi.	62
5.14. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, euro.	63
5.15. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, libra esterlina.	63
5.16. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, yen japonés.	64

5.17. Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, peso mexicano. 64

Capítulo 1

Introducción

La volatilidad de los tipos de cambio es uno de los fenómenos más relevantes en la economía moderna pues refleja las interacciones de múltiples agentes que interactúan en uno de los mercados más grandes y organizados del mundo. Lo es más a medida que las tecnologías que permiten la operación de los mercados financieros evolucionan hacia la ejecución casi instantánea de órdenes de compra y venta. Como resultado, actualmente los mercados financieros generan información de múltiples activos en tiempo real, es decir, con frecuencias que llegan al milisegundo. La disponibilidad de esta información de alta frecuencia permite cuantificar el proceso de volatilidad instantánea. Sin embargo, los métodos tradicionales de estimación, por ejemplo el modelo GARCH y otros (ver Bauwens, Hafner y Laurent, 2012), no son inmunes a diversos sesgos que surgen en la observación a mayor frecuencia y que han sido señalados por los análisis de microestructura.

En esta investigación se propone emplear una metodología para estimar la volatilidad empleando información de alta frecuencia de seis cotizaciones importantes incluyendo el peso mexicano vs el dólar para el periodo que va del 1 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2022. Dicha metodología considera la evolución estocástica de los tipos de

cambio y emplea un resultado del análisis de Fourier para la estimación del proceso no observable de volatilidad de una divisa con información de alta frecuencia, con lo cual se subsanan algunas problemáticas propias de la medición de la volatilidad del tipo de cambio mediante las técnicas usuales, las cuales se mencionan más adelante.

El análisis de Fourier para el estudio de la volatilidad es valioso pues es capaz de capturar coeficientes en la dinámica de procesos estocásticos bajo ciertas condiciones. Especialmente, para el cálculo de volatilidades, Malliavin y Mancino (2002) han definido la aproximación al proceso de volatilidad instantánea mediante series de Fourier bajo condiciones que se cumplen gracias a la disponibilidad de información de alta frecuencia de los retornos en precios de activos.

El objetivo principal de esta investigación es evaluar si la medición de la volatilidad instantánea por medio del método de Malliavin y Mancino (2002) da cuenta de fenómenos excepcionales en el corto plazo de semanas. Este objetivo se cumple mediante la identificación de las semanas con mayor volatilidad integrada para conocer en qué día e incluso minuto ocurrió un incremento de la volatilidad instantánea. Este ejercicio da cuenta de la relevancia de esta medida para la planeación y operación de las decisiones financieras en el corto plazo y permite abrir nuevas áreas de investigación como su uso en la optimización de costos de coberturas dinámicas.

Dicho objetivo se desarrolla en el presente trabajo de la siguiente manera. En el primer capítulo se definen los conceptos teóricos relativos a los tipos de cambio, los múltiples modelos que establecen su dinámica, así como la literatura que define los procesos observables con información de alta frecuencia. En el segundo capítulo se define la modelación del problema y se discuten algunos aspectos relacionados con la medición de la volatilidad. En el tercer capítulo se muestra la fuente de información de precios de divisas, así como el tratamiento necesario para la aplicación del método propuesto. En el cuarto capítulo se aplica el método de estimación de la volatilidad. Con las métricas

obtenidas se procede a analizar la información mediante la validación de la siguiente hipótesis: la métrica de volatilidad integrada es informativa de eventos relevantes en el corto plazo y es consistente cuando se mide a mayor granularidad para informar sobre la trayectoria instantánea del proceso. La validación de esta hipótesis permite plantear posibles vetas de investigación como identificar si las estrategias óptimas de cobertura o delta-hedging son menos costosas cuando se emplea esta métrica. Asimismo, puede explotarse la información de la volatilidad integrada calculada en diversas semanas para incorporarse en modelos predictivos que puedan describir la dinámica de eventos pasados para predecir la trayectoria de volatilidad en el corto plazo. Finalmente se concluye con reflexiones sobre los retos y limitaciones de este método para mejorar la toma de decisiones con información de alta frecuencia.

Capítulo 2

Tipos de cambio

En este capítulo se abordan algunos elementos propios del estudio de la volatilidad y los mercados de divisas. En primer lugar se plantean las características generales que se conocen actualmente respecto a la evolución de los tipos de cambio y se resalta la naturaleza compleja de su observación en entornos de alta frecuencia. Por otra parte se abordan preguntas propias del problema de identificación de la volatilidad en modelos estocásticos, así como los avances en la literatura que han permitido la identificación del proceso de volatilidad reconociendo diversas fuentes de sesgo que podrían contaminar la medición y las respuestas teóricas disponibles. Finalmente se hace un breve diagnóstico de las limitantes que existen actualmente para comprender la evolución de la volatilidad.

2.1. Revisión de literatura

2.1.1. Los mercados de divisas

De acuerdo con la Encuesta Trianual de Banca Central 2022 elaborada por el Bank for International Settlements (2022) (Banco de Pagos Internacionales), diariamente el

monto promedio de instrumentos comerciados en el mundo ligados al tipo de cambio en abril de 2022 fue de alrededor de 7 billones 506 mil millones de dólares. Esto equivale a casi 3 veces el valor del PIB mexicano calculado para todo el año 2021 el cual equivale a 2 billones 609 mil millones de dólares. El 68 por ciento de los instrumentos comerciados correspondió a operaciones forward y swaps, mientras que el 28 por ciento restante ocurrió en operaciones spot. En ese mismo reporte se muestra que el 88 por ciento de las operaciones diarias promedio en abril de 2022 correspondieron a tipos de cambio ligados al dólar estadounidense, el 7.8 por ciento a operaciones ligadas al euro, 2 por ciento al yen japonés y el resto con otras divisas. Además el 53 por ciento del comercio spot de divisas ocurrió entre instituciones financieras, el 40 por ciento entre dealers y solo el 7 por ciento con clientes no financieros.

Esta breve imagen del comercio internacional de divisas captura la importancia de este mercado y brinda una caracterización suficiente de la compleja realidad de los tipos de cambio. Desde la publicación de Meese y Rogoff (1983) ha surgido un esfuerzo constante por comprender el fenómeno de evolución y predictibilidad de los tipos de cambio. Dicha publicación mostró que una serie de modelos basados en la teoría económica no eran superiores para pronosticar el tipo de cambio que una caminata aleatoria. Como respuesta a la necesidad de comprender este fenómeno surgió el estudio de la microestructura del mercado de divisas, el cual parte del estudio de microestructura de otros activos y analiza empíricamente la toma de decisión de los agentes en el mercado para modelar la evolución del tipo de cambio (ver King, Osler y Rime, 2013 para conocer el origen de este enfoque).

Los modelos tradicionales de tipos de cambio asumen que las divisas son activos cuyo valor está anclado al comportamiento de variables fundamentales como lo son la tasa de inflación, la tasa de interés de cada economía, así como el crecimiento económico, entre otras. De modo que los agentes que participan en el mercado pueden determinar conjuntamente el valor de la divisa a partir de la información disponible de dichos

fundamentales la cual se dispersa de manera pública, homogénea e inmediata. Además ningún agente individualmente puede modificar el precio de una divisa, pues los oferentes de moneda extranjera se enfrentan a una curva de demanda horizontal en la que independientemente de la cantidad ofertada el precio seguirá siendo el mismo. Esta característica es propia de los mercados competitivos donde los precios se mantienen relativamente estables (Stigler, 1970). Por esta razón, la forma tradicional de modelar el comportamiento de las divisas no permite conocer la dinámica de corto plazo observable en las operaciones de alta frecuencia y en ocasiones tampoco la dinámica de largo plazo pues las condiciones del mercado cambian constantemente y resulta indescifrable si un oferente de divisas se enfrenta a una curva con pendiente negativa o no cuando las condiciones del mercado cambian. Esto es así pues la teoría económica reconoce un proceso de descubrimiento de precios en mercados competitivos mediante, por ejemplo, el proceso de *tattônnemet* en el que un exceso de demanda o de oferta puede modificar los precios si la información fluye de manera rápida en mercados organizados (Negishi, 1970). Los modelos tradicionales no resultan robustos para predecir la dinámica de corto plazo, sin embargo, han logrado identificar las variables a las que responde el mercado de divisas y cuya información mediante noticias puede impactar en la evolución del tipo de cambio y su volatilidad.

Una forma diferente de estudiar el proceso de determinación del precio de divisas es el enfoque de microestructura. Bajo esta perspectiva se reconoce que existe información fluyendo en el mercado constantemente y que ésta se da a conocer por medio del *flujo de órdenes*. El flujo de órdenes es un elemento fundamental de este acercamiento empírico y ha permitido caracterizar de mejor manera la evolución de corto plazo de los tipos de cambio, mejorando la predictibilidad de los retornos de manera considerable en algunos contextos específicos. Como puede apreciarse, esta perspectiva no asume la existencia de un precio en particular de una divisa, sino que trata de reconocer los mecanismos de información que hacen fluctuar los precios. A continuación se detallan algunos con-

ceptos de este enfoque, el cual será de utilidad para comprender el comportamiento de la volatilidad del tipo de cambio con información de alta frecuencia.

Flujo de órdenes

En el mercado de divisas se conoce como flujo de órdenes a una medida de la presión de demanda por una divisa. Esta medida consiste en restar a las órdenes de compra las órdenes de venta de una divisa. También se conoce como *desbalance de órdenes*. Una revisión general de la evolución de este concepto se puede encontrar en King, Osler y Rime (2013). El flujo de órdenes ha mostrado relevancia en la comprensión de los tipos de cambio gracias a que la inclusión de esta medida en regresiones de los retornos ha incrementado la capacidad explicativa de los modelos, aunque no elimina algunas dificultades relativas al efecto persistente del flujo de órdenes en los rendimientos del tipo de cambio. Esto es que durante una ventana de tiempo existe autocorrelación entre los rendimientos y el desbalance de órdenes.

King, Osler y Rime (2013) detallan tres posibles hipótesis sobre el impacto persistente del flujo de órdenes en los retornos del tipo de cambio: a) los efectos de inventario, b) la elasticidad finita de la demanda y c) la existencia de información privada. La primera hipótesis considera que cada proveedor de liquidez se enfrenta a riesgos operativos al aceptar una operación de compra o venta, pues su interés es no acumular inventario de ninguna moneda. Por ello, un mayor flujo de órdenes provoca que los precios que los proveedores ofrecen en el mercado sean sucesivamente mayores (o menores) ante el posible riesgo de no cerrar el día con inventario en cero, pues es un mecanismo para evitar que las órdenes de compra o venta crezcan por encima de un umbral que infrinja su tolerancia al riesgo. Por lo cual, los efectos de inventario, es decir, la acumulación de un divisa en particular impulsarán los precios en el sentido en que se presenta la presión de la demanda, es decir, a mayor demanda mayores precios de manera sucesiva, creando autocorrelación en los retornos observados por un tiempo dado. El hecho de

que durante un tiempo corto los rendimientos dejen de ser aleatorios contraviene la idea de que los mercados son eficientes y que los precios observados reflejan toda la información disponible.

Por otra parte, también ha sido explorada la hipótesis de una curva de demanda de divisas con pendiente negativa, es decir, con elasticidad finita. Esta hipótesis considera que las monedas adquieren su precio mediante un proceso iterativo. Primero, los agentes que proveen inicialmente liquidez reciben órdenes de compra o venta de otros agentes interesados y las aceptan. Posteriormente, los proveedores de liquidez buscan eliminar sus inventarios con otros proveedores de liquidez inmediata. En caso de no poder colocar todo el inventario acumulado, los proveedores de liquidez se enfrentarán a una curva con pendiente negativa para colocar sus inventarios con agentes secundarios. Por ello, se verán obligados a modificar los precios de modo que les permitan reducir su posición a cero, con lo cual determinan un nuevo nivel de tipo de cambio de manera sucesiva, creando autocorrelación en los rendimientos de precios. Esta hipótesis es controversial y no ampliamente aceptada, pues contradice la idea de que los activos financieros cuentan con una pendiente de elasticidad infinita, es decir, una curva de demanda horizontal (ver Shleifer, 1986). Bajo la idea de una curva horizontal, compartida con los modelos tradicionales del tipo de cambio, una mayor oferta del activo no induce un cambio en el precio del mismo. Es decir, si la demanda de una moneda creciera creando una mayor oferta de la moneda de origen, el precio o tipo de cambio entre la moneda demandada y la de origen debería ser insensible, a menos que el valor de alguna moneda se haya modificado por razones estructurales, esto es que el tipo de cambio refleje un desplazamiento de la curva de demanda. En cambio, si existe una curva de demanda de pendiente negativa, entonces los precios observados en un periodo de tiempo posterior a las órdenes iniciales deberían reflejar la sensibilidad del mercado a adquirir moneda a diferentes precios, es decir, los precios observados sucesivamente serán más cercanos al nuevo nivel de equilibrio.

Finalmente, una hipótesis que considera el posible efecto de la información privada en el tipo de cambio tiene como precedente el artículo de Glosten y Milgrom (1985). En tal trabajo los autores muestran la relevancia del proceso de difusión de información en los mercados financieros, así como el efecto que tienen las estrategias de los agentes informados en los precios subsecuentes a su operación. Desde entonces se cuenta con un modelo que refleja el proceso de traslado de información en los mercados financieros mediante el flujo de órdenes, así como su efecto en variables como la volatilidad o la correlación entre los retornos observados. En el caso de los tipos de cambio, la existencia de información privada es controversial pues la dinámica de las variables fundamentales no es centralizada. Sin embargo, el reconocimiento de la información privada es relevante, pues los agentes que participan en el mercado de divisas son muy distintos y por tanto responden de manera diferente a la información, además de que adquieren la información a diferentes velocidades. Por ejemplo, los grandes formadores de mercado como los bancos internacionales al contar con una cartera de clientes más amplia cuentan con mayor capacidad de adquirir información de agentes clave, como los bancos centrales, otros bancos y dealers informados.

La información privada en los mercados de divisas puede ser por ejemplo la previsión acertada de las variables fundamentales antes de ser publicadas por las agencias estadísticas de los países, la interpretación de noticias sobre eventos con impacto en los países de relevancia, la posible intervención de los bancos centrales en el mercado de dinero (principalmente mediante la tasa de interés), así como la formación de visiones heterogéneas entre agentes las cuales se exhiben en grupos de agentes que comercian de manera similar. Además de estas versiones de información privada, aquellos dealers que proveen liquidez pueden conocer de antemano operaciones entre empresas que pueden brindar oportunidades de ganancias de corto plazo.

Agentes que actúan en el mercado

El flujo de órdenes del mercado de divisas conglobera las decisiones de múltiples agentes, con racionalidades distintas. El registro de órdenes ocurre en un mercado organizado gracias a la disponibilidad de agentes que están dispuestos a atender las demandas de liquidez de otros agentes. Los dealers cumplen dicha función al recibir órdenes de compra o venta de divisas del resto de agentes, entre los que se encuentran administradores de activos, otros dealers, bancos centrales, pequeños inversionistas retail y traders de alta frecuencia (ver el origen de esta taxonomía en King, Osler y Rime, 2012).

Cuando un dealer recibe la solicitud de venta o compra de una divisa, responde con un precio al que está dispuesto a comprar (bid) y otro al que está dispuesto a vender (ask). El diferencial de estos dos precios (bid-ask spread) generalmente responde a la necesidad del dealer de hacer rentable su operación y puede considerarse un indicador de liquidez de una moneda. Los dealers pueden explotar información recabada en las operaciones que realizan con agentes informados y con el mercado, con lo cual pueden modificar el spread para compensar la posible ausencia de liquidez de una moneda si observan mayor flujo en una dirección en particular. De este modo, buscan compensar el riesgo de no terminar el día con inventario en cero. Por ello, el bid-ask spread guarda cierta relación con la volatilidad de las divisas pues a mayor liquidez pueden presentarse menores niveles de volatilidad de una divisa y mayores spreads.

Breve resumen de la revisión de literatura sobre tipos de cambio

La literatura de volatilidad de los tipos de cambio ha reconocido la importancia de la microestructura y su tratamiento, mediante la incorporación de variables no convencionales como el flujo de órdenes. Existen razones teóricas y empíricas que permiten dar validez a la incorporación de este tipo de métricas al estudio de la evolución del tipo de cambio. Especialmente con información de alta frecuencia, reconocer la presencia de los agentes relevantes y sus racionalidades puede permitir disminuir la incertidum-

bre frente a la dinámica observada de la volatilidad del tipo de cambio. Asimismo, se rescata la importancia de los modelos tradicionales para conocer las variables ante las cuales es sensible el tipo de cambio cuando se despliega información de manera pública. Estos elementos resultan relevantes ante las necesidades de algunos sectores que crecientemente dependen de medidas oportunas de la volatilidad como en algunas cadenas de suministro (ver Ogunranti, Ceryan y Banerjee, 2021) o en mercados financieros tan volátiles como bitcoin (ver Alexander, Deng y Zou, 2022).

2.1.2. La evolución estocástica de la volatilidad

En esta sección se aborda la literatura técnica que refleja los avances en torno a la medición de volatilidad con datos de alta frecuencia. Para ello, será necesario primero hacer la distinción entre los distintos tipos de volatilidades a que hace referencia la literatura.

Existe literatura en investigación de operaciones en torno a la medición de la denominada volatilidad implícita del tipo de cambio, la cual trata de identificarse mediante el análisis de contratos derivados (ver Ballotta, Deelstra y Rayée, 2017; Barunik, Krehlik y Vacha, 2016; Dash, Hanumara y Kajiji, 2003; Sermpinis, Theofilatos, Karathanasopoulos, Georgopoulos y Dunis, 2013). Dicha literatura trata el problema de medición de la volatilidad futura de una moneda que se implica por los precios observados de los contratos a partir de un modelo de precios que reconoce visiones y sensibilidades al riesgo de los agentes en el mercado. Sin embargo, dicha volatilidad es irrelevante para el presente trabajo.

Por otra parte, existe literatura interesada en describir el proceso de volatilidad observada en el pasado mediante estimadores como la desviación estándar anualizada de los retornos, o bien métodos paramétricos que buscan brindar una especificación al movimiento de la volatilidad en el tiempo ligándolo con observaciones pasadas del mismo

proceso u otros procesos observables y que potencialmente influyen en su comportamiento como se hace en los modelos GARCH.

En esta tesis nos concentramos en la medición del proceso de volatilidad realizada, el cual consiste en la observación del nivel de volatilidad ocurrido en el pasado pero un contexto de alta frecuencia, es decir, con observaciones con frecuencia de un minuto. En este sentido, el problema al que nos enfrentamos trata de identificar de manera lo más precisa posible el proceso de volatilidad de un activo que evoluciona de manera estocástica a partir de la observación de una serie de realizaciones del proceso durante una ventana de tiempo. El método que emplearemos en esta tesis es no paramétrico y se apoya en el análisis de Fourier y en un resultado de las finanzas matemáticas propuesto por Malliavin y Mancino (2002) que permite identificar el proceso de volatilidad con una transformación del proceso en un contexto de alta frecuencia mediante la convolución de Bohr.

Por ello, a continuación se define con mayor formalidad el proceso estocástico que permite emplear la metodología de estimación propuesta. Asimismo, se detallan los enfoques alternativos que han atendido este mismo problema y el porqué el estimador propuesto resulta relevante para el estudio del tipo de cambio. Siguiendo a Jacod (2019) el proceso estocástico del precio de un activo puede modelarse como:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t + dX_t^J \quad (2.1)$$

donde t es un índice no negativo asociado al tiempo, X representa un proceso estocástico unidimensional que describe la evolución del precio de un activo, σ_t es su proceso de volatilidad. El proceso de volatilidad está asociado a una integral estocástica por lo que se exige que el proceso sea finito. Además tiene asociado un proceso $c_t = (\sigma_t)^2$ llamado volatilidad instantánea. A partir de este segundo proceso se puede identificar un proceso adicional llamado **volatilidad integrada** o **variación cuadrática**:

$$C_t = \int_0^t c_s ds \quad (2.2)$$

el cual corresponde al proceso de volatilidad completo durante una ventana de tiempo dada, la cual puede ser definida por la ventana de exposición de un portafolio. Idealmente, el proceso X podría observarse de manera continua, es decir, se desearía contar con una observación del precio para todo $t \geq 0$. De modo que si definimos una ventana de tiempo $[0, T]$, C_t puede estimarse con cada vez mayor calidad a medida que la cantidad de observaciones crece a infinito en una ventana fija de tiempo. W_t representa un movimiento browniano y X^J un componente estocástico de saltos con un número finito de saltos durante la ventana de tiempo en el caso de actividad finita. El parámetro b_t es el término deriva y refleja la media de los retornos observada en cada t .

Como resulta observable en la especificación del modelo, el cambio en los precios de un activo (o bien, su retorno) es un proceso estocástico que depende de la evolución de la media de sus precios, así como el nivel de volatilidad y la ocurrencia de saltos en el precio del activo. Cada uno de estos procesos evolucionan en el tiempo.

La estimación de tales parámetros es complicada. Es una práctica común aproximar el proceso de volatilidad realizada mediante la estimación de la desviación estándar de los retornos con observaciones en un periodo de 5 minutos. Sin embargo, tal procedimiento al buscar simplificar la estimación, tiene como costo no poder observar la evolución del proceso dentro del periodo de observación. Por otra parte, este acercamiento requiere condiciones especiales de la muestra para que resulte en una estimación consistente. La información de alta frecuencia permite considerar el caso en que el periodo de tiempo dt entre observaciones se reduce, de modo que este tienda a cero o a un intervalo temporal relativamente pequeño (segundos). Si se busca estimar la desviación estándar en un intervalo cada vez más pequeño, se exige implícitamente la necesidad de contar con cada vez más observaciones dentro de ese intervalo. Esta demanda de información no se

cumple para periodos cortos de tiempo, además las observaciones dentro de una ventana de tiempo reducida tienden a tener espacios de tiempo no regulares. Esto provoca que la estimación de la desviación estándar sea más sensible al ruido de microestructura a medida que la ventana de tiempo se reduce.

Estas complicaciones se amplían cuando se busca medir la covariación en los retornos de más de un activo. Especialmente porque no siempre se cuenta con operaciones sincrónicas de dos activos, con lo cual la estimación mediante la desviación estándar en la práctica se ve aún más limitada. Sin embargo, estas complicaciones son superadas mediante el estimador de Malliavin y Mancino (2002) el cual provee una alternativa para la aproximación consistente del proceso de volatilidad empleando la información de alta frecuencia.

Finalmente, el componente de saltos ha sido modelado en otros trabajos más especializados que tratan de contemplar el efecto de eventos abruptos en la dinámica del retorno. En esta tesis prescindiremos de modelar los saltos por lo que más adelante solo se hará referencia al proceso de volatilidad y al proceso de deriva. En la sección 2.2 se expone el modelo de rendimientos logarítmicos del tipo de cambio que se emplea en esta investigación.

Modelos de volatilidad realizada

La disponibilidad de información de alta frecuencia ha producido diversas preguntas para el estudio de la volatilidad. Uno de los artículos que desarrolló teoría asintótica para los estimadores de volatilidad es el artículo de Barndorff-Nielsen y Shephard (2002) quienes identifican los sesgos que existen para identificar la volatilidad en periodos de tiempo cada vez más cortos.

En dicho artículo los autores plantean la pregunta relativa al grado de certidumbre con el cual es posible identificar la volatilidad auténtica mediante la observación de

la variación cuadrática en entornos con ruido de microestructura. Generalmente, la variación cuadrática de los precios logarítmicos y_i se aproxima a la volatilidad realizada en el periodo $[0, t]$ considerando m subintervalos de la ventana de tiempo $[0, t]$ cada uno con q observaciones de precios. Por ello, cada observación y_i^q está ligada a un intervalo de q observaciones e i representa el contador de tiempo. Bajo el supuesto de que cada subintervalo tiene la misma cantidad de observaciones, la aproximación al proceso de volatilidad integrada se obtiene mediante el cálculo de $q - 1$ observaciones de retornos dentro de cada subintervalo. Los $q - 1$ rendimientos logarítmicos $(y_{i+1}^q - y_i^q)$ se elevan al cuadrado y se suman. A medida que el número de subintervalos m crece manteniendo fijo el periodo $[0, t]$, existirán cada vez más cortos periodos de tiempo y se logra aproximar el proceso de volatilidad realizada para el periodo $[0, t]$. De acuerdo con los autores en su ecuación (6):

$$plim_{q \rightarrow \infty} \sum (y_{i+1}^q - y_i^q)^2 = \sigma_t^2 \quad (2.3)$$

Esta ecuación establece que en el límite, cuando el número de observaciones q dentro de cada subintervalo del tiempo $[0, t]$ se aproxima a infinito, el estimador propuesto converge al proceso auténtico. Sin embargo, reconocen que esta medida resulta sesgada en la práctica cuando se busca observar el proceso de volatilidad en subintervalos cada vez menores, por ejemplo de un minuto. Esto es así debido a que se requiere que el muestreo en cada vez más cortos subintervalos sea suficiente para asegurar la convergencia, es decir, que existan cada vez más observaciones dentro de una ventana de tiempo cada vez más pequeña. Además a medida que los subintervalos disminuyen en longitud, es cada vez más observable el llamado ruido de microestructura, que consiste en operaciones consecutivas muy correlacionadas y no necesariamente regulares, es decir, no todos los subintervalos tienen la misma cantidad de observaciones. Por ello los autores señalan la necesidad de establecer estimaciones paramétricas y contar con un

límite de 5 minutos como máximo para medir con este método la volatilidad realizada de manera consistente.

El llamado ruido de microestructura es la observación concurrente de precios de operaciones con mayor variabilidad en cuanto a su frecuencia, su dependencia a operaciones previas, entre otros elementos que dificultan la observación de la volatilidad auténtica mediante la variación cuadrática. La presencia de esta fuente de información ha generado modelos analíticos basados en la microestructura de los mercados para mejorar la posibilidad de estimar adecuadamente la volatilidad y hacer predicciones empíricamente relevantes.

Como respuesta a las necesidades de la literatura por contar con un estimador que explote toda la información y refleje el proceso de volatilidad de manera consistente, Malliavin y Mancino (2002) desarrollaron un método no paramétrico que puede aproximar el fenómeno de volatilidad a más finos intervalos de tiempo.

El estudio del estimador de volatilidad mediante el método de Fourier propuesto por Malliavin y Mancino (2002) ha avanzado en torno a las propiedades que tiene para aproximar el fenómeno de volatilidad instantánea. En un trabajo adicional, Mancino y Recchioni (2015) han investigado las propiedades de convergencia del estimador en presencia de ruido de microestructura, liquidez del mercado y como indicador para predecir el Valor en Riesgo (VaR) en datos simulados. Las autoras muestran que el estimador es robusto frente a estos problemas y resaltan su utilidad para aplicaciones empíricas como la calibración de modelos estocásticos de volatilidad o modelos basados en agentes para la identificación de estrategias de traders o para predecir posibles caídas de la bolsa en segundos, Mancino y Recchioni (2015).

Algunas pruebas de robustez que proponen las autoras comprenden la comparación de las distribuciones teóricas y empíricas de los retornos estandarizados, la estimación de la volatilidad bajo especificaciones aditivas y su comparación contra modelos enfocados

a eliminar el ruido de microestructura.

La pregunta en torno a la validez de los diversos estimadores de volatilidad no solo se ha planteado en términos de ajuste estadístico sino también en relación con la relevancia con fenómenos propios al mercado de divisas. Existe amplia literatura que ha tratado de modelar la recepción de información en el mercado mediante la observación de indicadores de volatilidad específicos (ver Bush y López Noria, 2021; Gkillas, Vortelinos, Floros, Garefalakis y Sariannidis, 2020; Panthaki, 2007).

Una medición del impacto de noticias sobre la crisis de deuda griega en la volatilidad del tipo de cambio fue realizada por Gkillas, Vortelinos, Floros, Garefalakis y Sariannidis (2020). Los autores emplean estimadores de máxima verosimilitud y uno basado en un kernel, señalando una metodología para detectar y cuantificar los saltos debidos a eventos ligados a la crisis de deuda griega. Los autores señalan que antes de un salto informacional en los tipos de cambio europeos la liquidez es mayor, el volumen de operación es menor y la varianza de los retornos es menor en comparación con saltos no informacionales. Emplean información al minuto de los tipos de cambio ligados al euro, para el periodo 1 de Julio 2009 a 31 de Mayo 2015 utilizando la base de datos de *Pi-Trading*. Señalan la necesidad de calcular la volatilidad realizada en intervalos de 5 minutos para poder emplear estimadores de volatilidad realizada basados en la variación cuadrática. Miden el impacto de las noticias ligadas a cada moneda contra el euro mediante un modelo Tobit y determinan que el despliegue de información tiene impacto en el proceso de volatilidad observado y que importa mucho quién emite la información pues existe heterogeneidad en el impacto según el proveedor de información del evento.

A partir de información de intervenciones del banco central suizo, Panthaki (2007) desarrolló un estudio de eventos donde se mide el impacto que tienen las noticias y las intervenciones de política monetaria en diferentes medidas de volatilidad del tipo

de cambio del franco suizo con el dólar estadounidense. La información que emplea la autora son cotizaciones en intervalos de 15 minutos y calcula cuatro medidas de volatilidad: a) retornos cuadráticos, b) retornos absolutos, c) suma de retornos cuadráticos en un intervalo de una hora y d) suma de retornos absolutos en intervalos de una hora. Debido a que reconoce un patrón estacional en la información, emplean una desestacionalización basada en transformadas de Fourier flexibles a partir de las cuales crean una serie desestacionalizada de la volatilidad. Identifican una relación proporcional al tamaño de la intervención, es decir, las intervenciones con mayor tamaño tienden a aumentar la volatilidad más que las intervenciones de menor tamaño sin importar la dirección de la intervención. Esta evidencia es representativa de una gama de análisis relacionados al estudio de la efectividad de la política monetaria en las intervenciones de los bancos centrales para contener la volatilidad del tipo de cambio.

A su vez, Bush y López Noria (2021) en un análisis más reciente enfocado a México desarrollan cuatro medidas de incertidumbre a partir de minería de texto y datos financieros. Tales medidas se analizan con medidas de la volatilidad de tipo de cambio peso mexicano- dólar estadounidense en un entorno de menor frecuencia. Especialmente, al ser México una economía pequeña con exposición a crisis cambiarias los canales de incertidumbre se trasladan a la volatilidad del tipo de cambio por diversas razones. Si bien los autores emplean estimaciones de volatilidad con frecuencia mensual, logran capturar la relación cambiante entre la situación política y la inestabilidad del tipo de cambio. Contar con una medición más inmediata de la volatilidad realizada puede permitir ampliar ese tipo de estudios que tratan de comprender las motivaciones de los agentes en el mediano plazo hacia el muy corto plazo.

2.2. Conclusiones del capítulo

El estudio de la volatilidad del tipo de cambio en un entorno de alta frecuencia requiere reconocer algunos aspectos resaltados por la literatura de microestructura. En particular, la relevancia del flujo de órdenes y el flujo de información se ligan con la literatura técnica de medición de la volatilidad cuando se incrementa la frecuencia a ventanas menores a cinco minutos. En dichos contextos han existido limitaciones para asegurar que la cantidad de observaciones sea suficiente para medir el proceso de volatilidad realizada de manera consistente. Como una alternativa a esta limitación, el método de Malliavin y Mancino (2002) busca aproximar mediante el análisis de Fourier el proceso de volatilidad realizada de manera robusta ante el ruido de microestructura. Este método es el elegido para el estudio de la volatilidad del tipo de cambio en entornos de alta frecuencia que se desarrolla en esta investigación.

Capítulo 3

Metodología de estimación de la volatilidad

En este capítulo se introducen los conceptos necesarios del análisis de Fourier que permiten la estimación de la volatilidad instantánea, la volatilidad integrada y las respectivas covolatilidades de las divisas en estudio.

El análisis de Fourier es una parte fundamental del manejo de información de alta frecuencia empleado en esta tesis. Por ello, en esta sección se introduce la pertinencia del mismo, así como las adecuaciones necesarias para lograr su aplicación en el ámbito de la volatilidad siguiendo la exposición de Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017) con resultados originales de Malliavin y Mancino (2002) y la teoría del capítulo 2 de Stein y Shakarchi (2011).

Primero, se define la descomposición de un tipo de función continua en su serie de Fourier a partir una cantidad de coeficientes adecuada. Se introduce brevemente la necesidad de establecer condiciones para la convergencia de la serie a la función original por medio de familias de funciones llamadas kernel. Además se introduce el operador de convolución y la convolución de Bohr que es esencial en la teoría desarrollada por

Malliavin y Mancino (2002) para hacer estimable el proceso latente de volatilidad. En la segunda parte se introduce el proceso de evolución de precios que se emplea para estimar la volatilidad. Además se detallan las operaciones para lograr la estimación de la volatilidad integrada, la volatilidad instantánea para el caso continuo y discreto. Especialmente, el caso discreto es el que se emplea en esta investigación y en dicha sección se remite a los códigos incluidos en el Anexo que permiten realizar el cálculo mediante funciones desarrolladas en lenguaje R.

3.1. Análisis de Fourier

Una función $f(t)$ periódica continua con un número finito de saltos en un intervalo $[0, 2\pi]$ que representa un fenómeno dependiente de t puede descomponerse como una combinación lineal de términos de la base ortonormal de dos funciones: la función seno y la función coseno.

Esto quiere decir que es posible establecer la siguiente ecuación, también llamada serie de Fourier en honor a Joseph Fourier quien desarrolló las bases de este tipo de análisis:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Donde i representa el número imaginario $i^2 = -1$. La ecuación de arriba resulta útil para algunas funciones para las cuales los coeficientes a_n, b_n, c_n son tales que permiten la convergencia de las sumas. Tomemos como ejemplo la Figura 3.1 donde se muestra una función $f(t)$. Mediante los coeficientes correctos, esa función puede descomponerse en combinaciones de diferentes frecuencias de la función seno y coseno, cada una con una fase y amplitud distintas. En la Figura 3.2 se muestran únicamente las funciones seno y coseno con frecuencia 1 y 2, sin embargo la descomposición de Fourier permite tomar infinitas frecuencias cada una en una proporción dada por el coeficiente de Fourier

asociado a_n y b_n o c_n .

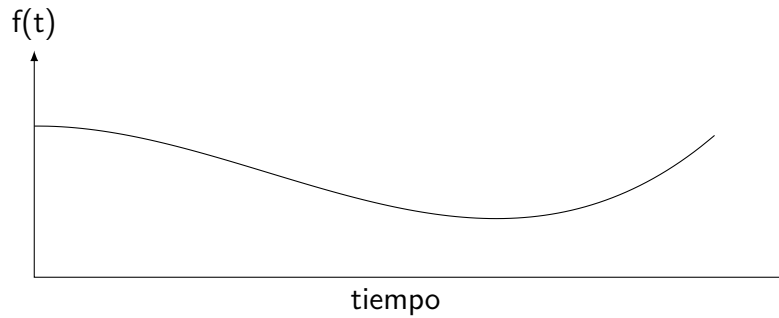


Figura 3.1: Función ejemplo

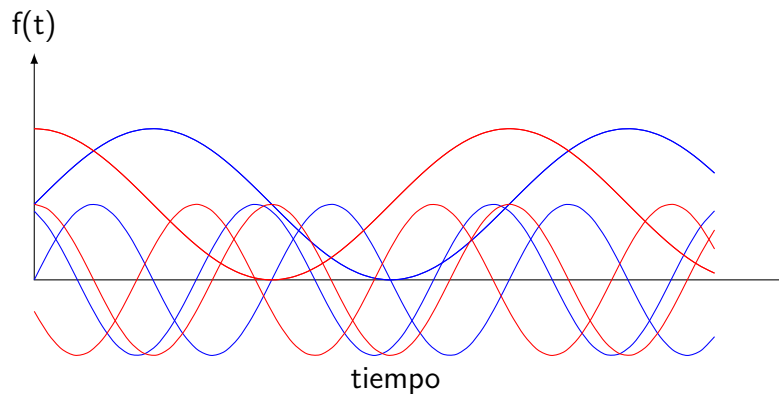


Figura 3.2: Función seno, coseno

3.1.1. Coeficientes de Fourier

Siguiendo a Stein y Shakarchi (2011) para una función integrable f en el sentido de Riemann y definida en un intervalo $[a, b]$ de largo $L = b - a$, se define el coeficiente n -ésimo asociado a la relación de Euler $e^{-2\pi int/L} = \cos(\frac{2\pi nt}{L}) - i\sin(\frac{2\pi nt}{L})$ como:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(t)e^{-2\pi int/L} dt$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Tales coeficientes permiten estudiar si la serie de Fourier de f es convergente o no, es decir si tomar $n \rightarrow \infty$ frecuencias permite establecer la igualdad de $f(t)$ con su serie. Para responder la pregunta sobre si existe la convergencia, se puede considerar

la suma parcial de los primeros N elementos de la serie, es decir, las primeras N frecuencias:

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t / L}$$

3.1.2. Kernel de Dirichlet

La suma parcial cuando $t \in [-\pi, \pi]$ para coeficientes $c_n = 1$ si $n \leq N$ y $c_n = 0$ en otro caso, se conoce como enésimo kernel de Dirichlet :

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

el cual es importante pues contiene en la misma proporción a todas las frecuencias $n \in \mathbb{Z}$ tales que $n \leq N$ y permite estudiar la convergencia de la serie de Fourier a la función original.

3.1.3. Convolución

La convolución $*$ entre dos funciones integrables f y g con periodo 2π cada una está definida como :

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(t - y)dy$$

La operación convolución superpone ambas funciones de distribución de modo tal que la función resultante es una función de t . La convolución puede interpretarse como un promedio de f ponderado por los pesos de la distribución g .

La operación de convolución resulta interesante pues la suma parcial de las series de Fourier se puede expresar en términos de una convolución con el kernel de Dirichlet,

como lo muestran Stein y Shakarchi (2011, p.44) :

$$\begin{aligned}
 S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \hat{c}(n)e^{int} \\
 &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{iny} dy \right) e^{int} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(t-y)} \right) dy = (f * D_N)(x) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

La operación convolución cuenta con las siguientes propiedades mostradas en la proposición 3.1 de Stein y Shakarchi (2011), cuando f , g y h son funciones 2π -periódicas e integrables:

- Linealidad: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Conmutatividad: $(cf) * (g) = c(f * g) = f * (cg)$ para $c \in \mathbb{C}$
- Conmutatividad: $f * g = g * f$
- Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Mayor regularidad que f o g : $f * g$ es continua.
- $f \hat{*} g(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

Convolución de Bohr

La convolución de Bohr $\Phi *^{Bohr} \Psi$ de las funciones Φ y Ψ con dominio en \mathbb{Z} es una función con dominio en \mathbb{Z} y se define como:

$$(\Phi *^{Bohr} \Psi)(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{s=-N}^N \Phi(s)\Psi(t - s)$$

Esta convolución es empleada en la teoría de Malliavin y Mancino (2002) para aproxi-

mar la función de volatilidad por medio de la serie de Fourier del proceso de precios.

3.1.4. Unicidad y convergencia

Una función periódica continua en el círculo $[0, 2\pi]$ tiene una serie de Fourier que cuando $n \rightarrow \infty$ tiene coeficientes de Fourier únicos siempre que la suma de sus coeficientes consista en una suma convergente, es decir, si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(t) = f(t)$$

uniformemente en t , es decir, asegura una convergencia punto a punto.

Además, este resultado permite ver que dos series que coinciden en sus coeficientes de Fourier deberán corresponder a la misma función en todos los puntos de continuidad, ver prueba en Stein y Shakarchi (2011) corolario 2.3.

La velocidad de convergencia de una serie a su función original está definida para una función dos veces continuamente diferenciable, según el corolario 2.4 de Stein y Shakarchi (2011) por la siguiente expresión:

$$c_n = \mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

a medida que $|n| \rightarrow \infty$

Donde se ha empleado la notación \mathbf{O} que tiene como argumento la función $(\frac{1}{n^2})$ que multiplicada por una constante brinda la cota de la serie c_n a medida que $n \rightarrow \infty$.

3.1.5. Buenos kernels

Una familia de funciones $K_n(x)_{n=1}^{\infty}$ es una familia de buenos kernels si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Para todo $n \geq 1 : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$
- Existe $M > 0$ tal que para $n \geq 1 : \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$
- Para todo $\delta > 0 : \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$

Estos resultados permiten plantear el siguiente resultado, (ver teorema 4.1 en Stein y Shakarchi, 2011):

Sea $K_{n=1}^{\infty}$ una familia de buenos kernel y f una función integrable en el círculo. Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$ siempre que f sea continua en x . Si es continua siempre, entonces el límite es uniforme.

Este resultado revela la importancia de los buenos kernels, ya que permiten realizar una aproximación a la identidad con la función original.

Debido a que el kernel de Dirichlet no cumple la segunda propiedad, este no puede considerarse un buen kernel a pesar de cumplir con la primera propiedad.

3.1.6. Media de Cesàro

Al plantear una interpretación alternativa de convergencia en el límite es posible avanzar el análisis de la convolución con un buen kernel.

Tomemos como ejemplo la suma parcial de una secuencia $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ cuya suma es $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ la cual no tiene un límite. Sin embargo se sabe que la secuencia de las sumas alterna en $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$. De modo que puede emplearse $1/2$ como límite de la secuencia.

La formalización de esta noción de límite se conoce como media de Cesàro :

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{N-1}}{N}$$

Donde el denominador se conoce como *n*ésima suma de Cesàro. Si la media de Cesàro converge a un límite σ a medida que N tiende a infinito, entonces se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ es Cesàro sumable.

3.1.7. Teorema del kernel de Fejér

Justamente un promedio del kernel de Dirichlet nos permite formar una familia de buenos kernels.

Tomemos la *n*ésima media de Cesàro de la serie de Fourier.

$$\sigma_N = \frac{S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + S_2(f)(x) + \dots + S_{N-1}(f)(x)}{N}$$

Definamos al kernel de Fejér como:

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + D_2(x) + \dots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

De modo que la *n*ésima media de Cesàro de la serie puede reducirse a:

$$\sigma_N = (f * F_N)(x)$$

Por lo que si una función f puede integrarse en el círculo, entonces las series de Fourier de f son Cesàro sumables a f en cada punto de continuidad de f . Además, si f es continua en el círculo, la serie de Fourier de f es uniformemente Cesàro sumable a f , (ver teorema 5.2 en Stein y Shakarchi, 2011).

3.2. Evolución de precios

Para modelar el tipo de cambio de las divisas en estudio, partimos de un modelo de difusión estocástica de Itô siguiendo el modelo de Malliavin y Mancino (2002), a partir del cual se puede definir el siguiente sistema estocástico para $j = (1, \dots, d)$ divisas:

$$dp^j(t) = b^j(t)dt + \sum_{k=1}^l \sigma_k^j(t)dW^k(t)$$

con fines explicativos la matriz a continuación considera $l = d$ movimientos brownianos independientes $W = (W^1, \dots, W^l)$. Sin embargo, no existe tal restricción pues l no debe ser necesariamente idéntica a d . Además, se considera un término estocástico de deriva para cada divisa $b(t)$ y un proceso estocástico $\sigma_k^j(t)$ que representa la difusión de la divisa j ligada al movimiento browniano k . La variable p representa la transformación logarítmica del precio S spot del tipo de cambio entre dos divisas.

$$\begin{bmatrix} dp^1(t) \\ dp^2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ dp^j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp^d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1(t) \\ b^2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ b^j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^d(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1^1(t) & \sigma_2^1(t) & \dots & \sigma_j^1(t) & \dots & \sigma_d^1(t) \\ \sigma_1^2(t) & \sigma_2^2(t) & \dots & \sigma_j^2(t) & \dots & \sigma_d^2(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sigma_1^j(t) & \sigma_2^j(t) & \dots & \sigma_j^j(t) & \dots & \sigma_d^j(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sigma_1^d(t) & \sigma_2^d(t) & \dots & \sigma_j^d(t) & \dots & \sigma_d^d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW^1 \\ dW^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ dW^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dW^d \end{bmatrix}$$

3.2.1. Matriz de volatilidad

A partir de esta representación, podemos recurrir al hecho de que la variación cuadrática entre dos procesos p^j y p^i bajo esta especificación permite definir la matriz de volatilidad-covolatilidad $\Sigma(t)$ estocástica, siguiendo el teorema 2.1 de Malliavin y

Mancino (2002), como :

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(t)\sigma_i^1(t) & \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(t)\sigma_i^2(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(t)\sigma_i^j(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^1(t)\sigma_i^d(t) \\ \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(t)\sigma_i^1(t) & \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(t)\sigma_i^2(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(t)\sigma_i^j(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^2(t)\sigma_i^d(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{i=1}^d \sigma_i^j(t)\sigma_i^1(t) & \sum_{i=1}^d \sigma_i^j(t)\sigma_i^2(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^j(t)\sigma_i^j(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^j(t)\sigma_i^d(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{i=1}^d \sigma_i^d(t)\sigma_i^1(t) & \sum_{i=1}^d \sigma_i^d(t)\sigma_i^2(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^d(t)\sigma_i^j(t) & \dots & \sum_{i=1}^d \sigma_i^d(t)\sigma_i^d(t) \end{bmatrix}$$

donde cada entrada $\Sigma^{i,j}(t) := \sum_{g=1}^d \sigma_g^i(t)\sigma_g^j(t)$ representa la volatilidad-covolatilidad instantánea entre la divisa i y la divisa j . Estas entradas definen funciones estocásticas que pueden aproximarse mediante el estimador de volatilidad-covolatilidad en los apartados siguientes.

3.2.2. Estimadores continuos de volatilidad integrada e instantánea

El método de Fourier-Malliavin es presentado sistemáticamente en Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017) pero fue introducido primero en Malliavin y Mancino (2002). Tal método propone reconstruir la matriz de volatilidad por medio de los coeficientes de Fourier de los procesos de precios asociados a cada entrada. Para poder llevar a cabo tal estimación es necesario considerar que un horizonte de tiempo $[0, T]$, puede reescalarsse a un intervalo en $[0, 2\pi]$. Esto permite calcular los k coeficientes de Fourier de la función de volatilidad $\Sigma^{i,j}(t)$ con la salvedad de que la estimación no será precisa en los extremos pues la función no necesariamente es periódica. Sin embargo, la aproximará en el límite.

La función de precios $dp^i(t)$ permite obtener los coeficientes de Fourier relevantes del

proceso de volatilidad por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{F}(dp^i)(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dp(t) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \Sigma^{i,j}(t) dt \quad (3.3)$$

Como resulta claro de la segunda ecuación, los coeficientes definidos para el proceso de precios son empleados en la transformada del proceso de volatilidad pues gracias al teorema 2.1 en Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017), la convolución de los coeficientes de dos procesos de precios permite conocer asintóticamente la función de volatilidad entre ambos procesos.

Tal teorema es uno de los pilares de la metodología pues demuestra que :

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j}) = \mathcal{F}(dp^i) *^{Bohr} \mathcal{F}(dp^j) \quad (3.4)$$

Es decir, la convolución de Bohr de la transformada del proceso de precios coincide con la transformada del proceso de volatilidad. Esta coincidencia ocurre asintóticamente para cada coeficiente k -ésimo mediante la siguiente ecuación:

$$(\mathcal{F}(dp^i) * \mathcal{F}(dp^j))(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) \quad (3.5)$$

donde el coeficiente k -ésimo de la convolución es equivalente a:

$$(\mathcal{F}(\Sigma^{i,j}))(k) := \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) \quad (3.6)$$

dada una frecuencia de corte N apropiada. Gracias a este resultado, se puede recons-

truir el proceso de volatilidad entre ambas divisas mediante la fórmula de inversión de Fourier-Fejér, presentada en la sección 2.1.7 con lo cual el estimador instantáneo de la volatilidad queda definido como:

$$\Sigma^{i,j}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) e^{ikt} \quad (\text{Estimador de volatilidad instantánea})$$

para $t \in (0, 2\pi)$

Además, es posible aproximar mediante el coeficiente $k = 0$ de $\Sigma^{i,j}$ el proceso de volatilidad integrada:

$$\mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(0) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma^{i,j} dt \quad (\text{Estimador de volatilidad integrada})$$

3.2.3. Estimadores discretos de volatilidad integrada e instantánea

Los estimadores previos están definidos para un proceso continuo en el intervalo $[0, T]$. Sin embargo, en la práctica la estimación depende de observaciones que ocurren en tiempos irregulares, es decir, con espacios variables entre cada observación. El coeficiente de Fourier k -ésimo para el proceso de log rendimientos p^i cuando es observado en una secuencia de tiempo $0 = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{n_i}^i = 2\pi$ está definido como:

$$c_s(dp) := \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ist_i} \delta_i(p) \quad (3.7)$$

para enteros s tales que $|s| \leq N$. Por lo que la versión discreta del coeficiente k -ésimo del proceso de volatilidad es:

$$c_k(\sigma_{n,N}^2) := \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dp_n) c_{k-s}(dp_n) \quad (3.8)$$

para $|k| \leq N$. En particular cuando $k = 0$ se obtiene el proceso de volatilidad integrada:

$$\hat{\sigma}_{n,N}^2 := \frac{(2\pi)^2}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dp_n) c_{-s}(dp_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} D_N(t_j - t_{j'}) \delta_j(p) \delta_{j'}(p) \quad (3.9)$$

Los coeficientes del proceso de precios fueron calculados siguiendo la teoría mediante la función `f.differential.coef` contenida en el `CodigoCoeficientesPrecios.R` del Anexo.

Cuando los tiempos de observación son diferentes para dos divisas, se presenta la **asincronía** de la información de precios. Esto es, dado un precio observado en un tiempo t para la divisa i no necesariamente se cuenta con un precio observado en ese mismo momento para la divisa j . Sin embargo, esta metodología permite definir para dos divisas distintas el estimador de covolatilidad integrada $\hat{\Sigma}_{n_i, n_j, N}^{i,j}$ como:

$$\hat{\Sigma}_{n_i, n_j, N}^{i,j} := \frac{(2\pi)^2}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dp_{n_i}^i) c_{-s}(dp_{n_j}^j) = \sum_{l=0}^{n_i-1} \sum_{r=0}^{n_j-1} D_N(t_l^i - t_r^j) \delta_{I_l^i}(p^i) \delta_{I_r^j}(p^j) \quad (3.10)$$

donde N representa la frecuencia de corte, n_i y n_j el tiempo máximo de observación de precios de la divisa i y la divisa j , respectivamente, y I_l^i es el intervalo l -ésimo de la divisa i . *Gracias a esta especificación, es posible calcular la covolatilidad integrada entre dos divisas sin que exista sincronía en todos los datos observados de ambas series de precio.*

Para el cálculo de la volatilidad instantánea $\Sigma^{i,i}(t)$ se plantea un estimador discreto basado en el estimador continuo. Sin embargo, recurrimos a $2M+1$ desplazamientos de los coeficientes discretos del proceso de volatilidad:

$$\hat{\sigma}_{n,N,M}^2(t) := \sum_{|k| \leq M} \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) e^{ikt} c_k(\sigma_{n,N}^2) \quad (3.11)$$

con N la frecuencia de corte para el estimador de volatilidad, n el número de observaciones del proceso de precios de la divisa y M la frecuencia de corte de los coeficientes para el estimador instantáneo o bien pueden entenderse también como la frecuencia máxima sobre la cual se realiza la convolución de los coeficientes de precio. La elección de las frecuencias de corte N y M es muy relevante pues la convergencia de los estimadores discretos se asegura para constantes N y M tales que cumplen las siguientes condiciones:

Para el estimador de volatilidad integrada, la condición para la convergencia en el límite es que $N = \frac{n}{2}$ con n el número de datos disponibles, de acuerdo con la ecuación 4.6 en Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017). Asimismo, $\frac{M}{N} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$. Se sugiere que $M = c_m \log(n) \sqrt{n}$ para una constante positiva c_m adecuada, según el entorno de microestructura relevante.

La estimación de ambos indicadores de volatilidad integrada e instantánea se obtienen mediante la función `f.path.vol` del código `CodigoVolatilityPath.R` que requiere correr previamente la función `f.differential.coef` contenida en el `CodigoCoeficientesPrecios.R` del Anexo.

El estimador de covolatilidad instantánea resulta de la convolución de las transformadas de Fourier de dos procesos de precios p^i y p^j . El coeficiente k -ésimo de Fourier del proceso de covolatilidad es:

$$c_k(\Sigma_{n_i, n_j, N}^{i,j}) := \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dp_{n_i}^i) c_{k-s}(dp_{n_j}^j) \quad (3.12)$$

De modo que la fórmula de inversión de Fejér puede emplearse para M y N constantes

adecuadas para recabar el proceso de covolatilidad entre ambas divisas:

$$\hat{\Sigma}_{n_i, n_j, N}^{i, j} := \sum_{|s| \leq M} \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) c_k(\Sigma_{n_i, n_j, N}^{i, j}) e^{ikt} \quad (3.13)$$

Los autores señalan que cuando existe asincronía de información es posible emplear $N \cong 0.85 \min(n_1^{3/4}, n_2^{3/4})$. Este resultado lo proponen a partir de estudiar por medio de simulaciones de procesos de precios, el valor N que minimiza el error cuadrático medio y que no aumenta el sesgo del estimador en proporción al tamaño de observaciones n .

A su vez, el factor M en presencia de asincronía de precios que permite una buena estimación es $M = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8} \sqrt{n^{3/4}} \log(n^{3/4})$ con $n = \min(n_1, n_2)$.

La estimación de ambos indicadores de volatilidad integrada e instantánea se obtienen mediante la función `f.path.covol` del código `CodigoVolatilityPath.R` que requiere correr previamente la función `f.differential.coef` contenida en el `CodigoCoeficientesPrecios.R` del Anexo.

3.3. Conclusiones del capítulo

A partir del método original de Malliavin y Mancino (2002) y presentada sistemáticamente en Mancino, Recchioni y Sanfelici (2017) es posible recabar de manera asintóticamente consistente el proceso de volatilidad y covolatilidad en el tiempo, empleando las condiciones propuestas por los autores. En este capítulo se presentan los elementos matemáticos y se indican las principales características de los estimadores propuestos. Notablemente, el análisis de Fourier aplicado al modelado de volatilidad histórica permite, bajo la propuesta de los autores, recabar con robustez a la asincronía de precios de divisas el proceso latente de volatilidad. En el capítulo 3 se aborda un breve ejemplo de una simulación de un sistema estocástico de precios con el fin de representar la capacidad del estimador de recabar la función de volatilidad en el periodo de estudio.

Mientras que en el capítulo 4 se aplica la metodología a datos reales del tipo de cambio de divisas.

Capítulo 4

Datos

Este capítulo tiene dos objetivos. El primero es mostrar una breve simulación de un proceso de precios para representar la capacidad de aproximación del estimador de volatilidad propuesto por los autores. El segundo es hacer explícita la selección de divisas, la fuente de información, así como el tratamiento que se le da a la misma para medir el proceso de volatilidad y covolatilidad en el periodo de estudio, así como mostrar las características relevantes de la serie de precios de cada divisa.

4.1. Simulación de trayectorias

En el capítulo anterior se planteó un sistema donde la evolución de los precios sigue una difusión estocástica. En este breve ejercicio se emplea el paquete de R *Sim.Diff* desarrollado por Chouaib Guidoum y Boukhetala (2020) para modelar un proceso de precio sujeto a un sistema estocástico donde la volatilidad también tiene un comportamiento estocástico conocido. Las gráficas y la simulación pueden replicarse mediante los códigos contenidos en el Anexo. En particular, `CodigoGraficosSimulacion.R`.

El sistema tiene la siguiente especificación:

$$dp(t) = 0.03dt + \exp(-2.5 + 0.125 * \tau(t))dW^1(t)$$

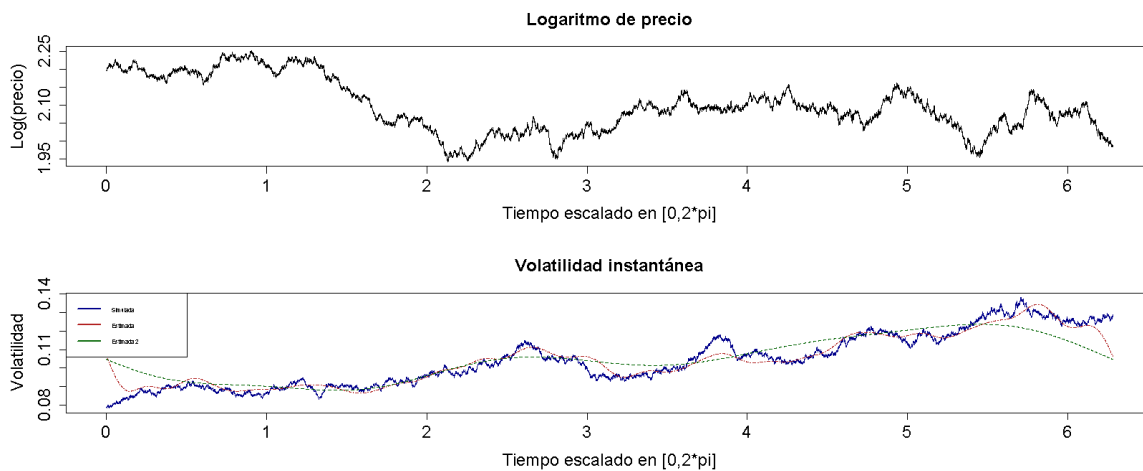
$$d\tau(t) = -0.025 * \tau(t)dt + dW^2(t)$$

donde W^1 , W^2 son movimientos brownianos con una correlación de $\lambda = -0.3$, $\sigma(t) = \exp(\tau(t))$ es la función de difusión de Itô ligada a la evolución del proceso $\tau(t)$.

La semilla `set.seed(1234, kind = "L'Ecuyer-CMRG")` fue empleada para generar 100 simulaciones considerando cada una con $n=21600$ observaciones lo cual equivale a 6 horas de operación con observaciones cada segundo. El precio inicial considerado en la simulación es $p(0) = \log(9)$ y el valor inicial de la difusión en cada simulación fue obtenida de una distribución normal $\sigma(0) = \mathcal{N}(0, 5)$.

La figura 4.1 muestra como ejemplo la evolución de la simulación 100 con su respectivo proceso de volatilidad y el estimador instantáneo calculado con $N = 0.5 * n$ y $M = \frac{1}{8} \frac{1}{2\pi} \sqrt{n} \log(n)$ para la línea roja y con $N = 0.85n^{3/4}$ y $M = \frac{1}{8} \frac{1}{2\pi} \sqrt{n^{3/4}} \log(n^{3/4})$ para la línea verde. Donde claramente se observa que con mayores coeficientes calculados la aproximación es mayor pero más costosa computacionalmente.

Figura 4.1: Simulación y estimación de la volatilidad instantánea de un precio



Nota: Elaboración propia con base en la trayectoria simulada del proceso de precio y volatilidad con la semilla L'Ecuyer-CMRG 1234.

Para conocer qué tan efectiva es la estimación en verde, empleamos la medición de los retornos estandarizados. Nos concentramos en esta estimación debido a que es menos demandante en cómputo y por ello fue elegida para su implementación en esta investigación, la estimación en rojo crece en cómputo de manera lineal con el número de observaciones mientras que la verde lo hace logarítmicamente.

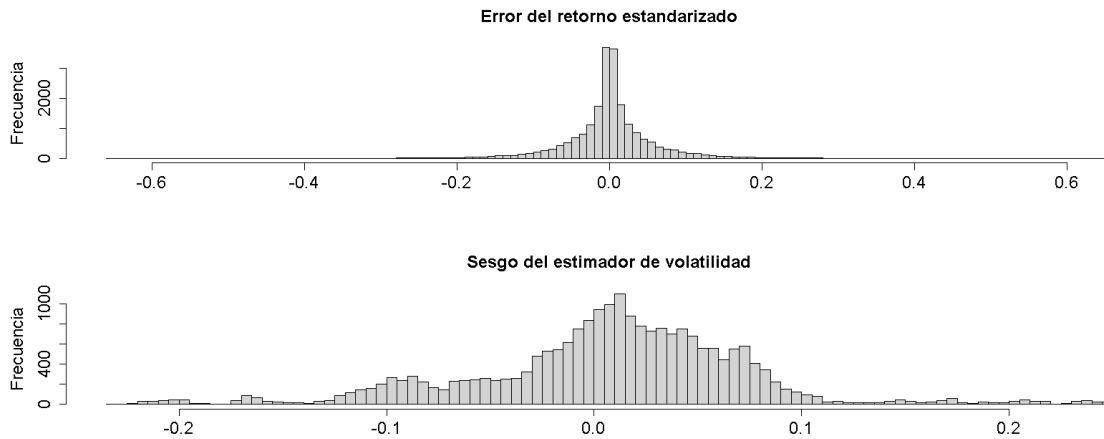
El retorno estandarizado se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$StRet(t) = \frac{ret(t)}{\sigma(t) \sqrt{\frac{2\pi}{21600}}}$$

Donde $ret(t) = \log(p(t)) - \log(p(t-1))$ y $\sigma(t)$ puede ser la volatilidad instantánea simulada para calcular el retorno estandarizado real, o bien la estimada mediante el estimador de Fourier-Malliavin para calcular el retorno estandarizado estimado. De este modo se puede obtener el error en el retorno estandarizado inmediato, esto es la diferencia entre ambos retornos. La Figura 4.2 muestra la distribución del error en el retorno estandarizado inmediato en esta simulación y el sesgo del estimador de volatilidad como diferencias entre la volatilidad estimada y la simulada punto a punto como proporción del valor simulado. Cabe aclarar que el retorno estandarizado en el proceso observado no sigue una distribución normal debido a que el modelo empleado en la simulación asegura periodos cortos de alta volatilidad. A pesar de esta característica del modelo de simulación, el estimador muestra una buena aproximación al proceso real de volatilidad, salvo en momentos de extrema volatilidad inmediata. Los retornos estandarizados siguen una distribución leptocúrtica, como ocurre con otros estimadores de volatilidad realizada. A pesar de ello, los errores se concentran cerca del cero, lo cual demuestra la capacidad del estimador de recabar inmediatamente el proceso de volatilidad.

Considerando el total de las 100 simulaciones bajo la misma especificación, el estimador

Figura 4.2: Error del retorno estandarizado estimado de un precio



Nota: Elaboración propia con base la simulación 100 del proceso de precio y volatilidad con la semilla L'Ecuyer-CMRG 1234.

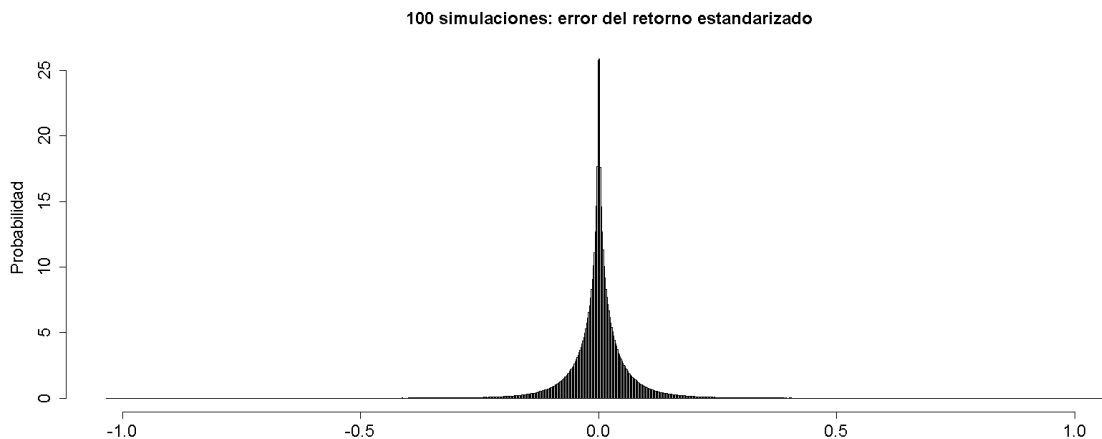
de Fourier-Malliavin muestra que el error del retorno estandarizado está concentrado en cero como se muestra en la Figura 4.3.

La forma funcional de la difusión en el proceso simulado crea periodos con bajos retornos y otros con retornos muy elevados, como se observa en la Figura 4.1. Una gran ventaja del estimador instantáneo calculado mediante la metodología aquí propuesta es que este estimador permite brindar una distribución del retorno estandarizado instantáneo, sin depender de alguna ventana de tiempo para el cálculo de la volatilidad en periodos de 5 minutos como se requiere para la estimación de la volatilidad realizada mediante la suma de retornos al cuadrado.

4.2. Elección de divisas

La fuente pública más relevante para conocer el comportamiento del mercado de divisas a nivel mundial es la Encuesta Triannual de Banca Central publicada por el Banco de Pagos Internacionales en Bank for International Settlements (2022). La más reciente encuesta reporta información de abril de 2022 y representa un esfuerzo estadístico

Figura 4.3: Error del retorno estandarizado inmediato estimado de un precio a través de 100 simulaciones



Nota: Elaboración propia con base en 100 simulaciones distintas del proceso de precio y volatilidad con la semilla L'Ecuyer-CMRG 1234.

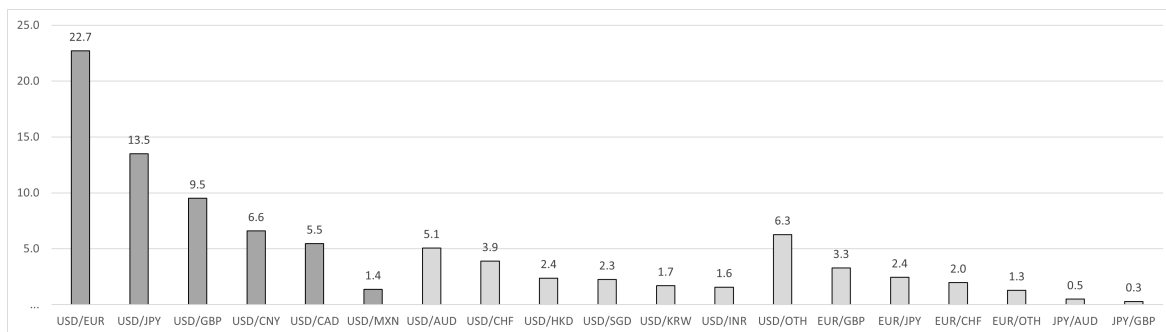
para recabar de manera consistente el comercio de instrumentos ligados a divisas con diferentes despliegues de información.

Para seleccionar las divisas que se estudiarán en esta investigación se tomó en cuenta particularmente la tabla [OTC foreign exchange turnover by currency pair](#) la cual muestra cuáles pares de divisas fueron los más comerciados durante abril de 2022. De acuerdo con dicha tabla se puede identificar que la moneda que representa más comercio mundialmente es el dólar. En total, 88.4 por ciento del comercio internacional de divisas ocurre entre cualquier otra divisa y el dólar. El euro representa el 7.8 por ciento del comercio (descontando el comercio vs el dólar el cual representa 22.7 por ciento) y el yen 1.8 por ciento (aunque el comercio vs el dólar representa 13.5).

Gracias a esta información se identificó que al considerar las cinco cotizaciones vs el dólar más importantes más la cotización del peso mexicano-dólar se captura cerca del 60 por ciento del comercio mundial de divisas durante el periodo de la encuesta. Un resumen de la tabla referida más arriba se encuentra en la Figura 4.4 donde el eje vertical representa la proporción en el comercio de cada par de divisas y se resalta en

gris oscuro los pares de divisas para estudio.

Figura 4.4: Distribución del comercio *Over The Counter* de divisas por par de divisas



Nota: Elaboración propia con base en *Triennial Central Bank Survey of foreign exchange and Over the counter derivatives markets in 2022* BIS, archivo rpx22 fx tables, 5. El color gris oscuro representa la selección de la cotización para su estudio.

4.2.1. Fuente de información

La serie de tipos de cambio de cada cotización fue obtenida del banco suizo Dukascopy Bank SA Switzerland por medio de la plataforma Tickstory. Esta plataforma provee de precios de cotizaciones históricas de alta frecuencia desde los proveedores de información para ese banco. Por medio de la plataforma Tickstory fue posible solicitar para las cinco cotizaciones seleccionadas y para el periodo desde el 1 de enero de 2006 a 31 de diciembre de 2022 las cotizaciones tick-by-tick observadas en el periodo. Una cotización tick-by-tick refiere a toda observación generada cuando el precio cambia en una unidad o tick relevante. Esto quiere decir que si en un segundo el precio cambió dos veces en más de un tick, ambas cotizaciones se reportan cada una con su marca de tiempo específica.

La fuente de información elegida no cuenta con información para todas las monedas durante todo el periodo. La Tabla 4.1 muestra el número de observaciones recabadas durante el periodo de solicitud para cada divisa. La moneda con menor cantidad de observaciones durante el periodo fue el Renminbi offshore (CNH), que refiere al mercado Renminbi fuera de China y donde no hay restricciones de compra y venta ni control

cambiario. Por otra parte, la historia del tipo de cambio USDMXN solo está disponible a partir de Marzo 2007. Además de la disponibilidad diferenciada de datos, resulta necesario transformar la información tick-by-tick en información al minuto para disminuir el tiempo de cómputo del estimador, por ello se aplicó un procedimiento para promediar las cotizaciones tick-by-tick a observaciones por minuto para llevar a cabo una estimación semanal de la volatilidad. En el caso de la estimación diaria se respetó la marca de tiempo tick-by-tick. El detalle del procedimiento se muestra más adelante.

En la Tabla 4.1 puede apreciarse también para qué periodos se puede observar covolatilidad entre cada serie de cotizaciones. Por ejemplo, mientras la cotización EURUSD y GBPUSD pueden observarse para todo el periodo, la serie de covolatilidad de cualquiera de esas divisas con el Renminbi solo puede realizarse a partir de 27 de Junio de 2012. En cambio, la estimación del proceso de volatilidad al ser dependiente de una sola serie de precios es observable para cada cotización según la fecha de inicio y fin de datos observables en la fuente Dukascopy.

Tabla 4.1: Periodos observados de las serie de cotizaciones seleccionadas y observaciones tick-by-tick disponibles.

Cotización	Inicio	Fin	No Observaciones
GBPUSD	02/01/2006	31/12/2022	418,689,550
EURUSD	02/01/2006	31/12/2022	403,137,241
USDCAD	02/01/2006	31/12/2022	312,297,268
USDCNH	27/06/2012	31/12/2022	193,943,953
USDJPY	02/01/2006	31/12/2022	363,005,599
USDMXN	13/03/2007	31/12/2022	255,691,483
Periodo traslape	27/06/2012	31/12/2022	

Nota: Las cotizaciones corresponden a datos *tick-by-tick* recabados de Dukascopy por medio de la plataforma Tickstory. Tick-by-tick refiere a cambios significativos en el precio

Indicadores disponibles

Un elemento a considerar en esta investigación es identificar adecuadamente la información obtenida para cada cotización. En principio esto requiere homologar la información

obtenida de la plataforma. En adelante deberá entenderse como moneda base a aquella divisa que aparece en los tres primeros caracteres de la clave de cotización y como moneda de cotización a la moneda que aparece en los tres últimos. De modo que la cotización USDMXN refiere a la cantidad de pesos equivalentes a un dólar estadounidense, donde el dólar es la moneda base y el peso mexicano es la moneda de cotización. Más adelante se detalla el tratamiento para cada variable obtenida de la solicitud de información para homologar todos los indicadores para que reflejen al dólar como la moneda base. Una ventaja de la fuente de información empleada es que reporta precios las 24 horas del día, permitiendo que se obtenga una serie de precios relativamente continua para cada cotización.

La información disponible para cada cotización corresponde a cinco variables:

- Marca de tiempo con ajuste horario a EST +07:00 que corresponde al horario de negociación de Nueva York con detalle al milisegundo de cambio relevante en precio (tick) sin ajuste por horario de verano;
- Bid price a cada marca de tiempo donde el precio corresponde a la cantidad de moneda de cotización que el mejor comprador está dispuesto a pagar por una unidad de la moneda base en el punto de observación;
- Ask price en cada marca de tiempo que corresponde a la cantidad de moneda de cotización que el mejor vendedor está dispuesto a recibir a cambio de una unidad de la moneda base en cada momento de observación;
- Bid volume o volumen de compra que corresponde al volumen solicitado por los compradores en el mercado al mejor precio de compra;
- Ask volume es el volumen de venta es el volumen colocado por los vendedores en el mercado al mejor precio de venta.

4.2.2. Tratamiento de información de precios y volumen

Para recabar el proceso de precio de cada divisa se calcula el precio medio o Mid Price a cada tick reportado como el promedio del Bid price y el Ask price, es decir un promedio simple de ambos precios para cada marca de tiempo. Para las cotizaciones cuya moneda base es distinta al dólar se calcula el inverso del Bid price y Ask Price para obtener el Mid Price en moneda base dólar. Este procedimiento se realizó para las cotizaciones GBPUSD y EURUSD por lo que en adelante se refiere a ellas como USDGBP y USDEUR, respectivamente.

Posteriormente para la estimación semanal se calcula el promedio del Mid price a cada minuto de observación para reducir la cantidad de observaciones para asegurar un tiempo de cómputo razonable. En cambio, para la estimación diaria no se realizó tal ajuste y se emplearon las observaciones tick-by-tick.

Un indicador adicional que es relevante en la predicción del tipo de cambio es el flujo de órdenes introducido en la primera parte de este documento. La definición de flujo de órdenes es la diferencia entre el número de órdenes de compra y el número de órdenes de venta y en esta investigación se aproxima tomando la diferencia entre el volumen de venta y volumen de compra. Por ello, para aproximar este indicador tomaremos para las cotizaciones cuya moneda base es el dólar la diferencia entre el Ask Volume y el Bid Volume, es decir, Ask Volume - Bid Volume. Para las cotizaciones de GBPUSD y EURUSD se toma la diferencia Bid Volume - Ask Volume y se calcula la suma a nivel minuto.

4.2.3. Tratamiento de marcas de tiempo para el cálculo de volatilidad

La estimación de volatilidad requiere que la información pertenezca a una unidad de tiempo relevante de modo que la variable de tiempo pueda escalarse a un número en el

intervalo $[0, 2\pi]$. Esto permite que sin importar la sincronía de cotizaciones para pares de cotizaciones sea posible recabar la trayectoria de volatilidad o covolatilidad para todo el periodo considerado, así como la volatilidad integrada en el periodo. Las únicas dos unidades de tiempo relevantes que se emplearon en esta investigación fueron la semana y el día. Para las estimaciones semanales se emplearon datos al minuto siguiendo los ajustes mencionados más arriba. Para las estimaciones diarias se respetó la información tick-by-tick.

Para evitar que la ausencia de datos durante algún día de la semana debido a días de descanso o debido a días con baja operación afectara la capacidad informativa del estimador de volatilidad, se descartaron los días con menos de 4,000 observaciones tick-by-tick para las cotizaciones USDMXN y USDCHN, así como los días con menos de 8,000 observaciones para el resto de divisas. Estos umbrales de corte se definieron al revisar la distribución diaria de observaciones para cada divisa y calcular el primer percentil de operación en los días donde se recabó información en cada divisa. Con esta decisión aseguramos que existe un mínimo de información durante el día y además esto permite identificar semanas donde se encuentran uno o más días de observaciones insuficientes. Estas semanas son descartadas completamente para evitar la complejización del algoritmo de cálculo.

Para cada divisa fueron calculados los coeficientes de Fourier del proceso de precios considerando como unidad de tiempo cada semana identificada con un entero de 1 a 887, los tiempos de estimación corresponden a cada minuto entre el primer tick observado de la semana y el último. La (co)volatilidad integrada corresponde a un valor real asociado a cada semana de estudio. Ambos indicadores fueron calculados con $N = 0.85n^{3/4}$ y $M = \frac{1}{8} \frac{1}{2\pi} \sqrt{n^{3/4}} \log(n^{3/4})$ donde n es el número de observaciones por minuto en cada semana.

4.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se mostró mediante una simulación la eficiencia del estimador de volatilidad propuesto frente al número de coeficientes a calcular. Para el caso propuesto en esta investigación donde se incorporan datos de alta frecuencia, resulta necesario reducir el costo computacional y por ello se seleccionó el estimador obtenido con parámetros que aseguran un crecimiento logarítmico con el número de datos.

Por otra parte se detallaron los elementos metodológicos necesarios para llevar a cabo el estudio. Principalmente el tratamiento de días con pocas observaciones, así como la homologación de indicadores y monedas base en los datos originales.

Capítulo 5

Resultados

Este capítulo presenta los resultados de la estimación para las cotizaciones en estudio para el estimador de volatilidad integrada y los estimadores instantáneos en algunas semanas de relevancia. A partir de la estimación de la volatilidad integrada semanal para las semanas que van de Enero 2006 a Diciembre 2022, podemos identificar cuáles semanas superaron el umbral de 50% del máximo valor de volatilidad estimado para cada divisa. Esto nos permite a su vez, identificar cuáles divisas durante qué periodos y al mismo tiempo que cuáles otras presentaron alta volatilidad en alguna semana del periodo de estudio. Además, para algunas semanas identificadas ligadas a eventos relevantes se lleva a cabo una estimación de la volatilidad integrada dentro de cada día de esa semana. Esto permite identificar los días de máxima volatilidad para esas semanas y además poder conocer cómo el estimador de volatilidad instantáneo se relaciona con eventos identificables como anuncios de política monetaria, entre otros eventos relevantes.

5.1. Volatilidad integrada semanal

A continuación se muestran los resultados de la estimación de la volatilidad integrada por semana para el periodo Enero 2006 a Diciembre 2022 para las divisas de estudio. Se obtuvieron series de tiempo de volatilidad integrada por semana para los periodos disponibles de cada cotización y un histograma que muestra cómo se ha comportado el indicador para cada divisa a través de todas las semanas disponibles. Esta información brinda un conocimiento sobre la distribución de la volatilidad semanal para cada divisa.

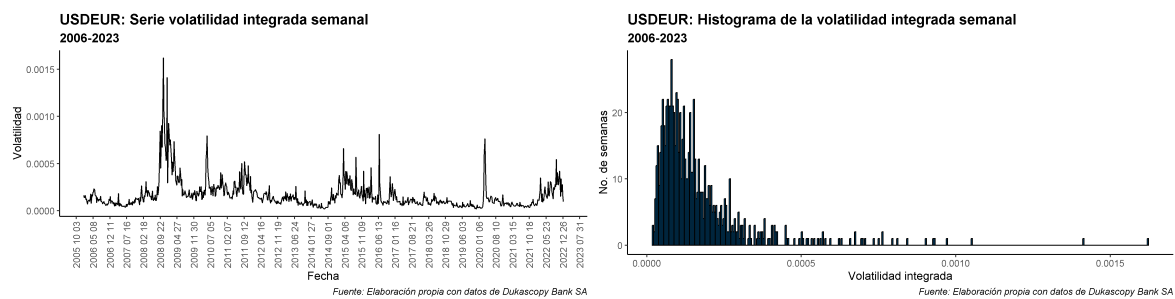


Figura 5.1: Estimación de la cotización USDEUR

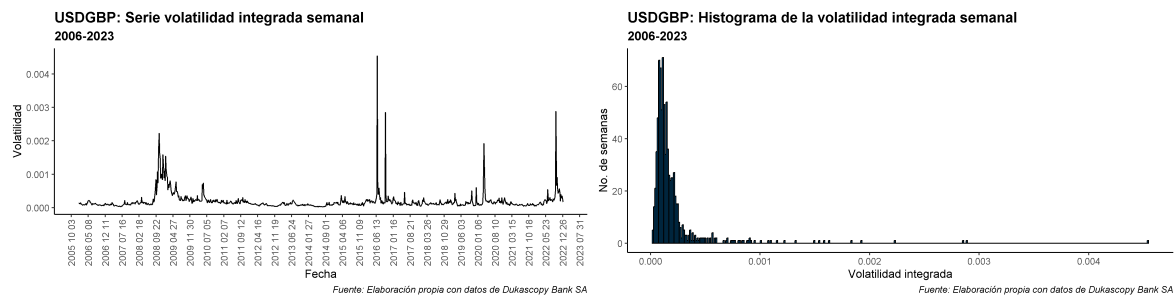


Figura 5.2: Estimación de la cotización USDGBP

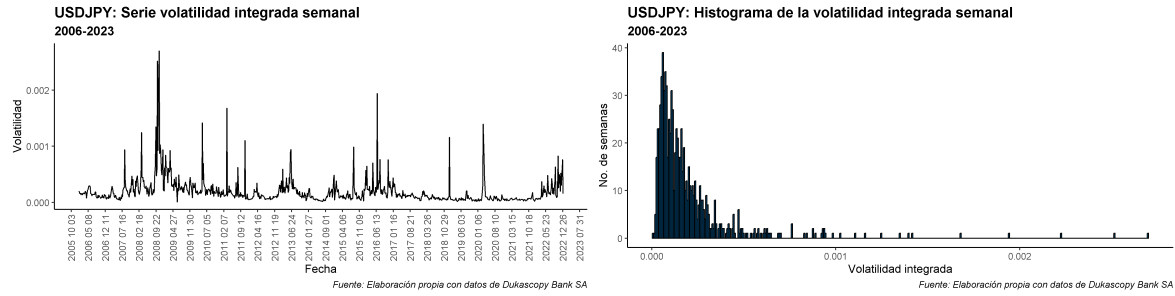


Figura 5.3: Estimación de la cotización USDJPY

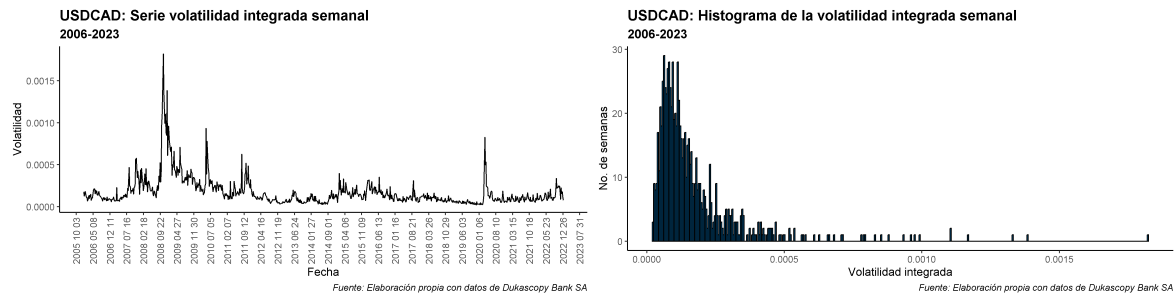


Figura 5.4: Estimación de la cotización USDCAD

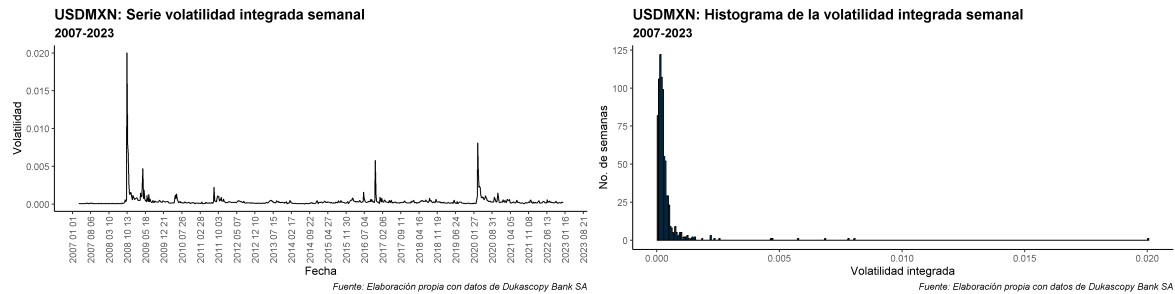


Figura 5.5: Estimación de la cotización USDMXN

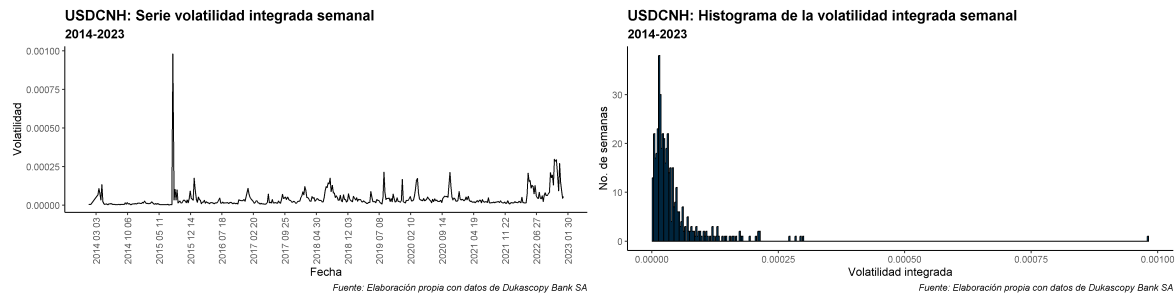


Figura 5.6: Estimación de la cotización USDCNH

Tabla 5.1: Volatilidad superior al 50 por ciento de la máxima observada en 2006-2022, por semana según divisa de cotización

No. semana	Fecha	USDCAD	USDCNH	USDEUR	USDGBP	USDJPY	USDMXN	Divisa Máx. Vol.	No. divisas
145	10/10/2008	0.000974298		0.000901697		0.002517219	0.02000965	USDMXN	4
547	24/06/2016			0.000810663	0.004542272	0.001943184		USDGBP	3
874	30/09/2022				0.002882671			USDGBP	1
562	07/10/2016				0.002856451			USDGBP	1
148	31/10/2008	0.001820566		0.001620517		0.002699372		USDJPY	3
147	24/10/2008			0.00096998		0.002223726		USDJPY	2
272	18/03/2011					0.001681677		USDJPY	1
227	07/05/2010	0.000932923				0.001418845		USDJPY	2
155	19/12/2008	0.001384139		0.001413882				USDEUR	2
741	13/03/2020					0.001398412		USDJPY	1
149	07/11/2008	0.001331652		0.001052636				USDCAD	2
150	14/11/2008	0.001166183		0.000930361				USDCAD	2
152	28/11/2008	0.001103478						USDCAD	1
146	17/10/2008	0.00110306						USDCAD	1
151	21/11/2008	0.00099382						USDCAD	1
502	14/08/2015		0.000979735					USDCNH	1
158	09/01/2009	0.000960431		0.000927529				USDCAD	2
142	19/09/2008			0.000844018				USDEUR	1
Semanas con Vol >= 0.5 Máx		10	1	9	3	7	1		
Semana de Máx. Vol.		31/10/2008	14/08/2015	31/10/2008	24/06/2016	31/10/2008	10/10/2008		

Nota: La columna Divisa Máxima Vol. muestra para cada renglón la divisa con mayor volatilidad.

La columna No. divisas muestra el total de divisas que presentaron volatilidad elevada cada semana

A partir de los estimadores de volatilidad integrada semanales, se construyó la Tabla 5.1 la cual muestra para todas las divisas del estudio las semanas con mayor volatilidad en la historia de las cotizaciones en orden descendente según la máxima volatilidad registrada en cada semana. Esto es, la semana con mayor volatilidad en el periodo corresponde a la semana 145 que concluyó el 10 de Octubre 2008, periodo en el cual 4 de las 6 divisas observaron volatilidades superiores al 50 por ciento de su máximo histórico. Para esa semana, resulta claro que la divisa con mayor volatilidad semanal fue el peso mexicano cuyo periodo de máxima volatilidad es justamente esa semana. Particularmente, en esa semana 4 divisas mostraron también una alta volatilidad en relación con su propia historia. Estas divisas fueron el euro, el dólar canadiense y el yen japonés. En esa misma Tabla podemos observar en el penúltimo renglón la cantidad de semanas que cada divisa ha tenido una volatilidad mayor a su umbral. La divisa con mayores semanas con alta volatilidad fueron el dólar canadiense con 10 semanas, el euro con 9 y el yen japonés con 7.

Resulta relevante que 10 de las 18 semanas con mayor volatilidad pertenecen a los meses de octubre a diciembre de 2008. La semana más reciente de alta volatilidad

corresponde a la última semana de septiembre 2022. En esa semana la única divisa que presento alta volatilidad fue la cotización de la libra esterlina debido a la presentación del llamado *mini-budget* el 23 de septiembre por parte del tesorero británico y que incluía un plan de medidas de recortes de tasas corporativas y un posible aumento del endeudamiento para ese país.

El caso del peso mexicano es particularmente interesante, pues la volatilidad que alcanzó en octubre de 2008 fue excepcional. El periodo más cercano a ese nivel de volatilidad ocurrió en la semana del 13 de marzo de 2020 cuando se declaró la emergencia sanitaria ligada a la pandemia de COVID-19 por parte de la OMS (11 de marzo de 2020) cuando alcanzó apenas el 40 por ciento de su máximo valor de volatilidad correspondiente a la semana del 10 de Octubre 2008.

5.2. Volatilidad y covolatilidad instantánea: semana 145 (10 de Octubre 2008)

Para mostrar la validez del indicador de volatilidad integrada semanal, a continuación se muestra la estimación de la volatilidad entre pares de divisas a partir de información tick-by-tick calculada tomando como unidad de tiempo el día durante la semana del 6 al 10 de Octubre de 2008. La Tabla 5.2 muestra los resultados de la estimación y señala que la volatilidad integrada diaria de mayor intensidad fue la correspondiente a la cotización del peso mexicano durante el miércoles 8 de octubre, fecha en que diversos bancos centrales anunciaron recortes en sus tasas de interés e inyecciones de capital debido a la crisis financiera de ese año.

Para conocer si el estimador instantáneo es capaz de detectar en qué tiempo exacto ocurrió el incremento de volatilidad del peso mexicano la Figura 5.7 muestra que el máximo de volatilidad estimado en esa cotización ocurrió a las 16:54:05 hora de Nueva

York del 8 de octubre de 2008, fecha en que el Comité Federal de Mercado Abierto de la Federal Reserve de los Estados Unidos anunció un recorte de tasas a las 7:00:00 horas.

Tabla 5.2: Volatilidad integrada diaria entre pares de cotizaciones durante la semana 145 (06/10/08 a 10/10/08), calculada con información tick-by-tick

Día	Cotización	EURUSD	GBPUSD	USDCAD	USDJPY	USDMXN
06/10/2008	EURUSD	0.000145097	0.000056195	0.000003747	0.000003728	0.000006780
	GBPUSD	0.000056195	0.000142836	0.000008925	0.000004372	0.000017040
	USDCAD	0.000003747	0.000008925	0.000145074	0.000002268	0.000008792
	USDJPY	0.000003728	0.000004372	0.000002268	0.000407690	0.000008365
	USDMXN	0.000006780	0.000017040	0.000008792	0.000008365	0.000599457
07/10/2008	EURUSD	0.000176565	0.000072497	0.000042538	-0.000001624	0.000044185
	GBPUSD	0.000072497	0.000192464	0.000032024	-0.000016764	0.000046108
	USDCAD	0.000042538	0.000032024	0.000150256	-0.000015939	0.000061812
	USDJPY	-0.000001624	-0.000016764	-0.000015939	0.000422962	-0.000113426
	USDMXN	0.000044185	0.000046108	0.000061812	-0.000113426	0.001077603
08/10/2008	EURUSD	0.000234266	0.000019236	0.000024085	-0.000016219	0.000022665
	GBPUSD	0.000019236	0.000220022	0.000037303	-0.000032767	0.000009279
	USDCAD	0.000024085	0.000037303	0.000224975	-0.000060613	0.000008844
	USDJPY	-0.000016219	-0.000032767	-0.000060613	0.000784963	-0.000136580
	USDMXN	0.000022665	0.000009279	0.000008844	-0.000136580	0.004838262
09/10/2008	EURUSD	0.000100330	0.000035229	0.000009546	-0.000008109	0.000036273
	GBPUSD	0.000035229	0.000148965	0.000010245	-0.000008849	0.000045840
	USDCAD	0.000009546	0.000010245	0.000142954	-0.000006253	0.000057244
	USDJPY	-0.000008109	-0.000008849	-0.000006253	0.000357896	-0.000068032
	USDMXN	0.000036273	0.000045840	0.000057244	-0.000068032	0.001758524
10/10/2008	EURUSD	0.000150184	0.000056472	0.000008479	-0.000032955	0.000010684
	GBPUSD	0.000056472	0.000258564	0.000006520	-0.000014504	-0.000011271
	USDCAD	0.000008479	0.000006520	0.000351871	0.000011872	-0.000004704
	USDJPY	-0.000032955	-0.000014504	0.000011872	0.000602606	-0.000008004
	USDMXN	0.000010684	-0.000011271	-0.000004704	-0.000008004	0.003439287

Nota: Las celdas muestran la volatilidad integrada observada cada día entre pares de divisas calculadas considerando como unidad de tiempo el día y empleando información tick-by-tick.

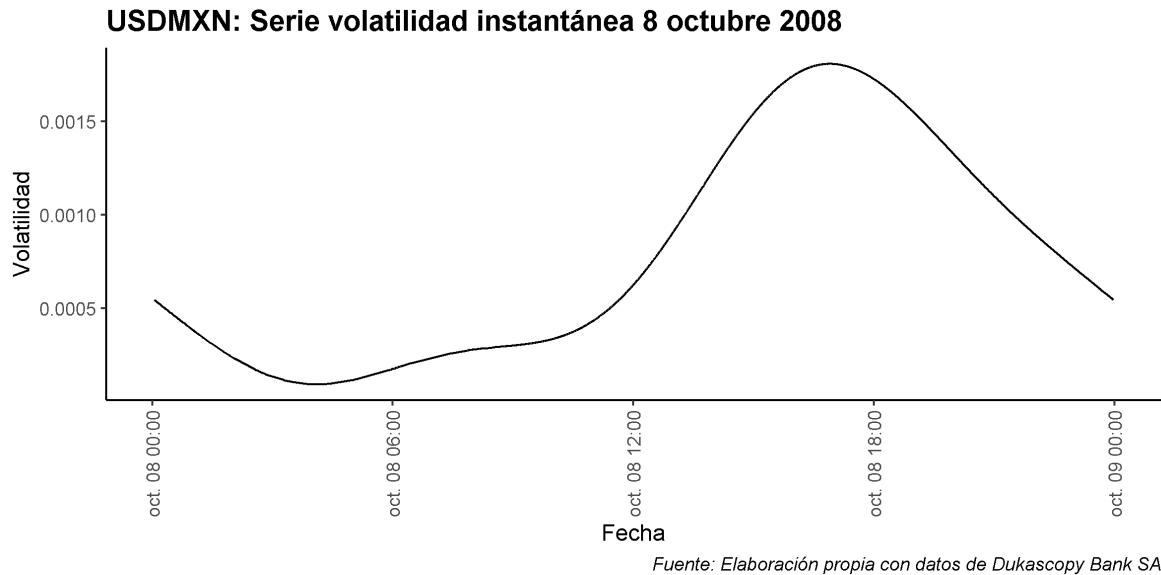


Figura 5.7: Estimación de la cotización USDMXN tick-by-tick

5.3. Volatilidad y covolatilidad instantánea: semanas 741 y 742 (9 a 20 de marzo 2020)

En esta sección se muestra el resultado de la estimación de volatilidad instantánea empleando información tick-by-tick durante el periodo de la declaración de COVID-19 como emergencia sanitaria mundial.

En la Figura 5.8 y en la Figura 5.9 se muestra la estimación de la volatilidad integrada calculada para cada día de las dos semanas que van del 9 de marzo de 2020 al 20 de marzo. De acuerdo con esta estimación durante ambos periodos la volatilidad del tipo de cambio del peso mexicano vs el dólar fue la mayor entre todas las monedas en estudio. Únicamente el yen japonés exhibió un comportamiento de volatilidad similar durante la primera semana pero con menor intensidad. En cambio, durante la segunda semana el tipo de cambio del euro vs el dólar incrementó durante los últimos tres días de esa semana sus niveles de volatilidad integrada.

Como es claro a partir de dichas gráficas, los dos días con mayores niveles de volatilidad fueron el 9 de marzo y el 12 de marzo de 2020. Por ello, se realizó el cálculo de la

volatilidad instantánea dentro de cada uno de esos días para observar cómo se comportó la volatilidad frente a los anuncios surgidos en esas fechas.

La Figura 5.10 muestra que tanto el yen japonés como el peso mexicano tuvieron un incremento de volatilidad excepcional poco antes de las 5 AM del 9 de marzo. Durante ese día se dio a conocer que los países petroleros de la OPEP y no OPEP no lograron un acuerdo para disminuir la producción de petróleo a pesar de la mayor contracción de demanda de petróleo como consecuencia de la crisis sanitaria. Además durante ese día se dieron a conocer las cifras de contagio en Italia, las cuales aclararon el efecto económico adverso de la crisis en el mundo.

Para el día 12 de marzo de 2020, la Figura 5.11 señala al peso mexicano como la moneda con el mayor nivel de volatilidad durante el día. Ese proceso creció fuertemente después de las 12:00 pm probablemente debido al anuncio de política monetaria del banco central europeo y de las medidas de restricción de vuelos desde Europa propuesta por el entonces presidente de Estados Unidos Donald Trump. En esta fecha el peso mexicano llegó a la cotización de 22.99 pesos por dólar.

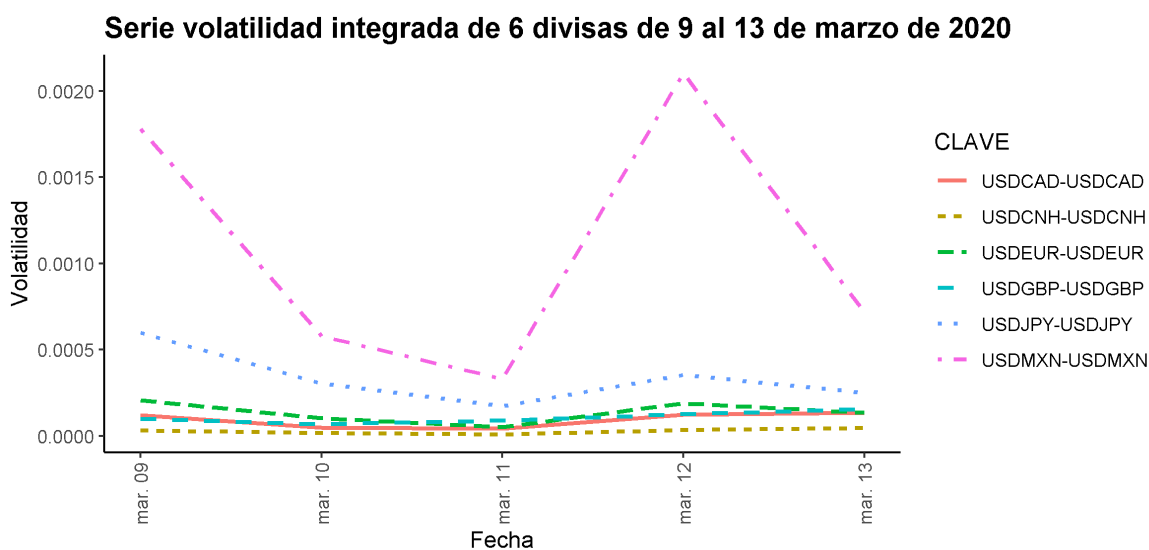


Figura 5.8: Estimación de la volatilidad integrada empleando información tick-by-tick, semana 09-13 Marzo 2020.

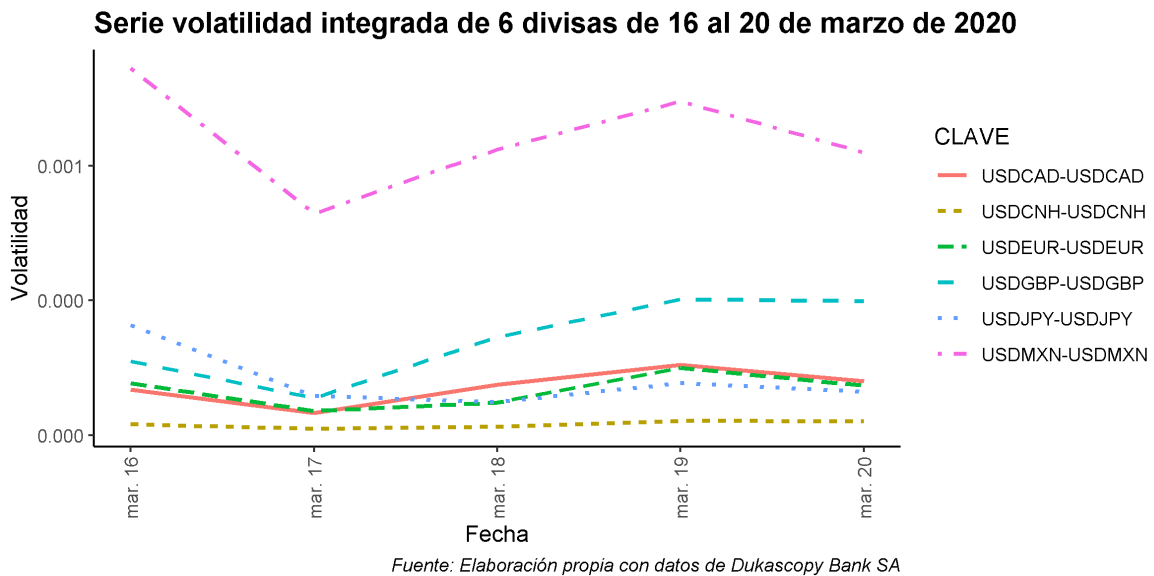


Figura 5.9: Estimación de la volatilidad integrada empleando información tick-by-tick, semana 16-20 Marzo 2020.

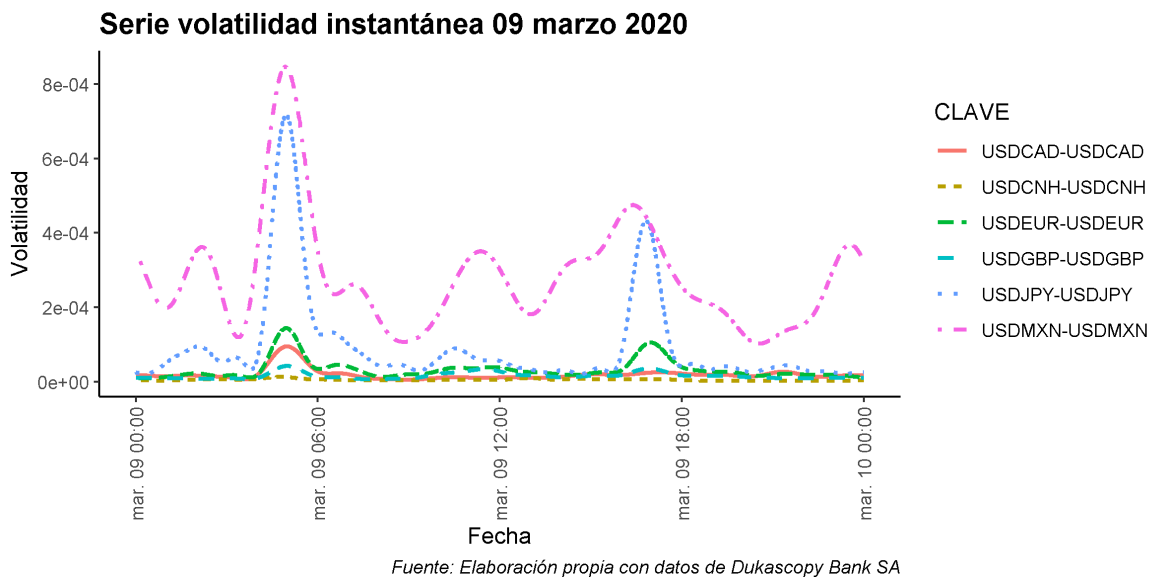
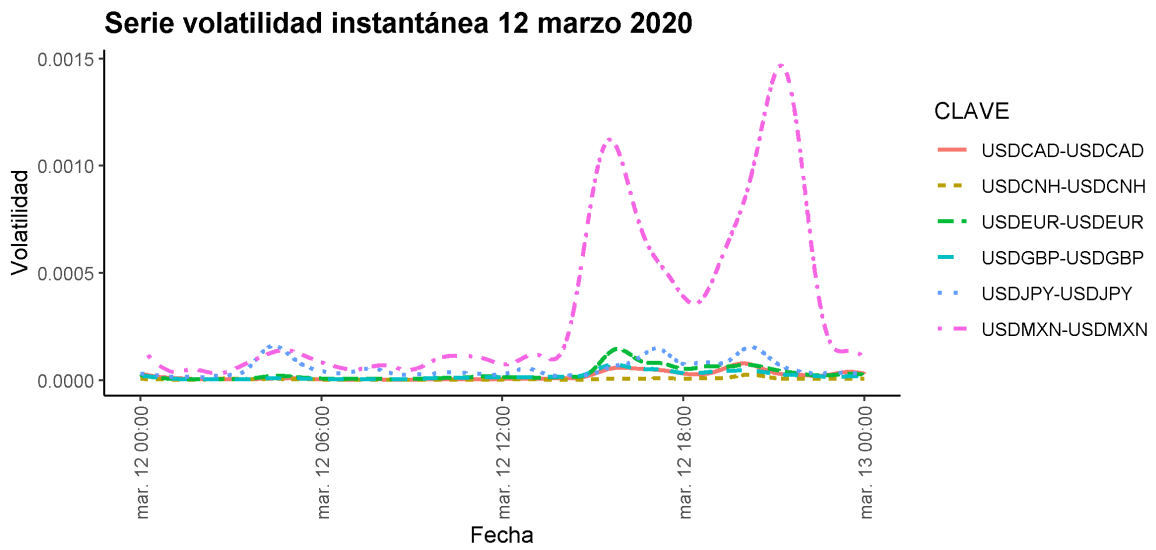


Figura 5.10: Estimación de volatilidad instantánea durante el día 9 de Marzo a partir de información tick-by-tick.



Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

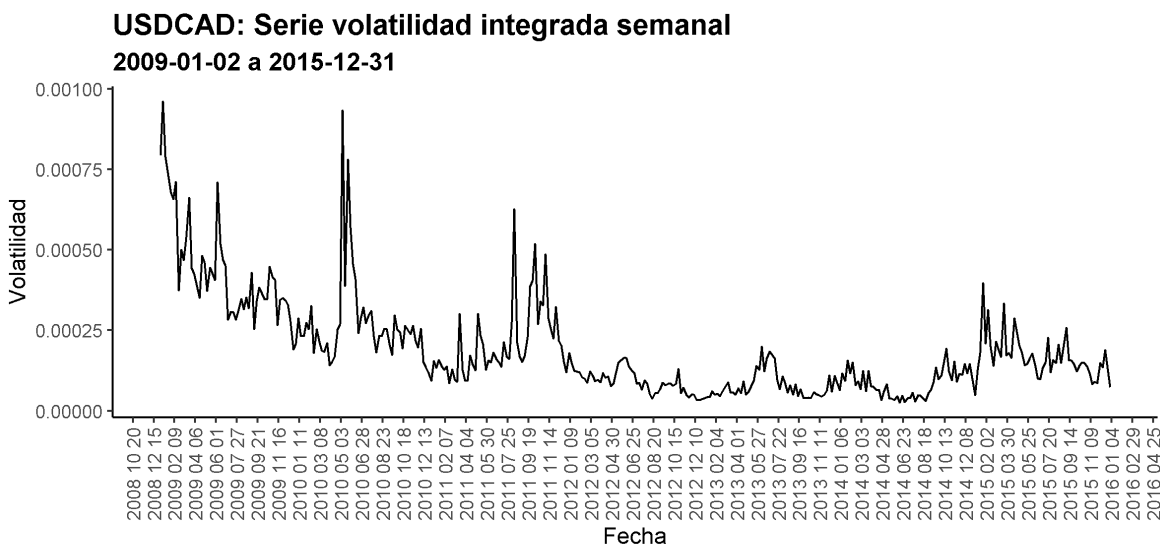
Figura 5.11: Estimación de volatilidad instantánea durante el día 12 de Marzo a partir de información tick-by-tick.

5.4. Volatilidad y covolatilidad: Crisis eurozona

La crisis de la zona euro es reconocida como la mayor crisis de Europa de la posguerra. Fue en parte resultado de la crisis subprime estadounidense de 2008. De acuerdo con las estimaciones de la volatilidad integrada para las divisas en estudio correspondientes al periodo que va de Enero 2009 a Diciembre 2015, el euro presentó un alto nivel de volatilidad en la primera semana de Mayo 2010, al igual que el dólar canadiense. En esa semana, el Banco Central Europeo publicó un programa para regularizar el mecanismo de transmisión de la política monetaria. Medidas similares fueron acatadas en Canadá, Reino Unido y Japón.

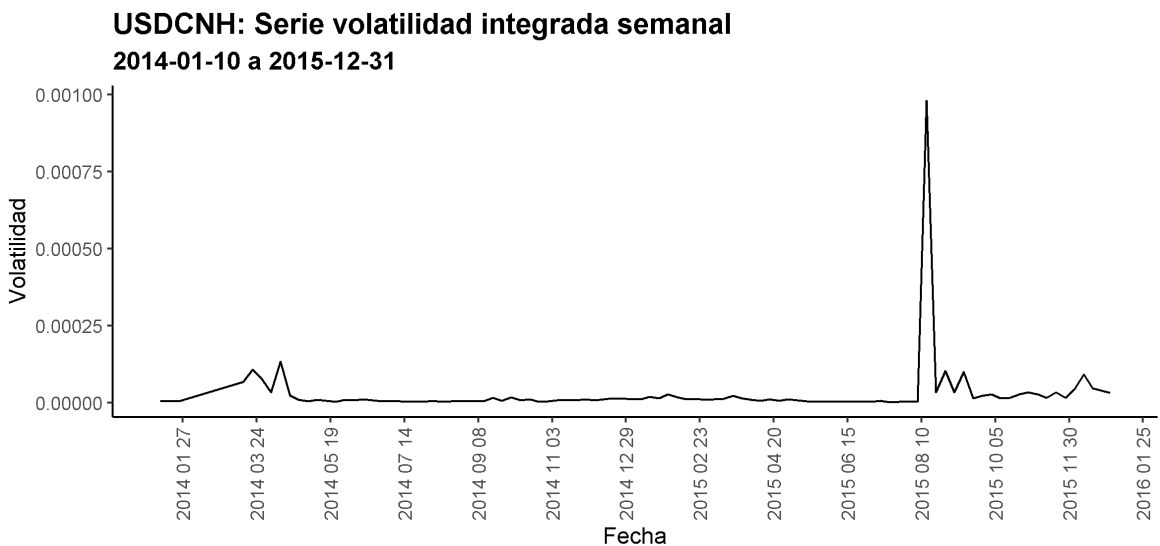
Este efecto de la política monetaria puede observarse en el alto nivel de volatilidad de los tipos de cambio del euro, el yen y el dólar canadiense y en menor medida en el peso mexicano durante la primera semana de Mayo de 2010.

Dado que el fenómeno de la crisis evolucionó con diversas fuentes de incertidumbre ocurriendo al mismo tiempo durante varios años de estudio, el acercamiento al impacto de las medidas para contener la crisis de la Eurozona se puede beneficiar de las métricas de volatilidad obtenidas en esta investigación.



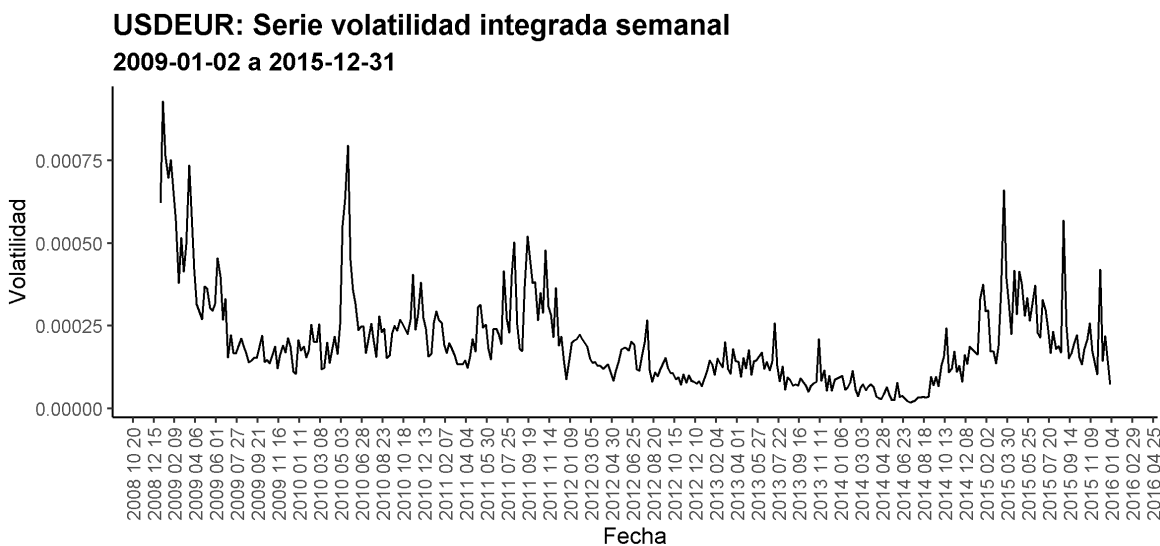
Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.12: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, dólar canadiense.



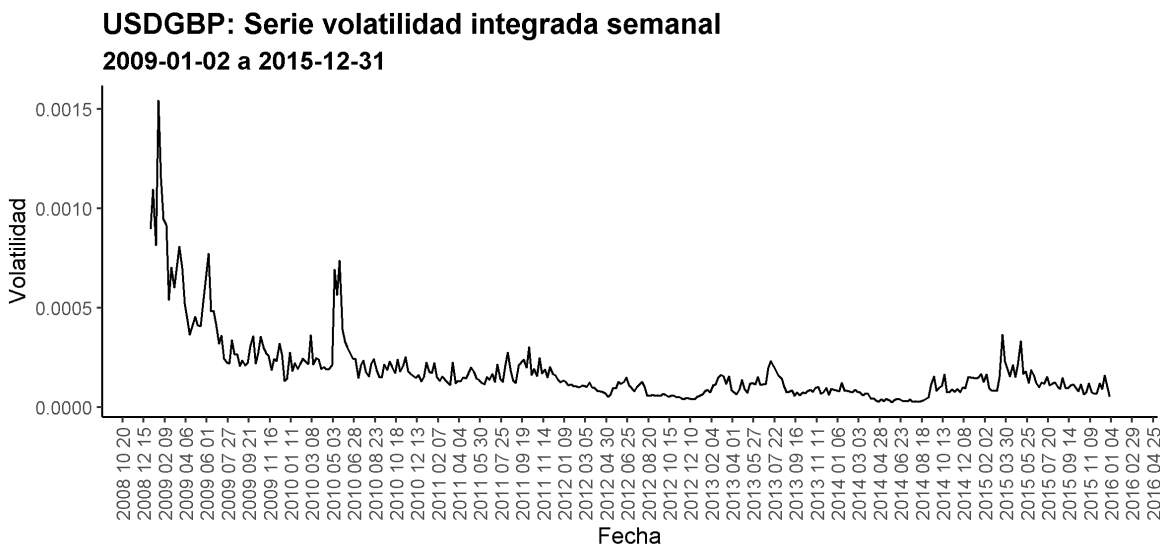
Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.13: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, renminbi.



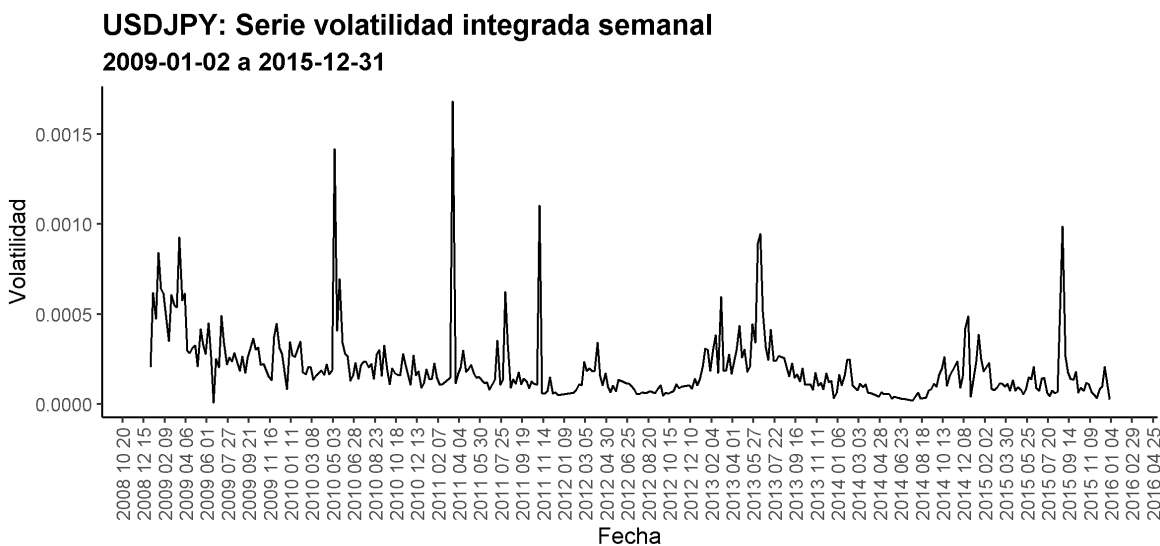
Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.14: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, euro.



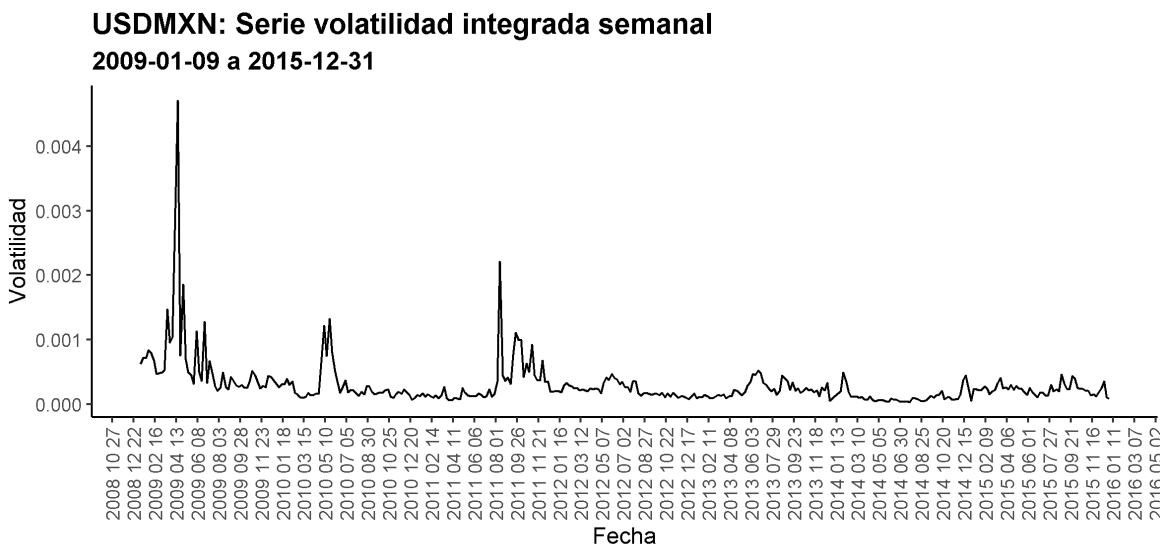
Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.15: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, libra esterlina.



Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.16: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, yen japonés.



Fuente: Elaboración propia con datos de Dukascopy Bank SA

Figura 5.17: Estimación de volatilidad integrada semanal durante Enero 2009 a Diciembre 2015, peso mexicano.

5.5. Conclusiones del capítulo

En la implementación de la estimación de volatilidad con datos de alta y ultra frecuencia fue posible identificar periodos relevantes de alta volatilidad incluso obteniendo la trayectoria de la misma a cada marca de tiempo. Esta información resulta de interés para comprender cómo un estimador puede brindar resultados para la toma de decisiones y podría emplearse en proyectos de pronóstico de volatilidad futura, o bien para su empleo en estrategias de cobertura o contratos derivados en los que contar con una métrica lo más cercana posible a la información actual es esencial para lograr una buena valuación de un contrato.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se llevó a cabo la estimación del proceso de volatilidad integrado e instantáneo de 6 divisas que contemplan el 60 por ciento del comercio mundial de monedas. El método de estimación fue desarrollado por Malliavin y Mancino (2002) y hace uso de la aproximación en el límite de la convolución de Bohr de la transformada de Fourier del proceso de precios con la transformada del proceso de volatilidad. Este método es robusto al ruido de microestructura y tiene la ventaja de explotar la información de alta frecuencia de las series de cotizaciones. En los datos empleados, cada serie de cotizaciones tiene al menos 15 años de historia y al menos 193 millones de observaciones tick-by-tick. La estimación llevada a cabo logró emplear la información real de las cotizaciones sin tener que llevar a cabo un muestreo de la información tick-y-tick ni reducir el tiempo de observación a 5 minutos como resulta necesario con otras métricas de volatilidad. Además de que no solo permitió contar con una estimación integrada por periodo sino también crear una trayectoria instantánea que fue útil para identificar que el estimador es informativo frente a noticias o eventos de política monetaria y fiscal al nivel de minutos. La estimación de la trayectoria de volatilidad permite su uso en modelos predictivos, así como en estrategias óptimas de cobertura que pueden ser implementadas a partir de la identificación del proceso de volatilidad.

Una contribución puntual de esta investigación es que la estimación integrada permitió identificar las semanas que exhibieron alta volatilidad. Esto correspondió principalmente con la evolución de la crisis financiera de 2008, durante la cual la moneda con mayores niveles de volatilidad fue el peso mexicano. Además de ello, el estimador instantáneo nos permitió observar cómo se desarrolló el proceso de volatilidad en los días críticos y permitió identificar qué noticias o eventos se asociaron con momentos de elevada volatilidad instantánea. Este resultado muestra que el estimador es efectivo para reflejar el proceso de volatilidad sujeto a su implementación en datos reales suficientes. Si bien existe la necesidad de ampliar el abanico de estimaciones para datos con diferentes valores de parámetros M , la aproximación aquí realizada da cuenta de la utilidad informativa del estimador para el mercado de divisas.

Además, la implementación de esta métrica en datos reales brinda una estimación del parámetro de volatilidad que refleja las interacciones diarias de múltiples agentes en el mercado. Posibles rutas de aplicación pueden ser el uso de esta serie de datos en la optimización de las estrategias de cobertura al movimiento de precios conocida como delta-hedging. Otra vía de investigación es incorporar este tipo de métricas en el problema de optimización de inventarios de divisas para los formadores de mercado. En tal contexto, un formador de mercado estaría interesado en maximizar sus ganancias sujeto a mantener un inventario no direccional en alguna divisa en particular creando cotizaciones óptimas que reduzcan su exposición. Una investigación similar podría ser el uso de la métrica de volatilidad en la calibración de modelos de agentes que expliquen la formación de grupos con estrategias de inversión similares que no necesariamente actúan de forma racional.

La principal limitación de la metodología de estimación de volatilidad es el tiempo de cálculo pues a medida que crece el número de observaciones, la estimación crece de manera logarítmica creando un cierto rezago para la estimación en tiempo real del proceso de volatilidad. Por otra parte, la necesidad de contar con información de

alta frecuencia establece un requisito de calidad de información que solo se cumple mediante proveedores de información privados. Finalmente, un aspecto a subsanar es la aproximación del proceso de volatilidad en los extremos del periodo de observación pues este método al asumir que el proceso es periódico genera un retorno al mismo nivel en ambos extremos. En general, este problema se reduce drásticamente con el número de observaciones sin embargo es un aspecto a considerar para su uso práctico.

Anexo

```
#-----  
#Codigo_Coeficientes_Precios.R  
#-----  
# Se calculan los coeficientes de Fourier del proceso de precio  
# logprice=precio en logaritmos  
# times = un vector de la misma longitud que logprice que representa  
#         el tiempo escalado a [0,2pi] o no.  
# flag.dates define si el vector times requiere escalarse o no.  
#         Si verdadero, entonces:  
#         transformad=2*pi*(segundos-min(segundos))/delta.tempo  
#         Si falso,     entonces transformad=times  
# cut1= N  
# cut2= M  
f.differential.coef=function(logprice,transformad,cut1,cut2){  
  n1=length(logprice) # Define el largo de informacion  
  diferencias=diff(logprice) # Obtiene los rendimientos  
  # N+M  
  cutoff=cut1+cut2  
  # Es el vector de coeficientes a calcular |s| \leq cutoff  
  coef=rep(0,2*cutoff+1)  
  #si flag.dates==TRUE, se normalizan las fechas al intervalo [0,2pi]  
  #en caso contrario se supone que ya estan normalizadas  
  # imaginary=0+1i  
  imaginary=complex(real = 0, imaginary = 1)  
  # z1= -i*t_i
```

```
z1 <- -imaginary * transformad[-1]
# orden va de -(N+M) a (N+M)
orden=seq(from=-cutoff,to=cutoff,by=1)
# Para cada orden se calcula
#  $F(dp_i)(s) := \sum(e^{-i*t_i*s} dp_i) / (2*pi)$ 
# que es el coeficiente de Fourier de orden s
# del proceso de precio
# Se calculan N+M ordenes incluyendo 0
for(s in orden){
  coef[s+cutoff+1]=(exp(s*z1)%*%diferencias)/(2*pi)
}
# Se guarda un data frame con los 2(N+M)+1 coeficientes de Fourier del
# proceso de precios
return(data.frame(orden,coef))
}
```

```

#-----
# Codigo_Volatility_Path.R
#-----
source("Codigo_Coeficientes_Precios.R")
# Las funciones f.path.vol y f.path.covol generan las estimaciones.
# Para un vector de precios observado en un periodo de tiempo.
# Se genera el estimador instantaneo de (co) volatilidad
# y el estimador de volatilidad integrada.

library(data.table)
f.path.vol=function(logprice,times,cons=1, opcion=1,flag.dates=TRUE){
  n=length(logprice)
  # Dependiendo de la opcion 1 o 2 se obtienen
  # N+M coeficientes del proceso de precio

  if(opcion==1){
    # Opcion 1 Fig 4.4 en Mancino
    # cutoff1= N =n/2
    # cutoff2= M =1/8*n^(1/2)*log(n)*1/(2*pi)
    cutoff1=trunc(n/2)
    cutoff2=trunc(cons*1/8*sqrt(n)*log(n)/(2*pi))
  }else{
    if(opcion==2){
      # Opcion 2 Fig 4.4 en Mancino
      # cutoff1= N =0.85*n/2
      # cutoff2= M =1/8*n^(3/4)*log(n^(3/4))*1/(2*pi)
      cutoff1=trunc(0.85*n^(3/4))
      cutoff2=trunc(1/8*sqrt(n^(3/4))*log(n^(3/4))/(2*pi))
    }
  }

  if(flag.dates){
    segundos=as.numeric(times)
    delta.tempo=max(segundos)-min(segundos)
    transformad=2*pi*(segundos-min(segundos))/delta.tempo
  }else{transformad=times}

  #Coeficientes de Fourier de logprice se guardan en cc
  cc=f.differential.coef(logprice,transformad,cut1=cutoff1,
                        cut2=cutoff2)
  cc<-data.table(cc)

  # fact=2pi/(2N+1)
  fact=(2*pi)/(2*cutoff1+1)

  # Coeficientes de Fourier de Sigma se guardaran en coef.Sigma
  # sigma guarda el orden del coeficiente
  coef.Sigma=c()
  sigma=c()

```

```

#ciclo para calcular coeficientes de Fourier de  $\Sigma^{1,1}$ 
# vec1 guarda el vector de coeficientes de precios de
# -N a N
# que estarán disponibles para calcular los M coeficientes
# de sigma
cc[orden>=-cutoff1 & orden <=cutoff1 ,]
vec1=cc[orden>=-cutoff1 & orden <=cutoff1 ,coef]
# Para -M a M
# se obtienen los coeficientes de Sigma
#  $c_k(\sigma^2_n, M) = 2\pi/(2M+1) \text{ SUM}(c_s * c_{(k-s)})$ 
k=-cutoff2
cc[orden>=(-cutoff1+k) & orden <=(cutoff1+k) ,]

for(k in (-cutoff2):cutoff2){
  # vec2 guarda los 2N+1 coeficientes de precios que van de
  # -N+k a N+k para calcular el coeficiente de orden k
  #  $c_{-1}(\sigma^2_n, M) = 2\pi/(2N+1) \text{ SUM}(c_s * c_{(-1-s)})$  con s
  # en [-N, N]
  #  $c_0(\sigma^2_n, M) = 2\pi/(2N+1) \text{ SUM}(c_s * c_{(-s)})$  con s en [-N, N]
  #  $c_1(\sigma^2_n, M) = 2\pi/(2N+1) \text{ SUM}(c_s * c_{(1-s)})$  con s en [-N, N]
  vec2=cc[orden>=(-cutoff1+k) & orden <=(cutoff1+k) ,coef]
  # El coeficiente k de sigma es  $2\pi/(2N+1) \text{ SUM}(c_s * c_{(-1-s)})$ 
  # con s en [-N, N]
  coef.Sigma[k+cutoff2+1]=t(vec1)%*%rev(vec2) * fact
  sigma[k+cutoff2+1]=k
}

sigma.coeficientes=data.table(orden=sigma,coef=coef.Sigma)

```

```
#Aqui se hace la suma de Fourier-Fejer
f1=function(t){
  f=0
  for(k in (-cutoff2):cutoff2){
    orden=k
    z=complex(real = 0, imaginary = k*t)
    f= f + sigma.coeficientes[orden==k,coef]*exp(z) *(1 - abs(k)/cutoff2)
  }
  return(Re(f))
}

# plot(f1,0,2*pi,main=paste0("volatility"))
spot<<-f1(transformad)
integrada<<-sigma.coeficientes[orden==0,coef]*2*pi
}
```

```

# funcion f.path.covol

f.path.covol=function(logprice1,times1,logprice2,times2,cons=1,
                      opcion=1,flag.dates=TRUE){
  n1=length(logprice1)
  n2=length(logprice2)
  if(opcion==1){
    cutoff1=min(trunc(n1/2),trunc(n1/2))
    cutoff2=trunc(cons*1/8*sqrt(min(n1,n2))*log(min(n1,n2))/(2*pi))
  }else{
    if(opcion==2){
      cutoff1=min(trunc(0.85*n1^(3/4)),trunc(0.85*n2^(3/4)))
      cutoff2=trunc(1/8*sqrt(min(n1,n2)^(3/4))*log(min(n1,n2)^(3/4))/(2*pi))
    }
  }

  if(flag.dates){
    segundos1=as.numeric(times1)
    delta.tempo1=max(segundos1)-min(segundos1)
    transformad1=2*pi*(segundos1-min(segundos1))/delta.tempo1
  }else{transformad1=times1}

  if(flag.dates){
    segundos2=as.numeric(times2)
    delta.tempo2=max(segundos2)-min(segundos2)
    transformad2=2*pi*(segundos2-min(segundos2))/delta.tempo2
  }else{transformad2=times2}

  #Coeficientes de Fourier de logprice
  cc_1=f.differential.coef(logprice1,transformad1,cut1=cutoff1,cut2=cutoff2)
  cc_2=f.differential.coef(logprice2,transformad2,cut1=cutoff1,cut2=cutoff2)
  cc_1<-data.table(cc_1)
  cc_2<-data.table(cc_2)
  # centro=cc[orden==0,]

```

```

cutoff1.tilde=cutoff1+cutoff2
fact=(2*pi)/(2*cutoff1+1)

coef.Sigma=c() #coeficientes de Fourier
sigma=c()

vec1_1=cc_1[orden>=-cutoff1 & orden <=cutoff1 ,coef]
vec1_2=cc_2[orden>=-cutoff1 & orden <=cutoff1 ,coef]

for(k in (-cutoff2):cutoff2){
  vec2=cc_2[orden>=(-cutoff1+k) & orden <=(cutoff1+k) ,coef]
  #rev-erse para invertir el orden de vec2
  coef.Sigma[k+cutoff2+1]=t(vec1_1)%*%rev(vec2) * fact
  sigma[k+cutoff2+1]=k
}
sigma.coeficientes=data.table(orden=sigma,coef=coef.Sigma)

#Aqui se hace la suma de Fourier-Fejer

f1=function(t){
  f=0
  for(k in (-cutoff2):cutoff2){
    orden=k
    z=complex(real = 0, imaginary = k*t)
    f= f + sigma.coeficientes[orden==k,coef]*exp(z) *(1 - abs(k)/cutoff2)
  }
  return(Re(f))
}

# plot(f1,0,2*pi,main=paste0("volatility"))
spot<-f1(transformad1)
integrada<-sigma.coeficientes[orden==0,coef]*2*pi
} #fin funcion f.path.covol.semanal

```



```

#-----
#Codigo_Simulacion.R
#-----
#Simulacion de una trayectoria del sistema:
# Itô Sde 2D:
# | dX(t) = mu * dt + exp(-2.5 + 0.125 * Y(t)) * dB1(t)
# | dY(t) = -0.025 * Y(t) * dt + 1 * dB2(t)
# | Correlation structure:
#   1.0 -0.3
# -0.3  1.0
# Method:
#   | Euler scheme with order 0.5
# Summary:
#   | Size of process | N = 21601.
#   | Number of simulation | M = 100.
#   | Initial values | (x0,y0) = (2.197225,-0.3397864).
#   | Time of process | t in [0,21.6].
#   | Discretization | Dt = 0.001.

require(Sim.DiffProc)
#Simulación mediante paquete Yuima.
set.seed(1234, kind = "L'Ecuyer-CMRG")
mu = 0.03;
beta1=0.125;
beta2=-0.025;
lambda=-0.3;
beta0=beta1/(2*beta2);
teta0=rnorm(1,mean=0,sd=-1/(8*beta2));
fx <- expression( mu , -0.025*y)
gx <- expression( exp(-2.5+0.125*y) , 1)
# correlation matrix
Sigma <- matrix(c(1,-0.3,-0.3,1),nrow=2,ncol=2)
HM <- snssde2d(N=number,M=100,
              drift=fx,diffusion=gx,
              t0=0,T=2*pi,
              x0=c(log(9),teta0),
              corr=Sigma,type = "ito",method="euler")
logprice=data.frame(HM$X)
tau=data.frame(HM$Y)

```

```

#-----
#Codigo_Graficos_Simulacion.R
#-----
#
source("Codigo_Simulacion.R")
for (i in 1:100) {
# data recaba el vector de x_t (x(t))
# y_t recaba el vector de Y(t)
data<-data.table(price=logprice[,i],y_t=tau[,i])
colnames(data)<-c("logprice","y_t")
# se calcula la sigma^2 en sigma
data[,sigma:=exp(-2*2.5 + 2*0.125*y_t)]
# plot(data$logprice,type="l")
# plot(data$sigma,type="l")
data[,times:=seq(0,2*pi,by=2*pi/(.N-1))]
f.path.vol(data$logprice,data$times,cons=1,opcion=1)
# Agregamos a data el valor estimado con el método de Mancino
data$spot<-spot
f.path.vol(data$logprice,data$times,cons=1,opcion=2)
data$spot2<-spot
plot(x=data$times,y=(data$spot),type="l", col="red",
ylim=c(min(data$spot,data$sigma),max(data$spot,data$sigma)))
lines(x=data$times,y=data$sigma,type="l", col="blue")
lines(x=data$times,y=data$spot2,type="l", col="darkgreen")
# Calculamos los retornos estandarizados estimados y verdaderos
true<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$sigma[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
estimated<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$spot[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
estimated2<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$spot2[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
# Guardamos los retornos en una tabla
if(i==1){
  totales<-data.table(verdaderos=true,estimados=estimated,
                      estimados2=estimated2,realizacion=i)
}else{
  total<-data.table(verdaderos=true,estimados=estimated,
                   estimados2=estimated2,realizacion=i)
  totales<-rbind(totales,total)
}
}
}

# Calculamos el error del estimador en términos de retornos estandarizados
totales[,error:=(verdaderos-estimados)]
totales[,error2:=(verdaderos-estimados2)]
# Mostramos para una realización el histograma del error
hist(totales[realizacion==100,error],breaks=100)
hist(totales[realizacion==100,error2],breaks=100)

```

```

# Observamos el histograma de la realizacion 100 de los retornos estimados
# y los reales
hist(estimated2,breaks=100)
hist(true,breaks=100)
plot(ecdf(true))
lines(ecdf(estimated2), col="blue")

# Gráfico que muestra la comparación entre el estimado y
# el verdadero para la realizacion 100
par(mfrow=c(2,1))
plot(x=data$times, y=data$logprice, type="l",
     main="Logaritmo de precio",
     xlab="Tiempo escalado en  $[0,2\pi]$ ", ylab="Log(precio)",
     cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)
plot(x=data$times, y=data$sigma^0.5, type="l",col="darkblue",
     main="Volatilidad instantánea",
     xlab="Tiempo escalado en  $[0,2\pi]$ ", ylab="Volatilidad",
     cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5,
     ylim=c(min(data$sigma^0.5,data$spot2^0.5),
            max(data$sigma^0.5,data$spot2^0.5)))
# Agregamos el valor estimado en lineas punteadas
lines(x=data$times, y=data$spot^0.5, lty=4, col="firebrick")
lines(x=data$times, y=data$spot2^0.5, lty=2, col="darkgreen")
legend("topleft",legend = c("Simulada", "Estimada", "Estimada 2"),cex=0.5,
      lwd = 2, col = c("darkblue", "firebrick", "darkgreen"))
par(xpd = TRUE)
text(1500, -1.5, "Estimación de volatilidad de un proceso de precio sujeto
a un proceso de difusión estocástico mediante el método de Fourier-Malliavin.")

```

```

# Simulacion 100
# Evaluacion en términos de retorno estandarizado
# true tiene los retornos estandarizados reales
# estimated tiene los retornos estandarizados con la sigma estimada
true<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$sigma[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
estimated<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$spot[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
estimated2<-diff(data$logprice)/(sqrt(data$spot2[-1])*sqrt(2*pi/(21601-1)))
sesgo<-(true-estimated)/true
sesgo2<-(true-estimated2)/true
hist(sesgo2, breaks=100)
mean(sesgo2)
# Grafico de error estandarizado simulacion 100
par(mfrow=c(2,1))
hist(true-estimated2,breaks = 100, main="Error del retorno estandarizado",
      xlab="", ylab="Frecuencia",
      cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)
hist(sesgo2,breaks = 100,main="Sesgo del estimador de volatilidad", xlab="",
      ylab="Frecuencia",
      cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)
# hist((data$spot^0.5-data$sigma),breaks = 500,
main="Error del estimador de volatilidad", xlab="", ylab="Frecuencia",
#   cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)
# hist(estimated,breaks = 500,main="Error del estimador de volatilidad",
      xlab="", ylab="Frecuencia",
#       cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)
sd(true-estimated)
mean(estimated/true-1)
sd(estimated/true-1)

par(mfrow=c(1,1))

hist(totales$error,breaks = 1000,
main="100 simulaciones: error del retorno estandarizado", xlab="",
ylab="Frecuencia",prob=TRUE,
      cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, cex.sub=1.5)

```

Bibliografía

- Alexander, C., Deng, J., & Zou, B. (2022). Hedging with automatic liquidation and leverage selection on bitcoin futures. *European Journal of Operational Research*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.07.037> (vid. pág. 15).
- Ballotta, L., Deelstra, G., & Rayée, G. (2017). Multivariate FX models with jumps: Triangles, Quantos and implied correlation. *European Journal of Operational Research*, 260(3), 1181-1199. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.02.018> (vid. pág. 15).
- Bank for International Settlements. (2022). *Triennial Central Bank Survey of foreign exchange and Over-the-counter (OTC) derivatives markets in 2022* (inf. téc.). <https://www.bis.org/statistics/rpfx22.htm> (vid. págs. 8, 43).
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2002). Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 253-280. <http://pbidi.unam.mx:8080/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edsjsr&AN=edsjsr.3088799&lang=es&site=eds-live> (vid. pág. 18).
- Barunik, J., Krehlik, T., & Vacha, L. (2016). Modeling and forecasting exchange rate volatility in time-frequency domain. *European Journal of Operational Research*, 251(1), 329-340. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.12.010> (vid. pág. 15).

- Bauwens, L., Hafner, C., & Laurent, S. (Eds.). (2012, abril). *Handbook of Volatility Models and Their Applications*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118272039> (vid. pág. 5).
- Bush, G., & López Noria, G. (2021). Uncertainty and exchange rate volatility: Evidence from Mexico. *International Review of Economics and Finance*, 75, 704-722. <https://doi.org/10.1016/j.iref.2021.04.029> (vid. págs. 21, 22).
- Chouaib Guidoum, A., & Boukhetala, K. (2020). Performing Parallel Monte Carlo and Moment Equations Methods for Itô and Stratonovich Stochastic Differential Systems: R Package Sim.DiffProc. *Journal of Statistical Software*, 96(2), 1-82. <https://doi.org/10.18637/jss.v096.i02> (vid. pág. 40).
- Dash, G. H., Hanumara, C. R., & Kajiji, N. (2003). Neural network architectures for efficient modeling of FX Futures Options Volatility. *Operational Research*, 3(1), 3-23. <https://doi.org/10.1007/bf02940275> (vid. pág. 15).
- Gkillas, K., Vortelinos, D., Floros, C., Garefalakis, A., & Sariannidis, N. (2020). Greek sovereign crisis and European exchange rates: effects of news releases and their providers. *Annals of Operations Research*, 294(1-2), 515-536. <https://doi.org/10.1007/s10479-019-03199-x> (vid. pág. 21).
- Glosten, L. R., & Milgrom, P. R. (1985). Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics*, 14(1), 71-100. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X\(85\)90044-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X(85)90044-3) (vid. pág. 13).
- Jacod, J. (2019). Estimation of volatility in a high-frequency setting: a short review [cited By 2]. *Decisions in Economics and Finance*, 42(2), 351-385. <https://doi.org/10.1007/s10203-019-00253-y> (vid. pág. 16).
- King, M. R., Osler, C., & Rime, D. (2012). Foreign Exchange Market Structure, Players, and Evolution. En *Handbook of Exchange Rates* (pp. 1-44). John Wiley; Sons, Ltd. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/9781118445785.ch1> (vid. pág. 14).

- King, M. R., Osler, C. L., & Rime, D. (2013). The market microstructure approach to foreign exchange: Looking back and looking forward [30th Anniversary of the Journal of International Money and Finance]. *Journal of International Money and Finance*, 38, 95-119. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2013.05.004> (vid. págs. 9, 11).
- Malliavin, P., & Mancino, M. E. (2002). Fourier series method for measurement of multivariate volatilities. *Finance and Stochastics*, 6(1), 49-61. <https://doi.org/10.1007/s780-002-8400-6> (vid. págs. 1, 6, 16, 18, 20, 23-25, 28, 31-33, 38, 66).
- Mancino, M. E., & Recchioni, M. C. (2015). Fourier Spot Volatility Estimator: Asymptotic Normality and Efficiency with Liquid and Illiquid High-Frequency Data. *PLOS ONE*, 10(9), 1-33. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0139041> (vid. pág. 20).
- Mancino, M. E., Recchioni, M. C., & Sanfelici, S. (2017). *Fourier-Malliavin Volatility Estimation*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-50969-3> (vid. págs. 1, 24, 33, 34, 37, 38).
- Meese, R. A., & Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample? *Journal of International Economics*, 14(1), 3-24. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-1996\(83\)90017-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-1996(83)90017-X) (vid. pág. 9).
- Negishi, T. (1970, enero). Tâtonnement and recontracting. https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1057/978-1-349-95189-5_1353 (vid. pág. 10).
- Ogunranti, G. A., Ceryan, O., & Banerjee, A. (2021). Buyer-supplier currency exchange rate flexibility contracts in global supply chains. *European Journal of Operational Research*, 288(2), 420-435. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.05.053> (vid. pág. 15).
- Panthaki, F. (2007). *Foreign exchange market reactions to news: A microstructure analysis of returns, volatility, and order flow from the Reuters D2000-2 elec-*

- tronic trading system*. [Tesis doctoral, London School of Economics y Political Science]. (Vid. pág. 21).
- Sermpinis, G., Theofilatos, K., Karathanasopoulos, A., Georgopoulos, E. F., & Dunis, C. (2013). Forecasting foreign exchange rates with adaptive neural networks using radial-basis functions and Particle Swarm Optimization. *European Journal of Operational Research*, 225(3), 528-540. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.020> (vid. pág. 15).
- Shleifer, A. (1986). Do Demand Curves for Stocks Slope Down? *The Journal of Finance*, 41(3), 579-590. Consultado el 25 de octubre de 2022, desde <http://www.jstor.org/stable/2328486> (vid. pág. 12).
- Stein, E., & Shakarchi, R. (2011, febrero). *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press. <https://press.princeton.edu/books/ebook/9781400831234/fourier-analysis> (vid. págs. 24, 26, 28-31).
- Stigler, G. J. (1970, enero). Competition. https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1057/978-1-349-95189-5_524 (vid. pág. 10).