



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

**TEORÍAS DE GRAN UNIFICACIÓN Y
SIMETRÍAS MODULARES DE SABOR**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ANTONIO CARLOS SAMANIEGO FLORES

TUTORA PRINCIPAL:

DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. SARIRA SAHU

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO DE 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre
A la vida y memoria de mi padre

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Myriam por ser mi tutora a lo largo de mis estudios de maestría, por su apoyo, por su paciencia y por guiarme e introducirme a este fascinante mundo de la Física más allá del Modelo Estándar.

Agradezco al Dr. Saúl por sus comentarios y sugerencias en el desarrollo de este trabajo, así como también al Dr. Sarira.

Al Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al CONACyT por la beca otorgada durante todos mis estudios de maestría.

A mi familia por apoyarme y alentarme a seguir adelante.

A la vida por lo que me ha regalado.

TEORÍAS DE GRAN UNIFICACIÓN Y SIMETRÍAS MODULARES DE SABOR

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia un modelo de Gran Unificación basado en el grupo de simetría de norma $SU(5)$ Supersimétrico extendido con una simetría S_3 -Modular, la cual adopta el papel de simetría de sabor, y un sector de Higgs constituido por seis dobletes.

Con este modelo definido en la escala de gran unificación se busca reproducir la jerarquía de masas y el patrón de mezclas del sector de quarks. En el proceso se estudia y enfatiza el papel que juega la simetría de sabor del modelo basada en la implementación del grupo modular lo cual constituye una propuesta viable como una posible solución al problema del sabor en Física de partículas. En el presente trabajo no se aborda el estudio en el cual se considera la presencia de leptones cargados y neutrinos.

GRAND UNIFIED THEORIES AND FLAVOR MODULAR SYMMETRIES

Abstract

In this thesis work we study a Grand Unified Model based on the gauge group SUSY $SU(5)$ extended with a S_3 -Modular symmetry, which plays the role of flavor symmetry, and a Higgs sector with six electro-weak doublets.

The model is defined in the gran unified scale and we search to reproduce the mass hierarchy and the mixing pattern in the quarks sector. In the process, it is studied and emphasized the role played by flavor symmetry which is based in the use of modular groups. This idea is a viable proposal as a possible solution to the flavor problem in particle physics. The present work does not address the study in which we consider the presence of charged leptons and neutrinos.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. El Modelo Estándar de Partículas Elementales	3
2.1. El Modelo Estándar y sus problemas	3
2.2. Quarks y Leptones	4
2.3. SSB y Mecanismo de Higgs	5
2.4. Matriz de mezcla V_{CKM}	8
2.5. Grupo de renormalización	9
3. Supersimetría	13
3.1. ¿Qué es la Supersimetría?	13
3.2. Breve introducción al MSSM	14
3.3. Gran Unificación	18
4. Teoría de Grupos	21
4.1. Conceptos básicos	21
4.2. Grupo discreto S_3	23
4.3. Grupo modular	25
5. Construcción del modelo SUSY $SU(5) \times S_3$ Modular	31
5.1. Modelos multi-Higgs	31
5.2. Contenido de materia del modelo	32
5.2.1. Superpotencial	35
5.2.2. Matrices de masa y matrices de Yukawa	37
5.3. Construcción de la matriz V_{CKM}	40
6. Análisis fenomenológico	43
6.1. Evolución mediante RGE	43
6.1.1. Evolución de los acoplamientos de Yukawa	43
6.2. Ajuste en la matriz CKM	45
7. Conclusiones y perspectivas	49
A. Programas	51

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar de la Física de partículas (SM, por sus siglas en inglés) y el Modelo Estándar de la cosmología son, al día de hoy, las dos teorías de la Física con mayor respaldo experimental y son las más aceptadas para describir a nuestro universo a pequeña y gran escala [1]. Estos dos grandes pilares de la Física describen con mucha precisión una gran cantidad de fenómenos. Sin embargo aún son modelos que guardan demasiadas preguntas fundamentales sin responder. El Modelo Estándar de partículas, por su parte, no da explicación a la jerarquía de masas y el patrón de mezclas en el sector de quarks y leptones, ni al porqué solo existen tres familias de fermiones y no más.

El hecho de que existan estos y algunos otros problemas importantes no quiere decir que el Modelo Estándar se encuentre mal formulado o que las ideas sobre las cuales se basa su construcción sean erróneas; realmente esto es un indicador de que el Modelo Estándar es una teoría incompleta y es necesario incluir nueva Física que está más allá de la que ya conocemos para poder arrojar algo de luz en dichos problemas. Por esta razón, con el paso de los años se han dedicado esfuerzos considerables por parte de la comunidad de Físicos de partículas para poder encontrar una descripción más simple, que quizá pueda estar relacionada con algún nuevo principio como lo podría ser un principio de norma o algo semejante. En ese mismo sentido, ha habido muchos esfuerzos por tratar de extender el Modelo Estándar con grupos de simetría más grandes; estas son las conocidas como teorías de Gran Unificación (GUT, por sus siglas en inglés) quienes a su vez se encargan de explotar el poder las simetrías y la teoría de grupos para tratar de unificar a las tres interacciones fundamentales en una única interacción.

Bajo este contexto se va a decir que una GUT es cualquier extensión de las simetrías del Modelo Estándar que debe satisfacer dos condiciones. La primera es que el grupo de simetría extendido debe contener como un subgrupo al grupo de simetría del Modelo Estándar, esto debido a que se sabe muy bien que la descripción de la naturaleza que provee el Modelo Estándar es válida en ciertas escalas energéticas por lo que es natural esperar que cualquier extensión sea capaz de reproducir lo que se sabe que funciona bien, i. e., debe ser posible recuperar al Modelo Estándar. Además, el grupo de simetría extendido debe tener representaciones complejas que reproduzcan la estructura quiral del Modelo Estándar [2] esto, a grandes rasgos se refiere a que debe ser posible incluir a las partículas del Modelo Estándar, las cuales ya se transforman de una manera particular, dentro de las representaciones irreducibles del grupo de simetría extendido.

En particular, en este trabajo, se hará un estudio del modelo SUSY $SU(5)$ extendido con una simetría S_3 -Modular y seis dobletes de Higgs. A lo largo de los distintos capítulos que constituyen este trabajo, se irá explicando y motivando el porqué de

cada uno de los constituyentes del modelo bajo estudio.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo dos se introducen conceptos básicos sobre el Modelo Estándar de partículas elementales así como también los principales problemas que éste presenta, el mecanismo que permite generar las masas de las partículas, la manera en como se mezclan los distintos sabores de quarks y la notación que será empleada. En el capítulo tres se exponen brevemente los conceptos básicos que están relacionados con la Supersimetría, el MSSM y se hablará un poco sobre la gran unificación. En el capítulo cuatro se hace una exposición un poco más detallada de los conceptos básicos de la teoría de grupos necesarios para el desarrollo del modelo bajo estudio que se hará en los capítulos posteriores. Principalmente, se abordará algunos temas relacionados con el grupo modular y la construcción de las formas modulares útiles para el modelo.

En el capítulo cinco se entrará de lleno en la construcción del modelo y la obtención de los resultados importantes que permitirán probar la viabilidad del modelo en el aspecto fenomenológico. En el capítulo seis se presenta un análisis de los resultados teóricos obtenidos para las masas y la matriz de mezclas de los quarks mediante un ajuste de los parámetros libres del modelo. Finalmente, se presentan las conclusiones y algunas perspectivas a perseguir en estudios futuros.

CAPÍTULO 2

EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

2.1. *El Modelo Estándar y sus problemas*

Uno de los logros más importantes en la Física contemporánea fue la construcción de lo que hoy se conoce como el Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales para modelar a los fenómenos que ocurren en el mundo cuántico. Esta teoría se encarga de describir procesos en los que participan de manera conjunta las interacciones fuerte, débil y electromagnética.

Hasta hace algunos años, el Modelo Estándar era compatible con todos los hechos en física de partículas conocidos hasta entonces. Sin embargo, gracias a los grandes avances tecnológicos implementados en las nuevas generaciones de aceleradores de partículas, hoy en día se sabe muy bien que el Modelo Estándar no puede ser la teoría definitiva de la física de partículas elementales [3] además de que las tres interacciones fundamentales son hasta cierto punto independientes una de otra bajo dicho marco teórico. En ese mismo sentido, no se da una explicación a la jerarquía de masas y el patrón de mezclas de fermiones así como también a la razón fundamental de la existencia de tres familias de fermiones y no más [4].

Otra dificultad que se presenta es que no hay una razón por la que la carga eléctrica de los quarks sea una fracción de la del electrón, además es importante mencionar también que el Modelo Estándar tiene muchos parámetros libres que deben ser fijados a mano para tener un buen acuerdo con las mediciones experimentales. Esto significa que hay cantidades observables tales como las masas de los fermiones, ángulos de mezcla y fases de violación de CP, que son completamente arbitrarios en el sentido de que la teoría no predice algún valor específico por si misma [5].

Además y no menos importante, el Modelo Estándar no incorpora a la gravedad y no ofrece una explicación al problema de la constante cosmológica. En este estudio no se abordará el problema de la gravedad y no se mencionará más al respecto.

Por estas razones el Modelo Estándar es una teoría incompleta que necesita ser extendida incluyendo nueva Física más exótica que permita incursionar en nuevas áreas y así tratar de dar una explicación a estas preguntas fundamentales.

Con el paso de los años se han construido muchas propuestas pero las que han ganado mayor popularidad debido a que prometen determinar algunas de las cantidades que son arbitrarias en el Modelo Estándar son las conocidas como Teorías de Gran Unificación (GUT) [2]. Las cuales básicamente son una extensión del grupo de simetría del Modelo Estándar en un grupo más grande en el cual las interacciones fuerte, débil y electromagnética son incluidas y tratadas como una única interacción. En capítulos siguientes se abordará con más detalle el papel que juegan las GUT en el intento por resolver los problemas que enfrenta el Modelo Estándar.

2.2. Quarks y Leptones

El Modelo Estándar de Partículas Elementales es una teoría cuántica de campos que involucra varios tipos de partículas las cuales están divididas en dos principales grupos: los bosones y fermiones. A su vez, los fermiones están subdivididos en otros dos grupos entre los que se encuentran los quarks quienes interactúan mediante las tres interacciones y se combinan para formar protones, neutrones, mesones, etc. Por otra parte se tienen a los leptones entre los que se encuentran los electrones, muones, neutrinos, etc. A partir de este conjunto de partículas, que hasta ahora se piensa que son elementales, se puede construir átomos y con ello toda la materia bariónica que hay en el Universo.

En ese mismo sentido se tiene a los bosones entre los que se encuentra el fotón, los gluones y los bosones W y Z los cuales son los encargados de mediar las tres interacciones fundamentales. Del mismo modo, se tiene al bosón de Higgs el cual surge del mecanismo conocido como Mecanismo de Higgs siendo este el responsable de generar una fracción de las masas de todas las partículas del Modelo Estándar. Todas las partículas del modelo estándar y los términos que acoplan los respectivos campos cuánticos incluidos en el Lagrangiano respetan el grupo de simetría de norma

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y,$$

en donde $SU(3)_C$ es el grupo de simetría de las partículas con carga de color en las cuales participa la interacción fuerte con ocho gluones que fungen el papel de mediadores de esta interacción. También se tiene al grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ quien es el grupo de simetría de las partículas con isospin débil en las cuales participa la interacción electro-débil con cuatro bosones mediadores y actúa únicamente en las partículas con quiralidad izquierda.

En el grupo de simetría del Modelo Estándar, las partículas están incluidas de la siguiente manera:

Los seis sabores de quarks están agrupados en tripletes de $SU(3)_C$ pues tienen carga de color la cual se presenta en tres tipos distintos: rojo, verde y azul. Se va a representar a los quarks de la siguiente manera

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix}, \quad u_{iR}, \quad d_{iR}.$$

En donde u y d se refieren a quarks tipo up y down entre los que se encuentran los quarks up, charm y top por una parte y por otra a los quarks down, strange y bottom respectivamente. El subíndice $i = 1, 2, 3$ se refiere a las generaciones mientras que los subíndices L, R hacen referencia a la quiralidad izquierda o derecha según sea el caso, esto es $q_{L(R)} = P_{L(R)}q$ con $P_{L(R)}$ el proyector izquierdo (derecho). Los leptones serán singletes de $SU(3)_C$ pues estos no tienen carga de color y por lo tanto no son sensibles a esta interacción.

Bajo el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ los fermiones izquierdos serán agrupados en dobletes mientras que los derechos serán singletes. Los leptones serán representados de la siguiente manera:

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix}, \quad e_{iR}.$$

En donde e_{iL} se refiere a los tres tipos de leptones cargados y ν_i a los tres tipos de neutrinos izquierdos. Nótese que el Modelo Estándar no incluye neutrinos derechos.

2.3. SSB y Mecanismo de Higgs

El rompimiento espontáneo de simetría (SSB, por sus siglas en inglés) no es un término propio de la Física de partículas, este ha sido empleado previamente en áreas como la materia condensada y se refiere a la transición de un cierto sistema físico a un estado particular de mínima energía que no comparte las simetrías de la física subyacente.

Una analogía útil para entender esto es pensar en una aguja orientada a lo largo del eje z , a simple vista la aguja es invariante ante rotaciones pero al aplicarle una fuerza de compresión a lo largo de su eje de simetría esta va a tender a pandearse en una dirección específica que en principio no puede ser predicha y por lo tanto ya no es invariante ante rotaciones por lo que la simetría rotacional del sistema ha sido espontáneamente rota.

Esto mismo sucede en la teoría de campos, para visualizar mejor este hecho se va a recurrir al ejemplo más simple. Considérese un campo escalar real ϕ cuyo Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (2.1)$$

con $\lambda > 0$, el cual es invariante ante la transformación discreta de paridad $\phi \rightarrow -\phi$. Si $\mu^2 > 0$ este Lagrangiano corresponde al de un campo escalar real con masa μ , pero si $\mu^2 < 0$ ya no se puede asegurar esto pues ahora se tiene un signo equivocado en el Lagrangiano.

Si se calcula el mínimo del potencial

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \Rightarrow \phi = \pm v = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \text{ y } \phi = 0.$$

Se busca estudiar lo que sucede con el modelo alrededor del mínimo, para ello se escoge uno de los mínimos de manera arbitraria y se escribe al campo como $\phi(x) = v + \eta(x)$. Sustituyendo en (4.1) se obtiene el nuevo Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \text{ctes},$$

en donde se identifica un nuevo término de masa para el nuevo campo η cuya masa es $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$ el cual está bien definido pues $\mu^2 < 0$. Además nótese que la simetría de paridad ya no está presente en el nuevo Lagrangiano.

De este modo se ha roto espontáneamente dicha simetría alrededor del mínimo pero en consecuencia se ha dotado de masa al nuevo campo η y el rompimiento es espontáneo en el sentido de que no es posible predecir el estado de mínima energía en el cual el campo se encuentre. Es importante destacar que la simetría no se ha perdido por completo, simplemente esta ya no se manifiesta explícitamente en un cierto estado del campo por lo que frecuentemente se dice que la simetría se ha escondido. Este mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría es muy empleado para dotar de masa a las partículas por su simplicidad y elegancia.

Considérese ahora un ejemplo un poco más complicado, pensemos en un campo escalar complejo cuyo Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (2.2)$$

el cual es invariante bajo la transformación global y continua $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$, con $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$. Al igual que en el caso anterior, si se toma en cuenta que $\mu^2 < 0$ se tiene un objeto de estudio más interesante. Sustituyendo la expresión para ϕ en términos de los campos reales ϕ_1 y ϕ_2 el Lagrangiano (2.2) toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

Ahora el mínimo del potencial será

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \quad \text{con} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda},$$

nótese que hay una infinidad de puntos que minimizan al potencial y están contenidos en la circunferencia de radio v . Nuevamente, se busca estudiar lo que sucede alrededor del mínimo. Para ello se puede tomar de manera arbitraria uno de los mínimos posibles, por ejemplo $\phi_1 = v, \phi_2 = 0$, y se escribe lo siguiente

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)].$$

Sustituyendo en (2.2)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \mu^2 \eta^2 + O(\eta^3, \xi^3),$$

de aquí se puede notar que se ha obtenido un campo escalar masivo η con masa $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$ y uno sin masa ξ con $m_\xi = 0$. Los términos restantes son interacciones entre los campos además de que el nuevo Lagrangiano deja de ser invariante ante la transformación continua mencionada con anterioridad.

A partir de este ejemplo simple se puede enunciar un resultado muy importante en Física de partículas, el cual básicamente dice lo siguiente: Si una simetría continua de un sistema físico es espontáneamente rota, esto dará lugar a la aparición de bosones escalares sin masa. Este es esencialmente el contenido del famoso teorema de Nambu-Goldstone; y a los bosones escalares resultantes se les conoce como bosones de Goldstone.

Es posible extender el análisis que se acaba de discutir al caso de simetrías continuas y locales de la forma

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x).$$

Al pedir que el Lagrangiano (2.2) sea invariante ante esta transformación local se vuelve necesario introducir un nuevo campo, A^μ , además de que también se debe hacer el cambio de la derivada parcial ordinaria ∂_μ por una derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

en donde al campo A_μ se le suele llamar campo de norma y transforma de la siguiente manera

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha.$$

De este modo, el nuevo Lagrangiano invariante ante la transformación local es

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

en donde se ha introducido el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, siendo este un término cinético para permitir que el campo de norma tenga dinámica.

Si al igual que en los casos anteriores consideramos que $\mu^2 < 0$, se tendrá un caso más interesante. Al repetir el mismo procedimiento que se llevó a cabo en los ejemplos anteriores, esto es, trasladamos el campo ϕ a un cierto estado base y hacemos un desarrollo perturbativo; entonces al sustituir

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)],$$

en (4.3) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - v^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu \\ &- evA_\mu\partial^\mu\xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{términos de interacción.}\end{aligned}$$

A partir de este nuevo Lagrangiano se puede apreciar que en el espectro de partículas aparece un bosón de Goldstone ξ , un escalar masivo η y más importante, un bosón vectorial masivo A^μ . Esto es

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev.$$

A pesar de que se ha conseguido generar masas para las partículas se sigue teniendo el problema de la aparición de bosones de Goldstone. Para subsanar esto notemos que hay una sutileza pues al dotar de masa al campo A^μ se ha incrementado los grados de libertad de 2 a 3 pues en un principio dicho campo era no masivo y de espín 1. Por lo que es necesario preguntarse por el grado de libertad faltante para así poder tener un espectro de partículas adecuado, i. e., con el número de grados de libertad correcto.

Podemos comenzar a intuir que debe haber un campo en el Lagrangiano que no es físico. Afortunadamente existe una transformación que permite visualizar esa idea, nótese que

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v},\end{aligned}$$

al orden más bajo en ξ . De este modo podríamos comenzar a pensar en una transformación con un conjunto distinto de campos reales h, θ, A^μ , tales que

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta.\end{aligned}$$

Esta transformación luce completamente como una transformación de norma particular con $\theta(x)$ elegido de tal forma que h es real por lo que la teoría será independiente de este campo. Sustituyendo la transformación en (2.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \\ &+ \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu h^2 + ve^2A_\mu A^\mu h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Se puede apreciar que el bosón de Goldstone ya no aparece, además de que el campo θ es espúreo debido a que este corresponde solo a la libertad de llevar a cabo una transformación de gauge. El Lagrangiano que se acaba de encontrar describe a dos partículas masivas interactuantes, esto es, un bosón vectorial de norma A^μ y un escalar masivo h , el cual es frecuentemente conocido como partícula de Higgs. Físicamente, lo que acaba de suceder es que el bosón de Goldstone que causaba problemas ha pasado a ser el grado de libertad faltante correspondiente a la polarización longitudinal del bosón vectorial masivo, para cálculos más detallados consulte [6]. Este procedimiento es conocido como el *Mecanismo de Higgs* [7,8] y juega un papel muy

relevante en la física de partículas, especialmente en el Modelo Estándar al romper la simetría electrodébil y dotar de masa a los fermiones y los bosones W^\pm y Z^0 . Sin embargo, el Mecanismo de Higgs no permite reproducir con éxito las masas medidas experimentalmente para los neutrinos. Pues por si mismo arroja masas muy grandes en el contexto del Modelo Estándar, es por ello que se ha trabajado en alternativas para tratar de resolver este problema [2].

2.4. Matriz de mezcla V_{CKM}

En el Lagrangiano del SM se incluyen varias partes que tienen que ver con la dinámica de los campos de fermiones y bosones de norma, las interacciones entre estos, el potencial escalar y por supuesto las interacciones de Yukawa entre los fermiones y el Higgs quienes están codificadas en la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -d_R \mathbf{Y}_d Q_L H - e_R \mathbf{Y}_e L_L H + u_R \mathbf{Y}_u Q_L \tilde{H} + \text{h.c.},$$

donde $\tilde{H} = \epsilon H^*$ denota el conjugado de carga del doblete electrodébil H y $\epsilon = i\sigma_2$ siendo σ_2 una de las matrices de Pauli.

Después del rompimiento de la simetría electrodébil mediante el mecanismo de Higgs, los términos en la expresión anterior dan origen a términos de masa para los fermiones, con sus matrices de masa dadas por

$$\mathbf{M}_k = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_k, \quad k = u, d, e.$$

Estas matrices en general no son diagonales en la base de sabor, por lo que es necesario hacer una rotación a los campos de fermiones a la base de masas mediante transformaciones unitarias de la forma

$$\psi_{fL} \rightarrow A_{fL} \psi_{fL}, \quad \psi_{fR} \rightarrow A_{fR} \psi_{fR}. \quad (2.4)$$

Las matrices $A_{f(L,R)}$ satisfacen $A_{kL}^T \mathbf{Y}_k A_{kR} = \mathbf{Y}_{\text{diag}}$. Además, dichas matrices no necesariamente son las mismas ya que ellas no se cancelarán entre si en el vértice en el que se cambia el isospín débil de los bosones vectoriales W^\pm a los fermiones. Esto implica que dichos vértices transformarán bajo (2.4) como

$$g u_i^\dagger d_i W^+ + \text{h.c.} \rightarrow g u_i^\dagger (A_u^\dagger A_u)_{ij} d_j W^+ + \text{h.c.}$$

En donde se puede identificar a la matriz unitaria $V_{CKM} = A_u^\dagger A_d$, conocida como matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) y en ella se encuentra codificada la información sobre la mezcla entre las tres generaciones de fermiones en cada vértice de interacción con un bosón W^\pm .

Ya que la matriz CKM es una matriz de 3×3 , esta tiene en general nueve grados de libertad (tres ángulos de mezcla y seis fases). Sin embargo si se recurre al hecho de A_{uR} y A_{dR} no son físicas es posible remover cinco fases dejando a la matriz de mezcla con solo cuatro parámetros. Tomando en cuenta esto y que la matriz tiene que ser unitaria se puede llegar a la siguiente parametrización de la matriz de mezcla

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}s_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix},$$

con $\delta = \delta^{\text{CKM}}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}^{\text{CKM}}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}^{\text{CKM}}$. El ángulo θ_{12}^{CKM} es conocido como el ángulo de Cabibbo. Es importante mencionar que al igual que la parametrización que se acaba de exponer, existen otras parametrizaciones para la matriz de mezcla; cada una de ellas con sus ventajas y desventajas cuyo uso dependerá del problema que esté bajo estudio.

2.5. Grupo de renormalización

En la naturaleza todas las cantidades físicas medibles son finitas, i. e., es posible atribuirles un valor numérico en concreto; algunos ejemplos de esto son la carga eléctrica, la masa y el momento. Al estudiar teoría de campos interactuantes en algunas ocasiones surgen resultados que no tienen sentido físico, pues sugieren que las observables toman valores infinitos que no están bien definidos, lo cual no tiene ningún sentido.

Esto podría deberse a una mala interpretación de las propiedades que estén bajo estudio, pues al realizar alguna medición es prácticamente imposible evitar que las diversas interacciones que actúan sobre el sistema en cuestión ejerzan un efecto considerable.

Dicho de otro modo, al realizar una medición se toma en cuenta el efecto colectivo del sistema y las interacciones con su entorno. Para entender mejor esta idea pensemos por un momento en el campo eléctrico producido por un electrón el cual, como es bien sabido, varía como el inverso del cuadrado de la distancia a la fuente. El campo eléctrico se vuelve más y más grande conforme el observador se aproxima a la posición del electrón, de este modo a medida que el observador se aproxima al electrón la intensidad del campo eléctrico se vuelve más fuerte, como resultado, la densidad de energía almacenada en el campo incrementa cada vez más. En algún punto, la densidad de energía será tan grande que un par partícula-antipartícula puede ser producido del vacío. Esto significa que un único electrón está rodeado por una nube de pares partícula-antipartícula de diferente naturaleza que aparecen y desaparecen constantemente del vacío. Los pares van a orientarse de manera específica pues las partículas con carga positiva serán atraídas por el electrón mientras que las que tienen carga negativa serán repelidas. El efecto neto es que conforme el observador se acerca al electrón, este va a encontrar más y más cargas negativas detrás suyo. Lo que indica que la carga original debe haber sido diferente que la que se percibió en un principio. Este efecto es conocido como apantallamiento de la carga. Por lo que la nube de pares de partículas esconde la verdadera carga del electrón (carga desnuda). De esta manera, el efecto de apantallamiento proveniente de los pares de partículas que rodean al electrón se encarga de "vestir" la carga dando como resultado una carga efectiva cuyo valor está en buen acuerdo con lo que se mide experimentalmente.

En teoría el valor de la carga desnuda del electrón da un valor infinito mientras que el valor de la carga vestida es finita. Por lo que tal vez, si bien el electrón por sí sólo porta una carga infinita, en la práctica el efecto de apantallamiento proveniente de la nube de partículas virtuales alrededor del electrón sólo da lugar a que los experimentos puedan percibir una única carga neta mucho menor.

Esto mismo es lo que sucede en teoría de campos, pues el obtener que alguna medición da un resultado que no tiene sentido físico (cantidad desnuda) es un indicador de que necesitamos reinterpretar los resultados modificando un poco la teoría para poder aplicar todo el poder de la teoría de perturbaciones con los parámetros correctos (vestidos) y obtener cantidades verdaderamente físicas que involucran los efectos de las interacciones entre los campos. Este es básicamente el contenido del mecanismo conocido como *renormalización*.

Sin embargo, a pesar de que este mecanismo de la renormalización funciona muy bien para ayudar a remendar los problemas relacionados con las divergencias. En sus inicios, este lucía como un truco matemático que formalmente no parecía ser muy razonable pues impedía demostrar que teorías muy exitosas como la QED son coherentes desde el punto de vista matemático.

En 1954 Gell-Mann y Francis Low adoptaron el concepto de la carga efectiva el cual

generaliza a los conceptos de carga desnuda y vestida. Según estos físicos la carga efectiva varía con la distancia de manera que entre más se acerque un observador al electrón, y por tanto más se penetre en la nube de partículas virtuales, mayor será la carga efectiva detectada. Esta idea permitió relacionar el proceso de renormalización con la noción de escala y dio a entender a los físicos que habían dado con la respuesta correcta a una pregunta mal formulada. Pues en lugar de preocuparse por los infinitos es mejor centrarse en como las cantidades físicas cambian dependiendo de la distancia ¹ en la cual estas estén siendo medidas.

Décadas más tarde los físicos de la materia condensada se dieron cuenta que era posible describir el comportamiento colectivo de un sistema físico a partir de grupos más pequeños formados por los constituyentes del propio sistema, de este modo al iterar este proceso tomando en cuenta grupos cada vez más grandes, los detalles finos del sistema empezaban a suavizarse lo que permitió describir el comportamiento global del sistema. Esto dio un indicio de que era posible estudiar la física de un sistema a una cierta escala a partir de la física ya conocida a otra escala completamente distinta.

Más adelante, en la década de los setentas; Kenneth Wilson, con su teoría del grupo de renormalización pudo justificar los cálculos de la QED y proporcionó herramientas con las que se volvió posible subir y bajar a través de las escalas de energía de una teoría. Entonces, el grupo de renormalización de Wilson describe como se va transformando una teoría de los constituyentes elementales en otra que trata con elementos compuestos. Esto, como se verá en capítulos posteriores permitirá conectar diferentes teorías efectivas para estudiar la fenomenología proveniente de las teorías de gran unificación.

Existen múltiples formalismos y técnicas sofisticadas para llevar a cabo el proceso de renormalización de una teoría, a si mismo existen criterios que permiten saber cuando una teoría es renormalizable o no. Sin embargo, no se entrará en los detalles del engorroso proceso de la renormalización; en su lugar se tratará de describir muy brevemente en que consiste el grupo de renormalización de Wilson.

El grupo de renormalización no es un grupo estrictamente hablando pues este no tiene un único inverso para cada uno de sus elementos. El nombre surge del estudio de como un sistema se comporta bajo transformaciones de reescalamiento, a medida que se lleva a cabo este proceso se van borrando los detalles finos y no es posible recuperarlos mediante una transformación inversa. El lector interesado en profundizar en el tema puede dirigirse a las referencias [9, 10] en donde se da un desarrollo muy completo al respecto.

La evolución de los acoplamientos en una teoría es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales que, por ejemplo, en el caso del modelo estándar y únicamente para los acoplamientos de norma estas están dadas por [4]

$$\frac{dg_l}{dt} = -b_l \frac{g_l^3}{16\pi^2} - \sum_k b_{kl} \frac{g_k^2 g_l^3}{(16\pi^2)^2}, \quad l, k = 1, 2, 3,$$

¹Recordemos que en física de partículas, al querer estudiar fenómenos que involucran tamaños cada vez más pequeños se requiere de más energía. Por lo que el hablar de diversas escalas de longitud es equivalente a pensar en diferentes escalas energéticas

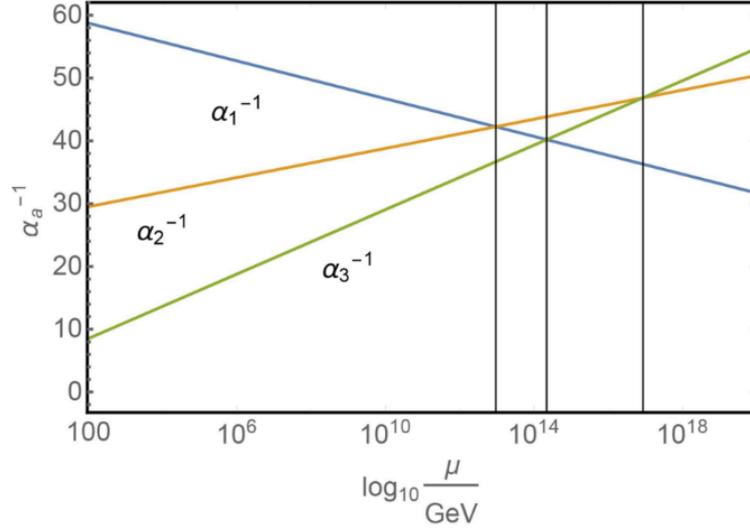


Figura 2.1: Evolución de los acoplamientos de norma del SM, con $\alpha_l = g_l^2/4\pi$.

en donde g_l son los acoplamientos de norma, $t = \log \mu$, μ es la escala de energía y los coeficientes son definidos como

$$b_1 = -\frac{4}{3}n_g - \frac{1}{10},$$

$$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3}n_g - \frac{1}{6},$$

$$b_3 = 11 - \frac{4}{3}n_g.$$

$$(b_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{136}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 102 \end{pmatrix} - n_g \begin{pmatrix} \frac{19}{15} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \\ \frac{3}{5} & \frac{49}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{44}{15} & 4 & \frac{76}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{9}{10} & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

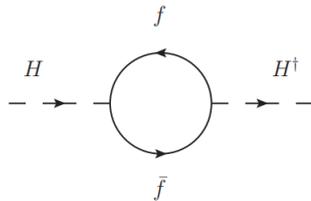
en donde n_g es el número de generaciones de fermiones. Para tres generaciones las soluciones se comportan como se muestra en la Fig 2.1

CAPÍTULO 3

SUPERSIMETRÍA

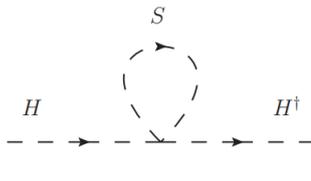
3.1. ¿Qué es la Supersimetría?

En el SM se presenta un problema importante conocido como el problema de la jerarquía el cual básicamente se refiere a una sensibilidad del Higgs al incluir correcciones cuánticas al cálculo de la masa provenientes de acoplamientos con otros campos. Una corrección podría venir, por ejemplo, del acoplamiento con un fermión de Dirac de la forma $\mathcal{L} \supset -\lambda_f H \bar{f} f$; de donde surge la corrección a un lazo [11].



$$= -\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \Lambda_{UV}^2 + \mathcal{O}\left(m_f^2 \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{m_f}\right)\right),$$

con Λ_{UV} un corte sobre los momentos dentro del lazo. Se puede notar que aparecen correcciones cuadrática y logarítmica. En escalas más altas, en donde podría haber nueva física, este corte puede llegar a ser del orden de la escala de Plank ($M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV). Esto representa un enorme problema pues correcciones cuánticas de este orden rompen por completo con la jerarquía para poder llegar a la escala electrodébil ($M_Z \sim 91$ GeV), i. e., el valor de la masa del Higgs no está en acuerdo con el valor natural que se esperaría tener en la escala de rompimiento de la simetría electrodébil. El problema de jerarquía ha permanecido como un problema abierto, sin embargo hace algunos años un grupo de Físicos se dieron cuenta que al acoplar un campo escalar complejo, S , con el Higgs a través de un término de interacción de la forma $\mathcal{L} \supset +\lambda_S |H|^2 |S|^2$ surgen correcciones adicionales en donde a un lazo se tiene [11].



$$= +\frac{\lambda_S}{16\pi^2} \Lambda_{UV}^2 + \mathcal{O}\left(m_S^2 \log\left(\frac{\Lambda_{UV}}{m_S}\right)\right),$$

Como se puede notar de este resultado, si se introducen dos escalares por cada fermión de Dirac y se permite que exista una relación entre escalares y fermiones tal que $\lambda_s = |\lambda_f|^2$, las correcciones cuadráticas se anulan entre sí¹. Por lo que el problema de la jerarquía entre las distintas escalas desaparece.

¹Se puede mostrar que a órdenes superiores también se cancelan las correcciones logarítmicas.

Esta relación existente entre bosones y fermiones es lo que se conoce como *Supersimetría* (SUSY, por sus siglas en inglés). Afortunadamente, la Supersimetría puede ser tratada y estudiada con toda la maquinaria ya conocida y ampliamente desarrollada en teoría de campos sin necesidad de suposiciones extra más allá de la existencia de una relación entre bosones y fermiones. Entonces, vamos a decir que una teoría es supersimétrica si esta permanece invariante luego de intercambiar los campos bosónicos y fermiónicos entre sí.

Podemos pensar que los generadores de la supersimetría son operadores que convierten estados fermiónicos en bosónicos y viceversa, esquemáticamente esto es

$$Q |fermion\rangle = |boson\rangle, \quad Q |boson\rangle = |fermion\rangle,$$

con Q el generador de SUSY. De este modo, en una teoría supersimétrica todo fermión debe tener al menos un supercompañero bosónico y viceversa cuyos estados estén relacionados bajo la acción del operador Q y que además los respectivos espines difieran por $1/2$.

Una teoría puede tener más de un generador de Supersimetría cuyo número en principio es arbitrario; cuando esto suceda se dice que la teoría en cuestión tiene \mathcal{N} Supersimetrías.

La Supersimetría tal y como se está planteando es una simetría global que no depende del espacio-tiempo. Sin embargo existe una versión local de esta Supersimetría conocida como Supergravedad de la cual no se entrará en detalles.

Algunas características importantes que comparten todas las teorías supersimétricas es que estas contienen el mismo número de bosones y fermiones, en algunas ocasiones es necesario incluir campos auxiliares que no son físicos para cumplir este propósito. Además, de manera similar a como las partículas del SM se agrupan en dobletes, tripletes, etc., las partículas y sus respectivos supercompañeros se agrupan en supermultipletes.

De esta manera se descubrió que las partículas que pertenecen al mismo supermultiplete deben tener la misma masa. Este hecho representa un gran problema pues si, por ejemplo, un electrón tiene la misma masa que su supercompañero, el selectrón, ya deberíamos haber sido capaces de detectar selectrones en los aceleradores de partículas. Sin embargo este no es el caso, a la fecha en la que se escribe este trabajo nadie ha detectado rastro alguno de la existencia de la Supersimetría.

La solución que se propuso a este problema es que en algún punto de la evolución del Universo temprano la Supersimetría debió romperse mediante algún mecanismo lo que provocó que los supercompañeros adquirieran masas mucho mayores justificando así el porque no han sido detectados en las escalas de energía disponibles en los aceleradores actuales.

3.2. Breve introducción al MSSM

La extensión más simple e inmediata que existe para hacer que el SM sea supersimétrico es el conocido Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo (MSSM, por sus siglas en inglés). Básicamente lo que se tiene que hacer es añadir un campo fermiónico (bosónico) por cada campo bosónico (fermiónico) procurando mantener el balance de los grados de libertad. Sin embargo surge una complicación pues no es posible usar el doblete de Higgs conjugado de carga del SM, \tilde{H} , para generar las masas de los quarks tipo up debido a que los acoplamientos de Yukawa son generados por un superpotencial holomorfo. Lo que se puede hacer es reemplazar el Higgs original con un par de dobletes conjugados de carga H_u y H_d .

En donde H_u dotará de masa a los quarks tipo up y H_d dotará de masa a los quarks

tipo down y los leptones cargados; al hacer esto también se está ayudando a la cancelación de anomalías en la teoría. Ambos dobletes de Higgs deben adquirir un VEV distinto de cero de tal modo que se cumpla que

$$v_u^2 + v_d^2 = v^2 = (246 \text{ GeV})^2,$$

con v el VEV del Higgs del SM, $\langle H_f^0 \rangle = v_f/\sqrt{2}$ y $f = u, d$. Esta relación surge al hacer una rotación de la base del sector de Higgs del MSSM a la base del sector de Higgs del SM, i.e., los dos dobletes de Higgs del MSSM se mezclan de cierto modo en que puedan reproducir el Higgs físico que conocemos. Al hacer esto, adicionalmente surge la relación

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}.$$

Por otra parte, el superpotencial del MSSM es una función de los campos y está dado por

$$W_{MSSM} = (Y_u)_{ij} u_i^c H_u Q_j + (Y_d)_{ij} d_i^c H_d D_j + (Y_e)_{ij} e_i^c H_d L_j + \mu H_u H_d, \quad (3.1)$$

en donde Y_f son las matrices de Yukawa que acoplan a los fermiones con el sector de Higgs. Además, bajo la rotación de la que se acaba de hacer mención, es posible relacionar las matrices de Yukawa del SM con las del MSSM. En consecuencia de esto, a nivel árbol se tiene que

$$Y_u^{SM} = Y_u^{MSSM} \sin \beta, \quad Y_d^{SM} = Y_d^{MSSM} \cos \beta, \quad Y_e^{SM} = Y_e^{MSSM} \cos \beta. \quad (3.2)$$

En ese mismo sentido, si se impone que los acoplamientos de Yukawa de los quarks top y bottom sean perturbativos arriba de la escala electrodébil se puede encontrar la restricción [11]

$$1 \leq \tan \beta \leq 60.$$

Estas últimas condiciones cobrarán una alta relevancia un poco más adelante cuando se entre en discusión de un conjunto de expresiones para poder hacer la conexión adecuada del SM con el MSSM en donde se toma en cuenta los efectos del rompimiento de la Supersimetría.

Como complemento, es importante mencionar que (3.1) no es el superpotencial más general que respete las simetrías del SM. Es posible añadir términos de interacción entre leptones izquierdos y derechos, quarks con leptones, etc. de la siguiente manera

$$W' = \mu_i H_u L_i + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} e_i^c L_j L_k + \eta_{ijk} L_i d_j^c Q_k + \frac{1}{2} \gamma_{ijk} d_i^c u_j^c u_k^c. \quad (3.3)$$

Esta clase de términos se ocupan de mediar el decaimiento del protón, sin embargo este proceso nunca ha sido observado. Muchas teorías de gran unificación concuerdan en predecir algún tiempo de vida media para el protón y por ello se ha convertido en una prueba muy importante para descartar modelos [3, 12]. Se espera que este tiempo de vida media sea grande, lo que a su vez justificaría el porque no ha sido observado este fenómeno si es que de verdad pudiese ocurrir.

Como se mencionó anteriormente, si la Supersimetría es respetada se obtienen como resultado las mismas masas para fermiones y bosones. Sin embargo estas partículas supersimétricas no han sido observadas, por lo tanto la Supersimetría debe estar rota a partir de alguna escala de energía que aún desconocemos.

Existen varias maneras de romper la Supersimetría en donde cada uno de ellos tiene efectos importantes sobre la fenomenología del modelo en cuestión, existe el rompimiento explícito y espontáneo por mencionar algunos. Pero el mecanismo que ha cobrado mayor renombre es el conocido como *ruptura suave de Supersimetría*; este

mecanismo básicamente se refiere a que SUSY es rota únicamente por una diferencia entre las masas de los fermiones y sus supercompañeros mientras que la relación entre los acoplamientos necesarios para la cancelación correspondiente al problema de jerarquía se mantiene inalterada [13].

Se ha trabajado con intentos por romper directamente a SUSY usando la idea del rompimiento suave sin embargo esto trae como resultado que algunos campos auxiliares, incluidos para salvaguardar la consistencia de la teoría, deben adquirir un VEV distinto de cero. Más sin embargo, esto ha probado no funcionar muy bien [11]. En vista de este problema, algunos otros formalismos han sido desarrollados. En estos formalismos, se suele hablar de que SUSY puede ser rota en un sector al cual no se tiene acceso mediante las interacciones convencionales el cual es conocido como sector oculto y este efecto es transmitido mediante algún mecanismo al sector visible al que si se tendría acceso. En general los términos de ruptura suave de SUSY para una teoría de norma supersimétrica general son escritos como

$$-\mathcal{L}_{soft} = \frac{1}{2}M_a\lambda_a\lambda^a + \frac{1}{6}a_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \frac{1}{2}b_{ij}\phi_i\phi_j + t_i\phi_i + (\tilde{m}^2)_{ij}\phi_i^\dagger\phi_j + \text{h.c.},$$

en donde λ^a son los campos de los gauginos; supercompañeros de los bosones de norma y ϕ_i son campos escalares; entre ellos se pueden encontrar a todos los supercompañeros de los fermiones del SM y a los Higgs. Los coeficientes de los términos lineales t_i son distintos de cero para campos escalares ϕ_i que son singletes bajo todas las simetrías impuestas. Al aplicar esto directamente al MSSM los términos de rompimiento suave se escriben como

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{soft} &= \frac{1}{2} \left(M_1\tilde{B}\tilde{B} + M_2\tilde{W}\tilde{W} + M_3\tilde{g}\tilde{g} + \text{h.c.} \right) \\ &+ (m_{\tilde{Q}}^2)_{ij}\tilde{Q}_i\tilde{Q}_j^* + (m_{\tilde{L}}^2)_{ij}\tilde{L}_i\tilde{L}_j^* \\ &+ (m_{\tilde{u}^c}^2)_{ij}\tilde{u}_i^c\tilde{u}_j^c + (m_{\tilde{d}^c}^2)_{ij}\tilde{d}_i^c\tilde{d}_j^c + (m_{\tilde{e}^c}^2)_{ij}\tilde{e}_i^c\tilde{e}_j^c \\ &+ (A_d)_{ij}\tilde{d}_i^c H_d\tilde{Q}_j + (A_e)_{ij}\tilde{e}_i^c H_d\tilde{L}_j - (A_u)_{ij}\tilde{u}_i^c H_u\tilde{Q}_j + \text{h.c.} \\ &+ m_{H_u}^2|H_u|^2 + m_{H_d}^2|H_d|^2 + (B\mu H_u H_d + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

en donde los coeficientes de este Lagrangiano son en general números reales. A la escala de masas característica de los supercompañeros resultante de estos términos se le suele denotar como M_{SUSY} pues este es el umbral a partir del cual la Supersimetría se manifiesta.

Para poder estudiar de manera adecuada la fenomenología proveniente del MSSM se debe contar con una transición adecuada entre el MSSM y el SM luego de que la Supersimetría se rompe. Por este motivo, es necesario incluir los efectos provenientes de los términos de rompimiento suave mediante la imposición de unas condiciones de empataamiento que relacionan a los parámetros del SM con los del MSSM justo en M_{SUSY} . Dicho de otro modo; los parámetros del SM tales como los acoplamientos de norma, los acoplamientos de Yukawa, etc., van a estar relacionados con los del MSSM de manera semejante a como lo están en la ecuación (3.2) pero tomando en cuenta correcciones provenientes de los términos de rompimiento suave. Algunas de estas correcciones en el umbral, M_{SUSY} , pueden ser grandes o pequeñas dependiendo del valor de $\tan\beta$ [13]. Debido a este hecho, estas correcciones se vuelven relevantes pues pueden inclusive exceder las contribuciones a un lazo en las ecuaciones del grupo de renormalización, por lo que es muy importante incluirlas en el análisis de la evolución de los parámetros de los modelos supersimétricos.

La manera más sencilla de incluir las correcciones es trabajar en la base en la que la matriz de Yukawa de los quarks tipo up es diagonal. Entonces, de acuerdo a [13],

las condiciones de empatamiento para los acoplamientos de Yukawa de los quarks se puede escribir como

$$Y_u^{SM} \simeq Y_u^{MSSM} \sin \beta, \quad (3.5a)$$

$$Y_d^{SM} \simeq (1 + \Delta_d + \Delta_u) Y_d^{MSSM} \cos \beta, \quad (3.5b)$$

en donde se han definido las matrices $16\pi^2 \Delta_d^* = V_{CKM} \Gamma_d V_{CKM}^\dagger \tan \beta$ y $16\pi^2 \Delta_u^* = \Gamma_u \tan \beta$, en donde a su vez las matrices $\Gamma_{u,d}$ son definidas como en [14]. Las correcciones en la ecuación (3.5b) vienen de diagramas a un lazo que involucran correcciones debidas a gluinos y charginos acoplados a quarks y squarks tipo u y d. Mientras que el rompimiento de Supersimetría se da mediante la introducción de términos de rompimiento suave como se discutió anteriormente, para más detalles sobre el cálculo de estas correcciones a un lazo consulte [14].

En las ecuaciones (3.5) se han omitido términos que no dependen de $\tan \beta$ pues resultan ser muy pequeñas.

La matriz Γ_d contiene información relacionada a la contribución de los gluinos, mientras que Γ_u contiene información correspondiente a la contribución de los charginos y squarks tipo up. En particular esta matriz contiene también una corrección proveniente de la matriz A_u , para más detalles véase [14].

Si se desprecian los efectos de las mezclas entre familias proveniente de las matrices Δ_u y Δ_d y extrapolando la idea a los leptones cargados, de acuerdo a [13], las condiciones de empatamiento pueden ser simplificadas de la siguiente manera

$$Y_u^{SM} \simeq Y_u^{MSSM} \sin \beta, \quad (3.6a)$$

$$Y_d^{SM} \simeq (1 + \text{diag}(\eta_q, \eta_q, \eta'_q + \eta_A)) Y_d^{MSSM} \cos \beta, \quad (3.6b)$$

$$Y_e^{SM} \simeq (1 + \text{diag}(\eta_l, \eta_l, \eta'_l)) Y_e^{MSSM} \cos \beta. \quad (3.6c)$$

Las últimas dos ecuaciones pudieron ser escritas de esa manera debido a que las primeras dos generaciones de quarks down y leptones cargados reciben aproximadamente las mismas correcciones en el umbral en vista de que no hay una diferencia de masa relevante entre la primer y segunda generación de squarks y sleptones respectivamente.

Los parámetros η_q y η'_q involucran contribuciones debidas a los gluinos y correcciones a órdenes superiores debidos a winos y binos. Por otra parte, η_l y η'_l solo parametrizan correcciones provenientes de los gauginos electrodébiles y por lo tanto son más pequeños que η_q y η'_q y en algunos trabajos suelen ser despreciados, sin embargo sus efectos podrían ser relevantes así que serán considerados en los estudios que se expongan a lo largo de este trabajo. η_A parametriza correcciones de lazos provenientes del chargino y el squark stop, a su vez depende en gran medida del término trilineal A_u . Además, si se asume que esta matriz es jerárquica, la corrección respectiva solo afecta a la tercera generación. Una corrección análoga no se incluye en los leptones cargados, pues no se está tomando en cuenta la existencia de neutrinos derechos.

Nótese que en las condiciones de empatamiento (3.6) se han incluido seis parámetros pero aún es posible hacer una reparametrización para absorber algunos de ellos. Se puede hacer la redefinición

$$\cos \bar{\beta} = (1 + \eta'_l) \cos \beta,$$

absorbiendo así a η'_l ; adicionalmente si $\tan \beta$ es suficientemente grande, la definición anterior es equivalente a

$$\tan \bar{\beta} = (1 + \eta'_l)^{-1} \tan \beta.$$

En ese mismo sentido se definen nuevos parámetros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_b &= \eta'_q + \eta_A - \eta'_l, \\ \bar{\eta}_q &= \eta_q - \eta'_l, \\ \bar{\eta}_l &= \eta_l - \eta'_l.\end{aligned}$$

Esta reparametrización permite reescribir las condiciones de empataamiento como

$$Y_u^{SM} \simeq Y_u^{MSSM} \sin \bar{\beta}, \quad (3.7a)$$

$$Y_d^{SM} \simeq (\mathbf{1} + \text{diag}(\bar{\eta}_q, \bar{\eta}_q, \bar{\eta}_b)) Y_d^{MSSM} \cos \bar{\beta}, \quad (3.7b)$$

$$Y_e^{SM} \simeq (\mathbf{1} + \text{diag}(\bar{\eta}_l, \bar{\eta}_l, 1)) Y_e^{MSSM} \cos \bar{\beta}. \quad (3.7c)$$

Estas relaciones son muy importantes pues nos permitirán hacer la transición adecuada entre teorías efectivas para llevar a cabo la evolución de los parámetros del modelo de gran unificación hasta las escalas de energía en donde es válido el SM y con ello verificar que tan bueno es el modelo propuesto para reproducir las masas y el patrón de mezclas de los quarks.

3.3. Gran Unificación

Fue hace aproximadamente 400 años cuando Newton y Kepler consiguieron describir con un puñado de leyes el movimiento de los objetos celestes y el movimiento de los objetos terrenales. Con ello se dieron cuenta de que todos los cuerpos se ven influenciados por las mismas leyes, unificando así el comportamiento mecánico de los objetos celestes y los terrenales. Años más tarde con el trabajo de Maxwell, Faraday y demás personajes ilustres se consiguió unificar la electricidad con el magnetismo dándose cuenta de que los fenómenos eléctricos están estrechamente relacionados con los magnéticos constituyendo así lo que hoy se conoce como el electromagnetismo. Sin duda alguna, esta clase de revoluciones conceptuales que se han dado en la historia de la Física nos han metido en la cabeza la bella idea de que las leyes fundamentales que rigen en el Universo deben estar unificadas de alguna manera. Esto mismo sucede en la Física contemporánea, especialmente en la Física de partículas elementales en donde se busca una unificación de las cuatro interacciones fundamentales en lo que sería una única interacción [15]. Sin embargo la búsqueda de esta unificación se ha convertido en uno de los principales objetos de estudio de la Física teórica, en la que generaciones enteras de Físicos han trabajado arduamente por décadas.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el SM presenta problemas importantes y para tratar de resolver algunos de ellos se ha dedicado mucho trabajo en tratar de extender al SM empleando grupos de simetría más grandes o productos de grupos. En el caso de que se trate de un único grupo que contenga al del SM se va a decir que la teoría subyacente es una teoría de gran unificación (GUT, por sus siglas en inglés). En caso de que se trate de más de un grupo se va a decir que la teoría subyacente es una teoría unificada.

Una GUT se encarga de explotar todas las herramientas que provee la teoría de grupos para tratar de que los tres acoplamientos de norma se unifiquen en alguna escala de energía de aproximadamente 2×10^{16} GeV.

El incluir Supersimetría en algunos modelos preexistentes, además de ayudar a aliviar problemas como el de la jerarquía, permite conseguir que los acoplamientos de norma se unifiquen. Por ejemplo, tomemos las RGE del MSSM únicamente para los acoplamientos de norma dadas por la expresión [16]

$$\frac{dg_l}{dt} = -b_l \frac{g_l^3}{16\pi^2} - \sum_k b_{kl} \frac{g_k^2 g_l^3}{(16\pi^2)^2}, \quad l, k = 1, 2, 3,$$

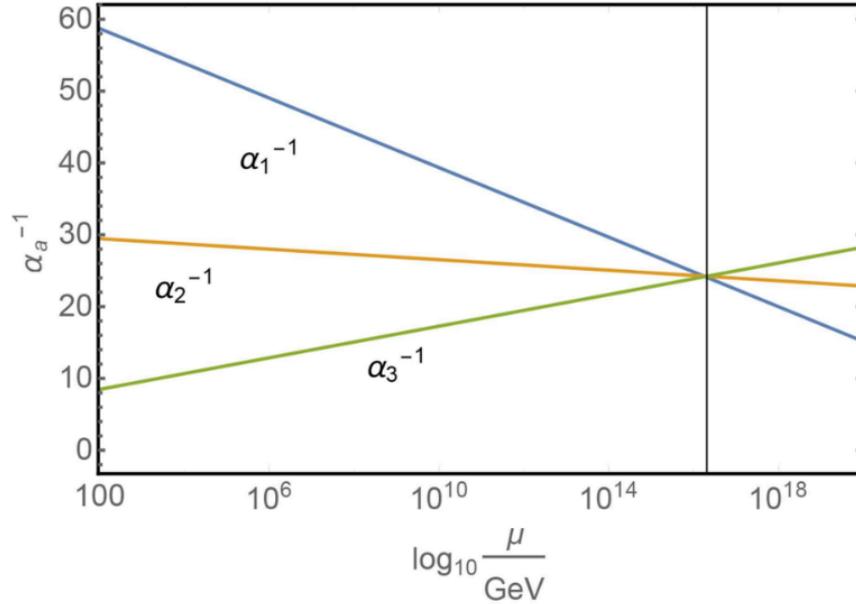


Figura 3.1: Evolución de los acoplamientos de norma del MSSM.

en donde a diferencia del SM los coeficientes toman la forma

$$b_1 = -2n_g - \frac{3}{5},$$

$$b_2 = -2n_g + 5,$$

$$b_3 = -2n_g + 9.$$

$$(b_{kl}) = n_g \begin{pmatrix} \frac{38}{15} & \frac{6}{5} & \frac{88}{15} \\ \frac{1}{2} & 14 & 8 \\ \frac{11}{15} & 3 & \frac{68}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{9}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix}.$$

Para el caso con tres generaciones de fermiones, las soluciones se comportan como se muestra en la Fig 3.1. En la gráfica se puede apreciar claramente que el incluir Supersimetría puede tener efectos positivos en la unificación de las interacciones contrario a lo que sucede en el caso de SM sin Supersimetría (ver Fig. 2.1). Sin embargo aún hay algunos otros factores que tienen que ser considerados de los cuales se hará mención más adelante.

CAPÍTULO 4

TEORÍA DE GRUPOS

4.1. Conceptos básicos

En la naturaleza existen muchos objetos que exhiben por sí mismos alguna clase de simetría que es agradable a la vista tales como la distribución de pétalos en un girasol o las conchas de algunos tipos de caracoles, etc. En la vida cotidiana las simetrías juegan un papel muy importante y por supuesto la Física no es una excepción, estas simetrías son tratadas y estudiadas a través de una rama de las matemáticas muy importante conocida como teoría de grupos.

En Física hay grupos muy importantes que son usados para describir características y principios tan fundamentales como lo es el espín de las partículas o la conservación de la energía y el momento. Como ya se mencionó anteriormente, la construcción de Modelo Estándar de partículas elementales está basada en grupos de simetría en los cuales se agrupan las partículas y ya que éste no ha dado una explicación satisfactoria para la jerarquía de masas y ángulos de mezcla de quarks y leptones, se ha intentado extender el modelo agregando grupos de simetría discretos adicionales tales como S_3, S_4, A_4 y Q_6 [17-22] por mencionar algunos ejemplos. Existen otras alternativas interesantes que han comenzado a ser exploradas, éstas aprovechan el isomorfismo existente entre el grupo modular finito Γ_N y los grupos de simetría discretos ya mencionados [23-27].

Comencemos hablando sobre algunos conceptos básicos que serán útiles para el desarrollo del modelo. Un grupo G se define como un conjunto de elementos a, b, c más una operación binaria, $*$, que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera tres elementos $a, b, c \in G$

- Cerradura: la operación $a * b = c \in G$, esto es, al operar entre dos elementos cualesquiera del grupo este nos debe devolver en elemento que sigue estando dentro del grupo.
- Asociatividad: $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- Existencia del elemento neutro: esto quiere decir que existe un cierto elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$.
- Existencia del elemento inverso: existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = e$, con e el elemento identidad. A b se le conoce como el inverso de a y se suele representar como a^{-1} .

Además, si para cualesquiera dos elementos $a, b \in G$ se cumple que $a * b = b * a$ entonces se dice que G es un grupo abeliano, i.e. sus elementos conmutan entre sí bajo la operación $*$, en caso contrario se dice que el grupo es no abeliano.

Hasta ahora se ha hablado únicamente del concepto de grupo como es en sí mismo y

de sus elementos, pero estos conceptos desde el punto de vista puramente matemático son muy abstractos tal y como se han enunciado. De tal manera que si se busca trabajar y estudiar las propiedades de ciertos grupos resulta conveniente y más sencillo escoger una *representación* en la que los elementos del grupo adopten una forma específica.

Para introducir el concepto de representación en teoría de grupos primero consideremos un grupo G , se denotará a sus elementos como g_i , entonces, una representación del grupo G se refiere a un mapeo D de los elementos de G en un conjunto de operadores lineales que satisfacen las siguientes propiedades

- $D(e) = 1$, en donde 1 es el operador identidad en el espacio en el cual los operadores actúan y e es el elemento identidad de G .
- $D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$, esto se refiere a que la operación del grupo es mapeada en la multiplicación natural en el espacio lineal en la cual los operadores actúan.

En particular, las representaciones matriciales son muy empleadas en la Física pues es bastante simple trabajar con ellas además de que ya se conocen muy bien muchas de sus propiedades. En teoría de representaciones se dice que dos representaciones son equivalentes si estas están relacionadas por una transformación de similitud que tiene la forma

$$D(g)' = SD(g)S^\dagger,$$

con S una transformación unitaria. Por otra parte, una representación determinada es reducible si esta tiene un subespacio invariante, lo que significa que si la acción de cualquier elemento del espacio de representaciones $D(g)$ sobre cualquier vector en el subespacio se sigue encontrando contenida en el subespacio. Se puede pensar, por ejemplo, en la acción de un operador de proyección P en el subespacio de modo que la condición anterior se puede escribir como

$$PD(g)P = D(g)P \quad \forall g \in G.$$

En ese mismo sentido, una representación es completamente reducible si esta es equivalente a una representación cuyos elementos de matriz pueden ser escritos en una forma diagonal por bloques de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Una representación que puede ser escrita en forma diagonal por bloques se puede entender como la suma directa de las subrepresentaciones $D_j(g)$, esto es

$$D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$$

En adición a esto se dice que una representación es irreducible (irrep) si esta no es reducible. En la matriz anterior, los elementos de la diagonal son representaciones irreducibles; entonces, es posible afirmar que una representación completamente reducible puede ser descompuesta en una suma directa de representaciones irreducibles. En Física de partículas frecuentemente se emplea la notación $\mathbf{3}$ para denotar a las representaciones irreducibles de un grupo de simetría en donde el número indica la dimensión de la representación. Por ejemplo, en el modelo de quarks propuesto por Murray Gell-Mann, los Mesones están compuestos por un par quark-anti-quark quienes pueden portar tres cargas de color distintas de modo que sus estados viven

en las representaciones $\mathbf{3}$ y $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)_c$ respectivamente. Entonces, todos los mesones que pueden ser construidos a partir de estas representaciones de $SU(3)_c$ están determinadas por

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1},$$

es decir, se tiene un octete y un siglete en donde se van a encontrar contenidos los estados de diferentes tipos de mesones. Cabe mencionar también que para obtener la descomposición de los nueve estados construidos a partir de un par de representaciones se debe seguir el método de los tableros de Young para más detalles véase [28, 29]

4.2. Grupo discreto S_3

Los grupos discretos han ganado una enorme popularidad en los últimos años pues han permitido construir extensiones de los modelos de gran unificación tradicionales que permitan dar una descripción a la posible relación existente entre la tres diferentes generaciones de fermiones o de manera equivalente, entre su diversos sabores. En donde por supuesto, bajo la acción de estas simetrías discretas estas generaciones pasarían a un contexto en el que ya no son diferentes; mas bien son equivalentes entre sí. En adición a esto, el incluir extensiones con simetrías discretas en los modelos permite reducir el número de parámetros libres lo que es una buena noticia pues modelos como el MSSM cuentan con más de 100 parámetros libres que deben ser ajustados para estar en buen acuerdo con los resultados experimentales. Se han hecho investigaciones en modelos extendidos con simetrías discretas tales como S_3 , S_4 , A_4 , Q_6 , etc. La selección de un grupo u otro depende de las representaciones irreducibles que contenga cada grupo. En este trabajo nos vamos a centrar en la extensión del grupo grupo $SU(5)$ con una simetría discreta S_3 , esto debido a que es un grupo bastante pequeño y a que contiene dobletes y singletes como sus irreps. Por esta razón a continuación se hará una breve revisión del grupo S_3 .¹

El grupo discreto no-abeliano S_3 hace referencia a la permutación entre tres elementos tales como $\{x_1, x_2, x_3\}$, a cada permutación posible se le va a asociar una etiqueta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_1, x_2, x_3\}, \\ a_1 : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_2, x_1, x_3\}, \\ a_2 : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_3, x_2, x_1\}, \\ a_3 : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_1, x_3, x_2\}, \\ a_4 : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_3, x_1, x_2\}, \\ a_5 : \{x_1, x_2, x_3\} &\rightarrow \{x_2, x_3, x_1\}. \end{aligned}$$

Esto indica que el grupo tiene seis elementos; no obstante, no todos estos elementos son independientes unos de otros pues es posible obtener algunas permutaciones a partir de operaciones consecutivas de las demás. Por ejemplo se pueden encontrar las relaciones

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= a_5, \\ a_2 a_1 &= a_4, \\ a_4 a_2 &= a_3. \end{aligned}$$

De donde se ha conseguido reducir a tres el número de elementos independientes. Si además definimos $a_1 = a$ y $a_2 = b$, entonces los seis elementos del grupo pueden ser

¹Una revisión de los demás grupos discretos mencionados y muchos otros más se puede encontrar en [30]

escritos de la siguiente manera

$$\{e, a, b, ab, ba, bab\},$$

nótese que $bab = aba$. Gracias a esto es posible identificar a los generadores del grupo S_3 , los cuales son a y b .

Se puede mostrar que los elementos del grupo satisfacen las relaciones

$$a^2 = b^2 = (bab)^2 = 1, \quad (4.1a)$$

$$(ab)^3 = (ba)^3 = 1. \quad (4.1b)$$

Esto permite agrupar los elementos del grupo en tres tipos de transformaciones, i. e., aplicar rotaciones o reflexiones. Estas agrupaciones son conocidas como clases de conjugación y tienen la siguiente forma

$$C_1 : \{e\}, \quad C_2 : \{ab, ba\}, \quad C_3 : \{a, b, bab\},$$

el subíndice indica el número de elementos en cada clase. Las ecs. (4.1) son importantes pues más adelante permitirán encontrar isomorfismos con algunas variantes especiales del grupo conocido como *grupo modular*.

En teoría de grupos, el número de irreps es igual al número de clases de conjugación y además existe una relación de ortogonalidad que puede ser usada para obtener un sistema de ecuaciones y con ello determinar la dimensión de las irreps del grupo. Dicho sistema de ecuaciones resulta ser

$$\sum_n m_n = 3,$$

$$\sum_n m_n n^2 = 6,$$

en donde m_n indica el número de representaciones irreducibles de dimensión n . La única solución que satisface el sistema de ecuaciones anterior es $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, lo que indica que hay dos irreps en S_3 ; esto es, dos singletes y un doblete. Estas irreps nos permitirán acomodar a las generaciones de quarks y leptones cargados en el modelo de gran unificación extendido.

Con el fin de encontrar una representación específica para los generadores del grupo discreto se va a suponer que a está dado por

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

empleando las ecuaciones (4.1) se puede escribir a b como

$$b = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

en donde θ es un ángulo. A partir de estas definiciones, los elementos restantes del grupo adquieren la forma

$$bab = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad ab = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En particular consideremos que $\theta = 4\pi/3$, de modo que en la representación que se acaba de proponer se va a tener que

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$ab = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad bab = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, es importante conocer las reglas bajo las cuales operan los productos entre las distintas irreps de S_3 puesto que esto nos ayudará a desarrollar los productos entre irreps incluidas en el sector de Yukawa del superpotencial del modelo de gran unificación. Entonces, bajo la representación que se acaba de escoger las reglas de los productos para dos dobles $x = \{x_1, x_2\}$ y $y = \{y_1, y_2\}$ están dadas de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_2 = (x_1y_1 + x_2y_2)_1 \oplus (x_1y_2 - x_2y_1)_{1'} \oplus \begin{pmatrix} (x_1y_2 + x_2y_1) \\ (x_1y_1 - x_2y_2) \end{pmatrix}_2, \quad (4.2a)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 \otimes (y)_{1'} = \begin{pmatrix} -x_2y \\ x_1y \end{pmatrix}_2, \quad (4.2b)$$

$$(x)_{1'} \otimes (y)_{1'} = (xy)_1. \quad (4.2c)$$

En estas expresiones 1 y 1' son singletes simétrico y antisimétrico respectivamente, mientras que 2 es un doblete.

4.3. Grupo modular

El grupo modular ha sido muy empleado en áreas como la teoría de cuerdas al estudiar branas magnetizadas, compactificación en orbifolds, etc. En Física más allá del Modelo Estándar se han desarrollado algunos trabajos en donde se ha encontrado que el incluir simetrías modulares ayuda a reducir el espacio de parámetros aún más que solo usando simetrías discretas. En este trabajo se busca incluir una simetría modular a través del isomorfismo existente entre el grupo modular finito Γ_2 y S_3 . A continuación se hará una breve revisión sobre las propiedades importantes del grupo modular y sus variantes así como también, su relación con S_3 y la construcción de las formas modulares; quienes más adelante permitirán construir de manera simple un potencial invariante modular.

Propiamente, el grupo modular se define como

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}. \quad (4.3)$$

Alternativamente, este grupo también se puede definir como una transformación que actúa sobre un número complejo, τ , conocido como módulo la cual tiene el efecto

$$\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad ad - bc = 1.$$

Nótese que las matrices $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ y $-\mathbf{1}_{2 \times 2}$ conducen a la misma transformación del módulo. Por lo que las transformaciones asociadas a γ forman el grupo inhomogéneo

$$\bar{\Gamma} \equiv PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\mathbf{1}_{2 \times 2}\}.$$

Este grupo es generado por las transformaciones

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau},$$

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1,$$

quienes en términos de matrices 2×2 corresponden a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos son los generadores del grupo y deben satisfacer que $S^2 = 1$ y $T^2 = 1$. Se puede mostrar que este grupo modular actúa sobre la mitad superior del plano complejo. A partir de la definición (4.3) es posible definir otros subgrupos conocidos como subgrupos de congruencia o grupos de congruencia principal homogéneos de nivel N , quienes van a estar definidos como

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (4.4)$$

A su vez, a partir de la definición anterior se puede construir una transformación que actúe sobre el módulo análoga a γ cuyas matrices generadoras van a pertenecer a

$$\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N) / \{ \mathbf{1}_{2 \times 2}, -\mathbf{1}_{2 \times 2} \}.$$

Una vez que contamos con estas definiciones, podemos definir al grupo modular finito como

$$\Gamma_N = \bar{\Gamma} / \bar{\Gamma}(N).$$

Debido a la condición impuesta en las entradas de las matrices definidas en (4.4) surge una nueva condición que deben satisfacer los generadores. Esta condición en adición a las ya mencionadas con anterioridad estarán dadas por

$$S^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \quad T^N = 1. \quad (4.5)$$

A partir de estas relaciones con $N = 2$ se puede encontrar un mapeo tal que

$$\rho(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y que además siga preservando las relaciones (4.5). Estas matrices corresponden a los generadores de S_3 , a y b respectivamente. De esta manera se puede notar que S_3 es isomorfo al grupo modular finito Γ_2 y es aquí en donde se hará uso de este resultado para poder construir la simetría de sabor de nuestro modelo de gran unificación en capítulos posteriores. Así mismo, es importante destacar que existen isomorfismos entre algunos otros grupos modulares finitos y ciertos grupos discretos no abelianos quienes también pueden ser candidatos potencialmente viables como simetrías de sabor [31, 32]. Estos isomorfismos son

$$\Gamma_3 \simeq A_4, \quad \Gamma_4 \simeq S_4, \quad \Gamma_5 \simeq A_5.$$

Para $N > 5$ se vuelve más complicado encontrar isomorfismos entre los diferentes grupos. En este mismo, sentido se puede intentar explorar alguna clase de isomorfismo en entre otros grupos discretos y la doble cubierta de los grupos modulares finitos, Γ'_N [33].

Por otra parte, existen ciertas funciones holoformas en el plano complejo que bajo la acción del grupo modular Γ transforman como

$$f(\gamma(\tau)) \rightarrow (c\tau + d)^k f(\tau),$$

quienes son conocidas como formas modulares de peso k , el factor extra que resulta de la transformación es conocido como factor de automorfía. Como se mencionó hace algunos párrafos, la matriz identidad y su negativo conducen a la misma transformación para el módulo en el grupo modular inhomogéneo; para que esto se cumpla k debe ser un entero par. Esto no sucede en general para el grupo definido en (4.4) pues $-\mathbf{1}_{2 \times 2}$ no es un elemento de este grupo.

El uso de las formas modulares va a cobrar relevancia más adelante a medida que se construya el modelo y en concreto al construir el potencial a partir del cual se comience a hacer el análisis. A medida que se añaden más simetrías, se restringe la cantidad parámetros y la forma algebraica de los términos que se puedan incluir en el potencial. Por el momento y en lo que resta de este capítulo, nos centraremos en construir algunas formas modulares que serán útiles después.

Por motivos que serán evidentes más adelante en el estudio, es necesario contar con un conjunto de formas modulares que transformen bajo las irreps de S_3 , i. e., en dobles y singletes. El procedimiento que será expuesto a continuación fue extraído de un trabajo de Ferruccio Feruglio [23] quien es pionero en la aplicación de los grupos modulares en "la Física del sabor".

Para construir las formas modulares de pesos específicos se suele recurrir a algunos candidatos de los cuales se sabe de antemano que transforman como formas modulares con un cierto peso modular fijo. Por ejemplo, la expresión

$$\frac{d}{d\tau} \log \left[\sum_i f_i(\tau) \right],$$

transforma como una forma modular de peso dos si se cumple que $\sum_i k_i = 0$. En donde cada $f_i(\tau)$ es una forma modular de peso k_i .

Otra función que resulta ser muy útil para construir formas modulares es la función η de Dedekind, quien está definida como

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n),$$

donde $q = e^{2\pi i\tau}$. Esta función es muy empleada pues bajo la acción de los generadores S y T sobre el módulo se obtiene un álgebra cerrada. Esto es, bajo $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ se pueden determinar las siguientes transformaciones

$$\eta(2\tau) \rightarrow e^{i\pi/6} \eta(2\tau), \quad \eta(\tau/2) \rightarrow \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right), \quad \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) \rightarrow e^{i\pi/12} \eta(\tau/2).$$

Mientras que bajo $S : \tau \rightarrow -1/\tau$ se obtiene que

$$\eta(2\tau) \rightarrow \sqrt{\frac{-i\tau}{2}} \eta(\tau/2), \quad \eta(\tau/2) \rightarrow \sqrt{-i3\tau} \eta(\tau/2), \quad \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) \rightarrow e^{-i\pi/12} \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right).$$

A partir de estos resultados, la forma modular más general que se puede construir en términos de la función η de Dedekind es una combinación lineal de las funciones antes mencionadas

$$Y(\alpha, \beta, \gamma|\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\alpha \log \eta\left(\frac{\tau}{2}\right) + \beta \log \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) + \gamma \log \eta(2\tau) \right). \quad (4.6)$$

Para que la expresión (4.6) corresponda a una forma modular de peso dos se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ S : Y(\gamma, \beta, \alpha|\tau) &\rightarrow \tau^2 Y(\gamma, \beta, \alpha|\tau), \\ T : Y(\gamma, \beta, \alpha|\tau) &\rightarrow Y(\beta, \alpha, \gamma|\tau). \end{aligned}$$

En este punto es importante recordar que $\Gamma_2 \simeq S_3$, por lo que es necesario utilizar la representación para los generadores S y T , $\rho(S)$ y $\rho(T)$, que coincide con los generadores de S_3 la cual fue mostrada con anterioridad. Gracias a esto nos es posible definir un doblete de S_3 como $Y_2(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau))^T$, en donde

$$Y_1(\tau) = Y(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1|\tau), \quad Y_2(\tau) = Y(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2|\tau). \quad (4.7)$$

De este modo, las condiciones anteriores se reescriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ S : Y_2(\tau) &\rightarrow Y_2(-1/\tau) = \tau^2 \rho(S) Y_2(\tau), \\ T : Y_2(\tau) &\rightarrow Y_2(\tau + 1) = \rho(T) Y_2(\tau). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Este conjunto de ecuaciones nos va a permitir establecer relaciones entre los coeficientes α_i , β_i y γ_i que permitirán determinar cada uno de estos. Bajo la acción de T , la transformación correspondiente a la primera componente del doblete se puede expresar como

$$\frac{d}{d\tau} \left([\alpha_1 + \beta_1] \log \eta \left(\frac{\tau}{2} \right) + [\alpha_1 + \beta_1] \log \eta \left(\frac{\tau + 1}{2} \right) + 2\gamma_1 \log \eta(2\tau) \right) = 0.$$

Cada una de las funciones en la expresión anterior son independientes entre si, por lo que la única solución a la ecuación anterior es $\beta_1 = -\alpha_1$ y $\gamma_1 = 0$. Sustituyendo en (4.7)

$$Y_1(\tau) = \alpha_1 Y(1, -1, 0|\tau).$$

Mediante un procedimiento análogo al anterior y utilizando las expresiones (4.7) y (4.8) se puede determinar que

$$Y_2(\tau) = \alpha_2 Y(1, 1, -2|\tau),$$

y que $\alpha_1 = \sqrt{3}\alpha_2$. En vista de estos resultados, las formas modulares de peso dos que transforman como un doblete de S_3 estarán dadas por

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{\sqrt{3}i}{4\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/2)}{\eta(\tau/2)} - \frac{\eta'((\tau+1)/2)}{\eta((\tau+1)/2)} \right), \\ Y_2(\tau) &= \frac{i}{4\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/2)}{\eta(\tau/2)} + \frac{\eta'((\tau+1)/2)}{\eta((\tau+1)/2)} - 8 \frac{\eta'(2\tau)}{\eta(2\tau)} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

en donde la prima indica derivada respecto al módulo y se consideró que $\alpha_2 = i/2\pi$. Más adelante en el estudio será muy útil contar con formas modulares de peso cuatro que transformen como singletes y dobletes de S_3 , por lo que es necesario construir las. Sin embargo ya no es necesario repetir el procedimiento anterior pues podemos emplear el resultado (4.9) y aprovechar la relación (4.2a) de la siguiente manera

$$Y_2^{(2)} \otimes Y_2^{(2)} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}_2 = Y_1^{(4)} + \begin{pmatrix} Y_1^{(4)} \\ Y_2^{(4)} \end{pmatrix}_2 \equiv Y_1^{(4)} + Y_2^{(4)},$$

donde se ha identificado

$$Y_1^{(4)} = Y_1^2 + Y_2^2, \quad Y_1^{(4)} = 2Y_1Y_2, \quad Y_2^{(4)} = Y_1^2 - Y_2^2. \quad (4.10)$$

En estas expresiones, el subíndice en negritas indica de que irrep de S_3 se trata mientras que el superíndice en paréntesis indica el peso modular.

Para realizar evaluaciones explícitas y cálculos numéricos con las formas modulares,

puede resultar conveniente recurrir a las expansiones en series de potencias de las relaciones (4.9) dadas por

$$Y_1(\tau) = \frac{1}{8} + 3q + 3q^2 12q^3 + 3q^4 + \cdots ,$$
$$Y_2(\tau) = \sqrt{3}q^{1/2} (1 + 4q + 6q^2 + 8q^3 + \cdots) .$$

CAPÍTULO 5

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO $SUSYSU(5) \times S_3$ MODULAR

5.1. Modelos multi-Higgs

En sus inicios la teoría electrodébil presentaba un problema importante el cual era dotar de masa a los fermiones quirales sin violar la simetría de norma. Esto permaneció como un problema abierto durante algún tiempo hasta que se introdujo el mecanismo de ruptura espontánea de simetría, del cual ya se habló anteriormente. Algunos años más tarde se publicó una serie de trabajos en los que se propuso el mecanismo de Higgs o mecanismo de Brout-Englert-Higgs [7, 8]. Este mecanismo consiguió reproducir muy bien los datos reportados en los experimentos, sin embargo, no podía ser el mecanismo definitivo pues no conseguía reproducir las masas de los neutrinos.

Por este y otros motivos, se comenzó a trabajar en maneras de extender este sector escalar de Higgs pues las interacciones de norma no requieren que este sector sea mínimo. Además, no hay razones fundamentales que indiquen que solo debe existir un Higgs en la naturaleza por lo que podría haber más [34].

Las primeras propuestas ampliamente estudiadas fueron los modelos con dos dobletes de Higgs (2HDMs, por sus siglas en inglés) estas son una versión más rica que el MSSM por si solo, sin embargo esta clase de modelos enfrentan severos problemas fenomenológicos con las corrientes neutras que cambian el sabor (FCNCs). Para enfrentar esta clase de problemas se introdujo simetrías adicionales a los 2HDMs, esto ayudó a imponer restricciones en el potencial de Higgs lo cual trajo posibles soluciones a algunos problemas como el ya mencionado [35].

A partir de los resultados obtenidos se propuso una generalización que conlleva a los modelos NHDMs sin embargo esto resultó ser complicado de tratar. El siguiente caso, los modelos con tres dobletes de Higgs (3HDMs, por sus siglas en inglés) parecen ser muy prometedores pues, para empezar, esta es la extensión inmediata más simple de los 2HDMs además de que los 3HDMs son mucho más manejables que los modelos con N dobletes. Además, se cree que los 3HDMs podrían arrojar algo de luz en el problema del sabor ya que podría darse el caso de que las tres familias de quarks y leptones sean descritas por las mismas simetrías del sector de Higgs.

Sin embargo, a pesar del entendimiento y los problemas que se han conseguido resolver mediante el estudio de estos modelos multi-Higgs, aún quedan otros inconvenientes por atender. Algunos de ellos hacen referencia a la falta de conocimiento de una clasificación de las posibles simetrías para incluir simetrías continuas que a su vez permitan extender los modelos y de este modo evitar problemas con las FCNCs. En ese mismo sentido, falta por conocer los posibles patrones de rompimiento del

estado de vacío para cada grupo de simetría, etc. [35].

Por otra parte, es importante mencionar también que los modelos multi-Higgs tienen efectos importantes en la evolución de parámetros como los acoplamientos de Yukawa y los acoplamientos de norma. De tal modo que el sector de Higgs podría impedir la unificación de las interacciones. En [36, 37] se detalla un estudio sobre las restricciones que impone el incluir más de un doblete de Higgs en los modelos $SU(5)$ y $SO(10)$ para los casos supersimétrico y no supersimétrico.

5.2. Contenido de materia del modelo

Para construir una teoría de gran unificación es necesario asegurarse en un principio que los acoplamientos de norma adopten el mismo valor en un cierto punto en su evolución, tal y como sucede en el MSSM. Sin embargo, al introducir grupos de simetría más grandes que extiendan al grupo del SM es natural preguntarse sobre como las diferentes irreps del SM son incorporadas en las irreps del grupo de simetría de la teoría unificada. A continuación se procederá a hacer un análisis de las diferentes irreps, para ello se introduce la notación $(r_1, r_2)_q$ en donde r_1 corresponde a una representación de $SU(3)_C$, r_2 es una representación de $SU(2)_L$ y q la carga bajo $U(1)$; en este último se considerará una normalización de la carga en contraste con $U(1)_Y$, esto con el fin de obtener cargas enteras para todas las representaciones. Bajo dicha notación, los campos de materia del MSSM transforman bajo las simetrías mencionadas como

$$\begin{aligned} Q &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-1}, \quad L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_3, \\ u_R &\sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_4 \quad d_R \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2}, \quad e_R \sim (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1})_{-6}, \\ H_d &\sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_3, \quad H_u \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-3}, \end{aligned}$$

de aquí se puede notar que la carga de $U(1)$ difiere de la de $U(1)_Y$ por un factor de -6 . A su vez, los bosones de norma del SM se transforman como

$$G \sim (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0, \quad W \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0, \quad B \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0.$$

Como se mencionó en capítulos anteriores, los modelos de gran unificación se han propuesto con el fin de dar alguna clase de respuesta a las preguntas que el SM ha dejado abiertas. Existen muchas propuestas sin embargo las más conocidas son los modelos $SU(5)$ y $SO(10)$ [2]. Cada uno de ellos tiene sus propios problemas y ventajas, sin embargo, en este estudio únicamente nos centraremos en el grupo de norma $SU(5)$ pues es la extensión inmediata más simple al grupo de norma del SM. Es decir, al romper $SU(5)$ se puede llegar inmediatamente al grupo de norma del SM. Contrario a lo que sucede, por ejemplo, con $SO(10)$ en donde existen múltiples cadenas de rompimiento para llegar al SM; cada una de las cuales tiene efectos importantes en la fenomenología a bajas energías.

Además, cualquier grupo que aspire a formar parte de una teoría de gran unificación debe satisfacer algunas características para poder ser considerado como una extensión realista al SM. Estas son, dicho grupo tiene que contener como subgrupo al grupo de norma del SM, además, debe ser un grupo simple y debe tener representaciones complejas que reproduzcan la estructura quiral del SM [2, 28]; $SU(5)$ satisface todas estas condiciones. Este modelo fue propuesto por primera vez por Georgi y Glashow y su fenomenología ha sido muy estudiada en el caso mínimo y supersimétrico.

Ahora procedamos a estudiar como se acomodan a las partículas del SM en las irreps de $SU(5)$. En la representación 24 se pueden incluir a los bosones de norma de la

siguiente manera

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-5} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_5,$$

en donde la primer representación hace referencia a los ocho gluones, la segunda a los bosones W^\pm y Z^0 , la tercera al fotón y las dos últimas hacen referencia a nuevos bosones vectoriales que dan origen a la aparición de partículas conocidas como Lep-toquarks las cuales adquieren una masa del orden de M_{GUT} luego del rompimiento espontáneo del grupo de simetría $SU(5)$. Sin embargo en este estudio se ignorará la contribución de este tipo de partículas con el fin de hacer que el análisis sea más simple. El rompimiento de $SU(5)$ al grupo de norma del SM puede ser llevado a cabo al incluir un campo de Higgs adicional dentro de una representación $\mathbf{24}$ en la dirección de la hipercarga [13, 28].

En cuanto al contenido de fermiones de materia, estos pueden ser incluidos en las representaciones $\bar{\mathbf{5}}$ y $\mathbf{10}$ de $SU(5)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{5}} &= (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_3 \equiv d^c + L, \\ \mathbf{10} &= (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-1} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_4 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-6} \equiv Q + u^c + e^c.\end{aligned}$$

en donde el superíndice c indica campo CP conjugado haciendo referencia a los campos con quiralidad derecha. La representación $\bar{\mathbf{5}}$ suele ser modelada como un vector de cinco entradas F de la siguiente manera ¹

$$\bar{\mathbf{5}} \leftrightarrow F = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L, \quad (5.1)$$

en donde los subíndices 1, 2, 3 son índices de color. La representación $\mathbf{10}$ se puede visualizar como una matriz antisimétrica de 5×5 , $T_{\alpha\beta}$, de la siguiente manera

$$\mathbf{10} \leftrightarrow T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix}_L. \quad (5.2)$$

En adición a esto, se puede incluir a los dos dobletes de Higgs del MSSM, H^u , H^d en un par de representaciones $\mathbf{5}$ y $\bar{\mathbf{5}}$ respectivamente; esto para cancelar algunas anomalías provenientes de algunos diagramas a un lazo. La representación de Higgs, $\mathbf{5}$ puede ser modelada como

$$H^u = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1^u \\ \mathbf{H}_2^u \\ \mathbf{H}_3^u \\ h^{+u} \\ h^{0u} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

¹La manera en como se escriben estas representaciones a menudo depende de las convenciones establecidas para representar a los dobletes de $SU(2)$. En esta tesis se optará por seguir la convención de [2, 38]

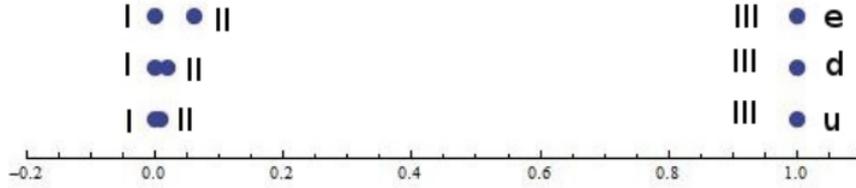


Figura 5.1: La diferencia entre las razones de las masas de las tres familias de fermiones es muy pronunciada si se expresa en escala logarítmica.

en donde las tres primeras componentes son un triplete de $SU(3)$ sensible a la interacción fuerte las cuales tienen efectos sobre la mediación del decaimiento del protón, posibles soluciones se muestran en [39]. Mientras que las dos últimas componentes transforman como el doblete electrodébil bien conocido. Una expresión semejante se tiene para H^d .

Alternativamente, los Higgs también pueden ser incluidos en representaciones 45 y $\bar{45}$ sin embargo este caso no será abordado en este estudio. Para más detalles sobre la representación 45 consulte [29, 40].

El modelo bajo estudio en este trabajo es una extensión del modelo mínimo $SU(5)$ incluyendo Supersimetría y una simetría S_3 – Modular que juega el papel de una simetría de sabor. Estrictamente hablando, el grupo modular en cuestión corresponde al grupo modular finito Γ_2 el cual como se mencionó en la sección 4.3 es isomorfo a S_3 . En adición a esto, se propone un sector de Higgs extendido con seis dobletes pues, como se hizo mención en la sección anterior, los modelos con tres dobletes conducen a una fenomenología más rica en contraste con los 2HDM. Sin embargo, puesto que se está incluyendo Supersimetría; esto implica que los Higgs deben ir en parejas tal y como se mencionó en el capítulo 3 para el caso del MSSM. Esto da como resultado un modelo con seis dobletes de Higgs.

Los campos de Higgs adicionales serán incluidos en representaciones 5 y $\bar{5}$ de $SU(5)$ de la misma manera en como se presentó la expresión (5.3) pero con la diferencia de que ahora se incluirá un nuevo índice, H_i^u y H_i^d con $i = 1, 2, 3$, para etiquetar a cada campo de Higgs.

Respecto a la simetría S_3 , se va a pedir que las dos primeras familias de fermiones contenidas en representaciones definidas en (5.1) y (5.2) se transformen como un doblete de S_3 . Esto debido a que la diferencia entre las masas de las primeras dos familias de fermiones es mucho menor en comparación con la de la tercera familia (ver Fig. 5.1). En ese mismo sentido, se va a pedir que la tercera familia se transforme como un singlete antisimétrico debido a que esta elección conduce a matrices de masas más adecuadas para estudiar la fenomenología [41]. De este modo, dicha clasificación se propone con el fin de reproducir la jerarquía de masas de los quarks que se presenta en el SM.

Por otra parte, al igual que con los fermiones; los primeros dos pares de Higgs tipo u y Higgs tipo d van a transformar como dobletes de S_3 . Mientras que el par restante se transformará como un singlete simétrico cada uno. En adición a esto, también se tiene al grupo modular finito Γ_2 . En lo que respecta a este grupo, se va a permitir que los campos de partículas se transformen como formas modulares de tal modo que esto permita la construcción de un potencial invariante ante esta simetría. En donde la fuente del rompimiento de la simetría de sabor viene del vev del campo modular τ , a diferencia de otros modelos en donde la ruptura de la simetría de sabor viene de la introducción de un conjunto de multipletes escalares conocidos como *flavons* [23, 38]. Es importante recalcar que los campos no serán formas modulares pues, como se

mencionó en su momento, las formas modulares transforman con un peso modular positivo y par. En ese mismo sentido, se debe aclarar que las formas modulares tal y como se han definido en el capítulo anterior no hacen referencia a campos fundamentales, realmente son funciones de un campo modular τ en donde este tiene su propia dinámica la cual está contenida en los términos cinéticos provenientes del potencial de Kähler. Sin embargo, en este trabajo no se abordará este tema.

La asignación de pesos modulares y la clasificación de partículas dentro de las diferentes representaciones del grupo de simetría de modelo se encuentran resumidas en la siguiente tabla

Field	$SU(5)$	S_3	k
(H_1^d, H_2^d)	$\bar{5}$	2	0
H_3^d	$\bar{5}$	1	0
(H_1^u, H_2^u)	5	2	0
H_3^u	5	1	0
(F_1, F_2)	$\bar{5}$	2	-2
F_3	$\bar{5}$	1'	0
(T_1, T_2)	10	2	-2
T_3	10	1'	0
$Y_2^{(2)}$	1	2	2
$Y_2^{(4)}$	1	2	4
$Y_1^{(4)}$	1	1	4

Nótese que en dicha tabla se han incluido las formas modulares de pesos dos y cuatro que transforman como dobletes y singletes de S_3 , las cuales fueron construidas en la sección 4.3, ya que estas serán de gran ayuda en la construcción del superpotencial en la siguiente sección.

5.2.1. Superpotencial

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es conseguir reproducir la jerarquía de masas de los quarks, para lograr esto necesitamos del potencial que involucra los términos de Yukawa que acoplan al sector de fermiones con el sector de Higgs extendido.

Para construir este potencial es necesario notar que expresiones de la forma $\bar{F}_i T_j \tilde{H}_k^d$ y $\bar{T}_i T_j H_k^u$, con i, j, k índices de familia, producen términos de masa para los quarks d y u respectivamente. En efecto, pues el Higgs H^d adquiere un vev de la forma

$$\langle H^d \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \mathcal{H}^d \rangle \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \langle \mathcal{H}^d \rangle = \begin{pmatrix} h^{0d} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez hecho esto se tiene que

$$\bar{F}_i T_j \langle \tilde{H}_k^d \rangle = \bar{F}_{iA} T_j^{AB} \langle \tilde{H}_k^d \rangle_B = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{d}_{iR} d_{jL} + \bar{e}_{iL} e_{jR}) h_k^{0d}, \quad (5.4)$$

en donde $A, B = 1, \dots, 5$, se ha usado que $\langle \tilde{H}^d \rangle^T = (0, i\sigma_2 \langle \mathcal{H}^d \rangle)$ y σ_2 es una de las matrices de Pauli. Este cambio en el campo de Higgs se suele hacer al construir el Lagrangiano de Yukawa para quarks tipo down o neutrinos de Dirac [41]. Se puede proceder de manera semejante con el término $\bar{T}_i T_j H_k^u$, sin embargo es necesario tener en cuenta una correcta contracción de todos los índices de $SU(5)$ para obtener términos invariantes ante esta simetría. Por ejemplo, para dicho término se tendría²

$$\bar{T}_i T_j \langle H_k^u \rangle = \epsilon_{ABCDE} \bar{T}_i^{AB} T_j^{CD} \langle H_k^u \rangle^E = 2 (\bar{u}_{iR} u_{jL} + \bar{u}_{iL} u_{jR}) h_k^{0u}, \quad (5.5)$$

²Se llega a este resultado considerando la convención en la que $\epsilon_{12345} = 1$.

luego de desarrollar las sumas correspondientes. Para más detalles sobre como se contraen los índices en las diferentes irreps de SU(5) véase [42].

Una vez que se ha conseguido obtener términos adecuados para producir las masas de las partículas y que a su vez estos son invariantes bajo el grupo de norma, es necesario asegurar que el potencial que se construya sea invariante ante las demás simetrías propuestas en el modelo. Como se mencionó anteriormente, una de ellas es el grupo modular finito Γ₂. Con el objetivo de construir un potencial invariante ante esta simetría recordemos que los campos se van a transformar como formas modulares con un cierto peso k . De esta manera, esquemáticamente, los términos $\bar{F}T\tilde{H}^d$ y $\bar{T}TH^u$ transforman como

$$\begin{aligned}\bar{F}T\tilde{H}^d &\rightarrow (c\tau + d)^{-4}\bar{F}T\tilde{H}^d, \\ \bar{T}TH^u &\rightarrow (c\tau + d)^{-4}\bar{T}TH^u,\end{aligned}$$

en donde se ha definido a los dobletes de S₃ como $F^T = (F_1, F_2)$ y $T^T = (T_1, T_2)$. En la expresión anterior los pesos modulares de la transformación de cada representación se suman y para que dichos términos sean invariantes es necesario cancelar de alguna manera el factor extra que depende de τ . Para llevar acabo esta tarea se introducen las formas modulares. Si por ejemplo, se recurre a la forma modular $Y_1^{(4)}$ se tiene ahora la siguiente transformación

$$\begin{aligned}Y_1^{(4)}\bar{F}T\tilde{H}^d &\rightarrow Y_1^{(4)}\bar{F}T\tilde{H}^d, \\ Y_1^{(4)}\bar{T}TH^u &\rightarrow Y_1^{(4)}\bar{T}TH^u,\end{aligned}$$

es decir, los términos permanecen invariantes. Siguiendo esta idea, el potencial más general que se puede construir y que además es invariante modular está dado por

$$\begin{aligned}W &= \sqrt{2}\left(y_1^d Y_1^{(4)} + y_2^d Y_2^{(4)}\right) \otimes \bar{F} \otimes T \otimes H_3^d + \sqrt{2}y_3^d Y_2^{(2)} \otimes \bar{F} \otimes T_3 \otimes H^d \\ &+ \sqrt{2}y_4^d Y_2^{(2)} \otimes \bar{F}_3 \otimes T \otimes H^d + \sqrt{2}y_5^d \bar{F}_3 \otimes T_3 \otimes H_3^d \\ &+ \frac{1}{4}\left(y_1^u Y_1^{(4)} + y_2^u Y_2^{(4)}\right) \otimes \bar{T} \otimes T \otimes H_3^u + \frac{1}{4}y_3^u Y_2^{(2)} \otimes \bar{T} \otimes T_3 \otimes H^u \\ &+ \frac{1}{4}y_4^u Y_2^{(2)} \otimes \bar{T}_3 \otimes T \otimes H^u + \frac{1}{4}y_5^u \bar{T}_3 \otimes T_3 \otimes H_3^u + h.c.,\end{aligned}\tag{5.6}$$

en donde los coeficientes y_i^u y y_j^d son en general números complejos. A pesar de que el potencial [5.6] es invariante modular, este no necesariamente es invariante ante S₃. Con el objetivo de construir un potencial que también respete esta simetría es necesario realizar los productos entre las diferentes irreps de S₃ que están involucradas haciendo uso de las expresiones [4.2]. Para mostrar como funciona esto, hagamos el desarrollo del primer término de [5.6] omitiendo los coeficientes

$$\begin{aligned}Y_1^{(4)} \otimes \bar{F} \otimes T \otimes H_3^d &= Y_1^{(4)} \otimes \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}_2 \otimes (H_3^d)_1 = Y_1^{(4)} \otimes \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} T_1 H_3^d \\ T_2 H_3^d \end{pmatrix}_2 \\ &= Y_1^{(4)} \otimes \left[\begin{pmatrix} \bar{F}_1 T_1 H_3^d + \bar{F}_2 T_2 H_3^d \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} \bar{F}_1 T_2 H_3^d - \bar{F}_2 T_1 H_3^d \end{pmatrix}_{1'} + \begin{pmatrix} \bar{F}_1 T_2 H_3^d + \bar{F}_2 T_1 H_3^d \\ \bar{F}_1 T_1 H_3^d - \bar{F}_2 T_2 H_3^d \end{pmatrix}_2 \right] \\ &= \left[Y_1^{(4)} (\bar{F}_1 T_1 + \bar{F}_2 T_2) H_3^d \right]_1 + \left[Y_1^{(4)} (\bar{F}_1 T_2 - \bar{F}_2 T_1) H_3^d \right]_{1'} + \begin{pmatrix} Y_1^{(4)} (\bar{F}_1 T_2 + \bar{F}_2 T_1) H_3^d \\ Y_1^{(4)} (\bar{F}_1 T_1 - \bar{F}_2 T_2) H_3^d \end{pmatrix}_2,\end{aligned}$$

es importante recalcar que cada representación F_i, T_i y H_i tiene asignado un peso modular acorde a la tabla presentada con anterioridad. En vista del desarrollo anterior,

para que el potencial (5.6) sea invariante ante S_3 únicamente se va a tomar en consideración los términos que transforman como singletes; por lo que solo va a sobrevivir el primer término en la última igualdad de la expresión anterior.

Al aplicar este procedimiento a cada uno de los términos de (5.6) se obtiene que el potencial que es invariante ante $S_3 \times \Gamma_2$ está dado por

$$\begin{aligned}
W = & \sqrt{2}y_1^d Y_1^{(4)} (\bar{F}_1 T_1 + \bar{F}_2 T_2) H_3^d + \sqrt{2}y_2^d [2Y_1 Y_2 (\bar{F}_1 T_2 + \bar{F}_2 T_1) + (Y_1^2 - Y_2^2) (\bar{F}_1 T_1 - \bar{F}_2 T_2)] H_3^d \\
& + \sqrt{2}y_3^d [(Y_1 \bar{F}_1 T_3 - Y_2 \bar{F}_2 T_3) H_1^d - (Y_1 \bar{F}_2 T_3 + Y_2 \bar{F}_1 T_3) H_2^d] \\
& + \sqrt{2}y_4^d [(-Y_2 \bar{F}_3 T_2 + Y_1 \bar{F}_3 T_1) H_1^d - (Y_2 \bar{F}_3 T_1 + Y_1 \bar{F}_3 T_2) H_2^d] + \sqrt{2}y_5^d \bar{F}_3 T_3 H_3^d \\
& + \frac{1}{4}y_1^u Y_1^{(4)} (\bar{T}_1 T_1 + \bar{T}_2 T_2) H_3^u + \frac{1}{4}y_2^u [2Y_1 Y_2 (\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) + (Y_1^2 - Y_2^2) (\bar{T}_1 T_1 - \bar{T}_2 T_2)] H_3^u \\
& + \frac{1}{4}y_3^u [(Y_1 \bar{T}_1 T_3 - Y_2 \bar{T}_2 T_3) H_1^u - (Y_1 \bar{T}_2 T_3 + Y_2 \bar{T}_1 T_3) H_2^u] \\
& + \frac{1}{4}y_4^u [(-Y_2 \bar{T}_3 T_2 + Y_1 \bar{T}_3 T_1) H_1^u - (Y_2 \bar{T}_3 T_1 + Y_1 \bar{T}_3 T_2) H_2^u] + \frac{1}{4}y_5^u \bar{T}_3 T_3 H_3^u + h.c. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Es importante recordar que SUSY debe ser rota mediante la introducción de los términos de rompimiento suave como se mencionó en el capítulo 3, así que estos términos deberían ser incluidos en un estudio completo del potencial de Yukawa y del potencial escalar, sin embargo esto no será incluido en este primer análisis. A su vez, no se hará una revisión del potencial escalar pues las condiciones de minimización que surgen van a ser un caso particular de las relaciones que se encontrarán posteriormente al analizar los ceros de textura en las matrices de masa. A partir del potencial (5.7) ya es posible comenzar a estudiar un poco de la fenomenología que predice el modelo. Para ello es necesario construir las matrices de masa, esto se llevará a cabo en la siguiente sección.

5.2.2. Matrices de masa y matrices de Yukawa

El objetivo de esta sección es determinar las masas de los quarks que predice el modelo. Para conseguirlo es necesario contar primero con las matrices de Yukawa, las cuales contienen codificada la información del acoplamiento entre el sector de Higgs extendido y el sector de fermiones. Si se quiere llevar a cabo este cálculo resulta conveniente reescribir las expresiones (5.1), (5.2) y (5.3) como

$$(F)_A = \begin{pmatrix} (d^c)_a \\ (\epsilon L)_\alpha \end{pmatrix}_L, \quad (H^u)_A = \begin{pmatrix} (\mathbf{H}^u)_a \\ (\mathcal{H}^u)_\alpha \end{pmatrix}, \quad (H^d)_A = \begin{pmatrix} (\mathbf{H}^d)_a \\ (\epsilon \mathcal{H}^d)_\alpha \end{pmatrix}, \quad (T)_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon_{abc}(u^c)_c & (Q)_{a\beta}^T \\ -(Q)_{\alpha b} & \epsilon_{\alpha\beta} e^c \end{pmatrix}_L, \quad (5.8)$$

en donde se ha definido

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}^u = \begin{pmatrix} h^{+u} \\ h^{0u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}^d = \begin{pmatrix} h^{0d} \\ h^{-d} \end{pmatrix}.$$

Además, los índices en mayúsculas toman los valores $A = a, \alpha$ con los índices en minúsculas $a = 1, 2, 3$ y los índices griegos $\alpha = 4, 5$. A su vez, $\epsilon = i\sigma_2$ y se han establecido las convenciones $\epsilon_{123} = 1$ y $\epsilon_{45} = 1$. Gracias a las ecuaciones (5.8) se puede obtener los resultados (5.4) y (5.5) de una manera mucho más práctica.

Tomando en cuenta (5.8) es posible reescribir a (5.7) de la siguiente manera

$$W_{\text{Yukawa}} = \bar{u}_R \mathbf{Y}_k^u Q_L \mathcal{H}_k^u + \bar{d}_R \mathbf{Y}_k^d Q_L \tilde{\mathcal{H}}_k^d + \bar{e}_R \mathbf{Y}_k^e L_L \tilde{\mathcal{H}}_k^d + h.c., \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.9)$$

en donde se han omitido los términos que acoplan a los fermiones con las componentes “coloreadas” de las representaciones de los Higgs así como también a los índices

de familia. Las matrices de Yukawa van a estar definidas como

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1^u &= \bar{y}^u \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & -Y_2 \\ Y_1 & -Y_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^u = -\bar{y}^u \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & Y_1 \\ Y_2 & Y_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{Y}_3^u &= \begin{pmatrix} y_1^u Y_1^{(4)} + y_2^u (Y_1^2 - Y_2^2) & 2Y_1 Y_2 y_2^u & 0 \\ 2Y_1 Y_2 y_2^u & y_1^u Y_1^{(4)} - y_2^u (Y_1^2 - Y_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & y_5^u \end{pmatrix}, \\
\mathbf{Y}_1^d &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_3^d Y_1 \\ 0 & 0 & -y_3^d Y_2 \\ y_4^d Y_1 & -y_4^d Y_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^d = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_3^d Y_2 \\ 0 & 0 & y_3^d Y_1 \\ y_4^d Y_2 & y_4^d Y_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{Y}_3^d &= \begin{pmatrix} y_1^d Y_1^{(4)} + y_2^d (Y_1^2 - Y_2^2) & 2Y_1 Y_2 y_2^d & 0 \\ 2Y_1 Y_2 y_2^d & y_1^d Y_1^{(4)} - y_2^d (Y_1^2 - Y_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & y_5^d \end{pmatrix}, \\
\mathbf{Y}_1^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_4^d Y_1 \\ 0 & 0 & -y_4^d Y_2 \\ y_3^d Y_1 & -y_3^d Y_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^e = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_4^d Y_2 \\ 0 & 0 & y_4^d Y_1 \\ y_3^d Y_2 & y_3^d Y_1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{Y}_3^e &= \begin{pmatrix} y_1^d Y_1^{(4)} + y_2^d (Y_1^2 - Y_2^2) & 2Y_1 Y_2 y_2^d & 0 \\ 2Y_1 Y_2 y_2^d & y_1^d Y_1^{(4)} - y_2^d (Y_1^2 - Y_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & y_5^d \end{pmatrix}, \tag{5.10}
\end{aligned}$$

con $\bar{y}^u = 1/2(y_3^u + y_4^u)$. Una vez que los Higgs adquieren un vev de la forma $\langle \mathcal{H}_i^u \rangle^T = (0, h^{0u})$ y $\langle \mathcal{H}_i^d \rangle^T = (h_i^{0d}, 0)$, mediante el mecanismo de ruptura espontánea de simetría se pueden generar términos de masa, de modo que el potencial (5.9) se reescribe como

$$W_{\text{Yukawa}} = \bar{u}_{iR}(M^u)_{ij}u_{jL} - \bar{d}_{iR}(M^d)_{ij}d_{jL} - \bar{e}_{iR}(M^e)_{ij}e_{jL} + h.c.,$$

en donde las matrices de masa están dadas por

$$\begin{aligned}
M^u &= \begin{pmatrix} \mu_1^u Y_a + \mu_2^u Y_c & Y_b \mu_2^u & Y_1 \bar{\mu}_1^u - Y_2 \bar{\mu}_2^u \\ Y_b \mu_2^u & \mu_1^u Y_a - \mu_2^u Y_c & -Y_1 \bar{\mu}_2^u - Y_2 \bar{\mu}_1^u \\ Y_1 \bar{\mu}_1^u - Y_2 \bar{\mu}_2^u & -Y_1 \bar{\mu}_2^u - Y_2 \bar{\mu}_1^u & \mu_5^u \end{pmatrix}, \\
M^d &= \begin{pmatrix} \mu_1^d Y_a + \mu_2^d Y_c & Y_b \mu_2^d & Y_1 \mu_3^d - Y_2 \mu_4^d \\ Y_b \mu_2^d & \mu_1^d Y_a - \mu_2^d Y_c & -Y_1 \mu_4^d - Y_2 \mu_3^d \\ Y_1 \mu_5^d - Y_2 \mu_6^d & -Y_1 \mu_6^d - Y_2 \mu_5^d & \mu_7^d \end{pmatrix}, \\
M^e &= \begin{pmatrix} \mu_1^d Y_a + \mu_2^d Y_c & Y_b \mu_2^d & Y_1 \mu_5^d - Y_2 \mu_6^d \\ Y_b \mu_2^d & \mu_1^d Y_a - \mu_2^d Y_c & -Y_1 \mu_6^d - Y_2 \mu_5^d \\ Y_1 \mu_3^d - Y_2 \mu_4^d & -Y_1 \mu_4^d - Y_2 \mu_3^d & \mu_7^d \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y se ha definido las siguientes cantidades $\mu_1^u = y_1^u h_3^{0u}$, $\mu_2^u = y_2^u h_3^{0u}$, $\bar{\mu}_1^u = \bar{y}^u h_1^{0u}$, $\bar{\mu}_2^u = \bar{y}^u h_2^{0u}$, $\mu_5^u = y_5^u h_3^{0u}$, $\mu_1^d = y_1^d h_3^{0d}$, $\mu_2^d = y_2^d h_3^{0d}$, $\mu_3^d = y_3^d h_1^{0d}$, $\mu_4^d = y_3^d h_2^{0d}$, $\mu_5^d = y_4^d h_1^{0d}$, $\mu_6^d = y_4^d h_2^{0d}$, $\mu_7^d = y_5^d h_3^{0d}$, $Y_a = Y_1^2 + Y_2^2$, $Y_b = 2Y_1 Y_2$ y $Y_c = Y_1^2 - Y_2^2$.

El problema del sabor en Física de partículas se ha convertido en uno de los problemas más importantes en la actualidad para el cual aún no se tiene respuesta [43]. Se ha trabajado en diversas estrategias para tratar de lidiar con él, una de ellas radica en el contexto de los ceros de textura (o simplemente texturas) en las matrices de masa [41, 44]. El formalismo de las texturas ha sido estudiado amplia y profundamente durante décadas en un intento por eliminar parámetros libres que son irrelevantes en el sector de Yukawa. Uno de los mayores avances en esta dirección se logró con

la implementación de las conocidas como texturas de Fritzsich pues se consiguió reproducir el ángulo de Cabibbo con una buena precisión. Sin embargo, este enfoque pronto comenzó a presentar problemas con la masa del quark top y con algunas entradas de la matriz CKM, el lector interesado en el tema puede consultar [45] en donde se detalla una clasificación completa de diferentes texturas fenomenológicamente viables incluyendo a S_3 como simetría de sabor. Como una alternativa a las texturas de Fritzsich se propusieron las texturas de tipo Nearest Neighbour Interaction (NNI, por sus siglas en inglés) quienes son bien conocidas pues conducen a una matriz de mezcla fenomenológicamente viable [46]. En este trabajo de tesis se optará por llevar a las matrices de masa (5.10) a una base en la que estas contengan texturas del tipo NNI las cuales en general tienen la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & d & e \end{pmatrix}.$$

Para conseguir obtener estas texturas se puede efectuar una rotación que permita hacer un cambio de base en la cual estas se encuentren presentes, esto es

$$M^k \rightarrow R_z(\theta)M^kR_z^T(\theta), \quad \text{con } k = u, d, e.$$

Al efectuar esta transformación y luego de desarrollar el álgebra correspondiente se encuentra que las matrices de masa adoptan la siguiente forma en la nueva base³

$$\begin{aligned} M^u &= \begin{pmatrix} 0 & a\mu_2^u Y_1^2(\tau) & 0 \\ a\mu_2^u Y_1^2(\tau) & 0 & -b\bar{\mu}_2^u Y_1(\tau) \\ 0 & -b\bar{\mu}_2^u Y_1(\tau) & \mu_5^u - \frac{4\mu_1^u}{3} Y_1^2(\tau) \end{pmatrix}, \\ M^d &= \begin{pmatrix} 0 & a\mu_2^d Y_1^2(\tau) & 0 \\ a\mu_2^d Y_1^2(\tau) & 0 & -b\mu_4^d Y_1(\tau) \\ 0 & -b\mu_4^{d*} Y_1^*(\tau) & \mu_7^d - \frac{4\mu_1^d}{3} Y_1^2(\tau) \end{pmatrix}, \\ M^e &= \begin{pmatrix} 0 & a\mu_2^e Y_1^2(\tau) & 0 \\ a\mu_2^e Y_1^2(\tau) & 0 & -b\mu_4^{e*} Y_1^*(\tau) \\ 0 & -b\mu_4^e Y_1(\tau) & \mu_7^e - \frac{4\mu_1^e}{3} Y_1^2(\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde $a = 2(3 - \alpha^2) \sin \theta \cos \theta$, $b = (1 + \alpha^2)(1 - \tan^2 \theta) \cos \theta$ y $\alpha = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$. A su vez se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} h_1^{0d} &= h_2^{0d} \tan \theta, & h_1^{0u} &= h_2^{0u} \tan \theta, & Y_2(\tau) - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1(\tau) &= 0, \\ \bar{\mu}_2^u Y_1(\tau) &\in \Re, & \mu_2^u Y_1^2(\tau) &\in \Re, & \mu_2^d Y_1^2(\tau) &\in \Re, & \mu_6^d Y_1(\tau) &= \mu_4^{d*} Y_1^*(\tau), \end{aligned}$$

todo esto evaluado en $\theta = \pi/12$ siendo este el ángulo de rotación. Las relaciones anteriores permiten relacionar algunos de los parámetros entre sí, permitiendo disminuir el número de parámetros libres del modelo. Es importante mencionar que para llegar a las expresiones (5.11) se supuso que las matrices de masa son hermíticas lo cual no sucede en general sin embargo en este estudio se considerará que esto se cumple con el fin de deshacernos de fases complejas que serán innecesarias.

Por otra parte, la relación algebraica entre las formas modulares

$$Y_2(\tau) - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1(\tau) = 0,$$

puede ser resuelta de manera numérica dando como resultado que esta se satisface en $\tau = i$. Esta misma solución puede visualizarse de forma gráfica, véase la Fig. 5.2.

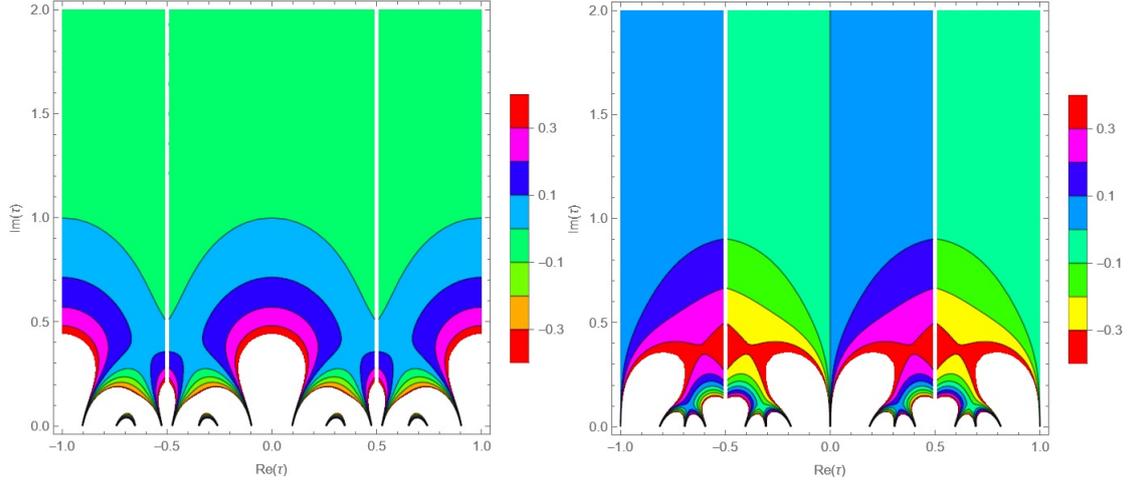


Figura 5.2: Parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la relación $Y_2(\tau) - 1/\sqrt{3}Y_1(\tau)$. Se puede observar que dicha expresión se anula en $\tau = i$.

A partir de este punto ya contamos con las herramientas necesarias para construir la matriz de mezcla de quarks.

5.3. Construcción de la matriz V_{CKM}

El objetivo de esta última sección es centrarnos en la construcción de la matriz de mezcla CKM a partir de las matrices de masa (5.11). Para ello se va a seguir el método expuesto en [44, 46] mostrando algunos de los pasos intermedios.

Lo primero que se hará es adimensionalizar las matrices de masa de los quarks dividiendo por la masa del quark más pesado de la siguiente manera

$$\hat{M}^k = \frac{M^k}{m_{k3}}, \quad \text{con } k = u, d.$$

Lo que se busca a continuación es construir las matrices unitarias que diagonalizan a las matrices de masa, $A_{kL,R}$, esto es

$$\tilde{M}^k = A_{kR}^\dagger \hat{M}^k A_{kL}, \quad (5.12)$$

con $\tilde{M}^k = \text{diag}(m_{k1}/m_{k3}, m_{k2}/m_{k3}, 1)$. Quienes a su vez permiten definir la matriz de mezcla como se vio en el capítulo 1. Sin embargo basta con determinar una de ellas para cada tipo de quark, por ejemplo A_{kL} , pues a partir de (5.12) podemos construir el bilineal

$$\tilde{M}^{k\dagger} \tilde{M}^k = A_{kL}^\dagger \hat{M}^{k\dagger} \hat{M}^k A_{kL}.$$

A partir de esta última relación podemos factorizar las fases complejas que vienen de los acoplamientos y_i^k en las matrices de masa de tal manera que podemos identificar lo siguiente

$$\tilde{M}^{k\dagger} \tilde{M}^k = Q_k^\dagger O_{kL}^T \left(\hat{M}^{k\dagger} \hat{M}^k \right) O_{kL} Q_k \equiv A_{kL}^\dagger \hat{M}^{k\dagger} \hat{M}^k A_{kL},$$

en donde O_k es la matriz que diagonaliza a la matriz real $(\hat{M}^{k\dagger} \hat{M}^k)$ y Q_k una matriz de fases. El problema se reduce ahora a encontrar las matrices O_{kL} . Explícitamente,

³Un procedimiento sistemático para la obtención de estas texturas puede ser encontrado en [41].

para nuestro modelo se tiene a partir de (5.11) que

$$\left(\hat{M}^{k\dagger}\hat{M}^k\right) = \begin{pmatrix} A_k^2 & 0 & A_k|B_k| \\ 0 & A_k^2 + |B_k|^2 & |B_k||C_k| \\ A_k|B_k| & |B_k||C_k| & |B_k|^2 + |C_k|^2 \end{pmatrix}, \quad Q_k = \text{diag}(1, e^{i\varphi_k}, e^{i\phi_k}), \quad (5.13)$$

con $\varphi_k = \arg(C_k)$, $\phi_d = \arg(B_d)$ y $\phi_u = 0$. Además se ha definido $A_k = a\mu_2^k Y_1^2(i)/m_{k3}$, $B_u = -b\bar{\mu}_2^u Y_1(i)/m_{u3}$, $B_d = -b\mu_4^d Y_1(i)/m_{d3}$, $C_u = (\mu_5^u - \frac{4\mu_1^u}{3} Y_1^2(i))/m_{u3}$ y $C_d = (\mu_7^d - \frac{4\mu_1^d}{3} Y_1^2(i))/m_{d3}$. La matriz O_{kL} debe tener una forma tal que

$$O_{kL}^T \left(\hat{M}^{k\dagger}\hat{M}^k\right) O_{kL} = \text{diag}(\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}, 1), \quad \text{con } \varepsilon_{ki} = m_{ki}^2/m_{k3}^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

La manera más factible de diagonalizar a (5.13) es a través de sus eigenvectores, de modo que O_{kL} va a ser dada por

$$O_{kL} = (|f_{k1}\rangle, |f_{k2}\rangle, |f_{k3}\rangle),$$

en donde los eigenvectores tienen la forma

$$|f_{ki}\rangle = \frac{1}{f_{ki}} \begin{pmatrix} \alpha_{ki} \\ \beta_{ki} \\ \gamma_{ki} \end{pmatrix} = \frac{1}{f_{ki}} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{ki} - A_k^2 - |B_k|^2) A_k |B_k| \\ (\varepsilon_{ki} - A_k^2) |B_k| |C_k| \\ (\varepsilon_{ki} - A_k^2) (\varepsilon_{ki} - A_k^2 - |B_k|^2) \end{pmatrix},$$

f_{ki} son factores de normalización. A partir de estos resultados ya es posible construir la matriz CKM

$$V_{CKM} = A_{uL}^\dagger A_{dL} = O_{kL}^T Q_u^\dagger Q_d O_{dL} = O_{kL}^T Q_q O_{dL},$$

en donde se ha definido $Q_q = Q_u^\dagger Q_d = \text{diag}(1, e^{i\eta}, e^{i\phi_d})$ y $\eta = \varphi_d - \varphi_u$. En este punto es conveniente hacer una reparametrización en términos de las masas de los quarks

$$A_k^2 = \frac{L_k}{y_k} z_k, \quad |C_k|^2 = \left(\frac{y_k}{z_k}\right)^2,$$

con y_k, z_u nuevos parámetros y $z_d = 1$. Siguiendo el procedimiento descrito en [46] se puede encontrar que

$$|B_k| = \sqrt{S_k - \left(\frac{y_k}{z_k}\right)^2 \pm R_k - 2\frac{L_k z_k}{y_k}}, \quad R_k = \sqrt{\left(S_k - \left(\frac{y_k}{z_k}\right)^2\right)^2 - 4\left(Q_k - 2\frac{L_k y_k}{z_k}\right)},$$

con las definiciones $L_k = \sqrt{\varepsilon_{k1}\varepsilon_{k2}}$, $Q_k = P_k + L_k^2$, $S_k = 1 + P_k$ y $P_k = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2}$. A su vez se obtienen las componentes de la matriz de mezcla como

$$\begin{aligned} (V_{CKM})_{ij} &= \frac{1}{f_{ui} f_{dj}} \left[\left\{ \varepsilon_{ui} - \frac{1}{2} \left(S_u - \left(\frac{y_u}{z_u} \right)^2 \pm R_u \right) \right\} \sqrt{\frac{L_u z_u L_d}{2 y_u 2 y_d}} \left\{ \varepsilon_{dj} - \frac{1}{2} \left(S_d - \left(\frac{y_d}{z_d} \right)^2 \pm R_d \right) \right\} G_u G_d \right. \\ &+ \left(\varepsilon_{ui} - \frac{L_u z_u}{y_u} \right) \left\{ \varepsilon_{ui} - \frac{1}{2} \left(S_u - \left(\frac{y_u}{z_u} \right)^2 \pm R_u \right) \right\} \left(\varepsilon_{dj} - \frac{L_d z_d}{y_d} \right) \left\{ \varepsilon_{dj} - \frac{1}{2} \left(S_d - \left(\frac{y_d}{z_d} \right)^2 \pm R_d \right) \right\} \\ &+ e^{i\eta} \left(\varepsilon_{ui} - \frac{L_u z_u}{y_u} \right) \left(\varepsilon_{dj} - \frac{L_d}{y_d} \right) \frac{y_u y_d}{2 z_u} G_u G_d \Big], \end{aligned} \quad (5.14)$$

con $G_k = |B_k|$. Para llegar a esta expresión se ha redefinido el campo del quark bottom $b \rightarrow e^{i\phi_{db}}$ de tal modo que es posible absorber una de las fases. En análisis posteriores se tomará en consideración solo el signo positivo que acompaña a R_k en (5.14) pues este garantiza de mejor manera que la expresión dentro de la raíz en G_k será positiva, ya que en la matriz de mezcla el caracter complejo de sus entradas viene de la fase.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

6.1. Evolución mediante RGE

En el capítulo anterior se logró deducir con cierto grado de detalle los resultados que serán de gran ayuda para verificar la viabilidad del modelo mediante sus predicciones fenomenológicas. En este capítulo nos centraremos en tratar de obtener dichas predicciones. Para alcanzar esta meta, se recurrirá a las ecuaciones del grupo de renormalización quienes, como se hizo mención en su momento, permiten saber como evolucionan los parámetros de una teoría a medida que varía la escala de energía.

Lo primero que se desea conocer son las masas de los quarks, para ello podríamos recurrir a las RGE de los acoplamientos de Yukawa correspondientes a una teoría $SU(5)$ supersimétrica con seis dobletes de Higgs. Sin embargo, es posible hacer algo más sencillo. El modelo bajo estudio está definido en la escala de gran unificación, justo debajo de esta escala y luego de romper $SU(5)$ vamos a suponer que el modelo efectivo que queda como remanente es el MSSM. Por esta razón se podría recurrir preferentemente a las RGE del MSSM y llevar acabo la evolución de nuestros acoplamientos de Yukawa hasta la escala del Z y con ello calcular las masas de los quarks. Esto es más sencillo de hacer en el sentido de que las RGE del MSSM se conocen muy bien además de que ya existe software y paqueterías especializadas que permiten resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de una manera bastante simple.

6.1.1. Evolución de los acoplamientos de Yukawa

Con el fin de llevar a cabo la evolución de los acoplamientos de Yukawa primero es necesario efectuar una rotación de la base de nuestro modelo con seis dobletes de Higgs a la base del MSSM con solo dos dobletes para hacerlos compatibles en la escala de gran unificación. Esto es más sencillo de realizar si se trabaja en la base de masas donde las matrices de Yukawa (5.10) serán diagonales, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^u &= \frac{2Y_1(i)}{\sqrt{3}} \bar{y}^u \text{diag}(-1, 1, 0) = \mathbf{Y}_2^u, & \mathbf{Y}_3^u &= \text{diag}\left(\frac{4}{3}Y_1^2(i)(y_1^u - y_2^u), \frac{4}{3}Y_1^2(i)(y_1^u + y_2^u), y_5^u\right), \\ \mathbf{Y}_1^d &= \frac{2Y_1(i)}{\sqrt{3}} \sqrt{y_3^d y_4^d} \text{diag}(0, -1, 1) = \mathbf{Y}_2^d, & \mathbf{Y}_3^d &= \text{diag}\left(\frac{4}{3}Y_1^2(i)(y_1^d - y_2^d), \frac{4}{3}Y_1^2(i)(y_1^d + y_2^d), y_5^d\right), \\ \mathbf{Y}_1^e &= \mathbf{Y}_1^d, & \mathbf{Y}_2^e &= \mathbf{Y}_2^d, & \mathbf{Y}_3^e &= \mathbf{Y}_3^d, \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde se ha empleado la relación existente entre las formas modulares.

Para pasar a la base del MSSM se necesita encontrar alguna expresión que relacione los Higgs de nuestro modelo extendido con los del MSSM. Con este objetivo en mente, se puede mostrar que si permitimos que $v_k^2 = (h_1^{0k})^2 + (h_2^{0k})^2 + (h_3^{0k})^2$ se cumple la relación

$$\mathcal{H}_i^k = \frac{h_i^{0k}}{v_k} \mathcal{H}^k, \tag{6.2}$$

con $i = 1, 2, 3$ y $k = u, d$. En (6.2) \mathcal{H}_i^k son los seis dobletes de Higgs de nuestro modelo extendido y \mathcal{H}^k son los dos dobletes del MSSM, en donde h_i^{0k} y v_k son los respectivos vevs. La relación (6.2) nos permite reescribir el potencial (5.9) como

$$W_{\text{Yukawa}} = \bar{u}_R \mathbf{Y}_u^{\text{MSSM}} Q_L \mathcal{H}^u + \bar{d}_R \mathbf{Y}_d^{\text{MSSM}} Q_L \tilde{\mathcal{H}}^d + \bar{e}_R \mathbf{Y}_e^{\text{MSSM}} L_L \tilde{\mathcal{H}}^d + h.c.$$

Nótese que este potencial ya se encuentra en la base del MSSM con dos dobletes de Higgs. Las nuevas matrices de Yukawa están relacionadas con las anteriores mediante

$$\mathbf{Y}_u^{\text{MSSM}} = \sum_{i=1}^3 \frac{h_i^{0u}}{v_u} \mathbf{Y}_i^u, \quad \mathbf{Y}_d^{\text{MSSM}} = \sum_{i=1}^3 \frac{h_i^{0d}}{v_d} \mathbf{Y}_i^d, \quad \mathbf{Y}_e^{\text{MSSM}} = \sum_{i=1}^3 \frac{h_i^{0d}}{v_d} \mathbf{Y}_i^e.$$

Explícitamente en la base de masas y usando las expresiones (6.1) se tiene la relación entre los eigenvalores

$$\begin{aligned} y_u^{\text{MSSM}} &= \frac{4}{3} \hat{v}_3^u Y_1^2(i) (y_1^u - y_2^u) - \frac{2Y_1(i)}{\sqrt{3}} \bar{y}^u (\hat{v}_1^u + \hat{v}_2^u), & y_c^{\text{MSSM}} &= \frac{4}{3} \hat{v}_3^u Y_1^2(i) (y_1^u + y_2^u) + \frac{2Y_1(i)}{\sqrt{3}} \bar{y}^u (\hat{v}_1^u + \hat{v}_2^u), \\ y_t^{\text{MSSM}} &= \hat{v}_3^u y_5^u, & y_d^{\text{MSSM}} &= \frac{4}{3} \hat{v}_3^d Y_1^2(i) (y_1^d - y_2^d), & y_s^{\text{MSSM}} &= \frac{4}{3} \hat{v}_3^d Y_1^2(i) (y_1^d + y_2^d) - \frac{2|Y_1(i)|}{\sqrt{3}} |y_4^d| (\hat{v}_1^d + \hat{v}_2^d), \\ y_b^{\text{MSSM}} &= \hat{v}_3^d y_5^d + \frac{2|Y_1(i)|}{\sqrt{3}} |y_4^d| (\hat{v}_1^d + \hat{v}_2^d), & y_e^{\text{MSSM}} &= y_d^{\text{MSSM}}, & y_\mu^{\text{MSSM}} &= y_s^{\text{MSSM}}, \\ y_\tau^{\text{MSSM}} &= y_b^{\text{MSSM}}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde se ha definido $\hat{v}_i^k = h_i^{0k}/v_k$. Nótese que ha surgido la condición $\mathbf{Y}_e^{\text{MSSM}} = \mathbf{Y}_d^{\text{MSSM}}$ la cual será interpretada como una condición de frontera en la escala de gran unificación; esta relación ya se podía anticipar al observar con atención las matrices (5.10) y (5.11) siendo esta bastante común entre los modelos de gran unificación (47).

Con ayuda de las relaciones (6.3) se ha conseguido reparametrizar a los acoplamientos de Yukawa del MSSM en términos de los parámetros del modelo de gran unificación. De este modo, se va a proceder a emplear directamente las RGEs del MSSM quienes serán resueltas para los acoplamientos y_k^{MSSM} . El sistema de ecuaciones para los acoplamientos de Yukawa está dado por

$$\frac{d\mathbf{Y}_k^{\text{MSSM}}}{dt} = \mathbf{Y}_k^{\text{MSSM}} \left(\frac{1}{16\pi^2} \beta_k^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_k^{(2)} \right), \quad k = u, d, e, \tag{6.4}$$

con $\beta_k^{(i)}$ las funciones beta de renormalización a uno y dos lazos correspondientes al MSSM las cuales se pueden encontrar de manera explícita en (16), $t = \ln \mu$ y μ la escala de energía.

Por otra parte, si se quiere efectuar correctamente la evolución de los Yukawas hasta la escala electrodébil es importante tomar en cuenta el rompimiento de SUSY que, como se mencionó en la sección 3.2, puede ser parametrizado e incluido en un conjunto de condiciones de empataamiento entre los acoplamientos de Yukawa del SM y los del MSSM justo en la escala M_{SUSY} a partir de la cual SUSY se manifiesta.

En adición a esto, es necesario establecer condiciones de frontera en la escala de gran unificación a partir de las cuales sea posible resolver el sistema de ecuaciones. Sin embargo, los experimentos actuales se encuentran muy lejos de explorar procesos que ocurren a energías tan altas como lo es la escala de gran unificación, por lo que no disponemos de datos que funcionen como entrada.

En vista de esta situación, se han hecho estudios en los que se aprovecha el conocimiento de las RGE de ciertos modelos para evolucionar las mediciones experimentales llevándolas hasta muy altas energías. En (13) los autores proveen conjuntos de datos que en este estudio se van a emplear como condiciones de frontera en la escala de gran unificación para posteriormente hacer la evolución de los acoplamientos de Yukawa (6.3).

Los valores que serán tomados como entrada serán

$$\begin{aligned}
M_{\text{GUT}} &= 2 \times 10^{16} \text{ GeV}, & M_{\text{SUSY}} &= 3 \text{ TeV}, \\
\bar{\eta}_b &= 0,01875, & \bar{\eta}_q &= 0,05625, \\
\bar{\eta}_l &= 0,09375, & \tan \beta &= 5, \\
y_u^{\text{MSSM}} &= 2,803427 \times 10^{-6}, & y_d^{\text{MSSM}} &= 2,306772 \times 10^{-5}, \\
y_c^{\text{MSSM}} &= 1,453574 \times 10^{-3}, & y_s^{\text{MSSM}} &= 4,565260 \times 10^{-4}, \\
y_t^{\text{MSSM}} &= 0,529091, & y_b^{\text{MSSM}} &= 2,544902 \times 10^{-2}, \\
v &= 246 \text{ GeV},
\end{aligned}$$

con v el vev del Higgs del SM. Del mismo modo se tiene la condición $\mathbf{Y}_e^{\text{MSSM}} = \mathbf{Y}_d^{\text{MSSM}}$ en la escala de gran unificación. Es importante mencionar que se están tomando en cuenta hasta seis cifras significativas de precisión debido a que, como se verá más adelante, la incertidumbre en algunas mediciones experimentales de las entradas de la matriz de mezclas se han vuelto muy pequeñas a medida que se mejora la precisión en los experimentos.

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (6.4) entre la escala de gran unificación M_{GUT} y la escala electrodébil $M_Z = 91,1876 \text{ GeV}$ se empleó la paquetería de Wolfram Mathematica REAP v. 1.11.5 [48]. A partir de los resultados obtenidos mediante el software se calculó la razón entre las masas de los quarks con la masa de la tercera familia, los valores obtenidos se reportan en la siguiente tabla¹ en donde estos se comparan con los datos experimentales reportados por el PDG en el 2021

	$M_{\text{exp}} [\text{GeV}]$	$M_{\text{th}} [\text{GeV}]$
\tilde{m}_u	$(6,37 \pm 0,59) \times 10^{-6}$	$7,26679 \times 10^{-6}$
\tilde{m}_d	$(8,78 \pm 0,48) \times 10^{-4}$	$10,0819 \times 10^{-4}$
\tilde{m}_s	$(0,0178 \pm 0,00046)$	$0,0199527$
\tilde{m}_c	$(0,00364 \pm 0,00023)$	$0,00376781$

El resultado teórico de las masas reportadas en la escala M_Z están relacionadas con los parámetros del modelo bajo estudio mediante (6.3) y (3.7).

6.2. Ajuste en la matriz CKM

El siguiente objetivo de este trabajo de tesis es conseguir reproducir el patrón de mezclas de los quarks, i.e., reproducir los valores experimentales de las entradas de la matriz de mezclas CKM con los que se cuenta. Para ello, ya que contamos con las razones entre las masas podemos reemplazar estos resultados en los elementos de matriz (5.14). Recordemos que el carácter complejo de la matriz viene exclusivamente de la exponencial compleja que contiene la fase, en vista de esto debemos ajustar los valores de los parámetros libres de tal modo que la magnitud de los elementos (5.14) consiga reproducir los valores experimentales.

Con el fin de lograr un buen ajuste se llevará a cabo un ajuste χ^2 pues este método es muy eficaz para determinar el comportamiento de una cierta variable respecto de algún conjunto de observaciones dadas. Si asumimos que los valores experimentales no están correlacionados, la χ^2 se puede expresar como

$$\chi^2 = \sum_n \frac{(V_n^{\text{exp}} - V_n^{\text{th}})^2}{\sigma_n^2},$$

¹Los resultados teóricos se reportan en el esquema de renormalización \bar{MS} .

en donde V_n^{exp} son los datos experimentales, V_n^{th} son los resultados teóricos obtenidos con el modelo y σ_n^2 son las varianzas de los datos experimentales. A partir de este método se puede obtener el mejor ajuste minimizando la χ^2 . Además, debido a la unitariedad de la matriz de mezcla basta con ajustar solo cuatro observables; por lo que se optará por un análisis de los resultados obtenidos a través del modelo con una χ^2 dada de la siguiente manera

$$\chi^2 = \frac{(|V_{ub}^{exp}| - V_{ub}^{th})^2}{\sigma_{ub}^2} + \frac{(|V_{us}^{exp}| - V_{us}^{th})^2}{\sigma_{us}^2} + \frac{(|V_{cb}^{exp}| - V_{cb}^{th})^2}{\sigma_{cb}^2} + \frac{(\mathcal{J}^{exp} - \mathcal{J}^{th})^2}{\sigma_{\mathcal{J}}^2}, \quad (6.5)$$

en donde \mathcal{J} es el invariante de Jarlskog el cual está definido como

$$\mathcal{J} = \text{Im} [V_{cs} V_{tb} V_{cb}^* V_{ts}^*].$$

Como los valores numéricos de las razones entre las masas ya han quedado fijos, los únicos parámetros libres en (5.14) que deben ajustarse son y_u , y_d , z_u y η . De este modo la χ^2 es función de estos cuatro parámetros. Por otra parte, los valores experimentales alrededor de los cuales se hará el ajuste son los siguientes

$$\begin{aligned} |V_{ub}^{exp}| &= (3,82 \pm 0,20) \times 10^{-3}, \\ |V_{us}^{exp}| &= 0,2250 \pm 0,0027, \\ |V_{cb}^{exp}| &= (40,8 \pm 1,4) \times 10^{-3}, \\ \mathcal{J}^{exp} &= (3,08 \pm 0,15) \times 10^{-5}, \end{aligned}$$

siendo éstos datos reportados por el PDG en el 2022. Previo a la evaluación de la χ^2 es necesario contar con una región permitida que contenga los posibles valores de los parámetros que mantengan un buen comportamiento en la CKM, i.e., que no conduzca a valores complejos o infinitos. Esto se consiguió empleando un algoritmo muy sencillo elaborado en Mathematica, el cual básicamente consiste en tomar la expresión (5.14) y evaluar cada entrada en un cierto rango de valores preestablecido por el usuario. De este modo se consiguió acotar los valores permitidos de los parámetros a los siguientes intervalos

$$0 < y_u < 1,0, \quad 0,5 < y_d < 1,0, \quad 1,0 < z_u < 2,0, \quad \eta > 0,0,$$

con los valores de η dados en radianes. Posteriormente, se realizó un barrido de todos los valores posibles que podían tomar los parámetros en la región permitida conduciendo así a que los valores que mejor se ajustan a los datos experimentales y que minimizan la χ^2 son²

$$y_u = 0,99537, \quad y_d = 0,98097, \quad z_u = 1,0011, \quad \eta = 0,09942.$$

Este conjunto de parámetros arroja los siguientes valores para la matriz CKM

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0,9828 & 0,2240 & 0,0014 \\ 0,0863 & 0,9910 & 0,0445 \\ 0,0095 & 0,0435 & 0,9990 \end{pmatrix}.$$

El invariante de Jarlskog toma el valor $\mathcal{J}^{th} = 3,06 \times 10^{-5}$. Mientras que de manera experimental se tiene que

$$V_{CKM}^{exp} = \begin{pmatrix} 0,9737 \pm 0,00031 & 0,2250 \pm 0,0027 & (3,82 \pm 0,20) \times 10^{-3} \\ 0,2181 \pm 0,004 & 0,9750 \pm 0,006 & (40,8 \pm 1,4) \times 10^{-3} \\ (8,6 \pm 0,2) \times 10^{-3} & (41,5 \pm 0,9) \times 10^{-3} & 1,014 \pm 0,029 \end{pmatrix}.$$

²En el apéndice A se encuentra el programa con el que se llevó acabo el ajuste.

Con el invariante de Jarlskog $\mathcal{J}^{exp} = (3,08 \pm 0,15) \times 10^{-5}$.

A partir de estos resultados y de la expresión (6.5) se obtuvo una χ^2 normalizada de 1.968, lo que sugiere que el ajuste es razonablemente bueno. Así mismo, de la parametrización estándar empleada en el PDG se encuentra que los ángulos de mezcla resultantes del ajuste teórico de la matriz CKM toman los siguientes valores

$$\theta_{12}^{th} = 12,95^\circ, \quad \theta_{13}^{th} = 0,078^\circ, \quad \theta_{23}^{th} = 2,55^\circ.$$

Estos resultados se pueden comparar con los datos experimentales reportados por el PDG en el 2022, los cuales están dados por

$$\theta_{12}^{exp} = 13,0029^\circ \pm 0,0383882^\circ, \quad \theta_{13}^{exp} = 0,2114^\circ \pm 0,0063^\circ, \quad \theta_{23}^{exp} = 2,3968^\circ \pm 0,0487^\circ.$$

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A lo largo de este estudio se hizo hincapié en la importancia que cobra la simetría de sabor impuesta en el modelo. Gracias a la inclusión de la simetría modular fue posible ganar mayor libertad para incluir términos de Yukawa en el potencial y con ello conseguir matrices de masa y de mezcla más adecuadas para su posterior tratamiento. La asignación de los campos de partículas dentro de las representaciones irreducibles de S_3 y la elección de los pesos modulares se realizó de manera arbitraria sin embargo, es importante mencionar que dichas suposiciones están basadas en varios trabajos previos al respecto donde se consideran diferentes grupos de norma [38, 49]. Además estas elecciones impuestas han probado ser elecciones viables. En ese mismo sentido, es importante destacar la presencia de las texturas tipo NNI en las matrices de masa gracias a lo cual se consiguió obtener una expresión analítica y fenomenológicamente viable, i. e., no tiene ceros en alguna de sus entradas. Así mismo, como se pudo notar de las matrices (5.11) expuestas en el capítulo cinco, se consiguió reducir el número de parámetros libres de 20 a 8 para el sector de Yukawa lo cual es bastante bueno pues esto ayuda a restarle, en gran medida, arbitrariedad al modelo.

Por otra parte, a pesar del tratamiento que se le dio a los términos de rompimiento suave y a las simplificaciones consideradas, los resultados fenomenológicos se obtuvieron dentro de un acuerdo razonablemente bueno con los datos experimentales reportados por el PDG en el 2022 [50]. Especialmente, en lo relacionado con las masas de los quarks ya que como se puede ver en la tabla presentada al final de la sección 6.1, los valores obtenidos se encuentran entre dos y tres sigmas lejos del valor central reportado por el experimento. Más sin embargo, en el caso del resultado teórico de la matriz de mezclas mostrado al final del capítulo seis, se puede apreciar que la mayoría de sus entradas se encuentran aproximadamente entre dos y cuatro sigmas lejos del valor central reportado por el experimento. Sin embargo hay algunas otras quienes se encuentran muy lejos del valor experimental pues en esos casos la incertidumbre en la medición resulta ser muy restrictiva. En ese mismo sentido, nótese el buen acuerdo que existe en el valor obtenido de manera teórica para el invariante de Jarlskog al igual que con los ángulos de mezcla θ_{12} y θ_{23} .

Los resultados obtenidos en este primer estudio son un buen indicador de que el incluir simetrías discretas no abelianas y simetrías modulares para construir extensiones del SM o bien Teorías de Gran Unificación es una muy buena propuesta para atender el problema del sabor en Física de partículas. Sin embargo, los modelos basados en grupos de simetría simples presentan algunos problemas importantes si se busca recuperar al MSSM dentro de la cadena de rompimiento del grupo de simetría de norma. Algunos de estos problemas hacen referencia a la posible aparición de estados exóticos no masivos en el espectro de partículas resultante de la teoría [51] y

a la imposibilidad de evitar la aparición de términos de la forma qql presentes en el potencial (3.3), etc.

Otro problema importante se refiere a la aparición de una cierta arbitrariedad en el potencial de Kähler al buscar renormalizar los campos en modelos extendidos con simetrías modulares [52]. Como se puede apreciar, a pesar de los resultados obtenidos se siguen presentando problemas que deben ser tratados para evitar un rápido decaimiento del protón, como se mencionó brevemente al final de la sección 3.2, y para salvaguardar la propia consistencia matemática y física del modelo. En general, aún se tienen varios aspectos que pueden ser mejorados, no obstante, estos serán abordados en estudios posteriores.

Como perspectivas a futuro, aparte de la búsqueda de la resolución de los problemas mencionados, se pretende extender el análisis incluyendo los leptones cargados y neutrinos mediante la adición de neutrinos derechos de tal modo que esto permita obtener una predicción para las pequeñas masas de estos leptones neutros a través del mecanismo see-saw, así como también de su respectivo patrón de mezclas codificado en la matriz PMNS. Además de que también se planea explorar diferentes propuestas para la introducción del sector de Higgs en diversas irreps de SU(5) más allá de la representación 5 como se menciona en [47].

En esa misma dirección, se planea dar un tratamiento más adecuado a los términos de rompimiento suave de la Supersimetría tomando en cuenta su debida evolución y posteriormente su contribución en las Condiciones de empataamiento (3.7).

APÉNDICE A

PROGRAMAS

En este apéndice se incluyen los programas elaborados en Wolfram Mathematica que fueron de utilidad para llevar a acabo los cálculos numéricos de los que se hizo mención en el capítulo seis.

```
1 (*ESTE PROGRAMA TIENE POR OBJETIVO AJUSTAR LOS PARAMETROS LIBRES EN LA MATRIZ DE MEZCLA, ASI
   COMO TAMBIEN AJUSTAR EL INVARIANTE DE JARLSKOG PARA CONSEGUIR UN BUEN ACUERDO CON
   LOS DATOS EXPERIMENTALES*)
2 (*DEFINIMOS LAS CANTIDADES NUMERICAS*)
3 \ (Epsilon)u:={ (7.26679*10^-6)^2, (0.00376781)^2, 1}
4 \ (Epsilon)d:={ (0.00100819)^2, (0.0199527)^2, 1}
5 Pu= \ (Epsilon)u((1))+\ (Epsilon)u((2));
6 Pd= \ (Epsilon)d((1))+\ (Epsilon)d((2));
7 Lu=Sqrt(\ (Epsilon)u((1))*\ (Epsilon)u((2)));
8 Ld=Sqrt(\ (Epsilon)d((1))*\ (Epsilon)d((2)));
9 Qu=Pu+Lu^2;
10 Qd=Pd+Ld^2;
11 Su=1+Pu;
12 Sd=1+Pd;
13 Ru(x_):=Sqrt((Su-x^2)^2-4*(Qu-2*Lu*x))
14 Gu(x_):=Sqrt(Su-x^2+Ru(x)-2*Lu/x)
15 Rd(y_):=Sqrt((Sd-y^2)^2-4*(Qd-2*Ld*y))
16 Gd(y_):=Sqrt(Sd-y^2+Rd(y)-2*Ld/y)
17 (*SE DEFINE PROPIAMENTE EL INVARIANTE DE JARLSKOG EN TERMINOS DE LAS PARTES REAL E
   IMAGINARIAS DE LA MATRIZ CKM ACORDE A LA ECUACION 5.14 DE LA TESIS*)
18 J(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sin(\ (Eta))*((Acs(yu,yd,zu, \ (Eta))Btb(yu,yd,zu, \ (Eta))+Bcs(yu,yd,zu, \ (Eta))Atb(yu,
   yd,zu, \ (Eta)))(Acby(yu,yd,zu, \ (Eta))Ats(yu,yd,zu, \ (Eta))+Sin(\ (Eta))^2*Bcb(yu,yd,zu, \ (Eta))Bts(yu,yd,
   zu, \ (Eta)))-(Ats(yu,yd,zu, \ (Eta))Bcb(yu,yd,zu, \ (Eta))+Acby(yu,yd,zu, \ (Eta))Bts(yu,yd,zu, \ (Eta)))(Acs(
   yu,yd,zu, \ (Eta))Atb(yu,yd,zu, \ (Eta))-Sin(\ (Eta))^2*Bcs(yu,yd,zu, \ (Eta))Btb(yu,yd,zu, \ (Eta)))
19 (*DEFINIMOS CADA UNO DE LOS MODULOS DE LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ DE MEZCLA EN TERMINOS DE
   SU PARTE REAL E IMAGINARIA ACORDE A LA ECUACION 5.14 DE LA TESIS*)
20 Vud(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Aud(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bud(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
21 Vus(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Aus(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bus(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
22 Vub(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Aub(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bub(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
23 Vcs(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Acs(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bcs(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
24 Vcd(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Acd(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bcd(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
25 Vcb(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Acb(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bcb(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
26 Vtd(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Atd(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Btd(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
27 Vtb(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Atb(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Btb(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
28 Vts(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=Sqrt(Ats(yu,yd,zu, \ (Eta))^2+Sin(\ (Eta))^2*Bts(yu,yd,zu, \ (Eta))^2)
29 (*DEFINIMOS LA FUNCION CHI CUADRADA*)
30 \ (Chi)Square(yu_,yd_,zu_, \ (Eta)_):=(Vub(yu,yd,zu, \ (Eta))-0.00382)^2/(4*0.0002)^2+(Vus(yu,yd,zu, \ (Eta)
   ))-0.2250)^2/(4*0.0027)^2+(Vcb(yu,yd,zu, \ (Eta))-0.0408)^2/(4*0.0014)^2+(J(yu,yd,zu, \ (Eta)
   ))-3.08*10^-5)^2/(4*0.15*10^-5)^2
31 (*DEFINIMOS LOS INTERVALOS EN LOS QUE SE VAN A EVALUAR LOS ELEMENTOS DE MATRIZ*)
32 yurange=Range(0.95,0.9962,0.00001);
33 ydrange=Range(0.95,0.98105,0.00001);
34 zurange=Range(1.0,1.2,0.0001);
```

```

35 \ (Eta)range=Range(0.05,0.2,0.00001);
36 (*Hacemos el ajuste respecto a yu*)
37 yudata=Table({yu,\ (Chi)Square(yu,0.98097,1.0011,0.09942)},{yu,yurange});
38 yuminValue = Min(yudata((All, 2)));
39 yuminValueIndex = FirstPosition(yudata((All, 2)),yuminValue)((1));
40 yuminValueRow = yudata((yuminValueIndex));
41 Print (" {yu,\ (Chi)Square}=", yuminValueRow)
42 Clear(yudata,yuminValue,yuminValueIndex,yuminValueRow)
43 {yu,\ (Chi)Square} = {0.99537,9.8438} (*RESULTADO DEL AJUSTE DEL PARAMETRO yu*)
44 (*Hacemos el ajuste respecto a yd*)
45 yddata=Table({yd,\ (Chi)Square(0.99537,yd,1.0011,0.09942)},{yd,ydrange});
46 ydminValue = Min(yddata((All, 2)));
47 ydminValueIndex = FirstPosition(yddata((All, 2)),ydminValue)((1));
48 ydminValueRow = yddata((ydminValueIndex));
49 Print (" {yd,\ (Chi)Square}=", ydminValueRow)
50 Clear(yddata,ydminValue,ydminValueIndex,ydminValueRow)
51 {yd,\ (Chi)Square} = {0.98097,9.8438} (*RESULTADO DEL AJUSTE DEL PARAMETRO yd*)
52 (*Hacemos el ajuste respecto a zu*)
53 zudata=Table({zu,\ (Chi)Square(0.99537,0.98097,zu,0.09942)},{zu,zurange});
54 zuminValue = Min(zudata((All, 2)));
55 zuminValueIndex = FirstPosition(zudata((All, 2)),zuminValue)((1));
56 zuminValueRow = zudata((zuminValueIndex));
57 Print (" {zu,\ (Chi)Square}=", zuminValueRow)
58 Clear(zudata,zuminValue,zuminValueIndex,zuminValueRow)
59 {zu,\ (Chi)Square} = {1.0011,9.8438} (*RESULTADO DEL AJUSTE DEL PARAMETRO zu*)
60 (*Hacemos el ajuste respecto a \ (Eta)*)
61 \ (Eta)data=Table({\ (Eta),\ (Chi)Square(0.99537,0.98097,1.0011,\ (Eta))},{\ (Eta),\ (Eta)range});
62 \ (Eta)minValue = Min(\ (Eta)data((All, 2))); (* Encontramos el valor minimo de la segunda columna *)
63 \ (Eta)minValueIndex = FirstPosition(\ (Eta)data((All, 2)),\ (Eta)minValue)((1)); (* Obtenemos el indice de la
    fila con el valor minimo *)
64 \ (Eta)minValueRow = \ (Eta)data((\ (Eta)minValueIndex)); (* Obtenemos la fila con el valor minimo *)
65 Print (" {\ (Eta),\ (Chi)Square}=", \ (Eta)minValueRow)
66 Clear(\ (Eta)data,\ (Eta)minValue,\ (Eta)minValueIndex,\ (Eta)minValueRow)
67 {\ (Eta),\ (Chi)Square} = {0.09942,9.8438} (*RESULTADO DEL AJUSTE DEL PARAMETRO \ (Eta)*)
68 (*FINALMENTE OBTENEMOS LOS VALORES DE LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ QUE RESULTAN DEL AJUSTE DE
    LOS PARAMETROS LIBRES*)
69 Vud(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
70 0.982818 (*RESULTADO REPORTADO EN LA TESIS*)
71 Vus(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
72 0.224054
73 Vub(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
74 0.00136862
75 Vcd(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
76 0.0862983
77 Vcs(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
78 0.991014
79 Vcb(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
80 0.0445408
81 Vtd(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
82 0.00951058
83 Vts(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
84 0.043483
85 Vtb(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
86 0.998991
87 J(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)
88 0.0000306689
89 \ (Chi)Square(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942)/5 (*CALCULAMOS LA CHI CUADRADA NORMALIZADA*)
90 1.96876
91 (*calculamos los angulos de mezcla*)
92 \ (Theta)12=180/Pi*ArcSin(Vus(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942) /Sqrt(1-Vub
    (0.99537,0.98097,1.0011,0.09942) ^2))
93 12.9473
94 \ (Theta)13=180/Pi*ArcSin(Vub(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942))

```

95 0.0784164
96 \(\Theta)23=180/\text{Pi}*\text{ArcSin}(\text{Vcb}(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942) / \text{Sqrt}(1-\text{Vub}(0.99537,0.98097,1.0011,0.09942) ^2))
97 2.55284

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ramos-Sánchez, Saúl N.. (14 de Abril del 2012). Fenomenología de Cuerdas. casanchi.org Recuperado de <http://casanchi.org/fis/fenocuerdas01.pdf>
- [2] Croon, Djuna, E. Gonzalo, Tomás, Graf, Lukas ,& White, Graham (2019). GUT Physics in the Era of the LHC. *Frontiers in physics*. doi: 10.3389/fphy.2019.00076.
- [3] Langacker, Paul (1981). Grand Unified Theories and Proton Decay. *Physics Reports* No. 4 pp. 185-385.
- [4] H. Arason, D. J. Castano, B. Keszthelyi, S. Mikaelian, E. J. Piard, P. Ramond and B. D. Wright, "Renormalization group study of the standard model and its extensions. 1. The Standard model," *Phys. Rev. D* **46** (1992), 3945-3965 doi:10.1103/PhysRevD.46.3945
- [5] M. Mondragon, "Beyond the Standard Model," *CERN Yellow Rep. School Proc.* **4**, 101-124 (2018) doi:10.23730/CYRSP-2018-004.101
- [6] Halzen Francis, & Martin Alan D., " Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics," John Wiley & Sons.
- [7] P. W. Higgs, "Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons," *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508-509 (1964)doi:10.1103/PhysRevLett.13.508
- [8] F. Englert and R. Brout, "Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons," *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321-323 (1964) doi:10.1103/PhysRevLett.13.321
- [9] E. Peskin, M., & V. Schroeder, D. (1996), "An introduction to Quantum Field Theory," Addison-Wesley.
- [10] Lancaster, T., & Blundell, S. J. (2014). "Quantum Field Theory for the Gifted Amateur."(1a ed.). Oxford university press.
- [11] S. P. Martin, "A Supersymmetry primer," *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **18**, 1-98 (1998) doi:10.1142/9789812839657_0001 [arXiv:hep-ph/9709356 [hep-ph]].
- [12] J. Hisano, "Proton decay in SUSY GUTs," *PTEP* **2022**, no.12, 12B104 (2022) doi:10.1093/ptep/ptac017 [arXiv:2202.01404 [hep-ph]].
- [13] S. Antusch and V. Maurer, "Running quark and lepton parameters at various scales," *JHEP* **11** (2013), 115 doi:10.1007/JHEP11(2013)115 [arXiv:1306.6879 [hep-ph]].
- [14] T. Blazek, S. Raby and S. Pokorski, Finite supersymmetric threshold corrections to CKM matrix elements in the large tan Beta regime, *Phys.Rev. D* **52** (1995) 4151-4158 [hep-ph/9504364].

- [15] Martin F. Shonius, “Introducing Supersymmetry”, *Physics Reports* **128** (1985), 39-204 doi:10.1016/0370-1573(85)90023-7
- [16] D. J. Castano, E. J. Piard and P. Ramond, “Renormalization group study of the Standard Model and its extensions. 2. The Minimal supersymmetric Standard Model,” *Phys. Rev. D* **49** (1994), 4882-4901 doi:10.1103/PhysRevD.49.4882 [arXiv:hep-ph/9308335 [hep-ph]].
- [17] JT Penedo and ST Petcov. Lepton masses and mixing from modular S_4 symmetry. *Nuclear Physics B* 939, 292–307 (2019). DOI: doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.12.016.
- [18] F Gonzalez Canales, A , and M Mondragon. The S_3 flavour symmetry: Neutrino masses and mixings. *Fortschritte der Physik* 61(4-5), 546–570 (2013). DOI: 10.1002/prop.201200121.
- [19] D. Cogollo and J. P. Silva, “Two Higgs doublet models with an S_3 symmetry,” *Phys. Rev. D* **93**, no.9, 095024 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.095024 [arXiv:1601.02659 [hep-ph]].
- [20] D. Das, U. K. Dey and P. B. Pal, “Quark mixing in an S_3 symmetric model with two Higgs doublets,” *Phys. Rev. D* **96**, no.3, 031701 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.031701 [arXiv:1705.07784 [hep-ph]].
- [21] H. Ishimori and T. Kobayashi, “Towards Minimal S_4 Lepton Flavor Model,” *JHEP* **10**, 082 (2011) doi:10.1007/JHEP10(2011)082 [arXiv:1106.3604 [hep-ph]].
- [22] J. C. Gómez-Izquierdo, F. Gonzalez-Canales and M. Mondragón, “On Q_6 flavor symmetry and the breaking of $\mu \leftrightarrow \tau$ symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. A* **32**, no.28-29, 1750171 (2017) doi:10.1142/S0217751X17501718 [arXiv:1705.06324 [hep-ph]].
- [23] F. Feruglio, “Are neutrino masses modular forms?,”doi:10.1142/9789813238053_0012 [arXiv:1706.08749 [hep-ph]].
- [24] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov and A. V. Titov, “Modular A_5 symmetry for flavour model building,” *JHEP* **04**, 174 (2019) doi:10.1007/JHEP04(2019)174 [arXiv:1812.02158 [hep-ph]].
- [25] P. P. Novichkov, S. T. Petcov and M. Tanimoto, “Trimaximal Neutrino Mixing from Modular A_4 Invariance with Residual Symmetries,” *Phys. Lett. B* **793**, 247-258 (2019) doi:10.1016/j.physletb.2019.04.043 [arXiv:1812.11289 [hep-ph]].
- [26] T. Kobayashi, N. Omoto, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, “Modular A_4 invariance and neutrino mixing,” *JHEP* **11**, 196 (2018) doi:10.1007/JHEP11(2018)196 [arXiv:1808.03012 [hep-ph]].
- [27] I. de Medeiros Varzielas, S. F. King and Y. L. Zhou, “Multiple modular symmetries as the origin of flavor,” *Phys. Rev. D* **101**, no.5, 055033 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.055033 [arXiv:1906.02208 [hep-ph]].
- [28] Graham G. Ross (1984). *Grand Unified Theories*. 1ra edición. Ed. Oxford University. pp 497
- [29] A. H. Chamseddine, R. L. Arnowitt and P. Nath, “Locally Supersymmetric Grand Unification,” *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), 970 doi:10.1103/PhysRevLett.49.970

- [30] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, and Mori-mitsu Tanimoto. Non-Abelian discrete symmetries in particle physics. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **183**, 1–163 (2010). DOI: 10.1143/PTPS.183.1.
- [31] T. Kobayashi, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto, T. H. Tatsuishi and H. Uchida, “Finite modular subgroups for fermion mass matrices and baryon/lepton number violation,” *Phys. Lett. B* **794** (2019), 114–121 doi:10.1016/j.physletb.2019.05.034 [arXiv:1812.11072 [hep-ph]].
- [32] T. Kobayashi, N. Omoto, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, “Modular A_4 invariance and neutrino mixing,” *JHEP* **11** (2018), 196 doi:10.1007/JHEP11(2018)196 arXiv:1808.03012 [hep-ph]].
- [33] X. G. Liu and G. J. Ding, “Neutrino Masses and Mixing from Double Covering of Finite Modular Groups,” *JHEP* **08** (2019), 134 doi:10.1007/JHEP08(2019)134 [arXiv:1907.01488 [hep-ph]].
- [34] I. P. Ivanov, “Building and testing models with extended Higgs sectors,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **95** (2017), 160–208 doi:10.1016/j.pnpnp.2017.03.001 [arXiv:1702.03776 [hep-ph]].
- [35] V. Keus, S. F. King and S. Moretti, “Three-Higgs-doublet models: symmetries, potentials and Higgs boson masses,” *JHEP* **01**, 052 (2014) doi:10.1007/JHEP01(2014)052 [arXiv:1310.8253 [hep-ph]].
- [36] F. Astorga, “Constraints from unification in SU(5) and SUSY SU(5),” *J. Phys. G* **20** (1994), 241–260 doi:10.1088/0954-3899/20/2/005
- [37] F. Astorga and W. J. Stirling, “Unification parameter analysis within left-right symmetric SO(10),” *J. Phys. G* **20** (1994), 1365–1381 doi:10.1088/0954-3899/20/9/006
- [38] T. Kobayashi, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, “Modular S_3 -invariant flavor model in SU(5) grand unified theory,” *PTEP* **2020** (2020) no.5, 053B05 doi:10.1093/ptep/ptaa055 [arXiv:1906.10341 [hep-ph]].
- [39] E. Witten, “Deconstruction, G(2) holonomy, and doublet triplet splitting,” [arXiv:hep-ph/0201018 [hep-ph]].
- [40] L. E. Ibanez, “Locally Supersymmetric SU(5) Grand Unification,” *Phys. Lett. B* **118** (1982), 73–78 doi:10.1016/0370-2693(82)90604-9
- [41] F. González Canales, A. Mondragón, M. Mondragón, U. J. Saldaña Salazar and L. Velasco-Sevilla, “Quark sector of S3 models: classification and comparison with experimental data,” *Phys. Rev. D* **88** (2013), 096004 doi:10.1103/PhysRevD.88.096004 [arXiv:1304.6644 [hep-ph]].
- [42] I. Dorsner and I. Mocioiu, “Predictions from type II see-saw mechanism in SU(5),” *Nucl. Phys. B* **796**, 123–136 (2008) doi:10.1016/j.nuclphysb.2007.12.004 [arXiv:0708.3332 [hep-ph]].
- [43] F. Feruglio, “Pieces of the Flavour Puzzle,” *Eur. Phys. J. C* **75**, no.8, 373 (2015) doi:10.1140/epjc/s10052-015-3576-5 [arXiv:1503.04071 [hep-ph]].

- [44] J. C. Gómez-Izquierdo, F. González-Canales and M. Mondragon, “ Q_6 as the flavor symmetry in a non-minimal SUSY $SU(5)$ model,” *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) no.5, 221 doi:10.1140/epjc/s10052-015-3440-7 [arXiv:1312.7385 [hep-ph]].
- [45] F. Gonzalez Canales and A. Mondragon, “The S_3 symmetry: Flavour and texture zeroes,” *J. Phys. Conf. Ser.* **287** (2011), 012015 doi:10.1088/1742-6596/287/1/012015 [arXiv:1101.3807 [hep-ph]].
- [46] K. Harayama and N. Okamura, “Exact parametrization of the mass matrices and the KM matrix,” *Phys. Lett. B* **387** (1996), 614-622 doi:10.1016/0370-2693(96)01079-9 [arXiv:hep-ph/9605215 [hep-ph]].
- [47] S. Antusch and C. Sluka, “Predicting the Sparticle Spectrum from GUTs via SUSY Threshold Corrections with SusyTC,” *JHEP* **07** (2016), 108 doi:10.1007/JHEP07(2016)108 [arXiv:1512.06727 [hep-ph]].
- [48] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz and M. A. Schmidt, “Running neutrino mass parameters in see-saw scenarios,” *JHEP* **03** (2005), 024 doi:10.1088/1126-6708/2005/03/024 [arXiv:hep-ph/0501272 [hep-ph]].
- [49] Cerón Erazo, Carlos D. (2021), “Modelo de mezcla de quarks con simetría S_3 modular y 3 dobletes de Higgs,” Tesis de Maestría, Instituto de Física-UNAM, CDMX.
- [50] R. L. Workman *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics,” *PTEP* **2022**, 083C01 (2022) doi:10.1093/ptep/ptac097
- [51] M. Fallbacher, M. Ratz and P. K. S. Vaudrevange, “No-go theorems for R symmetries in four-dimensional GUTs,” *Phys. Lett. B* **705**, 503-506 (2011) doi:10.1016/j.physletb.2011.10.063 [arXiv:1109.4797 [hep-ph]].
- [52] M. C. Chen, S. Ramos-Sánchez and M. Ratz, “A note on the predictions of models with modular flavor symmetries,” *Phys. Lett. B* **801**, 135153 (2020) doi:10.1016/j.physletb.2019.135153 [arXiv:1909.06910 [hep-ph]].