UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una visión de la categoría de gavillas como “modelo” de la teoría de conjuntos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A:

Juan Ricardo Rosas Mendoza

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Frank Patrick Murphy Hernandez

CD. MX. 2023

Agradecimientos

Agradezco a Margarita, mi mamá, sin ella nada sería posible. A mi hermano Juan Carlos, le agradezco todo su apoyo, compañia y cariño. Agradezco a Jesica su amor y comprensión. A todos mis amigos, muchas gracias. Agradezco a mi tutor el Dr. Frank Murphy por su paciencia, dedicación y amistad. Agradezco al Dr. Hugo Rincón por su trabajo y comentarios, al Dr. Omar Antolín por su apoyo y comprensión, al Dr. Francisco Marmolejo por su paciencia y trabajo y al M. en C. José Juan por sus comentarios y atención.

Índice general

Introducción

A finales del siglo XIX, dentro de la topología y la geometría se comenzaron a desarrollar técnicas para el estudio de los espacios topológicos X, a través del análisis de familias de funciones continuas con codominio el mismo espacio X. A dichas funciones continuas con codominio X se les conoce como *haces* sobre X. Dentro de la gran variedad de ejemplos de haces, se encuentra el de *haz fibrado*, el cual es un haz al que se le requiere que sea una aplicación más una condición de trivialidad local. Otro ejemplo es el concepto de *G-haz principal*, donde G es un grupo que actúa de forma continua en las fibras del haz. También se cuenta con los *haces vectoriales* que son haces cuyas fibras poseen estructura de espacio vectorial y cumplen una condición técnica de compatibilidad. Sin embargo, dentro de estos diferentes conceptos de haz, uno de los más importantes desde una perspectiva histórica para este trabajo es el de *espacio cubriente*. Este concepto permite relacionar las gavillas con el grupo fundamental y así con la cohomología. Esto debido a que si al espacio X se le piden condiciones técnicas suficientes, entonces se tiene la existencia de un *cubriente universal*. Resulta ser que el grupo de automorfismos de la cubriente universal de X coincide con el grupo fundamental $\pi_1(X)$. A este grupo de automorfismos del cubriente universal se le conoce como el *grupo fundamental de Chevalley*, y fue introducido por C. Chevalley en su texto "Theory of Lie groups"[3], en el año de 1946. Por último, el ejemplo que será de mayor interés para el presente trabajo es el de espacio étalé, el cual es un haz sobre X que además satisface el ser un homeomorfismo local. Estos conceptos están relacionados, puesto que toda cubriente es un espacio étalé. Más aún, está bien descrito cuando un espacio étalé resulta ser una cubriente.

De forma paralela y desde un contexto más diferencial, se desarolló el concepto de gavilla, cuyo primer autor es Jean Leray. Leray deseaba llevar la teoría de forma diferencial de Elie Cartan [7], a una teoría que se pudiese aplicar en todos los espacios topológicos. Para esta nueva teoría era primordial tener los correspondientes teoremas de De Rham [4]. La investigación de Leray fue publicada en el famoso "Comptes Rendues", en los siguientes artículos [19], [18], [20], [21]. Después, con la ayuda de Heinz Hopf se publicaron los artículos [21], [24] y [22]. Cabe mencionar que esta trilogía de artículos es conocida como un "Curso de Topología Algebraica de un profesor en cautiverio". El titulo hace referencia a que esta investigación la hizo Leray mientras estaba cautivo por los alemanes en el campo Oflag XVIIA en Austria. Es increíble cómo las ideas de Leray sobre topología algebraica marcaron el curso de las matemáticas durante los siguientes sesenta años, y aunque muchos de sus resultados se conocieron hasta el final de la segunda guerra mundial, en menos de cinco años ya eran ampliamente conocidos y dominados. A Leray se le reconocen con respecto a estos artículos tres grandes ideas:

- Gavilla
- Cohomología de Gavillas
- Sucesiones Espectrales

El objetivo de esta tesis se centra en la primer idea, el concepto de *Gavilla*.

Los conceptos de carácter geométrico antes presentados se unen con los de Leray cuando al final de la segunda guerra mundial, Henri Cartan y su estudiante Louis Koszul obtienen acceso a los escritos de Leray y deciden estudiarlos. Más aún, se dan a la tarea de esclarecerlo y expandirlo, es ahí donde logran definir el concepto de gavilla en términos de un espacio étalé. Al parecer, esta idea fue sugerida por Michel Lazard [2]. Es importante mencionar que se puede considerar que el principal exponente de esta técnica en el momento fue Jean Pierre Serre, quien también fue alumno de Henri Cartan. El siguiente en explotar la técnica fue Alexander Grothendieck, el cual demuestra que ambas construcciones son equivalentes.

Roger Godement, un análista, escribe el primer libro sobre la teoría de gavillas, en el que resalta el poder de esta teoría y su relativa facilidad, pues al no ser él experto en el tema, sin embargo posee la capacidad de escribir el primer texto de referencia sobre esta teoría en la época. Sobre la versatilidad de la teoría de gavillas, Godement escribió en su libro [9]:

"Alors que la technique des faisceaux envahit les branches les plus diverses des Mathématiques"

Que se traduce como:

"Así la técnica de las gavillas invade una gran diversidad de las ramas de las Matemáticas"

Esta idea es muy importante pues se puede ver como un antecedente de la visión de Johnstone [16] de la teoría de gavillas (haciendo un uso amplio de los topos elementales como un concepto amplio de la teoría de gavillas), donde Johnstone hace uso de la parábola de "los hombres ciegos y el elefante". La parábola [12] es la siguiente:

Un grupo de ciegos escuchó que un animal extraño, llamado elefante, había sido traído al pueblo, pero ninguno de ellos estaba al tanto de su forma. Por curiosidad dijeron: "Debemos inspeccionarlo y saberlo al tacto, de lo que somos capaces". Entonces, lo buscaron, y cuando lo encontraron, lo buscaron a tientas. La primera persona, cuya mano aterrizó en el tronco, dijo: "Este ser es como una serpiente gruesa". Para otro, cuya mano llegó a la oreja, le parecía una especie de abanico. En cuanto a otra persona, cuya mano estaba sobre su pierna, dijo "el elefante es un pilar como el tronco de un árbol". El ciego que colocó su mano sobre su costado dijo que el elefante "es una pared". Otro que palpó su cola, lo describió como una cuerda. El último palpó su colmillo, afirmando que el elefante es aquello que es duro y liso como una lanza.

Esta parábola es usada como una metafora por Johnstone, para exponer la verstilidad de la teoría de gavillas en la matemática. Para Johnstone, la teoría de gavillas, con el concepto de topos, es como el elefante de la parábola va apareciendo en distintas áreas de las matematicas, pero en cada área cuesta trabajo reconocerla por que se presenta de diferentes formas en cada una.

El objetivo principal de la tesis es explotar uno de estos aspectos de la teoría de gavillas, particularmente, el poder ver a la teoría de gavillas como una teoría de conjuntos. Con fines de delimitar el trabajo se plantea como una teoría de conjuntos intuitiva al estilo de Paul Halmos [14]. Una teoría intuitiva de conjuntos se puede pensar de forma coloquial como la teoría que todos los matemáticos usan en el día a día, sin la necesidad de conocer la axiomatización de la misma. Así mismo la metodología propuesta es partir del enfoque topológico de la teoría de gavillas, lo que permite presentar a la teoría de conjuntos desde la topología algebraica.

En el primer capitulo se presentará el concepto de espacio étalé así como sus propiedades básicas, para luego dar el concepto de pregavilla y gavilla, y así ver que todo espacio étalé induce una gavilla. Así mismo se mostrará cómo a partir de una pregavilla construir un espacio étalé. Esto es importante porque al realizar estas dos construcciones los operadores resultan ser inversos. Más aún, esto sucede a un nivel de categorías por lo que se tiene como resultado que la categoría de gavillas y la categoría de espacios étalé son equivalentes. Sin embargo, es importante empezar el concepto desde la definción de pregavilla, dado que el resultado más importante quizá sea que a toda pregavilla se le puede asignar una gavilla, a este proceso se le llama gavillificación. Este resultado es importante a nivel técnico porque permitirá realizar las construcciones en la categoría de pregavillas, donde son sencillas en el sentido de que se hacen entrada a entrada como se dice coloquialmente, y luego al gavillificarlas se obtiene la construcción deseada en la categoría de gavillas. Las referencias principales para este capítulo son los textos [1], [26], [27] y [28].

En el segundo capítulo se presenta el concepto de un topos elemental, el cual se verá que puede interpretarse como una teoría de conjuntos intuitiva. Más aún, el resultado principal de este capítulo es que la categoría de gavillas sobre un espacio topológico es un topos elemental. Este resultado es muy interesante desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, porque de forma intuitiva nos dice que para cada espacio topológico se tiene un modelo de la teoría de conjuntos, lo que nos brinda de una amplia variedad de ejemplos. Sin embargo, la tesis se limita en este punto y no se explora más allá sobre cómo influyen las propiedades topológicas en los distintos "modelos". De hecho la demostración de que las gavillas forman un topos elemental es bastante compleja. Sólo a forma de mención, la demostración usual consiste en pensar que la categoría de gavillas forma un topos de Grothendieck y a partir de que todo topos de Grothendieck es un topos elemental, concluir lo deseado. Las referencias principales para este capítulo son [11] y [26].

En el tercer capítulo, se estudiará el texto canónico de William Lawvere [17] con ayuda del texto [11], en el cual se dan las bases para poder interpretar los conceptos de la teoría de conjuntos desde una perspectiva de la teoría de categorías. En este capítulo se permite una licencia para poder llamar a ciertas categorías topos de Lawvere, puesto que son conceptos previos a la noción de topos elemental, por su alto valor histórico y a su vez para reconocer el valor fundacional que tuvo Lawvere en esta teoría. Dichos topos de Lawvere son topos elementales con propiedades extras, que a manera vaga con unos cuantos axiomas más resulta ser la categoría de conjuntos. Interpretando este resultado se obtiene que la definición de topos elemental resulta ser muy elegante desde un punto de vista matemático por la minimalidad de sus axiomas y la potencia de dicha teoría, mostrando así la genialidad de Lawvere al proponer dicho concepto.

Cabe mencionar que todos los conceptos categóricos fueron extraidos de los textos [11] y [25]. Los conceptos topológicos fueron extraídos en su mayoría de [29].

Capítulo 1

Gavillas topológicas

1. Introducción

Una camino para hablar del concepto de gavilla es a través del estudio de los espacios étalé. Se definirá un espacio étalé como una terna $(\mathcal{E}, \pi, X)$ donde π es un homeomorfismo local entre los espacios topológicos $\mathcal{E}$ y X y se definirá la categoría de espacios étalé sobre un espacio X. Antes de estudiar el concepto de gavilla, se tendrá que pasar primero por la noción de pregavilla. Formalmente, una pregavilla de conjuntos sobre un espacio X será un objeto de la categoría $\mathbf{Con}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$, donde $\mathcal{O}(X)$ es la categoría generada por la retícula de abiertos del espacio X. Sin embargo, una definición equivalente permitirá ver a las pregavillas como sistemas dirigidos junto con funciones especiales, que se acordará en llamar restricciones. Las pregavillas surgirán de manera natural en la categoría de espacios étalé, y puesto que la colección de pregavillas sobre un espacio formará una categoría, esta relación natural estará codificada en un funtor. Finalmente, las gavillas serán pregavillas con dos propiedades extras que permitirán saber el comportamiento local de los elementos de los conjuntos, así como una manera de pegar dichos elementos de manera correcta. La colección de gavillas resultará ser también una categoría y estará intrínsecamente relacionada con la categoría de pregavillas. La categoría de gavillas tendrá muchas propiedades categóricas deseables, dichas propiedades y sus consecuencias serán estudiadas con profundidad en el Capítulo 2. Un resultado muy interesante de este capítulo es que la categoría de conjuntos **Con** es un caso particular de la categoría de gavillas sobre un espacio particular. Así como la noción de pregavilla surge naturalmente en un espacio étalé, inversamente, a toda pregavilla se le podrá asignar un espacio étalé. Por último, uno de los resultados más importantes de este capítulo será probar que la categoría de espacios étalé es equivalente a la categoría de gavillas sobre un espacio X. Para la parte de espacios étalé, pregavillas y gavillas, las referencias principales son los textos [1], [26], [27] y [28]. La referencia principal para los conceptos topológicos es [29] y para los conceptos de teoría de categorías es el texto [25].

2. Homeomorfismos locales

Estudiar a los homeomorfismos locales en concreto y sus propiedades topológicas más generales permitirá obtener muchos resultados en la teoría de espacios étalé. Los homeomorfismos locales tienen propiedades topológicas deseables, como son el ser funciones continuas y abiertas. Además, se probará que los homeomorfismos locales transmiten la información topológica local de un espacio en otro.

Definición 2.1. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es un* ***homeomorfismo local*** *si para cada $x \in X$ existe un abierto U de X con $x \in U$, de tal manera que se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *$f(U)$ es abierto en Y;*
2. *La función*
$$f|_U : U \longrightarrow f(U)$$
es un homeomorfismo, donde U y $f(U)$ poseen la topología de subespacio en X y Y, respectivamente.

Una característica básica de los homeomorfismos locales es que ser un homeomorfismo local es una propiedad local en el siguiente sentido.

Proposición 2.2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local y U abierto de X, entonces la función $f|_U$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $x \in U$ cualquiera, como f es un homeomorfismo local entonces existe V abierto de X con $x \in V$, $f(V)$ abierto en Y y $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ un homeomorfismo. Defínase $W := U \cap V$ de donde es claro que $x \in W$ y que W es abierto de U. Ahora se verificará que $f|_U(W)$ es abierto en $f(U)$. Nótese que W es abierto de V por lo que $f|_V(W) = f(W)$ es abierto en $f(V)$ y como $f(V)$ es abierto de Y, entonces $f(W)$ es abierto en Y, por último nótese que $f(W) = f(W) \cap f(U)$ pues $W \subseteq U$, por lo que $f|_U(W) = f(W)$ es abierto en $f(U)$. Basta verificar que $(f|_U)|_W = f|_W : W \longrightarrow f(W)$ es un homeomorfismo. Claramente $f|_W$ es una función continua y suprayectiva, por lo que resta verificar que es una función abierta e inyectiva. Tómese A abierto de W, por lo que existe B abierto de X tal que $A = B \cap W = B \cap (U \cap V)$. Claramente A es un abierto de V, de donde $f|_V(A) = f(A)$ es abierto en $f(V)$ y por lo tanto abierto en Y. Como $f(A) \subseteq f(W)$ entonces se tiene que $f(A) = f(A) \cap f(W)$ es abierto en $f(W)$, por lo que $f|_W$ es una función abierta. Para verificar la inyectividad, sean $y, z \in W$ tales que $f|_W(y) = f|_W(z)$. Como $W \subseteq V$ entonces $y, z \in V$ por lo que $f|_V(y) = f|_W(y) = f|_W(z) = f|_V(z)$ pero $f|_V$ es un homeomorfismo (en particular es una función inyectiva) de donde $y = z$, y así $f|_W$ es una función inyectiva. De aquí se sigue que la función $f|_W$ es un homeomorfismo, lo que prueba que $f|_U$ es un homeomorfismo local. ∎

Observación 2.3. *En virtud de la Proposición 2.2, dados un homeomorfismo local $f : X \longrightarrow Y$, V un abierto de X y $x \in V$, el abierto U de la Definición 2.1 puede ser tomado, sin pérdida de generalidad, con la propiedad adicional de que $U \subseteq V$.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de homeomorfismos locales entre espacios topológicos.

Ejemplos 2.4. *Sean X y Y espacios topológicos cualesquiera:*

1. *Para todo U abierto del espacio X, la función inclusión $i : U \hookrightarrow X$ es un homeomorfismo local.*
2. *Todo homeomorfismo $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo local.*
3. *Sea A un conjunto cualquiera equipado con la topología discreta. Entonces la función proyección $q : X \times A \to X$ es un homemorfismo local, donde $X \times A$ está equipado con la topología producto.*
4. *Sea $\{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta del espacio topológico Y. Defínase $X := \bigsqcup_{i\in I} U_i$ como la unión disjunta de los abiertos U_i. Entonces la función proyección $q : X \to Y$ es un homeomorfismo local, donde X posee la topología suma.*
5. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$ es un homeomorfismo local.*

Las siguientes dos proposiciones permitirán observar que los homeomorfismos locales tienen propiedades topológicas deseables, como son la continuidad y el ser funciones abiertas. Más adelante, estos resultados permitirán probar que una gran cantidad de propiedades topológicas se preservan a través de los homeomorfismos locales.

Proposición 2.5. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local, entonces f es una función continua.*

Demostración. Sean U un abierto arbitrario de Y y $x \in f^{-1}(U)$ un elemento cualquiera, por hipótesis existe V abierto de X, de tal manera que $x \in V$, $f(V)$ es abierto en Y y $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ es un homeomorfismo. Ahora bien, $U \cap f(V)$ es un abierto de $f(V)$, por lo que $f|_V^{-1}(U \cap f(V)) = f|_V^{-1}(U) \cap V$ es un abierto de V, y por lo tanto, abierto de X, pues V es abierto. Además $x \in f|_V^{-1}(U) \cap V \subseteq f^{-1}(U)$, es decir x es un punto interior de $f^{-1}(U)$ y así, $f^{-1}(U)$ es abierto. ■

Proposición 2.6. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local, entonces f es una función abierta.*

Demostración. Sean U abierto de X y $y \in f(U)$, por lo que existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Por la Observación 2.3. existe $V \subseteq U$ abierto de X tal que

$x \in V$, $f(V)$ es abierto en Y y $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ un homeomorfismo. Nótese que $y = f(x) \in f(V) \subseteq f(U)$, por lo tanto $f(U)$ es abierto en Y. ■

Concluir el siguiente resultado es inmediato.

PROPOSICIÓN 2.7. *Todo homeomorfismo local biyectivo es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f un homeomorfismo local. Por las Proposiciones 2.5 y 2.6, f es una función continua y abierta, y por hipótesis f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo. ■

Antes de probar que los homeomorfismos locales transmiten la información topológica local de un espacio en otro, se recordarán algunas definiciones y algunos resultados básicos de topología general, esto con el fin de concretar los resultados y las pruebas.

DEFINICIÓN 2.8. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $V \subseteq X$ entonces:*

1. *Se dirá que V es una **vecindad** de x en X, si existe U abierto de X con $x \in U$ y se satisface que $U \subseteq V$.*
2. *Se denotará por $\mathcal{V}(x)_X$ a la colección de todas las vecindades de x en X. Cuando el contexto sea claro, se escribirá $\mathcal{V}(x)$ en lugar de $\mathcal{V}(x)_X$.*
3. *Una **base de vecindades** de x en X es una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ tal que, para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ que cumple $x \in B \subseteq V$.*

DEFINICIÓN 2.9. *Sea X un espacio topológico. Se dirá que X es:*

1. ***localmente compacto** si para cualesquiera $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{V}(x)$ compacto, tal que $x \in B \subseteq V$;*
2. ***localmente conexo** si para cualesquiera $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{V}(x)$ abierto y conexo, tal que $x \in B \subseteq V$;*
3. ***localmente conexo por trayectorias** si para cualesquiera $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{V}(x)$ conexo por trayectorias, tal que $x \in B \subseteq V$;*
4. ***primero numerable** si cada $x \in X$ posee una base de vecindades numerable.*

OBSERVACIÓN 2.10. *Sea X un espacio topológico. Si se hace la convención de que X sea **localmente primero numerable** significa que X es primero numerable, entonces gracias a la Definición 2.8 es posible reescribir la Definición 2.9 de una manera más resumida como sigue: Se dirá que X es:*

1. ***localmente compacto** si para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ base de vecindades de x, tal que todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es compacto;*
2. ***localmente conexo** si para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ base de vecindades de x, tal que todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es abierto y conexo;*
3. ***localmente conexo por trayectorias** si para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ base de vecindades de x, tal que todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es conexo por trayectorias;*

4. ***localmente primero numerable*** *si para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ base de vecindades de x, tal que $\mathcal{B}(x)$ es numerable.*

Si se hace una última convención, entonces la Definición 2.9 puede reescribirse de una manera aún más resumida. La última convención es la siguiente:

DEFINICIÓN 2.11. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ una base de vecindades de x en X:*

1. *Sea $\mathbb{P}$ una propiedad topológica de la siguiente lista de propiedades topológicas: compacto y conexo por trayectorias. Se dirá que $\mathcal{B}(x)$ es $\mathbb{P}$ si cada elemento de la base es $\mathbb{P}$.*
2. *Si $\mathbb{P}$ es la propiedad de conexo, se dirá que $\mathcal{B}(x)$ es $\mathbb{P}$ si cada elemento de la base es abierto y $\mathbb{P}$.*
3. *Si $\mathbb{P}$ es la propiedad primero numerable, se dirá que $\mathcal{B}(x)$ es $\mathbb{P}$ si $\mathcal{B}(x)$ es numerable.*

En este momento ya se poseen las herramientas conceptuales necesarias para dar una buena definición que resuma la Definición 2.9.

DEFINICIÓN 2.12. *Sean X un espacio topológico y $\mathbb{P}$ una propiedad topológica de la siguiente lista de propiedades topológicas: compacto, conexo, conexo por trayectorias y primero numerable. Entonces se dirá que X es* ***localmente*** *$\mathbb{P}$ si cada $x \in X$ posee una base $\mathcal{B}(x)$ que sea $\mathbb{P}$.*

Los siguientes resultados serán de gran ayuda para probar que los homeomofismos locales transmiten propiedades topológicas locales de un espacio en otro.

PROPOSICIÓN 2.13. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos y $A \subseteq X$ cualquiera, entonces si A es:*

1. *compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*
2. *conexo, entonces $f(A)$ es conexo.*
3. *conexo por trayectorias, entonces $f(A)$ es conexo por trayectorias.*

PROPOSICIÓN 2.14. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces dado $B \subseteq A$ se tiene que:*

1. *B es compacto en el subespacio A si y sólo si B es compacto en X.*
2. *B es conexo en el subespacio A si y sólo si B es conexo en X.*
3. *B es conexo por trayectorias en el subespacio A si y sólo si B es conexo por trayectorias en X.*

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función y $A \subseteq X$ cualquiera. Si A es numerable, entonces $f(A)$ es numerable.*

Los siguientes lemas permitirán entender la relación que existe, por un lado entre las funciones entre espacios topológicos y por otro lado las bases de vecindades de puntos de los espacios topológicos.

LEMA 2.16. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y abierta entre espacios topológicos. Si $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de x en X, entonces $f(\mathcal{B}(x))$ es una base de vecindades de $f(x)$ en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Para verificar que $f(\mathcal{B}(x))$ es una base de vecindades de $f(x)$ en Y, primero se hará ver que $f(\mathcal{B}(x)) \subseteq \mathcal{V}(f(x))$. Para empezar, nótese que para cada $f(B) \in f(\mathcal{B}(x))$ se tiene que $f(x) \in f(B)$, pues como $f(B) \in f(\mathcal{B}(x))$ entonces $B \in \mathcal{B}(x)$, es decir $x \in B$ y por lo tanto $f(x) \in f(B)$. Ahora bien, tómese $f(B) \in f(\mathcal{B}(x))$ cualquiera, entonces $x \in B$ pero como $\mathcal{B}(x)$ es base de vecindades, se sabe que $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$, por lo que existe U abierto de X tal que $x \in U \subseteq B$, es decir $f(x) \in f(U) \subseteq f(B)$ y $f(U)$ es abierto en Y pues f es una función abierta. Así, se concluye que $f(\mathcal{B}(x)) \subseteq \mathcal{V}(f(x))$. Para verificar que es base, tómese $V \in \mathcal{V}(f(x))$ cualquiera entonces $f(x) \in V$, es decir $x \in f^{-1}(V)$ y obsérvese que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ pues f es continua. Como $\mathcal{B}(x)$ es base de vecindades de x, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subseteq f^{-1}(V)$, por lo tanto $f(x) \in f(B) \subseteq V$ donde $f(B) \in f(\mathcal{B}(x))$. En conclusión, se tiene que $f(\mathcal{B}(x))$ es una base de vecindades de $f(x)$ en Y. ■

LEMA 2.17. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ un elemento, $\mathcal{B}(x)$ una base de vecindades de x en X y $A \subseteq X$ tal que $x \in A$, entonces*

$$\mathcal{B}(x) \cap A := \{B \cap A : B \in \mathcal{B}(x)\}$$

es una base de vecindades de x en el subespacio A.

DEMOSTRACIÓN. Primero se verifica que $\mathcal{B}(x)\cap A \subseteq \mathcal{V}(x)_A$. Sea $B\cap A \in \mathcal{B}(x)\cap A$ un elemento cualquiera, es claro que $x \in B \cap A$. Como $\mathcal{B}(x)$ es base de vecindades de x en X, existe U abierto de X tal que $x \in U \subseteq B$, luego $x \in U \cap A \subseteq B \cap A$ y como $U \cap A$ es abierto de A, entonces $B \cap A$ es vecindad de x en A. Por último, tómese $V \in \mathcal{V}(x)_A$ cualquiera, entonces existe $W \cap A$ abierto de A, donde W es abierto de X tal que $x \in W \cap A \subseteq V$, pero entonces $x \in W$ y por ser abierto, $W \in \mathcal{V}(x)_X$ por lo que existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subseteq W$, por lo tanto $x \in B \cap A \subseteq W \cap A \subseteq V$. Así, se ha probado que la colección $\mathcal{B}(x) \cap A$ es una base de vecindades de x en el subespacio A. ■

LEMA 2.18. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta, continua e inyectiva, $x \in X$ y $\mathcal{B}(f(x))$ una base de vecindades de $f(x)$ en Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{B}(f(x))) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(f(x))\}$ es una base de vecindades de x en X.*

DEMOSTRACIÓN. Nótese que como f es una función abierta continua e inyectiva entonces al concentrarse únicamente en la imagen de la función, f se puede factorizar como sigue:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & f(X) \arrow[d, hook, "i"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde f' es un homeomorfismo (esta función f' es exactamente la función f pero con codominio exactamente su imagen) e i es la función inclusión. Por el Lema 2.17 la colección $\mathcal{B}(f(x)) \cap f(X)$ es una base de vecindades de $f(x)$ en el subespacio $f(X)$. Como f' es un homeomorfismo entonces $(f')^{-1}$ es una función continua y abierta, por lo que por el Lema 2.16 la colección $(f')^{-1}(\mathcal{B}(f(x)) \cap f(X)) = (f')^{-1}(\mathcal{B}(f(x))) \cap (f')^{-1}(f(X)) = (f')^{-1}(\mathcal{B}(f(x))) \cap X = (f')^{-1}(\mathcal{B}(f(x))) = f^{-1}(\mathcal{B}(f(x)))$ es una base de vecindades de $(f')^{-1}(f(x)) = x$ en X. ■

LEMA 2.19. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$, $A \subseteq X$ abierto y $\mathcal{B}(x)$ base de vecindades de x en el subespacio A, entonces $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de x en X.*

DEMOSTRACIÓN. Primero se verifica que $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)_X$. Sea $x \in B$, entonces existe $U \cap A$ abierto de A, con U abierto de X tal que $x \in U \cap A \subseteq B$, pero como A es abierto, entonces $U \cap A$ es abierto de X, por lo que $B \in \mathcal{V}(x)$. Por último, tómese $V \in \mathcal{V}(x)_X$, entonces $x \in V$ por lo que existe U abierto de X tal que $x \in U \subseteq V$ y así $x \in U \cap A \subseteq V \cap A \subseteq V$ y como $U \cap A$ es abierto de A en particular es vecindad en A, entonces existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subseteq U \cap V$, por lo tanto $x \in B \cap A \subseteq V$. ■

Para terminar esta sección, se probará el resultado que se ha venido mencionando desde el principio, a saber, que los homeomorfismos locales transmiten propiedades topológicas locales de un espacio en otro. Nótese que el trabajo conceptual que se realizó en esta sección permite ahorrar muchas palabras en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.20. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local y $\mathbb{P}$ una propiedad topológica de la siguiente lista: compacto, conexo, conexo por trayectorias y primero numerable. Entonces X es localmente $\mathbb{P}$ si y sólo si $f[X]$ es localmente $\mathbb{P}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que X es localmente $\mathbb{P}$ y sea $y \in f[X]$ un elemento cualquiera. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es localmente $\mathbb{P}$, existe $\mathcal{B}(x)$ una base de vecindades $\mathbb{P}$. Por el Lema 2.16 se tiene que $f(\mathcal{B}(x))$ es una base de vecindades de y en $f[X]$. Como f es una función continua y abierta, entonces por las Proposiciones 2.13 y 2.15, $f(\mathcal{B}(x))$ es una base de vecindades $\mathbb{P}$ de y en $f[X]$. Así, $f[X]$ es un espacio localmente $\mathbb{P}$.
Supóngase ahora que $f[X]$ es localmente $\mathbb{P}$ y tómese $x \in X$ un elemento cualquiera. Por un lado $f(x) \in f[X]$ y como $f[X]$ es localmente $\mathbb{P}$, existe $\mathcal{B}(f(x))$ una base de vecindades $\mathbb{P}$ de $f(x)$ en $f[X]$. Por otro lado, como f es un homeomorfismo local,

existe U abierto de X con $x \in U$, $f(U)$ abierto en Y y $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ un homeomorfismo. Considérese la colección

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(f(x)) \cap f(U) = \{B \cap f(U) : B \in \mathcal{B}(f(x))\}$$

Por la Proposición 2.14 y el Lema 2.17., la colección $\mathcal{B}$ es una base de vecindades $\mathbb{P}$ de $f(x)$ en el subespacio $f(U)$, y como $f|_U$ es un homeomorfismo, entonces por el Lema 2.18 y la Proposición 2.13 la colección

$$\{(f|_U)^{-1}(W) : W \in \mathcal{B}\}$$

es una base de vecindades $\mathbb{P}$ de x en U, entonces por el Lema 2.19 y la Proposición 2.14. esta colección es una base de vecindades $\mathbb{P}$ de x en X.

■

3. Espacios étalé

Una vez estudiadas las propiedades más generales de los homeomorfismos locales, en esta sección se pasará al estudio de los espacios étalé, para lo cual se utilizará la herramienta desarrollada en la sección anterior. Se investigarán algunas propiedades topológicas de los espacios etalé y se definirán los morfismos entre espacios etalé. Se hará notar que estos morfismos junto con los espacios etalé forman una categoría que se denotará por $\mathcal{E}(X)$. También en esta sección se estudiarán algunas propiedades de esta categoría.

Definición 3.1. *Se dirá que una terna de la forma*

$$(\mathcal{E}, \pi, X)$$

es un ***espacio étalé*** *si $\mathcal{E}$ y X son espacios topológicos, y además*

$$\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$$

es un homeomorfismo local. Al espacio X se le llamará ***espacio base*** *del espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ y a la función π se le conocerá como la* ***proyección*** *del espacio étalé.*

Observación 3.2. *Dado un espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ sobre X, usualmente se le denotará unicamente por $\mathcal{E}$, siempre que esto no se preste a confusión.*

En topología algebraica es usual encontrarse con el concepto de espacio cubriente, por lo que como un ejemplo concreto se hará ver que todo espacio cubriente es un espacio étalé. Antes de ello, se recordará la definición de espacio cubriente.

Definición 3.3. *Un* ***espacio cubriente*** *es una terna*

$$(\overline{X}, p, X)$$

donde $\overline{X}$ y X son espacios topológicos, y $p : \overline{X} \longrightarrow X$ es una función continua y suprayectiva. Además, se debe cumplir que, para cada $x \in X$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ abierta, de tal manera que

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

donde los U_j son abiertos, ajenos dos a dos, y además la aplicación

$$p|_{U_j} : U_j \longrightarrow V$$

es un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 3.4. *Todo espacio cubriente es un espacio étalé.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\overline{X}, p, X)$ un espacio cubriente y tómese $x \in \overline{X}$ un elemento cualquiera, entonces $p(x) \in X$. Como $(\overline{X}, p, X)$ es un espacio cubriente, existe $V \in \mathcal{V}(p(x))$ abierta y además $p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} U_j$ donde los U_j son abiertos de $\overline{X}$, ajenos dos a dos y la función $p|_{U_j} : U_j \longrightarrow V$ es un homeomorfismo. Como $p(x) \in V$, entonces $x \in p^{-1}(V)$, por lo que existe $j \in J$ de tal manera que $x \in U_j$. Además, $p(U_j) = p|_{U_j}(U_j) = V$ y como V es abierta en X, entonces $p(U_j)$ es abierto en X. Y como por hipótesis, $p|_{U_j}$ ya es un homeomorfismo, entonces el espacio cubriente es un espacio étalé. ∎

A continuación se introduce el concepto de tallo de un espacio étalé. Este concepto será fundamental para lo que sigue.

DEFINICIÓN 3.5. *Sean $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé y $x \in X$. Al conjunto*

$$\mathcal{E}_x := \pi^{-1}(x)$$

se le llamará el ***tallo*** *del espacio étalé sobre el punto x.*

Puesto que un tallo $\mathcal{E}_x$ de un espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ es un subconjunto del espacio $\mathcal{E}$, es posible considerarlo como un espacio topológico, equipándolo con la topología de subespacio. Se investigará cuál es la naturaleza de esta topología.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé. Entonces, para cada $x \in X$, se tiene que $\mathcal{E}_x$ es un subespacio discreto de $\mathcal{E}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$ un elemento cualquiera. Considérese al tallo $\mathcal{E}_x$ equipado con la topología de subespacio respecto a $\mathcal{E}$. Para ver que el tallo es un subespacio discreto, basta verificar que cualquier conjunto unitario es abierto. Para esto, sea $z \in \mathcal{E}_x$ un elemento. Por hipótesis, existe U abierto de $\mathcal{E}$ tal que $z \in U$, $\pi(U)$ es abierto en X y $\pi|_U : U \longrightarrow \pi(U)$ es un homeomorfismo. Se afirma que $\{z\} = \mathcal{E}_x \cap U$. Es claro que $\{z\} \subseteq \mathcal{E}_x \cap U$. Si $u \in \mathcal{E}_x \cap U$, entonces $\pi(u) = \pi(z) = x$ y como $\pi|_U$ es un homeomorfismo, entonces $u = z$. Así $\{z\} = \mathcal{E}_x \cap U$, y por lo tanto $\{z\}$ es abierto. En conclusión, $\mathcal{E}_x$ es un subespacio discreto. ∎

El siguiente resultado muestra que la topología de un espacio étalé $\mathcal{E}$ está determinada por el comportamiento de ciertos abiertos de $\mathcal{E}$, a saber, aquellos para los cuales la restricción de la proyección π es un homeomorfismo.

Proposición 3.7. *Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé y denótese por $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ a la retícula de abiertos de $\mathcal{E}$. Entonces los abiertos U de $\mathcal{E}$, para los cuales la restricción $\pi|_U$ es un homeomorfismo, forman una base para la topología de $\mathcal{E}$.*

Demostración. Defínase

$$\mathcal{B} := \{U \in \mathcal{O}(\mathcal{E}) : \pi|_U \text{ es un homeomorfismo}\}$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología en $\mathcal{E}$. En efecto, es claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{E})$. Ahora bien, sea W abierto no vacío de $\mathcal{E}$ y $x \in W$ cualquiera. Como π es un homeomorfismo local, existe U abierto de $\mathcal{E}$, tal que $x \in U$, $\pi(U)$ es un abierto de X y $\pi|_U$ es un homeomorfismo. Defínase $\mathcal{U} := U \cap W$, claramente $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{E}$, con $x \in \mathcal{U} \subseteq W$. Resta verificar que $\pi|_{\mathcal{U}}$ es un homemomorfismo. Como π es una función continua y abierta y $\mathcal{U}$ es abierto de $\mathcal{E}$, entonces $\pi|_{\mathcal{U}}$ es una función continua y abierta. Para ver que es una función inyectiva sean $x, y \in \mathcal{U}$ tales que $\pi|_{\mathcal{U}}(x) = \pi|_{\mathcal{U}}(y)$ lo cual es equivalente a $\pi|_U(x) = \pi|_U(y)$, de donde $x = y$. Así, $\pi|_{\mathcal{U}}$ es un homeomorfismo. ■

A continuación se definen los morfismos entre espacios étalé. Más adelante, se hará notar que un morfismo de espacios étalé permite construir un nuevo espacio étalé.

Definición 3.8. *Sea X un espacio topológico:*

1. *Sean $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé sobre X. Un **morfismo de espacios étalé** es una función continua $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2. *Sean $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé sobre X y $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morfismo entre estos espacios étalé. Se dirá que ϕ es un **isomorfismo** si existe $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ de tal manera que*

$$\phi \circ \psi = id_{\mathcal{F}} \qquad \psi \circ \phi = id_{\mathcal{E}}$$

3. *Se dirá que dos espacios étalé $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ son **isomorfos** si existe un isomorfismo de espacios étalé $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$. A esta situación se le denotará por $(\mathcal{E}, \pi_1, X) \cong (\mathcal{F}, \pi_2, X)$.*

Los morfismos de espacios étalé poseen la propiedad de mandar los tallos de un espacio, en tallos correspondientes en otro espacio, como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean* $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ *y* $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ *dos espacios étalé sobre* X. *Si* $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *es un morfismo de espacios étalé, entonces para cada* $x \in X$ *se cumple* $\phi(\mathcal{E}_x) \subseteq \mathcal{F}_x$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ es un morfismo de espacios étalé y tómese $x \in X$. Obsérvese que

$$\begin{array}{rcl}\phi(\mathcal{E}_x) & = & \phi(\pi_1^{-1}(x)) \\ & = & \phi(\phi^{-1}(\pi_2^{-1}(x))) \\ & \subseteq & \pi_2^{-1}(x) \\ & = & \mathcal{F}_x.\end{array}$$

■

Como se mencionó anteriormente, si se tienen dos espacios étalé y un morfismo entre ellos, entonces se puede construir un nuevo espacio étalé, pero sobre otra base.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea* $\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \to (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ *un morfismo de espacios étalé. Entonces* ϕ *es un homeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $e \in \mathcal{E}$ un elemento cualquiera, entonces $\phi(e) \in \mathcal{F}$. Como π_2 es un homeomorfismo local, existe V abierto de $\mathcal{F}$ con $\phi(e) \in V$, $\pi_2(V)$ abierto en X y $\pi_2|_V : V \longrightarrow \pi_2(V)$ un homeomorfismo. Como la función ϕ es continua, existe un U abierto de $\mathcal{E}$ con $e \in U$ y $\phi(U) \subseteq V$. Por la Observación 2.3 se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que además $\pi_1(U)$ es abierto en X y $\pi_1|_U : U \longrightarrow \pi_1(U)$ es un homeomorfismo. Nótese que $\pi_1(U) = \pi_2(\phi(U))$ es un abierto de X, por lo que $\pi_2^{-1}(\pi_2(\phi(U)))$ es un abierto de $\mathcal{F}$, pues π_2 es continua, por último nótese que $\pi_2^{-1}(\pi_2(\phi(U))) = \phi(U)$ pues $\pi_2|_V$ es un homeomorfismo (en particular una biyección) y $\phi(U) \subseteq V$. Por lo tanto $\phi(U)$ es abierto en $\mathcal{F}$. Basta probar que $\phi|_U : U \longrightarrow \phi(U)$ es un homeomorfismo. Para esto, se afirma que $\phi|_U = (\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)} \circ \pi_1|_U$. En efecto, primero nótese que ambas funciones poseen el mismo dominio y codominio. Por un lado, $dom((\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)} \circ \pi_1|_U) = dom(\pi_1(U)) = U$ y por otro lado $cod((\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)} \circ \pi_1|_U) = cod((\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)}) = \pi_2^{-1}(\pi_1(U)) = \pi_2^{-1}(\pi_2(\phi(U))) = \phi(U)$ pues $\phi(U) \subseteq V$ y $\pi_2|_V$ es un homeomorfismo. Por último sea $x \in U$ cualquiera, entonces

$$\begin{array}{rcl}((\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)} \circ \pi_1|_U)(x) & = & (\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)}(\pi_1|_U(x)) \\ & = & (\pi_2)^{-1}1_{\pi_1(U)}(\pi_2|_{\phi(U)}(\phi|_U(x))) \\ & = & (\pi_2)^{-1}|_{\pi_2(\phi(U))}(\pi_2|_{\phi(U)}(\phi|_U(x))) \\ & = & \phi|_U(x).\end{array}$$

Por lo tanto $\phi|_U = (\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)} \circ \pi_1|_U$. Como $\pi_2^{-1}|_V$ es un homeomorfismo y $\pi_1(U) = \pi_2(\phi(U)) \subseteq \pi_2(V)$ es un abierto, entonces $(\pi_2)^{-1}|_{\pi_1(U)}$ es un homeomorfismo. Puesto que la composición de homeomorfismos es nuevamente un homeomorfismo se tiene que $\phi|_U$ es un homeomorfismo. ■

COROLARIO 3.11. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos espacios étalé sobre un espacio X y $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morfismo de espacios étalé, entonces la terna*

$$(\mathcal{E}, \phi, \mathcal{F})$$

es un espacio étalé sobre el espacio $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 3.10. ■

OBSERVACIÓN 3.12. *Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé. Obsérvese que la función continua $id_{\mathcal{E}}$ es tal que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "id_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

A esta función se le llamará ***morfismo identidad*** *del espacio étalé $\mathcal{E}$. Más aún, si se toman $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé sobre X, y ϕ un morfismo entre ellos, entonces es claro que*

$$id_{\mathcal{F}} \circ \phi = \phi \qquad \phi \circ id_{\mathcal{E}} = \phi$$

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ y $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dos morfismos de espacios étalé sobre X. Entonces la composición $\psi \circ \phi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de espacios étalé.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la composición de funciones continuas es continua, basta checar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathcal{G} \arrow[dl, "\pi_3"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es decir, basta demostrar que $\pi_1 = \pi_3 \circ (\varphi \circ \phi)$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} \pi_3 \circ (\varphi \circ \phi) &= (\pi_3 \circ \varphi) \circ \phi \\ &= \pi_2 \circ \phi && \text{(pues } \varphi \text{ es un morfismo de espacios étalé)} \\ &= \pi_1 && \text{(pues } \phi \text{ es un morfismo de espacios étalé)} \end{aligned}$$

■

A continuación se definirá la categoría de espacios étalé sobre una base X. Más adelante se verá qué sucede si se cambia la base X por otro espacio específico.

DEFINICIÓN 3.14. *Sea X un espacio topológico. Se denotará por $\mathcal{E}(X)$ a la* ***categoría de espacios étalé sobre*** *X, cuyos objetos son los espacios étalé sobre X y los morfismos son los morfismos entre espacios étalé.*

Ahora bien, otra de las nociones fundamentales para el estudio de los espacios étalé es la de subespacio étalé. Antes de esto, el siguiente resultado es de gran ayuda.

PROPOSICIÓN 3.15. *Sean $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé sobre X y U abierto de $\mathcal{E}$. Entonces $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es un homeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in U$ un elemento cualquiera. Puesto que $U \subseteq \mathcal{E}$ y π es un homeomorfismo local, existe V abierto de $\mathcal{E}$, donde $u \in V$, $\pi(V)$ es abierto en X y además $\pi|_V$ es un homeomorfismo. Defínase $W := U \cap V$, es claro que $x \in W$, W es abierto de U y que $\pi|_U(W)$ es abierto de $\pi(U)$. Basta verificar que $(\pi|_U)|_W : W \longrightarrow \pi|_U(W)$ es un homeomorfismo. Pero obsérvese que esta función es la resctricción de una función continua e inyectiva, por lo tanto $(\pi|_U)|_W$ es ya una función continua y biyectiva. Para verificar que es una función abierta, nótese que $(\pi|_U)|_W = \pi_W$, entonces si $J \cap W$ es abierto de W, se tiene que $\pi|_W(J \cap W) = \pi|_U(J \cap W)$ el cual es un abierto de $\pi(U)$ y por tanto abierto de $\pi|_U(W)$. ■

Por tanto, se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 3.16. *Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé y U abierto de $\mathcal{E}$. Entonces $(U, \pi|_U, \pi(U))$ es un espacio étalé.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un abierto de $\mathcal{E}$, por la Proposición 3.14. se tiene que π_U es un homeomorfismo local, por tanto $(U, \pi_U, \pi(U))$ es un espacio étalé. ■

Este corolario da paso a la definición de subespacio étalé.

DEFINICIÓN 3.17. *Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé sobre X. Un* ***subespacio étalé*** *de $\mathcal{E}$, es un espacio étalé $(U, \pi|_U, \pi(U))$ donde U es un abierto de $\mathcal{E}$.*

Siempre que no se preste a confusión, se identificará al subespacio étalé $(U, \pi|_U, \pi(U))$ con el abierto U de $\mathcal{E}$. Por otro lado, obsérvese que el siguiente corolario es inmediato.

COROLARIO 3.18. *Sean $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé sobre X y U un abierto de X, entonces $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$ es un espacio étalé sobre U.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un abierto de X, como π es una función continua, entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto de $\mathcal{E}$, luego por el Corolario 3.2. se tiene que

$$(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$$

es un espacio étalé sobre U. ■

Tal como se mencionó anteriormente, es posible definir la categoría de espacios étalé sobre un espacio particular. Como es de esperarse, esta categoría estará estrechamente relacionada con la categoría de espacios étalé sobre el espacio original.

Definición 3.19. *Sean $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé y U abierto de X. Se define la* ***categoría de espacios étalé sobre*** *U, como la categoría cuyos objetos son los espacios étalé sobre U y los morfismos son los morfismos de espacios étalé sobre U. A este categoría se la denotará como $\mathcal{E}_X(U)$.*

El siguiente lema será de gran ayuda para lo que sigue.

Lema 3.20. *Sean X un espacio topológico, U un abierto de X y*

$$\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$$

un morfismo de espacios étalé, entonces

$$\phi|_{\pi_1^{-1}(U)} : (\pi_1^{-1}(U), \pi_1|_{\pi_1^{-1}(U)}, U) \longrightarrow (\pi_2^{-1}(U), \pi_2|_{\pi_2^{-1}(U)}, U)$$

es un morfismo de espacios étalé.

Gracias al lema anterior, se está en condiciones de construir un funtor entre las categorías con las que se ha venido trabajando.

Proposición 3.21. *Sean X un espacio topológico y U un abierto de X, entonces la asignación*

$$\overline{\pi^{-1}} : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}_X(U)$$

que a cada espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ lo manda al espacio étalé $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$, y que a cada morfismo entre espacios étalé $\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ lo manda al morfismo $\phi|_{\pi_1^{-1}(U)} : (\pi_1^{-1}(U), \pi_1|_{\pi_1^{-1}(U)}, U) \longrightarrow (\pi_2^{-1}(U), \pi_2|_{\pi_2^{-1}(U)}, U)$ es un funtor.

Demostración. Sea $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé sobre X cualquiera, entonces $\overline{\pi^{-1}}(id_{\mathcal{E}}) = id_{\mathcal{E}}|_{\pi^{-1}(U)} = id_{\pi^{-1}(U)} = id_{\overline{\pi^{-1}}(\mathcal{E})}$. Por otro lado, sean $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, entonces $\overline{\pi^{-1}}(\varphi \circ \phi) = (\varphi \circ \phi)|_{\pi_1^{-1}(U)} = \varphi|_{\pi_2^{-1}(U)} \circ \phi|_{\pi_1^{-1}(U)} = \overline{\pi^{-1}}(\varphi) \circ \overline{\pi^{-1}}(\phi)$. ■

Para entender de mejor manera la siguiente proposición, es de gran ayuda recordar el siguiente resultado de topología general sobre la estructura topológica de los subespacios de un producto topológico.

Proposición 3.22. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección no vacía de espacios topológicos y defínase $X := \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ considérese la función proyección $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$. Si X está equipado con la topología producto, entonces dado $A \subseteq X$, la topología de subespacio de A respecto a X coincide con la topología inicial generada por la colección de funciones $\{(p_\alpha)|_A : \alpha \in \mathcal{A}\}$.*

PROPOSICIÓN 3.23. *Sean $(\mathcal{E}, \pi_1.X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé sobre X. Considérese el conjunto*

$$\mathcal{E} \times_X \mathcal{F} := \{(e, f) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} : \pi_1(e) = \pi_2(f)\}$$

*equipado con la topología de subespacio respecto al espacio producto $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Considere las proyecciones restringidas $p : \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ y $q : \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. Entonces el espacio $\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ junto con las proyecciones restringidas p y q, es el producto fibrado de los morfismos π_1 y π_2 en **Top**, la categoría de espacios topológicos.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "\pi_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

Claramente p y q son morfismos en la categoría **Top**, entonces el diagrama es conmutativo. En efecto, sea $(e, d) \in \mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ cualquiera, entonces

$$(\pi_1 \circ p)(e, d) = \pi_1(e) = \pi_2(d) = (\pi_2 \circ q)(e, d)$$

Ahora bien, supóngase que existe un espacio topológico D junto con morfismos $h : D \to \mathcal{E}$ y $k : D \to \mathcal{F}$ tales que $\pi_1 \circ h = \pi_2 \circ k$. Claramente la asignación

$$u : D \to \mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$$

dada por

$$u(d) := (h(d), k(d))$$

es un morfismo en **Top** y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\pi_2"] \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "\pi_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

pues es tal que $p \circ u = h$ y $q \circ u = k$. ■

El siguiente resultado dará luz sobre una propiedad de la categoría de espacios etalé sobre X.

PROPOSICIÓN 3.24. *Sean $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$ un homeomorfismo local y $f : Y \longrightarrow X$ una función continua. Si se considera el pullback de ambas funciones:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \times_X Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces la función q es un homemorfismo local.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(e, y) \in \mathcal{E} \times_X Y$ un elemento cualquiera, entonces $p(e, y) = e \in \mathcal{E}$. Como π es un homeomorfismo local, existe V abierto de $\mathcal{E}$ con $e \in V$, $\pi(V)$ abierto en X y $\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$ un homeomorfismo local. Como p es una función continua entonces $p^{-1}(V)$ es abierto en $\mathcal{E} \times_X Y$ con $(e, y) \in p^{-1}(V)$. Ahora se verificará que $q(f^{-1}(V))$ es abierto en Y: para esto simplemente nótese que $q(p^{-1}(V)) = f^{-1}(\pi(V))$ pues si $z \in q(p^{-1}(V))$ entonces existe $x \in p^{-1}(V)$ tal que $q(x) = z$ por lo que $f(z) = f(q(x)) = \pi(p(x)) \in p(V)$ y así $z \in f^{-1}(\pi(V))$. Por otro lado, si $y \in f^{-1}(\pi(V))$ entonces $f(y) \in \pi(V)$ por lo que existe $x \in V$ tal que $\pi(x) = f(y)$. Así $q(x, y) = y$ y claramente $(x, y) \in p^{-1}(V)$ pues $p(x, y) = x \in V$, por último solo nótese que en efecto $(x, y) \in \mathcal{E} \times_X Y$ pues $\pi(x) = f(y)$. Así se tiene que $y \in q(p^{-1}(V))$. Esta igualdad prueba que $q(p^{-1}(V))$ es abierto pues π es abierta (por ser un homeomorfismo local) y f es una función continua. Por último, basta probar que $q|_{p^{-1}(V)}$ es un homeomorfismo. Claramente esta función es continua y suprayectiva. Para la inyectividad, sean $(e_1, y_1), (e_2, y_2) \in p^{-1}(V)$ tales que $(q|_{p^{-1}(V)})(e_1, y_1) = (q|_{p^{-1}(V)}(e_2, y_2)$ es decir $y_1 = y_2$. Como $(e_1, y_1), (e_2, y_2) \in p^{-1}(V)$ entonces $e_1, e_2 \in V$ y nótese que:

$$\begin{aligned} \pi(e_1) &= \pi(p(e_1, y_1)) \\ &= f(q(e_1, y_1)) \\ &= f(y_1) \\ &= f(y_2) \\ &= f(q(e_2, y_2) \\ &= \pi(p(e_2, y_2)) \\ &= \pi(e_2). \end{aligned}$$

Como $\pi|_V$ es un homeomorfismo entonces se tiene que $e_1 = e_2$. Así la función $q|_{p^{-1}(V)}$ es inyectiva. Por último nótese que la función q es abierta pues si se toman $U \subseteq \mathcal{E}$ y $W \subseteq Y$ abiertos, no es difícil notar que $q((\mathcal{E} \times_X Y) \cap (U \times W)) = U \cap f^{-1}(\pi(V))$ el cual es abierto, pues π es abierta y f continua. Como la restricción de una función abierta a un abierto es una función abierta, se tiene que $q|_{p^{-1}(V)}$ es una función abierta y por lo tanto un homeomorfismo. Así la función q es un homeomorfismo local. ■

Proposición 3.25. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos homeomorfismos locales, entonces la composición $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $x \in X$ cualquiera. Como f es un homeomorfismo local entonces existe U abierto de X tal que $x \in U$, $f(U)$ es abierto en Y y $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es un homeomorfismo. Como $x \in U$ entonces $f(x) \in f(U)$ y puesto que g es un homeomorfismo local entonces existe V abierto de Y de tal manera que $f(x) \in V$, $V \subseteq f(U)$, $g(V)$ abierto en Z y $g|_V : V \longrightarrow G(V)$ un homeomorfismo. Nótese entonces que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X tal que $x \in f^{-1}(V)$, $g(f(f^{-1}(V))) = g(V)$ abierto en Z y $(g \circ f)|_{f^{-1}(V)} = g|_V \circ f|_{f^{-1}(V)}$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. ■

Corolario 3.26. *Sean $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé, $\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ y p y q como en la Proposición 3.23 entonces la terna $(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}, \pi_1 \circ p, X)$ es un espacio étalé. Análogamente, la terna $(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}, \pi_2 \circ q, X)$ es un espacio étalé.*

Demostración. Por la Proposición 3.24 los morfismos p y q son homeomorfismos locales, pero por la Proposición 3.25 los morfismos $\pi_1 \circ p$ y $\pi_2 \circ q$ son homeomorfismos locales. Así, las ternas $(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}, \pi_1 \circ p, X)$ y $(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}, \pi_2 \circ q, X)$ son espacios étalé. ■

Claramente las proyecciones restringidas p y q son morfismos de espacios étalé, por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.27. *Sean $(\mathcal{E}, \pi_1, X)$ y $(\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dos espacios étalé, entonces el espacio $(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}, \pi_1 \circ p, X)$ es el producto de los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $(\mathcal{D}, \pi_3, X)$ un espacio étalé junto con morfismos $r : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ y $s : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$. Defínase $t : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ como $t(d) := (r(d), s(d))$ entonces se afirma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\
& \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{F} \\
& \mathcal{E} &
\end{tikzcd}$$

En efecto, primero se verifica que para cada $d \in \mathcal{D}$ se tiene que $t(d) \in \mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$. Sea $d \in \mathcal{D}$ cualquiera, para ver que $t(d) = (r(d), s(d)) \in \mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$ basta ver que

$\pi_1(r(d)) = \pi_2(s(d))$, lo cual se sigue del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathcal{D} \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi_3"] & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi_1"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Para verificar que t es un morfismo de espacios étalé, nótese que es claro que t es continua pues

$$p \circ t = r$$

y además

$$q \circ t = s$$

y por hipótesis s y r son funciones continuas. Por otro lado, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\pi_3"'] & & \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} \arrow[dl, "\pi_1 \circ p"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "\pi_3"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi_1"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Por la misma definición de t, se tiene que $p \circ t = r$ y $q \circ t = s$.

■

Como un corolario, se tiene la siguiente propiedad categórica de la categoría de espacios étalé sobre un espacio X.

COROLARIO 3.28. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{E}(X)$ tiene productos binarios.*

Como puede notarse, probar propiedades categóricas de los espacios étalé puede ser bastante complicado y extenso. En lo que sigue, se ideará una manera de obtener propiedades de la categoría de espacios étalé de manera indirecta.

4. Pregavillas de conjuntos sobre un espacio X

En esta pequeña sección se definirá la noción de pregavilla de conjuntos. Se hará notar que se pueden estudiar a las pregavillas de conjuntos como sistemas dirigidos. Además, podrá observarse que las pregavillas de conjuntos surgen de manera natural cuando se trabaja con cualquier espacio étalé. Por último se definirá la categoría de pregavillas de conjuntos sobre un espacio X.

Definición 4.1. *Sea X un espacio topológico. Una **pregavilla de conjuntos** sobre X es una asignación S, tal que a cada abierto U de X le asigna un conjunto $S(U)$*

$$S : U \longmapsto S(U)$$

donde, para cualesquiera abiertos U, V de X con $V \subseteq U$ existe una función

$$\rho_V^U : S(U) \longrightarrow S(V)$$

*llamada **función restricción**, la cual debe de cumplir las siguientes dos condiciones*

1. *Para cualquier abierto U de X:*

$$\rho_U^U = id_{S(U)}$$

2. *Para cualesquiera $W \subseteq V \subseteq U$ abiertos de X:*

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$$

Observación 4.2. *La definición 4.1. puede formularse de manera categórica como sigue: Dado un espacio topológico X, considérese la retícula de abiertos de X denotada por $\mathcal{O}(X)$. No es difícil verificar que esta retícula puede ser considerada como una categoría, tomando como objetos los abiertos de X y los morfismos de la categoría son las inclusiones entre abiertos de X. Entonces una pregavilla $(S(U), \rho_V^U)$ de conjuntos sobre X es un funtor $S : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow$ **Con**.*

Es posible formular de una tercer manera la noción de pregavilla de conjuntos sobre un espacio X. Para esto, es preciso primero recordar algunas definiciones y conceptos de teoría del orden.

Definición 4.3. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *$(X, \leq)$ es un **conjunto dirigido** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.*
2. *Dado un conjunto dirigido $(X, \leq)$ se define a la colección $X' := \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$*
3. *Un **sistema dirigido** es una colección de conjuntos $\{U_x : x \in X\}$ indicada sobre un conjunto dirigido $(X, \leq)$, tal que para cualesquiera $(x, y) \in X'$ existe una función $f_x^y : U_y \longrightarrow U_x$ que cumple:*
   - *Para cada $x \in X$, $f_x^x = id_{U_x}$.*
   - *Para cualesquiera $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y \leq z$ se tiene que $f_x^z = f_x^y \circ f_y^z$.*

4. *Si* $\{U_x : x \in X\}$ *junto con una colección de funciones* $\{f_x^y : (x,y) \in X'\}$ *es un sistema dirigido, entonces se puede denotar a esta situación como* $(U_x, f_x^y)_{x\in X}$ *o bien, siemplemente como* (U_x, f_x^y) *cuando la situación no se preste a confusión.*

OBSERVACIÓN 4.4. *Sea* X *un espacio topológico. Nótese que es posible considerar a la colección de abiertos como un conjunto parcialmente ordenado con el orden inducido por la contención, entonces* $\mathcal{O}(X)^{op}$ *es un conjunto dirigido. Así, dada una pregavilla de conjuntos sobre* X*, se puede considerar como un sistema dirigido y escribirlo como*

$$(S(U), \rho_V^U)_{U\in\mathcal{O}(X)^{op}}$$

Cuando la situación no se preste a confusión a la pregavilla se le denotará por

$$(S(U), \rho_V^U)$$

o bien, únicamente por S.

Será común que a lo largo de este trabajo se utilice la notación de sistema dirigido cuando se hable de pregavillas sobre X. Los siguientes ejemplo serán de gran importancia para lo que sigue.

EJEMPLOS 4.5. *El primer ejemplo será de gran importancia para las siguientes secciones y capítulos.*

1. *Sean* $f : E \longrightarrow X$ *una función continua y* U *un subconjunto de* X*. Una* ***sección*** *de* E *sobre* U *es una función continua* $e : U \longrightarrow E$ *tal que* $f \circ e = id_U$*. Si se define el conjunto*

$$\Gamma(U) := \{e : U \longrightarrow E : \ e \text{ es una sección } \}$$

entonces la asignación

$$U \longmapsto \Gamma(U)$$

es una pregavilla de conjuntos sobre X*. En efecto, es claro que para cualesquiera abiertos* U, V *de* X*, tales que* $V \subseteq U$ *el morfismo*

$$\rho_V^U : \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(V)$$

definido por

$$\rho_V^U(e) := e|_V$$

hace que $(\Gamma(U), \rho_V^U)$ *sea una pregavilla de conjuntos sobre* X*, pues* $\rho_U^U(e) = e|_U = e$ *y si* $U \subseteq V \subseteq W$ *entonces* $\rho_U^V \circ \rho_V^W(e) = (e|_V)|_U = e|_U = \rho_U^W(e)$*. Nótese que en particular si* $(\mathcal{E}, \pi, X)$ *es un espacio étalé entonces también es posible construir la pregavilla anterior.*

2. Sean X un espacio topológico y U abierto de X, considérese la asignación

$$h_U : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \boldsymbol{Con}$$

tal que para cada $V \in \mathcal{O}(X)$ está definida por

$$h_U(V) := Hom(V,U) = \begin{cases} \{i_{V\subseteq U}\} & si \quad V \subseteq U \\ \emptyset & si \quad V \nsubseteq U \end{cases}$$

y para cualesquiera V y W abiertos de X con $V \subseteq W$, la función

$$\rho_V^W : Hom(W,U) \longrightarrow Hom(V,U)$$

dada en dos casos:

- *Si $W \subseteq U$ entonces*

$$\rho_V^W(i_{W\subseteq U}) := i_{W\subseteq U} \circ i_{V\subseteq W}$$

- *Si $W \nsubseteq U$ entonces ρ_V^W es la función vacía.*

Se afirma que h_U es una pregavilla sobre X. En efecto, sea V un abierto cualquiera de X entonces:

- *Si $V \subseteq U$ entonces $\rho_V^V(i_{V\subseteq U}) = i_{V\subseteq U} \circ i_{V\subseteq V} = i_{V\subseteq U} = id_{Hom(V,U)}(i_{V\subseteq U})$ por lo que $\rho_V^V = id_{Hom(V,U)}$.*
- *Si $V \nsubseteq U$ entonces $\rho_V^V = id_\emptyset = id_{Hom(V,U)}$.*

Por último, tómense V, W y Y abiertos de X tales que $V \subseteq W \subseteq Y$, entonces:

- *Si $Y \subseteq U$ entonces por un lado $\rho_V^Y(i_{Y\subseteq U}) = i_{Y\subseteq U} \circ i_{V\subseteq Y} = i_{V\subseteq U}$, y por otro lado*

$$\begin{aligned} \rho_V^W \circ \rho_W^Y(i_{Y\subseteq U}) &= \rho_V^W(i_{Y\subseteq U} \circ i_{W\subseteq Y}) \\ &= \rho_V^W(i_{W\subseteq U}) \\ &= i_{W\subseteq U} \circ i_{V\subseteq W} \\ &= i_{V\subseteq U} \end{aligned}$$

  por lo que $\rho_V^W \circ \rho_W^Y = \rho_V^Y$.
- *Si $Y \nsubseteq U$ entonces ρ_V^Y es la función vacía pues su dominio $Hom(Y,U)$ es un conjunto vacío y de igual manera $\rho_V^W \circ \rho_W^Y$ es la función vacía pues su dominio $Hom(Y,U)$ también es vacío, y en conclusión se tiene que $\rho_V^W \circ \rho_W^Y = \rho_V^Y$.*

Por lo tanto, la asignación h_U es una pregavilla sobre X.

A continuación se definen los morfismos entre pregavillas. Dada la Observación 4.2. se espera que dichos morfismos sean transformaciones naturales. Si el lector conoce un poco de Teoría de Categorías, podrá darse cuenta que en efecto, dichos morfismos son transformaciones naturales.

Definición 4.6. *Sean X un espacio topológico y $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ y $E \equiv (E(U), \lambda_V^U)$ dos pregavillas de conjuntos sobre X. Un* ***morfismo de pregavillas***

$$\phi : S \to E$$

es una colección de funciones

$$(\phi_U)_{U \in \mathcal{O}(X)^{op}}$$

de tal manera que, para cada U abierto de X se tiene la función

$$\phi_U : S(U) \to E(U)$$

donde además, para cualesquiera abiertos $U \subseteq V$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & E(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & E(V) \end{tikzcd}$$

Definición 4.7. *Sea X un espacio topológico. Se define la* ***categoría de pregavillas de conjuntos sobre*** *X, denotada por $\mathcal{PGAV}_X$ como la categoría cuyos objetos son las pregavillas de conjuntos sobre X y los morfismos de la categoría son los morfismos de pregavillas entre pregavillas de conjuntos sobre X.*

A continuación se estudiarán algunas propiedades de la categoría de pregavillas sobre un espacio X.

Proposición 4.8. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee objeto final.*

Demostración. Sea $(F(U), \rho_V^U)$ una pregavilla sobre X. Considérese la asignación, donde para cada U abierto de X se tiene

$$U \mapsto \{*\}$$

y donde para cualesquiera $U \subseteq V$ se define la función

$$\phi_U^V : \{*\} \longrightarrow \{*\}$$

dada por

$$\phi_U^V(*) := *$$

No es difícil verificar que esta asignación define una pregavilla, a dicha pregavilla se le denotará por $(\{*\}, id_{\{*\}})$. Ahora bien, considérese la asignación

$$f : (F(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\{*\}, id_{\{*\}})$$

donde para cada U abierto de X se tiene la función

$$f_U : F(U) \longrightarrow \{*\}$$

dada por

$$f_U(x) := *$$

Para ver que esta asignación es un morfismo de gavillas, nótese que el siguiente diagrama es conmutativo, para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "f_U"] & \{*\} \\ F(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "f_V"'] & \{*\} \arrow[u, "id_{\{*\}}"'] \end{tikzcd}$$

■

Proposición 4.9. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee productos arbitrarios.*

Demostración. Sea $\{S_j : j \in J\}$ una colección de pregavillas sobre X, donde para cada $j \in J$ se tiene que $S_j \equiv (S_j(U), (\rho_V^U)_j)$. Si $J = \emptyset$ entonces por la Proposición 4.8. el producto de la familia es el objeto final. Si $J \neq \emptyset$, para cada U abierto de X considérese la asignación

$$U \mapsto \prod_{j \in J} S_j(U)$$

y para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X, la función

$$\phi_U^V : \prod_{j \in J} S_j(V) \longrightarrow \prod_{j \in J} S_j(U)$$

tal que, para cada $f \in \prod_{j \in J} S_j(V)$ se define la función

$$\phi_U^V(f) : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} S_j(U)$$

dada por

$$\phi_U^V(f)(j) := (\rho_U^V)_j f(j)$$

Se verifica que esto es una pregavilla sobre X. En efecto, sean U abierto de X y $f \in \prod_{j \in J} S_j(U)$, hay que verificar que $\phi_U^U(f) = f$ y para esto tómese $j \in J$, entonces $\phi_U^U(f)(j) = (\rho_U^U)_j f(j)$ y como S_j es una pregavilla, entonces $\phi_U^U(f)(j) = f(j)$ por lo tanto $\phi_U^U(f) = f$. Por último, sean $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X y $j \in J$. Obsérvese que $\phi_U^W(f)(j) = (\rho_U^W)_j f(j) = (\rho_U^V \circ \rho_V^W)_j f(j) = \phi_U^V(\phi_V^W f(j))$ pues S_j es una pregavilla, por tanto $\phi_U^W = \phi_U^V \circ \phi_V^W$ y así, esta asignación es una pregavilla, denótese a esta por $\prod_{j \in J} S_j \equiv (\prod_{j \in J} S_j(U), \phi_V^U)$ Ahora bien, para cada $j \in J$ defínase la asignación

$$\pi_j : \prod_{j \in J} S_j \longrightarrow S_j$$

donde para cada abierto U de X se tiene la función

$$(\pi_j)_U : \prod_{j\in J} S_j(U) \longrightarrow S_j(U)$$

dada por

$$(\pi_j)_U(f) := f(j)$$

Para verificar que esta asignación es un morfismo de pregavillas sólo nótese que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \prod_{j\in J} S_j(U) \arrow[r, "(\phi_j)_U"] & S_j(U) \\ \prod_{j\in J} S_j(V) \arrow[u, "\phi_U^V"] \arrow[r, "(\pi_j)_V"'] & S_j(V) \arrow[u, "(\rho_U^V)_j"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $f \in \prod_{j\in J} S_j(V)$ entonces

$$(\phi_j)_U \circ \phi_U^V(f) = \phi_U^V(f)(j) = (\rho_U^V)_j f(j) = (\rho_U^V)_j \circ (\pi_j)_V(f)$$

Para ver que $\prod_{j\in J} S_j$ es el producto de las pregavillas S_j considérese una pregavilla $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ y para cada $j \in J$ un morfismo de pregavillas $f_j : S \longrightarrow S_j$. Defínase

$$f : S \longrightarrow \prod_{j\in J} S_j$$

tal que para cada abierto U de X se tiene la función

$$f_U : S(U) \longrightarrow \prod_{j\in J} S_j(U)$$

donde para cada $x \in S(U)$ se define la función

$$f_U(x) : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} S_j(U)$$

dada por

$$f_U(x)(j) := (f_j)_U(x)$$

Para ver que f es un morfismo de pregavillas, basta ver que para cada $U \subseteq V$ abiertos de X el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] & \prod_{j\in J} S_j(U) \\ S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "f_V"'] & \prod_{j\in J} S_j(V) \arrow[u, "\phi_U^V"'] \end{tikzcd}$$

Para ello, tómese $x \in S(V)$, basta ver que $f_U \circ \rho_U^V(x) = \phi_U^V \circ f_V(x)$. Para esto tómese $j \in J$ y obsérvese que

$$(\phi_U^V \circ f_V(x))(j) = (\rho_U^V)_j f_v(x)(j) = (\rho_U^V)_j (f_j)_V(x) = (f_j)_U \circ \rho_U^V(x)$$

pues para cada $j \in J$, por hipótesis f_j es un morfismo de pregavillas, entonces se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "(f_j)_U"] & S_j(U) \\ S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "(f_j)_V"'] & S_j(V) \arrow[u, "(\rho_U^V)_j"'] \end{tikzcd}$$

Por tanto, f es un morfismo de pregavillas que claramente hace conmutar el siguiente diagrama para cada $j \in J$

$$\begin{tikzcd} \prod_{j \in J} S_j \arrow[d, "\pi_j"'] & \\ S_j & S \arrow[l, "f_j"] \arrow[ul, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $x \in S(U)$ entonces

$$(\pi_j)_U \circ f_u(x) = f_U(x)(j) = (f_j)_U(x)$$

■

Proposición 4.10. *Sea X un espacio topológico, entonces $\mathcal{PGAV}_X$ posee igualadores.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{PGAV}_X$

$$\begin{tikzcd} (S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \end{tikzcd}$$

Defínase la asignación que a cada abierto U de X se tiene que

$$U \mapsto I(U)$$

donde

$$I(U) := \{x \in S(U) : \phi_U(x) = \varphi_U(x)\}$$

y para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X se tiene la función

$$\tau_U^V : I(V) \longrightarrow I(U)$$

dada por

$$\tau_U^V(x) := \rho_U^V(x)$$

Primero se verifica que esta función está bien definida. Tómese $x \in I(V)$, se quiere probar que $\phi_U(\rho_U^V(x)) = \varphi_U(\rho_U^V(x))$ lo cual se sigue de la conmutatividad de los siguientes diagramas, pues tanto ϕ como φ son morfismos de pregavillas

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & F(U) \\ S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "\varphi_V"'] & F(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\phi_U"] & F(U) \\ S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "\phi_V"'] & F(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"'] \end{tikzcd}$$

Para ver que esta asignación es una pregavilla, tómese U abierto de X, entonces $\tau_U^U(x) = \rho_U^U(x) = x$ pues S es una pregavilla. Tómense $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, entonces $\tau_U^W(x) = \rho_U^W(x) = \rho_U^V \circ \rho_V^W(x) = \tau_U^V \circ \tau_V^W$. Por lo tanto, esta asignación es una pregavilla y denótese por $I \equiv (I(U), \tau_V^U)$. Defínase la asignación

$$i : I \longrightarrow S$$

tal que para cada U de X se tiene la función $i_U : I(U) \longrightarrow S(U)$ dada por

$$i_U(x) := x$$

Para verificar que esta asignación es un morfismo de pregavillas, tómense $U \subseteq V$ abiertos de X y por la misma definición de τ_U^V el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} I(U) \arrow[r, "i_U"] & S(U) \\ I(V) \arrow[u, "\tau_U^V"] \arrow[r, "i_V"'] & S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"'] \end{tikzcd}$$

ya que

$$i_U\tau_U^V(x) = i_U(\rho_U^V(x)) = \rho_U^V(x) = \rho_U^V \circ i_V(x)$$

Además, por la misma definición de la pregavilla I es claro que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} (I(U), \tau_V^U) \arrow[r, "i"] & (S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \end{tikzcd}$$

Por último, considérese una pregavilla $O \equiv (O(U), \epsilon_V^U)$ junto con un morfismo $j : O \longrightarrow S$ tal que $\phi \circ j = \varphi \circ j$. Defínase la asignación

$$k : O \longrightarrow I$$

tal que para cada abierto U de X se tiene la función

$$k_U : O(U) \longrightarrow I(U)$$

dada por

$$k_U(x) := j_U(x)$$

Claramente esta asignación está bien definida pues $\phi \circ j = \varphi \circ j$ Para ver que k es un morfismo de pregavillas, se necesita ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
O(U) \arrow[r, "k_U"] & I(U) \\
O(V) \arrow[u, "\epsilon_U^V"] \arrow[r, "k_V"'] & I(V) \arrow[u, "\tau_U^V"']
\end{tikzcd}$$

lo cual se sigue de que $j : O \longrightarrow S$ es un morfismo de pregavillas, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
O(U) \arrow[r, "j_U"] & S(U) \\
O(V) \arrow[u, "\epsilon_U^V"] \arrow[r, "j_V"'] & S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $x \in O(V)$ obsérvese que

$$k_U \circ e_U^V(x) = j_U \circ e_U^V(x) = \rho_U^V \circ j_V(x) = \tau_U^V \circ j_V(x) = \tau_U^V \circ k_V(x)$$

Luego, la conmutatividad del siguiente diagrama es evidente por la misma definición de k

$$\begin{tikzcd}
(I(U), \tau_V^U) \arrow[r, "i"] & (S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \\
(O(U), \epsilon_V^U) \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

pues si $x \in O(U)$ entonces

$$i_U \circ k_U(x) = i_U \circ j_U(x) = j_U(x)$$

■

Corolario 4.11. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ es completa.*

Demostración. Por las Proposiciones 4.8, 4.9 y 4.10, la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee objeto final, productos arbitrarios e igualadores para cada par de morfismos en $\mathcal{PGAV}_X$. Por el Corolario 2 de la sección 2 del capítulo V del texto [25], esto es equivalente a que la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ es completa. ■

Proposición 4.12. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}$ tiene objeto inicial.*

Demostración. Para cada U abierto de X considérense la asignación

$$U \mapsto \emptyset$$

y para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X la función vacía

$$\emptyset_U^V : \emptyset \longrightarrow \emptyset$$

Claramente esta asignación es una pregavilla y se denotará por $(\emptyset, \emptyset_V^U)$. Para cada pregavilla $(S(U), \rho_V^U)$ defínase

$$\phi : (\emptyset, \emptyset_V^U) \longrightarrow (S(U), \rho_V^U)$$

donde para cada abierto U de X se tiene la única función

$$\phi_U : \emptyset \longrightarrow S(U)$$

dada por la función vacía la cual hace conmutar trivialmente al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, "\phi_U"] & S(U) \\
\emptyset \arrow[u, "\emptyset_U^V"] \arrow[r, "\phi_V"'] & S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"']
\end{tikzcd}$$

Así, ϕ es un morfismo de gavillas y es único por construcción. ■

Proposición 4.13. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}$ tiene coproductos arbitrarios.*

Demostración. Sea $\{S_j : j \in J\}$ una colección de pregavillas donde para cada $j \in J$ se tiene $S_j \equiv (S_j(U), (\rho_V^U)_j)$. Si $J = \emptyset$ entonces por la Proposición 4.11 el coproducto de la familia es el objeto inicial de la categoría. Si $J \neq \emptyset$, para cada abierto U de X defínase la asignación

$$U \mapsto \coprod_{j \in J} S_j(U)$$

y para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X defínase la función

$$\phi_U^V : \coprod_{j \in J} S_j(V) \longrightarrow \coprod_{j} S_j(U)$$

dada por

$$\phi_U^V(x) := (\rho_U^V)_j(x)$$

donde j es el único elemento en J tal que $x \in S_j(V)$. Para verificar que esta asignación es una pregavilla, sea U un abierto de X, entonces $\phi_U^U(x) = (\rho_U^U)_j(x) = x$ pues S_j es una pregavilla. Si $U \subseteq V \subseteq w$ abiertos de X entonces $\phi_U^W(x) = (\rho_U^W)_j(x) =$

$(\rho_U^V \circ \rho_V^W)_j(x) = \phi_U^V \circ \phi_V^W(x)$. Por lo tanto, esta asignación es una pregavilla y denótese por $\coprod_{j \in J} S_j$. Ahora, para cada $j \in J$ considérese la asignación

$$i_j : S_j \longrightarrow \coprod_{j \in J} S_j$$

donde para cada abierto U de X se tiene la función

$$(i_j)_U : S_j(U) \longrightarrow \coprod_{j \in J} S_j(U)$$

dada por

$$(i_j)_U(x) := x$$

Para ver que i_j es un morfismo de pregavillas para cada $j \in J$, nótese que por la misma definición de ϕ_V^U el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S_j(U) \arrow[r, "(i_j)_U"] & \coprod_{j \in J} S_j(U) \\ S_j(V) \arrow[u, "(\rho_U^V)_j"] \arrow[r, "(i_j)_V"'] & \coprod_{j \in J} S_j(V) \arrow[u, "\phi_U^V"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $x \in S_j(V)$ entonces

$$\phi_V^U \circ (i_j)_V(x) = \phi_U^V(x) = (\rho_U^V)_j(x) = (\rho_U^V)_j(i_j)_U(x)$$

Por último, tómese $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ una pregavilla y para cada $j \in J$ un morfismo de pregavillas $f_j : S_j \longrightarrow S$. Defínase

$$f : \coprod_{j \in J} S_j \longrightarrow S$$

tal que para cada abierto U de X se tiene la función

$$f_U : \coprod_{j \in J} S_j(U) \longrightarrow S(U)$$

dada por

$$f_U(x) := (f_j)_U(x)$$

Para ver que esta asignación es un morfismo de pregavillas, nótese que la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j \in J} S_j(U) \arrow[r, "f_U"] & S(U) \\ \coprod_{j \in J} S_j(V) \arrow[u, "\phi_U^V"] \arrow[r, "f_V"'] & S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"'] \end{tikzcd}$$

se sigue de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} S_j(U) \arrow[r, "(f_j)_U"] & S(U) \\ S_j(V) \arrow[u, "(\rho_U^V)_j"] \arrow[r, "(f_j)_V"'] & S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"'] \end{tikzcd}$$

pues f_j es un morfismo de pregavillas para cada $j \in J$. En efecto, tómese $x \in \coprod_{j\in J} S_j(V)$ entonces

$$\phi_U^V \circ f_u(x) = \phi_U^V \circ (f_j)_U(x) = (\rho_U^V)_j \circ (f_j)_U(x) = \rho_U^V \circ (f_j)_V(x) = \rho_U^V \circ f_V(x)$$

Por lo tanto, f es un morfismo de pregavillas que hace conmutar el siguiente diagrama para cada $j \in J$:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J} S_j \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ S_j \arrow[u, "i_j"] \arrow[r, "f_j"'] & S \end{tikzcd}$$

En efecto, sea U abierto de X y $x \in S(U)$ entonces

$$f_U \circ (i_j)_U(x) = f_U(x) = (f_j)_U(X)$$

■

Antes de probar que para cada espacio X la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee coigualadores, es necesario definir lo siguiente.

Definición 4.14. *Sean **Con** la categoría de conjuntos y $f, g : A \longrightarrow B$ dos morfismos de dicha categoría. Se denotará por*

$$coig(f, g)$$

al coigualador de los morfismos f y g.

Ahora sí se está en condiciones de probar el siguiente resultado.

Proposición 4.15. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee coigualadores.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{PGAV}_X$

$$\begin{tikzcd} (S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \end{tikzcd}$$

Por tanto, para cada U abierto de X considérese la asignación

$$U \mapsto coig(\phi_U, \varphi_U)$$

donde $coig(\phi_U, \varphi_U)$ denota el coigualador de las funciones ϕ_U y φ_U. Para cualesquiera $U \subseteq V$ se define la función

$$\tau_U^V : coig(\phi_V, \varphi_V) \longrightarrow coig(\phi_U, \varphi_U)$$

dada por

$$\tau_U^V[\phi_V(x)] := [\sigma_U^V(\phi_V(x))]$$

Para ver que esta asignación es pregavilla, tómese U abierto de X, entonces

$$\tau_U^U[\phi_U(x)] = [\sigma_U^U \phi_U(x)] = [\phi_U(x)]$$

pues F es una pregavilla. Por otro lado, considérese $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, entonces

$$\tau_U^W[\phi_W(x)] = [\sigma_U^W \phi_W(x)] = [\sigma_U^V \sigma_V^W(\phi_W(x))] = \tau_U^V \tau_V^W[\phi_W(x)]$$

pues F es pregavilla. Así, esta asignación es una pregavilla y se denotará por $coig \equiv (coig(\phi_U, \varphi_U), \tau_V^U)$. Considérese la asignación

$$\pi : F \longrightarrow coig$$

tal que, para cada U abierto de X se tiene la función

$$\pi_U : F(U) \longrightarrow coig(\phi_U, \varphi_U)$$

dada por

$$\pi_U(x) := [x]$$

No es difícil verificar que esta asignación es un morfismo de pregavillas pues el siguiente diagrama conmuta para $U \subseteq V$ abiertos de X:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "\pi_U"] & coig(\phi_U, \varphi_U) \\
F(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"] \arrow[r, "\pi_V"'] & coig(\phi_V, \varphi_V) \arrow[u, "\tau_U^V"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $x \in F(U)$ entonces

$$\tau_U^V \circ \pi_V(x) = \tau_U^V[x] = [\sigma_U^V(x)] = \pi_U \circ \sigma_U^V(x)$$

Además de que claramente este morfismo de pregavillas hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \arrow[r, "\pi"] & (coig(\phi_U, \varphi_U), \tau_V^U)
\end{tikzcd}$$

Por último, sea $j : (F(U), \sigma_V^U) \longrightarrow (O(U), \epsilon_V^U)$ un morfismo de pregavillas tal que $j\phi = j\varphi$. Defínase

$$k : coig \longrightarrow O$$

tal que para cada abierto U de X se tiene la función

$$k_U : coig(\phi_U, \varphi U) \longrightarrow O(U)$$

dada por

$$k_U[x] := j_U(x)$$

Para ver que esta asignación es un morfismo de pregavillas es necesario que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
coig(\phi_U, \varphi_U) \arrow[r, "k_U"] & O(U) \\
coig(\phi_V, \varphi_V) \arrow[u, "\tau_U^V"] \arrow[r, "k_V"'] & O(V) \arrow[u, "\epsilon_U^V"']
\end{tikzcd}$$

lo cual se sigue de que j es un morfismo de pregavillas, es decir se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "j_U"] & O(U) \\
F(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"] \arrow[r, "j_V"'] & O(V) \arrow[u, "\epsilon_U^V"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $[\phi_V(x)] \in coig(\phi_V, \varphi_V)$ cualquiera, entonces:
$k_U \circ \tau_U^V[\phi_V(x)] = k_U[\sigma_U^V(\phi_V(x))] = j_U(\sigma_U^V(\phi_V(x))) = \epsilon_U^V \circ j_V(\phi_V(x)) = \epsilon_U^V \circ k_V[\phi_V(x)]$
Además, es claro que este morfismo k de pregavillas hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(S(U), \rho_V^U) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] & (F(U), \sigma_V^U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "j"'] & (coig(\phi_U, \varphi_U, \tau_V^U) \arrow[d, dashed, "k"] \\
 & & (O(U), \epsilon_V^U)
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea U abierto de X y $x \in F(U)$ entonces:

$$k_U \circ \pi_U(x) = k_U[x] = j_U(x)$$

■

Corolario 4.16. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ es cocompleta.*

Demostración. Por las Proposiciones 4.12, 4.13 y 4.15 la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ posee objeto inicial, coproductos arbitrarios y coigualadores para cada par de morfismos en la categoría $\mathcal{PGAV}_X$. Esto prueba que dicha categoría es cocompleta. ■

5. Gavillas de conjuntos sobre un espacio X

Una gavilla de conjuntos sobre un espacio X es una pregavilla de conjuntos sobre X que satisface dos axiomas extras de los que se tienen que satisfacer para ser una pregavilla. Estos axiomas permitirán entender el comportamiento de los elementos de los conjuntos de la pregavilla, y también permitirán construir un nuevo elemento a partir de ciertos elementos dados. Se definirá la categoría de gavillas sobre X y se harán ver las relaciones que existen entre esta nueva categoría y la categoría de espacios étalé sobre X y la de pregavillas sobre X.

DEFINICIÓN 5.1. *Sea X un espacio topológico. Una* ***gavilla de conjuntos*** *sobre X es una pregavilla $(S(U), \rho_V^U)$ sobre X, tal que para cada abierto U de X y para cualquier cubierta abierta $\{U_a : a \in A\}$ de U se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *Sean $s_1, s_2 \in S(U)$ dos elementos, tales que para cada $a \in A$*
$$\rho_{U_a}^U(s_1) = \rho_{U_a}^U(s_2)$$
entonces $s_1 = s_2$
2. *Si $(s_a)_{a\in A}$ es una colección de elementos de $S(U)$, tal que para cada $a \in A$, $s_a \in S(U_a)$ y además, para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene*
$$\rho_{U_b\cap U_d}^{U_b}(s_b) = \rho_{U_b\cap U_d}^{U_d}(s_d)$$
entonces existe $s \in S(U)$ tal que para cualquier $a \in A$:
$$\rho_{U_a}^U(s) = s_a.$$

De manera intuitiva, el primer axioma dice que los elementos de los conjuntos de la gavilla están determinados localmente. El segundo axioma puede entenderse que si se tiene una colección de elementos que sea **compatible**, entonces existe un elemento, que es el **pegado** de todos los elementos. Usualmente, a este segundo axioma se le conoce como el **axioma del pegado**. Tal como se hizo con las pregavillas, hay una interpretación categórica de las gavillas sobre un espacio X. Esta interpretación se utilizará para probar un resultado fundamental en lo que sigue.

OBSERVACIÓN 5.2. *Considérense $(F(U), \rho_V^U)$ una gavilla sobre X, U un abierto de X y $\{U_a : a \in A\}$ una cubierta abierta de U. Obsérvese que por un lado, para cada $a \in A$ existe la funcion*
$$\rho_{U_a}^U : F(U) \longrightarrow F(U_a)$$
por la propiedad universal del producto en ***Con*** *existe una única función*
$$i : F(U) \longrightarrow \prod_{a\in A} F(U_a)$$

tal que para cada $s \in F(U)$ se tiene que

$$i(s) : A \longrightarrow \bigcup_{a \in A} F(U_a)$$

dada por

$$i(s)(a) := \rho^U_{U_a}(s)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{a \in A} F(U_a) \arrow[d, "\pi_a"'] & \\
F(U_a) & F(U) \arrow[l, "\rho^U_{U_a}"] \arrow[ul, dashed, "i"']
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, para cualesquiera $b, d \in A$ existe la función

$$\rho^{U_b}_{U_b \cap U_d} \circ \pi_b : \prod_{a \in A} F(U_a) \longrightarrow F(U_b \cap U_d)$$

Por la propiedad universal del producto en ***Con*** *existe una única función*

$$p_b : \prod_{a \in A} F(U_a) \longrightarrow \prod_{(b,d) \in A \times A} F(U_b \cap U_d)$$

tal que para cada $f \in \prod_{a \in A} F(U_a)$ se tiene la función

$$p_b(f) : A \times A \longrightarrow \bigcup_{(b,d)} F(U_b \cap U_d)$$

dada por

$$p_b(f)(b, d) := \rho^{U_b}_{U_b \cap U_d}(\pi_b(f))$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{(b,d) \in A \times A} F(U_b \cap U_d) \arrow[d, "\pi_{b,d}"'] & \\
F(U_b \cap U_d) & \prod_{a \in A} F(U_a) \arrow[l, "\rho^{U_b}_{U_b \cap U_d} \circ \pi_b"] \arrow[ul, dashed, "p_b"']
\end{tikzcd}$$

Luego para cualesquiera $b, d \in A$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & F(U_b) \arrow[r, "\rho^{U_b}_{U_b \cap U_d}"] & F(U_b \cap U_d) \\
F(U) \arrow[ur, "\rho^U_{U_b}"] \arrow[dr, "\rho^U_{U_d}"'] \arrow[r, dashed, "i"] & \prod_{a\in A} F(U_a) \arrow[u, "\pi_b"] \arrow[d, "\pi_d"] \arrow[r, dashed, shift left, "p_b"] \arrow[r, dashed, shift right, "p_d"'] & \prod_{(b,d)\in A\times A} F(U_b \cap U_d) \arrow[u, "\pi_{b,d}"'] \arrow[d, "\pi_{b,d}"'] \\
 & F(U_d) \arrow[r, "\rho^{U_d}_{U_b \cap U_d}"'] & F(U_b \cap U_d)
\end{tikzcd}
$$

Se afirma que i es el igualador de las funciones p_b y p_d. En efecto, sea $s \in F(U)$ y para ver que $p_b \circ i(s) = p_d \circ i(s)$ tómese $(b, d) \in A \times A$ y basta ver que $p_b \circ i(s)(b, d) = p_d \circ i(s)(b, d)$. Obsérvese que

$$
\begin{aligned}
p_b(i(s))(b,d) &= \rho^{U_b}_{U_b\cap U_d}(\pi_b(i(s))) \\
&= \rho^{U_b}_{U_b\cap U_d}(i(s)(b)) \\
&= \rho^{U_b}_{U_b\cap U_d}(\rho^U_{U_b}(s)) \\
&= \rho^{U}_{U_b\cap U_d}(s)
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
p_d(i(s))(b,d) &= \rho^{U_d}_{U_b\cap U_d}(\pi_d(i(s))) \\
&= \rho^{U_d}_{U_b\cap U_d}(i(s)(d)) \\
&= \rho^{U_d}_{U_b\cap U_d}(\rho^U_{U_d}(s)) \\
&= \rho^{U}_{U_b\cap U_d}(s)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p_b \circ i = p_d \circ i$. Por último, supóngase que existe un conjunto Z junto con una función $m : Z \longrightarrow \prod_{a\in A} F(U_a)$ de tal manera que $p_b \circ f = p_d \circ f$. Tómese $z \in Z$ un elemento cualquiera, por hipótesis se tiene que $p_b(m(z)) = p_d(m(z))$ es decir que para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
p_b(m(z))(b,d) = p_d(m(z))(b,d) &\Leftrightarrow \pi_{b,d}(p_b(m(z))) = \pi_{b,d}(p_d(m(z))) \\
&\Leftrightarrow \rho^{U_b}_{U_b\cap U_d}(\pi_b(m(z))) = \rho^{U_d}_{U_b\cap U_d}(\pi_d(m(z))) \\
&\Leftrightarrow \rho^{U_b}_{U_b\cap U_d}(m(z)(b)) = \rho^{U_d}_{U_b\cap U_d}(m(z)(d))
\end{aligned}
$$

Puesto que F es una gavilla, existe un único $s_z \in F(U)$ de tal manera que para cada $b \in A$ se tiene $\rho^U_{U_b}(s_z) = m(z)(b)$. Así, defínase

$$u : Z \longrightarrow F(U)$$

dada por

$$u(z) := s_z$$

Por último, nótese que

$$(i \circ u(z))(b) = i(s_z)(b) = \rho^U_{U_b}(s_z) = m(z)(b)$$

Por lo tanto $i \circ u = m$ es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "i"] & \prod_{a\in A} F(U_a) \arrow[r, shift left, "p_b"] \arrow[r, shift right, "p_d"'] & \prod_{(b,d)\in A\times A} F(U_b \cap U_d) \\ Z \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Así, i es el igualador de los morfismos p_b y p_q.

Proposición 5.3. *Sea X un espacio topológico y $(F(U), \rho^U_V)$ una gavilla sobre X, entonces $F(\emptyset)$ posee un sólo punto.*

Demostración. Tómese el abierto $\emptyset$ de X. Obsérvese que la cubierta vacía es una cubierta abierta de $\emptyset$ y puesto que el producto arbitrario indicado por un conjunto vacío es el conjunto $\{*\}$ entonces por la observación 5.2. se tiene el siguiente igualador

$$F(\emptyset) \xrightarrow{i} \{*\} \rightrightarrows \{*\}$$

Por lo tanto $F(\emptyset) = \{*\}$. ■

Observación 5.4. *Sean X un espacio topológico, V un abierto de X y $(F(U), \rho^U_V)$ una gavilla sobre X. Para cada W abierto de V defínase la asignación*

$$W \longmapsto F(W)$$

y para cualesquiera $W \subseteq U$ abiertos de V defínase la función

$$(\rho^U_W)|_V : F(U) \longrightarrow F(W)$$

dada por

$$(\rho^U_W)_V(x) := \rho^U_W(x)$$

*Entonces esta asignción es una gavilla sobre V. A esta gavilla se le conoce como la **gavilla restringida** al subespacio V y se denotará por*

$$F|_V$$

Ejemplos 5.5. *En esta serie de ejemplos, se hará ver que algunas pregavillas que se habían construido anteriormente resultan ser además gavillas.*

1. *Recuérdese que en el Ejemplo 4.5.1 dada una función continua $f : E \longrightarrow X$, se construyó la pregavilla de secciones $(\Gamma(U), \rho^U_V)$. Resulta ser que esta pregavilla es además una gavilla sobre X. En efecto, sean U un abierto de X, $\{U_a : a \in A\}$ una cubierta abierta de U y $e_1, e_2 \in \Gamma(U)$. Supóngase que para cada $a \in A$, se tiene que $\rho^U_{U_a}(e_1) = \rho^U_{U_a}(e_2)$. Sea $x \in U$ cualquiera entonces*

existe $a \in A$ tal que $x \in U_a$, por lo que $e_1(x) = e_1|_{U_a}(x) = e_2|_{U_a}(x) = e_2(x)$, por lo tanto $e_1 = e_2$. Por otro lado, sea $(e_a)_{a\in A}$ una colección de elementos de $\Gamma(U)$ tales que, para cualquier $a \in A$, $e_a \in \Gamma(U_a)$ y además para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que $e_b|_{U_b\cap U_d} = e_d|_{U_b\cap U_d}$. Entonces $(e_a)_{a\in A}$ es una familia compatible de funciones continuas, por lo que $e := \bigcup_{a\in A} e_a$ es una función continua. Claramente $e \in \Gamma(U)$ y se cumple que para cada $a \in A$, $\rho^U_{U_a}(e) = e|_{U_a} = e_a$. Así, $(\Gamma(U), \rho^U_V)$ es una gavilla sobre X. Nótese que como caso particular, dado un espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ sobre X, su pregavilla de secciones resulta ser además una gavilla sobre X.

2. *Recuérdese que en el Ejemplo 4.5.2, para cada U abierto de X se construyó una pregavilla que se acordó en denotar por h_U. Pues resulta ser que esta pregavilla es además una gavilla, para cada U abierto de X. En efecto, sea U abierto de X y tómese V un abierto cualquiera de X. Sea $\{V_a : a \in A\}$ una cubierta abierta de V. Entonces se tienen los siguientes casos:*
   - *$V \subseteq U$. Si se toman $s, t \in Hom(V, U)$ tales que para cualquier $a \in A$ se tiene que $\rho^V_{V_a}(s) = \rho^V_{V_a}(t)$ entonces claramente $s = t$ pues $hom(V, U) = \{i_{V\subseteq U}\}$. Por otro lado, si se toma una colección $\{s_a : a \in A\} \subseteq Hom(V, U)$ entonces $s_a = i_{V\subseteq U}$ para cada $a \in A$. Si además se supone que $s_a \in Hom(V_a, U)$ para cada $a \in A$, entonces $s_a = i_{V_a\subseteq U}$ para cada $a \in A$. Esto en particular muestra que $V_a = V$ para cada $a \in A$. Si también se supone que para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que $\rho^{V_b}_{V_b\cap V_d}(s_b) = \rho^{V_d}_{V_b\cap V_d}(s_d)$ esto quiere decir que para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que $i_{V_b\cap V_d\subseteq U} = i_{V_b\cap V_d\subseteq U}$. Por último, si se toma $i_{V\subseteq U} \in Hom(V, U)$ entonces para cada $a \in A$ se tiene que $\rho^V_{V_a}(i_{V\subseteq U}) = i_{V\subseteq U} \circ i_{V_a\subseteq U} = i_{V_a\subseteq U} = s_a$.*
   - *$V \nsubseteq U$. De esto se deduce que $Hom(V, U) = \emptyset$, por lo que las condiciones de la Definición 5.1 se cumplen por vacuidad.*

   De ambos casos se deduce que la pregavilla h_U es en efecto una gavilla.

Definición 5.6. *Sean S y E dos gavillas sobre un espacio topológico X. Un **morfismo de gavillas** $\phi : S \longrightarrow E$ es un morfismo entre las pregavillas S y E.*

A continuación se define la categoría de gavillas sobre un espacio X. Se estudiarán las propiedades categóricas que posee esta categoría y más adelante se hará ver qué relación existe entre las gavillas y los espacios étalé sobre X.

Definición 5.7. *Sea X un espacio topológico. Se define a la **categoría de gavillas** sobre X como la categoría cuyos objetos son las gavillas sobre X y los morfismos son los morfismos de gavillas sobre X. A esta categoría se le denotará por $\mathcal{GAV}_X$.*

Proposición 5.8. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$.*

Demostración. Sean $(F(U), \rho_V^U)$ y $(S(U), \sigma_V^U)$ dos gavillas sobre X y $\phi : F \longrightarrow S$ un morfismo entre dichas gavillas. En particular las gavillas F y S son pregavillas y por la Definición 5.6. el morfismo de gavillas ϕ es un morfismo entre las pregavillas S y F. Por tanto, el morfismo $\phi : S \longrightarrow F$ es un morfismo de pregavillas que vive en $\mathcal{PGAV}_X$. Por tanto, la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ ■

6. La categoría $\mathcal{GAV}_X$

En esta sección, se probarán algunas propiedades categóricas que posee la categoría de gavillas sobre un espacio X.

Proposición 6.1. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene objeto final.*

Demostración. Considérese la pregavilla $(\{*\}, id_{\{*\}})$ construida en la Proposición 4.8. Tómese U abierto de X tal que $\{U_a : a \in A\}$ es cubierta abierta de U, y sean $s, t \in \{*\}$ tales que para cada $a \in A$ se tiene que $id_{\{*\}}(s) = id_{\{*\}}(t)$ por lo tanto $s = * = t$. Por último, si se toma $(x_a)_{a\in A}$ una colección de elementos de $\{*\}$ donde para cada $a \in A$ se tiene que $x_a \in \{*\}$ y para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que $id_{\{*\}}(x_b) = id_{\{*\}}(x_d)$ entonces $* = x_a$ para cada $a \in A$, por lo que $* \in \{*\}$ tal que $id_{\{*\}}(*) = *$. Así, esta pregavilla es en realidad una gavilla. Por último recuérdese que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$, luego por la Proposición 4.8. la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene objeto final. ■

Proposición 6.2. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee productos arbitrarios.*

Demostración. Sea $\{S_j : j \in J\}$ una colección no vacía de gavillas sobre X, donde para cada $j \in J$ se tiene que $S_j \equiv (S_j(U), (\rho_V^U)_j)$. Si $J = \emptyset$ entonces por la Proposición 6.1. el producto de dicha familia es el objeto final. Si $J \neq \emptyset$, considérese la pregavilla $\prod_{j\in J} S_j$ construida en la Proposición 4.9. Para ver que esta pregavilla es gavilla, sea U un abierto de X y sea $\{U_a : a \in A\}$ cubierta abierta de U. Supóngase que para cada $a \in A$ se tiene que $\phi_{U_a}^U(f) = \phi_{U_a}^U(g)$. Si se toma $j \in J$ entonces se tiene que $\phi_{U_a}^U(f)(j) = \phi_{U_a}^U(g)(j)$ es decir $(\rho_{U_a}^U)_j(f(j)) = (\rho_{U_a}^U)_j(g(j))$ y como S_j es una gavilla, entonces $f = g$. Ahora bien, tómese $(f_a)_{a\in A}$ una colección de elementos de $\prod_{j\in J} S_j(U)$ tal que para cualquier $a \in A$, $f_a \in \prod_{j\in J} S_j(U_a)$ y además supóngase que para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que

$$\phi_{U_b\cap U_d}^{U_b}(f_b) = \phi_{U_b\cap U_d}^{U_d}(f_d)$$

es decir para cada $j \in J$ se tiene

$$(\rho_{U_b\cap U_d}^{U_b})_j f_b(j) = (\rho_{U_b\cap U_d}^{U_d})_j f_d(j)$$

y como cada S_j es una gavilla, existe $f_j \in S_j(U)$ tal que para cada $a \in A$, se tiene que $(\rho^U_{U_a})_j(f_j) = f_a(j)$. Defínase $f : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} S_j(U)$ dada por $f(j) := f_j$ entonces claramente $f \in \prod_{j\in J} S_j(U)$ y obsérvese que para cada $a \in A$ se tiene que

$$\phi^U_{U_a}(f)(j) = (\rho^U_V)_j(f(j)) = (\rho^U_{U_a})_j(f_j) = f_a(j)$$

Por ello $\phi^U_{U_a}(f) = f_a$ Así, $\prod_{j\in J} S_j$ es una gavilla sobre X. Puesto que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ y por la Proposición 4.9. esta gavilla es el producto de la familia $\{S_j : j \in J\}$. ■

Proposición 6.3. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee igualadores.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{GAV}_X$

$$(S(U), \rho^U_V) \underset{\varphi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (F(U), \sigma^U_V)$$

y tómese la pregavilla $(I(U), \tau^U_V)$ construida en la Proposición 4.10. Para ver que es gavilla, tómese U abierto de X y $\{U_a : a \in A\}$ una cubierta abierta de U, y $x, y \in I(U)$ tales que para cualquier $a \in A$ se tiene que $\tau^U_{U_a}(x) = \tau^U_{U_a}(y)$, entonces $\rho^U_{U_a}(x) = \rho^U_{U_a}(y)$ luego $x = y$ pues S es gavilla. Por último, tómese una colección de elementos $(x_a)_{a\in A}$ de $I(U)$ tal que para cualquier $a \in A$, $x_a \in I(U_A)$, además para cada $b, d \in A$ se tiene que $\tau^{U_b}_{U_b\cap U_d}(x_b) = \tau^{U_d}_{U_b\cap U_d}(x_d)$, luego como S es gavilla existe $x \in S(U)$ tal que para cada $a \in A$ se tiene $\rho^U_{U_a}(x) = x_a$. Para verificar que $x \in I(U)$ primero nótese que como ϕ y φ son morfismos de gavillas se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U_a}"'] & F(U) \arrow[d, "\sigma^U_{U_a}"] \\ S(U_a) \arrow[r, "\phi_{U_a}"'] & F(U_a) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U_a}"'] & F(U) \arrow[d, "\sigma^U_{U_a}"] \\ S(U_a) \arrow[r, "\varphi_{U_a}"'] & F(V) \end{tikzcd}$$

Y por las hipótesis, se tiene que

$$\sigma^U_{U_a}\varphi_U(x) = \varphi_{U_a}\rho^U_{U_a}(x) = \varphi_{U_a}(x_b) = \phi_{U_a}(x_b) = \phi_{U_a}\rho^U_{U_a}(x) = \sigma^U_{U_a}\phi_U(x)$$

pero como F es una gavilla, se tiene que $\phi_U(x) = \varphi_U(x)$, por ello $x \in I(U)$. Así, I es una gavilla sobre X. Como $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ y por la Proposición 4.10. esta gavilla es el igualador de los morfismos ϕ y φ. ■

Corolario 6.4. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es completa*

Demostración. Por las Proposiciones 6.2. y 6.3. la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee productos arbitrarios e igualadores, por tanto es completa. ■

Observación 6.5. *Naturalmente surge la pregunta de si la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es también cocompleta. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, sin embargo para demostrar este hecho se necesita más herramienta que no se tiene hasta el momento, por lo que la prueba de este resultado se dejará para más adelante en este trabajo.*

Uno de los resultados más interesantes de esta sección es que la categoría de gavillas sobre un espacio particular resulta ser equivalente a la categoría de conjuntos. Para esto, antes es necesario probar algunos otros resultados.

Proposición 6.6. *Sea $X := \{x\}$ equipado con la única topología posible y sea Z un conjunto, entonces la asignación*

$$\emptyset \longmapsto \{*\} \qquad \{x\} \longmapsto Z$$

junto con los morfismos

$$id_{\{*\}} = \rho_{\emptyset}^{\emptyset} : \{*\} \longrightarrow \{*\} \qquad id_Z = \rho_{\{x\}}^{\{x\}} : Z \longrightarrow Z \qquad \rho_{\emptyset}^{\{x\}} : Z \longrightarrow \{*\}$$

es una gavilla sobre X. A esta gavilla se le denotará por $(\{\{*\}, Z\}, \rho_V^U)$.

Demostración. Considérese al conjunto Z equipado con su topología discreta y sea $f : Z \longrightarrow \{x\}$ la única función continua entre estos espacios. Gracias al Ejemplo 5.5.1 se tiene la gavilla de secciones $(\Gamma(U), \rho_V^U)$, a continuación se investigará la naturaleza de esta gavilla. Como los únicos abiertos de $\{x\}$ son el conjunto $\emptyset$ y el mismo $\{x\}$ entonces se tienen únicamente las siguientes asignaciones: $\emptyset \longmapsto \{e : \emptyset \longrightarrow Z :$ e es una sección $\} = \{\emptyset\} \cong \{*\}$ y por otro lado $\{x\} \longmapsto \{e : \{x\} \longrightarrow Z :$ e es una sección $\} \cong Z$. Y por último se tienen las funciones $id_{\{*\}} = \rho_{\emptyset}^{\emptyset} : \{*\} \longrightarrow \{*\}, id_Z := \rho_{\{x\}}^{\{x\}} : Z \longrightarrow Z$ y la única función $\rho_{\emptyset}^{\{x\}} : Z \longrightarrow \{*\}$. Así, esta asignación junto con las funciones mencionadas configuran una gavilla sobre X. ■

Por otro lado, el Ejemplo 5.5.1 sugiere la existencia de una asignación funtorial entre los espacios etalé sobre X y las gavillas sobre X. A continuación se verificará que esto en verdad es así.

Proposición 6.7. *Sea X un espacio topológico. Considérese la asignación*

$$\Gamma : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$$

tal que a cada espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ lo manda a la gavilla de secciones $(\Gamma(U), \rho_V^U, X)$ y a cada morfismo de espacios etale $\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ lo manda al morfismo de gavillas de secciones $\Gamma(\phi) : (\Gamma_{\pi_1}(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma_{\pi_2}(U), \sigma_V^U)$ tal que para cada U abierto de X se tiene la función $(\Gamma(\phi))_U : \Gamma_{\pi_1}(U) \longrightarrow \Gamma_{\pi_2}(U)$ que está dada por $(\Gamma(\phi))_U(e) := \phi \circ e$ es un funtor.

Demostración. Dado un espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$, obsérvese que el morfismo de gavillas

$$\Gamma(id_{\mathcal{E}}) : (\Gamma(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma(U), \rho_V^U)$$

es tal que, para cada U abierto de X se tiene la función

$$(\Gamma(id_{\mathcal{E}}))_U : \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(U)$$

dada por

$$(\Gamma(id_{\mathcal{E}}))_U(e) = id_{\mathcal{E}} \circ e = e = id_{\Gamma(U)}(e)$$

por lo tanto $\Gamma(id_{\mathcal{E}}) = id_{(\Gamma(U),\rho_V^U)} = id_{\Gamma(\mathcal{E})}$. Por último, sean $\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \to (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ y $\psi : (\mathcal{F}, \pi_2, X) \to (\mathcal{H}, \pi_3, X)$ dos morfismos en la categoría $\mathcal{E}(X)$, entonces

$$\Gamma(\psi \circ \phi) : (\Gamma_{\pi_1}(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma_{\pi_3}(U), \theta_V^U)$$

de tal manera que, para cada abierto U de X se tiene la función

$$(\Gamma(\psi \circ \phi))_U : \Gamma(U)_{\pi_1} \longrightarrow \Gamma_{\pi_3}(U)$$

dada por

$$(\Gamma(\psi \circ \phi))_U(e) = (\psi \circ \phi) \circ e$$

por lo que

$$(\Gamma(\psi \circ \phi))_U = (\Gamma(\psi))_U \circ (\Gamma(\phi))_U$$

Así, se tiene que

$$\Gamma(\psi \circ \phi) = \Gamma(\psi) \circ F(\psi)$$

■

Proposición 6.8. *Sea $X = \{x\}$ equipado con la única topología posible, entonces la asignación*

$$\phi : \boldsymbol{Con} \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$$

que a cada conjunto Z lo manda a la gavilla $(\{\{*\}, Z\}, \rho_V^U)$ y a cada función $f : Y \longrightarrow Z$ lo manda al morfismo de gavillas

$$\phi(f) : (\{\{*_1\}, Y\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*_2\}, Z\}, \sigma_V^U)$$

de tal manera que se tienen las funciones

$$(\phi(f))_\emptyset : \{*_1\} \longrightarrow \{*_2\} \qquad f = (\phi(f))_{\{x\}} : Y \longrightarrow Z$$

es un funtor.

Demostración. Sea Z un conjunto cualquiera. Si se equipa a este conjunto con la topología discreta entonces se tiene una función continua $f : Z \longrightarrow \{x\}$. Más aún, no es difícil verificar que dicha función es un homeomorfismo local. Por la Proposición 6.6 se obtiene la gavilla $(\{\{*\}, Z\}, \rho_V^U)$. Ahora bien, tómese $f : Y \longrightarrow Z$ una función, nuevamente si se equipa a Y y Z con la topología discreta y se consideran las funciones continuas $g : Y \longrightarrow \{x\}$ y $h : Z \longrightarrow \{x\}$ entonces se tienen los espacios étalé

$(Y, g, \{x\})$ y $(Z, h, \{x\})$. Como Y posee la topología discreta entonces claramente f es una función continua tal que $h \circ f = g$, es decir $f : (Y, g, \{x\}) \longrightarrow (Z, h, \{x\})$ es un morfismo entre estos espacios étalé. Por la Proposición 6.7 se sabe que la asignación Γ es un funtor entre la categoría de espacios etalé y la de gavillas. Por lo que $\Gamma(f) : (\{\{*_1\}, Y\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*_2\}, Z\}, \sigma_V^U)$ es un morfismo de gavillas de tal manera que $\Gamma(f)_\emptyset : \{*_1\} \longrightarrow \{*_2\}$ y $\Gamma(f)_{\{x\}} : Y \longrightarrow Z$ tal que para cada $y \in Y$ se tiene que $\Gamma(f)_{\{x\}}(y) = f(y)$ por lo que $Gamma(f)_{\{x\}} = f$. Así, en efecto la asignación es un funtor. ■

Gracias a la Proposición 5.3. se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.9. *Sea $X = \{x\}$ equipado con la única topología posible, entonces la asignación*

$$\psi : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \boldsymbol{Con}$$

donde a cada gavilla $(\{\{*\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)$ lo manda al conjunto $F(\{x\})$ y donde a cada morfismo de gavillas $f : (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U)$ lo manda a la función $\psi(f) : F(\{x\}) \longrightarrow S(\{x\})$ dada por $\psi(f) = f_{\{x\}}$ es un funtor.

Demostración. Sea $id_F : (\{\{*\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)$ entonces $\psi(id_F) = (id_F)_{\{x\}} = id_{F(\{x\})} = id_{\psi(F)}$. Por otro lado, sean $f : (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U)$ y $g : \{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U) \longrightarrow (\{\{*_3\}, T(\{x\})\}, \tau_V^U)$ entonces $\psi(g \circ f) = (g \circ f)_{\{x\}} = g_{\{x\}} \circ f_{\{x\}}$. Por lo tanto ψ es un funtor. ■

En vista de todos estos resultados, ahora es posible probar la siguiente proposición.

Proposición 6.10. *Sea $X = \{x\}$ equipado con la única topología posible, entonces*

$$\mathcal{GAV}_X \simeq \boldsymbol{Con}$$

Demostración. Considérense los funtores

$$\phi : \mathbf{Con} \longrightarrow \mathcal{GAV}_X \quad \psi : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \mathbf{Con}$$

definidos en la Proposición 6.7. y 6.8. respectivamente. Nótese que para cada conjunto Z se tiene que

$$(\psi \circ \phi)(Z) = \psi(\{\{*\}, Z\}, \rho_V^U) = Z$$

por lo que se define la asignación

$$\mu : \psi \circ \phi \longrightarrow id_{\mathbf{Con}}$$

tal que para cada conjunto Z se tiene la función

$$id_Z = \mu_Z : Z \longrightarrow Z$$

Para ver que esta asignación es una transformación natural, tómese $f : Y \longrightarrow Z$ función entre conjuntos. Puesto que $(\psi \circ \phi)(f) = f$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "id_Y"] & Y \\ Z \arrow[u, "f=(\psi\circ\phi)(f)"] \arrow[r, "id_Z"'] & Z \arrow[u, "id_{\mathbf{Con}}(f)=f"'] \end{tikzcd}$$

Así, se tiene que μ es una transformación natural y por lo tanto $\psi \circ \phi \simeq id_{\mathbf{Con}}$. Por otro lado, nótese que para cada gavilla $(\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)$ sobre X se tiene que

$$(\phi \circ \psi)((\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)) = \phi(F(\{x\})) = (\{\{*_2\}, F(\{x\})\}, \rho_V'^U)$$

Así, se define la asignación

$$\theta : \phi \circ \psi \Longrightarrow id_{\mathcal{GAV}_X}$$

tal que para cada gavilla $(\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)$ se tiene

$$\theta_F : (\{\{*_2\}, F(\{x\})\}, \rho_V'^U) \longrightarrow (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U)$$

donde

$$(\theta_F)_\emptyset : \{*_2\} \longrightarrow \{*_1\} \qquad id_{F(\{x\})} = (\theta_F)_{\{x\}} : F(\{x\}) \longrightarrow F(\{x\})$$

Para ver que θ es una transformación natural, tómese $f : (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U)$ un morfismo de gavillas. Se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} (\phi \circ \psi)(\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \arrow[r, "\theta_F"] \arrow[d, "(\phi\circ\psi)(f)"'] & (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \arrow[d, "id_{\mathcal{GAV}_X}(f)"] \\ (\phi \circ \psi)(\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U) \arrow[r, "\theta_S"'] & (\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U) \end{tikzcd}$$

Es decir, se busca que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} (\{\{*_3\}, F(\{x\})\}, \rho_V'^U) \arrow[r, "\theta_F"] \arrow[d, "f'"'] & (\{\{*_1\}, F(\{x\})\}, \rho_V^U) \arrow[d, "f"] \\ (\{\{*_4\}, S(\{x\})\}, \sigma_V'^U) \arrow[r, "\theta_S"'] & (\{\{*_2\}, S(\{x\})\}, \sigma_V^U) \end{tikzcd}$$

Para el abierto $\emptyset$ se tiene el diagrama, que claramente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \{*_3\} \arrow[r, "(\theta_F)_\emptyset"] \arrow[d, "f'_\emptyset"'] & \{*_1\} \arrow[d, "f_\emptyset"] \\ \{*_4\} \arrow[r, "(\theta_S)_\emptyset"'] & \{*_2\} \end{tikzcd}$$

Para el abierto $\{x\}$ nótese que $f'_{\{x\}} = ((\phi \circ \psi)(f))_{\{x\}} = \phi(f_{\{x\}})_{\{x\}} = f_{\{x\}}$ por lo tanto claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(\{x\}) \arrow[r, "id_{F(X)}=(\theta_F)_{\{x\}}"] \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[d, "f"] \\ S(X) \arrow[r, "id_{S(X)}=(\theta_S)_{\{x\}}"'] & S(X) \end{tikzcd}$$

Así, la asignación θ es una transformación natural y por tanto $\phi \circ \psi \simeq id_{\mathcal{GAV}_X}$. Se concluye entonces que $\mathcal{GAV}_X \simeq \mathbf{Con}$. ■

En el Ejemplo 4.5. se hizo ver que dado un espacio étalé, es posible construir una pregavilla de conjuntos. El siguiente resultado muestra que dicha construcción es en realidad una gavilla

La construcción anterior define un funtor como se muestra a continuación.

7. Propiedades topológicas y categóricas de los espacios étalé

Para entender mejor la naturaleza de los espacios étalé, será de gran ayuda estudiar a sus secciones.

PROPOSICIÓN 7.1. *Sean $(\mathcal{E}, \pi, X)$ un espacio étalé, U un abierto de X y $s, t \in \Gamma(U)$ dos secciones tales que $s(x) = t(x)$ para algún $x \in X$, entonces existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tal que $s|_W = t|_W$.*

DEMOSTRACIÓN. Si se define $z := s(x) = t(x)$ entonces, como π es un homeomorfismo local existe V abierto de $\mathcal{E}$ con $z \in V$, $\pi(V)$ abierto en X y $\pi|_V : V \longrightarrow \pi(V)$ un homeomorfismo. Por un lado, como s es una función continua existe B_1 abierto de U tal que $x \in B_1$ y $s(B_1) \subseteq V$. Por otro lado, como también t es una función continua existe B_2 abierto de U tal que $x \in B_2$ y $t(B_2) \subseteq V$. Defínase $W := B_1 \cap B_2$ y claramente W es vecindad de x, basta ver que $s|_W = t|_W$. En efecto, dado $y \in W$ por un lado $s(y) \in s(B_1) \subseteq V$ y por otro lado $t(y) \in t(B_2) \subseteq V$. Puesto que $\pi(s(y)) = y = \pi(t(y))$ y $\pi|_V$ es un homeomorfismo entonces $s(y) = t(y)$. Por lo tanto $s|_W = t|_W$. ■

El lema que se presenta a continuación mostrará más adelante la relación que existe entre las secciones de un espacio étalé y la topología del espacio étalé.

LEMA 7.2. *Sea* $(\mathcal{E}, \pi, X)$ *un espacio étalé. Todo abierto* V *de* $\mathcal{E}$ *de tal manera que* $\pi|_V$ *sea un homeomorfismo es de la forma* $e(U)$ *donde* U *es un abierto en* X *y* $e \in \Gamma(U)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea V un abierto de $\mathcal{E}$ tal que $\pi|_V$ es un homeomorfismo. Obsérvese que $\pi(V)$ es un abierto en X por lo que

$$(\pi|_V)^{-1} : \pi(V) \longrightarrow V$$

es una sección del abierto $\pi(V)$, ya que es una función continua y además $\pi \circ (\pi|_V)^{-1} = id_{\pi(V)}$. Así, defínase $U := \pi(V)$ y $e := (\pi|_V)^{-1}$, por lo que $e(U) = V$ y $e \in \Gamma(U)$. ■

Siendo esto así, no es difícil concluir el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7.3. *Sea* $(\mathcal{E}, \pi, X)$ *un espacio étalé. Entonces los conjuntos* $e(U)$, *donde* U *es un abierto de* X *y* $e \in \Gamma(U)$ *forman una base para la topología de* $\mathcal{E}$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 3.7. y el Lema 7.2 ■

El siguiente resultado muestra que las secciones de los espacios étalé no sólo generan a la topología del espacio étalé, sino que determinan a cualquiera de sus elementos.

PROPOSICIÓN 7.4. *Sea* $(\mathcal{E}, \pi, X)$ *un espacio étalé, entonces para cada* $z \in \mathcal{E}$, *existe un abierto* U *de* $\pi(z)$ *en* X *y una sección* $e \in \Gamma(U)$ *tal que* $z = e(x)$ *para algún* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \mathcal{E}$ un elemento cualquiera. Como π es un homeomorfismo local existe V abierto de $\mathcal{E}$ de tal manera que $z \in V$, $\pi(V)$ abierto en X y $\pi|_V$ un homeomorfismo. Defínase $U := \pi(V)$ el cual cumple $x := \pi(z) \in U$. Y por último, defínase la sección $e := (\pi|_V)^{-1}$, la cual cumple $e \in \Gamma(U)$ y además $e(x) = z$.

■

Para terminar esta sección, se probará que los tallos de un espacio étalé poseen una propiedad categórica muy importante. Este resultado será de gran importancia en lo que sigue.

PROPOSICIÓN 7.5. *Sea* $(\mathcal{E}, \pi, X)$ *un espacio étalé, entonces para cada* $x \in X$ *se tiene que*

$$\mathcal{E}_x \cong \varinjlim \Gamma(U)$$

donde U *corre sobre los abiertos de* X *tales que* $x \in U$.

Demostración. Para cada U abierto de X tal que $x \in U$ defínase la función

$$\phi_U : \Gamma(U) \longrightarrow \mathcal{E}_x$$

dada por

$$\phi_U(e) := e(x).$$

Obsérvese que para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X que contienen a x, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U) \arrow[rr, "\rho_V^U"] \arrow[dr, "\phi_U"'] & & \Gamma(V) \arrow[dl, "\phi_V"] \\
& \mathcal{E}_x &
\end{tikzcd}$$

en efecto, sea $e \in \Gamma(U)$ cualquiera, entonces

$$\phi_V \circ \rho_V^U(e) = \phi_V(e|_V) = e|_V(x) = e(x) = \phi_U(e).$$

Por último, supóngase que existe un conjunto Y y para cada U abierto de X con $x \in U$ una función $\phi'_U : \Gamma(U) \to Y$, de tal manera que para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X con $x \in U, V$ se tiene que $\phi'_V \circ \rho_V^U = \phi'_U$. Ahora bien, para cada $z \in \mathcal{E}_x$ por la Proposición 7.3. existe un abierto U_z de X con $\pi(z) \in U_z$ y una sección $e_z \in \Gamma(U_z)$ tal que $z = e_z(x)$. Siendo esto así, defínase la función

$$\tau : \mathcal{E}_x \longrightarrow Y$$

dada por

$$\tau(z) = \tau(e_z(x)) := \phi'_{U_z}(e_z)$$

donde para cualesquiera $V \subseteq U$ es claro que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U) \arrow[rr, "\rho_V^U"] \arrow[dr, "\phi_U"] \arrow[ddr, bend right, "\phi'_U"'] & & \Gamma(V) \arrow[dl, "\phi_V"'] \arrow[ddl, bend left, "\phi'_V"] \\
& \mathcal{E}_x \arrow[d, dashed, "\tau"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $e \in \Gamma(U)$ entonces por un lado

$$\tau \circ \phi_U(e) = \tau(e(x)) = \phi'_U(e)$$

y por otro lado

$$\tau \circ \phi_V(e) = \tau(e(x)) = \phi'_V(e).$$

Por último, para verificar que τ es única supóngase la existencia de $\tau' : \mathcal{E}_x \longrightarrow Y$ tal que $\tau' \circ \phi_U = \phi'_U$ para cada U abierto de X con $x \in U$. Dado $z \in \mathcal{E}_x$ nuevamente por la Proposición 7.4 existe un abierto U_z de X, $e_z \in \Gamma(U_z)$ tal que $z = e_z(x)$. Por lo tanto

$$\tau(z) = \phi'_{U_z}(e_z) = \tau'(\phi_{U_z}(e_z)) = \tau'(e_z(x)) = \tau'(z)$$

■

8. La categoría $\mathcal{E}(X)$ es equivalente a la categoría $\mathcal{GAV}_X$

En esta sección se hará una de las construcciones más importantes de este capítulo, la cual permitirá ver la equivalencia entre la categoría de gavillas sobre un espacio X y la categoría de espacios étalé sobre X. Gracias a esta equivalencia, se podrán probar ciertas propiedades categóricas de la categoría de espacios étalé, así como de la categoría de gavillas.

DEFINICIÓN 8.1. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ un elemento cualquiera y $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ una pregavilla sobre X. Se define el* ***gérmen*** *de la pregavilla S en x como*

$$S_x := \varinjlim S(U)$$

donde U corre en los abiertos de X con $x \in U$.

PROPOSICIÓN 8.2. *Sean X un espacio topológico y $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ una pregavilla sobre X. Considérese la colección de gérmenes $\{S_x : x \in X\}$ y defínase el conjunto*

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} S_x$$

también defínase la función

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

dada por

$$\pi(S_x) := x$$

Para cada abierto U de X defínase el conjunto

$$S(U)_\pi := \{\overline{s} : U \longrightarrow \mathcal{S} : \pi \circ \overline{s} = id_U\}$$

y la función canónica

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow S(U)_\pi$$

dada por

$$\rho_U(s) := \overline{s}$$

donde

$$\overline{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$$

está dada por

$$\overline{s}(x) = (\rho_U(s))(x) := [s]_x \in S_x$$

es decir, puede definirse la función

$$\rho_U^x : S(U) \longrightarrow S_x$$

dada por

$$\rho_U^x(s) := [s]_x$$

Si se considera a la colección $\mathfrak{S} := \{\overline{s} : s \in S(U) \text{ y } U \text{ es abierto en } X\}$ *entonces el conjunto*

$$\mathfrak{B} := \{\overline{s}(V) : \overline{s} \in \mathfrak{S} \text{ y } V \text{ es abierto de } X \text{ con } V \subseteq Dom(\overline{s})\}$$

es una base para alguna topología en $\mathcal{S}$*.*

Demostración. Obsérvese que la colección $\mathfrak{S}$ cumple las siguientes tres condiciones:

1. Para cada $\overline{s} \in \mathfrak{S}$ y $x \in Dom(\overline{s})$ se tiene que
$$\overline{s}(x) \in S_x$$
2. Para cada $x \in X$ se tiene que
$$S_x \subseteq \bigcup_{\overline{s} \in \mathfrak{S}} Im(\overline{s})$$
3. Para cualesquiera $\overline{s}, \overline{t} \in \mathfrak{S}$ donde $U = Dom(\overline{s})$ y $V = Dom(\overline{t})$, y para cada $z \in \overline{s}(U) \cap \overline{t}(V)$ existe un abierto W de X de tal manera que
$$x \in W \subseteq U \cap V \text{ y además } \overline{s}|_W = \overline{t}|_W$$

En efecto:

1. Sea $\overline{s} \in \mathfrak{S}$ y $x \in Dom(\overline{s})$, entonces existe U abierto de X con $s \in S(U)$ y $\rho_U(s) = \overline{s}$. Por lo tanto $\overline{s}(x) = \rho_U(s)(x) = [s]_x \in S_x$
2. Sea $z \in S_x$. Por la definición de S_x existe U abierto de X con $x \in U$, $s \in S(U)$ de tal manera que $z = [s]_x = \overline{s}(x)$.
3. Por último, tómese $z \in \overline{s}(U) \cap \overline{t}(V)$ luego $x := \pi(z) \in U \cap V$. Obsérvese que:
$$[s]_x = \rho_U^x(s) = \overline{s}(x) = \overline{s}(\pi(z)) = z = \overline{t}(\pi(z)) = \overline{t}(x) = \rho_V^x(t) = [t]_x$$
y por la definición se S_x se tiene que existe $x \in W \subseteq U \cap V$ de tal manera que
$$\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t) \in S(W)$$
Por último, obsérvese que dado $x \in W$ se obtiene

$$\begin{array}{rcl}\overline{s}|_W(x) & = & \overline{s}(x) \\ & = & \rho^x_U(s) \\ & = & \rho^x_w(\rho^U_W(s)) \\ & = & \overline{\rho^U_W(s)}(x) \\ & = & \overline{\rho^V_W(t)}(x) \\ & = & \rho^x_W(\rho^V_W(t)) \\ & = & \rho^x_V(t) \\ & = & \overline{t}(x) \\ & = & \overline{t}|_W(x)\end{array}$$

Por lo tanto $\overline{s}|_W = \overline{t}|_W(x)$.

Ahora bien, nótese que por la segunda propiedad, se tiene que

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\overline{s}\in\mathfrak{S}} \overline{s}(V)$$

y por la tercera propiedad se tiene que para cualesquiera $\overline{s}(U)$ y $\overline{t}(V)$ con $z \in \overline{s}(U) \cap \overline{t}(V)$ existe W tal que $z \in \overline{t}|_W(W) \subseteq \overline{S}(U) \cap \overline{t}(V)$. Por tanto, la colección $\mathfrak{B}$ es una base para alguna topología en $\mathcal{S}$. ■

COROLARIO 8.3. *Sea $\mathcal{S}$ el espacio topológico construido en la Proposición 8.2. Entonces cada elemento $\overline{s} \in \mathfrak{S}$ es una función continua, con $\overline{s} \in S(U)_\pi$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A \subseteq \mathcal{S}$ un abierto y $x \in \overline{s}^{-1}(A) \subseteq U$. Entonces $\overline{s}(x) \in A \subseteq \mathcal{S}$. Como $\mathfrak{B}$ es una base del espacio, existe $\overline{t} \in \mathfrak{S}$ tal que $\overline{s}(x) \in \overline{t}(V) \subseteq A$ con V abierto y $V \subseteq Dom(\overline{t})$. Luego, por la condición 3 de la demostración de la Proposición 8.2. existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $\overline{s}(W) = \overline{t}(W) \subseteq \overline{t}(V) \subseteq A$. Por lo tanto $x \in W \subseteq \overline{s}^{-1}(A)$. Así, $\overline{s}$ es una función continua. ■

PROPOSICIÓN 8.4. *Sea X un espacio topológico y considérese el espacio topológico $\mathcal{S}$ equipado con la topología generada por la colección $\mathfrak{B}$ como en la Proposición 8.2. Entonces la función*

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$$

dada por

$$\pi(S_x) := x$$

es un homeomorfismo local.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \mathcal{S}$ un elemento cualquiera, por tanto existe $\overline{s} \in \mathfrak{S}$ tal que $z \in \overline{s}(U)$ el cual es abierto en $\mathcal{S}$ y $\pi(\overline{s}(U)) = U$ es un abierto de X por definición. Basta ver que la función $\pi|_{\overline{s}(U)} : \overline{s}(U) \longrightarrow U$ es un homeomorfismo. Nótese que $\overline{s}$ es una función inyectiva y por tanto $\pi_{\overline{s}(U)} = \overline{s}^{-1}$ es una biyección. Así, para probar que esta función es un homeomorfismo, basta probar que $\overline{s} : U \longrightarrow \mathcal{S}$ es un homeomorfismo, pero nótese que por la estructura topológica de $\mathcal{S}$ esta función ya es abierta. Para la continuidad, tómese $A \subseteq \mathcal{S}$ un abierto cualquiera y sea $x \in \overline{s}^{-1}(A) \subseteq U$. Como A es abierto existe $\overline{t} \in \mathfrak{S}$ tal que $\overline{s}(x) \in \overline{t}(V) \subseteq A$. Por la propiedad 3 de la Proposición 8.2. existe W abierto con $W \subseteq U \cap V$, $x \in W$ y además $\overline{s}(W) = \overline{t}(W) \subseteq \overline{t}(V) \subseteq A$ por lo que $x \in W \subseteq s^{-1}(A)$. Así, s es una función continua y por tanto un homeomorfismo. ■

Así, se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 8.5. *Sea X un espacio topológico, entonces la terna $(\mathcal{S}, \pi, X)$ es un espacio étalé.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 8.3. la función $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ es un homeomorfismo local, por tanto $(\mathcal{S}, \pi, X)$ es un espacio étalé. ■

El trabajo que se ha hecho hasta ahora en esta sección puede resumirse en una definición adecuada.

DEFINICIÓN 8.6. *Sea $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ una pregavilla sobre X. Al proceso en el que se construye al espacio étalé $(\mathcal{S}, \pi, X)$ generado por la pregavilla S se le conoce como la* ***etalificación*** *de la pregavilla S.*

Como un ejemplo concreto de la etalificación de una pregavilla, se tiene la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 8.7. *Sea X un espacio topológico y U un abierto de X cualquiera. Considérese la pregavilla h_U construida en el Ejemplo 4.5. Ahora bien, para cada $x \in X$ se tiene el gérmen de la pregavilla h_U en x:*

$$H_x = \varinjlim_{x \in V \wedge V \in \mathcal{O}(X)} h_U(V)$$

y se tienen los siguientes casos:

- *Si $x \notin U$, entonces ningún V abierto de X con $x \in V$ cumple que $V \subseteq U$, por lo que para cada $V \in \mathcal{O}(X)$ con $x \in V$ se tiene que $Hom(V, U) = \emptyset$ y por lo tanto*

$$H_x = \varinjlim_{x \in V \wedge V \in \mathcal{O}(X)} h_U(V) = \varinjlim_{x \in V \wedge V \in \mathcal{O}(X)} \emptyset = \emptyset$$

- *Si $x \in U$ entonces por definición*

$$H_x = \varinjlim_{x \in V \wedge V \in \mathcal{O}(X)} h_U(V) = \Big(\bigsqcup_{x \in V \wedge V \in \mathcal{O}(X)} Hom(V, U) \Big) / \sim$$

pero nótese que se pueden omitir aquellos $Hom(V,U)$ que sean vacíos, es decir a aquellos abiertos V de X tales que $V \nsubseteq U$ por lo tanto

$$H_x = (\bigsqcup_{x\in V\subseteq U} Hom(V,U))/\!\sim\, = (\bigsqcup_{x\in V\subseteq U} \{i_{V\subseteq U}\})/\!\sim$$

pero recuérdese que esta relación de equivalencia está dada como sigue: dados $i_{V_1\subseteq U}$ e $i_{V_2\subseteq U}$ elementos de $\bigsqcup_{x\in V\subseteq U}\{i_{V\subseteq U}\}$ se dirá que $i_{V_1\subseteq U} \sim i_{V_2\subseteq U}$ si y sólo si $i_{V_1\subseteq U} \in Hom(V_1,U)$, $i_{V_2\subseteq U} \in Hom(V_2,U)$ y existe $V_3 \subseteq V_1, V_2$ tal que $\rho^{V_1}_{V_3}(i_{V_1\subseteq U}) = \rho^{V_2}_{V_3}(i_{V_2\subseteq U})$. Por último, nótese que $i_{U\subseteq U} \in \bigsqcup_{x\in V\subseteq U}\{i_{V\subseteq U}\}$ pues $Hom(U,U) = \{i_{U\subseteq U}\}$ y así, se afirma que para todo $i_{V\subseteq U} \in \bigsqcup_{x\in V\subseteq U}\{i_{V\subseteq U}\}$ se tiene que $i_{V\subseteq U} \sim i_{U\subseteq U}$. En efecto, si se considera $U\cap V$ entonces por un lado

$$\begin{array}{rcl}\rho^{V}_{U\cap V}(i_{V\subseteq U}) & = & i_{V\subseteq U}\circ i_{U\cap V\subseteq V}\\ & = & i_{U\cap V\subseteq U}\end{array}$$

y por otro lado

$$\begin{array}{rcl}\rho^{U}_{U\cap V}(i_{U\subseteq U}) & = & i_{U\subseteq U}\circ i_{U\cap V\subseteq U}\\ & = & i_{U\cap V\subseteq U}\end{array}$$

por lo tanto $i_{V\subseteq U} \sim i_{U\subseteq U}$. Y así, se obtiene que

$$H_x = \{[i_{U\subseteq U}]_x\}$$

Ahora bien, defínase

$$\mathcal{H} := \bigsqcup_{x\in X} H_x$$

pero por lo notado anteriormente algunos H_x son vacíos, a saber, aquellos para los cuales $x \notin U$, por lo que

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{x\in U} H_x = \bigsqcup_{x\in U}\{[i_{U\subseteq U}]_x\}$$

Ahora considérese la función

$$\pi : \mathcal{H} \longrightarrow X$$

tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$\pi(H_x) = x$$

Ahora bien, para determinar la topología de $\mathcal{H}$, para cada V abierto de X considérese

$$Hom(V,U)_\pi := \{\overline{s} : V \longrightarrow \mathcal{H} : \pi\circ\overline{s} = id_V\}$$

y defínase

$$\rho_U : Hom(V,U) \longrightarrow Hom(V,U)_\pi$$

dada por

$$\rho_U(s) := \overline{s}$$

donde

$$\overline{s} : V \longrightarrow \mathcal{H}$$

definida por

$$\overline{s}(x) := [s]_x$$

pero nótese que nuevamente se tienen dos casos:

- *Si* $V \subseteq U$ *entonces* $Hom(V,U) = \{i_{V\subseteq U}\}$ *por lo que* $Hom(V,U)_\pi = \{\overline{i_{V\subseteq U}}\}$.
- *Si* $V \nsubseteq U$ *entonces* $Hom(V,U) = \emptyset$ *y por lo tanto* $Hom(V,U)_\pi = \emptyset$.

Ahora bien, considérese la colección

$$\mathfrak{S} := \{\overline{s} : s \in Hom(V,U) \text{ y } V \text{ es abierto de } X\}$$

pero por los dos puntos anteriores se tiene que

$$\mathfrak{S} = \{\overline{i_{V\subseteq U}} : i_{V\subseteq U} \in Hom(V,U) \text{ y } V \subseteq U\}$$

Y así, para determinar la topología de $\mathcal{H}$ *considérese*

$$\mathfrak{B} := \{\overline{s}(V) : \overline{s} \in \mathfrak{S} \text{ y } V \text{ es abierto de } X \text{ con } V \subseteq Dom(\overline{s})\}$$

y por lo anterior se tiene que

$$\mathfrak{B} = \{\overline{i_{V\subseteq U}}(W) : \overline{i_{V\subseteq U}} \in \mathfrak{S} \text{ con } W \text{ abierto de } X \text{ tal que } W \subseteq V\}$$

Se afirma que el espacio étalé $(\mathcal{H}, \pi, X)$ *es isomorfo al subespacio* $(U, i_{U\subseteq X}, X)$. *En efecto, defínase la función*

$$\phi : U \longrightarrow \mathcal{H}$$

tal que para cada $x \in U$ *se tiene que*

$$\phi(x) := \{[i_{U\subseteq U}]_x\}$$

y obsérvese que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "i_{U\subseteq X}"'] & & \mathcal{H} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

en efecto, pues para cada $x \in U$ *se tiene*

$$\pi \circ \phi(x) = \pi(\{[i_{U\subseteq U}]_x\}) = \pi(H_x) = x = i_{U\subseteq X}(x)$$

por otro lado, defínase

$$\psi : \mathcal{H} \longrightarrow U$$

dada por

$$\psi(\{[i_{U\subseteq U}]_x\}) := x$$

y es claro que

$$\phi \circ \psi = id_{\mathcal{H}} \quad \psi \circ \phi = id_U$$

Por último, basta verificar que ϕ es una función continua, y para esto tómese $\overline{i_{V\subseteq U}}(W)$ un elemento cualquiera de la base $\mathfrak{B}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\overline{i_{V\subseteq U}}(W)) &= \{x \in U : \phi(x) \in \overline{i_{V\subseteq U}}(W)\} \\
&= \{x \in U : \phi(x) = \overline{i_{V\subseteq U}}(y) \text{ para algún } y \in W\} \\
&= \{x \in U : \{[i_{U\subseteq U}]_x\} = \{[i_{U\subseteq U}]_y\} \text{ para algún } y \in W\} \\
&= \{x \in U : [i_{U\subseteq U}]_x = [i_{U\subseteq U}]_y \text{ para algún } y \in W\} \\
&= \{x \in U : x = y \text{ para algún } y \in W\} \\
&= U \cap W
\end{aligned}$$

por lo que ϕ^{-1} es una función continua y así se concluye que

$$(\mathcal{H}, \pi, x) \cong (U, i_{U\subseteq X}, X)$$

PROPOSICIÓN 8.8. *Sea X un espacio topológico, entonces la asignación*

$$\mathcal{S} : \mathcal{PGAV}_X \longrightarrow \mathcal{E}(X)$$

donde a cada pregavilla $S \equiv (S(U), \rho_V^U)$ la manda al espacio étalé dado por la etalificación $(\mathcal{S}, \pi, X)$ y donde a cada morfismo de pregavillas

$$\phi : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$$

lo manda al morfismo

$$\mathcal{S}(\phi) : (\mathcal{S}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$$

donde para cada $x \in X$ se tiene la asignación

$$\mathcal{S}(\phi)_x : S_x \longrightarrow F_x$$

dada por

$$\mathcal{S}(\phi)_x([s]_x) := [\phi_U(s)]_x$$

es un funtor.

DEMOSTRACIÓN. Primero se tiene que verificar que dado un morfismo de pregavillas $\phi : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$ la asignación $\mathcal{S}(\phi) : (\mathcal{S}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ es un morfismo de espacios étalé. Para esto, sea $x \in X$ cualquiera, entonces $\pi_2 \circ \mathcal{S}(\phi)_x(S_x) = \pi_2 \circ \phi_x(S_x) = \pi_2(F_x) = \{x\} = \pi_1(S_x)$ es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[rr, "\mathcal{S}(\phi)"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Basta verificar que $\mathcal{S}(\phi)$ es una función continua. Sea $z \in \mathcal{S} = \bigsqcup_{x\in X} S_x$, entonces existe $s \in S(U)$ con $z = \overline{s}(x)$ y que además $x = \pi(z)$. Por lo que

$$\mathcal{S}(\phi)_x(\overline{s}(x)) = \overline{t}(x) \in F_x$$

para algún $t \in F(V)$. Así, tómese un abierto cualquiera N de $\mathcal{F}$ que contenga a $\bar{t}(x)$. Como $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ es una base del espacio $\mathcal{F}$, existe A abierto de X de tal manera que $x \in A \subseteq V$ y

$$\bar{t}(x) \in \bar{t}(A) \subseteq N$$

Y se tiene que

$$\bar{t}(x) = \mathcal{S}(\phi)_x(\overline{s}(x)) = \mathcal{S}(\phi)_x(\rho_U^x(s)) = \sigma_U^x(\phi_U(s)) = \overline{\phi_U(s)}(x)$$

donde $\phi_U(s) \in F(U)$ y por lo tanto $Dom(\overline{\phi_U(s)}) = U$, con $x \in U \cap V$. Por otro lado, existe $W \in \mathcal{V}(x)$ con $W \subseteq U \cap A$ de tal manera que

$$\bar{t} = \overline{\phi_U(s)}|_W$$

Se afirma que $\mathcal{S}(\phi)(\overline{s}(W)) \subseteq \bar{t}(W)$ En efecto, tómese $x' \in W$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\phi)(\overline{s}(x')) &= \mathcal{S}(\phi)_{x'}(\overline{s}(x')) \\
&= \mathcal{S}(\phi)_{x'}(\rho_U^{x'}(s)) \\
&= \mathcal{S}(\phi)_{x'}(\rho_W^{x'}(\rho_W^U(s))) \\
&= \sigma_W^{x'}(\phi_W(\rho_W^U(s))) \\
&= \sigma_W^{x'}(\sigma_W^U(\phi_U(s))) \\
&= \overline{\sigma_W^U(\phi_U(s))}(x') \\
&= \overline{\phi_U(s)}(x') \\
&= \bar{t}(x')
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{S}(\phi)$ es una función continua. Ahora bien, para verificar que $\mathcal{S}$ es un funtor, sea $id_{(S(U),\rho_V^U)} : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (S(U), \rho_V^U)$, entonces $\mathcal{S}(id_{(S(U),\rho_V^U)})$ es tal que $\mathcal{S}(id_{(S(U),\rho_V^U)})|_{S_x} = id_{S_x}$, por lo tanto $\mathcal{S}(id_{(S(U),\rho_V^U)}) = id_{(\mathcal{S},\pi,X)} = id_{\mathcal{S}(S(U),\rho_V^U)}$. Por último, considérese el diagrama en la categoría de pregavillas

$$(S(U), \rho_V^U) \xrightarrow{\phi} (E(U), \lambda_V^U) \xrightarrow{\psi} (T(U), \sigma_V^U)$$

y $[s]_x \in \mathcal{S}_x$. Por un lado $\mathcal{S}(\psi \circ \phi)$ es tal que $\mathcal{S}(\psi \circ \phi)|_{\mathcal{S}_x} = (\psi \circ \phi)_x$ la cual es

$$\mathcal{S}(\psi \circ \phi)_x : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{T}_x$$

dada por

$$\mathcal{S}(\psi \circ \phi)([s]_x) := [\psi_U(\phi_U(s))]_x$$

Por otro lado $\mathcal{S}(\phi)|_{\mathcal{S}_x} =: \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{E}_x$ está dada por

$$\mathcal{S}(\phi)_x([s]_x) := [\phi_U(s)]_x$$

Entonces $\mathcal{S}(\psi)|_{\mathcal{E}_x} = [\psi_U(\phi_U(s))]_x$ y por lo tanto $\mathcal{S}(\psi \circ \psi) = \mathcal{S}(\psi) \circ \mathcal{S}(\phi)$.

■

Para concluir este primer capítulo, se probará que la categoría de espacios étalé sobre un espacio X es equivalente a la categoría de gavillas sobre X. Para probar esta equivalencia se usarán los funtores que se han construido a lo largo de este trabajo. Por último, este resultado junto con otro nos permitirá concluir que la categoría de gavillas es cocompleta, así como la de espacios étalé.

Proposición 8.9. *Sea X un espacio topológico, entonces*

$$\mathcal{E}(X) \simeq \mathcal{GAV}_X$$

Demostración. Considérese la composición de funtores

$$\mathcal{S} \circ i : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \mathcal{E}(X)$$

donde a cada gavilla $(S(U), \rho_V^U)$ se le manda al espacio étalé generado por la etalificación $(\mathcal{S}, \pi, X)$ y a cualquier morfismo de gavillas $\phi : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$ se manda al morfismo de espacios étalé $\mathcal{S} \circ i(\phi) : (\mathcal{S}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ dado por la Proposición 8.5. También considérese al funtor

$$\Gamma : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$$

dado por la Proposición 6.8. Entonces se verifica que $(\mathcal{S} \circ i) \circ \Gamma \cong id_{\mathcal{E}(X)}$. Defínase la asignación

$$\mu : (\mathcal{S} \circ i) \circ \Gamma \Longrightarrow id_{\mathcal{E}(X)}$$

tal que para cada espacio étalé $(\mathcal{E}, \pi, X)$ se tiene el morfismo

$$\mu_{\mathcal{E}} : (\mathcal{S} \circ i) \circ \Gamma)(\mathcal{E}, \pi, X) \longrightarrow (\mathcal{E}, \pi, X)$$

Para definir este morfismo primero obsérvese que

$$\begin{aligned}(\mathcal{S} \circ i \circ \Gamma)(\mathcal{E}, \pi, X) &= \mathcal{S} \circ i(\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \\ &= \mathcal{S}(\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \\ &= (\Gamma, \pi', X)\end{aligned}$$

Donde $\Gamma = \bigsqcup_{x \in X} \Gamma_x$ y $\Gamma_x = \varinjlim \Gamma_\pi(U)$. Así, defínase el morfismo

$$\mu_{\mathcal{E}} : (\Gamma, \pi', X) \longrightarrow (\mathcal{E}, \pi, X)$$

tal que para cada $x \in X$ se tiene

$$(\mu_{\mathcal{E}})_x : \Gamma_x \longrightarrow \mathcal{E}_x$$

dada por

$$(\mu_{\mathcal{E}})_x [s]_x := s(x)$$

Obsérvese que $\mu_{\mathcal{E}}$ es en efecto un morfismo de espacios étalé. Por definición es una función continua pues cada $[s]_x \in \Gamma_x$ hace que s sea una función continua. Para ver que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\mu_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Basta ver que para cada $x \in X$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Gamma_x \arrow[rr, "(\mu_{\mathcal{E}})_x"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $[s]_x \in \Gamma_x$ entonces

$$\pi \circ \mu_{\mathcal{E}}[s]_x = \pi(s(x)) = x = \pi'[s]_x$$

Para probar que μ es una transformación natural tómese $\phi : (\mathcal{E}, \pi_1, X) \longrightarrow (\mathcal{F}, \pi_2, X)$ un morfismo de espacios étalé. Se busca que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} (\Gamma_{\pi}, \pi_1', X) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "\mathcal{S} \circ i \circ \Gamma(\phi)"'] & (\mathcal{E}, \pi_1, X) \arrow[d, "\phi"] \\ (\Gamma_{\pi_2}, \pi_2', X) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{F}}"'] & (\mathcal{F}, \pi_2, X) \end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $x \in X$, el diagrama que se busca que conmute es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} (\Gamma_{\pi_1})_x \arrow[r, "(\mu_{\mathcal{E}})_x"] \arrow[d, "(\mathcal{S}(\Gamma(\phi)))_x"'] & \mathcal{E}_x \arrow[d, "\phi_x"] \\ (\Gamma_{\pi_2})_x \arrow[r, "(\mu_{\mathcal{F}})_x"'] & \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

Tómese $[s]_x \in (\Gamma_{\pi_1})_x$ entonces

$$(\mu_{\mathcal{F}})_x \circ (\mathcal{S}(\Gamma(\phi)))_x[s]_x = (\mu_{\mathcal{F}})_x[\phi \circ s]_x = \phi \circ s(x)$$

Y por otro lado

$$\phi \circ (\mu_{\mathcal{E}})_x[s]_x = \phi \circ s(x)$$

Por lo tanto μ es una transformación natural y se concluye que

$$(\mathcal{S} \circ i) \circ \Gamma \simeq id_{\mathcal{E}(X)}$$

Para verificar que $\Gamma \circ (S \circ i) \cong id_{\mathcal{GAV}_X}$ tómese $(S(U), \rho_V^U)$ una gavilla sobre X, obsérvese que

$$\Gamma \circ (\mathcal{S} \circ i)(S(U), \rho_V^U) = \Gamma(\mathcal{S}, \pi, X) = (\Gamma_{\pi}(U), \sigma_V^U)$$

y obsérvese que

$$\Gamma_\pi(U) = S(U)_\pi$$

Así, defínase la transformación natural

$$\theta : id_{\mathcal{GAV}_X} \Longrightarrow \Gamma \circ (\mathcal{S} \circ i)$$

donde para cada gavilla $(S(U), \rho_V^U)$ se tiene el morfismo de gavillas

$$\theta_S : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma_\pi(U), \sigma_V^U)$$

tal que, para cada abierto U de X se tiene la función

$$(\theta_S)_U : S(U) \longrightarrow \Gamma_\pi(U)$$

dada por

$$(\theta_S)_U(s) := \overline{s}$$

Para verificar que θ_S es un morfismo de gavillas se requiere que siguiente diagrama conmute para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "(\theta_S)_U"] & \Gamma_\pi(U) \\ S(V) \arrow[u, "\rho_U^V"] \arrow[r, "(\theta_S)_V"'] & \Gamma_\pi(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"'] \end{tikzcd}$$

es decir, se tiene que verificar que $\overline{\rho_U^V(s)} = \overline{s}|_V$. Para ello, tómese $x \in U$ cualquiera, por un lado

$$\overline{s}|_V(x) = [s]_x$$

y por otro lado

$$\overline{\rho_U^V(s)}(x) = [\rho_U^V(s)]_x$$

Pero obsérvese que $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$ por lo que

$$\rho_{U\cap V}^U(\rho_U^V(s)) = \rho_{U\cap V}^V(s)$$

Es decir $s \simeq \rho_U^V$ y por lo tanto $[s]_x = [\rho_U^V(s)]_x$. Así, el diagrama es conmutativo y por lo tanto θ_S es un morfismo de gavillas. Por último, para verificar que θ es una transformación natural, tómese $\phi : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$ un morfismo de gavillas. Se necesita que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} (S(U), \rho_V^U) \arrow[r, "\theta_S"] \arrow[d, "\phi"'] & (\Gamma_{\pi_1}(U), \epsilon_V^U) \arrow[d, "\Gamma\circ(\mathcal{S}i)(\phi)"] \\ (F(U), \sigma_V^U) \arrow[r, "\theta_F"] & (\Gamma_{\pi_2}(U), \delta_V^U) \end{tikzcd}$$

Para ello, tómese U abierto de X, entonces se necesita que el diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "(\theta_S)_U"] \arrow[d, "\phi_U"'] & \Gamma_{\pi_1}(U) \arrow[d, "\Gamma(\mathcal{S}(\phi))_U"] \\ F(U) \arrow[r, "(\theta_F)_U"'] & \Gamma_{\pi_2}(U) \end{tikzcd}$$

Tómese $s \in S(U)$ cualquiera, por un lado

$$(\Gamma \circ \mathcal{S}(\phi))_U \circ (\theta_S)_U(s) = (\Gamma \circ \mathcal{S}(\phi))_U(\overline{s}) = \mathcal{S}(\phi) \circ \overline{s}$$

Y por otro lado

$$(\theta_F)_U \circ \phi_U(s) = \overline{\phi_U(s)}$$

Para ver que son iguales, tómese $x \in U$, entonces por un lado

$$\mathcal{S}(\phi) \circ \overline{s}(x) = \mathcal{S}(\phi)[s]_x = [\phi_U(s)]_x$$

y por otro lado

$$\overline{\phi_U(s)}(x) := [\phi_U(s)]_x$$

Así, el diagrama es conmutativo y θ es una transformación natural y por tanto $\Gamma \circ (\mathcal{S} \circ i) \cong id_{\mathcal{GAV}_X}$.

■

Corolario 8.10. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría reflectiva de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$*

Demostración. Considérese la asignación

$$\epsilon : (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i \Longrightarrow id_{\mathcal{GAV}_X}$$

tal que para cada gavilla se tiene

$$\epsilon_S : (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i(S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (S(U), \rho_V^U)$$

Primero obsérvese que

$$(\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i(S(U), \rho_V^U) = \Gamma(\mathcal{S}, \pi, X) = (\Gamma_\pi(U), \phi_V^U)$$

pero por el Corolario 8.3 se tiene que $\Gamma_\pi(U) = F(U)_\pi$. Por lo tanto, para cada U abierto de X se define

$$(\epsilon_S)_U : \Gamma_\pi(U) \longrightarrow F(U)$$

dada por

$$(\epsilon_\pi)_U(\overline{s}) := s$$

Para ver que ϵ es una transformación natural, tómese $\psi : (F(U), \rho_V^U) \longrightarrow (S(U), \sigma_V^U)$ un morfismo entre gavillas. Se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma_{\pi_1}(U), \phi_V^U) \arrow[r, "E_F"] \arrow[d, "(\Gamma\circ\mathcal{S})\circ i(\psi)"'] & (F(U), \rho_V^U) \arrow[d, "\psi"] \\
(\Gamma_{\pi_2}(U), \phi_V'^U) \arrow[r, "\epsilon_S"'] & (S(U), \sigma_V^U)
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese U abierto de X, se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{\pi_1}(U) \arrow[r, "(\epsilon_F)_U"] \arrow[d, "(\Gamma\circ\mathcal{S}\circ i(\psi))_U"'] & F(U) \arrow[d, "\psi_U"] \\
\Gamma_{\pi_2}(U) \arrow[r, "(\epsilon_S)_U"'] & S(U)
\end{tikzcd}$$

En efecto, por un lado

$$\psi_U \circ (\epsilon_F)_U(\overline{s}) = \psi_U(s)$$

y por otro lado

$$(\epsilon_S)_U \circ (\Gamma \circ \mathcal{S} \circ i(\psi))_U = (\epsilon_S)_U(\mathcal{S}(\psi) \circ \overline{s}) = \psi_U(s)$$

Así, ϵ es una transformación natural. Por otro lado, considérese la asignación

$$\eta : id_{\mathcal{PGAV}_X} \Longrightarrow i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S})$$

tal que para cada pregavilla $(F(U), \rho_V^U)$ se tiene

$$\eta_F : (F(U), \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma_\pi(U), \phi_V^U)$$

tal que para cada abierto U se define

$$(\eta_F)_U : F(U) \longrightarrow \Gamma_\pi(U)$$

dada por

$$(\eta_F)_U(s) := \overline{s}$$

pues $\Gamma_\pi(U) = F_\pi(U)$. Para ver que η es una transformación natural, tómese $\psi : (F(U), \rho_V^U) \longrightarrow (S(U), \sigma_V^U)$ un morfismo de pregavillas, se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(F(U), \rho_V^U) \arrow[r, "\eta_F"] \arrow[d, "\psi"'] & (\Gamma_{\pi_1}(U), \phi_V^U) \arrow[d, "i\circ\Gamma\circ\mathcal{S}(\psi)"] \\
(S(U), \sigma_V^U) \arrow[r, "\eta_S"'] & (\Gamma_{\pi_2}(U), \phi_V'^U)
\end{tikzcd}$$

Para ello, sea U abierto de X se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "(\eta_F)_U"] \arrow[d, "\psi_U"'] & \Gamma_{\pi_1}(U) \arrow[d, "(i\circ\Gamma\circ\mathcal{S}(\psi))_U"] \\ S(U) \arrow[r, "(\eta_S)_U"'] & \Gamma_{\pi_2}(U) \end{tikzcd}$$

Dado $s \in F(U)$ se busca que $\mathcal{S}(\psi) \circ \overline{s} = \overline{\psi_U(s)}$. Para esto, sea $x \in U$, por un lado

$$\overline{\psi_U(s)}(x) = [\psi_U(s)]_x$$

y por otro lado

$$\mathcal{S}(\psi) \circ \overline{s}(x) = \mathcal{S}(\psi)[s]_x = [\psi_U(s)]_x$$

Así, el diagrama es conmutativo y por lo tanto η es una transformación natural. Para verificar que el funtor $\Gamma \circ \mathcal{S}$ es adjunto izquierdo del funtor i basta verificar las identidades triangulares, es decir, primero se tiene que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma \circ \mathcal{S} \arrow[r, "\Gamma\circ\mathcal{S}(\eta)"] \arrow[dr, "id_{\Gamma\circ\mathcal{S}}"'] & (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S}) \arrow[d, "\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}}"] \\ & \Gamma \circ \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Para ello, tómese $(F(U), \rho_V^U)$ una pregavilla, basta ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma \circ \mathcal{S}(F) \arrow[r, "\Gamma\circ\mathcal{S}(\eta_F)"] \arrow[dr, "id_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)}"'] & (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S})(F) \arrow[d, "\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)}"] \\ & \Gamma \circ \mathcal{S}(F) \end{tikzcd}$$

Pero nótese que

$$\begin{aligned} (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S})(F) &= \Gamma \circ \mathcal{S} \circ i \circ \Gamma(\mathcal{F}, \pi, X) \\ &= \Gamma \circ \mathcal{S} \circ i(\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \\ &= \Gamma \circ \mathcal{S}(\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \\ &= \Gamma(\Gamma, \pi, X) \\ &= (\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \end{aligned}$$

Por lo que basta ver la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \arrow[r, "\Gamma\circ\mathcal{S}(\eta_F)"] \arrow[dr, "id_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)}"'] & (\Gamma_\pi(U), \phi_V^U) \arrow[d, "\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}}(F)"] \\
 & (\Gamma_\pi(U), \phi_V^U)
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese U abierto de X, basta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\pi(U) \arrow[r, "(\Gamma\circ\mathcal{S}(\eta_F)_U"] \arrow[dr, "(id_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U"'] & \Gamma_\pi(U) \arrow[d, "(\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U"] \\
 & \Gamma_\pi(U)
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $\overline{s} \in \Gamma_\pi(U)$ y nótese que

$$(\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U \circ (\Gamma \circ \mathcal{S}(\eta_F)_U : \Gamma_\pi(U) \longrightarrow \Gamma_\pi(U)$$

entonces por un lado

$$(\Gamma \circ \mathcal{S}(\eta_F)_U(\overline{s}) = \overline{s}$$

y por otro lado

$$(\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U(\overline{s}) = \overline{s}$$

entonces $(\epsilon_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U \circ (\Gamma \circ \mathcal{S}(\eta_F)_U : \Gamma_\pi(U) \longrightarrow \Gamma_\pi(U) = (id_{\Gamma\circ\mathcal{S}(F)})_U$. Para terminar, se tiene que ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\eta(i)"] \arrow[dr, "id_i"'] & i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i \arrow[d, "i(\epsilon)"] \\
 & i
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $(F(U), \rho_V^U)$ una gavilla cualquiera, se necesita que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
i(F(U), \rho_V^U) \arrow[r, "\eta_{i(F(U),\rho_V^U)}"] \arrow[dr, "id_{i(F(U),\rho_V^U)}"'] & i \circ (\Gamma \circ \mathcal{S}) \circ i(F(U), \rho_V^U) \arrow[d, "i_{\epsilon_{(F(U),\rho_V^U)}}"] \\
 & i(F(U), \rho_V^U))
\end{tikzcd}$$

Si se toma U abierto de X entonces el diagrama que se busca que conmute es el siguiente

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "(\eta_F)_U"] \arrow[dr, "(id_F)_U"'] & \Gamma_\pi(U) \arrow[d, "(\epsilon_F)_U"] \\ & F(U) \end{tikzcd}$$

Para ello, tómese $s \in F(U)$ cualquiera, entonces

$$(\epsilon_F)_U \circ (\eta_F)_U(s) = (\epsilon_F)_U(\overline{s}) = s$$

por lo tanto $(\epsilon_F)_U \circ (\eta_F)_U = (id_F)_U$. Es decir, el diagrama conmuta y por tanto, se tiene que se cumple la otra identidad triangular. Así, se concluye que el funtor $\Gamma \circ \mathcal{S}$ es adjunto izquierdo del funtor inclusión i. En conclusión, se tiene que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es una subcategoría reflectiva de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$.

■

Recuérdese el siguiente resultado de teoría de categorías. Este resultado puede consultarse en [25].

PROPOSICIÓN 8.11. *Sean $F : C \longrightarrow D$ y $G : D \longrightarrow C$ dos funtores entre categorías tales que F es adjunto izquierdo de G, entonces:*

1. *F preserva todos los colímites que existen en C.*
2. *G preserva todos los límites que existen en D.*

Ahora sí se está en condiciones de probar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 8.12. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es cocompleta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : J \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$ un diagrama cualquiera en la categoría $\mathcal{GAV}_X$, si se considera el funtor inclusión $i : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \mathcal{PGAV}_X$ entonces $i \circ F : J \longrightarrow \mathcal{PGAV}_X$ es un diagrama cualquiera en la categoría $\mathcal{PGAV}_X$. Como la categoría $\mathcal{PGAV}_X$ es cocompleta, existe el colímite de este diagrama, es decir, existe un cocono $(N(U), \rho_V^U)$ que es una pregavilla, junto con una familia de morfismos $\psi_Z : i \circ F(Z) \longrightarrow (N(U), \rho_V^U)$ para cada Z objeto de J, de tal manera que para cada morfismo $f : Z \longrightarrow Y$ en J el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} i \circ F(Z) \arrow[rr, "i\circ F(f)"] \arrow[dr, "\psi_Z"'] & & i \circ F(Y) \arrow[dl, "\psi_Y"] \\ & (N(U), \rho_V^U) & \end{tikzcd}$$

Además, este cocono N es universal, en el sentido de que si existe otro cocono $(L(U), \sigma_V^U)$ con morfismos φ_Z para cada Z objeto de J, entonces existe un único morfismo $u : (N(U), \rho_V^U) \longrightarrow (L(U), \sigma_V^U)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
i \circ F(Z) \arrow[rr, "i \circ F(f)"] \arrow[dr, "\psi_Z"] \arrow[ddr, "\varphi_Z"'] & & i \circ F(Y) \arrow[dl, "\psi_Y"'] \arrow[ddl, "\varphi_Y"] \\
& (N(U), \rho_V^U) \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& (L(U), \sigma_V^U) &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, en el Corolario 8.2. se probó que el funtor $\Gamma \circ \mathcal{S} : \mathcal{PGAV}_X \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$ es adjunto izquierdo del funtor inclusión i, por lo que por la Proposición 8.7. el funtor $\Gamma \circ \mathcal{S}$ preserva los colímites de la categoría $\mathcal{PGAV}_X$, por lo que $\Gamma \circ \mathcal{S}(N(U), \rho_V^U)$ junto con los morfismos $\Gamma \circ \mathcal{S}(\psi_Z)$ para cada Z elemento de J es un colímite del diagrama $\Gamma \circ \mathcal{S} \circ i \circ F : J\mathcal{GAV}_X$, pero en la Proposición 8.6. se probó que $\Gamma \circ \mathcal{S} \circ i \cong id_{\mathcal{GAV}_X}$ por lo que el objeto $\Gamma \circ \mathcal{S}(N(U), \rho_V^U)$ junto con los morfismos $\Gamma \circ \mathcal{S}(\psi_Z)$ para cada Z elemento de J es el colímite del diagrama original $F : J \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$. ■

Corolario 8.13. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{E}(X)$ es completa y cocompleta.*

Demostración. Por la Proposición 8.6. se tiene que $\mathcal{E}(X) \simeq \mathcal{GAV}_X$. Por el Corolario 6.1. la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es completa y por lo tanto, la categoría $\mathcal{E}(X)$ también lo es. Por último, por la Proposición 8.8. la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es cocompleta y por tanto, la categoría $\mathcal{E}(X)$ también es cocompleta. ■

Capítulo 2

Topos Elementales

1. Introducción

A grandes rasgos, puede entenderse que un topos elemental es una generalización de la categoría **Con** como bien podría serlo la categoría $\mathcal{GAV}_X$ pues en el Capítulo 1 se probó que si $X = \{*\}$ entonces $\mathcal{GAV}_X \simeq \mathbf{Con}$. En este capítulo se enunciará la definición de topos elemental y se probará que para cualquier espacio topológico X la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es un topos elemental. Probar este hecho no será nada sencillo, pues construir la potencia de una gavilla es bastante técnico. Naturalmente surge la pregunta si la categoría $\mathcal{E}(X)$ es también un topos elemental. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, pues la propiedad de tener potencias se preserva bajo equivalencia de categorías. También se enunciarán algunas propiedas que no sólo la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee, sino que todo topos cumplirá. También se hablará de algunas propiedades que son un poco más específicas y que no cualquier topos elemental necesariamente cumplirá, estas observaciones darán paso al estudio de los Topos de Lawvere. Las definiciones concerientes a la teoría de topos elementales fueron extraídas principalmente de los textos [11] y [26].

2. Topos elementales

Antes de comenzar formalmente con el estudio de los topos elementales, se enunciará una definición categórica fundamental para dar sentido a la definición de topos elemental.

Definición 2.1. *Sean C una categoría con límites finitos y X un objeto de dicha categoría:*

1. *El **objeto potencia** del objeto X es un par*

$$(PX, \ni_X)$$

donde

- *PX es un objeto de la categoría C*
- *$\ni_X$ es el dominio de un monomorfismo de la forma*

$$\ni_X \longrightarrow X \times PX$$

el cual cumple que para cualquier otro objeto D y cualquier monomorfismo $r \longrightarrow X \times D$, existe un único morfismo

$$\chi_r : D \longrightarrow PX$$

de tal manera que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, "k"] \arrow[d] & \ni_X \arrow[d, "j"] \\ X \times D \arrow[r, "id_X \times \chi_r"'] & X \times PX \end{tikzcd}$$

2. *Se dirá que C tiene* ***potencias*** *si cada uno de sus objetos posee objeto potencia.*

Con esta defínición se está en condiciones de definir el concepto de topos elemental.

DEFINICIÓN 2.2. *Un* ***topos elemental*** *es una categoría C que cumple las siguientes dos condiciones:*

1. *La categoría C tiene límites finitos.*
2. *La categoría C tiene potencias.*

Tal como se mencionó en la Introducción a este Capítulo, los topos elementales pueden pensarse como una generalización de la categoría **Con**. Por tanto, surge la pregunta de si la categoría **Con** es un topos elemental. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y este hecho se prueba a continuación.

PROPOSICIÓN 2.3. *La categoría* ***Con*** *tiene potencias.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto cualquiera y defínase

$$PX := \mathcal{P}(X)$$

como la potencia del conjunto X. También defínase

$$\ni_X := \{(x, U) \in X \times \mathcal{P}(X) : x \in U\}$$

donde además

$$j : \ni_X \longrightarrow X \times \mathcal{P}(X)$$

es la función inclusión. Se afirma que el par

$$(\mathcal{P}(X), \ni_X)$$

es el objeto potencia del conjunto X. En efecto, tómense Y un conjunto cualquiera y $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una función inyectiva, entonces defínanse las funciones

$$\chi_Z : Y \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

tal que para cada $y \in Y$ se tiene que

$$\chi_Z(y) := \{x \in X : (x, y) = f(z) \text{ para algún } z \in Z\}$$

y la función

$$k : Z \longrightarrow \ni_X$$

tal que para cada $z \in Z$ se tiene que

$$k(z) := (\pi_X \circ f(z), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z)))$$

Dadas las cosas de esta manera, nótese que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & \ni_X \arrow[d, "j"] \\ X \times Y \arrow[r, "id_X \times \chi_Z"'] & X \times \mathcal{P}(X) \end{tikzcd}$$

efectivamente, tómese $z \in Z$ entonces por un lado

$$j \circ k(z) = j(\pi_X \circ f(z), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z))) = (\pi_X \circ f(z), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z)))$$

y por otro lado

$$id_X \times \chi_Z \circ f(z) = id_X \times \chi_Z(\pi_X \circ f(z), \pi_Y \circ f(z)) = (\pi_X \circ f(z), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z)))$$

Así, este diagrama es conmutativo. Para ver que es un pullback, supóngase que existe un conjunto W junto con funciones

$$\phi_f : W \longrightarrow X \times Y \qquad \phi_k : W \longrightarrow \ni_X$$

tales que

$$(id_X \times \chi_Z) \circ \phi_f = j \circ \phi_k$$

Pero nótese que para cada $w \in W$, por un lado se tiene que

$$(id_X \times \chi_Z) \circ \phi_f(z) = (\pi_X \circ \phi_f(w), \chi_Z(\pi_Y \circ \phi_f(w)))$$

y por otro lado

$$j \circ \phi_k(w) = (\pi_X \circ \phi_k(w), \pi_{\mathcal{P}(X)} \circ \phi_k(w))$$

con $\pi_X \circ \phi_k(w) \in \pi_{\mathcal{P}(X)} \circ \phi_k(w)$. Entonces por hipótesis

$$\pi_X \circ \phi_f(w) \in \chi_Z(\pi_Y \circ \phi_k(w))$$

por lo tanto existe $z_w \in Z$ tal que

$$(\pi_X \circ \phi_f(w), \pi_Y \circ \phi_f(w)) = f(z_w)$$

Siendo así, defínase la función

$$t : W \longrightarrow Z$$

dada por

$$t(w) := z_w$$

y la función definida así hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "\phi_k"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_f"'] & & \\
& Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & \ni_X \arrow[d, "j"'] \\
& X \times Y \arrow[r, "id_X \times \chi_Z"'] & X \times \mathcal{P}(X)
\end{tikzcd}$$

Verdaderamente esto es así, tómese $w \in W$ cualquiera entonces

$$f \circ t(w) = f(z_w) = (\pi_X \circ \phi_f(w), \pi_Y \circ \phi_f(w)) = \phi_f(w)$$

y también

$$k \circ t(w) = k(z_w) = (\pi_X \circ f(z_w), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z_w)))$$

pero se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_k(w) &= j(\phi_k(w)) \\
&= id_X \times \chi_Z \circ \phi_f(w) \\
&= id_X \times \chi_Z(\pi_X \circ \phi_f(w), \pi_Y \circ \phi_f(w)) \\
&= (\pi_X \circ \phi_f(w), \chi_Z(\pi_Y \circ \phi_f(w)) \\
&= (\pi_X \circ (f \circ t(w)), \chi_Z(\pi_Y \circ (f \circ t(w)))) \\
&= (\pi_X \circ f(z_w), \chi_Z(\pi_Y \circ f(z_w)))
\end{aligned}$$

Así, la función t hace conmutar el diagrama y por lo tanto, dicho diagrama es un pullback. En conclusión, se tiene que el par $(\mathcal{P}(X), \ni_X)$ es el objeto potencia del conjunto X. ■

Gracias a la Proposición 2.3. de este Capítulo se tiene el primer ejemplo de topos elemental.

COROLARIO 2.4. *La categoría **Con** es un topos elemental.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la categoría **Con** tiene límites finitos y por la Proposición 2.3. de este Capítulo se concluye que la categoría **Con** es un topos elemental. ■

Hasta este momento sólo se tienen los siguientes ejemplos de topos elementales. El trabajo que se realizará en la siguiente sección permitirá construir más ejemplos de topos elementales.

EJEMPLOS 2.5. *Los siguientes son ejemplos de topos elementales:*

1. *La categoría **Con**.*
2. *La categoría **ConFin**.*

3. La categoría $\mathcal{GAV}_X$ es un topos elemental

Una de las metas del presente estudio es demostrar que dado un espacio topológico X, la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es un topos elemental, pues esto mostraría que no solamente la categoría **Con** es un caso particular de la categoría $\mathcal{GAV}_X$ con $X = \{*\}$ sino que la categoría de gavillas sobre X es una buena generalización de la categoría **Con**. En este sentido es que se habla de la categoría de gavillas sobre X como un "modelo" de la teoría de conjuntos. Antes de comenzar con la prueba será necesario notar que la categoría de gavillas sobre un espacio X cumple ciertas propiedades categóricas interesantes.

DEFINICIÓN 3.1. *Sean C una categoría con límites finitos y X un objeto de dicha categoría:*

1. *Se dirá que la categoría tiene **exponenciación** si el funtor*
$$(-) \times X : C \longrightarrow C$$
tiene adjunto derecho
2. *En dado caso que la categoría C tenga exponenciación, al adjunto derecho del funtor $(-) \times X$ se le denotará por*
$$(-)^X : C \longrightarrow C$$

A continuación se probará que para cualquier espacio X, la categoría de gavillas sobre X tiene exponenciación. Aunque en un principio no lo parezca, este resultado es fundamental para demostrar que $\mathcal{GAV}_X$ es un topos elemental.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene exponenciación.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $(S(U), \sigma_V^U)$ y $(F(U), \rho_V^U)$ dos gavillas sobre X. Defínase la asignación
$$F^S : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$$
tal que para cada abierto W de X se tiene que
$$F^S(W) := \{\theta : S|_W \longrightarrow F|_W : \theta \text{ es morfismo de gavillas }\}$$
donde $S|_W$ y $F|_W$ son las gavillas S y F restringidas al subespacio W de X, respectivamente. Para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X considérese la función
$$\tau_U^V : F^S(V) \longrightarrow F^S(U)$$
tal que para cada $\theta \in F^S(V)$ se define
$$\tau_U^V(\theta) : S|_U \longrightarrow F|_U$$
donde para cada W abierto de U esto se define como
$$(\tau_U^V(\theta))_W : S(W) \longrightarrow F(W)$$

tal que para cada $x \in S(W)$ se tiene que

$$(\tau_U^V(\theta))_W(x) := \theta_W(x)$$

Antes de probar que esta asignación es una gavilla, se tiene que verificar que τ_U^V está bien definida, es decir que $\tau_U^V(\theta)$ es natural. Para esto sean $O \subseteq W$ abiertos de U, se requiere que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(O) \arrow[r, "(\tau_U^V(\theta))_O"] & F(O) \\ S(W) \arrow[u, "\sigma_O^W"] \arrow[r, "(\tau_U^V(\theta))_W"'] & F(W) \arrow[u, "\rho_O^W"'] \end{tikzcd}$$

o equivalentemente, que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(O) \arrow[r, "\theta_O"] & F(O) \\ S(W) \arrow[u, "\sigma_O^W"] \arrow[r, "\theta_W"'] & F(W) \arrow[u, "\rho_O^W"'] \end{tikzcd}$$

pero la conmutatividad de este diagrama se sigue de que O y W son abiertos de V y $\theta \in F^S(V)$. Por lo tanto $\tau_U^V(\theta) \in F^S(U)$ y así, τ_U^V está bien definida. Ahora sí, se afirma que esta construcción es una gavilla sobre X. Primero, se verifica que esta asignación es una pregavilla y para esto sea U abierto de X, entonces

$$\tau_U^U : F^S(U) \longrightarrow F^S(U)$$

es tal que para cada $\theta \in F^S(U)$ se tiene

$$\tau_U^U(\theta) : S|_U \longrightarrow F|_U$$

donde para cada abierto W de U se obtiene que

$$(\tau_U^U(\theta))_W = \theta_W$$

por lo tanto $\tau_U^U(\theta) = \theta$. Por último, sean $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X y $\theta \in F^S(W)$ cualquiera, entonces para cada O abierto de U se tiene que

$$(\tau_U^W(\theta))_O = \theta_O$$

pero por otro lado

$$(\tau_U^V(\tau_V^W(\theta)))_O = (\tau_V^W(\theta))_O = \theta_O$$

Por lo tanto $\tau_U^W = \tau_U^V \circ \tau_V^W$ y en conclusión esta asignación es una pregavilla que se denotará por F^S. Para ver que esta pregavilla es una gavilla, tómese U de abierto de

X y $\{U_a : a \in A\}$ una cubierta abierta de U. Sean $\theta, \phi \in F^S(U)$ tales que para cada $a \in A$ se tiene que

$$\tau^U_{U_a}(\theta) = \tau^U_{U_a}(\phi)$$

es decir que para cada abierto W_a de U_a se tiene que

$$\theta_{W_a} = \phi_{W_a}$$

Para ver que $\theta = \phi$ tómese J abierto de U y $x \in S(J)$, entonces se requiere que $\theta_J(x) = \phi_J(x)$. Primero nótese que

$$J = \bigcup_{a \in A} (J \cap U_a)$$

por lo que si para cada $a \in A$, se toma $W_a := J \cap U_a$ y como $\theta, \phi \in F^S(U)$ entonces los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
S(J) \arrow[r, "\theta_J"] \arrow[d, "\sigma^J_{J\cap U_a}"'] & F(J) \arrow[d, "\rho^J_{J\cap U_a}"] \\
S(J\cap U_a) \arrow[r, "\theta_{J\cap U_a}"'] & F(J\cap U_a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S(J) \arrow[r, "\phi_J"] \arrow[d, "\sigma^J_{J\cap U_a}"'] & F(J) \arrow[d, "\rho^J_{J\cap U_a}"] \\
S(J\cap U_a) \arrow[r, "\phi_{J\cap U_a}"'] & F(J\cap U_a)
\end{tikzcd}$$

siendo esto así, obsérvese que

$$\begin{aligned}
\rho^J_{J\cap U_a}(\theta_J(x)) &= \theta_{J\cap U_a}(\sigma^J_{J\cap U_a}(x)) \\
&= \phi_{J\cap U_a}(\sigma^J_{J\cap U_a}(x)) \\
&= \rho^J_{J\cap U_a}(\phi_J(x))
\end{aligned}$$

pero como F es una gavilla y $\{J \cap U_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de J entonces $\theta_J(x) = \phi_J(x)$, por ello $\theta = \phi$. Por último, sea $(\theta_a)_{a\in A}$ una colección de elementos de $F^S(U)$ tales que para cualquier $a \in A$ se tiene que $\theta_a \in F^S(U_a)$, y además para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene que

$$\tau^{U_b}_{U_b\cap U_d}(\phi_b) = \tau^{U_d}_{U_b\cap U_d}(\phi_d)$$

es decir que para cualquier abierto W de $U_b \cap U_d$ se tiene que

$$(\phi_b)_W = (\phi_d)_W$$

Se desea construir un morfismo de gavillas

$$\phi : S|_U \longrightarrow F|_U$$

es decir, para cada $J \subseteq U$ abierto, se desea construir una función

$$\phi_J : S(J) \longrightarrow F(J)$$

Para esto, tómese $x \in S(J)$ cualquiera, obsérvese que para cada $a \in A$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S(J) \arrow[d, "\sigma^J_{J\cap U_a}"'] & F(J) \arrow[d, "\rho^J_{J\cap U_a}"] \\ S(J\cap U_a) \arrow[r, "(\phi_a)_{J\cap U_a}"'] & F(J\cap U_a) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, se tiene la colección

$$((\phi_a)_{J\cap U_a} \circ \sigma^J_{J\cap U_a}(x))_{a\in A}$$

de elementos de $F(J)$, tal que para cada $a \in A$ se da que

$$(\phi_a)_{J\cap U_a} \circ \sigma^J_{J\cap U_a}(x) \in F(J\cap U_a)$$

y además para cualesquiera $b, d \in A$ se tiene lo siguiente:

$$\rho^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)}((\phi_b)_{J\cap U_b} \circ \sigma^J_{J\cap U_b}(x)) = \rho^{J\cap U_d}_{J\cap(U_b\cap U_d)}((\phi_d)_{J\cap U_d} \circ \sigma^J_{J\cap U_d}(x))$$

en verdad es esto así, puesto que para cada $a \in A$ por hipótesis $\phi_a \in F^S(U_a)$ entonces los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} S(J\cap U_b) \arrow[r, "\sigma^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)}"] \arrow[d, "(\phi_b)_{J\cap U_b}"'] & S(J\cap(U_b\cap U_d)) \arrow[d, "(\phi_b)_{J\cap(U_b\cap U_d)}"] \\ F(J\cap U_b) \arrow[r, "\rho^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)}"'] & F(J\cap(U_b\cap U_d)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(J\cap U_d) \arrow[r, "\sigma^{J\cap U_d}_{J\cap(U_b\cap U_d)}"] \arrow[d, "(\phi_d)_{J\cap U_d}"'] & S(J\cap(U_b\cap U_d)) \arrow[d, "(\phi_d)_{J\cap(U_b\cap U_d)}"] \\ F(J\cap U_d) \arrow[r, "\rho^{J\cap U_d}_{J\cap(U_b\cap U_d)}"'] & F(J\cap(U_b\cap U_d)) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ (\phi_b)_{J\cap U_b} \circ \sigma^J_{J\cap U_b}(x) &= (\phi_b)_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^J_{J\cap U_b}(x) \\ &= (\phi_d)_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^{J\cap U_b}_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^J_{J\cap U_b}(x) \\ &= (\phi_d)_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^{J\cap U_d}_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ \sigma^J_{J\cap U_d}(x) \\ &= \rho^{J\cap U_d}_{J\cap(U_b\cap U_d)} \circ (\phi_d)_{J\cap U_d} \circ \sigma^J_{J\cap U_d}(x) \end{aligned}$$

sólo nótese que la segunda igualdad es porque para cada abierto W de $U_b \cap U_d$ se tiene que $(\phi_b)_W = (\phi_d)_W$. Así, como F es una gavilla, existe un único $y_x \in F(J)$ tal que para cada $a \in A$ se tiene

$$\rho^J_{J\cap U_a}(y_x) = (\phi_a)_{J\cap U_a} \circ \sigma^J_{J\cap U_a}(x)$$

Por lo tanto, defínase

$$\phi_J : S(J) \longrightarrow F(J)$$

dada por

$$\phi_J(x) := y_x$$

Para verificar que $\phi \in F^S(U)$ tómense $I \subseteq J$ abiertos de U, se busca que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
S(J) \arrow[r, "\phi_J"] \arrow[d, "\sigma^J_I"'] & F(J) \arrow[d, "\rho^J_I"] \\
S(I) \arrow[r, "\phi_I"'] & F(I)
\end{tikzcd}$$

para esto tómese $x \in S(J)$. Entonces se busca que

$$\rho^J_I(y_x) = \rho^J_I \circ \phi_J(x) = \phi_I \circ \sigma^J_I(x) = y_{\sigma^J_I(x)}$$

Obsérvese que como $\phi_I, \phi_J \in F^S(U)$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S(J) \arrow[r, "\phi_J"] \arrow[d, "\sigma^I_J"'] & F(J) \arrow[d, "\rho^J_I"] \\
S(I) \arrow[r, "\phi_I"'] \arrow[d, "\sigma^I_{I\cap U_a}"'] & F(I) \arrow[d, "\rho^I_{I\cap U_a}"] \\
S(I \cap U_a) \arrow[r, "(\phi_a)_{I\cap U_a}"'] & F(I \cap U_a)
\end{tikzcd}$$

entonces $y_{\sigma^J_I(x)}$ fue construido a partir de la colección

$$((\phi_a)_{I\cap U_a} \circ \sigma^I_{I\cap U_a} \circ \sigma^J_I(x))_{a\in A}$$

por lo que para cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\rho^I_{I\cap U_a}(y_{\sigma^I_J(x)}) & = & (\phi_a)_{I\cap U_a} \circ \sigma^I_{I\cap U_a} \circ \sigma^J_I(x) \\
& = & \rho^I_{I\cap U_a} \circ \phi_I \circ \sigma^J_I(x) \\
& = & \rho^I_{I\cap U_a} \circ \rho^J_I \circ \phi_J(x) \\
& = & \rho^I_{I\cap U_a} \circ \phi_J(x) \\
& = & \rho^J_{I\cap U_a}(y_x) \\
& = & \rho^I_{I\cap U_a}(\rho^J_I(y_x))
\end{array}$$

pero como F es una gavilla entonces $y_{\sigma^I_J(x)} = \rho^J_I(y_x)$, por lo tanto $\phi \in F^S(U)$. Por último se desea probar que para cada $a \in A$ se cumple que $\tau^U_{U_a}(\phi) = \phi_a$, para esto sean $K \subseteq U_a$ un abierto y $x \in S(K)$ se necesita que $(\tau^U_{U_a}(\phi))_K(x) = (\phi_a)_K(x)$, pero nótese que los siguientes diagramas son conmutativos pues $\tau^U_{U_a}(\phi), \phi_a \in F^S(U_a)$:

$$\begin{tikzcd} S(K) \arrow[r, "\phi_K"] \arrow[d, "\sigma^K_{K\cap U_a}"'] & F(K) \arrow[d, "\rho^K_{K\cap U_a}"] \\ S(K\cap U_a) \arrow[r, "\phi_{K\cap U_a}"'] & F(K\cap U_a) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(K) \arrow[r, "(\phi_a)_K"] \arrow[d, "\sigma^K_{K\cap U_a}"'] & F(K) \arrow[d, "\rho^K_{K\cap U_a}"] \\ S(K\cap U_a) \arrow[r, "(\phi_a)_{K\cap U_a}"'] & F(K\cap U_a) \end{tikzcd}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \rho^K_{K\cap U_a}(\phi_K(x)) &= \rho^K_{K\cap U_a}(y_x) \\ &= (\phi_a)_{K\cap U_a} \circ \sigma^K_{K\cap U_a}(x) \\ &= \rho^K_{K\cap U_a}((\phi_a)_K(x)) \end{aligned}$$

Luego, como F es una gavilla, entonces $\phi_K = (\phi_a)_K$ y por tanto para cada $a \in A$ se tiene que $\tau^U_{U_a}(\phi) = \phi_a$. Esto permite concluir que F^S es una gavilla sobre X. Ahora bien, dada una gavilla S cualquiera, defínase la asignación

$$(-)^S : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$$

tal que a cada gavilla F la manda a la gavilla F^S, y a cada morfismo de gavillas $\phi : G \longrightarrow F$ lo manda al morfismo

$$(-)^S(\phi) : G^S \longrightarrow F^S$$

donde para cada U abierto de X se tiene

$$((-)^S(\phi))_U : G^S(U) \longrightarrow F^S(U)$$

dada por

$$((-)^S(\phi))_U(\theta) := \phi|_U \circ \theta$$

Se afirma que esta asignación es un funtor. En efecto, sean G una gavilla e $id_G : G \longrightarrow G$ entonces para cada $\theta \in F^S(U)$ se tiene que

$$((-)^S(id_G))_U(\theta) = id_G|_U \circ \theta = \theta$$

por lo tanto

$$(-)^S(id_G) = id_{G^S} = id_{(-)^S(G)}$$

Por otro lado, sean $\phi : F \longrightarrow G$ y $\psi : G \longrightarrow H$ morfismo de gavillas entonces para cada U abierto de X y para cada $\theta \in F^S(U)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} ((-)^S(\psi\circ\phi))_U(\theta) &= (\psi\circ\phi)|_U \circ \theta \\ &= \psi|_U \circ \phi|_U \circ \theta \\ &= ((-)^S(\psi))_U(\phi|_U(\theta)) \\ &= ((-)^S(\psi))_U(((-)^S(\phi))_U(\theta)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-)^S(\psi \circ \phi) = (-)^S(\psi) \circ (-)^S(\phi)$ y así, esta asignación es un funtor. Se verificará que este funtor es adjunto derecho del funtor

$$(-) \times S : \mathcal{GAV}_X \longrightarrow \mathcal{GAV}_X$$

Defínase

$$\epsilon : (-) \times S \circ (-)^S \Longrightarrow id_{\mathcal{GAV}_X}$$

tal que para cada gavilla F se tiene que

$$\epsilon_F : F^S \times S \longrightarrow F$$

de tal manera que para cada U abierto de X

$$(\epsilon_F)_U : F^S(U) \times S(U) \longrightarrow F(U)$$

está dado por

$$(\epsilon_F)_U(\theta, x) := \theta_U(x)$$

Se afirma que esta asignación es una transformación natural. Para ello tómese
$\phi : F \longrightarrow G$ un morfismo de gavillas y U abierto de X, se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F^S(U) \times S(U) \arrow[r, "(\epsilon_F)_U"] \arrow[d, "((-)\times S\circ(-)^S(\phi))_U"'] & F(U) \arrow[d, "\phi_U"] \\
G^S(U) \times S(U) \arrow[r, "(\epsilon_G)_U"'] & G(U)
\end{tikzcd}$$

En efecto, tómese $(\theta, x) \in F^S(U) \times S(U)$ entonces por un lado

$$\phi_U \circ (\epsilon_F)_U(\theta, x) = \phi_U \circ \theta_U(x)$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned}
(\epsilon_G)_U \circ ((-) \times S \circ (-)^S(\phi))_U &= (\epsilon_G)_U(((-)^S(\phi))_U(\theta), x) \\
&= (\epsilon_G)_U(\phi|_U \circ \theta, x) \\
&= \phi_U \circ \theta_U(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϵ es una transformación natural. Ahora bien considérese

$$\eta : id_{\mathcal{GAV}_X} \longrightarrow (-)^S \circ (-) \times S$$

tal que para cada gavilla F se tiene

$$\eta_F : F \longrightarrow (F \times S)^S$$

y para cada U abierto de X se tiene

$$(\eta_F)_U : F(U) \longrightarrow (F \times S)^S(U)$$

donde para cada $x \in F(U)$ se considera

$$(\eta_F)_U(x) : S|_U \longrightarrow (F \times S)|_U$$

donde para cada abierto W de U se define

$$((\eta_F)_U(x))_W : S(W) \longrightarrow F(W) \times S(W)$$

la cual está dada por

$$((\eta_F)_U(x))_W(y) := (\rho_W^U(x), y)$$

Se afirma que η es una transformación natural. En efecto, tómese $\phi : (F(U), \rho_V^U) \longrightarrow (G(U), \delta_V^U)$ un morfismo de gavillas y U abierto de X, se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "(\eta_F)_U"] \arrow[d, "\phi_U"'] & (F \times S)^S(U) \arrow[d, "((-)^S \circ (-) \times S(\phi))_U"] \\
G(U) \arrow[r, "(\eta_G)_U"'] & (G \times S)^S(U)
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in F(U)$ lo que se busca es

$$(\eta_G)_U \circ \phi_U(x) = ((-)^S \circ (-) \times S(\phi))_U \circ (\eta_F)_U(x)$$

pero obsérvese que

$$((-)^S \circ (-) \times S(\phi))_U \circ (\eta_F)_U(x) = ((-) \times S(\phi))|_U \circ (\eta_F)_U(x)$$

Así, sean W abierto de U y $y \in S(W)$ entonces por un lado

$$((\eta_G)_U \circ \phi_U(x))_W(y) = (\delta_W^U(\phi_U(x)), y)$$

y por otro lado

$$(((-) \times S(\phi))|_U \circ (\eta_F)_U(x))_W(y) = ((-) \times S(\phi))|_U(\rho_W^U(x), y) = (\phi_W(\rho_W^U(x)), y)$$

pero como $\phi : F \longrightarrow G$ es un morfismo de gavillas entonces $\phi_W \circ \rho_W^U = \delta_W^U \circ \phi_U$ por lo tanto el diagrama conmuta, y entonces se concluye que η es una transformación natural. Por último, para ver que el funtor $(-)^S$ es adjunto derecho del funtor $(-) \times S$ se tiene que verificar que se cumplen las identidades triangulares. Para empezar, primero se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(-) \times S \arrow[r, "(-) \times S\eta"] \arrow[dr, "1_{(-)\times S}"'] & (-) \times S \circ (-)^S \circ (-) \times S \arrow[d, "\epsilon(-) \times S"] \\
& (-) \times S
\end{tikzcd}$$

es decir que para cualesquiera gavilla $(F(U), \rho_V^U)$ y U abierto de X el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(U)\times S(U) \arrow[r, "((-)\times S(\eta_F)_U"] \arrow[dr, "id_{F(U)\times S(U)}"'] & (F\times S)^S\times S(U) \arrow[d, "(\epsilon_{F\times S})_U"] \\ & F(U)\times S(U) \end{tikzcd}$$

Para esto, sea $(x,y)\in F(U)\times S(U)$ obsérvese que

$$\begin{aligned} (\epsilon_{F\times S})_U \circ ((-)\times S(\eta_F))_U(x,y) &= (\epsilon_{F\times S})_U((\eta_F)_U(x),y) \\ &= ((\eta_F)_U(x))_U(y) \\ &= (\rho_U^U(x),y) \\ &= (x,y) \\ &= id_{F(U)\times S(U)}(x,y) \end{aligned}$$

Por último se tiene que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} (-)^S \arrow[r, "\eta(-)^S"] \arrow[dr, "1_{(-)^S}"'] & (-)^S\circ(-)\times S\circ(-)^S \arrow[d, "(-)^S\epsilon"] \\ & (-)^S \end{tikzcd}$$

para esto, sean F una gavilla y U un abierto de X, se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} F^S(U) \arrow[r, "(\eta_{F^S})_U"] \arrow[dr, "id_{F^S(U)}"'] & (F^S\times S)^S(U) \arrow[d, "((-)^S(\epsilon_F))_U"] \\ & F^S(U) \end{tikzcd}$$

Para esto, sea $\theta\in F^S(U)$ y obsérvese que

$$((-)^S(\epsilon_F))_U\circ(\eta_{F^S})_U(\theta) = (\epsilon_F)|_U\circ(\eta_{F^S})_U(\theta)$$

Así, tómese W abierto de U y $y\in F(W)$ entonces

$$\begin{aligned} ((\epsilon_F)|_U\circ(\eta_{F^S})_U(\theta))_W(y) &= (\epsilon_F)_W((\eta_{F^S})_U(\theta))_W(y) \\ &= (\epsilon_F)_W(\tau_W^U(\theta),y) \\ &= (\tau_W^U(\theta))_W(y) \\ &= \theta_W(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$((-)^S(\epsilon_F))_U\circ(\eta_{F^S})_U(\theta) = id_{F^S(U)}(\theta)$$

Por lo tanto, el diagrama es conmutativo. Y puesto que se cumplen las identidades triangulares entonces se tiene que el funtor $(-)^S$ es adjunto derecho del funtor $(-)\times S$. Por lo tanto la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene exponenciación. ∎

La siguiente definición también será fundamental para probar que la categoría de gavillas sobre un espacio X es un topos elemental. Naturalmente se probará que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ cumple esta definición.

DEFINICIÓN 3.3. *Sean C una categoría con límites finitos y X un objeto de dicha categoría:*

1. *Sean $a : A \longrightarrow X$ y $b : B \longrightarrow X$ dos monomorfismos con codominio X. Se dirá que a y b son **isomorfos**, si existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \\ B \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Un **subobjeto** de X es una clase de los monomorfismos isomorfos a un monomorfismo con codominio X.*
3. *Se dirá que C posee **clasificador de subobjetos** si existe un objeto Ω, junto con un monomorfismo*

$$verdad : 1 \longrightarrow \Omega$$

de tal manera que para cualquier otro monomorfismo $U \longrightarrow X$, existe un único morfismo

$$\chi_U : X \longrightarrow \Omega$$

de tal manera que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_U"] \\ 1 \arrow[r, "verdad"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

4. *Si C posee clasificador de subobjetos, entonces al objeto Ω se le llamará el **clasificador de subobjetos** de la categoría C.*

Siendo esto así, se pasará a la prueba de que la categoría de gavillas sobre un espacio X posee clasificador de subobjetos. Sin embargo, antes de pasar a dicha prueba es necesario aclarar quiénes son los monomorfismos de la categoría $\mathcal{GAV}_X$.

DEFINICIÓN 3.4. *Sean X un espacio topológico, $(S(U), \rho_V^U), (F(U), \sigma_V^U)$ dos gavillas sobre X y $\phi : S \longrightarrow F$ un morfismo entre dichas gavillas. Se dirá que ϕ es un* ***morfismo inyectivo de gavillas*** *si para cada U abierto de X la función*

$$\phi_U : S(U) \longrightarrow F(U)$$

es inyectiva.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea X un espacio topológico, entonces los monomorfismos de la categoría $\mathcal{GAV}_X$ coinciden con los morfismos inyectivos de gavillas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : (F(U), \sigma_V^U) \longrightarrow (G(U), \lambda_V^U)$ un morfismo de gavillas. Supóngase que φ es un monomorfismo de gavillas y sean $\phi, \psi : (S(U), \rho_V^U) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$ dos morfismos de gavillas tales que $\varphi \circ \phi = \varphi \circ \psi$. Se necesita probar que $\phi = \psi$, para esto sean U abierto de X y $x \in S(U)$. Por hipótesis se tiene que $\varphi_U(\phi_U(x)) = \varphi_U(\psi_U(x))$, pero como φ es un morfismo inyectivo de gavillas entonces φ_U es una función inyectiva por lo que $\phi_U(x) = \psi_U(x)$, entonces $\phi_U = \psi_U$ y así $\phi = \psi$.
Por otro lado supóngase que φ es un monomorfismo, es necesario probar que φ es un morfismo inyectivo de gavillas, para esto sea U abierto de X y se requiere probar que $\varphi_U : F(U) \longrightarrow G(U)$ es una función inyectiva, para esto sean $x, y \in F(U)$ tales que $\varphi_U(x) = \varphi_U(y)$. Considérese la gavilla $(h_U(V), \epsilon_W^V)$ del Ejemplo 5.5.2. Considérese $\alpha : (H_U(V), \epsilon_W^V) \longrightarrow (F(V), \sigma_W^V)$ tal que para cada V abierto de X se tiene la función $\alpha_V : Hom(V, U) \longrightarrow F(V)$ dada en dos casos: si $V \subseteq U$ entonces $\alpha_V(i_{V\subseteq U}) := \sigma_V^U(x)$. Si $V \nsubseteq U$ entonces α_V es la función vacía. Se afirma que α es un morfismos de gavillas. En efecto, sean $W \subseteq V$ abiertos de X, se busca que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} Hom(V,U) \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\epsilon_W^V"'] & F(V) \arrow[d, "\sigma_W^V"] \\ Hom(W,U) \arrow[r, "\alpha_W"'] & F(W) \end{tikzcd}$$

Si $V \subseteq U$ entonces

$$\begin{aligned} \sigma_W^V(\alpha_V(i_{V\subseteq U})) &= \sigma_W^V(\sigma_V^U(x)) \\ &= \sigma_W^U(x) \\ &= \alpha_W(i_{W\subseteq U}) \\ &= \alpha_W(\epsilon_W^V(i_{V\subseteq U})) \end{aligned}$$

Por otro lado, si $V \nsubseteq U$ entonces $Hom(V, U) = \emptyset$ por lo que el diagrama trivialmente conmuta. Así α es un morfismos de gavillas. De manera muy similar defínase $\beta : (H_U(V), \epsilon_W^V) \longrightarrow (F(U), \sigma_V^U)$ tal que para cada abierto V de X se tiene la función $\beta_V : Hom(V, U) \longrightarrow F(V)$ dada en dos casos: si $V \subseteq U$ entonces $\beta_V(i_{V\subseteq U}) := \sigma_V^U(y)$. Si $V \nsubseteq U$ entonces β_V es la función vacía. No es difícil verificar que en efecto β es un morfismo de gavillas. Se afirma que $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$. En efecto, sea V un abierto de X: si $V \nsubseteq U$ entonces claramente $\varphi_V \circ \alpha_V = \varphi_V \circ \beta_V$ pues ambas son la función vacía. En cambio si $V \subseteq U$ entonces por la naturalidad de φ se tiene lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} \varphi_V(\alpha_V(i_{V\subseteq U})) & = & \varphi_V(\sigma_V^U(x)) \\ & = & \lambda_V^U(\varphi_U(x)) \\ & = & \lambda_V^U(\varphi_U(y)) \\ & = & \varphi_V(\sigma_V^U(y)) \\ & = & \varphi_V(\beta_V(i_{V\subseteq U})) \end{array}$$

por lo que $\varphi_V \circ \alpha_V = \varphi_V \circ \beta_V$, es decir $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta$. Como φ es un monomorfismo entonces $\alpha = \beta$. Por último nótese que

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sigma_U^U(x) \\ & = & \alpha_U(i_{U\subseteq U}) \\ & = & \beta_U(i_{U\subseteq U}) \\ & = & \sigma_U^U(y) \\ & = & y \end{array}$$

Así, la función φ_U es una función inyectiva por lo que φ es un morfismo inyectivo de gavillas. ■

Proposición 3.6. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee clasificador de subobjetos.*

Demostración. Defínase la asignación

$$\Omega : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

donde para cada $U \in \mathcal{O}(X)^{op}$ se tiene que

$$\Omega(U) := \{V \in \mathcal{O}(X) : V \subseteq U\}$$

y para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X defínase la función

$$\rho_U^V : \Omega(V) \longrightarrow \Omega(U)$$

dada por

$$\rho_U^V(W) := W \cap U$$

Se afirma que esta asignación es una pregavilla. En efecto, si U es un abierto de X entonces

$$\rho_U^U(V) = V \cap U = V = id_{\Omega(U)}(V)$$

Por otro lado tómense $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, entonces

$$\rho_U^V \circ \rho_V^W(J) = \rho_U^V(J \cap V) = J \cap V \cap U = J \cap U = \rho_U^W(J)$$

por tanto esta asignación es una pregavilla. Para ver que es gavilla, sea U abierto de X y $\{U_a : a \in A\}$ cubierta abierta de U. Sean $V, W \in \Omega(U)$ tales que para cualquier $a \in A$ se tiene que

$$\rho^U_{U_a}(V) = \rho^U_{U_a}(W)$$

es decir

$$V \cap U_a = W \cap U_a$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} V & = & V \cap U \\ & = & V \cap (\bigcup_{a \in A} U_a) \\ & = & \bigcup_{a \in A}(V \cap U_a) \\ & = & \bigcup_{a \in A}(W \cap U_a) \\ & = & W \cap (\bigcup_{a \in A} U_a) \\ & = & W \cap U \\ & = & W \end{array}$$

Por último sea $(V_a)_{a \in A}$ una colección de elementos de $\Omega(U)$ tales que para cada $a \in A$ se tiene que $V_a \in \Omega(U_a)$ y para cualesquiera $b, d \in A$ se cumple que

$$\rho^{U_b}_{U_b \cap U_d}(V_b) = \rho^{U_d}_{U_b \cap U_d}(V_d)$$

es decir

$$V_b \cap (U_b \cap U_d) = V_d \cap (U_b \cap U_d)$$

Defínase

$$V := \bigcup_{a \in A} V_a$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} \rho^U_{U_a}(V) & = & V \cap U_a \\ & = & (\bigcup_{b \in A} V_b) \cap U_a \\ & = & \bigcup_{b \in A}(V_b \cap U_a) \\ & = & \bigcup_{b \in A}(V_b \cap U_b \cap U_a) \\ & = & \bigcup_{b \in A}(V_a \cap U_b \cap U_a) \\ & = & \bigcup_{b \in A}(V_a \cap U_b) \\ & = & V_a \cap (\bigcup_{b \in A} U_b) \\ & = & V_a \cap U \\ & = & V_a \end{array}$$

Por lo tanto, Ω es una gavilla. Para verificar que Ω es el clasificador de subobjetos de la categoría $\mathcal{GAV}_X$, defínase

$$\phi : 1 \longrightarrow \Omega$$

tal que para cada U abierto de X se tiene

$$\phi_U : \{*\} \longrightarrow \Omega(U)$$

dada por

$$\phi_U(*) := U$$

Para mostrar que ϕ es un morfismo de gavillas se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo para cualesquiera $U \subseteq V$ abiertos de X:

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\phi_U"] & \Omega(U) \\
\{*\} \arrow[u, "id_{\{*\}}"] \arrow[r, "\phi_V"'] & \Omega(V) \arrow[u, "\rho_U^V"']
\end{tikzcd}$$

por un lado

$$\phi_U \circ id_{\{*\}}(*) = \phi_U(*) = U$$

y por otro lado

$$\rho_U^V \circ \phi_V(*) = \rho_U^V(V) = V \cap U = U$$

por lo tanto el diagrama es conmutativo y así ϕ es un morfismo de gavillas, que además es claro que es un monomorfismo de gavillas. Por último, tómese

$$j : (F(U), \sigma_V^U) \longrightarrow (G(U), \tau_V^U)$$

un monomorfismo de gavillas, defínase la asignación

$$\chi_j : G \longrightarrow \Omega$$

tal que para cada abierto U de X se tiene la función

$$(\chi_j)_U : G(U) \longrightarrow \Omega(U)$$

dada por

$$(\chi_j)_U(x) := \bigcup\{V \in \Omega(U) : \tau_V^U(x) \in j_V(F(V))\}$$

Se verifica que esta asignación es un morfismo de gavillas, para ello tómense $U \subseteq V$ abiertos de X, se necesita que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
G(V) \arrow[r, "(\chi_j)_V"] \arrow[d, "\tau_U^V"'] & \Omega(V) \arrow[d, "\rho_U^V"] \\
G(U) \arrow[r, "(\chi_j)_U"'] & \Omega(U)
\end{tikzcd}$$

Dado $x \in G(V)$ por un lado se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\rho_U^V((\chi_j)_V(x)) & = & \rho_U^V(\bigcup\{W \in \Omega(V) : \tau_W^V(x) \in j_w(F(W))\}) \\
& = & \bigcup\{W \in \Omega(V) : \tau_W^V(x) \in j_w(F(W))\} \cap U \\
& = & \bigcup\{W \in \Omega(U) : \tau_W^V(x) \in j_w(F(W))\}
\end{array}$$

y por otro lado

$$\begin{array}{rcl}(\chi_j)_U(\tau_U^V(x)) & = & \bigcup\{W \in \Omega(U) : \tau_W^U(\tau_U^V(x)) \in j_W(F(W))\} \\ & = & \bigcup\{W \in \Omega(U) : \tau_W^V(x) \in j_W(F(W))\}\end{array}$$

Así, el diagrama es conmutativo y por lo tanto χ_j es un morfismo de gavillas. Ahora bien, se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d, "\phi"] \\ G \arrow[r, "\chi_j"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

para esto, sea U un abierto de X, se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j_U"'] & \{*\} \arrow[d, "\phi_U"] \\ G(U) \arrow[r, "(\chi_j)_U"'] & \Omega(U) \end{tikzcd}$$

y para esto sea $x \in F(U)$, por un lado

$$\phi_U \circ !(x) = \phi_U(*) = U$$

y por otro lado

$$(\chi_j)_U(j_U(x)) = \bigcup\{V \in \Omega(U) : \tau_V^U(j_U(x)) \in j_V(F(V))\}$$

pero recuérde que j es un morfismo de gavillas, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "j_U"] \arrow[d, "\sigma_V^U"'] & G(U) \arrow[d, "\tau_V^U"] \\ F(V) \arrow[r, "j_V"'] & G(V) \end{tikzcd}$$

por lo que

$$\begin{array}{rcl}(\chi_j)_U(j_U(x)) & = & \bigcup\{V \in \Omega(U) : \tau_V^U(j_U(x)) \in j_V(F(V))\} \\ & = & \bigcup\{V \in \Omega(U) : j_V(\sigma_V^U(x)) \in j_V(F(V))\}\end{array}$$

Obsérvese que si $V = U$ entonces

$$j_U(x) \in j_U(F(U))$$

pues $x \in F(U)$, es decir $U \in \{V \in \Omega(U) : j_V(\sigma_V^U(x)) \in j_V(F(V))\}$ por lo tanto

$$(\chi_j)_U(j_U(x)) = U$$

Así, el diagrama es conmutativo. Por último, resta verificar que este diagrama es un pullback y para esto sea $(H(U), \delta_V^U)$ una gavilla junto con morfismos $\psi_j : H \longrightarrow G$ y $\psi_! : H \longrightarrow 1$ de tal manera que

$$\chi_j \circ \psi_j = \phi \circ \psi_!$$

Se busca definir $\psi : H \longrightarrow F$ que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\psi_!"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_j"'] & & \\
& F \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d, "\phi"] \\
& G \arrow[r, "\chi_j"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómense U abierto de X y $x \in H(U)$ entonces por hipótesis se tiene que

$$(\chi_j)_U((\psi_j)_U(x)) = \phi_U((\psi_!)_U(x))$$

por un lado

$$\phi_U((\psi_!)_U(x)) = \phi_U(*) = U$$

y por otro lado

$$(\chi_j)_U((\psi_j)_U(x)) = \bigcup\{V \in \Omega(U) : \tau_V^U((\psi_j)_U(x)) \in j_V(F(V))\}$$

pero ψ_j es un morfismo de gavillas por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(U) \arrow[r, "(\psi_j)_U"] \arrow[d, "\delta_V^U"'] & G(U) \arrow[d, "\tau_V^U"] \\
H(V) \arrow[r, "(\psi_j)_V"'] & G(V)
\end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
(\chi_j)_U((\psi_j)_U(x)) & = & \bigcup\{V \in \Omega(U) : \tau_V^U((\psi_j)_U(x)) \in j_V(F(V))\} \\
& = & \bigcup\{V \in \Omega(U) : (\psi_j)_V(\delta_V^U(x)) \in j_V(F(V))\} \\
& = & U
\end{array}$$

así se tiene que $(\psi_j)_U(x) \in j_U(F(U))$ por lo que existe $y_x \in F(U)$ tal que

$$j_U(y_x) = (\psi_j)_U(x)$$

Así, defínase

$$\psi : H \longrightarrow F$$

tal que para cada abierto U de X se tiene

$$\psi_U : H(U) \longrightarrow F(U)$$

dada por

$$\psi_U(x) := y_x$$

Para verificar que esta asignación es un morfismo de gavillas tómense $U \subseteq V$ abiertos de X, se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} H(U) \arrow[r, "\psi_U"] & F(U) \\ H(V) \arrow[u, "\delta_U^V"] \arrow[r, "\psi_V"'] & F(V) \arrow[u, "\sigma_U^V"'] \end{tikzcd}$$

para esto tómese $x \in H(V)$ cualquiera, entonces se requiere probar que

$$y_{\delta_U^V(x)} = \psi_U(\delta_U^V(x)) = \sigma_U^V(\psi_V(x)) = \sigma_U^V(y_x)$$

por un lado nótese que

$$j_U(y_{\delta_U^V(x)}) = (\psi_j)_U(\delta_U^V(x))$$

y por otro lado como j es un morfismo de gavillas se tiene que

$$j_U(\sigma_U^V(y_x)) = \tau_U^V(j_V(y_x)) = \tau_U^V((\psi_j)_V(x))$$

y como $(\psi)_j$ es morfismo de gavillas, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H(U) \arrow[r, "(\psi_j)_U"] & G(U) \\ H(V) \arrow[u, "\delta_U^V"] \arrow[r, "(\psi_j)_V"'] & G(V) \arrow[u, "\tau_U^V"'] \end{tikzcd}$$

se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} j_U(\sigma_U^V(y_x)) & = & \tau_U^V(j_V(y_x)) \\ & = & \tau_U^V((\psi_j)_V(x)) \\ & = & (\psi_j)_U(\delta_U^V(x)) \end{array}$$

Por lo tanto

$$j_U(y_{\delta_U^V(x)}) = j_U(\sigma_U^V(y_x))$$

y como j es un monomorfismo, entonces j_U es una función inyectiva y por lo tanto

$$y_{\delta_U^V(x)} = \sigma_U^V(y_x)$$

Así ψ es un morfismo de gavillas. Siendo así, obsérvese que

$$j_U(\psi_U(x)) = j_U(y_x) = (\psi_j)_U(x)$$

y también

$$! \circ \psi_U(x) = !(y_x) = * = (\psi_!)_U(x)$$

es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(U) \arrow[dr, dashed, "\psi_U"] \arrow[drr, bend left, "(\psi_!)_U"] \arrow[ddr, bend right, "(\psi_j)_U"'] & & \\
& F(U) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j_U"'] & \{*\} \arrow[d, "\phi_U"] \\
& G(U) \arrow[r, "(\chi_j)_U"'] & \Omega(U)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d, "\phi"] \\
G \arrow[r, "\chi_j"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un pullback. Así, se concluye que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ posee clasificador de subobjetos, cuyo clasificador es la gavilla Ω. ■

En este momento se está en condiciones de probar que la categoría de gavillas sobre un espacio X es un topos elemental. Para esto, primero se probará que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene potencias.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene potencias.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F una gavilla, Ω el clasificador de subobjetos de la categoría $\mathcal{GAV}_X$ y considérese la gavilla Ω^F. Recuérdese que la counidad de la adjunción entre los funtores $(-) \times F$ y $(-)^F$ es

$$\epsilon : (-) \times F \circ (-)^F \Longrightarrow id_{\mathcal{GAV}_X}$$

entonces si se toma en cuenta el clasificador de subobjetos Ω se tiene la componente

$$\epsilon_\omega : F \times \Omega^F \longrightarrow \Omega$$

siendo así, defínase

$$ev := \epsilon_\Omega$$

Ahora bien, considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \times \Omega^F \arrow[d, "ev"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es completa entonces el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} 1 \times_\Omega (F \times \Omega^F) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "!"'] & F \times \Omega^F \arrow[d, "ev"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

y como el morfismo $1 \longrightarrow \Omega$ es un monomorfismo entonces j es un monomorfismo. Si se denota

$$\ni_F := 1 \times_\Omega (F \times \Omega^F)$$

entonces se afirma que el par

$$(\Omega^F, \ni_F)$$

es el objeto potencia de la gavilla F. Para esto, sean G y H dos gavillas y

$$\psi : H \longrightarrow F \times G$$

un monomorfismo. Como Ω es el clasificador de subobjetos de la categoría $\mathcal{GAV}_X$ existe un único morfismo $\chi_\psi : F \times G \longrightarrow \Omega$ de tal manera que el siguiente diagrama conmutativo es un pullback

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "!"'] & F \times G \arrow[d, "\chi_\psi"] \\ 1 \arrow[r, "verdad"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene exponenciación se tiene el siguiente isomorfismo natural

$$\theta : Hom(G, \Omega^F) \cong Hom(G \times F, \Omega)$$

por lo que para el morfismo $\chi_\psi : F \times G \longrightarrow \Omega$ existe un único morfismo

$$\chi_H : G \longrightarrow \Omega^F$$

tal que

$$\theta(\chi_\psi) = \chi_H$$

Ahora bien, considérese el siguiente diagrama

$$G \times F \xrightarrow{(-) \times F(\chi_H)} \Omega^F \times F \xrightarrow{\epsilon_\Omega} \Omega \xrightarrow{id_\Omega} \Omega$$

el cual por la naturalidad de θ está asociado al único diagrama

$$G \xrightarrow{\chi_H} \Omega^F \xrightarrow{id_{\Omega^F}} \Omega^F \xrightarrow{(-)^F(id_\Omega)} \Omega^F$$

pero este diagrama es exactamente el morfismo

$$G \xrightarrow{\chi_H} \Omega^F$$

es decir

$$\begin{aligned} \theta(id_\Omega \circ \epsilon_\Omega \circ (-) \times F(\chi_H)) &= \theta(\epsilon_\Omega \circ (-) \times F(\chi_H)) \\ &= \chi_H \end{aligned}$$

y como θ es un isomorfismo entonces

$$ev \circ (-) \times F(\chi_H) = \epsilon_\Omega \circ (-) \times F(\chi_H) = \chi_\psi$$

Pero recuérdese que

$$(-) \times F(\chi_H) = \chi_H \times id_F$$

entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times F \arrow[d, "\chi_H \times id_F"'] \arrow[dr, "\chi_\psi"] & \\ \Omega^F \times F \arrow[r, "ev"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ahora bien, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & F \times G \arrow[d, "id_F \times \chi_H"] \\ & \ni_F \arrow[r, "j"] \arrow[d, "!"'] & F \times \Omega^F \arrow[d, "ev"] \\ & 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

el cual es un pullback. Más aún, el diagrama de afuera es conmutativo, por lo que existe un único morfismo $k : H \longrightarrow \ni_F$ que vuelve conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & F \times G \arrow[d, "id_F \times \chi_H"] \\ & \ni_F \arrow[r, "j"] \arrow[d, "!"'] & F \times \Omega^F \arrow[d, "ev"] \\ & 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

Y por tanto, como el diagrama inferior y el diagrama exterior son pullbacks, entonces el diagrama superior

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "k"'] & F \times G \arrow[d, "id_F \times \chi_H"] \\ \ni_F \arrow[r, "j"'] & F \times \Omega^F \end{tikzcd}$$

es un pullback. Así, se concluye que la categoría $\mathcal{GAV}_X$ tiene potencias.

■

Siendo esto así, se tiene el siguiente resultado tan esperado a lo largo de este trabajo.

Corolario 3.8. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{GAV}_X$ es un topos elemental.*

Como se mencionó en la introducción es natural formularse la pregunta de si la categoría $\mathcal{E}(X)$ es también un topos elemental. El siguiente resultado dará luz sobre esta duda.

Proposición 3.9. *Sean $\overline{C}$ y $\overline{D}$ dos categorías equivalentes dadas por los funtores $F : \overline{C} \longrightarrow \overline{D}$ y $G : \overline{D} \longrightarrow \overline{C}$. Si $\overline{C}$ tiene potencias, entonces $\overline{D}$ tiene potencias.*

Demostración. Sea D un objeto de $\overline{D}$, entonces $G(D)$ es un objeto de $\overline{C}$. Como $\overline{C}$ tiene potencias existe $(PG(D), \ni_{G(D)})$ el objeto potencia del objeto $G(D)$. Se afirma que el par $(F(PG(D)), F(\ni_{G(D)}))$ es el objeto potencia de D. Obsérvese que como $\ni_{G(D)} \hookrightarrow G(D) \times PG(D)$ es un monomorfismo y F es una equivalencia de categorías entonces $F(\ni_{G(D)}) \hookrightarrow D \times F(PG(D))$ es un monomorfismo. Tómese un monomorfismo $f : Z \longrightarrow D \times Y$ cualquiera, entonces $G(f) : G(Z) \longrightarrow G(D) \times G(Y)$ es un monomorfismo en $\overline{C}$, y por la propiedad de la potencia existe $\chi_{G(Z)} : G(Y) \longrightarrow PG(D)$ de tal manera que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} G(Z) \arrow[r] \arrow[d, "G(f)"'] & \ni_{G(D)} \arrow[d] \\ G(D) \times G(Y) \arrow[r, "id_{G(D)} \times \chi_{G(Z)}"'] & G(D) \times PG(D) \end{tikzcd}$$

Pero como F es una equivalencia de categorías, entonces el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F(\ni_{G(D)}) \arrow[d] \\ D \times Y \arrow[r, "id_D \times F(\chi_{G(Z)})"'] & D \times F(PG(D)) \end{tikzcd}$$

Por tanto, el par $(F(PG(D)), F(\ni_{G(D)}))$ es la potencia del objeto D. ■

Así las cosas, se tiene la respuesta a la pregunta sobre si la categoría $\mathcal{E}(X)$ es un topos elemental.

Corolario 3.10. *Sea X un espacio topológico, entonces la categoría $\mathcal{E}(X)$ es un topos elemental.*

Demostración. Por el Corolario 8.4. la categoría $\mathcal{E}(X)$ es completa y por la Proposición 8.6. así como por la Proposición 3.6. de este capítulo se tiene que $\mathcal{E}(X)$ posee potencias, es decir, es un topos elemental. ■

4. Propiedades básicas

En esta sección se estudiarán algunas propiedas categóricas y se preguntará si los topos elementales en abstracto cumplen dichas propiedades.

Proposición 4.1. *Todo topos elemental posee clasificador de subobjetos.*

Demostración. Como C es un topos elemental existe la potencia $(P1, \ni_1)$ del objeto final 1. Se afirma que el objeto $P1$ es el clasificador de subobjetos de C. Para esto tómese $j : U \longrightarrow X \cong 1 \times X$ un monomorfismo cualquiera. Por la propiedad de la potencia, existe un único morfismo $\chi_U : X \longrightarrow P1$ tal que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"'] & \ni_1 \arrow[d] \\ X \cong 1 \times X \arrow[r, "id_1 \times \chi_U \cong \chi_U"'] & 1 \times P1 \cong P1 \end{tikzcd}$$

Se afirma que $1 \cong \ni_1$. En efecto, si se considera el monomorfismo $id_1 : 1 \longrightarrow 1$ entonces por la propiedad de la potencia existe un único morfismo $1 \longrightarrow \ni_1$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "id_1"'] & \ni_1 \arrow[d, "P1"] \\ 1 \arrow[r, "\chi_1"'] & P1 \end{tikzcd}$$

Por tanto $\ni_1 \cong 1$ y así, se tiene que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & P1 \end{tikzcd}$$

En conclusión, el topos elemental C tiene clasificador de subobjetos. ■

Para terminar esta sección se introducirá un nuevo concepto categórico que abstraerá al conjunto de números naturales junto con su recursión usual. Recuérdese que en la introducción se dijo que los topos elementales pueden pensarse como generalizaciones de la teoría de conjuntos, por lo que podría pensarse en un principio que todo topos elemental debería tener una especie de conjunto de naturales dentro de sí mismo. Se probará que este fenómeno no sucede necesariamente en todo topos elemental.

DEFINICIÓN 4.2. *Sea C una categoría con límites finitos.*

1. *Un **objeto de naturales** es una terna*

$$\left(N,\ 1 \xrightarrow{z} N\ ,\ N \xrightarrow{s} N\ \right)$$

donde N es un objeto de C, s, z morfismos de C y además, para cualquier diagrama de la forma

$$1 \xrightarrow{q} A \xrightarrow{f} A$$

existe un único morfismo

$$u : N \longrightarrow A$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "u"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "u"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

2. *Si dirá que C posee objeto de naturales si C tiene un objeto de naturales.*

Como se mencionó al principio de esta sección, resulta que no todo topos elemental posee objeto de naturales, tal como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 4.3. *La categoría **ConFin** no posee objeto de naturales.*

Demostración. Supóngase para obtener una contradicción que **ConFin** sí posee objeto de naturales, dígase $\mathbb{N}^*$. Para cada número natural n defínase

$$A_n := \{a_0, ..., a_n\}$$

donde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Considérese el morfismo

$$q : 1 \longrightarrow A_n$$

dado por

$$q(0) := a_0$$

y el morfismo

$$f : A_n \longrightarrow A_n$$

donde para cada $i \in \{0, ...n, n-1\}$ se tiene

$$f(a_i) := a_{i+1}$$

y

$$f(a_n) := a_0$$

Entonces por hipótesis existe un único morfismo

$$\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow A_n$$

que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{N}^* \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & \mathbb{N}^* \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
& A_n \arrow[r, "f"'] & A_n
\end{tikzcd}$$

Pero nótese que la función ϕ es suprayectiva pues

$$\begin{array}{rclcl}
\phi(z(0)) & = & q(0) & = & a_0 \\
\phi(s(z(0))) & = & f_n(\phi(z(0))) & = & a_1 \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
\phi(s^n(z(0))) & = & . \quad . \quad . & = & a_n
\end{array}$$

por lo tanto

$$|\mathbb{N}^*| \geq |A_n| = n + 1$$

pero como esto sucede para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N}^*$ es infinito, lo cual es imposible. En conclusión, la categoría **FinCon** no posee objeto de naturales. ■

Puesto que la categoría **ConFin** es un topos elemental, entonces se ha probado que no todo topos elemental posee objeto de naturales. Sin embargo, al menos tendría que ser que la categoría **Con** tuviera objeto de naturales. El siguiente resultado muestra este hecho.

PROPOSICIÓN 4.4. *La categoría **Con** posee objeto de naturales.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el siguiente diagrama

$$1 \xrightarrow{z} A \xrightarrow{f} A$$

en la categoría **Con**. También considérese al conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales, la función

$$z' : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$$

dada por

$$z'(*) := 0$$

y la función

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

definida como

$$s(n) := n + 1$$

Se afirma que la terna

$$(\mathbb{N}, z', s)$$

es el objeto de naturales de la categoría **Con**. En efecto, nótese que por el teorema de recursión existe una función dada por

$$\phi(z'(*)) := z(*)$$

y de manera recursiva

$$\phi(n+1) := f(\phi(n))$$

por lo que $\phi(s(n)) = f(\phi(n))$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "z'"] \arrow[dr, "z"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Supóngase la existencia de otra función $F : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de tal manera que $F(z'(*)) = z(*)$ y $F(s(n)) = f(F(n))$. Se verificará que estas dos funciones son iguales. Obsérvese que $F(z'(*)) = \phi(z'(*))$, supóngase que $F(k) = \phi(k)$ entonces

$$F(k+1) = F(s(k)) = f(F(k)) = f(\phi(k)) = \phi(s(k)) = \phi(k+1)$$

por lo tanto $F = \phi$ ■

5. Una definición equivalente de los topos elementales

Para terminar este capítulo se mostrará que no existe una única manera de definir topos elemental.

Proposición 5.1. *Sea C una categoría. Entonces C es un topos elemental si y sólo si*

1. *C tiene límites finitos.*
2. *C tiene exponenciación.*
3. *C tiene clasificador de subobjetos.*

La prueba de este hecho, dada originalmente por Anders Kock y Juul Mikkelsen no es trivial y sale de los fines de este trabajo por lo que se refiere al lector interesado a consultar [11] para más información sobre esta prueba.

Capítulo 3

Topos de Lawvere

1. Introducción

Las categorías de Lawvere fueron las precursoras para el estudio abstracto de los topos elementales. Dentro de las categorías de Lawvere será posible recoger la noción de elemento de un objeto, tal como se estudia en teoría de conjuntos. Los conceptos básicos categóricos, como los productos y coproductos serán interpetados en el contexto de las categorías de Lawvere. Además, se estudiarán dos conceptos muy relevantes en la teoría, a saber, los de exponenciación y evaluación. Se probará que dichas nociones están profundamente relacionadas. Más aún, esta relación se verá reflejada en el comportamiento de los morfismos entre los objetos de una categoría de Lawvere, que recordarán mucho al lenguaje conjuntista. En este capítulo también se estudiará el concepto de objeto de números naturales y se probarán algunas de sus propiedades más interesantes. A su vez, se verá que dentro de ciertas categorías de Lawvere, se tiene un método para probar cuándo dos morfismos son iguales. Habrá una sección destinada totalmente al estudio de los morfismos en una categoría de Lawvere. También se hará ver que es posible recobrar el concepto de subconjunto en estas categorías. Se probará que esta nueva definición es equivalente a la definición clásica en teoría de conjuntos. Llegados hasta este punto, es posible ya definir un topos de Lawvere. Se estudiarán sus propiedades más importantes y por último, como el resultado más importante del presente estudio, se probará que los topos de Lawvere, bajo ciertas condiciones, serán escencialmente la categoría de conjuntos. En este capítulo se seguirá muy de cerca el artículo [17] y para completarlo se seguirá el texto [11].

2. Elementos, morfismos y funciones

En esta sección se definirá el concepto de categoría de Lawvere y se estudiarán los elementos de sus objetos. Se estudiarán los morfismos gráfica y cográfica y se hará ver que abstrayendo algunas propiedades del morfismo gráfica se puede hablar de funciones entre objetos de una categoría de Lawvere. Por último se estudiará la relación que existe entre los morfismos y las funciones de las categorías de Lawvere.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Se dirá que $\mathcal{C}$ es una* ***categoría de Lawvere*** *si dicha categoría cumple las siguientes tres condiciones:*

1. *$\mathcal{C}$ posee límites finitos y colímites finitos;*
2. *$\mathcal{C}$ tiene exponenciación;*
3. *$\mathcal{C}$ posee objeto de naturales.*

Algunas consecuencias útiles de que las categorías de Lawvere posean exponenciación son las siguientes.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciación y 0 su objeto inicial, entonces:*

1. *Para cada objeto A se tiene que $0 \cong 0 \times A$;*
2. *si existe un morfismo $A \longrightarrow 0$ entonces $A \cong 0$;*
3. *toda flecha $0 \longrightarrow A$ es un monomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un objeto de $\mathcal{C}$:

1. Dado B un objeto cualquiera, como $\mathcal{C}$ tiene exponenciación entonces se tiene la biyección natural $Hom(0, B^A) \cong Hom(0 \times A, B)$, por lo que existe una única flecha $0 \times A \longrightarrow B$, luego por la unicidad salvo isomorfismo del objeto inicial de $\mathcal{C}$ se tiene que $0 \cong 0 \times A$.
2. Sea $f : A \longrightarrow 0$ un morfismo, por la propiedad universal del producto se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "1_A"'] \arrow[r, dashed, "(f,1_A)"] & 0 \times A \arrow[ur, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

   por un lado $\pi_A \circ (f, 1_A) = 1_A$ y por otro lado $(f, 1_A) \circ \pi_A : 0 \times A \longrightarrow 0 \times A$, pero como $0 \times A$ es objeto inicial entonces $(f, 1_A) \circ \pi_A = 1_{0 \times A}$, por lo tanto $A \cong 0 \times A \cong 0$.
3. Sea $f : 0 \longrightarrow A$ un morfismo y supóngase que existen $g, h : B \longrightarrow 0$ tales que $f \circ g = f \circ h$, por 2. se tiene que $B \cong 0$ por lo que $g = h$.

■

En la teoría de conjuntos clásica, el concepto de elemento juega un papel fundamental. A continuación se presentará el concepto de elemento pero formulado en un lenguaje categórico.

DEFINICIÓN 2.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y A un objeto. Si existe un morfismo*

$$1 \xrightarrow{x} A$$

entonces se dirá que x es un ***elemento*** *de A. A esta situación se le denotará por*

$$x \in A.$$

Naturalmente surge la pregunta de la naturaleza de esta definición. A continuación se hará ver que esta definición abstrae el fenómeno que se presenta en la teoría de conjuntos clásica.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea A un objeto de la categoría* ***Con****, entonces existe una correspondencia biyectiva*

$$Hom(1, A) \cong A$$

además dicha correspondencia es natural entre los functores $id_{\mathbf{Con}}$ y $Hom(1, -)$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada A objeto en **Con** defínase el morfismo

$$\phi_A : Hom(1, A) \longrightarrow A$$

de tal manera que para cada $x \in Hom(1, A)$ se tiene que

$$\phi_A(x) := x(*)$$

Por otro lado defínase el morfismo

$$\psi_A : A \longrightarrow Hom(1, A)$$

tal que para cada $a \in A$ defínase el morfismo

$$\psi_A(a) : 1 \longrightarrow A$$

dado por

$$\psi_A(a)(*) := a$$

Para mostrar que estos morfismos definen una correspondencia biyectiva sea $x \in Hom(1, A)$, entonces obsérvese que

$$\psi_A \circ \phi_A(x) = \psi_A(x(*))$$

y este morfismo es tal que

$$\psi_A(x(*))(*) = x(*)$$

por lo tanto $\psi_A \circ \phi_A(x) = x = id_{Hom(1,A)}(x)$ y así $\psi_A \circ \phi_A = id_{Hom(1,A)}$. Por otro lado, si $a \in A$ entonces

$$\phi_A \circ \psi_A(a)(*) = \phi_A(a) = a(*)$$

por ello $\phi_A \circ \psi_A(a) = a = id_A(a)$ es decir $\phi_A \circ \psi_A = id_A$ y en conclusión $Hom(1, A) \cong A$. Ahora bien, considérese la asignación

$$\eta : Hom(1, -) \Longrightarrow id_{\mathbf{Con}}$$

tal que para cualquier conjunto A se define

$$\eta_A : Hom(1, A) \longrightarrow A$$

dada por

$$\eta_A := \phi_A$$

Para probar que esta asignación es una transformación natural, tómese una función $f : A \longrightarrow B$ cualquiera, entonces se afirma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom(1,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Hom(1,-)(f)"'] & A \arrow[d, "id_{\mathbf{Con}}(f)=f"] \\
Hom(1,B) \arrow[r, "\eta_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

en efecto, por un lado

$$f \circ \eta_A(x) = f \circ \phi_A(x) = f \circ x(*)$$

y por otro lado

$$\eta_B \circ Hom(1, -)(f)(x) = \eta_B \circ f \circ x = f \circ x(*)$$

por lo tanto, el diagrama es conmutativo y en conclusión η es una transformación natural, por lo que la biyección $Hom(1, A) \cong A$ es natural. ■

A continuación se estudiarán los elementos de algunas construcciones usuales en la teoría de categorías, como lo son el producto y el coproducto de objetos de una categoría.

Definición 2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B dos objetos de dicha categoría. El **producto** de A y B es un objeto $A \times B$ junto con dos morfismos $\pi_A : A \times B \longrightarrow A$ y $\pi_B : A \times B \longrightarrow B$ tal que para cualquier otro objeto X y morfismos $f_A : X \longrightarrow A$ y $f_B : X \longrightarrow B$ existe un único morfismo*

$$h : X \longrightarrow A \times B$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr, bend left, "f_A"] \arrow[drr, bend right, "f_B"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

A la existencia del morfismo h junto con su unicidad y la propiedad de hacer conmutativo al diagrama se le conoce como la **propiedad universal del producto**. En lo que sigue, al morfismo $h : X \longrightarrow A \times B$ se le denotará por

$$\langle f_A, f_B \rangle =: h$$

Obsérvese que si $\mathcal{C}$ es una categoría de Lawvere y se considera a $X = 1$, entonces el morfismo $\langle f_A, f_B \rangle$ es un elemento del producto $A \times B$. Así mismo, los morfismos f_A y f_B ahora son elemento de A y B, respectivamente, por lo que un elemento del producto es una especie de par ordenado, donde cada entrada tiene a un elemento de cada factor, tal como sucede en la teoría de conjuntos clásica. Nuevamente considérese a X como un objeto cualquiera y sea $x \in X$ un elemento, entonces por la propiedad universal del producto

$$\langle f_A, f_B \rangle \circ x = \langle f_A \circ x, f_B \circ x \rangle$$

Definición 2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Se define el* ***coproducto*** *de A y B como un objeto $A + B$ junto con morfismos $i_A : A \longrightarrow A + B$ e $i_B : B \longrightarrow A + B$ tales que, para cualquier otro objeto Y junto con morfismos $g_A : A \longrightarrow Y$ y $g_B : B \longrightarrow Y$ existe un único morfismo*

$$k : A + B \longrightarrow Y$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "g_A"] & & \\
& A + B \arrow[r, dashed, "k"] & Y \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "g_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

A la existencia del morfismo k junto con su unicidad y la propiedad de hacer conmutativo al diagrama se le conoce como la **propiedad universal del coproducto**. Análogamente al producto, es usual denotar el morfismo k como

$$(g_a, g_b) := k$$

Observación 2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Considérese el siguiente diagrama dado por la propiedad universal* *del producto*

$$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[rru, bend left, "id_A"] \arrow[rrd, bend right, "f"'] \arrow[r, dashed, "\langle id_A, f\rangle"] & A \times B \arrow[ru, "\pi_A"'] \arrow[rd, "\pi_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

entonces para cada $a \in A$ se tiene que

$$\langle id_A, f\rangle \circ a := \langle id \circ a, f \circ a\rangle = \langle a, f \circ a\rangle$$

Al morfismo

$$\langle id_A, f\rangle$$

*se le conoce como la **gráfica** del morfismo f. Obsérvese que del morfismo gráfica se puede extraer al morfismo f de la siguiente manera*

$$\pi_B \circ \langle id_A, f\rangle = f$$

Por último, nótese que el morfismo gráfica es un monomorfismo. En efecto, sean $g_1, g_2 : C \longrightarrow A$ dos morfismos tales que $\langle id_A, f\rangle \circ g_1 = \langle id_A, f\rangle \circ g_2$, luego

$$\begin{aligned} \langle id_A, f\rangle \circ g_1 = \langle id_A, f\rangle \circ g_2 &\Rightarrow \pi_A \circ \langle id_A, f\rangle \circ g_1 = \pi_A \circ \langle id_A, f\rangle \circ g_2 \\ &\Rightarrow id_A \circ g_1 = id_A \circ g_2 \\ &\Rightarrow g_1 = g_2 \end{aligned}$$

De manera análoga a la Observación 2.7 se tiene lo siguiente con respecto al coproducto.

Observación 2.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Considérese el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rd, "i_A"'] \arrow[rrd, bend left, "f"] & & \\ & A + B \arrow[r, dashed, "(f, id_B)"] & B \\ B \arrow[ru, "i_B"] \arrow[rru, bend right, "id_B"'] & & \end{tikzcd}$$

este diagrama dice que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene que

$$i_A \circ (f, id_B) = f$$

*Al morfismo (f, id_B) se le conoce como la **cográfica** del morfismo f. La cográfica sugiere el concepto alternativo de función entre dos conjuntos A y B como una partición de la unión disjunta de A y B, donde cada elemento de los conjuntos de la* *partición contiene exactamente un elemento de B. Así, lo que se está abstrayendo con el concepto de cográfica es la geometría de una función, ya que es usual representar a una función entre conjuntos como la únion disjunta del dominio y el codominio y flechas que salen de los elementos del dominio al codominio. La Figura 1. representa este hecho y es un dibujo usual para representar funciones entre conjuntos.*

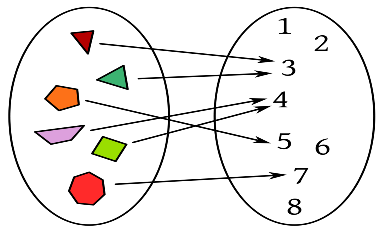

FIGURA 1. Función entre dos conjuntos

Recuérdese que el morfismo gráfica permitía recobrar al morfismo original mediante una ecuación. La siguiente definición abstrae esta propiedad que posee la gráfica de un morfismo.

DEFINICIÓN 2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Una* ***$\mathcal{C}$-función*** *o únicamente una* ***función*** *de A a B es un morfismo f del conjunto $Hom(A, A \times B)$ tal que*

$$\pi_A \circ f = id_A$$

A la colección de $\mathcal{C}$-funciones de A en B se le denotará por $Fun_{\mathcal{C}}(A, B)$ ó bien, por $Fun(A, B)$ cuando la situación no se preste a confusión.

Un resultado muy interesante es que las colecciones $Fun(A, B)$ y $Hom(A, B)$ serán naturalmente isomorfas, pero para esto primero se necesita notar lo siguiente.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere, entonces para cada A objeto de dicha categoría, la asignación*

$$Fun(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$$

donde a cada objeto B lo manda a la colección $Fun(A, B)$, y a cada morfismo $f : B_1 \longrightarrow B_2$ lo manda al morfismo

$$Fun(A, -)(f) : Fun(A, B_1) \longrightarrow Fun(A, B_2)$$

dado por

$$Fun(A, -)(f)(g) := (id_A \times f) \circ g$$

es un funtor.

Demostración. Sea X un objeto de $\mathcal{C}$ y considérese $id_X : X \longrightarrow X$ entonces

$$Fun : (A,-)(id_X) : Fun(A,X) \longrightarrow Fun(A,X)$$

es tal que para cada $f \in Fun(A,X)$ se tiene que

$$Fun(A,-)(id_X)(f) = (id_A \times id_X) \circ f = id_{A\times X} \circ f = f$$

por lo tanto

$$Fun(A,-)(id_X) = id_{Fun(A,X)} = id_{Fun(A,-)(X)}$$

Por último considérense dos morfismos $f : B \longrightarrow D$ y $g : D \longrightarrow E$, entonces para cada $h \in Fun(A,B)$ se tiene que

$$\begin{aligned} Fun(A,-)(g \circ f)(h) &= (id_A \times (g \circ f)) \circ h \\ &= (id_A \times g) \circ (id_A \times f) \circ h \\ &= Fun(A,-)(g)(id_A \times f) \circ h \\ &= Fun(A,-)(g) \circ Fun(A,-)(f)(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Fun(A,-)(g \circ f) = Fun(A,-)(g) \circ Fun(A,-)(f)$. ■

Ahora sí se está en condiciones de probar la relación que existe entre las funciones y los morfismos en una categoría de Lawvere.

Proposición 2.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$Fun(A,B) \cong Hom(A,B)$$

Demostración. Considérese el morfismo

$$\phi : Fun(A,B) \longrightarrow Hom(A,B)$$

dado por

$$\phi(f) := \pi_B \circ f$$

y defínase el morfismo

$$\psi : Hom(A,B) \longrightarrow Fun(A,B)$$

de tal manera que

$$\psi(g) := \langle id_A, g\rangle$$

Obsérvese que si $g \in Hom(A,B)$ entonces

$$\phi \circ \psi(g) = \phi(\langle id_A, g\rangle) = \pi_B \circ \langle id_A, g\rangle = g$$

entonces $\phi \circ \psi = id_{Hom(A,B)}$. Por otro lado, si $f \in Fun(A,B)$ entonces

$$\psi \circ \phi(f) = \psi(\pi_B \circ f) = \langle id_A, \pi_B \circ f\rangle = f$$

Así, se tiene que $\psi \circ \phi = id_{Fun(A,B)}$ y siendo esto así, se concluye el isomorfismo $Hom(A,B) \cong Fun(A,B)$. Para verificar la naturalidad de este isomorfismo considérese la asignación

$$\theta : Fun(A,-) \longrightarrow Hom(A,-)$$

tal que para cualquier objeto B de $\mathcal{C}$ se define

$$\theta_B : Fun(A,B) \longrightarrow Hom(A,B)$$

dado por

$$\theta_B := \phi$$

Para mostrar que θ es una transformación natural se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo para cualquier morfismo $f : B_1 \longrightarrow B_2$ en C:

$$\begin{tikzcd}
Fun(A,B_1) \arrow[r, "\theta_{B_1}"] \arrow[d, "Fun(a,-)(f)"'] & Hom(A,B_1) \arrow[d, "Hom(a,-)(f)"] \\
Fun(A,B_2) \arrow[r, "\theta_{B_2}"'] & Hom(A,B_2)
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $g \in Fun(A,B_1)$ entonces

$$\begin{aligned}
\theta_{B_2} \circ Fun(A,-)(f)(g) &= \theta_{B_2}((id_A \times f) \circ g) \\
&= \pi_{B_2} \circ (id_A \times f) \circ g \\
&= f \circ \pi_{B_1} \circ g \\
&= Hom(A,-)(f)(\pi_{B_1} \circ g) \\
&= Hom(A,-)(f) \circ \theta_{B_1}(g)
\end{aligned}$$

Obsérvese que la tercer igualdad se sigue del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A \\
A \times B_1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "id_A \times f"] \arrow[d, "\pi_{B_1}"'] & A \times B_2 \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_{B_2}"] \\
B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, θ es una transformación natural y así el isomorfismo es natural. ∎

3. Exponenciación y el morfismo evaluación

En esta sección se estudiarán de manera más concreta las consecuencias de la exponenciación en una categoría, como lo es la existencia de un morfismo evaluación y sus propiedades más importantes. También se hará ver que gracias a la exponenciación en una categoría de Lawvere, es posible pensar a los morfismos como elementos de cierto objeto de la categoría. Por último, se estudiarán algunas otras propiedades interesantes que son consecuencia de la exponenciación y que serán de ayuda más adelante.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere. Entonces para cualesquiera dos objetos A y B de dicha categoría, existe un objeto B^A y un morfismo*

$$ev : A \times B^A \longrightarrow B$$

tal que para cualquier otro objeto X y cualquier morfismo $f : A \times X \longrightarrow B$ existe un único morfismo $h : X \longrightarrow B^A$ que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "h"] & A \times X \arrow[d, "id_A \times h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B^A & A \times B^A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ tiene exponenciación, entonces el funtor $(-) \times A$ es adjunto izquierdo del funtor $(-)^A$ por lo que se define

$$B^A := (-)^A(B)$$

Además, recuérdese que la counidad de la adjunción es

$$\epsilon : (-) \times A \circ (-)^A \Longrightarrow id_{\mathcal{GAV}_X}$$

por lo que se tiene

$$\epsilon_B : B^A \times A \longrightarrow B$$

siendo esto así, defínase

$$ev := \epsilon_B$$

Ahora bien, tómese X cualquier otro objeto y $f : A \times X \longrightarrow B$ un morfismo. Por la adjunción de los funtores se tiene el siguiente isomorfismo natural

$$\theta : Hom(A \times X, B) \cong Hom(X, B^A)$$

entonces para el morfismo f existe un único morfismo

$$h : X \longrightarrow B^A$$

de tal manera que

$$\theta(f) = h$$

Por último, considérese el diagrama

$$X \times A \xrightarrow{(-)\times A(h)} B^A \times A \xrightarrow{ev} B \xrightarrow{id_B} B$$

y por la naturalidad de θ este diagrama corresponde al siguiente diagrama

$$X \xrightarrow{h} B^A \xrightarrow{id_{B^A}} B^A \xrightarrow{(-)^A(id_B)} B^A$$

pero este diagrama no es más que el morfismo h por lo que

$$\begin{aligned} \theta(ev \circ id_A \times h) &= \theta(id_B \circ ev \circ (-) \times A(h)) \\ &= h \end{aligned}$$

Y como θ es un isomorfismo entonces

$$f = ev \circ id_A \times h$$

es decir el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \times X \arrow[d, "id_A \times h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \times B^A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

■

Observación 3.2. *Las siguientes observaciones serán fundamentales para lo que sigue:*

1. *Al morfismo $ev : A \times B^A \longrightarrow B$ de la Proposición 3.1. de esta capítulo se le conoce como el morfismo* ***evaluación****.*
2. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ y dos objetos A y B de dicha categoría, la colección $Hom(A, B)$ no es necesariamente un objeto de la categoría $\mathcal{C}$, por lo que los morfismos entre A y B no pueden pensarse como elementos de algún objeto de $\mathcal{C}$. Sin embargo, si se considera a $\mathcal{C}$ como una categoría de Lawvere, entonces existe una manera de pensar a los morfismos de A en B como elementos de cierto objeto de $\mathcal{C}$.*

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Entonces*

$$Hom(A, B) \cong Hom(1, B^A)$$

Demostración. Se busca definir un isomorfismo

$$\phi : Hom(A, B) \longrightarrow B^A$$

para esto, tómese $f : A \longrightarrow B$ cualquiera. Por la Proposición 3.1. de este capítulo existe un único morfismo

$$h_f : 1 \longrightarrow B^A$$

que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times 1 \cong A \arrow[d, "id_A \times h_f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \times B^A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

Así, defínase

$$\phi(f) := h_f$$

y claramente esta asignación es una biyección. Por lo tanto

$$Hom(A, B) \cong Hom(1, B^A)$$

■

La siguiente observación resuelve el problema planteado en la Observación 3.2. de este capítulo.

Observación 3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Para cada morfismo $f \in Hom(A, B)$ se denotará por $[f] \in Hom(1, B^A)$ al único morfismo dado por la biyección ϕ de la Proposición 3.3. anterior. Al elemento $[f]$ se le conoce como el* ***nombre*** *del morfismo f y obsérvese que el morfismo $f \in Hom(A, B)$ está relacionado con su nombre por el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \times 1 \cong A \arrow[d, "id_A \times [f]"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \times B^A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

Ahora bien, tómense $a \in A$ un elemento cualquiera y $f \in Hom(A, B)$, entonces existe un único morfismo $\langle a, [f] \rangle$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \\ 1 \arrow[ur, bend left, "a"] \arrow[r, "\langle a,[f]\rangle"] \arrow[dr, bend right, "[f]"'] & A \times B^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_{B^A}"] \\ & B^A \end{tikzcd}$$

Se afirma que $ev \circ \langle a, [f] \rangle = f \circ a$. *En efecto, nótese que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "a"] & \\
A \times 1 \cong A \arrow[d, "id_A \times [f]"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times B^A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

Es decir $ev \circ id_A \times [f] \circ a = f \circ a$ *por lo que basta probar que* $id_A \times [f] \circ a = \langle a, [f] \rangle$ *pero también el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "id_A"] & A \\
1 \arrow[r, "a"] & A \times 1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "id_A \times [f]"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \times B^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_{B^A}"] \\
 & 1 \arrow[r, "{[f]}"'] & B^A
\end{tikzcd}$$

luego, por la propiedad universal del producto se tiene que

$$id_A \times [f] \circ a = \langle a, [f] \rangle$$

por lo tanto

$$ev \circ \langle a, [f] \rangle = f \circ a$$

Una pregunta natural es si dada una categoría de Lawvere $\mathcal{C}$, es posible construir un bifuntor de la forma $(-)^{(-)} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ con la información de que para cada A objeto de $\mathcal{C}$, el funtor $(-) \times A$ posee un adjunto izquierdo $(-)^A$. La Proposición que sigue responde esta pregunta.

Proposición 3.5. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría de Lawvere, entonces la asignación*

$$(-)^{(-)} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

que a cada par (A, B) *en* $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ *lo manda al objeto* B^A *y que a cada morfismo* $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (B', A')$ *lo manda al morfismo* $g^f : B^A \longrightarrow B'^{A'}$ *es un funtor, donde* g^f *es construido de la siguiente manera: como* $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (B', A')$ *entonces* $f : A \longrightarrow A'$ *en* $\mathcal{C}^{op}$ *y* $g : B \longrightarrow B'$ *en* $\mathcal{C}$, *por lo que si se considera el* *diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A' \times B^A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f^{op}\times 1_{B^A}"'] & B' \\ A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"'] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 3.1 existe un único morfismo $h : B^A \longrightarrow B'^{A'}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \times B^A \arrow[d, "1_{A'}\times h"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ A' \times B'^{A'} \arrow[r, "ev_{B'^{A'}}"'] & B' \end{tikzcd}$$

así defínase $g^f := h$.

Demostración. Sea $(1_A, 1_B) : (A, B) \longrightarrow (A, B)$ entonces es necesario probar que $(1_B)^{1_A} = 1_{B^A}$. Para construir a $(1_B)^{1_A}$ se tiene primero el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"] \arrow[d, "1_A\times 1_{B^A}=1_{A\times B^A}"'] & B \\ A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"'] & B \arrow[u, "1_B"'] \end{tikzcd}$$

por lo que $(1_B)^{1_A}$ es el único morfismo que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times B^A \arrow[d, "1_A\times (1_B)^{1_A}"'] \arrow[dr, "ev_{B^A}"] & \\ A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"'] & B \end{tikzcd}$$

pero claramente el morfismo 1_{B^A} también hace conmutar al diagrama, por lo que $(1_B)^{1_A} = 1_{B^A}$.
Por último, sean $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (C, D)$ y $(h, i) : (C, D) \longrightarrow (E, F)$ entonces por un lado se tiene el morfismo $(h \circ f, i \circ g) : (A, B) \longrightarrow (E, F)$ cuyo morfismo $(i \circ g)^{(h\circ f)} : B^A \longrightarrow F^E$ se construyó de la siguiente manera: primero se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \times B^A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(f^{op}\circ h^{op})\times 1_{B^A}"'] & F \\ A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"'] & B \arrow[u, "i\circ g"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

luego, $(i \circ g)^{(h \circ f)}$ es el único morfismo que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times B^A \arrow[d, "1_E \times (i \circ g)^{(h \circ f)}"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ E \times F^E \arrow[r, "ev_{F^E}"'] & F \end{tikzcd} \tag{2}$$

Por otro lado, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C \times B^A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f^{op} \times 1_{B^A}"'] & D \\ A \times B^A \arrow[r, "ev_{B^A}"'] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

donde $g^f : B^A \longrightarrow D^C$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \times B^A \arrow[d, "1_C \times g^f"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ C \times D^C \arrow[r, "ev_{D^C}"'] & D \end{tikzcd} \tag{4}$$

Por último, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \times D^C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "h^{op} \times 1_{D^C}"'] & F \\ C \times D^C \arrow[r, "ev_{D^C}"'] & D \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

donde $i^h : D^C \longrightarrow F^E$ es el único morfismo que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times D^C \arrow[d, "1_E \times i^h"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ E \times F^E \arrow[r, "ev_{F^E}"'] & F \end{tikzcd} \tag{6}$$

Lo que se desea probar es que $(i \circ g)^{(h \circ f)} = i^h \circ g^f$. Nótese que

$$\begin{array}{rcll} ev_{F^E} \circ (1_E \times (i^h \circ g^f)) & = & ev_{F^E} \circ (1_E \times i^h) \circ (1_E \times g^f) & \\ & = & \psi \circ (1_E \times g^f) & (6) \\ & = & i \circ ev_{D^C} \circ (h^{op} \times 1_{D^C}) \circ (1_E \times g^f) & (5) \\ & = & i \circ ev_{D^C} \circ ((h^{op} \circ 1_E) \times (1_{D^C} \circ g^f)) & \\ & = & i \circ ev_{D^C} \circ (h^{op} \times g^f) & \\ & = & i \circ ev_{D^C} \circ ((1_C \circ h^{op}) \times (g^f \circ 1_{B^A})) & \\ & = & i \circ ev_{D^C} \circ (1_C \times g^f) \circ (h^{op} \times 1_{B^A}) & \\ & = & i \circ \varphi \circ (h^{op} \times 1_{B^A}) & (4) \\ & = & i \circ g \circ ev_{B^A} \circ (f^{op} \times 1_{B^A}) \circ (h^{op} \times 1_{B^A}) & (3) \\ & = & i \circ g \circ ev_{B^A} \circ ((f^{op} \circ h^{op}) \times 1_{B^A}) & \\ & = & \phi & (1) \end{array}$$

Así, de (2) se sigue que $(i \circ g)^{(h \circ f)} = i^h \circ g^f$. En conclusión, se tiene que $(-)^{(-)} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un bifuntor. ■

El siguiente resultado, que es una consecuencia de la exponenciación de una categoría de Lawvere, muestra que existe una especie de distributividad entre el producto y el coproducto de los objetos en una categoría de Lawvere. Para esto, es necesario recordar antes un Corolario del Lema de Yoneda.

Corolario 3.6. *Sea C una categoría y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Si*

$$Hom(A, -) \simeq Hom(B, -)$$

o bien

$$Hom(-, A) \simeq Hom(-, B)$$

entonces

$$A \cong B$$

Proposición 3.7. *Sean C una categoría de Lawvere y A, B, C objetos de dicha categoría, entonces*

$$(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$$

Demostración. Sea X un objeto cualquiera de C, como C tiene exponenciación entonces se tienen los siguientes isomorfismos

$$\begin{array}{rcl} Hom(A \times (B + C), X) & \cong & Hom(B + C, X^A) \\ & \cong & Hom(B, X^A) \times Hom(C, X^A) \\ & \cong & Hom(A \times B, X) \times Hom(A \times C, X) \\ & \cong & Hom((A \times B) + (A \times C), X) \end{array}$$

Luego, por el Corolario 3.1. se tiene que $(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$. ■

4. Objeto de naturales

En este capítulo se estudia la tercer y última condición de las categorías de Lawvere. Se darán los primeros ejemplos de las categorías de Lawvere y se probará una consecuencia interesante del axioma de objeto de naturales.

EJEMPLOS 4.1. *Los siguientes son ejemplos de categorías de Lawvere*

1. *La categoría **Con** es una categoría de Lawvere.*
2. *Si G es un grupo entonces la categoría de G conjuntos denotada por **G-Con** es una categoría de Lawvere.*
3. *La categoría **COPO** de conjuntos parcialmente ordenados es una categoría de Lawvere.*

El siguiente resultado muestra una de las consecuencias de que las categorías de Lawvere posean objeto de naturales.

PROPOSICIÓN 4.2. *(Recursión primitiva) Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y N su objeto de naturales. Entonces para cualesquiera morfismos $f_0 : A \longrightarrow B$, $u : N \times A \times B \longrightarrow B$ existe un morfismo $f : N \times A \longrightarrow B$ de tal manera que, para cada $n \in N$ y $a \in A$ se tiene que*

$$f \circ \langle 0, a\rangle = f_0 \circ a$$

y también

$$f \circ \langle s \circ n, a\rangle = u \circ \langle n, a, f \circ \langle n, a\rangle\rangle$$

DEMOSTRACIÓN. Considérese el morfismo $g' : A \times B^A \longrightarrow B$ dado por la composición de los siguientes morfismos

$$\begin{tikzcd}
1 \times A \times B^A \arrow[r, "n\times\Delta_A\times 1_{B^A}"] & N \times A \times A \times B^A \arrow[r, "1_N\times 1_A\times ev"] & N \times A \times B \arrow[d, "u"] \\
A \times B^A \arrow[u, "\langle !_{A\times B^A}, 1_{A\times B^A}\rangle", "\cong"'] & & B \\
B^A \times A. \arrow[u, "\langle q_A, q_{B^A}\rangle"] \arrow[urr, "g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como la categoría $\mathcal{C}$ tiene exponenciación entonces se tiene la biyección natural $Hom(B^A \times A, B) \cong Hom(B^A, B^A)$, por lo que sea $g : B^A \longrightarrow B^A$ la transpuesta de g' dada por esta biyección natural. Ahora bien, como $f_0 : A \longrightarrow B$ entonces se tiene el morfismo $[f_0] : 1 \longrightarrow B^A$, y dado que N es el objeto de naturales de $\mathcal{C}$ entonces existe un único morfismo $h : N \longrightarrow B^A$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "{[f_0]}"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, "h"] \\
& B^A \arrow[r, "g"'] & B^A.
\end{tikzcd}$$

Nuevamente, por el axioma de exponenciación se tiene la siguiente biyección natural $\theta : Hom(N, B^A) \longrightarrow Hom(N \times A, B)$, por lo que se define a $f : N \times A \longrightarrow B$ como el transpuesto del morfismo h dado por esta biyección natural. Nótese que, por un lado, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \times A \arrow[r, "0\times 1_A"] & N \times A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[u, "\cong", "\langle 1_A, 1_A\rangle"'] \arrow[r, "f_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

en efecto, si se considera el morfismo 1_B y el morfismo $0 : 1 \longrightarrow N$ entonces por naturalidad de θ se tiene

$$\begin{aligned}
\theta(1_{B^A} \circ h \circ 0) &= 1_B \circ f \circ (0 \times 1_A) \\
&= f \circ (0 \times 1_A)
\end{aligned}$$

pero por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta(1_{B^A} \circ h \circ 0) &= \theta(h \circ 0) \\
&= \theta([f_0]) \\
&= f_0 \circ \pi_A
\end{aligned}$$

por lo que $f \circ (0 \times 1_A) = f_0 \circ \pi_A$, es decir $f \circ (0 \times 1_A) \circ \langle !_A, 1_A\rangle = f_0$. De aquí se deduce que

$$\begin{aligned}
f_0 \circ a &= f \circ (0 \times 1_A) \circ \langle !_A, 1_A\rangle \circ a \\
&= f \circ \langle 0, a\rangle
\end{aligned}$$

Así mismo, el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A\times N \arrow[d, "\Delta_A\times 1_N"'] & & N\times A \arrow[ll, "\langle p_A, p_N\rangle"'] \arrow[d, "s\times 1_A"] \\
A\times A\times N \arrow[d, "\langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle"', "\cong"] & & N\times A \arrow[d, "f"] \\
1\times A\times A\times N \arrow[d, "n\times 1_A\times 1_A\times 1_N"'] & & B \\
N\times A\times A\times N \arrow[rr, "1_N\times 1_A\times f"'] & & N\times A\times B \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd} \tag{7}$$

en efecto, si se consideran los morfismos 1_B y s entonces por la naturalidad de θ se tiene que $\theta(1_{B^A}\circ h\circ s)=\theta(h\circ s)=f\circ(s\times 1_A)$, pero $\theta(h\circ s)=\theta(g\circ h)=g'\circ(h\times 1_A)$, por lo que basta ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1\times A\times B^A \arrow[r, "n\times\Delta_A\times 1_{B^A}"] & N\times A\times A\times B^A \arrow[r, "1_N\times 1_A\times ev"] & N\times A\times B \arrow[d, "u"] \\
A\times B^A \arrow[u, "\langle !_{A\times B^A}, 1_{A\times B^A}\rangle", "\cong"'] & & B \\
B^A\times A \arrow[u, "\langle q_A, q_{B^A}\rangle"] & & N\times A\times B \arrow[u, "u"'] \\
N\times A \arrow[u, "h\times 1_A"] \arrow[d, "\langle p_A, p_N\rangle"'] & & N\times A\times A\times N \arrow[u, "1_N\times 1_A\times f"'] \\
A\times N \arrow[r, "\Delta_A\times 1_N"'] & A\times A\times N \arrow[r, "\langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle"'] & 1\times A\times A\times N. \arrow[u, "n\times 1_A\times 1_A\times 1_N"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que como $f: A\times N\longrightarrow B$, entonces existe un único morfismo $j: N\longrightarrow B^A$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A\times N \arrow[d, "1_A\times j"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A\times B^A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

por lo que el diagrama del lado derecho del siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
1\times A\times B^A \arrow[r, "n\times\Delta_A\times 1_{B^A}"] & N\times A\times A\times B^A \arrow[r, "1_N\times 1_A\times ev"] & N\times A\times B \arrow[d, "u"] \\
A\times B^A \arrow[u, "\langle !_{A\times B^A}, 1_{A\times B^A}\rangle", "\cong"'] & & B \\
B^A\times A \arrow[u, "\langle q_A, q_{B^A}\rangle"] & & N\times A\times B \arrow[u, "u"'] \\
N\times A \arrow[u, "h\times 1_A"] \arrow[d, "\langle p_A, p_N\rangle"'] & & N\times A\times A\times N \arrow[u, "1_N\times 1_A\times f"'] \arrow[uuul, "1_N\times 1_A\times 1_A\times j"] \\
A\times N \arrow[r, "\Delta_A\times 1_N"'] & A\times A\times N \arrow[r, "\langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle"'] & 1\times A\times A\times N \arrow[u, "n\times 1_A\times 1_A\times 1_N"']
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

en efecto, solo obsérvese que

$$
\begin{aligned}
u\circ(1_N\times 1_A\times ev)\circ(1_N\times 1_A\times 1_A\times j) &= u\circ(1_N\times 1_A\times(ev\circ(1_A\times j))) \\
&= u\circ(1_N\times 1_A\times f).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, nótese que el siguiente diagrama también conmuta

$$
\begin{tikzcd}
A\times N \arrow[d, "1_A\times h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A\times B^A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}
$$

esto pues por la naturalidad de θ se sigue que $f=\theta(h)=\theta(1_{B^A}\circ h)=ev\circ(1_a\times h)$, luego entonces $j=h$. De aquí se sigue que el diagrama de la izquiera de (8) también conmuta. En efecto, por un lado

$$
\begin{aligned}
(1_N\times 1_A\times 1_A\times h)\circ(n\times 1_A\times 1_A\times 1_N)\circ\langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle\circ(\Delta_A\times 1_N)\circ\langle p_A, p_N\rangle &= \\
(n\times 1_A\times 1_A\times h)\circ\langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle\circ(\Delta_A\times 1_N)\circ\langle p_A, p_N\rangle &= \\
\langle n\circ !_{A\times A\times N}, 1_A\times 1_A\times h\rangle\circ\langle\Delta_A\circ p_A, p_N\rangle &
\end{aligned}
$$

donde este último morfismo es el único que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_A"] & A\times A \arrow[r, "!_{A\times A}"] & 1 \arrow[r, "n"] & N \\
N\times A \arrow[u, "p_A"] \arrow[r, dashed, "\langle\Delta_A\circ p_A, p_N\rangle"] \arrow[dr, "p_N"'] & A\times A\times N \arrow[u, "j_{A\times A}"] \arrow[ur, "!_{A\times A\times N}"] \arrow[rr, dashed, "\langle n\circ !_{A\times A\times N}, 1_A\times 1_A\times h\rangle"] \arrow[d, "j_N"] \arrow[drr, "1_A\times 1_A\times h"'] & & N\times A\times A\times B^A \arrow[u, "s_N"'] \arrow[d, "s_{A\times A\times B^A}"] \\
& N \arrow[drr, "h"'] & & A\times A\times B^A \arrow[d, "t_{B^A}"'] \\
& & & B^A
\end{tikzcd}$$

y por otro lado

$$\begin{array}{rl}
(n\times\Delta_A\times 1_{B^A})\circ\langle !_{A\times B^A}, 1_{A\times B^A}\rangle\circ\langle q_A, q_{B^A}\rangle\circ(h\times 1_A) & = \\
\langle n\circ !_{A\times B^A}, (\Delta_A\times 1_{B^A})\circ 1_{A\times B^A}\rangle\circ\langle q_A, q_{B^A}\rangle\circ(h\times 1_A) & = \\
\langle n\circ !_{A\times B^A}, \Delta_A\times 1_{B^A}\rangle\circ\langle q_A, q_{B^A}\rangle\circ(h\times 1_A) &
\end{array}$$

donde este último morfismo es el único que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "h"] & B^A \arrow[r, "1_{B^A}"] & B^A \arrow[r, "!_{B^A}"] & 1 \arrow[r, "n"] & N \\
N\times A \arrow[u, "p_N"'] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[r, dashed, "h\times 1_A"] & B^A\times A \arrow[u, "q_{B^A}"] \arrow[d, "q_A"'] \arrow[ur, "q_{B^A}"] \arrow[r, dashed, "\langle q_A, q_{B^A}\rangle"] \arrow[dr, "q_A"'] & A\times B^A \arrow[u, "m_{B^A}"] \arrow[d, "m_A"'] \arrow[ur, "!_{A\times B^A}"] \arrow[rr, dashed, "\langle n\circ !_{A\times B^A}, \Delta_A\times 1_{B^A}\rangle"] \arrow[drr, "\Delta_A\times 1_{B^A}"'] & & N\times A\times A\times B^A \arrow[u, "s_N"'] \arrow[d, "s_{A\times A\times B^A}"'] \\
A \arrow[r, "1_A"'] & A \arrow[r, "1_A"'] & A & & A\times A\times B^A \arrow[d, "t_{B^A}"'] \\
& & & & B^A
\end{tikzcd}$$

pero obsérvese que

$$\begin{array}{rcl}
s_N\circ\langle n\circ !_{A\times A\times N}, 1_A\times 1_A\times h\rangle\circ\langle\Delta_A\circ p_A, p_N\rangle & = & n\circ !_{A\times A\times N}\circ\langle\Delta_A\circ p_A, p_N\rangle \\
& = & n\circ !_{A\times A}\circ j_{A\times A}\circ\langle\Delta_A\circ p_A . p_N\rangle \\
& = & n\circ !_{A\times A}\circ\Delta_A\circ p_A \\
& = & n\circ !_{B^A}\circ 1_{B^A}\circ h\circ p_N
\end{array}$$

donde la última igualdad se da, pues ambos morfismos van de $N \times A$ en 1. Por otro lado, nótese que primero se tiene

$$\begin{aligned} t_{B^A} \circ s_{A\times A\times B^A} \circ \langle n\circ !_{A\times A\times N}, 1_A \times 1_A \times h\rangle \circ \langle \Delta_A \circ p_A, p_N\rangle &= \\ t_{B^A} \circ (1_A \times 1_A \times h) \circ \langle \Delta_A \circ p_A, p_N\rangle &= \\ h \circ j_N \circ \langle \Delta_A \circ p_A, p_N\rangle &= \\ h \circ p_N \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} t_{B^A} \circ s_{A\times A\times B^A} \circ \langle n\circ !_{A\times B^A}, \Delta_A \times 1_{B^A}\rangle \circ \langle q_A, q_{B^A}\rangle \circ (h \times 1_A) &= \\ t_{B^A} \circ (s_A \times 1_{B^A}) \circ \langle q_A, q_{B^A}\rangle \circ (h \times 1_A) &= \\ 1_{B^A} \circ m_{B^A} \circ \langle q_A, q_{B^A}\rangle \circ (h \times 1_A) & \\ m_{B^A} \circ \langle q_A, q_{B^A}\rangle \circ (h \times 1_A) &= \\ q_{B^A} \circ (h \times 1_A) &= \\ h \circ p_N \end{aligned}$$

luego entonces $\langle n\circ !_{A\times A\times N}, 1_A \times 1_A \times h\rangle = \langle n\circ !_{A\times B^A}, \Delta_A \times 1_{B^A}\rangle \circ \langle q_A, q_{B^A}\rangle \circ (h \times 1_A)$, y así, el diagrama del lado izquierdo de (8) conmuta, por lo que el diagrama completo (8) conmuta. En conclusión, se tiene que el diagrama (7) conmuta. Para terminar, solo basta notar que de la conmutatividad de (7) se sigue que

$$\begin{aligned} f \circ \langle s \circ n, a\rangle &= \\ f \circ (s \times 1_A) \circ \langle n, a\rangle &= \\ u \circ (1_N \times 1_A \times f) \circ (n \times 1_A \times 1_A \times 1_N) & \\ \circ \langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle \circ (\Delta_A \times 1_N) \circ \langle p_A, p_N\rangle \circ \langle n, a\rangle &= \\ u \circ (1_N \times 1_A \times f) \circ (n \times 1_A \times 1_A \times 1_N) & \\ \circ \langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle \circ (\Delta_A \times 1_N) \circ \langle a, n\rangle &= \\ u \circ (1_N \times 1_A \times f) \circ (n \times 1_A \times 1_A \times 1_N) \circ \langle !_{A\times A\times N}, 1_{A\times A\times N}\rangle \circ \langle a, a, n\rangle &= \\ u \circ (1_N \times 1_A \times f) \circ (n \times 1_A \times 1_A \times 1_N) \circ \langle 1, a, a, n\rangle &= \\ u \circ (1_N \times 1_A \times f) \circ \langle n, a, a, n\rangle &= \\ u \circ \langle n, a, f \circ \langle n, a\rangle\rangle \end{aligned}$$

■

5. Objeto separador y coseparador

En esta sección se definirá uno de los conceptos más importantes de este trabajo, a saber, el concepto de separador. El que el objeto final 1 de una categoría de Lawvere sea separador permitirá probar igualdad entre morfismos de una manera muy parecida a como se prueba igualdad entre funciones en la teoría de conjuntos clásica. Se hará ver que el objeto final de la categoría de conjuntos es un objeto separador pero que no todo topos de Lawvere cumple que su objeto final sea separador, por lo que este concepto se introducirá como un axioma. Por último, se enuncia el concepto de objeto coseparador y sus propiedades se dejarán para la siguiente sección, pues en esta sección no se tendrán las herramientas necesarias para dicho objetivo.

DEFINICIÓN 5.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Se dirá que el objeto final 1 es un* ***separador*** *si para cualesquiera dos morfismos $f, g : A \longrightarrow B$ sucede que*

$$\textit{Si } f \neq g \textit{ entonces existe } a \in A \textit{ tal que } f \circ a \neq g \circ a$$

o equivalentemente

$$\textit{Si para cada } a \in A \textit{ se tiene que } f \circ a = g \circ a \textit{ entonces } f = g$$

AXIOMA 1. *Para toda categoría de Lawvere $\mathcal{C}$, su objeto final es separador.*

Naturalmente, el objeto final de la categoría de conjuntos será separador tal como se muestra a continuación.

PROPOSICIÓN 5.2. *El objeto final de la categoría* ***Con*** *es un separador.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g : A \longrightarrow B$ dos funciones tales que $f \neq g$, por lo que existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$ es decir $f \circ a \neq g \circ a$. ■

Naturalmente, también surge la pregunta de si toda categoría de Lawvere cumple que su objeto final es separador. La respuesta a esta pregunta no es afirmativa tal como se muestra a continuación.

OBSERVACIÓN 5.3. *Obsérvese que no toda categoría de Lawvere cumple que su objeto final sea separador.*

1. *Sea G un grupo y considérese a la categoría* ***G-Con****. El objeto final de esta categoría es el conjunto $\{*\}$ junto con la acción trivial*

$$\phi : G \times \{*\} \longrightarrow \{*\}$$

dada por

$$\phi(g, *) := *$$

Ahora bien, considérese al G-conjunto G dado por la acción por traslación

$$t : G \times G \longrightarrow G$$

es decir por $t(g, h) := gh$ y considérese $A = B = G$. Defínanse los morfismos de G-conjuntos

$$f : A \longrightarrow B$$

dado por

$$f(g) := g$$

y para un $q \neq e$ con $q \in G$ defínase

$$j_q : A \longrightarrow B$$

dada por

$$j_q(g) := gq$$

Si se supone que esta categoría cumple que su objeto final es separador y como $f \neq j_q$ *entonces existe* $g \in G$ *con* $g \neq e$ *tal que* $f \circ g \neq j_q \circ g$*. Supóngase que* $\alpha : \{*\} \longrightarrow A$ *es tal que* $\alpha(*) := g$*, entonces si se toma* $s \in G$ *tal que* $s \neq g$ *entonces*

$$g = \alpha(*) = \alpha(\phi(s,*)) = t(s, \alpha(*)) = t(s, g) = sg$$

Por lo que $s = e$*, es decir* $G = \{g, e\}$ *pero nótese que*

$$g = \alpha(*) = \alpha(\phi(g,*)) = t(g, \alpha(*)) = t(g, g) = gg$$

es decir $g = e$ *lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la categoría* ***G-Con*** *no cumple que su objeto final sea separador.*

2. *Considérese el espacio* $X = \{x\}$ *con su única topología posible y el conjunto* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *equipado con la topología discreta. Sea* $f : E \longrightarrow E$ *la única función (continua) posible. Considérese la gavilla de secciones* $(\Gamma(U), \sigma_V^U)$*. Por un lado, sea* $\phi : (\Gamma(U), \sigma_V^U) \longrightarrow (\Gamma(U), \sigma_V^U)$ *de tal manera que* $\phi_\emptyset : \{*_1\} \longrightarrow \{*_2\}$ *es la única función posible y* $\phi_{\{x\}} : E \longrightarrow E$ *dada por* $\phi_{\{x\}}(e_1) = e_1$*,* $\phi_{\{x\}}(e_2) = e_3$ *y* $\phi_{\{x\}}(e_3) = e_2$*. No es difícil verificar que* ϕ *es un morfismo de gavillas. Por otro lado considérese* $\psi : (\Gamma(U), \sigma_V^U) \longrightarrow (\Gamma(U), \sigma_V^U)$ *donde* $\psi_\emptyset : \{*_1\} \longrightarrow \{*_2\}$ *es la única función posible y* $\psi_{\{x\}} : E \longrightarrow E$ *dada por* $\psi_{\{x\}}(e_1) = e_1$*,* $\psi_{\{x\}}(e_2) = e_2$ *y* $\psi_{\{x\}}(e_3) = e_3$*, tampoco es difícil verificar que* ψ *es un morfismo de gavillas. Por último, considérese* $\varphi : (\{*\}, \rho_V^U) \longrightarrow (\Gamma(U), \sigma_V^U)$ *tal que* $\varphi_\emptyset : \{*\} \longrightarrow \{*_1\}$ *es la única función posible y* $\varphi_{\{x\}} : \{*\} \longrightarrow E$ *dada por* $\varphi_{\{x\}}(*) = e_1$*, tampoco es difícil verificar que* φ *es un morfismo de gavillas. Se afirma que* $\phi \circ \varphi = \psi \circ \varphi$*. Claramente* $\phi_\emptyset \circ \varphi_\emptyset = \psi_\emptyset \circ \varphi_\emptyset$ *y por otro lado*

$$\begin{aligned}
(\phi_{\{x\}} \circ \varphi_{\{x\}})(*) &= \phi_{\{x\}}(\varphi_{\{x\}}(*)) \\
&= \phi_{\{x\}}(e_1) \\
&= e_1 \\
&= \psi_{\{x\}}(e_1) \\
&= \psi_{\{x\}}(\varphi_{\{x\}}(*)) \\
&= (\psi_{\{x\}} \circ \varphi_{\{x\}})(*)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \circ \varphi = \psi \circ \varphi$ *y sin embargo es claro que* $\phi \neq \psi$*, por ello el objeto final de la categoría* $\mathcal{GAV}_X$ *no es un objeto separador.*

Así como se tiene el concepto de separador, puede enunciarse de manera dual el concepto de coseparador como sigue:

Definición 5.4. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y D un objeto de dicha categoría. Se dirá que D es un* ***coseparador*** *si para cualesquiera morfismos $f, g : A \longrightarrow B$, de tal manera que $f \neq g$, existe un morfismo $h : B \longrightarrow D$ tal que $h \circ f \neq h \circ g$.*

Resultará ser que toda categoría de Lawvere con algunas propiedades extra poseerá un objeto coseparador, pero hasta el momento no se tienen las herramientas para probarlo, por lo que este resultado se dejará para la siguiente sección.

6. El axioma de elección

Uno de los axiomas más conocidos, aunque también más controvertidos, de la teoría de conjuntos es el axioma de elección. En esta sección se dará la versión categórica del axioma de elección y se probará aquel resultado que se mencionó en la sección pasada, a saber que las categorías de Lawvere bajo ciertas condiciones cumplen tener un objeto coseparador. También se harán ver algunas propiedades con respecto a los funtores y a los morfismos. Por último, se probará que no toda categoría de Lawvere cumple el axioma de elección.

Axioma 2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, A un objeto con elementos y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Se dirá que $\mathcal{C}$ cumple el* ***axioma de elección*** *si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ de tal manera que*

$$f \circ g \circ f = f$$

Si dada una categoría de Lawvere $\mathcal{C}$ se define $2 := 1 + 1$ entonces se obtiene el siguiente resultado que se había dejado en espera en la sección anterior.

Proposición 6.1. *Sea C una categoría de Lawvere que cumple el Axioma 1. y el Axioma 2. entonces 2 es un coseparador.*

Demostración. Supóngase que existen dos morfismos $f, g : A \longrightarrow B$ tales que para cualquier morfismo $u : B \longrightarrow 2$ se tiene que $u \circ f = u \circ g$. Para probar que $f = g$, como 1 es separador basta tomar $a \in A$ y ver que $f \circ a = g \circ a$. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $h : 2 \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "f \circ a"] & & \\
& 2 \arrow[r, dashed, "h"] & B \\
1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "g \circ a"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como C cumple el axioma de elección, existe $u : B \longrightarrow 2$ tal que

$$h \circ u \circ h = h$$

Luego, por hipótesis se tiene que $u \circ f = u \circ g$ y por tanto $u \circ (f \circ a) = u \circ (g \circ a)$, luego obsérvese que

$$\begin{aligned} u \circ (f \circ a) = u \circ (g \circ a) &\Rightarrow h \circ u \circ f \circ a = h \circ u \circ g \circ a \\ &\Rightarrow h \circ u \circ h \circ i_0 = h \circ u \circ h \circ i_1 \\ &\Rightarrow h \circ i_0 = h \circ i_1 \\ &\Rightarrow f \circ a = g \circ a \end{aligned}$$

Como el 1 es separador, entonces $f = g$, por lo que 2 es un coseparador. ■

Un resultado muy interesante que se deduce del axioma de elección es el siguiente.

PROPOSICIÓN 6.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría, A un objeto con elementos de $\mathcal{C}$ y $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo que escinde.*

DEMOSTRACIÓN. Como el objeto A posee elementos, por el axioma de elección se tiene la existencia de un morfismo $h : B \longrightarrow A$ de tal manera que $f \circ h \circ f = f$, pero como f es un monomorfismo entonces $h \circ f = id_A$ por lo que f es un monomorfismo que escinde ■

Una consecuencia interesante del anterior es la siguiente proposición, que de hecho será importante para lo que sigue.

PROPOSICIÓN 6.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría que cumple el Axioma 2 y $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un funtor. Entonces el funtor T preserva monomorfismos con dominio con elementos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f un monomorfismo de $\mathcal{C}$ tal que su dominio posee elementos, se requiere que $T(f)$ sea un monomorfismo en $\mathcal{C}'$. Para esto, sean g_1, g_2 morfismos en $\mathcal{C}'$ tales que $T(f) \circ g_1 = T(f) \circ g_2$. Como $\mathcal{C}$ cumple el axioma de elección, existe un morfismo h en C tal que $f \circ h \circ f = f$ pero como f es un monomorfismo entonces $h \circ f = id$ por lo que si $T(f) \circ g_1 = T(f) \circ g_2$ entonces $T(h) \circ T(f) \circ g_1 = T(h) \circ T(f) \circ g_2$ es decir $g_1 = g_2$. Así, se concluye que $T(f)$ es un monomorfismo. ■

Otra propiedad interesante que se deduce del axioma de elección tiene que ver esta vez con los epimorfismos.

PROPOSICIÓN 6.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que cumple el Axioma 2, entonces todo epimorfismo con dominio con elementos es un epimorfismo que escinde.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f un epimorfismo tal que su dominio posee elementos, por hipótesis existe un morfismo g de tal manera que $f \circ g \circ f = f$ y como f es un epimorfismo se tiene que $f \circ g = id$, es decir, f tiene un inversa derecha por lo que f es un epimorfismo que escinde. ■

Naturalmente surge la pregunta de si cualquier categoría de Lawvere cumple el axioma de elección. El siguiente ejemplo muestra que la respuesta a esta pregunta es negativa, de aquí viene la razón de que el axioma de elección se introduzca como axioma y no como una definición.

Observación 6.5. *No toda categoría de Lawvere cumple el axioma de elección. En efecto, considérese la categoría* ***COPO*** *junto con los conjuntos parcialmente ordenados* $(X, \leq)$ *donde para cualesquiera* $x_1, x_2 \in X$ *se tiene que* $x_1 \leq x_2$ *si y sólo si* $x_1 = x_2$*, y cualquier otro conjunto parcialmente ordenado* $(X, \preceq)$ *de tal manera que* $\leq \subsetneq \preceq$*. Considérese el morfismo*

$$f : (X, \leq) \longrightarrow (X, \preceq)$$

dado por

$$f(x) := x$$

Supóngase que $X \neq \emptyset$ *y que existe un morfismo*

$$g : (X, \preceq) \longrightarrow (X, \leq)$$

de tal manera que

$$f \circ g \circ f = f$$

Sean $z, w \in (X, \preceq)$ *de tales que* $z \preceq w$*. Como* f *es biyectiva, existen* $x, y \in (X, \leq)$ *donde* $f(x) = z$ *y* $f(y) = w$*, por lo que* $x \leq y$*, de donde* $x = y$*, por lo tanto*

$$f \circ g \circ f(x) = f \circ g \circ f(y)$$

y por hipótesis, entonces $f(x) = f(y)$*, es decir* $z = w$*, lo cual contradice el hecho de que* $\leq \subsetneq \preceq$*. Por lo tanto* ***COPO*** *no cumple el axioma de elección.*

7. Morfismos inyectivos y suprayectivos

En este sección se introducirán los conceptos de morfismo inyectivo y suprayectivo. Se verá que bajo ciertas condiciones, en las categorías de Lawvere los morfismos inyectivos y suprayectivos son los mismo que los monomorfismos y epimorfismos, respectivamente. También se estudiarán estos conceptos con respecto a los funtores entre categorías de Lawvere y por último, bajo ciertas condiciones se dará una caracterización de los isomorfismos en las categorías de Lawvere.

El siguiente concepto de morfismo inyectivo abstrae el concepto de función inyectiva de la teoría de conjuntos usual.

Definición 7.1. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría de Lawvere y* $f : A \longrightarrow B$ *un morfismo en dicha categoría, se dirá que* f *es un morfismo* ***inyectivo*** *si para cualesquiera* $a_1, a_2 \in A$ *se tiene que*

$$\text{Si } f \circ a_1 = f \circ a_2 \text{ entonces } a_1 = a_2$$

Obsérvese que el siguiente resultado muestra que para ciertas categorías de Lawvere, ahora se tiene otra manera de probar que un morfismo es un monomorfismo.

Proposición 7.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere que cumple al Axioma 1. y f un morfismo. Entonces f es un morfismo inyectivo si y sólo si f es un monomorfismo.*

Demostración. Si f es un monomorfismo entonces es claro que se cumple que f es inyectivo. Supóngase ahora que $f : A \longrightarrow B$ es inyectivo y sean $g, h : D \longrightarrow A$ dos morfismos cualesquiera tales que $f \circ g = f \circ h$. Dado cualquier $d \in D$ se tiene que

$$(f \circ g) \circ d = (f \circ h) \circ d$$

es decir

$$f \circ (g \circ d) = f \circ (h \circ d)$$

y como f es inyectivo entonces

$$h \circ d = g \circ d$$

pero como 1 es separador entonces

$$g = h$$

■

El siguiente concepto abstrae la noción de función suprayectiva en la teoría de conjuntos usual.

Definición 7.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Se dirá que f es un morfismo* ***suprayectivo*** *si para cada $y \in B$ existe un $x \in A$ de tal manera que*

$$f \circ x = y$$

De manera análoga a los morfismos inyectivos, bajo ciertas hipótesis existe otra manera de probar que un morfismo es un epimorfismo en las categorías de Lawvere tal como se muestra a continuación.

Proposición 7.4. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere que cumple el Axioma 1. y 2. y f un morfismo con dominio con elementos. Entonces f es un epimorfismo si y sólo si f es un morfismo suprayectivo.*

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo y $y \in B$ un elemento cualquiera. Por la Proposición 6.4 existe $g : B \longrightarrow A$ de tal manera que $f \circ g = id_B$. Defínase $x := g \circ y$, por ello
$$(f \circ g) \circ y = y$$
es decir
$$f \circ x = y$$
Ahora bien, sean $f : A \longrightarrow B$ un morfismo suprayectivo y $g, h : B \longrightarrow D$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Se verificará que $g = h$. Sea $y \in B$ un elemento, por hipótesis, existe $x \in A$ de tal manera que
$$f \circ x = y$$
luego
$$g \circ f \circ x = g \circ y$$
y también
$$h \circ f \circ x = h \circ y$$
y como por hipótesis se tiene que
$$g \circ f = h \circ f$$
entonces
$$h \circ y = g \circ y$$
pero 1 es separador por lo que $g = h$. ■

De manera análoga a las propiedades entre los monomorfismos, funtores y el axioma de elección, algo muy parecido pasa con los epimorfismos, los funtores y el axioma de elección.

Proposición 7.5. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías que cumplen el Axioma 1. y el 2. Si $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor y f es un epimorfismo con dominio con elementos en $\mathcal{C}$ entonces $T(f)$ es un epimorfismo en $\mathcal{C}'$.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo, para probar que $T(f)$ es un epimorfismo, basta ver que es un morfismo suprayectivo por la Proposición 7.4. Para esto, sea $y \in T(B)$ cualquiera, como $\mathcal{C}$ cumple el axioma de elección, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = id_B$ por lo que $T(f) \circ T(g) = id_{T(B)}$ entonces $T(g) \circ y \in A$ y entonces
$$T(f) \circ (T(g) \circ y) = id_{T(B)}(y) = y$$
por lo tanto $T(f)$ es un morfismo suprayectivo y en conclusión $T(f)$ es un epimorfismo. ■

Una última consecuencia del axioma de elección es la siguiente.

Proposición 7.6. *Sean C una categoría de Lawvere que cumple el Axioma 2 y f un morfismo de dicha categoría con dominio con elementos. Entonces f es un isomorfismo si y sólo si f es un monomorfismo y un epimorfismo.*

Demostración. Si $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo es bien sabido que en cualquier categoría siempre se cumple que f es un epimorfismo y un monomorfismo. Por otro lado, supóngase que f es un monomorfismo y también un epimorfismo. Por el Axioma 2. existe $g : B \longrightarrow A$ de tal manera que

$$f \circ g \circ f = f$$

Como f es un epimorfismo entonces $f \circ g = id_B$ y como f es un monomorfismo entonces $g \circ f = id_A$, por lo tanto f es un isomorfismo. ■

8. Subconjuntos

En esta sección se enunciará el concepto de subconjunto de un objeto en una categoría de Lawvere y gracias a ello también se podrá hablar de los elementos de los subconjuntos de los objetos de las categorías de Lawvere. Se defínirá la noción de contención entre subconjuntos y se verá que bajo ciertas condiciones los subconjuntos de un objeto en las categorías de Lawvere cumplen propiedades muy parecidas a la de los subconjuntos en la teoría de conjuntos clásica.

Proposición 8.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere que cumple el Axioma 1. y X un objeto. Se dirá que $a : A \longrightarrow X$ es un **subconjunto** de X si a es un monomorfismo.*

No sólo es posible hablar de los elementos de un objeto de una categoría de Lawvere, sino que también es posible hacerlo de los subconjuntos de un objeto, tal como se muestra a continuación.

Definición 8.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere, X un objeto de dicha categoría y $x \in X$. Sea $a : A \longrightarrow X$ un subconjunto de X entonces se dirá que x es **elemento** del subconjunto a si existe un morfismo*

$$\overline{x} : 1 \longrightarrow A$$

de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "x"] & \\ A \arrow[rr, "a"'] & & X \end{tikzcd}$$

Tal como pasa en la teoría de conjuntos usual, existe una noción de contención entre los subconjuntos de un conjunto. Lo mismo sucede en las categorías de Lawvere como se muestra a continuación.

Definición 8.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y X un objeto de dicha categoría. Sean a, b subconjuntos del objeto X entonces se dirá que a es un* ***subconjunto*** *de b si existe un morfismo $h : A \longrightarrow B$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "a"'] & & B \arrow[dl, "b"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Esta situación se denotará por $a \subseteq b$.

El siguiente resultado muestra que este concepto de subconjunto y esta especie de contención recoge el concepto usual de la teoría de conjuntos.

Proposición 8.4. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere que cumple los Axiomas 1 y 2, y X un objeto de dicha categoría. Sean a, b subconjuntos de dicho objeto de tal manera que el dominio de b posee elementos, entonces $a \subseteq b$ si y sólo si para cada $x \in A$, si $x \in a$ entonces $x \in b$.*

Demostración. Supóngase que $a \subseteq b$ y sea $x \in X$ cualquiera tal que $x \in a$, entonces existe $\overline{x}$, de tal manera que $a \circ \overline{x} = x$. Como $a \subseteq b$, existe un morfismo $h : A \longrightarrow B$ de tal manera que $b \circ h = a$. Por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "x"] & \\ A \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "h"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

entonces $x \in b$. Por otro lado, para probar que $a \subseteq b$ nótese que por la Proposición 6.2 existe $g : X \longrightarrow B$ de tal manera que

$$g \circ b = 1_B$$

Defínase

$$h := g \circ a : A \longrightarrow B$$

Por último se verá que $b \circ h = a$. Sea $\overline{x} : 1 \longrightarrow A$ y defínase $x := a \circ \overline{x}$, por lo que por hipótesis, $x \in b$, así, existe y de tal manera que $x = b \circ y$. Obsérvese que se tiene

$$\begin{aligned}
(b \circ h) \circ \overline{x} &= b \circ (h \circ \overline{x}) \\
&= b \circ (g \circ a \circ \overline{x}) \\
&= b \circ (g \circ x) \\
&= b \circ (g \circ b \circ y) \\
&= b \circ y \\
&= x \\
&= a \circ \overline{x}
\end{aligned}$$

y como 1 es separador entonces $b \circ h = a$. Así, se concluye que $a \subseteq b$. ■

9. Topos de Lawvere

A lo largo de esta sección se introducirán los axiomas necesarios para la definición de topos de Lawvere y se probarán algunos resultados básicos como lo son la existencia de funciones características para subconjuntos de objetos de un topos de Lawvere, la factorización de un morfismo a través de su imagen, la existencia de uniones y la existencia de complementos para subconjuntos de un objeto en un topos de Lawvere.

Axioma 3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere. Entonces cualquier otro objeto que no sea el objeto inicial* 0 *posee elementos.*

Axioma 4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere, entonces todo elemento de un coproducto es miembro de alguna de las inyecciones.*

Axioma 5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere, entonces dicha categoría posee un objeto con más de un elemento.*

Antes de continuar es necesario observar lo siguiente

Observación 9.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere, A y B dos objetos de dicha categoría e i_A e i_B las inyecciones de A y B en $A+B$, respectivamente, entonces i_A e i_B son monomorfismos. En efecto, sean $g, h : C \longrightarrow A$ morfismos cualesquiera tales que $g \neq h$. Como* 1 *es un separador de $\mathcal{C}$ existe $x : 1 \longrightarrow C$ tal que $g \circ x \neq h \circ x$, luego considérese el morfismo $r := g \circ x \circ ! : B \longrightarrow A$ y por la propiedad universal del coproducto existe un único morfismo ϕ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "1_A"] & & \\
& A+B \arrow[r, dashed, "\phi"] & A \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\phi \circ i_A = 1_A$*, entonces es claro que* $i_A \circ g \neq i_A \circ h$ *pues si* $i_A \circ g = i_A \circ h$ *entonces* $\phi \circ i_A \circ g = \phi \circ i_A \circ h$ *es decir* $g = h$*. Así,* i_A *es un monomorfismo, de manera completamente análoga se prueba que* i_B *es también un monomorfismo.*

Definición 9.2. *Un* ***topos de Lawvere*** *es una categoría de Lawvere* $\mathcal{C}$ *que cumple los Axiomas 1. al 5.*

Algunas propiedades básicas de esta nueva categoría son las siguientes.

Proposición 9.3. *Sea* $\mathcal{C}$ *un topos de Lawvere, entonces el objeto inicial* 0 *no posee elementos.*

Demostración. Supóngase que existe un elemento $x : 1 \longrightarrow 0$, por la Proposición 2.2.2 se tiene que $1 \cong 0$. Dados A cualquier otro objeto y $x, y \in A$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr, "x"] & \\
0 \arrow[ur, "\cong", "\phi"'] \arrow[dr, "\phi", "\cong"'] & & A \\
& 1 \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $x \circ \phi = y \circ \phi$ por lo tanto $x = y$, es decir, todo objeto de $\mathcal{C}$ posee un único elemento, lo que contradice el Axioma 5. ■

Proposición 9.4. *Sea* $\mathcal{C}$ *un topos de Lawvere. Considérense a los dos monomorfismos* $i_0, i_1 : 1 \longrightarrow 2$*, entonces* $i_0 \neq i_1$ *y estos son los únicos elementos de* 2.

Demostración. Supóngase para generar una contradicción, que $i_0 = i_1$. Gracias al Axioma 5. tómese S un objeto con dos elementos distintos x, y. Entonces por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $t : 2 \longrightarrow S$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "x"] & & \\
& 2 \arrow[r, dashed, "t"] & S \\
1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $x = t \circ i_0 = t \circ i_1 = y$, lo cual contradice el hecho de que $x \neq y$, por lo tanto $i_0 \neq i_1$. ■

El Axioma 4. afirma que cada que se tome un elemento de un coproducto entonces es elemento de alguna de las inyecciones. Una pregunta natural es si dicho elemento puede pertenecer a ambas inyecciones. La intuición diría que no, y en efecto esta intuición es correcta, tal como se muestra a continuación.

Proposición 9.5. *Sea $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y sean A y B dos objetos de dicha categoría. Entonces las inyecciones*

$$i_A : A \longrightarrow A+B \quad i_B : B \longrightarrow A+B$$

no tienen elementos en común.

Demostración. Supóngase para generar una contradicción, que existen

$$i_A \circ a : 1 \longrightarrow A+B \quad i_B \circ b : 1 \longrightarrow A+B$$

dos elementos de i_A e i_B, respectivamente donde $a : 1 \longrightarrow A$ y $b : 1 \longrightarrow B$ de tal manera que $i_A \circ a = i_B \circ b$. Si se consideran los morfismos $A \xrightarrow{!} 1$ y $B \xrightarrow{!} 1$, entonces existe un único morfismo

$$A+B \longrightarrow 2$$

de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[dr, "i_A"] & & 1 \arrow[dr, "i_0"] & \\
1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & & A+B \arrow[rr, dashed] & & 2 \\
 & B \arrow[r] \arrow[ur, "i_B"] & & 1 \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

pero obsérvese que

$$1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{!} 1$$

es el morfismo identidad id_1 análogamente

$$1 \xrightarrow{b} B \xrightarrow{!} 1$$

por lo que $i_0 = i_1$ lo que contradice la Proposición 9.4. Por lo tanto los monomorfismos i_A e i_B no poseen elementos en común. ∎

Un concepto fundamental dentro de la teoría de conjuntos usual es el de función característica de un subconjunto de un conjunto dado. A continuación se mostrará que para cualquier objeto, cada uno de sus subconjuntos posee una especie de función característica.

Definición 9.6. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y X un objeto. Sea $a : A \longrightarrow X$ un subconjunto de dicho objeto. Un morfismo*

$$\chi_a : X \longrightarrow 2$$

*es una **función característica** del subconjunto a si para cada $x \in X$ se tiene que $x \in a$ si y sólo si $\chi_a \circ x = i_1$.*

Proposición 9.7. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y X un objeto. Entonces para cualquier morfismo $f : X \longrightarrow 2$, existe un subconjunto de X de tal manera que f es una función característica de dicho subconjunto.*

Demostración. Considérese el producto fibrado de $f : X \longrightarrow 2$ a través del morfismo $i_1 : 1 \longrightarrow 2$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & 1 \arrow[d, "i_1"] \\ X \arrow[r, "f"'] & 2 \end{tikzcd}$$

como i_1 es un mono entonces p también es un mono, por lo que es a su vez un subconjunto de X. Se afirma que f es función característica del subconjunto p de X. En efecto, por un lado si $x \in p$ entonces existe $\overline{x}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[dr, "x"'] & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & 1 \arrow[d, "i_1"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & 2 \end{tikzcd}$$

por lo que

$$\begin{aligned} f \circ x &= f \circ (p \circ \overline{x}) \\ &= (f \circ p) \circ \overline{x} \\ &= (i_1 \circ q) \circ \overline{x} \\ &= i_1 \circ (q \circ \overline{x}) \\ &= i_1 \circ id_1 \\ &= i_1 \end{aligned}$$

Por otro lado, supóngase que $f \circ x = i_1$ pero por la propiedad universal del producto fibrado existe una única $\overline{x} : 1 \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "\overline{x}"] \arrow[drr, bend left, "id_1"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & 1 \arrow[d, "i_1"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & 2
\end{tikzcd}$$

por lo que $x \in p$. Así f es función característica del subconjunto p de X. ■

En teoría de conjuntos es bien sabido que cualquier función puede descomponerse como la composición de una función suprayectiva, una función biyectiva y por último una función inyectiva. El siguiente resultado muestra que en los topos de Lawvere sucede algo muy parecido. Este resultado será fundamental para lo que sigue.

Proposición 9.8. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de esta categoría. Entonces existe un morfismo $h : I \longrightarrow I^*$ que hace conmutar al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r, "k"] & A \times A \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & B \arrow[r, shift left, "i_0"] \arrow[r, shift right, "i_1"'] & B + B \arrow[r, "k^*"] & R_f^* \\
& & I \arrow[r, dashed, "h"'] & I^* \arrow[u, "q^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde k es el igualador de $f \circ p_0$ y $f \circ p_1$, q es el coigualador de $p_0 \circ k$ y $p_1 \circ k$, k^* es el coigualador de $i_1 \circ f$, $i_0 \circ f$, y por último q^* es el igualador de $k^* \circ i_1$ y $k^* \circ i_0$. Más aún, h es un isomorfismo.

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
f \circ (p_0 \circ k) &= (f \circ p_0) \circ k \\
&= (f \circ p_1) \circ k \quad \text{(pues } k \text{ es el igualador de } f \circ p_0 \text{ y } f \circ p_1\text{)} \\
&= f \circ (p_1 \circ k).
\end{aligned}$$

Como q es el coigualador de $p_0 \circ k$ y $p_1 \circ k$, entonces existe un único morfismo l que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r, shift left, "p_0 \circ k"] \arrow[r, shift right, "p_1 \circ k"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & I \arrow[d, dashed, "l"] \\
& & B.
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Por otro lado, obsérvese que

$$\begin{aligned}(k^*\circ i_0)\circ l\circ q &= k^*\circ i_0\circ f && (9)\\ &= k^*\circ j_1\circ f && (\text{pues } k^* \text{ es el igualador de } i_0\circ f \text{ e } i_1\circ f)\\ &= (k^*\circ i_1)\circ l\circ q\end{aligned}$$

pero como q es un coigualador, en particular es un epimorfismo, por lo que $(k^*\circ i_0)\circ l = (k^*\circ i_1)\circ l$. Puesto que q^* es el igualador de $k^*\circ i_0$ y $k^*\circ i_1$ entonces existe un único morfismo h que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I^* \arrow[r, "q^*"] & B \arrow[r, shift left, "k^*\circ i_0"] \arrow[r, shift right, "k^*\circ i_1"'] & R_f \\ I \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "l"'] & & \end{tikzcd}$$

además, nótese que $q^*\circ h\circ q = l\circ q = f$. Basta demostar que h es un isomorfismo. Para probar este hecho, se probará que $q^*\circ h$ es un monomorfismo, y para esto se tienen dos casos:

- Supóngase que $A = 0$, entonces se afirma que el morfismo $!_0 : 0 \longrightarrow 0\times 0$ es el igualador de $0\times 0 \overset{!_B\circ p_0}{\underset{!_B\circ p_1}{\rightrightarrows}} 0$. Por un lado, claramente $(!_B\circ p_0)\circ !_{0\times 0} = (!_B\circ p_1)\circ !_{0\times 0}$ pues 0 es objeto inicial. Por otro lado, supóngase la existencia de $g : A \longrightarrow 0\times 0$ tal que $(!_B\circ p_0)\circ g = (!_B\circ p_1)\circ g$. Dado B cualquier objeto de C, por exponenciación se tiene que $Hom(0, B^0) \cong Hom(0\times 0, B)$ pero $Hom(0, B^0)$ posee una única flecha, por lo que para cada B existe una única flecha $0\times 0 \longrightarrow B$, es decir que 0×0 es objeto inicial de C. Así, si se considera el morfismo $p_0\circ f$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} !_{0\times 0}\circ p_0\circ g &= 1_{0\times 0}\circ g && (\text{pues } 0\times 0 \text{ es objeto inicial})\\ &= f.\end{aligned}$$

  Así, $!_0$ es el igualador de los morfismos $!_B\circ p_0$ y $!_B\circ p_1$. Por otro lado, nótese que $p_0\circ !_0 = p_1\circ !_0 = 1_0$ pues 0 es objeto inicial, no es difícil verificar 1_0 es el coigualador de estos dos morfismos, por lo que $q^*\circ h : 0 \longrightarrow B$ es un morfismo con codominio el objeto 0, esto condiciona a que este morfismo sea un monomorfismo.
- Supóngase en este caso que $A \neq 0$. Por la Proposición 7.2 basta verificar que $q^*\circ h$ es un morfismo inyectivo. Para esto, sean $u, u' : 1 \longrightarrow I$ tales que $(q^*\circ h)\circ u = (q^*\circ h)\circ u'$. Como $A\neq 0$ entonces por la Proposición 6.4 existe

un morfismo $t : I \longrightarrow A$ tal que $q \circ t = 1_I$. Nótese que por un lado

$$\begin{aligned} f \circ t &= (q^* \circ h \circ q) \circ t \\ &= q^* \circ h \circ 1_I \\ &= q^* \circ h \end{aligned} \tag{10}$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned} f \circ p_0 \circ \langle t \circ u, t \circ u' \rangle &= f \circ t \circ u \\ &= q^* \circ h \circ u & (10) \\ &= q^* \circ h \circ u' \\ &= f \circ t \circ u' \\ &= f \circ p_1 \circ \langle t \circ u, t \circ u' \rangle \end{aligned}$$

Como k es el igualador de $f \circ p_0$ y $f \circ p_1$ existe un único morfismo $w : 1 \longrightarrow R_f$ tal que $k \circ w = \langle t \circ u, t \circ u' \rangle$. Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} u &= 1_I \circ u \\ &= q \circ t \circ u \\ &= q \circ p_0 \circ \langle t \circ u, t \circ u' \rangle \\ &= q \circ p_0 \circ k \circ w \\ &= q \circ p_1 \circ k \circ w \\ &= q \circ p_1 \circ \langle t \circ u, t \circ u' \rangle \\ &= q \circ t \circ u' \\ &= 1_I \circ u' \\ &= u' \end{aligned}$$

Así, $q^* \circ h$ es un morfismo inyectivo, por lo que es un monomorfismo. Así mismo, esto prueba que el morfismo h es un monomorfismo. De manera dual, se prueba que $h \circ q$ es un epimorfismo, lo que probaría que h es un epimorfismo. Luego, por la Proposición 7.6 h es un isomorfismo.

■

Observación 9.9. *A la ecuación*

$$f = q^* \circ h \circ q$$

*donde q es un monomorfismo, h es un isomorfismo y q^* un epimorfismo como en la Proposición 9.7 se le llamará la **factorización** de f bajo su imagen.*

En este momento es necesario introducir un nuevo axioma.

Axioma 6. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Lawvere y X un objeto de dicha categoría. Entonces para cualquier subconjunto $a : A \longrightarrow X$ el siguiente diagrama es un pullback*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_a"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

donde χ_a es la función característica del subconjunto a.

Observación 9.10. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Considérese el pushout de f consigo mismo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "t"] \\ B \arrow[r, "s"'] & R. \end{tikzcd}$$

Denótese por $q^* : I^* \longrightarrow B$ el igualador de los morfismos s y t. Por la conmutatividad del pushout se tiene que $s \circ f = t \circ f$, entonces existe un único morfismo q que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I^* \arrow[r, "q^*"] & B \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & R \\ A \arrow[u, dashed, "q"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

es decir, $q^* \circ q = f$.

Proposición 9.11. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere que cumple el Axioma 6 y $a : A \longrightarrow X$ un monomorfismo. Entonces a es el igualador de algún par de morfismos de la categoría.*

Demostración. Como $a : A \longrightarrow X$ es un monomorfismo, entonces por el Axioma 6 el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_a"] \arrow[dl, "!"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

entonces obsérvese que

$$\chi_a \circ a = i_1 \circ ! = (i_1 \circ !) \circ a$$

Por otro lado, supóngase que existe $g : C \longrightarrow X$ tal que $\chi_a \circ g = (i_1 \circ !) \circ g$. Por la propiedad universal del pullback, existe un único morfismo u que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "! \circ g"'] & & \\
& A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_a"] \arrow[dl, "!"] \\
& 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] & X \arrow[r, "!"'] \arrow[rr, bend left, "\chi_a"] & 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \\
C \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "g"'] & & &
\end{tikzcd}$$

por lo que a es el igualador de los morfisms χ_a e $i_1 \circ !$. ■

Proposición 9.12. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere que cumple el axioma 6, $f : A \longrightarrow B$ un morfismo y q, q^* como en la Observación 9.9. Si existe un morfismo $u : A \longrightarrow C$ y un monomorfismo $v : C \longrightarrow B$ tal que $v \circ u = f$, entonces existe un único morfismo $k : I^* \longrightarrow C$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& I^* \arrow[dr, "q^*"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\
A \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como v es un monomorfismo, entonces por la Proposición 9.11 existen morfismos $p, r : B \longrightarrow D$ de tal manera que v es su igualador. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
p \circ f &= p \circ v \circ u \\
&= r \circ v \circ u \\
&= r \circ f.
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del pushout, existe un único morfismo h que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\
B \arrow[r, "s"'] \arrow[drr, bend right, "r"'] & R \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & D
\end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
p \circ q^* &= h \circ t \circ q^* \\
&= h \circ s \circ q^* \quad \text{(pues } q^* \text{ es el igualador de } s \text{ y } t\text{)} \\
&= r \circ q^*.
\end{aligned}$$

De esto se sigue, que existe un único morfismo $k : I^* \longrightarrow C$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "v"] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "r"'] & D \\
I^*. \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "q^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por último, nótese que

$$\begin{aligned}
v \circ k \circ q &= q^* \circ q \\
&= f \\
&= v \circ u
\end{aligned}$$

y como v es un monomorfismo, entonces $k \circ q = u$. ■

Proposición 9.13. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo. Entonces el morfismo q de la Observación 9.10 es un epimorfismo.*

Demostración. Primero, considérese el pushout del morfismo q consigo mismo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & I^* \arrow[d, "m"] \\
I^* \arrow[r, "n"'] & Q.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, sea $r^* : J \longrightarrow I^*$ el igualador de los morfismos m y n. Como $n \circ q = m \circ q$ entonces existe un único morfismo r que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "r^*"] & I^* \arrow[r, shift left, "m"] \arrow[r, shift right, "n"'] & Q \\
A. \arrow[u, dashed, "r"] \arrow[ur, "q"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, nótese que

$$
\begin{aligned}
q^* \circ r^* \circ r &= q^* \circ q \\
&= f
\end{aligned}
$$

por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
& J \arrow[dr, "q^* \circ r^*"] & \\
A \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\
& I^*. \arrow[ur, "q^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Como $q^* \circ r^*$ es un monomorfismo (esto pues al ser r^* un igualador lo vuelve un monomorfismo) por la Proposición 9.12 existen morfismo k, k' que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& J \arrow[dr, "q^* \circ r^*"] \arrow[dd, dashed, bend right, "k"'] & \\
A \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\
& I^*. \arrow[ur, "q^*"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "k'"'] &
\end{tikzcd}
$$

de esto se deduce que k es un isomorfismo pues

$$
\begin{aligned}
q^* \circ r^* \circ k' \circ k &= q^* \circ k \\
&= q^* \circ r^* \\
&= q^* \circ r^* \circ 1_J
\end{aligned}
$$

y como $q^* \circ r^*$ es un monomorfismo entonces $k' \circ k = 1_J$, de manera análoga $k \circ k' = 1_{I^*}$. Por unicidad se tiene que $k = r^*$, pero r^* es el igualador de m y n, es decir $m \circ r^* = n \circ r^*$ y como r^* es un isomorfismo (en particular, es un epimorfismo) entonces $m = n$. Pero recuérdese que m y n hacían que el siguiente diagrama fuera un pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & I^* \arrow[d, "m"] \\ I^* \arrow[r, "n"'] & Q. \end{tikzcd}$$

Si se supone que $h \circ q = g \circ q$ entonces existe un único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & I^* \arrow[d, "m"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ I^* \arrow[r, "n"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\phi"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

por lo que

$$\begin{aligned} h &= \phi \circ m \\ &= \phi \circ n \\ &= g \end{aligned}$$

por ello q es un epimorfismo. ■

Nótese que gracias a la Observación 9.10 y a la Proposición 9.13 se ha demostrado que dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría de Lawvere, este siempre se puede factorizar como la composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Una pregunta natural es si esta factorización es de alguna manera única. La respuesta a esta pregunta se formula a continuación. Por último, también obsérvese que en la prueba de la Proposición anterior se pudo haber tomado a k' como el isomorfismo que hace conmutar al diagrama.

Proposición 9.14. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere, $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de dicha categoría y $f = q^* \circ q$ la factorización de f a través de su imagen. Si existe un epimorfismo $u : A \longrightarrow C$ y un monomorfismo $v : C \longrightarrow B$ de tal manera que $f = v \circ u$ entonces existe un único isomorfismo $k : C \longrightarrow I^*$ que hace conmutativo al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & I^* \arrow[dr, "q^*"] & \\ A \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\ & C \arrow[uu, dashed, "k"', "\cong"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Por la Proposición 9.12 tal morfismo k existe, por lo que basta ver que dicho morfismo es un isomorfismo. Como $q^* \circ k = v$ y v es un monomorfismo, entonces k es un monomorfismo. De manera análoga, como $k \circ u = q$ y q es un epimorfismo, entonces k es un epimorfismo. Por la Proposición 7.6 se tiene que k es un isomorfismo. ■

El siguiente resultado permitirá construir una especie de unión para los subconjuntos de un objeto X en un topos de Lawvere.

Proposición 9.15. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y X un objeto de dicha categoría Considérese una "colección de subconjuntos de X indicada por un morfismo a", es decir un morfismo de la forma*

$$I \xrightarrow{a} 2^X$$

entonces existe un subconjunto de X

$$\bigcup_a \xrightarrow{A} X$$

de tal manera que

$$x \in A \text{ si y sólo si existe } j \in I \text{ tal que } ev_{2^X} \circ \langle x, a \circ j \rangle = i_1$$

donde

$$ev_{2^X} : X \times 2^X \longrightarrow 2$$

es el morfismo evaluación. Al subconjunto $A : \bigcup_a \longrightarrow X$ se le conoce como la ***unión*** *del morfismo a.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ tiene exponenciación entonces

$$hom(I, 2^X) \cong hom(X \times I, 2)$$

por lo que se tiene el único morfismo $\overline{a} : X \times I \longrightarrow 2$ correspondiente a a. Por otro lado, la propiedad de $\bigcup_a$ es equivalente a la propiedad

$$x \in A \text{ si y sólo si existe } j \in I \text{ tal que } \overline{a} \circ \langle x, j \rangle = i_1$$

Se construye al subconjunto $\bigcup_a$ mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_a \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"'] & X \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "p_X"] \arrow[rr, bend left, "\overline{a}"] & 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \\
\bigcup_a \arrow[r, "A"'] & X & &
\end{tikzcd}$$

donde k es el igualador de los morfismos $\overline{a}$ e $i_1 \circ f$, además $p_X \circ k = A \circ q$ es la factorización de $p_X \circ k$ a través de su imagen. Sea $x \in a$, como q es un epimorfismo, existe $\overline{x} \in \sum_a$ de tal manera que $(p_x \circ k) \circ \overline{x} = x$. Así, se define

$$j := p_I \circ k \circ \overline{x}$$

Por lo tanto, obsérvese que

$$\overline{a} \circ \langle x, j \rangle = \overline{a} \circ k \circ \overline{x} = (i_1 \circ f) \circ k \circ \overline{x} = i_1$$

Ahora bien, supóngase que existe $j \in I$ de tal manera que $\overline{a} \circ \langle x, j \rangle = i_1$. Por la propiedad universal del igualador, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_a \arrow[r, "A"] & X & & \\
\sum_a \arrow[u, "q"] \arrow[r, "k"'] & X \times I \arrow[u, "p_X"'] \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\overline{a}"] & 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \\
1 \arrow[u, "\overline{x}"] \arrow[ur, dashed, "\langle x,j \rangle"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $x \in A$, pues recuérdese que $p_X \circ \langle x, j \rangle = x$. ■

El siguiente lema permitirá más adelante construir una especie de complemento para los subconjuntos de los objetos en un topos de Lawvere.

Lema 9.16. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y X un objeto. Dado un subconjunto $a : A \longrightarrow X$ y un elemento $x \in X$, de tal manera que $x \notin a$ existe un morfismo $\phi : X \longrightarrow 2$ tal que*

$$\phi \circ x = i_1 \qquad \phi \circ a = i_0 \circ !$$

Demostración. Defínase el morfismo $\binom{a}{x}$ como el único morfismo que hace conmutar al siguiente diagrama, dado por la propiedad universal del coproducto

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j_A"'] \arrow[drr, bend left, "a"] & & \\
& A + 1 \arrow[r, dashed, "\binom{a}{x}"] & X \\
1 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[urr, bend right, "x"'] & &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el axioma de elección al morfismo $\binom{a}{x} : A + 1 \longrightarrow X$, se obtiene un morfismo $u : X \longrightarrow A + 1$ de tal manera que

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \circ u \circ \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$$

Por último defínase

$$\phi : X \longrightarrow 2$$

como la composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\phi"'] & A+1 \arrow[r, "!+1"] & 2 \end{tikzcd}$$

Obsérvese que el morfismo $\binom{a}{x} : A+1 \longrightarrow X$ es un monomorfismo. En efecto, sean $b_1, b_2 : 1 \longrightarrow A+1$ dos elementos distintos de $A+1$. Por el Axioma 4. y la Proposición 9.5, existen morfismos $\overline{b_1} : 1 \longrightarrow A$ y $\overline{b_2} = id_1 : 1 \longrightarrow 1$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "j_A"] \arrow[dr, "a"] & \\ 1 \arrow[ur, "\overline{b_1}"] \arrow[r, shift left, "b_1"] \arrow[r, shift right, "b_2"'] \arrow[dr, "\overline{b_2}"'] & A+1 \arrow[r, "\binom{a}{x}"] & X \\ & 1 \arrow[u, "j_1"] \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

Pero obsérvese que $x \circ \overline{b_2} = x$. Así, si resultara que $\binom{a}{x} \circ b_1 = \binom{a}{x} \circ b_2$, entonces resultaría que el diagrama que sigue conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "a"] & \\ 1 \arrow[ur, "\overline{b_1}"] \arrow[rr, "x"'] & & X \end{tikzcd}$$

por lo que $x \in a$, lo que contradice la hipótesis, entonces $b_1 = b_2$ y por lo tanto $\binom{a}{x}$ es un monomorfismo y así $u \circ \binom{a}{x} = id_{A+1}$. Nótese que de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, "j_A"'] & 1 \arrow[d, "i_0"] \\ A+1 \arrow[r, dashed, "!_A+1"] & 2 \\ 1 \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "1"'] & 1 \arrow[u, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\phi\circ x &= (!+1)\circ u\circ x\\ &= (!+1)\circ u\circ \binom{a}{x}\circ j_1\\ &= (!+1)\circ j_1\\ &= i_1\end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned}\phi\circ a &= (!+1)\circ u\circ a\\ &= (!+1)\circ u\circ \binom{a}{x}\circ j_A\\ &= (!+1)\circ j_A\\ &= i_0\circ !\end{aligned}$$

■

Con el Lema anterior se está en condiciones de probar la existencia de una especie de complemento para los subconjuntos de los objetos de un topos de Lawvere.

Proposición 9.17. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere y X un objeto. Dado un subconjunto cualquiera $a : A \longrightarrow X$ de X, existe otro subconjunto $a' : A' \longrightarrow X$ de X de tal manera que*

$$X \cong A + A'$$

Además $x \in a$ si y sólo si $x \in X$, $x \notin a'$ y a posee función característica $X \longrightarrow 2$.

Demostración. Considérese el morfismo

$$A\times 1 \xrightarrow{p_1} 1 \xrightarrow{i_0} 2$$

al cual por la adjunción de la exponeniación, le corresponde un único elemento

$$j_0 : 1 \longrightarrow 2^A$$

Por otro lado, dados los morfismos $a : A \longrightarrow X$ e $id_2 : 2 \longrightarrow 2$ por la Proposición 3.5 de este capítulo, se obtiene el morfismo

$$2^a : 2^X \longrightarrow 2^A$$

Ahora bien, del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 2^X \arrow[r, "!"'] \arrow[rr, bend left, "2^a"] & 1 \arrow[r, "j_0"'] & 2^A \end{tikzcd}$$

considérese el igualador $\mu : Z \longrightarrow 2^X$ y este morfismo hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\mu"] & 2^X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "2^a"] & 1 \arrow[r, "j_0"'] & 2^A \end{tikzcd}$$

Luego, por la adjunción de la exponenciación existe el morfismo

$$\overline{\mu} : Z \times X \longrightarrow 2$$

y defínase a' como la unión del morfismo $\mu : Z \longrightarrow 2^X$ y así, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\sum_\mu \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"'] & Z \times X \arrow[r, "!"'] \arrow[rr, bend left, "\overline{\mu}"] \arrow[d, "p_X"] & 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \\
\bigcup_\mu \arrow[r, "a'"'] & X & &
\end{tikzcd}$$

donde k es el igualador de los morfismos $\overline{\mu}$ y $Z \times X \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{i_1} 2$. Por lo que se define A' como

$$A' := \bigcup_\mu$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto existe un único morfismo f que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "a"] & & \\
& A + A' \arrow[r, dashed, "f"] & X \\
A' \arrow[ur, "i_{A'}"] \arrow[urr, bend right, "a'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se afirma que f es un isomorfismo. Probar que f es un monomorfismo es totalmene análogo a probar que el morfismo $\binom{a}{x}$ en la prueba del Lema 9.16 era un monomorfismo, esto es pues tanto a como a' no poseen elementos en común. Para ver que f es un epimorfismo, tómese un $x \in X$ cualquiera. Supóngase que $x \notin a$, entonces por el Lema 9.16 de este capítulo existe un morfismo

$$\phi : X \longrightarrow 2$$

tal que

$$\phi \circ x = i_1 \quad \phi \circ a = i_0$$

Obsérvese además que $[\phi] \in \mu$, pues se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\mu"] & 2^X \arrow[r, "!"'] \arrow[rr, bend left, "2^a"] & 1 \arrow[r, "j_0"'] & 2^A \\
1 \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "{[\phi]}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En efecto, por un lado $2^a \circ [\phi] = [i_0 \circ !]$ pues se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "!"'] & X \arrow[r, "\phi"] & 2 \\
& 1 \arrow[ur, "i_0"'] &
\end{tikzcd}$$

y por otro lado al morfismo $j_0 \circ ! \circ [\phi]$ también le corresponde por adjunción el morfismo

$$A \cong A \times 1 \xrightarrow{\pi_1} 1 \xrightarrow{i_0} X \xrightarrow{\phi} 2$$

por lo que

$$2^a \circ [\phi] = j_0 \circ ! \circ [\phi]$$

Además, nótese que $\langle x, [\phi] \rangle \in X \times \mu \circ k$, pues obsérvese que existe el morfismo $\psi : 1 \longrightarrow \sum_\mu$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_\mu \arrow[r, "id_X \times \mu \circ k"] & X \times 2^X \arrow[r, "id_X \times !"'] \arrow[rr, bend left, "id_X \times 2^a"] & X \times 1 \arrow[r, "id_X \times j_0"'] & X \times 2^A \\
1 \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "{\langle x, [\phi] \rangle}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

En efecto, por un lado

$$\begin{aligned}
id_X \times 2^a \circ \langle x, [\phi] \rangle &= \langle x, 2^a \circ [\phi] \rangle \\
&= \langle x, j_0 \circ ! \circ [\phi] \rangle
\end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\begin{aligned}
id_X \times j_0 \circ id_X \times ! \circ \langle x, [\phi] \rangle &= id_X \times j_0 \circ \langle x, ! \circ [\phi] \rangle \\
&= \langle x, j_0 \circ ! \circ [\phi] \rangle
\end{aligned}$$

Ahora bien, considérese la factorización del morfismo $p_X \circ (id_X \times \mu \circ k)$ es decir, los morfismos q y a' como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_\mu \arrow[r, "a'"] & X & & \\
\sum_\mu \arrow[u, "q"] \arrow[r, "id_X \times \mu \circ k"] & X \times 2^X \arrow[u, "p_X"'] \arrow[r, "id_X \times !"'] \arrow[rr, bend left, "id_X \times 2^a"] & X \times 1 \arrow[r, "id_X \times j_0"'] & X \times 2^A \\
1 \arrow[u, "\psi"] \arrow[ru, "\langle x,[\phi]\rangle"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Se afirma entonces que $x \in a'$. Para esto, basta verificar que el cuadrado superior es conmutativo pero recuérdese que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_\mu \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"'] & Z \times X \arrow[d, "p_X"] \\
\bigcup_\mu \arrow[r, "a'"'] & X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo que basta verificar que $p_X \circ k = p_X \circ (id_X \times \mu \circ k)$, lo cual se sigue de que el siguiente diagrama conmuta por la propiedad universal del producto

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
X \times Z \arrow[ru, "p_X"] \arrow[r, "id_X \times \mu"'] & X \times 2^X \arrow[u, "p_X"']
\end{tikzcd}$$

Así, se tiene que existe un elemento de $A + A'$, a saber $i_{A'} \circ q \circ \psi$ de tal manera que

$$f \circ (i_{A'} \circ q \circ \psi) = x$$

pues el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rd, "i_{A'}"'] \arrow[rrd, bend left, "a'"] & & 1 \arrow[ll, "q \circ \psi"'] \arrow[d, "x"] \\
 & A + A' \arrow[r, "f"] & X \\
A \arrow[ru, "i_A"] \arrow[rru, bend right, "a"'] & &
\end{tikzcd}$$

Así, f es un epimorfismo y por tanto f es un isomorfismo. ■

Observación 9.18. *Sean $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere, X un objeto y $a : A \longrightarrow X$ un subconjunto de X con $A \neq 0$. Por la Proposición 9.17 existe otro subconjunto $a' : A' \longrightarrow X$ que cumple lo estipulado por la Proposición. Por el Axioma 3, existe $x \in A$, por lo que $x \notin a'$ y nuevamente por la Proposición 9.17 existe una función característica χ_a del subconjunto a. En lo que sigue, cada que se tome un morfismo $f : X \longrightarrow 2$ a este se le denotará por χ_a haciendo alusión a que existe un subconjunto a de X de tal manera que f es la función característica de dicho subconjunto.*

10. La naturaleza de los topos de Lawvere

Para concluir este capítulo se probará que bajo ciertas condiciones dado un topos de Lawvere $\mathcal{C}$ y un objeto X de dicha categoría el conjunto $Hom(X, 2)$ es un álgebra de Boole atómica. Este hecho permitirá probar más adelante un Teorema sobre una equivalencia de categorías que permitirá revelar la verdadera naturaleza de los Topos de Lawvere y la categoría de conjuntos **Con**.

Proposición 10.1. *Sea $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere que cumple el Axioma 6 y X un objeto de dicha categoría, entonces el conjunto $Hom(X, 2)$ es un álgebra de Boole atómica.*

Demostración. Sean χ_a y χ_b dos morfismos de la colección $Hom(X, 2)$ y considérense $a : A \longrightarrow X$ y $b : B \longrightarrow X$ los subconjuntos cuyas funciones características son χ_a y χ_b, respectivamente. Defínase la siguiente relación en $Hom(X, 2)$: se dirá que $\chi_a \leq \chi_b$ si y sólo si existe un morfismo $f : A \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \\ B \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Se afirma que la relación $\leq$ define un orden parcial sobre $Hom(X, 2)$. En efecto, tómense χ_a, χ_b y χ_c morfismos de la colección $Hom(A, 2)$ y sean $a : A \longrightarrow X$, $b : B \longrightarrow X$ y $c : C \longrightarrow X$ subconjuntos cuyas funciones características son χ_a, χ_b y χ_c, respectivamente. Claramente el morfismo id_A hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_A"'] & X \\ A \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

por lo que $\chi_a \leq \chi_a$ y así $\leq$ es una relación reflexiva. Ahora bien, supóngase que $\chi_a \leq \chi_b$ y que $\chi_b \leq \chi_b$, entonces existen morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, bend right, "f"'] & X \\ B \arrow[u, bend right, "g"'] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

entonces se tiene que $a = b \circ f$ y $b = a \circ g$ por lo que $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$. Si $x \in a$ entonces $x \in b$ por lo que $\chi_a \circ x = i_1 = \chi_b \circ x$, y si $x \notin a$ entonces $x \notin b$ pues si $x \in b$ como $b \subseteq a$ entonces $x \in a$ lo que contradice que $x \notin a$, por lo tanto $\chi_a \circ x = i_0 = \chi_b \circ x$ y en conclusión se tiene que $\chi_a = \chi_b$ por lo que $\leq$ es una relación antisimétrica. Por último supóngase que $\chi_a \leq \chi_b$ y $\chi_b \leq \chi_c$, entonces existen morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \\ B \arrow[ur, "b"'] \arrow[d, "g"'] & \\ C \arrow[uur, bend right, "c"'] & \end{tikzcd}$$

Nótese que

$$a = b \circ f = d \circ g \circ f$$

por lo tanto $\chi_a \leq \chi_c$ y entonces $\leq$ es una relación transitiva, por lo que se concluye que $\leq$ es un orden parcial sobre $Hom(X, 2)$. Ahora bien, para probar que $Hom(X, 2)$ es una retícula tómense χ_a y χ_b dos morfismos de $Hom(X, 2)$ y sean $a : A \longrightarrow X$ y $b : B \longrightarrow X$ los subconjuntos cuyas funciones características son χ_a y χ_b, respectivamente. Si se considera el pullback de los subconjuntos a y b, entonces se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times_X B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

Denótese por

$$A \cap B := A \times_X B$$

y recuérdese que como b es un monomorfismo entonces p_1 también es un monomorfismo (de igual manera p_2 también es un monomorfismo) por lo que la composición

$$a \cap b := a \circ p_1 : A \cap B \longrightarrow X$$

también es un monomorfismo. Ahora bien, considérese la función característica

$$\chi_{a\cap b} : X \longrightarrow 2$$

del subconjunto $a \cap b$ y entonces se afirma que este morfismo es el ínfimo de χ_a y χ_b. Efectivamente, nótese que se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "a\cap b"] \arrow[d, "p_1"'] & X \\ A \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "a\cap b"] \arrow[d, "p_2"'] & X \\ B \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

por lo que $\chi_{a\cap b} \leq \chi_a$ y $\chi_{a\cap b} \leq \chi_b$. Por último, supóngase que existe χ_c un morfismo en $Hom(X, 2)$ y $c : C \longrightarrow X$ subconjunto de X de tal manera que χ_c es su función característica, y cumple que $\chi_c \leq \chi_a$ y $\chi_c \leq \chi_b$, entonces existen morfismos f y g que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "c"] & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

pero por la propiedad universal del pullback existe un único morfismo h que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & A \cap B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "b"] \\ & A \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

por lo tanto se obtienen las siguientes igualdades

$$a \circ p_1 \circ h = a \circ f = c$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed, "h"'] & X \\ A \cap B \arrow[ur, "a\circ p_1"'] & \end{tikzcd}$$

Así, se concluye que $\chi_c \leq \chi_{a\cap b}$ y por lo tanto se tiene que $\chi_{a\cap b}$ es el ínfimo de los morfismos χ_A y χ_B por lo que

$$\chi_A \wedge \chi_B = \chi_{A\cap B}$$

Para construir el supremo de los morfismos χ_a y χ_b considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "a"] & & A \cup B \arrow[d, "t"] \\
& A + B \arrow[ur, "s"] \arrow[r, dashed, "{(a,b)}"'] & X \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $t \circ s$ es la factorización de (a, b) a través de su imagen. Nótese que como t es un monomorfismo, entonces $t : A \cup B \longrightarrow X$ es un subconjunto de X que se denotará por $a \cup b := t$. Si se considera su función característica

$$\chi_{a \cup b} : X \longrightarrow 2$$

se afirma que esta función característica es el supremo de los morfismos χ_a y χ_b. Efectivamente, nótese que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "s \circ i_A"'] & X \\
A \cup B \arrow[ur, "a \cup b"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "s \circ i_B"'] & X \\
A \cup B \arrow[ur, "a \cup b"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\chi_a \leq \chi_{a \cup b}$ y $\chi_b \leq \chi_{a \cup b}$. Por último, supóngase que existe un morfismo $\chi_c : X \longrightarrow 2$ y sea $c : C \longrightarrow X$ un subconjunto de X tal que χ_c es su función característica que cumple $\chi_a \leq \chi_c$ y $\chi_b \leq \chi_c$, entonces existen morfismos f y g de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "a"] & \\
C \arrow[r, "c"] & X \\
B \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $(a, b) = (c \circ f, c \circ g)$ pero obsérvese que el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & & \\
& A + B \arrow[r, dashed, "{(f,g)}"] & C \arrow[r, "c"] & X \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & & &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto
$$(a,b) = (c \circ f, c \circ g) = c \circ (f,g)$$
Si se considera a $v \circ u : A + B \longrightarrow C$ la factorización de (f,g) a través de su imagen, entonces se tiene que
$$(a,b) = c \circ (f,g) = c \circ v \circ u$$
pero nótese que u es un epimorfismo y $d \circ v$ es un monomorfismo, por lo que por la Proposición 9.14 de este capítulo existe un isomorfismo i que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A + B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "s"'] & E \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, "c"] & X \\
& A \cup B \arrow[u, "i", "\cong"'] \arrow[urr, "a \cup b"'] & &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\chi_{a \cup b} \leq \chi_c$ y así se tiene que $\chi_{a \cup b}$ es el supremo de los morfismos χ_a y χ_b, por lo que
$$\chi_a \vee \chi_b = \chi_{a \cup b}$$
En conclusión se tiene que $Hom(X,2)$ es una retícula. Para demostrar que esta retícula es acotada sea χ_a un morfismo de $Hom(X,2)$ y $a : A \longrightarrow X$ subconjunto de X de tal manera que χ_a es su función característica. Considérese la función característica χ_{id_X} del subconjunto $id_X : X \longrightarrow X$ entonces claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a"'] & X \\
X \arrow[ur, "id_X"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\chi_a \leq \chi_{id_X}$, es decir χ_{id_X} es el morfismo más grande de la retícula $Hom(X,2)$ y a este morfismo se le denotará por $1_{Hom(X,2)}$. Por otro lado, considérese la función característica $\chi_!$ del subconjunto $! : 0 \longrightarrow X$ y nótese que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & X \\
A \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\chi_! \leq \chi_A$ es decir, $\chi_!$ es el morfismo más pequeño de la retícula $Hom(X,2)$ y a este morfismo se le denotará por $0_{Hom(X,2)}$. Así, se concluye que $Hom(X,2)$ es una retícula acotada. Para verificar que $Hom(X,2)$ es una retícula complementada sea $\chi_a : X \longrightarrow 2$ un morfismo de $Hom(X,2)$ y sea $a : A \longrightarrow X$ un cubconjunto de X de tal manera que χ_a es su función característica. Por la Proposición 9.17. de este capítulo existe otro subconjunto $a^c : A^c \longrightarrow X$ de tal manera que $X \cong A + A^c$. Considérese la función característica χ_{a^c} del subconjunto a^c, entonces se afirma que

χ_{a^c} es el complemento de χ_a. Para probar que $\chi_a \wedge \chi_{a^c} = 0_{Hom(X,2)}$ sea $x \in X$ y obsérvese que por un lado $0_{Hom(X,2)} \circ x = i_0$, y por otro lado es imposible que $x \in a \cap a^c$ pues de ser así se tendría que $x \in a$ y $x \in a^c$ lo que contradice la Proposición 9.17 de este capítulo, por lo que también $\chi_a \wedge \chi_{a^c} \circ x = \chi_{a \cap a^c} \circ x = i_0$. Así, se concluye que $\chi_a \wedge \chi_{a^c} = 0_{Hom(X,2)}$. Por último, para probar que $\chi_a \vee \chi_{a^c} = 1_{Hom(X,2)}$ considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \cup A^c \arrow[dr, "t"] & \\ A + A^c \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "\cong"'] & & X \\ & X \arrow[ur, "id_X"'] & \end{tikzcd}$$

entonces por la Proposición 9.14 de este capítulo existe un isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \cup A^c \arrow[dr, "t"] & \\ A + A^c \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "\cong"'] & & X \\ & X \arrow[uu, "\cong"] \arrow[ur, "id_X"'] & \end{tikzcd}$$

por lo tanto $1_{Hom(X,2)} \leq \chi_{a \cup a^c} = \chi_a \vee \chi_{a^c}$ y así se tiene que $\chi_a \vee \chi_{a^c} = 0_{Hom(X,2)}$. Por lo tanto, se concluye que $Hom(X,2)$ es una retícula complementada. Ahora bien para ver que $Hom(X,2)$ es una retícula distributiva sean χ_a,χ_b y χ_c morfismos de la colección $Hom(X,2)$ junto con los subconjuntos $a : A \longrightarrow X$, $b : B \longrightarrow X$ y $c : C \longrightarrow X$ de tal manera que χ_a, χ_b y χ_c son sus funciones características, respectivamente. Primero se verificará que $\chi_A \wedge (\chi_B \vee \chi_D) = (\chi_A \wedge \chi_B) \vee (\chi_A \wedge \chi_D)$. Para probar este hecho es primero necesario realizar algunas observaciones: considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & 2 \\ 1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, dashed, "\langle i_1, i_1 \rangle"] \arrow[dr, "i_1"'] & 2 \times 2 \arrow[u, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

como i_1 es un monomorfismo entonces $\langle i_1, i_1 \rangle$ también es un monomorfismo, por lo que $\langle i_1, i_1 \rangle : 1 \longrightarrow 2 \times 2$ es un subconjunto de 2×2 entonces considérese su función característica $\chi_{\langle i_1,i_1\rangle} : 2\times 2 \longrightarrow 2$ y llámesele $\cap := \chi_{\langle i_1,i_1\rangle}$. Ahora, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prec \arrow[r] & 2\times 2 \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & 2 \end{tikzcd}$$

donde $\prec\longrightarrow 2$ es el igualador de los morfismos $\cap$ y π_2. Recuérdese que los igualadores son monomorfismos, por lo que $\prec\longrightarrow 2\times 2$ es un subconjunto de 2×2 y siendo así, considérese su función característica $\chi_\prec : 2\times 2 \longrightarrow 2$ y llámesele $\Rrightarrow := \chi_\prec$, entonces nótese que por el Axioma 6 el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} \prec \arrow[r] \arrow[d, "!"'] & 2\times 2 \arrow[d, "\Rrightarrow"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Por otro lado considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & 2 \\ X \arrow[ur, "\chi_a"] \arrow[r, dashed, "\langle\chi_a,\chi_b\rangle"] \arrow[dr, "\chi_b"'] & 2\times 2 \arrow[u, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

y considérese el pullback de los morfismos i_1 y $\Rrightarrow \circ\langle\chi_a,\chi_b\rangle$

$$\begin{tikzcd} 1\times_2 X \arrow[r, "a\Rrightarrow b"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\Rrightarrow\circ\langle\chi_a,\chi_b\rangle"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

denótese $A \Rrightarrow B := 1\times_2 X$ y obsérvese que $a \Rrightarrow b : A \Rrightarrow B \longrightarrow X$ es un subconjunto de X por lo que puede considerarse su función característica $\chi_{a\Rrightarrow b} : X \longrightarrow 2$ que se denotará por $\chi_a \Rrightarrow \chi_b := \chi_{a\Rrightarrow b}$. Dada esta situación, se tienen los siguientes hechos:

- $\chi_{a\cap c} = \chi_{b\cap c}$ si y sólo si $\chi_a \circ c = \chi_b \circ c$ y por lo tanto $\chi_a \wedge \chi_c = \chi_b \wedge \chi_c$ si y sólo si $\chi_a \circ c = \chi_b \circ c$. Efectivamente, considérense los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A\cap C \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & C \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_a"] \\ 1 \arrow[r, "1_1"'] & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B\cap C \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & C \arrow[d, "c"] \\ B \arrow[r, "b"'] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_b"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

y obsérvese que los cuadrados de arriba son pullbacks por construcción y los cuadrado de abajo también por el Axioma 6 entonces se tiene que los siguientes diagramas son pullbacks

$$\begin{tikzcd} A\cap C \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "!\circ q_1"'] & C \arrow[d, "\chi_a\circ c"] \\ 1 \arrow[r, "1_1"'] & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B\cap C \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "!\circ p_1"'] & C \arrow[d, "\chi_b\circ c"] \\ 1 \arrow[r, "i_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

y nótese que q_2 y p_2 son monomorfismos por lo que q_2 y p_2 son subconjuntos de C y entonces si se consideran sus funciones características χ_{q_2} y χ_{p_2}, respectivamente, entonces se tiene que $\chi_a \circ c = \chi_{q_2}$ y $\chi_b \circ c = \chi_{p_2}$. Nótese que

$$\begin{aligned} \chi_a \circ c = \chi_b \circ c \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_{p_2} = \chi_{q_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existe un isomorfismo } k \text{ tal que } q_2 \circ k = p_2 \\ &\Leftrightarrow \quad c \circ q_2 \circ k = c \circ p_2 \\ &\Leftrightarrow \quad a \cap c \circ k = b \cap d \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{a\cap c} = \chi_{b\cap c} \end{aligned}$$

- $\chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_b$ si y sólo si $\chi_{a\cap b} \circ c = \chi_a \circ c$. En efecto, obsérvese que

$$\begin{aligned} \chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_b \quad &\Leftrightarrow \quad (\chi_a \wedge \chi_c) \wedge \chi_b = \chi_a \wedge \chi_c && \text{(propiedades de reticulas)} \\ &\Leftrightarrow \quad (\chi_a \wedge \chi_b) \wedge \chi_c = \chi_a \wedge \chi_c && \text{(propiedades de reticulas)} \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{a\cap b} \circ c = \chi_a \circ c && \text{(punto anterior)} \end{aligned}$$

- $\chi_c \leq \chi_a \Mapsto \chi_b$ si y sólo si $\chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_b$. En efecto, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \Mapsto B \arrow[r, "a \Mapsto b"] \arrow[d, dashed, "j"'] \arrow[dd, bend right, "!"'] & X \arrow[d, "\langle \chi_a, \chi_b \rangle"] \\
\prec \arrow[r, "e"] \arrow[d, "!"'] & 2 \times 2 \arrow[d, "\Mapsto"] \\
1 \arrow[r, "i_1"'] & 2
\end{tikzcd}$$

y nótese que el diagrama inferior es un pullback por construcción y el diagrama exterior es conmutativo también por construcción, entonces j es el único morfismo dado por la propiedad universal del pullback. Luego, se concluye que el diagrama superior es un pullback. Ahora bien, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "c"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \Mapsto B \arrow[r, "a \Mapsto b"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\langle \chi_A, \chi_B \rangle"] \\
& \prec \arrow[r, "e"'] & 2 \times 2 \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & 2
\end{tikzcd}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\chi_c \leq \chi_a \Mapsto \chi_b \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe un morfismo } k \text{ tal que } (a \Mapsto b) \circ k = c \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \chi_a, \chi_b \rangle \circ c \text{ se factoriza a través de } e \\
&\Leftrightarrow \quad \cap \circ \langle \chi_a, \chi_b \rangle \circ c = \pi_2 \circ \langle \chi_a, \chi_b \rangle \circ c \\
&\Leftrightarrow \quad \chi_{a \cap b} \circ c = \chi_a \circ c \\
&\Leftrightarrow \quad \chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_b
\end{aligned}$$

donde la segunda equivalencia es porque el cuadrado interior del diagrama es un pullback, la tercer equivalencia porque e es un igualador y la quinta equivalencia por el punto anterior.

En este momento ya se está en condiciones de probar que $Hom(X, 2)$ es una retícula distributiva. En efecto, nótese que por defínición de supremo

$$\chi_a \wedge \chi_b \leq (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) \qquad \chi_a \wedge \chi_c \leq (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c)$$

pero por el punto anterior se tiene que

$$\chi_b \leq \chi_a \Mapsto (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) \qquad \chi_c \leq \chi_a \Mapsto (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c)$$

nuevamente por la definición de supremo se tiene

$$\chi_b \vee \chi_c \leq \chi_a \Mapsto (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c)$$

y nuevamente por el punto anterior se tiene

$$\chi_a \wedge (\chi_b \vee \chi_c) \leq (\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c)$$

Por otro lado obsérvese que

$$\chi_a \wedge \chi_b \leq \chi_a \qquad \chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_a$$

entonces por la definición de supremo

$$(\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) \leq \chi_a$$

Además se tiene que

$$\chi_a \wedge \chi_b \leq \chi_b \leq \chi_b \vee \chi_c \qquad \chi_a \wedge \chi_c \leq \chi_c \leq \chi_b \vee \chi_c$$

por lo que nuevamente por definición de supremo se obtiene

$$(\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) \leq \chi_b \vee \chi_c$$

entonces por la definición de ínfimo se concluye que

$$(\chi_a \wedge \chi_a) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) \leq \chi_a \wedge (\chi_b \vee \chi_c)$$

En conclusión se tiene que $(\chi_a \wedge \chi_b) \vee (\chi_a \wedge \chi_c) = \chi_a \wedge (\chi_b \vee \chi_c)$ y por último nótese que

$$\begin{array}{rcll}
\chi_a \vee (\chi_b \wedge \chi_c) & = & ((\chi_a \vee (\chi_b \wedge \chi_c))^c)^c & \text{(propiedades de retículas)} \\
& = & (\chi_{a^c} \wedge (\chi_{b^c} \vee \chi_{c^c}))^c & \text{(leyes de DeMorgan)} \\
& = & ((\chi_{a^c} \wedge \chi_{b^c}) \vee (\chi_{a^c} \wedge \chi_{c^c}))^c & \\
& = & (\chi_a \vee \chi_b) \wedge (\chi_a \vee \chi_c) & \text{(leyes de DeMorgan)}
\end{array}$$

Así, se tiene que $Hom(X, 2)$ es una retícula distributiva y por tanto un álgebra de Boole. Por último, para demostrar que esta retícula es atómica tómese $\chi_a \in Hom(X, 2)$ tal que $\chi_a \neq 0_{Hom(x,2)}$ y considérese $a : A \longrightarrow X$ el subconjunto cuya función característica es χ_a. Como $\chi_a \neq 0_{Hom(X,2)}$ entonces existe $x \in a$, es decir existe $\overline{x}$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "x"] & \\
A \arrow[rr, "a"'] & & X
\end{tikzcd}$$

como x es un monomorfismo entonces x es un subconjunto de X por lo que se puede considerar su función característica χ_x y es claro que $\chi_x \leq \chi_a$. Para demostrar que χ_x es un átomo tómese $\chi_b \leq \chi_x$ cualquiera, entonces se tienen los siguientes casos:

1. Si $\chi_b = 0_{Hom(X,2)}$ entonces inmediatamente se tiene que χ_x es un atómo.

2. Si $\chi_b \neq 0_{Hom(X,2)}$ como $\chi_b \leq \chi_x$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "!"'] & X \\ 1 \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

pero obsérvese que ! es un epimorfismo, pues si $x = id_1 : 1 \longrightarrow 1$ es un elemento de 1 como $\chi_b \neq 0_{Hom(X,2)}$ entonces existe $y \in b$ y $\overline{y}$ que hacen conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\overline{y}"'] \arrow[dr, "y"] & \\ B \arrow[rr, "b"'] & & X \end{tikzcd}$$

por lo que $\overline{y} \in B$ y claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\overline{y}"'] \arrow[dr, "x=id_1"] & \\ B \arrow[rr, "!"'] & & 1 \end{tikzcd}$$

es decir $! \circ \overline{y} = x$ por lo que ! es un morfismo suprayectivo y por la Proposición 7.4. de este capítulo se tiene que ! es un epimorfismo. Además, claramente ! es un monomorfismo pues b es un monomorfismo y por tanto por la Proposición 7.6. de este capítulo se tiene que ! es un isomorfismo y así, se tiene que $\chi_x = \chi_b$. En conclusión se tiene que χ_x es un átomo y así $Hom(X, 2)$ es un álgebra de Boole atómica.

■

El siguiente teorema es quizá el más importante de este capítulo, pues permitirá descubrir cuál es la verdadera naturaleza de los topos de Lawvere. Sin embargo, antes es necesario recordar el siguiente resultado de teoría de categorías que puede consultarse en [25].

PROPOSICIÓN 10.2. *Sea F un funtor adjunto izquierdo de un funtor G entonces:*

1. *F es un funtor fiel y pleno si y sólo si $id \simeq G \circ F$*
2. *G es un funtor fiel y pleno si y sólo si $F \circ G \simeq id$*

Ahora sí, se está en condiciones de probar el teorema más importante de este capítulo:

TEOREMA 10.3. *Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un funtor entre topos de Lawvere que cumplen el Axioma 6, donde además se cumple que:*

1. *Para cualquier objeto X de $\mathcal{C}$ o bien de $\mathcal{C}'$, la colección $Hom(X,2)$ es una retícula completa.*
2. *El funtor T es adjunto derecho de un funtor $T' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$*
3. *El funtor T es pleno en 1, es decir, dado un objeto A en $\mathcal{C}$ la asignación*

$$Hom(1,A) \longrightarrow Hom(T(1),T(A))$$

es suprayectiva.

entonces T define una equivalencia de categorías.

Demostración. Como el funtor T es adjunto derecho del funtor T' entonces este funtor preserva límites por lo que en particular se tiene que $T(1) = 1$. Ahora bien, como el funtor T es pleno en 1 entonces la siguiente asignación es suprayectiva:

$$Hom(1,0) \longrightarrow Hom(1,T(0))$$

pero como 0 no tiene elementos entonces $T(0)$ tampoco tiene elementos, por lo tanto $T(0) = 0$. Para verificar que $T \circ T' \simeq id_{\mathcal{C}'}$ se verá que T es un funtor fiel y pleno. Para ver que T es fiel, es decir que dados dos objetos A y B en $\mathcal{C}$, la asignación

$$Hom(A,B) \longrightarrow Hom(T(A),T(B))$$

es inyectiva, sean $f, g \in Hom(A,B)$ morfismos tales que $T(f) = T(g)$. Sea $x \in A$ un elemento cualquiera de A, considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "!"] & 1 \arrow[r, shift left, "f\circ x"] \arrow[r, shift right, "g\circ x"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $! : E \longrightarrow 1$ es el igualador de los morfismo $f \circ x$ y $g \circ x$. Como el igualador es un monomorfismo, entonces $E = 1$ o bien $E = 0$. Si $E = 0$, entonces $T(E) = 0$ pero además $T(!) =!$ es el igualador de los morfismo $T(f \circ x)$ y $T(g \circ x)$, es decir se tiene el siguiente diagrama conmutativo, por la propiedad universal del coproducto:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "T(f\circ x)"] & & \\ 0 \arrow[ur, "T(!)"] \arrow[dr, "T(!)"'] & & 2 \arrow[r, dashed, "H"] & T(B) \\ & 1 \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "T(g\circ x)"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $i_0 \neq i_1$, entonces $T(f \circ x) \neq T(g \circ x)$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis se tiene que $T(f) = T(g)$, por lo tanto $E = 1$ y entonces $f \circ x = g \circ x$, por ello $f = g$ y en conclusión se obtiene que T es un funtor fiel. Por otro lado, nótese que el funtor T también preserva coproductos pues dados A y B objetos de C, se tiene que la asignación

$$T(A)+T(B) \xrightarrow{G} T(A+B)$$

es biyectiva. Efectivamente, para ver que es suprayectiva sea $x : 1 \longrightarrow T(A+B)$ un elemento cualquiera, como T es pleno en 1 existe $\overline{x} : 1 \longrightarrow A+B$ tal que $T(\overline{x}) = x$, pero como $\mathcal{C}$ es un topos de Lawvere entonces por el Axioma 4, existe un morfismo $\phi : 1 \longrightarrow A$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\overline{x}"] & \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

así, se tiene que los siguientes triángulos conmutan

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "T(\phi)"'] \arrow[d, "x"] \\
T(A) \arrow[r, "T(i_A)"'] \arrow[d, "i_{T(A)}"'] & T(A+B) \\
T(A)+T(B) \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que se concluye

$$G(i_{T(A)} \circ T(\phi)) = x$$

Para probar que la asignación G es inyectiva, sean $x_1, x_2 : 1 \longrightarrow T(A)+T(B)$ tales que $G \circ x_1 = G \circ x_2$. Considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, bend right, "\phi_1"'] \arrow[dl, bend left, "\phi_2"] \arrow[d, shift right, "x_1"'] \arrow[d, shift left, "x_2"] \\
T(A) \arrow[r, "i_{T(A)}"'] \arrow[dr, "T(i_A)"'] & T(A)+T(B) \arrow[d, "G"] \\
& T(A+B)
\end{tikzcd}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 están dadas por el Axioma 4. Por lo tanto

$$T(i_A) \circ \phi_1 = T(i_A) \circ \phi_2$$

y por la Proposición 6.3 de este capítulo se tiene que $T(i_A)$ es un monomorfismo, es decir $\phi_1 = \phi_2$, por lo que $x_1 = x_2$. Por lo tanto se concluye que el morfismo G es inyectivo y por tanto G es una asignación biyectiva y así, se concluye entonces que el funtor T preserva coproductos. Ahora bien, por la Proposición 10.1 de esta sección se tiene que $Hom(X,2)$ es un álgebra de Boole atómica y por hipótesis se tiene que en realidad es un álgebra de Boole atómica y completa, por lo que esta álgebra resulta ser isomorfa al álgebra de Boole de la potencia de algún conjunto, a saber el conjunto de átomos del álgebra original, por lo que $Hom(X,2) \cong (\mathcal{P}(Hom(1,X)), \subseteq)$. Además, como $Hom(X,2) \cong Hom(1,2^X)$ entonces es posible dotar de estructura de álgebra de Boole al conjunto $Hom(1,2^X)$ como sigue: dados $[\chi_a]$ y $[\chi_b]$ en $Hom(1,2^X)$ se dirá que $[\chi_a] \leq [\chi_b]$ si y sólo si $\chi_a \leq \chi_b$ y de esta manera $Hom(1,2^X)$ es a su vez un álgebra de Boole completa y atómica. Pues bien, lo que se desea mostrar es que la asignación

$$Hom(1,2^X) \longrightarrow Hom(1,2^{T(X)})$$

es un morfismo de álgebras de Boole completas y atómicas. En efecto, considérese una colección de nombres $\{[\chi_a] : a \in A\}$ en $Hom(1,2^X)$ de los morfimos $\{\chi_a : a \in A\}$ donde para cada $a \in A$ el morfismo χ_a es la función característica del subconjunto $a : A_a \longrightarrow X$ y el supremo $\bigvee_{a\in A} \chi_a$ es la función característica de un subconjunto que se denotará como $\bigcup_{a\in A} a : \bigcup_{a\in A} A_a \longrightarrow X$ entonces:

1. $[\bigvee_{a\in A} T(\chi_a)] = [T(\bigvee_{a\in A} \chi_a)]$. Para demostrar esto basta ver que

$$\bigvee_{a\in A} T(\chi_a) = T(\bigvee_{a\in A} \chi_a)$$

Obsérvese que para cada $a \in A$ se tiene que $\chi_a \leq \bigvee_{a\in A} \chi_a$ por lo que para cada $a \in A$ existe un morfismo f_a que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_a \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f_a"'] & X \\ \bigcup_{a\in A} A_a \arrow[ur, "\bigcup_{a\in A} a"'] & \end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo para cada $a \in A$:

$$\begin{tikzcd} T(A_a) \arrow[r, "T(a)"] \arrow[d, "T(f_a)"'] & T(X) \\ T(\bigcup_{a\in A} A_a) \arrow[ur, "T(\bigcup_{a\in A} a)"'] & \end{tikzcd}$$

es decir que para cada $a \in A$ se tiene que $T(\chi_a) \leq T(\bigvee_{a\in A} \chi_a)$ entonces por la definición de supremo se tiene que $\bigvee_{a\in A} T(\chi_a) \leq T(\bigvee_{a\in A} \chi_a)$ y de aquí se deduce la existencia de un morfismo f que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_{a\in A} T(A_a) \arrow[r, "\bigcup_{a\in A} T(a)"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \\
T(\bigcup_{a\in A} A_a) \arrow[ur, "T(\bigcup_{a\in A} a)"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $y \in \bigcup_{a\in A} T(a)$ entonces existe un $\overline{y}$ que vuelve conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\overline{y}"'] \arrow[dr, "y"] & \\
\bigcup_{a\in A} T(A_a) \arrow[r, "\bigcup_{a\in A} T(a)"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \\
T(\bigcup_{a\in A} A_a) \arrow[ur, "T(\bigcup_{a\in A} a)"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que a su vez $y \in T(\bigcup_{a\in A} a)$ y por lo tanto $\bigvee_{a\in A} T(\chi_a) \circ y = i_1 = T(\bigvee_{a\in A} \chi_a) \circ y$. Por otro lado, si $y \notin \bigcup_{a\in A} T(a)$ entonces $y \notin T(\bigcup_{a\in A} a)$ pues de ser así existiría $\overline{y}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\overline{y}"'] \arrow[dr, "y"] & \\
T(\bigcup_{a\in A} A_a) \arrow[r, "T(\bigcup_{a\in A} a)"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

por lo que $\overline{y} \in T(\bigcup_{a\in A} A_a)$ y como T es pleno en 1 existe $\overline{x} \in \bigcup_{a\in A} A_a$ tal que $T(\overline{x}) = \overline{y}$, análogamente existe $x : 1 \longrightarrow X$ tal que $T(x) = y$ por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "x"] & \\
\bigcup_{a\in A} A_a \arrow[r, "\bigcup_{a\in A} a"'] & X
\end{tikzcd}$$

en efecto, pues si existiera z tal que el diagrama conmutara

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "z"] & \\
\bigcup_{a\in A} A_a \arrow[r, "\bigcup_{a\in A} a"'] & X
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama sería conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\overline{y}"'] \arrow[dr, "T(z)"] & \\
T(\bigcup_{a\in A} A_a) \arrow[r, "T(\bigcup_{a\in A} a)"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

por lo que $T(z) = y = T(x)$ y como T es pleno entonces $z = x$. Ahora bien, como $Hom(X, 2) \cong (\mathcal{P}(Hom(1, X)), \subseteq)$ entonces existe $a \in A$ y $\overline{x}'$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "\overline{x}'"] \arrow[dd, bend right, "\overline{x}"'] \arrow[dr, "x"] & \\
A_a \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f_a"] & X \\
\bigcup_{a\in A} A_a \arrow[ur, "\bigcup_{a\in A} a"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "T(\overline{x}')"'] \arrow[dr, "y"] & \\
T(A_a) \arrow[r, "T(a)"] \arrow[d, "\psi_a"'] & T(X) \\
\bigcup_{a\in A} T(A_a) \arrow[ur, "\bigcup_{a\in A} T(a)"'] &
\end{tikzcd}$$

pues el diagrama de abajo es conmutativo ya que para cada $a \in A$ se tiene que $\chi_a \leq \bigvee_{a\in A} \chi_a$. Así, se concluye que $y \in \bigcup_{a\in A} T(a)$ lo que contradice que $y \notin \bigcup_{a\in A} T(a)$ y en conclusión se tiene entonces que $y \notin T(\bigcup_{a\in A} a)$ por lo que $\bigvee_{a\in A} T(\chi_a) \circ y = i_0$ y $T(\bigvee_{a\in A} \chi_a) \circ y = i_0$ y así se concluye que $\bigvee_{a\in A} T(\chi_a) = T(\bigvee_{a\in A} \chi_a)$.

2. Sea $x : 1 \longrightarrow X$ un átomo de $Hom(X, 2)$ entonces $T(x) : 1 \longrightarrow T(X)$ es nuevamente un átomo pues los átomos son justamente los elementos del objeto $T(X)$.
3. $[T(\chi_a \wedge \chi_b)] = [T(\chi_a) \wedge T(\chi_b)]$. Para demostrar esto, basta verificar que $T(\chi_a \wedge \chi_b) = T(\chi_a) \wedge T(\chi_b)$. Por un lado, el siguiente diagrama es un pullback

por construcción

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

pero como el funtor T preserva límites entonces el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} T(A \cap B) \arrow[r, "T(p_2)"] \arrow[d, "T(p_1)"'] & T(B) \arrow[d, "T(b)"] \\ T(A) \arrow[r, "T(a)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

ahora bien, nótese que por construcción también el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} T(A) \cap T(B) \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & T(B) \arrow[d, "T(b)"] \\ T(A) \arrow[r, "T(a)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

por lo que existen morfismos f y g que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} T(A \cap B) \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "T(p_2)"] \arrow[ddr, bend right, "T(p_1)"'] & & \\ & T(A) \cap T(B) \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & T(B) \arrow[d, "T(b)"] \\ & T(A) \arrow[r, "T(a)"'] & T(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(A) \cap T(B) \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\ & T(A \cap B) \arrow[r, "T(p_2)"] \arrow[d, "T(p_1)"'] & T(B) \arrow[d, "T(b)"] \\ & T(A) \arrow[r, "T(a)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

por lo tanto $T(\chi_a) \wedge T(\chi_b) \leq T(\chi_a \wedge \chi_b)$ y $T(\chi_a \wedge \chi_b) \leq T(\chi_a) \wedge T(\chi_b)$, por ello $T(\chi_a \wedge \chi_b) = T(\chi_a) \wedge T(\chi_b)$.

4. Sea χ_a y considérese su complemento χ_{a^c} se desea verificar que $[T(\chi_{a^c})] = [(T(\chi_a))^c]$ y para esto basta verificar que $T(\chi_{a^c}) = (T(\chi_a))^c$. Nótese que por el punto anterior

$$T(\chi_{a^c}) \wedge T(\chi_a) = T(\chi_a \wedge \chi_{a^c}) = T(0_{Hom(X,2)}) = 0_{Hom(T(X),2)}$$

y por otro lado, como T preserva supremos entonces

$$T(\chi_{a^c}) \vee T(\chi_a) = T(\chi_{a^c} \vee \chi_a) = T(1_{Hom(X,2)}) = 0_{Hom(T(X),2)}$$

por lo que $T(\chi_{a^c}) = (T(\chi_a))^c$

Así, se concluye que la asignación

$$Hom(1, 2^X) \longrightarrow Hom(1, 2^{T(X)})$$

es un homomorfismo de álgebras de Boole completas y atómicas y de aquí se induce entonces un isomorfismo en el conjunto de átomos respectivos

$$Hom(1, X) \xrightarrow{\cong} Hom(1, T(X))$$

que en particular es un isomorfismo. De esto se deduce que cualquier subconjunto de $T(X)$ es valor bajo T de un subconjunto de X. En efecto, sea $a : A \longrightarrow T(X)$ un subconjunto de $T(X)$ entonces para cada $y \in A$ se tiene que $a \circ y : 1 \longrightarrow T(X)$ y como el funtor T es pleno en 1 existe $x_y : 1 \longrightarrow X$ tal que $T(x_y) = y$ pero obsérvese que para cada $y \in A$ el elemento x_y es también un subconjunto de A y como la retícula de subobjetos de A es completa existe el supremo $\bigvee_{y \in A} x_y$ por lo que

$$T(\bigvee_{y \in A} x_y) = \bigvee_{y \in A} T(x_y) = \bigvee_{y \in A} y = A$$

Pero gracias a esto, es ahora posible concluir que T es un funtor pleno. Efectivamente, sea $f : T(A) \longrightarrow T(B)$ un morfismo cualquiera y considérese su gráfica $\langle id_{T(A)}, f\rangle : T(A) \longrightarrow T(A) \times T(B) \cong T(A \times B)$ la cual es un monomorfismo, entonces por lo que se acaba de probar existe $c : C \longrightarrow A \times B$ subconjunto de $A \times B$ de tal manera que $T(c) = \langle id_{T(A)}, f\rangle$ por lo tanto

$$\begin{aligned} T(\pi_B \circ c) &= T(\pi_B) \circ T(c) \\ &= \pi_{T(b)} \circ \langle id_{T(A)}, f\rangle \\ &= f \end{aligned}$$

y así el funtor T es pleno. Luego, por la Proposición 10.2 de esta sección se tiene que $T' \circ T \simeq id_{\mathcal{C}}$. Por último, para probar que $T \circ T' \simeq id_{\mathcal{C}'}$ se tiene que verificar que para cada objeto I de $\mathcal{C}'$ el morfismo

$$\phi(I) : I \longrightarrow T(T'(I))$$

es un isomorfismo. Primero, para verificar que es un monomorfismo, nótese que ya se verificó que para cada objeto A de $\mathcal{C}$ se tiene que $T'(T(A)) \cong A$ por lo que en particular se tiene que $T'(1) = T'(T(1)) \cong 1$ y más aún, como el funtor T' es adjunto izquiero del funtor T entonces el funtor T' preserva coproductos por lo que

$$T'(2) = T'(1+1) \cong T'(1) + T'(1) \cong 1 + 1 = 2$$

es decir que $\phi(2)$ es un isomorfismo. Ahora bien, para probar que $\phi(I)$ es un monomorfismo se probará que es un morfismo inyectivo, y para esto sean $x, y : 1 \longrightarrow I$

morfismos distintos. Como 2 es un objeto coseparador existe un morfismo $t : I \longrightarrow 2$ de tal manera que $t \circ x \neq t \circ y$ por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, bend right, "x"'] \arrow[dr, bend left, "y"] & & \\ & I \arrow[r, "\phi(I)"] \arrow[d, "t"'] & T(T'(I)) \arrow[d, "T(T'(t))"] \\ & 2 \arrow[r, "\phi(2)"'] & T(T'(2)) \end{tikzcd}$$

y como $\phi(2)$ es un isomorfismo entonces el morfismo $T(T'(t))$ es tal que

$$T(T'(t)) \circ (\phi(I) \circ x) \neq T(T'(t)) \circ (\phi(I) \circ y)$$

por lo tanto

$$\phi(I) \circ x \neq \phi(I) \circ y$$

y así el morfismo $\phi(I)$ es un morfismo inyectivo y por tanto un monomorfismo. Para verificar que $\phi(I)$ es un epimorfismo nótese que $\phi(I)$ es un subconjunto de $T(T'(I))$ y por lo que se probó anteriormente existe $b : B \longrightarrow T'(I)$ de tal manera que $T(b) = \phi(I)$ por lo que $T(B) \cong I$ y así el morfismo $\phi(I)$ tiene la forma

$$\phi(I) : I \cong T(B) \longrightarrow T(T'(I)) \cong T(T'(T(B))) \cong T(B)$$

por lo que $\phi(I)$ es un epimorfismo y en conclusión se tiene que $\phi(I)$ es un isomorfismo. Así, se concluye que $T \circ T' \simeq id_{\mathcal{C}'}$ por lo que se tiene la equivalencia de categorías $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$. ■

Aunque el Teorema anterior es quizá el resultado más importante de este capítulo, es el siguiente corolario aquel que revela la verdadera naturaleza de los topos de Lawvere y a su vez, muestra que es posible reinterpretar a la teoría de conjuntos en un lenguaje categórico.

Corolario 10.4. *Sea $\mathcal{C}$ un topos de Lawvere que cumple el Axioma 7., que es completo y cocompleto y además cuya retícula de subobjetos es completa. Entonces el funtor*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{Hom(1,-)} \boldsymbol{Con}$$

define una equivalencia de categorías.

Demostración. Defínase la asignación

$$Hom(1, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

que a cada objeto C de $\mathcal{C}$ lo manda al conjunto $Hom(1, C)$ y a cada morfismo $f : C_1 \longrightarrow C_2$ en $\mathcal{C}$ lo manda al morfismo

$$Hom(1, -)(f) : Hom(1, C_1) \longrightarrow Hom(1, C_2)$$

tal que para cada $x : 1 \longrightarrow C_1$ se define como

$$Hom(1, -)(f)(x) := f \circ x$$

es un funtor. En efecto, sea $id_C : C \longrightarrow C$ entonces

$$Hom(1, -)(id_C) : Hom(1, C) \longrightarrow Hom(1, C)$$

tal que para cada $x : 1 \longrightarrow C$ se tiene que

$$Hom(1, -)(id_C)(x) = id_C \circ x = x$$

por lo tanto $Hom(1, -)(id_C) = id_{Hom(1,C)} = id_{Hom(1,-)(C)}$. Ahora bien, sean $f : C_1 \longrightarrow C_2$ y $g : C_2 \longrightarrow C_3$ dos morfismos en $\mathcal{C}$ entonces obsérvese que para cada $x \in Hom(1, C_1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom(1, -)(g \circ f)(x) &= g \circ f \circ x \\ &= Hom(1, -)(g)(f \circ x) \\ &= Hom(1, -)(g)(Hom(1, -)(f)(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Hom(1, -)(g \circ f) = Hom(1, -)(f) \circ Hom(1, -)(g)$. Así, $Hom(1, -)$ es un funtor. Para verificar que este funtor es pleno en 1, hay que probar que la función

$$\phi : Hom(1, C) \longrightarrow Hom(Hom(1, 1), Hom(1, C))$$

es suprayectiva, la cual está dada por

$$\phi(x) : Hom(1, 1) \longrightarrow Hom(1, C)$$

donde si $! : 1 \longrightarrow 1$ es el único morfismo entre este objetos, entonces

$$\phi(x)(!) = x \circ !$$

Sea $f : Hom(1, 1) \longrightarrow Hom(1, C)$ cualquiera, entonces $f(!) : 1 \longrightarrow C$ por ello

$$\phi(f(!)) : Hom(1, 1) \longrightarrow Hom(1, C)$$

es tal que

$$\phi(f(!))(!) = f(!) \circ ! = f(!)$$

por tanto $\phi(f(!)) = f$. Por otro lado, defínase la asignación

$$T' : \mathbf{Con} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tal que para cualquier conjunto I se tiene que

$$T'(I) := \sum_{i \in I} 1_i$$

Y que para cualquier función $f : X \longrightarrow Y$ se define

$$T'(f) : \sum_{x\in X} 1_x \longrightarrow \sum_{y\in Y} i_y$$

de la siguiente manera: primero obsérvese que para cada $x \in X$ se tiene

$$1_x \xrightarrow{!} 1_{f(x)} \xrightarrow{i_{f(x)}} \sum_{y\in Y} 1_y$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $i : \sum_{x\in X} 1_x \longrightarrow \sum_{y\in Y} 1_y$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{x\in X} 1_x \arrow[dr, dashed, "i"] & \\ 1_x \arrow[u, "i_x"] \arrow[r, "i_{f(x)}\circ !"'] & \sum_{y\in Y} 1_y \end{tikzcd}$$

Así, defínase $T'(f) = i$, es decir $T'(f)$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. Se afirma que esta asignación define un funtor. En efecto, sea $id_X : X \longrightarrow X$, entonces $T'(id_X) : \sum_{x\in X} 1_x \longrightarrow \sum_{x\in X} 1_x$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{x\in X} 1_x \arrow[dr, dashed, "T'(X)"] & \\ 1_x \arrow[u, "i_x"] \arrow[r, "i_{id_x(x)}\circ !=i_x"'] & \sum_{x\in X} 1_x \end{tikzcd}$$

Pero obsérvese que

$$id_{\sum_{x\in X} 1_x} : \sum_{x\in X} 1_x \longrightarrow \sum_{x\in X} 1_x$$

también hace conmutar al diagrama, por lo tanto

$$T'(id_X) = id_{\sum_{x\in X} 1_x} = id_{T'(X)}$$

Por último, tómense $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones, por un lado $T'(g \circ f)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{x\in X} 1_x \arrow[dr, dashed, "T'(g\circ f)"] & \\ 1_x \arrow[u, "i_x"] \arrow[r, "i_{g(f(x))}"'] & \sum_{z\in Z} 1_z \end{tikzcd}$$

Pero por otro lado, considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum_{x\in X} 1_x \arrow[r, dashed, "T'(f)"] & \sum_{y\in Y} 1_y \arrow[d, dashed, "T'(g)"] \\
1_x \arrow[u, "i_x"] \arrow[ur, "i_{f(x)}"] \arrow[r, "i_{g(f(x))}"'] & \sum_{z\in Z} 1_z
\end{tikzcd}$$

y nótese que

$$T'(g) \circ T'(f) \circ i_x = T'(g) \circ i_{f(x)} = i_{g(f(x))}$$

Por lo tanto

$$T'(g \circ f) = T'(g) \circ T'(f)$$

Así, T' es un funtor. Basta verificar que el funtor $Hom(1, -)$ es adjunto izquierdo del funtor T. Para esto, considérese la asignación

$$\epsilon : Hom(1, -) \circ T' \Longrightarrow id_{\mathbf{Con}}$$

tal que para cada conjunto X se tiene

$$\epsilon_X : Hom(1, \sum_{x\in X} 1_x) \longrightarrow X$$

donde para cada $i_{x'} : 1 \longrightarrow \sum_{x\in X} 1_x$ se define por

$$\epsilon_X(i_{x'}) := x'$$

Se afirma que esta asignación es una transformación natural. En efecto, considérese una función $f : X \longrightarrow Y$ entonces se busca que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom(1, \sum_{x\in X} 1_x) \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[d, "Hom(1,-)\circ T'(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Hom(1, \sum_{y\in Y} 1_y) \arrow[r, "\epsilon_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $i_{x'} : 1 \longrightarrow \sum_{x\in X} 1_x$ entonces por un lado

$$f \circ \epsilon_X(i_{x'}) = f(x')$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\epsilon_Y \circ Hom(1, -) \circ T'(f)(i_{x'}) &= \epsilon_Y \circ T'(f)(i_{x'}) \\
&= \epsilon_Y \circ i_{f(x')} \\
&= f(x')
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϵ es una transformación natural. Por otro lado, defínase

$$\eta : id_{\mathcal{C}} \Longrightarrow T' \circ Hom(1, -)$$

donde para cada $C \in \mathcal{C}$ se define

$$\eta_C : C \longrightarrow \sum_{x \in Hom(1,C)} 1_x$$

tal que para cada $x' : 1 \longrightarrow C$ se tiene que

$$\eta_C(x') := i_{x'}$$

donde $i_{x'} : 1 \longrightarrow \sum_{x \in Hom(1,C)} 1_x$. Para verificar que esta asignación es una transformación natural, sea $f : C_1 \longrightarrow C_2$ un morfismo entonces se necesita que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\eta_{C_1}"] \arrow[d, "f"'] & \sum_{x \in Hom(1,C_1)} 1_x \arrow[d, "T' \circ Hom(1,-)(f)"] \\ C_2 \arrow[r, "\eta_{C_2}"'] & \sum_{x \in Hom(1,C_2)} 1_x \end{tikzcd}$$

Para esto, sea $x' : 1 \longrightarrow C_1$ entonces por un lado

$$\eta_{C_2} \circ f(x') = i_{f(x')}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} T' \circ Hom(1,-)(f) \circ \eta_{C_1}(x') &= T' \circ f \circ \eta_{C_1}(x') \\ &= T'(f \circ i_{x'}) = i_{f(x')} \end{aligned}$$

Por lo tanto, η es una transformación natural. Por último, se requiere que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} Hom(1,-) \arrow[r, "Hom(1,-)(\eta)"] \arrow[dr, "id_{Hom(1,-)}"'] & Hom(1,-) \circ T' \circ Hom(1,-) \arrow[d, "\epsilon(Hom(1,-))"] \\ & Hom(1,-) \end{tikzcd}$$

es decir, que para cada objeto C de $\mathcal{C}$ se cumpla que

$$\begin{tikzcd} Hom(1,C) \arrow[r, "Hom(1,-)(\eta_C)"] \arrow[dr, "id_{Hom(1,C)}"'] & Hom(1, \sum_{x \in Hom(1,C)} 1_x) \arrow[d, "\epsilon(Hom(1,C))"] \\ & Hom(1,C) \end{tikzcd}$$

Para esto, tómese $y : 1 \longrightarrow C$ cualquiera, entonces

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_{Hom(1,C)\circ Hom(1,-)(\eta_C)(y)} & = & \epsilon_{Hom(1,C)} \circ \eta_C \circ y \\ & = & \epsilon_{Hom(1,C)} \circ i_y \\ & = & y \\ & = & id_{Hom(1,C)}(y) \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama es conmutativo. Por último, también se requiere que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "\eta(T')"] \arrow[dr, "id_{T'}"'] & T' \circ Hom(1,-) \circ T' \arrow[d, "T'(\epsilon)"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

Para esto, sea X un conjunto cualquiera, se requiere la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sum_{x\in X} 1_x \arrow[r, "\eta_{\sum_{x\in X} 1_x}"] \arrow[dr, "id_{\sum_{x\in X} 1_x}"'] & \sum_{x'\in Hom(1,\sum_{x\in X})} 1_{x'} \arrow[d, "T'(\epsilon_X)"] \\ & \sum_{x\in X} 1_x \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $i_{x'} : 1 \longrightarrow \sum_{x\in X} 1_x$ cualquiera, entonces

$$\begin{array}{rcl} T'(\epsilon_X) \circ \eta_{\sum_{x\in X} 1_x}(i_{x'}) & = & T'(\epsilon_X) \circ i_{i_{x'}} \\ & = & i_{\epsilon_X(i_{x'})} \\ & = & i_{x'} \\ & = & id_{\sum_{x\in X} 1_x}(i_{x'}) \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama es conmutativo. Así, puesto que se cumplen las identidades triangulares, entonces el funtor $Hom(1,-)$ es adjunto izquierdo del funtor T'. Luego, por el Teorema 10.3 se tiene la equivalencia

$$\mathcal{C} \cong \mathbf{Con}$$

■

Conclusiones

En la tesis se presentó el concepto de espacio étalé, el cual es de fuerte carácter topológico. Así mismo, se presentó la categoría de los espacios étalé, y se vio que aunque el concepto se presta para cuestiones topológicas, no es tan amigable para cuestiones categóricas. En particular, no es fácil describir las construcciones categóricas usuales, es decir, productos, igualadores, límites, coproductos, coigualadores y colímites. La única construcción sencilla de describir son los productos binarios. Sin embargo, este problema se puede solucionar presentando el concepto de gavillas y demostrando que la categoría de gavillas y la categoría de espacios étalé son equivalentes. Aquí el problema se soluciona a medias, puesto que en la categoría de gavillas se tiene que los límites (de aquí, que productos e igualadores también) son sencillos de construir debido a que se construyen entrada a entrada. Ahora bien, para los colímites se requiere un poco más de trabajo, puntualmente se necesita del funtor gavillificación que es el adjunto izquierdo del funtor inclusión de la categoría de gavillas en la categoría de pregavillas. Es importante hacer notar que es funtor, lo que hace de forma práctica es construir el espacio étalé asociado a una pregavilla y luego le asigna su gavilla correspondiente. De este modo, se puede usar el hecho de que la categoría de pregavillas tiene colimites y se calculan puntualmente, así el colímite en la categoría de gavillas consiste en pensarlo en la categoría de pregavillas y luego usar el funtor gavillificación, que al ser un adjunto izquierdo preserva colímites. Todo esto dice que la categoría de gavillas (y así la categoría de espacios étalé) es una categoría completa y cocompleta.

En el segundo capítulo se planteó el concepto de topos elemental. Así las propiedades categorícas de un topos elemental se interpretan como propiedades de un modelo de una teoría de conjuntos intuitiva. Con esto en mente, se demuestra que la categoría de gavillas sobre un espacio topológico es un topos elemental, la demostración depende de que esta categoría es cocompleta y por lo tanto tiene colímites finitos, usando fuertemente los resultados del capítulo anterior. Este resultado es muy fuerte e interesante, pues se puede decir que se tienen tantos modelos de la teoría de conjuntos como espacios topológicos.

Finalmente se profundiza en este tema de la teoría de conjuntos bajo la guía de Lawvere que en su artículo seminal [17] estudia la interpretación de conceptos conjuntistas como conceptos de la teoría de categorías planteando un antecedente a lo que después se llamarán topos elementales. Se demuestra que un topos elemental con unas cuantas hipotesis más resulta ser equivalente a la categoría de conjuntos. Este hecho se puede pensar en terminos de la elegancia del concepto de topos elemental, al ser una definición compacta que con unos cuantos axiomas más se puede trivializar, considerando que ser trivial es ser equivalente a la categoría de conjuntos, puesto que parece ser que la idea de Lawvere era expandir la teoría de conjuntos desde una perspectiva categórica.

En conclusión, en este trabajo se expone cómo un concepto de carácter puramente topológico como el de espacio étalé, puede ser tan versatil como para terminar modelando (aunque sea de forma intuitiva) la teoría de conjuntos. Cabe recalcar que todo esto se logra gracias al uso de herramientas categóricas.

Bibliografía

[1] Glen E Bredon. *Sheaf theory*. Vol. 170. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Henri Cartan. “Faisceaux sur un espace topologique. I”. En: *Séminaire Henri Cartan* 3 (1950), págs. 1-8.

[3] Claude Chevalley. *Theory of Lie groups*. Courier Dover Publications, 2018.

[4] Georges De Rham. “Sur l’analysis situs des variétés à n dimensions”. En: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 10 (1931), págs. 115-200.

[5] P Deligne y col. “Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie-Cohomologie étale-(SGA 4 1/2)”. En: (1977).

[6] Jean Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*. Birkhäuser, 1989.

[7] Cartan Élie. “La méthode du repère mobile. La théorie des groupes continus et les espaces généralisés”. En: *Exposès de gèomètrie* 5 (1935).

[8] Jean Giraud. “Analysis situs”. En: *Séminaire Bourbaki* 63.6 (1962).

[9] Roger Godement. “Topologie algébrique et théorie des faisceaux”. En: *Publications de* 1 (1958).

[10] Roger Godement. *Topologie Algebrique; Theories Des Faisceaux*. Hermann, 1958.

[11] Robert Goldblatt. *Topoi The Categorial Analysis of Logic*. Dover Publications, INC., 2006.

[12] E Bruce Goldstein. *Encyclopedia of perception*. Sage, 2010.

[13] Alexandre Grothendieck. “Sur quelques points d’algèbre homologique”. En: *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 9.2 (1957), págs. 119-183.

[14] Paul Richard Halmos. *Naive set theory*. van Nostrand, 1960.

[15] Peter Johnstone. *Topos Theory*. Dover Publications, INC., 2014.

[16] Peter T Johnstone, I Moerdijk y AM Pitts. “Sketches of an Elephant”. En: *A Topos Theory Compendium* 2 (2003).

[17] F William Lawvere y Colin McLarty. “An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary”. En: *Reprints in Theory and Applications of Categories* 11 (2005), págs. 1-35.

[18] J Leray. “L’homologie d’un espace topologique”. En: *CRAS* 214 (1942), págs. 839-841.

[19] J Leray. "Les complexes d'un espace topologique". En: *L'homologie d'un espace topologique* (1942), págs. 781-782.

[20] J Leray. "Les équations dans les espaces topologiques". En: *CRAS* 214 (1942), págs. 897-899.

[21] J Leray. "Transformations et homéomorphies dans les espaces topologiques". En: *CRAS* 214 (1942), págs. 938-940.

[22] J. Leray. "Sur les equations et les transformations". En: *J. Math. Pures Appl.(9)* (1945).

[23] Jean Leray. "Sur la forme des espces topologiques et sur les points fixes des representations". En: *J. Math. Pures Appl.* 9 (1945), págs. 95-248.

[24] Jean Leray. "Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique". En: *J. Math. Pures Appl.(9)* 24 (1945), págs. 169-199.

[25] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[26] Saunders MacLane y Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[27] Anastasios Mallios. *Geometry of vector sheaves: an axiomatic approach to differential geometry.* Vol. 1. Springer Science & Business Media, 1998.

[28] Richard G Swan y R Réd. *The theory of sheaves.* University of Chicago Press Chicago, 1964.

[29] Stephen Willard. *General Topology.* Dover Publications, INC., 2004.