UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS CON Y SIN CÁLCULO

REPORTE DE SEMINARIO DE TITULACIÓN

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA :

HÉCTOR EDUARDO SÁNCHEZ OCAÑA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. EMMA LAM OSNAYA
2011

Hoja de Datos del Jurado

1. **Datos del Alumno**
   Sánchez
   Ocaña
   Héctor Eduardo
   5606 81 55
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   300208803

2. **Datos del Tutor**
   M. en C.
   Emma
   Lam
   Osnaya

3. **Datos del Sinodal 1**
   M. en C.
   Héctor
   Argueta
   Villamar

4. **Datos del Sinodal 2**
   M. en C.
   José Antonio
   Gómez
   Ortega

5. **Datos del Sinodal 3**
   M. en C.
   Elena
   De Oteyza
   De Oteyza

6. **Datos del Sinodal 4**
   Dr.
   Fernando
   Brambila
   Paz

7. **Datos del Trabajo Escrito**
   Resolución de problemas de máximos y mínimos con y sin cálculo
   118 p
   2011

Agradecimientos

Agradezco a todas y cada una de las personas que de una forma u otra han creído en mí y me han apoyado a lo largo de todos estos años para alcanzar esta meta. A mis padres, Cristina y Reyes, por su amor, ejemplo y sacrificio durante toda mi vida para llegar a cumplir este sueño, gracias infinitas.

A mi compañera de vida, esposa, novia y amiga, María Fernanda, y a Santiago, mi hijo y adoración, mil gracias por su alegría, aliento, paciencia y amor durante todo este tiempo, sin ellos esto no hubiese sido posible.

A mis suegros, Soledad y Benito, y a mis cuñados, Angélica y Vale, por abrirme las puertas de su casa y apoyarme en gran parte del camino de la facultad.

A los amigos, quien de no ser por su ayuda y amistad, el camino hubiese sido aún más complicado y menos divertido. En especial a Zully, César y Juan, vueltos ahora mis hermanos, y a la Banda, en particular a Emi, Katya, Pastor y Roberto de la facultad.

A las Maestras Emma y Elena, por creer en mí para el desarrollo de este trabajo, por su tiempo, asistencia y guía, mi gratitud para ustedes.

A los sinodales por su tiempo y consejo, gracias.

A mi alma mater la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y a la Preparatoria No. 6, por haberme abierto las puertas del mundo, ampliar mi horizonte y conocimientos, y por brindarme la experiencia imperecedera de ser universitario, mi más humilde agradecimiento.

Y por último a Dios, energía eterna del universo, por brindarme vida y guiarla siempre.

Mil gracias a todos.

Índice

Introducción 1

1. Conceptos Previos 2

1.1 Derivada 2

1.2 Reglas de derivación 4

1.3 Aplicación de la derivada para la determinación de máximos y mínimos de una función 6

1.3.1 Máximo y mínimo de una función de una variable 6

1.3.2 La derivada en los máximos y mínimos para funciones de una variable 7

1.3.3 Máximo y mínimo de funciones de más de una variable 8

1.3.4 La derivada en los máximos y mínimos para funciones de más de una variable 9

2. Algebra para la identificación de Máximos y Mínimos 12

2.1 El cuadrado de un número 12

Ejemplos 18

2.2 La Desigualdad de las Medias Aritmética-Geométrica 42

Ejemplos 43

Conclusiones 116

Bibliografía 118

Introducción

Durante el tiempo que nos preparamos en la licenciatura, varias son las herramientas que se nos hacen llegar a través de cada una de las materias que cursamos. Desde las álgebras, pasando por los cálculos, hasta los análisis, cada una de éstas nos dotan del conocimiento necesario para entender y descifrar el mundo que nos rodea en toda su complejidad.

En el presente trabajo abordaremos un problema en particular, el cálculo de máximos y mínimos. Siendo éste, de suma importancia para distintas actividades donde se busca regularmente la optimización de procesos claves, o el estudio de comportamientos de las variables ligadas a éstos, en particular los puntos críticos. Por ejemplo, el cálculo del volumen máximo de un contenedor a producir o la cantidad de combustible que se necesitará para minimizar los costos de un viaje.

La resolución de dichos problemas se presentará de dos formas, una ligada al cálculo de máximos y mínimos con métodos de cálculo diferencial, utilizando todas las herramientas que proporciona éste para dicho fin. Como son el Criterio de la Segunda Derivada, el uso del Discriminante para funciones de dos variables, los Multiplicadores de Lagrange y la construcción del Hessiano limitado.

Y por otro lado, con métodos ajenos a él, en particular con técnicas algebraicas. Derivadas del estudio de las medias aritmética y geométrica, y su relación presentada como una desigualdad. De la cual, se desprenden resultados importantes y necesarios para la obtención de los extremos de una función.

Siendo así, se presentará a continuación una serie de ejemplos y los elementos necesarios a detalle, para calcular el máximo o mínimo de la función en cada problema, por cada método. Lo que nos permitirá analizar su alcance y factibilidad para su implementación.

1. Conceptos Previos

Para entrar de lleno al cálculo de máximos y mínimos por métodos de cálculo diferencial y por otros medios ajenos a éste, bien cabe recordar un poco sobre el concepto de derivada y las implicaciones que ésta tiene para nuestro tema.

1.1 Derivada

Definición. La función f es derivable en a si existe el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso el límite se designa como $f'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a. Se dice que la función f es derivable si el límite anterior existe para todo a en el dominio de f. Geométricamente esto representa a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Cuando las variables que se relacionan en la función $s(t)$ sean distancia-tiempo, tendríamos que

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

representa la velocidad media de una partícula en el intervalo de tiempo transcurrido entre a y $a + h$.

Cuando la función f relaciona la variación de cualquier cantidad respecto al tiempo, se dice que la derivada representa la razón de cambio o tasa de variación de dicha cantidad a un tiempo dado.

Igualmente si la función f relaciona cualesquiera variables (presión-temperatura, volumen-radio, etc), significará la razón de cambio de una variable respecto a un valor específico de la otra.

Para una función f, su derivada f' también se puede representar con la siguiente notación,

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ o } \frac{dy}{dx}$$

esto si suponemos que $y = f(x)$.

Para designar el valor de esta misma derivada sobre un punto específico a se utiliza generalmente la siguiente simbología,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

Ejemplos clásicos de la derivada de una función son los siguientes:

1) Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, siendo c un valor constante, entonces

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Así pues, f es derivable en a para cualquier número a, y $f'(a) = 0$. Geométricamente esto significa que la recta tangente a la gráfica de f tiene siempre por pendiente 0, es decir, ésta siempre coincide con la gráfica de la función.

2) Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx + d$ (función lineal), entonces

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c(a+h) + d - (ca + d)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ch}{h} = c. \end{aligned}$$

En este caso la pendiente de la recta tangente es c, la misma que la pendiente de la gráfica de f.

3) Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, entonces

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2a + h \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Si f es una función derivable, entonces su derivada$f\,'$ es a su vez una función, que puede o no ser derivable. Si lo es, entonces, se produce otra función, la derivada de la derivada de fy así sucesivamente. Por ello, es posible definir de manera recursiva las derivadas de orden superior, de la siguiente manera:

$$f'' = (f')', f''' = (f'')', \dots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

En particular, la segunda derivada $f\,''(a)$ significa la razón de cambio de $f\,'$ respecto a su variable, en a.

1.2 Reglas de derivación

Si bien es cierto que calcular el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

nos permite conocer la derivada de una función, en la práctica puede ser un tanto laborioso calcularlo para cualquier función dada, por lo que es relevante y útil conocer algunos resultados, convertidos en teoremas, que nos ayudarán en la resolución de los ejercicios que se presentarán en los capítulos posteriores.

Dichos teoremas no se demostrarán, los enunciamos a continuación para contar con las herramientas pertinentes que nos permitan cumplir nuestro objetivo, en la búsqueda del máximo o mínimo de una función dada. Dichas demostraciones y muchos resultados más, pueden verse en [2], [3], [5] y [7].

Teorema CP1

- Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

- Si f es la función identidad $f(x) = x$, entonces $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

- Si f y g son derivables en a, entonces $f + g$ es también derivable en a,
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- Si f y g son derivables en a, entonces $f \cdot g$ es también derivable en a, y
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

- Si $g(x) = cf(x)$ y f es derivable en a, entonces g es derivable en a, y $g'(a) = c \cdot f'(a)$.

- Si $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(a) = na^{n-1}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

- Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}.$$

- Si g es derivable en a y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}.$$

- Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a, y

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

1.3 Aplicación de la derivada para la determinación de máximos y mínimos de una función

Antes de ver la aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, conviene primero definir lo que se entenderá por éstos.

1.3.1 Máximo y mínimo de una función de una variable

Sirvámonos de las siguientes definiciones para comprender a que nos referimos con máximo y mínimo de una función.

Definición. Sea f una función y $x_0 \in A \subset Domf$. Se dice que f alcanza su **valor máximo** sobre A en x_0, si

$$f(x_0) \geq f(x)$$

para todo $x \in A$.

Definición. Sea f una función y $x_0 \in A \subset Domf$. Se dice que f alcanza su **valor mínimo** sobre A en x_0, si

$$f(x_0) \leq f(x)$$

para todo $x \in A$.

Definición. Sea f una función y $x_0 \in A \subset Domf$. Se dice que f alcanza en x_0, un **máximo local** sobre A, si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x)$$

para todo $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Definición. Sea f una función y $x_0 \in A \subset Domf$. Se dice que f alcanza en x_0, un **mínimo local** sobre A, si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x)$$

para todo $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

1.3.2 La derivada en los máximos y mínimos para funciones de una variable

El comportamiento de la derivada sobre el o los puntos máximos y mínimos de una función de una variable se puede conceptualizar mediante los siguientes teoremas y definiciones.

Teorema CP2. Sea f una función definida sobre (a, b) y $x_0 \in (a, b)$, si f alcanza en x_0 su **valor máximo (o mínimo)** sobre (a, b), y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Definición. Se dice que x_0 es un **punto crítico** de una función f, si $f'(x_0) = 0$. Al número $f(x_0)$ se le llama **valor crítico** de la función f.

Para calcular el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debemos considerar tres clases de puntos:

1. Los puntos críticos de f en (a, b)
2. Los extremos a y b
3. Los puntos x de (a, b), donde f no es derivable.

De todos ellos, se eligen los puntos donde la función "alcanza su máximo" y donde "alcanza su mínimo".

Teorema CP3. Criterio de la Segunda Derivada para Máximos y Mínimos. Supongamos que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Observación: En el teorema anterior, si $f''(a) = 0$, este criterio no da información.

1.3.3 Máximo y mínimo de funciones de más de una variable

Definición. Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar dada, un punto $x_0 \in U$ se llama **mínimo local** de f si existe una vecindad V de x_0 tal que para todos los puntos x en V,

$$f(x) \geq f(x_0).$$

De manera análoga, un punto $x_0 \in U$ se llama **máximo local** de f si existe una vecindad V de x_0 tal que para todos los puntos x en V,

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Definición. Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la derivada en un punto $x_0 \in U$ es la matriz

$$\begin{aligned} Df(x_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \end{pmatrix} \\ &= (f_x(x_0) \quad f_y(x_0) \quad f_z(x_0)). \end{aligned}$$

El punto $x_0 \in U$ es un extremo local o relativo, si es mínimo local o máximo local. Un punto x_0 es un punto crítico de f si $Df(x_0) = 0$ o bien si f no es derivable en x_0. Un punto crítico que no es un extremo local se llama **punto silla**.

Teorema CP4. Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto, $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es derivable y $x_0 \in U$ es un extremo local, entonces $Df(x_0) = 0$; esto significa que, x_0 es un punto crítico de f.

1.3.4 La derivada en los máximos y mínimos para funciones de más de una variable

Para el caso de una función de dos variables podemos determinar de qué tipo de punto crítico se trata mediante el siguiente teorema:

Teorema CP5. Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto U en $\mathbb{R}^2$, es decir, tanto f como sus derivadas parciales hasta de orden 3 son continuas. Un punto (x_0, y_0) es un mínimo local de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
3. $D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$

El valor $D(x_0, y_0)$ se llama el discriminante de la función en el punto (x_0, y_0).

Si en 2 tenemos que $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ con la condición de que $D > 0$ entonces tenemos un máximo local.

Ahora bien, cuando una función se encuentra restringida a cierta condición utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema CP6. Teorema de los Multiplicadores de Lagrange. Sean $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones suaves dadas. Sean $x_0 \in U$ y $g(x_0) = c$, y S el conjunto de nivel para g con valor c, es decir, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^3$ con $g(x) = c$. Supongamos que $\nabla g(x_0) \neq 0$. Si $f|S$, que denota a "f restringida S", tiene un máximo o un mínimo en S, en x_0, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Un criterio de la segunda derivada para funciones de más de dos variables de la forma anterior es formar el hessiano limitado para la función auxiliar $h(x) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$, como sigue:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

En segundo lugar, se examinan los determinantes de las submatrices diagonales de orden $n \geq 3$ en los puntos críticos de h. Si los dos son negativos, esto es, si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0,$$

entonces tenemos un mínimo local de $f|S$. Si el primero es positivo y el segundo negativo, entonces se tratará de un máximo local. Si no son todos cero y no siguen estos patrones, entonces el punto no es un máximo ni un mínimo, se tratará de un punto silla.

2. Algebra para la identificación de Máximos y Mínimos

El Álgebra es sin duda, una de las herramientas más utilizadas en la vida diaria, lo mismo la encontramos en la solución de un pasatiempo, en la de un problema que involucre regla de tres o simplemente para dar nombre a un dato desconocido. Encontramos Álgebra desde nivel secundaria hasta los niveles de la educación superior. Para resolver problemas de máximos y mínimos, nuestro objetivo en este trabajo, veremos que mediante ingeniosos procesos algebraicos es posible evitar el uso del cálculo diferencial, poderosa herramienta que se usa comúnmente en estos casos.

2.1 El cuadrado de un número

El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero. Es más, el cuadrado es cero si y sólo si el número al que se le aplica es el cero. De este concepto se desprenden los siguientes resultados:

Teorema 1. Para cualquier constante c, el valor máximo que alcanza

$$cx - x^2$$

cuando x es un número real es $\frac{c^2}{4}$, y se alcanza si y sólo si $x = \frac{c}{2}$.

Demostración.

Escribimos

$$\begin{aligned} cx - x^2 &= cx - x^2 + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right) \\ &= \frac{c^2}{4} - \left(x^2 - cx + \frac{c^2}{4}\right) \\ &= \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

A partir de esta igualdad observamos que para que $cx - x^2$ alcance su valor más grande,

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2$$

debe ser lo más pequeño posible. Dado que este número siempre será positivo o cero, elegimos x de tal forma que se cumpla la igualdad,

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = 0.$$

A partir de ésta, obtenemos que $x = \frac{c}{2}$ por lo que el valor máximo de $cx - x^2$ al sustituir la x obtenida anteriormente es $\frac{c^2}{4}$.

Para demostrar el teorema anterior mediante técnicas de cálculo, consideramos

$$f(x) = cx - x^2.$$

La primera derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = c - 2x,$$

que al igualarla a cero para obtener sus puntos críticos nos da como resultado que

$$x = \frac{c}{2}.$$

Calculamos la segunda derivada de $f(x)$

$$f''(x) = -2.$$

Usamos el Criterio de la Segunda Derivada para Máximos y Mínimos, con lo que obtenemos:

$$f''\left(\frac{c}{2}\right) = -2 < 0$$

por lo que podemos decir que $x = \frac{c}{2}$ es un punto máximo de f.

Por lo tanto, el valor máximo de la función es

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4}.$$

Corolario 1. El valor mínimo de

$$x^2 - cx$$

es $-\frac{c^2}{4}$, si y sólo si $x = \frac{c}{2}$.

Demostración.

Dado que

$$x^2 - cx$$

es el negativo de

$$cx - x^2,$$

entonces el valor más grande de $cx - x^2$ es el valor más pequeño de $x^2 - cx$ y esto ocurre si y sólo si $x = \frac{c}{2}$.

Corolario 2. Si dos variables x y y satisfacen $x + y = c$, su producto xy es un máximo si y sólo si

$$x = y = \frac{c}{2}.$$

Demostración.

Usamos

$$y = c - x$$

y notamos que

$$xy = cx - x^2,$$

aplicamos entonces el resultado del **Teorema 1** con lo que se sigue este resultado.

Corolario 3. Si dos variables $x, y > 0$, satisfacen $xy = c$, donde c es una constante positiva, la suma $x + y$ es mínima si y sólo si $x = y = \sqrt{c}$, para $x, y > 0$.

Demostración.

Escribimos $y = \frac{c}{x}$ con lo que podemos ver que

$$\begin{aligned} x + y &= x + \frac{c}{x} \\ &= \left(x + \frac{c}{x}\right) + (2\sqrt{c} - 2\sqrt{c}) \\ &= \left(x - 2\sqrt{c} + \frac{c}{x}\right) + 2\sqrt{c} \\ &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{c}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{c}. \end{aligned}$$

El valor mínimo de $x + y$ ocurre si el cuadrado

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{c}{x}}\right)^2 = 0$$

lo que significa,

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{c}{x}}$$

dando como resultado que $x = \sqrt{c}$ si multiplicamos por $\sqrt{x}$. Entonces $y = \sqrt{c}$.

Para probar este resultado mediante técnicas de cálculo hacemos

$$f(x) = x + \frac{c}{x}.$$

Obtenemos su primera derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{c}{x^2},$$

y la igualamos a cero para obtener sus puntos críticos

$$1 - \frac{c}{x^2} = 0$$

de lo cual obtenemos que $x = \sqrt{c}$.

Para determinar qué clase de punto crítico es el valor obtenido, usamos el Criterio de la Segunda Derivada. Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2c}{x^3},$$

entonces

$$f''(\sqrt{c}) = \frac{2c}{\left(\sqrt{c}\right)^3} > 0$$

por lo que podemos decir que $x = \sqrt{c}$ es un punto mínimo de f, cuyo valor al evaluarla es

$$f(\sqrt{c}) = \sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}} = 2\sqrt{c}.$$

Teorema 2. Para cualesquiera números reales a y b las desigualdades

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab, \qquad (a+b)^2 \geq 4ab$$

se cumplen, y la igualdad se da si y sólo si $a = b$. Si a y b son números positivos, entonces

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$.

Demostración.

La prueba de este teorema se deriva de la siguiente desigualdad

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

Las tres primeras desigualdades son simples variaciones de ésta. Despejamos $2ab$ de la segunda ecuación con lo que obtenemos

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

que es la primera desigualdad del teorema.

Ahora bien, sumando a la misma desigualdad $4ab$ de cada lado tenemos

$$\begin{aligned}(a^2 - 2ab + b^2) + 4ab &\geq 4ab\\ (a^2 + 2ab + b^2) &\geq 4ab\\ (a+b)^2 &\geq 4ab.\end{aligned}$$

Lo que nos da la tercera desigualdad del teorema. Si dividimos esta desigualdad entre cuatro obtendremos la segunda.

Sabemos también que la desigualdad $(a-b)^2 > 0$ se satisface excepto en el caso $a = b$.

La última desigualdad se obtiene de manera semejante a partir de la siguiente desigualdad

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

de donde

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

A partir de los teoremas y corolarios anteriores, resolveremos los siguientes:

Ejemplos

1. Considere la suma de cualquier número real positivo y su recíproco. Pruebe que el valor mínimo de esta suma es 2.

Solución Algebraica

Lo que deseamos es minimizar

$$x + \frac{1}{x}.$$

Notamos que

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

un valor constante para cualquier valor de $x \neq 0$ que escojamos, por lo que podemos aplicar el Corolario 3. Así que la suma es mínima cuando

$$x = \frac{1}{x}$$

entonces

$$x^2 = 1$$
$$x = 1.$$

Descartamos la solución $x = -1$ pues por hipótesis $x > 0$, por lo que al sustituir $x = 1$ en $x + \frac{1}{x}$ obtenemos que el mínimo es 2.

Solución con Cálculo

Tomamos

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

su primera derivada entonces será

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},$$

por lo que si

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

entonces

$$\frac{1}{x^2} = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1.$$

Por otro lado tenemos que

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

entonces al evaluar en $x = 1$

$$f''(1) = 2 > 0.$$

Por lo que decimos que $x = 1$ es un punto mínimo para f cuyo valor mínimo es $f(1) = 2$.

2. Sean a y b constantes positivas. Encuentre el valor mínimo de $ax + \frac{b}{x}$ para todos los números positivos x.

Solución Algebraica

Dado que $ax\left(\frac{b}{x}\right) = ab$ una constante, entonces aplicaremos nuevamente el Corolario 3. Por lo que, la suma se minimiza si los términos de ésta son iguales, es decir, si:

$$ax = \frac{b}{x}$$
$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Finalmente tenemos que $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, por lo que el valor mínimo de $ax + \frac{b}{x}$ es $2\sqrt{ab}$.

Solución con Cálculo

Tomamos $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ entonces

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2},$$

igualamos ésta a cero para encontrar sus puntos críticos

$$a - \frac{b}{x^2} = 0$$

entonces

$$\frac{b}{x^2} = a$$

$$x^2 = \frac{b}{a},$$

por lo tanto $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

y la evaluamos en su punto crítico

$$f''\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{2b}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3} > 0,$$

con lo que decimos que $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ es un punto mínimo de f.

Evaluamos $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ en $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$:

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}$$

el cual es su valor mínimo.

3. Sean a, b y c constantes positivas. Encontrar los números positivos x y y que satisfacen $ax + by = c$, tales que su producto sea mínimo.

Solución Algebraica

Si escribimos $u = ax$, $v = by$ entonces $ax + by = c$ se vuelve $u + v = c$. Por el Corolario 2 el producto uv se maximiza al hacer $u = v = \frac{c}{2}$.

Al hacer esto observamos que,

$$uv = abxy$$
$$xy = \frac{uv}{ab}.$$

Lo que significa que maximizar el producto uv es maximizar xy también, con lo que obtenemos,

$$u = v = \frac{c}{2} = ax = by.$$

Entonces,

$$x = \frac{c}{2a}, y = \frac{c}{2b}.$$

Por lo que el máximo del producto xy es $\frac{c^2}{4ab}$.

Solución con Cálculo

Obtenemos a partir de $ax + by = c$ a y en función de x, esto nos da como resultado que,

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Por lo que maximizar xy es igual a maximizar la función

$$f(x) = \frac{x(c - ax)}{b} = \frac{cx - ax^2}{b}.$$

Calculamos la primera derivada de esta función

$$f'(x) = \frac{c - 2ax}{b}$$

al igualarla a cero para obtener sus puntos críticos tenemos

$$\frac{c - 2ax}{b} = 0$$

$$x = \frac{c}{2a}.$$

Calculamos la segunda derivada de la misma función

$$f''(x) = -\frac{2a}{b}.$$

Ahora evaluamos esta última función en $x = \frac{c}{2a}$:

$$f''\left(\frac{c}{2a}\right) = -\frac{2a}{b} < 0,$$

entonces podemos decir que $x = \frac{c}{2a}$ es un punto máximo de f cuyo valor máximo en dicho punto obtenemos al evaluar en la función original:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{c}{2a}\right) &= \frac{\left(c\left(\frac{c}{2a}\right) - a\left(\frac{c}{2a}\right)^2\right)}{b} \\
&= \frac{2c^2 - c^2}{4ab} \\
&= \frac{c^2}{4ab}.
\end{aligned}
$$

El cuál es también el valor máximo de xy.

4. Sean a, b y c constantes positivas. Encuentre el valor mínimo de $ax + by$ para todos los números positivos que cumplen $xy = c$.

Solución Algebraica

Aplicamos el Corolario 3, entonces sabemos que la suma se minimiza si $ax = by$ de donde obtenemos que $x = \frac{by}{a}$. Por lo que si

$$xy = c.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{by}{a}\right)y &= c \\
y^2 &= \frac{ac}{b} \\
y &= \sqrt{\frac{ac}{b}}.
\end{aligned}
$$

De donde

$$x = \frac{b\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)}{a}$$

$$x = \frac{\sqrt{abc}}{a}$$

$$x = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Por lo que el valor mínimo de $ax + by$ es

$$ax + by = a\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right) + b\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)$$

$$= \sqrt{abc} + \sqrt{abc}$$

$$= 2\sqrt{abc}.$$

Otra posible solución algebraica se puede dar de la siguiente manera,

$$ax + \frac{bc}{x} = \left(\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{abc} \geq 2\sqrt{abc}$$

alcanzándose si y sólo si

$$x = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Solución con Cálculo

Dejemos a $ax + by$ como función únicamente de x, por lo visto anteriormente sabemos que $y = \frac{c}{x}$, entonces

$$f(x) = ax + \frac{bc}{x}.$$

Calculamos su primera derivada

$$f'(x) = a - \frac{bc}{x^2}$$

y la igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$a - \frac{bc}{x^2} = 0$$

$$ax^2 = bc$$

$$x^2 = \frac{bc}{a}$$

$$x = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Obtenemos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2bc}{x^3}$$

y evaluamos en el punto crítico

$$f''\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right) = \frac{2bc}{\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^3} > 0,$$

entonces $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$. Al evaluar en la función original obtenemos el valor mínimo de ésta

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right) &= a\sqrt{\frac{bc}{a}} + \frac{bc}{\sqrt{\frac{bc}{a}}} \\ &= \sqrt{abc} + \sqrt{abc} \\ &= 2\sqrt{abc} \end{aligned}$$

Que es también el valor mínimo de $ax + by$.

5. Si a, b, c son números reales, no todos iguales, pruebe que

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

Solución

Por el Teorema 2 sabemos que:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

$$a^2 + c^2 > 2ac$$

$$b^2 + c^2 > 2bc.$$

Sumamos estas tres desigualdades, tenemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + ac + bc).$$

Por lo tanto:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

6. Encuentre el número real tal que la diferencia entre dicho número y su cuadrado sea máxima.

Solución Algebraica

De las condiciones del problema, observamos que lo que se busca es maximizar la diferencia de

$$x - x^2.$$

Entonces por el Teorema 1, y al hacer $c = 1$ sabemos que esto ocurre si y sólo si $x = \frac{1}{2}$, por lo que el valor máximo para la diferencia es $\frac{1}{4}$.

Solución con Cálculo

Queremos encontrar el máximo de la función

$$f(x) = x - x^2,$$

hallamos su primera derivada:

$$f'(x) = 1 - 2x$$

y la igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$1 - 2x = 0$$
$$x = \frac{1}{2}\ .$$

por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ es un punto crítico de f.

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -2,$$

Entonces:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0.$$

Lo cual nos dice que en $x = \frac{1}{2}$ hay un máximo, obtenemos entonces el valor máximo al evaluar

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

7. La media armónica de dos números positivos a y b se define de la siguiente manera:

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{2}\right]^{-1}$$

Pruebe que ésta puede ser escrita como:

$$\frac{2ab}{a+b}.$$

Si $a \neq b$, pruebe que la media armónica es menor que la media geométrica, por lo que

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

Siendo iguales las tres medias anteriores si $a = b$.

Solución

Desarrollamos

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{2}\right]^{-1} = \left[\frac{\left(\frac{b+a}{ab}\right)}{2}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{a+b}{2ab}\right]^{-1}$$

$$= \frac{2ab}{a+b}$$

Ahora bien, por el Teorema 2 sabemos que:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Entonces:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}\,.$$

Multiplicamos por $\frac{1}{ab}$:

$$\left(\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) > \left(\frac{1}{ab}\right)\left(\sqrt{ab}\right)$$
$$\frac{a+b}{2ab} > \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Obtenemos el recíproco

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}.$$

Con lo que demostramos que la media armónica es menor a la media geométrica, que a su vez es menor a la media aritmética por lo visto en el Teorema 2.

8. Dada una constante positiva c, encuentre el valor mínimo de $x^4 + 2y^4$ para los números positivos x, y que cumplen $xy = c$.

Solución Algebraica

Dado que $xy = c$, si elevamos a la cuarta potencia esta igualdad tenemos que

$$x^4y^4 = c^4,$$

un valor constante de igual modo. Por lo que podemos aplicar el Corolario 3, para encontrar el valor mínimo de $x^4 + 2y^4$.

Entonces por este mismo resultado tenemos que:

$$x^4 = 2y^4$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^4}{2}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt[4]{2}}\ ,$$

entonces:

$$xy = c$$

$$x\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2}}\right) = c$$

$$x^2 = \left(\sqrt[4]{2}\right)c$$

$$x = 2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}.$$

Despejamos a y de $xy = c$:

$$y = \frac{c}{x}$$

$$y = \frac{c}{2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{8}}}.$$

Por lo que el valor mínimo de $x^4 + 2y^4$ es

$$\begin{aligned} x^4 + 2y^4 &= \left(2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 2\left(\frac{c^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{8}}}\right)^4 \\ &= 2^{\frac{1}{2}}c^2 + 2^{\frac{1}{2}}c^2 \\ &= 2\left(2^{\frac{1}{2}}c^2\right) \\ &= 2^{\frac{3}{2}}c^2. \end{aligned}$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x) = x^4 + 2\left(\frac{c}{x}\right)^4$$

la función obtenida a partir del planteamiento del problema. Obtenemos entonces su primera derivada, que es:

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{8c^4}{x^5}.$$

Igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$4x^3 - \frac{8c^4}{x^5} = 0,$$

entonces:

$$\begin{aligned} 4x^3 &= \frac{8c^4}{x^5} \\ x^8 &= 2c^4 \\ x &= 2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 + \frac{40c^4}{x^6}$$

que siempre es positiva, en particular en $x = 2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}$.

Por lo que $x = 2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}$ es punto mínimo de f cuyo valor mínimo es

$$\begin{aligned} f\left(2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}\right) &= \left(2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 2\left(\frac{c}{2^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}}}\right)^4 \\ &= 2^{\frac{1}{2}}c^2 + 2^{\frac{1}{2}}c^2 \end{aligned}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}}c^2.$$

9. Si a, b y c son constantes positivas, encuentre el valor mínimo de

$$x^2 + y^2 + ax + by + c$$

para los números x y y en los reales.

Solución Algebraica

Notamos que para que la suma anterior se minimice depende de que

$$x^2 + y^2 + ax + by$$

se minimice, por ser c una constante.

Escribimos entonces esta última suma de la siguiente forma

$$(x^2 + ax) + (y^2 + by) = (x^2 - (-a)x) + (y^2 - (-b)y),$$

hacemos $a' = -a$ y $b' = -b$, con lo que tenemos que la suma es igual a:

$$(x^2 - a'x) + (y^2 - b'y).$$

Observamos que por el Corolario 1 para:

$$(x^2 - a'x)$$

el valor mínimo es $-\frac{(a')^2}{4}$.

Y para

$$(y^2 - b'y)$$

el mínimo será $-\frac{(b')^2}{4}$, para $x = \frac{a'}{2}$ y $y = \frac{b'}{2}$ respectivamente.

Por lo que el valor mínimo de

$$x^2 + y^2 + ax + by + c$$

es

$$-\frac{(a')^2}{4} - \frac{(b')^2}{4} + c\,,$$

donde al sustituir los valores de a' y b', nos queda como:

$$-\frac{(-a)^2}{4} - \frac{(-b)^2}{4} + c = -\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c.$$

Otra posible solución la obtenemos de la siguiente forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\geq c - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si

$$x + \frac{a}{2} = 0$$

$$y + \frac{b}{2} = 0$$

si y sólo si

$$x = -\frac{a}{2}$$

$$y = -\frac{b}{2}.$$

Por lo que el valor mínimo es

$$c-\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

y se alcanza cuando $x=-\frac{a}{2}$, $y=-\frac{b}{2}$.

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c.$$

Calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ con respecto a cada variable e igualamos cada una a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$f_x(x,y)=2x+a.$$

Así:

$$2x+a=0$$
$$x=-\frac{a}{2}$$

y

$$f_y(x,y)=2y+b.$$

Por lo tanto:

$$2y+b=0$$
$$y=-\frac{b}{2}.$$

Calculamos ahora las segundas derivadas de la función:

$$f_{xx}(x,y)=2$$
$$f_{yy}(x,y)=2$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0\ ,$$

con lo que

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = 4$$

en particular para $(x,y) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$:

$$D\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = 4 > 0.$$

Dado esto último y que

$$f_{xx}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) = 2 > 0\,,$$

entonces tenemos que $(x,y) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ es un mínimo para $f(x,y)$ cuyo valor mínimo es:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) &= \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b\left(-\frac{b}{2}\right) + c \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + c \\ &= -\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c. \end{aligned}$$

10. Encuentre el valor más grande para el producto xy, si x y y están sujetos a la condición $20x + y = 180$.

Solución Algebraica

Escribimos a $u = 20x$ y $v = y$, entonces

:

$$u + v = 180.$$

Por el Corolario 2 sabemos que uv es máximo si $u = v = 180/2$, pero:

$$uv = 20xy$$
$$xy = \frac{uv}{20},$$

por lo que si maximizamos el producto uv maximizaremos también el producto de xy, entonces si

$$u = v = \frac{180}{2} = 20x = y,$$

se tiene que:

$$20x = \frac{180}{2}$$
$$x = \frac{180}{40}$$
$$x = \frac{9}{2}$$

y por lo tanto

$$y = 90.$$

Con lo que el mínimo de xy es:

$$\left(\frac{9}{2}\right) 90 = 405.$$

Solución con Cálculo

Dejamos a la suma en términos de la variable x, siendo que por definición del problema $y = 180 - 20x$, entonces definimos:

$$f(x) = x(180 - 20x) = 180x - 20x^2.$$

Obtenemos entonces su primera derivada:

$$f'(x) = 180 - 40x$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$180 - 40x = 0$$
$$x = \frac{180}{40} = \frac{9}{2}.$$

Obtenemos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = -40$$

y evaluamos en $x = \frac{9}{2}$,

$$f''\left(\frac{9}{2}\right) = -40 < 0.$$

Como $f''\left(\frac{9}{2}\right) < 0$ entonces $x = \frac{9}{2}$ es un punto mínimo de f cuyo valor mínimo es:

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = 180\left(\frac{9}{2}\right) - 20\left(\frac{9}{2}\right)^2$$
$$= 810 - 405$$
$$= 405.$$

11. Un tráiler hace un recorrido en carretera de 400 millas a una velocidad casi constante. Las leyes vehiculares requieren que la velocidad sea mayor o igual a 35 millas por hora y también menor o igual a 55 millas por hora. El tráiler quema diesel a una tasa de $1+\frac{x}{40}+\frac{x^2}{300}$ galones por hora a una velocidad de x millas por hora. Si el costo del diesel es de k dólares por galón, y los honorarios del conductor son de $8k$ dólares por hora. ¿A qué velocidad debe ir el tráiler para minimizar el costo total del recorrido, incluyendo el costo del diesel y de los honorarios del chofer?

Solución Algebraica

Interpretemos el problema, sea:

$$h = \text{Horas totales de viaje.}$$

Por lo que, buscamos minimizar:

$$hk\left(1+\frac{x}{40}+\frac{x^2}{300}\right)+8kh.$$

Si x es la velocidad a la que viaja el tráiler entonces el recorrido lo hará en

$$h=\frac{400}{x}$$

horas totales de viaje.

Por lo que al sustituir esta h lo que buscamos es minimizar:

$$\begin{aligned}
k\left(\frac{400}{x}\right)\left(1+\frac{x}{40}+\frac{x^2}{300}\right)+8k\left(\frac{400}{x}\right) &= k\left[\left(\frac{400}{x}\right)\left(1+\frac{x}{40}+\frac{x^2}{300}\right)+8\left(\frac{400}{x}\right)\right]\\
&= k\left[\frac{400}{x}+\frac{400x}{40x}+\frac{400x^2}{300x}+\frac{3200}{x}\right]\\
&= k\left[\frac{400}{x}+10+\frac{4x}{3}+\frac{3200}{x}\right]\\
&= k\left[10+\frac{4x}{3}+\frac{3600}{x}\right].
\end{aligned}$$

Entonces para minimizar el costo total del viaje lo que debemos minimizar en realidad es

$$\frac{4x}{3}+\frac{3600}{x},$$

que por ser

$$\left(\frac{4x}{3}\right)\left(\frac{3600}{x}\right)=4800$$

una constante, aplicando el Corolario 3, sabemos que su suma es mínima si

$$\frac{4x}{3}=\frac{3600}{x},$$

esto si:

$$x^2=2700$$

$$x=(2700)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces la velocidad a la que debe ir el tráiler es $x=(2700)^{\frac{1}{2}}\cong 51.9615$ millas por hora para minimizar el costo total del viaje.

Solución con Cálculo

Retomemos de la solución anterior hasta el punto donde buscamos minimizar

$$f(x)=\frac{4x}{3}+\frac{3600}{x}.$$

Calculamos su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{4}{3}-\frac{3600}{x^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$\frac{4}{3}-\frac{3600}{x^2}=0$$

$$\frac{3600}{x^2} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 = \frac{3(3600)}{4}$$

$$x^2 = 2700$$

$$x = (2700)^{\frac{1}{2}}.$$

Obtenemos ahora su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{7200}{x^3}$$

y evaluamos en $x = (2700)^{\frac{1}{2}}$

$$f''\left(\sqrt{2700}\right) = \frac{7200}{(2700)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

por lo que podemos decir que $x = (2700)^{\frac{1}{2}}$ es un punto mínimo de f.

Entonces concluimos que $x = (2700)^{\frac{1}{2}} \cong 51.9615$ es la velocidad a la que debe conducir el chofer para minimizar el costo total del recorrido.

2.2 La Desigualdad de las Medias Aritmética-Geométrica

Teorema 3. La Desigualdad de las Medias Aritmética-Geométrica. Sean A, la media aritmética, y G, la media geométrica de los números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ definidas como:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Entonces $A \geq G$, siendo iguales si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Usemos este resultado para nuestro propósito, sobre la obtención de máximos y mínimos, mediante el siguiente teorema. Más de una demostración puede consultarse [2] .

Teorema 4. Si n funciones positivas tienen un producto constante c, su suma es un mínimo si las funciones son iguales. Si n funciones positivas tienen una suma constante k, su producto es un máximo si las funciones son iguales.

Demostración.

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ funciones positivas con un producto constante, es decir,

$$f_1 f_2 \cdots f_n = c.$$

Si A y G denotan las medias aritmética y geométrica de $f_1, f_2, \dots, f_n$ respectivamente, entonces por el Teorema 3, $A \geq G$, escribimos ésta como:

$$nA \geq nG$$
$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n \geq n(f_1 f_2 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} = nc^{\frac{1}{n}}.$$

Por lo que la suma $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ vale al menos $nc^{\frac{1}{n}}$, y este valor mínimo se alcanza en el caso de que $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$.

Consideremos ahora que:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = k,$$

entonces la media aritmética de estas funciones es:

$$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{k}{n}.$$

Escribimos la desigualdad $A \geq G$ de la forma $G^n \leq A^n$, entonces tenemos que:

$$G^n = f_1 f_2 \cdots f_n \leq A^n = \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Dado que $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ es una constante, es que podemos decir que el producto $f_1 f_2 \cdots f_n$ tiene una cota superior con valor igual a esta constante. Este valor se alcanza, y es por lo que decimos que el producto tiene un máximo, si $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$.

Dados los resultados anteriores procederemos a la resolución de los siguientes:

Ejemplos

1. Encuentre el mínimo de

$$\frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy$$

para x y y positivos.

Solución Algebraica

Notamos que:

$$\left(\frac{12}{x}\right)\left(\frac{18}{y}\right)(xy) = 12 \cdot 18 = 216.$$

Entonces la suma será mínima si encontramos x y y que satisfagan:

$$\frac{12}{x} = \frac{18}{y} = xy.$$

Dado que el producto es igual a 216, o 6^3, entonces:

$$\frac{12}{x} = \frac{18}{y} = xy = 6\ ,$$

de donde obtenemos $x = 2$ y $y = 3$, por lo que el valor mínimo de la suma es, al sustituir estos valores:

$$6 + 6 + 6 = 18.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x, y) = \frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy.$$

Calculamos las derivadas parciales de $f(x, y)$

$$f_x(x, y) = -\frac{12}{x^2} + y$$

$$f_y(x, y) = -\frac{18}{y^2} + x.$$

E igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$-\frac{12}{x^2} + y = 0$$

$$y = \frac{12}{x^2}$$

y

$$-\frac{18}{y^2} + x = 0$$

$$x = \frac{18}{y^2}.$$

Entonces al sustituir $y = \frac{12}{x^2}$ en $x = \frac{18}{y^2}$, tenemos:

$$x = \frac{18}{\left(\frac{12}{x^2}\right)^2}$$

$$x = \frac{18x^4}{12^2}$$

$$x^3 = \frac{144}{18}$$

$$x = 8^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 2.$$

Y por lo tanto:

$$y = \frac{12}{2^2}$$

$$y = 3.$$

Por lo que $(x, y) = (2, 3)$ es un punto crítico de f. Calculamos ahora las segundas derivadas:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{24}{x^3}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{36}{y^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1.$$

Con lo que obtenemos el discriminante

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2,$$

para $(x,y) = (2,3)$:

$$D(2,3) = \left(\frac{24}{2^3}\right)\left(\frac{36}{3^3}\right) - (1)^2 = 3 \cdot \left(\frac{36}{27}\right) - 1 = 3 > 0.$$

Dado esto, y que

$$f_{xx}(2,3) = 3 > 0\,,$$

entonces $(x,y) = (2,3)$ es mínimo de f cuyo valor mínimo en dicho punto es:

$$\begin{aligned} f(2,3) &= \frac{12}{2} + \frac{18}{3} + (3 \cdot 2) \\ &= 6 + 6 + 6 \\ &= 18. \end{aligned}$$

2. Para cualquier constante positiva c, encuentre el máximo de $xy(c-x-y)$ para todos los números positivos x y y.

Solución Algebraica

Notemos que

$$x + y + (c - x - y) = c.$$

Entonces por el Teorema 4 para maximizar el producto:

$$x = y = (c - x - y) = \frac{c}{3}.$$

Con lo que el máximo del producto $xy(c-x-y)$, es $\left(\frac{c}{3}\right)^3$.

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y) = xy(c-x-y) = cxy - x^2y - xy^2 \,.$$

Calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= cy - 2xy - y^2 \\ f_y(x,y) &= cx - x^2 - 2xy \,. \end{aligned}$$

Igualamos a cero cada una para obtener los puntos críticos, entonces:

$$\begin{aligned} cy - 2xy - y^2 &= 0 \\ 2xy &= cy - y^2 \\ x &= \frac{cy - y^2}{2y} \\ x &= \frac{c-y}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} cx - x^2 - 2xy &= 0 \\ 2xy &= cx - x^2 \\ y &= \frac{cx - x^2}{2x} \\ y &= \frac{c-x}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = \frac{c-x}{2}$ en $x = \frac{c-y}{2}$ tenemos:

$$x = \frac{c - \left(\frac{c-x}{2}\right)}{2}$$

$$x = \frac{2c - c + x}{4}$$
$$x = \frac{c + x}{4}$$
$$4x = c + x$$
$$3x = c$$
$$x = \frac{c}{3}.$$

Y por lo tanto

$$y = \frac{c - \left(\frac{c}{3}\right)}{2}$$
$$y = \frac{3c - c}{6}$$
$$y = \frac{2c}{6}$$
$$y = \frac{c}{3}.$$

Por lo que $(x, y) = \left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$ es un punto crítico de f. Calculamos ahora las segundas derivadas:

$$f_{xx}(x, y) = -2y$$
$$f_{yy}(x, y) = -2x$$
$$f_{xy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = c - 2x - 2y,$$

con lo que obtenemos el discriminante:

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - \left[f_{xy}(x, y)\right]^2,$$

para $(x, y) = \left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$:

$$D\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right) = \left(-2\left(\frac{c}{3}\right)\right)\left(-2\left(\frac{c}{3}\right)\right) - \left(c - 2\left(\frac{c}{3}\right) - 2\left(\frac{c}{3}\right)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4c^2}{9} - \left(\frac{3c-4c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{4c^2}{9} - \left(\frac{-c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{3c^2}{9} \\
&= \frac{c^2}{3} > 0.
\end{aligned}
$$

Dado esto y que

$$f_{xx}\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right) = -\frac{2c}{3} < 0$$

entonces $(x,y) = \left(\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)$ es máximo de f cuyo valor máximo en dicho punto es:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right) &= c\left(\frac{c}{3}\right)\left(\frac{c}{3}\right) - \left(\frac{c}{3}\right)^2\left(\frac{c}{3}\right) - \left(\frac{c}{3}\right)\left(\frac{c}{3}\right)^2 \\
&= \frac{c^3}{9} - \frac{2c^3}{27} \\
&= \frac{3c^3 - 2c^3}{27} \\
&= \frac{c^3}{27} = \left(\frac{c}{3}\right)^3.
\end{aligned}
$$

3. Sea a cualquier constante positiva, encuentre el valor mínimo de

$$x^2 + \frac{a}{x}$$

para $x > 0$.

Solución Algebraica

Notamos que

$$(x^2)\left(\frac{a}{x}\right) = xa,$$

la cual no es una constante, por lo que no podemos aplicar el Teorema 4. Sin embargo,

$$\begin{aligned} x^2+\frac{a}{x} &= x^2+\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{a}{x}\right) \\ &= x^2+\frac{a}{2x}+\frac{a}{2x}. \end{aligned}$$

Del cual, el producto es:

$$(x^2)\left(\frac{a}{2x}\right)\left(\frac{a}{2x}\right)=\frac{a^2}{4},$$

una constante, de esta manera podemos aplicar el Teorema 4. Por lo que:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a}{2x} \\ x^3 &= \frac{a}{2} \\ x &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Entonces el valor mínimo de

$$x^2+\frac{a}{x}$$

es

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2+\frac{a}{2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}+\frac{a}{2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{a}{\left(2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)}+\frac{a}{\left(2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \\ &= 3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}.$$

Obtenemos ahora su primera derivada

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos. Entonces:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{a}{x^2} &= 0 \\ 2x &= \frac{a}{x^2} \\ x^3 &= \frac{a}{2} \\ x &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora la segunda derivada

$$f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

y evaluamos $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$f''\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 2 + \frac{2a}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3} = 6 > 0.$$

Entonces $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ es un punto mínimo de f, donde al evaluar dicho punto nos da que su valor mínimo es:

$$f\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \frac{a}{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{2}\right)\left(2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= 3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Mismo resultado que en la solución anterior.

4. Encuentre el valor máximo del producto

$$xy(72 - 3x - 4y)$$

para $x, y > 0$.

Solución Algebraica

La suma de los términos del producto es:

$$x + y + (72 - 3x - 4y) = 72 - 2x - 3y,$$

el cual no es un valor constante. Por lo que no es posible aplicar el Teorema 4, sin embargo, si realizamos un ajuste sobre este producto de una forma conveniente:

$$\begin{aligned} xy(72 - 3x - 4y) &= \left(\frac{12}{12}\right)\left(xy(72 - 3x - 4y)\right) \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)(3x)(4y)(72 - 3x - 4y) \end{aligned}$$

y si ignoramos el multiplicador $\left(\frac{1}{12}\right)$, dado que es un valor constante, nos queda por maximizar el producto

$$(3x)(4y)(72 - 3x - 4y),$$

cuya suma de sus términos es igual a:

$$3x + 4y + (72 - 3x - 4y) = 72,$$

un valor constante, por lo que es posible aplicar el Teorema 4. Así que lo que buscamos ahora son x y y, que satisfagan

$$3x = 4y = (72 - 3x - 4y).$$

De lo anterior tenemos que:

$$x = \frac{4}{3}y,$$

entonces:

$$\begin{aligned} 4y &= 72 - 3\left(\frac{4}{3}y\right) - 4y \\ 4y &= 72 - 4y - 4y \\ 12y &= 72 \\ y &= \frac{72}{12} \\ y &= 6. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3}(6) \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Y el mínimo de

$$xy(72 - 3x - 4y)$$

es, al sustituir la $x = 8$ y $y = 6$:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 6 \cdot (72 - 3(8) - 4(6)) &= 8 \cdot 6 \cdot 24 \\ &= 1152. \end{aligned}$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y) = xy(72 - 3x - 4y) = 72xy - 3x^2y - 4xy^2.$$

Calculamos las derivadas parciales de esta función:

$$f_x(x,y) = 72y - 6xy - 4y^2$$
$$f_y(x,y) = 72x - 3x^2 - 8xy,$$

igualamos éstas a cero para obtener los puntos críticos, entonces:

$$72y - 6xy - 4y^2 = 0$$
$$6xy = 72y - 4y^2$$
$$x = \frac{72y - 4y^2}{6y}$$
$$x = 12 - \frac{2}{3}y$$

y

$$72x - 3x^2 - 8xy = 0$$
$$8xy = 72x - 3x^2$$
$$y = \frac{72x - 3x^2}{8x}$$
$$y = 9 - \frac{3}{8}x.$$

Por lo que al sustituir $x = 12 - \frac{2}{3}y$ en ésta ultima obtenemos que:

$$y = 9 - \frac{3}{8}\left(12 - \frac{2}{3}y\right)$$
$$y = 9 - \frac{9}{2} + \frac{1}{4}y$$

$$y - \frac{1}{4}y = 9 - \frac{9}{2}$$
$$y\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 9 - \frac{9}{2}$$
$$y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2}$$
$$y = \frac{9(4)}{2(3)}$$
$$y = 6.$$

Y por lo tanto

$$x = 12 - \frac{2}{3}(6)$$
$$x = 12 - 4$$
$$x = 8.$$

Por lo que $(x, y) = (8,6)$ es un punto crítico de f.

Calculamos ahora las segundas derivadas:

$$f_{xx}(x, y) = -6y$$
$$f_{yy}(x, y) = -8x$$
$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 72 - 6x - 8y.$$

Con lo que obtenemos el discriminante:

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - \left[f_{xy}(x, y)\right]^2,$$

para $(x, y) = (8, 6)$:

$$D(8,6) = \big(-6(6)\big)\big(-8(8)\big) - [72 - 6(8) - 8(6)]^2$$
$$= (-36)(-64) - [72 - 48 - 48]^2$$

$$= 2304 - 576$$
$$= 1728 > 0.$$

Debido a esto y a que

$$f_{xx}(8,6) = -6(6) = -36 < 0,$$

entonces $(x, y) = (8,6)$ es un punto máximo de f, y el valor máximo es:

$$\begin{aligned} f(8,6) &= 8 \cdot 6 \cdot (72 - 3(8) - 4(6)) \\ &= 8 \cdot 6 \cdot (72 - 24 - 24) \\ &= 48 \cdot 24 \\ &= 1152. \end{aligned}$$

5. Encuentre el valor mínimo para la suma

$$5x + \frac{16}{x} + 21$$

para $x > 0$.

Solución Algebraica

La solución se reduce a minimizar la suma de los primeros dos términos de la anterior:

$$5x + \frac{16}{x}$$

los cuales tienen como producto:

$$(5x)\left(\frac{16}{x}\right) = 80,$$

un valor constante por lo que podemos aplicar el Teorema 4, de donde obtenemos que:

$$5x = \frac{16}{x}$$

$$x^2 = \frac{16}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{16}{5}}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Únicamente consideramos la raíz positiva debido a las restricciones del problema. Así que el valor mínimo para esta suma es:

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) + \frac{16}{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)} + 21 &= 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 21 \\ &= 2\left(4\sqrt{5}\right) + 21 \\ &= 8\sqrt{5} + 21. \end{aligned}$$

Una solución igualmente algebraica esta dada de la siguiente manera

$$5x + \frac{16}{x} = \left(\sqrt{5}\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^2 + 8\sqrt{5} \geq 8\sqrt{5}$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si

$$\sqrt{5}\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0,$$

es decir,

$$\sqrt{5}x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Por lo que el valor mínimo es

$$8\sqrt{5} + 21$$

con $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x) = 5x + \frac{16}{x} + 21.$$

Calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = 5 - \frac{16}{x^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$\begin{aligned} 5 - \frac{16}{x^2} &= 0 \\ \frac{16}{x^2} &= 5 \\ x^2 &= \frac{16}{5} \\ x &= \sqrt{\frac{16}{5}} \\ x &= \frac{4}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Obtenemos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{32}{x^3}$$

la cual es positiva siempre, en particular en $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Por lo que $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ es un punto mínimo de f cuyo valor mínimo es en este punto:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) &= 5\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) + \frac{16}{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)} + 21 \\ &= 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 21 \end{aligned}$$

$$= 2(4\sqrt{5}) + 21$$
$$= 8\sqrt{5} + 21.$$

6. Encuentre el valor mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$ para x y y que satisfagan $3x - y = 20$.

Solución Algebraica

Dado que x^2 y y^2 son positivos o cero para cualquier valor de x y y en los reales, entonces para obtener el mínimo de

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

bastará obtener el de la suma

$$x^2 + y^2.$$

Dado que

$$3x - y = 20$$
$$y = 3x - 20,$$

entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (3x - 20)^2 \\ &= x^2 + 9x^2 - 120x + 400 \\ &= 10x^2 - 120x + 400 \\ &= 10(x^2 - 12x) + 400. \end{aligned}$$

Ahora bien, esta suma se minimizará si

$$(x^2 - 12x)$$

se minimiza, por el Corolario 1 del Teorema 1 sabemos que, el mínimo de este tipo de ecuación es:

$$-\frac{(12)^2}{4} = -36,$$

para $x = \frac{12}{2} = 6$.

Por lo que el mínimo de

$$x^2 + y^2 = 10(x^2 - 12x) + 400$$

es

$$10(-36) + 400 = 40.$$

Entonces el valor mínimo de

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

es

$$\sqrt{40},$$

para $x = 6$ y $y = 3(6) - 20 = -2$.

Solución con Cálculo

Retomemos la solución anterior hasta el momento en que sea

$$f(x) = 10x^2 - 120x + 400$$

la función que intentamos minimizar.

Entonces al obtener su primera derivada tenemos que:

$$f'(x) = 20x - 120,$$

igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, por lo que:

$$\begin{aligned} 20x - 120 &= 0 \\ x &= \frac{120}{20} \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Calculamos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = 20$$

cuyo valor en nuestro punto crítico $x = 6$ es:

$$f''(6) = 20 > 0.$$

Por lo tanto $x = 6$ es un mínimo de f cuyo valor en dicho punto es:

$$\begin{aligned} f(6) &= 10(6)^2 - 120(6) + 400 \\ &= 360 - 720 + 400 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Entonces con lo anterior sabemos que el valor mínimo de

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

es

$$\sqrt{40},$$

para $x = 6$ y $y = 3(6) - 20 = -2.$

7. Encuentre el valor mínimo de

$$f(x) = \frac{(x + 10)(x + 2)}{x + 1}$$

para $x > 0$.

Solución Algebraica

Escribamos $y = x + 1$, entonces tenemos que:

$$f(y - 1) = \frac{(y + 9)(y + 1)}{y}$$

$$= \frac{(y^2 + y + 9y + 9)}{y}$$

$$= \frac{(y^2 + 10y + 9)}{y}$$

$$= y + 10 + \frac{9}{y}.$$

Entonces para minimizar esta función que obtuvimos, basta minimizar

$$y + \frac{9}{y}$$

cuyo producto de sus términos es:

$$y\left(\frac{9}{y}\right) = 9,$$

una constante por lo que podemos aplicar el Teorema 4, con lo que tenemos que

$$y = \frac{9}{y}$$

$$y^2 = 9$$

$$y = 3.$$

Entonces

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2,$$

con lo que el valor mínimo de

$$f(x) = \frac{(x + 10)(x + 2)}{x + 1}$$

es

$$f(2) = \frac{(2 + 10)(2 + 2)}{2 + 1}$$

$$= \frac{(12)(4)}{3}$$

$$= 16.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+10)(x+2)}{x+1} \\ &= \frac{x^2+2x+10x+20}{x+1} \\ &= \frac{x^2+12x+20}{x+1}. \end{aligned}$$

Calculamos la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+12)(x+1)-(1)(x^2+12x+20)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x^2+2x+12x+12)-(x^2+12x+20)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2-9}{(x+1)^2} \\ &= 1-\frac{9}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

E igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$\begin{aligned} 1-\frac{9}{(x+1)^2} &= 0 \\ \frac{9}{(x+1)^2} &= 1 \\ (x+1)^2 &= 9 \\ x+1 &= 3 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Descartamos la solución $x = -4$ debido a las restricciones originales del problema que restringe a valores positivos de x la solución.

Obtenemos ahora su segunda derivada para determinar de qué clase de punto se trata,

$$f''(x) = \frac{18}{(x+1)^3},$$

al evaluar $x = 2$:

$$f''(2) = \frac{18}{(2+1)^3} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} > 0.$$

Por lo que $x = 2$ es un mínimo de f, cuyo valor mínimo es en tal punto:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{(2+10)(2+2)}{2+1} \\ &= \frac{(12)(4)}{3} \\ &= 16. \end{aligned}$$

8. Encuentre el valor más grande para el producto xyz si $x, y, z > 0$ y que satisfacen $x + y + z = 5$.

Solución Algebraica

Dado que

$$x + y + z = 5,$$

por el Teorema 4 sabemos que para que el producto xyz sea máximo entonces:

$$x = y = z.$$

Por lo tanto, si dejamos a la suma original en función de la variable x tenemos que:

$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}.$$

Por lo que, el valor máximo del producto xyz sujeto a la restricción anterior es:

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27}.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x, y, z) = xyz$$

con x, y y z sujetas a

$$x + y + z = 5.$$

Consideremos

$$g(x, y, z) = x + y + z,$$

por el método de Multiplicadores de Lagrange buscamos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = 5.$$

Lo cual da como resultado las ecuaciones:

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$f_z = \lambda g_z$$
$$g(x, y, z) = 5,$$

es decir,

$$yz = \lambda$$
$$xz = \lambda$$
$$xy = \lambda$$
$$x + y + z = 5.$$

Por lo anterior, tenemos que:

$$yz = xz$$
$$xz = xy,$$

puesto que λ no puede ser cero, ya que en ese caso

$$yz = 0$$
$$xz = 0$$
$$xy = 0,$$

que por hipótesis del problema no puede suceder así, entonces:

$$x = y = z.$$

Por lo tanto, si dejamos $g(x, y, z)$ en función de la variable x nos da como resultado que

$$g(x, x, x) = 3x = 5,$$

entonces:

$$x = \frac{5}{3} = y = z.$$

Y por lo tanto

$$\lambda = \frac{25}{9}.$$

Por lo que $(x, y, z) = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ es un punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 5$, con $\lambda = \frac{25}{9}$.

Para determinar de qué clase de punto crítico se trata tomemos la función auxiliar

$$h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z)$$

y calculamos el Hessiano limitado a partir de ésta y de $g(x, y, z)$ de la siguiente forma:

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & z & y \\ -1 & z & 0 & x \\ -1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Al resolver este determinante tenemos que:

$$|\bar{H}_3| = -2xy - 2xz - 2yz + x^2 + y^2 + z^2,$$

donde al sustituir los valores de nuestro punto crítico $(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\bar{H}_3| &= -2xy - 2xz - 2yz + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= -2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ &= -3\left(\frac{5}{3}\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3,

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & z \\ -1 & z & 0 \end{vmatrix} = 2z,$$

en donde evaluamos igualmente nuestro punto crítico:

$$|\bar{H}_2| = 2\left(\frac{5}{3}\right) > 0.$$

Entonces dado $|\bar{H}_2| > 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$ $(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ es un punto máximo de

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeto a

$$x + y + z = 5.$$

Cuyo valor máximo es al evaluar f en este punto:

$$f\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3.$$

9. Encuentre el valor más grande para el producto xyz si $x, y, z > 0$ y satisfacen $2x + 3y + 4z = 36$.

Solución Algebraica

Sea

$$2x + 3y + 4z = 36.$$

Si hacemos

$$u = 2x$$

$$v = 2y$$

$$w = 4z.$$

Entonces

$$u + v + w = 36,$$

por lo que por el Teorema 4 el producto uvw se maximiza si:

$$u = v = w.$$

Pero observamos que:

$$uvw = (2x)(3y)(4z)$$
$$uvw = 24xyz,$$

es decir,

$$xyz = \frac{uvw}{24}.$$

Entonces maximizar el producto uvw es maximizar también el producto xyz, lo cual ocurre por el Teorema 4 si

$$u = v = w = 2x = 3y = 4z.$$

De lo cual obtenemos que:

$$y = \frac{2}{3}x$$
$$z = \frac{1}{2}x,$$

que al sustituir en

$$2x + 3y + 4z = 36$$

nos da como resultado

$$2x + 3\left(\frac{2}{3}x\right) + 4\left(\frac{1}{2}x\right) = 36,$$

por lo que

$$6x = 36$$
$$x = 6$$
$$y = 4$$
$$z = 3.$$

Por lo tanto el valor máximo de xyz es

$$6 \cdot 4 \cdot 3 = 72.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y,z) = xyz$$

con x, y y z sujetas a la restricción

$$2x + 3y + 4z = 36.$$

Consideremos

$$g(x,y,z) = 2x + 3y + 4z,$$

por el método de Multiplicadores de Lagrange buscamos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

y

$$g(x,y,z) = 36.$$

Lo cual da como resultado las ecuaciones:

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$f_z = \lambda g_z$$
$$g(x,y,z) = 36,$$

es decir,

$$yz = 2\lambda$$
$$xz = 3\lambda$$
$$xy = 4\lambda$$
$$2x + 3y + 4z = 36.$$

Al multiplicar la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$xyz = 2\lambda x$$
$$xyz = 3\lambda y$$
$$xyz = 4\lambda z.$$

Entonces

$$2\lambda x = 3\lambda y = 4\lambda z,$$

puesto que λ no puede ser cero, ya que en ese caso $xyz = 0$ que por hipótesis del problema no puede ser así, entonces:

$$3y = 2x$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

y

$$4z = 2x$$
$$z = \frac{1}{2}x.$$

Dado esto sustituyendo en $g(x, y, z)$ tenemos:

$$g\left(x, \frac{2}{3}x, \frac{1}{2}x\right) = 2x + 3\left(\frac{2}{3}x\right) + 4\left(\frac{1}{2}x\right) = 36,$$

lo cual nos da como resultado que

$$6x = 36$$
$$x = 6$$
$$y = 4$$
$$z = 3.$$

Y entonces

$$\lambda = \frac{(4)(3)}{2} = 6.$$

Por lo que $(x, y, z) = (6,4,3)$ es un punto crítico de f sujeto a g con $\lambda = 6$.

Ahora bien, dada la función auxiliar

$$h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2x + 3y + 4z)$$

calculamos el Hessiano limitado para saber de qué clase de punto se trata:

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & z & y \\ -3 & z & 0 & x \\ -4 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante tenemos que:

$$|\bar{H}_3| = -12xy - 16xz - 24yz + 4x^2 + 9y^2 + 16z^2$$

donde al sustituir los valores de nuestro punto crítico $(x, y, z) = (6,4,3)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\bar{H}_3| &= -12xy - 16xz - 24yz + 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 \\ &= -12(6)(4) - 16(6)(3) - 24(4)(3) + 4(6)^2 + 9(4)^2 + 16(3)^2 \\ &= -432 < 0. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3, que en nuestro caso es solo una dada de la siguiente forma:

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & z \\ -3 & z & 0 \end{vmatrix} = 12z,$$

en donde evaluamos igualmente nuestro punto crítico:

$$|\overline{H}_2| = 12(3) = 36 > 0.$$

Entonces dado $|\overline{H}_2| > 0$ y $|\overline{H}_3| < 0$ $(x, y, z) = (6,4,3)$ es un punto máximo de

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeto a

$$2x + 3y + 4z = 36.$$

Cuyo valor máximo es al evaluar f en este punto

$$f(6,4,3) = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72.$$

10. Para cualesquiera constantes a, b, c y k encuentre el valor más grande de xyz, para x, y, $z > 0$ y que satisface que $ax + by + cz = k$.

Solución Algebraica

Sean

$$u = ax$$
$$v = by$$
$$w = cz,$$

entonces al sustituir en

$$ax + by + cz = k$$

tenemos que

$$u + v + w = k,$$

por lo que por el Teorema 4 el producto uvw se maximiza si

$$u = v = w.$$

Pero observamos que:

$$uvw = (ax)(by)(cz)$$

$$uvw = (abc)xyz,$$

es decir,

$$xyz = \frac{uvw}{abc}.$$

Entonces maximizar el producto uvw es maximizar también el producto xyz, lo cual ocurre por el Teorema 4 si

$$u = v = w = ax = by = cz.$$

De lo cual obtenemos que:

$$y = \frac{a}{b}x$$

$$z = \frac{a}{c}x,$$

al sustituir en

$$ax + by + cz = k$$

tenemos

$$ax + b\left(\frac{a}{b}x\right) + c\left(\frac{a}{c}x\right) = k,$$

lo cual nos da como resultado que

$$3ax = k$$

$$x = \frac{k}{3a}$$

$$y = \frac{k}{3b}$$

$$z = \frac{k}{3c}.$$

Por lo que el valor máximo de xyz es:

$$\left(\frac{k}{3a}\right) \cdot \left(\frac{k}{3b}\right) \cdot \left(\frac{k}{3c}\right) = \frac{k^3}{27abc}.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x, y, z) = xyz$$

con x, y y z sujetas a

$$ax + by + cz = k.$$

Si consideramos

$$g(x, y, z) = ax + by + cz,$$

por el método de Multiplicadores de Lagrange buscamos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y $g(x, y, z) = k$. Lo cual da como resultado las ecuaciones:

$$f_x = \lambda g_x$$
$$f_y = \lambda g_y$$
$$f_z = \lambda g_z$$
$$g(x, y, z) = k,$$

es decir,

$$yz = a\lambda$$
$$xz = b\lambda$$
$$xy = c\lambda$$
$$ax + by + cz = k.$$

Dado que λ no puede ser cero pues de ser así:

$$yz = 0$$
$$xz = 0$$
$$xy = 0,$$

que por hipótesis del problema no puede ser, entonces al multiplicar la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$xyz = a\lambda x$$
$$xyz = b\lambda y$$
$$xyz = c\lambda z.$$

De lo cual

$$a\lambda x = b\lambda y = c\lambda z,$$

por lo que:

$$by = ax$$
$$y = \frac{a}{b}x$$

y

$$cz = ax$$
$$z = \frac{a}{c}x.$$

Dado esto sustituyendo en $g(x, y, z)$ tenemos:

$$g\left(x, \frac{a}{b}x, \frac{a}{c}x\right) = ax + b\left(\frac{a}{b}x\right) + c\left(\frac{a}{c}x\right) = k$$

lo cual nos da como resultado que

$$3ax = k$$
$$x = \frac{k}{3a}$$
$$y = \frac{k}{3b}$$
$$z = \frac{k}{3c}$$

y

$$\lambda = \frac{k^2}{9abc}.$$

Por lo que $(x, y, z) = \left(\frac{k}{3a}, \frac{k}{3b}, \frac{k}{3c}\right)$ es un punto crítico de f sujeto a g con $\lambda = \frac{k^2}{9abc}$.

Ahora bien, dada la función auxiliar

$$h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(ax + by + cz),$$

calculamos el Hessiano limitado para saber de qué clase de punto se trata:

$$|\overline{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & z & 0 & x \\ -c & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Resolviendo el determinante tenemos que:

$$|\overline{H}_3| = -2abxy - 2acxz - 2bcyz + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

donde al sustituir los valores de nuestro punto crítico $(x, y, z) = \left(\frac{k}{3a}, \frac{k}{3b}, \frac{k}{3c}\right)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\overline{H}_3| &= -2abxy - 2acxz - 2bcyz + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \\ &= -\frac{2k^2}{9} - \frac{2k^2}{9} - \frac{2k^2}{9} + \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{9} \\ &= -\frac{3k^2}{9} = -\frac{k^2}{3} < 0. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3, que en nuestro caso es solo una dada de la siguiente forma:

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ -a & 0 & z \\ -b & z & 0 \end{vmatrix} = 2abz,$$

en donde evaluamos igualmente nuestro punto crítico:

$$|\overline{H}_2| = 2ab\left(\frac{k}{3c}\right) > 0.$$

Entonces dado $|\overline{H}_2| > 0$ y $|\overline{H}_3| < 0$ $(x, y, z) = \left(\frac{k}{3a}, \frac{k}{3b}, \frac{k}{3c}\right)$ es un punto máximo de

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeto a

$$ax + by + cz = k.$$

Cuyo valor máximo en este punto es:

$$f\left(\frac{k}{3a}, \frac{k}{3b}, \frac{k}{3c}\right) = \left(\frac{k}{3a}\right)\left(\frac{k}{3b}\right)\left(\frac{k}{3c}\right) = \frac{k^3}{27abc}.$$

11. Encuentre el máximo de x^2y para $x, y > 0$ y $6x + 5y = 45$.

Solución Algebraica

Si escribimos

$$6x + 5y = 45$$

de la forma

$$3x + 3x + 5y = 45$$

y hacemos

$$u = 3x$$

$$v = 3x$$

$$w = 5y,$$

entonces:

$$u + v + w = 45.$$

Por el Teorema 4, y dado lo anterior, sabemos que uvw se maximiza si

$$u = v = w,$$

pero:

$$uvw = (3x)(3x)(5y),$$

es decir,

$$x^2 y = \frac{uvw}{45}.$$

Por lo que maximizar uvw es lo mismo que maximizar x^2y, entonces dado que

$$u = v = w$$

tenemos que:

$$3x = 5y$$

$$y = \frac{3}{5}x,$$

que al sustituir en la suma original nos da:

$$6x + 5\left(\frac{3}{5}x\right) = 45.$$

Es decir,

$$9x = 45$$

$$x = 5$$

$$y = 3.$$

Por lo tanto el máximo de x^2y es:

$$5^2 \cdot 3 = 75.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y) = x^2y$$

con x, y sujetas a

$$6x + 5y = 45.$$

Por lo anterior

$$y = \frac{45 - 6x}{5}$$

entonces:

$$f(x,y) = f(x) = \frac{45x^2 - 6x^3}{5}.$$

Calculamos su primera derivada

$$f'(x) = \frac{90x - 18x^2}{5},$$

la cual igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{90x - 18x^2}{5} &= 0 \\ 18x^2 &= 90x \\ x &= \frac{90}{18} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

descartamos la solución $x = 0$ debido a que buscamos soluciones positivas, por lo tanto

$$y = 3.$$

Calculando ahora la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{90 - 36x}{5},$$

donde al evaluar $x = 5$ tenemos que:

$$f''(5) = \frac{90 - 36(5)}{5} = -18 < 0.$$

Por lo tanto $(x, y) = (5,3)$ es un punto máximo de f cuyo valor máximo es:

$$f(5) = \frac{45(5)^2 - 6(5)^3}{5} = 75.$$

12. Encuentre el valor mínimo de

$$\frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy$$

para $x, y > 0$.

Solución Algebraica

Dado que el producto

$$\left(\frac{50}{x}\right)\left(\frac{20}{y}\right)(xy) = 1{,}000$$

de los términos de la suma es una constante, podemos aplicar el Teorema 4. Por lo que la suma se minimiza si

$$\frac{50}{x} = \frac{20}{y} = xy = 10.$$

Esto último debido a que $(1{,}000)^{\frac{1}{3}} = 10$, con lo que obtenemos que:

$$\frac{50}{x} = 10$$

$$x = 5$$

$$y = 2.$$

Por lo tanto el mínimo de la suma es:

$$10 + 10 + 10 = 30.$$

Solución con Cálculo.

Sea

$$f(x, y) = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy.$$

Calculamos las derivadas parciales respecto a x y y

$$f_x(x, y) = -\frac{50}{x^2} + y$$

$$f_y(x, y) = -\frac{20}{y^2} + x,$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$-\frac{50}{x^2} + y = 0$$

$$y = \frac{50}{x^2}$$

y

$$-\frac{20}{y^2} + x = 0$$

$$x = \frac{20}{y^2}.$$

Entonces

$$x = \frac{20x^4}{2500}$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

y

$$y = 2$$

por lo que $(5,2)$ es un punto crítico de f.

Obtenemos las segundas derivadas parciales:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{100}{x^3} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{40}{y^3} \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 1,
\end{aligned}
$$

con lo que obtenemos el discriminante

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2,$$

para $(x,y) = (5,2)$

$$
\begin{aligned}
D(5,2) &= \left(\frac{100}{5^3}\right)\left(\frac{40}{2^3}\right) - [1]^2 \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)(5) - 1 \\
&= 3 > 0.
\end{aligned}
$$

Debido a esto y a que

$$f_{xx}(5,2) = \frac{100}{5^3} = \frac{4}{5} > 0,$$

entonces $(x,y) = (5,2)$ es mínimo de f, cuyo valor en dicho punto es:

$$f(5,2) = \frac{50}{5} + \frac{20}{2} + (5)(2) = 30.$$

13. Encuentre el mínimo de

$$6x + \frac{24}{x^2}$$

para $x > 0$.

Solución Algebraica

Escribamos

$$6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2}.$$

Dado que

$$(3x)(3x)\left(\frac{24}{x^2}\right) = 216,$$

una constante, podemos aplicar el Teorema 4. Por lo que, la suma se minimiza si

$$3x = 3x = \frac{24}{x^2}.$$

O simplemente

$$3x = \frac{24}{x^2} = 6,$$

esto porque $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$.

Entonces el mínimo de

$$6x + \frac{24}{x^2}$$

es

$$6 + 6 + 6 = 18.$$

Solución con Cálculo.

Sea

$$f(x) = 6x + \frac{24}{x^2}.$$

Calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos positivos,

$$\begin{aligned} 6 - \frac{48}{x^3} &= 0 \\ x^3 &= 8 \\ x &= 2, \end{aligned}$$

por lo que $x = 2$ es un punto crítico de f.

Obtenemos ahora su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{144}{x^4},$$

donde al evaluar en $x = 2$ nuestro punto crítico tenemos que:

$$f''(2) = \frac{144}{2^4} > 0.$$

Por lo tanto $x = 2$ es un punto mínimo de f cuyo valor en dicho punto es

$$f(2) = 6(2) + \frac{24}{(2)^2} = 12 + 6 = 18.$$

14. Para cualquier constante $a > 0$, encuentre el máximo de cada una de las siguientes funciones para todos los $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x^3 + a}$$

$$h(x) = \frac{x}{x^3 + a}.$$

Soluciones Algebraicas

Tomemos la primera función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$$

lo que deseamos es encontrar el máximo de ésta, sin embargo, a primera vista no es una función a la que se le pueda aplicar fácilmente el Teorema 4, sin embargo si el problema lo cambiásemos a encontrar el mínimo de su función recíproca, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{x^2 + a}{x} = x + \frac{a}{x}.$$

De lo cual

$$x\left(\frac{a}{x}\right) = a,$$

una constante, entonces podemos encontrar el mínimo de esta función aplicando el resultado del Teorema 4. Por lo que el mínimo de $\frac{1}{f}$ es:

$$x = \frac{a}{x}$$

$$x = a^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto el valor mínimo de $\frac{1}{f}$ es:

$$\left(\frac{1}{f}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = 2a^{\frac{1}{2}}.$$

Concluimos entonces que el valor máximo de f es:

$$f\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}.$$

En el caso de la función

$$g(x) = \frac{x^2}{x^3 + a}$$

estudiemos de igual forma su función recíproca y obtengamos el mínimo de ésta, entonces

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + a}{x^2} = x + \frac{a}{x^2}.$$

Esto nos deja otro problema pues

$$x\left(\frac{a}{x^2}\right) = \frac{a}{x},$$

por lo que el Teorema 4 no puede ser aplicado, pero si cambiamos a $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{a}{x^2},$$

tenemos que:

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{x^2}\right) = \frac{a}{4},$$

un valor constante, lo que nos permite aplicar sin problema este teorema. Por lo que el mínimo de $\frac{1}{g}$ es:

$$\frac{x}{2} = \frac{a}{x^2}$$

$$x^3 = 2a$$

$$x = (2a)^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces el valor mínimo de la función $\frac{1}{g}$ es:

$$\left(\frac{1}{g}\right)\left((2a)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left((2a)^{\frac{1}{3}}\right)^3 + a}{(2a)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3a}{(2a)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}},$$

es decir, el valor máximo de g es:

$$g\left((2a)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}.$$

Tomemos ahora la función

$$h(x) = \frac{x}{x^3 + a}$$

y estudiemos una vez más el caso de obtener el máximo de ésta a partir del mínimo de su función recíproca

$$\left(\frac{1}{h}\right)(x) = \frac{x^3 + a}{x} = x^2 + \frac{a}{x}.$$

Notamos que

$$x^2\left(\frac{a}{x}\right) = xa,$$

la cual no es una constante, por lo que no podemos aplicar el Teorema 4. Sin embargo, si hacemos a $\frac{1}{h}$ de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{h}\right)(x) = x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x},$$

entonces:

$$(x^2)\left(\frac{a}{2x}\right)\left(\frac{a}{2x}\right)=\frac{a^2}{4},$$

una constante, de esta manera podemos aplicar el Teorema4. Por lo que:

$$x^2=\frac{a}{2x}$$
$$x^3=\frac{a}{2}$$
$$x=\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces el valor mínimo de $\frac{1}{h}$ es:

$$\left(\frac{1}{h}\right)\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\left(\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3+a\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2}+a\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{\frac{3a}{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Es decir, el valor máximo de h es:

$$h\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Soluciones con Cálculo

Tomemos la primera función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a},$$

calculamos entonces su primera derivada

$$f'(x) = \frac{(x^2 + a) - 2x(x)}{(x^2 + a)^2} = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2}.$$

Igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2} &= 0 \\ a - x^2 &= 0 \\ x^2 &= a \\ x &= a^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obtenemos ahora su segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x)(x^2 + a)^2 - (a - x^2)(2x)\big(2(x^2 + a)\big)}{(x^2 + a)^4} \\ &= \frac{(-2x)(x^2 + a) - (a - x^2)(2x)(2)}{(x^2 + a)^3} \\ &= \frac{(-2x^3 - 2ax - 4ax + 4x^3)}{(x^2 + a)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6ax}{(x^2 + a)^3}. \end{aligned}$$

Y sustituimos el valor de nuestro punto crítico para saber de qué tipo se trata

$$f''\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2a^{\frac{3}{2}} - 6a^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3}$$

$$= -\frac{4a^{\frac{3}{2}}}{(2a)^3} < 0.$$

Por lo tanto $x = a^{\frac{1}{2}}$ es un punto máximo de f cuyo valor máximo obtenemos al sustituir en ésta

$$f\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2a} = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}.$$

Analicemos ahora

$$g(x) = \frac{x^2}{x^3 + a},$$

obtenemos su primera derivada:

$$g'(x) = \frac{2x(x^3 + a) - x^2(3x^2)}{(x^3 + a)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + 2ax) - 3x^4}{(x^3 + a)^2}$$

$$= \frac{2ax - x^4}{(x^3 + a)^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$\frac{2ax - x^4}{(x^3 + a)^2} = 0$$

$$2ax - x^4 = 0$$

$$x^3 = 2a$$

$$x = (2a)^{\frac{1}{3}}.$$

Calculamos ahora la segunda derivada:

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{(2a-4x^3)(x^3+a)^2-(2ax-x^4)(3x^2)\big(2(x^3+a)\big)}{(x^3+a)^4} \\
&= \frac{(2a-4x^3)(x^3+a)-(6x^2)(2ax-x^4)}{(x^3+a)^3} \\
&= \frac{2a^2-14ax^3+2x^6}{(x^3+a)^3}
\end{aligned}
$$

y sustituimos $x=(2a)^{\frac{1}{3}}$ para saber de qué clase de punto se trata,

$$
\begin{aligned}
g''\left((2a)^{\frac{1}{3}}\right) &= \frac{2a^2-14a(2a)+2(2a)^2}{(2a+a)^3} \\
&= \frac{2a^2-28a^2+8a^2}{(3a)^3} \\
&= -\frac{2}{3a}<0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $x=(2a)^{\frac{1}{3}}$ es un punto máximo de g cuyo valor máximo obtenemos al sustituir en ésta

$$
\begin{aligned}
g\left((2a)^{\frac{1}{3}}\right) &= \frac{(2a)^{\frac{2}{3}}}{2a+a} \\
&= \frac{(2a)^{\frac{2}{3}}}{3a} \\
&= \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}.
\end{aligned}
$$

En el caso de

$$
h(x)=\frac{x}{x^3+a}
$$

tenemos que su primera derivada es:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x^3+a) - x(3x^2)}{(x^3+a)^2} \\ &= \frac{(x^3+a) - 3x^3}{(x^3+a)^2} \\ &= \frac{a - 2x^3}{(x^3+a)^2}. \end{aligned}$$

La cual igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{a-2x^3}{(x^3+a)^2} &= 0 \\ a - 2x^3 &= 0 \\ x^3 &= \frac{a}{2} \\ x &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Obtenemos ahora la segunda derivada:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{(-6x^2)(x^3+a)^2 - (a-2x^3)(3x^2)\big(2(x^3+a)\big)}{(x^3+a)^4} \\ &= \frac{(-6x^2)(x^3+a) - (a-2x^3)(6x^2)}{(x^3+a)^3} \\ &= \frac{6x^5 - 12ax^2}{(x^3+a)^3} \\ &= \frac{6x^2(x^3-2a)}{(x^3+a)^3} \end{aligned}$$

y evaluamos $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ para saber qué tipo de punto crítico es

$$h''\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{6\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{2} - 2a\right)}{\left(\frac{a}{2} + a\right)^3}$$

$$= \frac{3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(-3a)}{\left(\frac{a}{2}+a\right)^{3}}$$

$$= -\frac{2^{\frac{7}{3}}}{3a^{\frac{4}{3}}} < 0.$$

Por lo tanto, $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ es un punto máximo de h cuyo valor máximo en dicho punto es:

$$h\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{a}{2}+a}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{3a}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

14. Encuentre el máximo de $x\sqrt{1-x^2}$ para $0 < x < 1$.

Solución Algebraica

Maximizar el producto

$$x\sqrt{1-x^2}$$

es lo mismo que maximizar

$$\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x^2(1-x^2).$$

Dado que

$$x^2 + (1-x^2) = 1,$$

podemos aplicar el Teorema 4, por lo que:

$$x^2 = (1 - x^2)$$
$$2x^2 = 1$$
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces el valor máximo de $x^2(1 - x^2)$ es $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, por lo que el valor máximo de $x\sqrt{1 - x^2}$ es $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2},$$

maximizaremos el cuadrado de esta función, para una derivación más sencilla, entonces sea

$$f_2(x) = \big(f(x)\big)^2 = x^2(1 - x^2) = x^2 - x^4.$$

De la cual su primera derivada es:

$$f_2'(x) = 2x - 4x^3,$$

igualamos a cero para obtener sus puntos críticos, entonces:

$$2x - 4x^3 = 0$$
$$4x^3 = 2x$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Obtenemos ahora su segunda derivada:

$$f_2''(x) = 2 - 12x^2,$$

donde sustituimos $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, para saber de qué tipo de punto crítico se trata, entonces:

$$f_2''\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = -4 < 0.$$

Por lo que $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ es un punto máximo de f_2 y por tanto de f que al ser evaluado, nos da como resultado que el valor máximo de f_2 es:

$$f_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Y por tanto el valor máximo de f es $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

15. Encuentre el valor mínimo de $r^2 + rh$ para $r, h > 0$ tales que $r^2h = c$ con $c > 0$.

Solución Algebraica

Por hipótesis del problema sabemos que

$$h = \frac{c}{r^2},$$

si sustituimos esto en nuestra suma original tenemos que:

$$r^2 + rh = r^2 + \frac{c}{r}.$$

Podemos notar entonces que el producto de los términos de esta suma no es para nada un valor constante por lo que nos valdremos de cierta transformación sobre ésta para poder aplicar el Teorema 4, entonces:

$$r^2 + \frac{c}{r} = r^2 + \frac{c}{2r} + \frac{c}{2r},$$

de la cual su producto es:

$$r^2\left(\frac{c}{2r}\right)\left(\frac{c}{2r}\right) = \frac{c^2}{4},$$

un valor constante, por lo que aplicando el Teorema 4 tenemos que para que la suma sea mínima:

$$r^2 = \frac{c}{2r}$$

$$r = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

entonces:

$$h = \frac{c}{\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$h = 2^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}.$$

Por lo que el mínimo de la suma es:

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}) &= \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}} \\ &= c^{\frac{2}{3}}\left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right).\end{aligned}$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(r,h) = r^2 + rh,$$

dado que $r^2h = c$ podemos escribir ésta como:

$$f(r,h) = f(r) = r^2 + \frac{c}{r}.$$

Entonces obtenemos la primera derivada de esta nueva función:

$$f'(r) = 2r - \frac{c}{r^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$2r - \frac{c}{r^2} = 0$$

$$2r = \frac{c}{r^2}$$

$$r = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Obtenemos ahora la segunda derivada de nuestra función

$$f''(r) = 2 + \frac{2c}{r^3}$$

y evaluamos en nuestro punto crítico para saber de qué tipo se trata:

$$f''\left(\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 2 + \frac{2c}{\left(\frac{c}{2}\right)} = 6 > 0.$$

Por lo que $r = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ es un punto mínimo de f que al ser evaluado en dicha función nos da como resultado que el valor mínimo de ésta es:

$$f\left(\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{c}{\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$$

$$= c^{\frac{2}{3}}\left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right).$$

16. Encuentre el valor mínimo para $x^2 + 12y + 10xy^2$ para $x, y > 0$ tales que $xy = 6$.

Solución Algebraica

Dado que $y = \frac{6}{x}$ por hipótesis del problema, entonces podemos escribir nuestra suma como:

$$x^2 + \frac{72}{x} + \frac{360}{x},$$

a primera vista podríamos decir que el Teorema 4 es fácilmente aplicable debido a que el producto de sus términos es una constante

$$x^2\left(\frac{72}{x}\right)\left(\frac{360}{x}\right) = 72(360),$$

sin embargo, nos encontramos con un error pues el Teorema implica que:

$$x^2 = \frac{72}{x} = \frac{360}{x},$$

pero:

$$72 \neq 360.$$

A pesar de esto si adecuamos nuestra suma de la siguiente forma:

$$x^2 + \frac{432}{x} = x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x},$$

entonces aún podemos aplicar el Teorema 4, debido a que

$$x^2\left(\frac{216}{x}\right)\left(\frac{216}{x}\right) = (216)^2$$

y entonces tenemos que:

$$x^2 = \frac{216}{x} = (216)^{\frac{2}{3}},$$

es decir,

$$x = (216)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 6.$$

Por lo tanto el mínimo de la suma es

$$3(6)^2 = 108.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y) = x^2 + 12y + 10xy^2,$$

dado que $y = \frac{6}{x}$, entonces:

$$f(x,y) = f(x) = x^2 + \frac{432}{x},$$

de la cual su primera derivada es:

$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{432}{x^2}$$

$$x^3 = 216$$

$$x = (216)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 6.$$

Obtenemos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = 2 + \frac{2(432)}{x^3}$$

y evaluamos nuestro punto crítico para saber de qué tipo se trata:

$$f''(6) = 2 + \frac{2(432)}{216} = 6 > 0.$$

Por lo tanto, $x = 6$ es un punto mínimo de f cuyo valor mínimo es:

$$\begin{aligned} f(6) &= (6)^2 + \frac{432}{6} \\ &= 36 + 72 \\ &= 108. \end{aligned}$$

17. Encuentre el valor mínimo de $xy + 2xz + 3yz$ para $x, y, z > 0$ tales que $xyz = 48$.

Solución Algebraica

Dado que $z = \frac{48}{xy}$ podemos escribir nuestra suma como

$$xy + \frac{96}{y} + \frac{144}{x},$$

de la cual el producto de sus términos es:

$$xy\left(\frac{96}{y}\right)\left(\frac{144}{x}\right) = 96(144) = 13{,}824$$

una constante, por lo que podemos aplicar el Teorema 4, entonces para que la suma sea mínima debe pasar que:

$$xy = \frac{96}{y} = \frac{144}{x} = 24,$$

entonces:

$$y = \frac{144}{x^2}.$$

Sustituyendo esto en $xy = 24$ nos da como resultado que:

$$x\left(\frac{144}{x^2}\right) = 24$$

$$x = \frac{144}{24}$$

$$x = 6,$$

por lo tanto,

$$y = 4$$

$$z = 2.$$

Y el valor mínimo de la suma es:

$$3(24) = 72.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 3yz,$$

dado que $z = \frac{48}{xy}$:

$$f(x,y,z) = f(x,y) = xy + \frac{96}{y} + \frac{144}{x}.$$

Obtenemos ahora las derivadas parciales de ésta:

$$f_x(x,y) = y - \frac{144}{x^2}$$

$$f_y(x,y) = x - \frac{96}{y^2}$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$y - \frac{144}{x^2} = 0$$

$$x - \frac{96}{y^2} = 0,$$

entonces:

$$y = \frac{144}{x^2}$$

$$x = \frac{96}{y^2}.$$

Sustituyendo el valor de y:

$$x = \frac{96}{\left(\frac{144}{x^2}\right)^2}$$

$$x^3 = \frac{(144)^2}{96}$$

$$x = (216)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 6,$$

por lo que

$$y = 4.$$

Entonces $(x, y) = (6, 4)$ es un punto crítico de f.

Calculamos ahora las segundas derivadas:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{288}{x^3}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{192}{y^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1$$

con lo que obtenemos el discriminante

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2,$$

para $(x,y) = (6,4)$:

$$\begin{aligned} D(6,4) &= \left(\frac{288}{216}\right)\left(\frac{192}{64}\right) - [1]^2 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 > 0. \end{aligned}$$

Dado esto y que

$$f_{xx}(6,4) = \frac{288}{216} > 0,$$

entonces $(x,y) = (6,4)$ es un punto mínimo de f cuyo valor mínimo es dicha función es:

$$f(6,4) = 6(4) + \frac{96}{4} + \frac{144}{6} = 72.$$

18. Encuentre $x > 0$ tal que $x^2 - x^3$ es máximo.

Solución Algebraica

Escribamos $x^2 - x^3$ de manera que podamos aplicar el Teorema 4, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - x^3 &= x^2(1-x) \\ &= 4\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ &= 4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Descartemos ahora el valor constante 4 para encontrar el máximo de

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right),$$

dado que:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)=1,$$

entonces podemos aplicar el Teorema 4, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} &= \left(1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)\\
\frac{x}{2} &= 1-x\\
\frac{x}{2}+x &= 1\\
\frac{3x}{2} &= 1\\
x &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo de x^2-x^3 es,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{4}{27}.$$

Solución Cálculo

Sea

$$f(x)=x^2-x^3,$$

obtenemos su primera derivada que es:

$$f'(x)=2x-3x^2$$

e igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
2x - 3x^2 &= 0 \\
3x^2 &= 2x \\
x &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora su segunda derivada:

$$f''(x) = 2 - 6x$$

y evaluamos nuestro punto crítico $x = \frac{2}{3}$:

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 6\left(\frac{2}{3}\right) = -2 < 0.$$

Por lo tanto, $x = \frac{2}{3}$ es un punto máximo de f cuyo valor máximo en dicho punto es:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
&= \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \\
&= \frac{4}{27}.
\end{aligned}
$$

19. Encuentre el mínimo de $r^4 + s^4 + 2t^2$ para $r, s, t > 0$ y que satisfacen $rst = 81$.

Solución Algebraica

Observamos que de manera directa no es posible aplicar el Teorema 4 pues el producto

$$r^4 s^4 2t^2,$$

no es constante. Sin embargo, si modificamos nuestra suma original de la siguiente forma:

$$r^4 + s^4 + t^2 + t^2,$$

tenemos que:

$$r^4s^4t^2t^2 = (rst)^4 = 81^4$$

esto último por definición del problema.

Así de esta forma el Teorema 4 se puede aplicar, entonces:

$$r^4 = s^4 = t^2,$$

es decir,

$$r = s$$

$$r = t^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo anterior, y sustituyendo en $rst = 81$, tenemos que:

$$r^4 = 81$$

$$r = 3$$

$$s = 3$$

$$t = 9.$$

Por lo tanto, el valor mínimo de $r^4 + s^4 + 2t^2$ es:

$$81 + 81 + 162 = 324.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(r, s, t) = r^4 + s^4 + 2t^2,$$

dado que $rst = 81$ podemos dejar a f como función sólo de las variables r y s, entonces:

$$f(r, s, t) = f(r, s) = r^4 + s^4 + \frac{2(81^2)}{r^2s^2}.$$

Así las derivadas parciales de ésta son:

$$f_r(r,s) = 4r^3 - \frac{4(81^2)}{r^3s^2}$$
$$f_s(r,s) = 4s^3 - \frac{4(81^2)}{r^2s^3}.$$

Ahora igualamos a cero para obtener sus puntos críticos:

$$4r^3 - \frac{4(81^2)}{r^3s^2} = 0$$
$$4r^3 = \frac{4(81^2)}{r^3s^2}$$
$$r^6 = \left(\frac{81}{s}\right)^2$$
$$r = \left(\frac{81}{s}\right)^{\frac{1}{3}}$$

y

$$4s^3 - \frac{4(81^2)}{r^2s^3} = 0$$
$$4s^3 = \frac{4(81^2)}{r^2s^3}$$
$$s^6 = \left(\frac{81}{r}\right)^2$$
$$s = \left(\frac{81}{r}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Por lo tanto, si sustituimos el valor de s en r tenemos:

$$r = \left(\frac{81}{\left(\frac{81}{r}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$r = \frac{r^{\frac{1}{9}}81^{\frac{1}{3}}}{81^{\frac{1}{9}}}$$
$$r^{\frac{8}{9}} = 81^{\frac{2}{9}}$$

$$r = 81^{\frac{1}{4}}$$
$$r = 3$$

y

$$s = 3$$
$$t = 9.$$

Calculamos ahora las segundas derivadas:

$$f_{rr}(r,s) = 12r^2 + \frac{12(81^2)}{r^4s^2} = 12\left(r^2 + \frac{81^2}{r^4s^2}\right)$$
$$f_{ss}(r,s) = 12s^2 + \frac{12(81^2)}{r^2s^4} = 12\left(s^2 + \frac{81^2}{r^2s^4}\right)$$
$$f_{rs}(r,s) = f_{sr}(r,s) = \frac{8(81^2)}{r^3s^3}.$$

Con lo que obtenemos el discriminante

$$D(r,s) = f_{rr}(r,s)f_{ss}(r,s) - [f_{rs}(r,s)]^2,$$

para $(r,s) = (3,3)$:

$$\begin{aligned} D(3,3) &= \left[12\left(3^2 + \frac{81^2}{3^6}\right)\right]\left[12\left(3^2 + \frac{81^2}{3^6}\right)\right] - \left[\frac{8(81^2)}{3^6}\right]^2 \\ &= [12 \cdot 2 \cdot 3^2][12 \cdot 2 \cdot 3^2] - [8 \cdot 3^2]^2 \\ &= 216^2 - [72]^2 \\ &= 41{,}472 > 0. \end{aligned}$$

Dado esto último y también que

$$f_{rr}(3,3) = 12\left(3^2 + \frac{81^2}{3^6}\right) = 216 > 0,$$

entonces $(r, s) = (3, 3)$ es un punto mínimo de f cuyo valor mínimo es:

$$f(3,3) = 3^4 + 3^4 + \frac{2(81^2)}{3^4} = 81 + 81 + 162 = 324.$$

20. Una empresa manda a elaborar una serie de cajas rectangulares sin tapa, destinando para cada una de ellas 12 cm^2 de cartón. A dicha empresa le gustaría determinar cuál es el volumen máximo que podría tener cada una de éstas.

Solución Algebraica

Sean x, y y z la longitud, el ancho y la altura de la caja respectivamente, dadas en centímetros. De este modo lo que buscamos maximizar es

$$f(x, y, z) = xyz$$

siendo esta función la que modela el volumen de la caja.

Ahora bien, sabemos que para la construcción de cada caja solamente se cuenta con 12 cm^2 de cartón, por lo que, podemos decir que el volumen de nuestra caja está sujeto a la restricción

$$2xz + 2yz + xy = 12.$$

Con lo anterior, y si hacemos:

$$u = 2xz$$
$$v = 2yz$$
$$w = xy.$$

Entonces

$$u + v + w = 12,$$

por lo que por el Teorema 4 el producto uvw se maximiza si

$$u = v = w.$$

Pero observamos que

$$uvw = (2xz)(2yz)(xy)$$
$$uvw = 4(xyz)^2,$$

es decir,

$$xyz = \frac{(uvw)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Entonces maximizar el producto uvw es maximizar también el producto xyz, lo cual ocurre por el Teorema 4 si

$$u = v = w = 2xz = 2yz = xy.$$

De lo cual obtenemos que:

$$x = y$$
$$z = \frac{x}{2},$$

que al sustituir en

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

nos da como resultado que:

$$x^2 + x^2 + x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$
$$y = 2$$
$$z = 1.$$

Por lo tanto, el valor máximo de xyz, es decir, el valor máximo del volumen de la caja será de

$$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ cm}^3.$$

Solución con Cálculo

Sea

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeta a la restricción

$$2xz + 2yz + xy = 12.$$

Consideremos

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy,$$

por el método de Multiplicadores de Lagrange buscamos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = 12.$$

Lo cual da como resultado las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ f_z &= \lambda g_z \\ g(x, y, z) &= 12, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(2z + y) \\ xz &= \lambda(2z + x) \\ xy &= \lambda(2x + 2y) \\ 2xz + 2yz + xy &= 12. \end{aligned}$$

Al multiplicar la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$xyz = \lambda(2xz + xy)$$
$$xyz = \lambda(2yz + xy)$$
$$xyz = \lambda(2xz + 2yz).$$

Entonces

$$\lambda(2xz + xy) = \lambda(2yz + xy) = \lambda(2xz + 2yz),$$

puesto que λ no puede ser cero, ya que en ese caso $xy = xz = yz = 0$ que por hipótesis del problema no puede ser así, entonces:

$$2xz + xy = 2yz + xy = 2xz + 2yz,$$

de lo que obtenemos que:

$$x = y$$
$$z = \frac{x}{2}.$$

Sustituyendo en $g(x, y, z)$ tenemos:

$$g\left(x, x, \frac{x}{2}\right) = x^2 + x^2 + x^2 = 12,$$

lo cual nos da como resultado que:

$$x = 2$$
$$y = 2$$
$$z = 1.$$

Y entonces

$$\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que $(x, y, z) = (2,2,1)$ es un punto crítico de f sujeto a g con $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ahora bien, dada la función auxiliar

$$h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xz + 2yz + xy),$$

calculamos el Hessiano limitado para saber de qué clase de punto se trata:

$$|\overline{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2z - y & -2z - x & -2x - 2y \\ -2z - y & 0 & z - \lambda & y - 2\lambda \\ -2z - x & z - \lambda & 0 & x - 2\lambda \\ -2x - 2y & y - 2\lambda & x - 2\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Al resolver este determinante tenemos que:

$$|\overline{H}_3| = 32(\lambda yz^2 - \lambda^2 xz + \lambda xz^2 - \lambda^2 yz) + 16(\lambda x^2 z - xyz^2 + \lambda y^2 z - \lambda^2 xy)$$
$$+8(\lambda x^2 y - xy^2 z + \lambda xy^2 - x^2 yz),$$

donde al sustituir los valores de nuestro punto crítico $(x, y, z) = (2,2,1)$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\overline{H}_3| &= 32\left(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) + 16(2 - 4 + 2 - 1) + 8(4 - 8 + 4 - 8) \\ &= 32 + 16(-1) + 8(-8) = -48 < 0. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3,

$$
\begin{aligned}
|\overline{H}_2| &= \begin{vmatrix} 0 & -2z-y & -2z-x \\ -2z-y & 0 & z-\lambda \\ -2z-x & z-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\
&= 8z^3 + 4yz^2 - 8\lambda z^2 - 4\lambda yz + 4xz^2 + 2xyz - 4\lambda xz - 2\lambda xy
\end{aligned}
$$

y evaluamos en el punto crítico y en lambda:

$$|\overline{H}_2| = 8 + 8 - 4 - 4 + 8 + 8 - 4 - 4 = 16 > 0.$$

Entonces dado $|\overline{H}_2| > 0$ y $|\overline{H}_3| < 0$ $(x, y, z) = (2,2,1)$ es un punto máximo de

$$f(x, y, z) = xyz$$

sujeto a

$$2xz + 2yz + xy = 12.$$

Cuyo valor máximo es al evaluar f en este punto

$$f(2,2,1) = 4.$$

Por lo tanto, la capacidad máxima de la caja será de $4\ \text{cm}^3$.

Conclusión

Durante el desarrollo del presente trabajo pudimos apreciar la potencia que como herramienta tiene el cálculo para el análisis de diversas funciones, sin embargo, también observamos como mediante técnicas algebraicas la obtención de un resultado, en nuestro caso un máximo o un mínimo, que por métodos de cálculo nos podía llevar varios pasos, se simplificaba. Esto claro después de ingeniárnosla un poco, sobre posibles transformaciones de nuestra función original para poder aplicar los resultados dispuestos para esto.

La ventaja del cálculo es que en la mayoría de las ocasiones podemos estudiar la función dispuesta sin valernos de ningún artilugio matemático (como multiplicar por 1's o sumar 0's) aplicando sus técnicas de forma directa. Las complicaciones se llegan a presentar cuando el número de variables de una función se empieza a incrementar, y más aún cuando existe una restricción sobre éstas.

Es entonces, cuando los métodos de cálculo se vuelven complicados en su ejecución, pues por ejemplo, si uno o varios de los n determinantes que se tuviesen que calcular sobre un Hessiano Limitado llegase a estar mal esto nos podría dar información falsa sobre dicha función.

Por otro lado, los resultados algebraicos son bastante útiles debido a que simplifican problemas como el anterior, pues como mencionamos antes, modificando un poco la función es posible obtener dicho resultado de forma más directa.

La complicación de dichas técnicas es que si uno no es lo bastante ingenioso para abordar el problema la solución puede tardar más de lo que podría obtenerse con cálculo, por ejemplo, en el caso de funciones de una o dos variables, cuyo resultado en cálculo es bastante directo.

Al final, eso es lo maravilloso de las matemáticas, que su estudio nos enseña a no depender de ninguna técnica en particular, sino a aplicar la más adecuada para nuestro fin, y hasta nuestro gusto. Podemos concluir entonces que dependiendo del número de variables, de la complejidad de la función y, por supuesto, del ingenio de quien afronte el problema, cada una de las técnicas expuestas puede ser la mejor, sin que una demerite en nada a la otra, y hasta pudiendo llegar a ser complementarias en el estudio de una función dada.

Bibliografía

1. Beckenbach, E.; Bellman, R. *An Introduction to Inequalities*. The Mathematical Association of America. U.S.A, 1961

2. Spivak, Michael. *Cálculo Infinitesimal***.** Segunda Edición**.** Editorial Reverte. México, 1996.

3. Stewart, James. *Cálculo, Conceptos y Contextos*. International Thomson Editores. México, 1999.

4. Swokowski, Earl. *Algebra Universitaria*. C.E.C.S.A. México, 1979.

5. Marsden, Jerrold E.; Tromba, Anthony J. *Cálculo Vectorial*. Tercera Edición.Addison-Wesley Iberoamericana. U.S.A., 1991.

6. Niven, I. *Maxima and Minima Without Calculus*. Cambridge University Press.USA, 1981.

7. Zill, Dennis G. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1987.

8. Argueta Villamar, Héctor; Linares Altamirano, María Juana. *Cálculo Interactivo* (http://ntecdi.fciencias.unam.mx), UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2011.