



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACTUARÍA

**Conjuntos abiertos dominantes y de localización en
gráficas circulantes**

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA

MARTÍN LARA ALTAMIRANO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

Ciudad Univesitaria, Abril de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Lara

Altamirano

Martín

55 29 65 15 79

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

303285087

2. Datos del tutor

Dra

Martha Gabriela

Araujo

Pardo

3. Datos del sinodal 1

Dra

Mucuy-Kak del Carmen

Guevara

Aguirre

4. Datos del sinodal 2

Dra

Mika

Olsen

5. Datos del sinodal 3

Dr

Diego Antonio

González

Moreno

6. Datos del sinodal 4

Dr

Juan José

Montellano

Ballesteros

7. Datos del trabajo escrito

Conjuntos abiertos dominantes y de localización en gráficas circulantes

47 p

2019

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Motivación	6
1.2. Introducción a la Teoría de Gráficas	9
2. OLD-sets en gráficas circulantes	20
2.1. Definiciones	20
2.2. Resultados Preliminares	23
2.3. Resultado Principal	31
3. MWOLD-sets en ciclos	37
3.1. Resultados adicionales	37

Índice de figuras

1.1.	Una gráfica G y algunas de sus subgráficas.	10
1.2.	Una gráfica etiquetada y no etiquetada.	12
1.3.	Ejemplo de camino (W), trayectoria (V) y ciclo (U).	14
1.4.	Existen varias uv -trayectorias.	15
1.5.	Una gráfica bipartita.	16
1.6.	Una digráfica y su gráfica subyacente.	19
2.1.	Ejemplo de una circulante $C_{16}(1, 3)$	22
2.2.	Un conjunto A y su vecindad en una circulante.	24
2.3.	Vértices consecutivos de la misma paridad.	24
2.4.	Ejemplo de una gráfica bipartita y un apareamiento.	29
2.5.	La arista x_3, y_6 existe forzosamente.	33
2.6.	Cuatro vértices consecutivos de la misma paridad en el conjunto OLD.	34
2.7.	No puede haber tres vértices consecutivos de la misma paridad en A	34
2.8.	Existe un conjunto A' tal que $A \cup S' = N(A')$	35
3.1.	El vértice x_1 llega a ver más lejos cuando tiene peso 2.	39
3.2.	Los vértices vecinos del cluster $\{x_1, x_2\}$	42
3.3.	Ciclo donde se alcanza la cota mínima para el MWOLD.	44

Prefacio

En esta tesina se reporta el trabajo realizado en el seminario de titulación denominado “Conjuntos Abiertos Dominantes y de Localización en Gráficas Circulante” bajo la dirección de la Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo durante los semestres 2019-1 y 2019-2.

Se estudia el problema de la detección y localización de un conjunto particular denominado conjunto abierto dominante y de localización (OLD-set) en gráficas circulantes, esta es una versión detallada del trabajo realizado en el artículo “Open locating-dominating sets in circulant graphs” escrito por Robin M. Givens y Gexin Yum Rex K. Kincaid [1] .

El primer capítulo contiene la motivación para el estudio del problema de detección y localización, junto con una introducción general a la Teoría de Gráficas, aquí se describen los conceptos básicos necesarios que debemos tener para entender el artículo que estamos estudiando.

El segundo capítulo se divide en tres secciones, en la primera se encuentran las definiciones de gráfica circulante y conjunto abierto dominante y de localización, conceptos necesarios para abordar el problema de detección y localización en gráficas circulantes. Cabe decir que centraremos el estudio en un caso particular de las gráficas circulantes, hablamos de aquellas que tienen dos generadores y estos son exactamente 1 y 3.

La segunda sección se compone de resultados preliminares, son algunas propiedades de los conjuntos OLD en gráficas circulantes que nos ayudarán a demostrar el resultado principal; en este mismo capítulo se incluye el Teorema de Hall, pues también nos es necesario en el capítulo siguiente.

La tercera sección contiene la demostración del resultado principal, este consiste en encontrar una cota mínima para la cardinalidad del conjunto OLD en gráficas circulantes

utilizando los resultados vistos anteriormente.

Finalmente, el tercer capítulo contiene algunos resultados adicionales, se define el concepto de conjunto abierto dominante y de localización de pesos mixtos, y se estudia este tipo de conjuntos en ciclos; Se observa que al agregar peso a los vértices, la gráfica resultante es una subgráfica dirigida de una gráfica circulante generalizada. Además, encontraremos una cota mínima para la cardinalidad de estos conjuntos.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El problema de detección y localización ha sido estudiado para resolver diversos problemas que pueden ser modelados mediante una gráfica.

El objetivo es encontrar en una gráfica G , que modela el sistema, un subconjunto de vértices de cardinalidad mínima de manera que al colocar sensores en los vértices que representa este subconjunto, dichos sensores sean capaces de detectar y localizar una anomalía en el sistema de manera única.

Los conjuntos abiertos dominantes y de localización (OLD-sets por sus siglas en inglés), que definiremos en la siguiente sección, trabajan bajo el supuesto que si una anomalía ocurre en la localización de un sensor, entonces por la naturaleza de la anomalía, el sensor sería incapaz de detectarla (como si la anomalía destruyera el sensor).

Los conjuntos OLD son subconjuntos de vértices de una gráfica de cardinalidad mínima que satisfacen que cada vértice de la gráfica tiene un conjunto no vacío y único de vecinos de este subconjunto. Los conjuntos OLD intentan encontrar el subconjunto más pequeño

de vértices en una gráfica en la cual cada vértice tenga un conjunto no vacío y único de vecinos en ese subconjunto.

Como resultado adicional, los conjuntos abiertos dominantes y de localización de pesos mixtos (mixed-weight OLD-sets, o simplemente MWOLD-sets), son una generalización de los conjuntos abiertos dominantes y de localización que permiten dar un peso entero a los vértices de la gráfica. Los MWOLD-sets modelan situaciones en las cuales los sensores del sistema tienen diferentes potencias, y tal vez diferentes costos, por lo que deben ser colocados estratégicamente a lo largo del sistema. El incremento en peso expande el alcance del vértice por un número equivalente de aristas en la gráfica, como se dice comúnmente “alcanza a ver más lejos”. Un ejemplo: Las redes de sensores inalámbricos normalmente utilizan diferentes tipos de sensores y son utilizados en una gran variedad de sistemas, tal es el caso de los sistemas que monitorean habitats naturales. Los MWOLD-sets pueden auxiliar en la administración de costos de este tipo de redes disminuyendo el número de sensores necesario y posiblemente el costo total.

El monitoreo ambiental usando redes de sensores inalámbricos (conocidas como WSNs) cubre una gran variedad de importantes áreas de investigación, las cuales incluyen el estudio de glaciares, contaminación ambiental, comportamiento y bienestar animal y el efecto del cambio climático debido a la agricultura. Los ecosistemas pueden ser modelados como una gráfica dividiendo el espacio físico en regiones y añadiendo vértices a la gráfica representando estas regiones. Una arista es añadida a la gráfica para representar que dos regiones están al alcance de la comunicación entre dos sensores si se colocaran éstos en cada una de las regiones.

El problema de detección de localización ha sido estudiado en otros ambientes tal como la detección de intrusos en instalaciones, localización de supervivientes en situaciones de

emergencia y detección de contaminantes en los servicios públicos.

Un sistema de microprocesadores conectados puede ser modelado como una gráfica donde un procesador es representado por un vértice y una conexión entre dos procesadores es representado por una arista. La detección de fallas en este tipo de redes ha sido estudiado usando el problema de detección de localización. Adicionalmente, usando conjuntos OLD podemos prever el problema adicional de que un sensor se equivoque al detectar una falla en el procesador donde está colocado. Este tipo de equivocaciones puede ser un resultado provocado por la falla en el sistema.

En las siguientes secciones describiremos algunos conceptos generales de la Teoría de Gráficas, definiremos los conceptos básicos relacionados con los OLD-sets y con las gráficas circulantes, nos centraremos en el estudio de cierto tipo de gráficas circulantes y buscaremos una cota mínima para la cardinalidad del conjunto OLD en estas gráficas. Por último encontraremos una cota mínima para los MWOLD-sets en ciclos y daremos la construcción de un MWOLD-set de ese tamaño.

1.2. Introducción a la Teoría de Gráficas

En las matemáticas, y de manera más general en la vida, hay situaciones que no pueden ser explicadas tan fácilmente con ecuaciones o palabras, por lo que es necesario acudir a un medio gráfico para poder visualizarlas, bien dicen “más vale una imagen que 1000 palabras”. Cuando éste es el caso y el problema puede ser descrito a través de una gráfica, en muchas ocasiones puede ser resuelto más fácilmente que si se aborda desde otros enfoques.

Las gráficas han existido para describir problemas quizá desde el inicio de las matemáticas mismas, pero se cuenta que el estudio formal de las gráficas empezó mucho tiempo después, a esta área de las matemáticas se le conoce como Teoría de Gráficas.

La Teoría de Gráficas empezó a existir como tal a partir de la primera mitad del siglo XVIII, pero no fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX en que se empezó a desarrollar formalmente de manera ordenada como una rama de las matemáticas, y ha tenido su mayor auge desde mediados del siglo XX.

Para poder analizar las situaciones del interés de este documento, primero debemos de definir matemáticamente el concepto de gráfica así como algunos otros conceptos relacionados. En esta sección haremos este trabajo y enlistaremos una serie de resultados que nos serán de utilidad a lo largo de este proyecto.

Decimos que una gráfica G consiste de un conjunto finito y no vacío de **vértices** V y de un conjunto E que contiene subconjuntos de 2 elementos de V llamados **aristas**. Si $e = uv$ es una arista de G , entonces se dice que los vértices adyacentes u y v están **unidos** por la arista e . Los vértices u y v son referidos como **vecinos** uno del otro. En este caso, se dice que el vértice u y la arista e (al igual que el vértice v y la arista e) son **incidentes**

uno del otro. A las aristas que son incidentes con un mismo vértice se les conoce como **aristas adyacentes**. De manera formal:

Definición. Una **gráfica**, $G(V, E)$, es una pareja ordenada en la que V es un conjunto no vacío de vértices y E es un conjunto de aristas. Donde E está formado de pares no ordenados de vértices distintos $u, v \in V$.

Si la gráfica G tiene n vértices, decimos que G es de **orden** n . Y si la gráfica tiene m aristas, decimos que G es de **tamaño** m .

Aunque las gráficas están definidas en términos de conjuntos, es convencional y conveniente representarlas y considerarlas como diagramas. En la figura tenemos un ejemplo de una gráfica G con conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d, e\}$ y conjunto de aristas $E = \{ab, bc, bd, ce, de\}$.

Definición. Una gráfica H es llamada una **subgráfica** de G , escrito como $H \subseteq G$, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En la figura 1.1, podemos ver que H y F son subgráficas de G .

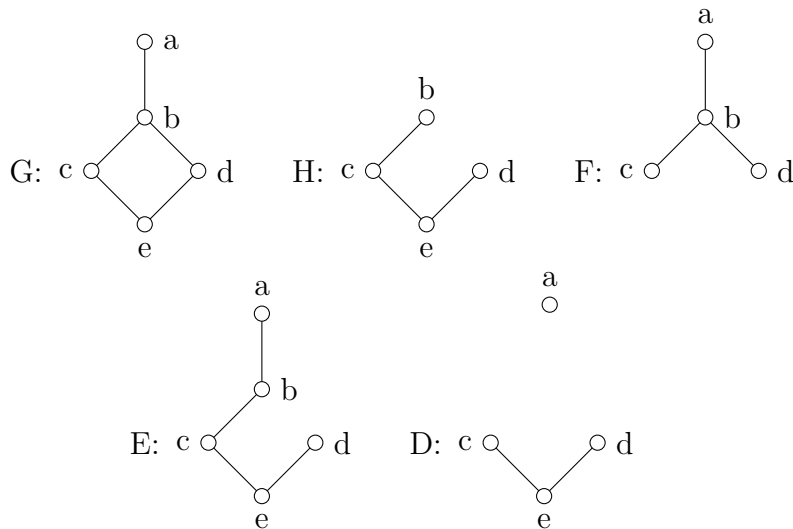


Figura 1.1: Una gráfica G y algunas de sus subgráficas.

También decimos que G contiene a H como subgráfica. Ahora, si $H \subseteq G$ y ya sea que $V(H)$ es un subconjunto propio de $V(G)$ o que $E(H)$ sea un subconjunto propio de $E(G)$, entonces H es una **subgráfica propia** de G . Y si una subgráfica de G tiene el mismo conjunto de vértices de G , entonces se le llama **subgráfica generadora** de G .

Una subgráfica F de una gráfica G es llamada una **subgráfica inducida** de G cuando sucede que u y v son vértices de F y uv es una arista de G , entonces uv es una arista de F también. Regresando al ejemplo de la figura 1.1 podemos ver que H no es una gráfica inducida de G pues bd no es una arista de H pero sí de G ; por otro lado, F sí es una subgráfica inducida de G .

Si S es un conjunto no vacío de vértices de la gráfica G , entonces la **subgráfica de G inducida por S** es la subgráfica inducida con los vértices de S , denotado por $G[S]$. Ahora, para un conjunto no vacío de aristas X , la **subgráfica $G[X]$ inducida por X** es la gráfica que tiene conjunto de aristas X y conjunto de vértices todos aquellos que sean incidentes con al menos una arista en X . Esta gráfica es llamada una **subgráfica arista-inducida** de G .

Una subgráfica propia de una gráfica G puede ser obtenida removiendo vértices y aristas de G . Para una arista e de G escribimos $G - e$ para denotar a la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas son todas las aristas de G exceptuando a e . En nuestro ejemplo de la figura 1.1, si $e = bd$, entonces E es la gráfica $G - e$. Así mismo, para un conjunto de aristas X de G , denotamos como $G - X$ a la subgráfica generadora de G con $E(G - X) = E(G) - X$.

Para un vértice de una gráfica G , la subgráfica $G - v$ consta de todos los vértices de G exceptuando a v y de todas las aristas de G exceptuando a aquellas que sean incidentes con v . Para un subconjunto propio U de $V(G)$, la subgráfica $G - U$ está conformada por

el conjunto de vértices $V(G) - U$, y su conjunto de aristas consta de todas las aristas de G que unen dos vértices en $V(G) - U$. Necesariamente $G - U$ es una subgráfica inducida por G . En el ejemplo, la gráfica D es $G - b$ y es también la subgráfica inducida por $S = \{a, c, d, e\}$.

Si u y v son vértices no adyacentes de la gráfica G , entonces $e = uv \notin E(G)$. Nos referimos a $G + e$ como la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas $E(G) \cup \{e\}$. Por tanto G es una subgráfica generadora de $G + e$.

Como habremos notado, en el caso de la gráfica D , uno de su vértices quedo aislado del resto, es decir, que no existe ninguna arista que una a este vértice con los demás. En muchas ocasiones evitaremos este escenario, pues los conceptos de interés de nuestro estudio tienen que ver en cómo “nos movemos” por la gráfica y como se relacionan sus vértices entre sí. Esto nos lleva a observar el siguiente concepto.

En muchas ocasiones estaremos interesados en la estructura de la gráfica mas no en como se llaman los vértices. En esos casos, podemos dibujar la gráfica sin etiquetas en los vértices. En la figura 1.2 se muestra una gráfica **etiquetada** y la misma gráfica **no etiquetada**.

Podemos imaginar que los vértices de una gráfica representan localizaciones en un mapa y que las aristas representan los caminos y carreteras que hay entre esas localizaciones, por tanto podemos concebir a la gráfica como el modelo de una comunidad. Hay

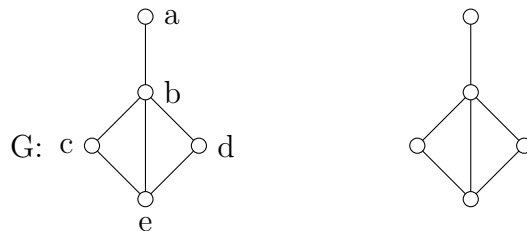


Figura 1.2: Una gráfica etiquetada y no etiquetada.

una gran cantidad de viajes que podemos hacer dentro de la comunidad. Supongamos que empezamos en algún pueblo de la comunidad (un vértice u de la gráfica G), y avanzamos por alguna de las carreteras desde dicho pueblo (una aristas adyacentes a u) hasta a uno de sus poblados vecinos, y continuamos ahora hacia uno de los vecinos del poblado y así continuamente hasta detenernos en un algún lugar de nuestro interés en la comunidad (un vértice v), habremos descrito un posible recorrido para ir de un lugar a otro (de u a v). A este concepto se le conoce como camino, formalmente:

Definición. Un **uv-camino** W en G es una sucesión de vértices en G , empezando en u y terminando en v de tal manera que los vértices consecutivos en dicha sucesión sean adyacentes, esto podemos expresarlo como:

$$W = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v),$$

donde $k \geq 0$ y los vértices v_i y v_{i+1} son adyacentes para $k = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

Notemos que la definición de camino W no requiere que los vértices listados sean diferentes. De cualquier manera, dos vértices consecutivos en W son distintos debido a que son adyacentes. Cuando avanzamos desde alguno de los vértices en W hacia el siguiente estamos recorriendo una arista de G , es posible recorrer una misma arista más de una vez. Al número de aristas recorridas en el camino (incluyendo múltiples ocurrencias de una misma arista) se le llama **longitud** del camino. De acuerdo a esto, la longitud del camino W según la definición anterior es k .

Normalmente cuando hacemos un recorrido por una comunidad, trataremos de hacerlo lo más eficientemente posible, ya sea buscando el camino más rápido o el más corto. En el

caso de las gráficas podemos hacer lo mismo evitando recorrer más de una vez los mismo vértices.

Definición. Un uv -camino en el cual no se repiten los vértices es una **uv-trayectoria**.

Como podremos notar, dado que en una trayectoria no se repiten los vértices, tampoco se repiten las aristas. Tomemos en cuenta el caso especial en que en una trayectoria no se repiten los vértices excepto el primero y el último, es decir que acaba donde empezó, esta trayectoria es un **ciclo**.

Observemos la gráfica de la figura 1.3. W es un v_1v_3 -camino, V es una v_1v_3 -trayectoria y U es un ciclo.

En este documento tendremos particular interés en las gráficas G en las cuales es posible “viajar” desde cada vértice de G a cualquier otro en G . Si G contiene una uv -trayectoria, entonces decimos que u y v están **conectados** y que u **está conectado a** v (y viceversa). Decir que u y v están conectados simplemente significa que existe una uv -trayectoria, mas no significa que sean adyacentes y que estén unidos por una arista.

Definición. Una gráfica G es **conexa** si todo par de vértices en G están conectados.

De manera contraria, una gráfica G que no es conexa decimos que es **disconexa**. Una subgráfica conexa de G que no es una subgráfica propia de cualquier otra subgráfica conexa de G es una **componente** de G . Denotaremos al número de componentes de G

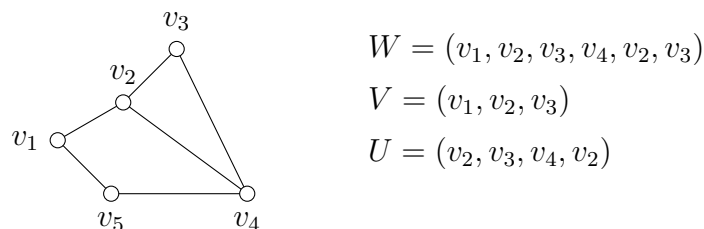


Figura 1.3: Ejemplo de camino (W), trayectoria (V) y ciclo (U).

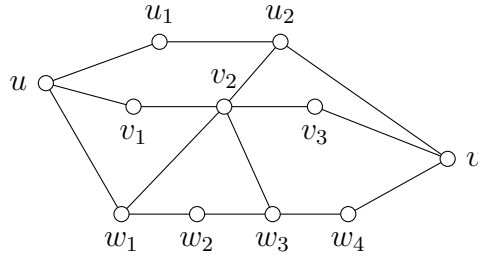


Figura 1.4: Existen varias uv -trayectorias.

por $k(G)$. Se sigue que una gráfica es conexa si y sólo si $k(G) = 1$.

En la figura 1.1, la gráfica D es una gráfica desconexa con dos componentes.

Observemos ahora la gráfica de la figura 1.4. Notamos que en la gráfica hay varias trayectorias para ir de u a v , particularmente estos tres son uv -trayectorias: $U = (u, u_1, u_2, v)$, $V = (u, v_1, v_2, v_3, v)$, y $W = (v, w_1, w_2, w_3, w_4, v)$. Esto puede pasar de manera general en cualquier gráfica conexa, puede haber varias trayectorias para ir de un vértice a otro. Aunque ya no estamos repitiendo vértices en nuestro recorrido, aún no hemos encontrado la trayectoria más corta, para ello necesitaremos otro concepto.

Definición. Sea G una gráfica conexa de orden n y sean u y v dos vértices de G . La **distancia** entre u y v es la longitud mínima de cualquier uv -trayectoria en G y es denotada por $d(u, v)$.

De acuerdo a la definición de distancia, si $d(u, v) = k$, entonces existe al menos una uv -trayectoria de longitud k , pero no existe una uv -trayectoria de menor longitud que k . A una uv -trayectoria de longitud $d(u, v)$ la llamaremos **geodésica**. En la gráfica de la figura 1.4 vemos que $d(v_2, v) = 2$ habiendo dos v_2v -trayectoria de longitud 2.

Definición. Una gráfica G es una **gráfica completa** si todo par de vértices de G son adyacentes.

Ahora consideraremos aquellas gráficas que pueden ser partidas de una manera espe-

cial, empezando por las gráficas bipartitas.

Definición. Una gráfica G es una **gráfica bipartita** si $V(G)$ puede ser partida en dos subconjuntos U y W , llamados **conjuntos partes** o **partitos**, tales que cada arista de G conecte a un vértice de U con uno de W .

En algunas ocasiones es difícil observar a simple vista si una gráfica es bipartita o no, este es el caso del ejemplo de la figura 1.5, al acomodar los vértices de una manera diferente podemos notar que es en verdad bipartita, los vértices de arriba se conectan únicamente con los de abajo pero no entre ellos y viceversa, siendo los conjuntos partes $\{u, y, w\}$ y $\{z, v, x\}$:

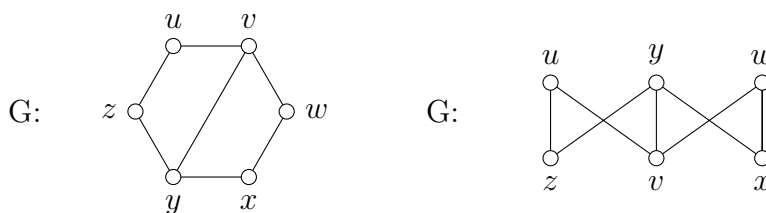


Figura 1.5: Una gráfica bipartita.

Definición. Una gráfica G es una **gráfica k-partita** si $V(G)$ puede ser partida en k subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k tales que si uv es una arista de G , entonces u y v pertenecen a diferentes conjuntos partes. De manera adicional, si cada par de vértices de diferentes partitos están unidos por una arista de G , entonces es una **gráfica k-partita completa**.

Las gráficas bipartitas pertenecen a la clase más general de gráficas k-partitas, particularmente estamos hablando de las gráficas 2-partitas. Por otro lado, es fácil notar que cualquier gráfica conexa de orden n es n-partita.

Hay varios números o **parámetros** asociados a las gráficas que nos dan información importante sobre ellas pero que no siempre nos describen su estructura. Anteriormente

ya hemos mencionado un par de parámetros, los más conocidos, que son el orden y el tamaño. Ahora hablaremos de otros parámetros, pero esta vez asociados a los vértices de la gráfica.

Definición. El **grado de un vértice** v es el número de aristas incidentes con v y está denotado por $deg_G(v)$ o simplemente por $deg(v)$ cuando en el contexto del que hablamos la gráfica está clara. También podemos decir que $deg(v)$ es el número de vértices adyacentes a v .

Recordemos que nos referimos a dos vértices adyacentes como vecinos uno del otro. En este sentido:

Definición. El conjunto de vecinos de un vértice v , denotado $N(v)$, es la **vecindad** de v .

Entonces $deg(v) = |N(v)|$.

Un vértice de grado 0 es llamado un **vértice aislado** y un vértice de grado 1 es llamado **vértice final** (u **hoja**). El **grado mínimo** de G es el grado mínimo entre todos sus vértices y es denotado por $\delta(G)$; y el **grado máximo** de G es el grado máximo entre todos sus vértices y es denotado por $\Delta(G)$. Entonces

$$0 \leq \delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

Un vértice que tiene grado par es llamado **vértice par**, y un vértice que tiene grado impar es llamado **vértice impar**.

Definición. Si en una gráfica G , $\delta(G) = \Delta(G)$, entonces todos los vértices de G tienen el mismo grado y se conoce como **gráfica regular**. En estos casos, si $\text{deg}(G) = r$, entonces G es una gráfica **r-regular** o **regular de grado r**.

Hasta ahora, todos los ejemplos que hemos visto se tratan de gráficas donde podemos concebir a una arista como una trayectoria que va en ambas direcciones ente dos vértices. Pero habrá problemas en los cuales no se pueda viajar en ambas direcciones, imaginemos simplemente las calles de una ciudad, en ella pueden existir tanto calles de ambos sentidos como aquellas que sólo viajan en uno, esto nos lleva a plantearnos el concepto de gráfica dirigida.

Definición. Una **digráfica** o **gráfica dirigida**, D , es un par ordenado conformado por dos conjuntos, uno de vértices V y otro de pares de vértices ordenados E , denotado por $D(V, E)$. Donde a cada elemento de E le llamaremos **flecha** o **arco**.

A las gráficas, como las hemos vista hasta antes de la definición de digráfica, las llamaremos también gráficas no dirigidas.

Una digráfica es representada de manera similar que una gráfica no dirigida, con la diferencia de que si uv es una arista ordenada, entonces ésta es representada como una línea dirigida (o flecha) que va de u a v . En estos casos se dice que u es **adyacente a** v y que v es **adyacente desde** u . Podemos ver un ejemplo en la figura 1.6. Como vemos en la gráfica D , a pesar de que existe tanto el arco ac como el ca , no los juntaremos en una sola arista, sino que las mantendremos separadas.

Definición. Un **uv-camino (dirigido)**, es una secuencia de arcos que van de u a v .

En nuestro ejemplo de la figura 1.6, existe un ad -camino pero no existe un da -camino.

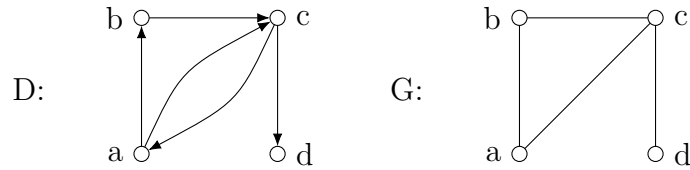


Figura 1.6: Una digráfica y su gráfica subyacente.

Definición. Una **gráfica subyacente** de una digráfica D se obtiene al remover todas las direcciones de los arcos de D y reemplazando las aristas que resultaran paralelas por una sola arista.

En la figura 1.6, G es la gráfica subyacente de D .

Mientras que una gráfica puede ser conexa o no, para las digráficas hay una alternativa.

Definición. Decimos que una digráfica D es **conexa** (también llamada **débilmente conexa**) si la gráfica subyacente de D es conexa. Y diremos que una digráfica D es **fuerte** (o que es **fuertemente conexa**) si para cada par de vértices diferentes u y v , D contiene tanto una uv -trayectoria como una vu -trayectoria.

Particularmente en el ejemplo, D es conexa pero no es fuertemente conexa.

En este documento no profundizaremos en el análisis de las digráficas, pero será necesario entenderlas para cuando revisemos los conjuntos abiertos dominantes y de localización de pesos mixtos en ciclos.

Capítulo 2

OLD-sets en gráficas circulantes

2.1. Definiciones

En esta sección definiremos algunos conceptos que serán de utilidad para el entendimiento de lo que es un conjunto OLD en gráficas circulantes. Empezando por lo que es una gráfica circulante y lo que es un conjunto OLD.

Consideremos una gráfica $G(V, E)$ conexa. A continuación revisaremos nuevamente el concepto de vecindad pero agregándole la propiedad de que es abierta:

Definición. La **vecindad abierta** de un vértice $x \in V$, $N(x)$, es el conjunto de vértices que son adyacentes a x en la gráfica sin incluir a x , es decir, $x \notin N(x)$, esto último es la propiedad abierta.

Definición. Para un conjunto de vértices A , su **vecindad abierta**, $N(A)$, es el conjunto que contiene a todos los vértices adyacentes a A pero no a los vértices en A , esto es

$$N(A) = \cup_{x \in A} N(x) - A$$

A partir de ahora nos referiremos a la vecindad abierta, ya sea de un vértice o de un conjunto, simplemente como vecindad.

Decimos que si $y \in N(x)$, entonces y es vecino de x ; y si $y \in N(A)$, entonces y es vecino de A .

Definición. Una **gráfica circulante**, denotada por $C_n(d_1, d_2, \dots, d_k)$, es una gráfica regular con n vértices etiquetados $0, 1, 2, \dots, n-1$ donde cada vértice x es adyacente a los vértices $x \pm d_i \text{ mod } n$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Decimos que el conjunto $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ son los grados generadores de la gráfica circulante.

En este documento nos centraremos en las gráficas circulantes con dos generadores, $C_n(1, t)$, que es una gráfica regular de grado 4 que tiene n vértices etiquetados $\{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ donde cada vértice x es adyacente a los vértices $x \pm 1 \text{ mod } n$ y $x \pm t \text{ mod } n$.

Entonces, una gráfica circulante $C_n(1, t)$ es una gráfica con conjunto de vértices $V = \{x | x \in \mathbb{Z}_n\}$ y conjunto de aristas $E = \{xy | |x - y| \in \{1, t\}\}$.

Definición. Un conjunto de vértices S es un **conjunto abierto dominante y de localización** (denotado OLD-set por sus siglas en inglés) si cumple las siguientes dos propiedades:

- i. Para todo $x \in V$, $N(x) \cap S \neq \emptyset$, esta es la propiedad dominante,
- ii. Para todo $x, y \in V$, $x \neq y$, $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$, esta es la propiedad de localización.

Es decir, S satisface que para todo vértice x en la gráfica, x tiene al menos un vecino en el conjunto OLD. Además, por cada pareja de vértices distintos, x y y , existe al menos

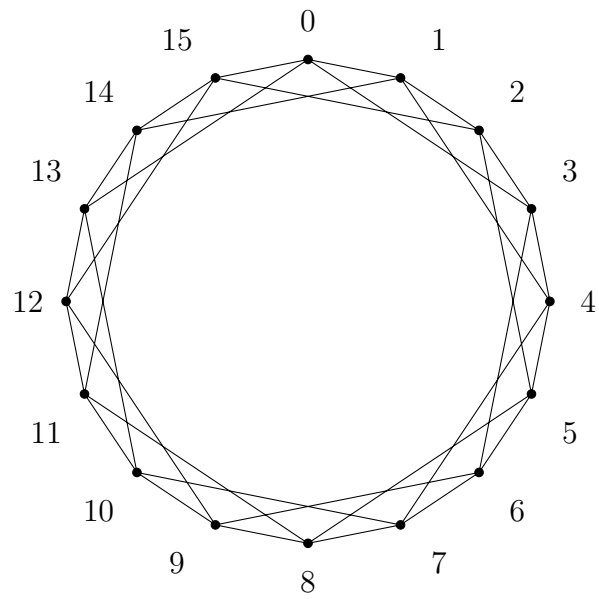


Figura 2.1: Ejemplo de una circulante $C_{16}(1,3)$.

un vecino de x en el conjunto OLD que no es vecino de y y viceversa.

Llamaremos al conjunto $N(x) \cap S$ como la **vecindad abierta y de localización** de x , o simplemente **vecindad OLD** de x .

2.2. Resultados Preliminares

En esta sección describiremos algunos resultados con respecto a las gráficas circulares $C_n(1, 3)$, éstos serán de utilidad en la siguiente sección para demostrar el resultado principal.

Lema 1 *Sea $G(V, E)$ una gráfica circulante $C_n(1, 3)$. Si $|x_i - x_j| \geq 8$ con $x_i, x_j \in V$, entonces x_i y x_j no comparten vecindades.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_i < x_j$, entonces el mayor vecino de x_i es $x_i + 3$ y el menor vecino de x_j es $x_j - 3$ y claramente, por las hipótesis del lema, tenemos que:

$$x_i + 3 \leq x_j - 5 < x_j - 3$$

Por tanto, el mayor vecino de x_i es menor que el menor vecino de x_j , como consecuencia x_i y x_j no comparten vecindades. ■

Lema 2 *Sea $G(V, E)$ una gráfica circulante $C_n(1, 3)$. Si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k | x_i = x_{i-1} + 2 \text{ para } i = 2, 3, \dots, k\} \subset V$, entonces $|N(A)| = |A| + 3$.*

Demostración. Por la definición de A , todos los vértices x_1, x_2, \dots, x_k son de la misma paridad, y podemos escribirlos en términos de x_1 como:

$$A = \{x_i | x_i = x_1 + 2(i - 1) \text{ para } i = 1, 2, \dots, k\}$$

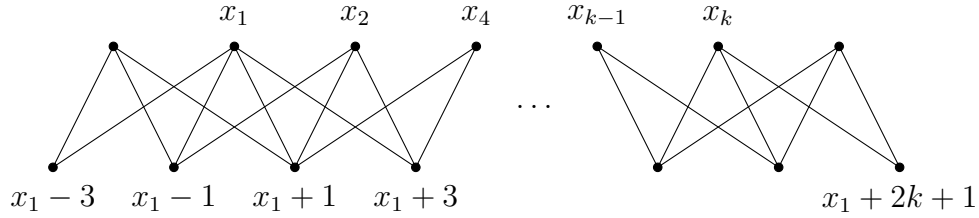


Figura 2.2: Un conjunto A y su vecindad en una circulante.

Así mismo, la vecindad de A , $N(A) = \{x_1 - 3, x_1 - 1, \dots, x_1 + 2k - 1, x_1 + 2k + 1\}$ podemos escribirla como:

$$N(A) = \{n_i | n_i = x_1 + 2i - 5 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k + 3\}$$

Entonces $N(A)$ es un conjunto de cardinalidad $k + 3$. Podemos observarlo gráficamente en la figura 2.2. ■

Lema 3 *Sea $G(V, E)$ una gráfica circulante $C_n(1, 3)$ y sean $x_1, x_2, x_3 \in V$ tales que $x_2 = x_1 + 2$ y $x_3 = x_2 + 2$ (es decir, son tres vértices consecutivos de la misma paridad) y ninguno de ellos está en el conjunto OLD, entonces los vértices x_4, x_5, x_6 y x_7 están en el conjunto OLD; con $x_i = x_{i-1} + 2 \in V$ para $i = 4, 5, 6, 7$.*

Demostración. Sea S el conjunto OLD, y sean $y_1 = x_1 + 3$, $y_2 = x_2 + 3$, $y_3 = x_3 + 3$ y $y_4 = x_3 + 5$, en la gráfica:

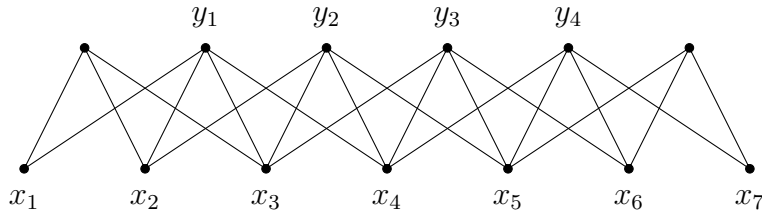


Figura 2.3: Vértices consecutivos de la misma paridad.

Notemos que $N(y_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, y dado que $x_1, x_2, x_3 \notin S$, para que y_1 esté cu-

bierto forzosamente tenemos que $x_4 \in S$. Ahora observemos que $N(y_2) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, por la propiedad de localización $N(y_1) \cap S \neq N(y_2) \cap S$, entonces necesariamente $x_5 \in S$. De manera similar, observemos que $N(y_3) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, y también por la propiedad de localización $N(y_2) \cap S \neq N(y_3) \cap S$, entonces $x_6 \in S$. Finalmente, como $N(y_4) = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$ por la propiedad de localización $N(y_3) \cap S \neq N(y_4) \cap S$, se tiene que $x_7 \in S$. ■

Podemos observar que, con una demostración análoga, se prueba que los cuatro vértices de la misma paridad precedentes a x_1, x_2 y x_3 están en el conjunto OLD.

Lema 4 Sea $G(V, E)$ una gráfica circulante $G(V, E)$ y sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k | x_i = x_{i-1} + 2 \in V \text{ para } i = 2, 3, \dots, k\}$, y S es el conjunto OLD, entonces $|N(A) \cap S| \geq \lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$.

Demostración. La prueba se hará por inducción matemática sobre k que es la cardinalidad del conjunto A .

i) Notemos que el lema se cumple para $k = 1$ por la propiedad de dominación, así mismo se cumple para $k = 2, 3$ por la propiedad de localización.

ii) Supongamos que la proposición se cumple para todo $l < k$, es decir, para $A = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ tal que $x_i = x_{i-1} + 2$ con $i = 2, 3, \dots, l$ tenemos que A tiene al menos $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1$ vecinos en el conjunto OLD.

iii) Sea S el conjunto OLD y sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k | x_i = x_{i-1} + 2 \text{ para } i = 2, 3, \dots, k\}$, por hipótesis de inducción el conjunto $\{x_3, x_4, \dots, x_k\}$ tiene al menos $\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ vecinos en S , es decir,

$$|N(x_3, x_4, \dots, x_k) \cap S| \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

Si agregamos a los vértices x_1 y x_2 al conjunto $\{x_3, x_4, \dots, x_k\}$, entonces éstos agregan dos vecinos más a la vecindad del conjunto, concretamente agregan a $x_1 - 1$ y $x_1 - 3$. Podemos escribir esto como:

$$N(A) = \{x_1 - 3, x_1 - 1\} \cup N(\{x_3, x_4, \dots, x_k\})$$

Si uno de éstos o ambos vértices están en el conjunto OLD ya terminamos, ya que en ese caso

$$|N(A) \cap S| = |\{x_1 - 3, x_1 - 1\} \cap S| + |N(\{x_3, x_4, \dots, x_k\}) \cap S| \geq 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Por tanto sólo tenemos que analizar el caso cuando ni $x_1 - 3$ ni $x_1 - 1$ están en S .

Por la propiedad de dominación, para que x_1 esté cubierto, al menos uno de $x_1 + 1$ y $x_1 + 3$ debe estar en S . Entonces analizaremos los tres posibles casos donde esto sucede.

Caso 1. $x_1 + 1 \in S$ y $x_1 + 3 \notin S$

Por la propiedad de localización x_1 y x_2 no pueden tener la misma vecindad OLD, entonces $x_2 + 3 \in S$.

De igual manera, por la propiedad de localización x_2 y x_3 no pueden compartir vecindades OLD, entonces $x_3 + 3 \in S$.

Y una vez más, por la propiedad de localización x_4 y x_5 no pueden compartir vecindades OLD, entonces $x_5 + 3 \in S$. Notemos que el conjunto de los vértices $\{x_1 + 1, x_2 + 3, x_3 + 3, x_5 + 3\}$ cubre al conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_7\}$.

Consideremos ahora al conjunto $\{x_9, x_{10}, \dots, x_k\}$, tiene una cardinalidad igual a $k - 8$ y su

vecindad no interseca con $\{x_1 + 1, x_2 + 3, x_3 + 3, x_5 + 3\}$. Por hipótesis de inducción

$$|N(\{x_9, x_{10}, \dots, x_k\}) \cap S| \geq \left\lfloor \frac{k-8}{2} \right\rfloor + 1.$$

Se sigue que

$$|N(A) \cap S| \geq 4 + \left\lfloor \frac{k-8}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Caso 2. $x_1 + 1 \notin S$ y $x_1 + 3 \in S$

Tenemos que $x_1 - 3, x_1 - 1, x_1 + 1 \notin S$ son tres vértices consecutivos de la misma paridad que no están en el conjunto OLD, por tanto, por el lema 3, $x_1 + 3, x_1 + 5, x_1 + 7, x_1 + 9 \in S$.

Notemos que el conjunto $\{x_1 + 3, x_1 + 5, x_1 + 7, x_1 + 9\}$ cubre a $\{x_1, x_2, \dots, x_7\}$ y la vecindad de los $k - 7$ vértices restantes no se interseca con $\{x_1 + 3, x_1 + 5, x_1 + 7, x_1 + 9\}$. Por hipótesis de inducción

$$|N(\{x_8, x_9, \dots, x_k\}) \cap S| \geq \left\lfloor \frac{k-7}{2} \right\rfloor + 1.$$

Se sigue que

$$|N(A) \cap S| \geq 4 + \left\lfloor \frac{k-7}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Caso 3. $x_1 + 1 \in S$ y $x_1 + 3 \in S$

Notemos que $x_1 + 1, x_1 + 3$ cubren al conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y la vecindad de los $k - 4$ vértices restantes no se interseca con $\{x_1 + 1, x_1 + 3\}$. Se sigue que

$$|N(A) \cap S| \geq 2 + \left\lfloor \frac{k-4}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

■

Entre las técnicas utilizadas para resolver los problemas de detección de los conjuntos de localización, se destaca el método de descarga (el cual describiremos y utilizaremos en la sección de los WMOLD-sets) y otros métodos similares. Sin embargo, en esta sección utilizaremos el Teorema de Apareamiento de Hall, o simplemente Teorema de Hall, para encontrar condiciones necesarias y suficientes que implican la existencia de un apareamiento en una gráfica bipartita. Mediante el Teorema de Hall probaremos que la densidad óptima del conjunto OLD en una gráfica circulante $C_n(1, 3)$ es $1/2$ y lo haremos construyendo una cierta relación entre los vértices que no están en el OLD y los que sí lo están, pero para ello necesitamos entender esta relación. El artículo analizado en este trabajo afirma que esta es la primera vez que se aplica el Teorema de Hall para obtener un resultado de conjuntos abiertos dominantes y de localización.

Sabemos que una gráfica puede tener una gran cantidad de aristas, sin embargo, el de Hall busca encontrar subconjuntos especiales de ellas en donde estas aristas no compartan vértices. Entonces decimos que un conjunto de aristas es **independiente** si cada par de aristas es este conjunto no tiene vértices en común.

Definición. Un **apareamiento** en una gráfica es un conjunto independiente de aristas.

Para que nos quede más claro, observemos la gráfica bipartita de la figura 2.4 donde la cardinalidad del conjunto partito más pequeño es 6. Decir que existe un apareamiento de cardinalidad 6 en la gráfica es como decir que para 6 vértice de cada conjunto partito hay un vértice que es su pareja única en el otro conjunto partito:

Lema 5 (Teorema de Hall) *Sea G una gráfica bipartita con conjuntos partitos U y W tales que $r = |U| \leq |W|$. Entonces G contiene un apareamiento de cardinalidad r si y sólo*

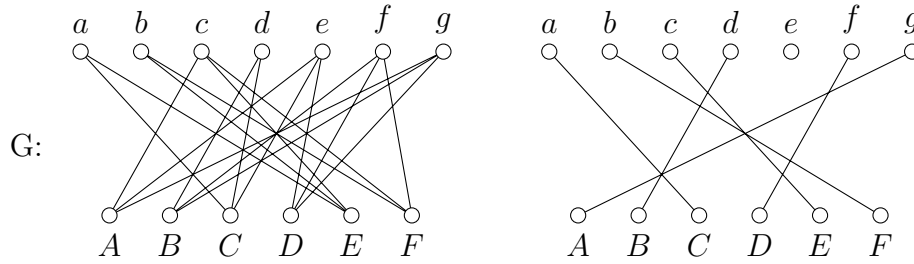


Figura 2.4: Ejemplo de una gráfica bipartita y un apareamiento.

si G satisface la condición de Hall, es decir, si se satisface que:

$$|N(X)| \geq |X| \text{ para todo } X \subseteq U.$$

Demostración. Observemos que si la condición de Hall no se cumple, entonces existe algún subconjunto S de U tal que $|S| \geq |N(S)|$. Como S no puede ser apareado con un subconjunto de W , se sigue que U no puede ser apareado con W . Para probar la implicación inversa utilizaremos inducción matemática sobre la cardinalidad de U .

i) Supongamos que se cumple la condición de Hall, y que la cardinalidad de U es 1, $|U| = 1$. Dado que $|N(U)| \geq |U| = 1$ entonces existe un vértice $v \in W$ adyacente al vértice de U , y por tanto U puede ser apareado a un subconjunto de W .

ii) Supongamos que para un entero $k \geq 2$ tal que si G_1 es cualquier gráfica bipartita con partidos U_1 y W_1 donde $|U_1| \leq |W_1|$ y $1 \leq |U_1| < k$, que satisface la condición de Hall, entonces U_1 puede ser apareado a un subconjunto de W_1 .

iii) Sea G una gráfica bipartita con partidos U y W , donde $k = |U| \leq |W|$ tal que la condición de Hall se satisface. Mostraremos que de U puede ser apareada a un subconjunto de W . Consideramos dos casos:

Caso 1) Para todo $S \subset U$ tal que $1 \leq |S| < |U|$, y que $|N(S)| > |S|$. Sea $u \in U$. Por suposición u es adyacente a dos o más vértices de W . Sea w un vértice adyacente a u . Ahora, sea H una subgráfica bipartita de G con partitos $U - \{u\}$ y $W - \{w\}$. Para cada subconjunto S de $U - \{u\}$ se cumple que $|N(S)| \geq |S|$ en H . Por hipótesis de inducción, $U - \{u\}$ puede ser apareado con $W - \{w\}$. Este apareamiento junto con la arista uw prueba que U puede ser apareado con un subconjunto de W .

Caso 2) Existe un subconjunto propio X de U tal que $|N(X)| = |X|$. Sea F la subgráfica bipartita de G con conjuntos partitos X y $N(X)$. Dado que la condición de Hall se satisface en F , se sigue por hipótesis de inducción que X puede ser apareado con un subconjunto de $N(X)$. De hecho, dado que $|N(X)| = |X|$, el conjunto X puede ser apareado con $N(X)$. Sea M' ese apareamiento.

Ahora, consideremos la subgráfica bipartita H de G con conjuntos partitos $U - X$ y $W - N(X)$. Sea S un subconjunto de $U - X$ y sea

$$S' = N(S) \cap (W - N(X)).$$

Debemos probar que $|S| \leq |S'|$. Por suposición, $|N(X \cup S)| \geq |X \cup S|$. Por lo tanto

$$|N(X)| + |S'| = |N(X \cup S)| \geq |X| + |S|.$$

Dado que $|N(X)| = |X|$, se sigue que $|S'| \geq |S|$. Entonces la condición de Hall se satisface en H y esto implica que existe un apareamiento M'' de $U - X$ a $W - N(X)$. Por lo tanto, $M' \cup M''$ es un apareamiento de U a W en G . ■

2.3. Resultado Principal

En esta sección utilizaremos todos los resultados vistos hasta ahora para encontrar una cota mínima para la cardinalidad del conjunto OLD en las gráficas circulantes $C_n(1, 3)$, que no es otra cosa que el resultado principal de este trabajo.

Definición. La **densidad** de un conjunto de vértices $A \subseteq V$ es

$$\frac{|A|}{|V|}.$$

Teorema 6 *Sea $C_n(1, 3)$ la gráfica circulante de cardinalidad n con generadores 1 y 3, la densidad mínima del conjunto OLD es $1/2$.*

Demostración. Para probar el teorema, construiremos una gráfica bipartita que satisfaga la condición de Hall.

Construyamos la gráfica bipartita auxiliar $B = (R, S)$ con particiones R y S , donde S es el conjunto OLD de $C_n(1, 3)$, $R = V(C_n(1, 3)) - S$ y

$$E(B) = \{uv \mid u \in R, v \in S, uv \in E(C_n(1, 3))\} \cup \{x, x+5 \mid x-4, x-2 \notin S, x+5 \in S\}.$$

Solamente necesitamos considerar los conjuntos de vértices $A \subseteq R$ tales que sus vértices compartan algún vecino, ya que si A tiene subconjuntos de vértices que no compartan vecinos, entonces A puede ser separado en dos o más conjuntos que no compartan vecindades, es decir:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ tal que } N(A_i) \cap N(A_j) = \emptyset \text{ para todas } i, j \in I, i \neq j.$$

para algún I conjunto de índices. En este caso la cardinalidad de la vecindad OLD puede ser descrita como la suma de las cardinalidades de los conjuntos A_i :

$$|N(A) \cap S| = \sum_{i \in I} |N(A_i) \cap S|.$$

Y se satisface la condición de Hall trivialmente. Recordemos además, que una de las propiedades de $C_n(1, 3)$ es que dos vértices de diferente paridad no comparten vecindades, por tanto nuestro conjunto A está compuesto únicamente de vértices de la misma paridad. Por tanto, nos queda demostrar que $|N_B(A) \cap S| \geq |A|$ para todo $A \subseteq R$, donde $N_B(A)$ es la vecindad del conjunto A en la gráfica B . Dividiremos la demostración en tres casos sobre la cardinalidad de A :

Caso 1) Si $|A| = 1$, por la propiedad de dominación tenemos que al menos un vecino de A está en el OLD, se sigue que $|N(A) \cap S| \geq 1$.

Caso 2) Si $|A| = 2$, por la propiedad de localización es necesario que al menos dos vecinos de A estén en el OLD, se sigue que $|N(A) \cap S| \geq 2$.

Caso 3) Dividiremos este caso en dos, el primero considerando un caso especial y el segundo el resto de los posibles casos.

Caso 3a) Sea $A = \{x_1, x_2, x_3 | x_2 = x_1 + 2 \text{ y } x_3 = x_2 + 2\}$, entonces probaremos que $|N(A) \cap S| \geq 3$.

Dado que $A \subseteq R$, entonces $x_1, x_2, x_3 \notin S$, y por el lema 3, los siguientes cuatro vértices de la misma paridad deben estar en el conjunto OLD.

Para entenderlo más claramente definamos los vértices y_1, y_2, \dots, y_6 tal que $y_i = x_i -$

1 para $i = 1, 2, \dots, 6$.

Si A tiene 3 o más vecinos en S ya acabamos. Sin embargo, por el lema 4 sabemos que el conjunto A puede ser cubierto por 2 vértices del conjunto OLD, y el único caso donde A sólo tiene dos vecinos en el conjunto OLD es cuando $y_1, y_4 \in S$, no obstante si esto sucede entonces forzosamente $y_6 \in S$, ya que de lo contrario x_3 y x_4 compartirían vecindad y S no cumpliría con la propiedad de localización. Se sigue, dada la definición de $E(B)$, que existe la arista x_3, y_6 en la gráfica bipartita, implicando que $y_6 \in N(A) \cap S$, y por lo tanto para este caso $|N(A) \cap S| \geq 3$. Gráficamente:

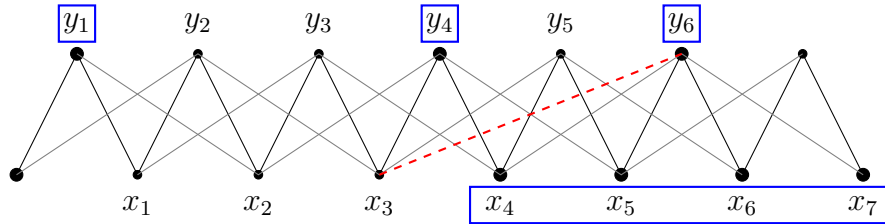


Figura 2.5: La arista x_3, y_6 existe forzosamente.

Caso 3b) Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{|A|}\}$ donde $|A| \geq 3$ y $x_i = x_{i-1} + 2j$ para alguna $j > 0$ y para al menos una $j > 1$. Notemos que pedir que al menos una j satisfice que $j > 1$ indica que al menos entre un par de vértices de A hay uno intermedio de la misma paridad. Además, esta forma de definir A complementa el *caso 3a*, ya que si hubiera tres vértices consecutivos en A estaríamos en el caso anterior, por el lema 1, sabemos que es un caso especial, el cual se muestra en la figura 2.6:

Si tenemos tres vértices consecutivos que no están en S , llámense x_1, x_2, x_3 , por el lema 3 lo están los siguientes cuatro, lo cual implica que el siguiente vértice no necesariamente está en S que podría estar en A sería x_8 , pero dado que está a una distancia mayor a 8 de

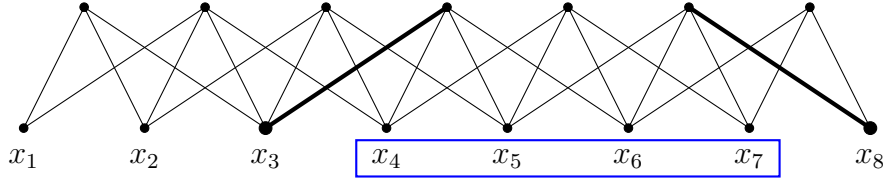


Figura 2.6: Cuatro vértices consecutivos de la misma paridad en el conjunto OLD.

x_3 , entonces por el lema 1, estos últimos dos vértices no podrían compartir vecindades, y lo mismo ocurre con los cuatro vértices a la izquierda de x_1, x_2, x_3 . Por lo tanto, si hay tres vértices consecutivos que no pertenecen a S , estos tres vértices no comparten vecinos con cualquier otro vértice de la misma paridad que no está en S . Entonces el conjunto A del caso 3b no tiene tres vértices consecutivos de la misma paridad. Lo cual puede verse en la figura 2.7:

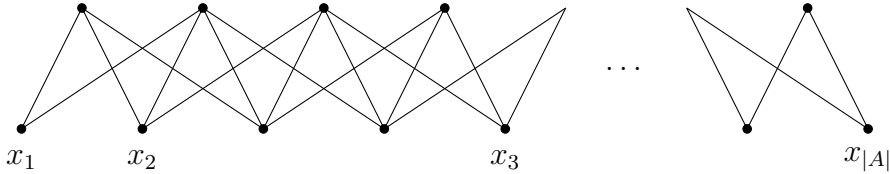


Figura 2.7: No puede haber tres vértices consecutivos de la misma paridad en A .

Sea $S' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_j\}$ tal que $A \cup S'$ sea el conjunto de todos los vértices de la misma paridad consecutiva desde x_1 hasta $x_{|A|}$, esto es

$$A \cup S' = \{x_1 + 2i \mid 0 \leq i \leq \frac{x_{|A|} - x_1}{2}\}$$

con $|A \cup S'| = k \geq 4$.

Por el lema 2, sabemos que existe A' tal que $A \cup S' = N(A')$ con $|A'| = k - 3$.

Entonces,

$$|N(A') \cap S| = |(A \cup S') \cap S| \geq \left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + 1$$

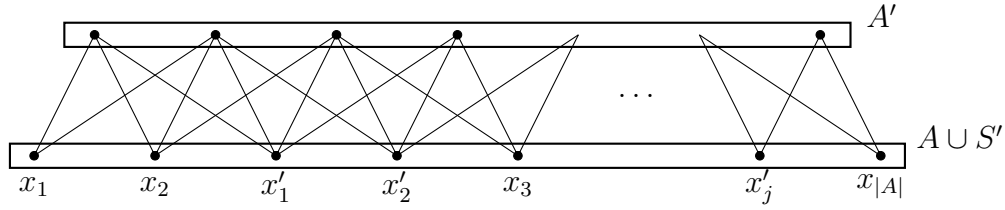


Figura 2.8: Existe un conjunto A' tal que $A \cup S' = N(A')$.

$$|(A \cap S) \cup (S' \cap S)| \geq \left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + 1$$

$$|S'| \geq \left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + 1.$$

Por otro lado, por construcción $A \cap S' = \emptyset$, entonces $k = |A \cup S'| = |A| + |S'|$, despejando A y sustituyendo la cardinalidad de S' :

$$|A| = k - |S'| \leq k - \left(\left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + 1 \right). \quad (1)$$

Ahora notemos que $N(S') \subset N(A)$ y por tanto $N(A) = N(A \cap S')$.

Nuevamente por el lema 4:

$$|N(A \cup S') \cap S| \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Es decir, a partir de (1) obtenemos que:

$$|A| \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 = |N(A) \cap S|.$$

Entonces, hemos construido una gráfica bipartita $B = (R, S)$ para todo $A \subseteq R$, $|N(A) \cap S| \geq |A|$. Por lo tanto, B satisface la condición de Hall. Con lo cual existe un apareamiento de cardinalidad $|R|$ de R a S . Se sigue que $|R| \leq |S|$. Por construcción sabemos que

$|R| + |S| = n$. Por lo tanto, $|S| \geq \frac{n}{2}$.



Capítulo 3

MWOLD-sets en ciclos

3.1. Resultados adicionales

Los conjuntos abiertos dominantes y de localización de pesos mixtos (MWOLD-sets) modelan un sistema en el cual se utilizan sensores de diferentes potencias, esto es representado colocando pesos en los vértices de la gráfica. La ventaja de usar pesos mixtos en el problema de detección y localización es que disminuye el número de sensores necesarios, aunque tiene la contraparte de que estos sensores podrían ser más costosos. Como podremos notar, los OLD-sets son un caso particular de los MWOLD-sets.

A continuación revisaremos algunas definiciones y propiedades relacionados con los MWOLD-sets.

Definición. Dada una gráfica G , la **función de peso**, w , tal que $w(x) \geq 1$ para todo $x \in V$, asigna un valor entero, o peso, a cada vértice de la gráfica.

Para un conjunto $A \subseteq V$, la función de peso del conjunto es $w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$.

Recordemos que la **distancia** entre dos vértices, denotada por $d(x, y)$, es la longitud

mínima entre dos vértices x y y , considerando a cada arista de longitud igual a 1.

Definición. La **bola abierta de salida**, denotada por $B^-(x)$, es el conjunto de todos los vértices dentro de la distancia $w(x)$ desde x , recordar que la propiedad de ser abierta implica que x no está contenido en dicha bola.

$$B^-(x) = \{y \in V \mid 0 < d(x, y) \leq w(x)\}.$$

Definición. La **bola abierta de entrada**, denotada por $B^+(x)$, es el conjunto de todos los vértices que contienen a x dentro de su bola abierta de salida.

$$B^+(x) = \{y \in V \mid 0 < d(x, y) \leq w(y)\}.$$

Definición. Un **conjunto abierto dominante y de localización de pesos mixtos** de una gráfica, por simplicidad llamado conjunto MW-OLD, es el conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que $B^+ \cap S$ es diferente del vacío y única para cada $x \in V$.

El **peso total** de un MW-OLD S , $w(S)$, es la suma de todos los pesos de todos los vértices en S .

Observemos la gráfica de la figura 3.1, a la izquierda podemos verla con sus vértices y aristas como si todos los pesos fueran iguales a 1, y a la derecha vemos el efecto cuando se le da peso a uno de los vértices, $w(x_1) = 2$, representado por flechas punteadas.

El peso de un vértice puede ser representado en una gráfica añadiendo arcos del vértice v a los vértices que estén a una distancia $1 < d(x, y) \leq w(x)$, quienes anteriormente no eran sus vecinos, esto lo podemos ver en la figura 3.1.

Ahora hablaremos de otro tipo de gráficas y centraremos el estudio de los conjuntos OLD de pesos mixtos en ellas.

Definición. Un **ciclo** es una gráfica, denotada por C_n , que contiene n vértices etiquetados $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ donde cada vértice x es adyacente a los vértices $x \pm 1 \pmod n$.

Si añadimos peso a algunos vértices en un ciclo C_n , transformaremos dicha gráfica en una subgráfica dirigida de una gráfica circulante generalizada $C_n(1, 2, \dots, \max(w))$ donde $\max(w)$ es el peso máximo de los vértices en el ciclo.

Consideraremos solamente el problema de los MWOLD-sets en ciclos cuando los posibles pesos que pueden tomar los vértices son 1 o 2. Sea $OLD(C_n, w)$ la cardinalidad del conjunto OLD más pequeño que se puede encontrar en C_n con una función de peso $w(x) \leq 2$ para todo $x \in V$. Mostraremos que $OLD(C_n, w) \geq \frac{2n}{5}$, para ello utilizaremos una técnica de demostración conocida como **método de descarga**.

En el método de descarga, a cada vértice de un conjunto designado se le “otorga” una **carga** de 1, y a todos los demás vértices se les “otorga” una **carga** de 0. Si la carga total en la gráfica puede ser redistribuida de tal manera que cada vértice tenga al menos una fracción de carga f , entonces la cardinalidad del conjunto debe ser al menos la fracción f del total de vértices en la gráfica.

Antes de la demostración consideraremos las siguientes definiciones:

Definiremos un **m-cluster** como una componente débilmente conexa de orden m en la

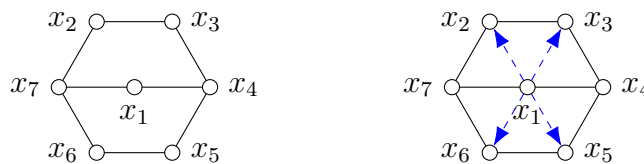


Figura 3.1: El vértice x_1 llega a ver más lejos cuando tiene peso 2.

gráfica inducida por el conjunto OLD de pesos mixtos S , donde se considera que un vértice x , con $w(x) = 2$, tiene arcos que van desde x a $x - 2$ y a $x + 2$. Así mismo definiremos a un **vecino** de un cluster como un vértice que tiene al menos un vecino de su bola abierta de entrada en el cluster. Se puede observar que ningún vecino de un cluster puede estar en el conjunto OLD de pesos mixtos.

Nos referiremos a la intersección del conjunto OLD con la bola abierta de entrada de un vértice como la **vecindad de pesos mixtos**, denotado por $B^+(x) \cap S$. Decimos que dos vértices x y y comparten vecindades de pesos mixtos si $B^+(x) \cap S = B^+(y) \cap S$. Dado que S es un conjunto OLD de pesos mixtos, cualesquiera dos vértices en la gráfica no deben compartir vecindades de pesos mixtos.

Teorema 7 *La cardinalidad del conjunto OLD de pesos mixtos más pequeño en un ciclo C_n , denotado $OLD(C_n, w)$, cumple que $OLD(C_n, w) \geq \frac{2}{5}$ donde $s(x) \leq 2$ para todo $x \in V(C_n)$.*

Demostración. Sea S un conjunto OLD de pesos mixtos en C_n para $n > 2$ y $w(x) \leq 2$ para todo $x \in V(C_n)$. Se hará la demostración por el método de descarga.

Asignamos una carga igual a 1 a cada vértice en S y 0 al resto de vértices en la gráfica.

Escogemos la siguiente regla de distribución de carga como: Si $x \notin S$ es adyacente a k clusters en S , entonces x recibe $\frac{1}{k} \cdot \frac{2}{5}$ de carga de cada cluster al que es adyacente.

Dada esta regla, cada vértice que no está en S tendrá una carga de al menos $\frac{2}{5}$. Para la prueba consideraremos todos los posibles m -clusters en S con todas las posibles funciones de peso mixtos con pesos 1 y 2. Los m -clusters deben permitir que sus vértices y los vecinos de estos sean dominados y localizados abiertamente, y las funciones de peso deben permitir que sea un cluster. Si cada posible m -cluster en S permanece con al menos

$\frac{2}{5}$ de carga tras la distribución, entonces todos los vértices de S tendrán al menos $\frac{2}{5}$ de carga. Este es nuestro objetivo, probar que cada posible m -cluster, tras la distribución, conserva $\frac{2m}{5}$ de carga.

En tal caso, cada m -cluster puede aportar a lo más $\frac{3m}{5}$ de carga a sus vecinos para conservar al menos $\frac{2m}{5}$ de carga, por lo tanto cada cluster puede dar suficiente carga para $\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor$ vecinos. Entonces, basta con revisar los m -cluster que tienen más de $\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor$ vecinos. Veremos que podemos agrupar los m -cluster que tenemos que revisar en 4 casos. Notemos además, que no existen los 1-cluster, pues en tal caso, el vértice en dicho cluster no podría ser dominado por el conjunto OLD de pesos mixtos.

Caso 1) Los 2-clusters. Sólo existen dos 2-clusters con más de $\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor = 3$ vecinos que pueden ocurrir en un conjunto MWOLD.

El primer 2-cluster es $\{x_1, x_2\}$ tal que $x_2 = x_1 + 1$ y $w(x_1) = w(x_2) = 2$ y sus vecinos son

$$\{x_1 - 2, x_1 - 1, x_2 + 1, x_2 + 2\}.$$

Notemos que, para que $x_1 - 1$ y $x_2 + 1$ no compartan vecindad de pesos mixtos (que sería $\{x_1, x_2\}$), sin pérdida de generalidad, $x_1 - 3$ debe estar en el conjunto OLD de pesos mixtos con $w(x_1 - 3) = 2$. Y para que x_1 y $x_2 + 2$ no compartan vecindades, $x_2 + 2$ debe tener a $x_2 + 3$ o a $x_2 + 4$ en su vecindad de pesos mixtos. Por todo esto, cada uno de los vértices $x_1 - 1$, $x_1 - 2$ y $x_2 + 2$ son vecinos de al menos dos clusters, es decir, que reciben del cluster $\{x_1, x_2\}$ la cantidad de $\frac{2}{5}$ de carga; y el vértice $x_2 + 1$ puede ser vecino de 1 o 2 clusters, por lo tanto recibe como máximo $\frac{1}{5}$ de carga de $\{x_1, x_2\}$; dejando a nuestro cluster de interés con 1 de carga como mínimo. Podemos observarlo gráficamente en la figura 3.2:

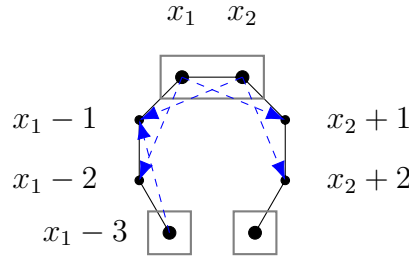


Figura 3.2: Los vértices vecinos del cluster $\{x_1, x_2\}$.

El segundo 2-cluster es $\{x_1, x_2\}$ con $x_2 = x_1 + 2$ y $w(x_1) = w(x_2) = 2$, el cual tiene cinco vecinos:

$$\{x_1 - 2, x_1 - 1, x_1 + 1, x_2 + 1, x_2 + 2\}.$$

Notemos que, para que $x_1 - 2$, $x_1 - 1$ y x_2 no compartan vecindades de pesos mixtos, forzosamente $x_1 - 3$ y $x_1 - 4$ deben estar en el conjunto OLD con $w(x_1 - 3) = w(x_1 - 4) = 2$. Análogamente lo mismo sucede con $x_2 + 3$ y $x_2 + 4$, éstos deben estar en el conjunto OLD para que x_1 , $x_2 + 1$ y $x_2 + 2$ no compartan vecindades OLD. Por lo tanto, $x_1 - 2, x_1 - 1, x_2 + 1$ y $x_2 + 2$ recibe como máximo $\frac{1}{5}$ de carga del cluster, dejando a éste con al menos $\frac{9}{5}$ de carga.

Caso 2) Los 3-clusters. Sólo hay un 3-cluster con más de $\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor = 4$ vecinos. El 3-cluster es $\{x_1, x_2, x_3\}$ con $x_i = x_{i-1} + 2$ para $i = 2, 3$ y al menos x_1 o x_3 tiene un peso de 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $w(x_1) = 2$. Si $w(x_2) = 1$, entonces x_1 no tendría ningún vértice en su vecindad de pesos mixtos. Si $w(x_2) = w(x_3) = 2$, entonces x_1 y x_3 compartirían vecindad de pesos mixtos. Por tanto, los pesos de x_2 y x_1 tendrían que ser 2 y 1 respectivamente, y los vecinos del cluster serían

$$x_1 - 2, x_1 - 1, x_1 + 1, x_2 + 1 \text{ y } x_3 + 1.$$

Par que los vértices x_1 y x_3 no compartan vecindades de pesos mixtos, que en tal caso sería $\{x_2\}$, el vértice $x_2 + 3$ debe estar en el conjunto OLD con $w(x_3 + 2) = 2$. En este caso, $x_3 + 1$ será vecino de dos 2-clusters. Entonces $x_3 + 1$ recibe como máximo $\frac{1}{5}$ de carga del cluster y el resto de los cuatro vecinos reciben como máximo $\frac{2}{5}$ de carga, dejando al cluster con al menos $\frac{6}{5}$ de carga.

Caso 3) Lo 4-clusters y 5-clusters. Hay un 4-cluster y un 5-cluster con más de $\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor = m + 2$ para $m = 4, 5$ que pueden ocurrir en un MWOLD. Los clusters son $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ con $x_i = x_i + 2$ para $i = 2, 3, \dots, m$, $w(x_1) = w(x_m) = 2$, $w(x_i) \leq 2$ para $1 < i < m$ y tiene $m + 3$ vecinos que son

$$\{x_1 - 2, x_1 + 1, x : m + 2\} \cup \{x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_m + 1\}.$$

Para que $x_1 - 2$ y $x_1 - 1$ no compartan vecindades OLD, que en tal caso sería $\{x_1\}$, entonces, o bien $x_1 - 3$ con peso $w(x_1 - 3) = 1$ o $x_1 - 4$ con peso $w(x_1 - 4) = 2$ debe estar en el conjunto OLD de pesos mixtos. Por lo tanto $x_1 - 2$ y $x_m + 2$ recibe como máximo $\frac{1}{5}$ de carga del cluster, y el resto de los $m + 1$ vecinos reciben como máximo $\frac{2}{5}$ de carga del cluster, dejando al menos

$$m - \frac{2(m + 1)}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3m - 4}{5} \geq \frac{2m}{5}.$$

Caso 4) m -clusters con $m \geq 6$. Para este caso notemos que para cualquier m -cluster en C_n función de peso $w(x) \leq 2$, el cluster tiene como máximo $m + 3$ vecinos. Si el primer vértice en el cluster es x , entonces el último vértice en el cluster, y , es como máximo $x + 2(m - 1)$ dada cualquier función de peso. Esto quiere decir que hay a lo más

$x + 2(m - 1) - x - (m - 1) = m - 1$ vértices entre x y y que no están en el conjunto OLD de pesos mixtos. El vértice x tiene como máximo 2 vecinos antes que él en el ciclo, y el vértice y tiene a lo más 2 vecinos en el ciclo después de él. Por lo tanto, el cluster tiene a lo más $m + 3$ vecinos, y entrega como máximo $\frac{2(m+3)}{5}$ de carga a sus vecinos. Esto deja al cluster con una carga de al menos

$$\frac{2(m + 3)}{5} = \frac{3m}{5} - \frac{6}{5} \geq \frac{2m}{5}.$$

■

Veremos que el límite inferior de la desigualdad se puede alcanzar en el caso trivial cuando $w(x) = 2$ para $x \in S$ y cuando n es un común múltiplo de 2 y 5.

Consideremos el ciclo C_{10} . El conjunto $S = \{0, 2, 4, 6\}$ con $w(x) = 2$ para $x \in S$ es el conjunto OLD de pesos mixtos y tiene una cardinalidad de $4 = \frac{2}{5} \cdot 10$. El resto de vértices de la gráfica pueden tener peso 1 o 2, el ejemplo se muestra en la figura 3.3.

Este resultado se puede generalizar para los ciclos C_{10n} , se elige al conjunto MWOLD como

$$S = \{10i, 10i + 2, 10i + 4, 10i + 6 \mid 0 \leq i < n\}$$

donde la función de peso es $w(x) = 2$ para $x \in S$. S tendrá una cardinalidad igual a $4n$.

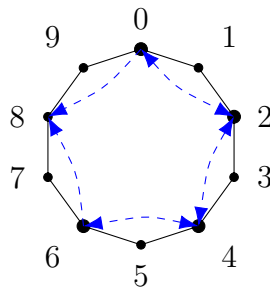


Figura 3.3: Ciclo donde se alcanza la cota mínima para el MWOLD.

El resto de vértices de la gráfica pueden tener peso 1 o 2.

Conclusiones

En este trabajo encontramos una cota superior para la densidad del conjunto OLD en las gráficas circulantes $C_n(1, 3)$, la cual es igual a $1/2$. Los autores del artículo estudiado afirman que esta es la primer vez que se utiliza el Teorema de Hall para probar este tipo de resultados. Creemos que este método puede ser utilizado para encontrar otras cotas en otras gráficas circulantes. El hacerlo ayudará a determinar mejores prácticas para resolver el problema de la detección de la localización.

Pensemos en el monitoreo ambiental usando una red de sensores, podemos modelar un ecosistema de interés como una gráfica circulante y encontrar su conjunto OLD de cardinalidad mínima, éste definirá las posiciones estratégicas para colocar la menor cantidad de sensores necesario para observar el ecosistema de manera eficaz y detectar las posibles anomalías que se pueden presentar.

En la segunda parte de este trabajo consideramos a los conjuntos OLD de pesos mixtos en ciclos, los cuales, con funciones de pesos, se comportan como subgráficas dirigidas de gráficas circulantes. Probamos entonces, usando el método de descarga, que dada una función de peso $w(x) \leq 2$, la cota inferior para la cardinalidad del conjunto MWOLD es $2n/5$. Siguiendo el ejemplo del monitoreo ambiental, si disponemos de sensores de diferentes capacidades (y por ende de diferentes costos), podemos buscar el conjunto MWOLD que permita observar el ecosistema de interés de manera eficaz con el menor costo posible.

Bibliografía

- [1] ROBIN M. GIVENS y GEXIN YU, REX K. KINCAID, *Open locating-dominating sets in circulant graphs*. In review. 1-15 (2018).

- [2] GARY CHARTRAND y PING ZHANG, *A first course in Graph theory*, Dover Publications, Inc. (2012).