UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CATERGORÍAS CONCRETAS ISOMORFAS A TOP

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Edgar Sánchez Santos

DIRECTOR DE TESIS:

Mat. Saúl Arce Rocha

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2023

Índice general

Introducción

La matemática está conformada por una gran cantidad de ramas que cada día se desarrollan al tiempo que se diversifican y especializan. Por otra parte, aunque este gran compendio de conocimientos es tan amplio, se ha observado a través del tiempo que determinados entes, a pesar de aparecer en distintas áreas de la matemática presentan cierta similitud [2], por dar un ejemplo muy sencillo y particular podemos mencionar algunos de estos: conjuntos y funciones definibles entre conjuntos, espacios vectoriales y funciones lineales definibles entre espacios vectoriales, grupos y homomorfismos definibles entre grupos, espacios topológicos y funciones continuas definibles entre espacios topológicos, etc. En principio cada uno de estos entes es parte de una teoría matemática distinta pero tienen similitudes que podemos relacionar, como por ejemplo el hecho de que cada uno está conformado por objetos (conjuntos, espacios vectoriales, grupos, espacios topológicos, etc) y morfismos que operan entre ellos (funciones, funciones lineales, homomorfismos de grupo, funciones continuas, etc).
La teoría de categorías nos permite analizar de manera precisa las relaciones o relación que estos entes distintos pudieran tener o no ([2] página 12), este hecho particular nos generó el interés para introducirnos en su estudio y fue uno de los puntos de inspiración para este trabajo. Por otra parte cabe hacer hincapié en que la teoría de categorías es muy extensa ya que va mucho más allá de lo que hemos mencionado (para darnos una idea de esto podemos iniciar, por ejemplo, checando [1], [2], [9] y [10]), lo que fue otro punto de interés que nos motivo en el estudio de esta teoría.
Es posible acceder al estudio de la teoría de categorías desde distintas áreas de la matemática como el álgebra o la topología (sólo por hacer mención de dos ejemplos comunes). Siguiendo la línea de acceso, de la topología, podemos ver que en [7] secciones 1 y 2 se da una breve descripción del concepto de topología, de las funciones continuas y de las formas equivalentes en que se pueden ver estos conceptos desde la propia teoría topológica. Sin embargo esta pequeña descripción es la clave para pensar en categorías ya que también en [7] (en las mismas secciones) se menciona que existe una biyección (sin que se ahonde demasiado en ello) entre las siguientes clases :

$\{(X,\tau)|\ X$ es un conjunto y τ una topología en $X\}$.

$\{(X,\alpha)|\ X$ es un conjunto y α un operador interior en $X\}$.

$\{(X,\eta)|\ X$ es un conjunto y η es una familia de subconjuntos cerrados de $X\}$.

$\{(X,\psi)|\ X$ es un conjunto y ψ un operador cerradura en $X\}$.

A grandes rasgos el objetivo principal de este trabajo es servir como una introducción al estudio de la teoría de categorías desde la topología y conformar una idea concreta de entes que en teoría se ven *distintos* (o no) pero que podemos relacionarlos. La idea principal, en el desarrollo de este trabajo, tiene como fundamento la descripción de las categorías concretas de conjuntos estructurados generadas por algunos conceptos equivalentes al concepto de topología (para comenzar a darnos una idea podemos considerar la biyección que se menciono arriba entre esas clases, resulta que los elementos que conforman esas clases son ejemplos de los objetos de algunas de las categorías que determinaremos, es decir las parejas (X, x), donde X es un conjunto y x es algún tipo de estructura; topología, operador interior, operador cerradura, etc[1]). Por otra parte deseamos deducir, comprender y apreciar la forma que los morfismos tendrían o cómo actuarían, en una categoría y otra, y entre una categoría y otra, es decir sabemos muy bien que forma tienen y como actúan, por ejemplo, las funciones continuas entre los espacios topológicos pero, en las otras categorías, aunque podemos saber o no que forma tienen y como actúan sus morfismos, queremos investigar y determinar como se relacionan éstos, entre una categoría y otra, desde la propia teoría de categorías, para lograrlo llevaremos a cabo un estudio categórico de los conceptos: *conjunto abierto*, *conjunto cerrado*, *interior*, *cerradura*, *vecindad* y *frontera*.

Durante el desarrollo de este trabajo denotaremos por $\mathfrak{Top}$ a la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas y $\mathfrak{T}_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a las demás categorías que vayamos definiendo (a excepción de $\mathfrak{Mtc}$, $\mathfrak{CDTop}$ y $\mathfrak{TMtc}$[2]). Mostraremos que cada uno de estos conceptos básicos de topología (mencionamos anteriormente) dará lugar a lo que llamaremos *una categoría concreta de conjuntos estructurados*[3] y que existe *un isomorfismo concreto* entre éstas. Con esto además nos proponemos estudiar y recuperar la noción de continuidad en cada una de estas categorías concretas e implementar un proceso, desde la teoría de funciones, para relacionar los *morfismos* que definiremos en cada categoría. A grandes rasgos también cabe mencionar que introduciremos el concepto que llamaremos *casi isomorfo* para ampliar el propio concepto que denominamos: *cocretamente isomorfo*, contrastando ambos mediante la idea de transportabilidad en las categorías concretas de conjuntos estructurados.

La tesis está desarrollada de la siguiente manera:

En el primer capítulo determinaremos los aspectos preliminares que utilizaremos a lo largo de este trabajo, es decir, definiremos categoría, categoría concreta de conjuntos estructurados, isomorfismo entre categorías y estableceremos, de manera precisa, cuando dos categorías concretas de conjuntos estructurados serán concretamente isomorfas. Finalizaremos este capítulo mostrando que la relación: *ser concretamente isomorfa a*, es una relación de equivalencia entre las categorías concretas de conjuntos estructurados.

En el segundo capítulo comenzaremos definiendo métrica para después definir espacio topológico, dar algunos ejemplos y determinar, también, función continua, con estos elementos podremos concluir con la definición de la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{Top}$.

En el tercer capítulo básicamente empezaremos con la definición de interior y estudiaremos sus propiedades. También definiremos *el operador interior* y veremos que dado un operador interior, sobre un conjunto X, podremos definir una topología relacionada a tal operador. Describiremos la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_1$ y terminaremos mostrando que la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_1$ es concretamente isomorfa a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{Top}$.

[1]Estos conceptos serán aclarados en el desarrollo de este trabajo.

[2]Definiremos en su momento cada una de estas categorías

[3]Éstas categorías serán $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$

En el cuarto capítulo empezaremos estudiando el concepto de conjunto cerrado además de sus propiedades y dado un conjunto X definiremos la *c-familia* de X que nos permitirá determinar la topología $\tau_{c(x)}$, después obtendremos los elementos necesarios para conformar a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_2$ y concluiremos, este capítulo, demostrando que la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_2$ es concretamente isomorfa a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_1$.
En el quinto capítulo determinaremos el concepto de cerradura y sus propiedades, luego en base a estas propiedades definiremos *el operador cerradura*. Veremos que dado un conjunto X y un operador cerradura en X, se podrá determinar una topología para X. Estudiaremos los elementos necesarios para definir a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_3$ y terminaremos estableciendo que las categorías concretas de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_2$ y $\mathfrak{T}_3$ son concretamente isomorfas.
En el capítulo seis desarrollaremos lo correspondiente a vecindad, comenzaremos estableciendo la definición de vecindad, sus propiedades y *el operador vecindad*, así mismo veremos que dado un conjunto X y un operador vecindad en X podremos determinar una topología para X generada por este operador vecindad. Detallaremos, también, los elementos necesarios para describir la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_4$ y concluiremos este capítulo con la demostración de que las categorías concretas de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_3$ y $\mathfrak{T}_4$ son concretamente isomorfas.
En el capítulo siete comenzaremos nuestro estudio con una observación que determina dos propiedades que relacionan al interior y a la cerradura para después definir frontera y las propiedades que ésta cumple para poder definir *operador frontera*. Estableceremos que el operador frontera determina un operador cerradura con lo que podemos asociar una topología relacionada con éste operador cerradura. Describiremos, también, los elementos necesarios para definir la clase $\mathfrak{T}_5$ y finalizaremos mostrando que la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_4$ es concretamente isomorfa a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_5$.
En el capítulo ocho estableceremos cuando dos categorías concretas de conjuntos estructurados son casi isomorfas, para ello definiremos a $\mathfrak{Mtc}$, la categoría concreta de conjuntos estructurados de los espacios métricos y las funciones continuas definibles entre ellos (con la finalidad de aproximarnos al concepto mencionado al principio). Definiremos cuando dos métricas son equivalentes, además del concepto de fibras equivalentes y función casi biyectiva. Mostraremos que si dos categorías concretas de conjuntos estructurados son concretamente isomorfas entonces serán casi isomorfas y veremos, entonces, que $\mathfrak{Top}$ es casi isomorfa a $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_1$ casi isomorfa a $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2$ casi isomorfa a $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_3$ casi isomorfa a $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_4$ casi isomorfa a $\mathfrak{T}_5$. Definiremos a la categoría concreta de conjuntos estructurados de los espacios topológicos metrizables y las funciones continuas definibles entre ellos, $\mathfrak{TMtc}$, para mostrar que ésta categoría y $\mathfrak{Mtc}$ son casi isomorfas. Definiremos, también, el concepto de transportabilidad en las categorías concretas de conjuntos estructurados y determinaremos a la categoría de los espacios topológicos casi discretos y las funciones continuas definibles entre ellos, $\mathfrak{CDTop}$, como ejemplo de categoría transportable, además comprobaremos que $\mathfrak{Mtc}$ no es transportable para contrastar estos dos conceptos. Finalizaremos estudiando algunas de las implicaciones de la transportabilidad en relación con los conceptos de *concretamente isomorfa a* y *casi isomorfa a*.
En el capítulo nueve haremos una síntesis general de los puntos principales llevados a cabo en este trabajo, sacaremos nuestras conclusiones y pondremos en claro nuestro objetivo principal, es decir que daremos los argumentos que consideramos pertinentes del porque esta tesis es un texto de introducción al estudio de la teoría de categorías.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo describiremos algunos de los conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Dados X, Y conjuntos arbitrarios, denotaremos por $P(X)$ a la familia de todos los subconjuntos de X o potencia de X, por $\emptyset$ al conocido conjunto vacío y por Y^X a la clase de todas las funciones de X en Y.

Definición 1.1. Una categoría es una quinteta $\mathfrak{C} :=(|\mathfrak{C}|, \hom_{\mathfrak{C}}, dom, cod, \circ)$, donde:

a) $|\mathfrak{C}|$ es una clase llamada $\mathfrak{C}$-*objetos* de $\mathfrak{C}$.

b) $\hom_{\mathfrak{C}}$ es una clase llamada $\mathfrak{C}$-*morfismos* de $\mathfrak{C}$.

c) $dom : \hom_{\mathfrak{C}} \to |\mathfrak{C}|$ es una función tal que para cada $f \in \hom_{\mathfrak{C}}$ existe $A \in |\mathfrak{C}|$ y $dom(f) = A$. A se llama dominio de f.

d) $cod : \hom_{\mathfrak{C}} \to |\mathfrak{C}|$ es una función tal que para cada $f \in \hom_{\mathfrak{C}}$ existe $B \in |\mathfrak{C}|$ y $cod(f) = B$. B se llama codominio de f.

e) $\circ : \{(g, f) \in \hom_{\mathfrak{C}} \times \hom_{\mathfrak{C}} \mid cod(f) = dom(g)\} \to \hom_{\mathfrak{C}}$ es una función llamada composición de $\mathfrak{C}$. En adelante a $\circ(g, f)$ lo denotaremos como $g \circ f$. $\circ$ cumple:

i) Si $g \circ f \in \{(g, f) \in \hom_{\mathfrak{C}} \times \hom_{\mathfrak{C}} \mid cod(f) = dom(g)\}$ y

$h \circ g \in \{(h, g) \in \hom_{\mathfrak{C}} \times \hom_{\mathfrak{C}} \mid cod(g) = dom(h)\}$ entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

ii) Para toda $A \in |\mathfrak{C}|$ existe $1_A \in \hom_{\mathfrak{C}}$ tal que:

1. $dom(1_A) = A = cod(1_A)$.

2. Si $1_A \circ f \in \{(1_A, f) \in \hom_{\mathfrak{C}} \times \hom_{\mathfrak{C}} |cod(f) = dom(1_A)\}$ entonces $1_A \circ f = f$.

3. Si $f \circ 1_A \in \{(f, 1_A) \in \hom_{\mathfrak{C}} \times \hom_{\mathfrak{C}} |cod(1_A) = dom(f)\}$ entonces $f \circ 1_A = f$.

iii) Para $A, B \in |\mathfrak{C}|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{C}}(A, B) := \{f \in \hom_{\mathfrak{C}} |dom(f) = A, cod(f) = B\} .$$

Un ejemplo de categoría es el siguiente:

- La categoría $\mathfrak{Set} = (|\mathfrak{Set}|, \hom_{\mathfrak{Set}}, dom, cod, \circ)$, donde:

  a) $|\mathfrak{Set}|$ es la clase de todos los conjuntos (la clase de $\mathfrak{Set}$-*objetos* de $\mathfrak{Set}$).

  b) $\hom_{\mathfrak{Set}}$ es la clase de todas las funciones entre conjuntos.

  c) Para A, $B \in |\mathfrak{Set}|$ definimos el conjunto

$$\hom_{\mathfrak{Set}}(A, B) := \{f \in \hom_{\mathfrak{Set}} \mid dom(f) = A,\ cod(f) = B\}.$$

  d) $\circ$ es la composición habitual de funciones.

ccce

Definición 1.2. Una categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{C}$ es una categoría en la que:

i) $\mathfrak{C}[X]$ es una clase llamada $\mathfrak{C}$-*estructuras* de X.

ii) $|\mathfrak{C}|$ tiene como elementos a las parejas (X, ξ), donde X es un conjunto y $\xi \in \mathfrak{C}[X]$.

iii) Para cualesquiera dos $\mathfrak{C}$-*objetos* (X, ξ) y (Y, η), los elementos de la clase $\hom_{\mathfrak{C}}$ son las parejas $(f, (\xi, \eta))$ en las que

$$f \in Y^X,$$

la pareja (ξ, η) tiene como elementos a ξ estructura de X, η estructura de Y y f es $\mathfrak{C}$-*morfismo* o *conserva* la $\mathfrak{C}$-*estructura*[1] de (X, ξ) en (Y, η).

iv) Para cada par de $\mathfrak{C}$-*objetos* (X, ξ) y (Y, η), definimos el conjunto

$$\hom_{\mathfrak{C}}[(X, \xi), (Y, \eta)] := \{f \in Y^X \mid f \text{ es } \mathfrak{C}\text{-}\textit{morfismo} \text{ de } (X, \xi) \text{ en } (Y, \eta)\},$$

los elementos de este conjunto están sujetos a las propiedades siguientes:

a) **Propiedad de composición.**
Para $(X, \xi), (Y, \eta)$ y $(Z, \zeta) \in |\mathfrak{C}|$, si $f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \xi), (Y, \eta)]$ y $g \in \hom_{\mathfrak{C}}[(Y, \eta), (Z, \zeta)]$ entonces

$$g \circ f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \xi), (Z, \zeta)].$$

b) **Propiedad de identidad.**
Para $(X, \xi) \in |\mathfrak{C}|$

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \xi), (X, \xi)]$$

[1] Más adelante bajo el contexto será aclarada la idea de que la función f es $\mathfrak{C}$-*morfismo* o conserva la $\mathfrak{C}$-*estructura*

donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.
Para hacer referencia a una categoría concreta de conjuntos estructurados también usaremos la abreviatura *ccce*.
Dada una *ccce* $\mathfrak{C}$ y $(X,\xi),(Y,\eta) \in |\mathfrak{C}|$, escribimos $(f,(\xi,\eta))$ para denotar a los elementos de $\hom_{\mathfrak{C}}$, sin embargo escribiremos $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ algunas veces y habitualmente escribiremos:

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X,\xi),(Y,\eta)]$$

para denotar a los $\mathfrak{C}$-*morfismos*, de la *ccce* $\mathfrak{C}$, de dominio (X,ξ) y codominio (Y,η). Es decir a las funciones f de dominio (X,ξ) y codominio (Y,η) que conservan la $\mathfrak{C}$-*estructura* de (X,ξ) en (Y,η).

Definición 1.3. Dados X, Y conjuntos, una *ccce* $\mathfrak{C}$ arbitraria y (X,ρ), $(Y,\varphi) \in |\mathfrak{C}|$ tenemos que un isomorfismo en $\mathfrak{C}$ o un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo*, es una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X,\rho),(Y,\varphi)] \text{ y } f^{-1} \in \hom_{\mathfrak{C}}[(Y,\varphi),(X,\rho)].$$

Si entre (X,ρ), $(Y,\varphi) \in |\mathfrak{C}|$ existe un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo* diremos que (X,ρ) y (Y,φ) son $\mathfrak{C}$-*isomorfos* y lo denotaremos por

$$(X,\rho) \cong_{\mathfrak{C}} (Y,\varphi).$$

Uno de los conceptos principales con el que trataremos la mayor parte de este trabajo es el que se menciona en la siguiente sección.

1.1. $\doteqdot$

Definición 1.1.1. Dados X, Y conjuntos y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ dos categorías concretas de conjuntos estructurados, diremos que $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son *concretamente isomorfas* si:

i) Existe una biyección

$$\Upsilon_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

natural en el siguiente sentido:

ii) Si (X,ξ), $(Y,\eta) \in |\mathfrak{C}|$ y $f : X \to Y$ es una función, entonces

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X,\xi),(Y,\eta)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X,\Upsilon_X(\xi)),(Y,\Upsilon_Y(\eta))].$$

Cuando dos *ccce* $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ sean concretamente isomorfas lo denotaremos por:

$$\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D}.$$

En el siguiente apartado estudiaremos como se relacionan las *ccce* respecto de $\doteqdot$.

$\doteqdot$ entre *ccce*

Es de notar que la relación $\doteqdot$ entre las *ccce* es una relación de equivalencia como vemos en el teorema siguiente.

Teorema 1.1.2. $\doteqdot$ es una relación de equivalencia entre las *ccce*.

Demostración:

a) Veamos que $\doteqdot$ es reflexiva.

Consideremos a X, Y conjuntos y $\mathfrak{C}$ una *ccce* cualesquiera.

(i) Definamos para $\mathfrak{C}[X]$ la función

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]} : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{C}[X]$$

Tal que para toda $\rho \in \mathfrak{C}[X]$

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]}(\rho) = \rho.$$

Entonces $\mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]}$ es biyectiva.

(ii) Sea $f : X \to Y$ una función tal que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \varphi)].$$

Como $\mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]}(\rho) = \rho$ e $\mathcal{I}_{\mathfrak{C}[Y]}(\varrho) = \varrho$, se tiene que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]}(\rho)), (Y, \mathcal{I}_{\mathfrak{C}[Y]}(\varrho))],$$

por lo tanto

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \varrho)] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \mathcal{I}_{\mathfrak{C}[X]}(\rho)), (Y, \mathcal{I}_{\mathfrak{C}[Y]}(\varrho))],$$

de donde $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{C}$, es decir $\doteqdot$ es *reflexiva*.

b) Veamos que $\doteqdot$ es simétrica.

Dadas $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *ccce* cualesquiera.

(i) Supongamos que $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D}$, entonces para todo conjunto Z existe una función

$$\Phi_Z : \mathfrak{C}[Z] \to \mathfrak{D}[Z]$$

biyectiva y

$$\Phi_Z^{-1} : \mathfrak{D}[Z] \to \mathfrak{C}[Z]$$

es biyectiva. Veamos que para todo conjunto Z, Φ_Z^{-1} es natural.

(ii) Sea $g : X \to Y$ una función. Puesto que la inversa de Φ_Z^{-1} es Φ_Z y Φ_Z es natural, tenemos que existen $\rho \in \mathfrak{C}[X]$ y $\varrho \in \mathfrak{C}[Y]$ únicas tales que $\Phi_X^{-1}(\rho') = \rho$, $\Phi_Y(\varrho') = \varrho$ y

$$g \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \rho'), (Y, \varrho')],$$

si y sólo si

$$g \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Phi_X(\rho)), (Y, \Phi_Y(\varrho))]$$

si y sólo si

$$g \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \varrho)]$$

si y sólo si

$$g \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \Phi_X^{-1}(\rho')), (Y, \Phi_Y^{-1}(\varrho'))].$$

Entonces $\mathfrak{D} \doteqdot \mathfrak{C}$, por lo tanto $\doteqdot$ es *simétrica.*

c) Veamos que $\doteqdot$ es transitiva.

Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ *ccce* cualesquiera, supongamos que $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D}$ y que $\mathfrak{D} \doteqdot \mathfrak{E}$, entonces

♦ existe una biyección

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

que es *natural*, es decir
• si $f : X \to Y$ es una función, entonces

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \varrho)] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Phi_X(\rho)), (Y, \Phi_Y(\varrho))].$$

Por otra parte si $\mathfrak{D} \doteqdot \mathfrak{E}$, entonces
♦ existe una biyección

$$\Psi_X : \mathfrak{D}[X] \to \mathfrak{E}[X]$$

que es natural, es decir
• si $g : X \to Y$ es una función, entonces

$$g \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \xi), (Y, \eta)] \text{ si, y sólo si, } g \in \hom_{\mathfrak{E}}[(X, \Psi_X(\xi)), (Y, \Psi_Y(\eta))].$$

(i) Para cada conjunto X, la función

$$\Psi_X \circ \Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{E}[X]$$

es una biyección ya que es composición de funciones biyectivas.

(ii) Demostraremos la naturalidad de $\Psi_X \circ \Phi_X$

Sea $f : X \to Y$ una función tal que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \gamma), (Y, \lambda)].$$

Como Φ_X es una biyección *natural* se tiene que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \gamma), (Y, \lambda)] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Phi_X(\gamma)), (Y, \Phi_Y(\lambda))].$$

Por otra parte Ψ_X es una biyección *natural* entonces

$$f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Phi_X(\gamma)), (Y, \Phi_X(\lambda))] \text{ si, y sólo si,}$$

$$f \in \hom_{\mathfrak{E}}[(X, (\Psi_X \circ \Phi_X)(\gamma)), (Y, (\Psi_X \circ \Phi_X)(\lambda))],$$

por lo tanto

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X,\gamma),(Y,\lambda) \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{E}}(X,(\Psi_X \circ \Phi_X)(\gamma)),(Y,(\Psi_Y \circ \Phi_Y(\lambda))],$$

de donde obtenemos que $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{E}$, entonces $\doteqdot$ es *transitiva.*
Por lo tanto $\doteqdot$ es una relación de equivalencia entre las *ccce*.
■

Un ejemplo muy particular de *ccce* es la *ccce* de los espacios *topológicos* y las funciones continuas que es parte básica de este trabajo y que describiremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

$\mathfrak{Top}$

Si X es un conjunto entonces hay estructuras con las que podemos dotar a X que permiten entender los conceptos de convergencia, vecindad y proximidad entre los puntos de X (por ejemplo la estructura de espacio topológico que veremos más adelante).
En este capítulo definiremos una *métrica* (distancia) en un conjunto X y en base a esta idea abordaremos el concepto de *conjunto abierto* para determinar una *topología* en X. El concepto de función continua también será visto en esta sección.

2.1. Métrica, topología y funciones continuas

Definición 2.1.1. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos. Dado $X \neq \emptyset$ un conjunto; definimos una *métrica* d en X como una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

tal que para toda $x, y, z \in X$, d cumple lo siguiente:

a) $d(x, y) \geq 0$.

b) $d(x, y) = d(y, x)$.

c) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Entonces la pareja (X, d) se llama espacio métrico y para $x, y \in X$, el número $d(x, y)$ se llama la *distancia* de x a y.

Definición 2.1.2. Dado $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\delta \in \mathbb{R}^+$ y $x \in X$, definimos el *disco abierto* de centro en x y radio δ con la métrica d como:

$$D_d(x, \delta) := \{y \in X |\ d(x, y) < \delta\}.$$

Si se presenta la ocasión, algunas veces, omitiremos el nombre de la métrica y denotaremos al disco abierto de centro x y radio δ por

$$D(x, \delta).$$

Definición 2.1.3. Dado (X,d) un espacio métrico, diremos que $A \subseteq X$ es un *conjunto abierto* (*abierto* en (X,d)) si

$$\text{para toda } x \in A \text{ existe } \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } D(x,\delta) \subseteq A.$$

Ya que hemos definido conjunto abierto, en un espacio métrico, se puede dar de manera natural la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Si (X,d) es un espacio métrico denotaremos por τ_d a la familia de todos los conjuntos abiertos de (X,d).
En base a la Definición 2.1.3 se puede comprobar que se cumplen las siguientes propiedades.

Observación 2.1.5. Si (X,d) es un espacio métrico entonces:

a) Todo disco abierto de (X,d) es un conjunto abierto en (X,d).

b) Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq P(X)$ tal que A_i es un conjunto abierto para cada $i \in I$, entonces $\cup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto.

c) Si A_1 y A_2 son conjuntos abiertos, entonces $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto.

La Observación 2.1.5 es muy básica y se puede encontrar casi en cualquier texto de analísis matemático, podemos encontrarla, por ejemplo, en [7] páginas 5 y 6. En la siguiente definición, que es la de *espacio topológico*, podemos ver la relación que tiene, la que denominaremos, una *topología* para un conjunto X y la Observación 2.1.5, en particular con los incisos (b) y (c) respecto de las uniones e intersecciones de conjuntos abiertos.

Topología

Definición 2.1.6. Dado un conjunto X y $\tau \subseteq P(X)$. Diremos que τ es una *topología* en X si:

a. $\emptyset$ y X pertenecen a τ.

b. Para toda $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, con I arbitrario, se tiene que $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$.

c. Si $\{U,V\} \subseteq \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$.

Bajo esta situación diremos que la pareja (X,τ) es un *espacio topológico* donde X se llama *conjunto subyacente*, τ es la **estructura topológica**, los elementos $x \in X$ son los puntos del espacio y los elementos de τ son los *conjuntos abiertos* de (X,τ). Llamamos abiertos a los elementos de τ aunque estos conjuntos no sean abiertos en el sentido común de los espacios métricos, los llamamos abiertos sólo por mantener la analogía con la idea de abiertos como en la Observación 2.1.5 incisos b) y c).
En la Definición 2.1.6 inciso c) notamos que la intersección de dos conjuntos abiertos es abierta, aunque en general tenemos que si (X,τ) es un espacio topológico la intersección, finita, arbitraria de abiertos es abierta como veremos en la observación siguiente.

Observación 2.1.7. Dado (X, τ) un espacio topológico, $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq X$ e $I \neq \emptyset$ finito entonces

$$\cap_{i \in I} A_i \in \tau.$$

Demostración:

Haremos inducción sobre I.

a) Base de inducción: $I = 2$. En este caso tenemos que

$$\{A_1, A_2\} \subseteq \tau$$

y como τ es una topología para X entonces

$$A_1 \cap A_2 \in \tau$$

por c) de la Definición 2.1.6, esto demuestra la base inductiva.

b) Hipótesis de inducción: supongamos que se cumple para n es decir que:

$$\cap_{i=1}^{n} A_i \in \tau.$$

c) Paso inductivo: veremos que se cumple para $n+1$, es decir, si

$$\{A_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \tau \text{ entonces } \cap_{i=1}^{n+1} A_i \in \tau.$$

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \tau$. Se tiene que:

$$\cap_{i=1}^{n+1} A_i = \cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}.$$

Por otra parte $\cap_{i=1} A_i \in \tau$ por la hipótesis de inducción y $A_{n+1} \in \tau$ entonces

$$\cap_{i=1}^{n} A_1 \cap A_{n+1} \in \tau$$

por base la de inducción y como $\cap_{i=1}^{n+1} A_i = \cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}$ entonces

$$\cap_{i=1}^{n+1} A_i \in \tau$$

■

Gracias a la Observación 2.1.7, para probar que una familia de subconjuntos τ, de un conjunto dado X es una topología para X, podremos probar, también, que τ además de tener al vacío y al total, tendrá como elementos a las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas arbitrarias de sus subconjuntos, lo que nos será útil en algunas ocasiones.
Ya hablamos de espacios topológicos y topología, entonces consideremos los siguientes ejemplos básicos para tener una idea en concreto de estos conceptos.

Ejemplos 2.1.8. Dado X un conjunto arbitrario tenemos:

i) $(X, \{\emptyset, X\})$ es el espacio topológico *indiscreto* o espacio topológico *trivial* y $\{\emptyset, X\}$ es la topología *indiscreta* o *trivial* de X.

ii) $(X, P(X))$ es el espacio topológico *discreto* y $P(X)$ es la *topología discreta.*

iii) Si (X, d) es un espacio métrico entonces τ_d es una topología[1] para X y en este caso el espacio topológico al que hacemos referencia es (X, τ_d).

■

[1]para convencerse de que τ_d es una topología para X note que a partir de la Observación 2.1.5 se puede demostrar que τ_d cumple las propiedades de la Definición 2.1.6.

La clase $|\mathfrak{Top}|$

Dado un conjunto X, para determinar un espacio topológico cuyo conjunto subyacente sea X, se considera a una familia τ de subconjuntos de X que cumple las propiedades: τ es cerrada bajo uniones arbitrarias, cerrada bajo intersecciones dos a dos (o cerrada bajo intersecciones finitas arbitrarias como vimos en la Observación 2.1.7) y tiene al conjunto vacío y al conjunto total X como elementos, esto es lo que consideramos como la *estructura* topologíca para X. Por otra parte para un conjunto arbitrario X podemos considerar al objeto que tiene todas las topologías de X y que denotaremos por

$$\mathfrak{Top}[X]$$

Se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ es distinto del vacío ya que para cualquier conjunto X siempre podemos considerar a $P(X)$ y sabemos que $P(X)$ es la *topología discreta* para X, por lo tanto:

$$P(X) \in \mathfrak{Top}[X].$$

Por otra parte tenemos que $\mathfrak{Top}[X]$ es un conjunto ya que si $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$ se tiene que :

$$\tau \subseteq P(X)$$

por definición de topología, entonces $\tau \in P(P(X))$, es decir:

$$\mathfrak{Top}[X] \subseteq P(P(X)).$$

Y como $P(P(X))$ es un conjunto entonces $\mathfrak{Top}[X]$ es un conjunto, por lo que para el conjunto arbitrario X, podemos referirnos a $\mathfrak{Top}[X]$ como el conjunto de todas las *topologías* de X.

Definimos la clase

$$|\mathfrak{Top}| := \{(X,\tau)|\ X \text{ es un conjunto y } \tau \in \mathfrak{Top}[X]\}.$$

Es decir que $|\mathfrak{Top}|$ es la clase de todos los espacios topológicos. En lo que sigue introduciremos el concepto de *función continua* entre dos espacios topológicos dados; con base en ello describiremos la *categoría concreta de conjuntos estructurados* $\mathfrak{Top}$.

Funciones continuas

Definición 2.1.9. Dados (X,τ), $(Y,\sigma) \in |\mathfrak{Top}|$ y $f : X \to Y$ una función, diremos que

$$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$$

es *continua*, $\mathfrak{Top}$-*morfismo* o que conserva la $\mathfrak{Top}$-*estructura* de (X,τ) en (Y,σ) si

$$\text{Para todo } V \in \sigma \text{ se tiene que } f^{-1}(V) \in \tau.$$

En este punto cabe hacer hincapié en que si (X,τ), $(Y,\sigma) \in |\mathfrak{Top}|$ y $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es una función continua entonces también podemos decir que f *conserva la estructura topológica* de (X,τ) en (Y,σ) y si lo consideramos pertinente sólo diremos que f *conserva la estructura*. Por otra parte las funciones continuas cumplen las siguientes propiedades que se deducen directamente de la Definición 2.1.9.

Proposición 2.1.10. Si (X,τ), (Y,σ) y $(Z,\omega) \in |\mathfrak{Top}|$ entonces:

a. Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ y $g : (Y,\sigma) \to (Z,\omega)$ son continuas entonces

$$g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\omega) \text{ es continua.}$$

b. Si $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau)$ es tal que $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$, entonces 1_X es continua.

La demostración de esta proposición es básica y se puede encontrar en [7] página 27. Básicamente la Proposición 2.1.10 establece que la composición de funciones continuas es continua y que para todo espacio topológico (X,τ) la identidad

$$1_X : (X,\tau) \to (X,\tau)$$

es continua.

Homeomorfismos

.

Definición 2.1.11. Sean (X,τ), $(Y,\sigma) \in |\mathfrak{Top}|$. Una función

$$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$$

es un *homeomorfismo* si f es continua, biyectiva y f^{-1} continua.

Si entre dos espacios topológicos (X,τ), (Y,σ) existe un homeomorfismo, entonces diremos que son *homeomorfos* y lo escribiremos como

$$(X,\tau) \cong (Y,\sigma).$$

2.2. La *ccce* $\mathfrak{Top}$

Ya tenemos los elementos necesarios para describir la *categoría concreta* $\mathfrak{Top}$. Lo que haremos es considerar a la clase de todos los espacios topológicos y a la clase de todas las funciones continuas definibles entre ellos.

Definición 2.2.1. La *ccce* $\mathfrak{Top}$ es una *ccce* compuesta de los siguientes miembros :

i) La clase $|\mathfrak{Top}|$ (cuyos elementos ya definimos). Les llamaremos $\mathfrak{Top}$-*objetos* o espacios topológicos.

ii) Para cada par $(X,\tau), (Y,\sigma) \in |\mathfrak{Top}|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(Y,\sigma)] := \{f \in Y^X |\ f : (X,\tau) \to (Y,\sigma) \text{ es } \mathfrak{Top}\text{-}\textit{morfismo}\}.$$

Para indicar que f es una función continua (un $\mathfrak{Top}$-*morfismo*) de (X,τ) en (Y,σ) también escribiremos :

$$f \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(Y,\sigma)].$$

Este conjunto cumple las siguientes propiedades (vitas en la Proposición 2.1.10):

(a) Propiedad de composición.
Para $(X,\tau),(Y,\sigma)$ y $(Z,\omega)\in|\mathfrak{Top}|$ arbitrarios, si:

$$f\in\hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(Y,\sigma)] \text{ y } g\in\hom_{\mathfrak{Top}}[(Y,\sigma),(Z,\omega)]$$

entonces:

$$g\circ f\in\hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(Z,\omega)]$$

(b) Propiedad de identidad.
Para todo$(X,\tau)\in|\mathfrak{Top}|$

$$1_X\in\hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(X,\tau)]$$

Donde $1_X(x)=x$ para toda $x\in X$.

Así que $\mathfrak{Top}$ es la *ccce* de todos los espacios topológicos y las funciones continuas definibles entre ellos, a los homeomorfismos les podríamos llamar también $\mathfrak{Top}$-*isomorfismos* de acuerdo con la Definición 1.3.

Capítulo 3

$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$

En este capítulo presentamos el concepto de *interior* de un conjunto en un espacio topológico, cuya importancia radica en el hecho de que a través de éste definiremos las propiedades que, en general, debe tener un *operador interior*. A grandes rasgos, si X es un conjunto, un operador interior en X es una función que opera sobre subconjuntos de X y produce subconjuntos de X (i.e. es una función de $P(X)$ en $P(X)$), de aquí que se le llame *operador interior*.
Dado un conjunto X demostraremos cómo a través de este operador interior se puede definir una topología para X y de esta manera podremos establecer una relación entre un operador interior y una topología debido a que recíprocamente veremos que una topología en X tendrá un operador interior, para X, asociado a ésta.
Otros objetivos para este capítulo también son: definir la *ccce* $\mathfrak{T}_1$ y establecer que $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$.

3.1. El interior y sus propiedades

Definición 3.1.1. Dado $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \subseteq X$, el *interior* de A en (X, τ) es la unión de todos los abiertos de (X, τ) contenidos en A y lo denotaremos por:

$$Int_\tau A.$$

Uno de los aspectos básicos que se derivan directamente de esta definición lo vemos en la observación siguiente.

Observación 3.1.2. Dado $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \subseteq X$, la familia:

$$\mathcal{F} = \{U \in P(X) \mid U \in \tau \text{ y } U \subseteq A\}$$

es distinta del vacío e

$$Int_\tau A = \cup_{U \in \mathcal{F}} U \subseteq A.$$

Demostración:

La familia $\mathcal{F}$ es distinta del vacío pues $\emptyset \in P(X)$, $\emptyset \in \tau$ al ser τ una topología para X y $\emptyset \subseteq A$ para todo $A \subseteq X$ por lo que:

$$\emptyset \in \mathcal{F}.$$

Para ver la segunda parte notemos que $Int_\tau A = \cup_{U\in\mathcal{F}} U$ por la Definición 3.1.1. y como $\cup_{U\in\mathcal{F}} U \subseteq A$ entonces:

$$Int_\tau A \subseteq A.$$

■

En la Observación 3.1.2 debemos notar que la familia $\mathcal{F}$ depende del subconjunto A de X aunque éste es arbitrario, así que en adelante si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \subseteq X$, denotaremos a la familia:

$$\mathcal{F} = \{U \in P(X) \mid U \in \tau \text{ y } U \subseteq A\}$$

por:

$$\mathcal{F}_A,$$

teniendo en cuenta esta notación podemos escribir:

$$Int_\tau A = \cup_{U\in\mathcal{F}_A} U.$$

Dado un espacio topológico (X,τ) la siguiente proposición establece una manera de caracterizar a los abiertos de (X,τ) en términos del concepto de interior que acabamos de ver.

Proposición 3.1.3. Si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$ entonces son equivalentes:

a. $A \in \tau$.

b. $A = Int_\tau A$.

Demostración:

a $\Rightarrow$ **b**

$\subseteq\rfloor$
Sea $A \subseteq X$ y consideremos la familia $\mathcal{F}_A$. Como $A \in \tau$ por hipótesis y $A \subseteq A$ entonces $A \in \mathcal{F}_A$ y por lo tanto:

$$A \subseteq Int_\tau A$$

pues $\cup_{U\in\mathcal{F}_A} U = Int_\tau A$ por la Observación 3.1.2.

$\supseteq\rfloor$
Dado $A \subseteq X$ y $\mathcal{F}_A$, entonces como $Int_\tau A = \cup_{U\in\mathcal{F}_A} U$ por la Observación 3.1.2 se tiene que:

$$Int_\tau A \subseteq A.$$

Ambas contenciones demuestran que:

$$A = Int_\tau A.$$

b⇒a

Dado $A \subseteq X$ y $\mathcal{F}_A$ entonces $Int_\tau A = \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U$ por la Observación 3.1.2. Como τ es una topología en X entonces:

$$\cup_{U \in \mathcal{F}_A} U \in \tau$$

de acuerdo a la Definición 2.1.6 (la definición de topología) y como por hipótesis tenemos que $A = Int_\tau A$ entonces:

$$A \in \tau.$$

■

Es decir que dado un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto de X, tenemos que A es abierto si y sólo si es igual a su interior.
Otra propiedad que es sencilla deducir a partir de la Definición 3.1.1 y de la Observación 3.1.2 se menciona en la siguiente

Afirmación 3.1.4. Dado $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \subseteq X$, el interior de A es el mayor abierto de (X, τ) contenido en A.

Demostración:

Sea $A \subseteq X$ y la familia $\mathcal{F}_A$ determinada en la Observación 3.1.2. Supongamos que existe $B \subseteq X$ tal que $B \in \tau$ y $B \subseteq A$ entonces:

$$B \in \mathcal{F}_A$$

y por lo tanto $B \subseteq \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U = Int_\tau A$. Es decir que:

$$B \subseteq Int_\tau A.$$

■

Considerando este resultado se puede deducir la observación siguiente:

Observación 3.1.5. Si (X, τ) es un espacio topológico y

$$A \subseteq B \subseteq X$$

Entonces:

$$Int_\tau A \subseteq Int_\tau B.$$

Demostración:

Para $A \subseteq X$ sabemos que $Int_\tau A \subseteq A$ por la Observación 3.1.2. Luego, como por hipótesis tenemos que $A \subseteq B$, entonces

$$Int_\tau A \subseteq B$$

e $Int_\tau A$ es abierto. Por otra parte $Int_\tau B \subseteq B$ es el mayor abierto contenido en B (Afirmación 3.1.4), por lo tanto

$$Int_\tau A \subseteq Int_\tau B.$$

■

Notemos que si (X,τ) es un espacio topológico entonces para $A \in P(X)$ se tiene que $Int_\tau A \in P(X)$. Algunas de las propiedades que Int_τ cumple (demostradas en [7] página 18), son las siguientes.

Proposición 3.1.6. Si $(X,\tau)\in |\mathfrak{Top}|$ y $A, B \in P(X)$, entonces:

a. $Int_\tau X = X$.

b. $Int_\tau A \subseteq A$.

c. $Int_\tau(Int_\tau A) = Int_\tau A$.

d. $Int_\tau(A \cap B) = (Int_\tau A) \cap (Int_\tau B)$.

e. $(Int_\tau A) \cup (Int_\tau B) \subseteq Int_\tau(A \cup B)$.

Observación. Para un espacio indiscreto con más de un punto no se tiene la contención en sentido contrario en el inciso (e) de la Proposición 3.1.6. Veamos :

Dado (X,τ) un espacio topológico con más de un punto e indiscreto, es decir $\tau = \{X, \emptyset\}$, podemos considerar $A \subsetneq X$ (un subconjunto propio de X) tal que $A \neq \emptyset$ entonces

$$X - A \neq \emptyset \text{ e } Int_\tau A = \emptyset,$$

debido a que el único abierto de (X,τ) contenido en A es $\emptyset$, pero también $Int_\tau(X-A) = \emptyset$, por la misma razón. De ambas igualdades obtenemos que

$$(Int_\tau A) \cup (Int_\tau(X - A)) = \emptyset.$$

Por otra parte tenemos que

$$Int_\tau(A \cup (X - A)) = Int_\tau(X) = X.$$

De esta manera tenemos que $(Int_\tau A) \cup (Int_\tau(X-A)) \subseteq Int_\tau(A \cup (X-A))$, sin embargo, la contención inversa no se da.

■

3.2. El operador interior

Ya comentamos que el concepto de interior de un conjunto en un espacio topológico, permite definir para cada conjunto X un *operador interior*. Las propiedades que cumple un operador interior quedan establecidas en la definición siguiente.

Definición 3.2.1. Dado X un conjunto y $A, B \in P(X)$, un *operador interior* en X es una función

$$\alpha : P(X) \to P(X)$$

Tal que:

I_1. $\alpha X = X$.

I_2. $\alpha A \subseteq A$.

I_3. $\alpha(\alpha A) = \alpha A$.

I_4. $\alpha(A \cap B) = \alpha A \cap \alpha B$.

Una propiedad, del operador interior, que resulta directamente de I_4 de la Definición 3.2.1 es la siguiente.

Observación 3.2.2. Dado X un conjunto y α un operador interior en X, si $A, B \in P(X)$ entonces

$$A \subseteq B \text{ implica que } \alpha A \subseteq \alpha B.$$

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $A \subseteq B$, entonces $A = A \cap B$ y por lo tanto:

$$\alpha A = \alpha(A \cap B).$$

Por I_4 de la Definición 3.2.1 también se tiene que $\alpha(A \cap B) = \alpha A \cap \alpha B$, debido a esto último tenemos que $\alpha A = \alpha A \cap \alpha B$, entonces

$$\alpha A \subseteq \alpha B.$$

■

Si X es un conjunto, entonces resulta que a partir de un operador interior en X, se puede generar una topología para X como vemos en el siguiente teorema.

Topología τ_α

Teorema 3.2.3. Si X es un conjunto y α es un operador interior en X entonces:

$$\tau_\alpha := \{A \in P(X) |\ \alpha A = A\}$$

es una topología en X que satisface:

$$\text{Para todo } A \subseteq X,\ Int_{\tau_\alpha} A = \alpha A.$$

Demostración :

Primero veamos que τ_α es una topología en X.

a) De la Definición 3.2.1 I_1 se tiene que $\alpha X = X$, por lo tanto:

$$X \in \tau_\alpha.$$

De la Definición 3.2.1 I_2 tenemos que $\alpha A \subseteq A$ para todo $A \in P(X)$, en particular para $\emptyset$, es decir

$$\alpha\emptyset \subseteq \emptyset$$

y por otra parte $\emptyset \subseteq \alpha\emptyset$ pues el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. Por las dos contenciones que acabamos de ver podemos concluir que:

$$\alpha\emptyset = \emptyset.$$

Por lo tanto $\emptyset \in \tau_\alpha$. Así tenemos que el total y el vacío están en τ_α.

b) Consideremos a $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_\alpha$. Se tiene que $A_j \subseteq \cup_{i\in I} A_i$ para toda $j \in I$, entonces $\alpha A_j \subseteq \alpha(\cup_{i\in I} A_i)$ (Observación 3.2.2.) para toda $j \in I$, por lo tanto

$$\cup_{i\in I}\alpha A_i \subseteq \alpha(\cup_{i\in I} A_i).$$

Como $A_i \in \tau_\alpha$ para toda $i \in I$, también se tiene que $\alpha A_i = A_i$; entonces

$$\cup_{i\in I} A_i \subseteq \alpha(\cup_{i\in I} A_i).$$

Por otra parte $\cup_{i\in I} A_i \subseteq X$ y por lo tanto se tiene que $\alpha(\cup_{i\in I} A_i) \subseteq \cup_{i\in I} A_{i\in I}$ por la propiedad I_2. Entonces $\alpha(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} A_i$ y por lo tanto

$$\cup_{i\in I} A_i \in \tau_\alpha.$$

c) Sea $\{U, V\} \subseteq \tau_\alpha$. Se tiene que

$$\alpha(U \cap V) = \alpha U \cap \alpha V$$

por I_4. Como U, $V \in \tau_\alpha$ entonces

$$\alpha U = U \text{ y } \alpha V = V$$

por lo tanto $\alpha(U \cap V) = U \cap V$, de donde podemos concluir que:

$$U \cap V \in \tau_\alpha.$$

Entonces τ_α es una topología en X.

Para la segunda parte del teorema, considérese $A \in P(X)$. Por I_3 se tiene que $\alpha(\alpha A) = \alpha A$ por lo tanto $\alpha A \in \tau_\alpha$ y ya que α es operador interior en X, también se tiene que $\alpha A \subseteq A$ por I_2, en consecuencia

$$\alpha A \subseteq Int_{\tau_\alpha} A,$$

pues $Int_{\tau_\alpha} A$ es el mayor abierto de (X, τ_α) contenido en A (Afirmación 3.1.4.).

Por otro lado como $Int_{\tau_\alpha} A \subseteq A$, entonces por la Observación 3.2.2. $\alpha(Int_{\tau_\alpha} A) \subseteq \alpha A$ y dado que $Int_{\tau_\alpha} A \in \tau_\alpha$ implica que $\alpha(Int_{\tau_\alpha} A) = Int_{\tau_\alpha} A$, por lo tanto $Int_{\tau_\alpha} A \subseteq \alpha A$, entonces

$$Int_{\tau_\alpha} A = \alpha A.$$

■

Debido al teorema que acabamos de probar, dado un conjunto X podemos relacionar un operador interior en X con una topología para X.
Podemos preguntarnos, también, cómo luce un operador interior sin tener en cuenta alguna topología, es decir dado un conjunto X determinar una función que este definida de $P(X)$ en $P(X)$ que sea un operador interior en X, para esto consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $A, B \in P(X)$ y $\alpha : P(X) \to P(X)$ una función dada por

$$\alpha A = A \text{ si } A = X \text{ y } \alpha A = \emptyset \text{ si } A \neq X.$$

Comprobaremos que α, así definida, es un operador interior en X.

I_1. $\alpha X = X$ por definición de α.

I_2. Si $A = X$ entonces $\alpha A = A \subseteq A$ por lo tanto $\alpha A \subseteq A$. Por otra parte si $A \neq X$ entonces $\alpha A = \emptyset \subseteq A$, por lo tanto $\alpha A \subseteq A$ y en cualquier caso $\alpha A \subseteq A$.

I_3. Si $A = X$ entonces $\alpha A = A$ de donde $\alpha(\alpha A) = \alpha A = A$, por lo tanto $\alpha(\alpha A) = A$. Si $A \neq X$ entonces $\alpha A = \emptyset$ por lo tanto $\alpha(\alpha A) = \alpha\emptyset$ y $\alpha\emptyset = \emptyset$ pues $X \neq \emptyset$, entonces $\alpha(\alpha A) = \emptyset = \alpha A$, es decir que $\alpha(\alpha A) = \alpha A$ y en cualquier caso $\alpha(\alpha A) = \alpha A$.

I_4.

a) Si $A = X$ y $B \neq X$ puede pasar que $A \cap B \neq \emptyset$ o $A \cap B = \emptyset$ en cualquier caso $A \cap B \neq X$ por lo tanto $\alpha(A \cap B) = \emptyset$ y $\alpha A = A$, $\alpha B = \emptyset$ de donde $\alpha A \cap \alpha B = A \cap \emptyset = \emptyset$ y obtenemos que

$$\alpha(A \cap B) = \alpha A \cap \alpha B.$$

b) Si $A = X$ y $B = X$ entonces $A \cap B = A$ de donde $\alpha(A \cap B) = \alpha X = X$. Por otra parte $\alpha A = A$ y $\alpha B = B$ por lo tanto $\alpha A \cap \alpha B = X$ y obtenemos que

$$\alpha(A \cap B) = \alpha A \cap \alpha B.$$

c) Si $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$ entonces $A \cap B = \emptyset$ de donde $\alpha(A \cap B) = \alpha\emptyset = \emptyset$, por otra parte $\alpha A \cap \alpha B = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ de donde

$$\alpha(A \cap B) = \alpha A \cap \alpha B.$$

El caso en que $A \neq X$ y $B = X$ es análogo al a). Por lo tanto α es un operador interior en X y podemos considerar la pareja

$$(X, \alpha)$$

como un objeto en el que X es un conjunto α una estructura para X llamada operador interior en X, por otro lado como demostramos que un operador interior determina una topología para X (Teorema 3.2.3) por medio del conjunto

$$\tau_\alpha = \{U \in P(X) |\ \alpha U = U\},$$

entonces podemos preguntarnos qué topología, para X, determina el operador que acabamos de ver. Si $A \in P(X)$ tal que $A = X$ entonces $\alpha A = A$, es decir que $X \in \tau_\alpha$, por otra parte si $A = \emptyset$ entonces $\alpha A = \emptyset$ y por lo tanto $\emptyset \in \tau_\alpha$. Si $A \in P(X)$ tal que $A \subsetneq X$, $A \neq \emptyset$ entonces $A \notin \tau_\alpha$. Con lo que los únicos abiertos, en este caso, son el vacío y el total, es decir que α determina la topología indiscreta.
■

La clase $|\mathfrak{T}_1|$

Se puede pensar en un conjunto X arbitrario y en el operador interior

$$\alpha : P(X) \to P(X)$$

a partir del cual, como ya vimos en el Teorema 3.2.3, se puede definir una topología para X. Por otra parte este operador interior permite dotar a X de una estructura de tal forma que podemos considerar a la pareja (X, α). A la familia de operadores interiores en X la denotaremos por

$$\mathfrak{T}_1[X].$$

Teniendo en cuenta esto definimos la clase

$$|\mathfrak{T}_1| := \{(X, \alpha) \mid X \text{ es un conjunto y } \alpha \in \mathfrak{T}_1[X]\}.$$

Los $\mathfrak{T}_1$-*morfismos*

En esta sección vamos a definir los $\mathfrak{T}_1$-*morfismos* entre dos conjuntos dotados con sendos operadores interiores.

Definición 3.2.4. Dados $(X, \alpha), (Y, \beta) \in |\mathfrak{T}_1|$ y $f : X \to Y$ una función. Decimos que

$$f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$$

es un $\mathfrak{T}_1$-morfismo o que f conserva la $\mathfrak{T}_1$-*estructura* de (X, α) en (Y, β) si

$$\text{para todo } B \subseteq Y \text{ se tiene que } f^{-1}(\beta B) \subseteq \alpha f^{-1}(B).$$

A partir de la Definición 3.2.4 vamos a demostrar que se cumplen las propiedades de composición e identidad.

Proposición 3.2.5. Dados (X, α), (Y, β) y $(Z, \gamma) \in |\mathfrak{T}_1|$.

a. Si $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ y $g : (Y, \beta) \to (Z, \gamma)$ son $\mathfrak{T}_1$-*morfismos*, entonces

$$g \circ f : (X, \alpha) \to (Z, \gamma) \text{ es } \mathfrak{T}_1\text{-}\textit{morfismo.}$$

b. $1_X : (X, \alpha) \to (X, \alpha)$ tal que $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$, es $\mathfrak{T}_1$-morfismo.

Demostración :

(a) Sea $W \subseteq Z$; puesto que, por hipótesis, $g : (Y, \beta) \to (Z, \gamma)$ es un $\mathfrak{T}_1$-*morfismo* se tiene que

$$g^{-1}(\gamma W) \subseteq \beta g^{-1}(W)$$

y por lo tanto

$$f^{-1}(g^{-1}(\gamma W)) \subseteq f^{-1}(\beta g^{-1}(W)).$$

Por otra parte se tiene también que

$$g^{-1}(W) \subseteq Y \text{ y } f : (X,\alpha) \to (Y,\beta) \text{ es } \mathfrak{T}_1\text{-}\mathit{morfismo}$$

entonces $f^{-1}(\beta g^{-1}(W)) \subseteq \alpha f^{-1}(g^{-1}(W))$ y por lo tanto se tiene que

$$f^{-1}(g^{-1}(\gamma W)) \subseteq \alpha f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Y ya que $f^{-1}g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$, entonces

$$(g \circ f)^{-1}(\gamma W) \subseteq \alpha (g \circ f)^{-1}(W)$$

y por lo tanto $g \circ f : (X,\alpha) \to (Z,\gamma)$ es $\mathfrak{T}_1$-morfismo.

(b) Se tiene que $1_X^{-1}(\alpha U) = \alpha U$ por lo tanto

$$1_X : (X,\alpha) \to (X,\alpha)$$

es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo.*
■

Ya vimos que los $\mathfrak{T}_1$-*morfismos* entre elementos de $|\mathfrak{T}_1|$ cumplen las propiedades de composición e identidad; ahora conformaremos la categoría concreta $\mathfrak{T}_1$

3.3. La *ccce* $\mathfrak{T}_1$

Llegado este punto tenemos los elementos necesario para definir la *ccce* $\mathfrak{T}_1$.

Definición 3.3.1. La *ccce* $\mathfrak{T}_1$ es una *ccce* conformada por los siguientes miembros:

i) La clase $|\mathfrak{T}_1|$, a cuyos elementos les llamamos $\mathfrak{T}_1$-*objetos.*

ii) Para cada par $(X,\alpha),(Y,\beta) \in |\mathfrak{T}_1|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{T}_1}[(X,\alpha),(Y,\beta)] := \{f \in Y^X |\ f : (X,\alpha) \to (Y,\beta) \text{ es } \mathfrak{T}_1\text{-}\mathit{morfismo}\}.$$

Este conjunto está sujeto a las siguientes condiciones (demostradas en la Proposición 3.2.5.):
(a) **Propiedad de composición**.
Dados $(X,\alpha),(Y,\beta)$ y (Z,γ) $\mathfrak{T}_1$-*objetos* arbitrarios, si:

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X,\alpha),(Y,\beta)] \text{ y } g \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(Y,\beta),(Z,\gamma)]$$

entonces

$$g \circ f \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X,\alpha),(Z,\gamma)]$$

(b) **Propiedad de identidad.**
Para todo $\mathfrak{T}_1$-*objetos* (X, α)

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X, \alpha), (X, \alpha)].$$

Donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.

En lo que queda de este capítulo demostraremos que las *ccce* $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_1$ son *concretamente isomorfas*.

3.4. $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$

Introducción

Ya hemos definido y descrito varios aspectos importantes de las *ccce* $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_1$. Por otra parte la forma en que hemos expuesto nuestros resultados, hasta aquí, nos permite decir a grandes rasgos que la *ccce* $\mathfrak{Top}$ es la *ccce* de todos los $\mathfrak{Top}$-*objetos* y todos los $\mathfrak{Top}$-*morfismos* definibles entre ellos y que la *ccce* $\mathfrak{T}_1$ es la *ccce* de todos los $\mathfrak{T}_1$-*objetos* y todos los $\mathfrak{T}_1$-*morfismos* definibles entre ellos. Básicamente, teniendo en cuenta lo anterior, en esta sección probaremos que:

$$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1.$$

La *ccce* $\mathfrak{Top}$ $\doteqdot$ a la *ccce* $\mathfrak{T}_1$

Teorema 3.4.1. $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$.

Demostración:

(i) Sea $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$; para todo $A \in P(X)$ podemos definir

$$\alpha_\tau A := Int_\tau A$$

y entonces tenemos que bajo esta relación queda definida una función

$$\Phi_X : \mathfrak{Top}[X] \to \mathfrak{T}_1[X]$$

cuya regla de correspondencia es la siguiente

$$\tau \mapsto \alpha_\tau.$$

Por otra parte si α es un operador interior en X (es decir $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$) podemos definir

$$\tau_\alpha := \{A \in P(X) |\ \alpha A = A\},$$

que, como ya vimos, es una topología para X; por lo tanto queda definida una función

$$\Psi_X : \mathfrak{T}_1[X] \to \mathfrak{Top}[X]$$

cuya regla de correspondencia es:

$$\alpha \mapsto \tau_\alpha.$$

Para comprobar que $\Phi_X : \mathfrak{Top}[X] \to \mathfrak{T}_1[X]$ es biyectiva, probaremos que

$$\Psi_X : \mathfrak{T}_1[X] \to \mathfrak{Top}[X]$$

es la inversa de Φ_X.
• Demostraremos que $\Psi_X \circ \Phi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$ (donde $\mathcal{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}(\tau) = \tau$ para toda $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$).
Sea $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$ se tiene que

$$(\Psi_X \circ \Phi_X)(\tau) = \Psi_X(\Phi_X(\tau)) = \Psi_X(\alpha_\tau) = \tau_{\alpha_\tau}$$

Luego para $A \in P(X)$, se tiene que

$$A \in \tau \text{ si y sólo si } A = Int_\tau A = \alpha_\tau A \text{ si y sólo si } A \in \tau_{\alpha_\tau}$$

Por lo tanto $\tau = \tau_{\alpha_\tau}$, entonces para toda $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$ se tiene que $(\Psi_X \circ \Phi_X)(\tau) = \tau$. Es decir $\Psi_X \circ \Phi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$.
• Demostraremos que $\Phi_X \circ \Psi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_1[X]}$ (donde $\mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_1}[X](\alpha) = \alpha$ para toda $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$)
Dada $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$ se tiene que

$$(\Phi_X \circ \Psi_X)(\alpha) = \Phi_X(\Psi_X(\alpha)) = \Phi_X(\tau_\alpha) = \alpha_{\tau_\alpha}$$

Si $A \in P(X)$, entonces

$$\alpha A = Int_{\tau_\alpha} A = \alpha_{\tau_\alpha} A.$$

Entonces $\alpha = \alpha_{\tau_\alpha}$; por lo tanto para toda $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$ se tiene que $(\Phi_X \circ \Psi_X)(\alpha) = \alpha$. Es decir $\Phi_X \circ \Psi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_1[X]}$.
Entonces $\Psi_X = \Phi_X^{-1}$ y Φ_X es biyectiva.

(ii) Para X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función vamos a probar que

$$f \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X,\tau),(Y,\sigma)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X,\Phi_X(\tau)),(Y,\Phi_Y(\sigma))].$$

Es decir que $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es $\mathfrak{Top}$-*morfismo* si y sólo si $f : (X,\alpha_\tau) \to (Y,\alpha_\sigma)$ es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo*. Donde

$$\Phi_X(\tau) = \alpha_\tau \text{ y } \Phi_Y(\sigma) = \alpha_\sigma.$$

Veamos:

$\Rightarrow\rfloor$ Dado $U \subseteq Y$ se tiene que $\alpha_\sigma U \subseteq U$ porque α_σ es operador interior en Y, por lo tanto

$$f^{-1}(\alpha_\sigma U) \subseteq f^{-1}(U).$$

Por otra parte $f^{-1}(U) \subseteq X$ y como α_τ es operador interior en X se tiene que

$$\alpha_\tau f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U),$$

entonces $f^{-1}(\alpha_\sigma U) \subseteq f^{-1}(U)$ y $\alpha_\tau f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$. Pero $\alpha_\sigma U = Int_\sigma U$ lo cual significa que $\alpha_\sigma U \in \sigma$ (pues $Int_\sigma U \in \sigma$) y como por hipótesis

$$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$$

es un $\mathfrak{Top}$-*morfismo*, entonces

$$f^{-1}(\alpha_\sigma U) \in \tau.$$

Por otra parte también se sabe que

$$Int_\tau f^{-1}(U) = \alpha_\tau f^{-1}(U) \text{ (entonces } \alpha_\tau f^{-1}(U) \in \tau \text{ pues } Int_\tau f^{-1}(U) \in \tau)$$

es el mayor abierto de (X, τ) contenido en $f^{-1}(U)$ (Afirmación 3.1.4), entonces

$$f^{-1}(\alpha_\sigma U) \subseteq \alpha_\tau f^{-1}(U).$$

Por lo tanto $f : (X, \alpha_\tau) \to (Y, \alpha_\sigma)$ es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo*.

$\Leftarrow\rfloor$ Dado $U \in \sigma$ implica que $U = Int_\sigma U = \alpha_\sigma U$ y como por hipótesis se tiene que $f : (X, \alpha_\tau) \to (Y, \alpha_\sigma)$ es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo*, entonces para todo $U \subseteq Y$

$$f^{-1}(\alpha_\sigma U) \subseteq \alpha_\tau f^{-1}(U)$$

por lo tanto se tiene que $f^{-1}(U) = f^{-1}(\alpha_\sigma U) \subseteq \alpha_\tau f^{-1}(U)$, es decir $f^{-1}(U) \subseteq \alpha_\tau f^{-1}(U)$ y también se sabe que

$$\alpha_\tau f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$$

porque α_τ es operador interior en X, entonces $f^{-1}(U) = \alpha_\tau f^{-1}(U) = Int_\tau f^{-1}(U)$, por lo tanto

$$f^{-1}(U) \in \tau$$

y entonces $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es $\mathfrak{Top}$-*morfismo*. Así podemos concluir que $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$.
■

Capítulo 4

$\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$

Introducción

Otros conceptos básicos en topología, además de conjunto abierto e interior de un conjunto, son: conjunto cerrado, cerradura de un conjunto, frontera y vecindad. Es con base en estos conceptos que vamos a formar las respectivas categorías concretas. En este capítulo nos enfocaremos en el concepto de conjunto cerrado, dejaremos para los siguientes capítulos los conceptos de cerradura, vecindad y frontera.
Algo bien sabido que ocurre en relación con los conceptos de abierto y cerrado, no es que sean contrarios sino que son *duales*; un conjunto que no es abierto no necesariamente es cerrado ni inversamente. Vimos, por ejemplo, que la unión arbitraria de abiertos es abierta; para los cerrados tendremos que intersecciones arbitrarias de cerrados es cerrada. Esto ilustra mínimamente la dualidad mencionada.
Básicamente en este capítulo daremos la definición de conjunto cerrado, la descripción de la categoría concreta que genera y finalizaremos demostrando que $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$.

4.1. El conjunto cerrado y sus propiedades

Como mencionamos, lo que cumplen los conjuntos abiertos respecto de la unión, lo cumplen los cerrados respecto de la intersección y lo que cumplen los conjuntos abiertos respecto de la intersección, lo cumplen los conjuntos cerrados respecto de la unión.

Definición 4.1.1. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $C \in P(X)$, diremos que C *cerrado* en (X, τ) si su complemento es abierto en (X, τ), es decir si $X - C \in \tau$.

Observación 4.1.2. Dado $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$, la familia $c(x)_\tau := \{C \in P(X) \mid X - C \in \tau\}$ de conjuntos cerrados de X respecto de la topología τ, es distinta del vacío y tiene como elementos al conjunto X y al conjunto $\emptyset$.

Demostración:

Se tiene que $X, \emptyset \in P(X)$, $X - X = \emptyset \in \tau$ y $X - \emptyset = X \in \tau$ (ya que $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$), por lo tanto

$$X, \emptyset \in c(x)_\tau.$$

■

Llamaremos a $c(x)_\tau$ la *ce familia* de conjuntos cerrados de X respecto de la topología τ. De a cuerdo con la dualidad mencionada (en la introducción de este capítulo), en particular con las propiedades características de los conjuntos abiertos, si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$, la c-familia de conjuntos cerrados de X respecto de la topología τ cumple las siguientes propiedades:

Proposición 4.1.3. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$, entonces $c(x)_\tau$ satisface:

a. X y $\emptyset$ son elementos de $c(x)\tau$.

b. Para toda $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq c(x)_\tau$, I arbitrario distinto del vacío, se tiene que $\cap_{i\in I} C_i \in c(x)_\tau$.

c. Para toda $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq c(x)_\tau$, con I finito, se tiene que $\cup_{i\in I} C_i \in c(x)_\tau$.

Demostración:

a) Este inciso es la Observación 4.1.2.

b) Sea $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq c(x)_\tau$, entonces para toda $i \in I$ tenemos que $X - C_i \in \tau$. Como I es arbitrario y τ es una topología para X, también se tiene que

$$\cup_{i\in I}(X - C_i) \in \tau$$

Pero debido a les leyes de De Morgan sabemos que $\cup_{i\in I}(X - C_i) = X - \cap_{i\in I} C_i$ y por lo tanto $X - \cap_{i\in I} C_i \in \tau$; luego por definición de $c(x)_\tau$, se tiene que

$$\cap_{i\in I} C_i \in c(x)_\tau.$$

c) Sea $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq c(x)_\tau$, con I finito. Se tiene que $X - C_i \in \tau$, para toda $i \in I$; por ser finito y τ una topología para X (Observación 2.1.7), se tiene que

$$\cap_{i\in I}(X - C_i) \in \tau$$

Por las leyes de De Morgan se tiene que $\cap_{i\in I}(X - C_i) = X - \cup_{i\in I} C_i$, por lo tanto $X - \cup_{i\in I} C_i \in \tau$, es decir

$$\cup_{i\in I} C_i \in c(x)_\tau.$$

■

De manera breve podemos decir que si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ entonces $c(x)_\tau \subseteq P(X)$ es *cerrada* bajo *intersecciones arbitrarias* y *uniones finitas* arbitrarias.

Topología $\tau_{c(x)}$

Definición 4.1.4. Dado X un conjunto y $c(x) \subseteq P(X)$ una familia de subconjuntos de X, si $c(x)$ cumple **a**, **b** y **c** de la Proposición 4.1.3, llamaremos *c-familia* de X a $c(x)$. Veremos que la familia $\tau_{c(x)}$ de los complementos de los elementos de una *c-familia* de X determina una topología para X, de esta manera tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5. Si X es un conjunto y $c(x) \subseteq P(X)$ es una *c-familia* de X, se tiene que

$$\tau_{c(x)} := \{U \in P(X) \mid X - U \in c(x)\}$$

es una topología para X y $c(x)$ es la familia de cerrados de $(X, \tau_{c(x)})$.

Demostración:

a) Se tiene que $X \in P(X)$ y $X - X = \emptyset$. Por otra parte como $c(x)$ es una *c-familia* de X entonces

$$\emptyset \in c(x) \text{ (Definición 4.1.4),}$$

por lo tanto $X \in \tau_{c(x)}$.

Se sabe que $\emptyset \in P(X)$ y $X - \emptyset = X$ y puesto que $c(x)$ es una *c-familia* para X entonces

$$X \in c(x) \text{ (Definición 4.1.4).}$$

De esto podemos concluir que $\emptyset \in \tau_{c(x)}$.

b) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_{c(x)}$, se tiene entonces $U_i \in \tau_{c(x)}$ para toda $i \in I$, por lo tanto $X - U_i \in c(x)$ para toda $i \in I$. Como $c(x)$ es una $c\text{-}familia$ de X, $c(x)$ satisface **b** y **c** de la Proposición 4.1.3, entonces por **b**, $c(x)$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias, es decir

$$\cap_{i \in I}(X - U_i) \in c(x).$$

Por De Morgan se tiene que $\cap_{i \in I}(X - U_i) = X - \cup_{i \in I} U_i$, lo cual implica que $X - \cup_{i \in I} U_i \in c(x)$ y por lo tanto $\cup_{i \in I} U_i \in \tau_{c(x)}$.

c) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_{c(x)}$, con I finito. Por una parte tenemos que $U_i \in \tau_{c(x)}$ para toda $i \in I$ y entonces $X - U_i \in c(x)$ para toda $i \in I$; por otro lado se tiene que $c(x)$ es una $c\text{-}familia$ de X, lo cual significa que $c(x)$ es cerrada bajo uniones finitas (inciso **c** de la Proposición 4.1.3); en consecuencia

$$\cup_{i \in I}(X - U_i) \in c(x)$$

Por las leyes de De Morgan sabemos que $\cup_{i \in I}(X - U_i) = X - \cap_{i \in I} U_i$, entonces $X - \cap_{i \in I} U_i \in c(x)$, pero esto es la definición de pertenecer a $\tau_{c(x)}$, es decir $\cap_{i \in I} U_i \in \tau_{c(x)}$.
En conclusión $\tau_{c(x)}$ es una topología para X.

Ahora bien, $c(x)$ es la familia de cerrados de $(X, \tau_{c(x)})$; en efecto, dado $C \in P(X)$ tenemos que C es cerrado en $(X, \tau_{c(x)})$ si y sólo si $X - C \in \tau_{c(x)}$ si y sólo si, $X - (X - C) \in c(x)$. Por lo tanto

$$C \text{ es cerrado en } (X, \tau_{c(x)}) \text{ si y sólo si } C \in c(x).$$

$\blacksquare$

Si nos preguntamos cómo podría ser una *c-familia* de algún conjunto X, podemos considerar el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Sea X un conjunto, consideremos a $P(X)$ entonces $P(X)$ es una *c-familia* de X, veamos.

a) $X, \emptyset \in P(X)$ pues X y $\emptyset$ son subconjuntos de X. (así queda en evidencia que se cumple **a** de la Proposición 4.1.3).

b) Sea $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq P(X)$, con I arbitrario distinto del vacío, puesto que $C_i \subseteq X$ para todo $i \in I$ entonces $\cap_{i\in I} C_i \in P(X)$ y queda probado que $P(X)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias (se cumple **b** de la Proposición 4.1.3).

c) Sea $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq P(X)$, con I finito, puesto que $C_i \subseteq X$ para todo $i \in I$ entonces $\cup_{i\in I} C_i \in P(X)$, por lo que queda demostrado que $P(X)$ es cerrado bajo uniones finitas arbitrarias (se cumple **c** de la Proposición 4.1.3). Tenemos entonces que $P(X)$ es una *c-familia* para X y podemos considerar la pareja

$$(X, P(X))$$

en la que X es un conjunto y $P(X)$ es una estructura para X llamada *c-familia* para X. Podemos, de acuerdo al Teorema 4.1.5, determinar una topología para X definida por la *c-familia* $P(X)$ que acabamos de ver. Tal topología está determinada por

$$\tau_{P(X)} = \{U \in P(X) |\ X - U \in P(X)\}.$$

Como se cumple que $X - U \in P(X)$ para todo $U \in P(X)$ entonces $\tau_{P(X)}$ es la topología discreta.

$\blacksquare$

Hemos demostrado que si X es un conjunto y $c(x)$ es una c-$familia$ de X, entonces $c(x)$ genera una topología para X. Con los resultados que hemos obtenido vemos que si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ queda determinada su familia de conjuntos cerrados respecto de la topología τ de X y recíprocamente si X es un conjunto y $c(x)$ una *c-familia* para X entonces se puede determinar una topología para X, esto en términos generales nos deja ver que hay una relación entre estas dos estructuras. En el siguiente apartado sólo definiremos la clase $|\mathfrak{T}_2|$ aunque no está de más tener en mente (en términos generales) la relación anterior que se mencionó.

La clase $|\mathfrak{T}_2|$

Anteriormente ya definimos a $|\mathfrak{Top}|$ y $|\mathfrak{T}_1|$, de manera análoga definiremos la clase $|\mathfrak{T}_2|$, de la siguiente manera: si X es un conjunto entonces podemos considerar la familia $\mathfrak{T}_2[X]$ de c-$familias$ de X, es decir si $c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]$, $c(x)$ es una familia que cumple **a**, **b** y **c** de la Proposición 4.1.3. Definimos la clase

$$|\mathfrak{T}_2| := \{(X, c(x)) \mid X \text{ es un conjunto y } c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]\}.$$

Con miras a conformar la *ccce* $\mathfrak{T}_2$ definiremos en la siguiente sección los $\mathfrak{T}_2$-*morfismos* y las propiedades que deben cumplir.

Los $\mathfrak{T}_2$-*morfismos*

Definición 4.1.6. Dados $(X, c(x)), (Y, c(y)) \in |\mathfrak{T}_2|$ y $f : X \to Y$ una función, diremos que

$$f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$$

es un $\mathfrak{T}_2$-*morfismo* o que f conserva la estructura de $(X, c(x))$ en $(Y, c(y))$ si

$$\text{Para todo } C \subseteq Y,\ C \in c(y) \text{ implica que } f^{-1}(C) \in c(x).$$

Con base en esta definición demostraremos las propiedades de composición e identidad entre los $\mathfrak{T}_2$-*morfismos.*

Proposición 4.1.7. Dados $(X, c(x))$, $(Y, c(y))$ y $(Z, c(z)) \in |\mathfrak{T}_2|$. Entonces:

a. Si $f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$ y $g : (Y, c(y)) \to (Z, c(z))$ son $\mathfrak{T}_2$-*morfismos*, entonces

$$g \circ f : (X, c(x)) \to (Z, c(z)) \text{ es un } \mathfrak{T}_2\text{-}morfismo.$$

b. $1_X : (X, c(x)) \to (X, c(x))$ es un $\mathfrak{T}_2$-*morfismo.*

Demostración:

(a) Sea $W \subseteq Z$ tal que $W \in c(z)$, entonces debido a que g es un $\mathfrak{T}_2$-*morfismo* se tiene que

$$g^{-1}(W) \in c(y)$$

por otra parte como $f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$ es un $\mathfrak{T}_2$-*morfismo*, entonces

$$f^{-1}(g^{-1}(W)) \in c(x); \text{ pero } f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$$

por lo tanto $(g \circ f)^{-1}(W) \in c(x)$ es decir $g \circ f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$ es un $\mathfrak{T}_2$-*morfismo.*

(b) Sea $C \subseteq X$ tal que $C \in c(x)$, se tiene que $1_X^{-1}(C) = C$, por lo tanto $1_X^{-1}(C) \in c(x)$, entonces

$$1_X : (X, c(x)) \to (X, c(x)) \text{ es un } \mathfrak{T}_2\text{-}morfismo.$$

■

Ahora podemos conformar la categoría concreta $\mathfrak{T}_2$.

4.2. La *ccce* $\mathfrak{T}_2$

Definición 4.2.1. La *ccce* $\mathfrak{T}_2$ es una *ccce* conformada por los siguientes miembros:

i) La clase $|\mathfrak{T}_2|$, a cuyos elementos les llamaremos $\mathfrak{T}_2$-*objetos.*

ii) Para cada par $(X, c(x)), (Y, c(y)) \in |\mathfrak{T}_2|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (Y, c(y))] := \{f \in Y^X |\ f : (X, c(x)) \to (Y, c(y)) \text{ es } \mathfrak{T}_2\text{-}morfismo\},$$

sujeto a las siguientes propiedades (proposición 4.1.7.)
(a) **Propiedad de composición**
Sean $(X, c(x))$, $(Y, c(y))$ y $(Z, c(z))$ $\mathfrak{T}_2$-*objetos* arbitrarios, se tiene que

$$\text{Si } f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (Y, c(y))] \text{ y } g \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(Y, c(y)), (Z, c(z))]$$

Entonces $g \circ f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (Z, c(z))]$

(b) **Propiedad de identidad**
Para todo $\mathfrak{T}_2$-*objeto* $(X, c(x))$

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (X, c(x))].$$

donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.

La relación entre $c(x)$ y τ

Observación 4.2.2. Sea X un conjunto, $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_2$, entonces $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$ son biyectables.

Demostración:

▶ Sea $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$ entonces

$$c(x)_\tau := \{C \subseteq X |\ X - C \in \tau\}$$

es la familia de cerrados con respecto de la topología τ por lo que podemos establecer una función de $\mathfrak{Top}[X]$ en $\mathfrak{T}_2[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\tau \mapsto c(x)_\tau$$

sabemos que $c(x)_\tau$ cumple **a**, **b** y **c** de la Proposición 4.1.3, por lo que $c(x)_\tau \in \mathfrak{T}_2[X]$.

Por otra parte sabemos que si $c(x)$ es una *c-familia* para X entonces genera una topología para X (Teorema 4.1.5), la cual es

$$\tau_{c(x)} = \{U \in P(X) | X - U \in c(x)\}$$

por lo que podemos establecer una función de $\mathfrak{T}_2[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$c(x) \mapsto \tau_{c(x)}.$$

Consideremos la composición

$$\tau \mapsto c(x)_\tau \mapsto \tau_{c(x)_\tau}$$

• Demostraremos que $\tau = \tau_{c(x)_\tau}$, veamos:
$U \in \tau$ si y sólo si $X - U \in c(x)_\tau$ si y sólo si $U \in \tau_{c(x)_\tau}$ de donde $\tau = \tau_{c(x)_\tau}$. Entonces tenemos que

$$\tau \mapsto c(x)_\tau \mapsto \tau_{c(x)_\tau} = \mathfrak{Id}_{\mathfrak{Top}[X]}$$

donde $\mathfrak{Id}_{\mathfrak{Top}[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{Top}[X]$.
◀ Recíprocamente si $c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]$, se tiene que

$$\tau_{c(x)} := \{U \in P(X) |\ X - U \in c(x)\}$$

es una topología para X (Teorema 4.1.5), entonces podemos definir una función de $\mathfrak{T}_2[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$c(x) \mapsto \tau_{c(x)}$$

como $\tau_{c(x)}$ es una topología para X entonces define la *c-familia* para X digamos

$$c(x)_{\tau_{c(x)}} := \{C \in P(X) |\ X - C \in \tau_{c(x)}\}.$$

• Demostraremos que $c(x) = c(x)_{\tau_{c(x)}}$.
$C \in c(x)$ si y sólo si $X - C \in \tau_{c(x)}$ si y sólo si $C \in c(x)_{\tau_{c(x)}}$, por lo tanto $c(x) = c(x)_{\tau_{c(x)}}$.
Por lo tanto tenemos que

$$c(x) \mapsto \tau_{c(x)} \mapsto c(x)_{\tau_{c(x)}} = \mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_2[X]}$$

donde $\mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_2[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{T}_2[X]$. Debido a ► y ◄ se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ es biyectable a $\mathfrak{T}_2[X]$.
■

4.3. $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$

Afirmación 4.3.1. Dado X un conjunto y $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, entonces $\mathfrak{T}_1[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$ son biyectables.

Demostración:

Se sabe que la biyectabilidad es una relación de equivalencia entre conjuntos; en particular, es una relación transitiva. Por otra parte para todo X han resultado biyectables $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_1[X]$ (primera parte de la demostración del Teorema 3.4.1) así como $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$ (Observación 4.2.2). Por lo tanto, para todo X, $\mathfrak{T}_1[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$ son biyectables.
■

Teorema 4.3.2. $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$.

Demostración:

(i) Sea X un conjunto y $\mathfrak{T}_1[X]$ la familia de operadores interiores de X. Por la Afirmación 4.3.1 se sabe que $\mathfrak{T}_1[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$ son biyectables; consideremos

$$\Phi_X : \mathfrak{T}_1[X] \to \mathfrak{T}_2[X]$$

la biyección, cuya regla de correspondencia es

$$\alpha \mapsto c(x)_{\tau_\alpha}$$

donde τ_α es la topología asociada al operador interior (Teorema 3.2.3). Por otra parte podemos definir la función biyectiva

$$\Psi_X : \mathfrak{T}_2[X] \to \mathfrak{T}_1[X]$$

cuya regla de correspondencia es

$$c(x) \mapsto \alpha_{\tau_{c(x)}}$$

donde $\tau_{c(x)}$ es la topología asociada a $c(x)$ (Teorema 4.1.5). Como las funciones $\Phi_X : \mathfrak{T}_1[X] \to \mathfrak{T}_2[X]$ y $\Psi_X : \mathfrak{T}_2[X] \to \mathfrak{T}_1[X]$ son biyectivas sólo falta probar que Ψ_X es inversa de Φ_X.

• Demostraremos que Ψ_X es la inversa de Φ_X.

(a) $\Psi_X \circ \Phi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$.

Sea $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$, entonces

$$(\Psi_X \circ \Phi_X)(\alpha) = \Psi_X(\Phi_X(\alpha)) = \Psi_X(c(x)_{\tau_\alpha}).$$

Debido a las biyecciones que vimos entre $\mathfrak{T}_1[X]$ y $\mathfrak{Top}[X]$, $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$, se tiene que

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{T}_1[X] & \to & \mathfrak{Top}[X] & \to & \mathfrak{T}_2[X] & \to & \mathfrak{Top}[X] & \to & \mathfrak{T}_1[X] \\ \alpha & \mapsto & \tau_\alpha & \mapsto & c(x)_{\tau_\alpha} & \mapsto & \tau_\alpha & \mapsto & \alpha, \end{array}$$

por lo tanto

$$\Psi_X(c(x)_{\tau_\alpha}) = \alpha.$$

En consecuencia se tiene que para toda $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$, $(\Psi_X \circ \Phi_X)(\alpha) = \alpha$ y por lo tanto $\Psi_X \circ \Phi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_1[X]}$.

(b) $\Phi_X \circ \Psi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_2[X]}$. Sea $c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]$.

Por las biyecciones que sabemos existen, entre $\mathfrak{Top}[X], \mathfrak{T}_1[X]$ y $\mathfrak{T}_2[X]$, consideremos las siguientes composiciones

$$c(x) \mapsto \tau_{c(x)} \mapsto \alpha_{\tau_{c(x)}} \mapsto \tau_{c(x)} \mapsto c(x).$$

Por lo tanto

$$\Phi_X(\alpha_{\tau_{c(x)}}) = c(x)$$

En consecuencia para toda $c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]$, se tiene que $(\Phi_X \circ \Psi_X)(c(x)) = c(x)$, entonces $\Phi_x \circ \Psi_X = \mathcal{I}d_{\mathfrak{T}_2[X]}$. Por lo tanto Ψ_X es la inversa de Φ_X. Entonces para cada conjunto X queda establecida la correspondencia biyectiva

$$\Phi_X : \mathfrak{T}_1[X] \to \mathfrak{T}_2[X].$$

(ii) Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Demostremos que

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X, \alpha), (Y, \beta)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, \Phi_X(\alpha)), (Y, \Phi_Y(\beta)].$$

Puesto que $\alpha \in \mathfrak{T}_1[X]$, $\beta \in \mathfrak{T}_1[Y]$ entonces $\Phi_X(\alpha) = c(x)_{\tau_\alpha} \in \mathfrak{T}_2[X]$ y $\Phi_Y(\beta) = c(y)_{\tau_\beta} \in \mathfrak{T}_2[Y]$.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $C \subseteq Y$ tal que $C \in c(y)_{\tau_\beta} := \{U \subseteq Y |\ Y - U \in \tau_\beta\}$, por lo tanto

$$Y - C \in \tau_\beta := \{V \in P(Y) |\ \beta V = V\}$$

en consecuencia $\beta(Y - C) = Y - C$ por definición de τ_β. Por otra parte como

$$f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$$

es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo*, se tiene que

$$f^{-1}(Y - C) = f^{-1}(\beta(Y - C)) \subseteq \alpha f^{-1}(Y - C)$$

lo cual implica que $f^{-1}(Y - C) \subseteq \alpha f^{-1}(Y - C)$ y como también se tiene que

$$\alpha f^{-1}(Y - C) \subseteq f^{-1}(Y - C) \text{ (porque } \alpha \text{ es operador interior para } X)$$

entonces $f^{-1}(Y - C) = \alpha f^{-1}(Y - C)$, pero es precisamente la propiedad de pertenecer a $\tau_\alpha := \{U \in P(X) | \ \alpha U = U\}$, entonces

$$f^{-1}(Y - C) \in \tau_\alpha$$

además de que $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$, en consecuencia $X - f^{-1}(C) \in \tau_\alpha$ y por lo tanto

$$f^{-1}(C) \in c(x)_{\tau_\alpha}$$

debido a que $c(x)_{\tau_\alpha} := \{D \subseteq X | \ X - D \in \tau_\alpha\}$; de esta manera $f : (X, c(x)_{\tau_\alpha}) \to (Y, c(y)_{\tau_\beta})$ es $\mathfrak{T}_2$-*morfismo* i.e. $f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)_{\tau_\alpha}), (Y, c(y)_{\sigma_\beta})]$.
$\Leftarrow\rfloor$ Sea $B \subseteq Y$ entonces $\beta B \subseteq B$, ya que β es operador interior en Y, por lo tanto

$$f^{-1}(\beta B) \subseteq f^{-1}(B)$$

Por otra parte $\beta B \in \tau_\beta := \{V \in P(Y) | \ \beta V = V\}$ entonces

$$Y - \beta B \in c(y)_{\tau_\beta},$$

como $f : (X, c(x)_{\tau_\alpha}) \to (Y, c(y)_{\tau_\beta})$ es $\mathfrak{T}_2$-*morfismo* entonces $f^{-1}(Y - \beta B) \in c(x)_{\tau_\alpha}$ y como

$$f^{-1}(Y - \beta B) = X - f^{-1}(\beta B)$$

entonces $X - f^{-1}(\beta B) \in c(x)_{\tau_\alpha}$; por lo tanto $f^{-1}(\beta B) \in \tau_\alpha := \{U \in P(X) : \alpha U = U\}$, en consecuencia

$$\alpha f^{-1}(\beta B) = f^{-1}(\beta B).$$

Por otro lado tenemos que $f^{-1}(\beta B) \subseteq f^{-1}(B)$ (pues como β es un operador interior en Y se tiene que $\beta B \subseteq B$) entonces

$$\alpha f^{-1}(\beta B) \subseteq \alpha f^{-1}(B) \text{ (Observación 3.2.2)}$$

y ya que $\alpha f^{-1}(\beta B) = f^{-1}(\beta B)$, se tiene por lo tanto que

$$f^{-1}(\beta B) \subseteq \alpha f^{-1}(B)$$

Entonces $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es $\mathfrak{T}_1$-*morfismo* i.e. $f \in \hom_{\mathfrak{T}_1}[(X, \alpha), (Y, \beta)]$. Por lo tanto $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$.

■

Capítulo 5

$\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3$

Como ya habíamos mencionado, otro concepto básico, de la topología, es el concepto de cerradura de un conjunto. En este capítulo nos basaremos en el concepto de cerradura para formar la *ccce* correspondiente.
Así como consideramos los conjuntos abiertos y el operador interior, ahora consideraremos los conjuntos cerrados y el operador cerradura. Hemos comentado que el concepto de conjunto abierto y de conjunto cerrado son conceptos duales. Con el interior y la cerradura pasa algo similar: Si el interior es el abierto más grande contenido en el conjunto, la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. Por otra parte también definiremos la *ccce* $\mathfrak{T}_3$ y demostraremos que es concretamente isomorfa a la *ccce* $\mathfrak{T}_2$ en este capítulo.

5.1. La cerradura y sus propiedades

Definición 5.1.1. Si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, la *cerradura* de A en (X,τ), denotada por $\overline{A}^{\tau}$, es la intersección de todos los conjuntos cerrados de (X,τ) que contienen a A.

Observación 5.1.2. Dado $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, la familia

$$\mathcal{G} := \{C \in P(X) | X - C \in \tau \text{ y } A \subseteq C\}.$$

es distinta del vacío y $\overline{A}^{\tau} = \cap_{C\in\mathcal{G}} C$.

Demostración:

Ya que $X - X \in \tau$ (pues $X - X = \emptyset$ y τ es una topología para X) y $A \subseteq X$ entonces $X \in \mathcal{G}$, por lo que $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Se tiene que

$$\overline{A}^{\tau} = \cap_{C\in\mathcal{G}} C.$$

por la Definición 5.1.1.

■

Tenemos, también, que si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, la familia

$$\mathcal{G} = \{C \in P(X) | X - C \in \tau \text{ y } A \subseteq C\}$$

además depende de A, debido a esto denotaremos a esta familia por:

$$\mathcal{G}_A.$$

Vimos que con el interior se puede caracterizar a los conjuntos abiertos como los conjuntos que son iguales a su interior (Proposición 3.1.3). También los cerrados se pueden caracterizar por su cerradura, veamos.

Proposición 5.1.3. Si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, son equivalentes

a. A es cerrado.

b. $A = \overline{A}^{\tau}$.

Demostración:

a⇒b
$\subseteq]$
Sea $A \in P(X)$ cerrado y consideremos la familia $\mathcal{G}_A$, entonces como $X - A \in \tau$ y $A \subseteq A$, se tiene que $A \in \mathcal{G}_A$, pero esto implica que

$$\overline{A}^{\tau} \subseteq A$$

pues $\cap_{C \in \mathcal{G}_A} C = \overline{A}^{\tau}$ por la Observación 5.1.2.

$\supseteq]$
Se tiene que $A \subseteq C$ para todo $C \in \mathcal{G}_A$ esto implica que $A \subseteq \cap_{C \in \mathcal{G}_A} C = \overline{A}^{\tau}$, es decir

$$A \subseteq \overline{A}^{\tau}$$

Por lo tanto $A = \overline{A}^{\tau}$.
b⇒a
Se tiene que $\mathcal{G}_A \subseteq c(x) := \{C \subseteq X | \ X - C \in \tau\}$ (pues $\mathcal{G}_A$ es la familia conformada por los conjuntos cerrados de (X,τ) que están contenidos en A) y por la Proposición 4.1.3 se sabe que $c(x)$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias; entonces $\cap_{C \in \mathcal{G}_A} C$ es cerrada, como por **b** se tiene que $A = \cap_{C \in \mathcal{G}_A} C$, esto implica que A es cerrado.
■

Veamos que en todo espacio topológico la cerradura de un conjunto es el menor cerrado que contiene al conjunto.

Afirmación 5.1.4. Si $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, la cerradura $\overline{A}^{\tau}$ es el menor cerrado de (X,τ) que contiene a A.

Demostración:

Consideremos $A \in P(X)$ y $\mathcal{G}_A$. Supongamos que existe $B \in P(X)$ tal que $X - B \in \tau$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{G}_A$ y por lo tanto

$$\overline{A}^{\tau} = \cap_{C \in \mathcal{G}} C \subseteq B$$

■

Un resultado que será útil, más adelante, es el siguiente

Observación 5.1.5. Sea $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A, B \in P(X)$ tal que $A \subseteq B$ entonces $\overline{A}^{\tau} \subseteq \overline{B}^{\tau}$

Demostración:

Sea $A \subseteq B$; sabemos que $B \subseteq \overline{B}^{\tau}$ por la Definición 5.1.1, entonces $A \subseteq \overline{B}^{\tau}$. Por la Afirmación 5.1.4 $\overline{A}^{\tau}$ es el menor cerrado de (X,τ) que contiene a A y como además $\overline{B}^{\tau}$ es cerrado y contiene a A se tiene entonces que

$$\overline{A}^{\tau} \subseteq \overline{B}^{\tau}.$$

■

La siguiente proposición establece las propiedades que cumple la cerradura, propiedades que servirán para definir el operador cerradura.

Proposición 5.1.6. Sean $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A, B \in P(X)$ cualesquiera; entonces se satisfacen:

a. $\overline{\emptyset}^{\tau} = \emptyset$.

b. $A \subseteq \overline{A}^{\tau}$.

c. $\overline{\overline{A}}^{\tau} = \overline{A}^{\tau}$.

d. $\overline{A \cup B}^{\tau} = \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$.

e. $\overline{A \cap B}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau} \cap \overline{B}^{\tau}$.

Demostración:

a. Sabemos que $\emptyset$ es un conjunto cerrado en (X,τ) pues $X = X - \emptyset \in \tau$, así que por la Proposición 5.1.3 podemos concluir que

$$\overline{\emptyset}^{\tau} = \emptyset.$$

b. $A \subseteq \overline{A}^{\tau}$ por la Definición 5.1.1 y teniendo en cuenta la Observación 5.1.2.

c. Tenemos que $\overline{A}^{\tau}$ es un conjunto cerrado ya que es intersección de conjuntos cerrados (Definición 5.1.1), por lo tanto

$$\overline{A}^{\tau} = \overline{\overline{A}}^{\tau}$$

por la Proposición 5.1.3.

d.

$\subseteq\rfloor$

Por una parte $A \subseteq \overline{A}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$ y entonces $A \subseteq \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$, por otra parte (análogamente) $B \subseteq \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$, por lo tanto

$$A \cup B \subseteq \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}.$$

Puesto que $\overline{A}^{\tau}$ y $\overline{B}^{\tau}$ son conjuntos cerrados, entonces el conjunto $\overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$ es un conjunto cerrado pues es unión finita de dos conjuntos cerrados, siendo así se tiene que $\overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$ es un conjunto cerrado que contiene a $A \cup B$. Por otra parte debemos tener en cuenta que $\overline{A \cup B}^{\tau}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A \cup B$ (Afirmación 5.1.4). Por lo tanto:

$$\overline{A \cup B}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$$

$\supseteq\rfloor$

Sabemos que $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}^{\tau}$ por lo que $A \subseteq \overline{A \cup B}^{\tau}$ y entonces $\overline{A \cup B}^{\tau}$ es un conjunto cerrado que contiene a A, pero sabemos que $\overline{A}^{\tau}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A (Afirmación 5.1.4), entonces

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}^{\tau}.$$

Análogamente tenemos que $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}^{\tau}$ por lo tanto:

$$\overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau} \subseteq \overline{A \cup B}^{\tau}.$$

De las dos contenciones podemos concluir que:

$$\overline{A \cup B}^{\tau} = \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}.$$

e. Sabemos que $A \cap B \subseteq A \subseteq \overline{A}^{\tau}$ y $A \cap B \subseteq B \subseteq \overline{B}^{\tau}$, por lo tanto

$$A \cap B \subseteq \overline{A}^{\tau} \cap \overline{B}^{\tau}$$

y $\overline{A}^{\tau} \cap \overline{B}^{\tau}$ es un conjunto cerrado (al ser intersección de dos conjuntos cerrados) que contiene a $A \cap B$. Por otra parte sabemos que $\overline{A \cap B}^{\tau}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A \cap B$, por lo tanto:

$$\overline{A \cap B}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau} \cap \overline{B}^{\tau}.$$

■

Observación. Para corroborar que no se cumple la contención en sentido contrario en el inciso **e** de la Proposición 5.1.6 consideremos el conjunto $\{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$ (tenemos que τ es la topología de Sierpinski[1] para el conjunto dado). Por una parte

$$\overline{\{a\} \cap \{b\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

y por otra parte $\overline{\{a\}} = \{a, b\}$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$, de donde

$$\overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} = \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\}.$$

De donde vemos que $\{b\} \nsubseteq \emptyset$. Es decir que $\overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} \nsubseteq \overline{\{a\} \cap \{b\}}$.

■

[1]Waclaw Franciszek Sierpinski fue un matemático polaco que propuso esta topología en 1920 como ejemplo de una topología que es la más pequeña sin ser la topología indiscreta (o trivial)

De la misma manera que cuando definimos el operador interior y observamos las propiedades que cumple el interior con respecto a la topología, en este caso también podemos tomar las propiedades que cumple la cerradura con respecto a la topología para obtener lo siguiente: Si X es un conjunto y $A \subseteq X$ entonces podemos definir

$$\psi : P(X) \to P(X)$$

tal que para todo $A \in P(X)$

$$\psi A := \overline{A}^{\tau}.$$

Notemos que queda justificado el nombre de operador pues ψ es una función que va de $P(X)$ en $P(X)$.

5.2. El operador cerradura

Las propiedades que cumple el operador del que hablamos en la parte final de la sección anterior quedan completamente determinadas en la siguiente definición y también reciben el nombre de *axiomas de Kuratowski* porque este matemático[2] descubrió que se puede definir una topología, para un conjunto X, tomándolas como punto de partida.

Definición 5.2.1. Si X es un conjunto y $A, B \in P(X)$ entonces un *operador cerradura* en X es una función $\psi : P(X) \to P(X)$ tal que:

C_1. $\psi\emptyset = \emptyset$.

C_2. $A \subseteq \psi A$.

C_3. $\psi(\psi A) = \psi A$.

C_4. $\psi(A \cup B) = \psi A \cup \psi B$.

En base a las propiedades mencionadas, sobre el operador cerradura, en la Definición 5.2.1 se puede deducir lo siguiente.

Proposición 5.2.2. Dado X un conjunto, $A, B \in P(X)$ tal que $A \subseteq B$ y ψ un operador cerradura en X, entonces $\psi A \subseteq \psi B$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $A \subseteq B$ entonces:

$$A \cup B = B.$$

Por otra parte $\psi(A \cup B) = \psi A \cup \psi B$ (por C_4), entonces:

$$\psi B = \psi A \cup \psi B,$$

[2]Kazimierz Kuratowski fue un matemático y lógico polaco. Realizó una construcción axiomática de la topología a través de las propiedades de la cerradura.

de donde $\psi A \subseteq \psi B$ pues $\psi A \subseteq \psi A \cup \psi B$.

■

Consideremos un conjunto X y $\psi : P(X) \to P(X)$ un operador cerradura en X, la familia

$$\mathfrak{W} := \{W \in P(X) | \ \psi W = W\}$$

es distinta del vacío porque $\emptyset \in \mathfrak{W}$ ya que $\psi\emptyset = \emptyset$ (por C_1).

Observación 5.2.3. Sea X un conjunto y ψ un operador cerradura en X, entonces la familia

$$\mathfrak{W} := \{W \in P(X) | \ \psi W = W\}$$

es cerrada bajo intersecciones arbitrarias y uniones finitas arbitrarias.

Demostración:

(a) Sea $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{W}$. Se tiene que $\cap_{i\in I} W_i \subseteq W_i$ para cada $i \in I$ entonces por la Proposición 5.2.2 obtenemos que $\psi \cap_{i\in I} W_i \subseteq \psi W_i$ para cada $i \in I$, pero $\psi W_i = W_i$ para toda $i \in I$, por lo tanto

$$\psi \cap_{i\in I} W_i \subseteq W_i \text{ para toda } i \in I$$

En consecuencia $\psi \cap_{i\in I} W_i \subseteq \cap_{i\in I} W_i$.

Por otra parte por C_2 de la Definición 5.2.1 $\cap_{i\in I} W_i \subseteq \psi \cap_{i\in I} W_i$. Por consiguiente $\psi \cap_{i\in I} W_i = \cap_{i\in I} W_i$ y por lo tanto

$$\cap_{i\in I} W_i \in \mathfrak{W}$$

(b) Sea $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{W}$ con I finito, entonces por inducción sobre sobre el número n de elementos de I, tenemos lo siguiente.

(i) Base inductiva $n = 0$
Por definición de unión de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tenemos :

$$\cup_{i\in I} W_i := \{x \in X | \text{ hay } i \in I \text{ tal que } x \in W_i\}$$

Si $I = \emptyset$ entonces no existe $i \in I$ tal que $x \in W_i$ por lo que

$$\cup_{i\in I} W_i = \emptyset.$$

Y así por C_1 de la Definición 5.2.1 se tiene $\cup_{i\in I} W_i \in \mathfrak{W}$ pues $\psi\emptyset = \emptyset$ y la base inductiva queda demostrada.

(ii) Como hipótesis de inducción supongamos que se cumple para $n - 1$; entonces:

$$\psi(\cup_{i=1}^{n-1} W_i) = \cup_{i=1}^{n-1} W_i$$

(iii) Veamos que se cumple para n elementos. Se tiene que

$$\psi(\cup_{i=1}^{n} W_i) = \psi(\cup_{i=1}^{n-1} W_i \cup W_n) = \psi(\cup_{i=1}^{n-1} W_i) \cup \psi(W_n)$$

por C_4 de la Definición 5.2.1. Por hipótesis de inducción se tiene que

$$\psi(\cup_{i=1}^{n-1} W_i) = \cup_{i=1}^{n-1} W_i,$$

por lo tanto

$$\psi(\cup_{i=1}^{n-1} W_i) \cup \psi(W_n) = \cup_{i=1}^{n-1} W_i \cup W_n$$

ya que $W_i \in \mathfrak{W}$ para toda $i \in I$, pero

$$\cup_{i=1}^{n-1} W_i \cup W_n = \cup_{i=1}^{n} W_i,$$

por lo tanto

$$\psi(\cup_{i=1}^{n} W_i) = \cup_{i=1}^{n} W_i,$$

es decir

$$\cup_{i=1}^{n} W_i \in \mathfrak{W}.$$

■

Topología τ_ψ

En el siguiente teorema veremos como el operador cerradura induce una topología para un conjunto X.

Teorema 5.2.4. Sea X un conjunto, $\psi : P(X) \to P(X)$ un operador cerradura en X y la familia

$$\mathfrak{W} := \{W \in P(X) | \ \psi W = W\},$$

entonces

$$\tau_\psi = \{X - W \in P(X) | \ W \in \mathfrak{W}\}$$

es una topología en X y para todo $A \in P(X)$ se tiene que $\overline{A}^{\tau_\psi} = \psi A$

Demostración:

a) Se tiene que $X \subseteq \psi X$ por C_2 de la Definición 5.2.1. Por otra parte $\psi X \subseteq X$, ya que ψ es una función que va de $P(X)$ en $P(X)$. Por lo tanto:

$$\psi X = X,$$

entonces $X \in \mathfrak{W}$. También se tiene que $X - X = \emptyset \in P(X)$ y entonces:

$$X \in \tau_\psi.$$

Para ver que $\emptyset \in \tau_\psi$ primero observemos que $\emptyset \in P(X)$, $\psi\emptyset = \emptyset$ (por C_1 de la Definición 5.2.1), por lo que $\emptyset \in \mathfrak{W}$. Por otra parte $X - \emptyset = X \in P(X)$, por lo tanto:

$$\emptyset \in \tau_\psi.$$

(b) Sea $\{X - W_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_\psi$, sabemos que

$$\cup_{i\in I}(X - W_i) = X - \cap_{i\in I}W_i.$$

Como $W_i \in \mathfrak{W}$ para toda $i \in I$ y $\mathfrak{W}$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias (Observación 5.2.3), entonces $\cap_{i\in I}W_i \in \mathfrak{W}$, por lo tanto

$$\cup_{i\in I}(X - W_i) = X - \cap_{i\in I}W_i \in \tau_\psi.$$

(c) Sea $\{X - W_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_\psi$ con I finito, sabemos que

$$\cap_{i\in I}(X - W_i) = X - \cup_{i\in I}W_i.$$

Se tiene que para cada $i \in I$, $W_i \in \mathfrak{W}$, por lo tanto $\cup_{i\in I}W_i \in \mathfrak{W}$, ya que $\mathfrak{W}$ es cerrada bajo uniones finitas (Observación 5.2.3), en consecuencia

$$\cap_{i\in I}(X - W_i) = X - \cup_{i\in I}W_i \in \tau_\psi.$$

Entonces τ_ψ es una topología para X.
Finalmente veamos que para todo $A \in P(X)$

$$\overline{A}^{\tau_\psi} = \psi A.$$

Como $\psi(\psi A) = \psi A$ por C_3 de la Definición 5.2.1, entonces ψA es cerrado en (X, τ_ψ) (es decir $\psi A \in \mathfrak{W}$). Como también se tiene que $A \subseteq \psi A$ por C_2 de la Definición 5.2.1 y como $\overline{A}^{\tau_\psi}$ es el menor cerrado de (X, τ_ψ) que contiene a A entonces

$$\overline{A}^{\tau_\psi} \subseteq \psi A$$

Por otra parte se tiene que $A \subseteq \overline{A}^{\tau_\psi}$, por lo tanto $\psi A \subseteq \psi(\overline{A}^{\tau_\psi})$ por la Observación 5.1.5 y $\psi(\overline{A}^{\tau_\psi}) = \overline{A}^{\tau_\psi}$ al ser $\overline{A}^{\tau_\psi}$ cerrado en (X, τ_ψ), por lo tanto

$$\psi A \subseteq \overline{A}^{\tau_\psi}$$

En consecuencia $\psi A = \overline{A}^{\tau_\psi}$.
■

Aquí podemos preguntarnos cómo se ve un operador cerradura sin hacer alguna referencia a la topología, es decir determinar una función que esté definida sobre $P(X)$ en $P(X)$ y que cumpla las propiedades de la Definición 5.2.1. Para esto consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Dado X un conjunto, $A, B \in P(X)$ y $\psi : P(X) \to P(X)$ una función dada por

$$\psi A = A, \text{ para todo } A \in P(X).$$

Se tiene que ψ, así definida, es un operador cerradura, veamos:

C_1. $\psi\emptyset = \emptyset$ pues $\emptyset \in P(X)$.

C_2. Por definición se tiene que $\psi A = A$ por lo tanto $A \subseteq \psi A$, entonces se cumple C_2.

C_3. Se tiene que $\psi(\psi A) = \psi(A)$ y se cumple directamente pues $\psi A = A$ para todo $A \in P(X)$.

C_4. Tenemos que $\psi(A \cup B) = A \cup B = \psi A \cup \psi B$, por lo tanto $\psi(A \cup B) = \psi A \cup \psi B$.

Como se cumplen las cuatro propiedades dadas en la Definición 5.2.1 entonces podemos concluir que ψ es un operador cerradura y podemos considerar la pareja

$$(X, \psi)$$

en la que X es un conjunto y ψ una estructura para X llamada operador cerradura en X. Puesto que hemos demostrado que un operador cerradura determina una topología para X (Teorema 5.2.4) por medio del conjunto:

$$\tau_\psi = \{X - A \in P(X) |\ A \in \mathfrak{W}\},$$

podemos preguntarnos qué topología, para X, determina el operador cerradura que acabamos de ver. Como

$$\mathfrak{W} = \{W \in P(X) |\ \psi W = W\} \text{ es la familia de cerrados}$$

y $\psi A = A$ para todo $A \in P(X)$ entonces todos los subconjuntos de X son cerrados (y por lo tanto también todos los subconjuntos de X son abiertos), es decir que τ_ψ es la topología discreta.

■

La clase $|\mathfrak{T}_3|$

De la misma manera que consideramos las topologías para un conjunto dado X, ahora vamos a considerar la familia de operadores cerradura para X que denotaremos por $\mathfrak{T}_3[X]$. Definimos la clase

$$|\mathfrak{T}_3| := \{(X, \psi) |\ X \text{ es un conjunto y } \psi \in \mathfrak{T}_3[X]\}.$$

Determinaremos, también, la noción de $\mathfrak{T}_3$-morfismos entre cualesquiera dos elementos de $|\mathfrak{T}_3|$.

Los $\mathfrak{T}_3$-*morfismos*

Definición 5.2.5. Dados $(X, \psi), (Y, \phi) \in |\mathfrak{T}_3|$ y $f : X \to Y$ una función. Diremos que

$$f : (X, \psi) \to (Y, \phi)$$

es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo* o que f conserva la $\mathfrak{T}_3$-*estructura* si

$$\text{Para todo } A \in P(X) \text{ se tiene que } f(\psi A) \subseteq \phi f(A).$$

La siguiente observación determina una propiedad que tiene un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo* respecto de las imágenes inversas.

Observación 5.2.6. Sean (X, ψ), $(Y, \phi) \in |\mathfrak{T}_3|$. Si $f : (X, \psi) \to (Y, \phi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-morfismo entonces

$$\text{Para todo } B \subseteq Y,\ \psi f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\phi B)$$

Demostración:

Sea $B \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(B) \subseteq X$; como f es un $\mathfrak{T}_3$-morfismo se tiene que

$$f(\psi f^{-1}(B)) \subseteq \phi f(f^{-1}(B)),$$

por otro lado sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subseteq \phi f(f^{-1}(B))$ y $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, entonces

$$\phi f(f^{-1}(B)) \subseteq \phi B,$$

por lo tanto

$$f(\psi f^{-1}(B)) \subseteq \phi B,$$

tenemos entonces que

$$f^{-1}(f(\psi f^{-1}(B))) \subseteq f^{-1}(\phi B),$$

pero $\psi f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(\psi f^{-1}(B)))$, por lo tanto

$$\psi f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\phi B).$$

■

En base a la Definición 5.2.5 podemos demostrar que se cumplen las siguientes propiedades entre los $\mathfrak{T}_3$-morfismos.

Proposición 5.2.7. Sean $(X,\psi),(Y,\phi),(Z,\xi) \in |\mathfrak{T}_3|$.

a. Si $f:(X,\psi)\to(Y,\phi)$ y $g:(Y,\phi)\to(Z,\xi)$ son $\mathfrak{T}_3$-*morfismos*, entonces

$$g\circ f:(X,\psi)\to(Z,\xi) \text{ es } \mathfrak{T}_3\text{-}\textit{morfismo}$$

b. $1_X:(X,\psi)\to(X,\psi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo.*

Demostración:

a. Sea $A\in P(X)$, como $f:(X,\psi)\to(Y,\phi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo*, $f(\psi A)\subseteq \phi f(A)$ (Definición 5.2.5), por lo tanto

$$g(f(\psi A))\subseteq g(\phi f(A)),$$

pero tenemos que también $g:(Y,\phi)\to(Z,\xi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo*, entonces

$$g(\phi f(A))\subseteq \xi g(f(A)),$$

en consecuencia

$$g(f(\psi A))\subseteq \xi g(f(A))$$

Entonces para todo $A\in P(X)$,

$$(g\circ f)(\psi A)\subseteq \xi(g\circ f)(A).$$

Por lo tanto $g\circ f:(X,\psi)\to(Z,\xi)$ un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo.*

b. Sea $1_X:(X,\psi)\to(X,\psi)$ tal que $1_X(x)=x$ para toda $x\in X$. Se tiene que

$$1_X(\psi A)=\psi A=\psi 1_X(A)$$

para todo $A\in P(X)$; por lo tanto $1_X(\psi A)\subseteq \psi 1_X(A)$ y entonces $1_X:(X,\psi)\to(X,\psi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo.*

■

5.3. La *ccce* $\mathfrak{T}_3$

Hemos definido a los $\mathfrak{T}_3$-*morfismos* y comprobamos que cumplen las propiedades de composición e identidad. Estamos en condiciones de definir a la categoría concreta de conjuntos estructurados $\mathfrak{T}_3$.

Definición 5.3.1. La *ccce* $\mathfrak{T}_3$ es una *ccce* compuesta de los siguientes miembros.

i) La clase $|\mathfrak{T}_3|$, a cuyos elementos les llamaremos $\mathfrak{T}_3$-*objetos*.

ii) Para cada par $(X,\psi),(Y,\phi) \in |\mathfrak{T}_3|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{T}_3}[(X,\psi),(Y,\phi)] := \{f \in Y^X |\ f : (X,\psi) \to (Y,\phi) \text{ es } \mathfrak{T}_3\text{-}\mathit{morfismo}\}.$$

Este conjunto cumple las siguientes propiedades (Proposición 5.2.7.)
(a) **Propiedad de composición.**
Dados $(X,\psi),(Y,\phi)$ y (Z,ξ), $\in |\mathfrak{T}_3|$ si

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X,\psi),(Y,\phi)] \text{ y } g \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(Y,\phi),(Z,\xi)]$$

entonces

$$g \circ f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X,\psi),(Z,\xi)]$$

(b) **Propiedad de identidad**
Para todo $\mathfrak{T}_3$-*objeto* (X,ψ)

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X,\psi),(X,\psi)]$$

donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.

La relación entre ψ y τ

Observación 5.3.2. Sea X un conjunto, $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_3$; entonces $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectivables.

Demostración:

► Sea $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$, entonces hay una cerradura con respecto a τ y se puede definir el operador cerradura

$$\psi_\tau : P(X) \to P(X)$$

mediante $\psi_\tau A := \overline{A}^\tau$ para todo $A \subseteq X$, por lo que tenemos la siguiente regla de correspondencia

$$\begin{gathered}\mathfrak{Top}[X] \to \mathfrak{T}_3[X] \\ \tau \mapsto \psi_\tau\end{gathered}$$

Por otra parte se tiene que si $\psi_\tau \in \mathfrak{T}_3[X]$, entonces considerando la familia

$$\mathfrak{W} := \{W \in P(X) |\ \psi_\tau W = W\} \text{ (Observación 5.2.3)},$$

existe una topología para X asociada a ψ_τ (Teorema 5.2.4), digamos $\tau_{\psi_\tau} \in \mathfrak{Top}[X]$, por lo que tenemos

$$\begin{gathered}\mathfrak{T}_3[X] \to \mathfrak{Top}[X]\\ \psi_\tau \mapsto \tau_{\psi_\tau}\end{gathered}$$

donde $\tau_{\psi_\tau} = \{(X - W) \in P(X)|\ W \in \mathfrak{W}\}$
• Demostraremos que $\tau = \tau_{\psi_\tau}$, veamos :

$$U \in \tau \text{ si y sólo si } \psi_\tau(X - U) = X - U \text{ si y sólo si } X - U \in \mathfrak{W} \text{ si y sólo si } U \in \tau_{\psi_\tau},$$

por lo tanto $\tau = \tau_{\psi_\tau}$. Entonces tenemos que

$$\tau \mapsto \psi_\tau \mapsto \tau_{\psi_\tau} = \mathfrak{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$$

donde $\mathfrak{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{Top}[X]$.

◄ Recíprocamente
Si $\psi \in \mathfrak{T}_3[X]$, se define la familia $\mathfrak{W} := \{W \in P(X)|\ \psi W = W\}$ (Observación 5.2.3); entonces

$$\tau_\psi = \{(X - W) \in P(X)|\ W \in \mathfrak{W}\}$$

es una topología para X (Teorema 5.2.4) entonces podemos definir una función de $\mathfrak{T}_3[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\psi \mapsto \tau_\psi$$

debido a que τ_ψ es una topología para X que define una cerradura y por lo tanto un operador cerradura, entonces podemos definir la función

$$\tau_\psi \mapsto \psi_{\tau_\psi}$$

• Demostraremos que $\psi = \psi_{\tau_\psi}$
Sea $A \in P(X)$, se tiene que $\psi A = \overline{A}^{\tau_\psi} = \psi_{\tau_\psi} A$, por lo tanto $\psi = \psi_{\tau_\psi}$.
Entonces

$$\psi \mapsto \tau_\psi \mapsto \psi_{\tau_\psi} = \mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_3[X]}$$

donde $\mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_3[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{T}_3[X]$. Por ► y ◄ se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectables.
■

5.4. $\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3$

Afirmación 5.4.1. Sea X un conjunto, $\mathfrak{T}_2$ y $\mathfrak{T}_3$, entonces $\mathfrak{T}_2[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectables.

Demostración:

Para un conjunto X se tiene que $\mathfrak{T}_2[X]$ y $\mathfrak{Top}[X]$ son biyectables (Observación 4.2.2.), pero también $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectables (Observación 5.3.2). Puesto que la biyectabilidad es una relación de equivalencia, en particular es transitiva, entonces $\mathfrak{T}_2[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ resultan biyectables.
■

Teorema 5.4.2. $\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3$.

Demostración:

(i) Dado X un conjunto se tiene que $\mathfrak{T}_2[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectables (Afirmación 5.4.1). Consideremos la biyección

$$\Phi_X : \mathfrak{T}_2[X] \to \mathfrak{T}_3[X]$$

cuya regla de correspondencia para cada $c(x) \in \mathfrak{T}_2[X]$ es

$$c(x) \mapsto \psi_{\tau_{c(x)}},$$

donde el subíndice $\tau_{c(x)}$ hace referencia a la topología determinada por la *c-familia* de X $c(x)$, entonces se cumple la primera parte de la condición para que $\mathfrak{T}_2$ y $\mathfrak{T}_3$ sean concretamente isomorfas.

(ii) Para finalizar la demostración tenemos que ver que si $f : X \to Y$ es una función, entonces

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (Y, c(y))] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X, \Phi_X(c(x))), (Y, \Phi_Y(c(y)))]$$

Recordemos que por las biyecciones $\Phi_X : \mathfrak{T}_2[X] \to \mathfrak{T}_3[X]$ y $\Phi_Y : \mathfrak{T}_2[Y] \to \mathfrak{T}_3[Y]$, tenemos que $\Phi_X(c(x)) = \psi_{\tau_{c(x)}}$ y $\Phi_Y(c(y)) = \psi_{\tau_{c(y)}}$ (con $\tau_{c(x)} \in \mathfrak{Top}[X]$ y $\tau_{c(y)} \in \mathfrak{Top}[Y]$).

$\Rightarrow\rfloor$ Demostraremos que para todo $A \in P(X)$, $f(\psi_{\tau_{c(x)}} A) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$
(i.e. $f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X, \psi_{\tau_{c(x)}}), (Y, \psi_{\tau_{c(y)}})]$).
Dado $A \in P(X)$, entonces $f(A) \in P(Y)$, por lo tanto $f(A) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$, ya que $\psi_{\tau_{c(y)}} \in \mathfrak{T}_3[Y]$. Entonces

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A))$$

además se tiene que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, por lo tanto $A \subseteq f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A))$. Por otra parte $A \subseteq \psi_{\tau_{c(x)}} A$ (ya que $\psi_{\tau_{c(x)}} \in \mathfrak{T}_3[X]$). Pero como por hipótesis tenemos que

$$f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$$

es $\mathfrak{T}_2$-*morfismo*, entonces al tenerse que $\psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$ es cerrado (ya que $\psi_{\tau_{c(y)}}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A)) = \psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$, pues $f(A) \subseteq Y$, $\psi_{\tau_{c(y)}} \in \mathfrak{T}_3[Y]$ y porque así de define la familia de cerrados; como los que son iguales a su cerradura), entonces $\psi_{\tau_{c(y)}} f(A) \in c(y)$, en consecuencia $f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A)) \in c(x)$, es decir que $f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A))$ es cerrado; de esta manera se tiene que

$$\psi_{\tau_{c(x)}} A \subseteq f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A))$$

y esto es inmediato ya que $\psi_{\tau_{c(x)}} A$ es el menor cerrado que contiene a A (Afirmación 5.1.4), debido a esta contención se tiene que $f(\psi_{\tau_{c(x)}} A) \subseteq f(f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A)))$, pero sabemos que $f(f^{-1}(\psi_{\tau_{c(y)}} f(A))) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$, de lo cual podemos concluir que

$$f(\psi_{\tau_{c(x)}} A) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} f(A)$$

Entonces $f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X, \psi_{\tau_{c(x)}}), (Y, \psi_{\tau_{c(y)}})]$.

$\Leftarrow\rfloor$ Probaremos que $f : (X, c(x)) \to (Y, c(y))$ es $\mathfrak{T}_2$-*morfismo*, es decir que para todo $W \in c(y)$, $f^{-1}(W) \in c(x)$.

Sea $W \in P(Y)$ tal que $W \in c(y)$ es decir W es cerrado, por lo tanto $\psi_{\tau_{c(y)}} W = W$. Por otra parte $f^{-1}(W) \in P(X)$; como $f : (X, \psi_{\tau_{c(x)}}) \to (Y, \psi_{\tau_{c(y)}})$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo*, tenemos que

$$f(\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W)) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} f(f^{-1}(W))$$

pero sabemos que $f(f^{-1}(W)) \subseteq W$ (propiedades de las funciones), entonces $\psi_{\tau_{c(y)}} f(f^{-1}(W)) \subseteq \psi_{\tau_{c(y)}} W$ (Proposición 5.2.2) y como además $\psi_{\tau_{c(y)}} W = W$ ya que $W \in c(y)$ (i.e. W es cerrado), entonces $\psi_{\tau_{c(y)}} f(f^{-1}(W)) \subseteq W$ es decir

$$f(\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W)) \subseteq W,$$

debido a esta contención se tiene que $f^{-1}(f(\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W))) \subseteq f^{-1}(W)$, como también sabemos que $\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(f(\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W)))$ por propiedades básicas de las funciones, entonces

$$\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(W).$$

Por otra parte y debido a que $\psi_{\tau_{c(x)}} \in \mathfrak{T}_3[X]$ se tiene también que $f^{-1}(W) \subseteq \psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W)$ (C_2 Definición 5.2.1), por lo tanto

$$\psi_{\tau_{c(x)}} f^{-1}(W) = f^{-1}(W)$$

En consecuencia $f^{-1}(W)$ es cerrado es decir $f^{-1}(W) \in c(x)$, entonces $f \in \hom_{\mathfrak{T}_2}[(X, c(x)), (Y, c(y))]$ y así podemos concluir que $\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3$.

■

Capítulo 6

$\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$

El concepto de vecindad viene a ser otro de los conceptos básicos de la topología. Para recordar o tener en mente un ejemplo sencillo del concepto de vecindad, podemos revisar la Definición 2.1.2 donde se determinan los discos abiertos en un espacio métrico (X, d) con centro en algún $x \in X$. De esta definición nos podemos formar una idea básica, pero concreta, de vecindad.
En este capitulo, a grandes rasgos, definiremos vecindad, operador vecindad y los morfismos entre conjuntos dotados de un operador vecindad, definiremos la *ccce* $\mathfrak{T}_4$ y finalizaremos demostrando que $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$.

6.1. Vecindad y sus propiedades

Definición 6.1.1. Sea $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $x \in X$, *una vecindad* de x en (X, τ) es un subconjunto N de X para el que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq N$.
Si (X, d) es un espacio métrico, una vecindad para cada $x \in X$ es un disco abierto con centro en x (Definición 2.1.2). Recordemos, muy superficialmente, que cuando se habla de convergencia de una sucesión en un punto $x \in X$, consideramos una familia de vecindades en torno a tal punto x (en este caso una familia de discos abiertos con centro en x), con estas ideas en mente consideremos la definición siguiente.

Definición 6.1.2. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $x \in X$, la familia de vecindades de x es el conjunto

$$\mathcal{N}_x := \{N \in P(X) | \text{ existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq N\}.$$

Siguiendo en la línea de discusión de la Definición 6.1.2 podemos notar que $\mathcal{N}_x$ siempre es distinto del vacío pues $X \in \mathcal{N}_x$ ya que $X \in P(X)$, $X \in \tau$ y $x \in X$. Por otra parte podemos caracterizar a los abiertos de (X, τ) por medio de las vecindades como vemos en la proposición siguiente.

Proposición 6.1.3. Dado $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, son equivalentes :

a. $A \in \tau$.

b. $A \in \mathcal{N}_x$ para toda $x \in A$.

Demostración:

a⇒b. Sea $x \in A$. Tenemos que $A \subseteq A$ y por hipótesis $A \in \tau$ entonces $A \in \mathcal{N}_x$ (por definición de $\mathcal{N}_x$).

b⇒a. Por hipótesis tenemos que para todo $x \in A$ existe $U_x \in \tau$ tal que

$$x \in U_x \subseteq A.$$

Consideremos, entonces, $\cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x$. Sea $x \in A$ entonces existe $U_x \in \tau$ tal que $x \in U_x \subseteq A$ (por hipótesis), pero $U_x \subseteq \cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x$, entonces

$$x \in \cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x,$$

por lo tanto $A \subseteq \cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x$. Por otra parte si $x \in \cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x$ entonces $x \in U_{x_0}$ para algún $x_0 \in A$, $U_{x_0} \in \tau$ y $U_{x_0} \subseteq A$, de donde

$$x \in A.$$

Y así obtenemos que $\cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x \subseteq A$, podemos concluir entonces que $A = \cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x$ y como τ es una topología en X se tiene que $\cup_{x\in A, U_x\in\tau} U_x \in \tau$ y por lo tanto

$$A \in \tau$$

■

Algunas de las propiedades que cumple $\mathcal{N}_x$ y que caracterizan a los abiertos, son las siguientes :

Proposición 6.1.4. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $x \in X$, entonces:

a. $x \in N$ para toda $N \in \mathcal{N}_x$.

b. Si $M, N \in \mathcal{N}_x$ entonces $M \cap N \in \mathcal{N}_x$.

c. Si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subseteq M \subseteq X$ entonces $M \in \mathcal{N}_x$.

d. Si $N \in \mathcal{N}_x$ entonces existe $M \in \mathcal{N}_x$ tal que $M \subseteq N$ y $M \in \mathcal{N}_y$ para toda $y \in M$.

La Proposición 6.1.4 se encuentra demostrada en [7] (página 23). En base a estas propiedades definiremos el operador vecindad.

6.2. El operador vecindad

Definición 6.2.1. Dado X un conjunto, un *operador vecindad* en X es una función $\nu : X \to P(P(X))$ tal que:

v_1. Para toda $x \in X$, $\nu(x) \neq \emptyset$.

v_2. Para toda $x \in X$ y para toda $N \in \nu(x)$, $x \in N$.

v_3. Para cualesquiera $M, N \in \nu(x)$, $M \cap N \in \nu(x)$.

v_4. Para toda $N \in \nu(x)$, $N \subseteq M \subseteq X$ implica que $M \in \nu(x)$.

v_5. Para toda $N \in \nu(x)$, existe $M \in \nu(x)$ tal que $M \subseteq N$ y $M \in \nu(y)$ para toda $y \in M$.

Nuestro interés se centra en la topología que se puede inducir a partir de este operador, y en los morfismos correspondientes, como vemos en el siguiente apartado.

Topología τ_ν

Teorema 6.2.2. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\nu : X \to P(P(X))$ un operador vecindad en X, entonces

$$\tau_\nu = \{U \in P(X) |\ U \in \nu(x) \text{ para toda } x \in U\}$$

es una topología en X tal que para toda $x \in X$ satisface que $\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$, donde $\mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$ es la familia de vecindades de x en (X, τ_ν)

Demostración:

a) Sea $x \in X$, entonces por v_1 se tiene que $\nu(x) \neq \emptyset$, por lo que podemos considerar a $N \in \nu(x)$ y entonces $x \in N$ por v_2, puesto que $N \subseteq X \subseteq X$ podemos concluir que $X \in \nu(x)$ por v_4 y entonces:

$$X \in \tau_\nu.$$

Para demostrar que el conjunto vacío está en τ_ν, debemos tener en cuenta que siempre es válida la siguiente proposición; para toda $x \in X$

$$x \in \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \nu(x)$$

(pues su antecedente es falso). Debido a esto obtenemos que $\emptyset \in \tau_\nu$.

b) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_\nu$ y sea $x \in \cup_{i \in I} U_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$; por otro lado se tiene también que $U_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, por lo tanto

$$x \in U_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} U_i$$

como $U_{i_0} \in \tau_\nu$ entonces $U_{i_0} \in \nu(x)$ para toda $x \in U_{i_0}$ y por v_4 se tiene que $\cup_{i \in I} U_i \in \nu(x)$, entonces

$$\cup_{i \in I} U_i \in \tau_\nu.$$

c) Sea $\{U, V\} \subseteq \tau_\nu$ y consideremos $x \in U \cap V$, entonces $x \in U$ y $x \in V$. Puesto que $U \in \tau_\nu$ se tiene que:

$$U \in \nu(x),$$

análogamente $V \in \nu(x)$. Por v_3 podemos concluir que:

$$U \cap V \in \nu(x),$$

por lo tanto $U \cap V \in \tau_\nu$ y así tenemos que τ_ν es una topología en X.

Vamos probar que $\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$, para toda $x \in X$.

$\subseteq\rfloor$ Sea $x \in X$ y $N \in \nu(x)$, entonces por v_5 existe $M \in \nu(x)$ tal que $M \subseteq N$ y $M \in \nu(y)$ para toda $y \in M$. Puesto que

$$\tau_\nu := \{U \in P(X) | \ U \in \nu(x) \text{ para toda } x \in U\}$$

tenemos que $M \in \tau_\nu$; además por v_2 $x \in M$ por lo tanto $N \in \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$, entonces $\nu(x) \subseteq \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$.

$\supseteq\rfloor$ Sea $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$,
como

$$\mathcal{N}_x^{\tau_\nu} := \{N \in P(X) | \text{ existe } U \in \tau_\nu \text{ tal que } x \in U \subseteq N\}$$

existe $U \in \tau_\nu$ tal que $x \in U \subseteq N$, y como $U \in \tau_\nu$ entonces $U \in \nu(x)$ para toda $x \in U$ por definición de τ_ν; entonces por v_4 se tiene que $N \in \nu(x)$. Por lo tanto $\mathcal{N}_x^{\tau_\nu} \subseteq \nu(x)$. Esto prueba que

$$\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$$

para toda $x \in X$.
■

Podemos preguntarnos cómo se ve un operador vecindad sin considerar topología, es decir una función que esté definida de X en $P(P(X))$ y que cumpla las propiedades de Definición 6.2.1. Para esto veremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $x \in X$ y $\nu : X \to P(P(X)$ una función dada por

$$\nu(x) = U_x, \text{ donde } U_x = \{U \in P(X) | \ x \in U\}.$$

Comprobaremos que U_x es un operador vecindad.

v_1. Como $X \in P(X)$ y $x \in X$ entonces $X \in U_x$, por lo tanto $U_x \neq \emptyset$.

v_2. Si $U \in U_x$ entonces $U \in P(X)$ tal que $x \in U$, por lo tanto se cumple v_2.

v_3. Sean $U, V \in U_x$ entonces $x \in U$ y $x \in V$, por lo tanto $x \in U \cap V$, puesto que $U \cap V \in P(X)$ se tiene que

$$U \cap V \in U_x.$$

v_4. Sea $U \in U_x$ y $U \subseteq V \subseteq X$, entonces $x \in V$, por lo tanto

$$V \in U_x.$$

v_5. Sea $U \in U_x$ entonces $U \subseteq U$ y $U \in U_y$ para toda $y \in U$, donde

$$U_y = \{U' \in P(X) | \ y \in U'\}.$$

Por lo que U_x es un operador vecindad y podemos considerar la pareja

$$(X, \nu)$$

en la que X es un conjunto y ν es una estructura para X llamada operador vecindad en X. Llegados a este punto y considerando que demostramos que un operador vecindad determina una topología para X por medio del conjunto

$$\tau_{U_x} = \{W \in P(X)|\ W \in U_x \text{ para todo } x \in W\},$$

podemos preguntarnos qué topología determina U_x. Tenemos que para todo $A \in P(X)$, siempre se cumple la proposición: para todo $x \in A$ implica que $A \in U_x$, entonces τ_{U_x} es la topología discreta para X (pues todo es abierto y entonces también todo es cerrado).
■

La clase $|\mathfrak{T}_4|$

Para definir la clase $|\mathfrak{T}_4|$ vamos a considerar un conjunto X y la familia de todos los operadores vecindad en X, denotada por $\mathfrak{T}_4[X]$; entonces definimos la clase

$$|\mathfrak{T}_4| := \{(X, \nu)|\ X \text{ es un conjunto y } \nu \in \mathfrak{T}_4[X]\}.$$

En la siguiente sección vamos a definir el concepto de $\mathfrak{T}_4$-*morfismo* entre cualesquiera dos elementos de $|\mathfrak{T}_4|$.

Los $\mathfrak{T}_4$-*morfismos*

Definición 6.2.3. Sean $(X, \nu), (Y, \mu) \in |\mathfrak{T}_4|$ y $f : X \to Y$ una función, decimos que

$$f : (X, \nu) \to (Y, \mu)$$

es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo* o que f conserva la $\mathfrak{T}_4$-*estructura*, si

para toda $x \in X$ y para toda $M \in \mu(f(x))$ existe $N \in \nu(x)$ tal que $f(N) \subseteq M$.

Partiendo de la Definición 6.2.3 se pueden demostrar las siguientes propiedades para los $\mathfrak{T}_4$-*morfismos.*

Proposición 6.2.4. Sean $(X, \nu), (Y, \mu), (Z, \vartheta) \in |\mathfrak{T}_4|$. Entonces se cumple lo siguiente:

a. Si $f : (X, \nu) \to (Y, \mu)$ y $g : (Y, \mu) \to (Z, \vartheta)$ son $\mathfrak{T}_4$-*morfismos* entonces

$$g \circ f : (X, \nu) \to (Z, \vartheta) \text{ es un } \mathfrak{T}_4\text{-}\textit{morfismo}.$$

b. $1_X : (X, \nu) \to (X, \nu)$ tal que $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$ es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo.*

Demostración:

a) Sea $x \in X$ y $M \in \vartheta(g(f(x)))$, como $g : (Y, \mu) \to (Z, \vartheta)$ es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo*, existe $N \in \mu(f(x))$ tal que

$$g(N) \subseteq M.$$

Puesto que también $f : (X, \nu) \to (Y, \mu)$ es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo*, entonces para $N \in \mu(f(x))$ existe $W \in \nu(x)$ tal que

$$f(W) \subseteq N.$$

Por lo tanto

$$g(f(W)) \subseteq g(N),$$

entonces

$$g(f(W)) \subseteq M$$

Como $x \in X$ y $M \in \vartheta(g(f(x)))$ fueron cualesquiera y además existió $W \in \nu(x)$ tal que $g(f(W)) \subseteq M$, entonces:

$$g \circ f : (X, \nu) \to (Z, \vartheta)$$

es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo*.

b) Sea $x \in X$ y $M \in \nu(1_X(x)) = \nu(x)$, entonces existe $M \in \nu(x)$ tal que $1_X(M) \subseteq M$. Por lo tanto 1_X es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo*.
■

6.3. La *ccce* $\mathfrak{T}_4$

Definición 6.3.1. La *ccce* $\mathfrak{T}_4$ es una *ccce* compuesta de los siguientes miembros.

i) La clase $|\mathfrak{T}_4|$, a cuyos los elementos les llamaremos $\mathfrak{T}_4$-*objetos*.

ii) Para cada par $(X, \nu), (Y, \mu) \in |\mathfrak{T}_4|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (Y, \mu)] := \{f \in Y^X |\ f : (X, \nu) \to (Y, \mu) \text{ es } \mathfrak{T}_4\text{-}morfismo\},$$

sujeto a las siguientes condiciones (Proposición 6.2.4).
a) **Propiedad de composición**
Para (X, ν), (Y, μ) y (Z, ϑ) $\mathfrak{T}_4$-*objetos* arbitrarios, si

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (Y, \mu)] \text{ y } g \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(Y, \mu), (Z, \vartheta)]$$

entonces

$$g \circ f \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (Z, \vartheta)]$$

b) **Propiedad de identidad**
Para todo $\mathfrak{T}_4$-*objeto* (X, ν)

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (X, \nu)]$$

donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.

La relación entre τ y ν

Observación 6.3.2. Sea X un conjunto, $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_4$, entonces $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables.

Demostración:

► Sea $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$, entonces con respecto de la topología τ tenemos asociada una familia de vecindades para cada $x \in X$, digamos $\mathcal{N}_x^\tau$, entonces podemos definir el siguiente operador vecindad

$$\nu_\tau : X \to P(P(X))$$

cuya regla de correspondencia es

$$x \mapsto \mathcal{N}_x^\tau$$

por lo que podemos definir una función de $\mathfrak{Top}[X]$ en $\mathfrak{T}_4[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\tau \mapsto \nu_\tau$$

y podemos definir $\nu_\tau(x) = \mathcal{N}_x^\tau$ para toda $x \in X$. Por otra parte al ser ν_τ un operador vecindad induce una topología para X (Teorema 6.2.2) digamos $\tau_{\nu_\tau} \in \mathfrak{Top}[X]$, es decir que podemos establecer una función de $\mathfrak{T}_4[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\nu_\tau \mapsto \tau_{\nu_\tau}$$

donde $\tau_{\nu_\tau} := \{U \in P(X)|$ para toda $x \in U$, $U \in \nu_\tau(x)\}$
• Demostraremos que $\tau = \tau_{\nu_\tau}$.
$U \in \tau$ si y sólo si para toda $x \in U$ $U \in \mathcal{N}_x^\tau$ y $U \in \mathcal{N}_x^\tau$ si y sólo si para toda $x \in U$, $U \in \nu_\tau(x)$, si y sólo si, $U \in \tau_{\nu_\tau}$, por lo tanto $\tau = \tau_{\nu_\tau}$. Entonces tenemos que

$$\tau \mapsto \nu_\tau \mapsto \tau_{\nu_\tau} = \mathfrak{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$$

donde $\mathfrak{I}d_{\mathfrak{Top}[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{Top}[X]$.
◄ Ahora consideremos lo siguiente : Si $\nu \in \mathfrak{T}_4[X]$ entonces

$$\tau_\nu := \{U \in P(X)| \text{ para toda } x \in U,\ U \in \nu(x)\}$$

es una topología para X (Teorema 6.2.2), entonces podemos definir una función de $\mathfrak{T}_4[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\nu \mapsto \tau_\nu.$$

Por otra parte, como τ_ν es una topología para X entonces puede definirse una familia de vecindades $\mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$ para cada $x \in X$, tal que $\nu_{\tau_\nu}(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$ para cada $x \in X$. Por lo que ahora podemos pensar que la relación inversa de $\mathfrak{T}_4[X]$ en $\mathfrak{Top}[X]$ es

$$\tau_\nu \mapsto \nu_{\tau_\nu}$$

• Demostraremos que $\nu = \nu_{\tau_\nu}$.
Se tiene que ν y ν_{τ_ν} tienen el mismo dominio y contradominio, entonces únicamente basta ver que coinciden en las imágenes de todos sus puntos. Sea $x \in X$, entonces

$$\nu_{\tau_\nu}(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu} = \{N \in P(X)| \text{ existe } U \in \tau_\nu \text{ tal que } x \in U \subseteq N\}$$

$\blacklozenge$ Demostraremos que $\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$.
$\subseteq]$
Sea $x \in X$ y $N \in \nu(x)$ entonces, por υ_5 existe $M \in \nu(x)$ tal que $M \subseteq N$ y $M \in \nu(y)$ para toda $y \in M$, por lo tanto $M \in \tau_\nu$ y como por υ_2 $x \in M$, entonces $N \in \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$. Es decir $\nu(x) \subseteq \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$.
$\supseteq]$
Sean $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$, entonces existe $U \in \tau_\nu$ tal que $x \in U \subseteq N$, como $U \in \tau_\nu$ se tiene que $U \in \nu(y)$ para toda $y \in U$, en particular $U \in \nu(x)$. Por lo que tenemos por un lado que $x \in U \subseteq N$ y $U \in \nu(x)$ lo cual implica, por υ_4, que $N \in \nu(x)$ y por lo tanto $\mathcal{N}_x^{\tau_\nu} \subseteq \nu(x)$. En consecuencia $\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu}$.
Por $\blacklozenge$ se tiene que para toda $x \in X$ $\nu(x) = \mathcal{N}_x^{\tau_\nu} = \nu_{\tau_\nu}(x)$. Entonces

$$\nu \mapsto \tau_\nu \mapsto \nu_{\tau_\nu} = \mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_4[X]}$$

donde $\mathfrak{I}d_{\mathfrak{T}_4[X]}$ es la identidad en $\mathfrak{T}_4[X]$. Por $\blacktriangleright$ y $\blacktriangleleft$ se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables. $\blacksquare$

6.4. $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$

Afirmación 6.4.1. Sea X un conjunto y $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$, entonces $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables.

Demostración:

Se sabe que $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{Top}[X]$ son biyectables (Observación 5.3.2) y $\mathfrak{Top}[X]$, $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables (Observación 6.3.2) y ya que la biyectabilidad es una relación de equivalencia entre conjuntos, en particular es una relación transitiva. Por lo tanto $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables.
$\blacksquare$

Teorema 6.4.2. $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$.

Demostración:

(i) Sea X un conjunto, se tiene que $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables por la Afirmación 6.4.1; sea

$$\Phi_X : \mathfrak{T}_3[X] \to \mathfrak{T}_4[X]$$

la biyección cuya regla de correspondencia es

$$\psi \mapsto \nu_{\tau_\psi},$$

por otro lado como Φ_X es biyectiva, sea

$$\Psi_X : \mathfrak{T}_4[X] \to \mathfrak{T}_3[X].$$

cuya regla de correspondencia es

$$\nu \mapsto \psi_{\tau_\nu}.$$

Se tiene que Ψ_X es la inversa de Φ_X pues sólo son composiciones de funciones biyectivas. Como $\Phi_X : \mathfrak{T}_3[X] \to \mathfrak{T}_4[X]$ es biyectiva, se cumple la primer parte de la condición para que $\mathfrak{T}_3$ y $\mathfrak{T}_4$ sean concretamente isomorfas.

(ii) Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Entonces sólo falta probar que

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_3}[(X,\psi),(Y,\phi)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X,\Phi_X(\psi)),(Y,\Phi_Y(\phi))]$$

Donde $\Phi_X(\psi) = \nu_{\tau_\psi}$ y $\Phi_Y(\phi) = \nu_{\tau_\phi}$.
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $x \in X$ y $V \in \nu_{\tau_\phi}(f(x))$, entonces existe $M \in \nu_{\tau_\phi}(f(x))$ tal que $M \subseteq V$ y $M \in \nu_{\tau_\phi}(y)$ para toda $y \in M$ (por v_5), entonces

$$M \in \tau_\phi := \{Y - W |\ W \in \mathfrak{W}\}$$

donde $\mathfrak{W} = \{W \in P(Y) |\ \phi W = W\}$ y $f(x) \in M \subseteq V$ de donde se tiene que

$$x \in f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(V).$$

Como $M \in \tau_\phi$, entonces $M = Y - W$, con W cerrado en (Y, τ_ϕ), es decir $W \in \mathfrak{W}$, por lo tanto $\phi W = W$; entonces

$$f^{-1}(M) = f^{-1}(Y - W) = X - f^{-1}(W).$$

Por hipótesis $f : (X,\psi) \to (Y,\phi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo* , por lo tanto

$$f(\psi f^{-1}(W)) \subseteq \phi f(f^{-1}(W)) \text{ (Definición 5.2.5)},$$

pero $f(f^{-1}(W)) \subseteq W$, entonces $\phi f(f^{-1}(W)) \subseteq \phi W$ (Proposición 5.2.2 pues $\phi \in \mathfrak{T}_3[Y]$); como $\phi W = W$ entonces

$$f(\psi f^{-1}(W)) \subseteq \phi f(f^{-1}(W)) \subseteq W$$

por lo tanto $f(\psi f^{-1}(W)) \subseteq W$, de donde $f^{-1}(f(\psi f^{-1}(W))) \subseteq f^{-1}(W)$, pero

$$\psi f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(f(\psi f^{-1}(W))) \text{ (por propiedades de las funciones)}$$

entonces

$$\psi f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(W).$$

Como $f^{-1}(W) \subseteq \psi f^{-1}(W)$ (ya que $\psi \in \mathfrak{T}_3[X]$), se tiene que

$$\psi f^{-1}(W) = f^{-1}(W),$$

es decir $f^{-1}(W)$ es cerrado en (X, τ_ψ). Por otra parte sabemos que

$$f^{-1}(M) = X - f^{-1}(W),$$

entonces $f^{-1}(M) \in \tau_\psi$, por lo tanto para toda $x \in f^{-1}(M)$, $f^{-1}(M) \in \nu_{\tau_\psi}(x)$ y como $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(V)$, entonces por v_4 de la Definición 6.2.1, se tiene que

$$f^{-1}(V) \in \nu_{\tau_\psi}(x)$$

y ya que $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, si $N = f^{-1}(V)$ entonces

$$N \in \nu_{\tau_\psi}(x) \text{ y } f(N) \subseteq V,$$

por lo tanto $f : (X, \nu_{\tau_\psi}) \to (Y, \mu_{\sigma_\phi})$ es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo*.
$\Leftarrow\rfloor$ Sea $A \in P(X)$ entonces $f(A) \in P(Y)$, por lo tanto $\phi f(A)$ es cerrado en (Y, ϕ), entonces $Y - \phi f(A) \in \tau_\phi$. Sea $x \in f^{-1}(Y - \phi f(A))$ por lo tanto $f(x) \in Y - \phi f(A)$ y

$$Y - \phi f(A) \in \nu_{\tau_\phi}(f(x)).$$

Como $f : (X, \nu_{\tau_\psi}) \to (Y, \nu_{\tau_\phi})$ es un $\mathfrak{T}_4$-*morfismo* existe $N \in \nu_{\tau_\psi}(x)$ tal que $f(N) \subseteq Y - \phi f(A)$ (Definición 6.2.3), entonces

$$f^{-1}(f(N)) \subseteq f^{-1}(Y - \phi f(A)),$$

como $N \subseteq f^{-1}(f(N))$ (por propiedades básicas de las funciones) implica que

$$N \subseteq f^{-1}(Y - \phi f(A)),$$

pero $N \in \nu_{\tau_\psi}(x)$, entonces

$$f^{-1}(Y - \phi f(A)) \in \nu_{\tau_\psi}(x).$$

Por otra parte

$$f^{-1}(Y - \phi f(A)) = X - f^{-1}(\phi f(A)),$$

por lo tanto $X - f^{-1}(\phi f(A)) \in \nu_{\tau_\psi}(x)$ y como $x \in X - f^{-1}(\phi f(A)) = f^{-1}(Y - \phi f(A))$ (es decir que para todo $x \in X - f^{-1}(\phi f(A))$ tenemos que $X - f^{-1}(\phi f(A)) \in \nu_{\tau_\psi}(x)$), entonces

$$X - f^{-1}(\phi f(A)) \in \tau_\psi,$$

es decir $f^{-1}(\phi f(A))$ es cerrado en (X, τ_ψ). Sabemos que $f(A) \subseteq \phi f(A)$ de donde

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\phi f(A))$$

pero $A \subseteq f(f^{-1}(A))$, entonces

$$A \subseteq f^{-1}(\phi f(A)).$$

Tenemos que $A \subseteq \psi A$ y ψA es el menor cerrado que contiene a A, por lo tanto $\psi A \subseteq f^{-1}(\phi f(A))$ lo cual implica que

$$f(\psi A) \subseteq f(f^{-1}(\phi f(A))),$$

pero $f(f^{-1}(\phi f(A))) \subseteq \phi f(A)$ (por propiedades de las funciones) entonces

$$f(\psi A) \subseteq \phi f(A).$$

En consecuencia $f : (X, \psi) \to (Y, \phi)$ es un $\mathfrak{T}_3$-*morfismo*. Por lo tanto $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$.
■

Capítulo 7

$\mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$

Es bien sabido que otro de los conceptos básicos en topología es el de frontera. En este capítulo no enfocaremos en comprobar que éste determina, basándonos en el concepto de cerradura, una topología para un conjunto X dado. Definiremos la *ccce* $\mathfrak{T}_5$ y comprobaremos que $\mathfrak{T}_5$ es concretamente isomorfa a $\mathfrak{T}_4$.

7.1. La frontera y sus propiedades

Comenzaremos definiendo el concepto de frontera y determinaremos sus propiedades, pero antes, a manera de introducción estableceremos un resultado previo que relaciona el interior con la cerradura y que nos será de utilidad.

Observación 7.1.1. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$ entonces se cumple lo siguiente:

a. $X - Int_\tau A = \overline{X - A}^\tau$.

b. $X - \overline{A}^\tau = Int_\tau(X - A)$.

Demostración:

a. Recordemos que

$$\mathcal{F}_A = \{U \in P(X) |\ U \in \tau \text{ y } U \subseteq A\}$$

y

$$\mathcal{G}_{X-A} = \{C \in P(X) |\ X - C \in \tau \text{ y } X - A \subseteq C\}$$

entonces por una parte tenemos que $Int_\tau A = \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U$ y por lo tanto

$$X - Int_\tau A = X - \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U = \cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U),$$

así obtenemos que

$$X - Int_\tau A = \cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U).$$

Por otra parte como $U \in \tau$ se tiene que $X - U$ es cerrado en (X, τ) y como $U \subseteq A$ para todo $U \in \mathcal{F}_A$, entonces $X - A \subseteq X - U$ para todo $U \in \mathcal{F}_A$. Por lo tanto

$$X - A \subseteq \cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U)$$

y $\cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U)$ es un conjunto cerrado ya que es una intersección arbitraria de conjuntos cerrados, por esto podemos concluir que

$$\overline{X - A}^{\tau} \subseteq \cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U),$$

es decir que $\overline{(X - A)}^{\tau} \subseteq X - Int_{\tau}A$ (porque $\overline{X - A}^{\tau}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $X - A$). Para la otra contención debemos considerar que

$$\cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C = \overline{(X - A)}^{\tau}$$

es un conjunto cerrado que contiene a $X - A$, es decir $X - A \subseteq \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C$ entonces $X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C \subseteq A$, además $X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C \in \tau$, por lo tanto

$$X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C \subseteq A \text{ y } X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C \in \tau.,$$

esto último nos dice que:

$$X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C \in \mathcal{F}_A.$$

Por lo tanto $X - \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} \subseteq \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U$ entonces

$$X - \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U \subseteq \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C.$$

Pero $X - \cup_{U \in \mathcal{F}_A} U = \cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U)$ y entonces, por esto, podemos concluir que

$$\cap_{U \in \mathcal{F}_A}(X - U) \subseteq \cap_{C \in \mathcal{G}_{X-A}} C = \overline{(X - A)}^{\tau}.$$

Así obtenemos que

$$X - Int_{\tau}A \subseteq \overline{(X - A)}^{\tau}.$$

Por lo tanto: $X - Int_{\tau}A = \overline{(X - A)}^{\tau}$.

b. Consideremos las siguientes familias

$$\mathcal{F}_{X-A} = \{U \in P(X) |\ U \in \tau \text{ y } U \subseteq X - A\}$$

y

$$\mathcal{G}_A = \{C \in P(X) |\ X - C \in \tau \text{ y } A \subseteq C\}.$$

Se tiene que $\overline{A}^{\tau} = \cap_{C \in \mathcal{G}_A} C$, por lo tanto

$$X - \overline{A}^{\tau} = X - \cap_{C \in \mathcal{G}_A} C = \cup_{C \in \mathcal{G}_A}(X - C)$$

y así obtenemos que $X - \overline{A}^{\tau} = \cup_{C \in \mathcal{G}_A}(X - C)$. Por otra parte $X - C \in \tau$ y como $A \subseteq C$ para todo $C \in \mathcal{G}_A$, entonces $X - C \subseteq X - A$ para todo $C \in \mathcal{G}_A$. Por lo tanto

$$\cup_{C \in \mathcal{G}_A}(X - C) \subseteq X - A.$$

También se tiene que como $X - C \in \tau$ entonces $\cup_{C \in \mathcal{G}_A}(X - C) \in \tau$ pues τ es una topología para X y como $Int_{\tau}(X - A)$ es el mayor abierto contenido en $X - A$ (Afirmación 2.1.3.) podemos concluir que

$$\cup_{C \in \mathcal{G}_A}(X - C) \subseteq Int_{\tau}(X - A),$$

es decir que $X - \overline{A}^{\tau} \subseteq Int_{\tau}(X - A)$. Para la otra contención consideremos lo siguiente:

$$\cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U = Int_{\tau}(X - A)$$

es el mayor conjunto abierto contenido en $X - A$, es decir que $\cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U \subseteq X - A$, entonces $A \subseteq X - \cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U$, así hemos obtenido que $X - (X - \cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U) \in \tau$ y $A \subseteq X - \cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U$ por lo cual

$$X - \cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U \in \mathcal{G}_A.$$

De esto último podemos concluir que $\cap_{C \in \mathcal{G}_A} C \subseteq X - \cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U$, lo cual implica que

$$\cup_{U \in \mathcal{F}_{X-A}} U \subseteq X - \cap_{C \in \mathcal{G}_A} C,$$

es decir que

$$Int_{\tau}(X - A) \subseteq X - \overline{A}^{\tau}.$$

De las contenciones anteriores obtenemos que

$$X - \overline{A}^{\tau} = Int_{\tau}(X - A).$$

■

Definición 7.1.2. Sea $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, la *frontera* de A en (X, τ), denotada por FrA, está dada por $\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}$. Donde $\overline{A}^{\tau}$ es la cerradura de A con respecto de τ y $\overline{(X - A)}^{\tau}$ es la cerradura de $X - A$ respecto de τ.

Siguiendo en la misma línea de discusión de está definición, vemos que una propiedad que cumple la frontera, con la que se pueden determinar a los cerrados de (X, τ), es la siguiente.

Proposición 7.1.3. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$, entonces

a. $\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA$.

b. A es un conjunto cerrado si y sólo si $FrA \subseteq A$

Demostración:

a. Se tiene que $A \cup FrA = A \cup (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau})$ por definición de frontera y

$$A \cup (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}) = (A \cup \overline{A}^{\tau}) \cap (A \cup \overline{(X - A)}^{\tau}).$$

Considerando el primer intersectando del segundo miembro, de esta expresión, vemos que $A \cup \overline{A}^{\tau} = \overline{A}^{\tau}$ pues $A \subseteq \overline{A}^{\tau}$. Considerando el segundo intersectando del segundo miembro vemos que $A \cup (X - A) = X$ y $A \cup \overline{(X - A)}^{\tau} \subseteq X$, pero también

$$X \subseteq A \cup \overline{(X - A)}^{\tau}$$

pues $A \cup (X - A) \subseteq A \cup \overline{(X - A)}^{\tau}$, entonces

$$A \cup \overline{(X - A)}^{\tau} = X,$$

de esto obtenemos que:

$$(A \cup \overline{A}^{\tau}) \cap (A \cup \overline{(X - A)}^{\tau}) = \overline{A}^{\tau} \cap X = \overline{A}^{\tau}.$$

Siguiendo toda esta cadena de igualdades obtenemos que:

$$\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA.$$

b.

$\Rightarrow]$
Se tiene que $FrA = \overline{A}^{\tau} \cap \overline{X - A}^{\tau}$ (Definición 7.1.2). Como A es cerrado por hipótesis entonces $\overline{A}^{\tau} = A$ (Proposición 5.1.3), por lo tanto $\overline{A}^{\tau} \cap \overline{X - A}^{\tau} = A \cap \overline{X - A}^{\tau} \subseteq A$, de donde

$$FrA \subseteq A.$$

$\Leftarrow]$
Se tiene que $A \subseteq A$ y $FrA \subseteq A$ por hipótesis, entonces $A \cup FrA \subseteq A$. Por el inciso **a** sabemos que $\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA$ entonces

$$\overline{A}^{\tau} \subseteq A.$$

Por otra parte tenemos que $A \subseteq \overline{A}^{\tau}$ y por las dos contenciones obtenidas podemos concluir que:

$$A = \overline{A}^{\tau},$$

lo que nos indica que A es cerrado (Proposición 5.1.3).

■

Algunas relaciones de utilidad entre la frontera, la cerradura y el interior quedan establecidas en la proposición siguiente.

Proposición 7.1.4. Si $(X, \tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A \in P(X)$ entonces:

a. $X - FrA = Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)$.

b. $X = Int_{\tau}A \cup FrA \cup Int_{\tau}(X - A)$.

c. $\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA = Int_{\tau}A \cup FrA$.

d. $Int_{\tau}A = A - FrA$.

Demostración:

a. Se tiene que $X - FrA = X - (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau})$ por definición de frontera y $X - (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}) = (X - \overline{A}^{\tau}) \cup (X - \overline{(X - A)}^{\tau})$, por otra parte

$$X - \overline{A}^{\tau} = Int_{\tau}(X - A) \text{ y } X - \overline{(X - A)}^{\tau} = Int_{\tau}(X - (X - A))$$

por **b** de la Observación 7.1.1. Donde $X - \overline{(X - A)}^{\tau} = Int_{\tau}A$ y por lo tanto

$$(X - \overline{A}^{\tau}) \cup (X - \overline{(X - A)}^{\tau}) = Int_{\tau}(X - A) \cup Int_{\tau}A.$$

Así podemos concluir que:

$$X - FrA = Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A).$$

b. Puesto que $FrA \subseteq X$ entonces $X = FrA \cup (X - FrA)$ y por el inciso **a** anterior tenemos que

$$X - FrA = Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)$$

Por lo tanto $X = FrA \cup (Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)) = Int_{\tau}A \cup FrA \cup Int_{\tau}(X - A)$.

c. Por la Proposición 7.1.3 se tiene que $\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA$, por lo que es necesario checar que $\overline{A}^{\tau} = Int_{\tau}A \cup FrA$, para esto tengamos en cuenta que $Int_{\tau}A$, $Fr(A)$ e $Int_{\tau}(X - A)$ son ajenos y complementarios, así por el inciso **b** tenemos que:

$$X = Int_{\tau}A \cup FrA \cup Int_{\tau}(X - A),$$

luego

$$X - Int_{\tau}(X - A) = Int_{\tau}A \cup FrA.$$

Por el inciso **b** de la Observación 7.1.1 tenemos que $Int_{\tau}(X - A) = X - \overline{A}^{\tau}$, entonces:

$$X - Int_{\tau}(X - A) = X - (X - \overline{A}^{\tau}) = Int_{\tau}A \cup FrA,$$

es decir que $\overline{A}^{\tau} = Int_{\tau}A \cup FrA$. Así obtenemos que:

$$\overline{A}^{\tau} = Int_{\tau}A \cup FrA = A \cup FrA.$$

d. Se tiene que $A - FrA = A \cap (X - FrA) = A \cap (Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A))$ por el inciso **a**. Distribuyendo la intersección sobre la unión obtenemos que:

$$A \cap (Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)) = (A \cap Int_{\tau}A) \cup (A \cap Int_{\tau}(X - A))$$

y $(A \cap Int_{\tau}A) \cup (A \cap Int_{\tau}(X - A)) = Int_{\tau}A \cup \emptyset = Int_{\tau}A$, por lo tanto:

$$A - FrA = Int_{\tau}A.$$

■

En la siguiente proposición se establecen las propiedades que en general cumple la frontera, serán básicas para que un poco más adelante definamos nuestro *operador frontera*.

Proposición 7.1.5. Sea $(X,\tau) \in |\mathfrak{Top}|$ y $A, B \in P(X)$, entonces:

i) $Fr\emptyset = \emptyset$.

ii) $FrA = Fr(X - A)$.

iii) $Fr(FrA) \subseteq FrA$.

iv) $(A \cup B) \cup (Fr(A \cup B)) = (A \cup (FrA)) \cup (B \cup (FrB))$.

Demostración:

i) Se tiene que $Fr\emptyset = \overline{\emptyset}^{\tau} \cap \overline{(X - \emptyset)}^{\tau}$ por definición de frontera. Por otra parte $\overline{\emptyset}^{\tau} = \emptyset$ por **a** de la Proposición 5.1.6, entonces

$$\overline{\emptyset}^{\tau} \cap \overline{(X - \emptyset)}^{\tau} = \emptyset \cap \overline{(X - \emptyset)}^{\tau} = \emptyset.$$

Por lo tanto $Fr\emptyset = \emptyset$.

ii) Por una parte se tiene que $FrA = \overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}$ (por definición de frontera), por otra parte también se tiene que: $Fr(X - A) = \overline{(X - A)}^{\tau} \cap \overline{(X - (X - A))}^{\tau}$ (en este caso aplicando la definición de frontera a $X - A$), pero

$$X - (X - A) = A,$$

entonces

$$Fr(X - A) = \overline{(X - A)}^{\tau} \cap \overline{A}^{\tau} = \overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau} = FrA.$$

y así obtenemos que :

$$Fr(X - A) = FrA.$$

iii) Se tiene que $Fr(FrA) = \overline{FrA}^{\tau} \cap \overline{(X - FrA)}^{\tau}$ (definición de frontera aplicada a FrA) y como $FrA = \overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}$ (aquí si por la simple definición de frontera de A), entonces FrA es un conjunto cerrado porque es intersección de dos conjuntos cerrados, luego $\overline{FrA}^{\tau} = FrA$, por lo tanto tenemos que:

$$\overline{FrA}^{\tau} \cap \overline{(X - FrA)}^{\tau} = FrA \cap \overline{(X - FrA)}^{\tau}.$$

Por otra parte se tiene que $X - FrA = Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)$ (inciso **a** Proposición 7.1.4), entonces:

$$FrA \cap \overline{(X - FrA)}^{\tau} = (\overline{A} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}) \cap (\overline{Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)}^{\tau}).$$

También se tiene que $\overline{Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)}^{\tau} = \overline{Int_{\tau}A} \cup \overline{Int_{\tau}(X - A)}^{\tau}$ (Inciso **d** Proposición 5.1.6). Teniendo en cuenta esto último obtenemos que:

$$(\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}) \cap (\overline{Int_{\tau}A \cup Int_{\tau}(X - A)}^{\tau}) = (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X - A)}^{\tau}) \cap (\overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \cup \overline{Int_{\tau}(X - A)}^{\tau})$$

y haciendo la distribución correspondiente de la intersección sobre la unión, en el segundo miembro de esta ecuación, obtenemos

$$((\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X-A)}^{\tau}) \cap \overline{Int_{\tau}A}^{\tau}) \cup ((\overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X-A)}^{\tau}) \cap \overline{Int_{\tau}(X-A)}^{\tau}),$$

llegados a este punto debemos considerar que $\overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau}$ y $\overline{Int_{\tau}(X-A)}^{\tau} \subseteq \overline{X-A}^{\tau}$ (pues $Int_{\tau}A \subseteq A$ e $Int_{\tau}(X-A) \subseteq X-A$ luego entonces, aplicamos la propiedad para la cerradura vista en la Observación 5.1.5), por lo tanto la expresión se puede escribir como:

$$(\overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \cap \overline{(X-A)}^{\tau}) \cup (\overline{A}^{\tau} \cap \overline{Int_{\tau}(X-A)}^{\tau}).$$

Por la Observación 7.1.1 inciso **a** se tiene que $X - Int_{\tau}A = \overline{X-A}^{\tau}$ y por el inciso **b** $X - \overline{A} = Int_{\tau}(X-A)$, entonces $\overline{X - Int_{\tau}A}^{\tau} = \overline{\overline{(X-A)}}^{\tau\tau} = \overline{(X-A)}^{\tau}$ y $\overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau} = \overline{Int_{\tau}(X-A)}^{\tau}$, teniendo en cuenta estos resultados, la expresión final nos queda como:

$$(\overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \cap \overline{X - Int_{\tau}A}^{\tau}) \cup (\overline{A} \cap \overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau}) = Fr(Int_{\tau}A) \cup Fr\overline{\overline{A}^{\tau}}\tau = Fr(Int_{\tau}A) \cup Fr\overline{A}^{\tau}.$$

Sin perder de vista de donde partimos y teniendo en cuenta está última igualdad llegamos a que:

$$Fr(FrA) = Fr(Int_{\tau}A) \cup Fr\overline{A}^{\tau}.$$

Llegado este punto analicemos lo siguiente: si $x \in Fr(FrA)$ entonces $x \in Fr(Int_{\tau}A) \cup Fr\overline{A}^{\tau}$ y de aquí se derivan dos casos:

a) $x \in Fr(Int_{\tau}A) = \overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \cap \overline{X - Int_{\tau}A}^{\tau} = \overline{(X-A)}^{\tau}$, entonces $x \in \overline{Int_{\tau}A}^{\tau}$ y $x \in \overline{(X-A)}^{\tau}$, como además $Int_{\tau}A \subseteq A$ entonces $\overline{Int_{\tau}A}^{\tau} \subseteq \overline{A}^{\tau}$ y por lo tanto

$$x \in \overline{A}^{\tau} \text{ y } x \in \overline{(X-A)}^{\tau} \Leftrightarrow x \in \overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X-A)}^{\tau} = FrA,$$

con esto en mente obtenemos que $Fr(FrA) \subseteq FrA$.

b) $x \in Fr\overline{A}^{\tau} = \overline{A}^{\tau} \cap \overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau}$ entonces $x \in \overline{A}^{\tau}$ y $x \in \overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau}$, por otra parte como $A \subseteq \overline{A}^{\tau}$ entonces $X - \overline{A}^{\tau} \subseteq X - A$ y por lo tanto $\overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau} \subseteq \overline{(X-A)}^{\tau}$ (propiedad de la cerradura, Observación 5.1.5) y como $x \in \overline{X-\overline{A}^{\tau}}^{\tau}$ entonces $x \in \overline{(X-A)}^{\tau}$, con esto obtenemos que $x \in \overline{A}^{\tau}$ y $x \in \overline{(X-A)}^{\tau} \Leftrightarrow x \in \overline{A}^{\tau} \cap \overline{(X-A)}^{\tau} = FrA$, por lo tanto:

$$Fr(FrA) \subseteq FrA.$$

Como en ambos casos obtenemos que $Fr(FrA) \subseteq FrA$ podemos concluir que

$$Fr(FrA) \subseteq FrA.$$

iv) Se tiene que $(A \cup B) \cup (Fr(A \cup B)) = \overline{A \cup B}^{\tau}$ por el inciso **c** de la Proposición 7.1.4. Por otra parte $\overline{A \cup B}^{\tau} = \overline{A}^{\tau} \cup \overline{B}^{\tau}$ por la Proposición 5.1.6, pero $\overline{A}^{\tau} = A \cup FrA$ y $\overline{B}^{\tau} = B \cup FrB$ de nuevo por el inciso **c** de la Proposición 7.1.4, esto nos deja con el resultado:

$$(A \cup B) \cup (Fr(A \cup B)) = (A \cup FrA) \cup (B \cup FrB).$$

■

A partir de estas propiedades se puede definir, para un conjunto X, una función

$$Fr : P(X) \to P(X),$$

que llamaremos un *operador frontera*.

7.2. El operador frontera

Definición 7.2.1. Sea X un conjunto y $A, B \in P(X)$, un *operador frontera* en X es una función

$$\partial : P(X) \to P(X)$$

que satisface:

F_1. $\partial\emptyset = \emptyset$.

F_2. $\partial A = \partial(X - A)$.

F_3. $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$.

F_4. $(A \cup B) \cup \partial(A \cup B) = (A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B)$.

Las propiedades de la Definición 7.2.1 y la siguiente afirmación nos darán la base para determinar un operador cerradura.

Afirmación 7.2.2. Sean X un conjunto y $\partial : P(X) \to P(X)$ un *operador frontera* en X, entonces la función

$$\psi^{\partial} : P(X) \to P(X)$$

cuya regla de correspondencia es

$$A \mapsto A \cup \partial A$$

para cada $A \in P(X)$, es un *operador cerradura* de $P(X)$ en $P(X)$.

Demostración:

(i) $\psi^{\partial}\emptyset = \emptyset \cup \partial\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ y entonces $\psi^{\partial}\emptyset = \emptyset$.

(ii) $\psi^{\partial}A = A \cup \partial A$, pero $A \subseteq A \cup \partial A$, por lo tanto $A \subseteq \psi^{\partial}A$.

(iii) $\psi^{\partial}(\psi^{\partial}A) = \psi^{\partial}(A \cup \partial A) = (A \cup \partial A) \cup \partial(A \cup \partial A) = (A \cup \partial A) \cup (\partial A \cup \partial(\partial A))$ por F_4 de la Definición 7.2.1 luego $(A \cup \partial A) \cup (\partial A \cup \partial(\partial A)) = (A \cup \partial A) \cup (\partial A)$ ya que $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$ por F_3 de la Definición 7.2.1, entonces $\partial A \cup \partial(\partial A) = \partial A$ y $A \cup \partial A \cup \partial A = A \cup \partial A = \psi^{\partial}A$, por lo tanto

$$\psi^{\partial}(\psi^{\partial}A) = \psi^{\partial}A.$$

(iv) $\psi^{\partial}(A \cup B) = (A \cup B) \cup \partial(A \cup B) = (A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B)$ por F_4 de la Definición 7.2.1 pero $(A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B) = \psi^{\partial}A \cup \psi^{\partial}B$. De donde

$$\psi^{\partial}(A \cup B) = \psi^{\partial}A \cup \psi^{\partial}B.$$

Y así concluimos que ψ^{∂} es un operador cerradura de $P(X)$ en $P(X)$ porque se cumplen las cuatro propiedades, que lo determinan, dadas en la Definición 5.2.1.

$\blacksquare$

Topología τ_{ψ^∂}

Sea X un conjunto y ψ^∂ el operador cerradura en X de la Afirmación 7.2.2, entonces la familia

$$\mathfrak{W} := \{W \in P(X) |\ \psi^\partial W = W\}$$

es distinta del vacío y cerrada bajo intersecciones arbitrarias y uniones finitas arbitrarias (Observación 5.2.3) y por el Teorema 5.2.4.

$$\tau_{\psi^\partial} := \{X - W |\ W \in \mathfrak{W}\}$$

es una topología en X que tienen las siguientes propiedades.

Afirmación 7.2.3. Sea X un conjunto, entonces para todo $A \in P(X)$

a. $\overline{A}^{\tau_{\psi^\partial}} = A \cup \partial A$ y

b. $\partial A = FrA$.

Demostración:

a. Sea $A \in P(X)$, sabemos que $\overline{A}^{\tau_{\psi^\partial}} = \psi^\partial A$ (Teorema 5.2.4), pero por definición de ψ^∂ se tiene que $\psi^\partial A = A \cup \partial A$, por lo tanto $\overline{A}^{\tau_{\psi^\partial}} = A \cup \partial A$.

b. Se tiene que $FrA = \overline{A}^{\tau_{\psi^\partial}} \cap \overline{X - A}^{\tau_{\psi^\partial}} = \psi^\partial A \cap \psi^\partial (X - A) = (A \cup \partial A) \cap [(X - A) \cup \partial (X - A)] = A \cap [(X - A) \cup \partial (X - A)] \cup \partial A \cap [(X - A) \cup \partial (X - A)] = [A \cap (X - A)] \cup [A \cap \partial (X - A)] \cup [\partial A \cap (X - A)] \cup [\partial A \cap \partial (X - A)]$, (ya que $A \cap (X - A) = \emptyset$), $= [\emptyset \cup (A \cap \partial (X - A)] \cup [\partial A \cap (X - A)] \cup [\partial A \cap \partial (X - A)]$, pero se tiene que $\partial A = \partial (X - A)$ por F_2 de la Definición 7.2.1 por lo tanto $[A \cap \partial (X - A)] \cup [\partial A \cap (X - A)] \cup [\partial A \cap \partial (X - A)] = [A \cap \partial A] \cup [\partial (X - A) \cap (X - A)] \cup [\partial A \cap \partial A] = [A \cap \partial A] \cup [\partial (X - A) \cap (X - A)] \cup [\partial A] = \partial A$, por lo tanto

$$FrA = \partial A.$$

■

Aquí podemos pensar si se puede definir un operador frontera sin que necesite de la topología, la respuesta es que si, para corroborar esto consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Sean un conjunto X, $A, B \in P(X)$ y $\partial : P(X) \to P(X)$ una función definida como sigue

$$\partial A = \emptyset \text{ para todo } A \in P(X).$$

Comprobemos que ∂ así definida es un operador frontera.

F_1. $\partial \emptyset = \emptyset$ se cumple, directamente, por definición de ∂, por lo que se cumple F_1.

F_2. $\partial A = \emptyset$ y $\partial (X - A) = \emptyset$ ambos por definición de ∂, por lo tanto $\partial A = \partial (X - A)$, así se cumple F_2.

F_3. Se tiene que $\partial(\partial A) = \partial(\emptyset) = \emptyset$ y $\partial A = \emptyset$, por lo tanto $\partial(\partial A) = \partial A$, entonces se cumple F_3.

F_4. Se tiene que $(A \cup B) \cup \partial(A \cup B) = (A \cup B) \cup \emptyset = A \cup B$ y $(A \cup \partial A) = A \cup \emptyset = A$, $(B \cup \partial B) = B \cup \emptyset = B$, por lo tanto $(A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B) = A \cup B$, de donde

$$(A \cup B) \cup \partial(A \cup B) = (A \cup \partial A) \cup (B \cup \partial B) \text{ (se cumple } F_4).$$

Con lo que podemos concluir que ∂ es un operador frontera en X y podemos considerar la pareja

$$(X, \partial)$$

en la que X es un conjunto y ∂ una estructura para X llamada operador frontera en X. Por otra parte ya comprobamos que un operador frontera determina un operador cerradura (Afirmación 7.2.2) por medio de la asignación

$$A \mapsto A \cup \partial A.$$

Con la finalidad de asignar una topología al operador frontera considerado. Entonces como $\partial A = \emptyset$, se tiene que

$$A \cup \partial A = A \cup \emptyset = A,$$

con lo que el operador cerradura asociado ψ^{∂} a ∂ nos da la función $\psi^{\partial} : P(X) \to P(X)$ definida como

$$\psi^{\partial} A = A$$

y como ya vimos en un ejemplo anterior (el correspondiente al operador cerradura) éste nos determina la topología discreta.

■

La clase $|\mathfrak{T}_5|$

Consideremos un conjunto X y la familia de *operadores frontera* en X que denotaremos como $\mathfrak{T}_5[X]$, entonces definimos la clase

$$|\mathfrak{T}_5| := \{(X, \partial) |\ X \text{ es un conjunto y } \partial \in \mathfrak{T}_5[X]\}$$

Análogamente a los casos anteriores definiremos los $\mathfrak{T}_5$-*morfismos* entre los elementos de la clase $|\mathfrak{T}_5|$ para conformar la categoría concreta $\mathfrak{T}_5$.

Los $\mathfrak{T}_5$-*morfismos*

Definición 7.2.4. Sean $(X, \partial), (Y, \eth) \in |\mathcal{T}_5|$ y $f : X \to Y$ una función, entonces decimos que

$$f : (X, \partial) \to (Y, \eth)$$

es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo* o que f preserva la $\mathcal{T}_5$-*estructura* si

$$\text{para todo } B \subseteq Y \text{ se tiene que } \partial(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\eth B).$$

De acuerdo con la Definición 7.2.4 vamos a demostrar que los $\mathfrak{T}_5$-*morfismos* cumplen las propiedades de composición e identidad.

Proposición 7.2.5. Sean $(X,\partial),(Y,\eth)$ y $(Z,\reflectbox{$\partial$}) \in |\mathfrak{T}_5|$.

a) Si $f:(X,\partial)\to(Y,\eth)$ y $g:(Y,\eth)\to(Z,\reflectbox{∂})$ son $\mathfrak{T}_5$-*morfismos*,

$$g\circ f:(X\partial)\to(Z,\reflectbox{∂}) \text{ es un } \mathfrak{T}_5\text{-}\textit{morfismo}.$$

b) $1_X:(X,\partial)\to(X,\partial)$ es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo*.

Demostración:

(a) Sea $C\subseteq Z$, como $g:(Y,\eth)\to(Z,\reflectbox{∂})$ es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo* se tiene que

$$\eth(g^{-1}(C))\subseteq g^{-1}(\reflectbox{∂}C),$$

por lo tanto $f^{-1}(\eth(g^{-1}(C)))\subseteq f^{-1}(g^{-1}(\reflectbox{∂}C))$. Por otra parte $f:(X,\partial)\to(Y,\eth)$ es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo* y $(g^{-1}(C))\subseteq Y$, entonces

$$\partial(f^{-1}(g^{-1}(C)))\subseteq f^{-1}(\eth(g^{-1}(C))),$$

por lo tanto

$$\partial(f^{-1}(g^{-1}(C)))\subseteq f^{-1}(g^{-1}(\reflectbox{∂}C)),$$

entonces $\partial((g\circ f)^{-1}(C))\subseteq(g\circ f)^{-1}(\reflectbox{∂}C)$, es decir $g\circ f:(X,\partial)\to(Z,\reflectbox{∂})$ es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo*.

(b) Para todo $U\subseteq X$ se tiene que $\partial U\subseteq\partial U$, pero

$$1_X^{-1}(U)=U \text{ e } 1_X^{-1}(\partial U)=\partial U,$$

por lo tanto $\partial(1_X^{-1}(U))\subseteq 1_X^{-1}(\partial U)$, por lo tanto $1_X:(X,\partial)\to(X,\partial)$ es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo*. ■

Ahora vamos definir la categoría concreta $\mathfrak{T}_5$.

7.3. La *ccce* $\mathfrak{T}_5$

Definición 7.3.1. La *ccce* $\mathfrak{T}_5$ es una *ccce* compuesta de los siguientes miembros:

i) La clase $|\mathfrak{T}_5|$, a cuyos elementos les llamaremos $\mathfrak{T}_5$-*objetos*.

ii) Para cada par $(X,\partial),(Y,\eth)\in|\mathfrak{T}_5|$ definimos el conjunto:

$$\hom_{\mathfrak{T}_5}[(X,\partial),(Y,\eth)] := \{f\in Y^X|\ f:(X,\partial)\to(Y,\eth) \text{ es } \mathfrak{T}_5\text{-}\textit{morfismo}\},$$

sujeto a las siguientes condiciones (Proposición 7.2.5).
a) **Propiedad de composición.**
Para (X,∂), $(Y,\eth)$ y $(Z,\reflectbox{$\partial$})$ $\mathfrak{T}_5$-*objetos* arbitrarios si

$$f\in\hom_{\mathfrak{T}_5}[(X,\partial),(Y,\eth)] \text{ y } g\in\hom_{\mathfrak{T}_5}[(Y,\eth),(Z,\reflectbox{∂})]$$

entonces

$$g\circ f\in\hom_{\mathfrak{T}_5}[(X,\partial),(Z,\reflectbox{∂})].$$

b) **Propiedad de identidad.**
Para todo $\mathfrak{T}_5$-*objeto* (X,∂)

$$1_X\in\hom_{\mathfrak{T}_5}[(X,\partial),(X,\partial)].$$

donde $1_X(x)=x$ para toda $x\in X$.

La relación de τ y ∂

Observación 7.3.2. Sea X un conjunto, $\mathfrak{T}_3$ y $\mathfrak{T}_5$, entonces $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.

Demostración:

♦ Sea $\psi \in \mathfrak{T}_3[X]$, como $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_3[X]$ son biyectables (Observación 5.3.2) τ_ψ es la única topología en X asociada a ψ; por el Teorema 5.2.4, ya que ψ es un operador cerradura. Por otra parte la frontera con respecto de esta topología, dada por la Definición 7.1.2, es $\partial_{\tau_\psi} \in \mathfrak{T}_5[X]$, por lo tanto tenemos definida una función de $\mathfrak{T}_3[X]$ en $\mathfrak{T}_5[X]$, cuya regla de correspondencia para cada $\psi \in \mathfrak{T}_3[X]$ es

$$\psi \mapsto \partial_{\tau_\psi}.$$

De aquí notemos que como $\partial_{\tau_\psi} \in \mathfrak{T}_5[X]$ entonces definamos la función

$$\psi^{\partial_{\tau_\psi}} : P(X) \to P(X)$$

cuya regla de correspondencia es

$$A \mapsto A \cup \partial_{\tau_\psi} A$$

para cada $A \in P(X)$, entonces $\psi^{\partial_{\tau_\psi}}$ es un operador cerradura (Afirmación 7.2.2), es decir $\psi^{\partial_{\tau_\psi}} \in \mathfrak{T}_3[X]$. Entonces queda definida la función de $\mathfrak{T}_5[X]$ en $\mathfrak{T}_3[X]$

$$\partial_{\tau_\psi} \mapsto \psi^{\partial_{\tau_\psi}}.$$

• Demostraremos que $\psi = \psi^{\partial_{\tau_\psi}}$.
Para cada $A \in P(X)$ se tiene que $\psi A = \overline{A}^{\tau_\psi} = A \cup \partial_{\tau_\psi} A = \psi^{\partial_{\tau_\psi}} A$, por lo tanto $\psi = \psi_{\partial_{\tau_\psi}}$.
Entonces

$$\psi \mapsto \partial_{\tau_\psi} \mapsto \psi^{\partial_{\tau_\psi}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{T}_3[X]}.$$

♦ Sea $\partial \in \mathfrak{T}_5[X]$ y definamos la función

$$\psi^\partial : P(X) \to P(X)$$

cuya regla de correspondencia es

$$A \mapsto A \cup \partial A$$

para cada $A \in P(X)$, entonces ψ^∂ es un operador cerradura (Afirmación 7.2.2), es decir $\psi^\partial \in \mathfrak{T}_3[X]$. Por lo tanto tenemos definida una función de $\mathfrak{T}_5[X]$ en $\mathfrak{T}_3[X]$, cuya regla de correspondencia para cada $\partial \in \mathfrak{T}_5[X]$ es

$$\partial \mapsto \psi^\partial.$$

Como $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{Top}[X]$ son biyectables τ_{ψ^∂} es la única topología en X asociada a ψ^∂. Sea $\partial_{\tau_{\psi^\partial}}$ la frontera, con respecto a esta topología, descrita en la Definición 7.1.2, entonces $\partial_{\tau_{\psi^\partial}} \in \mathfrak{T}_5[X]$. Por lo que queda definida la función de $\mathfrak{T}_5[X]$ en $\mathfrak{T}_3[X]$ cuya regla de correspondencia es

$$\psi^\partial \mapsto \partial_{\tau_{\psi^\partial}}.$$

• Demostraremos que $\partial = \partial_{\tau_{\psi^\partial}}$.
Para cada $A \in P(X)$ se tiene que $\partial_{\tau_{\psi^\partial}} A = \overline{A}^{\tau_{\psi^\partial}} \cap \overline{X - A}^{\tau_{\psi^\partial}} = \psi^\partial(A) \cap \psi^\partial(X - A) = \partial A$, por lo tanto $\partial_{\tau_{\psi^\partial}} = \partial$. Entonces la función

$$\partial \mapsto \psi^\partial \mapsto \partial_{\tau_{\psi^\partial}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{T}_5[X]}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.
■

Afirmación 7.3.3. Sea X un conjunto, $\mathfrak{Top}$ y $\mathfrak{T}_5$, entonces $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.

Demostración:

Se tiene que $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{Top}[X]$ son biyectables y $\mathfrak{T}_3[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables (Observación 7.3.2), sabemos que la biyectabilidad es una relación de equivalencia entre conjuntos, en particular es transitiva, por lo tanto $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.
■

7.4. $\mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$

Afirmación 7.4.1 Sea X un conjunto, $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$, entonces $\mathfrak{T}_4[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.

Demostración:

Por la Observación 6.2.3 se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_4[X]$ son biyectables y por la Afirmación 7.3.3 se tiene que $\mathfrak{Top}[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables, sabemos que la biyectabilidad es una relación de equivalencia entre conjuntos, en particular es una relación transitiva, por lo tanto $\mathfrak{T}_4[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables.
■

Teorema 7.4.2. $\mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$.

Demostración:

(i) Sea X un conjunto se tiene que $\mathfrak{T}_4[X]$ y $\mathfrak{T}_5[X]$ son biyectables por la Afirmación 7.4.1. Sea entonces

$$\Phi_X : \mathfrak{T}_4[X] \to \mathfrak{T}_5[X]$$

función biyectiva cuya regla de correspondencia, para cada $\nu \in \mathfrak{T}_4[X]$, es

$$\nu \mapsto \partial_{\tau_\nu},$$

donde τ_ν es la topología generada por el operador vecindad ν (Teorema 6.2.2)

(ii) Sean $(X, \nu), (Y, \mu) \in |\mathfrak{T}_4|$ y $f : X \to Y$ una función, probaremos que:

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (Y, \mu)] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{T}_5}[(X, \Phi_X(\nu)), (Y, \Phi_Y(\mu))].$$

donde $\Phi_X(\nu) = \partial_{\tau_\nu}$ y $\Phi_Y(\mu) = \eth_{\tau_\mu}$.

♦($\Rightarrow$) Sea $B \subseteq Y$, sabemos que $B \subseteq \overline{B}^{\tau_\mu}$ (donde $\overline{}^{\tau_\mu}$ es la cerradura con respecto de la topología τ_μ), $\overline{B}^{\tau_\mu}$ es cerrado, por lo tanto $Y - \overline{B}^{\tau_\mu} \in \tau_\mu$, pero por hipótesis

$$f : (X, \nu) \to (Y, \mu) \text{ es un } \mathfrak{T}_4\text{-}\textit{morfismo},$$

luego, consideremos $x \in X$ de tal manera que $Y - \overline{B}^{\tau_\mu} \in \mu(f(x))$, entonces existe $N \in \nu(x)$ tal que

$$f(N) \subseteq Y - \overline{B}^{\tau_\mu},$$

entonces $f^{-1}(f(N)) \subseteq f^{-1}(Y - \overline{B}^{\tau_\mu})$, pero $N \subseteq f^{-1}(f(N))$ (por propiedades básicas de las funciones), por lo tanto

$$N \subseteq f^{-1}(Y - \overline{B}^{\tau_\mu}) = X - f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}, \text{ es decir } N \subseteq X - f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu},$$

por otro lado $N \in \nu(x)$ y $x \in X - f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}$ (ya que $f(x) \in Y - \overline{B}^{\tau_\mu} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y - \overline{B}^{\tau_\mu})$), entonces

$$X - f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu} \in \nu(x),$$

por lo tanto $X - f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu} \in \tau_\nu$ y entonces $f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}$ es cerrado. Por otra parte

$$\partial_{\tau_\nu} f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \cap \overline{X - f^{-1}(B)}^{\tau_\nu} = \overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \cap \overline{f^{-1}(Y - B)}^{\tau_\nu}$$

(donde $\overline{}^{\tau_\nu}$ es la cerradura con respecto de la topología τ_ν). Tenemos que $B \subseteq \overline{B}^{\tau_\mu}$ por lo tanto $f^{-1}B \subseteq f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}$, entonces

$$\overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \subseteq \overline{f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}}^{\tau_\nu}$$

por propiedad de la cerradura (Observación 5.1.5), pero ya comprobamos que $f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}$ es cerrado, entonces

$$\overline{f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu}}^{\tau_\nu} = f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu},$$

por lo tanto

$$\overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \subseteq f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu} ...(\blacktriangleright).$$

Tenemos que $\overline{Y - B}^{\tau_\mu}$ es cerrado, entonces $f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu}$ es cerrado (análogamente a como hicimos para $\overline{B}^{\tau_\mu}$), por lo tanto

$$\overline{f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu}}^{\tau_\nu} = f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu}.$$

Como $Y - B \subseteq \overline{Y - B}^{\tau_\mu}$ entonces $f^{-1}(Y - B) \subseteq f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu}$ por lo tanto

$$\overline{f^{-1}(Y - B)}^{\tau_\nu} \subseteq \overline{f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu}}^{\tau_\nu},$$

y obtenemos

$$\overline{f^{-1}(Y - B)}^{\tau_\nu} \subseteq f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu} ...(\blacktriangleleft)$$

de $(\blacktriangleright)$ y $(\blacktriangleleft)$ se sigue que

$$\overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \cap \overline{f^{-1}(Y - B)}^{\tau_\nu} \subseteq f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu} \cap f^{-1}\overline{Y - B}^{\tau_\mu},$$

pero

$$\overline{f^{-1}B}^{\tau_\nu} \cap \overline{f^{-1}(Y-B)}^{\tau_\nu} = \partial_{\tau_\nu} f^{-1}B$$

y

$$f^{-1}\overline{B}^{\tau_\mu} \cap f^{-1}\overline{Y-B}^{\tau_\mu} = f^{-1}(\overline{B}^{\tau_\mu} \cap \overline{Y-B}^{\tau_\mu}) = f^{-1}\eth_{\tau_\mu} B$$

entonces

$$\partial_{\tau_\nu} f^{-1}B \subseteq f^{-1}\eth_{\sigma_\mu} B$$

por lo tanto $f \in \hom_{\mathfrak{T}_5}[(X, \partial_{\tau_\nu}), (Y, \eth_{\sigma_\mu})]$, es decir f es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo.*

♦($\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y $M \in \mu(f(x))$, entonces existe $W \in \tau_\mu$ tal que

$$f(x) \in W \subseteq M$$

por lo tanto

$$x \in f^{-1}W \subseteq f^{-1}M,$$

como $W \in \tau_\mu$, se tiene que $Y - W$ es cerrado, por lo tanto

$$\eth_{\tau_\mu}(Y - W) \subseteq Y - W \text{ (Proposición 7.1.3 } \mathbf{b}\text{)},$$

entonces

$$f^{-1}(\eth_{\tau_\mu}(Y - W)) \subseteq f^{-1}(Y - W),$$

pero por hipótesis

$$f : (X, \partial_{\tau_\nu}) \to (Y, \eth_{\tau_\mu})$$

es un $\mathfrak{T}_5$-*morfismo*, entonces

$$\partial_{\tau_\nu} f^{-1}(Y - W) \subseteq f^{-1}(\eth_{\tau_\mu}(Y - W))$$

y por lo tanto tenemos que $\partial_{\tau_\nu} f^{-1}(Y - W) \subseteq f^{-1}(Y - W)$, es decir $f^{-1}(Y - W) = X - f^{-1}(W)$ es cerrado (Proposición 7.1.3 **b**, un cerrado contiene a su frontera), por lo tanto $f^{-1}(W) \in \tau_\nu$, entonces $f^{-1}(M) \in \nu(x)$ tal que

$$f(f^{-1}(M)) \subseteq M$$

si $N = f^{-1}(M)$, se tiene que existe $N \in \nu(x)$ tal que $f(N) \subseteq M$. Por lo tanto

$$f \in \hom_{\mathfrak{T}_4}[(X, \nu), (Y, \mu)],$$

entonces $\mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$

■

Capítulo 8

ccce casi isomorfas

En esta sección definiremos el concepto de *casi isomorfo*, el objetivo de hacerlo es ampliar la teoría que hemos tratado, para lograr este objetivo comenzaremos basándonos en la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$, para lo cual definiremos algunos aspectos básicos de las funciones continuas entre los espacios métricos. También presentaremos los conceptos de *fineza*, *aspereza* y métricas equivalentes en $\mathfrak{Mtc}$ para después generalizarlo en las *ccce*, pues estos conceptos nos servirán para tratar las ideas de función *casi biyectiva* y de *casi isomorfo*. En esta sección también veremos que las *ccce* $\mathfrak{Top}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$ son *casi isomorfas*.

8.1. Funciones continuas en espacios métricos

Definición 8.1.1. Sean (X, d) y (Y, e) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Si $x \in X$ decimos que f es *continua* en x si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $y \in X$

$$d(x, y) < \delta \text{ implica que } e(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Decimos que f es *continua* de (X, d) en (Y, e) si es continua para todo $x \in X$.

La siguiente proposición establece algunos resultados sobre funciones continuas entre espacios métricos y nos serán de utilidad.

Proposición 8.1.2. Sean (X, d) y (Y, e) espacios métricos, $f : X \to Y$ una función, entonces son equivalentes:

a) f es continua de (X, d) en (Y, e).

b) Para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(D_d(x, \delta)) \subseteq D_e(f(x), \epsilon).$$

c) Si $A \subseteq Y$ es abierto en (Y, e) entonces $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d).

d) SI $A \subseteq Y$ tal que $A \in \tau_e$ entonces $f^{-1}(A) \in \tau_d$.

Donde τ_d es la familia de todos los conjuntos abiertos de (X, d) según la métrica d y τ_e es la familia de todos los conjuntos abiertos de (Y, e) según la métrica e (Definición

1.2.4).

Los resultados de esta Proposición 8.1.2., son básicos. La demostración de a) si y sólo si b) está en [7] páginas 4 y 5. La demostración de a) si y sólo si c) se encuentra en [7] paginas 6 y 7. Por otra parte, sin afán de realizar la demostración, veamos que c) es equivalente a d) (así notaremos que es sólo otra forma de mencionar lo mismo):

c) $\Rightarrow$ d) Si $A \subseteq Y$ tal que $A \in \tau_e$ entonces A es abierto en (Y, e) y por lo tanto $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d) por c), es decir que $f^{-1}(A) \in \tau_d$.

d) $\Rightarrow$ c) Si $A \subseteq Y$ tal que A es abierto en (Y, e) entonces $A \in \tau_e$, por lo tanto $f^{-1}(A) \in \tau_d$ por d), es decir que $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, τ_d).

Tenemos todos los elementos necesarios para tratar la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$, que veremos a detalle en la siguiente sección.

8.2. La *ccce* $\mathfrak{Mtc}$

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ consideremos la familia

$$\mathfrak{Mtc}[X] = \{d : X \times X \to \Re^{+} \cup \{0\} |\ d \text{ es métrica en } X\}.$$

Con esto en mente definamos la clase:

$$|\mathfrak{Mtc}| := \{(X, d) |\ X \text{ es un conjunto distinto del vacío y } d \in \mathfrak{Mct}[X]\}$$

Definición 8.2.1. La *ccce* $\mathfrak{Mtc}$ es una *ccce* compuesta de los siguientes miembros.

i) La clase $|\mathfrak{Mtc}|$, a cuyos elementos les llamamos espacios métricos y en nuestro caso también podríamos llamarlos $\mathfrak{Mtc}$-*objetos*.

ii) Para cada par (X, d), $(Y, e) \in |\mathfrak{Mtc}|$ definimos el conjunto de funciones continuas de (X, d) en (Y, e), es decir

$$\hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (Y, e)] := \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_d), (Y, \tau_e)]$$

Tal definición de $\hom_{\mathfrak{Mtc}}$ se justifica gracias a la Proposición 8.1.2. Si $f \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (Y, e)]$ diremos que f es un $\mathfrak{Mtc}$-*morfismo*. Por otra parte $\hom_{\mathfrak{Mtc}}$ esta sujeto a las siguientes condiciones[1]

a) **Propiedad de composición.**
Para (X, d), (Y, e) y $(Z, b) \in |\mathfrak{Mtc}|$ arbitrarios, si

$$f \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (Y, e)] \text{ y } g \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(Y, e), (Z, b)]$$

entonces

$$g \circ f \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (Z, b)]$$

[1]Propiedades básicas, muy conocidas, de las funciones continuas entre espacios métricos.

b) **Propiedad de identidad.**
Para todo $(X,d) \in |\mathfrak{Mtc}|$.

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,d),(X,d)]$$

donde $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.

Antes de abordar el siguiente concepto recordemos que si X es un conjunto, τ y σ dos topologías para X, entonces decimos que τ es más fina que σ si y sólo si

$$1_X : (X,\tau) \to (X,\sigma)$$

es continua lo cual significa que si $U \in \sigma$ entonces $U \in \tau$ (i.e. $\sigma \subseteq \tau$). Por otra parte si d, e son dos métricas para X y τ_d, τ_e son las topologías inducidas por d y e respectivamente, se tiene entonces que τ_d es más fina que τ_e si y sólo si

$$\tau_e \subseteq \tau_d$$

siguiendo con la misma línea de argumentación.

Entre otras cosas, vemos que lo anterior nos sirve para que en el lenguaje de los objetos y los morfismos de la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$ determinemos lo siguiente.

Definición 8.2.2. Dado X un conjunto distinto del vacío, $d, e \in \mathfrak{Mtc}[X]$; diremos que d es *más fina* que e o que e es *más áspera* que d si

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,d),(X,e)]$$

donde $1_X : X \to X$, $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$. Debido a nuestra definición de continuidad en la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$ lo denotaremos por

$$e \leq_{\mathfrak{Mtc}} d.$$

Con base en este concepto podemos definir el siguiente que es el de métricas equivalentes.

Métricas equivalentes

Definición 8.2.3. Sea X un conjunto, $d, e \in \mathfrak{Mtc}[X]$; diremos que d es *equivalente* a e, si

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,d),(X,e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,e),(X,d)]$$

es decir $e \leq_{\mathfrak{Mtc}} d$ y $d \leq_{\mathfrak{Mtc}} e$. Entonces escribiremos $e \equiv_{\mathfrak{Mtc}} d$. Para descargar la notación escribiremos $e \equiv d$ siempre que no haya lugar a confusión.

La siguiente observación nos permite comprender el concepto de equivalencia entre dos métricas para X en términos de las topologías que generan para X.

Observación 8.2.4. Sea X un conjunto, $d, e \in \mathfrak{Mtc}[X]$, entonces $d \equiv e$ si, y sólo si, $\tau_d = \tau_e$.

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$
Por la Definición 8.2.3 se tiene que $d \equiv e$, si

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (X, e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}(X, e), (X, d)].$$

En base a $ii)$ de la Definición 8.2.1 esto es equivalente a tener:

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_d), (X, \tau_e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_e), (X, \tau_d)],$$

de donde resulta que $\tau_e \subseteq \tau_d$ y $\tau_d \subseteq \tau_e$, es decir: $\tau_d = \tau_e$.

$\Leftarrow\rfloor$
Si $\tau_d = \tau_e$ entonces

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_d), (X, \tau_e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_e), (X, \tau_d)].$$

En base a $ii)$ de la Definición 8.2.1 esto es equivalente a tener:

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (X, e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, e), (X, d)],$$

que es a lo que se quería llegar.
■

Llegados a este punto consideremos el siguiente ejemplo, que aunque es sencillo, nos deja claro que dos métricas pueden ser equivalentes sin llegar a ser iguales, el objetivo de esto es hacer un contraste entre equivalencia e igualdad.

Ejemplo 8.2.5. Sean X un conjunto distinto del vacío, d una métrica en X y $e = d/2$ otra métrica para X, entonces demostraremos que

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (X, e)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, e), (X, d)]$$

es decir que 1_X e 1_X^{-1} son continuas.

Demostración:

i) Sea $U \subseteq X$ abierto en (X, e), entonces para toda $x \in U$ existe $\delta_x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$D_e(x, \delta_x) \subseteq U,$$

Definición 2.1.3 y

$$D_e(x, \delta_x) := \{y \in X |\ e(x, y) < \delta_x\},$$

Definición 2.1.2. Sea $\epsilon_x = 2\delta_x$, entonces $\epsilon_x > 0$ y

$$D_d(x, \epsilon_x) := \{y' \in X |\ d(x, y') < \epsilon_x\}.$$

Sea $z \in D_d(x, \epsilon_x)$ entonces $d(x, z) < \epsilon_x$, por lo tanto $d(x, z) < 2\delta_x$ de donde

$$\frac{d}{2}(x,z) < \delta_x,$$

es decir

$$e(x,z) < \delta_x,$$

entonces $z \in D_e(x,\delta_x)$, por consiguiente

$$D_d(x,\epsilon_x) \subseteq D_e(x,\delta_x) \subseteq U,$$

es decir $D_d(x,\epsilon_x) \subseteq U$ para toda $x \in U$, en consecuencia U es abierto en (X,d) (Definición 2.1.3). Por otra parte $1_x^{-1}(U) = U$ implica que $1_x^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en (X,d), entonces

$$1_x \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,d),(X,e)],$$

es decir $e \leq d$.

ii) Sea U un conjunto abierto en (X,d), entonces para todo $x \in U$ existe $\alpha_x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$D_d(x,\alpha_x) \subseteq U \text{ (Definición 2.1.3).}$$

Por otra parte podemos definir a $\beta_x = \frac{\alpha_x}{2}$, en este caso $\beta_x \in \mathbb{R}^+$ pues $\alpha_x \in \mathbb{R}^+$, y podemos considerar a

$$D_e(x,\beta_x) = \{y' \in X |\ e(x,x') < \beta_x\}.$$

Sea $w \in D_e(x,\beta_x)$, se tiene, entonces, que $e(x,w) < \beta_x$ y por lo tanto $e(x,w) < \frac{\alpha_x}{2}$, por definición de β_x, así que

$$2e(x,w) < \alpha_x,$$

de donde podemos concluir que $d(x,w) < \alpha_x$, lo cual implica que $w \in D_d(x,\alpha_x)$, entonces

$$D_e(x,\beta_x) \subseteq D_d(x,\alpha_x) \subseteq U \text{ para toda } x \in U.$$

Por esto último obtenemos que U es abierto en (X,e) y como $1_X(U) = U$, entonces $1_X(U)$ es abierto en (X,e), lo que nos da como resultado que

$$1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X,e),(X,d)],$$

es decir $d \leq e$. De (i) y (ii) obtenemos que $d \equiv e$, pero $d \neq e$
■

Así podemos concluir que si X es un conjunto distinto del vacío y d, e son dos métricas para X, pasa que $d \equiv e \Leftrightarrow \tau_d = \tau_e$ y $d = e \Rightarrow \tau_d = \tau_e$, sin que se tenga la implicación inversa en la última proposición. Es decir $d = e \Rightarrow \tau_d = \tau_e \Leftrightarrow d \equiv e$. Lo que podemos expresar como:

$$d = e \Rightarrow d \equiv e.$$

8.3. *ccce* casi isomorfas

Con el previo análisis que hicimos de métricas equivalentes en $\mathfrak{Mtc}$ pretendemos dar paso a la generalización de este concepto en las *ccce* en general.

Fibras equivalentes

Definición 8.3.1. Dado X un conjunto y $\mathfrak{C}$ una *ccce* tal que $\rho, \varphi \in \mathfrak{C}[X]$, diremos que ρ es *más fina* que φ o φ *más áspera* que ρ si

$$1_X : (X, \rho) \to (X, \varphi)$$

es un $\mathfrak{C}$-*morfismo* y lo denotaremos como $\rho \leq_{\mathfrak{C}} \varphi$. Si no hay confusión con respecto a la *ccce* que se esté tratando escribiremos $\rho \leq \varphi$.

A manera de ejemplo y para poner en concreto esta definición podemos citar a la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$, ya que dado un conjunto X y d, $e \in \mathfrak{Mtc}[X]$ tenemos que

$$d \leq e \Leftrightarrow e \leq_{\mathfrak{Mtc}} d \Leftrightarrow 1_X \in \hom[(X, d), (X, e)].$$

Y es claro que el sentido parece invertido, en la segunda expresión, debido a la definición de continuidad en $\mathfrak{Mtc}$. De manera análoga damos la siguiente generalización de equivalencia en las *ccce*.

Definición 8.3.2. Sean X un conjunto, $\mathfrak{C}$ una *ccce* y $\rho, \varphi \in \mathfrak{C}[X]$, decimos que ρ es **equivalente** a φ (que denotamos por $\rho \equiv_{\mathfrak{C}} \varphi$ o $\rho \equiv \varphi$) , si $\rho \leq_{\mathfrak{C}} \varphi$ y $\varphi \leq_{\mathfrak{C}} \rho$, es decir si

$$1_X : X \to X$$

conserva la $\mathfrak{C}$-*estructura* de (X, ρ) en (X, φ).

De nuevo como ejemplo podemos considerar a la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$ y la equivalencia entre métricas para un conjunto arbitrario X distinto del vacío. Lo interesante de este concepto es que la equivalencia entre métricas no implica que sean iguales como vimos anteriormente. Llegamos a la parte de conceptos importantes de este capítulo. Los veremos a continuación en la siguiente sección.

Función casi biyectiva

Antes de presentar el concepto de función casi biyectiva en las categorías concretas de conjuntos estructurados, presentaremos dos conceptos necesarios.

Definición 8.3.3. Sean X un conjunto y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ dos *ccce*. Decimos que una función

$$\Upsilon_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es *casi inyectiva* si para cualesquiera φ, $\rho \in \mathfrak{C}[X]$ se tiene que

$$\Upsilon_X(\varphi) = \Upsilon_X(\rho) \text{ implica que } \varphi \equiv \rho.$$

Donde $\Upsilon_X(\varphi), \Upsilon_X(\rho) \in \mathfrak{D}[X]$.

Definición 8.3.4. Sean X un conjunto y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ dos *ccce*. Decimos que una función

$$\Upsilon_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es *casi suprayectiva*, si para toda $\varphi \in \mathfrak{D}[X]$, existe $\varphi' \in \mathfrak{C}[X]$ tal que

$$\Upsilon_X(\varphi') \equiv \varphi.$$

Donde $\Upsilon_X(\varphi') \in \mathfrak{D}[X]$. Sólo nos queda presentar el concepto de función casi biyectiva en las *ccce*.

Definición 8.3.5. Sean X un conjunto y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ dos *ccce*. Decimos que una función

$$\Upsilon_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es *casi biyectiva*, si es *casi inyectiva* y es *casi suprayectiva.*

Este último concepto, tratado en la Definición 8.3.5, es crucial para definir el concepto de casi isomorfo entre las *ccce*, que es el otro de los objetivos importantes a tratar en este capítulo.

ccce ***casi isomorfas***

$\risingdotseq$

Definición 8.3.6. Dadas dos *ccce* $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$. Diremos que $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son *casi isomorfas*, lo que denotaremos por $\mathfrak{C} \risingdotseq \mathfrak{D}$, si:

i) Para cada conjunto X existe una función *casi biyectiva*

$$\Upsilon_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X],$$

natural en el siguiente sentido:

ii) Si $f : X \to Y$ es una función

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \varphi), (Y, \rho)] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Upsilon_X(\varphi)), (Y, \Upsilon_Y(\rho)].$$

Para considerar un ejemplo que concrete la Definición 8.3.6 primero tengamos en cuenta la definición siguiente.

Definición 8.3.7. Dado un conjunto X y $(X, \tau_X) \in |\mathfrak{Top}|$, se dice que (X, τ_X) es metrizable si existe una métrica d en X que induzca la topología τ_X, es decir si existe un métrica d en X tal que

$$\tau_d = \tau_X.$$

Ejemplo 8.3.8. La *ccce* $\mathfrak{TMtc}$ es la *ccce* compuesta de los siguientes elementos.

a) La clase $|\mathfrak{TMtc}|$ cuyos elementos son los espacios topológicos metrizables o $\mathfrak{TMtc}$-*objetos.*

b) Para dos (X, τ_X), $(Y, \tau_Y) \in |\mathfrak{TMtc}|$ definimos el conjunto

$$\hom_{\mathfrak{TMtc}}[(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)] := \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)].$$

Es decir las funciones continuas de (X, τ_X) en (Y, τ_Y). Comprobemos que $\mathfrak{Mtc}$ y $\mathfrak{TMtc}$ son casi isomorfas. Para probar la primera parte, de la Definición 8.3.6, consideremos a X un conjunto, entonces podemos definir la función

$$\Upsilon_X : \mathfrak{Mtc}[X] \to \mathfrak{TMtc}[X]$$

dada por $\Upsilon_X(d) = \tau_d$ donde d es una métrica para X y τ_d la topología para X que induce d. Υ_X es función puesto que d sólo induce una topología para X. Sean d y e dos métricas, distintas para X, tales que:

$$\Upsilon_X(d) = \Upsilon_X(e),$$

es decir que $\tau_d = \tau_e$ (vimos en Ejemplo 8.2.5 que dos métricas distintas si pueden inducir la misma topología), entonces

$$d \equiv e$$

por la Observación 8.2.4. Así queda probado que Υ_X es casi inyectiva. Por otra parte para toda $\tau_X \in \mathfrak{TMtc}[X]$ existe $d \in \mathfrak{Mtc}[X]$ (Definición 8.3.7) tal que

$$\Upsilon_X(d) = \tau_X,$$

lo que se puede interpretar como que:

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{TMtc}}[(X, \Upsilon_X(d)), (X, \tau_X)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{TMtc}}[(X, \tau_X), (X, \Upsilon_X(d))],$$

es decir

$$\Upsilon_X(d) \equiv \tau_X.$$

Lo que prueba que Υ_X es casi suprayectiva. Para la segunda parte consideremos dos conjuntos X, Y y $f : X \to Y$ una función, vemos de manera directa que:

$$f \in \hom_{\mathfrak{Mtc}}[(X, d), (Y, e)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{TMtc}}[(X, \Upsilon_X(d)), (Y, \Upsilon_Y(e))]$$

debido a la Proposición 8.1.2. Por lo tanto $\mathfrak{Mtc} \risingdotseq \mathfrak{TMtc}$.

■

De este ejemplo podemos ver que $\mathfrak{Mtc}$ y $\mathfrak{TMtc}$ son *ccce* distintas, es decir que aunque sean casi isomorfas no son concretamente isomorfas debido, principalmente, a que dos métricas distintas pueden inducir la misma topología, esto nos permite hacer el contraste de que, por una parte, éstos dos conceptos (de concretamente isomorfas y casi isomorfas) son distintos y que uno no implica el otro pero al revés si, es decir, por ejemplo, vimos que las categorías concretas de conjuntos estructurados $\mathfrak{Top}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$ son concretamente isomorfas entonces veremos que son casi isomorfas. En el siguiente apartado comprobaremos esto.

$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4$, $\mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$

Antes de comprobar que las *ccce* $\mathfrak{Top}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$ son *casi isomorfas* veremos varios resultados sencillos..

Afirmación 8.3.9. Sea X un conjunto, $\mathfrak{C}$ una categoría concreta de conjuntos estructurados y $\rho, \varphi \in \mathfrak{C}[X]$, si $\rho = \varphi$ entonces $\rho \equiv \varphi$.

Demostración:

Como $\rho = \varphi$, se tiene que

$$1_X : X \to X$$

es un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo* por la propiedad de la identidad que se cumple en las *ccce*, es decir que

$$1_X \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (X, \varphi)] \text{ e } 1_X^{-1} \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \varphi), (X, \rho)],$$

por lo tanto $\rho \leq_{\mathfrak{C}} \varphi$ y $\varphi \leq_{\mathfrak{C}} \rho$ lo que implica que $\rho \equiv_{\mathfrak{C}} \varphi$.
■

Tomando en cuenta la Afirmación 8.3.9 podemos probar el siguiente resultado.

Observación 8.3.10. Dado X un conjunto, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos *ccce* arbitrarias, si

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es una función biyectiva, entonces $\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$ es *casi biyectiva.*

Demostración :

♦ Primero demostraremos que Φ_X es *casi inyectiva.*

Sean $\rho, \varrho \in \mathfrak{C}[X]$, como Φ_X es biyectiva, en particular es inyectiva, entonces si

$$\Phi_X(\rho) = \Phi_X(\varrho)$$

se tiene que $\rho = \varrho$, por lo tanto $\rho \equiv_{\mathfrak{C}} \varrho$ por la Afirmación 8.3.9, es decir Φ_X es casi inyectiva.

♦ Demostraremos que Φ_X es casi suprayectiva.

Sea $\rho' \in \mathfrak{D}[X]$, como Φ_X es biyectiva, en particular es suprayectiva, entonces existe $\rho \in \mathfrak{C}[X]$ tal que

$$\Phi_X(\rho) = \rho'$$

por lo tanto $\Phi_X(\rho) \equiv_{\mathfrak{D}} \rho'$ por la Afirmación 8.3.9, es decir Φ_X es casi suprayectiva.
■

Si X es un conjunto arbitrario, $\mathfrak{C}$ una ccce y $\rho, \varphi \in \mathfrak{C}[X]$ ya vimos que si $\rho \equiv_{\mathfrak{C}} \varphi$ entonces no necesariamente se tiene que $\rho = \varphi$ (Ejemplo 8.2.5).

$\doteqdot \Rightarrow \fallingdotseq$

Afirmación 8.3.11. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos ccce cualesquiera; si $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D}$ entonces $\mathfrak{C} \fallingdotseq \mathfrak{D}$.

Demostración:

(i) Para un conjunto X veamos que existe una función casi biyectiva de $\mathfrak{C}[X]$ en $\mathfrak{D}[X]$.

Como $\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D}$ existe una función biyectiva

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X],$$

entonces

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es casi biyectiva (por la Observación 8.3.10).

(ii) Sea $f : X \to Y$ una función, entonces por la naturalidad de Φ_X se tiene que

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \rho')] \text{ si, y sólo si, } f \in \hom_{\mathfrak{D}}[(X, \Phi_X(\rho)), (Y, \Phi_Y(\rho'))],$$

por lo tanto $\mathfrak{C} \fallingdotseq \mathfrak{D}$.
■

Ya vimos que $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$, entonces aplicando la Afirmación 8.3.11, obtenemos el siguiente resultado:

$$\mathfrak{Top} \fallingdotseq \mathfrak{T}_1 \fallingdotseq \mathfrak{T}_2 \fallingdotseq \mathfrak{T}_3 \fallingdotseq \mathfrak{T}_4 \fallingdotseq \mathfrak{T}_5.$$

En lo que sigue vamos a tratar algunos resultados sobre las *ccce*. Estudiaremos el concepto de transportabilidad entre las *ccce* así como algunas implicaciones de éste.

8.4. *ccce* transportables

Definición 8.4.1. Sean X, Y conjuntos y $\mathfrak{C}$ una *ccce* cualquiera, diremos que $\mathfrak{C}$ es *transportable* si para todo $\mathfrak{C}$-*objeto* (X, ρ) y para toda biyección $f : X \to Y$, existe una única estructura $\varphi \in \mathfrak{C}[Y]$ tal que $f : (X, \rho) \to (Y, \varphi)$ es un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo*.
Es decir

$$f \in \hom_{\mathfrak{C}}[(X, \rho), (Y, \varphi)] \text{ y } f^{-1} \in \hom_{\mathfrak{C}}[(Y, \varphi), (X, \rho)].$$

Veremos un ejemplo de *ccce* transportable, pero para ello comencemos, por una parte, recordando que en $\mathfrak{Top}$ los $\mathfrak{Top}$-*isomorfismos* son los homeomorfismos (Definición 2.1.11.). Por otra parte consideremos la definición siguiente.

Definición 8.4.2. Un espacio topológico *casi discreto* es un espacio topológico en el que además se tiene que las intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 8.4.3. La *ccce* de los espacios topológicos casi discretos, denotada como $\mathfrak{CDTop}$, es una *ccce* conformada por los siguientes elementos.

a) La clase $|\mathfrak{CDTop}|$, cuyos elementos son las parejas $(X, \mathcal{X})$ en donde X es un conjunto y $\mathcal{X}$ es una topología casi discreta para X, podremos llamarlos espacios topológicos casi discretos (o $\mathfrak{CDTop}$-*objetos*).

b) Dada la pareja $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y}) \in |\mathfrak{CDTop}|$ definimos el conjunto

$$\hom_{\mathfrak{CDTop}}[(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})] := \hom_{\mathfrak{Top}}[(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})].$$

Como a fin de cuentas los $\mathfrak{CDTop}$-*morfismos* entre los objetos de $\mathfrak{CDTop}$ son las funciones continuas entre espacios topológicos, entonces cumplen con las propiedades de composición e identidad, como ya vimos en la Proposición 2.1.10. Vamos a comprobar que $\mathfrak{CDTop}$ es una *ccce* transportable.

Dados X, Y conjuntos y $(X, \mathcal{X}) \in |\mathfrak{CDTop}|$, consideremos $f : X \to Y$ una función biyectiva. Definamos

$$\mathcal{Y} = \{f(U) |\ U \in \mathcal{X}\}.$$

$\mathcal{Y}$ así definida es una topología casi discreta para Y que hace de $f : X \to Y$ un homeomorfismo de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$. En primer lugar probemos que $\mathcal{Y}$ es una topología casi discreta para Y.

a) Se tiene que $f(X) = Y$ pues f es una función biyectiva y en particular suprayectiva. Por otro lado como $X \in \mathcal{X}$, porque $\mathcal{X}$ es una topología para X, entonces $f(X) \in \mathcal{Y}$, es decir

$$Y \in \mathcal{Y}.$$

Tenemos que $f(\emptyset) = \emptyset$ y $\emptyset \in \mathcal{X}$, por lo tanto

$$\emptyset \in \mathcal{Y}.$$

b) Sea $\{f(U_i)\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{Y}$ con I arbitrario. Por propiedades básicas de las funciones tenemos que

$$f(\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I} f(U_i).$$

Puesto que $\mathcal{X}$ es una topología casi discreta, en particular es una topología, para X entonces $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{X}$, por esto tenemos que $f(\cup_{i\in I} U_i) \in \mathcal{Y}$, es decir

$$\cup_{i\in I} f(U_i) \in \mathcal{Y}.$$

c) Consideremos, nuevamente, a $\{f(U_i)\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{Y}$ con I arbitrario. Como f es una función biyectiva, entonces, por propiedades básicas de las funciones tenemos que:

$$f(\cap_{i\in I} U_i) = \cap_{i\in I} f(U_i),$$

como $\mathcal{X}$ es una topología casi discreta para X entonces $\cap_{i\in I} U_i \in \mathcal{X}$, por lo que $f(\cap_{i\in I} U_i) \in \mathcal{Y}$, es decir

$$\cap_{i\in I} f(U_i) \in \mathcal{Y}.$$

Hasta aquí hemos probado que $\mathcal{Y}$ es una topología casi discreta para Y. Veamos que esta topología hace de f un homeomorfismo de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$.

Un conjunto abierto en $(Y, \mathcal{Y})$ es de la forma $f(U)$ con $U \in \mathcal{X}$. Por otra parte

$$f^{-1}(f(U)) = U$$

pues $f : X \to Y$ es biyectiva. Esto implica que $f^{-1}(f(U)) \in \mathcal{X}$, por lo que

$$f \in \hom_{\mathfrak{CDTop}}[(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})].$$

Consideremos $f^{-1} : (Y, \mathcal{Y}) \to (X, \mathcal{X})$, entonces para todo $U \in \mathcal{X}$ se tiene que $f(U) \in \mathcal{Y}$ por definición de $\mathcal{Y}$, por lo tanto

$$f^{-1} \in \hom_{\mathfrak{CDTop}}[(Y, \mathcal{Y}), (X, \mathcal{X})].$$

Así hemos demostrado que f es un homeomorfismo. Por último nos queda demostrar que $\mathcal{Y}$ es la única topología casi discreta para Y que hace de f un homeomorfismo, entonces supongamos que existe otra topología casi discreta $\mathcal{Y}'$ para Y tal que $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y}')$ es un homeomorfismo.
Sea $U \in \mathcal{Y}'$ entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{X}$ ya que estamos suponiendo que $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y}')$ es un homeomorfismo, por lo tanto $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{Y}$, por definición de $\mathcal{Y}$, es decir

$$U \in \mathcal{Y}$$

porque f es biyectiva y podemos concluir que $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$. Sea, por otra parte, $U \in \mathcal{Y}$, entonces $U = f(W)$ para algún $W \in \mathcal{X}$, por lo tanto $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(W)) = W$, es decir que $f^{-1}(U) \in \mathcal{X}$, pero estamos en el supuesto de que $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y}')$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y, \mathcal{Y}') \to (X, \mathcal{X})$ es continua, por lo tanto:

$$f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{Y}'$$

y así obtenemos que $U \in \mathcal{Y}'$, de donde $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}'$. Por las contenciones anteriores obtenemos que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'.$$

Y así la topología que hace de f un homeomorfismo es única, por lo que de acuerdo a la Definición 8.4.1 tenemos que $\mathfrak{CDTop}$ es transportable.

■

Para establecer ideas consideremos una *ccce* que no es transportable, tal ejemplo nos lo proporciona la *ccce* $\mathfrak{Mtc}$. Veamos:

Ejemplo 8.4.4. Sea X un conjunto, $(X, d) \in |\mathfrak{Mtc}|$ e $1_X : X \to X$ la función identidad de X en X. De acuerdo al Ejemplo 8.2.5 consideremos otra métrica, para X, $e = \frac{d}{2}$ y entonces

$$1_X : (X, d) \to (X, e)$$

es un $\mathfrak{Mtc}$-*isomorfismo* (como comprobamos en el ejemplo). Por otra parte por la propiedad de identidad (dada en la Definición 8.2.1) se tiene que

$$1_X : (X, d) \to (X, d)$$

es un $\mathfrak{Mtc}$-*morfismo* y como $1_X = 1_X^{-1}$, entonces $1_X^{-1} : (X, d) \to (X, d)$ también es un $\mathfrak{Mtc}$-*morfismo*, de donde

$$1_X : (X, d) \to (X; d)$$

es un $\mathfrak{Mtc}$-*isomorfismo*. De esta manera tenemos que existen dos métricas distintas, para X, que hacen de $1_X : X \to X$ un $\mathfrak{Mtc}$-*isomorfismo*, con lo que podemos concluir que $\mathfrak{Mtc}$ no es transportable.

■

8.5. La relación $\fallingdotseq$ entre las *ccce* transportables

En las *ccce* $\mathfrak{C}$ transportables se cumple lo siguiente.

Proposición 8.5.1. Sean X un conjunto, $\mathfrak{C}$ una *ccce* transportable y $\rho, \varrho \in \mathfrak{C}[X]$, si $\rho \equiv_{\mathfrak{C}} \varrho$ entonces $\rho = \varrho$.

Demostración:

Sean $\rho, \varrho \in \mathfrak{C}[X]$ tales que $\rho \equiv \varrho$, entonces

$$1_X : (X, \rho) \to (X, \varrho)$$

es un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo* (Definición 8.3.2). Por otra parte

$$1_X : (X, \rho) \to (X, \rho)$$

es un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo* por la **propiedad de identidad** que se cumple al ser $\mathfrak{C}$ una *ccce*, como $\mathfrak{C}$ es transportable se tiene que la única estructura que hace de 1_X un $\mathfrak{C}$-*isomorfismo* en $\mathfrak{C}$ es ρ, por lo tanto $\rho = \varrho$.
■

Proposición 8.5.2. Sean X un conjunto, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos *ccce* transportables, entonces

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es *casi biyectiva* si, y sólo si,

$$\Phi_X : \mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{D}[X]$$

es biyectiva.

Demostración:

♦ Sean $\rho, \varrho \in \mathfrak{C}[X]$ tales que $\Phi_X(\rho) = \Phi_X(\varrho)$, como Φ_X es casi biyectiva, en particular es casi inyectiva, entonces $\rho \equiv \varrho$. Aplicando la Proposición 8.5.1 es $\rho = \varrho$ por lo que Φ_X es inyectiva.

$$\rho \equiv \varrho \text{ si, y sólo si, } \rho = \varrho$$

♦ Sea $\varphi \in \mathfrak{D}[X]$, como Φ_X es casi biyectiva, en particular es casi suprayectiva, entonces existe $\varphi' \in \mathfrak{C}[X]$ tal que

$$\Phi_X(\varphi') \equiv \varphi.$$

Puesto que $\mathfrak{D}$ es transportable podemos aplicar la Proposición 8.5.1 ya que $\mathfrak{D}$ es transportable y asegurar que $\Phi_X(\varphi') = \varphi$, por lo que Φ_X resulta suprayectiva.
■

Veremos que la relación $\fallingdotseq$ entre las *ccce* transportables es una relación de equivalencia. La transportabilidad nos da el siguiente resultado.

Proposición 8.5.3. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos *ccce* transportables cualesquiera, entonces

$$\mathfrak{C} \doteqdot \mathfrak{D} \text{ si y sólo si } \mathfrak{C} \fallingdotseq \mathfrak{D}.$$

Teorema 8.5.4. $\fallingdotseq$ *es de equivalencia entre las ccce transportables.*

Demostración:

Por la Proposición 8.5.3 la demostración se hace análoga a la hecha en el Teorema 1.1.2.

■

Capítulo 9

Conclusiones

En este capítulo describiremos, a grandes rasgos, los puntos más relevantes que tratamos a lo largo de este trabajo así como las conclusiones que obtuvimos.
En principio y de manera general podemos decir que comprobamos como a partir de los conceptos básicos, en topología, de conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, interior, cerradura, vecindad y frontera, se puede generar una categoría concreta de conjuntos estructurados (agregando los morfismos en cada caso), éstas las denotamos por:

$$\mathfrak{Top},\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \mathfrak{T}_3,\ \mathfrak{T}_4 \text{ y } \mathfrak{T}_5,$$

vimos que tienen bien definidos sus objetos y sus morfismos y aunque podrían parecer distintas o no en una primera instancia, están relacionadas de manera precisa a través del concepto de isomorfismo concreto, teniendo que:

$$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2,\ \mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3,\ \mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4 \text{ y } \mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$$

También demostramos que la relación $\doteqdot$ es una relación de equivalencia entre las categorías concretas de conjuntos estructurados. Por otra parte podemos escribir las relaciones anteriores como:

$$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_4 \doteqdot \mathfrak{T}_5$$

y pretender considerar esta expresión como una cadena. Notemos que por ser $\doteqdot$ una relación de equivalencia entre las *ccce*, también podríamos comprobar que:

$\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{Top}$, $\mathfrak{Top} \doteqdot \mathfrak{T}_i$ con $i \in \{2,3,4,5\}$, $\mathfrak{T}_i \doteqdot \mathfrak{T}_i$ para todo $i \in \{1,2,3,4,5\}$, $\mathfrak{T}_1 \doteqdot \mathfrak{T}_i$ con $i \in \{3,4,5\}$, $\mathfrak{T}_2 \doteqdot \mathfrak{T}_i$ con $i \in \{4,5\}$, $\mathfrak{T}_3 \doteqdot \mathfrak{T}_5$.

Pudimos ver a detalle cómo se relacionan los morfismos de una categoría con otra y como se ven los morfismos en una categoría y otra. De hecho en términos de la estructura de cada categoría determinamos sus morfismos, esto nos da por resultado diferentes formas de interpretar la continuidad de acuerdo a los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados, el interior, la cerradura, las vecindades y la frontera, pues con los conjuntos abiertos, por ejemplo, tenemos la continuidad *tradicional*, con los conjuntos cerrados tenemos una forma similar, de continuidad, a la que se da por conjuntos abiertos, con el interior la continuidad se formula en términos del operador interior, con la cerradura en términos del operador cerradura, con las vecindades en términos del operador vecindad y con la frontera en términos del operador frontera. Algo que sale de manera adicional de acuerdo a los resultados que obtuvimos y que no está de más mencionar, es que se puede iniciar

el estudio de la topología a través de cualquiera de las categorías concretas de conjuntos estructurados que determinamos ($\mathfrak{T}_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$).
El concepto que dimos en llamar *casi isomorfo* viene a ampliar la teoría pues a través de la idea de fibras equivalentes permite considerar estructuras que se relacionan de una manera más débil en el sentido de que no se necesita determinar una función biyectiva entre las familias de estructuras, de dos *ccce*, sino sólo una función casi biyectiva como vimos en el capítulo 8 y en relación a estos conceptos principales vimos que; como biyectividad implica casi biyectividad (es decir $\div \Rightarrow \fallingdotseq$), entonces también tenemos que:

$$\mathfrak{Top} \fallingdotseq \mathfrak{T}_1 \fallingdotseq \mathfrak{T}_2 \fallingdotseq \mathfrak{T}_3 \fallingdotseq \mathfrak{T}_4 \fallingdotseq \mathfrak{T}_5$$

Debido a la transportabilidad tenemos que $\fallingdotseq \Leftrightarrow \div$ y resulta que $\fallingdotseq$ es una relación de equivalencia entre las *ccce* transportables. Nótese que sin la transportabilidad no se tiene que $\fallingdotseq \Rightarrow \div$ como bien vimos en el Ejemplo 8.3.7 (pues en ese ejemplo consideramos a $\mathfrak{Mtc}$ que no es transportable, como después corroboramos), es decir que podemos notar la debilidad de $\fallingdotseq$ ante $\div$, lo que nos permite decir que dos categorías concretas de conjuntos estructurados que sean casi isomorfas no tienen que ser en principio similares de alguna forma como ocurre con $\mathfrak{Mtc}$ y $\mathfrak{TMtc}$ (pues en el Ejemplo 8.3.7 comprobamos que son casi isomorfas pero no por eso similares), cosa que no ocurre con el concepto: concretamente isomorfo, como comprobamos con las *ccce* $\mathfrak{Top}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ y $\mathfrak{T}_5$ que tratamos, pues en principio y dicho de manera tosca, todas son $\mathfrak{Top}$.
Podemos decir, también, que desarrollamos la idea de tener diferentes teorías en las que al final de cuentas sus objetos y sus morfismos se relacionan, conceptos (objetos y morfismos) que son básicos para comprender cada una de estas teorías, imaginando que cada una de estás categorías fuera parte de una teoría distinta (pues, además, objetos y morfismos forman la base de cada categoría incluso si no es una *ccce* como vemos en la Definición 1.1).
Queremos hacer notar que esta tesis sirve como material de introducción al estudio de la teoría de categorías pues aunque trabajamos con categorías concretas de conjuntos estructurados muy particulares, éstas están muy detalladas (formadas a partir de las equivalencias que nos da el conocido concepto de topología), por lo que pudimos ver su estructura y funcionamiento a fondo.
Por último, para apoyar lo dicho en el párrafo inmediato anterior, tengamos en cuenta que partimos de la definición precisa de categoría y de categoría concreta de conjuntos estructurados y aunque no definimos o siquiera hablamos del concepto de *funtor*, en realidad trabajamos con esta idea pues en términos generales un funtor entre dos *ccce* es una función que asocia objetos de una *ccce* con los objetos de otra y los morfismos (las funciones que preservan la estructura) de una *ccce* con los morfismos de otra y como bien pudimos notar, esta idea fue uno de los pilares fundamentales que nos permitió el desarrollo de este escrito. Para concretar ideas consideremos lo siguiente:

Dadas $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ dos *ccce* y X, Y conjuntos, para probar que $\mathfrak{S} \div \mathfrak{T}$ primero definimos una función biyectiva

$$\Upsilon_X : \mathfrak{S}[X] \to \mathfrak{T}[X],$$

esto nos permitió relacionar el objeto

$$(X, \Sigma) \in |\mathfrak{S}|$$

con el objeto

$$(X, \Upsilon_X(\Sigma)) \in |\mathfrak{T}|.$$

Luego probamos que Υ_X es natural en el sentido:

$$f \in \hom_{\mathfrak{S}}[(X,\Sigma),(Y,\Theta)] \text{ si y sólo si } f \in \hom_{\mathfrak{T}}[(X,\Upsilon_X(\Sigma)),(Y,\Upsilon_Y(\Theta))],$$

esto nos permitió, como vimos, relacionar el morfismo:

$$f \in \hom_{\mathfrak{S}}[(X,\Sigma),(Y,\Theta)]$$

con el morfismo:

$$f \in \hom_{\mathfrak{S}}[(X,\Upsilon_X(\Sigma),(Y,\Upsilon_Y(\Theta)].$$

De manera análoga podemos ejemplificar, de forma superficial, el caso en el que demostramos de que dos *ccce* son casi isomorfas y comprender la idea de que, en el fondo, hemos relacionado objetos y morfismos. Para terminar cabe mencionar que estos conceptos (principalmente el de categoría y el de funtor que trabajamos más de manera un tanto implícita) son parte básica y necesaria de la teoría de categorías para poder comenzar su estudio.

Bibliografía

[1] Adámek, Jirí, *Theory of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Praga, 1983.

[2] Adámek, Jirí, Herrlish, Horst, and Strecker George, *Abstrac and Concrete Categories: The Joy of Cats*, John Wiley and Sons, New York, 1990.

[3] Antoyan, A. Sergey, *Curso de Topología*, UNAM, México, D. F., 2016.

[4] Casarrubias Segura, Fidel, y Tamaríz Mascarúa, Ángel, *Elementos de Topología General.* UNAM, México, D. F., 2015.

[5] Lipschutz, Seymour S., *Teoría y Problemas de Topología General*, Mc Graw-Hill, Colombia, 1970.

[6] Rotman, J. Joseph, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4a. ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] Salicrup López, Graciela B., *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, México, D. F., 1993.

[8] Vázquez García, Roberto, *Lecciones de Topología*, UNAM, México, D. F., 1996

[9] Vázquez García, Roberto, *Categorías Concretas Topológicas*, UNAM, México, D. F., 2012.

[10] Vázquez García, Roberto, *Reflexividad, Correflexividad y Teoría de las Estructuras Matemáticas*, UNAM, México, D. F., 1997.