UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Material de apoyo para la materia de Matemáticas de 3ro de Secundaria

REPORTE DE APOYO A LA DOCENCIA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE: ACTUARIA

P R E S E N T A :
LILIANA DEL CARMEN RAMOS QUINTERO

TUTOR:
M. en C. EMMA LAM OSNAYA.

2018

1. Datos del alumno

   Ramos Quintero Liliana del Carmen

   5556016363

   Universidad Nacional Autónoma de México

   Facultad de Ciencias

   Actuaría

   08152804-4

2. Datos del Tutor

   M. en C. Emma Lam Osnaya.

3. Datos del sinodal 1

   M. de C. Elena de Oteyza de Oteyza.

4. Datos del sinodal 2

   Mat. Laura Pastrana Ramírez

5. Datos del sinodal 3

   M. de C. esteban Rubén Hurtado Cruz

6. Datos del sinodal 4

   M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

7. Datos del trabajo

   Material de apoyo

   136 pp.

   2018

DEDICATORIA

A mi Madre querida, quien con su apoyo y cariño me permitieron terminar la carrera, que aunque no esté físicamente, vive eternamente en mis recuerdos y en mi corazón.

A mi papá por sus enseñanzas para la vida y por ser mi apoyo, quien desde el cielo sigue guiándome y cuidándome.

A mis hijos Lili, Debbie y Arturo por su motivación, comprensión y ser mi apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida; ellos son lo más valioso y grande que tengo, así como el motor de mi vida.

A mis hermanos Nydia y Jorge que siempre están ahí para apoyarme y ayudarme.

A mi Tutora la Profesora M. en C. Emma Lam Osnaya por su apoyo, guía y orientación en el desarrollo de nuestro trabajo especial de grado.

A las Profesoras M. en C. Elena Oteyza de Oteyza y Mat. Laura Pastrana Ramírez Jurado por su gran apoyo y asesorías.

Índice

Introducción

Este cuaderno de trabajo está hecho con el fin de ayudar a la formación de mejores estudiantes a través del uso de ejercicios y algunas sugerencias acerca de la manera de explicar los conceptos a los alumnos de 3º de secundaria para que de una manera más sencilla puedan asimilar y transmitirse los conocimientos. Es éste un intento de lograr un mayor entendimiento de la materia; con base al plan de trabajo vigente por la SEP.

Los ejercicios y conocimientos que aquí se encontrarán son el reflejo de mis más de 19 años de experiencia como profesora de Matemáticas trabajando con adolescentes y jóvenes de diferentes capacidades y formas de razonar, pero con el común denominador de querer comerse al mundo de una sola mordida y en ocasiones creyendo que ya lo saben todo; algunos de los ejercicios son el reflejo de mi experiencia y algunos otros son los que me parece que son los más fáciles de entender para los alumnos, de acuerdo con mi práctica docente. He elaborado el presente trabajo con el fin de hacer este material lo más didáctico posible, claro y educativo: ya que el mayor reto con este sector de estudiantes es el hacer que te escuchen y se interesen en lo que estás enseñando y hacerles ver que esta materia es fundamental para su vida y que por más que intenten huir u odien la materia, es necesaria y se utiliza día a día en la vida cotidiana.

Creo que la mejor manera de trascender es a través de las personas a las que ayudamos y en quienes sembramos algún conocimiento, es por ello que me pareció la mejor opción de titulación el compartir mi experiencia y conocimientos con futuros profesores, que como yo quieran ayudar a formar jóvenes pensantes y con un raciocinio lógico superior y marcar la vida de las personas logrando que comprendan una materia tan poco querida pero tan necesaria como respirar.

Así mismo, con este cuaderno de trabajo pretendo no sólo ayudar a los profesores a transmitir su conocimiento, sino también para que los alumnos que por alguna razón no quieran pedir una ayuda personal para el entendimiento de la materia, puedan a través de éste, de manera autodidacta lograr una mejor comprensión de los temas que necesitan y logren entender mejor a su profesor y que este último, de una manera indirecta obtenga un mejor resultado en su clase y en las evaluaciones de sus alumnos.

Este material está compuesto por 5 bloques. En cada uno de ellos se estudia una parte de cada uno de los temas que se verán a lo largo del curso.

Así, ecuaciones cuadráticas se estudia al inicio de cada uno de los cinco bloques.

El tema de congruencia aparece en los bloques primero y tercero.

Proporcionalidad y funciones son abordados en los bloques: primero, tercero y quinto.

Probabilidad y estadísticas se ven al final de cada uno de los cinco bloques.

Transformaciones de figuras simetrías, rotación, traslación y homotecia en el segundo y tercer bloque.

Teorema de Pitágoras en el segundo y un poco de aplicación en el cuarto.

Teorema de Tales en el tercero y algo de su aplicación en el quinto.

Razones trigonométricas y su aplicación en el cuarto.

Solidos de revolución en el cuarto y quinto.

BLOQUE I

Ecuaciones de segundo grado simples

Esta sección está dedicada a la resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando, primero las ideas que los alumnos tengan para intentar resolver o bien utilizando operaciones inversas. Posteriormente, el maestro expone las ideas centrales para garantizar que las ideas concuerden con los conceptos.

Definiciones

Ecuación: Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas en la cual hay elementos conocidos y elementos desconocidos. El elemento desconocido se llama incógnita y se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", aunque puede utilizarse cualquier otra letra.

Ecuación cuadrática*:* es una ecuación en la cual una vez simplificada, la más alta potencia de la incógnita que ocurre es 2. Así, una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ es una ecuación de segundo grado; al término ax^2 se le llama cuadrático, a bx lineal y c es el término independiente; los términos, lineal e independiente pueden estar o no presentes. De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones de segundo grado se clasifican en:

- Completas: $ax^2 + bx + c = 0,$
- Incompletas $ax^2 + bx = 0,$ $ax^2 + c = 0.$

Por ejemplo: $3x^2 + 4x - 5 = 0$ es una ecuación cuadrática completa, mientras que

$$2x^2 + 6x = 0 \quad \text{y} \quad 4x^2 - 64 = 0$$

son ecuaciones cuadráticas incompletas.

En este bloque empezaremos a resolver las ecuaciones de segundo grado, por ensayo y error, es decir, haciendo una tabulación con diferentes valores hasta ver cuáles satisfacen o no, mientras los alumnos van construyendo su conocimiento.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones por ensayo y error elaborando una tabla con los valores propuestos para saber si satisfacen la ecuación o no.

1) $x^2 - 36 = 0$, Para $x = -6, -3, -1, 0, 2, 4, 6$.

Solución:

x	$x^2 - 36 = 10$	**Satisface o no**
-6	$(-6)^2 - 36 = 36 - 36 = 0$	Sí satisface
-3	$(-3)^2 - 36 = 9 - 36 = -27$	No satisface
-1	$(-1)^2 - 36 = 1 - 36 = -35$	No satisface
0	$(0)^2 - 36 = 0 - 36 = -36$	No satisface
2	$2^2 - 36 = 4 - 36 = -32$	No satisface
4	$(4)^2 - 36 = 16 - 36 = -20$	No satisface
6	$(6)^2 - 36 = 36 - 36 = 0$	Sí satisface

Como los valores $\{-6, 6\}$ satisfacen la ecuación entonces las soluciones de la ecuación son $x = 6$ y $x = -6$.

2) $x^2 + 4x - 5 = 0$, Para $x = -7, -5, -3, -1, 0, 1$.

Solución:

x	$x^2 + 4x - 5 = 0$	**Satisface o no**
– 7	$(-7)^2 + 4(-7) - 5 = 49 - 28 - 5 = 16$	No satisface
– 5	$(-5)^2 + 4(-5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$	Sí satisface
– 3	$(-3)^2 + 4(-3) - 5 = 9 - 12 - 5 = -8$	No satisface
-1	$(-1)^2 + 4(-1) - 5 = 1 - 4 - 5 = -8$	No satisface
0	$(0)^2 + 4(0) - 5 = 0 - 0 - 5 = -5$	No satisface
1	$(1)^2 + 4(1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$	Sí satisface

Como los valores $\{-5, 1\}$ satisfacen la ecuación entonces las soluciones de la ecuación son $x = -5$ y $x = 1$.

3) $x^2 + 5x = 0$, Para $x = -5, -3, -1, 0, 1, 3$.

Solución:

x	$x^2 + 5x = 0$	**Satisface o no**
– 5	$(-5)^2 + 5(-5) = 25 - 25 = 0$	Sí satisface
– 3	$(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$	No satisface
– 1	$(-1)^2 + 5(-1) = 1 - 5 = -4$	No satisface
0	$(0)^2 + 5(0) = 0 + 0 = 0$	Sí satisface
1	$(1)^2 + 5(1) = 1 + 5 = 6$	No satisface
3	$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$	No satisface

Como los valores $\{-5, 0\}$ satisfacen la ecuación entonces las soluciones son $x = -5$ y $x = 1$.

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones por ensayo y error dando 6 valores, tanto positivos como negativos, como en los ejemplos.

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$.
2) $x^2 - x - 12 = 0$.
3) $x^2 - 12x - 108 = 0$.
4) $x^2 + 4x - 45 = 0$.
5) $x^2 + 49 = 0$.
6) $x^2 - 25 = 0$.
7) $x^2 - 9 = 0$.
8) $x^2 - 7x = 0$.
9) $x^2 + 8x = 0$.
10) $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
11) $6x^2 - 11x + 3 = 0$.
12) $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
13) $3x^2 - 7x = 0$.
14) $2x^2 - 4 = 0$.
15) $5x^2 - 7 = 0$.

No es difícil observar que para los alumnos no es fácil encontrar las soluciones. De hecho, si en la lista no se dan las soluciones, es probable que no sean capaces de encontrarlas, por ello es conveniente, cuanto antes, enseñarles a resolver las ecuaciones cuadráticas de las formas $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ por factorización. Aquí hay un problema, pues los temas de productos notables y factorización ya no se ven en los programas de segundo ni de tercer grado de secundaria, por lo que hay que enseñarles a factorizar poco a poco en diferentes momentos, de acuerdo a su desempeño.

Factorización de expresiones de la forma $x^2 + bx + c$

Una expresión del tipo $x^2 + bx + c$, es el resultado del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en el siguiente:

Ejemplo

- Factorizar la expresión: $x^2 + 11x + 24$.

  Solución:

  Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x \qquad)(x \qquad).$$

  Se coloca el signo del segundo término $(+11x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(+)(+) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad).$$

  Al ser los signos de los factores iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual a 11, el coeficiente del segundo; estos números son 8 y 3, que se colocan, en el primer factor el mayor, y en el segundo factor el menor, con tal elección no hace falta preocuparse por el signo de los números elegidos:

  $$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3).$$

  Finalmente, la factorización es: $(x + 8)(x + 3)$.

  Puedes hacer el producto $(x + 8)(x + 3)$ para comprobar la igualdad.

Factorización de expresiones de la forma $ax^2 + bx + c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno. Para factorizarla se realizan los pasos aplicados en el siguiente:

Ejemplo

- Factorizar la expresión: $6x^2 - 7x - 3$.

  Solución:

  Se multiplica todo el trinomio por el coeficiente de x^2 que en este caso es 6, dejando indicado el producto de 6 por $7x$

  $$6(6x^2) - 6(7x) - 6(3) = 36x^2 - 6(7x) - 18.$$

  Observamos que

  $$36x^2 = (6x)^2 \text{ y } 6(7x) = 7(6x),$$

  luego, podemos escribir

  $$6(6x^2 - 7x - 3) = (6x)^2 - 7(6x) - 18.$$

  Descomponiendo este trinomio como en el caso anterior, el 1^er^ término en cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$ o sea

  $$(6x \quad)(6x \quad).$$

  Se coloca el signo del segundo término $6(7x)$ en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término $(-)(-) = +$ para obtener el signo del segundo factor:

  $$(6x- \quad)(6x+ \quad).$$

  Dos números cuya diferencia sea 7 y el producto sea 18 son 9 y 2. Entonces tenemos

  $$(6x - 9)(6x + 2).$$

  Pero como al principio multiplicamos el trinomio dado por el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 6, ahora tenemos que dividir entre 6 para no alterar el trinomio, y tendremos

  $$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}.$$

  Pero como ninguno de los binomios es divisible entre 6, descomponemos 6 en los factores $2(3)$ y dividiendo $(6x - 9)$ entre 3 y $(6x + 2)$ entre 2 obtenemos

  $$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{3(2)} = (2x - 3)(3x + 1).$$

  Por lo que $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$.

Ejercicios

En cada caso, factoriza la expresión.

1) $b^2 - 5b - 50$.

2) $27x^2 - 90x + 75$.

3) $3m^2 + 12m - 63$.

4) $y^2 - 6y + 8$.

5) $5m^2 + 13m - 6$.

6) $b^2 - 2b - 35$.

7) $6m^2 + 5m - 6$.

8) $y^2 - 14y + 33$.

9) $14m^2 - 45m - 14$.

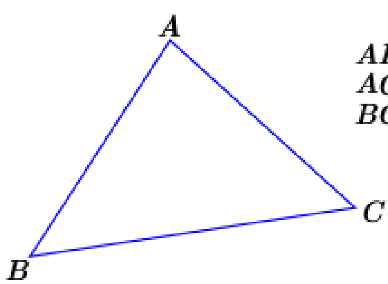
10) $w^2 - 3w - 40$.

Construcción de figuras congruentes y semejantes

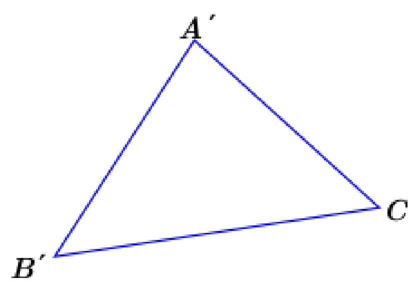
Dedicaremos esta sección a la construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos), analizaremos sus propiedades y enunciaremos los criterios de semejanza y congruencia.

Definición.

Congruencia: Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, si al colocarlas una sobre la otra son coincidentes en toda su extensión. Esto significa que deben tener lados homólogos y ángulos correspondientes iguales:



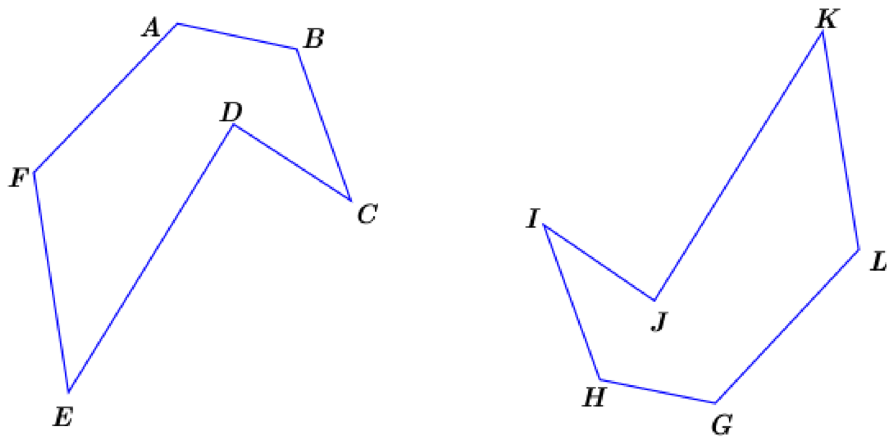
$AB = A'B'$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$
$AC = A'C'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$
$BC = B'C'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$



Cuando un triángulo es congruente con otro, escribimos $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B\,'C\,'$.

Ejercicios

1) Observa las figuras siguientes y coloca sobre el guión la letra "V" si es verdadera o "F" si es falsa la oración.



$\measuredangle A$ es correspondiente al $\measuredangle H$________.

$\measuredangle K$ es correspondiente al $\measuredangle D$_______.

$\measuredangle G$ es correspondiente al $\measuredangle A$________.

$\overline{GH} \cong \overline{AB}$_______.

$\overline{HI} \cong \overline{AF}$________.

$\overline{IH} \cong \overline{DE}$________.

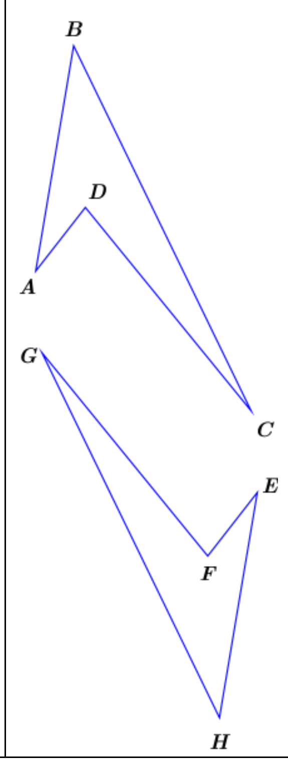
$\overline{LG} \cong \overline{FE}$________.

$\overline{IJ} \cong \overline{FE}$________.

$\measuredangle E \cong \measuredangle H$_______.

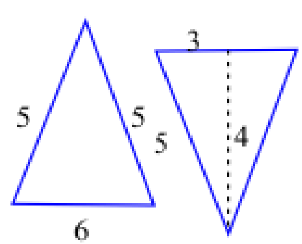
$\measuredangle J$ es correspondiente al $\measuredangle E$ _______.

2) Relaciona las columnas anotando en cada paréntesis la letra que corresponda al elemento homólogo. Considera que el polígono $ABCD$ es congruente con el $EHGF$.

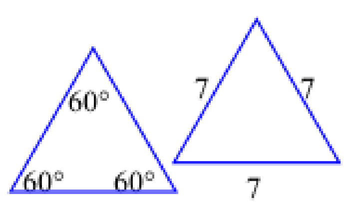
Elementos del polígono $ABCD$	Respuestas	Elementos del polígono $EHGF$	Polígonos
$\measuredangle B$	( )	a) $\overline{EH}$	
$\overline{DC}$	( )	b) $\overline{HG}$	
punto A	( )	c) $\overline{EF}$	
$\overline{\text{BC}}$	( )	d) $\measuredangle E$	
$\measuredangle C$	( )	e) $\measuredangle F$	
punto$D$	( )	f) $\measuredangle G$	
$\overline{AD}$	( )	g) $\measuredangle H$	
$\measuredangle D$	( )	h) punto E	
$\overline{AB}$	( )	i) punto F	
$\measuredangle A$	( )	j) punto G	

3) ¿Qué parejas de triángulos son congruentes?

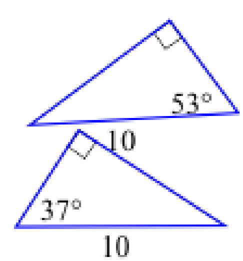
a)



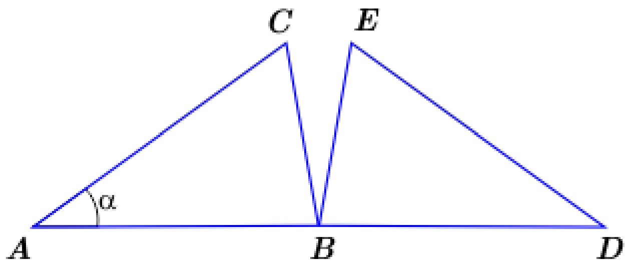
b)



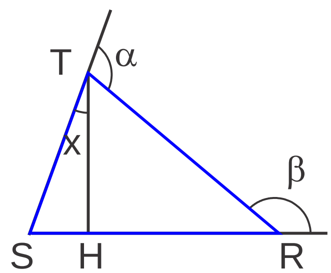
c)



4) En la figura siguiente, los puntos A, B y D son colineales, $\Delta ABC \cong \Delta DBE$, $\alpha = 36°$ y $\measuredangle CBE = 20°$. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DBE$?

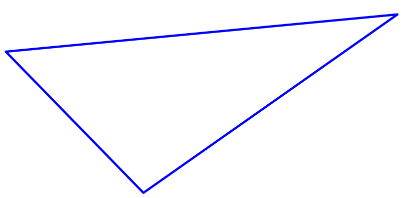


5) En el triángulo SRT de la figura, $\overline{TH}$ es altura, $\alpha = 110°$ y β $= 140°$. ¿Cuál es la medida del ángulo x?

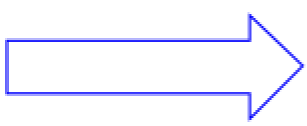


6) Utiliza tu regla y compás para construir una figura congruente a cada una de las siguientes.

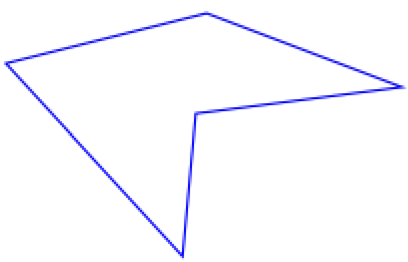
a)



b)



c)



Definición

Figuras semejantes: Son aquellas que tienen la misma forma pero diferente tamaño, es decir, sus lados correspondientes son proporcionales de acuerdo a una razón, factor de escala o constante de proporcionalidad. Cuando dividimos la medida de cualquiera de los lados entre su correspondiente, el número es el mismo, es decir, es constante en todos los lados de la figura, a este número se le llama *razón de semejanza*.

Así, para que dos figuras sean semejantes deben cumplir dos condiciones:

- Sus ángulos correspondientes (homólogos) son iguales.
- Sus lados correspondientes (homólogos) son proporcionales.

Ejemplo

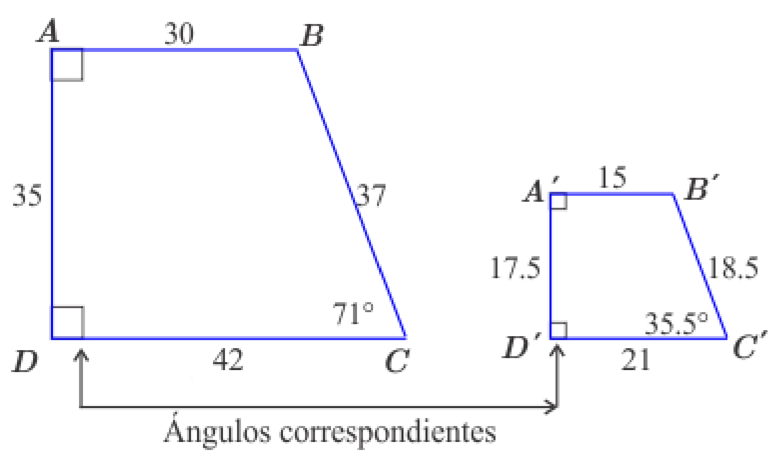
- En la figura siguiente, los trapecios $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes ya que: los ángulos interiores correspondientes tienen igual medida y las razones entre sus lados homólogos son iguales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 2$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = 2$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = 2$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = 2$$

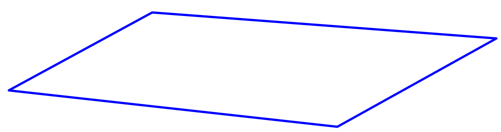


Ejercicios

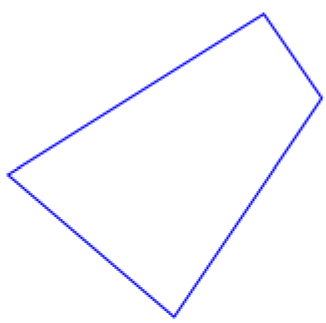
1) Los lados de un triángulo miden 24 m, 18 m y 36 m, respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12 m, 16 m y 24 m, respectivamente. Determina si se cumple la condición de semejanza.
2) Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m y 54 m, respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m, hallar los otros dos lados del triángulo.

3) Dos cuadriláteros tienen, cada uno, sus cuatro lados iguales y la razón entre los lados respectivos es $5:2$. ¿Es suficiente para que sean semejantes? Haz un dibujo y justifica tu respuesta.
4) Dos cuadriláteros tienen cada uno sus cuatro ángulos interiores iguales. ¿Son necesariamente semejantes? Justifica tu respuesta y haz el dibujo correspondiente.
5) En cada caso construye una figura semejante a la que se muestra con la razón de semejanza correspondiente.

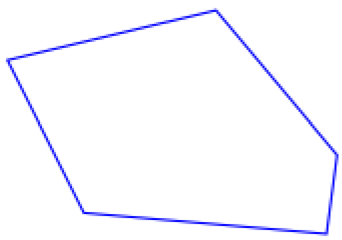
a) $r = \frac{1}{2}$



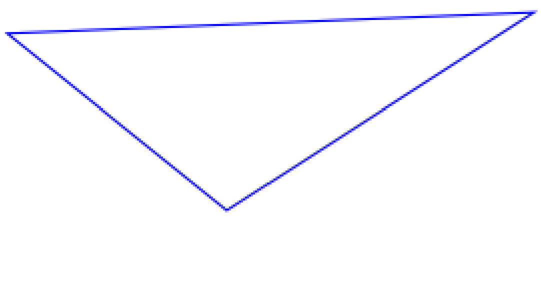
b) $r = \frac{2}{1}$



c) $r = \frac{3}{5}$



d) $r = \frac{4}{3}$



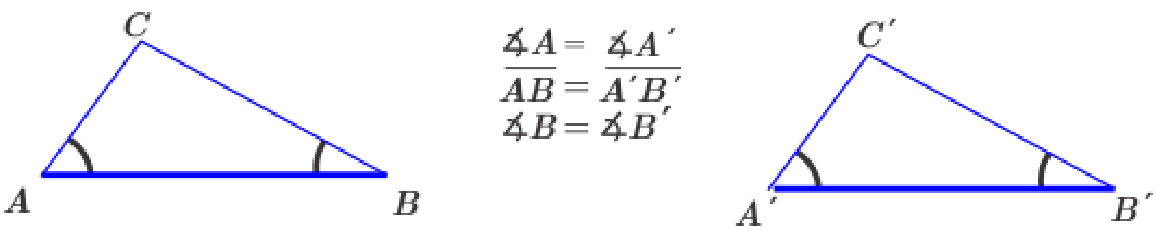
Criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

En el caso de dos triángulos, cuando se cuenta con cierta información, es posible determinar si ellos son congruentes o semejantes. Dedicaremos esta sección a presentar tales criterios.

Criterios de congruencia

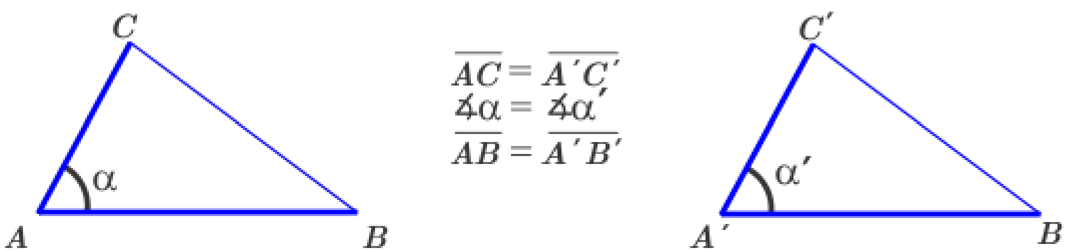
1. Criterio ángulo - lado - ángulo (A. L. A.).

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales, un lado y los ángulos adyacentes a él.



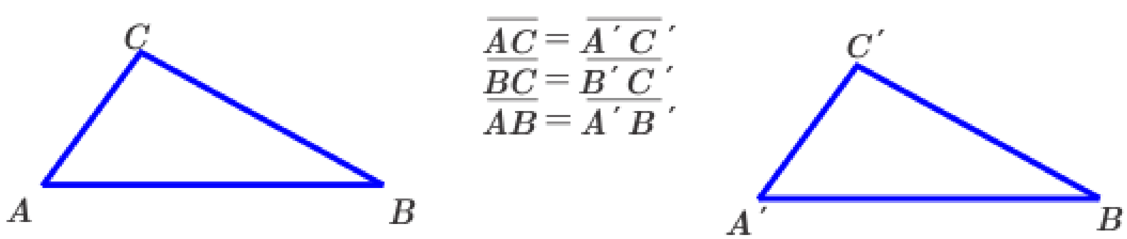
2. Criterio lado - ángulo - lado (L. A. L.).

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales, 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos:



3. Criterio lado - lado - lado (L. L. L.).

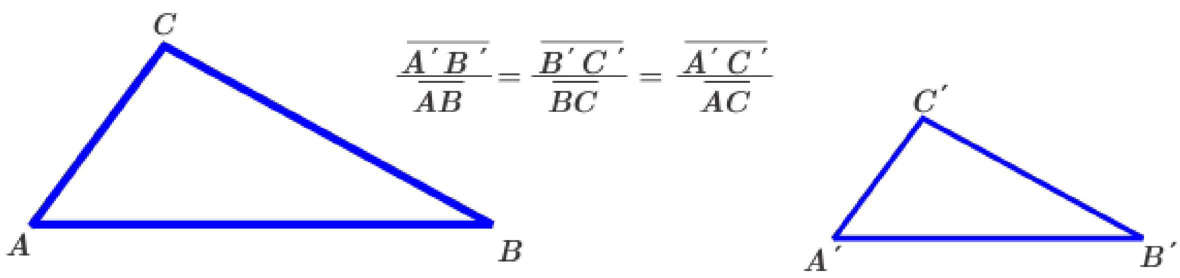
Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales, los 3 lados.



Criterios de semejanza

1. Criterio lado - lado - lado (L. L. L.)

Dos triángulos son semejantes si las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

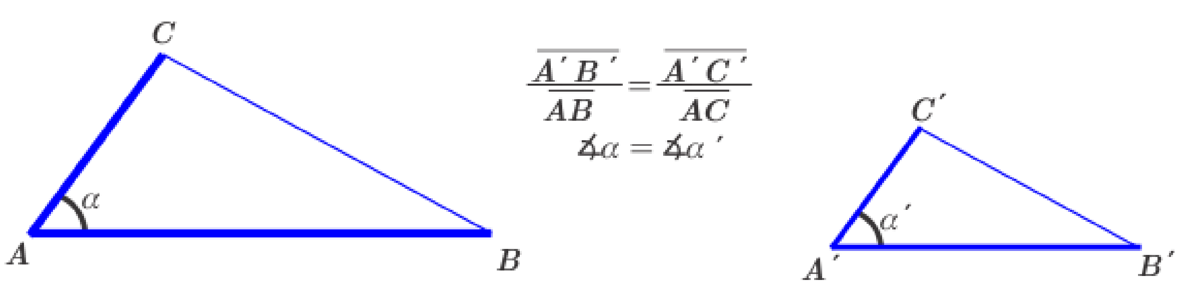


Es importante entender que, aunque escribimos **(L. L. L.)** como en el caso de la congruencia, ello **no** quiere decir que consideramos la igualdad entre los lados correspondientes, en este caso, las longitudes de los lados deben ser proporcionales, es decir, debe cumplirse

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}.$$

2. Criterio lado - ángulo - lado (L. A. L.)

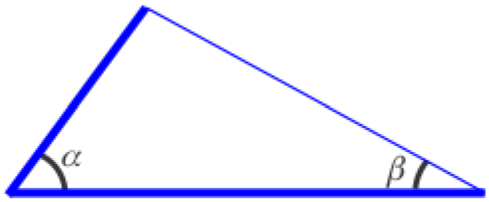
Dos triángulos son semejantes si las longitudes de dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.



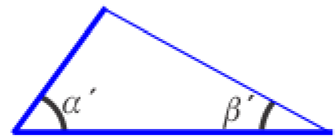
Como en el primer criterio, debemos tener cuidado, debe haber dos pares de lados proporcionales y el ángulo entre ellos, igual.

3. Criterio ángulo - ángulo (A.A.).

Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son iguales.



$\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$
$\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$

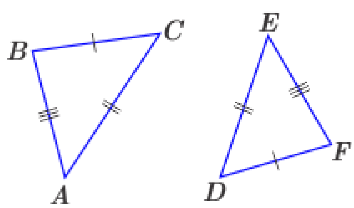


Observamos que en este caso, al haber igualdad entre dos pares de ángulos correspondientes, los dos ángulos restantes también son iguales.

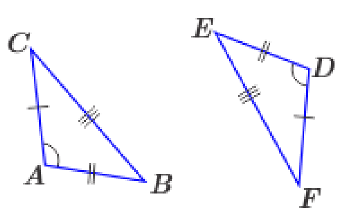
Ejercicios

1) ¿En qué casos se puede asegurar la congruencia del par de triángulos? Indica el criterio utilizado en cada caso.

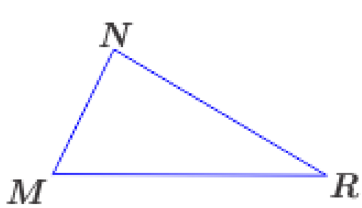
a)



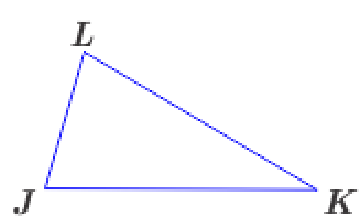
b)



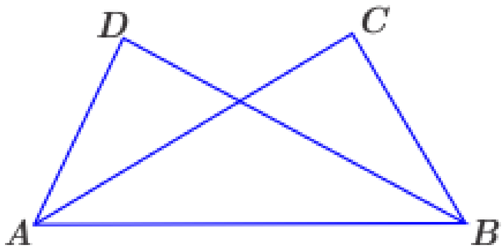
c)



$\overline{MN} = \overline{LJ}$
$\overline{MR} = \overline{JK}$
$\measuredangle R = \measuredangle K$



d)

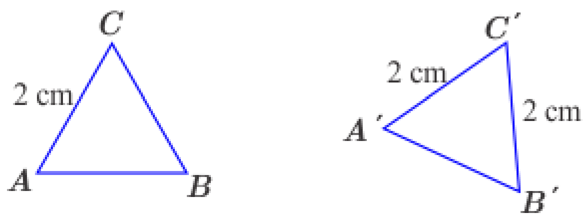


$$\measuredangle DBA = \measuredangle CAB$$
$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$$
$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

2) En cada caso escribe si los triángulos son congruentes o no, y si lo son anota debajo de los paréntesis el criterio.

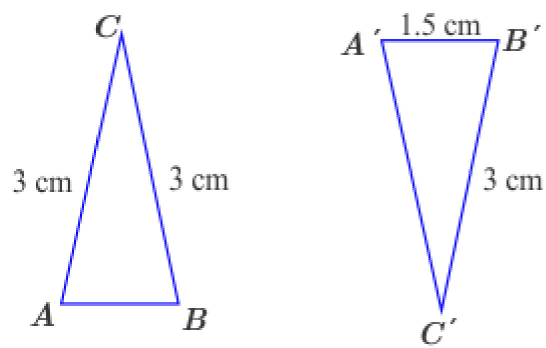
( )

____



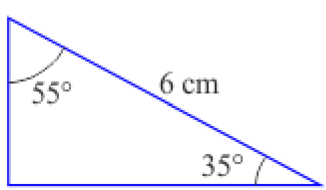
( )

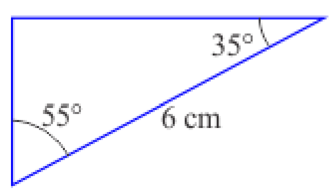
____



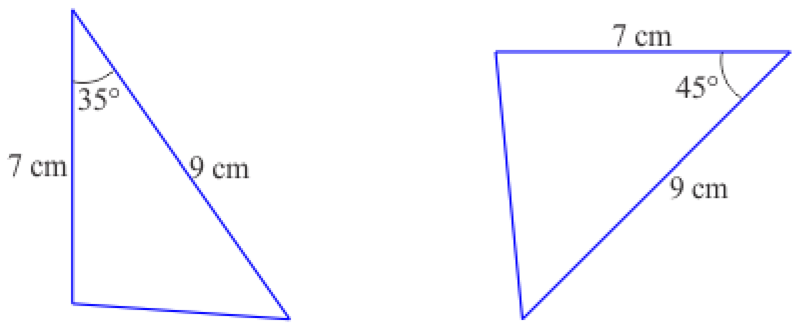
3) Indica si los siguientes triángulos son congruentes, semejantes o nada y justifica:

a)

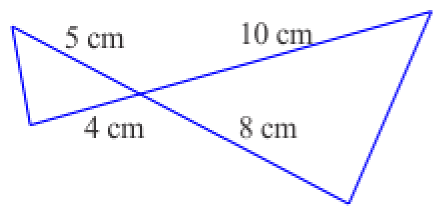




b)



c)



Proporcionalidad y funciones lineales

En esta sección analizaremos varios tipos de representaciones de una función lineal: gráficas, tabulares y algebraicas, asimismo identificaremos las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Una función de proporcionalidad directa o función lineal se expresa de la forma: $y = mx$, siendo m un número cualquiera.

La representación gráfica de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas (x) está dada por el número m, que recibe el nombre de *pendiente*. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje x, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forma con la horizontal.

Si entre dos magnitudes existe una relación de proporcionalidad directa, la función que representa dicha relación es una función lineal.

Ejemplo

- La señora María realizó tres uniformes de la misma talla para unas alumnas de tercer grado. Empleó 7.5 metros de tela guinda, 3 metros de tela blanca y 1.5 carretes de hilo. Observa y completa la tabla siguiente, escribe la ecuación que describe la cantidad de metros de tela guinda necesaria para realizar una cantidad determinada de uniformes, elabora la gráfica y contesta las preguntas que se encuentran a continuación.

Número de uniformes	Metros de tela guinda	Metros de tela blanca	Carretes de hilo
3	7.5	3	1.5
6			
9			
12			
20			

¿Cuánto material necesitará María para hacer cada uniforme de la misma talla?

¿Cuántos metros de tela guinda se necesitan por cada uniforme?

¿Cuántos metros de tela blanca se necesitan por cada uniforme?

¿Cuántos carretes de hilo se necesitan por cada uniforme?

Escribe la ecuación que describe la cantidad de carretes de hilo necesarios para realizar una cantidad determinada de uniformes.

Solución:

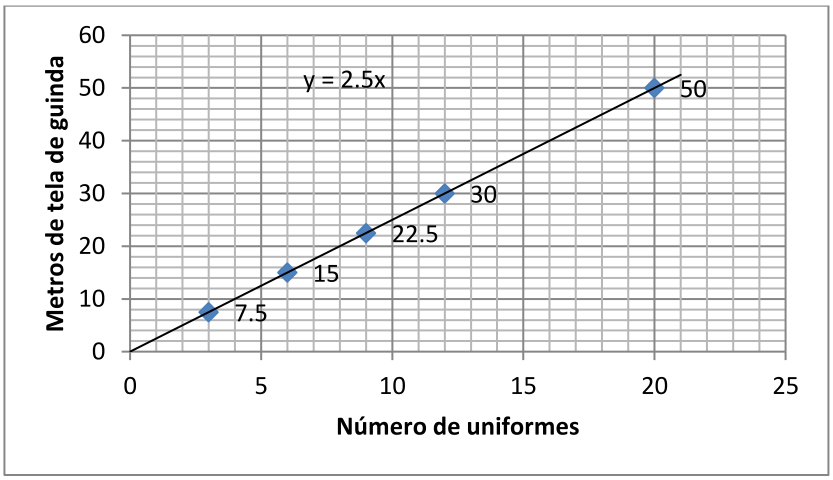
Completamos la tabla

Número de uniformes	Metros de tela guinda	Metros de tela blanca	Carretes de hilo
3	7.5	3	1.5
6	15	6	3
9	22.5	9	4.5
12	30	12	6
20	50	20	10

Considerando la cantidad de uniformes y la cantidad de tela guinda que se requiere para realizarlos, podemos decir que esas cantidades cumplen una relación de proporcionalidad directa.

Observamos que la ecuación $y = 2.5\,x$ describe la cantidad de metros de tela guinda necesaria para realizar una cantidad determinada de uniformes

Ahora dibujamos la gráfica:



Observa que obtuvimos una gráfica lineal. Para calcular la cantidad de material necesario para hacer 20 uniformes, hemos usado una regla de 3.

Con ayuda de la tabla, podemos contestar ahora las preguntas:

Se necesitan 2.5 metros para elaborar cada uniforme.

Se necesita un metro de tela blanca para cada uniforme.

Es necesario 0.5 carretes de hilo por cada uniforme, es decir, medio carrete.

La ecuación que describe la cantidad de carretes de hilo necesarios para realizar una cantidad determinada de uniformes es

$$y = 0.5\,x.$$

Las relaciones del tipo $y = mx\ + b$, con $b \neq 0$ que es la ordenada al origen, se conocen como relaciones afines y, a diferencia de las relaciones de proporcionalidad sus gráficas **no** pasan por el origen.

Ejemplo

- El costo en pesos de un taxi está representado mediante la ecuación $y = 10 + 8x$, donde x representa el número de kilómetros recorridos y y es el costo total por el viaje. Completa los costos en la siguiente tabla, traza la gráfica correspondiente y contesta las preguntas.

Kilómetros recorridos	Costo del viaje
2	26
4	
6	
8	
10	

¿Es ésta una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

¿Cómo es la gráfica de esta relación?

¿Qué diferencia hay con la gráfica del problema anterior?

¿La gráfica de esta relación pasa por el origen?

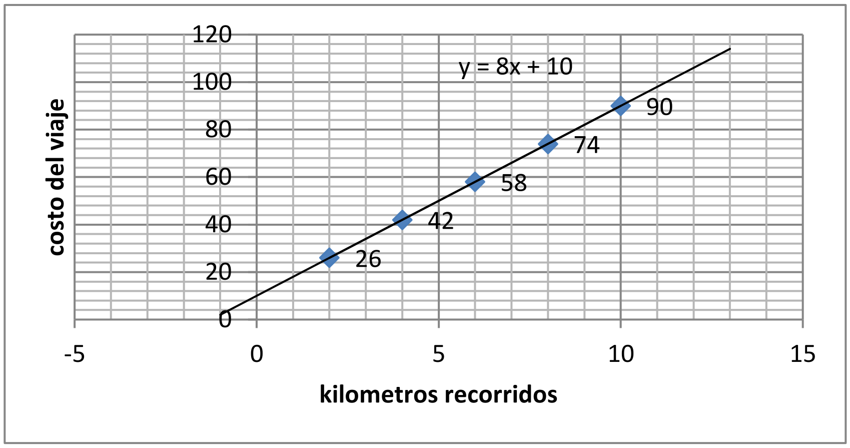
¿Qué representan el 10 y el 8 de la ecuación del costo del taxi?

Solución:

Kilómetros recorridos	Costo del viaje
2	26
4	42
6	58
8	74
10	90

No es una relación de proporcionalidad directa, porque no es de la forma $y = mx$.

La gráfica es



La gráfica de esta relación no es de proporcionalidad directa.

La diferencia entre esta gráfica y la del problema anterior es que ésta no empieza en $(0,0)$ ya que toma el valor 10 cuando $x = 0$.

La gráfica de esta relación no pasa por el origen.

10 pesos es el costo inicial, es independiente de los kilómetros recorridos y el 8 es el precio por kilometro recorrido.

Ejercicios

1) Elabora una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones y grafícalas. Contesta las preguntas de abajo.

$a)\ y = \frac{x}{2}$ $\quad b)\ y = 3x$ $\quad c)\ y = -\frac{x}{2} + 1$ $\quad d)\ y = 3x + 4$

$e)\ 5y = 6x$ $\quad f)\ y = 5x - 2$ $\quad g)\ y = \frac{3x}{4}$ $\quad h)\ y - 11y + 8 = 2x + 3y$

$i)\ 2x - 3y = 0$ $\quad j)\ 5x = 1 - y$ $\quad k) - 2x + y = 3$ $\quad l)\ 2(x - 3) = y - 6$

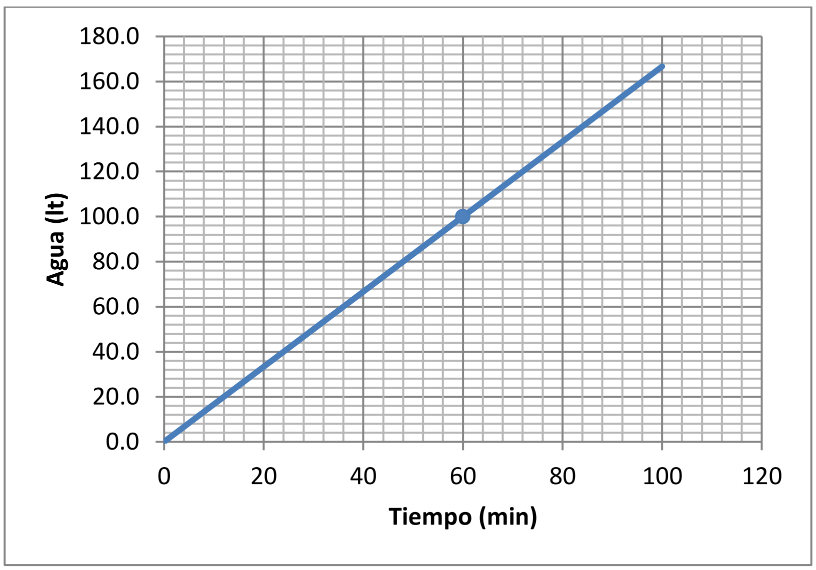
¿Cuál es la ordenada al origen de cada recta?

¿Corresponde a una relación de proporcionalidad directa?

Si se trata de una relación de proporcionalidad directa, ¿cuál es el valor de la ordenada al origen?

Si se trata de una relación afín, ¿cuál es el valor de la ordenada al origen?

2) En cierta época del año, en la comunidad El Olivo se raciona el agua por la falta de lluvia. El director del sistema hidráulico municipal ha decidido abastecer cada casa sólo tres días a la semana. Por tal motivo, la familia de Carlos deja abierta la llave de la cisterna, en esos días, para que se llene. La gráfica siguiente muestra la cantidad de agua que llega, por minuto, a la casa de Carlos: el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical, a la cantidad de agua.



Si la cisterna tiene una capacidad de $1\ 200\ l$, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse?

¿Qué cantidad de agua recibe la familia de Carlos en 30 minutos durante los días en los que se les distribuye?

¿En cuánto tiempo reciben $100\ l$?

¿Qué cantidad reciben en un minuto?

Escribe una ecuación que represente el problema.

Variación cuadrática

En esta sección estudiaremos relaciones de variación cuadrática identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. Analizaremos las representaciones tabular y algebraica.

Las funciones cuadráticas son ampliamente usadas en la ciencia, los negocios, y la ingeniería. El chorro de agua en una fuente, el botar de una pelota, las antenas parabólicas, los platos satelitales y los faros de los automóviles, son modelos a los que corresponde una función cuadrática. Tales funciones tienen como gráfica una parábola, de ahí el nombre de antenas parabólicas. Asimismo, las funciones cuadráticas ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios, graficar el curso de objetos en movimiento, y asistir en la determinación de valores mínimos y máximos. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño. Por ejemplo una aplicación muy común y fácil de entender de una función cuadrática es la trayectoria seguida por objetos lanzados hacia arriba y con cierto ángulo. En estos casos, la parábola representa el camino de la pelota (o roca, o flecha, o lo que se haya lanzado). Si graficamos la distancia en el eje *x* y la altura en el eje y, la distancia del lanzamiento será el valor de x cuando y es cero. Este valor es una de las raíces de una ecuación cuadrática, o intersecciones con el eje x, de la parábola. Es posible encontrar las raíces de una ecuación cuadrática.

Ejemplo

- El lanzamiento de un peso puede ser modelado usando la ecuación

$$y = -0.0241x^2 + x + 5.5$$

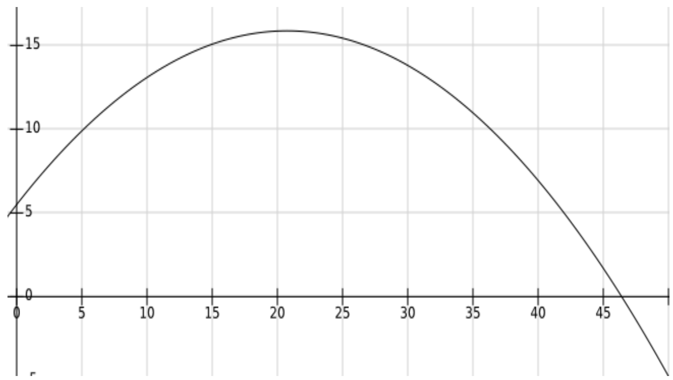
donde x es la distancia recorrida y y es la altura, ambas medidas en pies. ¿Cuál es la longitud del tiro?

Solución:

Elaboramos una tabla tomando valores aproximados:

x	y
0	5.5
40	6.94
45	1.69
46	0.50
46.5	– 0.1
46.4	0

Con los datos obtenidos, o con ayuda de algún programa graficador, dibujamos la gráfica:



Observamos la gráfica vemos que la curva atraviesa el eje x aproximadamente en 46.4 pies, lo que nos indica que es la distancia recorrida.

Ejercicios

1) Un helicóptero dejó caer un automóvil desde una altura de 245 metros. Algunos datos que se registraron son los siguientes:

Tiempo transcurrido en segundos	0	1	2	3	4
Distancia de caída (m)	0	5	20	45	80

a) De acuerdo con la información, completa la siguiente tabla:

Tiempo	**Distancia de caída**	**Altura a la que se encuentra el automóvil**
0	0	245
1	5	240
2	20	
3	45	
4	80	
5		
6		
7		

Responde las preguntas siguientes:

b) ¿Cuánto tiempo tardó el auto en llegar al suelo?

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia d de caída en función del tiempo t transcurrido? Justifica tu respuesta.

$d = 5t^2$ $\qquad$ $d = 5t$ $\qquad$ $d = 25t$ $\qquad$ $d = 5 + t^2$

2) Gisela va a diseñar un jardín con forma de corona circular de un metro de ancho alrededor de una pila circular de 2 m de radio.
   a) ¿Cómo se puede obtener el área del jardín que pretende construir?
   b) ¿Cuál es la representación algebraica que permite calcular el área del jardín?
   c) Realiza una representación tabular y una gráfica.

3) Damián se encuentra en la orilla de la azotea de un edificio de 12 m de altura y lanza una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 5 m/s. Calcular los valores de h y v correspondientes para algunos valores de t.

   Recuerda que

$$g = 9.8 \text{ m/s}$$

$$v = v_o - gt$$

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + h_0.$$

   Determina las representaciones algebraicas para h y v en términos de t.

   Elabora las representaciones tabulares para h y v en función de t.

   Calcula la velocidad con que se moverá la pelota en el momento de alcanzar su máxima altura.

   Calcula la máxima altura que alcanzará la pelota lanzada por Daniel y el instante t en que esto sucederá.

   ¿En qué instante t la pelota tocará el suelo?

4) El abulón rojo es un caracol cultivado para el consumo humano. El tiempo en que el animal alcanza 80 mm, en términos de la temperatura a la que se encuentra el cultivo, se representa con la ecuación $M = 0.20t^2 - 6.8t + 97.8$, donde M es el tiempo medido en meses y t es temperatura del cultivo.

Con la ecuación dada completa la tabla y haz una gráfica que lo represente.

Temperatura °C	**Tiempo necesario para que el abulón rojo mida 80 mm (meses)**
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Responde las preguntas siguientes

Si un abulón se cultiva a 12°C, ¿en cuántos meses medirá 80 mm?

¿Y si se cultiva a 21°C?

Si un abulón rojo tardó 41.8 meses en medir 80 mm de largo, ¿a qué temperatura se cultivó?

¿Cuál es la temperatura a la que el abulón rojo alcanza 80 mm en el menor tiempo posible?

5) En un centro de investigación se estudia la relación entre el número de mosquitos que se desarrollan en una determinada zona y la precipitación pluvial, ¿en qué momento, respecto a la precipitación pluvial, la cantidad de mosquitos es mayor, según los datos de la siguiente tabla?

Precipitación pluvial en pulgadas	**Números aproximado de mosquitos en miles**
0	0
1	
2	16
3	
4	24
5	
6	24
7	
8	16
9	9
10	0

Responde las preguntas siguientes:

¿Cómo varía el número de mosquitos conforme la precipitación pluvial aumenta de 1 a 4 pulgadas?

¿Qué sucede con el número de mosquitos cuando la precipitación pluvial aumenta de 6 a 10 pulgadas?

¿Cuál de las expresiones algebraicas representa la relación entre las pulgadas de precipitación pluvial y el número de mosquitos?

$y = x^2$ $\quad y = 10x - x^2$ $\quad y = x^2 - 10x$ $\quad y = 10x^2 - 1$

Completa la tabla y haz una gráfica represente la situación.

Nociones de probabilidad

En esta sección se espera que el alumno adquiera conocimientos sobre la escala de la probabilidad, el análisis de las características de eventos complementarios, eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etcétera, sabremos con seguridad dónde caerá o cuánto tiempo tomará. Es una experiencia determinista. Si echamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una experiencia aleatoria. La vida está llena de sucesos aleatorios como viajes, accidentes y número de personas que acuden a un almacén entre otros.

La escala de probabilidad va del 0 al 1 y puede expresarse como fracción, decimal o porcentaje, donde:

0 o 0% es para un evento imposible, es decir, que no puede suceder.

$0.5,\ 50\%,\ \frac{1}{2}$ es para un evento equiprobable, es decir, que tiene la misma probabilidad de suceder o no.

1 o 100% es para un evento seguro, es decir, algo que seguro sucede.

Eventos mutuamente excluyentes.

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos en los que si un evento sucede significa que el otro no puede ocurrir. Si bien suelen usarse en teorías científicas, también son parte de las leyes y los negocios. Como resultado, entender los eventos mutuamente excluyentes puede ser importante para una variedad de disciplinas.

La fórmula matemática para determinar la probabilidad de los eventos mutuamente excluyentes es $P(A\ U\ B) = P(A) + P(B)$. Dicho en palabras, la fórmula es "Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que A o B sucedan es igual a la probabilidad del evento A más la probabilidad del evento B.

Ejemplos

1. Sacar una carta de corazones y sacar una carta de espadas, son eventos mutuamente excluyentes, ya que si usamos una baraja de póker común, las cartas son de corazones o son de espadas.
2. Sacar una carta numerada y una carta de letra, son eventos mutuamente excluyentes, ya que las cartas son numeradas o son cartas con letra pero no ambas.
3. Sacar una carta de tréboles roja es un evento imposible pues las cartas de tréboles son exclusivamente negras.
4. No es posible encontrar una sola carta que tenga dos figuras diferentes a la vez.

Eventos independientes

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos). Un caso típico de eventos independientes es el muestreo con reposición, es decir, una vez tomada la muestra se regresa de nuevo a la población donde se obtuvo.

Así, dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no tiene que ver con la ocurrencia de otro.

Por definición, A es independiente de B si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ejemplo

En una prueba de opción múltiple, Luis contestó al azar dos preguntas; cada una tenía cuatro opciones, de las cuales solo una era correcta. Se está calificando la prueba y Luis acertó en una de las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en la otra?

Solución:

Acertar en una pregunta contestada al azar no afecta la probabilidad de acertar en la otra. Por lo tanto, la probabilidad de acertar en la siguiente pregunta es $\frac{1}{4}$.

Eventos complementarios

Dos eventos A y B son complementarios cuando su unión es igual al espacio muestra.

Ejemplo

Al considerar el lanzamiento de un dado, el espacio muestra, es decir, el conjunto de todas las posibilidades que pueden obtenerse, es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Considera los eventos:

A: *que el número obtenido sea par,*

B: *que el número obtenido sea impar,*

C: *que el número obtenido sea menor que* 3,

D: *que el número obtenido sea* 3 *o más*,

E: *que el número obtenido sea* 5 y

F: *que el número obtenido no sea* 5.

¿Son complementarios los eventos A y B?, ¿C y D?, ¿E y F?

Solución:

Los eventos A y B, C y D, E y F son complementarios ya que en cada caso, la unión es el espacio muestra.

Ejercicios

1) El maestro Pedro pide al grupo un voluntario para pasar al frente a resolver un problema de matemáticas. Al no tener respuesta, decide elegir al azar, colocando los nombres de todos sus alumnos en una urna. Si en el grupo hay 9 niñas y 16 niños,
   - ¿Cuál es el total de alumnos en el grupo?
   - ¿Qué es más probable que elija el maestro Pedro, un niño o una niña? ¿Por qué?
   - ¿Hay posibilidad de que elija a una niña?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que elija a una niña?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que elija a un niño?

2) Daniel viajará a Toluca en autobús. Sabe que el autobús cuenta con 40 asientos numerados y que hasta el momento se han vendido 16 lugares.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número de asiento al azar, este esté disponible?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número de asiento al azar, esté vendido?
   - ¿Qué es más probable, que el asiento esté vendido o disponible?
   - ¿Puede suceder que un asiento esté disponible y ocupado al mismo tiempo?
   - ¿Cómo se relaciona el total de asientos con los asientos ocupados y los disponibles?
3) Roberto tiene dos pantalones, uno negro y otro azul; y cinco camisas, dos blancas, una roja, una verde y otra gris. Si decide tomar al azar una prenda en cada caso:
   - ¿Cuáles son todas las posibles formas de vestir?
   - ¿Cuántas posibles formas fueron en total?

- ¿En cuántos casos vestiría camisa verde?
- ¿Cuál es la probabilidad de vestir camisa verde?
- La cantidad de pantalones posibles a vestir, ¿afectó en algo para calcular la probabilidad de vestir camisa verde? ¿Por qué?
- ¿De cuántas formas puede usar el pantalón azul?
- ¿Cuál es la probabilidad de vestir pantalón azul?
- Para calcular esta última probabilidad, ¿cambiará en algo si ya ha elegido camisa, y ésta fue roja? ¿Por qué?

4) Alberto y Lorena juegan a tirar dos dados, uno rojo y uno azul. Apuestan a que adivinarán la suma que obtendrán de los dos dados. Haz una tabla que presente todas las sumas posibles que se pueden obtener al tirar los dados.

• ¿Cuántas formas diferentes de caer tienen los dos dados juntos?

• ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas cada una de las siguientes sumas al lanzar los dados?

$P(7) =$

$P(5) =$

$P(9) =$

$P(12) =$

$P(3) =$

$P(4) =$

$P(8) =$

• Si lanzaras los dos dados, ¿por cuál suma apostarías? ¿Por qué?

• ¿Qué suma es menos probable que obtengas al lanzar los dos dados?

• ¿Son eventos independientes los resultados del dado azul y los del dado rojo? ¿Por qué?

• ¿Son eventos mutuamente excluyentes los resultados cuya suma es menor a 6 y aquellos cuya suma sea mayor a 9? ¿Por qué?

• ¿Son eventos complementarios los resultados cuya suma es menor o igual a 7 y aquellos cuya suma es mayor o igual a 8? ¿Por qué?

5) Si una bolsa de gomitas de dulce contiene 6 gomitas rojas, 7 verdes, 4 amarillas, 5 naranjas y 3 moradas: ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una al azar, ésta sea amarilla?

Diseño de encuestas y presentación de datos

En esta sección, se espera que el alumno sea capaz de diseñar una encuesta o un experimento, identificando la población en estudio; discutir sobre las formas de elegir el muestreo; obtener los datos de una muestra y buscar las herramientas convenientes para su presentación.

Los siguientes conceptos son básicos de la estadística, por ello, aunque son conocidas, incluimos las siguientes:

Definiciones

Población: es el conjunto de todos los elementos sobre los que se realiza la observación de algunas características, con el propósito de medir y predecir para otras poblaciones parecidas o para un momento futuro.

Muestra: es el conjunto de elementos representativos de una población. El número de elementos de la muestra siempre es menor que el número de elementos de la población.

Muestreo: son las técnicas utilizadas para seleccionar los elementos que van a conformar la muestra.

Experimento: es un proceso elaborado para recolectar datos. Los datos pueden ser numéricos o no.

Encuesta: consiste en un conjunto de preguntas diseñadas para obtener datos de una muestra, acerca de cierta característica, sin intervenir ni modificar las condiciones de la muestra encuestada.

Ejemplo

- ¿Qué consideraciones debemos hacer para calcular cuántas personas van a votar por un partido opositor en las siguientes elecciones?

  Solución:

  Una posibilidad es la siguiente:

  La población consiste en todas las personas que tienen credencial de elector vigente.

  La muestra debe incluir igual cantidad de: hombres y mujeres, personas que reciben un salario y personas que no tienen un trabajo formal remunerado, de todos los niveles socioeconómicos.

  Para el muestreo deben tomarse las listas oficiales y se va a seleccionar, por ejemplo, a la persona que aparece cada 20, contando en orden en que están en la lista.

La encuesta consiste de 10 preguntas en las que las primeras 5 se relacionan con la actividad y el nivel socioeconómico del encuestado y las otras 5 preguntas tienen que ver con el partido de su preferencia y su intención de voto.

Ejercicios

1) Lucy, Carlos, Ximena y Rafael harán una encuesta para estimar el ahorro anual de una persona que viaja en transporte público en lugar de usar su automóvil.

   Para estimar el gasto anual en gasolina de una persona que viaja en automóvil han elaborado las siguientes preguntas.

   Rafael: ¿Cuánto gastas exactamente en gasolina al año?

   Lucy: ¿Aproximadamente cuánto gastas en gasolina cada semana?

   Carlos: ¿Más o menos cuánto gastas en gasolina al año?

   Ximena: ¿Cuál es tu gasto diario en gasolina?

   - Explica cuál de las preguntas anteriores es más adecuada y por qué las otras tres no lo son tanto.
   - ¿Cómo se puede estimar el gasto anual en gasolina a partir del gasto aproximado por semana?
   - Subraya, de las siguientes tres preguntas relativas al costo de un automóvil, la que te parezca más adecuada para incluirla en la encuesta.
   - ¿Aproximadamente cuánto cuesta un automóvil?
   - ¿Cuánto te costó tu automóvil cuando lo compraste?
   - ¿Cuánto cuesta un automóvil del modelo que tienes?
   - Para conocer el gasto promedio anual por la compra de un automóvil se requiere saber el precio al que se compró y estimar cuántos años podrá utilizarse el vehículo. Con ambos datos, ¿cómo se puede calcular el gasto promedio anual?

Para conocer el gasto anual aproximado por el uso de un automóvil es necesario conocer cuánto se gasta por los siguientes conceptos.

a. Gasolina.
b. Compra del automóvil.
c. Pago de estacionamientos.
d. Reparaciones.

e. Cambio de llantas.
f. Seguro del automóvil.
g. Tenencia.
h. Otros gastos.

Reúnete con tus compañeros. Apliquen la encuesta, platiquen qué datos vale la pena presentar y organícenlos en tablas o gráficas.

2) Cuatro compañeros de un salón de secundaria, Adela, Samuel, Rosa y Cristóbal, harán una encuesta sobre los gustos musicales de las personas en su comunidad. Plantearán preguntas como las siguientes: "¿Qué tipo de música te gusta más?, ¿cuál es tu canción favorita?, ¿qué canción pondrías para bailar?, ¿y para escuchar mientras estudias?, cómo escuchas música: ¿en la radio?, ¿en un estéreo?, ¿en internet?, ¿con un reproductor de MP3?, ¿en tu teléfono celular?

   Explica, en tu cuaderno, si estás o no de acuerdo en cada una de las propuestas siguientes.

   - Adela: Para terminar la encuesta pronto, conviene entrevistar a pocas personas, por ejemplo, sólo a diez alumnos de nuestro salón.
   - Cristóbal: No, necesitamos una muestra más grande; hay que entrevistar a todos los alumnos y profesores de la escuela, y también al director y a todo el personal administrativo.
   - Rosa: No, para que el estudio esté completo hay que encuestar a algunos alumnos y profesores, pero también a personas fuera de la escuela; por ejemplo, amigos o familiares.
   - Samuel: ¡Exacto! y también es importante que las personas sean de distintos rangos de edades: niños, jóvenes, adultos, ancianos.

3) En un estudio sobre violencia en relaciones de pareja entre jóvenes se hicieron varias preguntas, una de ellas fue la siguiente.

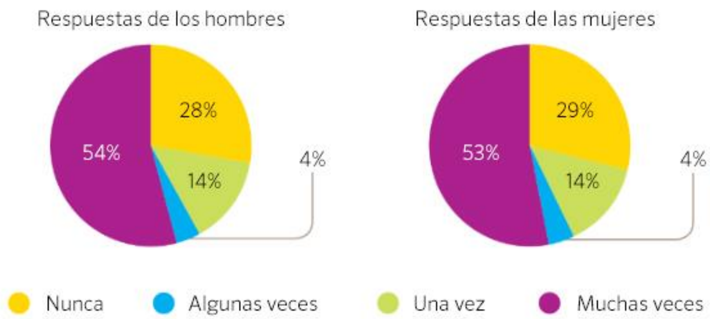
   ¿Tu novio, pareja o compañero sexual ha estado celoso de amigos o familiares?

   ( ) Nunca. ( ) Una vez. ( ) Algunas veces. ( ) Muchas veces.

   A continuación, se muestran de distintas maneras, las respuestas de las personas encuestadas.

Presentación I

Presentación II



Presentación III

Presentación IV

Nunca	1 629
Una vez	800
Algunas veces	229
Muchas veces	3 058

Respondan, en parejas, lo siguiente.

a. ¿Qué presentaciones muestran la cantidad de personas que respondieron?
b. ¿Qué presentaciones muestran claramente que poco más de la mitad de los entrevistados respondió "muchas veces"?
c. ¿Qué diferencia hay entre las presentaciones I y II?
d. ¿Qué diferencia hay entre las presentaciones III y IV?
e. Expliquen cuál de las cuatro maneras les parece más adecuada para presentar los resultados.

Retos

1. Ayuda a Josefina a resolver el acertijo que le puso su profesor.

   ACERTIJO

   Completa la cuadrícula con las letras A, B, C, D y E de manera que las letras no se repitan en una misma fila, ni en una misma columna, ni tampoco en una diagonal.

2. Sustituye los números por las letras correspondientes y escribe las palabras sobre la línea.

$6 = o$	$4 = u$	$8 = p$	$1 = j$	$2 = k$
$3 = l$	$0 = m$	$5 = i$	$7 = z$	$9 = a$

   Busca relaciones entre las palabras de la columna de la izquierda y las de la derecha. Utiliza el paréntesis para indicar la afinidad que encontraste.

I ( ) $c9b9336$ ________________ (a) $0et93$ ________________

II ( ) $t43589n$ ________________ (b) $fr4t9$ ________________

III ( ) $c6ne16$ ________________ (c) $h586dr606$ ________________

IV ( ) $t5t9n56$ ________________ (d) $9n5093$ ________________

V. ( ) $g49y9b9$ ________________ (e) $f36r$ ________________

BLOQUE II

Ecuaciones de segundo grado por factorización

En esta sección, la intención es mostrar al alumno el uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Para factorizar una ecuación de segundo grado, primero hay que analizarla para saber de qué tipo es, de esta manera podemos detectar, en muchos casos, si se puede factorizar y qué tipo factorización usar, para eso debemos recordar que factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Supongamos que la ecuación tiene la forma: $ax^2 + bx = 0$; para obtener las raíces de la ecuación se considera el factor común, y una de sus raíces siempre es cero. En el bloque anterior, vimos que cuando tenemos una ecuación de la forma $x^2 + bx + c$, intentamos factorizar encontrando dos valores que multiplicados den c y cuya suma sea b.

Ejemplos

1. Determina las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 0$.

   Solución:

   Se busca el factor común de $x^2 - 5x$, que en este caso es x y obtenemos:

$$x(x - 5) = 0.$$

   Para que el producto sea cero, alguno de los dos factores debe ser cero, entonces cada factor se iguala a cero y se resuelve cada una de las ecuaciones de primer grado. Así

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0,$$

   es decir,

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 5.$$

   Finalmente, las soluciones de la ecuación son:

$$x = 0 \quad \text{y}\, x = 5.$$

2. Determina las raíces de la ecuación $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$.

   Solución:

   Lo primero que debemos hacer es desarrollar los productos notables y simplificar la ecuación:

$$(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$$

$$x^2 - 6x + 9 - (4x^2 + 20x + 25) + 16 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 + 16 = 0$$
$$-3x^2 - 26x = 0.$$

Posteriormente factorizamos el factor común.

$$x(-3x - 26) = 0.$$

Igualando cada factor a cero tenemos

$$x = 0 \quad \text{o} \quad -3x - 26 = 0,$$

así

$$x = 0 \quad \text{o} \quad -3x = 26,$$

de donde

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{26}{3}.$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación son:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{26}{3}.$$

Resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución:

Observamos que es una ecuación de la forma $x^2 + bx + c$ y se factoriza el trinomio siempre que sea posible.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 5)(x - 2) = 0.$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación resultante

$$x - 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 5 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación son: $x = 5$ y $x = 2$.

3. Resuelve la ecuación $6x^2 - 7x - 3 = 0$.

Solución:

Observamos que es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$ y se factoriza la expresión si es posible.

$$6x^2 - 7x - 3 = 0.$$

Se multiplica y divide por el coeficiente de x^2 toda la ecuación:

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = 0.$$

Se realiza la operación en los términos cuadrático e independiente. En el término lineal se deja indicado

$$\frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = 0.$$

Factorizamos el numerador:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6} = 0.$$

El denominador se descompone en sus factores primos $(6 = 3 \cdot 2)$.

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{3 \cdot 2} = 0$$

Se realiza la simplificación.

$$(2x - 3)(3x + 1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero y se resuelve cada ecuación.

$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad 3x + 1 = 0$$

$$2x = 3 \quad \text{o} \quad 3x = -1$$

Por tanto, las raíces o soluciones de la ecuación son:

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{-3}.$$

Ejercicios

Emplea el método factorización y resuelve las ecuaciones siguientes.

1) $x^2 - 5x - 6 = 0.$

2) $x^2 - 15x + 56 = 0.$

3) $x^2 + 11x + 24 = 0.$

4) $20x^2 + 3x - 2 = 0.$

5) $z^2 - 5z = 6.$

6) $y^2 - y - 20 = 0.$

7) $x^2 + 6x = 0.$

8) $7x^2 - 5x = 0.$

9) $4x^2 - 8x = 0.$

10) $(y + 4)^2 = (4 - y)(4 + y).$

Transformaciones: traslación, rotación y simetrías de figuras.

En esta sección haremos un análisis de las propiedades de la traslación y la rotación de figuras.

Cuando se traza una figura en un plano cartesiano, cada uno de sus puntos está determinado por sus coordenadas (x, y).

Estas figuras pueden sufrir transformaciones matemáticas que modifican su posición, orientación o tamaño. Algunas de las transformaciones que pueden sufrir son las siguientes:

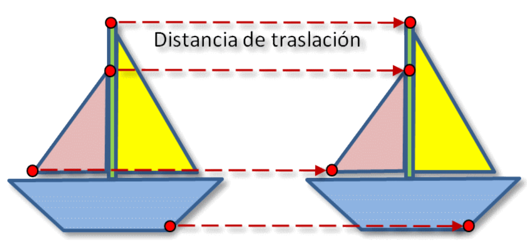
Definición

Traslación: es el movimiento directo de una figura en la que todos sus puntos se mueven sin sufrir modificación de tamaño u orientación:

Sus coordenadas se mueven en la misma dirección y con la misma distancia.

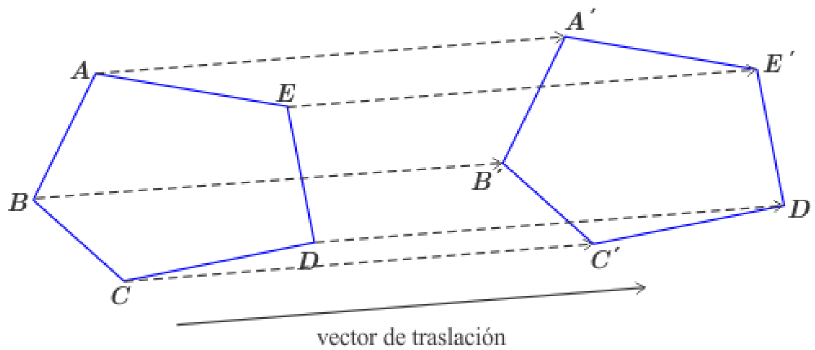
El resultado de una traslación es otra figura idéntica que se ha desplazado cierta distancia en una dirección determinada.

Cuando movemos un mueble en alguna dirección lo estamos trasladando. Por ejemplo, el tren se traslada a lo largo de una vía y el ascensor nos traslada de una planta a otra. Estas y muchas otras más son situaciones en las que el movimiento de traslación está presente en nuestras vidas.



Para trasladar un polígono debemos de considerar lo siguiente:

a) Trazar una recta por uno de los vértices de la figura en la dirección deseada.
b) Posteriormente se trazan paralelas a la recta dibujada anteriormente, para cada uno de los vértices de la figura.
c) Se elige una distancia d cualquiera para trasladar la figura. Esa misma distancia se aplica en cada una de las paralelas dibujadas. Uniendo los puntos obtenidos se obtiene la imagen de la figura dada.



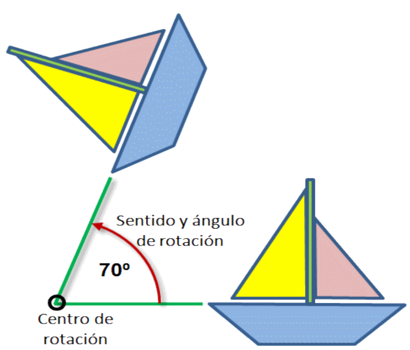
Definición

Rotación o giro: es un movimiento alrededor de un punto que mantiene la forma y el tamaño de la figura original.

Una rotación está determinada por los siguientes tres elementos:

1. Un ángulo que determina la amplitud de la rotación.
2. Un punto llamado centro de rotación.
3. Un sentido de la rotación que puede girar a la derecha o izquierda, es decir, el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o en el contrario.

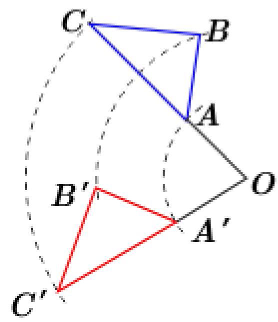
La vida cotidiana está llena de situaciones en las que la rotación o giro está presente. Cuando abrimos o cerramos una puerta estamos haciendo una rotación, sobre un punto o centro de rotación, las ruedas de nuestra bicicleta giran sobre el eje central, al igual que los pedales, giramos al montar en los caballitos de un carrusel, al abrir y cerrar el abanico hacemos que gire sobre un punto, al mover la ruleta hacemos que gire igualmente sobre su centro.



Para rotar una figura debemos considerar lo siguiente:

Se escoge un punto O llamado centro de rotación. Se traza una línea del centro O hasta uno de los vértices, digamos A, medimos el ángulo con el queremos rotar la figura, trazamos una línea del centro con la cual se marca el ángulo y con el compás, se toma la medida desde el centro hasta uno de los vértices, y con ese radio se traza un arco de circunferencia hasta la línea que marca el ángulo. Marcando el vértice rotado A'.

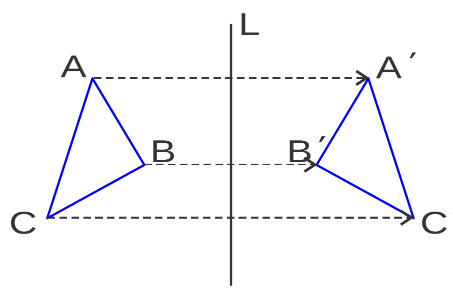
Para rotar los otros vértices debemos medir el ángulo que corresponde al arco dibujado con el vértice A y mantenerlo, para que la forma de la figura no cambie. Además, debemos conservar el ángulo de giro. La figura obtenida es congruente con la primera. En la figura siguiente mostramos una rotación del triángulo con vértices A, B y C.



Simetría axial

La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de *eje de simetría*. En la simetría axial se da el mismo fenómeno que en una imagen reflejada en el espejo.

Simetría axial de un triángulo:



Los puntos que pertenecen a la figura simétrica son llamados puntos homólogos, es decir, A' es homólogo de A, B' es homólogo de B y C' es homólogo de C. Además, las distancias existentes entre los puntos de la figura original son iguales que las distancias entre los puntos correspondientes de la figura simétrica. En este caso: La simetría axial se puede dar también en un objeto con respecto de uno o más ejes de simetría.

Si se doblara la figura sobre el eje de simetría trazado, se podría observar con toda claridad que los puntos homólogos de las partes opuestas coinciden, es decir, ambas partes son congruentes.

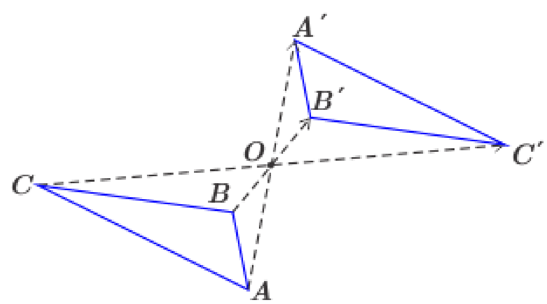
Simetría central.

La simetría central, en geometría, es una transformación en la que a cada punto se le asocia otro punto llamado imagen, que debe cumplir las siguientes condiciones:

a) El punto y su imagen están a igual distancia de un punto llamado centro de simetría.

b) El punto, su imagen y el centro de simetría pertenecen a una misma recta.

Simetría central del punto *O:*



Definición

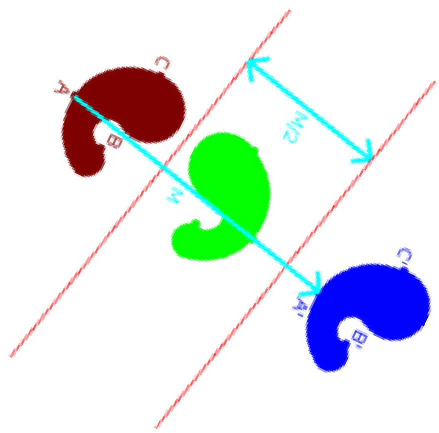
Reflexión: Es el proceso de modificar, copiando todos los puntos de una figura a otra posición equidistante de una recta denominada *eje de simetría*, de manera que el resultado es una imagen especular (espejo) de la original.

La forma más simple de simetría es la simetría de “Reflexión” o “Espejo” La simetría es un rasgo característico de formas geométricas, entidades abstractas y objetos.

Ejemplos

1. Observa la figura siguiente. La figura verde es la reflexión, tanto de la figura marrón, como de la azul: De la figura marrón con respecto a la primera recta de izquierda a derecha, y de la figura azul con respecto a la segunda recta de izquierda a derecha.

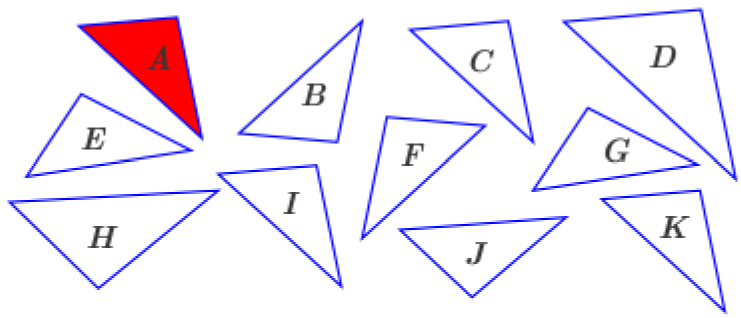
Otra manera de ver la figura es considerando la figura marrón y reflejándola con respecto a la primera recta de izquierda a derecha, y a la figura obtenida, la verde, reflejarla con respecto a la segunda recta para obtener la azul.



2. En la naturaleza podemos encontrar muchas simetrías, como en una mariposa o en una fruta. También encontramos muchas simetrías en los objetos que utilizamos en nuestra vida diaria, como en un vaso o un envase de gaseosa, en el paisaje siguiente, vemos la montaña reflejada en el agua, como si fuera un espejo.

Ejercicios

1) Imagina que trasladas el triángulo coloreado, es decir, lo deslizas en una sola dirección, sin girarlo ni levantarlo del papel ni modificando sus medidas, y lo dejas en otro lugar.



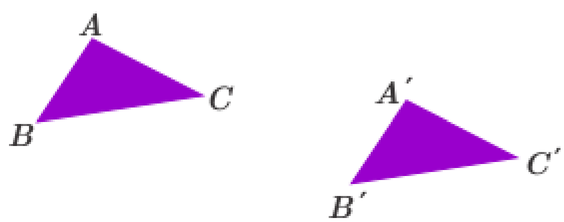
¿Puedes hacerlo coincidir con alguno de los otros triángulos?

2) En la figura, el triángulo $A'B'C'$ es producto de una traslación del triángulo ABC.

a) Traza los segmentos. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

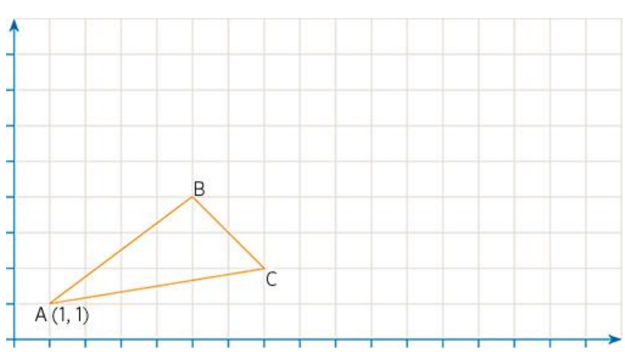
b) Subraya las afirmaciones que son verdaderas respecto a los segmentos que trazaste.

- Son perpendiculares entre sí.
- Son paralelos entre sí.
- Tienen la misma medida.
- Tienen diferente medida.



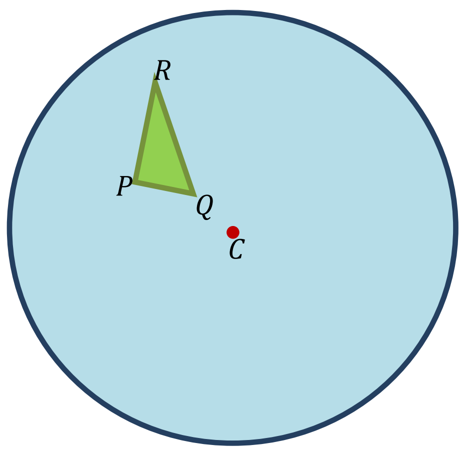
3) En el siguiente plano cartesiano se trasladará el triángulo ABC de manera que el vértice A', el trasladado de A, quede en las coordenadas $(7, 5)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de B' y de C'?

Traza el triángulo que resulta de la traslación.

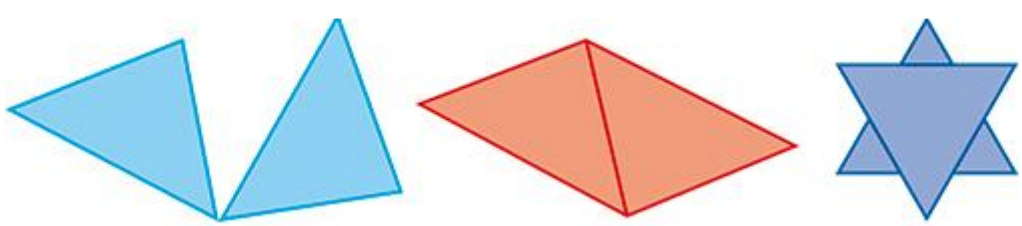


4) Realiza que se lo que se indica a continuación.

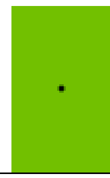
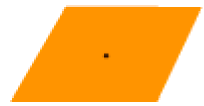
   a) Recorta en papel transparente, un círculo del mismo tamaño que el de abajo.
   b) Colócalo sobre esta hoja de manera que su centro coincida con el punto C.
   c) Sujétalo de manera que pueda girar sobre su centro (usando, por ejemplo, la punta de un lápiz o de un alfiler).
   d) Calca el triángulo PQR en el círculo.
   e) Gira el círculo y marca los vértices del triángulo en el lugar donde haya quedado.
   f) Quita el círculo y traza el nuevo triángulo: has rotado el triángulo PQR. Anota $P'Q'R'$ en los vértices respectivos.
   g) Une el punto C con los puntos P y P'. Mide el ángulo PCP' y anota su medida.
   h) Haz dos o tres rotaciones más del triángulo PQR.



5) Encuentra, en cada pareja de figuras, el centro de rotación que transforma un triángulo en el otro.

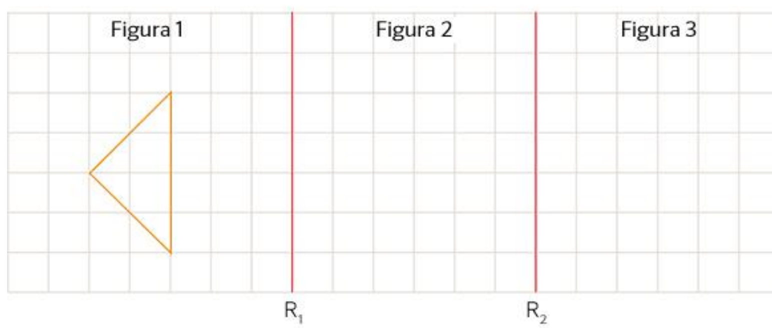


6) Considera que el punto marcado dentro de las figuras de la tabla es el centro de rotación y que cada figura girará según el ángulo indicado. Dibuja, en la tercera fila, cómo quedarán las figuras luego de rotarlas.

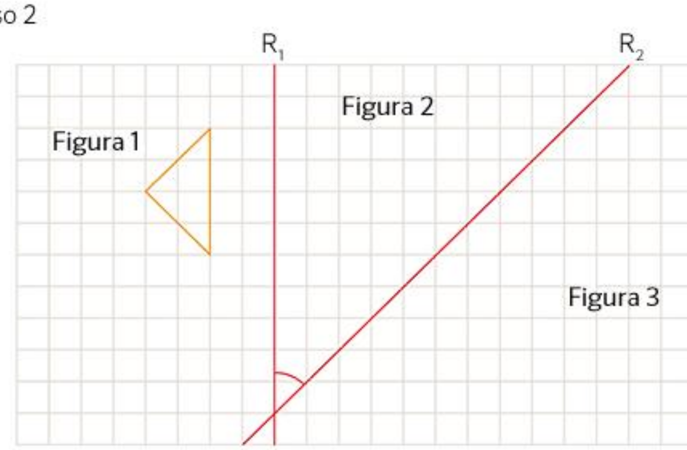
Figura inicial			
Ángulo de rotación	90°	180°	180°
Figura final			

7) En cada caso, traza la figura 2 simétrica a la figura 1 respecto a la recta R_1. A continuación, traza la figura 3 simétrica a la figura 2 respecto a la recta R_2.

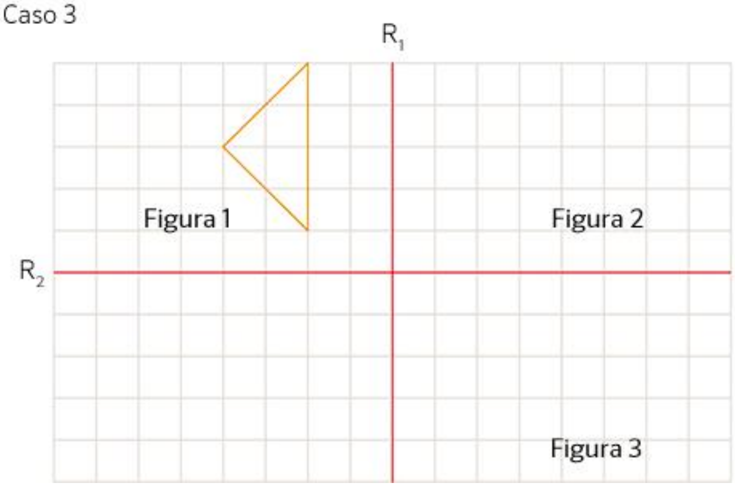
Caso 1



Caso 2



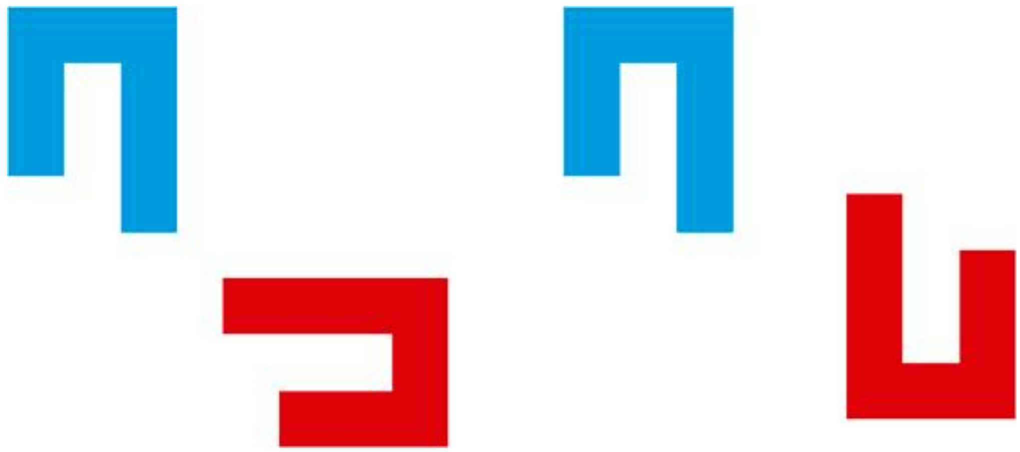
Caso 3



8) Completa la tabla en base al ejercicio anterior. Analiza, en cada caso.

Pregunta	Caso 1	Caso 2	Caso 3
¿Con qué transformación (rotación, traslación, simetría) se obtiene directamente la figura 3 a partir de la 1?			
Considera los lados de los cuadritos como unidades de medida. ¿Cuál es la magnitud de la traslación?			
¿Cómo se relacionan la distancia entre las rectas y la magnitud de la traslación?			
¿Cuál es el centro de rotación?			
¿Cuál es el centro de simetría?			
¿Cuánto mide el ángulo de rotación?			
¿Cómo se relacionan el ángulo de rotación y el ángulo entre las rectas R_1 y R_2?			

9) Observa las figuras. En cada caso, identifica las transformaciones necesarias para obtener la figura roja a partir de la azul. Traza, según corresponda, el eje o el centro de simetría.



Construcción de diseños

El objetivo de esta sección es que el alumno construya diseños que combinen la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras y sea capaz de identificar tales transformaciones en diseños que se le proporcionan.

Ejemplos

Elaboraremos, en cartulina, doce triángulos isósceles como el siguiente. El lado mayor mide 5 cm y los ángulos iguales, 30°. Reproduce los diseños que se muestran y contesta las preguntas.

Figura base

1. Observa la flecha y contesta.

a) ¿Qué triángulo es simétrico al triángulo 9 respecto a la línea roja?

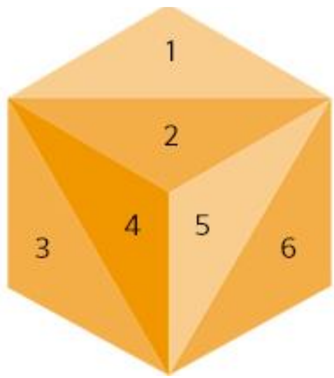
b) ¿Qué triángulos son traslaciones del triángulo 2?

Solución:

a) El triángulo número 3 es simétrico al triángulo 9 respecto a la línea roja.

b) Los triángulos $4, 6, 7, 9$ y 11 son traslaciones del triángulo 2.

2. Mira el hexágono



a) Encuentra los triángulos que sean simétricos al triángulo 3 respecto a un eje.

b) Halla los triángulos que resultan de aplicar una rotación al triángulo 3.

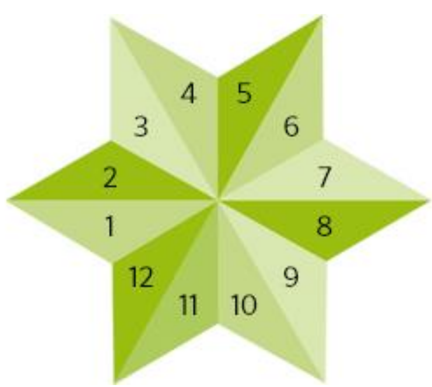
Solución:

a) Los triángulos que simétricos al triángulo 3 respecto a un eje son: $1, 4$ y 6.

b) Los triángulos que resultan de aplicar una rotación al triángulo 3 son: 2 y 5.

Ejercicios

1) Observa la estrella y contesta.



a) El triángulo 7 se obtiene a partir del triángulo 3 por una rotación. ¿Cuál es el centro? ¿Y el ángulo de rotación?

b) El triángulo 12 se obtiene a partir del triángulo 5 por una traslación. ¿Cuál es la magnitud de la traslación?

c) ¿Qué transformaciones se aplicaron al triángulo 2 para formar la estrella?

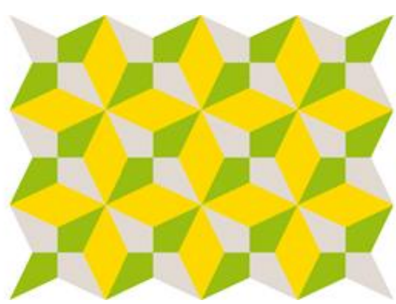
2) Considera la siguiente figura  base. Escribe, en cada caso, si para formar el diseño se aplicó a esta figura base una traslación, una rotación o una simetría. Puede haber más de una transformación.

3) Traza, en una hoja de papel, ocho figuras base como la anterior. El cuadrado debe medir 2 cm de lado. Recórtalas, inventa un diseño y pégalo en el siguiente espacio. Anota las transformaciones que hayas aplicado.

4) Observa los logotipos.

Responde "¿En cuáles hay simetrías, traslaciones o rotaciones?". Identifica, en el caso de las simetrías centrales o axiales, el centro o eje de simetría. Para las rotaciones, ubica el centro y el ángulo de rotación.

5) Observa el diseño. Identifica las figuras básicas y describe las transformaciones que se aplicaron a esas figuras.

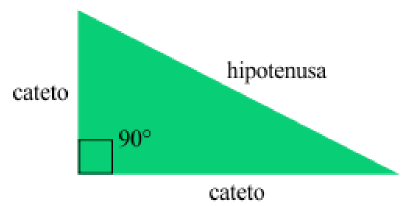


Teorema de Pitágoras

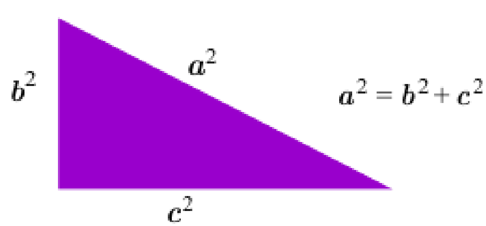
El teorema de Pitágoras es esencial para resolver problemas en los que debe hacerse el cálculo de longitudes. Formularlo, y justificarlo son los objetivos de esta sección.

Recordemos primero un par de ideas:

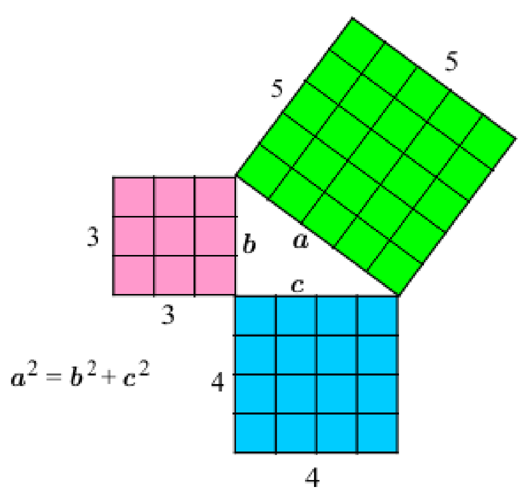
- Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, de 90°.
- En un triángulo rectángulo, el lado más grande recibe el nombre de **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos.**



Teorema de Pitágoras.- En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

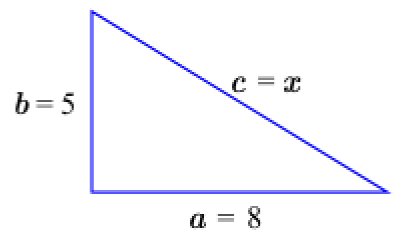


Presentamos a continuación un bosquejo de la demostración en el caso en el que los lados del triángulo miden 3, 4 y 5 unidades.



Ejemplos

1. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 8 cm y 5 cm.



Solución:

La fórmula del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Los catetos son a, b y la hipotenusa es c sustituimos valores.

$$x^2 = (8)^2 + (5)^2$$

$$x^2 = 64 + 25$$

$$x^2 = 89.$$

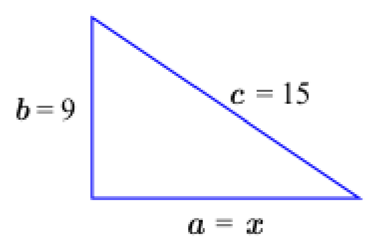
Sacamos raíz cuadrada.

$$x = \sqrt{89}$$

$$x \approx 9.4339$$

Por lo tanto, la hipotenusa mide aproximadamente 9.4339 cm.

2. Calcula el elemento que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



Solución:

La fórmula del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Los catetos son a, b y la hipotenusa es c sustituimos valores.

$$(15)^2 = x^2 + (9)^2.$$

Despejamos el valor del cateto a.

$$x^2 = (15)^2 - (9)^2$$

$$x = \sqrt{(15)^2 - (9)^2}$$

$$x = \sqrt{225 - 81}$$

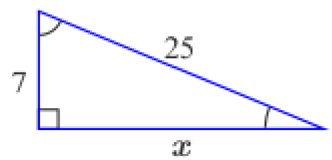
$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12.$$

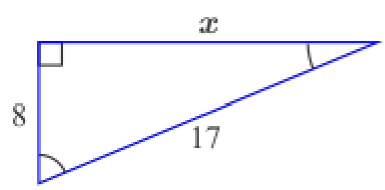
Por lo tanto, el cateto mide 12 cm.

Ejercicios

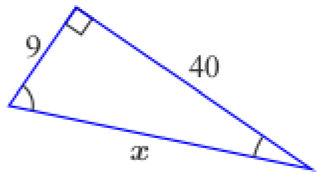
1) Calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 7 cm y 4 cm.
2) Calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden 6 y 9 cm.
3) La diagonal de un rectángulo de lados 2 cm y 4 cm mide: _____cm.
4) Calcula el elemento que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



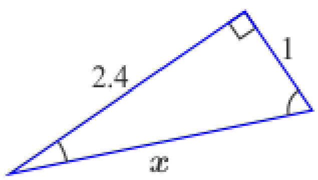
5) Calcula el elemento que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



6) Calcula el elemento que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



7) Calcula el elemento que falta en el siguiente triángulo rectángulo.



8) Encuentra la distancia entre la pareja de puntos que se indica a continuación y grafica los puntos: $P_1(1, -2), P_2\ (5, 7)$.

9) Encuentra la distancia entre la pareja de puntos que se indica a continuación y grafica los puntos: $P_1(-7,-5), P_2\ (6,-7)$.

10) Encuentra la distancia entre la pareja de puntos que se indica a continuación y grafica los puntos: $P_1(3,5), P_2\ (-2,-6)$.

Aplicación del Teorema de Pitágoras

Una vez que se conoce el teorema de Pitágoras, lo más importante es aprender a usarlo, por ello dedicamos esta sección a las aplicaciones del mismo.

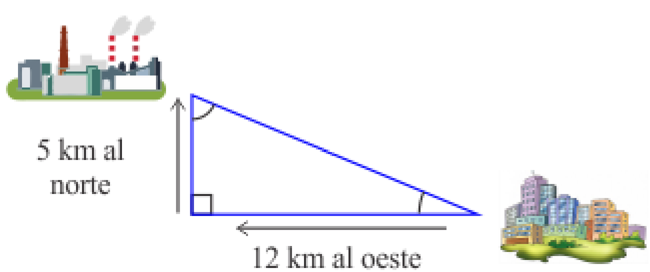
Ejemplo

- Una ciudad se encuentra 12 km al oeste y 5 km al norte de la zona industrial. ¿Cuál es la distancia entre la ciudad y la zona industrial?

  Solución:

  Lo primero es realizar un pequeño dibujo que nos permita identificar la situación y ver cómo definimos un triángulo rectángulo en la misma.

  Este podría ser un buen dibujo, pues observamos que se cumplen los datos que nos da el problema y que además la distancia real entre la ciudad y la zona industrial, sería la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo:



  El triángulo entonces queda claramente definido y sabemos que tenemos un cateto que mide 12 km, otro que mide 5 km y que la distancia real que se nos está pidiendo es la hipotenusa del tal triángulo.

  Aplicando el Teorema de Pitágoras resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 5^2 + 12^2$$
$$c^2 = 25 + 144$$

$$c^2 = 169$$
$$c = \sqrt{169}.$$
$$c = 13.$$

Por lo tanto, la distancia real entre las dos ciudades es de 13 km.

Ejercicios

1) Una escalera de 7.3 m de altura se apoya a 4.8 m de la pared para arreglar un problema que hay en la azotea de una casa. ¿A qué altura se encuentra la azotea?
2) Una escalera cuya longitud es de 3 metros se encuentra apoyada contra una pared en el suelo horizontal y alcanza 2.8 m sobre esa pared vertical. ¿A qué distancia está al pie de la escalera de la base de la pared?
3) Una cancha de fútbol (rectangular como sabemos) mide 125 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros. ¿Cuál es el ancho del campo de juego?
4) Quiero cubrir un piso cuadrado que mide 4 m de lado usando losetas hexagonales de 10 cm de lado. Si éstas se venden en cajas de 38 losetas, ¿cuántas cajas debo comprar para que me sobre lo menos posible?
5) Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y la base, 2 cm menos que la altura.
6) Si en el cuarto problema en lugar de losetas hexagonales se utilizaran otras en forma de triángulo equilátero de 10 cm de lado, ¿cuántas cajas habría que comprar, suponiendo que son 38 losetas por caja?
7) Un poste de madera tiene 8 m de altura y está sujeto con tres cables que van desde el extremo superior a un punto del suelo que dista de la base del poste 3 m. ¿Qué longitud de cable se necesita?
8) Un globo cautivo está sujeto con una cuerda. Ayer, que no había viento, el globo estaba a 50 m de altura. Hoy hace viento, y la vertical del globo se ha alejado 30 m del punto de amarre. ¿A qué altura está hoy el globo?

Eventos mutuamente excluyentes y complementarios

Dedicamos esta sección al estudio del cálculo de las probabilidades de eventos mutuamente excluyentes y complementarios, también conocidas como *regla de la suma*.

Cuando dos eventos o más no son mutuamente excluyentes la probabilidad de que ocurran se calcula utilizando la regla de la suma, esta dice:

La probabilidad de que los eventos A y B ocurran es igual a la suma de las probabilidades de cada evento por separado menos la probabilidad de que ocurran juntos, es decir:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B).$$

Ejemplo

- Se tienen 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta sin ver ésta sea par o múltiplo de 3?

  Solución:

  Llamamos A al evento: *que sea par* y B al evento: *que sea múltiplo de* 3.

  Como hay 5 cartas pares de las 10 que hay en total, entonces

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

  Como hay 3 cartas múltiplos de 3 de las 10 que tenemos, entonces

$$P(B) = \frac{3}{10}.$$

  Pero existe un número que es a la vez par y múltiplo de 3, que es el 6, y como sólo hay una carta con el número 6 entre las 10 cartas, entonces

$$P(6) = \frac{1}{10}.$$

  Por lo tanto:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B).$$

$$P(A \text{ o } B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{7}{10}.$$

  Así, la probabilidad de que al sacar una carta al azar, ésta sea par o múltiplo de 3 es $\frac{7}{10}$.

  Es conveniente recordar que cuando dos eventos o más son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que los eventos ocurran al mismo tiempo es nula, por lo que, si A, B y C son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Asimismo, cuando dos o más eventos son complementarios, la probabilidad siempre suma 1, es decir, si A, B y C son complementarios, entonces:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas.

1) En una urna hay 5 bolas azules, 4 rojas y 9 negras. Si se saca una bola sin ver y se regresa a la urna, calcula la probabilidad de sacar:
   a) Una bola azul.
   b) Una bola roja.
   c) Una bola negra.
   d) Una bola azul o negra.
   e) Una bola roja o negra.
   f) Una bola que no sea negra.
   g) Una bola que no sea roja.
   h) Una bola que no sea ni roja ni negra.
2) En el tercer grado hay 21 niños de 14 años, 33 niños de 15 años y 16 niños de 16 años. Si se escoge un niño al azar para que diga el discurso en la ceremonia del 20 de noviembre, ¿cuál es la probabilidad de que:
   a) no tenga 15 años?
   b) tenga 14 o 16 años?
   c) no tenga 14 o 15 años?
3) Para la fiesta de cumpleaños de Marcela se había invitado a 28 niños: 9 compañeros de la escuela, 6 de sus primos, 10 de la clase de danza y 3 de la clase de inglés. A la hora de servir el pastel se dieron cuenta que faltaba un invitado. Calcula la probabilidad de que el invitado que falta:
   a) Sea de la clase de danza o de inglés.
   b) Sea uno de sus primos.
   c) Sea uno de sus primos o un compañero de escuela.
   d) No sea ni de la escuela ni de la clase de inglés.
   e) Sean de la escuela, de la clase de inglés o de la clase de danza.

4) En un estacionamiento hay 2 autos verdes, 14 autos plateados, 11 negros, 7 rojos y 5 azules. Calcula la probabilidad de que el primer auto en salir del estacionamiento:

a) No sea ni plateado ni negro.

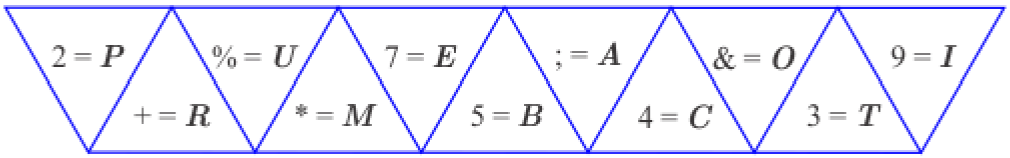
b) Sea rojo, verde o negro.

c) Sea plateado o azul.

d) No sea ni verde, ni rojo, ni azul.

Reto

Sustituye los números por las letras correspondientes y escribe la palabra sobre la línea. Busca relaciones entre las palabras de la columna de la izquierda y las de la derecha. Utiliza el paréntesis para indicar la afinidad que encontraste.



( ) D9739S3		a) L7Y7S	
( ) 9NG7N97+&		b) S7N37N49;	
( ) ;+593+&		c) 4& * 9D;	
( ) 27N;L9S3		d) 9D7; S	
( ) 2S9Q%9;3+;		e) 4&NS3+%449&N	
( ) J%+9S3;		f) 2+&Y743&	
( ) F9L&S&F&		g) +9V;L7S	
( ) ;5&G;D&		h) D7N3;D%+;	
( ) ;+Q%93743&		i) *7 N37	
( ) &+3&D&N49S3		; j) 27N;S	
( ) 4&49N7+&		k) ;L9 *7N3;49&N	
( ) 4&NF9D7N37		l) D7L93&S	

BLOQUE III

Ecuaciones de segundo grado por fórmula general

Dedicaremos esta sección a la resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Utilizaremos la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La última expresión se conoce como la solución general de la ecuación general de segundo grado, fórmula cuadrática o simplemente fórmula general.

Para usarla, sigue los siguientes pasos:

a) Primero transforma la ecuación a la forma estándar, es decir, a la forma
$$ax^2 + bx + c = 0.$$
b) Identifica los coeficientes, a, b y c. Ten cuidado con los signos, pueden ser negativos.
c) Sustituye los valores de los coeficientes en la fórmula cuadrática.
d) Simplifica lo más posible.
e) Usa el $\pm$ antes del radical para separar la solución en dos valores: uno en el que la raíz cuadrada se suma, y el otro donde se resta.

Ejemplo

- Resuelve la ecuación $3x^2 - 11x - 4 = 0$ usando la fórmula general.

  Solución:

  Identificamos
$$a = 3, \qquad b = -11, \qquad c = -4.$$
  La fórmula es:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
  Sustituimos los valores
$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}.$$
  Simplificamos teniendo cuidado con los signos
$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6},$$
  reduciendo:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6}.$$

Simplificamos el radical, $\sqrt{169} = 13$, de donde

$$x = \frac{11 \pm 13}{6}.$$

Separamos considerando los dos signos y simplificamos:

$$x = \frac{11 + 13}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

o

$$x = \frac{11 - 13}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3},$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $3x^2 - 11x - 4 = 0$ son:

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -\tfrac{1}{3}.$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

1) $x^2 + 2x - 5 = 0.$
2) $4x^2 + 12x - 7 = 0.$
3) $-5x^2 + 4x + 9 = 0.$
4) $x^2 - 24x - 2 = 0.$
5) $3x^2 - 7x + 2 = 0.$
6) $x^2 + 6x = 8.$
7) $x^2 - 3x = 4.$
8) $x^2 - 10x = 28.$
9) $-x^2 + 8 = -8x.$
10) $4x^2 = 5x + 7.$

Resuelve los siguientes problemas de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

11) La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?
12) Una persona gastó $\$2\,000$ en regalos, obsequió 30 regalos a sus familiares y amigos, el resto los vendió y ganó $\$10$ por regalo. Una vez vendidos todos los obsequios, se dio cuenta de que podía comprar la misma cantidad inicial de regalos y 5 más. ¿Cuál es el costo de cada presente?

13) La base de un triángulo es 3 veces su altura. Su área es de 150 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de la base y la altura?
14) Encuentra la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, cuya superficie es de 6 m^2, perímetro de 12 m e hipotenusa de 5 m.
15) En cierto parque de la Ciudad de México se desea plantar 195 árboles, de tal manera que el número de éstos, por fila, exceda en 2 al número de filas. Determina la cantidad de filas, así como el número de árboles por fila.

Problemas de congruencia y semejanza de triángulos

En esta sección veremos la aplicación de los criterios de congruencia y semejanza en la resolución de problemas.

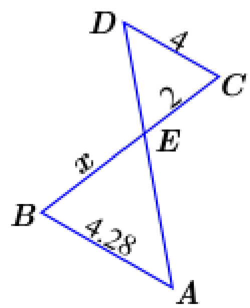
Completa los enunciados con las palabras congruente o semejante según corresponda.

1) Si en dos triángulos los lados homólogos son proporcionales, entonces los triángulos son ___________________.
2) Si en dos triángulos los lados homólogos son congruentes, los triángulos son ___________________.
3) Si en dos triángulos dos pares de lados homólogos son congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente, entonces los triángulos son ___________________.
4) Si en dos triángulos los ángulos homólogos son congruentes, los triángulos son __________________.
5) Si en dos triángulos dos pares de lados homólogos son proporciónales y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente, entonces los triángulos son ___________________.

Si se tienen dos triángulos semejantes se puede calcular la medida de un lado desconocido si se conoce la medida de su lado homólogo y también la medida de otros dos lados homólogos.

Ejemplo

- En la figura de abajo, encuentra la longitud del segmento $\overline{ED}$ si se sabe que el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{CD}$.



Solución:

Como el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{CD}$, entonces:

$\measuredangle BAE = \measuredangle CDE$ por ser ángulos alternos internos.

$\measuredangle ABE = \measuredangle DCE$ por ser ángulos alternos internos.

$\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Se cumple el criterio de AAA, por lo que los triángulos AEB y DEC son semejantes.

Como los triángulos DCE y EBA son semejantes, puede establecerse la proporción

$$2 = \frac{4.28}{x}$$

$$x = 4.28$$

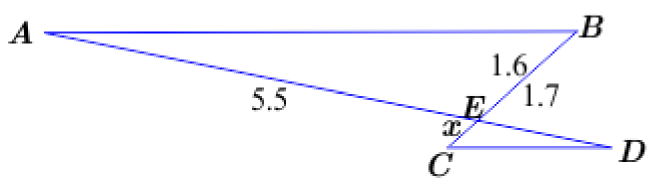
$$x = \frac{4.28}{2}$$

$$x = 2.14.$$

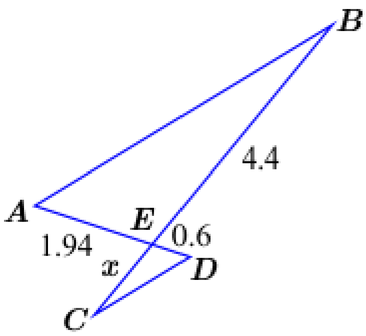
Ejercicios

En cada inciso encuentra la longitud del segmento $\overline{CE}$ sabiendo que el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{CD}$. Primero verifica que los triángulos sean semejantes.

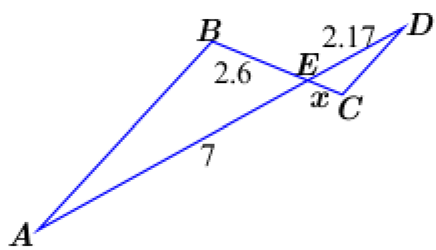
1)



2)



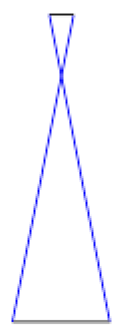
3)



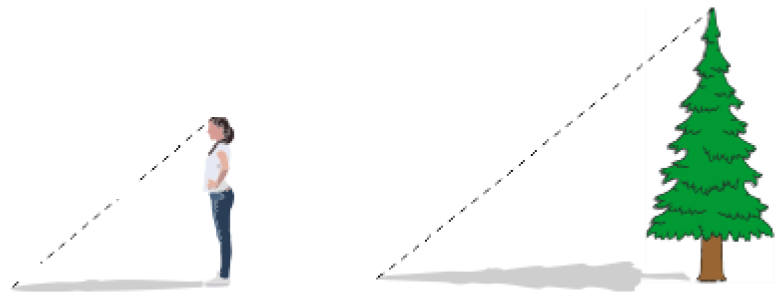
Resuelve los siguientes problemas.

4) Maribel está a 100 m de un edificio muy alto. Haciendo uso de una regla de un metro, se da cuenta que si pone la regla vertical sobre el piso a 1.28 m de la punta de la sombra del edificio, la sombra de la regla coincide con el edificio. ¿Cuál es la altura del edificio?

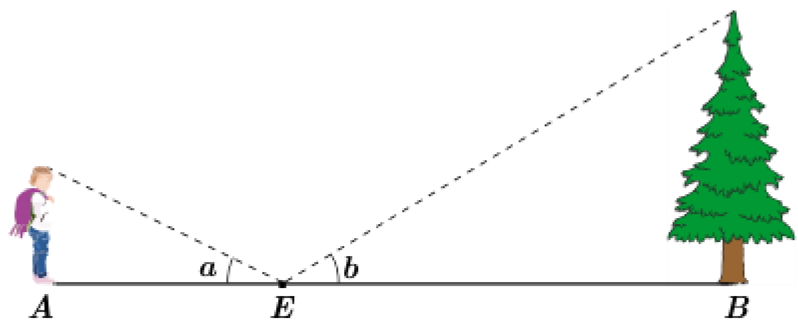
5) Dos vigas de 5.7 m de largo se colocan como se muestra en la figura (formando triángulo isoceles). Si en la base las vigas quedan separadas por 1.8 m y la altura del triángulo mayor es 4 veces la del triángulo más pequeño, ¿a qué distancia quedaron los extremos superiores de las vigas?



6) Una mujer mide 1.6 m de altura y la sombra que proyecta es de 1.9 m. Si la sombra de un árbol mide 3.5 m y los rayos del sol son paralelos, ¿cuál es la altura del árbol?



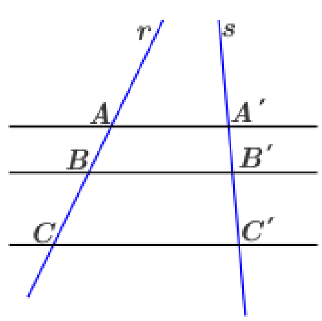
7) Para medir la altura del árbol de la figura, un muchacho colocó a 30 m de él un espejo en el piso (punto E); en éste se refleja la punta del árbol. Se sabe que $\measuredangle a$ y $\measuredangle b$ miden lo mismo. Si $\overline{AE} = 2$ m y los ojos del muchacho están a 1.60 m del piso, ¿cuál es la altura del árbol?



Teorema de Tales (resolución de problemas)

En esta parte resolveremos problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

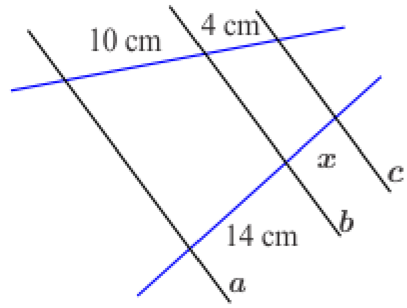
Si dos rectas cualesquiera se cortan por dos o más rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejemplo

- Calcula el valor de x en la figura siguiente:



Solución:

Como sabemos que las rectas a, b y c son paralelas, por lo tanto;

$$\frac{7}{5} = \frac{x}{4}$$

$$x = \frac{7(4)}{5}$$

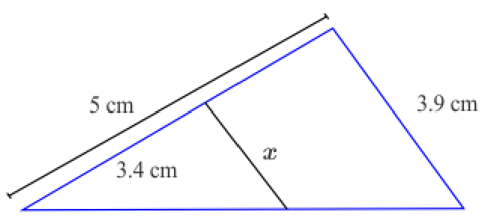
$$x = \frac{28}{5}$$

$$x = 5.6 \text{ cm.}$$

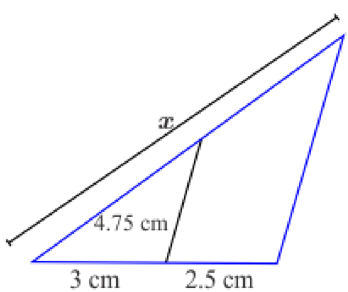
Ejercicios

Calcula el valor de x en cada caso.

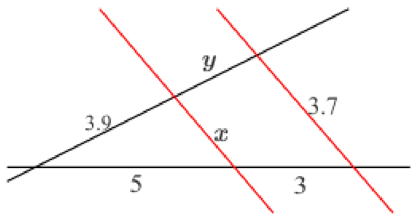
1)



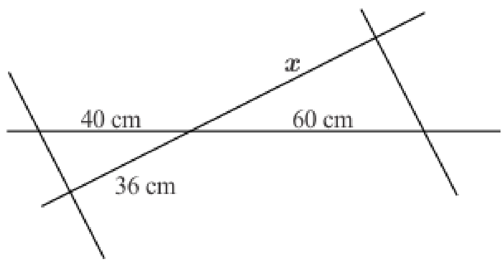
2)



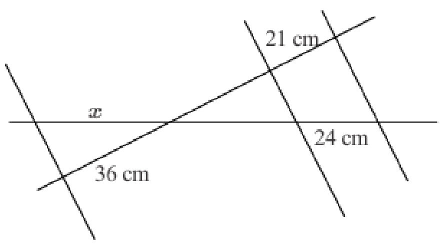
3)



4)



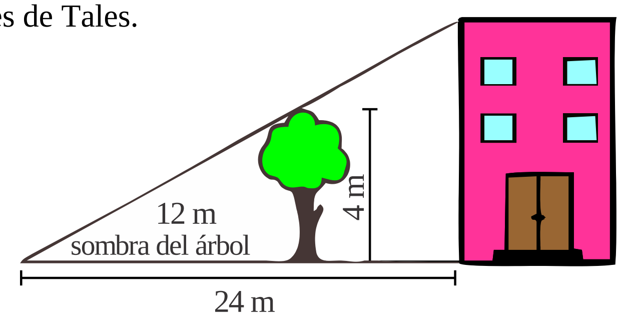
5)



Ejemplo

- Calcular la altura del edificio teniendo en cuenta los otros valores que son, la altura del árbol, la sombra que proyecta éste y la distancia entre el edificio y donde termina la sombra del árbol.

  El *Teorema de Tales* sirve para resolver este tipo de ejercicios a los que se comúnmente se llama aplicaciones de Tales.



Solución:

La relación que podemos establecer es la siguiente.

Llamamos x a la altura del edificio. Entonces la altura del edificio es a la altura del árbol como 24 es a 12.

$$\frac{x}{4} = \frac{24}{12}$$

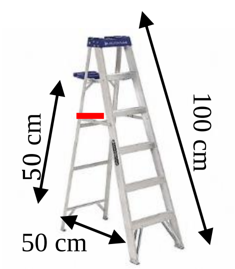
$$\frac{x}{4} = 2$$

$$x = 8 \text{ m.}$$

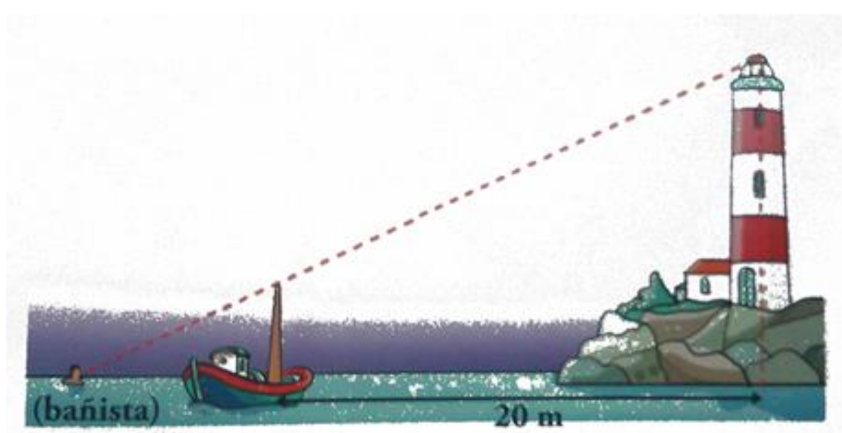
La altura del edificio es 8 m.

Ejercicios

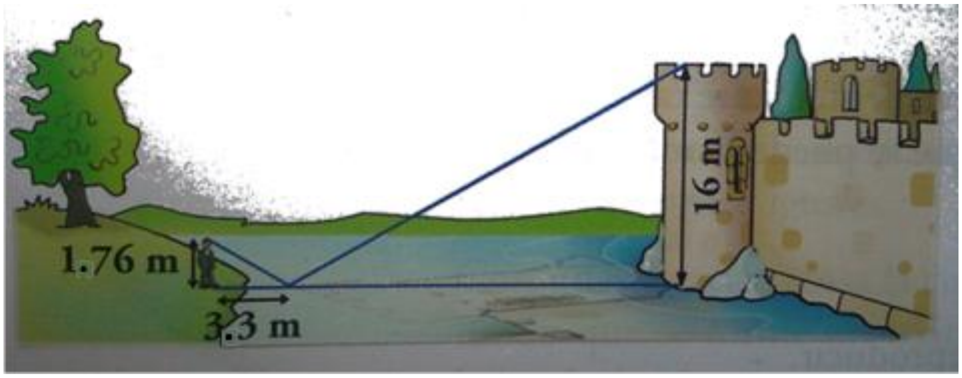
1) Observando la escalera que aparece en el dibujo, calcula la longitud de la cuerda que une los peldaños de la escalera con su parte posterior.



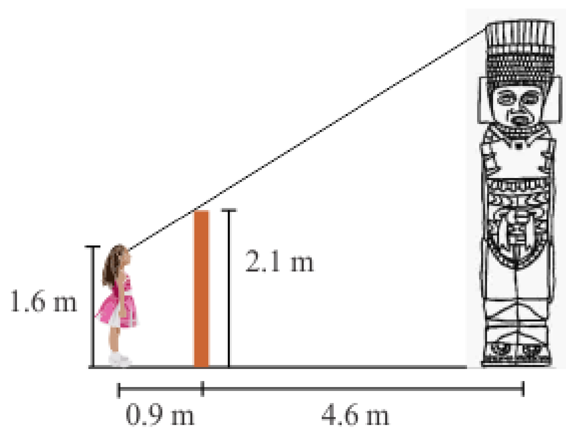
2) En la imagen siguiente, el bañista se encuentra a 5 metros del barco. La borda del barco está a 1 metro sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 metros de la borda. El bañista ve alineados los extremos del mástil y el foco del faro. ¿Cuál es la altura del faro?



3) ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre? (El chico ve la torre reflejada en el agua).



4) ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escultura, sabiendo que Paula la ve alineada con el borde de la valla?

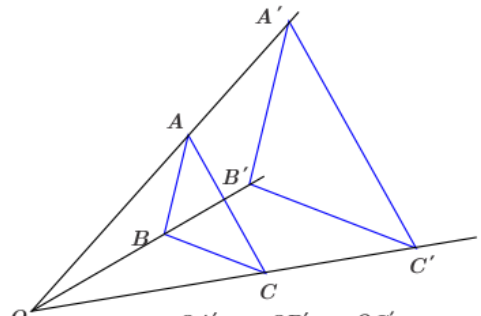


Homotecia

Esta sección está dedicada a la aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

La *homotecia* es una transformación geométrica plana, en la cual los puntos relacionados o transformados se denominan homotéticos, y cumplen las siguientes condiciones:

- Los puntos homotéticos están alineados con un tercer punto fijo llamado centro de la homotecia (O).
- La relación entre los segmentos definidos por este centro y los puntos transformado y original es una constante denominada razón de la homotecia (k).



$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

Propiedades

Dos figuras homotéticas guardan relación de semejanza.

El centro de la homotecia es fijo y único, y las rectas que pasan por el centro de la homotecia también lo son, aunque los puntos no lo son, en la figura anterior vemos que los vértices se trasladaron, pero manteniéndose en la recta correspondiente y en una razón dada.

En una homotecia pueden darse los siguientes casos:

Si la constante k es mayor que 0, la homotecia se denomina directa, y en ella los puntos homotéticos están ambos al mismo lado del centro de la homotecia.

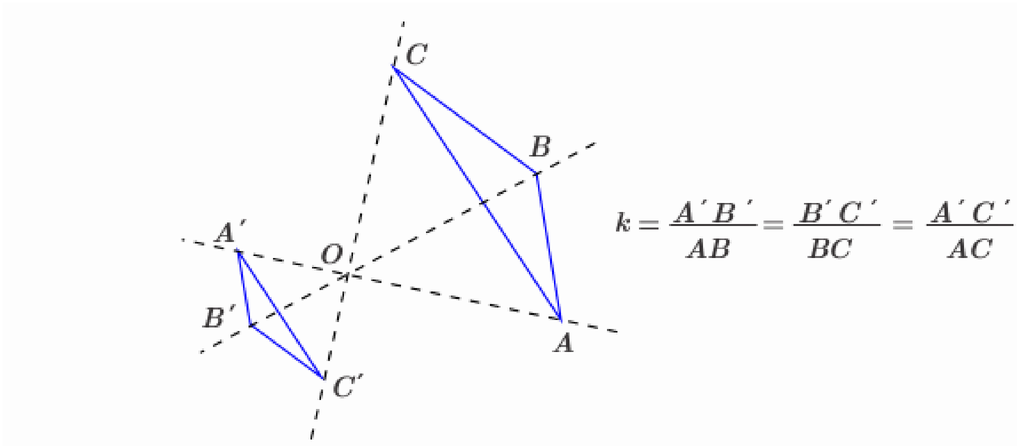
Si la constante k es menor que 0, la homotecia se denomina inversa, y en ella los puntos homotéticos están en lados diferentes con respecto al centro de la homotecia.

Si la constante k es 1, la figura homotética coincide con la original, y la transformación se denomina función identidad.

Si la constante k es -1, la homotecia se convierte en una simetría central.

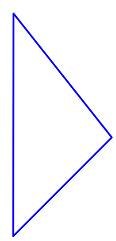
Si el valor absoluto de la constante k es mayor que 1, la homotecia produce un aumento de tamaño (la figura final es mayor que la original).

Si el valor absoluto de la constante k es menor que 1, la homotecia produce una disminución de tamaño (la figura final es menor que la original).

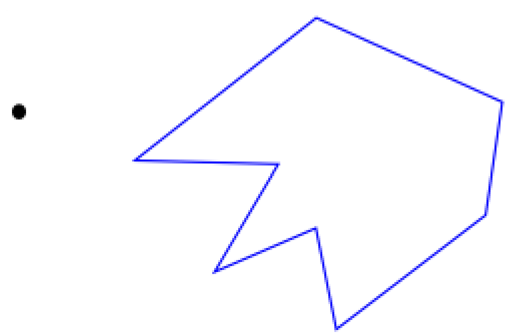


Ejercicios

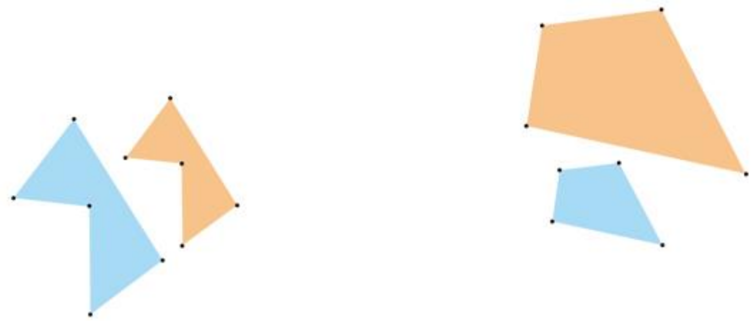
1) Dibuja un triángulo cuyas dimensiones sean la tercera parte del triángulo de la figura.



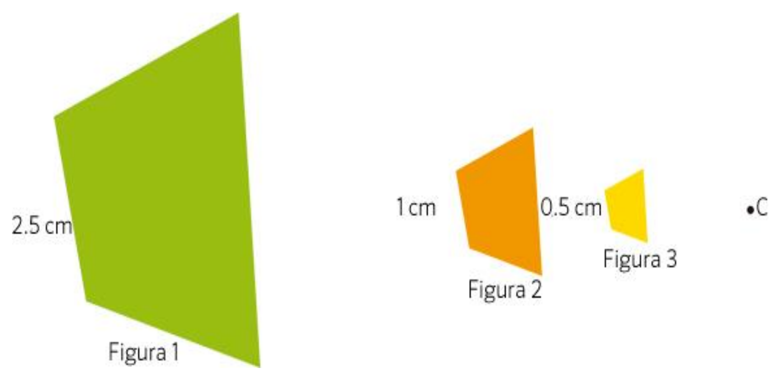
2) Dibuja la homotecia del polígono de la figura de manera de que la nueva figura sea más grande. Usa el centro de homotecia que se proporciona. Encuentra el factor de proporcionalidad.



3) Encuentra el centro de homotecia o de cada una de las siguientes parejas de figuras homotéticas. Considera que la azul es la original.

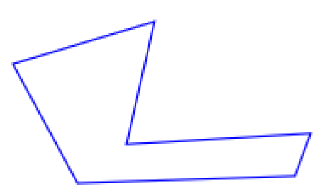


4) Analicen, en equipo, las siguientes figuras homotéticas. Noten que C es el centro de homotecia.

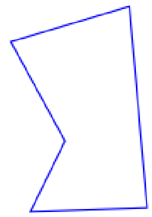


a. ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 2 respecto a la 1?
b. ¿Y la de la figura 3 respecto a la 2?

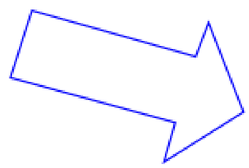
5) Elige un centro de homotecia exterior y traza la figura homotética con la razón de homotecia $\frac{1}{2}$.



6) Elige un centro de homotecia exterior y traza la figura homotética con la razón de homotecia $-\frac{3}{4}$.



7) Elige un centro de homotecia exterior y traza la figura homotéticas con la siguiente razón de homotecia $1\frac{3}{5}$.



Gráficas de funciones cuadráticas

En esta parte pondremos especial atención a la lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

La forma general de una función cuadrática es:

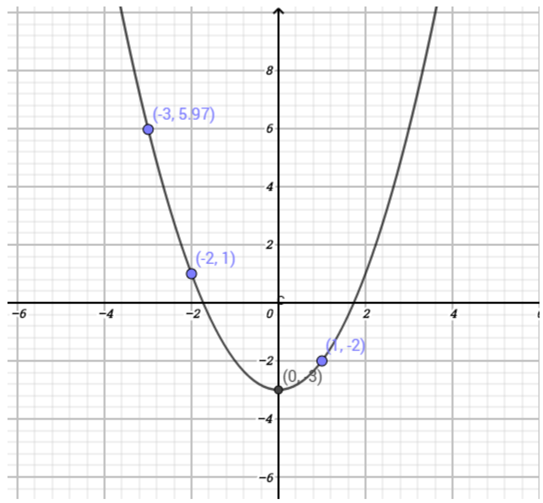
$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son valores constantes. La gráfica de una función cuadrática depende de los valores de estas constantes.

Ejemplo

- Para trazar la gráfica de $y = x^2 - 3$ se elabora una tabla con valores arbitrarios para x para obtener los valores de y. En general, usamos números enteros, en este caso:

x	$y = x^2 - 3$
-3	6
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1
3	6



Ejercicios

Traza las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas.

1) $y = x^2 + 1.$

2) $y = x^2 - 1.$

3) $y = 3x^2 - 2x.$

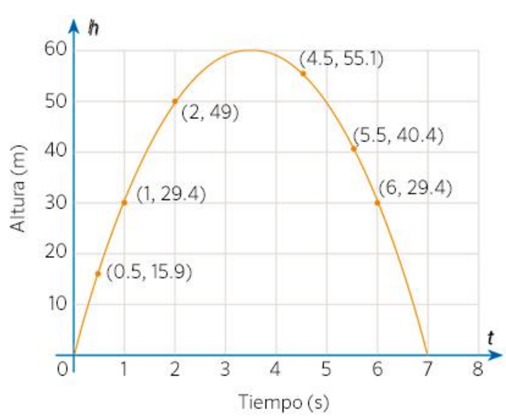
4) $y = x^2 + 6x.$

5) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}.$

6) $y = \frac{7}{4}x^2 + 1.$

Resuelve los siguientes problemas.

7) Los alumnos de tercero de secundaria construyeron un cohete en su clase de ciencias, lo lanzaron en el patio de la escuela y tomaron algunos datos para elaborar la gráfica.



a) En la tabla se relacionan la altura que alcanzó el cohete y el tiempo transcurrido desde su lanzamiento; complétala.

Tiempo (s)	1.5	2.5	5	6.5	7
Altura (m)					

b) Subraya la expresión algebraica que relaciona la altura (h) con el tiempo (t). Usa la gráfica o la tabla de valores para verificar si la expresión elegida es correcta.

- $h = 4.9(t + 3.5)^2 - 60.$
- $h = -4.9(t + 3.5)^2 - 60.$
- $h = 4.9(t + 3.5)^2 + 60.$
- $h = -4.9(t + 3.5)^2 + 60.$

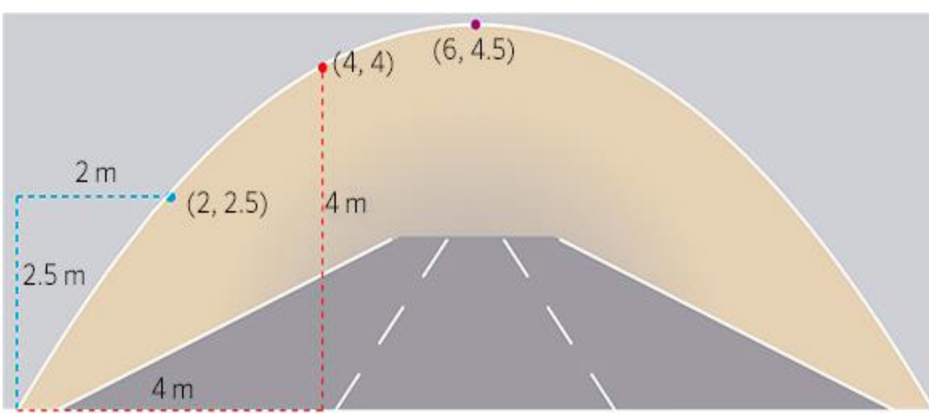
c) ¿Cuánto tardó el cohete en alcanzar su altura máxima?

d) ¿Qué velocidad tenía en ese momento?

e) ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que despegó hasta que llegó al suelo?

f) ¿En qué segundo tenía mayor rapidez?

8) Para conectar dos ciudades por carretera, se construyó un túnel con la forma que se muestra en la imagen. La altura del túnel sobre la carretera y la distancia horizontal a cualquiera de los extremos de la base son cantidades que dependen una de otra; al variar la distancia al extremo izquierdo, la altura del túnel también cambia. Por ejemplo, el punto azul está a 2 m del extremo y a 2.5 m de altura, mientras que el punto rojo se encuentra a 4 m del extremo y a 4 m de altura.



a) De las siguientes expresiones, una relaciona la altura sobre la carretera (y) con la distancia al extremo del túnel (x). Subráyala.

- $y = -\frac{(x-6)^2}{8} + 4.5$
- $y = \frac{(x-6)^2}{8} - 4.5$
- $y = -\frac{(x+6)^2}{8} - 4.5$
- $y = -\frac{(x+6)^2}{8} + 4.5$

b) Elabora, para la expresión que hayas elegido, una tabla de valores en la que calcules la altura del túnel sobre la carretera a 1 m, 3 m, 5 m, 6 m, 7 m, 9 m, 11 m y 12 m de distancia del extremo izquierdo. Ubica los puntos en el plano cartesiano y únelos para trazar la gráfica del túnel.

c) Analiza la gráfica y la expresión algebraica, y responde las preguntas.

- ¿Qué altura tiene el túnel a una distancia de 5 m del extremo?
- ¿A qué distancias del extremo izquierdo el túnel tiene una altura de 1.375 m?
- Si la caja de un tráiler mide 2 m de ancho y 4.25 m de altura, ¿podrá circular por el carril central del túnel?

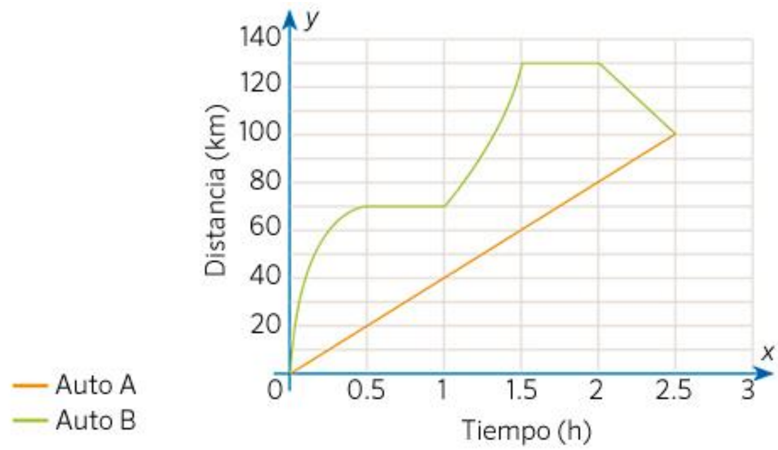
Problemas de lectura y construcción de gráficas

En esta sección aprenderemos la lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

El estudio de este contenido consiste en interpretar y construir gráficas formadas por secciones rectas y curvas, las cuales modelan situaciones o fenómenos reales que no necesariamente siguen un patrón definido o modelo matemático. Se sugiere que el trabajo se realice en dos sentidos: Uno que consiste en identificar la gráfica que corresponde a una situación y otro que consiste en bosquejarla.

Ejemplo

- Dos automóviles, A y B, parten juntos en la misma dirección. Las gráficas relacionan, para cada caso, el tiempo de recorrido con la distancia desde el punto de salida.



Contesta las preguntas siguientes:

a) ¿En algún momento el auto A aumentó su velocidad? Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál fue ese momento.

b) ¿Qué auto se detuvo en dos ocasiones? ¿Cuánto tiempo estuvo detenido en total? ¿A qué distancia del origen se detuvo la primera vez? ¿Y la segunda?

c) ¿Se encontraron los autos en algún punto? ¿Cómo lo sabes?

d) ¿Qué auto se alejó más del punto de salida? ¿A qué distancia llegó?

e) Uno de los autos mantuvo una velocidad constante. ¿Cuál fue esa velocidad?

f) ¿En qué tiempo aproximado el auto B estaba a 100 km del punto de partida? ¿Cuál era la velocidad del auto B entre las $2:00$ y las $2:30$ horas del recorrido?

Solución:

a) ¿En algún momento el auto A aumentó su velocidad? Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál fue ese momento.

Solución:

No, el auto A no aumentó su velocidad.

b) ¿Qué auto se detuvo en dos ocasiones? ¿Cuánto tiempo estuvo detenido en total? ¿A qué distancia del origen se detuvo la primera vez? ¿Y la segunda?

Solución:

El automóvil B se detuvo en dos ocasiones, estuvo detenido 1 h. La primera vez que se detuvo fue a 70 km del origen, la segunda vez se detuvo a 130 km.

c) ¿Se encontraron los autos en algún punto? ¿Cómo lo sabes?

Solución:

Los autos sí se encontraron, pues las gráficas se cruzan.

d) ¿Qué auto se alejó más del punto de salida? ¿A qué distancia llegó?

Solución:

El automóvil que se alejó más del punto de salida fue el B, llegó hasta 130 km.

e) Uno de los autos mantuvo una velocidad constante. ¿Cuál fue esa velocidad?

Solución:

La velocidad fue 40km/h.

f) ¿En qué tiempo aproximado el auto B estaba a 100 km del punto de partida?

Solución:

En una hora con quince minutos (1.25 h).

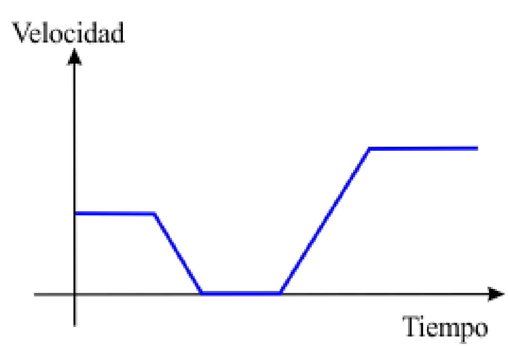
g) ¿Cuál era la velocidad del auto B entre las $2{:}00$ y las $2{:}30$ horas del recorrido?

Solución:

60 kilómetros por hora.

Ejercicios

1) Selecciona el texto que mejor describe la siguiente gráfica:



a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.

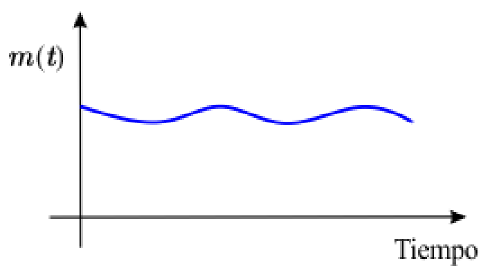
b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido, llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.

c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.

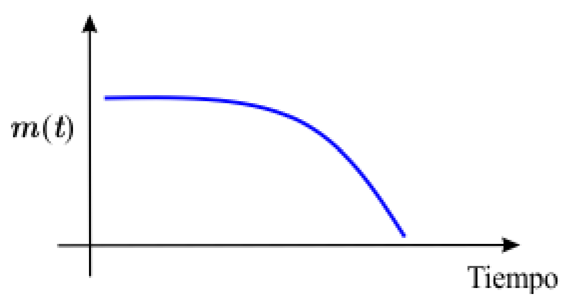
d) Beatriz vive en una casa a desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo, finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

2) Relaciona cada una de las siguientes gráficas con el texto que mejor describe su información.

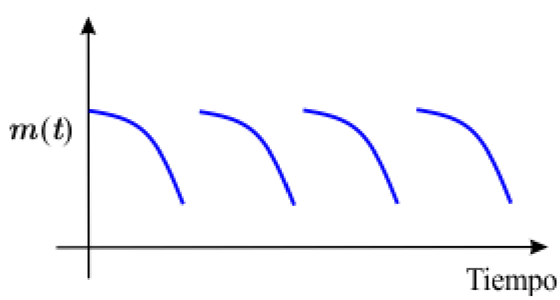
I)



II)

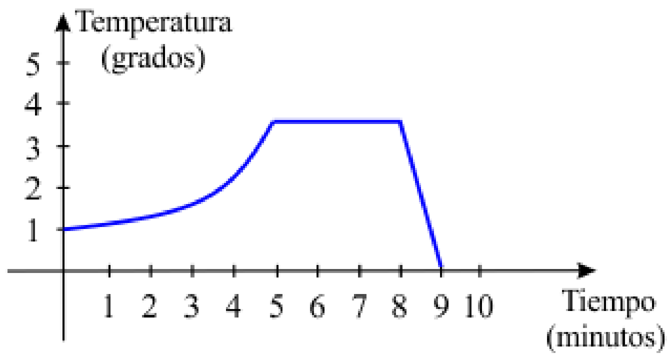


III)



a) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección.
b) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo.
c) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una mezcla del medicamento con suero y vía intravenosa.

3) La gráfica que aparece a continuación representa el comportamiento de la temperatura de cierta solución (compuesto químico) en diferentes instantes, haz lo que se indica.

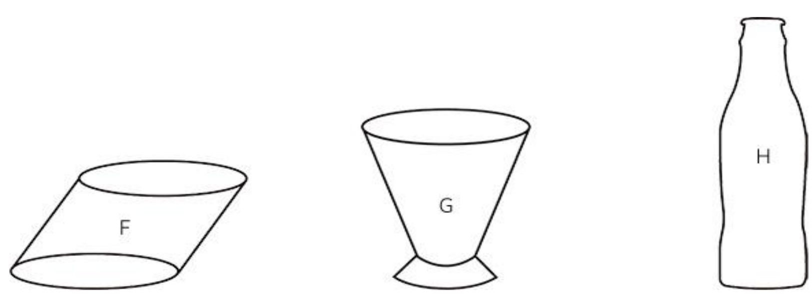


Describe y argumenta:

¿Qué ocurrió del inicio a los 5 minutos?	
¿De los 5 minutos a los 8?	
¿De los 8 a los 9 minutos?	

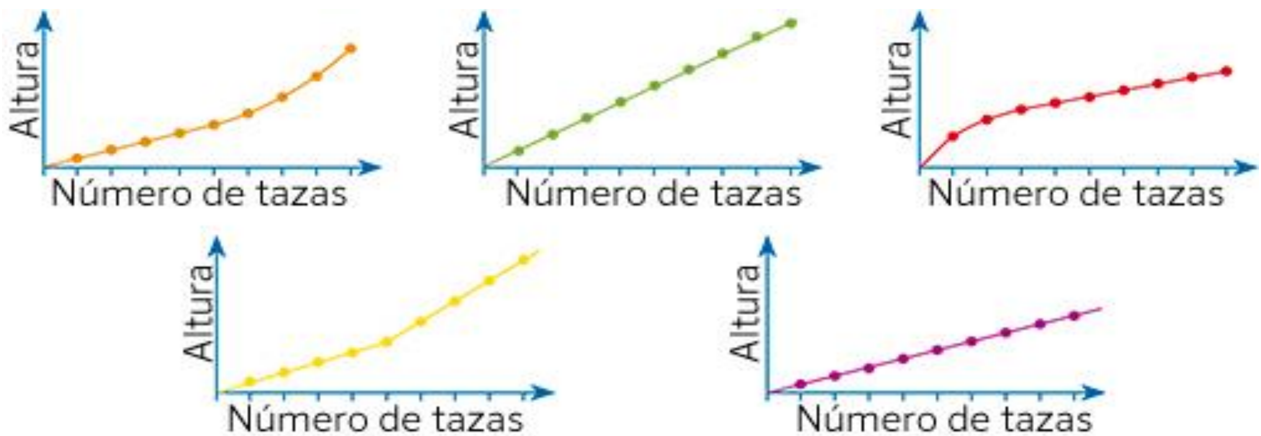
4) Si se graficara la relación "número de tazas vertidas-altura del agua" para los siguientes recipientes, ¿en qué casos la gráfica estaría formada por puntos sobre una línea recta?

- La del recipiente F.
- La del recipiente H.
- Las tres.
- La del recipiente G.
- Ninguna de las tres.



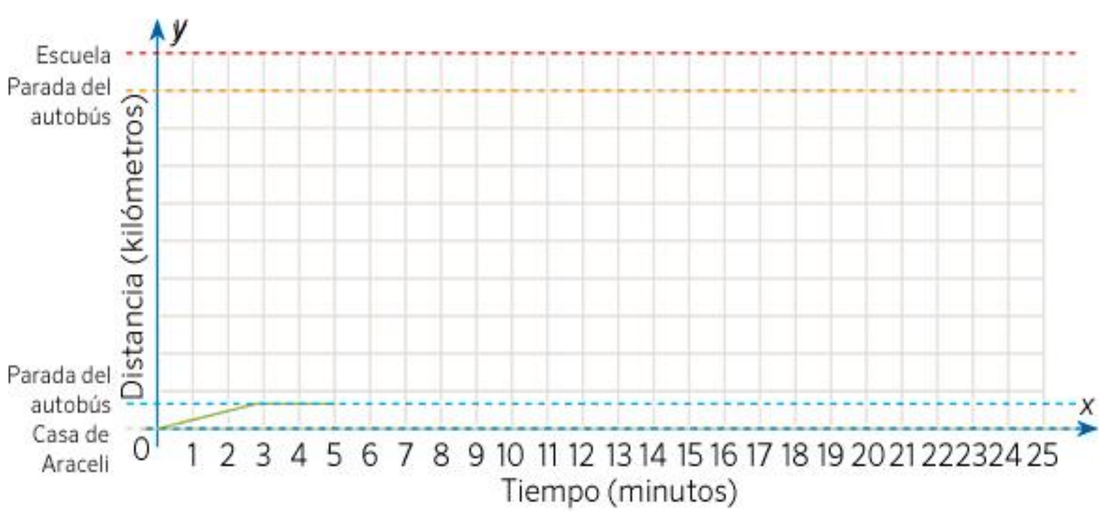
5) Cada recipiente se llenó vertiendo agua con una taza pequeña.

En cada caso se graficó la cantidad de tazas vertidas y la altura que alcanzó el líquido dentro del recipiente. Averigua qué gráfica corresponde a cada recipiente.



6) Para ir a su escuela, a 5 km de su casa, Araceli caminó hasta la parada del autobús y esperó a que éste llegara. El trayecto en autobús duró 15 min y, al bajar, ella caminó otros 5 min hasta la escuela.

La gráfica muestra la primera parte del recorrido de Araceli, desde que salió de su casa hasta que se subió al autobús.



a) ¿Cuánto tiempo tardó en caminar de su casa a la parada del autobús?
b) ¿Cuánto tiempo esperó al autobús?
c) Completa la gráfica del trayecto de Araceli.
d) ¿A qué distancia de la casa de Araceli está la primera parada de autobús?
e) ¿Qué distancia recorrió en autobús?
f) Si Araceli salió de su casa a las $6{:}55$ de la mañana, ¿a qué hora llegó a la escuela?

Probabilidad de eventos independientes

En esta sección se espera que el alumno logre calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Si dos eventos R y S son independientes, es decir, el hecho de que ocurra o no uno de ellos, no afecta la probabilidad de que ocurra el otro, entonces la probabilidad de R y S se obtiene calculando el producto de $P(R)$ por $P(S)$.

$$P(R \text{ y } S) = P(R) \times P(S).$$

Ejemplo

- Supongamos que tenemos dos dados, uno negro y el otro blanco, lanzamos los dados. Si el evento R es *"cae* 2 *en el dado negro"* y el S es *"cae* 3 *en el dado blanco"*. Calcula la probabilidad $P(R \text{ y } S)$.
  Solución:

$$P(R) = \frac{1}{6} \qquad P(S) = \frac{1}{6} \qquad P(R \text{ y } S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Ejercicios

1) Calcula la probabilidad de que al tirar 3 monedas al mismo tiempo, en las tres caras caiga águila.
2) Luisa y Lorena están jugando con dos dados, cada una tira un dado y la que saque un 4 pierde, pero si las dos sacan 4 entonces nadie pierde. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo una de ellas saque un 4?
3) Un piano tiene 9 teclas descompuestas. Si se tocan tres teclas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres estén descompuestas? (Un piano tiene 88 teclas en total).

4) El teclado de una computadora tiene 70 teclas, si se presionan las teclas con los ojos vendados, ¿cuál es la probabilidad de que Pedro escriba las cinco letras de su nombre?
5) A Emeterio le aplicaron un examen de 2 preguntas y cada pregunta tiene 3 posibles respuestas, pero no estudió y respondió al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en ambas preguntas?
6) Una bolsa contiene 4 canicas blancas y 3 negras. Si se extraen aleatoriamente dos canicas una después de la otra y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea negra?
7) La probabilidad de que un hombre casado vea cierto programa de televisión es 0.4 y la probabilidad de que una mujer casada vea el programa es 0.5. La probabilidad de que un hombre vea el programa, dado que su esposa lo hace, es 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que un matrimonio vea el programa?

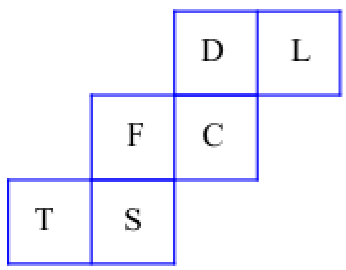
Retos

1) Los palillos de abajo indican dos desigualdades. Retira y cambia de lugar un solo palillo de cada una de las desigualdades para que se cumplan las igualdades.

VI – IV = IX

I – III = II

2) Observa el siguiente esquema, con el cual se puede formar un cubo. ¿Cuál es la letra que quedaría opuesta a la cara marcada con la letra T al armar el cubo?



3) Una tortuga quiere subir por una loma inclinada de 30 m de largo. Si durante el día sube 6 m y por la noche se resbala 3 m. ¿En cuántos días llegará a la cima?

BLOQUE IV

Secuencias cuadráticas

En esta sección estudiaremos cómo lograr utilizar una expresión cuadrática general para definir el enésimo término de una sucesión.

En algunas sucesiones, cuando se calculan las diferencias entre dos términos consecutivos, no obtenemos un valor constante, pero si volvemos a calcular las diferencias de esas primeras diferencias se obtiene un mismo resultado. Cuando esto sucede, se dice que "la sucesión es de 2° grado o cuadrática" y su regla tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c.$$

Ejemplo

- Encuentra la expresión general de la sucesión $2, 6, 12, 20, 30$ y calcula el término a_{25}, es decir, el número que ocupa el lugar 25 en la sucesión.

  Solución:

  Para saber si la sucesión cuyos primeros términos son $2, 6, 12, 20, 30$ es una sucesión cuadrática calculamos las diferencias, es decir,

  $$6 - 2 = 4; \quad 12 - 6 = 6; \quad 20 - 12 = 8; \quad 30 - 20 = 10.$$

  Las diferencias obtenidas no son constantes, ya que no se obtenemos la misma cantidad en todas ellas, éste es el primer nivel.

  Para el segundo nivel, hacemos las diferencias usando los términos del primer nivel, es decir, de los términos $4, 6, 8, 10$, obteniendo:

  $$6 - 4 = 2; \ 8 - 6 = 2; \ 10 - 8 = 2.$$

  Ahora sí obtenemos diferencias constantes, en todos los casos obtenemos 2. Por lo tanto es una sucesión cuadrática.

  Si queremos encontrar su expresión general utilizamos el siguiente procedimiento:

  Calculamos las diferencias del 1er nivel y del 2° nivel, para nuestro ejemplo ya las tenemos.

  $$C = 2, \ 6, \ 12, \ 20, 30.$$

  $B = 4, \ 6, \ 8, \ 10$ Primera diferencia.

  $A = 2, \ 2, \ 2$ Segunda diferencia.

  Así, A, B, C son los primeros términos de las diferencias segunda, primera y de la sucesión original, respectivamente.

Una vez encontrados los valores, utilizamos la expresión

$$\frac{Ax^2}{2} + \left(B - \frac{3A}{2}\right)x + (A - B + C).$$

Observa que ésta es ya una ecuación de segundo grado, en la que

$$a = \frac{A}{2}, b = B - \frac{3A}{2} \text{ y } c = A - B + C.$$

Sustituimos los valores de A, B, C y realizamos las operaciones resultantes

$$\frac{2x^2}{2} + \left(4 - \frac{3(2)}{2}\right)x + (2 - 4 + 2) = x^2 + x.$$

El término general de la sucesión cuadrática original es

$$a_n = n^2 + n.$$

Para calcular el término a_{25} lo que hacemos es sustituir el valor de n por 25 en la expresión general

$$a_{25} = (25)^2 + 25$$
$$a_{25} = 625 + 25$$
$$a_{25} = 650.$$

El número que ocupa el lugar 25 en la sucesión es 650.

Ejercicios

Encuentra la expresión general para cada una de las siguientes sucesiones y calcula los términos de la sucesión que se indica en cada caso.

1) $4,\ 19,\ 44,\ 79,\ 124, \ldots a_{25}, a_{37}, a_{45}.$

2) $2,\ 9,\ 18,\ 29,\ 42, \ldots\ a_{15}, a_{63}, a_{98}.$

3) $1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45, \ldots\ a_{9}, a_{17}, a_{35}.$

4) $4,\ 9,\ 18,\ 31,\ 48, \ldots\ a_{20}, a_{57}, a_{75}.$

5) $0,\ 7,\ 18,\ 33,\ 52, \ldots\ a_{12}, a_{32}, a_{40}.$

6) $6,\ 9,\ 14,\ 21,\ 30, \ldots\ a_{14}, a_{56}, a_{121}$

7) $-7,\ -2,\ 5,\ 14,\ 25 \ldots\ a_{20}, a_{57}, a_{75}.$

8) $-5,\ -8,\ -12, -17, -23 \ldots\ a_{12}, a_{37}, a_{51}.$

9) $9,\ 6,\ -1, -12, -27 \ldots\ a_{16}, a_{27}, a_{35}.$

10) $\frac{1}{4}, 1,\ 3\frac{3}{4},\ 8\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4} \ldots\ a_{10}, a_{45}, a_{76}.$

11) Completa la tabla.

Sucesión	**Expresión del enésimo término.**	**¿Aumenta o disminuye de manera constante?**	**¿Crece o decrece?**
	$n^2 + 5$		Siempre crece.
$3,5,7,9 \ldots$		Sí.	Siempre crece.
	$-3n^2$	No.	
$-2, -8, -14, -20, \ldots$		Sí.	Siempre decrece.
	$n^2 - 5n$		Primero decrece y después crece.
	$-2n^2 + 20$	No.	
$1, 9, 23, 43, 69$		No.	
$9, 16, 21, 24, 25, 24 \ldots$	$-n^2 + 10n$		

Sólidos de revolución y desarrollos planos

En esta sección haremos un análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo o un rectángulo. Haremos construcciones de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Definición

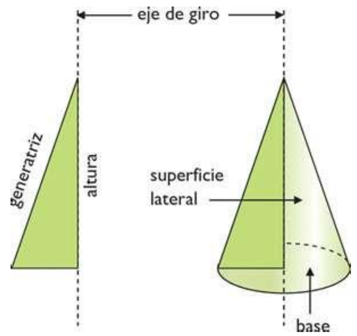
Sólidos de revolución

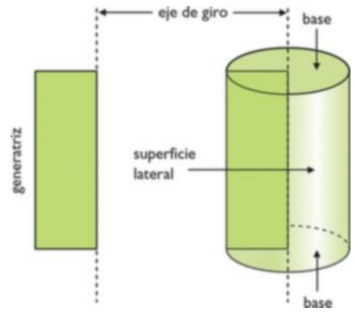
Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante la rotación de una superficie plana alrededor de una recta que esté contenida en el mismo plano.

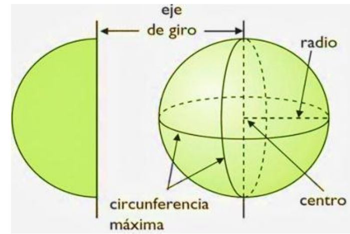
Observando la figura siguiente, podemos ver que:

El cono es un sólido que resulta al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El cilindro surge al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Una esfera puede obtenerse al girar un semicírculo alrededor de uno de sus diámetros.

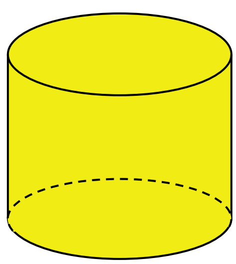
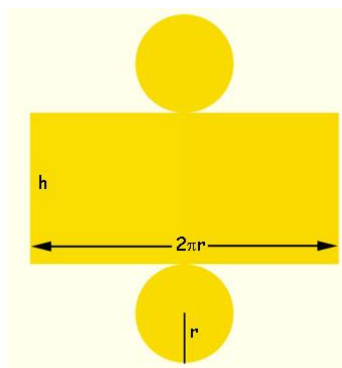






Desarrollos planos. El cilindro

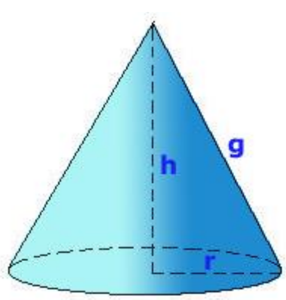
El desarrollo plano de un cilindro recto se compone de los dos círculos de las bases y el rectángulo que se curva para formar la cara lateral. La base del rectángulo es el perímetro de la circunferencia, es decir, $2\pi r$.

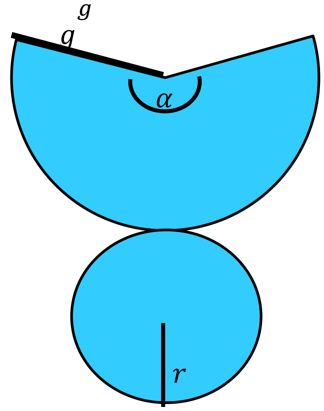



Desarrollos planos. El cono

El desarrollo plano de un cono se compone de un círculo, correspondiente a la base, y de un sector circular con el radio igual a la longitud de la generatriz.

La fórmula para calcular la longitud de la generatriz es $g = \sqrt{h^2 + r^2}$, y el ángulo del sector circular se calcula con la siguiente fórmula: $\alpha = \frac{360\ r}{g}$.





Ejemplo

- Construye el desarrollo de un cono que mide 2.5 cm de radio y 5 cm de altura.

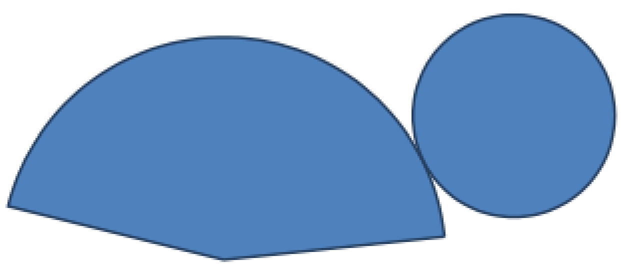
  Solución:

  Para construir el sector circular debemos conocer la generatriz que es el radio del cuerpo del cono.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$g = \sqrt{(5)^2 + (2.5)^2}$$
$$g = \sqrt{25 + 6.25}$$
$$g = \sqrt{31.25}$$
$$g \approx 5.59.$$

  Después obtenemos el ángulo central:

$$\alpha = \frac{360\, r}{g}$$
$$\alpha = \frac{360\ (2.5)}{5.59}$$
$$\alpha = \frac{900}{5.59}$$
$$\alpha \approx 161°.$$



Ejercicios

1) Construye el desarrollo de un cono que mide 3 cm de radio y 4.5 cm de altura.
2) Construye el desarrollo plano de un cilindro que mide 1.4 cm de radio y 3 cm de altura.
3) Un herrero debe cortar la pieza laminada con que armará el techo cónico de un tinaco cilíndrico. Si el diámetro del tinaco es de 8 m y se quiere que la altura del techo cónico sea 2 m, ¿Cuál es el desarrollo plano del techo cónico? Haz el dibujo del desarrollo del tinaco si la parte cilíndrica mide 10 m de altura.

4) Un arquitecto está por terminar la maqueta de la próxima plaza de la cuidad, sólo le falta una torre con forma de cono de 17 cm de altura y área de base 50.27 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del desarrollo plano que el arquitecto debe hacer para construirlo?
5) Una lata cilíndrica pequeña tiene 4.2 cm de diámetro y una altura de 4 cm. Dibuja y determina las dimensiones del desarrollo plano.
6) Se van a hacer 3 arbolitos en forma de cono con una generatriz de 3 cm y un ángulo central de 245° con cartulina. ¿Cuál es el área de la cartulina que va a ocupar?
7) Para elaborar unos adornos, la mamá de Adolfo necesita unos conitos que representarán árboles de navidad. Dibuja el desarrollo plano del cono con su tapa. Los conos deben tener un diámetro de 3 cm en la base y una altura de 6 cm. Escribe el procedimiento para calcular la longitud de la generatriz y el ángulo del sector circular.
8) Dibuja el desarrollo plano de un sólido compuesto de un cono sobre un cilindro, ambos de la misma altura y diámetro. El sólido debe caber exactamente en una caja cúbica de 4 cm por lado.
9) Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.
10) Calcula el área y el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura y 1 m de radio.

Pendiente de una recta

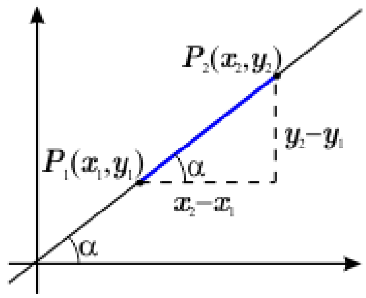
En esta sección analizaremos las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con el eje de las abscisas y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Definición

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas (x).

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, dos puntos de una recta, no paralela al eje y; la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

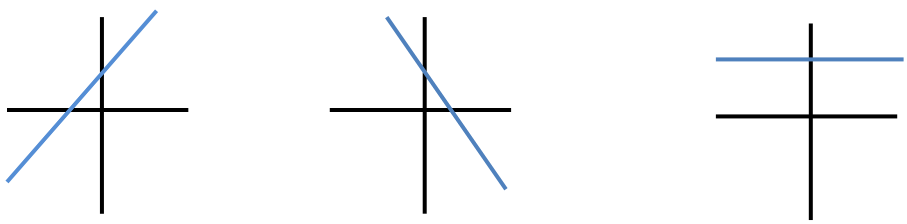


Si la pendiente (m) es mayor que cero se dice que la pendiente es positiva,

Si la pendiente(m) es menor que cero se dice que la pendiente es negativa,

Si la pendiente (m) es igual a cero la recta es paralela al eje (x) del plano cartesiano.

En la figura siguiente vemos cuál es la forma que tiene la gráfica de la recta, dependiendo del signo de la pendiente.



Pendiente Positiva | Pendiente Negativa | Pendiente Cero

También recordamos que en una ecuación lineal $y = mx + b$, m es la pendiente de la recta.

Ejemplo

1) Determina la pendiente de $y = 5x - 9$.

   Solución:

   La pendiente es $m = 5$.

2) Determina la pendiente de la recta determinada por los puntos $A(0,5)$ y $B(4,-6)$.

   Solución:

   Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas, tenemos

$$m = \frac{-6-5}{4-0} = \frac{-11}{4}.$$

Ejercicios

1) Traza en tu cuaderno, las siguientes rectas en un plano cartesiano. Mide en cada caso, el ángulo de inclinación con la ayuda de un transportador. Encuentra la pendiente y completa la tabla.

a) $y = 2x$.

b) $y = 4x$.

c) $y = \frac{1}{2}x$.

d) $y = \frac{1}{3}x$.

e) $y = 4x - 4$.

f) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

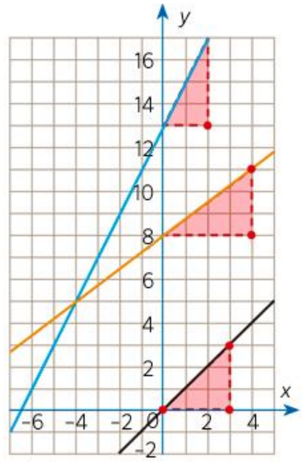
g) $y = \frac{1}{3}x + 3$.

h) $y = x + 1$.

i) $y = 2x + 2$.

Ecuación de la recta	**Medida del ángulo de inclinación**	**Pendiente**

2) Considera la figura siguiente



Escribe el color de la recta que corresponde a cada ecuación.

a) $y = x$.

b) $y = 2x + 13$.

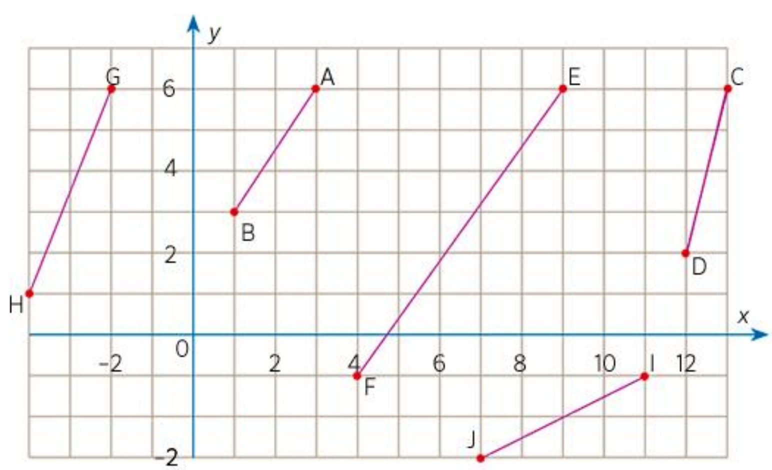
c) $y = \frac{3}{4}x + 8$.

d) Anota, junto a cada triángulo, las medidas del cateto opuesto y del cateto adyacente al ángulo que es igual al ángulo de inclinación de la recta.

e) Calcula, para cada triángulo, el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente y compáralo con la pendiente de la recta correspondiente.

f) ¿Cómo son entre sí el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ y la pendiente de la recta respectiva?

3) En la figura siguiente, se han trazado distintos segmentos de recta en el plano. Anota, junto a cada uno, la pendiente de la recta a la que pertenece.



4) En cada caso determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

a) $A(-3, 5)$ y $B(2, 7)$.

b) $A(4, -2)$ y $B(7, -2)$.

c) $A(-1, 2)$ y $B(4, -5)$.

d) $A(0, 4)$ y $B(-3, 0)$.

e) $A(-5, 1)$ y $B(1, -3)$.

Funciones trigonométricas

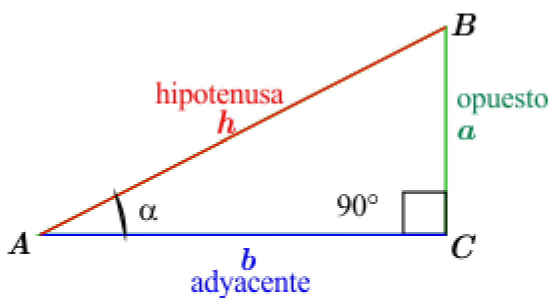
En esta sección haremos una introducción al análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Definición

Las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son llamadas *funciones* o *razones trigonométricas*.

Los nombres de los lados de un triángulo rectángulo usados comúnmente son:

La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, es decir, el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo. Observa la figura siguiente.
El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo α.
El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo α.



El **seno** (sen) de un ángulo es el cociente de la longitud del cateto opuesto entre la longitud de la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El **coseno** (cos) de un ángulo es el cociente de la longitud del cateto adyacente entre la longitud de la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

La **tangente** (tan) de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

La **cotangente** (cot) de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

La **secante** (sec) de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

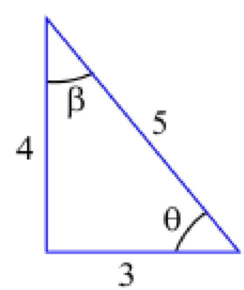
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

La **cosecante** (csc) de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

Ejemplos

1. Considera el siguiente triángulo y obtén las razones trigonométricas para el ángulo θ.



Solución:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} = 0.6$$

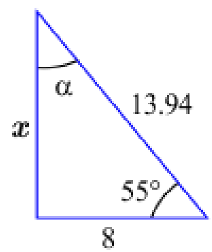
$$\tan\ \theta = \frac{4}{3} \approx 1.333$$

$$\cot\theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\sec\theta = \frac{5}{3} \approx 1.666$$

$$\csc\theta = \frac{5}{4} = 1.25$$

2. Considera el siguiente triángulo y encuentra los valores de x y α.



Solución:

Sustituimos en la función tangente los valores conocidos para encontrar el valor de x.

$$\tan 55° \ = \ \frac{x}{8}$$

$$(8)\tan 55° = x$$

$$(8)(1.4281) \approx x$$

$$11.4251 \approx x.$$

Para encontrar el valor de α tenemos 2 opciones, la primera es:

$$\alpha = 90° - 55°$$

$$\alpha = 35°,$$

la segunda es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{13.94}$$

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{8}{13.94}\right)$$

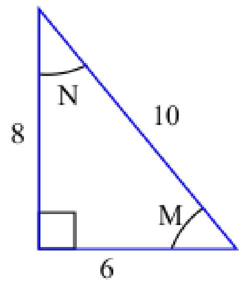
$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.5738)$$

$$\alpha \approx 35.02$$

$$\alpha \approx 35°1'.$$

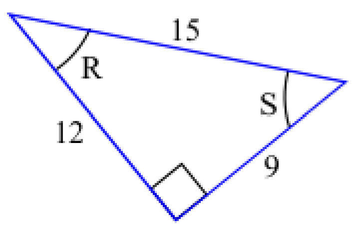
Ejercicios

1) Calcula lo que se te indica de acuerdo con el siguiente triángulo.



sen M =	sen N =
cos M=	cos N=
tan M=	tan N=
cot M=	cot N=
sec M=	sec N=
csc M=	csc N=

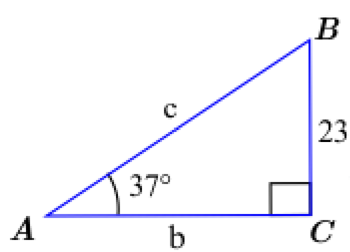
2) Calcula lo que se te indica de acuerdo con el siguiente triángulo.



sen R =	sen S =
cos R =	cos S =
tan R =	tan S =
cot R =	cot S =
sec R =	sec S =
csc R =	csc S =

3) Calcula los valores que se piden.

a)

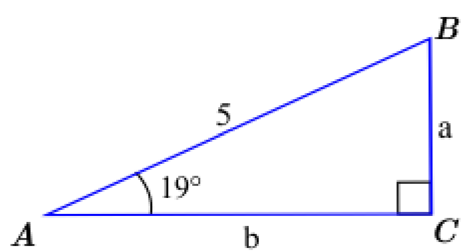


b = ___________

c = ___________

$\measuredangle$B= ___________

c)

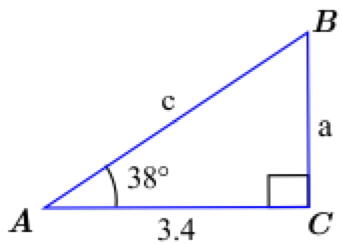


a = ___________

b = ___________

$\measuredangle$B= ___________

b)

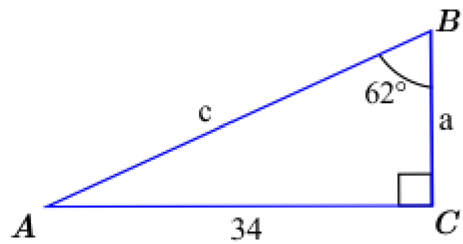


a = __________

c = __________

∡B = __________

d)

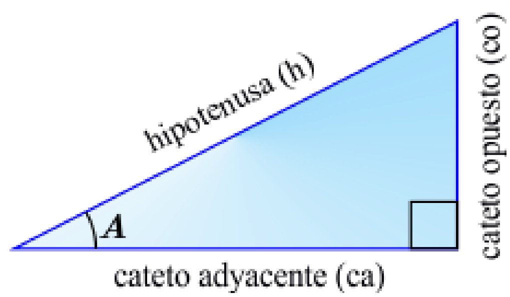


a = __________

c = __________

∡ A =__________

4) Considera el triángulo rectángulo con las medidas indicadas en cada caso. Completa la tabla a partir de las medidas de los ocho triángulos. Usa como modelo el triángulo que se muestra, en éste se marca el ángulo (A) cuyo cateto opuesto es el más pequeño de los lados del triángulo.



Triángulo 1.

Medida de los catetos: 4 cm y 3 cm.

Medida de la hipotenusa: 5 cm.

Triángulo 2.

Medida de los catetos: 1 cm y 0.75 cm.

Medida de la hipotenusa: 1.25 cm.

Triángulo 3.

Medida de los catetos: 2 cm y 1.5 cm.

Medida de la hipotenusa: 2.5 cm.

Triángulo 4.

Medida de los catetos: 8 cm y 6 cm.

Medida de la hipotenusa: 10 cm.

Triángulo 5.

Medida de los catetos: 5 cm y 12 cm.

Medida de la hipotenusa: 13 cm.

Triángulo 6.

Medida de los catetos: 2.5 cm y 6 cm.

Medida de la hipotenusa: 6.5 cm.

Triángulo 7.

Medida de los catetos: 15 cm y 36 cm.

Medida de la hipotenusa: 39 cm.

Triángulo 8.

Medida de los catetos: 12 cm y 9 cm.

Medida de la hipotenusa: 15 cm.

	Medidas de los lados (cm)			**Cocientes**		
Triángulo	**CO**	**CA**	**H**	$\frac{co}{h}$	$\frac{co}{h}$	$\frac{co}{ca}$
1	3	4	5			
2						
3						
4						
5						
6	2.5	6	6.5			
7						
8						

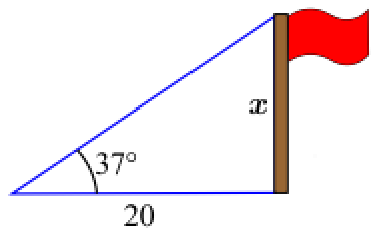
Problemas con razones trigonométricas

En esta sección haremos una explicación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.

Para resolver los problemas es importante hacer primero un dibujo para ubicar los datos y así saber qué razón trigonométrica conviene usar para resolverlo.

Ejemplo

- Calcula la altura del asta de la bandera, si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37° y su sombra mide 20 m.



Solución:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.$$

Sustituyendo

$$\tan 37° = \frac{x}{20}.$$

Despejando x

$$x = (\tan 37°)(20).$$

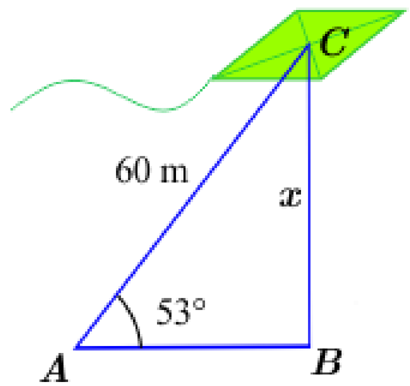
Resolviendo

$$x \approx (0.7535)(20)$$

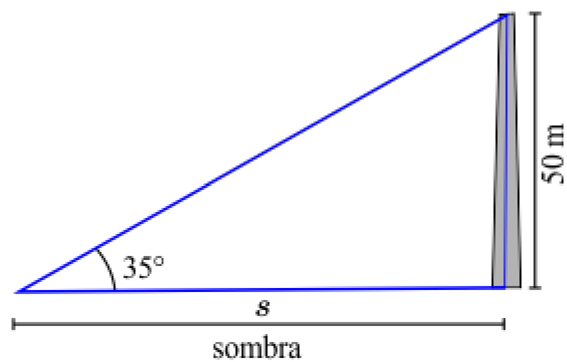
$$x \approx 15.071 \text{ m}.$$

Ejercicios

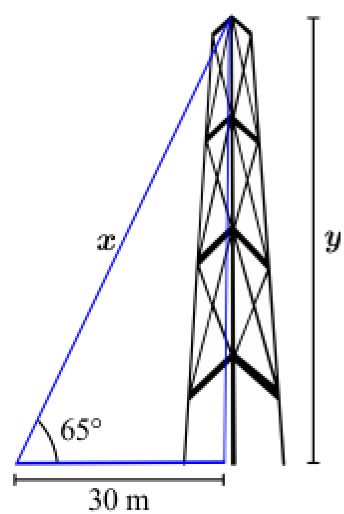
1) ¿A qué altura del piso se encuentra el centro del papalote, cuando el hilo que lo sostiene mide 60 m y forma con el piso un ángulo de 53°.



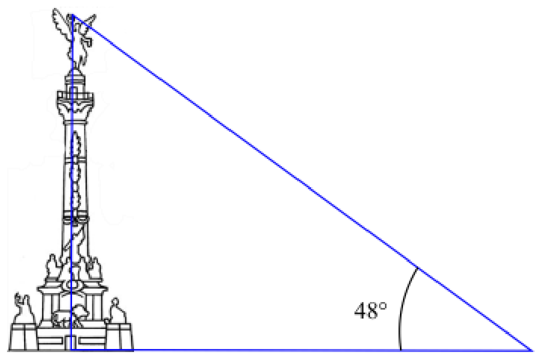
2) Calcula cuánto mide la sombra de la torre.



3) Encuentra la altura de la torre y la longitud del tirante que la sostiene.



4) Calcula la altura de una torre si desde una distancia de 50 m se observa su punto más alto con un ángulo de 48°.



5) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4.8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.
6) Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?
7) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.
8) Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm, respectivamente. Calcula el lado del rombo y sus ángulos.
9) Queremos fijar un poste de 3.5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40°. ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?
10) Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.

Razón de cambio

Dedicaremos está sección al cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal; asimismo se hará la identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Definición

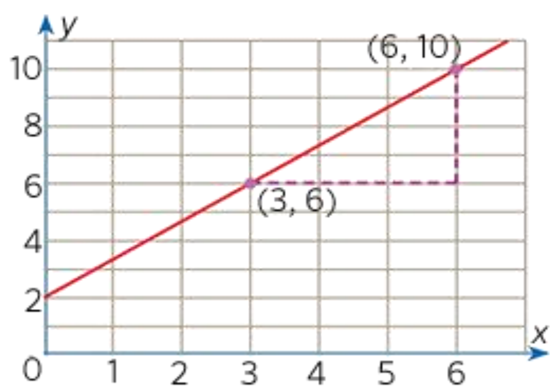
Se conoce como razón de cambio, entre dos variables, al valor que aumenta o disminuye una de las variables por cada unidad que aumente o disminuya la otra.

Ejemplos

1. Para saber cuál de dos o más trenes es más rápido no sólo basta comparar el tiempo transcurrido o la distancia recorrida, sino que es necesario considerar la relación entre ambas magnitudes, como 160 km en 30 min; o 320 km/h.

   Esta relación es una "razón de cambio" y se llama velocidad, o bien, rapidez. Cuando la razón de cambio entre dos cantidades es constante, la gráfica de la relación es una recta cuya pendiente coincide con la razón de cambio.

2. La pendiente de una recta también es la razón de cambio de las ordenadas respecto a las abscisas. Como la pendiente de una recta es constante, su razón de cambio también lo es. Para calcular la razón de cambio se eligen dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo, $(3, 6)$ y $(6,10)$ por cada vez que x aumenta 3, y lo hace 4. En otras palabras, cuando x aumenta 1, y lo hace $\frac{4}{3}$.



   El cálculo también se puede hacer así:

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{cambio de } y}{\text{cambio de } x}$$

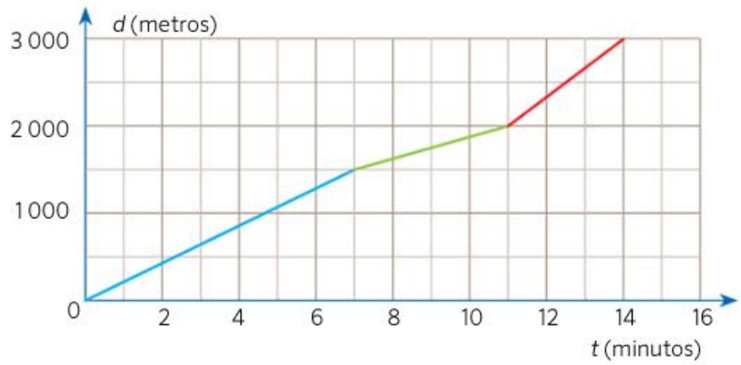
$$\text{razón de cambio} = \frac{10-6}{6-3}$$

$$\text{razón de cambio} = \frac{4}{3}.$$

Ejercicios

1) Para mantenerse en buena forma física, cada mañana Agustín rodea a pie un parque cercano a su casa. Ayer lo hizo a distintas velocidades: dio una vuelta caminando, dos corriendo y tres trotando (no necesariamente en ese orden).

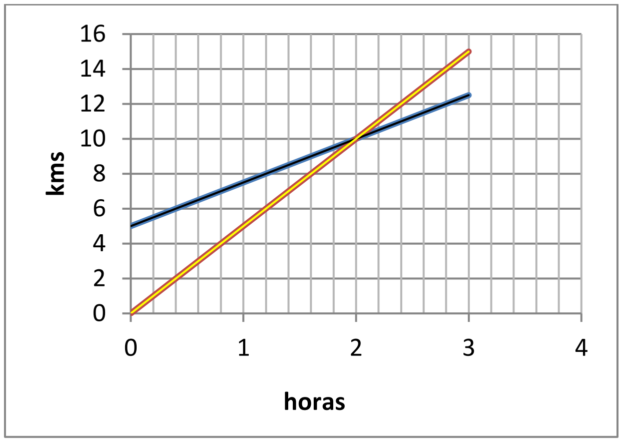
   La gráfica relaciona la distancia (d) recorrida por Agustín y el tiempo (t) transcurrido desde que empezó a ejercitarse.



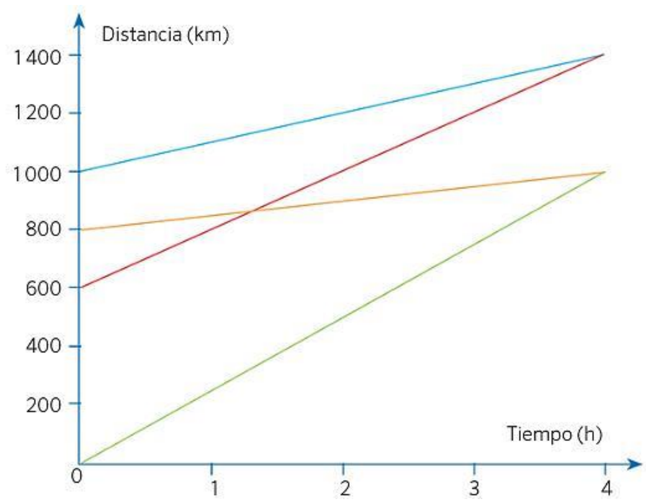
   a) Escribe, junto a cada recta, a qué parte del recorrido (caminar, correr o trotar) corresponde.
   b) ¿Cómo se nota en la gráfica qué segmento corresponde al de mayor velocidad?
   c) ¿Qué distancia recorrió Agustín?
   d) ¿Cuánto tiempo duró el trayecto?
   e) Completa la tabla.

	Tramo azul	**Tramo verde**	**Tramo rojo**
Tiempo en que recorrió el tramo (min)		4	
Distancia recorrida en el tramo (m)	1 500		
Velocidad promedio en el tramo (m/s)			5.56

2) Si la siguiente gráfica muestra las distancias recorridas por dos ciclistas separados entre sí, ¿A qué velocidad viajan el ciclista correspondiente a la línea azul y el correspondiente a la línea roja?

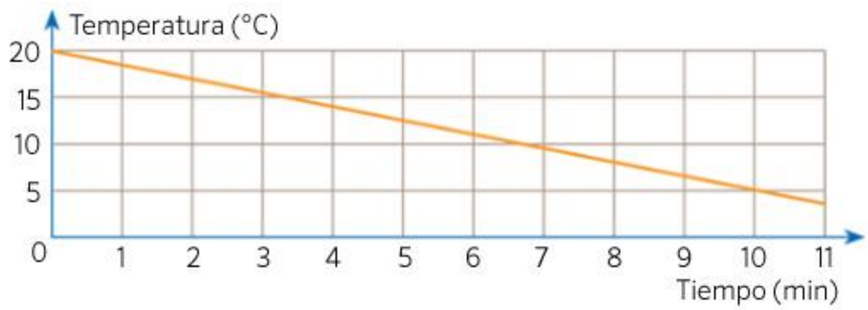


3) Cuatro trenes viajan con velocidad constante. Las rectas mostradas relacionan el tiempo transcurrido y la distancia que recorre cada tren.



a) ¿De qué color es la recta del tren más rápido?
b) ¿Y del más lento?
c) Traza, en el mismo plano, una recta que corresponda al movimiento de un tren más rápido que cualquiera de los anteriores.
d) Traza una recta que corresponda a un tren menos rápido que los anteriores.

4) Se midió la temperatura del agua en un recipiente durante 11 min y se trazó la gráfica que se muestra con los resultados de las mediciones.



a) ¿Cómo cambia la temperatura conforme el tiempo aumenta?

b) Calcula las siguientes razones. Expresa la disminución de la temperatura con un signo negativo.

- Entre los minutos 0 y 4, la temperatura cambió ______ grados en aproximadamente __________ minutos.
- Entre los minutos 4 y 8, la temperatura cambió ______grados en aproximadamente ___________minutos.
- Entre los minutos 0 y 10, la temperatura cambió _____ grados en aproximadamente ___________minutos.

5) En cada tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos pertenecientes a una recta. Anota, en cada caso, el valor de su razón de cambio.

Recta 1	
x	y
0	5
1	7
2	9
3	11
Razón de cambio:	

Recta 2	
x	y
0	2.5
0.5	3
1	3.5
1.5	4
Razón de cambio:	

Recta 3	
x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3}{2}$	6
$\frac{5}{2}$	10
Razón de cambio:	

Medidas de dispersión

En esta sección veremos a la medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media); y el análisis de las diferencias de la desviación media con el rango como medidas de la dispersión.

Definiciones

Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión son parámetros estadísticos que indican cuanto se alejan los datos respecto de la media aritmética. Sirven como indicador de la variabilidad de los datos. Las medidas de dispersión que estudiaremos son el rango y la desviación media.

Rango

Conocido también como la amplitud de variación o recorrido, es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de los datos e indica la dispersión entre los valores extremos de una variable, el rango se denota como R.

$$R = dato\ mayor - dato\ menor.$$

Desviación media

Es el promedio aritmético de los valores absolutos de la desviación de cada dato con la media. Cuando se acerca a cero, significa que los datos están menos dispersos y si el valor de guía difiere mucho de la media, significa que los datos están muy dispersos y puede ser que la media no sea un buen representante.

$$D_m = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + |x_4 - \bar{x}| + \ldots \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

$$D_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}.$$

Ejemplo

1. Calcula el rango y la desviación media del grupo de datos:

$$10, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 6, \quad 6, \quad 5, \quad 8, \quad 9.$$

Solución:

$$R = 10 - 5 = 5$$

$$\bar{x} = \frac{10 + 5 + 7 + 9 + 6 + 6 + 5 + 8 + 9}{9} = \frac{65}{9} = 7.22.$$

La desviación media es

$$D_m = \frac{|10-7.22|+|5-7.22|+|7-7.22|+|9-7.22|+|6-7.22|+|6-7.22|+|5-7.22|+|8-7.22|+|9-7.22|}{9}$$

$$D_m = \frac{2.78+2.22+0.22+1.78+1.22+1.22+2.22+0.78+1.78}{9}$$

$$D_m = \frac{14.22}{9}$$

$$D_m = 1.58.$$

Esto nos indica que los datos no están tan dispersos, es decir, que están cerca de la media.

2. Las calificaciones de Sara en los 5 bimestres fueron las siguientes: $10, 8, 4, 10, 4$. Calcula su promedio y la desviación media.

   Solución:

$$\bar{x} = \frac{10+8+4+10+4}{5} = \frac{36}{5} = 7.2.$$

   La desviación media es:

$$D_m = \frac{|10-7.2|+|8-7.2|+|4-7.2|+|10-7.2|+|4-7.2|}{5}$$

$$D_m = \frac{2.8+0.8+3.2+2.8+3.2}{5}$$

$$D_m = \frac{12.8}{5}$$

$$D_m = 2.56.$$

3. Las calificaciones de Carolina son $7, 7, 6, 8$ y 8. Calcula el promedio y la desviación media de los datos. Utiliza lo obtenido en el ejemplo anterior para hacer lo que se pide:
   a) Compara los promedios de Sara y Carolina, y determina a quién le fue mejor.
   b) Compara las desviaciones medias para Sara y Carolina, y determina quién fue más constante en sus calificaciones.

   Solución:

$$\bar{x} = \frac{7+7+6+8+8}{5} = \frac{36}{5} = 7.2$$

   La desviación media es:

$$D_m = \frac{|7-7.2|+|7-7.2|+|6-7.2|+|8-7.2|+|8-7.2|}{5}$$

$$D_m = \frac{0.2 + 0.2 + 1.2 + 0.8 + 0.8}{5}$$

$$D_m = \frac{3.2}{5}$$

$$D_m = 0.64.$$

a) Compara los promedios de Sara y Carolina y determina a quién le fue mejor.

Solución:

Los promedios son iguales por lo que no se puede decir a quién le fue mejor.

b) Compara las desviaciones medias para Sara y Carolina y determina quién fue más constante en sus calificaciones.

Solución:

La desviación media de Carolina fue más pequeña por lo que ella es más constante.

Ejercicios

1) En la siguiente tabla se muestran los pesos en kilogramos que transportan dos empresas de paquetería en una semana.

	Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
Empresa A	35	25	20	15	25	30	20
Empresa B	20	50	10	25	25	5	15

a) Compara los promedios de las empresas y determina a quién le fue mejor.

b) Compara las desviaciones medias y determina la dispersión de cada grupo y di qué representa ese dato.

2) En la siguiente tabla se muestran el número de pasajeros transportados por dos autobuses de primera clase en su primera corrida del día durante una semana laboral.

	Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Autobús A	35	45	22	15	13
Autobús B	17	19	21	31	35

a) Compara los promedios de los autobuses y determina a quién transportó mayor número de pasajeros.

b) Compara las desviaciones medias y determina la dispersión de cada grupo. Di qué representa ese dato.

3) En el negocio de Carlos hay 1 contador, 4 vendedores, 3 promotores, 1 secretaria y Carlos que es el gerente. El gerente gana $28 700, el contador $25 014, el vendedor $20 610, el promotor $18 800, la secretaria $15 450. Calcula la media, el rango y la desviación media de estos datos.
   a) ¿Cuántos empleados tienen un sueldo cercano a la media?
   b) En una fábrica hay el doble de empleados y la media del sueldo es la misma que en el negocio de Carlos, pero la desviación media es de $9667.53 ¿Cuánto es menor el salario más bajo?
   c) ¿Cuánto sería mayor el salario más alto?
4) En un estudio para comparar el aprovechamiento de los estudiantes de matemáticas del turno matutino y vespertino, se usaron las calificaciones finales de los alumnos de 3°. Se tomaron 20 estudiantes de cada turno al azar y se encontraron los siguientes datos.

Matutino	6	10	10	8	8	7	9	6	8	5	8	8	7	9	9	10	9	10	6	7
Vespertino	10	10	6	8	9	5	10	10	6	6	8	9	8	10	10	7	6	5	7	10

   a) Completa la tabla.

Calificaciones	**Matutino**	**Vespertino**
	No. de estudiantes	**No. de estudiantes**
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Indicador		
Media		
Mediana		
Moda		
Desviación media		
Rango		

b) ¿Cuántos estudiantes están en los extremos (calificaciones de 5 y 10) para cada turno?

c) ¿Cuántos estudiantes están en la parte media (calificaciones de 7 y 8) para cada turno?

d) ¿Qué indicador de tendencia central (media, mediana o moda) muestra estas diferencias?

e) ¿Qué medida de dispersión (desviación media o rango) muestra estas diferencias?

5) La tarea de Maru era analizar un conjunto de datos y decidió averiguar el número de personas que viven en cada departamento en su edificio, que tiene 12 departamentos y la conserjería. La siguiente tabla muestra los resultados de la investigación:

Departamento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	C
No. de personas	4	5	1	5	2	5	4	2	2	8	4	1	2

a) Completa la siguiente tabla:

Habitantes	**No. de departamentos**
1	
2	
4	
5	
8	
Total	

b) Calcula el promedio de habitantes por departamento.

c) ¿Cuál es la mediana de este conjunto de datos?

d) ¿Cuál es la moda de este conjunto de datos?

e) ¿Cuál de los indicadores de tendencia central, media, mediana o moda, describe mejor a la población del edificio?

f) ¿Cuál es el rango de este conjunto de datos?

g) Calcula la desviación media de este conjunto de datos.

h) Resta la desviación media de la media y compara este resultado con el número menor de habitantes en un departamento.

i) Suma la desviación media de la media y compara este resultado con el número mayor de habitantes en un departamento.
j) ¿Cuál de las medidas de dispersión, rango o desviación media, describe mejor la población del edificio?

Reto

Resuelve el siguiente cruci-número utilizando únicamente los números $2, 4, 6, 9$ y los signos de: suma, resta y multiplicación. No se deben repetir los números y los símbolos dentro del mismo renglón o columna.

9							$= 20$
$-$							
							$= 20$
$+$							
							$= 11$
$\times$							
							$= 20$
$= 14$		$= 36$		$= 20$		$= 24$	

BLOQUE V

Problemas con ecuaciones y sistemas de ecuaciones

En esta sección aplicaremos todo lo visto anteriormente para resolver problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Asimismo, se trabajará en la formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

En lo que sigue, se quiere resolver problemas planteando una ecuación lineal, una ecuación cuadrática o un sistema de ecuaciones, según sea el caso para posteriormente resolver usando cualquier método.

Ejemplos

1. Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo si sabes que su área mide 240 cm^2 y los catetos miden $2x$ y $2x+4$ respectivamente.

   Solución:

   Recordemos la fórmula de área de un triángulo:
   $$A=\frac{bh}{2}.$$
   Después sustituimos los valores conocidos
   $$240=\frac{2x(2x+4)}{2}.$$
   Resolvemos la ecuación
   $$240(2)=2x(2x+4)$$
   $$240=x(2x+4)$$
   $$240=2x^2+4x$$
   $$2x^2+4x-240=0$$
   $$x^2+2x-120=0$$
   $$(x+12)(x-10)=0$$
   $$x=-12 \quad \text{o} \quad x=10.$$
   Como tenemos un valor positivo y uno negativo y sabemos que las distancias no son negativas, sólo tomamos el valor positivo. De donde
   $$2x=2(10)=20 \quad \text{y} \quad 2x+4=2(10)+4=20+4=24.$$
   Los catetos miden 20 y 24 cm.

2. Encuentra tres números consecutivos cuya suma sea 258.

   Solución:

   Llamamos $x, x+1$ y $x+2$ a los números buscados.

   Planteamos la ecuación

$$x+(x+1)+(x+2)=258.$$

   Reducimos términos

$$3x+3=258$$
$$3x=258-3$$
$$3x=255$$
$$x=\frac{255}{3}$$
$$x=85.$$

   Por lo tanto, los números son $85, 86$ y 87.

3. Dos familias compraron boletos para el cine. La familia Pérez compró uno para adulto y cuatro para niño, y pagó $\$190.00$; la familia Sánchez compró dos para adulto y dos para niño, y pagó $\$170.00$. ¿Cuánto cuesta un boleto para niño?

   Solución:

$$x = \text{ boleto de adulto}$$
$$y = \text{ boleto de niño.}$$

   Con los datos del problema planteamos el sistema de ecuaciones:

$$x+4y=190 \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$2x+2y=170 \cdots\cdots\cdots (2).$$

   Resolveremos el sistema de ecuaciones por sustitución.

   Despejamos x de la ecuación (1)

$$x=190-4y.$$

   Sustituimos en la ecuación (2)

$$2(190-4y)+2y=170.$$

   Resolvemos la ecuación:

$$380-8y+2y=170$$
$$380-6y=170$$
$$-6y=170-380$$
$$-6y=-210$$

$$y = \frac{-210}{-6}$$

$$y = 35.$$

Sustituimos el valor encontrado en la ecuación (1) ya despejada.

$$x = 190 - 4y$$

$$x = 190 - 4(35)$$

$$x = 190 - 140$$

$$x = 50.$$

Por lo tanto, el costo de un boleto de adulto es de $\$50.00$ y el de uno de niño es de $\$35.00$.

Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas

1) Julián tiene tres veces la edad de Pedro. Si la suma de las edades es 60, ¿cuál es la edad de Julián?
2) El granjero tiene cinco caballos más que el número de gallinas. Si en total tiene 91 animales ¿Cuántos caballos hay?
3) Después de comer en un restaurante, ocho personas se dividieron la cuenta que debían pagar, que era de $\$1\,300.00$; sin embargo, decidieron que tres de ellos pagaran $\$50.00$ menos que los demás. ¿Cuánto pagó cada persona que gastó más y cuánto la que pagó menos?
4) La suma de las edades de Mariana, Carolina y Estefanía es 88 años. Carolina tiene 20 años más que la Estefanía y Mariana 18 años menos que Carolina. hallar las edades respectivas.
5) Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 6 cm, el área se hace nueve veces más grande.
6) Dentro de 11 años la edad de Vicente será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Vicente ahora?
7) Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?
8) En un rectángulo la base mide 18 cm más que la altura y el perímetro mide 76 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

9) Un transportista lleva en su furgoneta sacos de arroz de dos pesos distintos. Los sacos grandes tienen un peso de 30 kg, mientras que los pequeños pesan un 20% menos. El conductor recuerda que el número de sacos pequeños es el triple del de sacos grandes, y que el peso total de la mercancía es de 714 kilogramos. Calcula el número de sacos de cada tipo que se transportan.
10) Una empresa ha gastado $\$150\,000$ en comprar un celular a cada uno de sus 25 empleados. Su compañía telefónica ofertó dos modelos diferentes, uno a $\$7\,500$ y otro a $\$5\,000$. ¿Cuántos móviles de cada modelo compró?

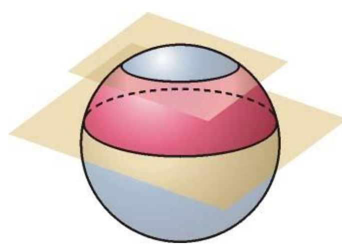
Secciones cónicas. Cortes en cilindros y conos

En esta sección haremos un breve análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes, con un plano, a un cilindro o a un cono recto. Igualmente, pensaremos en las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Si cortamos un sólido con un plano, del corte resulta una figura que se conoce como sección plana del sólido que se cortó.

Ejemplo

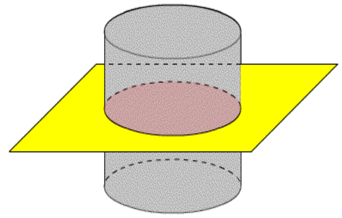
- Al cortar una esfera con un plano, la sección obtenida es siempre un círculo.



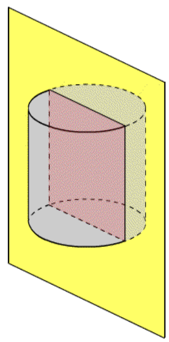
En cambio, si cortamos con un plano un cilindro o un cono podemos encontrar diferentes secciones planas.

Ejemplos

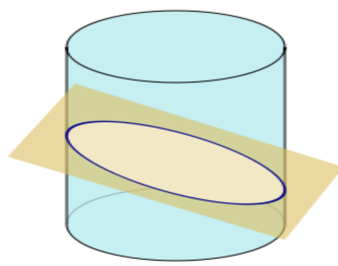
1. Si consideramos un cilindro y el corte es paralelo a la base obtenemos un círculo.



2. Pero si hacemos el corte perpendicular a la base, resulta un rectángulo.

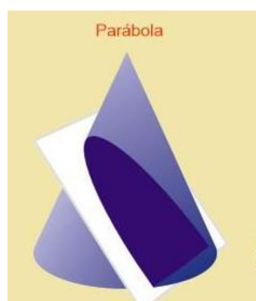


3. Si hacemos un corte oblicuo, obtenemos una elipse.

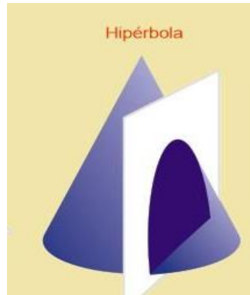


Veamos ahora qué sucede con un cono.

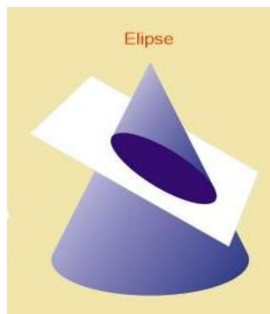
4. Si el corte es paralelo a la generatriz obtenemos una parábola.



5. Si el corte es perpendicular a la base se obtiene lo que llamamos una rama de una hipérbola.

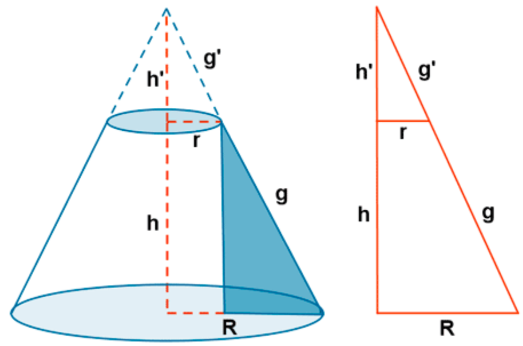


6. Si el corte es oblicuo a la base obtenemos una elipse.



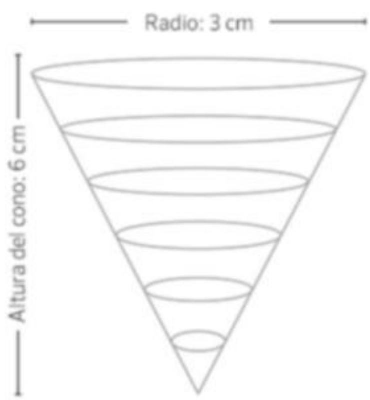
7. Cuando el corte se paralelo al base obtenemos un círculo.

Observamos que si el corte se hace con un plano que contenga al eje del cono y otro con uno paralelo a la base, se obtienen, de acuerdo con el teorema de Tales, dos triángulos semejantes. En particular, si cortamos el cono por la mitad de su altura, el radio más pequeño es la mitad del radio del cono original.



Ejercicios

1) Considera un cono de papel. Completa la tabla calculando la medida del radio del círculo que se forma cuando se parte el cono, a la altura indicada, con un plano paralelo a la base.



Altura del corte a partir del vértice (cm)	**Radio del círculo que se forma (cm)**
1	
2	
3	1.5
4	
5	
6	3

2) ¿Cuál es diámetro de la sección circular que se obtiene al cortar un cono de 34.5 cm de altura y 22.5 cm de diámetro a 15 cm de vértice del cono sobre el eje?

3) ¿Cuál es la longitud del círculo que se forma al hacer un corte paralelo a la base del cono recto en el que el radio es de 18 cm y una altura de 30 cm, si el corte se hace a 13 cm de la base?

4) ¿A qué altura se deberá hacer un corte en un cono para obtener un círculo que tenga un área de 2 827 cm^2, si el cono tiene una generatriz de 95 cm y un radio de 50 cm?

5) Calcula el área del círculo que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base exactamente a la mitad de la altura del cono que tiene un diámetro de 14 cm y altura de 12 cm.
6) Carlos necesita una lanza de madera como parte de una obra plástica para su clase de Artes Visuales. Para hacerla tiene un cono de madera con un radio de 4 cm y una altura de 9.5 cm y un palo cilíndrico con un radio de 1.5 cm. Si coloca una sección del cono en el extremo del palo de madera. ¿A qué altura debe hacer un corte paralelo a su base para obtener la punta de la lanza de manera que la base del cono cortado y la del cilindro, sean iguales?

Volúmenes de cilindros y conos

En esta sección trato de justificar las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencias las fórmulas del volumen de un prisma y una pirámide.

El cono y el cilindro pueden pensarse como casos límites de un prisma y una pirámide si se considera que el número de lados del polígono de la base crece indefinidamente.

Como sabemos, el volumen de un prisma puede calcularse si se multiplica el área de la base por la altura del prisma. De manera semejante, el volumen de un cilindro se calcula al multiplicar el área de la base circular por la altura del cilindro.

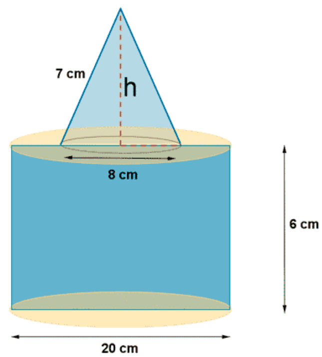
$$V = \pi r^2 h.$$

De igual manera, así como el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma correspondiente, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen del cilindro, entonces

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Ejemplo

- Calcula el volumen de la figura siguiente.



Solución:

Debemos obtener el volumen del cono (V_{cono}) y del cilindro(V_{cilindro}) y después sumar los resultados. Para ello, observamos que no tenemos la altura del cono, pero ésta puede obtenerse usando el teorema de Pitágoras.

Altura del cono:

$$7^2 = h^2 + 4^2$$
$$h = \sqrt{7^2 - 4^2}$$
$$h = \sqrt{49 - 16}$$
$$h = \sqrt{33}$$
$$h \approx 5.74 \text{ cm.}$$

Volumen del cono:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Sustituimos los valores en la fórmula.

$$V \approx \frac{\pi(4)^2(5.74)}{3}$$
$$V \approx \frac{(3.14)(16)(5.74)}{3}$$
$$V \approx \frac{288.3776}{3}$$
$$V \approx 96.126 \text{ cm}^3.$$

Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi(10)^2(6)$$
$$V \approx (3.14)(100)(6)$$
$$V \approx 1884 \text{ cm}^3.$$

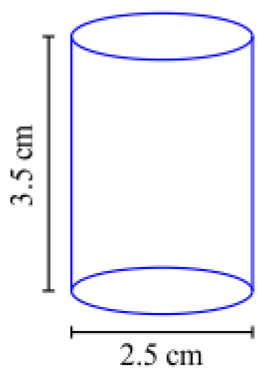
Sumamos.

$$V_{\text{total}} = V_{\text{cono}} + V_{\text{cilindro}} \approx 96.126 + 1884$$
$$V_{\text{total}} \approx 1980.126 \text{ cm}^3$$

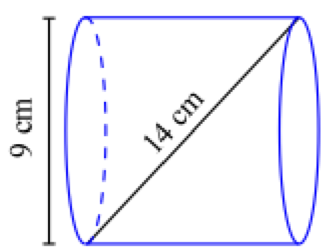
Ejercicios

Calcula el volumen de las siguientes figuras.

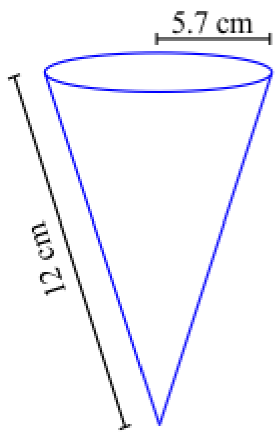
1)



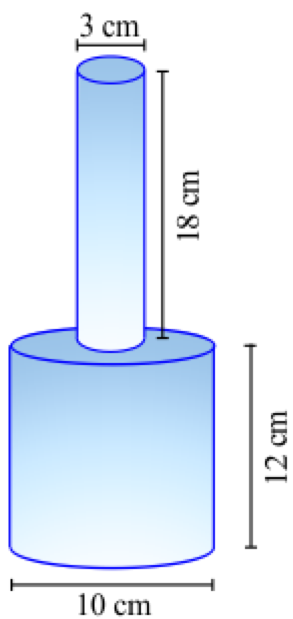
2)



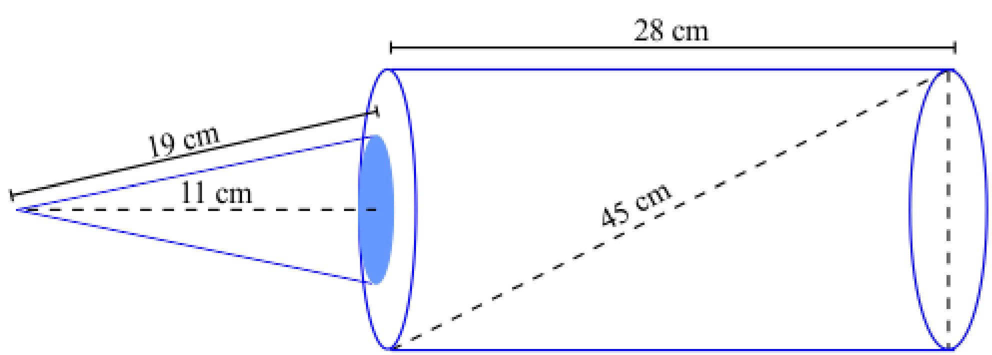
3)



4)



5)



6) Calcula el volumen de un cilindro circular recto cuya base mide 5.3 cm de radio y su altura es el triple del radio de la base.

7) De un cono se conoce el radio de la base que mide 6 cm y la generatriz, que mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.

8) Una lata de refresco, con forma de cilindro, contiene 330 ml. Calcular el radio de la lata sabiendo que su altura es de 15 cm.

9) Vaciamos 10 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 2 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

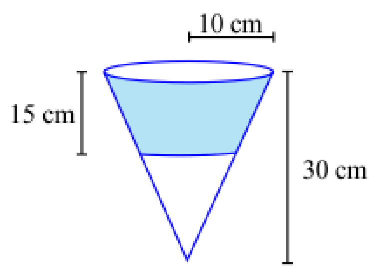
10) Un embudo está formado por un tronco de cono y un cilindro de 10 cm de altura cada uno. En el tronco de cono, los radios de las tapas miden 6 y 2 cm, respectivamente. Calcula el volumen total del embudo.

Problemas de volúmenes para cilindros y conos

En esta sección estudiaremos la estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Ejercicios

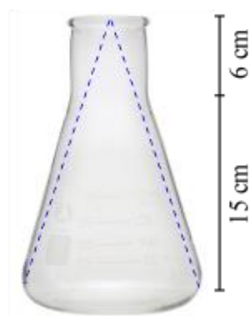
1) Se elaboró un recipiente en forma de cono truncado a partir de un cono con las medidas que se indican en la figura. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?



2) Una copa tiene forma de cono. La base de este mide 4 cm de radio y 7 cm de altura. ¿Cuál es el radio del círculo que forma la superficie del líquido si faltó un centímetro de altura para llenarla? ¿Cuánta bebida tiene la copa?

3) Se tiene un cono para helado de 12 cm de altura y 7 cm de diámetro en la base. Mediante un corte se hará un cono más pequeño. Si se quiere que el diámetro de la base del cono pequeño sea de 5 cm, ¿a qué altura se debe hacer el corte?

4) Considera el siguiente matraz de Erlenmeyer. Observa que a la altura de 15 cm inicia una parte cilíndrica. El radio de la base del matraz es de 5 cm. ¿Qué capacidad tiene el recipiente sin considerar su parte cilíndrica?



5) El fuselaje, es decir, el cuerpo, del avión comercial más grande, mide aproximadamente 6.4 m de diámetro y 88 m de largo. Para simplificar los cálculos, considera que el fuselaje es cilíndrico en las dos terceras partes, desde la punta hacia atrás y cónico en la última sección. ¿Cuál es el volumen del fuselaje?

Variación lineal y cuadrática

En esta sección veremos el análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos cantidades.

Cuando dos cantidades varían de manera lineal, la ecuación que las relaciona puede escribirse de la forma

$$y = mx + b.$$

Cuando dos cantidades varían de manera cuadrática, la ecuación que las relaciona puede escribirse de la forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ejemplos

1. El peso recomendado para una persona adulta depende de su estatura. Si E es la estatura medida en centímetros, la fórmula que nos permite calcular el peso ideal en kilogramos es

   $$P = 0.75\text{E} - 62.5.$$

   La mamá de David considera que tiene sobrepeso ya que pesa 65 kg y su estatura es de 1.62 m. Determina si la mamá de David tiene razón o si está en su peso ideal, o en su caso, cuántos kilogramos tiene de más o de menos.

   Solución:

   Sustituimos en la fórmula los datos conocidos.

   $$P = 0.75(162) - 62.5$$
   $$\text{P} = 121.5 - 62.5$$
   $$P = 59.$$

   La mamá de David tiene razón, ella no está en su peso ideal ya que $65 - 59 = 6$, es decir, tiene 6 kg extra.

2. Para calcular la altura h que alcanza un cohete luego de un tiempo t de haber sido lanzado, un fabricante de fuegos artificiales utiliza la ecuación

   $$h = 40t - 4.9t^2.$$

   Calcula la altura del cohete luego de 3.2 segundos.

   Solución:

   Sustituimos en la fórmula los datos conocidos.

$$h = 40(3.2) - 4.9(3.2)^2$$
$$h = 128 - 4.9(10.24)$$
$$h = 128 - 50.176$$
$$h = 77.824.$$

La altura que el cohete alcanzará en 3.2 segundos es 77.824 m.

Ejercicios

1) El lanzamiento de peso puede ser modelado usando la ecuación
$$y = -0.0241x^2 + x + 5.5.$$
Donde x es la distancia recorrida, medida en pies y y es la altura, también en pies. ¿Qué tan alto se encuentra el peso cuando la distancia recorrida es de 20 pies?

2) La ecuación $h = -16t^2 + v_0t + h_0$ es comúnmente usada para modelar un objeto que ha sido lanzado o aventado. La variable h representa la altura en metros, y t representa el tiempo en segundos. Los otros dos valores son números generalmente dados: h_0 es la altura inicial en metros y v_0 es la velocidad inicial en metros/segundo.
Una pelota es lanzada hacia arriba a 48 m/s desde una plataforma que está a 100 m de altura. Encuentra la altura que alcanza la pelota en 1.2s, 1.5s, 1.7s y determina cuál es la altura máxima.

3) El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional a su peso, y está dado por la ecuación $y = \frac{2}{75}x.$ ¿Cuál será el peso del cerebro de una persona de 83 kg?

4) La fábrica de artículos plásticos Rebote S.A. de C.V. está fabricando un nuevo artículo. Para producir n artículos se gastan, en las materias primas y el uso de las máquinas, p pesos de acuerdo con la ecuación.
$$p = 136.5 + 2.5n.$$
   a) Calcula cuánto cuesta producir $15, 25, 40, 50, 125$ artículos.
   b) Si cada artículo se vende a $\$6.00$, calcula cuánto se obtiene de la venta de $15, 25, 40, 50, 125$ artículos.
   c) Compara el costo de producción con lo que se obtiene de la venta y determina cuántos artículos deben vender como mínimo para que sea redituable, es decir, para obtener ganancias.

5) Un pequeño taller de carpintería se especializa en fabricar mesas rústicas. Para establecer las ganancias mensuales, el dueño del taller determina los gastos de manufactura y los ingresos por ventas. Señala que por cada mesa debe invertir $\$450.00$ de material. Adicionalmente el taller paga una renta de $\$18\,000.00$ y $\$\,1\,250.00$ de servicios (luz, agua, etcétera).
   a) Calcula cuánto cuesta producir $4,\ 5,\ 61$ mesas.
   b) ¿Cuánto obtiene de ganancia si en un mes vende 5 mesas, suponiendo que vende cada mesa en $3 000.00?
   c) ¿Puede tener pérdida en lugar de ganancia después de la venta de un mes? ¿Por qué?
   d) Escribe una fórmula que permita al dueño del taller calcular la ganancia o la pérdida mensual para cualquier cantidad de mesas vendidas.
   e) ¿A partir de qué cantidad de mesas vendidas empieza a tener ganancia? Usa la fórmula anterior.
   f) ¿Cuántas mesas debería vender para ganar $2 500.00?
6) Doña Juana vende tamales en el mercado. El precio de venta de cada tamal es de $\$15.00$ y su costo de producción es de $\$8.50$. Además, ella debe pagar $\$250.00$ diarios por el alquiler del espacio donde los vende.
   a) ¿Cuánto obtiene de ganancia si en un día vende 50 tamales?
   b) ¿Puede tener pérdida en lugar de ganancia después de la venta de un día? ¿Por qué?
   c) Escribe una fórmula que permita a doña Juana calcular la ganancia o la pérdida diaria para cualquier cantidad de tamales vendidos.
   d) ¿A partir de qué cantidad de tamales vendidos empieza a tener ganancia? Usa la fórmula anterior.
   e) ¿Cuántos tamales debería vender para ganar $725.00?
7) Una maquiladora que fabrica pantalones de mezclilla ha determinado que el costo de fabricación de su producto más vendido está dado por la función

$$C(x) = 150x + 12500.$$

   y los ingresos correspondientes están dados por la función

$$I(x) = 550x.$$

   a) ¿Cuántos pantalones deberá producir y vender para ganar $195 100?
   b) ¿Cuántos pantalones deberá producir y vender para no tener ganancia ni pérdida?

Resultados equiprobables y no equiprobables

En esta sección analizaremos las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Definición

Los resultados "equiprobables" son aquellos en los que todos los posibles resultados de un evento o suceso tienen la misma oportunidad de salir.

Ejemplo

- Al lanzar un dado, todos los números que se encuentran en las caras, tienen la misma oportunidad de salir.

Definición

Los resultados "no equiprobables" son aquellos en los que no todos los posibles resultados de un evento o suceso tienen la misma oportunidad de salir.

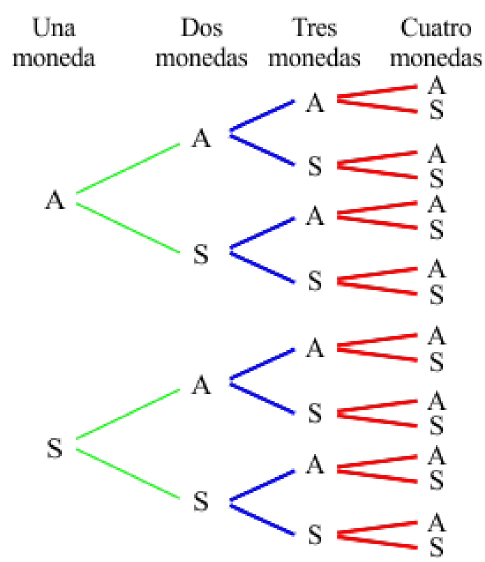
Ejemplos

1. Al extraer, al azar, una pelota de una urna que contiene 10 pelotas verdes y 2 rojas, ¿qué color es más probable que salga?

   Solución:

   Puesto que hay más pelotas verdes, es más probable que salga una pelota verde.
2. Cuando lanzamos una moneda, hay dos resultados posibles (águila o sol); si la moneda no está "cargada", cada resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, $\frac{1}{2}$.

   Usa el diagrama de árbol para responder



a) ¿Cuántos resultados posibles hay cuando lanzamos cuatro monedas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos resultados?

c) Cuando se lanzan cinco monedas. ¿Cuántos resultados posibles hay? ¿Son equiprobables? ¿Cuál es la probabilidad de cada uno?

d) Completa la tabla.

Cantidad de monedas que se lanzan simultáneamente	1	2	3	4	5	10	n
Número de resultados posibles	2			16			2^n

Solución:

a) En el árbol observamos que hay 16 resultados posibles.

b) La probabilidad de cada uno de los resultados es $\frac{1}{16}$.

c) Si lanzamos 5 monedas, a cada rama final del árbol, agregaríamos dos posibilidades, águila y sol, entonces tendremos 32 resultados posibles, con igual probabilidad de ocurrir, es decir, son resultados equiprobables. La probabilidad de cada uno es $\frac{1}{32}$.

d)

Cantidad de monedas que se lanzan simultáneamente	1	2	3	4	5	10	n
Número de resultados posibles	2	4	8	16	32	1024	2^n

Ejercicios

1) Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 5 bolas verdes. Se extrae al azar una bola de la bolsa, describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de que:
   a) La bola sea roja.
   b) La bola no sea negra.
   c) La bola sea blanca o verde.

2) Considera que se lanza un dado común (de seis caras).
   a) ¿Cuántos resultados posibles hay?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?

c) ¿Cuántos resultados posibles hay si se lanzan tres dados al mismo tiempo?

d) ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?

e) ¿Cuántos resultados posibles hay si se lanzan una moneda y un dado?

f) ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?

3) Se lanzan dos dados, uno de seis caras y uno de doce.

a) ¿Cuántos resultados posibles hay?

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno?

c) ¿Y la de obtener números iguales en ambos dados?

4) En una caja hay 27 tarjetas con las letras del alfabeto. Se sacará, sin ver, una tarjeta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea la letra D?

b) ¿Y la de que sea una vocal?

Ahora se sacarán dos tarjetas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos vocales?

d) ¿Y la de que sean dos consonantes?

5) Las probabilidades de aprobar las materias: Español, Matemáticas e Historia son, del 80%, 75% y 70%, respectivamente. Calcula:

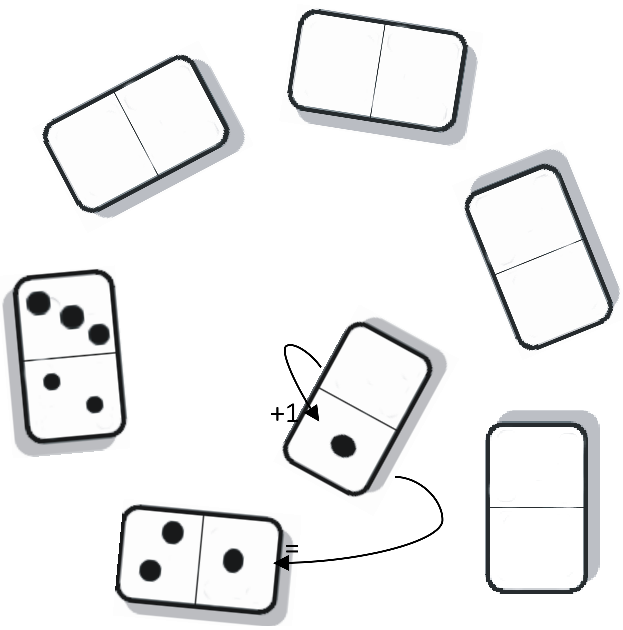
a) La probabilidad de aprobar las tres asignaturas.

b) La probabilidad de reprobar sólo una.

c) Si se ha reprobado sólo una, la probabilidad de que haya sido Matemáticas.

Retos

1) Completa la serie, usando solamente las fichas de un dominó convencional.



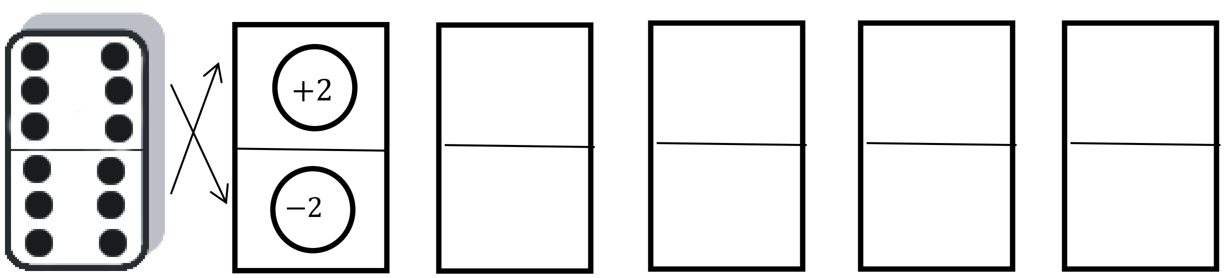
2) Juanito posee 10 monedas de la misma denominación y las quiere acomodar en cinco líneas rectas, pero se le dificulta porque en cada línea deben aparecer 4 monedas.
   Dibuja en el recuadro cómo colocarías las monedas para cumplir la condición.

3) A siete niños se les repartieron globos. Uno cada vez que se formaban. Cuando cada niño tenía 17 globos, ya no fue posible repartir más porque no había suficientes globos en la bolsa. Faltaban 2 para que le tocara otro más a cada uno. Si el número de globos era mayor que 100, ¿cuál era la cantidad de globos que tenía la bolsa?

4) Observa las siguientes palabras sin sentido, ordena las letras que las constituyen y forma expresiones relacionadas con las matemáticas.

NÓCUCEAI	
ÓGICINTAN	
RALAPALES	
MOTÍAREGE	
TIACÉMARIT	
EGALBÁR	
LORPIBADADIB	
SADATETÍCSI	
CARÁSFIG	
EPORASENOIC	

5) Completa las fichas de dominó, fijándote en la serie y su fórmula.



Conclusiones

El programa actual de la materia de Matemáticas no contempla un espacio dedicado a algunos temas. Como ejemplo, basta mencionar el de lenguaje algebraico, que es de vital importancia para el estudio del Álgebra. Dicho tema, desde mi punto de vista, ayuda a los alumnos a plantear, comprender y resolver problemas. Si el planteamiento es equivocado, no sirve aplicar método alguno. Resolver situaciones que se presentan en la vida cotidiana, requiere, a menudo, saber llevarlas al lenguaje matemático.

El programa mencionado, no permite que los alumnos aprendan la materia como deberían. El estudio de temas que no se relacionan entre sí, impide profundizar en ellos. Son tantos los temas, que únicamente es posible mostrar a los alumnos determinada técnica, cuando en ocasiones, por la propia naturaleza del problema hay varias maneras de resolver; al no tener alternativas, los alumnos pueden sentirse frustrados si la forma que conocen no es fácil de aplicar en un problema específico. Cubrir los temas del programa, puede ser lo más importante para algún maestro, cuando lo más importante debe ser el aprendizaje de los alumnos. Para mejorar el desempeño de los alumnos es necesario que resuelvan un mayor número de problemas, en los que puedan aplicar el mayor número de técnicas existentes.

Cambiar el programa no está permitido a los profesores, por lo que debemos hacer un esfuerzo motivando a los alumnos tratando de despejar sus dudas de manera sencilla, motivándolos para que practiquen los conceptos de la materia con más frecuencia para que así puedan desarrollar mejor sus habilidades de observación, representación mental, retención, recuperación, comparación, síntesis e inferencia y a la vez ayudar a que puedan desarrollar la capacidad de análisis y ordenación que considero, lamentablemente, no se están desarrollando en el salón de clases, si se sigue el programa actual al pie de la letra.

Sería deseable que a todos los maestros se nos permitiera dar el programa en el orden que consideramos más apropiado o adecuado, cubriendo todos los temas y agregando los que son necesarios para la comprensión de otros de vital importancia, que han desaparecido, pero es rara la escuela que permite hacer eso.

Bibliografía

1. Allen A. (2008). *Álgebra intermedia*. México, Prentice Hall.
2. Arreguín J. (2014). *Cuaderno de Ejercicios Matemáticas 3*. México. Ediciones Larousse S.A. de C.V.
3. Baldor A. (2007). *Álgebra.* México. Grupo Editorial Patria S. A. de C. V.
4. Barnet R. (1995). *Álgebra elemental*. México. McGraw-Hill.
5. Boll M. (1981). *Historia de las Matemáticas*. México. Diana.
6. Casarrubias A. (2014). *Complemento Matemático 3* cuaderno de trabajo. México, Casarrubias Editores.
7. Cetina D., Vázquez E. (2016). *Matemáticas 3*. México. EK Editores S.A. de C. V.
8. De Oteyza E., et al. (2008). *Álgebra*. México, Prentice Hall.
9. De Vargas E., et al. (2012). *Álgebra Preuniversitarios.* México. Editorial Santillana.
10. Drooyan I. (1994). *Elementos de Álgebra para bachillerato*. México. Limusa.
11. Flores M. (1996). *Temas selectos de Matemáticas*. México. Progreso.
12. Fuller G. (1994). *Álgebra elemental*. México. CECSA.
13. García M. Delgado A. (2002). *Invitación a las Matemáticas 3.* México, Pearson Educación.
14. Hernández G. (2005). *Matemáticas 3 (cuaderno de actividades).* México. Oxford University Press.
15. Lehmann, C. (1997). *Álgebra.* México. Limusa.
16. Limón J. (2007). *Geometría 1. (repasa con esquemas).* México. Oxford University Press.
17. Lischutz S. (1992). *Teoría de Conjuntos y temas afines.* México. McGraw-Hill,
18. Lovaglia F. et al. (2004). *Álgebra*. México, Harla.
19. Meserve B. Sobel M. (2002) *Introducción a las Matemáticas*. México. Reverté.
20. Nichols E. (1990). *Álgebra moderna*. México. CECSA.
21. Olguín H. Ibarra S. (2008). *Sentido numérico y pensamiento algebraica 1. (repasa con esquemas).* México. Oxford University Press.
22. Rangel L. (2008). *Relaciones y funciones*. México. Trillas.
23. Rider P. (1973). *Algebra (College algebra)*. México: Editorial Herrero S.A.
24. Ríos K. (2016). *Matemáticas 3*. México. Ediciones Castillo S.A. de C.V.
25. Sánchez F. (2015). *Matemáticas 3: Construcción del pensamiento*. México, Fernández Ediciones,
26. Swokowski E. (1980). *Álgebra universitaria*. México. CECSA.
27. Vargas, E. (2006). *Matemáticas-Algebra*. México: Santillana..

Mesografía

1. goo.gl/oQFS5o (Consulta: Septiembre de 2017).
2. goo.gl/cosMPM (Consulta: Septiembre de 2017).
3. goo.gl/QCp6Xt (Consulta: Septiembre de 2017).
4. goo.gl/hd5bMm (Consulta: Septiembre de 2017).
5. goo.gl/weAmUn (Consulta: Septiembre 2017).
6. goo.gl/1xXaFD (Consulta: Septiembre de 2017).
7. goo.gl/2zU3W2 (Consulta: Octubre de 2017).
8. goo.gl/wbqU4L (Consulta: Octubre de 2017).
9. goo.gl/85pkkZ (Consulta: Octubre de 2017).
10. goo.gl/tM2mtP (Consulta: Octubre de 2017).
11. goo.gl/NRyuVz (Consulta: Diciembre de 2017).
12. goo.gl/CPLtjj (Consulta Diciembre de 2017).
13. goo.gl/kG6fuq (Consulta: Diciembre de 2017)
14. goo.gl/igLtHi (Consulta: Diciembre de 2017).
15. goo.gl/HnjAdZ (Consulta Diciembre de 2017).
16. goo.gl/VsbZgW (Consulta: Enero de 2018).
17. goo.gl/euEJxf (Consulta: Enero de 2018).
18. goo.gl/WXkkRd (Consulta: Enero de 2018).
19. goo.gl/6pMnqR (Consulta: Febrero de 2018).
20. goo.gl/SaMwD9 (Consulta: Febrero de 2018).
21. goo.gl/hkemA8 (Consulta: Febrero 2018).
22. goo.gl/fk6BzF (Consulta: Febrero de 2018).
23. goo.gl/FgTbWp (Consulta: Febrero de 2018).
24. goo.gl/Wsyjza (Consulta: Febrero de 2018).
25. goo.gl/QczQ7T (Consulta: Febrero de 2018)
26. goo.gl/u2vvCL (Consulta: Febrero de 2018).
27. goo.gl/KCK4GR (Consulta: Febrero de 2018).