



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

APLICACIÓN COMPUTACIONAL DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ A ULTRASONIDO HIFU

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
ESPECIALISTA EN CÓMPUTO DE ALTO RENDIMIENTO

PRESENTA:  
CÉSAR EDUARDO ROMERO BAUTISTA

TUTOR:  
DR. ERNESTO RUBIO ACOSTA  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS  
UNAM

MÉXICO, CDMX, JULIO 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

|  |          |
|--|----------|
| Agradecimientos  | IX       |
| Agradecimientos Personales   | XI       |
| Dedicatoria  | XIII     |
| Introducción   | XV       |
| Objetivo   | XVII     |
| <b>1. Modelación Física Matemática</b>   | <b>1</b> |
| 1.1. Ultrazonido Focalizado de Alta Intensidad (HIFU) . . . . .                  | 1        |
| 1.2. Introducción a la Ecuación de Helmholtz . . . . .                           | 2        |
| 1.2.1. Relación de la Ecuación de Helmholtz con la Ecuación<br>de Onda . . . . . | 3        |
| 1.3. Planteamiento del Problema . . . . .  | 4        |
| 1.3.1. Dominio y Condiciones de Frontera . . . . .                               | 5        |
| <b>2. Modelación Numérica: Método de Elemento Finito</b>                         | <b>7</b> |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 2.1.      | Introducción . . . . .                                | 7         |
| 2.2.      | Generalidades del Método de Elemento finito . . . . . | 11        |
| 2.3.      | FEM Aplicado a EDP Helmholtz . . . . .                | 12        |
| 2.4.      | Elementos Finitos Interiores . . . . .                | 13        |
| 2.5.      | Elementos Finitos de Frontera Dirichlet . . . . .     | 14        |
| 2.6.      | Elementos Finitos de Frontera Neumann . . . . .       | 17        |
| 2.7.      | Elementos Finitos de Frontera Robin . . . . .         | 17        |
| 2.8.      | Base Local de Funciones de Peso . . . . .             | 19        |
| 2.8.1.    | Base Local de Tipo Lagrange . . . . .                 | 20        |
| 2.9.      | Triangulación . . . . .                               | 22        |
| <b>3.</b> | <b>Modelación Computacional</b>                       | <b>25</b> |
| 3.1.      | Programación Secuencial . . . . .                     | 25        |
| 3.1.1.    | Geometria . . . . .                                   | 25        |
| 3.1.2.    | Elementos Finitos . . . . .                           | 26        |
| 3.1.3.    | Matrices Globales . . . . .                           | 27        |
| 3.1.4.    | Resolvidor BiCGstab . . . . .                         | 29        |
| 3.1.5.    | Graficación . . . . .                                 | 30        |
| 3.2.      | Programa en Paralelo . . . . .                        | 32        |
| 3.2.1.    | Complemento de Schur . . . . .                        | 32        |
| <b>4.</b> | <b>Pruebas de Desempeño</b>                           | <b>37</b> |
| 4.1.      | Solución de Referencia . . . . .                      | 37        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.2. Casos de estudio Programación Serial . . . . . | 38        |
| 4.2.1. Problema 1 . . . . .                         | 39        |
| 4.2.2. Problema 2 . . . . .                         | 42        |
| 4.2.3. Problema 3 . . . . .                         | 42        |
| 4.3. Pruebas en Paralelo . . . . .                  | 45        |
| 4.3.1. Problema 1 . . . . .                         | 45        |
| 4.3.2. Problema 2 . . . . .                         | 50        |
| 4.3.3. Problema 3 . . . . .                         | 50        |
| 4.4. Problema $f = 20MHz$ . . . . .                 | 51        |
| <b>Conclusiones</b>                                 | <b>53</b> |
| <b>Trabajo a Futuro</b>                             | <b>59</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                 | <b>61</b> |



# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Tratamiento con HIFU. . . . .   | 2  |
| 1.2. Diagrama Ultrasonido . . . . .  | 2  |
| 1.3. Frontera del Problema . . . . .   | 6  |
| 2.1. Partición que aproxima una circunferencia . . . . .                               | 10 |
| 2.2. Elementos Finitos Interiores . . . . .  | 13 |
| 2.3. Elementos Finitos sobre Frontera Dirichlet . . . . .                              | 15 |
| 2.4. Función $U_0$ para los elementos en Frontera Dirichlet . . . . .                  | 15 |
| 2.5. Elementos en Frontera Dirichlet No Homogéneo . . . . .                            | 16 |
| 2.6. Elementos en Frontera Neumann . . . . .   | 17 |
| 2.7. Elementos en Frontera Robin . . . . .   | 18 |
| 2.8. Funciones Sombrero . . . . .  | 19 |
| 2.9. Elemento triangular de 3 nodos para funciones polinomiales<br>de grado 1. . . . . | 20 |
| 2.10. Base Local de Funciones de Peso en cada Elemento Finito . . . . .                | 21 |
| 2.11. Mallado de nuestro dominio . . . . .   | 23 |
| 3.1. Diagrama de los Módulos . . . . .   | 26 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.2. | Matriz Dispersa de $30KHz$ . . . . .  | 28 |
| 3.3. | Matriz Global reordenada por subdominios . . . . .  | 33 |
| 3.4. | Matriz Global Típica de FEM . . . . .   | 34 |
| 3.5. | Diagrama Fork-Join . . . . .  | 36 |
| 3.6. | Diagrama Fork-Join Implementado . . . . .   | 36 |
| 4.1. | Resultados obtenidos en [1] para $F = 1MHz$ . . . . .   | 38 |
| 4.2. | Función de Helmholtz resuelta con $F = 30KHz$ y el algoritmo<br>BICGstab. Con vista aérea, de lado y la traza . . . . . | 40 |
| 4.3. | Convergencia del problema . . . . .   | 41 |
| 4.4. | Gráfica del Análisis de Eficiencia del paralelismo . . . . .  | 49 |
| 4.5. | Gráfica del Análisis de Speedup . . . . .   | 49 |

# Índice de cuadros

|  |    |
|--|----|
| 4.1. Problemas Desarrollados . . . . .   | 38 |
| 4.2. Comparación de las gráficas del problema con frecuencia $f = 1MHz$ . . . . .            | 43 |
| 4.3. Comparación de la traza y convergencia del problema con frecuencia $f = 1MHz$ . . . . . | 44 |
| 4.4. Pruebas de desempeño Paralelo. . . . .  | 47 |
| 4.5. Tiempos transcurridos . . . . .   | 48 |
| 4.6. Análisis de Eficiencia . . . . .  | 48 |
| 4.7. Tiempos transcurridos local BiCGsatb . . . . .  | 50 |
| 4.8. Total de Incógnitas de los problemas tratados . . . . .                                 | 51 |



# Agradecimientos

Quiero agradecer al Posgrado de Ciencias e Ingeniería de la Computación de la UNAM, por abrirme las puertas y a los profesores que lo conforman por brindarme su conocimiento en el cómputo de alto rendimiento.

Al proyecto UNAM\_DGAPA\_PAPIIT IG101322 titulado "Investigación y desarrollo de un sistema Doppler ultrasónico basado en una arquitectura reconfigurable para medición de flujo sanguíneo con aplicación en cirugías cardiovasculares y cerebrovascular", con vigencia 2022-2024, siendo responsable el Dr. Fabian García Nocetti.

Al Dr. Ernesto Rubio por dirigir el trabajo y su dedicación para culminarlo.

Al Dr. Héctor Benítez y al Dr. Fabian García, por tomarse el tiempo de leer este trabajo.

A la candidata a Dra. Alicia de la Mora Cebada por su asesoría en los métodos numéricos utilizados.



# Agradecimientos Personales

Quiero agradecer a mis padres Edgar y Araceli por ser mi soporte y motor para continuar y hacer este sueño posible, por mostrarme que el camino al éxito es la entrega y el esfuerzo diario. A mí hermano Edgar por mostrarme que no hay fuerza más grande que el amor a la familia y enseñarme a que ningún conocimiento es más grande que nuestras ganas de aprender. A mí hermana Fany por siempre motivarme de una manera especial, por enseñarme que los problemas no son más grandes que nuestra motivación para salir adelante. A toda mi familia por siempre creer en mí y motivarme en cada momento. A Dios por hacer esto posible.

A mi novia Ángeles por enseñarme que el amor es la motivación más grande que podemos tener y mostrarme que cada avance aunque sea 1/10 de paso, ayuda alcanzar nuestros sueños.

A mis amigos, Javier y Jesús por ayudarme, apoyarme cuando más los necesitaba. Al Maestro Enrique porque más que mi profesor es mi mentor y amigo, me mostró lo grandioso del cómputo científico.

A todas aquellas personas que contribuyeron en mi conocimiento a lo largo de mi vida académica.



# Dedicatoria

A mis padres porque se merecen todo mi esfuerzo, por siempre cuidar y sacar adelante a la familia con amor y esfuerzo. siempre apoyarme y no dejarme caer pese a las adversidades, por todo su amor y comprensión.

A mis compañeros de travesuras, mis hermanos por apoyarme y estar siempre para mí, por motivarme y darme siempre el impulso que necesito para seguir.

A mí novia por ser la persona que me inspira a lograr todos mis sueños y disfrutar nuestros logros juntos.



# Introducción

El Ultrasonido Focalizado de Alta Intensidad (HIFU), se utiliza para eliminar o tratar los tejidos tumorales o células malignas cancerígenas. Consta en generar calor en la zona del tejido tumoral sin afectar el tejido sano del cuerpo. Es un tratamiento menos riesgoso que la radiación y es menos invasivo.

Este trabajo se basó en modelar el ultrasonido generado por el transductor con la ayuda de la ecuación de Helmholtz y con condiciones de fronteras mixtas, es decir con 3 tipos de frontera: cf. Dirichlet no homogénea, cf. Neumann homogénea y cf. Robin homogénea. Dicho problema tiene condiciones de frontera iniciales las cuales describen la física del problema. Este problema fue dividido en dos partes: La primera es resolver con una frecuencia del transductor de  $30\text{KHz}$  de manera serial y después con la ayuda del cómputo paralelo. La segunda es resolver el problema con una frecuencia del transductor de  $1\text{MHz}$ , de igual manera primero serial y después en paralelo.

El problema se resolvió con el Método de Elemento Finito, dicho método se implementó completamente en MatLab para encontrar la solución numérica al problema. La matriz del sistema de ecuaciones generado tiene números complejos y no es hermitiana (solamente es simétrica), por lo que se utilizó el resolvidor de Gradiente Biconjugado estabilizado (BiCGstab). Y para poder lograr la paralelización se utilizó el complemento de Schur con resolvidores locales LU.

Las principales dificultades computacionales fueron: La disponibilidad de memoria, la complejidad algorítmica del resolvidor LU y el número de condicionamiento de la matriz.



# Objetivo y Metodología

El objetivo de este trabajo es resolver el problema de Ultrasonido Focalizado de Alta Intensidad modelado con la ecuación de Helmholtz con una frecuencia del transductor de  $F = 1000000Hz = 1MHz$ , mediante el Método de Elemento Finito con la ayuda del cómputo de alto rendimiento. Para lograr dicho objetivo se tiene que seguir la siguiente metodología:

1.- Resolver el problema con frecuencia de  $F = 30KHz$  de forma secuencial con tamaño del elemento finito de  $h = \frac{\lambda}{10}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

2.- Resolver para  $F = 1MHz$  de forma secuencial con  $h = \frac{\lambda}{5}$ .

3.- Resolver para  $F = 1MHz$  de forma secuencial con  $h = \frac{\lambda}{10}$ .

4.- Paralelizar el problema de  $F = 30KHz$ .

5.- Paralelizar el problema de  $F = 1MHz$ .

El trabajo futuro será resolver el problema con frecuencia de  $F = 20MHz$ .



# Capítulo 1

## Modelación Física Matemática

### 1.1. Ultrasonido Focalizado de Alta Intensidad (HIFU)

El ultrasonido Focalizado de Alta Intensidad HIFU por sus siglas en inglés (High Intensity Focused Ultrasound) es un procedimiento médico ligeramente invasivo, el procedimiento consta en dirigir ondas de sonido de alta energía directamente a un área de células o tejidos anormales del cuerpo. Las ondas crean un calor que destruye las células. El objetivo de éste es centralizar la energía de un haz de ultrasonidos de alta frecuencia en un espacio pequeño de tejido, calentándolo hasta una determinada temperatura, y consiguiendo la destrucción y muerte de las células del tejido tumoral. Es un procedimiento que se realiza en el quirófano, con anestesia general o regional.

Actualmente es una alternativa a las cirugías en el tratamiento de tumores sólidos. Dichos procedimientos son ideales para tumores pequeños, localizados, y de órganos sólidos como el hígado, riñón, bazo, entre otros. Aún es un tratamiento en desarrollo, en consecuencia aún no están aprobados a nivel internacional los criterios de éxito del tratamiento.

En el figura 1.2 se ilustra el funcionamiento del aparato encargado de generar las ondas de ultrasonido. Consta del Transductor Ultrasónico el cual genera las ondas mediante el elemento piezoeléctrico.



Figura 1.1: Tratamiento con HIFU.

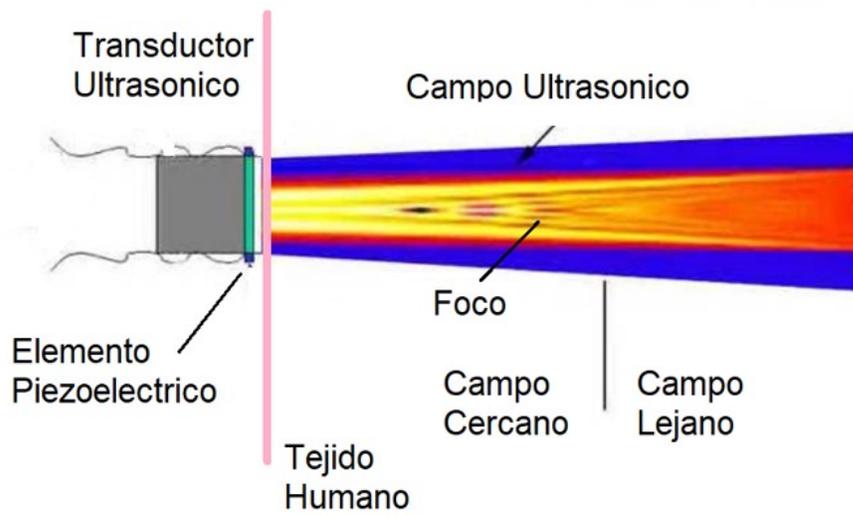


Figura 1.2: Diagrama Ultrasonido

## 1.2. Introducción a la Ecuación de Helmholtz

La ecuación de Helmholtz surge en problemas físicos en los cuales esta de por medio la ecuación diferencial parcial (EDP) de onda definida en el espacio y en el tiempo. La ecuación de Helmholtz representa una forma independiente

del tiempo de la ecuación de onda, esto es, representa una onda estacionaria. Se define como:

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0 \quad (1.1)$$

Donde  $\nabla^2$  es el operador de Laplace y  $k^2$  es un número real positivo.

### 1.2.1. Relación de la Ecuación de Helmholtz con la Ecuación de Onda

Sea la ecuación de onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 u(x, t)$$

Supóngase que la solución tiene la siguiente forma:  $u(x, t) = \Theta(x)T(t)$

Aplicando el método de separación de variables se obtiene la Ecuación de Helmholtz. El desarrollo es el siguiente. Sustituyendo la solución en la EDP se tiene:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\Theta T)}{\partial t^2} = \nabla^2(\Theta T)$$

Dejando de lado derecho a los términos que implican  $\Theta$  y de lado izquierdo a los términos que implican  $T$ , se obtiene:

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{\Theta} \nabla^2 \Theta \quad (1.2)$$

El lado derecho de la ecuación 1.2 se iguala a  $-k^2$ , la constante de separación, donde  $k^2$  es un eigenvalor del operador de Laplace.

$$\frac{1}{\Theta} \nabla^2 \Theta = -k^2$$

Multiplicando ambos lados por  $\Theta$  y pasando todos los términos de lado izquierdo queda la ecuación de Helmholtz que depende del espacio, y cuya solución representa una onda estacionaria.

$$\nabla^2\Theta + k^2\Theta = 0$$

Ahora el lado izquierdo de (ec. 1.2) también se iguala a  $-k^2$

$$\frac{1}{c^2T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k^2$$

Multiplicando ambos lados por  $c^2T$  y pasando todos los términos de lado izquierdo queda una ecuación diferencial de segundo orden que depende del tiempo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + c^2k^2T = 0$$

cuya solución general es:

$$T = c_1e^{(-ickt)} + c_2e^{(ickt)}$$

Debido a su relación con la ecuación de onda, la ecuación de Helmholtz surge en problemas en áreas de la física como el estudio de la radiación electromagnética, la sismología y la acústica.

$$-\nabla^2\Theta - k^2\Theta = 0$$

### 1.3. Planteamiento del Problema

En la introducción de este capítulo se habló del Ultrasonido Focalizado de Alta Intensidad (HIFU), la razón es porque se requiere modelar la forma en como se lleva a cabo esta técnica de ultrasonido, en la figura 1.1, se tiene un aparato donde se encuentra una mesa y una cavidad circular. El paciente se recuesta sobre la mesa y por debajo de esta se encuentra el transductor (ver

fig:1.2). Esté comienza a generar el campo ultrasónico y la cavidad circular en la parte de arriba es la que se encarga de contener dicho campo. La idea es apuntar el foco (focalizar) a la zona afectada del cuerpo humano para así poder quemar el tejido tumoral, pero dado la complejidad y poder destructivo en las células, se debe manejar de la forma correcta.

El problema que debemos enfrentar es modelar el problema físico con la ecuación de Helmholtz (ec. 1.1).

Donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  se denomina el número de onda (wavenumber),  $\lambda = \frac{v}{f}$  es la longitud de onda (wavelength),  $f = 20MHz$  es la frecuencia de operación del transductor ultra sónico y  $v = 1500m/s$  es la velocidad del sonido en el cuerpo humano (agua, grasa y músculo).

Obsérvese que la frecuencia del transductor para HIFU es de  $20MHz$ . Modelar computacionalmente este problema excede la capacidad tanto de cálculo como en memoria de un equipo de cómputo convencional (se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales de aproximadamente 100,000,000 de incógnitas). Por este motivo se busca la paralelización computacional del problema utilizando **cómputo de alto desempeño**. Como un primer paso importante para alcanzar dicho objetivo, en esté trabajo se resolverá el problema para un transductor de ultrasonido Doppler de  $1MHz$  (se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales de aproximadamente 1,500,000 de incógnitas).

### 1.3.1. Dominio y Condiciones de Frontera

Teóricamente el HIFU irradia hasta el infinito, pero para el modelo numérico se debe limitar a la frontera artificialmente, por esta razón se considera un tipo de frontera no reflejante que iguala la impedancia del medio con la impedancia de la frontera y no refleja onda. Esto provoca que haya números complejos.

Trabajaremos con un dominio de la mitad de una circunferencia de radio  $R$ , donde el radio del transductor ultrasónico es  $a$ , con  $a \ll R$ . El radio de la semi circunferencia es  $R = 2N_f$ , donde  $N_f$  es el foco natural y se calcula

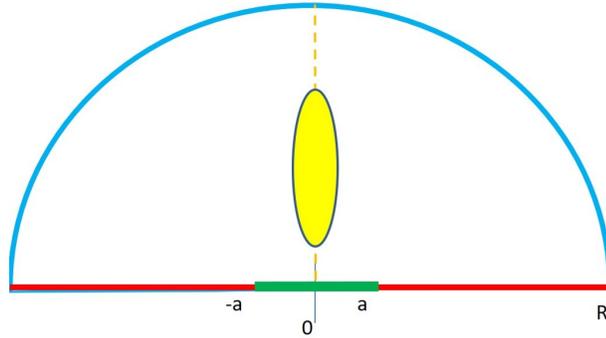


Figura 1.3: Frontera del Problema

con  $N_f = \frac{a^2}{\lambda}$ . Véase figura 1.3.

Se tiene tres tipos de frontera:

- **Condición de frontera tipo Robin Homogénea:** Se trata de condiciones de frontera no reflejantes que igualan la impedancia del medio con la impedancia de la frontera, también conocida como la condición de radiación de Sommerfeld [1]. Es la frontera definida sobre la semi-circunferencia (frontera color azul en fig. 1.3 )

$$\tau_R : \frac{\partial u}{\partial n} + iku = 0$$

- **Condición de frontera tipo Neumann Homogénea:** Se trata de condiciones de frontera de baffle libre. Es la frontera sobre el diámetro de la semi-circunferencia, fuera del transductor (frontera de color rojo en fig. 1.3 )

$$\tau_N : \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

- **Condición de frontera tipo Dirichlet no Homogénea:** Se trata de condiciones de frontera de baffle rígido que representan la amplitud máxima del haz ultrasónico. Es la frontera del diámetro de la semi-circunferencia pero sobre el transductor.(frontera color verde en fig. 1.3 )

$$\tau_D : u = c = 1$$

# Capítulo 2

## Modelación Numérica: Método de Elemento Finito

### 2.1. Introducción

La matemática discreta es el área de las matemáticas que estudia los conjuntos discretos, es decir, los conjuntos enumerables, que comprenden los conjuntos finitos.

La solución de una ecuación diferencial es una función que pertenece a un espacio vectorial de dimensión infinita (series de Taylor). Cuando se utiliza un proceso de discretización para resolver dicho problema, lo que se busca es la mejor aproximación a la solución en un espacio vectorial de dimensión finita (polinomios de Taylor de grado  $P$ ). Específicamente se utiliza un espacio vectorial de funciones polinomiales continuos de grado  $P$  definidos por tramos. Si  $P = 1$  se dice que la aproximación es con polinomios lineales (en el sentido de línea recta).

Discretizar la solución de una ecuación diferencial, consiste en los siguientes pasos:

- Ecuación diferencial lineal:

$$Lu = f, \quad \text{en } \Omega$$

$$u = 0, \quad \text{en } \partial\Omega$$

- Formulación Variacional "Continua" (espacio de funciones de dimensión infinita) :

$$A\langle u, w \rangle = \int_{\Omega} w f d\Omega$$

$$\forall w \in V$$

- Formulación Variacional "Discreta" (espacio de funciones de dimensión finita): Funciones polinomiales de grado  $N$  continuas definidas por tramos,

$$A\langle \hat{u}, \hat{w} \rangle = \int_{\Omega} \hat{w} f d\Omega$$

$$\forall \hat{w} \in \hat{V}$$

- Sistema de Ecuaciones Lineales Algebraico:

$$base_{\hat{V}} = \{\widehat{W}_i\}_{i=1}^N$$

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^N U_i \widehat{w}_i$$

$$\sum_{i=1}^N U_i A\langle \widehat{w}_i, \widehat{w}_j \rangle = \int_{\Omega} \widehat{w}_j f_{\Omega} d\Omega$$

$$j = 1, \dots, N$$

Se tiene la ecuación diferencial lineal, la cual se pesa y se integra en el dominio, pasa a la forma variacional "Continua", planteada en un espacio de dimensión infinita. Pero para poder realizar FEM se debe cortar el espacio a un espacio de dimensión finita, este paso es la formulación variacional "Discreta", el cual se aproxima con funciones polinomiales continuas por tramos y esto provoca el espacio de dimensión finita. Por último, se obtiene el sistema lineal algebraico, introduciendo una base del espacio de dimensión finita y la solución se expresa mediante una combinación lineal de la base. Las incógnitas del sistema de ecuaciones son los coeficientes de la combinación lineal.

El Método de Elemento finito fue sistematizado por Ciarlet. Los siguientes teoremas son fundamentales para el Método de Elemento Finito:

- El Lemma de Du.Bois Reymond que establece la equivalencia entre el problema diferencial y el problema variacional (integral).[2]
- El Teorema de Lax-Milgram que establece la existencia y unicidad de la solución del problema variacional. [2]
- El Lemma de Cea que establece la convergencia de la aproximación de la solución del método FEM.[2]

La aproximación a través del proceso de discretización por el método de elemento finito tiene tres componentes:

- **Triangulación:** Partición del dominio en triángulos. A medida que los triángulos sean más pequeños mejor será la aproximación y define la geometría de los elementos [Sección 2.9].
- **Base de Funciones de peso:** Es el espacio vectorial de polinomios de grado  $P$  definidos por tramos. La solución será expresada como una combinación lineal de las funciones de base (Ahora las incógnitas del problema son los coeficientes de la combinación lineal)[Sección 2.8].
- **Forma Cuadrática:** Implica la ecuación diferencial [Secciones 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7].

Véase la siguiente figura (2.1).

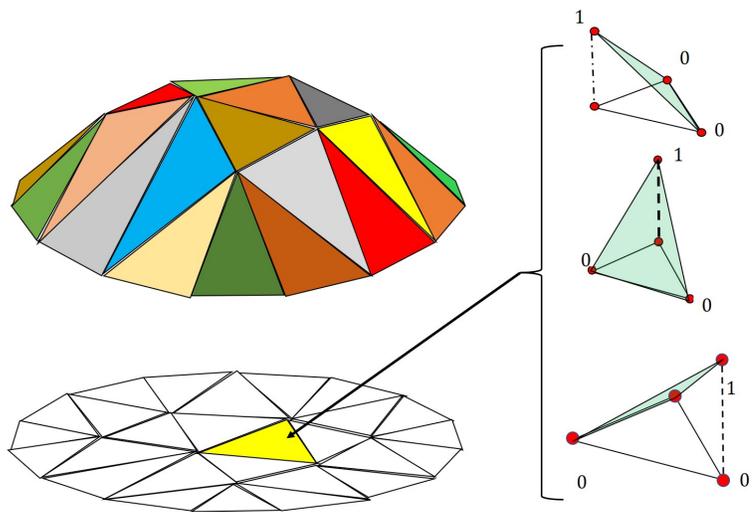


Figura 2.1: Partición que aproxima una circunferencia

## 2.2. Generalidades del Método de Elemento finito

Sea la siguiente ecuación diferencial parcial lineal con condiciones de frontera Dirichlet homogénea planteada en un dominio  $\Omega$ .

$$Lu = f \quad (2.1)$$

La solución está definida en un espacio vectorial de funciones de dimensión infinita. Para comenzar con el planteamiento de FEM se multiplica en ambos lados de la ecuación diferencial parcial por una función de peso y se integra en el dominio:

$$\int_{\Omega} (Lu)w dx = \int_{\Omega} f w dx \quad (2.2)$$

Integrando por partes el lado izquierdo <sup>1</sup>

$$D\langle u, w \rangle + A\langle u, w \rangle = \int_{\Omega} f w dx \quad (2.3)$$

Donde A esta constituida por una integral sobre el dominio y D por una integral sobre la frontera del dominio. Se le llamará Forma Cuadrática al término  $A\langle u, w \rangle$  y términos de frontera a  $D\langle u, w \rangle$ .

La condición de frontera Dirichlet homogénea fuerza a que  $w = 0$  sobre la frontera del dominio. Eso hace que los términos de frontera sean cero ( $D\langle u, w \rangle = 0$ ). Por lo tanto solamente nos queda la forma cuadrática ( $A\langle u, w \rangle$ ).

$$A\langle u, w \rangle = \int_{\Omega} f w dx \quad (2.4)$$

Si la condición de frontera no es Dirichlet homogénea, entonces D no es cero ( $D\langle u, w \rangle \neq 0$ ).

---

<sup>1</sup>  $\int_{\Omega} w du = \int_{\Omega} d(wu) - \int_{\Omega} u dw = \int_{\partial\Omega} (wu) \bullet n - \int_{\Omega} u dw = D\langle u, w \rangle + A\langle u, w \rangle$

Se introduce la aproximación de la solución. Se tiene un espacio de funciones polinomiales continuas por tramos, la dimensión de este espacio es finita ( $N$ ). La solución se expresa como una combinación lineal de la base

$$u \approx \bar{u} = \sum_i^P c_i \bar{w}_i \quad (2.5)$$

Sustituyendo en (ec.2.4) obtenemos la siguiente expresión

$$A \langle \sum_i^P c_i \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = \int_{\Omega} f \bar{w}_j \quad (2.6)$$

Aprovechando las propiedades de linealidad de la forma cuadrática, las cuales se heredan de la EDP lineal.

$$\sum_i^P c_i A \langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = \int_{\Omega} f \bar{w}_j dx \quad (2.7)$$

Y así se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, donde  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, N$ .

## 2.3. FEM Aplicado a EDP Helmholtz

Siguiendo el procedimiento escrito en la sección anterior para la EDP de Helmholtz:

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0 \quad (2.8)$$

Pesando e integrando:

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u - k^2 u) w dx = 0 \quad (2.9)$$

Integrando por partes (sustituyendo en la ecuación 2.2):

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w dx - k^2 \int_{\Omega} u w dx - \int_{\partial\Omega} w \nabla u dx = 0 \quad (2.10)$$

Finalmente obtenemos el principio variacional general:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w dx - k^2 \int_{\Omega} u w dx = \int_{\partial\Omega} (w \nabla u) \bullet n dx \quad (2.11)$$

Este principio variacional general se especificará para los siguientes 4 casos:

- Elementos Finitos Interiores.
- Elementos Finitos de Frontera Dirichlet.
- Elementos Finitos de Frontera Neumann.
- Elementos Finitos de Frontera Robin.

## 2.4. Elementos Finitos Interiores

Estos elementos son todos aquellos que se encuentran dentro de nuestro dominio y ninguno de sus vértices toca la frontera exterior.

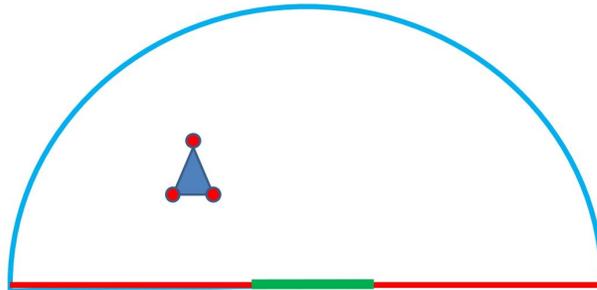


Figura 2.2: Elementos Finitos Interiores

Puesto que las funciones de peso se extienden con cero hasta la frontera  $w(\partial\Omega) = 0$ , esto hace que el lado derecho de la ec.2.11 sea cero. Entonces queda el siguiente principio variacional:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} u w = 0 \quad (2.12)$$

Introduciendo el espacio de funciones polinomiales continuas por tramos, la aproximación de la solución es:

$$u \approx \hat{u} = \sum_i^N U_i \hat{w}_i \quad (2.13)$$

Resultando la siguiente contribución de los elementos finitos interiores al sistema de ecuaciones:

$$\sum_i^N U_i \left( \int_{\Omega} \nabla \hat{w}_i \cdot \nabla \hat{w}_j - k^2 \int_{\Omega} \hat{w}_i \hat{w}_j \right) = 0 \quad (2.14)$$

## 2.5. Elementos Finitos de Frontera Dirichlet

Para comenzar con los elementos finitos dentro de la frontera Dirichlet se necesita un proceso de transformación de una Ecuación Diferencial Parcial con condiciones de frontera no homogéneas a una Ecuación Diferencial Parcial equivalente, pero con condiciones de frontera homogéneas. Para esto recordemos nuestro problema inicial  $Lv = f$  en  $\Omega$  con condiciones de frontera no homogéneas  $v(\partial\Omega) = g$ . Construiremos una función Ad-hoc  $U_0$  que cumpla las condiciones de frontera no homogéneas  $U_0(\partial\Omega) = g$  donde  $U_0(\Omega)$  es libre (no satisface la ecuación diferencial).

Debemos "descontar" la función  $U_0$  de la solución  $v$ .

Considerese que:  $v(\partial\Omega) = g$

Transformando la ecuación diferencial se obtiene:

$$Lv = f \Rightarrow L(u + U_0) = f \Rightarrow Lu = f - LU_0$$

y transformando las condiciones de frontera Dirichlet:

$$v(\partial\Omega) = g \Rightarrow u(\partial\Omega) + U_0(\partial\Omega) = g \Rightarrow u(\partial\Omega) + g = g \Rightarrow u(\partial\Omega) = 0$$

Considérese los elementos que tienen uno o dos vértices sobre la condición de frontera tipo Dirichlet

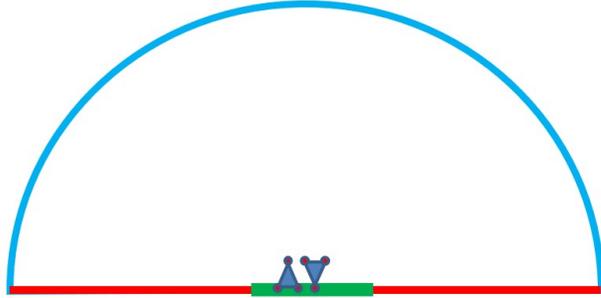


Figura 2.3: Elementos Finitos sobre Frontera Dirichlet

Para construir la función ad-hoc que cumpla con las condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas se tiene en particular dos casos donde los vértices de los elementos tocan la frontera como lo muestra la figura 2.4.

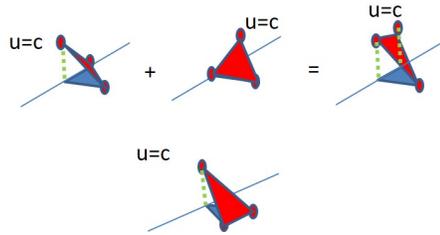


Figura 2.4: Función  $U_0$  para los elementos en Frontera Dirichlet

En la figura 2.4 se muestra el resultado de la construcción de la función ad-hoc  $U_0$  que satisfacen las condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas  $U(\partial\Omega) = c = 1$ .

Particularizando el principio variacional general 2.11 se tiene:

$$\int_{\Omega} \nabla(u + U_0) \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} (u + U_0)w = \int_{\partial\Omega} (w \nabla(u + U_0)) \bullet n \quad (2.15)$$

En el problema transformado con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas se tiene que  $w(\partial\Omega) = 0$ . Entonces el lado derecho de la ecuación 2.15 se anula y se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla(u + U_0) \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} (u + U_0)w = 0$$

Desarrollamos para despejar la función  $U_0$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} uw = - \int_{\Omega} \nabla U_0 \bullet \nabla w + k^2 \int_{\Omega} U_0 w \quad (2.16)$$

Puesto que la función  $U_0$  se construyó con la base del espacio vectorial de funciones polinomiales de grado  $P$  continua por tramos, la función  $U_0$  se puede expresar como:

$$U_0 = \sum_k (\hat{U}_0)_k \hat{w}_k$$

Resultando en la siguiente contribución de los elementos finitos tangentes a la frontera Dirichlet al sistema de ecuaciones:

$$\sum_i U_i \left( \int_{\Omega} \nabla \hat{w}_i \bullet \nabla \hat{w}_j - k^2 \int_{\Omega} \hat{w}_i \hat{w}_j \right) = - \sum_k (\hat{U}_0)_k \left( \int_{\Omega} \nabla \hat{w}_k \bullet \nabla \hat{w}_j - k^2 \int_{\Omega} \hat{w}_k \hat{w}_j \right)$$

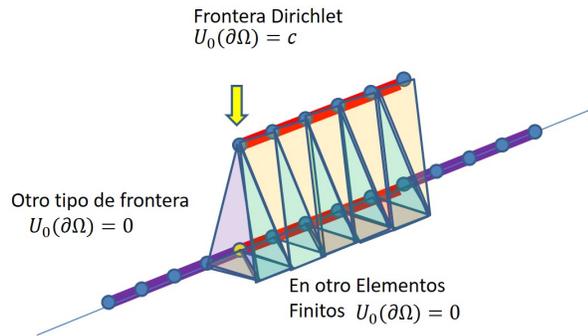


Figura 2.5: Elementos en Frontera Dirichlet No Homogéneo

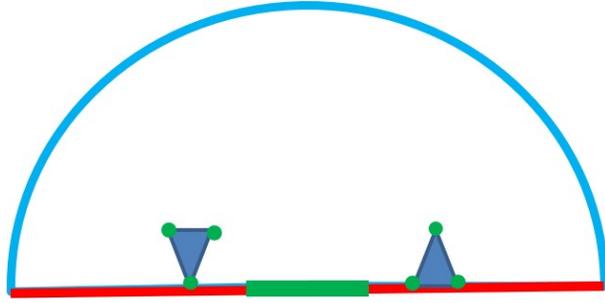


Figura 2.6: Elementos en Frontera Neumann

## 2.6. Elementos Finitos de Frontera Neumann

Recordando la CF tipo Neumann  $\tau_N : \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , esta condición de frontera es homogénea y a diferencia de la CF Dirichlet, en Neumann sí hay incógnitas en frontera por lo tanto  $w(\partial\Omega) \neq 0$ . Tomando en cuenta las condiciones de frontera  $\nabla u \bullet n = 0$  observamos que el lado derecho del principio variacional general 2.11 se hace cero y nos queda:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} uw = 0 \quad (2.17)$$

Introduciendo el espacio de funciones polinomiales continuas por tramos, resulta la siguiente contribución de los elementos finitos Neumann al sistema de ecuaciones:

$$\sum_i^N U_i \left( \int_{\Omega} \nabla \hat{w}_i \bullet \nabla \hat{w}_j - k^2 \int_{\Omega} \hat{w}_i \hat{w}_j \right) = 0 \quad (2.18)$$

## 2.7. Elementos Finitos de Frontera Robin

Observamos que la CF tipo Robin es  $\tau_R : \frac{\partial u}{\partial n} + iku = 0$ , al igual que Neumann, Robin tiene incógnitas en frontera, eso implica que  $w(\partial\Omega) \neq 0$ .

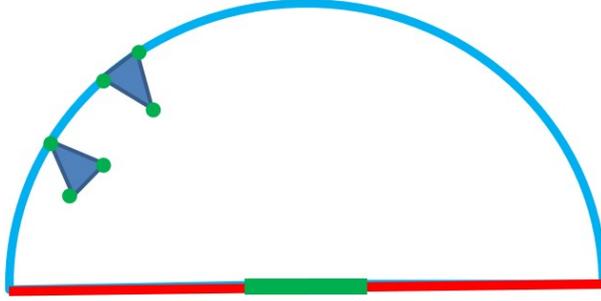


Figura 2.7: Elementos en Frontera Robin

Despejando la CF tipo Robin  $\tau_R : \frac{\partial u}{\partial n} + iku = 0 \Rightarrow \nabla u \bullet n = -iku$ .

Sustituimos en el principio variacional general (eq.2.11) y el resultado es:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} uw = \int_{\partial\Omega} w(-iku)$$

Dejaremos todo de lado izquierdo

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} uw + ik \int_{\partial\Omega} uw = 0 \quad (2.19)$$

Vemos en la ecuación 2.19, los términos  $ik \int_{\partial\Omega} uw$  es la **integral de frontera** y los otros  $\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} uw$  son **las integrales en interiores**, ambos términos conteniendo incógnitas.

Introduciendo el espacio de funciones polinomiales continuas por tramos, resulta la siguiente contribución de los elementos finitos Robin al sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^N U_i \left( \int_{\Omega} \nabla \hat{w}_i \bullet \nabla \hat{w}_j - k^2 \int_{\Omega} \hat{w}_i \hat{w}_j + ik \int_{\partial\Omega} \hat{w}_i \hat{w}_j \right) = 0 \quad (2.20)$$

## 2.8. Base Local de Funciones de Peso

Se requiere construir el espacio vectorial de funciones polinomiales de grado "P" continuas por tramos. Para tal efecto primero se construye una base local de las funciones de peso definida en cada elemento finito.

Una vez construida la base local, se construye la base global imponiendo condiciones de continuidad. Esto es, se combinan las diferentes bases locales de forma adecuada para formar una base global continua, construida por funciones Chapeau ("Funciones Sombrero").

Ver la figura 2.8.

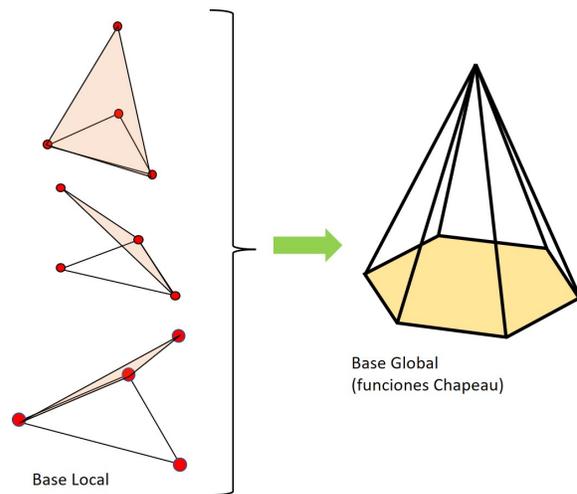


Figura 2.8: Funciones Sombrero

A continuación se describirá la metodología usada para la construcción de la base de funciones de peso en este trabajo, la cual se basa en los siguientes criterios:

1. Elegir el tipo (geometría) de elementos con los cuales se particionará el dominio del problema, en este trabajo serán triángulos.
2. Una vez asignado el tipo de elemento a utilizar, se tiene que determinar el número de nodos que van a formar cada elemento; en este caso el

número de nodos es 3 por el tipo de función de peso que son funciones lineales o polinomios de primer grado.

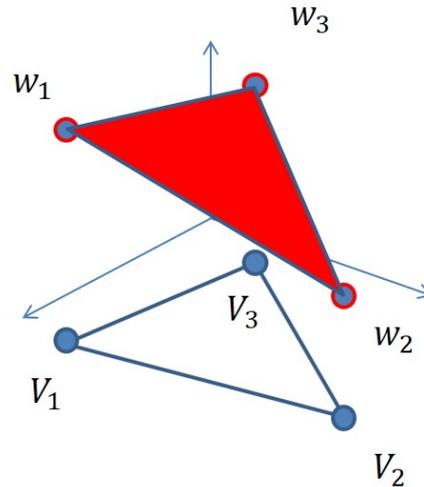


Figura 2.9: Elemento triangular de 3 nodos para funciones polinomiales de grado 1.

En la fig. 2.9 cada  $V_i(x_i, y_i)$  es un punto en el plano  $W$  y las  $w_i$  son los valores asignados a cada  $V_i$ , en otras palabras  $W(V_i) = w_i$ . El plano  $W$  también recibe el nombre de función de interpolación.

3. No existe una función de interpolación única, en este trabajo se utiliza una **base local de funciones de peso de tipo Lagrange**:

$$W(x, y) = ax + by + c \quad (2.21)$$

Donde  $x_i, y_i$  representan las coordenadas de cada uno de los nodos  $V_i$  que forman el elemento y los coeficientes  $a, b$  y  $c$  se determinan convenientemente.

### 2.8.1. Base Local de Tipo Lagrange

Para definir los 3 polinomios de Lagrange  $W_i$  que conforman la base local de las funciones de peso de polinomios de grado 1, en cada elemento triangular

se define la función:  $W_i(V_j) = \delta_{ij}$  es decir  $W_i(V_j) = 1$  si  $i = j$  o  $W_i(V_j) = 0$  en otro caso. Como se muestra en la figura 2.10:

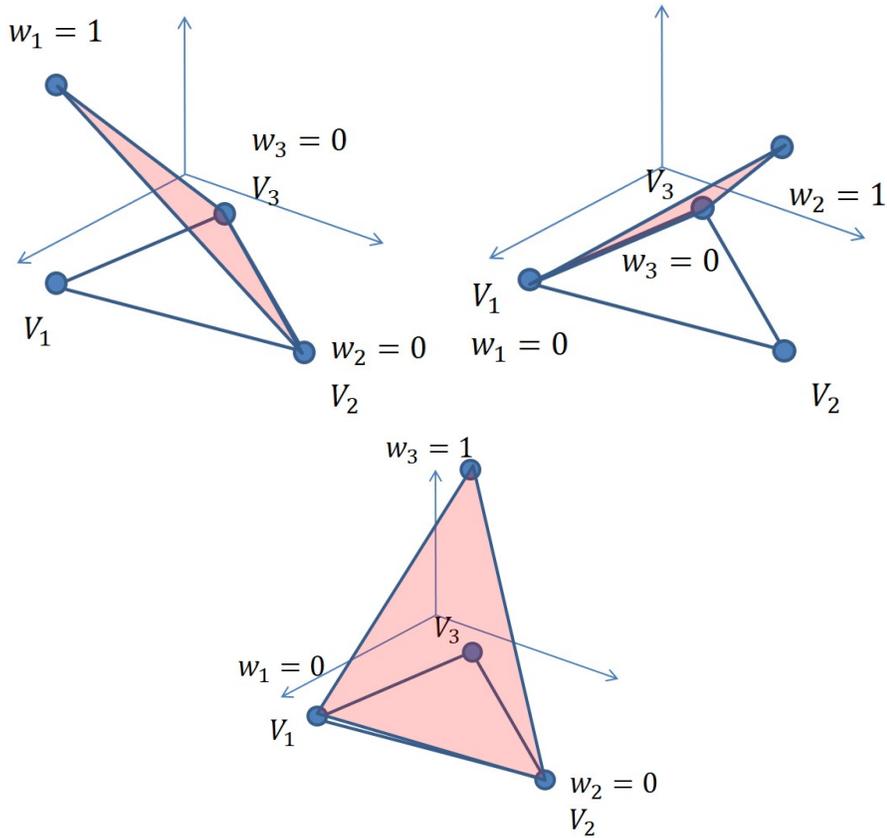


Figura 2.10: Base Local de Funciones de Peso en cada Elemento Finito

El sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes  $a, b$  y  $c$  de cada polinomio de Lagrange es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.9. Triangulación

GMSH es una herramienta que nos ayuda a generar mallas bidimensionales y tridimensionales automáticamente dependiendo de las especificaciones que el usuario proporciona al programa. Es un programa de descripción, visualización y discretización de geometrías. Tiene la gran ventaja de ser un software de código abierto, por lo cual se pueden modificar para ajustar las características dependiendo el problema. Otra gran ventaja es que permite visualizar el mallado realizado a los problemas y exportar las coordenadas de los elementos.

GMSH fue echo como un software académico, pero actualmente sirve fuera del entorno académico. El software es libre y esta escrito en lenguaje C++ y es multiplataforma.

Dicho lo anterior, discretizamos nuestro problema en la siguiente malla para ayudarnos a entender cada elemento y hacerla parte de nuestro desarrollo de los programas.

GMSH regresa dos tablas, donde explica la geometría del problema:

- Tabla que describe las coordenadas de todos los puntos.
- Tabla que describe los vertices de todos los elementos.

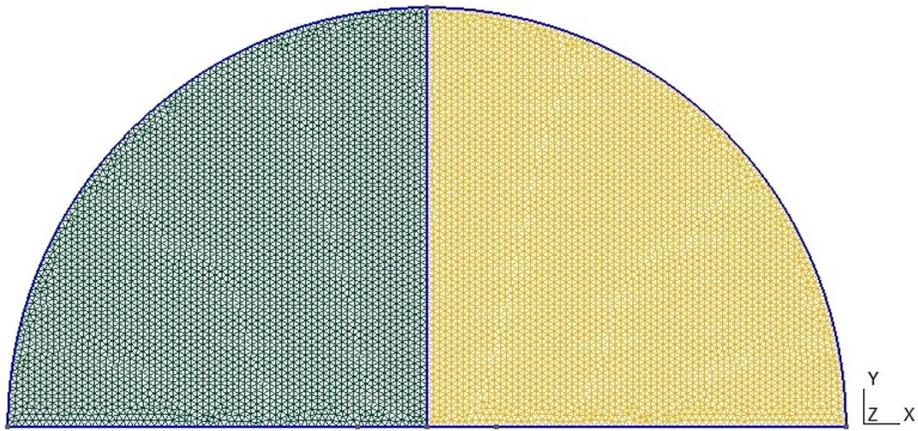


Figura 2.11: Mallado de nuestro dominio



# Capítulo 3

## Modelación Computacional

### 3.1. Programación Secuencial

El programa secuencial consta de 5 módulos. Ver figura 3.1:

#### 3.1.1. Geometria

Se genera una tabla de Geometría tomando como base la tabla de Geometría proporcionada por el software GMSH y enriqueciéndola con otros campos de información. Los campos de la tabla son:

- id, Campo de Identificador: Identificador del nodo, numeración de nodos.
- coor, Campo de Coordenadas: Coordenadas  $(x, y)$  del nodo.
- f, Campo de Frontera: Identifica si el campo esta en frontera o no.
- tf, Campo Tipo de Frontera: El nodo está sobre cf.Dirichlet, cf. Neumann, cf. Robin o esta en el interior.
- gl, Campo Grado de Libertad: El nodo tiene asociado una incógnita o no, numeración de grados de libertad, tabla de mapeos local-global.

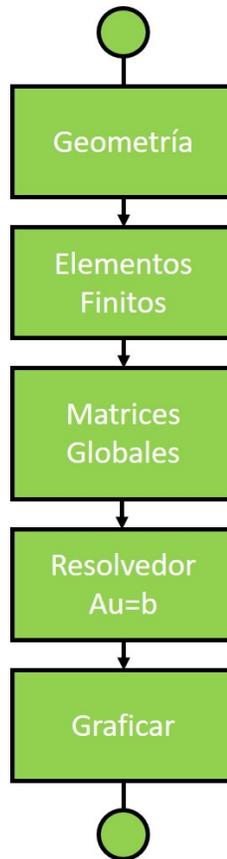


Figura 3.1: Diagrama de los Módulos

- val, Campo Valor: Valor de la aproximación de la solución o bien el valor el valor de la condición de frontera Dirichlet.

### 3.1.2. Elementos Finitos

Se genera una tabla de Elementos tomando como base la tabla de Elementos proporcionada por GMSH y enriqueciéndola con otros campos de información. Los campos de la tabla de Elementos son:

- id, Campo Identificador: Identificador del elemento, numeración de elementos.

- ext, Campo de Extremos: Identificadores de los nodos de los vertices del elemento.
- gl, Campo de Grado de Libertad: Grados de libertad asociados a los nodos de los vértices del elemento.
- coefW, Campo Coeficientes: Coeficientes  $(a, b, c)$  de cada una de las 3 funciones de peso de la base local del elemento.
- centroide, Campo Centroide: Coordenadas del centroide del elemento.
- area, Campo Área: Área del elemento.
- matrizL, Campo Matriz Local: Forma cuadrática específica a la condición de frontera o al interior del elemento valuada en las funciones de peso de la base local.
- vectorL, Campo Vector Local: Otras contribuciones al sistema de ecuaciones valuada en las funciones de peso de la base local.

### 3.1.3. Matrices Globales

Se construyó la matriz global  $A$  y el vector de términos independientes  $b$  del sistema de ecuaciones a resolver:

$$Au = b$$

Se utilizan matrices dispersas (matlab:matrices tipo "sparse")

La matriz global se construye acumulando las matrices locales en los renglones y columnas globales descritos por la tabla de mapeos de grados de libertad.

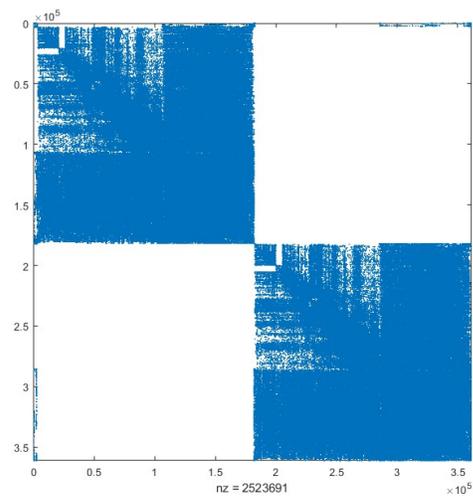


Figura 3.2: Matriz Dispersa de  $30KH_z$

### 3.1.4. Resolvedor BiCGstab

El pseudocódigo[22] del resolvedor Gradiente Biconjugado estabilizado es el siguiente:

function  $x = \text{BiCGstab}(A, b, x_0)$

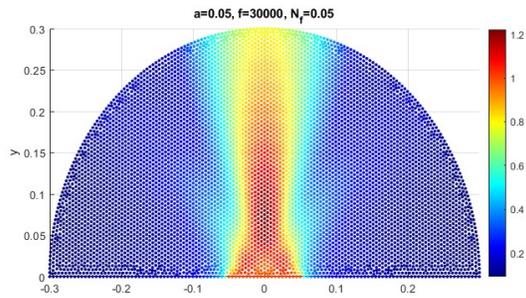
1.  $r_0 = b - A(x_0)$  y  $r_0$  arbitrario
2.  $p_0 = r_0$
3. For  $j = 0, 1, \dots$  hasta converger
4.  $p_j^A = A(p_j)$
5.  $\alpha_j = (r_j, r_0^*) / (p_j^A, r_0^*)$
6.  $s_j = r_j - \alpha_j p_j^A$
7.  $s_j^A = A(s_j)$
8.  $\omega_j = (s_j^A, s_j) / (s_j^A, s_j^A)$
9.  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$
10.  $r_{j+1} = s_j - \omega_j s_j^A$
11.  $\beta_j = \left(\frac{\alpha_j}{\omega_j}\right) (r_{j+1}, r_0^*) / (r_j, r_0^*)$
12.  $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j p_j^A)$
13. EndDo.

Este algoritmo resuelve el sistema global del problema planteado en este trabajo.

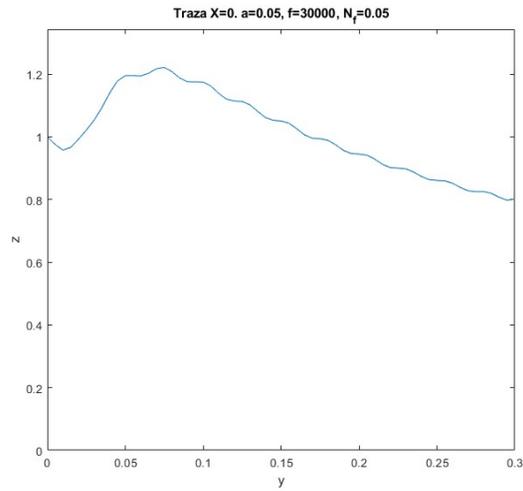
### 3.1.5. Graficación

Se generan 3 tipos de gráficas:

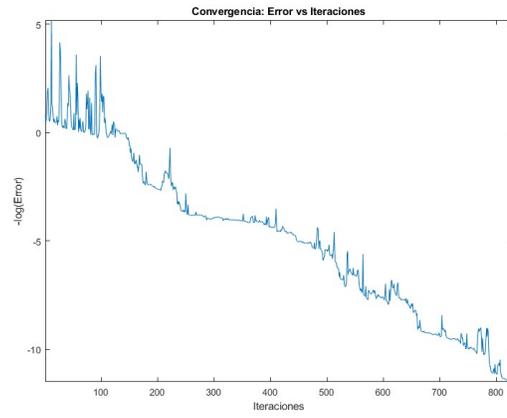
1. La gráfica de la solución del problema:



2. La gráfica de la traza:



3. La gráfica de la convergencia:



## 3.2. Programa en Paralelo

Con la versión en paralelo se programó de una manera un poco diferente, desde el tratamiento del archivo generado por GMSH, hasta la manera de resolver el problema. Para esta parte debemos entender lo que significa el complemento de Schur

### 3.2.1. Complemento de Schur

Generamos archivos de la geometría en GMSH de la partición del dominio en  $N$  partes, donde  $N = 2, 3, \dots, 9$ , a cada parte se le denominará subdominio. Primero se tendrá el dominio con la frontera exterior. Después se establecen los  $N$  subdominios, donde cada uno de ellos tiene su propia frontera. La diferencia de la unión de estas fronteras de los subdominios menos la frontera exterior es la frontera interior. Cada subdominio tiene su propia tabla de geometría, su propia tabla de elementos finitos y matrices de subdominio. La idea general es que se resuelve la ecuación diferencial parcial en los nodos de la frontera interior y se logra partir el problema global en  $N$  problemas locales bien planteados independientes, que se resolverán en paralelo.

Por lo tanto, se generan varias listas de grados de libertad, la primera que es la lista de grados de libertad sobre la frontera interior, se debe resolver primero para tener las condiciones de frontera de los problemas locales. También una lista para cada subdominio con los grados de libertad en el interior del subdominio, los cuales serán los problemas locales, se deben resolver después del primero pero en paralelo.

Después de tener las listas de los grados para cada subdominio se debe de reordenar la matriz global de una manera distinta, como se muestra en la imagen (3.3).

La reordenación de la matriz provoca una reordenación al sistema de ecuaciones, se considera la misma reordenación en el vector de incógnitas  $u$  y el vector de términos independientes  $b$ .

Habrán 4 tipos de matrices:

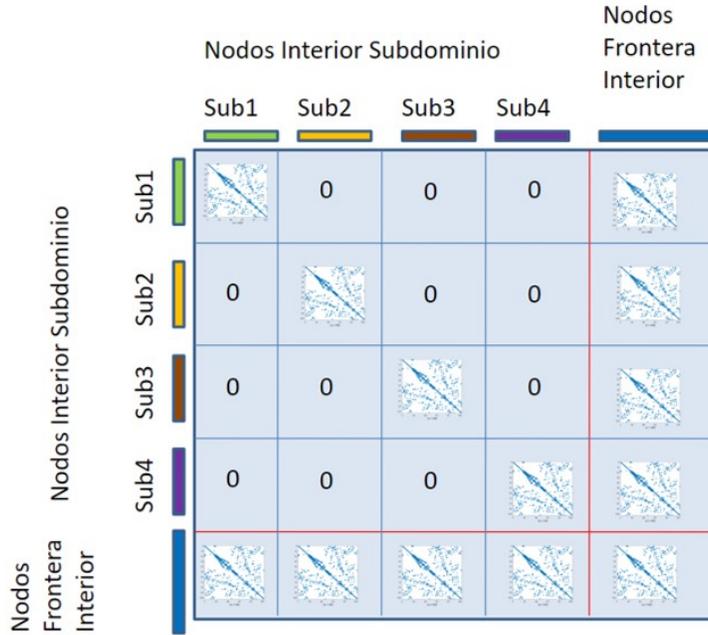


Figura 3.3: Matriz Global reordenada por subdominios

- $A_{II}^{(i)}$ : Matrices de grados de libertad interior relacionados con grados de libertad interior del subdominio  $i$ -ésimo.
- $A_{IF}^{(i)}$ : Matrices de grados de libertad interior relacionados con grados de libertad de frontera interior del subdominio  $i$ -ésimo.
- $A_{FI}^{(i)}$ : Matrices de grados de libertad de frontera interior relacionados con grados de libertad interior  $i$ -ésima.
- $A_{FF}$ : Matrices de grados de libertad de frontera interior relacionados con grados de libertad de frontera interior.

La matriz global estará conformada por las matrices de subdominio descritas anteriormente. En la figura 3.4 se muestra una “matriz típica” de elemento finito reordenada por subdominios. Las matrices de grados de libertad interior de un subdominio relacionadas con grados de libertad interior de otro subdominio diferente son cero, porque las funciones base y de peso  $w$  que

pertenecen a diferentes subdominios no se traslapan y por lo tanto su forma cuadrática es cero (las matrices cero arriba y abajo de la diagonal principal).

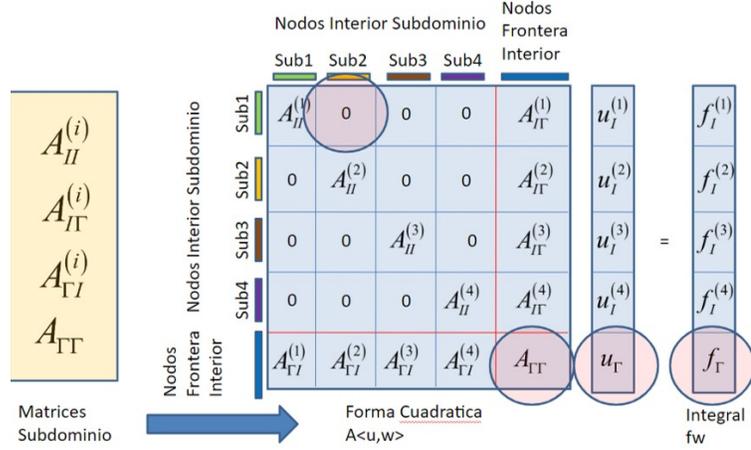


Figura 3.4: Matriz Global Típica de FEM

Se pasa de la forma matricial a la de ecuaciones y nos quedan dos conjuntos de ecuaciones:

- Ecuación Matricial para cada Subdominio, donde  $i = 1, \dots, E$

$$A_{II}^{(i)}u_I^{(i)} + A_{I\Gamma}^{(i)}u_\Gamma = f_I^{(i)} \quad (3.1)$$

- Ecuación matricial para la frontera interior

$$\sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)}u_I^{(i)} + A_{\Gamma\Gamma}u_\Gamma = f_\Gamma \quad (3.2)$$

Despejando de la ecuación 3.1  $u_I^{(i)}$  se obtiene el llamado Operador de Proyección:

$$u_I^{(i)} = (A_{II}^{(i)})^{(-1)}(f_I^{(i)} - A_{I\Gamma}^{(i)}u_\Gamma) \quad (3.3)$$

Ahora sustituiremos la ecuación 3.3 en la ecuación 3.2 y nos queda el sistema de ecuaciones de Schur:

$$(A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} A_{II}^{(i)}) u_{\Gamma} = f_{\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} f_I^{(i)} \quad (3.4)$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación 3.4 es la matriz de Schur y de lado derecho es el vector de términos independientes de Schur. Dicho sistema de ecuaciones solamente resuelve las incógnitas asociadas a los nodos de frontera interior  $u_{\gamma}$ .

Resumiendo esto queda en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S u_{\Gamma} = f_s \quad (3.5)$$

$$S = A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} A_{II}^{(i)} \quad (3.6)$$

$$f_s = f_{\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} f_I^{(i)} \quad (3.7)$$

El sistema de ecuaciones 3.5 se resuelve con gradiente biconjugado estabilizado. La línea 1 del pseudocódigo cambia a:

$$1. - r_0 = f_{\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} f_I^{(i)}$$

La línea 4 del pseudocódigo queda como:

$$4. - p_j^A = S(p_j) = A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^E (A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} A_{II}^{(i)})(p_j)$$

Y la línea 7 quedaría:

$$7. - s_j^A = S(s_j) = A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^E (A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} A_{I\Gamma}^{(i)}) (s_j)$$

La línea 1, 4 y 7 del pseudocódigo de BiCGstab se paralelizan utilizando el modelo Fork-Join para memoria compartida (Shared Memory):

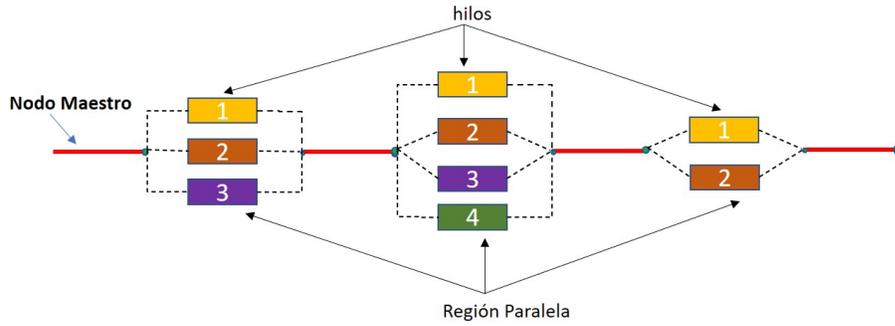


Figura 3.5: Diagrama Fork-Join

Cada sumando de las sumatorias será calculado en uno de los hilos bifurcados. A manera de ejemplo en la figura 3.6 se ilustra la paralelización de la línea 4. Las líneas 1 y 7 se paralelizan de igual manera.

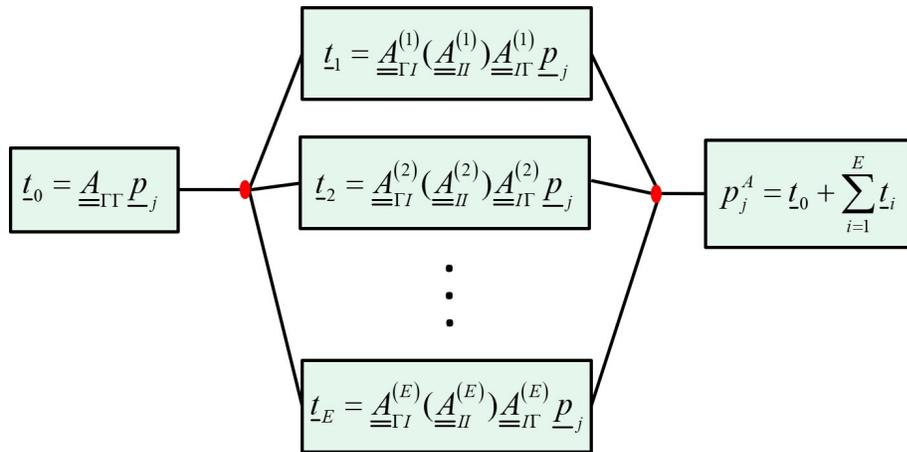


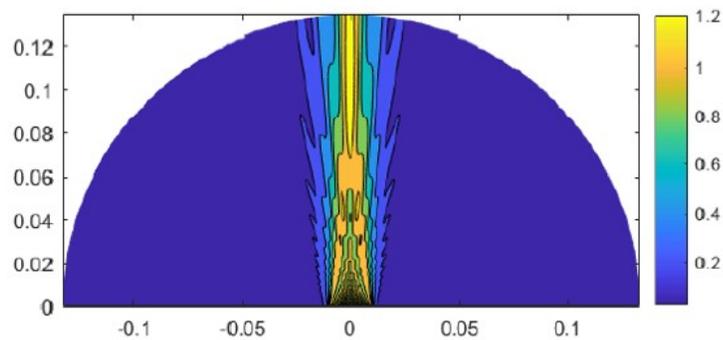
Figura 3.6: Diagrama Fork-Join Implementado

# Capítulo 4

## Pruebas de Desempeño

### 4.1. Solución de Referencia

Puesto que no se dispone de una solución analítica al problema se utilizará los resultados del trabajo *Isogeometric simulation of acoustic radiation* [1], escrito por Eduardo Moreno y et al. Los resultados aquí obtenidos se compararán con los de dicho trabajo para verificación. Ver figuras 4.1.



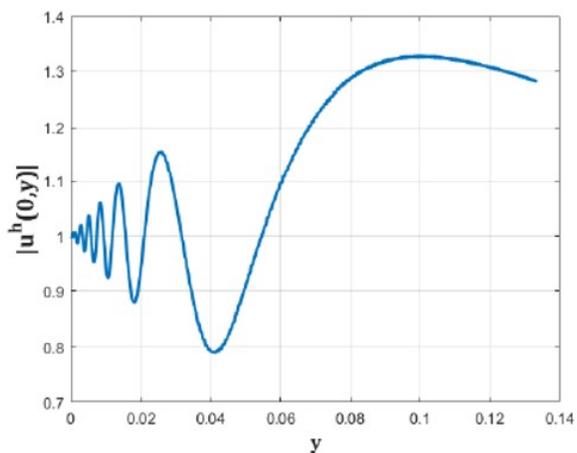


Figura 4.1: Resultados obtenidos en [1] para  $F = 1MHz$ .

## 4.2. Casos de estudio Programación Serial

Los casos de estudios corresponden a la problemática desarrollada en este trabajo. Cada uno de los casos tiene una frecuencia de transductor y un tamaño de malla distintos. Véase la tabla 4.1.

| Problema | Frecuencia del Transductor | Tamaño de Elemento | Número de Incógnitas | Número de condicionamiento de la matriz | Iteraciones |
|----------|----------------------------|--------------------|----------------------|---|-------------|
| 1        | $f = 30kHz$                | $h = \lambda/10$   | 6765                 | 3033                                    | 830         |
| 2        | $f = 1MHz$                 | $h = \lambda/5$    | 361183               | 52779                                   | 4215        |
| 3        | $f = 1MHz$                 | $h = \lambda/10$   | 1438000              | No se Dispone                           | 10790       |

Cuadro 4.1: Problemas Desarrollados

### 4.2.1. Problema 1

El primer caso de estudio fue el Problema de Aplicación Simplificado, donde se describe el radio del transductor en  $a = 0,05m$ , la velocidad del sonido en agua  $v = 1500m/s$ , con una frecuencia del transductor  $f = 30,000Hz = 30kHz$  y los cálculos de la longitud de onda que depende de la velocidad del sonido entre la frecuencia del transductor  $\lambda = v/f = 0,05m$ , el foco está calculado por  $N_f = a^2/\lambda = 0,05m$ , el radio de la semicircunferencia a modelar  $R = 0,3m$  y con un tamaño del elemento finito en  $h = \lambda/10 = 0,005m$ .

Este primer caso fue esencial en el desarrollo del trabajo, porque con dicho problema se fue desarrollando los algoritmos y dando ideas para la programación, este problema no representa ninguna dificultad computacional al resolverlo, pero no se acerca a la realidad, dado que el tamaño del transductor es de  $5cm$ , es demasiado grande para un transductor real. Al principio se consideró una semicircunferencia de radio  $1m$ , pero lo que importa observar es el campo cercano que se da cerca del foco, por eso es que el radio del dominio se bajó a  $0,3m$  para observar dicho campo. Ya que el cuerpo humano tiene en el plano sagital aproximadamente  $30cm$  de longitud.

Se observa que en las figuras fig. 4.2 se tiene el foco del transductor en frente de la frontera Dirichlet sobre la traza  $x = 0$ , antes del foco es donde hay mayor cantidad de oscilaciones y se denomina campo cercano y después del foco la función se comporta suavemente y se denomina campo lejano.

En la figura 4.3 se muestra la gráfica de la convergencia del resolvidor BICGstab. El sistema de ecuaciones tiene 6765 incógnitas, la matriz del sistema tiene un número de condicionamiento de 3033, convergió en 830 iteraciones con una tolerancia de  $\rho = 10^{-5}$ .

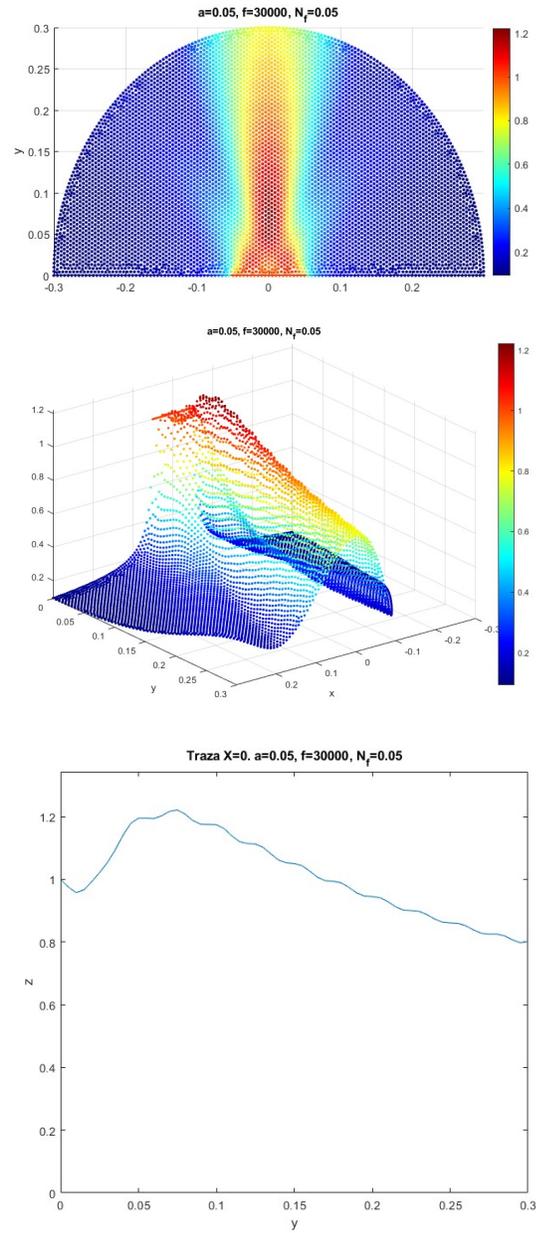


Figura 4.2: Función de Helmholtz resuelta con  $F = 30KHz$  y el algoritmo BICGstab. Con vista aérea, de lado y la traza

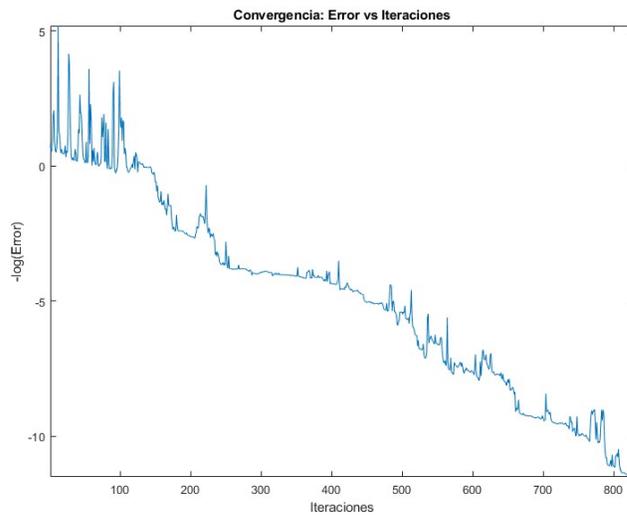


Figura 4.3: Convergencia del problema

### 4.2.2. Problema 2

El Segundo caso de estudio es el Problema de Aplicación Real, donde se describe el radio del transductor en  $a = 0,01m$ , la velocidad del sonido en agua  $v = 1500m/s$ , con una frecuencia del transductor de  $f = 1,000,000Hz = 1MHz$  y los cálculos de la longitud de onda que depende de la velocidad del sonido entre la frecuencia del transductor  $\lambda = 0,0015$ , el foco esta calculado por  $N_f = 0,06666$ , el radio de nuestra circunferencia a modelar  $R = 0,1334$  y con un tamaño del elemento finito en  $h = \lambda/5$ .

Este problema tampoco genera ninguna complicación computacional al resolverlo.

El sistema de ecuaciones tiene 361183 incógnitas, la matriz del sistema tiene un número de condicionamiento de 52779, convergió en 4215 iteraciones con una tolerancia de  $\rho = 10^{-5}$ . Véase las tablas de comparación 4.2 y 4.3.

Al comparar estos resultados obtenidos con los resultados del equipo del doctor Moreno [1], nos damos cuenta que nuestro programa los reproduce adecuadamente.

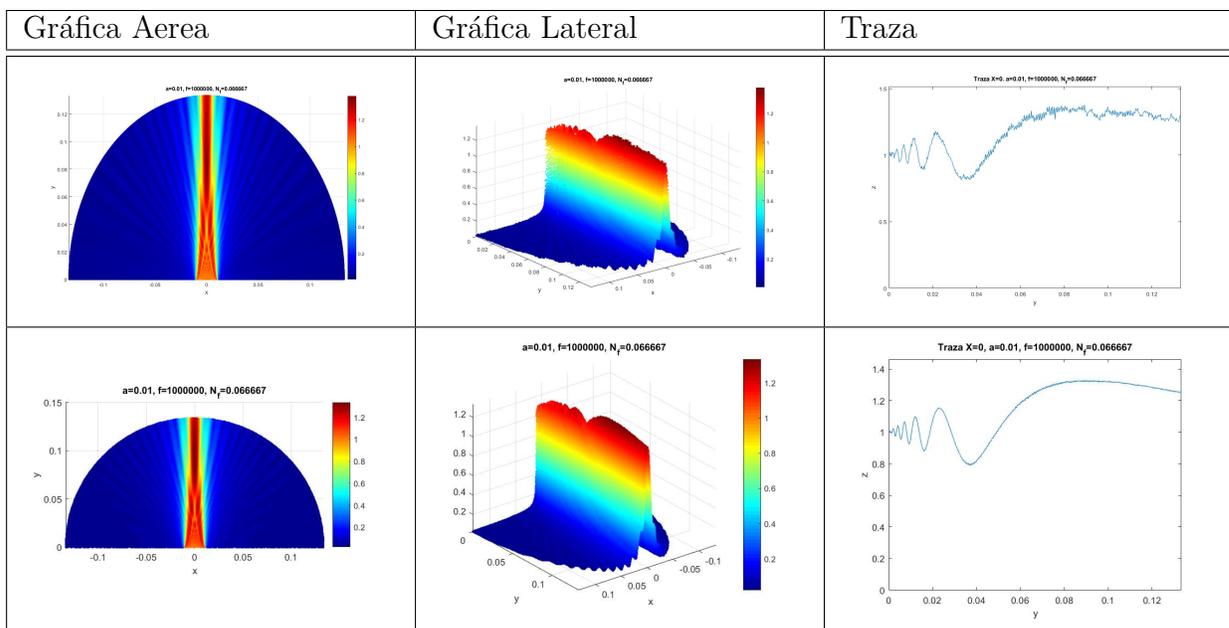
### 4.2.3. Problema 3

La única diferencia con respecto al problema 2 es que este tiene un tamaño de elemento finito  $h = \lambda/10$ .

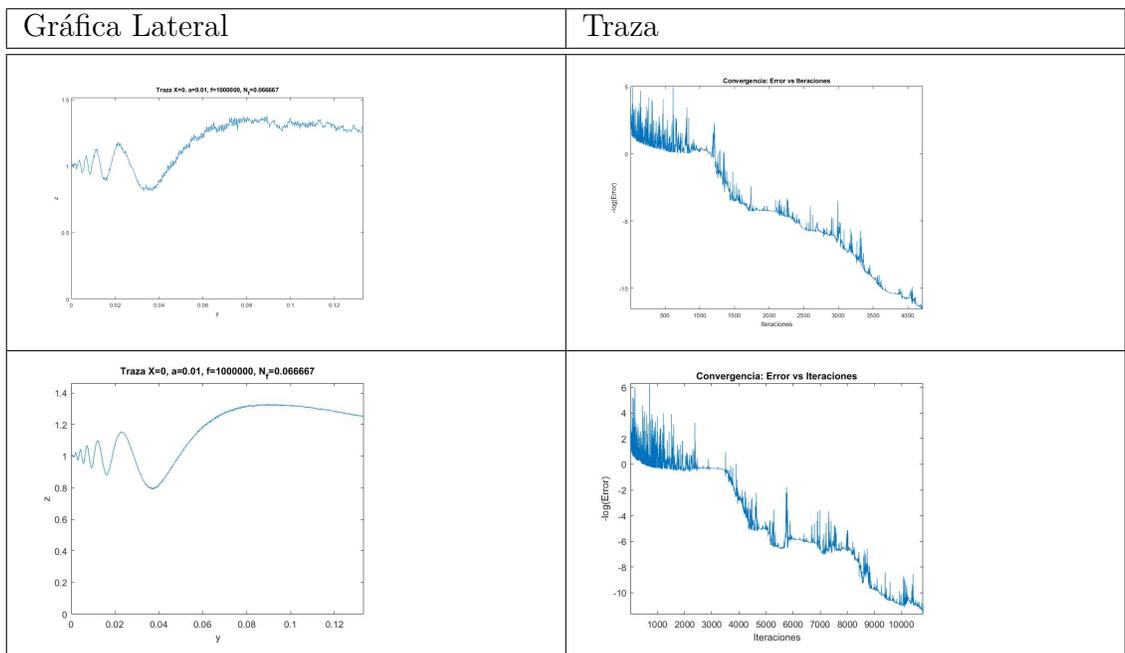
Este problema tampoco genera ninguna complicación computacional al resolverlo.

El sistema de ecuaciones tiene 1438000 incógnitas, el número de condicionamiento de la matriz no fue posible calcularlo, convergió en 10790 iteraciones con una tolerancia de  $\rho = 10^{-5}$ . Véase las tablas de comparación 4.2 y 4.3.

En las tablas de comparación 4.2 y 4.3, se observa que en la gráfica de la solución de la traza  $x = 0$  con un tamaño de elemento  $\lambda/10$  se obtiene una solución con menos oscilaciones numéricas.



Cuadro 4.2: Comparación de las gráficas del problema con frecuencia  $f = 1MHz$



Cuadro 4.3: Comparación de la traza y convergencia del problema con frecuencia  $f = 1MHz$

## 4.3. Pruebas en Paralelo

### 4.3.1. Problema 1

Ahora se analizará el primer problema ( $f=30kHz$ ) en paralelo, el dominio se particionó en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 subdominios. Realizando una ejecución por cada partición, en las tablas siguientes se visualiza las particiones del dominio trabajado, aquí es donde entran los algoritmos paralelos para calcular los valores de las fronteras interiores. Utilizando un resolvidor global BiCGstab se calcula los valores de los nodos de las fronteras interiores y utilizando un resolvidor local factorización LU se calculan los valores de los nodos en el interior de los subdominios.

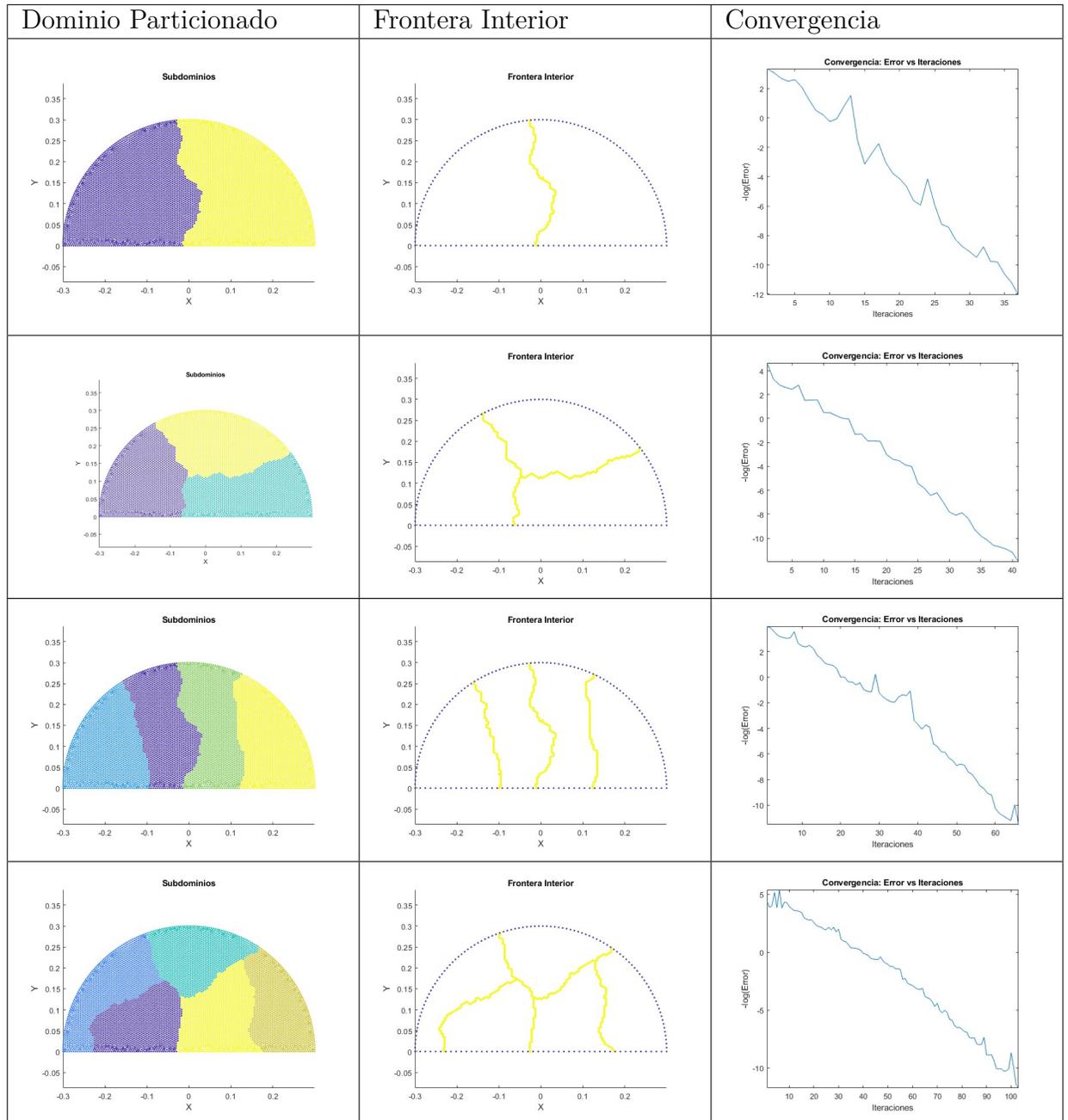
No se observaron complicaciones computacionales en ningún caso.

Analizando las gráficas de convergencia del BiCGstab se observa lo siguiente:

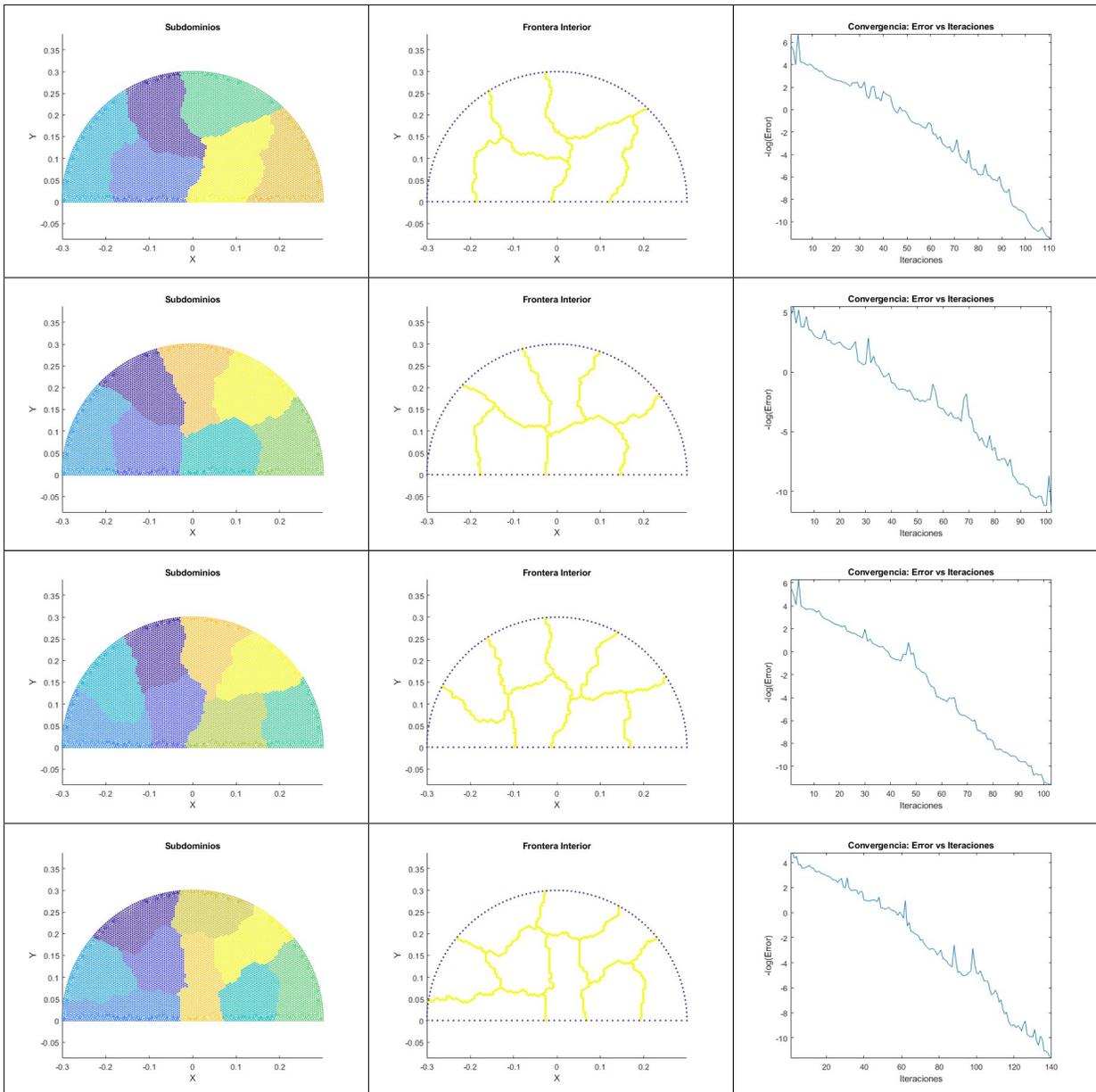
- Si hay pocos subdominios las incógnitas sobre la frontera interior son pocas, por lo que el BiCGstab converge con pocas iteraciones, sin embargo el número de incógnitas en el interior de los subdominios son muchas y se dificulta la factorización LU de la matriz  $A_{II}^{(i)}$  debido a su complejidad algorítmica  $O(n^3)$ .
- Por otro lado si hay muchos subdominios la incógnitas sobre la frontera interior son muchas, por lo que el BiCGstab converge con muchas iteraciones, sin embargo el número de incógnitas en el interior de los subdominios son pocas y se facilita la factorización LU de la matriz  $A_{II}^{(i)}$ .

Las corridas en paralelo se realizaron en una computadora con 1 procesador Intel core i7-4770 con 4 núcleos y puede utilizar hasta 8 hilos con hyper-threading.

Se realizaron 10 ejecuciones por partición, en la siguiente tabla se analizan el promedio y su desviación estándar en los tiempos de pared (wall time). Cabe mencionar que dado el poder computacional mencionado anteriormente, de las particiones de 2 a 4 existe un paralelismo real (1 hilo por



procesador físico) y de la partición 5 a 8 existe un paralelismo implementado por el hyper-threading (paralelismo por hardware de 2 hilos por procesador)



Cuadro 4.4: Pruebas de desempeño Paralelo.

y para el caso de 9 existe concurrencia (paralelismo por software de 3 o más hilos por procesador) en uno de los procesadores. Estas 3 condiciones de paralelismo afectan la eficiencia disminuyéndola. Ver fig 4.4 y tabla 4.6

| Procesadores (Subdominio) | Promedio de Tiempo de Pared | Desviación de Estandar |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 2                         | 7.1732883                   | 0.153037691            |
| 3                         | 3.7370397                   | 0.072583378            |
| 4                         | 4.2545867                   | 0.111250042            |
| 5                         | 4.1667745                   | 0.073702081            |
| 6                         | 4.1195352                   | 0.102743023            |
| 7                         | 3.1569298                   | 0.120682388            |
| 8                         | 2.6000334                   | 0.049010666            |
| 9                         | 3.2787729                   | 0.057252422            |

Cuadro 4.5: Tiempos transcurridos

| Procesadores (Subdominio) | Paquetes de Procesadores | Tiempo de Ejecución | Speedup (Amdahl) | Eficiencia | Fracción Serial |
|---------------------------|--------------------------|---------------------|------------------|------------|-----------------|
| 2                         | 1                        | 7.1732883           | 1                | 100 %      |                 |
| 4                         | 2                        | 4.2545867           | 1.69             | 84 %       | 0.19            |
| 6                         | 3                        | 4.1195352           | 1.74             | 58 %       | 0.36            |
| 8                         | 4                        | 2.6000334           | 2.76             | 69 %       | 0.15            |
|                           |                          |                     |                  | Promedio:  | 0.23            |

Cuadro 4.6: Análisis de Eficiencia

En la tabla 4.6 se muestra el Speedup (Ley de Amdahl), Eficiencia y el cálculo de la fracción serial, que es  $f_{serial} 0,23$ , por lo que el Speedup máximo alcanzable sería de  $S(p) = \frac{1}{f} = 4,35$

Donde el Speedup se calcula como:  $S(p) = \frac{t_s}{t_p}$ ,  $t_s$  es el tiempo serial y  $t_p$  es el tiempo en paralelo. La Eficiencia se calcula:  $E = \frac{S(p)}{p} \times 100 \%$ ,  $p$  es el número de procesadores. La Fracción Serial es:  $f = \frac{\frac{p}{S(p)} - 1}{p - 1}$ .

Se analizará el Speedup ideal, el Speedup obtenido de las pruebas y el

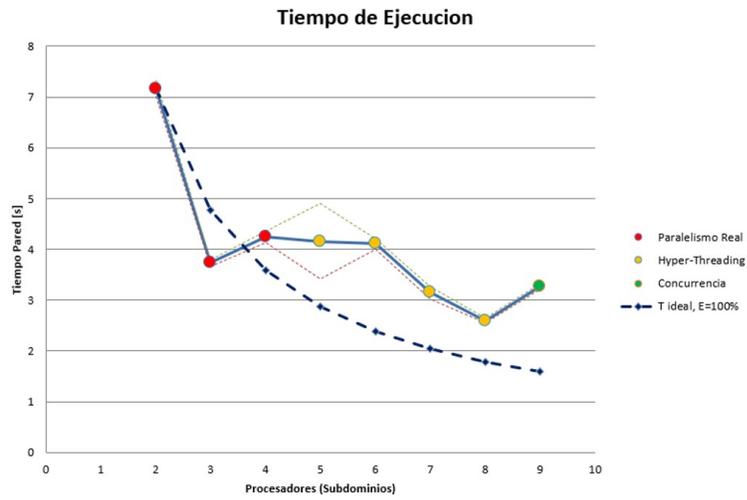


Figura 4.4: Gráfica del Análisis de Eficiencia del paralelismo

máximo Speedup que puede alcanzar nuestro algoritmo, Véase la figura 4.5.

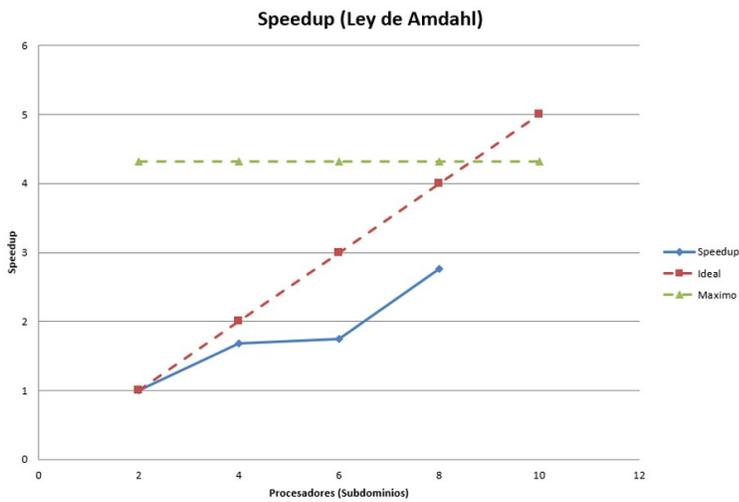


Figura 4.5: Gráfica del Análisis de Speedup

### 4.3.2. Problema 2

Al paralelizar el segundo problema  $f = 1\text{Mhz}$ ,  $h = \lambda/5$ , con aproximadamente 361000 incógnitas se presentó el problema de no poder realizar la "FactorizaciónLU" de las matrices  $A_{II}^{(i)}$ , por su complejidad algorítmica de  $O(n^3)$ . Por esta razón en lugar de realizar la **Factorización LU** local, se aplicó el resolvidor iterativo local **BiCGstab**.

Sin embargo se presentó un problema en la convergencia del resolvidor local BiCGstab debido al número de condicionamiento de las matrices  $A_{II}^{(i)}$ . Se lograron ejecuciones solamente para 2,3 y 4 subdominios. No hay convergencia para 5 a 9 subdominios. Ver la siguiente tabla

| Partición | Tiempo de cálculo |
|-----------|-------------------|
| 2         | 49.775172         |
| 3         | 58.566973         |
| 4         | 66.210256         |

Cuadro 4.7: Tiempos transcurridos local BiCGstab

Por un lado utilizar factorización LU no presenta problemas de convergencia porque es un método exacto, pero sí presenta problemas de complejidad algorítmica  $O(n^3)$ . Por otro lado, utilizar el resolvidor BiCGstab local no presenta problemas de complejidad algorítmica, pero sí presenta problemas de convergencia, debido al número de condicionamiento de las matrices.

### 4.3.3. Problema 3

Se presentaron los mismos problemas que en en **Problema 2.**, pero más agudos, ya que el sistema de ecuaciones tiene aproximadamente 1450000 incógnitas

Como trabajo futuro se utilizará un resolvidor local BiCGstab preconditionado con Factorización LU incompleta para solventar estas dificultades.

Se sabe que el mejor resolvidor preconditionado para este problema en específico es GMRES preconditionado [1] con Complex Shifted Laplacian [16] y [19]

#### 4.4. Problema $f = 20MHz$

Se estima que este problema tendrá aproximadamente un número de incógnitas de 100 millones, los cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Para hacer la estimación se considera un dominio rectangular de  $2N_f \times 4N_f$ , con elementos finitos de tamaño  $h$

| Datos                       | P.1, 30kHz                            | P.2, 1MHz                                 | P.3, 1MHz                                 | P.4 20MHz                                    |
|-----------------------------|---------------------------------------|---|---|--|
| $\lambda = \frac{v}{f}$     | $\lambda = \frac{1500}{30000} = 0,05$ | $\lambda = \frac{1500}{1000000} = 0,0015$ | $\lambda = \frac{1500}{1000000} = 0,0015$ | $\lambda = \frac{1500}{20000000} = 0,000075$ |
| $N_f = \frac{A^2}{\lambda}$ | $N_f = \frac{(0,05)^2}{0,05} = 0,05$  | $N_f = \frac{(0,01)^2}{0,0015} = 0,0666$  | $N_f = \frac{(0,01)^2}{0,0015} = 0,0666$  | $N_f = \frac{(0,002)^2}{0,000075} = 0,05333$ |
| $H = \frac{\lambda}{cte}$   | $H = \frac{0,05}{10} = 0,005$         | $H = \frac{0,0015}{5} = 0,0003$           | $H = \frac{0,0015}{10} = 0,00015$         | $H = \frac{0,000075}{5} = 0,000015$          |
| Incógnitas                  | 7200                                  | 395605                                    | 1,5 millones                              | 100 millones                                 |

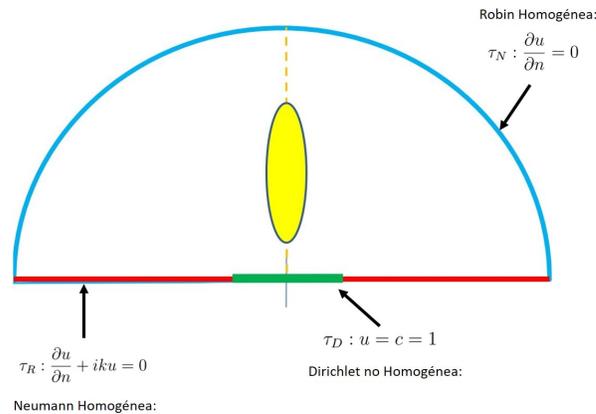
Cuadro 4.8: Total de Incógnitas de los problemas tratados



# Conclusiones

En el capítulo 1 se presenta el modelo físico matemático del problema de HIFU utilizando la ecuación de Helmholtz para determinar el campo cercano (estacionario) de radiación ultrasónica monocromática.

$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$  sujeta a condiciones de frontera Dirichlet no homogénea, Neumann homogénea y Robin homogénea.



En el capítulo 2 se presenta el modelo numérico del problema mencionado utilizando el método de discretización de elemento finito, utilizando una teselación con triángulos y una base de polinomios de grado 1 definidos por tramos continuos. Para calcular el mallado se utilizó el software GMSH. Se observa que la matriz del sistema de ecuaciones de una matriz de números complejos No Hermitiana (solamente es simétrica). Por este motivo no se puede utilizar el método iterativo de gradiente conjugado como resolvidor.

Principio variacional general:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w dx - k^2 \int_{\Omega} u w dx = \int_{\partial\Omega} (w \nabla u) \bullet n dx$$

Este principio variacional general se especificará para los siguientes 4 casos:

- Elementos Finitos Interiores:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} u w = 0$$

- Elementos Finitos de Frontera Dirichlet:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} u w = - \int_{\Omega} \nabla U_0 \bullet \nabla w + k^2 \int_{\Omega} U_0 w$$

- Elementos Finitos de Frontera Neumann:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} u w = 0$$

- Elementos Finitos de Frontera Robin:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w - k^2 \int_{\Omega} u w + ik \int_{\partial\Omega} u w = 0$$

En el capítulo 3 se presenta el modelo computacional del problema mencionado. Se programaron dos algoritmos, uno para el caso serial y otro para el caso paralelo. Se utilizó el software MatLab en la medida de lo posible “desde cero”. En el desarrollo de empleo el tipo de matrices “sparse” implementadas en MatLab.

Para el caso del programa secuencial se utilizó un resolvidor iterativo BiCGstab (Gradiente Bi-conjugado Estabilizado). Se programó una adecuación del método BiCGstab para números complejos.

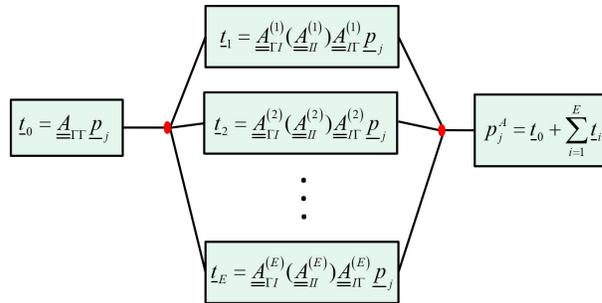
En el caso paralelo se utilizó la técnica de Complemento de Schur para calcular la solución en la frontera interior entre los subdominios.

Resumiendo, el complemento de Schur nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 Su_{\Gamma} &= f_s \\
 S &= A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} A_{II}^{(i)} \\
 f_s &= f_{\Gamma} - \sum_{i=1}^E A_{\Gamma I}^{(i)} (A_{II}^{(i)})^{(-1)} f_I^{(i)}
 \end{aligned}$$

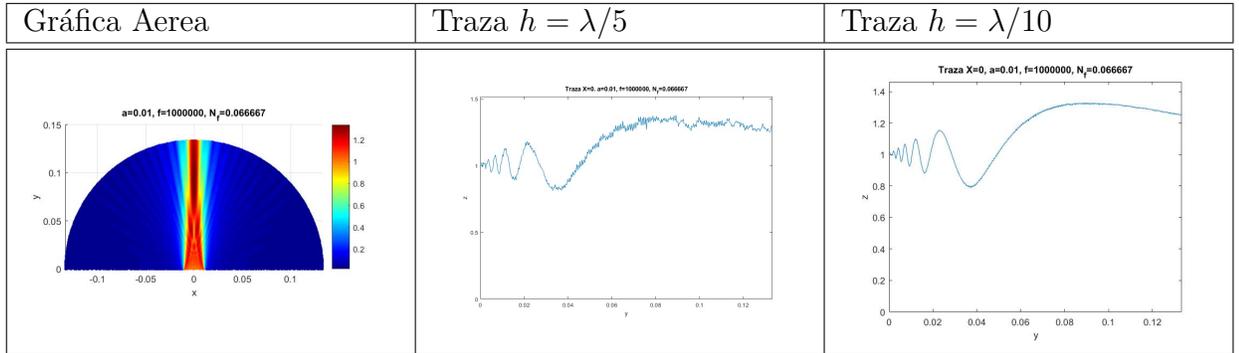
Se utilizó Memoria Compartida y el modelo Fork Join. Implementado en MatLab con las instrucciones parpool, spmd y composite.

Un ejemplo de lo paralelizado es:



Para el caso del programa en paralelo se utilizó un resolvidor iterativo BiCGstab global combinado con un resolvidor exacto Factorización LU local. También para el caso del programa en paralelo se utilizó un resolvidor BiCGstab global combinado con un resolvidor iterativo BiCGstab local.

En el capítulo 4 se presenta un análisis del desempeño de los programas mencionados. Se consideraron tres casos. El primer caso  $f = 30kHz$  se trata de un problema simplificado con 6765 incógnitas que sirvió para verificar los algoritmos. El segundo caso  $f = 1MHz$  con  $h = \lambda/5$  se trata de un problema real con un problema real con un mínimo aceptable de 361183 incógnitas que presenta oscilaciones numéricas artificiales. El tercer caso  $f = 1MHz$  con  $h = \lambda/10$  se trata de un problema real con un número adecuado de incógnitas. Sería recomendable refinar aún más la malla, es decir  $h < \lambda/10$  para reducir las oscilaciones numéricas artificiales.



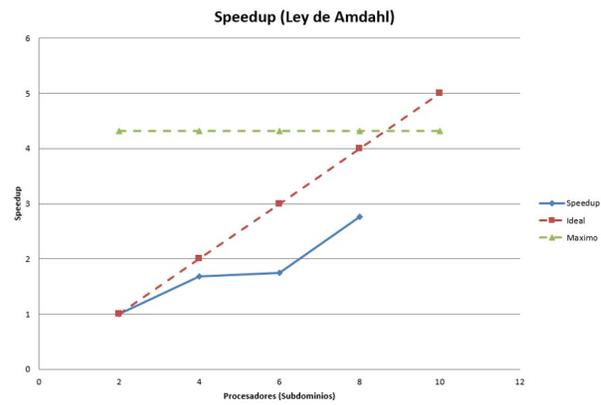
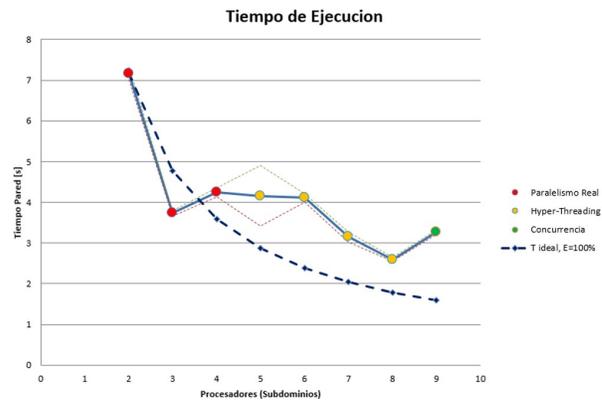
Uno de los principales problemas computacionales generales para los programas secuencial o en paralelo son el incremento en el número de incógnitas que agota el recurso de memoria y que incrementa el número de condicionamiento de las matrices del sistema de ecuaciones lo cual repercute en la no convergencia del resolvidor BiCGstab.

Otro de los principales problemas computacionales tanto para los programas secuencial y en paralelo, son que el incremento en el número de incógnitas hace inviable calcular la Factorización LU de las matrices en el sistema de ecuaciones debido a la complejidad algorítmica  $O(n^3)$ .

Para solventar estos problemas se propone la utilización de BiCGstab preconditionado con Factorización incompleta LU.

Se sabe que el mejor resolver específico para la ecuación de Helmholtz es GMRES preconditionado con Complex-Shifted-Laplacian.

Se dispone un procesador Intel core i7 modelo i7-4770 con 4 cores. Por este motivo se presenta un análisis de speedup (Ley de Amdahl) y eficiencia dividido por zonas de operación de paralelismo real (un hilo por core físico), de paralelismo por hyper-threading (paralelismo por hardware de 2 hilos por core) y de concurrencia (paralelismo por software de 3 o más hilos por core) según el número de subdominios (un subdominio por hilo).



Se presenta un análisis de fracción serial del algoritmo en paralelo, calculada en  $f=0.23$  (valor promedio), lo cual teóricamente limita el máximo speedup a 4.31



# Trabajo a Futuro

Se estima que para resolver el problema de  $f = 20MHz$  se debe plantear un sistema de ecuaciones con 100 millones de incógnitas.

Además de investigar resolvedores preconditionados específicos para la ecuación de Helmholtz en el estado del arte se requiere de la utilización de métodos de descomposición de dominio en el estado del arte.

El método de descomposición de dominio de complemento de Schur es un método fundamental pero no eficiente computacionalmente.

Se propone la utilización del método de descomposición de dominio DVS (Derived-Vector-Space) desarrollado por Herrera I. [22]



# Bibliografía

[1] Victoria Hernández Mederos, Eduardo Moreno Hernández, Jorge Estrada Sarlabous, Isidro A. Abelló Ugalde, Domenico Lahaye. *Isogeometric simulation of acoustic radiation*. Instituto de Cibernética, Matemática y Física, ICIMAF, La Habana, Cuba CEPES, Universidad de La Habana, Cuba DIAM, TU Delft, The Netherlands. 2021. 20 páginas

[2] P.G. Ciarlet y J.L. Lions, *Handbook of Numerical Analysis*, North Holland. 1991. 920 páginas.

[3] Johnson Claes. *Teoría General del Método de los Elementos Finitos*. Cambridge University Press.

[4] Louise Olsen-Kettle. *Numerical solution of partial differential equations*. School of Earth Sciences Centre for Geoscience Computing.

[5] Alejandro T. Brewer, G. Flores Fernando. *Notas de clase de Método de los elementos finitos*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 2002

[6] Shoichiro Nakamura. *Métodos numéricos aplicados con software*. 1992

[7] Emiliano López. *Generación de mallas de elementos finitos en paralelo* Universidad de Mendoza. 2007

[8] Paul Blanchard and Glen R. Hall. *Ecuaciones diferenciales*.

- [9] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*.
- [10] Paul L. DeVries. *A First Course in Computational Physics*. 1994
- [11] Anders Logg. *Automated Solution of Differential Equation by The Finite Element Method*. The FEniCS Book. 2011
- [12] Gerardo Aragón. *Aspectos físicos y matemáticos del método del elemento finito*. Revista Mexicana de Física. 1998
- [13] Guillermo Castaño Ochoa. *Aplicación del Método de los Elementos Finitos a la ecuación de Helmholtz*.
- [14] Tomás Norberto Martínez Pérez. *El Método del elemento finito aplicado en la solución de problemas de Mecánica de materiales en una dimensión*. Tesis Universidad Autónoma de Nuevo León. 1998
- [15] Gabriel López Garza. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Tesis Universidad Autónoma Metropolitana. 2013
- [16] M.J. Gander, I. G. Graham, E. A. Spence. *Applying GMRES to the Helmholtz equation with shifted Laplacian preconditioning: what is the largest shift for which wavenumber-independent convergence is guaranteed?*. Numerische Mathematik, (131), 3, 567-614, 2015.
- [17] Ortega J., Anguita, M., y Prieto A. *Arquitectura de Computadores*. España: Ed. Paraninfo S.A. 2005.
- [18] Alberto Cardona. *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería. 2004
- [19] Y. A. Erlangga, C. Vuik, C. W. Oosterlee. *On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation*. Appl. Numer. Math., 50 (3-4), 409-425, 2004.
- [20] Beltrán Francisco. *Teoría General del Método de los Elementos Finitos*. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales - ETS Ingenieros Industriales Madrid Curso de Doctorado. 1998-99.
- [21] Roland W. Freund. *Conjugate Gradient-Type Methods For Linear*

*Systems with Complex Symmetric Coefficient Matrices*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1992. 25 páginas.

[22] Ismael Herrera, Luis M. de la Cruz, Alberto Rosas-Medina. *Nonoverlapping Discretization Methods for Partial Differential Equations*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. DOI 10.1002/num.21852. Enero 2014

[23] Javier Pérez Ramírez, César Romero Bautista. *Métodos de Diferencias Finitas y Elemento finito : Análisis comparativo con programación Paralela*. Universidad Autonoma de la Ciudad de México. Junio 2021.