



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Posgrado en Ciencias Físicas

Reducción de acoplamientos en modelos  
multi-Higgs

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**Presenta:**

Ing. Fis. Miguel Angel May Pech

**Tutor principal:**

Dra. Myriam Mondragón Ceballos

(Instituto de Física, UNAM)

**Comité tutorial:**

Dr. Antonio Ortiz Velásquez

(Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM)

Dra. María Catalina Espinoza Hernández

(Instituto de Física, UNAM)

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia en  
Tulum, Hondzonot y Chan  
Chen I, Quintana Roo.*

# Agradecimientos

Los primeros con quienes siempre estaré agradecido serán, mi familia, pues sin las enseñanzas de vida y su apoyo en esta etapa no podría haberlo logrado. A mi madre Mauricia, a mi padre Benjamín, a mis hermanitos Mauricio, Lidia, junto con Sergio, su esposo y Linette, mi sobrina, con quienes, como producto de las circunstancias históricas, he compartido en casa gran parte de la maestría; pero en especial a mi querida hermanita Lizbeth Ana, quien ha vivido de cerca conmigo este proceso, fungiendo como motor principal en este camino y para quien quisiera cumplir la meta de ser su ejemplo a seguir.

A mis amigos que se han vuelto una segunda familia, ayudándome a superar cada reto de esta aventura; sobretodo a los que me ayudaron a hacer de la ciudad de México un segundo hogar y a quienes llevaré por siempre en el corazón. Y con el perdón de quienes también merecen ser nombrados, en esta ocasión me gustaría agradecer especialmente a Alexia Cab Ledezma, quien en la última década ha sabido brindarme verdadera amistad, quien desde el principio creyó y me ayudó a creer en mí mismo para lograr esta meta y quien nunca ha dudado en ayudarme en los momentos en los que más lo he necesitado.

Por supuesto, el mayor de los agradecimientos está reservado para la Dra. Myriam Mondragón Ceballos, a quién las palabras no serán suficientes para agradecerle todo su apoyo, enseñanzas y acompañamiento durante estos años de maestría, pues además de dirigir académicamente este proyecto, también supo ofrecer su paciencia y amistad incondicionales, sin las cuales no habría podido llegar hasta este punto.

A los miembros de mi comité tutorial, Dr. Antonio Ortiz Velásquez del Instituto de Ciencias Nucleares y Dra. María Catalina Espinoza Hernández del Instituto de Física, por el seguimiento y paciencia durante esta etapa.

A mis sinodales Dra. Melina Gómez Bock, Dr. Genaro Toledo Sánchez, Dr. Eduardo Peinado Rodríguez y Dr. Félix Francisco González Canales, por aceptar ser parte del comité que examinó este trabajo, por sus consejos y tiempo invertidos esta tesis.

A los profesores que compartieron sus conocimientos y experiencias, al personal administrativo tanto del Posgrado en Ciencias Físicas, Instituto de Física y Biblioteca de la misma, quienes siempre me atendieron con eficiencia y amabilidad. Y en general, a todas las personas con las que conviví muchos días en el Instituto de Física, quienes siempre me recibieron con los brazos abiertos y me acogieron como un miembro más de esa hermosa comunidad, muchísimas gracias.

Al Posgrado en Ciencias Físicas, al Instituto de Física, al Instituto de Ciencias Nucleares y a la UNAM por darme la oportunidad de cumplir este sueño de hacer un posgrado en la máxima casa de estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), pues sin el apoyo económico que esta institución brindó no sería posible la realización de este posgrado.

Al Instituto de Física, a través del Programa de Reactivación de la Investigación y Docencia del Instituto de Física (PRIDIF21-3) y a la DGAPA-UNAM, por la beca recibida, con cuyo apoyo se pudo concluir esta tesis.

*Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN111518 y IN109321.*

# Abstract

The purpose of this work is to explore the results of the application of the so-called *reduction of couplings method* in the extensions of the Standard Model (SM) with multiple Higgs doublets. Specifically, we applied the reduction method on models with 2 doublets (2HDM) with natural conservation of flavor, called 2HDM type I, II, X and Y.

The reduction of couplings method provides a methodology to deal with the *free parameters problem*, which refers to the fact that in the SM and therefore its extensions, there are coupling parameters, necessary for the theory to work, whose values, however, are not provided analytically and it is necessary to fix them experimentally. The method proposes to express  $n - 1$  parameters of a model, only in terms of one of them, which will be called primary coupling. Knowing these functions, it is possible to calculate the values of the coupling constants and make predictions for the Yukawa couplings, and therefore the masses of the corresponding particles.

As a result of this analysis, we found for the types I and X, using the strong coupling constant as primary coupling, that we could only reduce the Yukawa coupling of the top quark and one of the quartic couplings of the Higgs doublets. From these results we were able to obtain mass predictions for top quark  $m_t \leq 99.9$  GeV and the Higgs boson,  $m_H \leq 55.8$  GeV, consistent with the Standard Model reduction. For the types II and Y, the following masses are predicted: the top quark  $m_t \approx 94.7$  GeV and the five Higgs scalars  $m_H \approx 50.6$  GeV,  $m_h \approx 1.7$  GeV,  $m_{H^\pm} \approx 36$  GeV,  $m_A = 0$ .

From the study of models with two doublets, it was possible to make inferences about the models with  $N$ -doublets, among which stand out that the mere introduction of Higgs fields without other extra symmetries is not enough to understand the origin of the masses successfully through the reduction of couplings method.

# Resumen

El propósito de este trabajo es explorar los resultados de la aplicación del llamado *método de reducción de acoplamientos* en las extensiones del Modelo Estándar (ME) con múltiples dobletes de Higgs. En concreto, aplicamos el método de reducción a modelos con dos dobletes de Higgs (2HDM) con conservación natural del sabor, denominados 2HDM tipo I, II, X e Y.

El método de reducción de acoplamientos proporciona una metodología para tratar el *problema de parámetros libres*, que se refiere al hecho de que en el ME y por ende en sus extensiones, existen parámetros de acoplamiento, necesarios para que la teoría funcione, cuyos valores, sin embargo, no son proporcionados por la teoría y es necesario fijarlos experimentalmente. El método propone escribir  $n - 1$  parámetros de un modelo, en función de solo uno de ellos, al que denominaremos acoplamiento primario. Conociendo estas funciones, es posible calcular los valores de las constantes de acoplamiento y hacer predicciones de las masas de algunas partículas elementales con ellas.

Como resultados de este análisis, encontramos para los tipos I y X, con la constante de acoplamiento fuerte, como acoplamiento primario, que solamente pudimos reducir el acoplamiento de Yukawa del quark top y uno de los acoplamientos cuárticos de los dobletes de Higgs; con esto pudimos obtener predicciones de masa para el quark top  $m_t \leq 99.9$  GeV y el bosón de Higgs  $m_H \leq 55.8$  GeV, consistentes con la reducción del ME. Para los tipos II e Y, se predicen las siguientes masas: para el quark top  $m_t \approx 94.7$  GeV y para los cinco escalares de Higgs  $m_H \approx 50.6$  GeV,  $m_h \approx 1.7$  GeV,  $m_{H^\pm} \approx 36$  GeV,  $m_A = 0$ .

A partir del estudio de modelos con dos dobletes, fue posible realizar inferencias sobre los modelos con  $N$  dobletes, entre las que se destaca, que la mera introducción de los campos de Higgs sin otras simetrías extras, no es suficiente para entender exitosamente el origen de las masas a través del método de reducción de acoplamientos.

# Índice general

Índice de figuras	x
Índice de cuadros	xi
Introducción	xii
<b>1. Modelos multi-Higgs</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales . . . . .	1
1.2. Modelos con $N$ dobletes de Higgs . . . . .	15
1.3. Modelos con dos dobletes de Higgs . . . . .	17
<b>2. Ecuaciones del grupo de renormalización</b>	<b>21</b>
2.1. Renormalización de Wilson . . . . .	21
2.2. Ecuación de Callan-Symanzik . . . . .	22
<b>3. Método de reducción de acoplamientos</b>	<b>25</b>
3.1. El método . . . . .	26
3.2. Soluciones a las ecuaciones de reducción . . . . .	27
<b>4. Reducción de acoplamientos aplicado a un modelo de dos dobletes de Higgs</b>	<b>29</b>
4.1. El modelo . . . . .	29
4.2. Reducción completa . . . . .	32
4.3. Reducción parcial . . . . .	51
4.4. Masas de partículas elementales . . . . .	58
<b>5. Resultados y discusiones</b>	<b>62</b>
5.1. Resultados . . . . .	62

5.2. Discusiones . . . . .	64
<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
<b>A. Cambio de variables</b>	<b>75</b>
A.1. Nuevas ecuaciones del grupo de renormalización . . . . .	76
A.2. Nuevas ecuaciones de reducción . . . . .	79
A.3. Soluciones de las nuevas ecuaciones de reducción . . . . .	79
A.4. Condición de frontera para soluciones generales . . . . .	81
<b>B. Funciones beta de los acoplamientos cuárticos para 2HDM Tipos I, II, IX y Y</b>	<b>83</b>
B.1. Ecuaciones del grupo de renormalización . . . . .	83
B.2. Nuevas RGE . . . . .	86

# Índice de figuras

1.	Partículas del Modelo Estándar . . . . .	2
2.	Acoplamientos de norma para $N$ dobletes . . . . .	69

# Índice de cuadros

1.	Modelos de dos dobletes con NFC . . . . .	20
2.	Valores de los parámetros $a_i$ . . . . .	38
3.	Constantes de acoplamientos encontradas . . . . .	63
4.	Predicciones de masa . . . . .	64

# Introducción

Desde su formulación en los años setenta, cuando que se encontraron las *corrientes débiles neutrales* [1], hasta el reciente descubrimiento del bosón de Higgs en el 2012 [2,3], en las instalaciones de la Organización Europea para la Investigación Nuclear, mejor conocida como CERN (anteriormente, por sus siglas en francés). El Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales (ME), ha demostrado ser un modelo teórico conveniente y fenomenológicamente exitoso para la descripción de tres de las interacciones fundamentales, así como de diversos fenómenos cuánticos de la naturaleza.

No obstante, desde hace varios años, ya era ampliamente conocido en el ámbito científico que dicho modelo no es capaz de explicar todas las incógnitas del universo, basta con recordar que en principio se desprecian los efectos de la interacción gravitacional para notar que, de hecho, esta no es una teoría completa. Haber [4], menciona algunas de las cuestiones más importantes a resolver:

Neutrinos con masa distinta de cero; materia oscura, la asimetría bariónica del universo, la supresión de la violación-CP en la interacción fuerte (el llamado problema fuerte), unificación del acoplamiento de norma, inflación en el universo temprano, energía oscura y la interacción gravitacional.

Si bien el descubrimiento del bosón de Higgs ratificó la eficacia del ME, también significó encontrar la última pieza de un esquema en el cual no se contemplaban estas situaciones escritas, por lo tanto el paso consecuente es la búsqueda de nuevas teorías o modelos más allá del Modelo Estándar, que sean capaces de incluir en sus formulaciones estos fenómenos o características que el ME no es capaz de describir en su forma actual.

Por otro lado, si bien ya se han comentado problemáticas que pueden verse como externas a la formulación del Modelo Estándar, cuando se examina la estructura interna de este, también es posible encontrar algunas incógnitas o asuntos pendientes por resolver.

Una de dichas cuestiones y que es la principal problemática que se desea tratar en este trabajo, es el conocido como *problema de los parámetros libres*, el cuál hace referencia al número de parámetros de acoplamiento que el modelo requiere para poder describir las interacciones y cuyos valores deben ser determinados de manera experimental. Dichos parámetros o constantes que pueden llegar a ser hasta diecinueve [5], no son determinados de manera analítica con la teoría y representan un problema precisamente por su aparente arbitrariedad, es decir, el modelo no proporciona una explicación a los valores que se miden y que sin embargo, son fundamentales para el funcionamiento de este. Entre dichos parámetros se encuentran indirectamente las masas de las partículas elementales.

En este trabajo se pretende tratar con las dos problemáticas presentadas: en primera con la necesidad de estudiar modelos que busquen resolver alguno de los fenómenos que el ME actualmente no es capaz y en segundo lugar con el problema de los parámetros libres.

Para el primer caso, se ha decidido optar por el estudio de una de las extensiones más sencillas de implementar en el Modelo Estándar, los conocidos como *modelos multi-Higgs*. Los cuales a grandes rasgos explotan la característica de que en el mecanismo de Higgs, una de las partes centrales del ME, en realidad no se prescribe el número máximo de campos escalares necesarios para la implementación de dicho mecanismo, es decir, es posible emplear más de un único doblete de Higgs, que es como está implementado actualmente en el ME. La exploración de este tipo de extensiones está motivada por el hecho de que la introducción de más dobletes, trae consigo nueva física que el modelo con uno sólo no posee, entre estas destacan: nuevas formas de violación CP, corrientes neutras con cambio de sabor a nivel árbol y nuevas partículas de Higgs, que a su vez pueden presentarse candidatos para de materia oscura [6].

Por otro lado, respecto al problema de los parámetros libres se propone continuar con el trabajo comenzado por W. Zimmermann quien desarrolló un tratamiento conocido como el *método de reducción de acoplamientos* [7], con el cuál plantea una forma de, como el nombre lo sugiere, disminuir la cantidad de parámetros libres, de tal forma que  $n - 1$  acoplamientos de determinado modelo queden en función de uno solo de ellos. Haciendo uso de los principios de renormalizabilidad e invariancia bajo el grupo de grupo renormalización, plantea las condiciones para poder encontrar las funciones que relacionan

los parámetros entre sí de modo que se reduzcan a un único parámetro libre.

Cabe mencionar, que por supuesto, este método fue aplicado ya al Modelo Estándar [24, 26], dando como resultado predicciones de masas para quark top ( $m_t = 81$  GeV) y el bosón de Higgs ( $m_H = 61$  GeV), que si bien después se comprobó que no fueron las encontradas en los experimentos, precisamente esta falta de precisión es una de las motivaciones para continuar explorando, en primera con el mencionado método de reducción, a través de la implementación de valores más actualizados para el acoplamiento primario, pero también de los resultados que arrojaría en modelos con modificaciones o extensiones del ME.

Dicho lo anterior, en el presente trabajo se pretende de manera específica estudiar las consecuencias de aplicar el método de reducción de acoplamientos en la extensión del Modelo Estándar con dos dobletes de Higgs (2HDM). Cubriéndose con esto las problemáticas mencionadas: estudiar un modelo *más allá del Modelo Estándar* y tratar con el problema de los parámetros libres.

Definiéndose, por tanto, los siguientes objetivos:

- Hacer un introducción al estudio de los modelos multi-Higgs, en particular al modelo de dos dobletes (2HDM) presentando los diferentes casos o versiones de este.
- Presentar el *método de reducción de acoplamientos* y la manera en cómo este permite tratar con el problema de los parámetros libres, destacándose que esto permite hacer el cálculo de masas de partículas elementales.
- Aplicar el método de *reducción de acoplamientos* a modelos de dos dobletes de Higgs con conservación natural de sabor, que se subdivide en dos pasos:
  - Resolver las *ecuaciones reducidas*, para que permitan determinar bajo ciertas condiciones los valores de las constantes de acoplamiento.
  - Hacer el cálculo de masas de las partículas elementales a partir de las constantes encontradas.

# CAPÍTULO 1

---

## Modelos multi-Higgs

---

### 1.1. Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales

El Modelo Estándar de la Física de Partículas, usualmente solo llamado *Modelo Estándar* (ME), es una *teoría cuántica de campos*, que proporciona un marco teórico con el cuál es posible describir tres de las fuerzas fundamentales de la naturaleza: el electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte.

Más específicamente es una *teoría de campos de norma* (gauge field theory, en inglés), pues se exige que los lagrangianos que describen la dinámica de las partículas cumplan con ciertas *simetrías de norma* locales, esto es, que permanezcan invariantes bajo las conocidas como transformaciones de norma. Este último es un principio básico que demanda que sea posible transformar los grados de libertad internos del sistema sin que la física subyacente sufra modificaciones. Como producto de la exigencia del cumplimiento de este principio, resulta que los lagrangianos deben incorporar otros campos llamados *campos de norma*, que resultan ser los mediadores de las interacciones entre partículas.

Las simetrías de norma, están relacionadas con los grupos de simetrías matemáticas y resultan de interés para la Física de Partículas, pues ciertos grupos que también son simetrías de norma están asociados con las fuerzas fundamentales, de forma que los campos de norma que surgen de exigir su cumplimiento coinciden con los campos de las interacciones fundamentales.

Por ejemplo, en Electrodinámica Cuántica para que se cumpla la simetría de norma del grupo  $U(1)$ , es necesario añadir un campo  $A_\mu(x)$  a los lagrangianos, ¡mismo que resulta coincidir con las características la interacción electromagnética! Esto mismo ocurre con las otras dos fuerzas fundamentales, de modo que cada una de ellas se le asocia con un grupo de simetría y de tal manera que se dice que el Modelo Estándar es una teoría de norma

que cumple con el grupo de simetría de norma:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1).$$

Si bien parece natural la explicación de que la fuerzas fundamentales que experimentan las partículas ocurra a través de estos campos de interacción, resulta conveniente y atractivo el hecho de que surjan también como consecuencia de la exigencia de un principio básico de simetría.

Pensando un poco en la forma usual en la que se presenta el ME, es decir, como un conjunto de partículas, la forma ilustrativa en la que usualmente se suelen visualizar estos modelos es imaginar que la interacción entre dichas partículas se realiza a través del “intercambio” de otras partículas que portan la fuerza, es decir, a través de la “transferencia” de bosones. No obstante, es necesario advertir que lo anterior solo es una recurso didáctico, pues en el contexto de la teoría de campos, las partículas en realidad no son corpúsculos sino excitaciones de un campo cuántico y no ocurre un intercambio en el sentido clásico, sin embargo, verlas de esta manera facilita la interpretación de este concepto abstracto.



Figura 1: Partículas del Modelo Estándar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Recuperado de <https://www.conicet.gov.ar>.

En esta dirección, a modo de un resumen descriptivo y siguiendo la figura 1, el ME predice la existencia de bosones de norma asociados a las fuerzas fundamentales que describen. El fotón  $\gamma$  para la interacción electromagnética, para la interacción nuclear fuerte el gluón  $g$  y para la nuclear débil los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ . Dichos bosones “median” las interacciones entre los fermiones, organizados en 6 leptones y 6 quarks. Por supuesto, es necesario mencionar que algunos de los bosones también pueden interactuar entre sí a través las fuerzas fundamentales a las cuales pueden ser sensibles, por lo que se adelanta que las interacciones no solo se dan entre fermiones sino también entre bosones, aunque siempre a través de los bosones de norma.

Finalmente, la partícula que se observa en la región superior derecha de la figura 1, el bosón de Higgs y que no se le ha referido hasta ahora como el portador de alguna fuerza fundamental, tiene su origen en una situación surgida en el contexto de las teorías de norma. Resulta que los términos que indican las masas de las partículas rompen con ciertas simetrías, por lo que estos términos no podrían incluirse en los lagrangianos en consecuencia en las teorías de norma las partículas tendrían que ser no masivas; sin embargo, como es evidente, la masa de las partículas existe y fue necesario plantear un mecanismo capaz explicar satisfactoriamente el origen de las masas, pero a la vez que respete los principios básicos de estas teorías.

La solución a dicha situación se planteó en los años sesenta y es conocido como el *mecanismo de ruptura espontánea de la simetría*, comúnmente llamado mecanismo de Higgs [8–10], en honor a uno de los primeros físicos que publicó sus trabajos al respecto. Esta solución consiste en proponer la existencia de un campo escalar, el campo de Higgs, el cual a través de acoplamiento con los campos de las partículas elementales, permite que estas puedan adquirir términos de masa.

Como producto de la existencia de dicho campo escalar, se predijo la existencia de nueva partícula masiva llamada *bosón de Higgs*, cuya identificación en los experimentos sustentaría la propuesta del mecanismo de obtención de masa. Tuvieron que pasar más de 50 años hasta que en las instalaciones del CERN pudo ser encontrada una partícula consistente con las características del bosón predicho [2, 3], completando con esto el catálogo expuesto en la figura 1.

Como se menciona en la introducción dicho suceso cerró un esquema que puede considerarse mínimamente funcional del ME, pues explicaba satisfactoriamente las interacciones entre las partículas y diversos fenómenos cuánticos. Esta versión inicial también es conocida como Modelo Estándar Mínimo (MSM, por sus siglas en inglés).

No obstante, como también ya se ha comentado, el MSM está lejos de ser la última palabra y al igual que como se hizo con el problema de las masas, en lugar de abandonar esta teoría que goza de una amplia validación experimental, una estrategia natural a seguir es la de hacerle modificaciones o extensiones que permitan ampliar sus alcances hasta poder cubrir o dotar de alguna explicación a los fenómenos o descubrimientos actuales; estas extensiones son comúnmente llamadas física *más allá del Modelo Estándar* (BSM, por sus siglas en inglés), sin embargo, para poder hablar de dichos modelos y la manera en que hay que modificar el ME, ciertamente es necesario primero hacer una introducción a las partes más importantes que componen este modelo.

### 1.1.1. Lagrangiano del Modelo Estándar

Los lagrangianos juega un papel central en las Teorías Cuánticas de Campos, pues son estos los que determinan la forma que tendrán las interacciones.

En mecánica clásica se aprende que el origen de lagrangiano se encuentra en el principio de Hamilton o principio de mínima acción, el cuál, de manera simplificada, indica que la evolución temporal de un sistema físico será aquella que minimice una cantidad llamada *acción*  $s$ , que se define como,  $s = \int L dt$ , esto es, tal que  $\delta s = 0$ , de donde  $L[q(t), \dot{q}(t)]$  es la funcional llamada *lagrangiano* que se encuentra dada como la diferencia de la energía cinética menos la energía potencial,  $L = T - V$ . A partir de este principio es que se determina la llamada, ecuación de Euler-Lagrange (1.1), de donde se pueden obtener las *ecuaciones de movimiento* para sistemas discretos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.1)$$

Para un sistema con un número infinito de grados de libertad, como lo son los

campos, es necesario definir el lagrangiano en términos de una *densidad lagrangiana*  $\mathcal{L}$ , de tal modo que la acción queda de la siguiente manera:

$$s = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x. \quad (1.2)$$

con esto la ecuación de Euler-Lagrange para campos se reescribe como:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.3)$$

En las teorías cuánticas de campos el principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange también son empleadas para determinar el comportamiento de los campos. En particular el uso de la densidad lagrangiana se hace presente en el formalismo de la integral de caminos, de la cual se obtienen las reglas que rigen las interacciones. Por lo que los elementos en el lagrangiano, como es llamada comúnmente a la densidad lagrangiana, son los que dictan las interacciones de las partículas.

Para los propósitos de este trabajo, resulta entonces conveniente hacer la descripción del lagrangiano del ME como se ha venido comentando, es decir, como una combinación de teorías de norma para la descripción de las fuerzas fundamentales junto con un mecanismo para la obtención de las masas de las partículas. Examinarlo de este modo será muy útil más adelante, pues permite distinguir de manera precisa los diferentes sectores de esta que se modificarán para este trabajo:

$$\mathcal{L}_{\text{ME}} = \mathcal{L}_{\text{fermiónico}} + \mathcal{L}_{\text{norma}} + \mathcal{L}_{\text{escalar}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (1.4)$$

En la ecuación (1.4) los primeros dos “sub-lagrangianos” son los términos relacionados con las interacciones fundamentales y las teorías de norma, mientras que los últimos dos tienen que ver con el mecanismo de obtención de masas, a continuación se explicarán a detalle estos lagrangianos.

*Sector fermiónico*

Se ha decidido comenzar con este sector, pues en principio lo que se deseaba históricamente es justamente dar una explicación sobre la forma en la que las partículas interaccionan entre sí. Aunque de continuar es necesario advertir que el enfoque no es muy profundo, pues el propósito de esta sección del texto es solamente la exposición de los componentes más importantes del ME. Con esto en mente y asumiendo que se tiene una noción elemental de teoría cuántica de campos, se puede decir que la referencia más directa para la descripción de la interacción entre partículas con carga es la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.5)$$

que si se recuerda es la ecuación de movimiento para partículas relativistas con masa  $m$  y espín  $\frac{1}{2}$ , es decir, fermiones, como lo son los electrones y quarks que componen los átomos. Con la ecuación de Euler-Lagrange para campos (1.3), se puede ver que el Lagrangiano del cuál se obtiene la ecuación de Dirac, es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (1.6)$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

Como se ha comentado, para que (1.6) sea útil para la descripción de un sistema físico, tiene que cumplir con una simetría fundamental llamada *principio de invariancia de norma*, la cuál exige que los lagrangianos de un determinado sistema deben permanecer iguales después de aplicar las *transformaciones de norma* a los grados de libertad interna (los campos), esto es, de tal forma que

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi'),$$

donde  $\psi \rightarrow \psi' = G\psi$ , tal que,  $G$  son las transformación de norma perteneciente a un grupo de simetría. Que como ya se ha comentado se asocian a las fuerzas fundamentales a las cuales son sensibles los fermiones debido a que poseen una carga asociada a dicha

interacción. Por ejemplo, aquellos fermiones con carga eléctrica serán sensibles a la fuerza electromagnética, los que posean carga de color lo serán a la fuerza nuclear fuerte (en este caso los quarks) y para la fuerza nuclear débil resulta que todos los fermiones son sensibles a ella.

Si bien en principio, no existe una única forma de elegir los grupos de simetría, los grupos mínimos que se han asociado a las interacciones fundamentales son el  $U(1)$  para las interacciones electromagnéticas, el  $SU(2)$  para las electrodébiles y el  $SU(3)$  para las interacciones fuertes.

Regresando a la ecuación de Dirac, dado que esta describe adecuadamente la interacción entre los fermiones, es de esperarse que el lagrangiano asociado (1.6) sea el que se emplee para las teorías de norma de estas partículas, no obstante, si bien dicho lagrangiano cumple el principio de invariancia de norma global, cuando dichas transformaciones son dependientes del espacio-tiempo  $G = G(x)$ , es decir, locales, resulta  $\mathcal{L}_D$  no satisface el principio de invariancia.

Revisando detenidamente la ecuación (1.6), es posible notar que será el término que contienen el cuadrigradiente de donde saldrán los términos extras que harán que  $\mathcal{L}_D(\psi) \neq \mathcal{L}_D(\psi')$  pues, en el caso local al depender  $G$  del espacio-tiempo esta se verá afectada por la derivada,  $\partial_\mu \psi'(x) \equiv \partial_\mu (G(x)\psi(x)) = (\partial_\mu G(x))\psi(x) + G(x)(\partial_\mu \psi(x))$ .

La solución a esta situación consiste en reemplazar el cuadrigradiente  $\partial_\mu$  por un término conocido como *derivada covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu + \dots \quad (1.7)$$

a la cuál, como se verá un poco más adelante, se le añade un campo extra, llamado *campo de norma*, de tal modo que la transformación de este permitirá obtener los términos exactos que cancelen los términos extras que salen de la aplicación del cuadrigradiente sobre  $G(x)$ .

El caso más sencillo para observar esto es en la *Electrodinámica Cuántica* (QED,

por sus siglas en inglés), en donde la fuerza electromagnética se incorpora de manera natural al exigir que se cumpla con la simetría de norma dada por el grupo  $U(1)$ , es decir, las rotaciones unitarias sobre el plano complejo, de tal forma que  $G(x)$ , estará definida como

$$G(x) = e^{-iQ\theta(x)},$$

donde  $Q$ , resulta ser la unidad de carga eléctrica y  $\theta(x)$  un parámetro de fase. Como se ha comentado para que  $\mathcal{L}_D(\psi)$  sea invariante bajo esta transformación de norma local, la solución es añadir un campo de norma que contrarreste los términos extra que surgen de la cuadri-derivada, transformándose esta en una “derivada covariante”. Para este caso en específico dicha derivada covariante estará dada como:

$$D_\mu = \partial_\mu - iQA_\mu(x), \quad (1.8)$$

donde  $A_\mu(x)$  es, por tanto, el campo de norma o de interacción, que como ya se ha anticipado resulta no ser otro que el campo electromagnético, representado por el cuadripotencial. La forma en la que dicho término logra cancelar el término extra que surge de  $\partial_\mu G(x)$ , es por la simetría de norma que cumple este campo en particular, pues resulta que:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{i}{Q}\partial_\mu\theta(x). \quad (1.9)$$

Con esto el lagrangiano de Dirac invariante ante transformaciones de norma local, también llamado *lagrangiano covariante* quedará como:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (1.10)$$

el cuál escrito de forma desarrollada,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + Q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (1.11)$$

permite observar cómo resulta ser el lagrangiano de Dirac (1.6) al que se le ha agregado un término que incluye el campo de norma  $A_\mu$  interaccionando con el campo fermiónico

$\psi$ . Aplicando las transformaciones de normal local a (1.10), se podrá ver que este lagrangiano cumple con el principio de invariancia de la norma  $U(1)$  y quedará que  $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0$ , siendo por lo tanto un lagrangiano “apto” para la descripción de la dinámica de los fermiones.

Se ha dicho y observado como el principio de invariancia de norma vuelve más sencilla la introducción de las interacciones fundamentales entre los fermiones a través de la introducción de grupos de simetría. La generalización de lo que ha ejemplificado hacia un modelo que describe tres interacciones fundamentales entre fermiones es directa. De manera análoga a como se hizo en QED, bastará con requerir que el lagrangiano de los fermiones cumpla con un grupo de simetría que dará origen a la necesidad de nuevos campos de norma que resultarán ser los campos asociados a las fuerzas fundamentales. En este punto es donde se hace patente la practicidad de la implementación de la derivada covariante (1.7), en el caso de QED para que hacer el lagrangiano de Dirac (1.6) quede invariante antes las transformaciones de  $U(1)$ , bastó con que en la derivada covariante (1.8) se añada el campo de norma  $A_\mu$ , del campo electromagnético.

Para que el lagrangiano de los fermiones (1.6) incluya las otras fuerzas fundamentales deberá por tanto incluir en su derivada covariante los respectivos campos de interacción de las fuerzas nucleares débil y fuerte, que como ya se han dicho resultan surgir del requerimiento de la invariancia bajo las simetría  $SU(2)$  y  $SU(3)$  respectivamente.

Con todo esto el sector fermiónico del ME puede ser representado de la siguiente manera<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L}_{f,0} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (1.12)$$

donde la derivada covariante estará dada como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 T^i G_\mu^i - ig T^a W_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu. \quad (1.13)$$

En esta notación los campos de norma para cada interacción son  $B_\mu$  para  $U(1)$ ,  $W_\mu^a$  para

---

<sup>2</sup>Más adelante se verá que los términos de masas de los fermiones no pueden ser incluidos de este modo.

$SU(2)$  y  $G_\mu^a$  para  $SU(3)$ , que como se ha comentado están relacionadas con las fuerzas fundamentales. No obstante, ya se puede mencionar que  $B_\mu$  y  $W_\mu^a$ , son específicas del modelo electrodébil y  $B_\mu$  no es exactamente la fuerza electromagnética. En la ecuación (1.13) es posible distinguir las constantes de acoplamiento  $g', g$  y  $g_3$  de la fuerza electromagnética, débil y fuerte, respectivamente.

Como última nota, si bien en (1.12) se presenta un solo campo fermiónico  $\psi$ , esta ecuación aplica para todos los campos fermiónicos relacionados con las diversas partículas y en realidad habría una sumatoria sobre todos fermiones  $\sum \psi_f$ ; más adelante se verá que se suelen denotar como campos los símbolos relacionados con las partículas elementales y se abandona el uso de  $\psi$ .

### *Sector de norma*

Al introducir en (1.13) los campos de norma, resulta que se están introduciendo términos de interacción entre los fermiones, como se vio en (1.11). No obstante, para tener un lagrangiano completo, este tendría entonces que poder describir la dinámica de los campos de norma también.

Si bien la ecuación de Dirac es la adecuada para describir los campos fermiónicos. Para describir los campos de espín entero se emplea la ecuación de Klein-Gordon y dado que los campos de norma son campos bosónicos la dinámica de estos estará regida por dicha ecuación de movimiento. Para un campo escalar complejo  $\phi$  con espín 0, se tendrá que su lagrangiano estará dado como:

$$\mathcal{L}(\phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi. \quad (1.14)$$

Nótese cómo se puede vislumbrar una parte “cinética” y una “potencial”. Regresando al ejemplo de QED, puede verse que la parte del potencial el término de masa para el campo  $A_\mu$  correspondiente a la masa del fotón estaría dada como  $\mu^2 A_\mu A^\mu$ , no obstante, de acuerdo con (1.9) este término no puede cumplir con el principio de invariancia de norma pues queda claro que:  $(A_\mu)'(A^\mu)' \neq A_\mu A^\mu$ ; para conservar la invariancia este término tendría que ser nulo,  $\mu = 0$ , es decir, los bosones de norma serían partículas sin masa. En QED,

esta es una descripción adecuada, pues justamente el fotón no es masivo.

En el caso del término “cinético” este sí conserva la invariancia de norma, pues el cuadrigradiante elimina los términos extra de la transformación mostrada en la ecuación (1.9). Para un campo bosónico vectorial de espín 1, como es el caso de los campos de norma, el término cinético no sería como el escrito en (1.14), la expresión correcta para este tipo de bosones en el caso QED sería:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu);$$

aunque la forma usual de presentarlo es utilizando el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , de modo que el Lagrangiano de QED quedaría completo añadiendo  $\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

Justamente, como el término de masa en la parte del potencial rompe la simetría de norma y es necesario nulificarlo, a este sector se suele ser llamar solamente sector cinético o también sector Yang-Mills, debido a que las teorías basadas en grupos unitarios especiales  $SU(N)$  son llamadas teorías de Yang-Mills.

En el Modelo Estándar el sector de norma estaría expresado como la suma de las partes cinéticas de los campos de norma, expresados de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{norma} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Con los tensores cinéticos dados del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i + g_3 f^{ijk} G_\mu^j G_\nu^k, \end{aligned}$$

donde cada uno corresponde a los campos de norma de  $U(1)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , respectivamente.

### *Sector escalar*

Si bien los dos sectores anteriores forman una teoría de norma y explican de un modo sencillo las interacciones fundamentales, como cabría esperar, la realidad física es más compleja y aún existían situaciones que este primer modelo aún no incluía en su formulación.

Una de las primeras cuestiones a notar sería la naturaleza propia de las interacciones, esto es, que las fuerzas no tienen el mismo comportamiento. Esta situación se presenta de manera específica en la interacción débil, ya que como su nombre lo indica es una fuerza de muy corto alcance (limitado a distancia subatómicas); en el contexto de la física de partículas esto se traduciría en que los bosones de dicha interacción tendrían que ser masivos a diferencia de las otras dos interacciones.

Otra situación a resaltar, es la noción de que los fermiones tendrían que estar sujetos a otras simetrías fundamentales. Una de ellas, la *simetría quiral*, requiere la independencia de las componentes izquierdas  $\psi_L$  y derechas  $\psi_R$ , lo cuál hace referencia a que los fermiones de Dirac tendrían que ser invariantes bajo transformaciones de paridad. Con esto, al descomponer la ecuación (1.12) en dichos factores, tal que  $\psi = \psi_L + \psi_R$ , donde  $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\psi$ , se observará que dichos términos incumplen con el principio de invariancia de norma en las expresiones donde están presentes los términos de masa, por lo que el modelo de norma planteado en los apartados anteriores tendría que estar formulado para fermiones no masivos, por supuesto, esto no podría ser así ya que los fermiones sí tienen masa.

Con estas motivaciones en los sectores escalar y el Yukawa está la solución para que las partículas de las teorías de norma puedan adquirir masa, un mecanismo cuya aplicación permite esta característica, pero que naturalmente respeta las simetrías de norma. Dicha solución es conocida como el *mecanismo de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil* o más popularmente *mecanismo de Higgs*, el cual postula que es posible dotar de masas a las partículas elementales a través de los acoplamientos con un nuevo campo bosónico escalar  $\Phi$  (un doblete en realidad) llamado campo de Higgs.

No obstante, escapa del propósito de este trabajo la descripción explícita del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría (SSB, por sus siglas en inglés), pero continuando con la línea descriptiva, el paso consecuente es la introducción del lagrangiano que describe la dinámica de este nuevo campo antes de la SSB. Al ser un campo escalar bosónico de espín cero, el campo de Higgs podrá ser descrito por un lagrangiano de Klein-Gordon, de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi) - V(\Phi); \quad (1.16)$$

donde la forma del potencial

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{4}\lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.17)$$

posibilita un *valor de expectación en el vacío* (VEV) diferente de cero, característica utilizada para romper con la simetría electrodébil y que los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  adquieran valores de masas no nulos. Es necesario mencionar que en la ecuación (1.16) igual se introduce una derivada covariante pues el lagrangiano de Higgs tiene que ser invariante de norma local bajo la simetría electrodébil, sin embargo, dado que solo tiene que cumplir esta invariancia la mencionada derivada covariante, no sería la misma que en la ecuación (1.13) y para esta ocasión tendría la forma:

$$\mathcal{D} \equiv \partial_\mu - igT^a W_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu$$

es decir, en este caso solo figuran los campos de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Ahora queda más claro porque parte del lagrangiano del ME sea también llamado sector Higgs, pues como se ha observado contiene el lagrangiano que rige el funcionamiento de este nuevo campo. Siendo este el origen del bosón de Higgs, comentado en la figura 1.

### ***Sector Yukawa***

Finalmente, como se mencionó, al incluir la simetría quiral en el lagrangiano de Dirac (1.12), los términos de masa de los fermiones rompen la simetrías de norma por lo

que no podrían continuar siendo la forma de describir la masa de las partículas. Como se comentó, el campo de Higgs ofrece una solución a este problema, a través de proponer interacciones de tipo Yukawa con los campos fermiónicos, esto es, que por medio del acoplamiento con el campo de Higgs los fermiones adquieren sus valores de masa; interacciones del tipo  $y_f \phi \bar{\psi}_f \psi_f$ , permitirían que  $y_f \langle \phi \rangle$  represente la masa del fermión en cuestión.

A continuación, a modo de síntesis y retomando lo expuesto en los apartados anteriores, el lagrangiano de Modelo Estándar Mínimo quedaría escrito de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{\text{ME}} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y. \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}_f = \sum_{j=1}^3 \left( i \bar{L}_{L,j} \not{D} L_{L,j} + i \bar{\ell}_{R,j} \not{D} \ell_{R,j} + i \bar{Q}_{L,j} \not{D} Q_{L,j} + i \bar{u}_{R,j} \not{D} u_{R,j} + i \bar{d}_{R,j} \not{D} d_{R,j} \right), \quad (1.19)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{L}_H = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.21)$$

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{j=1}^3 \left( G^{(\ell)} \bar{L}_{L,j} \Phi \ell_{R,j} + G^{(d)} \bar{Q}_{L,j} \Phi d_{R,j} + G^{(u)} \bar{Q}_{L,j} \tilde{\Phi} u_{R,j} + \text{h. c.} \right) \quad (1.22)$$

Nótese cómo los sectores de norma  $\mathcal{L}_g$  y escalar  $\mathcal{L}_H$  solo se transcriben de las ecuaciones (1.15) y (1.16) respectivamente, mientras el sector fermiónico se reescribe de (1.12), eliminando los términos con masa y colocando explícitamente los fermiones de acuerdo con su quiralidad, de donde  $L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}$  es el doblete de leptones izquierdos y del mismo modo  $Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$  mientras que  $\ell_R$  se refiere a los singlets de leptones derechos cargados (dado que en el momento de la formulación de este modelo, no se habían observado neutrinos derechos); mientras  $u_R$  y  $d_R$  hace referencia a los singlets derechos de quarks positivos y negativos respectivamente. Sumando respecto a las tres generaciones de fermiones, esto aplica tanto para la ecuación (1.19) como para (1.22);

donde en esta última  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^*$  y los términos  $G^{(f)}$  son las matrices de Yukawa que darán las constantes de acoplamiento homónimas que dictan la intensidad del acoplamiento con el bosón de Higgs y por ende la magnitud de la masa del fermión en cuestión.

## 1.2. Modelos con $N$ dobletes de Higgs

Si bien la introducción del mecanismo de Higgs resuelve el problema de las masas también deja algunas incógnitas sin resolver, por ejemplo, este mecanismo no explica el motivo por el cuál los valores en las partículas elementales son tan diversos pues los términos que dotan de masa a las partículas incluyen parámetros cuyo valor no se encuentra definidos, de igual modo tampoco hay una indicación sobre el número de campos que deben emplearse para aplicar dicho mecanismo [6]. Con esto último queda explícita una de las razones por qué se dice que la versión mostrada en (1.18) es un modelo mínimo funcional.

En este contexto del Modelo Estándar entran las extensiones conocidas como *modelos multi-Higgs*, las cuales como su nombre lo sugiere son versiones en las que en lugar de emplear un solo doblete para aplicar el mecanismo de masas se considera la posibilidad de introducir  $N$  generaciones de ellos, todos con hipercarga  $Y = 1$ .

Como comenta Ivanov [6], estos modelos traen diversas ventajas, por ejemplo:

- La existencia de nuevas partículas de Higgs, tanto cargadas y neutras.
- *Corrientes neutras con cambios de sabor* (FCNC, por sus siglas en inglés) a nivel árbol.
- Formas adicionales de violación CP.
- Oportunidades para cosmología, como lo son candidatos a materia oscura.
- De igual modo otros modelos más allá del ME (como SUSY, modelos de gran unificación e incluso teoría de cuerdas), suelen llegar a modelos con múltiples dobletes a la escala electrodébil.

Otra característica de estas extensiones es lo relativamente fácil que es implementarlas, justamente se ha insistido en presentar el lagrangiano dividido en secciones,

pues de este modo es directo visualizar los lugares donde se debe hacer esta modificación, es decir, en las sectores escalar y de Yukawa, donde se encuentra presente el campo de Higgs. Las siguientes fórmulas permiten generar los nuevos lagrangianos de dichos sectores.

Partiendo de (1.16), la generalización a  $N$  dobletes del sector escalar implica una sumatoria de todos los productos de dobletes de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_H = \sum_{j,k=1}^N (\mathcal{D}_\mu \Phi_j)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi_k) - V(\Phi); \quad (1.23)$$

en el caso del potencial, dadas las combinaciones posibles de los  $N$  dobletes y partiendo de (1.17) se obtendrá esta siguiente fórmula:

$$V(\Phi) = \sum_{i,j,k,l=1}^N \left( \mu_{ij} \Phi_i^\dagger \Phi_j + \Lambda_{ijkl} (\Phi_i^\dagger \Phi_j) (\Phi_k^\dagger \Phi_l) \right), \quad (1.24)$$

de tal forma que con esto sea posible aplicar el mecanismo de ruptura espontánea. Antes de continuar con el sector de Yukawa, algunas de las condiciones a las que se sujetan los anteriores constantes son: debido a que el potencial debe ser hermítico, los coeficientes entonces tendrán que satisfacer las siguiente relaciones:

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}^*, \quad (1.25)$$

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij} = \Lambda_{jilk}^*, \quad (1.26)$$

Similarmente, a partir del sector de Yukawa del ME, la presencia de  $N$  dobletes implicaría  $N$  ecuaciones como (1.22), por lo que es posible escribir un sector Yukawa multi-Higgs de la siguiente manera, considerando que todos los dobletes se acoplan con todos fermiones, aunque sin considerar la existencia de neutrinos derechos:

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \left( G_i^{(\ell)} \bar{L}_{L,j} \Phi_i \ell_{R,j} + G_i^{(d)} \bar{Q}_{L,j} \Phi_i d_{R,j} + G_i^{(u)} \bar{Q}_{L,j} \tilde{\Phi}_i u_{R,j} + \text{h. c.} \right) \quad (1.27)$$

Con (1.24) y (1.27), es posible formular los lagrangianos de los modelos con  $N$  dobletes. Si bien, en este capítulo se habla de los retos a los que se tiene que enfrentar el ME y cómo se aborda este problema al proponer el estudio de modelos multi-Higgs, el otro propósito y el principal de este trabajo es el tratar con el *problema de los parámetros libres*.

Entonces como será más relevante más adelante, una desventaja de estos modelos es que desafortunadamente el número de parámetros libres aumenta cuando aumentan las generaciones de Higgs, según Ivanov [6], el potencial multi-Higgs contiene  $N^2 + \frac{1}{2}N^2(N^2 + 1)$  parámetros reales, mientras que en el sector de Yukawa el número de parámetros libres más general implica un aumento en  $54N$  parámetros, es decir que para un modelo, por ejemplo, de dos dobletes se tendrán 14 parámetros libres en el potencial y hasta 108 en el sector de Yukawa. Justamente el *método de reducción de acoplamientos* viene a proponer una forma de lidiar con esta situación, pero esto será tratado en el Capítulo 3.

### 1.3. Modelos con dos dobletes de Higgs

Para finalizar este capítulo y acotando un poco más este análisis, el presente trabajo se abocará exclusivamente al estudio del modelo multi-Higgs más sencillo, es decir, el modelo con dos dobletes de Higgs (2HDM, por sus siglas en inglés).

Para poder hablar de sus características generales, por supuesto, es necesario primero escribir las ecuaciones de los sectores escalar y Yukawa. Usando (1.23) el lagrangiano de Higgs quedaría como:

$$\mathcal{L}_H = \left( \mathcal{D}_\mu(\Phi_1 + \Phi_2) \right)^\dagger \left( \mathcal{D}_\mu(\Phi_1 + \Phi_2) \right) - V(\Phi_1, \Phi_2). \quad (1.28)$$

Aplicando la ecuación (1.24), el potencial para este modelo será tal que:

$$\begin{aligned}
V(\Phi_1, \Phi_2) = & \mu_{11}\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \mu_{12}\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \mu_{21}\Phi_2^\dagger\Phi_1 + \mu_{22}\Phi_2^\dagger\Phi_2 \\
& + \Phi_1\Phi_1\left(\Lambda_{1111}\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{1112}\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \Lambda_{1121}\Phi_2^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{1122}\Phi_2^\dagger\Phi_2\right) \\
& + \Phi_1\Phi_2\left(\Lambda_{1211}\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{1212}\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \Lambda_{1221}\Phi_2^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{1222}\Phi_2^\dagger\Phi_2\right) \\
& + \Phi_2\Phi_1\left(\Lambda_{2111}\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{2112}\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \Lambda_{2121}\Phi_2^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{2122}\Phi_2^\dagger\Phi_2\right) \\
& + \Phi_2\Phi_2\left(\Lambda_{2211}\Phi_1^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{2212}\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \Lambda_{2221}\Phi_2^\dagger\Phi_1 + \Lambda_{2222}\Phi_2^\dagger\Phi_2\right);
\end{aligned}$$

el cual se puede simplificar con las condiciones dadas en (1.25) y (1.26). Con unos cambios adicionales en la notación, el potencial más general que se puede obtener para un modelo con dos dobletes de Higgs suele escribirse de esta manera [6, 11]:

$$\begin{aligned}
V(\Phi) = & m_{11}^2\Phi_1^\dagger\Phi_1 + m_{22}^2\Phi_2^\dagger\Phi_2 - (m_{12}^2\Phi_1^\dagger\Phi_2 + \text{h. c.}) \\
& + \frac{1}{2}\lambda_1(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}\lambda_2(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_3(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2) + \lambda_4(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) \\
& + \left(\frac{1}{2}\lambda_5(\Phi_1^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_6(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \lambda_7(\Phi_2^\dagger\Phi_2)(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + \text{h. c.}\right); \quad (1.29)
\end{aligned}$$

donde pueden enumerarse los 14 parámetros libres que se habían comentado anteriormente.

A través de (1.27) el sector Yukawa de este modelo puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y = & - \sum_{j=1}^3 \left( G_1^{(\ell)} \bar{L}_{L,j} \Phi_1 \ell_{R,j} + G_1^{(d)} \bar{Q}_{L,j} \Phi_1 d_{R,j} + G_1^{(u)} \bar{Q}_{L,j} \tilde{\Phi}_1 u_{R,j} \right. \\
& \left. + G_2^{(\ell)} \bar{L}_{L,j} \Phi_2 \ell_{R,j} + G_2^{(d)} \bar{Q}_{L,j} \Phi_2 d_{R,j} + G_2^{(u)} \bar{Q}_{L,j} \tilde{\Phi}_2 u_{R,j} + \text{h. c.} \right) \quad (1.30)
\end{aligned}$$

Estos nuevos lagrangianos representan el modelo de dos dobletes más general posible y como ya se ha comentado, este tendrá nuevas características que no posee el Modelo Estándar. La primera a notar es el gran número de parámetros libres, si se suman los 14 del potencial y los 108 de los acoplamientos de Yukawa se tendrán en total de 122 constantes por determinar.

Aunque más importante aún son las implicaciones físicas, por ejemplo, en el sector Yukawa el hecho de que los Higgs se puedan acoplar con diferentes pares de fermiones

puede inducir la existencia de FCNC a nivel árbol, fenómeno que no ha sido observado experimentalmente.

Otra situación a tomar en cuenta, es justamente la capacidad de acoplarse libremente con los diferentes fermiones y que en realidad no hay una pauta que indique una forma única de hacer esto. Estas sencillas observaciones proporcionan los argumentos suficientes para poder hacer diferentes formulaciones de modelos con dos dobletes de Higgs y justamente ese es el caso, es decir, no existe un único 2HDM, sino que se consideran varios “tipos”.

La primera gran división la proporciona la observación respecto a los FCNC a nivel árbol, pues esta representa una restricción importante para los modelos teóricos que quieren ir de acuerdo con la fenomenología observada. Entonces los tipos de 2HDM se dividen entre los que permiten las FCNC a nivel árbol y los que no; de estos últimos tipos se dicen que son modelos con *conservación natural de sabor* (NFC, por sus siglas en inglés) y de hecho serán el objeto de estudio de este trabajo.

Sin embargo, antes de continuar cabe mencionar un tipo de 2HDM llamado tipo III, que no posee NFC, es decir, permite las corrientes neutras con cambio de sabor a nivel árbol. La importancia de este es que sería el modelo más general, pues no hay simetrías introducidas a priori para eliminar las FCNC, lo cual es lo que en principio busca encontrarse con el método reducción de acoplamientos, esto es, observar si existen simetrías inherentes a este modelo general, no obstante, durante el proceso de estudio se encontró que en el tratamiento de este tipo de 2HDM en particular es necesario hacer suposiciones e introducir parámetros adicionales que el método no puede reducir, por lo que se decidió enfocarse en los tipos de 2HDM con FCNC.

### 1.3.1. Modelos con conservación natural de sabor

Si bien existen algunas formas adicionales de suprimir las FCNC a nivel árbol, Paschos [12] y Glashow & Weinberg [13], probaron que una condición necesaria y suficiente es que los fermiones de misma carga se acoplen con un sólo doblete de Higgs, este es conocido como el teorema Paschos-Glashow-Weinberg. En el modelo de dos dobletes, esto puede ser logrado a través de la imposición de una simetría  $\mathbb{Z}_2$  al doblete, de tal forma

que:

$$\mathbb{Z}_2 : \Phi_1 \rightarrow -\Phi_1, \quad \Phi_2 \rightarrow \Phi_2.$$

La aplicación de esta simetría tendrá consecuencias en los lagrangianos de Higgs y de Yukawa. En el primer caso en el potencial (1.29), hará que se supriman los acoplamientos cuárticos  $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$ , de tal modo que el potencial para estos modelos quedaría como:

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - (m_{12}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \text{h. c.}) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) \\ & + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1) + \left( \frac{1}{2} \lambda_5 (\Phi_1^\dagger \Phi_2)^2 + \text{h. c.} \right); \quad (1.31) \end{aligned}$$

El teorema de Paschos-Glashow-Weinberg abre la posibilidad para que en la ecuación (1.30), puedan tenerse diversas configuraciones y que al mismo se siga teniendo NFC. No obstante, se pueden evitar redundancias siguiendo la convención de que quarks tipo *up* derechos  $u_R$  siempre se acoplen con  $\Phi_2$  [6, 11]. A partir de la aplicación de esta regla, surgen cuatro tipos de 2HDM que serán los que analizarán más adelante. En el cuadro 1, se muestran las configuraciones de los acoplamientos

Modelo	$u_R$	$d_R$	$\ell_R$
Tipo I	$\Phi_2$	$\Phi_2$	$\Phi_2$
Tipo II	$\Phi_2$	$\Phi_1$	$\Phi_1$
Lepton-specific (X)	$\Phi_2$	$\Phi_2$	$\Phi_1$
Flipped (Y)	$\Phi_2$	$\Phi_1$	$\Phi_2$

Cuadro 1: Modelos de dos dobletes con NFC

Nótese como en los primeros dos tipos los leptones se acoplan al mismo doblete que los quark tipo down (negativos), no obstante, en los otros dos el acoplamiento es contrario a este. Del mismo modo cabe comentar, que el 2HDM tipo I, es el más parecido al sector Higgs del ME, pues como se puede notar todos los fermiones están acoplados al segundo doblete y el primero no se estaría acoplando a ninguno, se dice que permanece inerte. Los lagrangianos de Yukawa correspondientes se escribirán hasta el capítulo 4.

## CAPÍTULO 2

---

# Ecuaciones del grupo de renormalización

---

El método que se estudiará en el siguiente capítulo emplea las relaciones conocidas como *ecuaciones del grupo de renormalización* (RGE, por sus siglas en inglés) por lo que antes de revisar dicho método es necesario hacer un revisión de algunos de los conceptos que darán como resultado dichas ecuaciones; sin embargo, es necesario mencionar que no se ahondará en la deducción de dichas ecuaciones, pues suelen ya estar determinadas para modelos conocidos, pero se espera esbozar un poco el origen y significado de estos términos tan importantes para el *método de reducción de acoplamientos*.

### 2.1. Renormalización de Wilson

En sus principios, y como punto de partida, la renormalización se plantea como una serie de técnicas que se aplican para lidiar con las divergencias que surgen en los cálculos de las teorías cuánticas de campos. El origen de las ecuaciones que utilizaremos más adelante se encuentra en el enfoque proporcionado por K. Wilson en los años setenta.

La idea básica que se considera en este enfoque es que en lugar de tratar encontrar la manera de contrarrestar los efectos de las divergencias a altas energías, es posible trabajar con *teorías efectivas* a través de la implementación de nivel de corte o *cut off*, esto es, que se propone que es posible formular teorías cuánticas de campos consistentes a determinada escala de energía finita.

Un modo quizás demasiado simple pero que ayuda sobremanera a entender esta idea es observando las dimensiones o unidades de los lagrangianos de las teorías de campos, por ejemplo, analizando un campo escalar, las unidades del lagrangiano (densidad lagrangiana)

serán de energía a la cuarta  $[\mathcal{L}] = E^4$ . En una teoría dada de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} \sim c_3\phi^3 + c_4\phi^4 + c_5\phi^5 + \dots$$

para que las dimensiones sean consistentes las constantes de acoplamiento tendrán una dependencia en la energía  $c_i = c_i(E_*)$ . Entonces que para mantener las unidades correctas, es decir, para que el lagrangiano siga en unidades de energía a la cuarta potencia  $E^4$ , las constantes de acoplamiento  $c_i$  que acompañan al campo  $\phi$  deberán tener una relación tal que  $c_3 \sim \mathcal{O}(E_*)$ ,  $c_4 \sim \mathcal{O}(1)$ ,  $c_5 \sim \mathcal{O}(\frac{1}{E_*})$ ,  $\dots$ ,  $c_n \sim \mathcal{O}(\frac{1}{E_*^n})$ . Esta observación, permite ver que en los campos elevados a potencias superiores, de donde provienen las divergencias, tienden a tener una aportación menor al lagrangiano conforme la escala de energía aumenta.

Esto permite clasificarse dichas constante dependiendo su grado de aportación al valor del lagrangiano en 3 categorías: relevantes, marginales e irrelevantes. De tal forma que en el ejemplo anterior  $c_1$  sería relevante, pues crece proporcional a la escala de energía,  $c_4$  se diría que es marginal, pues no depende de esta, mientras que  $c_{(i \geq 5)}$  serían considerados irrelevantes pues a altas energías tienden a valores muy pequeños.

Esta dependencia de las constantes de acoplamiento con una energía de corte  $E_*$ ,

$$\mathcal{L} \sim c_3(E_*)\phi^3 + c_4(E_*)\phi^4 + c_5(E_*)\phi^5 + \dots \quad (2.1)$$

permite una noción de renormalización, donde las divergencias ultravioletas se vuelven sencillamente irrelevantes. La importancia del trabajo de Wilson [14, 15], radica en que justamente determinan una manera de encontrar las ecuaciones que dictan la evolución de estas constantes  $c_i(E_*)$  en función de la energía.

## 2.2. Ecuación de Callan-Symanzik

Si bien esta introducción a concepto de renormalización de Wilson se realiza a través de un conteo dimensional, proporciona la idea básica a que se desea llegar: las constantes de acoplamiento de los lagrangianos pueden ser vistas como términos dependientes de

una escala de energía. De hecho usualmente, se suele decir que en la visión de Wilson se representa el *flujo* de los lagrangianos posibles a distintas energías.

En sus trabajos originales se presenta un formalismo explícito para poder deducir esas “ecuaciones de flujo”, integrando “rebanadas” en el espacio de momentos [16]. No obstante, esa forma de encontrar las ecuaciones suele tener varias complicaciones técnicas y existe una forma más sencilla de obtener dichas ecuaciones de flujo.

Para comenzar, sea la función de Green o función de correlación para  $n$  puntos renormalizada de una teoría cuántica de campos escalar  $\phi$  no masiva con una constante de acoplamiento  $\lambda$ , para la que se ha elegido una escala de renormalización  $M$

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle = G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; M, \lambda)$$

dato que se pretende encontrar las “ecuaciones de flujo”, proponemos hacer una variación  $\delta_M$  tal que  $M \rightarrow M + \delta M$ , esto induciría una variación en la constante de acoplamiento  $\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda$  y al igual que en el campo  $\phi \rightarrow (1 + \delta\eta)\phi$ . La variación para la función de Green es la inducida por el reescalamiento del campo [16, p. 410], de modo que:

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + \delta\eta)G^{(n)}$$

este transformación se puede reescribir de la siguiente manera si se toma en cuenta que  $G^{(n)} = G^{(n)}(M, \lambda)$ :

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}$$

multiplicando por  $\frac{M}{\delta M}$ , esto anterior quedará como:

$$\frac{M}{\delta M} \left( \frac{\partial}{\partial M} \delta M + \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta \lambda - n\delta\eta \right) G^{(n)} = 0$$

$$\left( M \frac{\partial}{\partial M} + \frac{M}{\delta M} \delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - n \frac{M}{\delta M} \delta \eta \right) G^{(n)} = 0$$

aunque lo común es escribir esta ecuación utilizando los parámetros adimensionales:

$$\frac{M}{\delta M} \delta \lambda \equiv \beta, \quad -\frac{M}{\delta M} \delta \eta = \gamma; \quad (2.2)$$

de modo que queda la ecuación:

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma\right) G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; M, \lambda) = 0 \quad (2.3)$$

llamada **ecuación de Callan-Symanzik** [17, 18].

### 2.2.1. Ecuaciones del grupo de renormalización

La función beta  $\beta(\lambda)$  es conocida como la ecuación del *grupo de renormalización*, y justamente esta o estas (en teorías con más de una constante de acoplamiento) como se puede ver, relacionan la constante de acoplamiento  $\lambda$  con la escala de energía  $M$

$$\beta(\lambda) = M \frac{\delta \lambda}{\delta M} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial \log(M)}; \quad (2.4)$$

este es el nombre con el que se le suele llamar a las “ecuaciones de flujo” y se había omitido a propósito nombrarlas así hasta tener una forma concreta de encontrar estas ecuaciones.

Por supuesto, es necesario mencionar que en realidad no se trata de un grupo en el sentido matemático, sino que más bien son las ecuaciones que dictan el comportamiento de las constantes de acoplamiento en función de la escala de energía, es decir, son estas la que indican el flujo de los lagrangianos posibles que se había comentado de la visión de Wilson de la renormalización.

Son estas ecuaciones del grupo de renormalización o funciones beta, las que usarán en el presente trabajo para encontrar la manera de reducir el número de parámetros libres en una teoría. Como se ha mencionado, no se hará el computo de estas funciones, pero debido al papel central que juegan en el *método de reducción de acoplamientos*, se vuelve necesario comentar su origen, ya que se ha visto su utilidad.

## CAPÍTULO 3

---

# Método de reducción de acoplamientos

---

Como se ha comentado en la introducción, entre los diversos retos que enfrenta el Modelo Estándar está el conocido como problema de los parámetros libres, el cuál se refiere al hecho de que en dicho modelo existen varios parámetros libres cuyos valores no son determinados de manera teórica, es decir, no pueden ser predichos y por lo tanto es necesario ajustarlos de manera experimental.

En el Modelo Estándar Mínimo (MSM), se pueden encontrar hasta 19 de esos parámetros [5]: las masas de partículas elementales (6 quarks, 3 leptones y el bosón de Higgs), constantes de acoplamiento de norma (3), ángulos de mezcla de la matriz CKM (3), la fase de violación CP de la matriz CKM, el valor de expectación del vacío y el ángulo del vacío de QCD<sup>1</sup>. Incluso pueden ser más dependiendo de la forma en que se establezca las relaciones entre ellos, por ejemplo, en la enumeración que se ha hecho no se consideró al ángulo de Weinberg pues puede ser expresado en términos de los acoplamientos de norma. Si bien este hecho no quita capacidad predictiva al modelo, la falta de conocimiento preciso de dichos parámetros es una pista de que quizás ahí podría estar escondida nueva física que permitiría encontrar explicación a los fenómenos que aún no se logran describir con esta teoría.

Publicado en una serie de trabajos a mediados de los años ochenta [19–22] y principalmente en [7], el *método de reducción de acoplamientos* indica bajo qué condiciones un modelo que depende de varias constantes de acoplamiento puede ser reducido a una descripción consistente en términos de uno solo de ellos. Ciertamente, este método en realidad no desaparece todos los parámetros libres, no obstante, posee una base matemáticamente sólida que la hace un opción interesante para el tratamiento

---

<sup>1</sup>Este último es prácticamente nulo por lo que en ocasiones solo se cuentan 18 parámetros.

del problema. De hecho, anticipando un poco, dado que permite encontrar valores de las constantes de Yukawa de acoplamiento, el principal atributo que tiene este método es proporcionar la capacidad hacer predicciones del valor de masas de partículas elementales, lo cuál por sí solo es un logro notable.

### 3.1. El método

Sea un modelo no masivo de teoría cuántica de campos descrito por  $n+1$  constantes de acoplamiento adimensionales  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dicho modelo se supone *invariante bajo el grupo de renormalización* (RGI, por sus siglas en inglés) con una masa de renormalización  $M$ . El objetivo principal es expresar  $n$  acoplamientos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  en función de  $\lambda_0$ , que será llamado acoplamiento primario,

$$\lambda_j = \lambda_j(\lambda_0), \quad (3.1)$$

de tal modo que quedará un *modelo reducido* que podrá ser descrito únicamente con  $\lambda_0$  y que a su vez este sea también invariante bajo el grupo de renormalización, es decir, independiente de  $M$ . Aplicando este principio se tendrá que las ecuaciones de Callan-Symanzik, para el sistema original y para el sistema reducido, serían respectivamente

$$\left( M \frac{\partial}{\partial M} + \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \gamma \right) G = 0, \quad (3.2)$$

$$\left( M \frac{\partial}{\partial M} + \beta' \frac{\partial}{\partial \lambda_0} + \gamma' \right) G' = 0, \quad (3.3)$$

donde las funciones  $\beta_j$  y  $\gamma$ , que se han comentado en el capítulo de anterior, dependen de todos los parámetros, mientras que  $\beta'$  y  $\gamma'$  solo dependen de  $\lambda_0$ . La función de Green para el nuevo sistema  $G'$ , se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{\partial G'}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial G}{\partial \lambda_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_0}.$$

La independencia lineal de la función de Green y sus derivadas, da como resultado

que

$$\beta' = \beta_0, \quad \gamma' = \gamma, \quad \beta' \frac{d\lambda_j}{d\lambda_0} = \beta_j,$$

esto da una condición que deben cumplir las funciones de (3.1)

$$\beta_0 \frac{d\lambda_j(\lambda_0)}{d\lambda_0} = \beta_j. \quad (3.4)$$

Este sistema de ecuaciones conforma una condición necesaria y suficiente para que la creación de un modelo reducido, pues al cumplirse se garantiza que se satisface (3.3). La ecuación (3.4) se suele llamar la condición de reductibilidad y el sistema de ecuaciones diferenciales para cada modelo, *ecuaciones reducidas* o *ecuaciones de reducción*. Como se puede observar justamente las soluciones de dichas ecuaciones son las funciones que estamos buscando en (3.1). Consecuentemente, el método se puede centrar de manera práctica en el planteamiento y resolución de dicho sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer grado.

### 3.2. Soluciones a las ecuaciones de reducción

Si bien lo anterior implica un método relativamente sencillo para encontrar las relaciones entre los acoplamientos, como también se comenta en [23], las soluciones generales de un sistema de ecuaciones como el que se presenta tendrán ciertamente tantas constantes de integración como cantidad de ecuaciones, por lo que no se podría decir que se ha llevado a cabo una reducción de parámetros en realidad.

Por supuesto, esto no da por concluido el asunto, las soluciones o funciones en (3.1), de hecho, tienen que encontrarse sujetas a más condiciones además de la que se ha dado por (3.4), matemáticamente, por ejemplo,  $\lambda_j(\lambda_0)$  debe ser diferenciable en el dominio de  $\lambda_0$ ; sin embargo, son las restricciones físicas las que finalmente permiten que este modelo cumpla con su objetivo. La primera de dichas condiciones surgidas de la física es que las funciones tienen que desvanecerse en el *límite del acoplamiento débil*

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \lambda_j(\lambda_0) = 0, \quad (3.5)$$

en segundo lugar y quizás la condición más importante para encontrar esas constantes de integración, es el requisito de que los modelos reducidos deberían también renormalizables. Para lograr esto, las soluciones tendrían que poder expresarse en forma de *series de potencias*, por tanto y tomando en cuenta la condición anterior, las funciones tendrían que tener la forma

$$\lambda_i(\lambda_0) = \lambda_i^{(0)}\lambda_0 + \lambda_i^{(1)}\lambda_0^2 + \lambda_i^{(2)}\lambda_0^3 + \dots, \quad (3.6)$$

con este *ansatz* se puede preservar la renormalizabilidad perturbativa en el nuevo modelo, pero sobre todo permite elegir una solución especial de la general, encontrando por tanto las constantes de integración y logrando la reducción deseada, es por este motivo que cuando un parámetro  $\lambda_i$  puede expresarse de este modo en función de otro parámetro y cumpliendo con (3.4), se dice entonces que ha hecho una **reducción completa**.

No obstante, como se verá más adelante no todos los modelos o parámetros serán susceptibles a una reducción completa y como se menciona en la bibliografía [24, 25], es posible utilizar las soluciones generales por motivos fenomenológicos, esto es, empleando datos experimentales para fijar condiciones de frontera con las cuales determinar las constantes de integración. Como se puede inferir, claramente implica conocer el valor de las constantes de acoplamiento en alguna escala de energía, lo cual rompe con el objetivo de encontrar las relaciones únicamente usando un parámetro, no obstante, al proveer de un modo de conocer los valores de las constantes se considera todavía un tipo de reducción aceptable y suele llamársela **reducción parcial** [23].

Por ahora este método parece algo complicado, pero en su aplicación en el siguiente capítulo, es donde quedará más claro su funcionamiento.

## CAPÍTULO 4

---

# Reducción de acoplamientos aplicado a un modelo de dos dobletes de Higgs

---

Ya se ha establecido el marco teórico y metodológico para abordar el problema de los parámetros libres. Si se observa detenidamente, esto podría ser un gran avance en el Modelo Estándar, justamente los autores de este método, aplicaron esta formulación en al MSM, obteniendo como resultado predicciones de masa para el quark top y bosón de Higgs, mucho antes de que fuesen encontradas dichas partículas [24, 26].

El objetivo del presente trabajo, es aplicar dicho método a modelos más allá del Modelo Estándar, pues ya se ha argumentado que este ya ha sido superado por fenómenos actuales y una buena alternativa para encontrar nueva física son los modelos multi-Higgs. De manera muy específica, en esta ocasión se acotado la investigación al estudio de las consecuencias de la reducción de acoplamientos en modelos con dos dobletes. No obstante, la metodología es aplicable para modelos de  $N$ -dobletes.

### 4.1. El modelo

Para comenzar, es necesario fijar el modelo de teoría de campos con el que se trabajará. Como el título del capítulo indica, se trabajará con modelos de dos dobletes, pero como se ha comentado en el primer capítulo que existen diversas configuraciones para el 2HDM. Para este análisis se han optado por trabajar los tipos 2HDM más apegados a la fenomenología, es decir, aquellos que cumplen con la conservación natural de sabor (NFC).

Con esto en mente los sectores escalar y de Yukawa, que son diferentes al del Modelo Estándar (1.18), quedarían de la siguiente manera:

### 4.1.1. Sector Escalar

En la ecuación (1.28), se presentó el lagrangiano de Higgs para un modelo con dos dobletes:

$$\mathcal{L}_H = \left( \mathcal{D}_\mu(\Phi_1 + \Phi_2) \right)^\dagger \left( \mathcal{D}_\mu(\Phi_1 + \Phi_2) \right) - V(\Phi_1, \Phi_2);$$

donde para que se cumpla con la NFC se impone una simetría  $\mathbb{Z}_2$  dando como resultado que en el potencial general (1.29), se supriman los términos  $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$ . Adicionalmente, para evitar que se *rompa suavemente* dicha simetría se puede optar por nulificar igualmente el término  $m_{12} = 0$ ; lo cual se hará en esta ocasión, por tanto el sector escalar, quedará definido con el siguiente potencial:

$$\begin{aligned} V(\Phi_1, \Phi_2) = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 \\ & + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1) + \frac{1}{2} \lambda_5 (\Phi_1^\dagger \Phi_2)^2 + \frac{1}{2} \lambda_5^* (\Phi_2^\dagger \Phi_1)^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Establecido esto se pueden obtener algunas condiciones para las constantes de acoplamiento cuárticas que nos serán útiles más adelante [6, 11, 25, 27]. En primera, si se desea tener conservación de carga eléctrica:

$$\lambda_4 < 0. \quad (4.2)$$

Igualmente, para que el potencial esté acotado por abajo,

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_3 + \lambda_4 > |\lambda_5|; \quad (4.3)$$

adicionalmente la constante  $\lambda_5$  puede ser negativa y real sin pérdida de generalidad [25].

Para este estudio se eligió trabajar con valores de expectación del vacío reales, dados como:

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

tal que  $v_1^2 + v_2^2 = v^2$ , donde  $v = 246$  GeV. Tras la ruptura espontánea de la simetría se

obtendrán las siguientes partículas de Higgs: dos escalares neutros  $H$  y  $h$ , dos escalares cargados  $H^\pm$  y un pseudoescalar  $A$ ; cuyas masas a nivel árbol se expresan de la siguiente manera:

$$m_H^2 = \frac{1}{2}\eta_+, \quad m_h^2 = \frac{1}{2}\eta_-, \quad m_{H^\pm}^2 = -\frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v^2, \quad m_A^2 = -\lambda_5v^2, \quad (4.5)$$

donde

$$\eta_\pm = \lambda_1v_1^2 + \lambda_2v_2^2 \pm \sqrt{(\lambda_1v_1^2 - \lambda_2v_2^2)^2 + 4(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)^2v_1^2v_2^2}.$$

Con los ángulos de mezcla [27]:

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}, \quad \tan 2\alpha = \frac{\eta_+ - 2\lambda_1 \cos^2 \beta}{(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \sin 2\beta}. \quad (4.6)$$

#### 4.1.2. Sector de Yukawa

En la sección 1.3.1 se definen cuatro tipos de 2HDM que se dice poseen conservación natural del sabor. A diferencia del sector escalar, el lagrangiano del sector de Yukawa depende de cada tipo de 2HDM, el presente trabajo pretende llevar a cabo la reducción de acoplamientos para los tipos I, II, X y Y, usando como referencia el cuadro 1, los lagrangianos de Yukawa para cada tipo quedarían como:

$$-\mathcal{L}_Y^{(\text{Tipo I})} = G^{(\ell)}\bar{L}_L\Phi_2\ell_R + G^{(d)}\bar{Q}_L\Phi_2d_R + G^{(u)}\bar{Q}_L\tilde{\Phi}_2u_R + \text{h. c.}, \quad (4.7)$$

$$-\mathcal{L}_Y^{(\text{Tipo II})} = G^{(\ell)}\bar{L}_L\Phi_1\ell_R + G^{(d)}\bar{Q}_L\Phi_1d_R + G^{(u)}\bar{Q}_L\tilde{\Phi}_2u_R + \text{h. c.}, \quad (4.8)$$

$$-\mathcal{L}_Y^{(\text{Tipo X})} = G^{(\ell)}\bar{L}_L\Phi_1\ell_R + G^{(d)}\bar{Q}_L\Phi_2d_R + G^{(u)}\bar{Q}_L\tilde{\Phi}_2u_R + \text{h. c.}, \quad (4.9)$$

$$-\mathcal{L}_Y^{(\text{Tipo Y})} = G^{(\ell)}\bar{L}_L\Phi_2\ell_R + G^{(d)}\bar{Q}_L\Phi_1d_R + G^{(u)}\bar{Q}_L\tilde{\Phi}_2u_R + \text{h. c.} \quad (4.10)$$

La aplicación del teorema Paschos-Glashow-Weinberg (cf. §1.3.1) es lo que da la forma a estas ecuaciones, pues los fermiones de misma carga se acoplan a solo un doblete de Higgs. Adicionalmente, se asume que las matrices de Yukawa  $G^{(f)}$  serán diagonales, esto se hace con el propósito de poder obtener una aproximación a nivel árbol de las masas de

los fermiones, para las cuales se tendrá la siguiente fórmula:

$$m_i^{(f)} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_i^{(f)} v_j; \quad (4.11)$$

donde  $v_j$ , el valor de expectación del vacío, ya sea de  $\Phi_1$  o  $\Phi_2$ . Por supuesto, la elección depende del doblete con el que el fermión en cuestión se esté acoplando que, como se puede ver, estará en función del tipo de modelo de dos dobletes que se esté analizando.

## 4.2. Reducción completa

En el capítulo anterior se describió el método de reducción de acoplamientos y se llegó a las condiciones que se deben cumplir para lograr el objetivo del principal de este procedimiento: encontrar relaciones funcionales entre los acoplamientos, de tal modo que sea posible expresar dichas constantes en función de un solo acoplamiento principal (cf. §3.2). Para hacer esto se tienen que relacionar las funciones beta (RGE) de las constantes de acoplamiento a través de la ecuación (3.4), obteniéndose un conjunto de ecuaciones diferenciales, llamadas ecuaciones de reducción. Cuyas soluciones son las funciones de los acoplamientos  $\lambda_i$  dependientes de un acoplamiento principal  $\lambda_0$ .

En este contexto se mencionaron dos regímenes de las soluciones: reducción completa y reducción parcial. En el primero dichas soluciones cumplen con todas las condiciones y se obtienen las funciones en series de potencias. Y en el segundo régimen se utilizan las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales, además de condiciones de frontera para determinar las constantes de integración.

En esta sección procederá a implementar la *reducción completa* en los acoplamientos de 2HDM con NFC. Sin embargo, antes de iniciar, es necesario mencionar que en [23] se comenta que la unicidad de las soluciones en series de potencias (3.6), se puede encontrar incluso al primer orden, por lo que el programa de reducción solamente se hará con ecuaciones del grupo de renormalización a un lazo. Aunque en principio es posible realizar estos cálculos a todos los órdenes, la complejidad de las ecuaciones de reducción aumenta significativamente, de hecho, aún a un lazo se verá la extensión de estas, sin embargo, como ya se ha comentado aún solamente trabajando con el orden

superior los resultados son relevantes.

### 4.2.1. Acoplamiento de norma

Comenzando con los acoplamientos de norma  $g_1, g_2$  y  $g_3$ , correspondientes a las interacciones electromagnética, débil y fuerte, en [11] se recopilan las funciones beta a un lazo para modelos multi-Higgs, que de hecho serían las mismas para todos los tipos de 2HDM y que están dadas de la siguiente manera:

$$16\pi^2\beta_{g_1} = \left(\frac{20}{9}n_F + \frac{1}{6}n_H\right)g_1^3, \quad (4.12)$$

$$16\pi^2\beta_{g_2} = \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_F + \frac{1}{6}n_H\right)g_2^3, \quad (4.13)$$

$$16\pi^2\beta_{g_3} = \left(-11 + \frac{4}{3}n_f\right)g_3^3; \quad (4.14)$$

donde  $n_F$  es el número de familias de fermiones y  $n_H$  el número de dobletes de Higgs. Tomando en cuenta las 3 familias de fermiones y 2 dobletes, para este caso, quedarían las funciones:

$$\beta_{g_1} = \frac{7g_1^3}{16\pi^2}, \quad (4.15)$$

$$\beta_{g_2} = -\frac{3g_2^3}{16\pi^2}, \quad (4.16)$$

$$\beta_{g_3} = -\frac{7g_3^3}{16\pi^2}. \quad (4.17)$$

En principio es posible elegir cualquiera de los acoplamientos como el principal e intentar reducir el resto de ellos en función de este, comencemos eligiendo la constante de acoplamiento de la fuerza nuclear fuerte  $g_3$ .

De acuerdo con (3.4), las funciones que buscamos son las soluciones del sistema de

ecuaciones, este caso, dado por:

$$\beta_{g_3} \frac{dg_j(g_3)}{dg_3} = \beta_{g_j}.$$

Con esto las dos ecuaciones de reducción de este sector serían

$$-7g_3^3 \frac{dg_1}{dg_3} = 7g_1^3. \quad (4.18)$$

$$-7g_3^3 \frac{dg_2}{dg_3} = -3g_2^3. \quad (4.19)$$

Tomando en cuenta las solución en series de potencias (3.6), entonces las funciones para estas ecuaciones deberían estar dadas de la siguiente manera:

$$g_1(g_3) = g_1^{(0)} g_3 + g_1^{(1)} g_3^2 + g_1^{(2)} g_3^3 + \cdots, \quad (4.20)$$

$$g_2(g_3) = g_2^{(0)} g_3 + g_2^{(1)} g_3^2 + g_2^{(2)} g_3^3 + \cdots; \quad (4.21)$$

donde las  $g_j^{(k)}$ , son las constantes de integración que deben ser determinadas. Para hallarlas, en la reducción completa se toman los *ansatz* anteriores y se sustituyen en la respectiva ecuación de reducción. Comenzando con (4.20), si se sustituye a primer orden en (4.18), se obtendrán los siguientes valores para la constante:

$$-7g_3^3 \frac{d}{dg_3} (g_1^{(0)} g_3) = 7 (g_1^{(0)} g_3)^3,$$

$$-7g_1^{(0)} = 7g_1^{(0)3},$$

$$g_{1,0}^{(0)} = 0, \quad g_{1,\pm}^{(0)} = \pm i. \quad (4.22)$$

Haciendo lo mismo con (4.21) en (4.19), también se tendrá

$$-7g_3^3 \frac{d}{dg_3} (g_2^{(0)} g_3) = -3 (g_2^{(0)} g_3)^3,$$

$$-7g_2^{(0)} = -3g_2^{(0)3},$$

$$g_{2,0}^{(0)} = 0, \quad g_{2,\pm}^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1.53. \quad (4.23)$$

Este primer análisis ya arroja resultados interesantes, en primera, la reducción del acoplamiento de  $U(1)$  en términos del acoplamiento fuerte, no presenta formas aceptables, pues sustituyendo los valores de las constantes encontradas (4.22) en (4.20), darán funciones de la forma

$$g_1(g_3) = \begin{cases} 0 + \dots \\ ig_3 + \dots \\ -ig_3 + \dots \end{cases}.$$

La solución nula, indicaría que no hay una relación entre  $g_1$  y  $g_3$ , por tanto no habría reducción en función de este. Si se consideran las otras dos opciones se tendrían constantes de acoplamiento imaginarias, por lo que estas soluciones no son aceptables. Si bien, esto es a primer orden, cuando se considera la solución nula y se continua el computo a ordenes superiores se verá que se sigue manteniendo esta solución, por lo tanto se concluye que no es posible reducir completamente  $g_1$  en términos de  $g_3$ .

En el caso de la reducción de  $g_2$ , observando las funciones que igual quedarían con las constantes encontradas en (4.23), se verá que en este caso sí hay una solución “aceptable” de acuerdo con las condiciones generales establecidas, correspondiente a la raíz positiva (la raíz negativa también se descarta en este caso pues los acoplamientos no pueden ser negativos):

$$g_2(g_3) \approx 1.53 g_3 + \dots ;$$

si bien a primera vista esto parece una buena noticia, la física que esto implica sería un en la que el acoplamiento débil es mayor que el acoplamiento fuerte, situación inaceptable. Por lo tanto, se dice que tampoco es posible reducir completamente este acoplamiento en términos de  $g_3$ .

Como se dijo al principio no hay algún acoplamiento que deba ser necesariamente el principal, entonces también se puede probar haciendo la reducción en términos de las otras constantes. Sin embargo, con lo anterior, es fácil observar cómo los resultados que se obtendrán se pueden predecir tan solo observando los símbolos de las funciones beta, por ejemplo, reducir  $g_3$  respecto de  $g_1$ , dará el mismo resultado con constantes imaginarias, y del mismo modo  $g_3$  en función de  $g_2$ , si bien proporcionará una solución matemáticamente aceptable sigue estando en desacuerdo con la fenomenología por lo que no puede aceptarse. En resumen y como se comenta en [24], solo las constantes con similar comportamiento asintótico (mismo símbolo,  $g_2 \leftrightarrow g_3$ ) pueden reducirse, mientras que los que no se comportan similarmente no se podrán reducir ( $g_1 \leftrightarrow g_3$ ,  $g_1 \leftrightarrow g_2$ ).

Como se sigue comentando, el hecho de que no pueda hacerse una reducción en el sector de norma del Modelo Estándar, de hecho, no es algo inesperado, en Teorías de Gran Unificación, se suelen obtener valores de  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ , en términos de una única constante de acoplamiento  $g$  de un grupo que para ser construido a partir de los grupos del ME, requiere de campos vectoriales que contribuirían a las funciones  $\beta$ . Con estas contribuciones se esperaría obtener mejores resultados en cuanto a la reducción de los acoplamientos de norma, no obstante ya se estaría llevando a cabo una extensión del ME que se escapa al propósito de este trabajo.

### 4.2.2. Acoplamientos de Yukawa

Continuando con el programa de reducción completa, se procederá a intentar llevar a cabo la reducción de los acoplamientos de Yukawa. Si bien el resultado anterior parece un poco desalentador, aún es posible obtener de ello algunos indicios sobre cómo continuar con este sector.

En primera, por conveniencia se continuará con la reducción en términos de los acoplamientos de norma, pero se continua insistiendo en que no hay alguna preferente por lo que en principio es posible hacer la reducción en términos de cualquiera de las tres. Con el resultado anterior, al reducir alguno de los acoplamientos de Yukawa en términos de uno de los acoplamientos de norma los otros tendrán valor nulo [24].

Dicho lo anterior, se procederá a hacer la reducción Yukawa en términos del acoplamiento fuerte  $g_3$ , mientras  $g_1 = g_2 = 0$ . Para esto, se consideran las funciones  $\beta$  de los acoplamientos de Yukawa proporcionadas por [27]:

$$16\pi^2\beta_{G_j^{(\ell)}} = G_j^{(\ell)} \left( - \left( \frac{15}{4}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 \right) + \frac{3}{2}G_j^{(\ell)2} + \sum_k \left( a_1 G_k^{(\ell)2} + 3a_2 G_k^{(d)2} + 3a_3 G_k^{(u)2} \right) \right), \quad (4.24)$$

$$16\pi^2\beta_{G_j^{(d)}} = G_j^{(d)} \left( - \left( \frac{5}{12}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + 8g_3^2 \right) + \frac{3}{2}G_j^{(d)2} + a_4 G_j^{(u)2} + \sum_k \left( a_5 G_k^{(\ell)2} + 3a_6 G_k^{(d)2} + 3a_7 G_k^{(u)2} \right) \right), \quad (4.25)$$

$$16\pi^2\beta_{G_j^{(u)}} = G_j^{(u)} \left( - \left( \frac{17}{12}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + 8g_3^2 \right) + \frac{3}{2}G_j^{(u)2} + a_8 G_j^{(d)2} + \sum_k \left( a_9 G_k^{(\ell)2} + 3a_{10} G_k^{(d)2} + 3a_{11} G_k^{(u)2} \right) \right); \quad (4.26)$$

donde las constantes  $a_i = 1, 2, \dots, 11$  son parámetros que se adaptan de acuerdo al tipo de modelo de 2 dobletes, recuérdese que pueden existir varias formas de acoplar los fermiones con los dobletes y en el cuadro 2, se pueden observar los diferentes valores de dichos parámetros para los tipos I, II, X y Y, que se consideran para este trabajo. Nótese que al estar tratando con matrices Yukawa diagonales cada elemento  $G_j^{(f)}$  corresponde al valor del acoplamiento de Yukawa del fermión en cuestión.

Antes de continuar es conveniente implementar un cambio de notación de tal forma que  $G_j^{(f)} \equiv y_{f_j}$ , además de introducir  $g_1 = g_2 = 0$ , en las ecuaciones (4.24), (4.25) y (4.26),

	ME	2HDM			
		Tipo I	Tipo II	Tipo X	Tipo Y
$a_1$	1	1	1	1	1
$a_2$	1	1	1	0	0
$a_3$	1	1	0	0	1
$a_4$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$a_5$	1	1	1	0	0
$a_6$	1	1	1	1	1
$a_7$	1	1	0	1	0
$a_8$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$a_9$	1	1	0	0	1
$a_{10}$	1	1	0	1	0
$a_{11}$	1	1	1	1	1

Cuadro 2: Valores de los parámetros  $a_i$  en las ecuaciones del grupo de renormalización de los acoplamientos de Yukawa para los cuatro tipos de 2HDM [27].

que quedarán de la manera siguiente:

$$16\pi^2\beta_{y_{\ell_j}} = y_{\ell_j} \left( \frac{3}{2}y_{\ell_j}^2 + \sum_k \left( a_1 y_{\ell_k}^2 + 3a_2 y_{d_k}^2 + 3a_3 y_{u_k}^2 \right) \right), \quad (4.27)$$

$$16\pi^2\beta_{y_{d_j}} = y_{d_j} \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}y_{d_j}^2 + a_4 y_{u_j}^2 + \sum_k \left( a_5 y_{\ell_k}^2 + 3a_6 y_{d_k}^2 + 3a_7 y_{u_k}^2 \right) \right), \quad (4.28)$$

$$16\pi^2\beta_{y_{u_j}} = y_{u_j} \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}y_{u_j}^2 + a_8 y_{d_j}^2 + \sum_k \left( a_9 y_{\ell_k}^2 + 3a_{10} y_{d_k}^2 + 3a_{11} y_{u_k}^2 \right) \right). \quad (4.29)$$

Una vez definidas las funciones  $\beta$ , el sistema de ecuaciones reducidas se obtendrá de la ecuación (3.4) e igual que anteriormente estará dada como:

$$\beta_{g_3} \frac{dy_{f_j}}{dg_3} = \beta_{y_{f_j}}. \quad (4.30)$$

Aplicando ahora (4.30), las ecuaciones de reducción serán:

$$-7g_3^3 \frac{dy_{\ell_j}}{dg_3} = y_{\ell_j} \left( \frac{3}{2}y_{\ell_j}^2 + \sum_k \left( a_1 y_{\ell_k}^2 + 3a_2 y_{d_k}^2 + 3a_3 y_{u_k}^2 \right) \right), \quad (4.31)$$

$$-7g_3^3 \frac{dy_{d_j}}{dg_3} = y_{d_j} \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}y_{d_j}^2 + a_4 y_{u_j}^2 + \sum_k \left( a_5 y_{\ell_k}^2 + 3a_6 y_{d_k}^2 + 3a_7 y_{u_k}^2 \right) \right), \quad (4.32)$$

$$-7g_3^3 \frac{dy_{u_j}}{dg_3} = y_{u_j} \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}y_{u_j}^2 + a_8 y_{d_j}^2 + \sum_k \left( a_9 y_{\ell_k}^2 + 3a_{10} y_{d_k}^2 + 3a_{11} y_{u_k}^2 \right) \right), \quad (4.33)$$

Nótese que estas ecuaciones de reducción, son de hecho, la de los cuatro tipos de 2HDM, para analizarlas se tendría que revisar caso por caso. Continuando con la metodología para la reducción completa se plantean soluciones en series de potencias como en la ecuación (3.6)

$$y_{\ell_j}(g_3) = y_{\ell_j}^{(0)} g_3 + y_{\ell_j}^{(1)} g_3^2 + y_{\ell_j}^{(2)} g_3^3 + \dots$$

$$y_{u_j}(g_3) = y_{u_j}^{(0)} g_3 + y_{u_j}^{(1)} g_3^2 + y_{u_j}^{(2)} g_3^3 + \dots$$

$$y_{d_j}(g_3) = y_{d_j}^{(0)} g_3 + y_{d_j}^{(1)} g_3^2 + y_{d_j}^{(2)} g_3^3 + \dots,$$

e igual que se hizo anteriormente se sustituye el orden superior de estas en las ecuaciones reducidas (4.31–4.33) con el fin de determinar las constantes:

$$-7g_3^3 \frac{d(y_{\ell_j}^{(0)} g_3)}{dg_3} = (y_{\ell_j}^{(0)} g_3) \left( \frac{3}{2}(y_{\ell_j}^{(0)} g_3)^2 + \sum_k \left( a_1 (y_{\ell_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_2 (y_{d_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_3 (y_{u_k}^{(0)} g_3)^2 \right) \right)$$

$$\begin{aligned} -7g_3^3 \frac{d(y_{d_j}^{(0)} g_3)}{dg_3} = & (y_{d_j}^{(0)} g_3) \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}(y_{d_j}^{(0)} g_3)^2 + a_4 (y_{u_j}^{(0)} g_3)^2 \right. \\ & \left. + \sum_k \left( a_5 (y_{\ell_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_6 (y_{d_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_7 (y_{u_k}^{(0)} g_3)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$-7g_3^3 \frac{d(y_{u_j}^{(0)} g_3)}{dg_3} = (y_{u_j}^{(0)} g_3) \left( -8g_3^2 + \frac{3}{2}(y_{u_j}^{(0)} g_3)^2 + a_8 (y_{d_j}^{(0)} g_3)^2 + \sum_k \left( a_9 (y_{\ell_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_{10} (y_{d_k}^{(0)} g_3)^2 + 3a_{11} (y_{u_k}^{(0)} g_3)^2 \right) \right)$$

simplicando, las ecuaciones quedarán del modo siguiente:

$$-7y_{\ell_j}^{(0)} = y_{\ell_j}^{(0)} \left( \frac{3}{2}y_{\ell_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_1 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_2 y_{d_k}^{(0)2} + 3a_3 y_{u_k}^{(0)2} \right) \right),$$

$$y_{\ell_j}^{(0)} \left( \frac{3}{2}y_{\ell_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_1 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_2 y_{d_k}^{(0)2} + 3a_3 y_{u_k}^{(0)2} \right) + 7 \right) = 0 \quad (4.34)$$

$$-7y_{d_j}^{(0)} = y_{d_j}^{(0)} \left( -8 + \frac{3}{2}y_{d_j}^{(0)2} + a_4 y_{u_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_5 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_6 y_{d_k}^{(0)2} + 3a_7 y_{u_k}^{(0)2} \right) \right),$$

$$y_{d_j}^{(0)} \left( \frac{3}{2}y_{d_j}^{(0)2} + a_4 y_{u_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_5 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_6 y_{d_k}^{(0)2} + 3a_7 y_{u_k}^{(0)2} \right) - 1 \right) = 0, \quad (4.35)$$

$$-7y_{u_j}^{(0)} = y_{u_j}^{(0)} \left( -8 + \frac{3}{2}y_{u_j}^{(0)2} + a_8 y_{d_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_9 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_{10} y_{d_k}^{(0)2} + 3a_{11} y_{u_k}^{(0)2} \right) \right),$$

$$y_{u_j}^{(0)} \left( \frac{3}{2}y_{u_j}^{(0)2} + a_8 y_{d_j}^{(0)2} + \sum_k \left( a_9 y_{\ell_k}^{(0)2} + 3a_{10} y_{d_k}^{(0)2} + 3a_{11} y_{u_k}^{(0)2} \right) - 1 \right) = 0. \quad (4.36)$$

### ***Reducción de acoplamiento de Yukawa de leptones***

Como se dijo, ahora será necesario revisar cada conjunto de ecuaciones de reducción dependiendo del tipo de 2HDM. Sin embargo, antes de hacer eso, en el caso de los acoplamiento de Yukawa leptónicos es posible realizar un análisis a la ecuación reducida general (4.34). Por lo que, concentrándose solamente en ella y reescribiéndola

de la siguiente manera

$$\frac{3}{2}y_{\ell_j}^{(0)2} + a_1 \sum_k y_{\ell_k}^{(0)2} = -3 \sum_k \left( a_2 y_{d_k}^{(0)2} + a_3 y_{u_k}^{(0)2} \right) - 7, \quad (4.37)$$

se puede llegar a una inferencia importante.

Para ello es necesario hacer las siguientes observaciones: en primera, consultando el cuadro 2, los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ , tendrán valor 1 ó 0, dependiendo del tipo de 2HDM; en segunda dado que los acoplamientos de Yukawa deben ser reales y positivos, los cuadrados de los acoplamientos de los quarks son necesariamente positivos.

Con los dos puntos anteriores se puede ver que la sumatoria de quarks, será en consecuencia, mayor o igual a cero. Por lo tanto, para todos los casos que se estudian, si se desea que  $y_{\ell_j} \neq 0$  los acoplamientos leptónicos tendrían que ser imaginarios para poder cumplir con esta ecuación.

Claramente la primera solución para las ecuaciones (4.34 – 4.36) sería la trivial. Como sucedió en la reducción de los acoplamientos de norma, se tendrán soluciones imaginarias y triviales para la ecuación (4.34). Por lo que se concluye que tampoco es posible llevar a cabo la “reducción completa” de los acoplamientos de Yukawa leptónicos, siendo

$$G_j^{(\ell)} = 0 \quad (4.38)$$

la única solución admisible para los leptones.

Continuando con los acoplamientos de Yukawa de los quarks, tomando cuenta este resultado, también se igualarán a cero los acoplamientos leptónicos,  $y_{\ell_j} = 0$ . Con lo cual las ecuaciones (4.35) y (4.36) quedarán reescritas del siguiente modo:

$$\frac{3}{2}y_{d_j}^{(0)2} + a_4 y_{u_j}^{(0)2} + 3 \sum_k \left( a_6 y_{d_k}^{(0)2} + a_7 y_{u_k}^{(0)2} \right) - 1 = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{3}{2}y_{u_j}^{(0)2} + a_8 y_{d_j}^{(0)2} + 3 \sum_k \left( a_{10} y_{d_k}^{(0)2} + a_{11} y_{u_k}^{(0)2} \right) - 1 = 0. \quad (4.40)$$

Nótese como hasta ahora los parámetros  $a_i$  han permitido obtener una conclusión que

aplica para los cuatros tipos de 2HDM, sin embargo, para los acoplamientos de Yukawa de los quarks ya no será posible hacerlo del mismo modo y sería necesario analizar los diferentes tipos por separado; afortunadamente al aplicar la conclusión obtenida en (4.38), los parámetros  $a_5$  y  $a_9$  estarán ausentes de las ecuaciones (4.32) y (4.33), obteniéndose las ecuaciones (4.39) y (4.40), revisando el cuadro 2, se puede notar entonces que las ecuaciones se dividirán en dos grupos de ecuaciones equivalentes, el de los acoplamientos del tipo I y X y otro lado las ecuaciones del tipo II y Y. Por lo que se procederá a hacer las reducciones de los acoplamientos de los quarks del modo siguiente.

***Reducción de acoplamientos de Yukawa de quarks para 2HMD tipo I y X***

Retomando las ecuaciones (4.39) y (4.40), e introduciendo los parámetros del cuadro 2, estas se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{3}{2} \left( y_{d_j}^{(0)2} - y_{u_j}^{(0)2} \right) = -3 \sum_k \left( y_{d_k}^{(0)2} + y_{u_k}^{(0)2} \right) + 1, \quad (4.41)$$

$$\frac{3}{2} \left( y_{u_j}^{(0)2} - y_{d_j}^{(0)2} \right) = -3 \sum_k \left( y_{d_k}^{(0)2} + y_{u_k}^{(0)2} \right) + 1. \quad (4.42)$$

Esto permite visualizar que si se desea que  $y_{d_j} \neq 0$  y  $y_{u_j} \neq 0$ , de tal manera que se cumplan ambas ecuaciones, necesariamente  $y_{d_j} = y_{u_j}$ .

No obstante, fenomenológicamente esto no estaría de acuerdo con las observaciones, pues las masas entre los quarks tipo up y down, no son iguales, particularmente con la última generación con el quark top y bottom. Por lo que con el propósito de ir acorde a la fenomenología se procede a usar la solución trivial en el acoplamiento de Yukawa del quark bottom, de tal forma que:

$$y_{d_j=b}^{(0)} = 0.$$

Por supuesto, si se hace esta consideración, entonces las masas inferiores a este quark

también serían despreciables, quedando entonces que

$$y_{q \neq t}^{(0)} = 0.$$

Con esto establecido, ya es posible hacer la reducción del acoplamiento al menos para  $y_t$ , para ello se toma el resultado anterior donde los demás acoplamientos de quarks son nulos excepto el del quark top y se sustituye en la ecuación (4.42), quedando

$$\frac{3}{2}y_t^{(0)2} + 3y_t^{(0)2} - 1 = 0,$$

Con esto queda claro que se obtiene una solución factible para permitir que  $y_t$  sea reducida en términos de  $g_3$  sería:

$$y_t^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{9}}, \quad (4.43)$$

es decir, quedará el acoplamiento yukawa del top en función de  $g_3$  de la siguiente manera (usando la notación original):

$$G_t(g_3) = \sqrt{\frac{2}{9}}g_3 + \dots, \quad (4.44)$$

con lo cual es posible decir que se ha logrado reducir  $G_t$ , como se puede ver en el cuadro 2 y en [24], este resultado coincide con la reducción en el Modelo Estándar, y es válido para los tipo I y X del modelo con dos dobletes de Higgs.

### ***Reducción de acoplamientos de Yukawa de quarks para 2HMD tipo II y Y***

Siguiendo el mismo procedimiento que en los tipos anteriores, las ecuaciones (4.39) y (4.40) para los tipos II y Y, quedarán de la siguiente manera:

$$\frac{3}{2}y_{d_j}^{(0)2} + 3 \sum_k y_{d_k}^{(0)2} + \frac{1}{2}y_{u_j}^{(0)2} = 1, \quad (4.45)$$

$$\frac{3}{2}y_{u_j}^{(0)2} + 3 \sum_k y_{u_k}^{(0)2} + \frac{1}{2}y_{d_j}^{(0)2} = 1. \quad (4.46)$$

En este caso es posible ver que hay diversas opciones que cumplen con estas ecuaciones, por lo que igual que antes, para tratar de seguir la fenomenología, se procederá a igualar a cero en esta ocasión los acoplamientos de los quarks de las primeras dos generaciones, con lo que las ecuaciones anteriores quedarían de la siguiente manera:

$$\frac{9}{2}y_b^{(0)2} + \frac{1}{2}y_t^{(0)2} = 1, \quad (4.47)$$

$$\frac{9}{2}y_t^{(0)2} + \frac{1}{2}y_b^{(0)2} = 1. \quad (4.48)$$

Algo importante que mencionar es que en estos tipos de 2HDM sí es admisible que los acoplamientos tengan el mismo valor de acoplamiento, pues las masas de las partículas estarán en función del valor de expectación del vacío y si se recuerda en el tipo II y Y, los quarks tipo up y down, se acoplan a un diferente doblete de Higgs y sus valores de expectación no tienen que ser necesariamente los mismos, y por tanto el quark bottom y el quark top pueden tener masa distinta.

Dicho esto surgen dos opciones fenomenológicamente aceptables distintas a la solución trivial, la primera viene directamente de resolver las ecuaciones (4.47) y (4.48):

$$\text{Caso IIa :} \quad y_b = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad y_t = \sqrt{\frac{1}{5}}. \quad (4.49)$$

Una segunda opción, que también puede ser utilizada en estos tipos de 2HDM que surgen para los acoplamientos de este tipo de 2HDM, sería tomando en cuenta la consideración hecha en el apartado anterior en la que  $y_b = 0$  :

$$\text{Caso IIb :} \quad y_b = 0, \quad y_t = \sqrt{\frac{2}{9}}. \quad (4.50)$$

Estos casos además del trivial para ambos grupos de soluciones, serán utilizadas para la reducción de los acoplamientos cuárticos, que se harán a continuación.

### 4.2.3. Acoplamientos cuárticos

El tercer sector de constantes de acoplamientos que se pueden reducir con este método es el de los acoplamientos cuárticos  $\lambda_j$  asociados con el potencial del bosón de Higgs (4.1), que como se vio en la sección 4.1.1 está relacionado directamente con la masa de las partículas físicas de Higgs que surgen tras la ruptura espontánea de la simetría.

Igual que anteriormente se analizarán los cuatro tipos de 2HDM a un lazo, si bien en [27], también se ofrece una opción general con parámetros  $\alpha_i$ , resulta menos confuso hacer la reducción escribiendo las ecuaciones reducidas de cada tipo de 2HDM, por lo que para esta sección se emplearán las RGE proporcionadas por Chowdhury y Eberhardt [28], que se pueden consultar en el anexo B.

Antes de continuar, algo que notar sobre las funciones beta proporcionadas, es que se encontrarán acopladas a las constantes de acoplamiento de Yukawa, o tendrán entre sus términos estos acoplamientos (por supuesto, también están presentes los acoplamientos de norma), en [28] se presentan las RGE a dos lazos (aunque para este trabajo solo se utilizan y por tanto se escriben a un lazo), no obstante, dadas las complicaciones para encontrar esas funciones betas tomando en cuenta todos los fermiones usualmente se suelen calcular solo considerando los acoplamientos de Yukawa de la última generación, es decir, los acoplamientos del leptón Tau ( $G_\tau$ ) y los quarks bottom ( $G_b$ ) y top ( $G_t$ ), por lo que se estudiarán de esa manera, aunque adelantando un poco, con lo obtenido en la reducción anterior esta consideración no influye en los resultados generales.

La razón por la cual se envían dichas ecuaciones beta al anexo, en primera es por la cantidad de ellos, pues se tienen cinco ecuaciones de acoplamientos cuárticos por cada tipo de 2HDM, pero sobretodo a debido a que a partir de ahora ya no se trabajará con las constantes de acoplamiento tal cual se presentan en el lagrangiano. Si se había hecho de esa manera fue para mostrar el funcionamiento del método de reducción de acoplamientos de manera directa, sin embargo, es mucho más ventajoso continuar los cálculos en el nuevo sistema de variables presentado en el anexo A, pues además de

simplificar significativamente los cálculos en la reducción completa, como se puede ver en ese apartado, el mencionado cambio de variables tiene otras consecuencias importantes en la reducción parcial, estos detalles y motivaciones se pueden leer en dicho anexo.

Establecido lo anterior, se pretende analizar cada tipo de 2HDM, pues las RGE no serán las mismas, no obstante, como ya se ha comentado, tomando en cuenta los resultados de la reducción en el sector de Yukawa, se verá que de hecho estos acoplamientos también se dividen en dos grupos, pues al introducir,  $G_j^{(\ell)} = 0 \implies \rho_\tau = 0$ , es decir, al introducir acoplamientos de Yukawa leptónicos nulos en las nuevas ecuaciones beta cuárticas (cf. §B.2) se obtendrá, al igual que en los acoplamientos de Yukawa, que los tipos I y X, al igual que II y Y, son equivalentes cuando se hace nulo el acoplamiento de leptones. Por lo que ya no será necesario analizar los cuatro tipos individualmente y se hará también solo en dos partes, eso sí tomando en cuenta los casos de cada parte.

### *Reducción de acoplamientos cuárticos para 2HMD tipo I y X*

Para estos tipos, adicional a tomar en cuenta que los acoplamientos de norma débil  $u$  y electromagnético  $v$ , junto con el acoplamiento leptónico  $\rho_\tau$ <sup>1</sup> se igualan a cero,  $u = v = \rho_\tau = 0$ , recuérdese que en la sección 4.2.2, se llegó también a la consideración de que  $G_j^{(u \neq l)} = 0 \implies \rho_b = 0$ , esto se puede introducir en los tipo I y X de las ecuaciones (B.7) a (B.11), correspondientes a las nuevas RGE en el nuevo sistema (ver anexo B). Utilizando entonces la condición de reductibilidad, como se muestra en el anexo A :

$$\beta_x \frac{d\rho_i}{dx} = \beta_{\rho_i}. \quad (4.51)$$

las ecuaciones de reducción para estos dos tipos de 2HDM, serán:

$$-14x \frac{d\rho_1}{dx} = 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1, \quad (4.52)$$

---

<sup>1</sup>Usando el nuevo sistema de variables (A.1), cf. anexo A

$$-14x \frac{d\rho_2}{dx} = 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 - 12\rho_t^2 + 12\rho_t\rho_2, \quad (4.53)$$

$$-14x \frac{d\rho_3}{dx} = (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 + 6\rho_t\rho_3, \quad (4.54)$$

$$-14x \frac{d\rho_4}{dx} = 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 + 6\rho_t\rho_4, \quad (4.55)$$

$$-14x \frac{d\rho_5}{dx} = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 6\rho_t + 14\right)\rho_5. \quad (4.56)$$

El siguiente paso para encontrar los acoplamientos es plantear soluciones en forma de series de potencias, tomar el orden superior y sustituirlas en las ecuaciones de reducción para encontrar el primer término. De acuerdo lo discutido en la sección A.3, para el nuevo sistema de variables, el primer término es una constante, por lo tanto la derivada será igual a cero y los acoplamientos se vuelven las constantes a determinar. En este punto es posible introducir que  $\rho_t = \frac{2}{9}$ , con esto, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$0 = 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1, \quad (4.57)$$

$$0 = 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 - 12\left(\frac{2}{9}\right)^2 + 12\left(\frac{2}{9}\right)\rho_2, \quad (4.58)$$

$$0 = (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 + 6\left(\frac{2}{9}\right)\rho_3, \quad (4.59)$$

$$0 = 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 + 6\left(\frac{2}{9}\right)\rho_4, \quad (4.60)$$

$$0 = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 6\left(\frac{2}{9}\right) + 14\right)\rho_5; \quad (4.61)$$

donde, ahora las  $\rho_i$  son constantes. En este punto se hace uso de las condiciones para estos acoplamientos dados en la ecuación (4.3). Comenzando con la ecuación (4.57), reescrita de la siguiente manera:

$$12\rho_1^2 + 14\rho_1 = -\left(2\rho_3^2 + 2(\rho_3 + \rho_4)^2 + 2\rho_5^2\right). \quad (4.62)$$

Esta permite ver el miembro derecho será negativo por lo tanto el único modo de cumplir con la condición  $\rho_1 \geq 0$ , es tal que:

$$\rho_1 \equiv 0. \quad (4.63)$$

Aplicando esto a (4.62), reescrita de la siguiente manera:

$$2\rho_3^2 + 2(\rho_3 + \rho_4)^2 + 2\rho_5^2 = 0,$$

implica que la única forma de cumplir con esto es tal que:

$$\rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0. \quad (4.64)$$

Esto que se ha encontrado, puede ser aplicado en la ecuación (4.58), para encontrar el valor de  $\rho_2$ :

$$0 = 12\rho_2^2 + 4(0)^2 + 4(0)(0) + 2(0)^2 + 2(0)^2 + 14\rho_2 - 12\left(\frac{2}{9}\right)^2 + 12\left(\frac{2}{9}\right)\rho_2,$$

$$12\rho_2^2 + \frac{50}{3}\rho_2 - \frac{16}{27} = 0,$$

$$\rho_{2,\pm} = \frac{1}{36}(-25 \pm \sqrt{689}),$$

donde claramente el valor útil será tal que  $\rho_2 \geq 0$ , es decir:

$$\rho_2 \approx 0.0346892 \quad (4.65)$$

### ***Reducción de acoplamientos cuárticos para 2HMD tipo II y Y***

Para los tipos II y Y, se procederá igual que en los tipos anteriores  $u = v = \rho_\tau = 0$ , aunque si se recuerda según lo comentado en la sección 4.2.2 para estos tipos los quarks no se acoplan al mismo doblete, dando como resultado que en el caso IIa (4.49) los acoplamientos  $Y_b$  no serán nulos, usando también (4.51), y las nuevas betas del anexo, las

ecuaciones de reducción para estos tipos serán:

$$-14x \frac{d\rho_1}{dx} = 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1 - 12\rho_b^2 + 12\rho_b\rho_1, \quad (4.66)$$

$$-14x \frac{d\rho_2}{dx} = 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 - 12\rho_t^2 + 12\rho_t\rho_2, \quad (4.67)$$

$$-14x \frac{d\rho_3}{dx} = (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 - 12\rho_b\rho_t + (6\rho_b + 6\rho_t)\rho_3, \quad (4.68)$$

$$-14x \frac{d\rho_4}{dx} = 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 + 12\rho_b\rho_t + (6\rho_b + 6\rho_t)\rho_4, \quad (4.69)$$

$$-14x \frac{d\rho_5}{dx} = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 6\rho_b + 6\rho_t + 14\right)\rho_5, \quad (4.70)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se introduce el término de orden superior de las soluciones en forma de series de potencias (la constante) y las ecuaciones anteriores se convierten en (introduciendo los valores de  $\rho_b = \rho_t = \frac{1}{5}$  para el caso IIa):

$$0 = 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1 - 12\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{5}\right)\rho_1,$$

$$0 = 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 - 12\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{5}\right)\rho_2,$$

$$0 = (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 - 12\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(6\left(\frac{1}{5}\right) + 6\left(\frac{1}{5}\right)\right)\rho_3,$$

$$0 = 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 + 12\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(6\left(\frac{1}{5}\right) + 6\left(\frac{1}{5}\right)\right)\rho_4,$$

$$0 = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 6\left(\frac{1}{5}\right) + 6\left(\frac{1}{5}\right) + 14\right)\rho_5.$$

recalcándose que ahora estas  $\rho_i$  son constantes. Simplificadas quedarían de la manera

siguiente:

$$\frac{12}{25} = 12\rho_1^2 + \frac{82}{5}\rho_1 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2, \quad (4.71)$$

$$\frac{12}{25} = 12\rho_2^2 + \frac{82}{5}\rho_2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2, \quad (4.72)$$

$$\frac{12}{25} = \left(6\rho_1 + 6\rho_2 + 4\rho_3 + \frac{82}{5}\right)\rho_3 + (2\rho_1 + 2\rho_2 + 2\rho_4)\rho_4 + 2\rho_5^2, \quad (4.73)$$

$$-\frac{12}{25} = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 4\rho_4 + \frac{82}{5}\right)\rho_4 + 8\rho_5^2, \quad (4.74)$$

$$0 = \left(2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + \frac{82}{5}\right)\rho_5. \quad (4.75)$$

De (4.75) se puede obtener fácilmente que la solución posible para  $\rho_5$  es tal que:

$$\rho_5 = 0 \quad (4.76)$$

Introduciendo este resultado en las ecuaciones anteriores y siguiendo las condiciones dadas en (4.3), la única solución plausible para el sistema de ecuaciones es tal que:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \approx 0.0285714, \quad \rho_4 \approx -0.028868. \quad (4.77)$$

En el caso IIb (4.50)  $\rho_b = 0$ , si esto se sustituye en las ecuaciones (4.66) a (4.70), se verá que se llegará a que dichas ecuaciones son iguales a las ecuaciones del caso I (ecs. (4.52) a (4.56)), por tanto obteniéndose el mismo resultado.

### ***Reducción de acoplamientos cuárticos para 2HMD, con $\rho_q = 0$***

Un caso más que considerar es el caso trivial de los acoplamientos de Yukawa, es decir  $\rho_q = 0$ , aplicando esto, resulta que las ecuaciones de reducción para todos los tipos

de 2HDM, serán las siguientes:

$$-14x \frac{d\rho_1}{dx} = 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1, \quad (4.78)$$

$$-14x \frac{d\rho_2}{dx} = 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2, \quad (4.79)$$

$$-14x \frac{d\rho_3}{dx} = (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3, \quad (4.80)$$

$$-14x \frac{d\rho_4}{dx} = 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4, \quad (4.81)$$

$$-14x \frac{d\rho_5}{dx} = (2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 14)\rho_5. \quad (4.82)$$

Nótese como la ecuación (4.78) es igual a (4.52), por lo que también se tendrá el mismo resultado que en el caso I. El mismo procedimiento puede aplicar también para la ecuación (4.79), por lo tanto, en el caso de trivial de los acoplamientos de Yukawa, los acoplamientos cuárticos serán también iguales a:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0. \quad (4.83)$$

### 4.3. Reducción parcial

En la sección anterior se intentó seguir con los lineamientos establecidos para lograr la llamada reducción completa de las constantes de acoplamiento, no obstante, como se vio, no fue posible alcanzar dicho objetivo, salvo para el acoplamiento de Yukawa del quark top, en uno de los casos para para el quark bottom y para los acoplamientos cuárticos del bosón de Higgs.

Conceptualmente hablando, el método de reducción de acoplamientos resulta una idea muy atractiva para tratar el problema de los parámetros libres, sin embargo, en la práctica ya se ha visto que no siempre es posible aplicarlo de manera completa. No obstante, dado que con las simplificaciones adecuadas se llegó al cálculo de las constantes de acoplamientos, si bien, esto ya no va en al dirección de resolver enteramente el problema en el cuál se inspira este trabajo, resulta interesante continuar con la exploración de esta posibilidad, pues de hecho, se ha visto que el método sí permite reducir algunos de esos parámetros libres.

Como se comentó en la sección 3.2, si se abandona la idea de utilizar exclusivamente una sola constante, es posible usar valores experimentales como condiciones de frontera para encontrar las soluciones exactas de las soluciones generales de la ecuaciones diferenciales. En esta sección se intentará llevar a cabo la llamada reducción parcial, con el objetivo principal de comprender mejor los valores de los acoplamientos obtenidos en la sección anterior.

Para encontrar las relaciones entre las soluciones de la reducción completa y las de la reducción parcial, se comenzará revisando los acoplamiento de norma.

#### 4.3.1. Soluciones generales de los acoplamientos de norma

Si bien ya se comentó en la sección 4.2.1, que por la naturaleza de las fuerzas no es posible llevar a cabo la reducción, el motivo y formato del análisis de las soluciones generales de los términos acoplamientos de Yukawa y cuárticos, pueden ser visualizados de modo más sencillo y directo a través de la revisión de las soluciones generales de los acoplamientos de norma, en el sistema de variables propuesta en el anexo A.

Resolviendo (A.14) y (A.15), se obtienen las siguientes funciones generales:

$$u(x) = \frac{7}{3} \frac{1}{C_u x + 1}, \quad v(x) = \frac{1}{C_v x - 1}; \quad (4.84)$$

donde  $C_u$  y  $C_v$  son las respectivas constantes de integración de cada ecuación diferencial.

En la ecuación (A.22) de la sección A.4 del anexo, se proporciona una condición que dice que las soluciones generales deben tender a valores finitos y en estos casos iguales o mayores que cero, en el límite cuando la variables principal tiende a cero. La cual permite analizar estas soluciones generales aún sin conocer el valor de las constantes de integración, que al ser aplicada dicha a las soluciones en (4.84), se llegó a la misma conclusión de que la sección 4.2.1. Sin embargo, lo realmente interesante de esta condición es que permiten observar una relación entre las soluciones generales y la reducción completa.

Incluso sin conocer los valores de  $C_u$  y  $C_v$ , se puede ver que en el régimen cuando  $x \rightarrow 0$ , los valores que las funciones terminan adquiriendo son de hecho las soluciones no triviales en la reducción completa (ecs. (A.20) y (A.21)):

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \frac{7}{3} \equiv u_+^{(0)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = -1 \equiv v_-^{(0)};$$

mientras que cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \equiv u_-^{(0)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0 \equiv v_+^{(0)},$$

estas son las soluciones triviales de la reducción completa.

Esta observación tiene una consecuencia importante sobre las soluciones encontradas hasta ahora. Lo que se está viendo es que en realidad dichas soluciones son casos especiales de las soluciones generales. De hecho y siendo más precisos, se puede decir que: la reducción completa proporciona soluciones en los límites asintóticos.

Las implicaciones de esta última inferencia se estudian en el siguiente apartado, aunque antes de continuar, por completez se determinarán los valores de las constantes  $C_u$  y  $C_v$  para concluir esta subsección presentándose las soluciones exactas que son el objetivo de la reducción parcial. Para ello es necesario emplear mediciones experimentales como condiciones de frontera. En primera tomando en cuenta que

$$x = \alpha_s, \quad u = \frac{\alpha}{\alpha_s \sin^2 \theta}, \quad v = \frac{\alpha}{\alpha_s \cos^2 \theta}; \quad (4.85)$$

y usando los datos más actualizados [29]:

$$\alpha(M_Z) = \frac{1}{127.916}, \quad \alpha_s(M_Z) = 0.1179(9), \quad \sin^2 \theta(M_Z) = 0.231\,21(4);$$

se obtienen los siguientes puntos a la escala de la masa del bosón  $Z$ :

$$x(M_z) = 0.1179, \quad u(M_z) = 0.28678, \quad v(M_z) = 0.08625; \quad (4.86)$$

con esto directamente se llega a que:

$$C_u = 60.5276, \quad C_v = 106.8223.$$

Y con ello las soluciones exactas de las ecuaciones de reducción (A.14) y (A.15) sería por tanto:

$$u(x) = \frac{7}{3} \frac{1}{60.5276x + 1}, \quad v(x) = \frac{1}{106.8223x - 1}; \quad (4.87)$$

que con la condición (A.22), ya permite saberse su plausibilidad como función del acoplamiento principal.

### 4.3.2. Estabilidad de las soluciones generales

Como se puede ver, no ha sido una casualidad la decisión de realizar la *reducción parcial* de los acoplamientos de norma, a pesar de que se podría sospechar que al llevarla cabo se llegaría a las mismas conclusiones obtenidas durante su *reducción completa*. Sin embargo, ahora se sabe que si se ha hecho ha sido para llegar a la conclusión de que las soluciones especiales en realidad son los casos asintóticos de las soluciones generales. De hecho, se puede llegar a esta misma inferencia, si se lleva el mismo análisis ahora sobre los acoplamientos de Yukawa [24, sec. 4.1].

Por supuesto, esta situación fue advertida por los principales investigadores de este método [7, 19, 22, 24], y esta observación permite proporcionar una conclusión importante los acoplamientos que no fueron reducidos.

La idea principal de hacer la reducción parcial, es que en lugar de utilizar el *ansatz* de las soluciones en series de potencias como se hace en la reducción completa, se utilicen condiciones de frontera para resolver las ecuaciones reducidas, se recalca que esto rompe con el espíritu de utilizar una sola variable, pero podría ser de utilidad para

encontrar funciones exactas que darán valores del acoplamiento subordinado a otras escalas de energías que las que se usan como condición inicial. De hecho, la condición del límite del acoplamiento débil, sirve como condición de frontera (3.5) para todos los acoplamientos, pero esta por sí sola, no es capaz de determinar cuales acoplamientos son aptos para ser reducidos.

No obstante, es justamente esta condición la que permite encontrar que las soluciones de la reducción completa (que llamamos soluciones especiales) en realidad son soluciones en los límites asintóticos de las soluciones de la reducción parcial (soluciones generales), y es partir de esta noción que se discute que es posible aplicar la teoría de estabilidad de Lyapunov a las soluciones generales [19, 24].

La aplicación de esta teoría en las ecuaciones de reducción permite distinguir cuales acoplamientos tienen las llamadas soluciones asintóticamente estables y cuales no, sin tener que resolver una por una. Para ello bastará con encontrar los eigenvalores de la matriz de estabilidad que de acuerdo con [24], para las ecuaciones del grupo de renormalización estará definida de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial \beta_{i0}}{\partial \rho_{j0}} - b_0 \delta_{ij} \right); \quad (4.88)$$

donde  $b_0$  es la constante en función beta de la variable principal,  $\rho_{j0}$  está relacionada con las constantes de acoplamiento  $j$  y  $\beta_{i0}$  está relacionada con con las RGE subordinadas. Sin embargo, justamente aquí es donde hace gala el cambio de variables (cf. §A) propuesto por Denner [25], pues este simplifica sobremanera el cálculo de matriz de estabilidad, reduciéndolo en palabras de Denner, a la derivada del miembro derecho de  $i$ -ésima ecuación de reducción respecto a la  $j$ -ésima variable, divididas por  $-14$ , el miembro izquierdo de dichas ecuaciones.

Se puede encontrar la matriz de estabilidad para cada tipo de 2HDM. Concentrándose en las ecuaciones del grupo de renormalización del tipo I (esta es la

forma completa tomando en cuenta todos los acoplamientos):

$$\begin{aligned}
-14x \frac{du}{dx} &= -6u^2 + 14u, \\
-14x \frac{dv}{dx} &= 14v^2 + 14v, \\
-14x \frac{d\rho_{\ell_j}}{dx} &= 2\rho_{\ell_j} \left( - \left( \frac{15}{4}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{\ell_j} + \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right) + 7 \right), \\
-14x \frac{d\rho_{d_j}}{dx} &= 2\rho_{d_j} \left( - \left( \frac{5}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{d_j} - \frac{3}{2}\rho_{u_j} + \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right) - 1 \right), \\
-14x \frac{d\rho_{u_j}}{dx} &= 2\rho_{u_j} \left( - \left( \frac{17}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{u_j} - \frac{3}{2}\rho_{d_j} + \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right) - 1 \right), \\
-14x \frac{d\rho_1}{dx} &= \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}vu + \frac{9}{4}u^2 - 3v\rho_1 - 9u\rho_1 + 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1, \\
-14x \frac{d\rho_2}{dx} &= \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}vu + \frac{9}{4}u^2 - 3v\rho_2 - 9u\rho_2 + 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 \\
&\quad + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 + 4\rho_2 \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right) - 4 \sum_k \left( \rho_{\ell_k}^2 + 3\rho_{d_k}^2 + 3\rho_{u_k}^2 \right), \\
-14x \frac{d\rho_3}{dx} &= (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 + 2\rho_3 \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right), \\
-14x \frac{d\rho_4}{dx} &= 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 + 2\rho_4 \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right), \\
-14x \frac{d\rho_5}{dx} &= \left( 2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 + 14 + 2 \sum_k \left( \rho_{\ell_k} + 3\rho_{d_k} + 3\rho_{u_k} \right) \right) \rho_5.
\end{aligned}$$

La matriz de estabilidad estaría dada como:

$$S = \begin{bmatrix} \rho_e & \rho_\mu & \rho_\tau & \rho_d & \rho_s & \rho_b & \rho_u & \rho_c & \rho_t & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 \\ -\frac{23}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{23}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{63} & -\frac{2}{63} & -\frac{2}{63} & -\frac{2}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7}\rho_2 & -\frac{2}{7}\rho_2 & -\frac{2}{7}\rho_2 & -\frac{6}{7}\rho_2 & -\frac{6}{7}\rho_2 & -\frac{6}{7}\rho_2 & -\frac{6}{7}\rho_2 & -\frac{6}{7}\rho_2 & 0.35 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.11 & -\frac{1}{7}\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.10 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

La diagonal de la matriz proporciona los eigenvalores de esta y permite distinguir cuales acoplamientos tienen soluciones estables y cuales inestables. Recuérdese que las soluciones estables hacen referencia a que en el límite asintótico, las soluciones generales no se alejan del punto de equilibrio de la función.

Esto tiene una consecuencia importante para la reducción de acoplamientos. Tomando en cuenta que el punto de equilibrio es un valor finito, esto quiere decir que al ser estables cualquier valor que adquieran las constantes de integración en las soluciones generales no divergirá, por tanto, se cumplirá con la condición del límite de acoplamiento débil. Esto se traduce en que habrá para los acoplamientos estables un número infinito de soluciones generales que se aproximan a la solución reducida cuando  $x \rightarrow 0$  y que estarán dadas de la forma:

$$\rho_q \sim c_q x^{\xi_q},$$

donde  $\xi_q$  son los eigenvalores de la matriz de estabilidad y  $c_q$  una constante arbitraria, significando esto que dichos acoplamientos no pueden ser definidos de manera única. En (4.89), dichas variables estables son aquellas cuyo eigenvalor es positivo, es decir, los acoplamientos de los quarks exceptuando al top.

Los acoplamientos de leptones, del quark top y los cuárticos del bosón de Higgs, son inestables, es decir, no hay soluciones generales que se acerquen al punto de equilibrio cuando  $x \rightarrow 0$ .

Este mismo análisis puede ser llevado a cabo para los demás tipos de 2HDM, obteniéndose diferentes valores para la matriz de estabilidad, no obstante, con los mismo signos y por lo tanto, las mismas conclusiones.

Este cálculo relativamente sencillo concluye la reducción parcial, pues demuestra de manera analítica en cuales acoplamientos se puede aplicar la reducción de acoplamientos. Sin embargo, esto también da paso a una cuestión importante: los acoplamientos inestables están definidos de manera única, por lo que a partir de los valores de dichas constantes se puede definir una masa de la partícula elemental con la que está relacionada.

#### 4.4. Masas de partículas elementales

Con esto último, finaliza el programa de reducción acoplamientos para el modelo de 2HDM, de todos modos aún fue posible reducir a primer orden los valores de determinadas constantes de acoplamiento. Utilizando entonces las definiciones de masas para dichos acoplamientos dadas en las ecuaciones (4.5) y (4.11), se obtienen los siguiente valores para los diferentes casos:

##### 4.4.1. 2HDM tipo I y X

Para estos casos, se obtuvieron los siguientes resultados para las constantes de acoplamiento de los fermiones:

$$G_\ell(g_3) = G_{q \neq t}(g_3) = 0, \quad G_t(g_3) = \sqrt{\frac{2}{9}}g_3 + \dots$$

En el caso de los acoplamientos cuárticos, en el sistema de variables propuesta, los resultados fueron

$$\rho_1(x) = \rho_3(x) = \rho_4(x) = \rho_5(x) = 0, \quad \rho_2(x) = 0.0346892 + \dots$$

En este tipo, los quarks están acoplados únicamente al segundo doblete de Higgs, con lo cual la masa del quark top, estará dada de la siguiente manera:

$$m_t = \frac{1}{\sqrt{2}} G_t v_2;$$

Para encontrar  $G_t$ , es necesario determinar  $g_3$ , que como se ha dicho suele ser dada en la constante de acoplamiento fuerte  $\alpha_s = \frac{g_3^2}{4\pi} \equiv x$  por lo tanto,  $g_3 = \sqrt{4\pi x}$ . Con  $\alpha_s$  a la escala de la masa del bosón  $Z$ ,  $x(M_z) = 0.1179(9)$  [29]:

$$G_t = \sqrt{\frac{2}{9}} \cdot (\sqrt{4\pi x}) \approx 0.573793$$

Sin embargo, aún no es posible obtener una masa para el top pues los valores de  $v_1$  y  $v_2$ , no están completamente definidos. Para sortear esto se puede usar la relación

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_F^0}}, \quad (4.90)$$

donde  $G_F^0 = 1.1663787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ , es la constante de Fermi, de tal forma que el valor de expectación del vacío es  $v = 246.22 \text{ GeV}$ . Usando estas equivalencias la masa del top queda definida como:

$$m_t = \frac{1}{\sqrt{2}} G_t v_2 \left( \frac{v}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right);$$

con esto se puede dar un valor numérico multiplicado por una escala porcentual,:

$$m_t \approx \left( \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right) 99.9 \text{ GeV} \quad (4.91)$$

donde en el caso que  $v_1 = 0$  entonces  $m_t \approx 99.9 \text{ GeV}$ .

Para masa de los Higgs, traduciendo los resultados a las constantes originales:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_2 = 4\pi x \rho_2 \approx 0.0513947$$

Con estos primero queda claro que:

$$m_{H^\pm} = \sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v^2} = 0, \quad m_A = \sqrt{-\lambda_5 v^2} = 0,$$

mientras que el parámetro  $\eta$  quedara como  $\eta_\pm = \lambda_2 v_2^2 \pm \lambda_2 v_2^2$ , tal que

$$m_h = \sqrt{\frac{1}{2}\eta_-} = 0, \quad m_H = \sqrt{\frac{1}{2}\eta_+} = \sqrt{\frac{1}{2}(2\lambda_2 v_2^2)} = \sqrt{\lambda_2} v_2.$$

Acomodando un poco los términos en la masa del bosón de Higgs,  $m_H$  e introduciendo igual que antes la relación (4.90), para poder dar un valor numérico:

$$m_H \approx \left( \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right) 55.8 \text{ GeV}. \quad (4.92)$$

#### 4.4.2. 2HDM tipo II y Y

Para el caso IIa, se obtuvieron los siguientes resultados no nulos, para los acoplamientos de quarks:

$$\rho_b(x) = \rho_t(x) = \frac{1}{5}$$

que traducidas a los acoplamientos originales serían:

$$G_b = \sqrt{4\pi x \rho_b} \approx 0.544348 \quad G_t = \sqrt{4\pi x \rho_t} \approx 0.544348$$

En estos casos se ha comentado que al estar acopladas los a diferentes dobletes, las masas serían:

$$m_b = \frac{1}{\sqrt{2}} G_b v_1 \quad m_t = \frac{1}{\sqrt{2}} G_t v_2$$

Con esto, es posible determinar el valor de expectación  $v_1$  usando la masa del quark bottom a la escala del bosón  $Z$ ,  $m_b(m_Z) = 2.8$  GeV, es decir:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{G_b} m_b \approx 7.27438 \text{ GeV}$$

usando la relación (4.90), el valor de expectación  $v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^2} \approx 246.112$  GeV, con lo cual la masa para el top sería:

$$m_t \approx 94.7 \text{ GeV}$$

Los acoplamientos cuárticos para estos tipos eran:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \approx 0.0285714, \quad \rho_4 \approx -0.028868 \quad \rho_5 = 0.$$

que traducidos serían:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \approx 0.0423307, \quad \lambda_4 \approx -0.0427701 \quad \lambda_5 = 0.$$

Usando las relaciones para las masas y  $v_1$  y  $v_2$ , como fueron definidas con los quarks se tendría:

$$m_H = \sqrt{\frac{1}{2}\eta_+} = 50.6 \text{ GeV}, \quad m_h = \sqrt{\frac{1}{2}\eta_-} = 1.7 \text{ GeV},$$

$$m_{H^\pm} = \sqrt{-\frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v^2} = 36.0 \text{ GeV}, \quad m_A = \sqrt{-\lambda_5 v^2} = 0.$$

El caso IIb, tiene los mismos resultados que el tipo I. Y finalmente el caso trivial, dará por supuesto, que todas las masas son nulas.

## CAPÍTULO 5

---

# Resultados y discusiones

---

### 5.1. Resultados

Aplicando el *método de reducción de acoplamientos* [7] en la extensión del Modelo Estándar con dos dobletes de Higgs, se analizaron los 4 tipos que cumplen con la conservación natural del sabor, llamados tipo I, II, X y Y, respectivamente, cuya diferenciación se debe al doblete al cual acoplan los diferentes quarks y que se puede consultar en el cuadro 1.

Con el propósito original del atacar el problema de los parámetros libres, el método propone una forma encontrar relaciones funcionales tales que fuese posible escribir  $n - 1$  parámetros de una teoría cuántica de campos con  $n$  parámetros libres, como funciones de uno sólo de ellos que sería llamado constante primaria. Esta propuesta se lograría a través de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales donde se relacionan las ecuaciones del grupo de renormalización o funciones beta de cada parámetro a través de la condición de reductibilidad (3.4), que justamente proporciona las mencionadas ecuaciones diferenciales llamadas *ecuaciones de reducción*.

Para resolver este sistema, se distinguen dos regímenes uno llamado *reducción completa* y otro llamado *reducción parcial*. En el primero se busca encontrar las funciones a través de proponer soluciones en series de potencias las cuales cumplen con determinadas condiciones discutidas en la sección (3.2). Mientras que en el segundo régimen se propone encontrar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales y determinar las constantes de integración a través de condiciones iniciales. Los nombres de ambos regímenes responden a que en el primer caso, la reducción es autosuficiente y sólo requiere del parámetro primario, mientras que en el segundo es necesario conocer ciertas condiciones de frontera, rompiendo un poco con la filosofía del método de emplear

un único parámetro.

Siguiendo el formalismo de la reducción completa, se encontró que sólo algunos parámetros podrían ser reducidos bajo este régimen.

Al intentar seguir con la reducción parcial, no se procedió a hacer el cálculo de soluciones exactas, pues se encontró una situación de mayor interés para este estudio: se observó que aquellos parámetros con estabilidad asintótica, no son capaces de brindar soluciones únicas y por tanto no sería posible predecir valores de acoplamientos con este método<sup>1</sup>. Para poder encontrar dichos parámetros se llevó a cabo el cálculo de una matriz de estabilidad mostrada en (4.89).

Para presentar los resultados obtenidos de la reducción completa, se muestran dos casos con soluciones no triviales relacionadas con los acoplamientos de Yukawa del quark top y las partículas de Higgs. Estos dos casos agrupan por un lado los tipos I y X, que tienen las mismas soluciones y por el otro los tipos II y X, que también comparten sus soluciones, por lo que en los siguiente cuadros se observarán los valores de los acoplamientos obtenidos (cuadro 3).

	Tipo I/X	Tipo II/Y
$G_t$	0.573793	0.544348
$\lambda_1$	0	0.0423307
$\lambda_2$	0.0513947	0.0423307
$\lambda_3$	0	0.0423307
$\lambda_4$	0	-0.0427701
$\lambda_5$	0	0

Cuadro 3: Constantes de acoplamientos encontradas a la escala del bosón  $Z$ .

A partir de estas constantes de acoplamiento y utilizando las ecuaciones de la sección 4.4, en el cuadro 4 se encontraron masas de las partículas relacionadas con dichas constantes de acoplamiento a la escala de energía de la masa del bosón  $Z$ .

---

<sup>1</sup>Esto se discute más adelante.

	Tipo I/X (GeV)	Tipo II/Y (GeV)
$m_t$	$\leq 99.9$	94.7
$m_H$	$\leq 55.8$	50.6
$m_h$	0	1.7
$m_{H^\pm}$	0	36.0
$m_A$	0	0

Cuadro 4: Masas de partículas encontradas a la escala del bosón  $Z$ .

## 5.2. Discusiones

### 5.2.1. El método de reducción en modelos de 2 dobletes de Higgs: el caso más general

Una de las motivaciones del método de reducción, que no había sido comentada explícitamente, es que al encontrar relaciones entre las constantes de acoplamiento se pueden encontrar simetrías subyacentes en el modelo que se estudia; esto tiene sentido si se piensa que cuando se introducen simetrías “manualmente” el número de parámetros efectivamente se reduce, por ejemplo, esto se vio en los modelos con NFC, al establecerse manualmente una simetría  $\mathbb{Z}_2$  en el modelo de dos dobletes general, se redujeron los acoplamientos  $\lambda_6$  y  $\lambda_7$ .

Tomando en cuenta esta observación, resulta de interés tratar de estudiar la forma más general de un modelo dado, de modo que estén presentes todos sus parámetros para tratar de encontrar alguna o algunas simetrías ocultas. Esto se consideró en el modelo de dos dobletes, cuya variante más general es la llamada tipo III, sin embargo, a pesar de lo atractivo de dicha variante, se comentó en la sección 1.3 que para encontrar las masas de las partículas en dicha versión de 2HMD sería necesario introducir parámetros extras cuyos valores tampoco se encuentran definidos. De manera anticipada, se sabía que la determinación de las masas de partículas sería una de las principales aplicaciones que este método poseía. Dado que era una meta que se deseaba alcanzar, aunado a las dificultades para obtener las ecuaciones del grupo de renormalización de los acoplamientos cuárticos para dicho modelo, se optó finalmente por descartar la revisión del 2HDM tipo III. Sin embargo, como se comentará a continuación el análisis de los modelos con NFC fue bastante provechoso.

### 5.2.2. Observaciones sobre los acoplamientos y masas encontradas

De acuerdo con las ecuaciones de grupo de renormalización a un lazo (4.12–4.14), el sector de norma no se encuentra acoplado a los demás parámetros, esto es, las funciones betas no incluyen términos de los acoplamientos de Yukawa o de Higgs en su formulación, por lo que entonces el resultado de la reducción de este sector tendría resultados aplicables para cualquier modelo de dos dobletes, incluyendo al tipo III.

Al intentar reducir dichas constantes de acoplamiento se pudo observar que las soluciones o funciones tenían que tener valores nulos cuando se intentan poner en función de alguno de ellos. Por ejemplo, en este trabajo se redujo respecto al acoplamiento fuerte, entonces las únicas soluciones válidas eran tales que  $f(g_3) = 0$ , esto se traduce en que, de acuerdo con los resultados no existiría una función que relacione un parámetro de norma con otro. Como se comentó en la sección 4.2.1, esto tiene sentido físico y tendría que ser de esa manera, pues lo que se está observando es consecuencia de la diferencia en la naturaleza de las interacciones fundamentales, por ejemplo, las diferencias entre sus magnitudes o también la forma de sus respectivos comportamientos asintóticos.

Respecto al comentario de la subsección anterior de que al encontrar relaciones entre los parámetros lo que se estaría haciendo sería encontrar simetrías subyacentes entre los parámetros, al no encontrar las relaciones en este modelo, lo que se infiere es que justamente no hay alguna simetría oculta que relacione los acoplamientos de norma entre sí. Esto no es necesariamente una mala noticia, pues se puede interpretar como un indicio más de algo que se ha venido investigando en la física más allá del ME: es necesario un grupo de simetría aún más grande, por ejemplo capaz de unificar las interacciones fundamentales y que con este quizás sería posible explicar los fenómenos que el ME por sí mismo actualmente no es capaz.

El resultado de que no es posible reducir los acoplamientos de norma entre sí, tiene una importante implicación en la reducción del resto de parámetros. Dado que el resto de funciones beta sí se encuentran ligadas a estos acoplamientos, para continuar la reducción en los demás sectores con alguno de los acoplamientos de norma como

acoplamiento primario, será necesario que los otros dos tengan valor nulo. Esto naturalmente, tiene cierta influencia en los valores que se encontrarán en los acoplamientos de Yukawa y los autoacoplamientos de los dobletes de Higgs, pues se estarían descartando las aportaciones de los acoplamientos con valor nulo.

Adicionalmente, como se podría intuir la elección de uno de los acoplamientos de norma como parámetro primario conlleva a que la reducción pueda estar sujeta a la relación física entre dicho parámetro y los parámetros a reducir.

Continuando con los sectores que fueron reducidos, lo que se ha mencionado se hace presente en el sector de los acoplamientos de Yukawa leptónicos, donde se pudo obtener como conclusión general que estos tendrían que tener valores triviales, traducándose en leptones no masivos.

Lo interesante de este resultado surge al advertir que en la reducción llevada a cabo aquí y en la literatura consultada, se toma como acoplamiento primario a la constante de acoplamiento fuerte, una interacción propia de los quarks. La observación de que la nulidad de las masas de los leptones está influida por la elección del acoplamiento fuerte como acoplamiento primario se apoya también con el trabajo de Kubo, Sibold y Zimmermann [24], donde muestran que mediante un mecanismo de “encendido” se pueden incluir las aportaciones de los acoplamientos electrodébiles y que con esto que los leptones podrían adquirir masa también.

Siguiendo el formalismo de reducción completa, el resto de los acoplamientos de Yukawa y cuárticos de Higgs, resultaron tener soluciones triviales, con excepción de los quarks más pesados y las partículas de Higgs. Esto sucede en los dos casos no-triviales que se identificaron para los cuatro tipos de 2HDM.

Si bien no es posible dar una explicación física del por qué sucede esto, resulta de interés notar que esto se da de manera natural y va de acuerdo con lo que se observa fenomenológicamente, pues recuérdese que entre las partículas más masivas se encuentran justamente el quark top y el bosón de Higgs. Lo que se ha obtenido sugiere que podría existir una relación funcional entre la masa del top, el bosón de Higgs y el acoplamiento

fuerte, que explicaría parcialmente el valor de su masa.

### 5.2.3. Estabilidad de las soluciones

Se ha comentado que se distinguieron dos esquemas en el método de reducción, uno en el que basta con la condición de reductibilidad (3.4) y de renormalizabilidad (3.6) para obtener las soluciones o funciones que relacionan las constantes de acoplamiento entre sí y que de hecho proporcionan los resultados mostrados en la primera sección de este capítulo; y otro régimen llamado de *reducción parcial* en el que utilizando datos experimentales como condiciones de frontera es posible encontrar las mencionadas funciones.

La primera observación que se hace es respecto a la naturaleza de las soluciones o funciones de los distintos regímenes. En el primer caso, al utilizar un *ansatz* para asegurar la renormalizabilidad, las soluciones en series de potencias serían aproximaciones a cierto orden. Mientras que en el segundo caso, al utilizar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales se estarían obteniendo funciones exactas.

Si bien al tener soluciones exactas se tendría una mayor precisión en las predicciones, se encontró que el empleo de estas podría provocar el incumplimiento de alguno de los principios básicos de este método, dando soluciones que en apariencia relacionan los acoplamientos, pero que no estarían acordes a la realidad física.

Uno de esos principios que pueden ser incumplidos en la llamada reducción parcial, es el principio del límite del acoplamiento débil (3.5) que exige que cuando el acoplamiento principal tienda a cero lo hagan también las variables subordinadas.

La respuesta a esta situación la discuten Oehme, Sibold, Zimmermann y Kubo [20, 24], quienes sugieren realizar un análisis de la estabilidad de las soluciones generales, con el fin de determinar cuáles soluciones son estables alrededor de un determinado punto de equilibrio, en este caso el origen.

En el presente trabajo, la determinación de la estabilidad de las soluciones terminó por ocupar el espacio destinado a la reducción parcial, pues este análisis permitió encontrar fácilmente cuáles parámetros tenían en realidad infinitas soluciones que cumplieran con el principio del límite débil, siendo por tanto no provechoso tratar de encontrar sus soluciones exactas, pues al estar las funciones ligadas a dichos valores y la

cantidad de soluciones infinitas, entonces no se podrían obtener predicciones únicas de las constantes de acoplamiento (y por tanto de las masas de dichas partículas).

En dicho análisis, cuyos resultados se comentan en la sección 4.3.2 y que se pueden observar en la matriz (4.89), se obtuvo que serían los acoplamientos de Yukawa leptónicos, el del quark top y los acoplamientos cuárticos de los dobletes quienes al tener “soluciones inestables” tendrían soluciones únicas, mientras que el resto de acoplamientos tendrían soluciones infinitas. Respecto a los acoplamientos inestables, significaría que para estos no podrían encontrarse soluciones exactas que cumplan con el principio del límite débil, por lo que tendríamos que quedarnos con las soluciones proporcionadas por la reducción completa.

Estos fueron los motivos por los que en la sección (4.3) no se continuó con la exploración de las soluciones exactas.

#### 5.2.4. Reducción de acoplamiento en modelos multi-Higgs

El análisis completo de la reducción de acoplamientos para modelos multi-Higgs, implicaría efectuar el procedimiento presentado en este trabajo para cada sector de cada uno de los modelos con  $N$  dobletes, lo cuál, por supuesto, se vuelve más complejo conforme aumenta el número de dobletes. Sin embargo, utilizando las funciones beta del sector de norma a un lazo (ecs. 4.12–4.14), es posible hacer algunas inferencias generales para dicho sector en este tipo de extensiones.

Sean las ecuaciones del grupo de renormalización del sector de norma para  $N$  dobletes, que se reescriben de la siguiente manera:

$$U(1) : \quad \beta_{g_1} = \frac{g_1^3}{16\pi^2} \left( \frac{20}{3} + \frac{1}{6}N \right), \quad (5.1)$$

$$SU(2) : \quad \beta_{g_2} = \frac{g_2^3}{16\pi^2} \left( -\frac{10}{3} + \frac{1}{6}N \right), \quad (5.2)$$

$$SU(3) : \quad \beta_{g_3} = -7 \frac{g_3^3}{16\pi^2}. \quad (5.3)$$

Previamente, en la sección 4.2.1 se observó que sólo las RGE con mismo signo podían reducirse entre sí, por lo que para modelos multi-Higgs queda claro que los

acoplamiento de  $SU(3)$  y  $U(1)$  no podrán reducirse entre ellos, puesto que  $\beta_{g_1}$  siempre será positivo y  $\beta_{g_3}$  siempre negativo.

En cuanto a la función beta de  $g_2$ , como se ve en la ecuación 5.2, esta cambiará de signo dependiendo del número de dobletes, de tal modo que para  $N < 20$  será negativa y podrá reducirse con  $g_3$ , mientras que para  $N > 20$  lo podrá hacer con  $g_1$ .

En el primer caso, como también ya se ha comentado, si bien existen soluciones matemáticamente aceptables, como se puede ver en la figura 2, en donde se han graficado los valores de las constantes que acompañan a las RGE dependiendo del número de dobletes, el valor de la constante de  $g_2$  siempre será mayor que la de  $g_3$ , dando como resultado soluciones con un acoplamiento débil mayor que el fuerte para este tipo de modelos, por lo que se puede afirmar que en ningún modelo de  $N$  dobletes, es posible reducir completamente  $g_2$  respecto de  $g_3$  y viceversa.

En el segundo caso, también observando la figura 2, se puede notar que se cumple con un acoplamiento  $SU(2)$  menor que el acoplamiento de  $U(1)$ , no teniendo por tanto el problema de magnitudes que se presentan entre los acoplamientos fuertes y débiles, no obstante, el número elevado de dobletes de Higgs  $N > 20$ , hace poco interesante la exploración de estas extensiones.

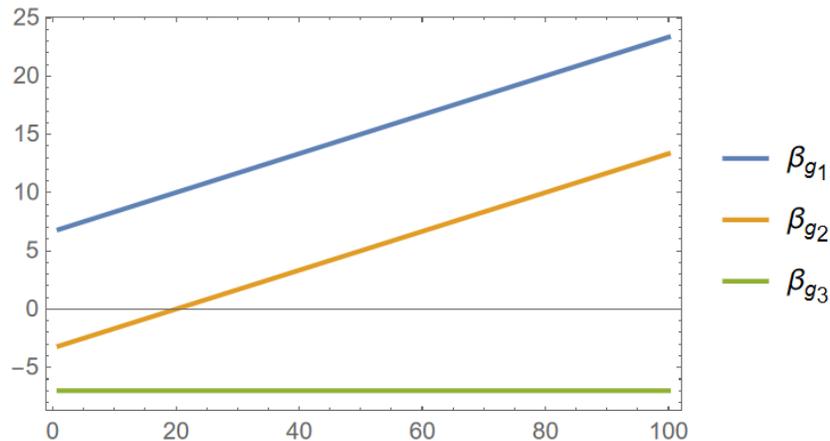


Figura 2: Valores de las constantes de las funciones beta de acoplamiento de norma para  $N$  dobletes.

Estas observaciones permiten afirmar que a un lazo no es posible reducir completamente los acoplamientos de norma entre sí para modelos de  $N$  dobletes.

# Conclusiones

La exploración de modelos con  $N$  dobletes de Higgs responde a la necesidad de proponer teorías que pudiesen explicar algunos fenómenos físicos como lo son, por ejemplo, la materia oscura, neutrinos masivos o la diferencia entre la masa de los fermiones y la estructura de las matrices de mezcla, que el Modelo Estándar (ME) en su forma actual no es capaz de explicar. Con esta motivación, en este trabajo se estudió el modo de implementar este tipo de extensiones; de manera particular el análisis se centró en los modelos conocidos como *modelos con dos dobletes de Higgs* (2HDM, por sus siglas en inglés).

Por otro lado y como tema central de esta investigación, se decidió tratar con una situación surgida en la formulación de teorías cuánticas de campos como el Modelo Estándar y sus extensiones, el conocido como *problema de los parámetros libres*. La forma en la que se decidió atacar el problema fue a través de un método llamado *método de reducción de acoplamientos* [7], cuyas implicaciones y el modo de aplicarse son explicados en este trabajo.

Los autores principales del método de reducción ya habían explorado las consecuencias de su aplicación en el Modelo Estándar [24, 26]. Tomando esto en cuenta, el presente análisis se abocó al estudio de las implicaciones de la aplicación de este método en las extensiones más allá del ME, llamadas modelos multi-Higgs, que es la forma en que se suelen llamar a los modelos con  $N$  dobletes de Higgs juntando de este modo los dos objetos de estudio de esta investigación.

Si bien en el proceso se optó por hacer los cálculos solamente en modelos de dos dobletes, en las discusiones se comenta que apoyado en este análisis se pudieron inferir consecuencias para cualquier modelo de  $N$  dobletes.

Como producto de la aplicación del método a los cuatro tipos de 2HDM con NFC, se encontró que solamente algunas de las constantes de acoplamiento son reducibles: el acoplamiento de Yukawa del quark top y algunos de los acoplamientos cuárticos de los dobletes de Higgs. Los dos casos no triviales que se encontraron se presentan a continuación, en donde se muestran los valores de las constantes de acoplamiento calculadas a la escala del bosón  $Z$ ,

	Tipo I/X	Tipo II/Y
$G_t$	0.573793	0.544348
$\lambda_1$	0	0.0423307
$\lambda_2$	0.0513947	0.0423307
$\lambda_3$	0	0.0423307
$\lambda_4$	0	-0.0427701
$\lambda_5$	0	0

en la primera columna los resultados para el tipo I y Y, y en la segunda para los tipos II y X, de modelos con dos dobletes.

Por supuesto, la consecuencia más importante de poder obtener los valores de las constantes de acoplamiento es que a partir de estos parámetros se pueden encontrar las masas de partículas. En el presente estudio se hacen por tanto las siguiente predicciones de masas también a la escala de energía de la masa del bosón  $Z$ :

	Tipo I/X (GeV)	Tipo II/Y (GeV)
$m_t$	$\leq 99.9$	94.7
$m_H$	$\leq 55.8$	50.6
$m_h$	0	1.7
$m_{H^\pm}$	0	36.0
$m_A$	0	0

La primer cuestión a destacar es que los resultados obtenido con el tipo I y Y, coinciden con los obtenidos para el Modelo Estándar en los trabajos de Kubo, Sibold y Zimmermann [24]. Esto era algo que se esperaba pues el 2HDM tipo I es el modelo

más parecido al ME, dado que los acoplamientos de Yukawa se acoplan con sólo uno de los dobletes, reforzando con esto la noción de que los cálculos realizados sí han sido consistentes. No obstante, es evidente que las predicciones sobre las masas del bosón de Higgs y el quark top son diferentes a los valores encontrados experimentalmente en la actualidad.

Aunque esto descarta la validez de estas predicciones, ello no sería suficiente para invalidar el método de reducción. Incluso resulta adecuado que no se predijeran correctamente dichas masas, pues hay diversas situaciones que no se han tomado en cuenta, la primera y más importante, fue que para poder llegar a dichos valores tuvieron que despreciarse las aportaciones de las otras constantes de acoplamiento.

Esto último, antes de ser un error sistemático, representa un situación propia del Modelo Estándar. Como es sabido el sector de Yukawa de donde se obtienen las masas de las partículas elementales, incluido el quark top, fue planteado de manera *ad hoc* para poder dotar de masa a las partículas elementales. Ya se ha mencionado, que el procedimiento de reducción de acoplamiento lo que trata de hacer es encontrar la relaciones funcionales entre los parámetros de una teoría, por lo que al no haber podido determinar de manera precisa funciones entre los acoplamientos del modelo y el acoplamiento primario (la constante de acoplamiento fuerte), lo que se estaría observando es la ausencia de una simetría subyacente entre ellas. La ausencia de dichas relaciones puede interpretarse como un indicio de que el Modelo Estándar no es por tanto una teoría completa y que quizás necesita de una teoría con una simetría mayor y/o un mayor contenido de materia con la cuál sea posible relacionar sus parámetros.

Sin embargo, también es destacable que a pesar de esto la aproximación a las masas hallada tampoco quedó muy alejada de la realidad física, apoyando con esto la fiabilidad del método de reducción.

En esta dirección, en la última discusión del capítulo anterior se observó a un lazo que, de manera general, no es posible llevar a cabo una reducción de los acoplamientos de norma en los modelos multi-Higgs, esto tampoco sería una sorpresa tomando en cuenta que las modificaciones en modelos de  $N$  dobletes se hacen en los sectores escalar y de Yukawa,

por que lo que aunque hay algunas variaciones en las funciones beta, estas extensiones tal como son planteadas en el primer capítulo, en realidad estarían compartiendo el mismo sector de norma.

Esto nos lleva a una conclusión importante, el método de reducción de acoplamientos aplicado a modelos multi-Higgs sugiere que no es suficiente con tener muchos dobletes de Higgs para poder identificar las relaciones entre distintos acoplamientos. Los resultados obtenidos respecto a la reducción de leptones y quarks diferentes a la tercera generación, y en particular en el sector de norma para  $N$  dobletes, sugieren la necesidad de una simetría superior subyacente que relacione dichas constantes de acoplamiento, de tal forma que con esto sea posible incluir las aportaciones de los otros acoplamientos que no pudieron ser tomadas en cuenta en el actual procedimiento.

Esta idea es apoyada por trabajos en donde sí se han podido reproducir correctamente las masas del quark top y el bosón de Higgs, en [30–32] en el marco de un modelo Mínimo Supersimétrico, se han podido encontrar las relaciones funcionales que permitieron hacer las predicciones precisas, sin embargo, destacándose que para ello fue necesario hacer la suposición de la existencia un grupo de unificación subyacente a altas energías que relacionaba los parámetros del modelo.

El análisis llevado a cabo en este trabajo, indica que la sola introducción de campos de Higgs, sin otra teoría que ayude a relacionar las partículas o parámetros entre sí, no es suficiente para entender el origen de las masas y las mezclas. Si bien muchos dobletes de Higgs podrían ayudar a tener un mejor ajuste de la masa del top y el Higgs, lo ya observado indica que sólo con esto no será posible encontrar las masas de las otras partículas elementales.

Finalmente, si bien el método de reducción de acoplamientos no garantiza poder encontrar las relaciones entre los parámetros de una teoría, es decir, no asegura poder escribir parámetros de un modelo en función de un único parámetro primario, como estaba originalmente planteado, lo que si ha mostrado es su capacidad para poder servir como un mecanismo de prueba para modelos de teoría de campos. Esto se refiere a que al encontrar

funciones que relacionan aunque sea algunos parámetros con otros, se pueden obtener indicios de la cercanía de las teorías con las mediciones experimentales, por ejemplo, como sucedió en este trabajo en donde se encontró una función entre el acoplamiento fuerte y el acoplamiento de Yukawa del quark top, a partir de la cuál se pudo hacer una predicción de la masa de esta partícula.

Por lo tanto, si bien este método no resuelve exactamente el problema de los parámetros libres, se vio que utilizando sus principios aún es posible encontrar relaciones entre los parámetros de un determinado modelo, de tal forma que, con ellos es posible hacer predicciones fenomenológicas y por ende puede servir como guía en la búsqueda de modelos más completos de la naturaleza.

## ANEXO A

---

### Cambio de variables

---

Si bien la reducción completa de los acoplamientos de norma y de Yukawa (secciones 4.2.1 y 4.2.2), hizo utilizando las variables puras, esto no tiene que ser estrictamente de dicho modo, la motivación para hacerlo de esa manera fue para ilustrar el método de reducción de acoplamientos de forma más directa. No obstante, en la literatura lo usual es hacer un cambio de variables.

En la reducción del Modelo Estándar Mínimo [24], se decide realizar dicho procedimiento tomando como variable principal a  $x = \frac{g_3^2}{4\pi}$ , que resulta ser la forma en la que se presenta el valor experimental del acoplamiento de  $SU(3)$ , de modo que  $x \equiv \alpha_s$ , es decir,  $x$  es justamente la *constante de acoplamiento fuerte*. Hacer el cambio de variables facilita sobremanera el cálculo de las soluciones especiales.

En este mismo artículo se muestra también cómo las soluciones generales pueden ser sujetas a un análisis de estabilidad, lo que permite encontrar ciertas relaciones entre la reducción completa y la reducción parcial. En [26] se comenta de manera explícita que es más fácil llevar a cabo dicho análisis expresando las variables como ratios de la constante primaria, es decir, siendo divididas por la variable principal.

Estas dos motivaciones, son tomadas en cuenta en el artículo de Denner [25], donde se utiliza el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{g_3^2}{4\pi}, \quad u = \frac{g_2^2}{g_3^2}, \quad v = \frac{g_1^2}{g_3^2}, \quad \rho_i^{(f)} = \frac{G_i^{(f)^2}}{g_3^2}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{g_3^2}; \quad (\text{A.1})$$

este sistema permite, como se verá a continuación, simplificar los cálculos de las soluciones especiales y facilitar la realización del mencionado análisis de estabilidad. Observando entonces las ventajas, resulta mucho provechoso para este trabajo llevar a cabo la reducción

de acoplamientos usando estas nuevas variables.

### A.1. Nuevas ecuaciones del grupo de renormalización

Por supuesto, al usar nuevos términos se obtendrán “nuevas” funciones  $\beta$  que darán en consecuencia nuevas ecuaciones de reducción. Para determinar el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales, se emplea también la *condición de reductibilidad* (3.4), que con las nuevas variables se expresará como:

$$\beta_x \frac{d\sigma_i}{dx} = \beta_{\sigma_i}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\sigma_i$ , hace referencia a las constantes de acoplamiento en el nuevo sistema (ec. (A.1)).

Para encontrar estas “nuevas  $\beta$ ”, se recurre a definición original de estas. A partir de la ecuación de Callan-Symanzik (ec. (3.2)), las ecuaciones del grupo de renormalización se escriben en función de una escala de energía  $\mu$  como  $\beta_g = \mu \frac{dg}{d\mu}$ . Tomando en cuenta lo anterior, es posible escribir  $\beta_x$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \mu \frac{dx}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left( \frac{g_3^2(\mu)}{4\pi} \right) = \frac{2g_3}{4\pi} \mu \frac{dg_3}{d\mu} \\ \beta_x &= \frac{2g_3}{4\pi} \beta_{g_3}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Del mismo modo se pueden encontrar el resto de las “nuevas  $\beta$ ”. Si se observa (A.1), se verá que la mayoría de las nuevas variables son los cuadrados de las variables originales, a partir de la observación de este patrón se puede obtener una fórmula general para encontrar el resto nuevas funciones  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
\beta_{\sigma_i} &= \mu \frac{d\sigma_i}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left( \frac{S_i^2(\mu)}{g_3^2(\mu)} \right) \\
&= \mu \left\{ \frac{1}{g_3^2} \left( 2S_i \frac{dS_i}{d\mu} \right) + S_i^2 \left( \frac{-2}{g_3^3} \frac{dg_3}{d\mu} \right) \right\} \\
&= 2 \frac{S_i}{g_3^2} \beta_{S_i} - 2 \frac{S_i^2}{g_3^3} \beta_{g_3} = 2 \frac{S_i^2}{g_3^2} \left( \frac{\beta_{S_i}}{S_i} - \frac{\beta_{g_3}}{g_3} \right) \\
&= 2\sigma_i \left( \frac{\beta_{S_i}}{S_i} - \frac{\beta_{g_3}}{g_3} \right), \tag{A.4}
\end{aligned}$$

donde a un lazo se puede introducir la función  $\beta_{g_3}$  dada en (4.17), para obtener una ecuación más concreta:

$$\begin{aligned}
&= 2\sigma_i \left( \frac{\beta_{S_i}}{S_i} - \frac{1}{g_3} \left( -\frac{7g_3^3}{16\pi^2} \right) \right) \\
&= 2\sigma_i \left( \frac{\beta_{S_i}}{S_i} + \frac{7}{4\pi} \frac{g_3^2}{4\pi} \right) \\
\beta_{\sigma_i} &= \frac{2x\sigma_i}{4\pi} \left( \frac{4\pi}{x} \frac{\beta_{S_i}}{S_i} + 7 \right); \tag{A.5}
\end{aligned}$$

como ya se ha comentado las  $S_i$  de (A.5), pueden ser tanto los acoplamientos de Yukawa así como los acoplamientos de norma.

Antes de comenzar a hacer las deducciones de las nuevas  $\beta$  de Yukawa o de norma, habrá que encontrar también una “fórmula” para obtener las nuevas  $\beta$  cuárticas, pues éstas no siguen el patrón cuadrático de los otros acoplamientos:

$$\begin{aligned}
\beta_{\rho_i} &= \mu \frac{d\rho_i}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left( \frac{\lambda_i(\mu)}{g_3^2(\mu)} \right) \\
&= \mu \left\{ \frac{1}{g_3^2} \left( \frac{d\lambda_i}{d\mu} \right) + \lambda_i \left( \frac{-2}{g_3^3} \frac{dg_3}{d\mu} \right) \right\} \\
&= \frac{\beta_{\lambda_i}}{g_3^2} - 2 \frac{\lambda_i}{g_3^3} \beta_{g_3}, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

la cual, igual que anteriormente se puede compactar más introduciendo  $\beta_{g_3}$ , de tal modo

que queda:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_{\lambda_i}}{g_3^2} - 2 \frac{\lambda_i}{g_3^3} \left( \frac{-7g_3^3}{16\pi^2} \right) \\
&= \frac{\beta_{\lambda_i}}{4\pi x} + 14 \frac{(4\pi x \rho_i)}{16\pi^2} \\
\beta_{\rho_i} &= \frac{x}{4\pi} \left( \frac{\beta_{\lambda_i}}{x^2} + 14\rho_i \right). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Con (A.3) y (A.5), y usando las betas originales (ecs. (4.15) - (4.17) y (4.24) - (4.26)) se encontrarán las nuevas ecuaciones del grupo de renormalización:

$$\beta_x = -14x \frac{x}{4\pi} \tag{A.8}$$

$$\beta_u = \frac{x}{4\pi} 2u(-3u+7) \tag{A.9}$$

$$\beta_v = \frac{x}{4\pi} 2v(7v+7) \tag{A.10}$$

$$\beta_{\rho_{\ell_j}} = \frac{x}{4\pi} 2\rho_{\ell_j} \left( - \left( \frac{15}{4}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{\ell_j} + \sum_k \left( a_1\rho_{\ell_k} + 3a_2\rho_{d_k} + 3a_3\rho_{u_k} \right) + 7 \right) \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{\rho_{d_j}} &= \frac{x}{4\pi} 2\rho_{d_j} \left( - \left( \frac{5}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{d_j} + a_4\rho_{u_j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_k \left( a_5\rho_{\ell_k} + 3a_6\rho_{d_k} + 3a_7\rho_{u_k} \right) - 1 \right) \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{\rho_{u_j}} &= \frac{x}{4\pi} 2\rho_{u_j} \left( - \left( \frac{17}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{u_j} + a_8\rho_{d_j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_k \left( a_9\rho_{\ell_k} + 3a_{10}\rho_{d_k} + 3a_{11}\rho_{u_k} \right) - 1 \right) \tag{A.13}
\end{aligned}$$

### A.2. Nuevas ecuaciones de reducción

A partir de las nuevas funciones  $\beta$  y usando (A.2), se obtienen fácilmente las nuevas ecuaciones de reducción que serán útiles para el análisis de estabilidad:

$$-14x \frac{du}{dx} = -6u^2 + 14u, \quad (\text{A.14})$$

$$-14x \frac{dv}{dx} = 14v^2 + 14v, \quad (\text{A.15})$$

$$-14x \frac{d\rho_{\ell_j}}{dx} = 2\rho_{\ell_j} \left( - \left( \frac{15}{4}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{\ell_j} + \sum_k \left( a_1\rho_{\ell_k} + 3a_2\rho_{d_k} + 3a_3\rho_{u_k} \right) + 7 \right), \quad (\text{A.16})$$

$$-14x \frac{d\rho_{d_j}}{dx} = 2\rho_{d_j} \left( - \left( \frac{5}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{d_j} + a_4\rho_{u_j} + \sum_k \left( a_5\rho_{\ell_k} + 3a_6\rho_{d_k} + 3a_7\rho_{u_k} \right) - 1 \right), \quad (\text{A.17})$$

$$-14x \frac{d\rho_{u_j}}{dx} = 2\rho_{u_j} \left( - \left( \frac{17}{12}v + \frac{9}{4}u \right) + \frac{3}{2}\rho_{u_j} + a_8\rho_{d_j} + \sum_k \left( a_9\rho_{\ell_k} + 3a_{10}\rho_{d_k} + 3a_{11}\rho_{u_k} \right) - 1 \right). \quad (\text{A.18})$$

### A.3. Soluciones de las nuevas ecuaciones de reducción

Otra nota importante respecto al cambio de variables, es sobre las soluciones de estas nuevas ecuaciones de reducción. Se comentó en la sección 3.2, que cuando se reducen las constantes originales, la renormalizabilidad pedía que las soluciones estuvieran dadas en series de potencias; de igual modo y principalmente estas también debían cumplir con la condición del límite del acoplamiento débil:

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \lambda_j(\lambda_0) = 0,$$

Como resultado de aplicar ambos requisitos las soluciones de las ecuaciones de reducción tendrían que ser de la forma dada por la ecuación (3.6),

$$\lambda_i(\lambda_0) = \lambda_i^{(0)}\lambda_0 + \lambda_i^{(1)}\lambda_0^2 + \lambda_i^{(2)}\lambda_0^3 + \dots, \quad (3.6)$$

donde, como se puede ver, el término de orden superior de dichas soluciones es una constante multiplicada por la variable principal a la primera potencia, quedando patente con esto que cuando esta tienda a cero lo hará también la variable reducida, cumpliéndose la segunda condición.

En el nuevo sistema (A.1), se puede notar que las constantes de acoplamiento están de hecho divididas por la variable principal, ya se ha explicado la motivación para hacerlo de esa manera; sin embargo, esto traerá como consecuencia que las funciones o soluciones que se buscan, no sean similares a la ecuación (3.6), al estar divididas por la variable principal, las soluciones para las ecuaciones de reducción (A.14 - A.18) deberán en consecuencia tener la forma:

$$\rho_i(x) = \rho_i^{(0)} + \rho_i^{(1)}x + \rho_i^{(2)}x^2 + \dots \quad (A.19)$$

nótese cómo el primer término será solo una constante.

Si se lleva a cabo el procedimiento seguido en la reducción completa, es decir, sustituir el orden superior en las nuevas ecuaciones de reducción, se verá que el miembro izquierdo de dichas ecuaciones se vuelve cero y el valor de la mencionada constante es más fácil de obtener.

Probando esto en las ecuaciones (A.14) y (A.15), se puede ver que:

$$\begin{aligned} -14x \frac{d}{dx} u^{(0)} = 0 &= -6(u^{(0)})^2 + 14u^{(0)}, \\ &\vdots \\ u_-^{(0)} = 0, \quad u_+^{(0)} &= \frac{7}{3}, \end{aligned} \quad (A.20)$$

$$\begin{aligned}
-14x \frac{d}{dx} v^{(0)} = 0 &= 14(v^{(0)})^2 + 14v^{(0)}, \\
&\therefore \\
v_-^{(0)} = -1, \quad v_+^{(0)} = 0; & \tag{A.21}
\end{aligned}$$

los cuales, como se puede constatar, son los cuadrados de las soluciones obtenidas en (4.23) y (4.22) respectivamente. Como se observa, el cambio de variables permite calcular de forma más directa el orden superior de las funciones que se buscan, simplificando la resolución de las ecuaciones de reducción.

#### A.4. Condición de frontera para soluciones generales

Esto último también permite encontrar una característica importante, en este caso, para las soluciones generales en este nuevo sistema: para que se cumpla la condición de límite del acoplamiento débil, dichas soluciones deben tender a un valor finito igual cuando  $x$  tiende a cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho_i(x) < \infty. \tag{A.22}$$

Dicha característica proporciona una condición de frontera útil ya sea para determinar las constantes de integración o también para poder distinguir cuáles variables pueden ser reducidas.

Esto puede ser puesto en práctica en la ecuaciones de (4.84), donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \frac{7}{3}.$$

Llegando a la misma conclusión a la que ya habíamos llegado en la sección 4.2.1, pero en este caso usando la ecuación (A.22): en primera la variable  $v$  no puede ser reducida respecto a  $x$  porque en el límite se obtiene que  $v(x) \leq 0$  (y por tanto dará también un acoplamiento imaginario); mientras que la variable  $u$  relacionado con el acoplamiento débil sí podría reducirse respecto al acoplamiento fuerte, pues nos da un valor real y positivo en el límite del acoplamiento débil, no obstante, al tener que  $\frac{7}{3} > 1$ , este

acoplamiento sería más grande que el acoplamiento fuerte y por lo tanto también debe ser descartado.

Como se ha visto, el cambio de variables ha proporcionado una manera más sencilla y clara tanto para encontrar las soluciones especiales, como una condición muy útil para las soluciones generales.

## ANEXO B

---

# Funciones beta de los acoplamientos cuárticos para 2HDM Tipos I, II, IX y Y

---

Para escribir las ecuaciones del grupo de renormalización de los acoplamientos cuárticos se decidió utilizar las funciones proporcionadas por Chowdhury y Eberhardt [28]; para evitar repetir términos se opta por escribir las RGE de la siguiente manera:

$$\beta_{\lambda_j}^{(\text{Tipo } i)} = \beta_{\lambda_j}^{(0)} + \beta_{\lambda_j}^{(i)}$$

donde  $\beta_{\lambda_j}^{(0)}$ , son los términos que todos los tipos de 2HDM tienen en común a los que se le suma  $\beta_{\lambda_j}^{(i)}$ , donde  $i = \text{I, II, X o Y}$ , que son los términos diferentes para cada tipo de modelo, con lo que finalmente es posible obtener la ecuación de renormalización respectiva.

### B.1. Ecuaciones del grupo de renormalización

#### B.1.1. $\beta_{\lambda_1}$

$$\beta_{\lambda_1}^{(0)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{3}{4}g_1^4 + \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 3g_1^2\lambda_1 - 9g_2^2\lambda_1 + 12\lambda_1^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2 \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\beta_{\lambda_1}^{(I)} = 0 \quad (\text{B.1.I})$$

$$\beta_{\lambda_1}^{(II)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_b^4 - 4G_\tau^4 + 12G_b^2\lambda_1 + 4G_\tau^2\lambda_1 \right) \quad (\text{B.1.II})$$

$$\beta_{\lambda_1}^{(X)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -4G_\tau^4 + 4G_\tau^2\lambda_1 \right) \quad (\text{B.1.X})$$

$$\beta_{\lambda_1}^{(Y)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_b^4 + 12G_b^2\lambda_1 \right) \quad (\text{B.1.Y})$$

### B.1.2. $\beta_{\lambda_2}$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_2}^{(0)} = \frac{1}{16\pi^2} & \left( \frac{3}{4}g_1^4 + \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 3g_1^2\lambda_2 - 9g_2^2\lambda_2 + 12\lambda_2^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 \right. \\ & \left. + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\beta_{\lambda_2}^{(I)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_b^4 - 12G_t^4 - 4G_\tau^4 + \left( 12G_b^2 + 12G_t^2 + 4G_\tau^2 \right) \lambda_2 \right) \quad (\text{B.2.I})$$

$$\beta_{\lambda_2}^{(II)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_t^4 + 12G_t^2\lambda_2 \right) \quad (\text{B.2.II})$$

$$\beta_{\lambda_2}^{(X)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_b^4 - 12G_t^4 + \left( 12G_b^2 + 12G_t^2 \right) \lambda_2 \right) \quad (\text{B.2.X})$$

$$\beta_{\lambda_2}^{(Y)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_t^4 - 4G_\tau^4 + \left( 12G_t^2 + 4G_\tau^2 \right) \lambda_2 \right) \quad (\text{B.2.Y})$$

### B.1.3. $\beta_{\lambda_3}$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_3}^{(0)} = \frac{1}{16\pi^2} & \left( \frac{3}{4}g_1^4 - \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 3g_1^2\lambda_3 - 9g_2^2\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(6\lambda_3 + 2\lambda_4) + 4\lambda_3^2 \right. \\ & \left. + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\beta_{\lambda_3}^{(I)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( 6G_b^2 + 6G_t^2 + 2G_\tau^2 \right) \lambda_3 \quad (\text{B.3.I})$$

$$\beta_{\lambda_3}^{(II)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( -12G_b^2 G_t^2 + (6G_b^2 + 6G_t^2 + 2G_\tau^2) \lambda_3 \right) \quad (\text{B.3.II})$$

$$\beta_{\lambda_3}^{(X)} = \beta_{\lambda_3}^{(I)} \quad (\text{B.3.X})$$

$$\beta_{\lambda_3}^{(Y)} = \beta_{\lambda_3}^{(II)} \quad (\text{B.3.Y})$$

#### B.1.4. $\beta_{\lambda_4}$

$$\beta_{\lambda_4}^{(0)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( 3g_1^2 g_2^2 - (3g_1^2 + 9g_2^2) \lambda_4 + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_4 + 8\lambda_3 \lambda_4 + 4\lambda_4^2 + 8\lambda_5^2 \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\beta_{\lambda_4}^{(I)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( 6G_b^2 + 6G_t^2 + 2G_\tau^2 \right) \lambda_4 \quad (\text{B.4.I})$$

$$\beta_{\lambda_4}^{(II)} = \frac{1}{16\pi^2} \left( 12G_b^2 G_t^2 + (6G_b^2 + 6G_t^2 + 2G_\tau^2) \lambda_4 \right) \quad (\text{B.4.II})$$

$$\beta_{\lambda_4}^{(X)} = \beta_{\lambda_4}^{(I)} \quad (\text{B.4.X})$$

$$\beta_{\lambda_4}^{(Y)} = \beta_{\lambda_4}^{(II)} \quad (\text{B.4.Y})$$

#### B.1.5. $\beta_{\lambda_5}$

A un lazo este acoplamiento es igual para todos los tipos:

$$\beta_{\lambda_5}^{\text{Tipo I, II, X, Y}} = \frac{\lambda_5}{16\pi^2} \left[ \left( -3g_1^2 - 9g_2^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 + 12\lambda_4 \right) + \left( 6G_b^2 + 6G_t^2 + 2G_\tau^2 \right) \right] \quad (\text{B.5})$$

## B.2. Nuevas RGE

Como ya se ha planteado de manera detallada en el Anexo A, es conveniente hacer la reducción de acoplamientos en un nuevo sistema de variables (A.1), por lo que usando el mismo formato para escribir los diferentes tipos de 2HDM que en la sección anterior, las nuevas betas se escribirán del modo siguiente,

$$\beta_{\rho_j}^{(\text{Tipo } i)} = \beta_{\rho_j}^{(0)} + \beta_{\rho_j}^{(i)};$$

donde estas se encuentran adaptando la ecuación (A.7), del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \beta_{\rho_j}^{(\text{Tipo } i)} &= \frac{x}{4\pi} \left( \frac{\beta_{\lambda_j}^{(\text{Tipo } i)}}{x^2} + 14\rho_j \right) \\ &= \frac{x}{4\pi} \left( \frac{1}{x^2} \left( \beta_{\lambda_j}^{(0)} + \beta_{\lambda_j}^{(i)} \right) + 14\rho_j \right) \\ &= \frac{x}{4\pi} \left( \frac{\beta_{\lambda_j}^{(0)}}{x^2} + 14\rho_j \right) + \frac{x}{4\pi} \frac{\beta_{\lambda_j}^{(i)}}{x^2} \\ &= \beta_{\rho_j}^{(0)} + \beta_{\rho_j}^{(i)}; \end{aligned}$$

tal que,

$$\beta_{\rho_j}^{(0)} = \frac{x}{4\pi} \left( \frac{\beta_{\lambda_j}^{(0)}}{x^2} + 14\rho_j \right), \quad \beta_{\rho_j}^{(i)} = \frac{x}{4\pi} \frac{\beta_{\lambda_j}^{(i)}}{x^2}. \quad (\text{B.6})$$

Con esto las “nuevas betas cuárticas” para los cuatro tipos quedarían de la siguiente manera:

**B.2.1.**  $\beta_{\rho_1}$ 

$$\beta_{\rho_1}^{(0)} = \frac{x}{4\pi} \left( \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}vu + \frac{9}{4}u^2 - 3v\rho_1 - 9u\rho_1 + 12\rho_1^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_1 \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\beta_{\rho_1}^{(I)} = 0 \quad (\text{B.7.I})$$

$$\beta_{\rho_1}^{(II)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_b^2 - 4\rho_\tau^2 + 12\rho_b\rho_1 + 4\rho_\tau\rho_1 \right) \quad (\text{B.7.II})$$

$$\beta_{\rho_1}^{(X)} = \frac{x}{4\pi} \left( -4\rho_\tau^2 + 4\rho_\tau\rho_1 \right) \quad (\text{B.7.X})$$

$$\beta_{\rho_1}^{(Y)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_b^2 + 12\rho_b\rho_1 \right) \quad (\text{B.7.Y})$$

**B.2.2.**  $\beta_{\rho_2}$ 

$$\beta_{\rho_2}^{(0)} = \frac{x}{4\pi} \left( \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}vu + \frac{9}{4}u^2 - 3v\rho_2 - 9u\rho_2 + 12\rho_2^2 + 4\rho_3^2 + 4\rho_3\rho_4 + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_2 \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\beta_{\rho_2}^{(I)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_b^2 - 12\rho_t^2 - 4\rho_\tau^2 + (12\rho_b + 12\rho_t + 4\rho_\tau)\rho_2 \right) \quad (\text{B.8.I})$$

$$\beta_{\rho_2}^{(II)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_t^2 + 12\rho_t\rho_2 \right) \quad (\text{B.8.II})$$

$$\beta_{\rho_2}^{(X)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_b^2 - 12\rho_t^2 + (12\rho_b + 12\rho_t)\rho_2 \right) \quad (\text{B.8.X})$$

$$\beta_{\rho_2}^{(Y)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_t^2 - 4\rho_\tau^2 + (12\rho_t + 4\rho_\tau)\rho_2 \right) \quad (\text{B.8.Y})$$

### B.2.3. $\beta_{\rho_3}$

$$\begin{aligned} \beta_{\rho_3}^{(0)} = \frac{x}{4\pi} & \left( \frac{3}{4}v^2 - \frac{3}{2}vu + \frac{9}{4}u^2 - 3v\rho_3 - 9u\rho_3 + (\rho_1 + \rho_2)(6\rho_3 + 2\rho_4) + 4\rho_3^2 \right. \\ & \left. + 2\rho_4^2 + 2\rho_5^2 + 14\rho_3 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\beta_{\rho_3}^{(I)} = \frac{x}{4\pi} \left( 6\rho_b + 6\rho_t + 2\rho_\tau \right) \rho_3 \quad (\text{B.9.I})$$

$$\beta_{\rho_3}^{(II)} = \frac{x}{4\pi} \left( -12\rho_b\rho_t + (6\rho_b + 6\rho_t + 2\rho_\tau)\rho_3 \right) \quad (\text{B.9.II})$$

$$\beta_{\rho_3}^{(X)} = \beta_{\rho_3}^{(I)} \quad (\text{B.9.X})$$

$$\beta_{\rho_3}^{(Y)} = \beta_{\rho_3}^{(II)} \quad (\text{B.9.Y})$$

### B.2.4. $\beta_{\rho_4}$

$$\beta_{\rho_4}^{(0)} = \frac{x}{4\pi} \left( 3vu - (3v + 9u)\rho_4 + 2\rho_1\rho_4 + 2\rho_2\rho_4 + 8\rho_3\rho_4 + 4\rho_4^2 + 8\rho_5^2 + 14\rho_4 \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\beta_{\rho_4}^{(I)} = \frac{x}{4\pi} \left( 6\rho_b + 6\rho_t + 2\rho_\tau \right) \rho_4 \quad (\text{B.10.I})$$

$$\beta_{\rho_4}^{(II)} = \frac{x}{4\pi} \left( 12\rho_b\rho_t + (6\rho_b + 6\rho_t + 2\rho_\tau)\rho_4 \right) \quad (\text{B.10.II})$$

$$\beta_{\rho_4}^{(X)} = \beta_{\rho_4}^{(I)} \quad (\text{B.10.X})$$

$$\beta_{\rho_4}^{(Y)} = \beta_{\rho_4}^{(II)} \quad (\text{B.10.Y})$$

### B.2.5. $\beta_{\rho_5}$

$$\beta_{\rho_5}^{\text{Tipo I, II, X, Y}} = \frac{x}{4\pi} \left( \left( -3v - 9u + 2\rho_1 + 2\rho_2 + 8\rho_3 + 12\rho_4 \right) + (6\rho_b + 6\rho_t + 2\rho_\tau) + 14 \right) \rho_5 \quad (\text{B.11})$$

## Referencias

- [1] F. Hasert, S. Kabe, W. Krenz, J. Von Krogh, D. Lanske, J. Morfin, K. Schultze, H. Weerts, G. Bertrand-Coremans, J. Sacton, *et al.*, “Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the gargamelle neutrino experiment,” *Nuclear Physics B*, vol. 73, no. 1, pp. 1–22, 1974.
- [2] ATLAS Collaboration, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Physics Letters B*, vol. 716, 2012.
- [3] CMS Collaboration, “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC,” *Physics Letters B*, vol. 716, no. 1, pp. 30–61, 2012.
- [4] H. E. Haber, “Future Higgs Studies: A Theorist’s Outlook,” *Proceedings of Science*, 2017. arXiv:1701.01922 [hep-ph].
- [5] R. N. Cahn, “The eighteen arbitrary parameters of the standard model in your everyday life,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 68, no. 3, p. 951, 1996.
- [6] I. P. Ivanov, “Building and testing models with extended higgs sectors,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 95, pp. 160–208, 2017.
- [7] W. Zimmermann, “Reduction in the number of coupling parameters,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 97, no. 1, pp. 211–225, 1985.
- [8] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 9, p. 321, 1964.
- [9] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. Kibble, “Global conservation laws and massless particles,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 20, p. 585, 1964.

- [10] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 16, p. 508, 1964.
- [11] G. C. Branco, P. Ferreira, L. Lavoura, M. Rebelo, M. Sher, and J. P. Silva, “Theory and phenomenology of two-higgs-doublet models,” *Physics reports*, vol. 516, no. 1-2, pp. 1–102, 2012.
- [12] E. A. Paschos, “Diagonal neutral currents,” *Physical Review D*, vol. 15, no. 7, p. 1966, 1977.
- [13] S. L. Glashow and S. Weinberg, “Natural conservation laws for neutral currents,” *Physical Review D*, vol. 15, no. 7, p. 1958, 1977.
- [14] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion,” *Physics reports*, vol. 12, no. 2, pp. 75–199, 1974.
- [15] K. G. Wilson, “The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem,” *Reviews of modern physics*, vol. 47, no. 4, p. 773, 1975.
- [16] M. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [17] C. G. Callan Jr, “Broken scale invariance in scalar field theory,” *Physical Review D*, vol. 2, no. 8, p. 1541, 1970.
- [18] K. Symanzik, “Small distance behaviour in field theory and power counting,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 18, no. 3, pp. 227–246, 1970.
- [19] R. Oehme and W. Zimmermann, “Relation between effective couplings for asymptotically free models,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 97, no. 4, pp. 569–582, 1985.
- [20] R. Oehme, K. Sibold, and W. Zimmermann, “Renormalization group equations with vanishing lowest order of the primary  $\beta$ -function,” *Physics Letters B*, vol. 147, no. 1-3, pp. 115–120, 1984.

- [21] R. Oehme, K. Sibold, and W. Zimmermann, “Construction of gauge theories with a single coupling parameter for yang-mills and matter fields,” *Physics Letters B*, vol. 153, no. 3, pp. 142–146, 1985.
- [22] R. Oehme, “Reduction and reparametrization of quantum field theories,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. 86, pp. 215–237, 1986.
- [23] S. Heinemeyer, M. Mondragón, N. Tracas, and G. Zoupanos, “Reduction of couplings and its application in particle physics,” *Physics Reports*, vol. 814, pp. 1–43, 2019.
- [24] J. Kubo, K. Sibold, and W. Zimmermann, “Higgs and top mass from reduction of couplings,” *Nuclear Physics B*, vol. 259, no. 2-3, pp. 331–350, 1985.
- [25] A. Denner, “Reduction of couplings in the two higgs doublet extension of the electroweak standard model,” *Nuclear Physics B*, vol. 347, no. 1-2, pp. 184–202, 1990.
- [26] J. Kubo, K. Sibold, and W. Zimmermann, “New results in the reduction of the standard model,” *Physics Letters B*, vol. 220, no. 1-2, pp. 185–190, 1989.
- [27] C. T. Hill, C. N. Leung, and S. Rao, “Renormalization group fixed points and the higgs boson spectrum,” *Nuclear Physics B*, vol. 262, no. 3, pp. 517–537, 1985.
- [28] D. Chowdhury and O. Eberhardt, “Global fits of the two-loop renormalized Two-Higgs-Doublet model with soft  $Z_2$  breaking,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2015, no. 11, pp. 1–36, 2015.
- [29] (PDG), R. L. Workman, *et al.*, “Review of particle physics,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [30] D. Kapetanakis, M. Mondragón, and G. Zoupanos, “Finite unified models,” *Zeitschrift für Physik C*, vol. 60, pp. 181–185, 1993.
- [31] S. Heinemeyer, M. Mondragón, and G. Zoupanos, “Confronting finite unified theories with low-energy phenomenology,” *Journal of High Energy Physics*, no. 07, p. 135, 2008.

- [32] S. Heinemeyer, M. Mondragón, and G. Zoupanos, “Finite Theories predictions vs. the discovery of a Higgs-like boson at the LHC,” in *EPJ Web of Conferences*, vol. 70, p. 00005, EDP Sciences, 2014.