UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUADERNO DE TRABAJO PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS IV

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

GRACIELA ESPINOSA VÁZQUEZ

TUTORA:
M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2017

Hojas de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Espinosa
   Vázquez
   Graciela
   52 77 21 02
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   096369625

2. Datos del tutor
   M. en C.
   Elena
   De Oteyza
   De Oteyza

3. Datos del Sinodal 1
   M. en C.
   Emma
   Lam
   Osnaya

4. Datos del Sinodal 2
   M. en C.
   Esteban Rubén
   Hurtado
   Cruz

5. Datos del Sinodal 3
   M. en C.
   Agustín
   Ontiveros
   Pineda

6. Datos del Sinodal 4
   Act.
   Rosario
   Santillán
   Baltazar

7. Datos del trabajo escrito
   Cuaderno de Trabajo para el Curso de Matemáticas IV
   159 p
   2017

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 4: OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

CAPÍTULO 5: PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

CAPÍTULO 6: OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRÁICAS Y RADICALES

CAPÍTULO 7: ECUACIONES Y DESIGUALDADES

INTRODUCCIÓN

Este cuaderno de trabajo es el producto de varios años de trabajo impartiendo la materia de Matemáticas IV en el Plan 1996 de la Universidad Nacional Autónoma de México para preparatorias del Sistema Incorporado a la UNAM. En el que he creado y seleccionado ejercicios y problemas que cubren la totalidad del Programa Indicativo de esta Institución.

El grado de dificultad es medio alto y con el complemento de tareas, exámenes por tema o unidad, y exámenes parciales; su implementación deberá verse reflejada en que los estudiantes tengan un nivel matemático medio alto o alto, de acuerdo a los dos exámenes obligatorios realizados por la Dirección General de Incorporación y Revalidación de Estudios de la UNAM. Así como en el examen anual de CENEVAL realizado en algunas instituciones de forma opcional.

La dosificación de ejercicios va de la mano con las ciento cincuenta horas clase que consta el Programa Indicativo de cincuenta minutos cada clase, y creo que esa es la parte más valiosa de este cuaderno de trabajo, ya que existen muchos libros de álgebra que son adecuados para este curso, pero ninguno cuenta con los temas divididos de acuerdo al Plan de Estudios por unidad y por tema.

OBJETIVOS

Empecé a dar clases a nivel preparatoria hace varios años y he tenido la oportunidad de trabajar con varios profesores de diferentes formaciones como contadores, administradores, ingenieros ambientales, ingenieros civiles, etcétera. Y considero que es precisamente esta diversificación de formaciones académicas, la que genera tantas diferencias en la impartición del mismo curso hasta en las mismas escuelas. A pesar de que el Programa Indicativo de la UNAM sugiere el nivel de dificultad, no cuenta con una escala de ponderación para los contenidos más importantes.

El objetivo general de este cuaderno de trabajo es unificar esos niveles de dificultad y señalar a los compañeros que no cuenten con una formación matemática abstracta, cuáles son las directrices del curso y los temas a los que debemos poner mayor atención y enseñar con más énfasis para que el estudiante cuente con los conocimientos necesarios para enfrentar los cursos posteriores no sólo de matemáticas, sino de cualquier materia con la que se pueda vincular el conocimiento.

En términos generales, los estudiantes que ingresan a preparatoria tienen diferentes formaciones debido a que provienen de diferentes escuelas, por lo que su nivel académico es muy variado y hay muchos conceptos que no vieron con detenimiento o ni siquiera conocen. Durante los primeros meses de clase, la principal función del cuaderno será homologar el nivel de los alumnos y hacerlos trabajar con muchas repeticiones y acostumbrarlos a vincular el conocimiento con otras materias o áreas de trabajo, utilizando el método que cada profesor considere adecuado, como inducción de cada tema nuevo; lluvia de ideas; preguntas guía; cuadros sinópticos; diagramas; mapas semánticos, cognitivos o mentales; resúmenes; síntesis; analogías; estrategias grupales e inclusive comics o historietas. Todo puede ser utilizado de acuerdo a la inventiva de cada profesor y a cada tema.

Para la mitad del curso y hasta el final, el alumno deberá ser capaz de conocer la notación matemática requerida, vincular los conocimientos adquiridos con su entorno y principalmente, poder desarrollar todos los ejercicios propuestos en el tiempo destinado en clase para resolverlos, es decir, el estudiante se habituará al trabajo de resolución inmediata y deberá optimizar su tiempo de respuesta en menos de dos minutos por ejercio en los casos de productos, factorizaciones, resolución de ecuaciones y de desigualdades. En pocas palabras, el alumno debe identificar de manera automática el método de solución requerido para cada ejercicio y contará con la práctica suficiente para lograrlo.

METODOLOGÍA

El cuaderno de trabajo comienza en la primera clase del curso y desde ese momento, se solicitará al estudiante realizar todas las operaciones aritméticas a mano o de forma mental. El único recurso externo con que podrá contar el alumno será la tabla de potencias incluída en el anexo 1. Este material no está diseñado para ser resuelto con la ayuda de calculadoras o cualquier otro medio electrónico.

Se recomienda hacer exámenes cortos y sorpresa al terminar los temas más importantes del curso o tantos como considere el profesor que son necesarios. Bastan cinco preguntas de respuesta corta para cada tema o par de temas. Con la finalidad de que el estudiante reconozca si está entendiendo y desarrollando bien los temas o si se necesita repasar, explicar detalles o inclusive que el docente vuelva a dar el tema.

La dosificación de los temas es la adecuada para que el alumno termine sus ejercicios en el salón de clase sin llevarse tarea a casa. Por tanto, las tareas largas deberán incluir ejercicios de varias secciones y planearse de los libros que el maestro elija en su bibliografía básica del Programa Operativo.

Sugiero realizar los exámenes parciales del mismo nivel de dificultad visto en el cuaderno de trabajo, exámenes cortos y tareas largas. Y los exámenes finales y extraordinarios tomando como base los parciales.

La calificación de cada periodo varia de acuerdo a los lineamientos establecidos en cada escuela, pero se sugiere que el examen cuente al menos el cincuenta por ciento de la calificación, y el otro cincuenta por ciento sea el trabajo diario, incluyendo exámenes cortos y tareas largas.

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS

1.1 Idea intuitiva de un conjunto

La noción de conjunto es suficientemente simple para que pueda captarse intuitivamente, sin necesidad de referirla a conceptos básicos más sencillos. Entonces, el significado de la palabra “conjunto” se intuye a partir de la experiencia que poseemos del mundo real y conceptual.

Por tanto en este material definiremos “conjunto” como una colección bien definida de objetos. Donde ningún objeto se debe contar más de una vez y no importa el orden en que se enumeren éstos.

Convencionalmente suelen denotarse los conjuntos con letras mayúsculas, y a sus elementos con minúsculas, separándolos con comas y encerrados por corchetes.

Ej. A $=\{a, b, c, d, e\}$

Un conjunto

Por la forma en la que escribimos a los conjuntos, éstos pueden expresarse por comprensión o por extensión. Un conjunto se expresa por extensión cuando escribimos todos los elementos que lo componen. Un conjunto se expresa por comprensión cuando sólo se enuncia la idea del conjunto.

I. Exprese los siguientes conjuntos por el método de extensión

1) A = {Los nombres de los meses de año}

2) B = {Los números que dividen a 36}

3) C = {Los números pares entre 1 y 15}

4) D = {$2 < x < 14$ y x es impar}

5) E = {Las estaciones del año}

6) F = {Los equipos de fútbol de primera división, que juegan en la Ciudad de México}

7) G = {$x < 15$ y x es primo}

8) H = {Las letras de la palabra *matemáticas*}

9) I = {Las formas de expresar un conjunto}

10) J = $\{x^2 - 16 = 0\}$

II. Exprese los siguientes conjuntos por el método de comprensión

11) K = {México, Guatemala, Brasil, Colombia, Ecuador, Argentina, Bolivia, Perú}

12) L = {Up, gol, jetta, cross fox, beetle, vento}

13) M = {África, América, Asia, Europa, Oceanía}

14) N = {Arsenal, Chelsea, Manchester United, Liverpool, Aston Villa, Totenham}

15) O = {Ottawa, Montreal, Quebec, Vancouver, Toronto, Edmonton}

16) P = {Cu, Fe, H, Xe, Cl, Au}

17) Q = {Barcelona, Atlético de Madrid, Villareal, Sevilla, Real Madrid, Valencia}

18) R = {fútbol, basketball, golf, box, natación}

19) S = {100,102,104,106}

20) T = {53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

Se coloca el símbolo ∈ (pertenece) para referirse a un elemento en particular, que sí forma parte del conjunto. El símbolo ∉ (no pertenece) indica que ese elemento no es parte de dicho conjunto.

III. Coloque un $\in o \notin$ cuando corresponda

21) Perú __________ {Países de Europa}

22) x _________ $\{o, p, q, y\}$

23) Amazonas __________ {Ríos de América}

24) $\frac{5}{4}$ _________ {Racionales}

25) Wolverine __________ {Los cuatro fantásticos}

26) 29 _________ {8, 9, 11, 14, 18, 23}

27) Azalia __________ {verduras}

28) Betabel __________ {Leguminosas}

29) 27 ___________ {$x > 27$ y x es entero}

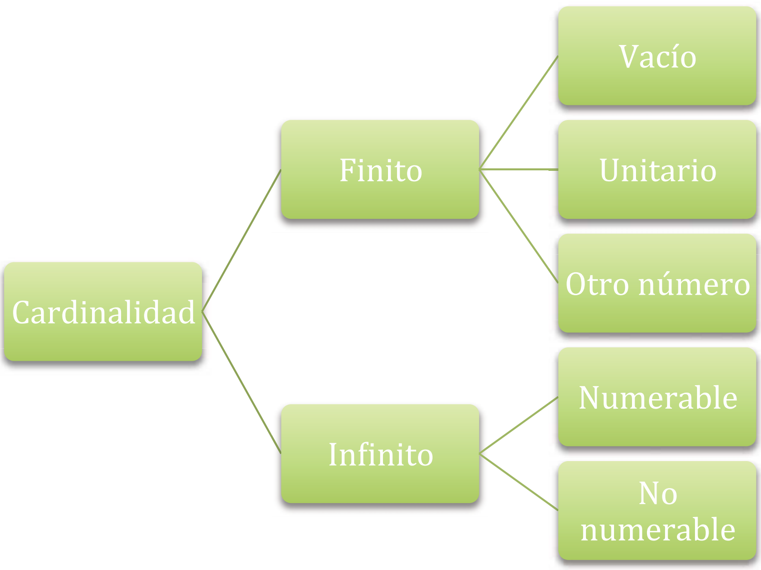
30) -4.45 ___________ $\{-4 < x < 4\}$

1.2 Cardinalidad

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Intuitivamente, un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al seleccionar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar termina. Si no el conjunto es infinito, es decir, el proceso de contar nunca terminará.

- Vacío: se denota con el símbolo $\emptyset$ y significa que no hay ningún elemento en ese conjunto.
- Unitario: existe un solo elemento en ese conjunto.
- Otro número: para 2, 3 o más elementos, siempre y cuando se especifique la cantidad.
- Numerable: cuando se puede establecer un orden en los elementos de un conjunto aún siendo infinitos.
- No numerable: cuando todos los elementos estan revueltos y no podemos ordenarlos.

Ejemplo de conjunto finito



La Cardinalidad de un conjunto se denota con el símbolo # y significa el número de elementos del conjunto determinado.

IV. Determine si los siguientes conjuntos son finitos o infinitos.

1) A = {Los reales positivos}

2) B = {Los presidentes de Estados Unidos}

3) C = {1, 3, 5, 7, 9,…}

4) D = {vocales de la palabra vals}

5) E = {Pilotos de Fórmula 1}

6) F = {números naturales}

7) G = {Los radios que se pueden trazar en un círculo}

8) H = {Películas de ciencia ficción}

9) I = {El número total de cabellos de los habitantes de la Ciudad de México}

10) J = {Las gotas de agua que caen durante una tormenta}

V. Determine la Cardinalidad de los siguientes conjuntos.

11) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

12) K = { fox, Warner, sony, E!, espn, MTV}

13) G = {a, e, i, o, u}

14) Ñ = {Abedul, Abeto blanco, Acacia australiana, Ahuehuete, Álamo blanco}

15) Q = {zafiro, esmeralda, diamante}

16) R = {Tommy Hilfiger, Calvin Klein, Ralph Lauren, Náutica, Buffalo, Springfield}

17) Z = {mitocondria, aparato de golgi, ribosoma, nucleólo, membrana celular, lisosoma, citoplasma, núcleo, centriolos, retículo endoplasmático}

18) W = {Nilo, Sena, Amazonas, Bravo}

19) Y = $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

20) S = $\{\perp, \bowtie, \sqcup, \odot, \boxtimes, \ddagger, \star, \wr, \rhd\}$

1.3 Conjuntos: universal, vacío, iguales, equivalentes, ajenos.

- Universal: es aquel que contiene a todos los elementos y lo denotamos como U.
- Vacío: no contiene ningún elemento y lo denotamos como $\emptyset$.
- Subconjuntos: se dice que un conjunto S es subconjunto de un conjunto T si todos los elementos de S lo son también de T.
- Iguales: dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos .
- Disjuntos o ajenos: cuando no existe ningún elemento en común en dos conjuntos
- Equivalentes: cuando dos conjuntos se pueden poner en correspondencia uno a uno entre si. Si A es equivalente a B se escribe A~B.

Dos conjuntos

VI. Determine el conjunto universal a partir de los siguientes datos:

1) L = {Urólogos, gastroenterólogos, dermatólogos, pediatras y cirujanos}

2) M = {Miguel Hidalgo, Vicente Guerrero, Ignacio Allende, Josefa Ortiz}

3) N = {IPod nano, IPod video classic, IPod shuffle, IPod touch}

4) O = {manzana, plátano, pera, guayaba, tuna}

5) P = {guitarra, piano, tambor, arpa}

VII. Determine si los siguientes conjuntos son vacíos:

6) A = {Personas de más de 200 años de edad}

7) B = {Océanos de agua salada}

8) C = {Números reales mayores que 5 y menores que 6}

9) D = {Ser viviente con 6 narices }

10) $E = \emptyset$

VIII. Sean los siguientes conjuntos: $P = \{r, s, t, u, v, w\}$, $Q = \{u, v, w, x, y, z\}$, $R = \{s, u, y, z\}$, $S = \{u, v\}$, $T = \{s, u\}$, $V = \{s\}$, $Z = \emptyset$ .Determine cuál de estos mismos conjuntos:

11) Es subconjunto de P y de Q únicamente

12) Es subconjunto de R pero no de Q

13) No es subconjunto de P ni de R

14) No es subconjunto de R pero sí de Q

15) Es subconjunto de todos los demás

IX. Determine si los siguientes pares de conjuntos son iguales, equivalentes y/o disjuntos:

16) R = {números pares} , S = {números impares}

17) W = {rosa, margarita, girasol}, T = {rosa, margarita, girasol}

18) D = {a, b, c, d}, F = {a, b, c, f}

19) Y = {José López, Efrén Ramírez}, Z = {José Hernández, Efrén Fernández}

20) G = {t, u, v, w, x, y, z}, H = {w, x, y, z}

X. Sean A = {1,2,3} B = {1,3,5,6} y C = {1,2,3,4,5,6}. Complete las siguientes afirmaciones poniendo el símbolo adecuado en el espacio correspondiente

21) $\in$ *o* $\notin$

2_____ A	A_____C	1, 2,3 _____C	4_____B
0_____A	7_____B	B________C	9_____C

22) $\subseteq$ o $\nsubseteq$

A_____C	A_____B	B_____B	$\emptyset$_____A
B_____C	{2,3,1}_____A		

23) $\subset$ o $\not\subset$

A_____C	$\emptyset$_____$\emptyset$	{2,1,3}_____A	A_____B
$\emptyset$_____A	B_____B	B_____C	B_____A

24) = o $\neq$

A_____B	{2, 3, 1} _____A	{ } _____$\emptyset$

1.4 Operaciones, diagrama de Venn-Euler

- Unión: obtenemos los elementos en común de dos o más conjuntos. Símbolo ∪
- Intersección: son los elementos que se repiten de dos o más conjuntos. Se denota como ∩
- Diferencia: al conjunto A le quitamos los elementos que se repiten con el conjunto B, siempre y cuando la operación sea $A - B$
- Complemento: se expresa al complemento de un conjunto A de la forma A^C y su resultado serán aquellos elementos que no están en A y si están en el universo

XI. Dados $U =$ {rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo, violeta} , A = {verde, naranja, índigo, rojo, azul, amarillo} , B = {violeta, azul, rojo, índigo, amarillo} , C = {violeta, azul, amarillo, rojo}, conteste las siguientes preguntas:

1) ¿$A \cup B = \mathrm{U}$?
2) ¿ $(A \cup B)^C \neq \mathrm{U}$?
3) ¿ $A \cap B \cap C$ colores primarios?
4) ¿ $C^C \neq U$?
5) El color índigo ∈ ¿ $A \cap C$?
6) El color amarillo ∈ ¿ $B \cap A$?
7) ¿ $(A \cup B) \cap C$?
8) ¿ $(C \cap B) \cup A$?
9) ¿ $A - B$?
10) ¿ $B - A$?
11) ¿ $C - B$?
12) ¿ $C - A$?
13) ¿ $C - (A \cup C)^C$?
14) ¿ $(A - B) \cap (B - A)$?
15) ¿ $(C - B) \cup (C - A)$?
16) ¿ B^C?
17) ¿ C^C?
18) ¿ A^C?
19) ¿ $(A \cup B)^C \neq A^C \cap B^C$?
20) ¿ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$?

XII. Dados $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,3,6\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{2,4,5\}$ y $D = \{2,3\}$ efectúe las siguientes operaciones:

1) $A \cup B$

2) $C \cup D$

3) $B \cap C$

4) $A \cap C$

5) $A \cap B \cap D$

6) $B \cup C \cup D$

7) $(A \cup D) \cap C$

8) $(C \cap D) \cup A$

9) $A - B$

10) $A - C$

11) $D - C$

12) $(C \cup A) - B$

13) $D - (A \cap C)$

14) $(A - D) \cap (C - B)$

15) $(B - A) \cup (D - C)$

16) B^C

17) C^C

18) $A^C \cup D$

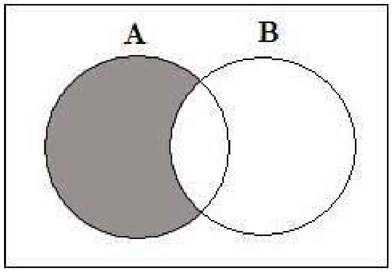
19) $B^C \cap D$

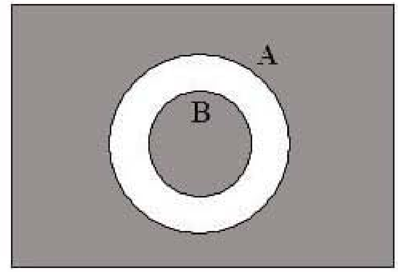
20) $(C - A)^C$

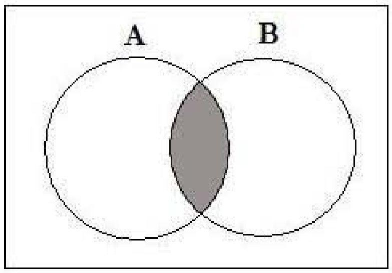
21) $(D \cup B)^C$

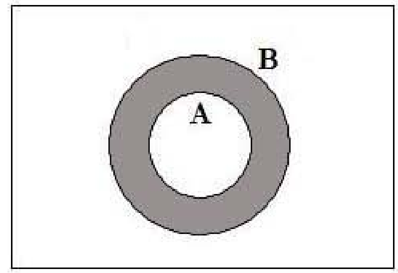
22) $A^C - D$

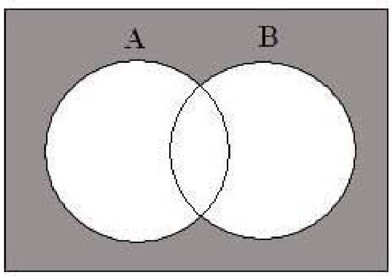
XIII. Identifique los conjuntos representados en los siguientes diagramas de Venn

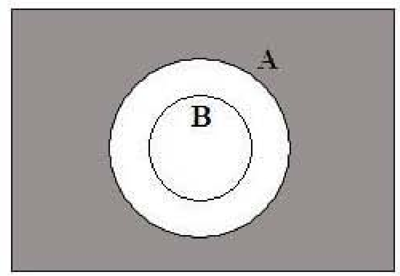


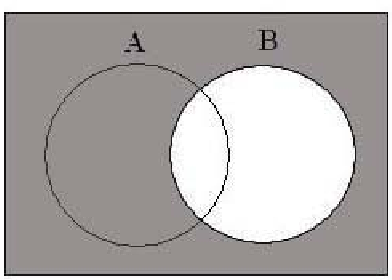


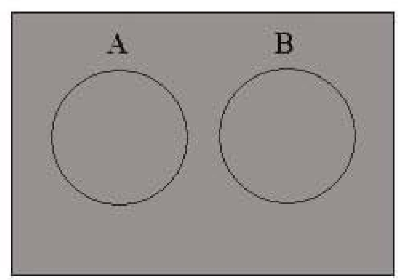


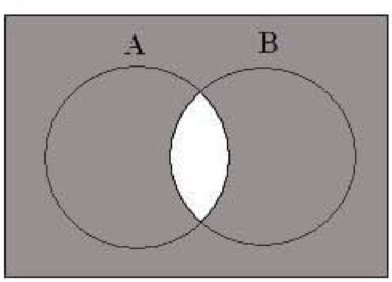


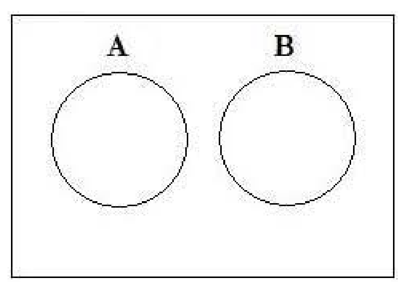


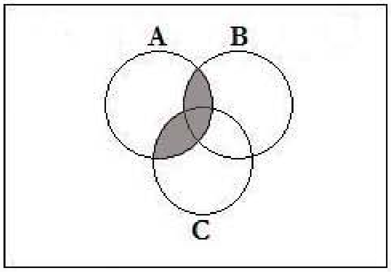


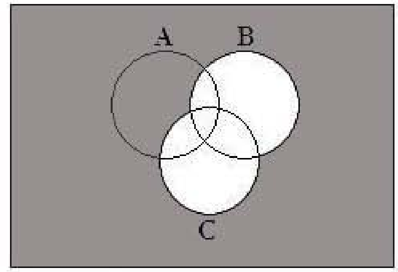


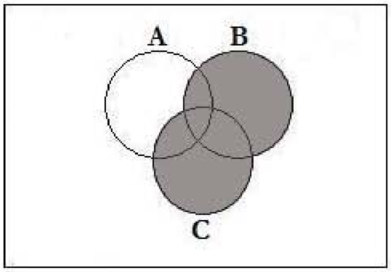


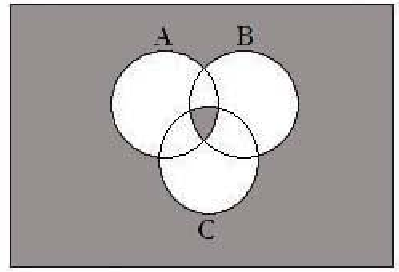


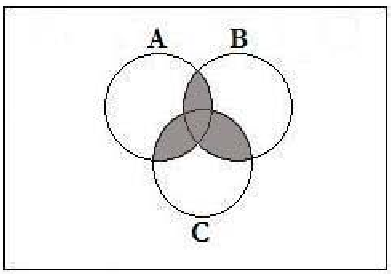


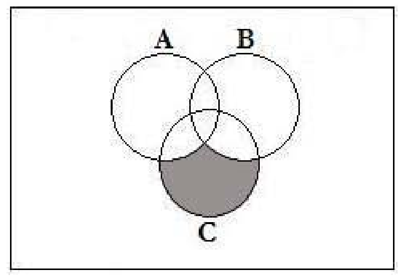

A
B
C

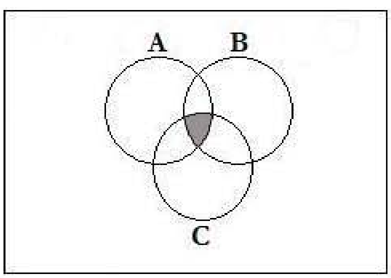

A
B
C

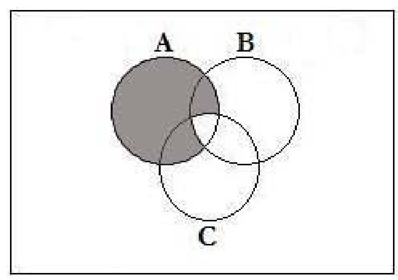

A
B
C

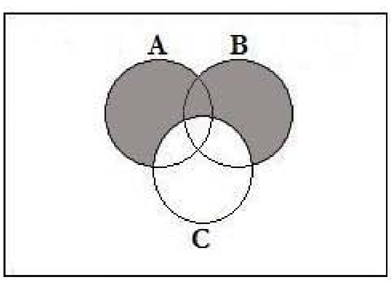

A
B
C

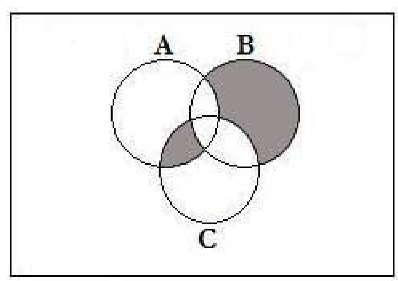

A
B
C


A
B
C


A
B
C


A
B
C


A
B
C


A
B
C

XIV. Resuelva los siguientes problemas:

a) Al realizar una encuesta a 150 personas, residentes de la Ciudad de México, se obtuvo que 81 de ellas leen el diario Reforma, 62 leen La Jornada y 39 leen de los 2 tipos. ¿Cuántas personas no leen ningún diario?, ¿cuántos leen sólo el Reforma? , ¿cuántos sólo leen La Jornada? Represente lo anterior en un diagrama de Venn.

b) Una encuesta de 100 alumnos sobre idiomas extranjeros, arrojó el siguiente resultado: 52 pueden leer Inglés, 40 pueden leer Francés, 24 pueden leer Alemán, 19 pueden leer Inglés y Francés, 12 pueden leer Francés y Alemán, y 6 pueden leer los 3 idiomas. ¿Cuántos pueden leer solamente Inglés?, ¿cuántos no pueden leer ninguno de los 3 idiomas?, ¿cuántos pueden leer sólo un idioma? Resuelva representando los conjuntos en un diagrama de Venn.

c) Un jefe de publicidad ha entrevistado a 2000 personas para apreciar los efectos de tres programas radiales. Al tabular los resultados de la muestra ha concluido que: 580 personas escuchaban el programa A; 840 el B; 920 el C; 260 el A y B; 220 el A y C; 300 el B y C, y 100 personas escuchaban el programa A, B y C. Se pregunta:

   i. ¿Cuántas personas escuchaban sólo el programa A?, ¿sólo el programa B?, ¿sólo el programa C?
   ii. ¿Cuántas personas escuchaban sólo los programas A y B?; ¿sólo los programas A y C?; ¿sólo los programas B y C?
   iii. ¿Cuántas personas escuchaban el programa B, el C o ambos?
   iv. ¿Cuántas personas escuchaban al menos uno de los tres programas?
   v. ¿Cuántas personas no escuchaban ninguno de los tres programas?

XV. Dados los conjuntos $A = \{♦, ♥, ♣, ♠\}$ y $B = \{♦, ♥, ♣, ♠\}$, entonces ¿quién es $A \times B$ y su cardinalidad? Complete la siguiente tabla:

	♦	♥	♣	♠
♦	(,)	(,)	(,)	(,)
♥	(,)	(,)	(,)	(,)
♣	(,)	(,)	(,)	(,)
♠	(,)	(,)	(,)	(,)

XVI. Sean $A = \{$blusa, jersey, camisa$\}$ y $B = \{$short, jeans, pescadores, falda$\}$, encuentre $A \times B$ y la $\#(A \times B)$ completando la siguiente tabla:

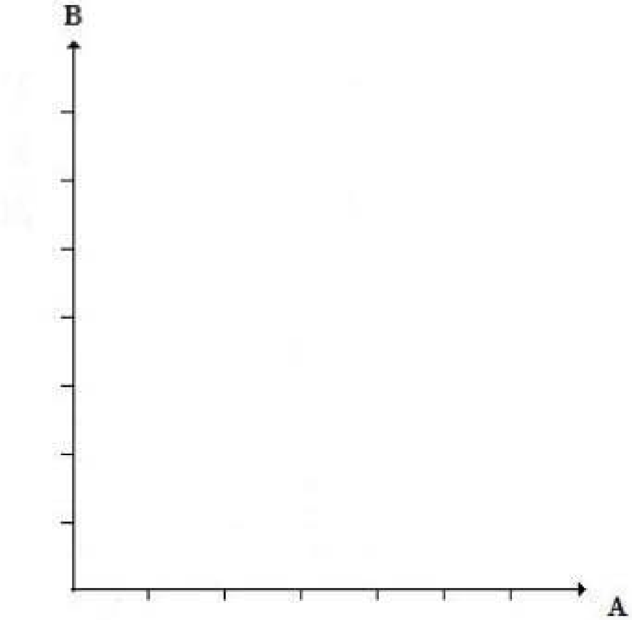
	Blusa (b)	Jersey (j)	Camisa (c)
Short (s)	(,)	(,)	(,)
Jeans (js)	(,)	(,)	(,)
Pescadores (p)	(,)	(,)	(,)
Falda (f)	(,)	(,)	(,)

XVII. Dados los siguientes conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi\}$ y $B = \{\leftrightarrow, \leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \downarrow\}$. Complete la siguiente tabla colocando $\in$ o $\notin$.

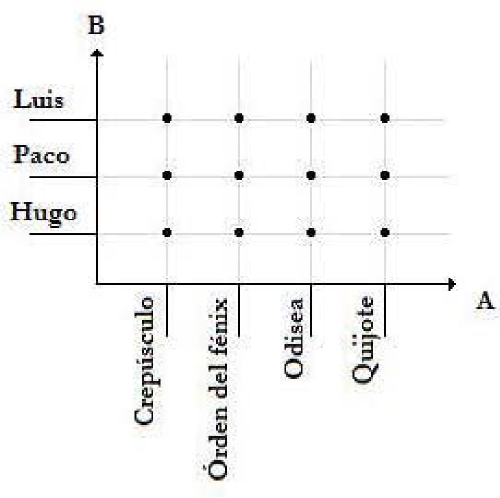
	$A \times B$	$B \times A$	$B \times B$
$(\alpha, \rightarrow)$			
(ε, φ)			
$(\leftrightarrow, \uparrow)$			
$(\delta, \downarrow)$			
$(\leftarrow, \beta)$			
(γ, γ)			

1.6 Gráfica

XVIII. Trace la gráfica del producto cartesiano $A \times B$ formado por los conjuntos $A = \{2, 6, 0\}$, $B = \{3,7\}$.



XIX. A través de la gráfica presentada, obtenga el conjunto $A \times B$ y los respectivos conjuntos A y B.

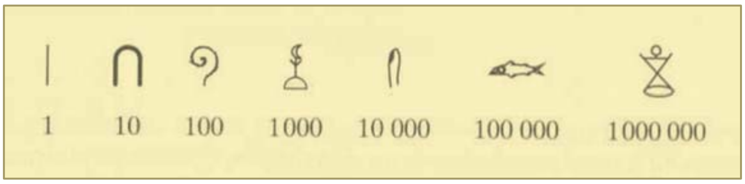


CAPÍTULO 2: SISTEMAS DE NUMERACIÓN

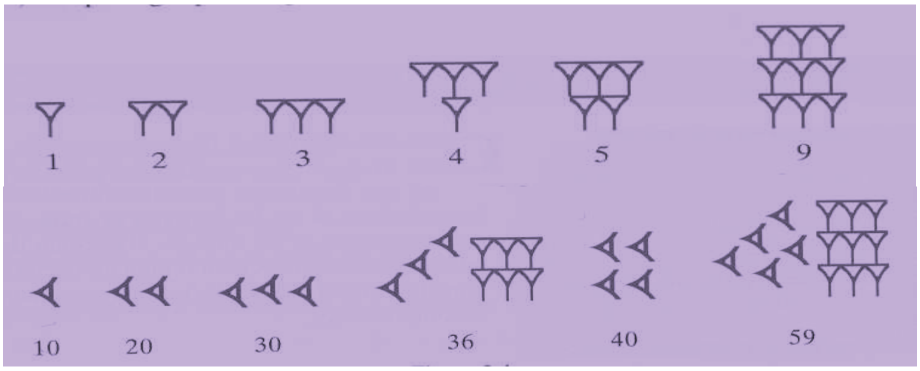
2. 1 Breve reseña histórica

I. Describa brevemente cuáles son las características principales en los sistemas de numeración de las siguientes culturas, así como sus rasgos principales.

a) Cultura egipcia



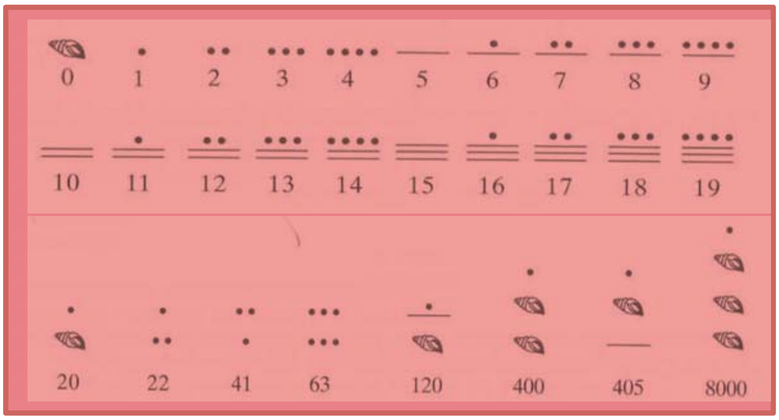
b) Cultura babilónica



c) Cultura romana

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

d) Cultura maya



2. 2 Sistemas de numeración

II. Convierta los siguientes números indo arábigos a numeración romana.

1) 8 648

2) 16 956

3) 726 452

4) 845 325

5) 12 693 916

III. Complete la siguiente tabla realizando las conversiones necesarias entre los sistemas de numeración indicados.

DECIMAL	EGIPCIO	BABILÓNICO	ROMANO	MAYA
179				
1 359				
10 035				
132 479				

2. 3 Sistema decimal

IV. Exprese los siguientes números como suma de potencias de diez

EJEMPLO:

$$13.436 = (1\times 10^{1}) + (3\times 10^{0}) + (4\times 10^{-1}) + (3\times 10^{-2}) + (6\times 10^{-3})$$

1) 17.567
2) 0.5
3) 815.23
4) 3148.79
5) 35.043012
6) 26.7819782
7) 1506.82528035
8) $316{,}158.73006$
9) 1543.147842
10) $13{,}290\ 518.067891$

V. Escriba en forma ordinaria los siguientes números expresados como potencias de diez.

EJEMPLO:

$$(9\times 10^{5}) + (6\times 10^{4}) + (7\times 10^{3}) + (1\times 10^{2}) + (0\times 10^{1}) + (8\times 10^{0}) + (3\times 10^{-1}) + (5\times 10^{-2}) =$$

$$\begin{array}{rrcr}
9\times & 100\,000 & = & 900000 \\
6\times & 10\,000 & = & 60\,000 \\
7\times & 1\,000 & = & 7\,000 \\
1\times & 100 & = & 100 \\
0\times & 10 & = & 00 \\
8\times & 1 & = & 8 \\
3\times & .10 & = & 0.3 \\
5\times & 0.01 & = & 0.05
\end{array}$$

= 967 108.31

11) $(7\times10^{5})+(9\times10^{4})+(9\times10^{3})+(1\times10^{2})+(3\times10^{1})+(4\times10^{0})+(6\times10^{-1})+$
(8×10^{-2})

12) $(5\times10^{7})+(9\times10^{4})+(9\times10^{3})+(5\times10^{1})+(3\times10^{0})+(2\times10^{-3})$

13) $(8\times10^{6})+(5\times10^{3})+(7\times10^{1})+(4\times10^{-1})+(6\times10^{-4})$

14) $(6\times10^{3})+(4\times10^{2})+(9\times10^{1})+(3\times10^{0})+(5\times10^{-1})+(7\times10^{-2})++(1\times10^{-3})+$
$+(3\times10^{-5})$

15) $(7\times10^{5})+(9\times10^{-5})$

16) $(3\times10^{4})+(8\times10^{3})+(7\times10^{0})+(5\times10^{-2})+(9\times10^{-4})$

17) $(9\times10^{9})+(7\times10^{8})+(8\times10^{7})+(9\times10^{6})+(5\times10^{-1})+(1\times10^{-2})$

18) $(1\times10^{3})+(7\times10^{1})+(4\times10^{0})+(4\times10^{-1})+(7\times10^{-2})+(1\times10^{-4})$

19) $(3\times10^{0})+(1\times10^{-1})+(4\times10^{-2})+(1\times10^{-3})+(5\times10^{-4})+(9\times10^{-5})+$
$+(2\times10^{-6})+(6\times10^{-7})+(5\times10^{-8})+(4\times10^{-9})$

20) $(2\times10^{0})+(7\times10^{-1})+(1\times10^{-2})+(8\times10^{-3})+(2\times10^{-4})+(8\times10^{-5})+$
$+(1\times10^{-6})+(8\times10^{-7})+(2\times10^{-8})$

2. 4 Sistemas de diferentes bases

VI. Convierta a base 4, 6, 7 y 13 los números escritos en base diez

EJEMPLO: 2009 base 6

Dividimos el número 2009 entre la base a la que deseamos convertirlo, después dividimos el cociente entre la base y así sucesivamente, poniendo especial atención en los residuos, ya que ellos indicarán la forma de escribirlo.

$$
\begin{aligned}
2009 \div 6 &= 334 \quad residuo\ 5 \\
334 \div 6 &= 55 \quad residuo\ 4 \\
55 \div 6 &= 9 \quad residuo\ 1 \\
9 \div 6 &= 1 \quad residuo\ 3
\end{aligned}
$$

$$2009 = 13145_6$$

1) 46 326

Base 4 Base 7

Base 6 Base 13

2) 512 352

Base 3 Base 7

Base 5 Base 12

3) 125 350

Base 4 Base 8

Base 7 Base 14

4) 845 325

Base 3 Base 9

Base 7 Base 11

5) 1 528 426

Base 7 Base 9

Base 8 Base 13

VII. Convierta a base diez, los números escritos en la base indicada.

EJEMPLO: Escriba el número 10304511_6 a base 10.

Separamos cada número y se expresará multiplicado por la base (que estará elevada a la posición que ocupa cada número, contando desde cero y de derecha a izquierda). El resultado se obtendrá de sumar cada operación indicada.

$$1(6^7)+0(6^6)+3(6^5)+0(6^4)+4(6^3)+5(6^2)+1(6^1)+1(6^0)=$$

$$1(279936)+0(46656)+3(7776)+0(1296)+4(216)+5(36)+1(6)+1(1)=$$

$$279936+0+23328+0+864+180+6+1=$$

$10304511_6 = 304\,315$

6) 121012_3

7) 31421312_5

8) 7416234_8

9) $4512AB1_{12}$

10) 340620514_7

11) $A487_{11}$

12) 1210122121121_3

13) 765012305_8

14) $39A2B45_{13}$

15) $A21F_{16}$

2. 5 Sistema de base 2

El sistema binario o de base 2 es sumamente importante en la actualidad, ya que las computadoras utilizan este sistema para operar. La razón es porque su memoria consiste en una colección de puntos que pueden imantarse o desimantarse; de esta manera pueden representar unos y ceros de una manera muy natural.

VIII. Escriba en notación decimal cada número escrito en base binaria.

1) $100\ 001_2$

2) $1\ 111\ 111_2$

3) $101\ 011\ 011_2$

4) $111\ 011\ 110\ 001_2$

5) $111\ 011\ 100\ 111_2$

IX. Convierta los números decimales a base dos

6) 36

7) 389

8) 1 793

9) 7 831

10) 10 217

X. Escriba los números expresados en distintas bases, a base binaria.

EJEMPLO: 314241_5 a base dos

Primero convertiremos el número a base decimal, para posteriormente convertir el número de base 10 a base 2.

$$3(5^5) + 1(5^4) + 4(5^3) + 2(5^2) + 4(5^1) + 1(5^0) =$$

$$3(3125) + 1(625) + 4(125) + 2(25) + 4(5) + 1(1) =$$

$$9375 + 625 + 500 + 50 + 20 + 1 = 10571$$

$$\begin{aligned}
10\,571 \div 2 &= 5285 \quad \textit{residuo } 1\\
5\,285 \div 2 &= 2642 \quad \textit{residuo } 1\\
2\,642 \div 2 &= 1321 \quad \textit{residuo } 0\\
1\,321 \div 2 &= 660 \quad \textit{residuo } 1\\
660 \div 2 &= 330 \quad \textit{residuo } 0\\
330 \div 2 &= 165 \quad \textit{residuo } 0\\
165 \div 2 &= 82 \quad \textit{residuo } 1\\
82 \div 2 &= 41 \quad \textit{residuo } 0\\
41 \div 2 &= 20 \quad \textit{residuo } 1\\
20 \div 2 &= 10 \quad \textit{residuo } 0\\
10 \div 2 &= 5 \quad \textit{residuo } 0\\
5 \div 2 &= 2 \quad \textit{residuo } 1\\
2 \div 2 &= 1 \quad \textit{residuo } 0
\end{aligned}$$

$314241_5 = 10100101001011_2$

11) 2305_6

12) 567_8

13) $AB1_{13}$

14) 31240_5

2. 6 Operaciones en distintas bases

XI. Realice las siguientes sumas en las bases indicadas

EJEMPLO: Efectúe la siguiente operación en base siete.

Las sumas en diferentes bases debemos realizarlas de la misma manera en que las hacemos en base decimal, es decir, cada vez que llegamos a la base indicada aumentamos una unidad del orden inmediato superior.

$$\begin{array}{r} {\color{red}2\;2\;1} \\ 3\;5\;6\;0\;2 \\ +\;1\;4\;3\;5\;2 \\ 3\;4\;5\;1 \\ \hline 6\;0\;0\;3\;5 \end{array}$$

5+5 = 10 y 10 en base 7 es 13

2+5+4+3 = 14 y 14 en base 7 es 20

1+6+3+4=14 y 14 en base 7 es 20

$$\begin{array}{r} 1011101 \\ +\quad 10111 \\ \hline \end{array}_{2} \qquad \begin{array}{r} 43412 \\ +\;34201 \\ \hline \end{array}_{5} \qquad \begin{array}{r} 3450221 \\ +\quad 255405 \\ 5543110 \\ \hline \end{array}_{6}$$

$$\begin{array}{r} 218347 \\ +\quad 725383 \\ 532014 \\ \hline \end{array}_{9} \qquad \begin{array}{r} 4321765 \\ 5024136 \\ +\;3567701 \\ 6211023 \\ \hline \end{array}_{8} \qquad \begin{array}{r} 31563 \\ 25430 \\ +\;11364 \\ 65014 \\ \hline \end{array}_{7}$$

$$\begin{array}{r} 310244 \\ 234103 \\ +\;102301 \\ 421442 \\ 340120 \\ \hline \end{array}_{5} \qquad \begin{array}{r} 32210 \\ 20233 \\ +\;13032 \\ 10321 \\ 31123 \\ \hline \end{array}_{4} \qquad \begin{array}{r} 1012201 \\ 2122221 \\ +\;2211122 \\ 1100210 \\ \hline \end{array}_{3}$$

$$\begin{array}{rr} & 887051 \\ & 243567 \\ & 785534 \\ + & 356427 \\ & 174047 \\ & \underline{357264}_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 11100 \\ & 10000 \\ & 10101 \\ + & 11010 \\ & 11100 \\ & \underline{1111}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 500123 \\ & 433201 \\ + & 255525 \\ & 103425 \\ & \underline{330413}_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 775431 \\ & 134577 \\ + & 656463 \\ & 300113 \\ & \underline{257346}_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 50325 \\ & 43442 \\ + & 40104 \\ & 33442 \\ & \underline{50325}_6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 887701 \\ & 121453 \\ + & 700154 \\ & 281805 \\ & \underline{760626}_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 10120 \\ & 22122 \\ + & 12002 \\ & 22101 \\ & \underline{11210}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 56643 \\ & 23640 \\ + & 14526 \\ & 30130 \\ & \underline{24365}_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 30123 \\ & 11233 \\ + & 23320 \\ & 31213 \\ & \underline{10001}_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 70152 \\ & 13645 \\ + & 52302 \\ & 42667 \\ & \underline{65477}_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 46525 \\ & 15662 \\ + & 34356 \\ & 50124 \\ & \underline{63013}_7 \end{array}$$

XII. Realice las siguientes restas en las bases indicadas.

Ejemplo: Efectúe la siguiente resta en base 5. De igual forma que realizamos las restas en sistema decimal, lo haremos en la base indicada.

$$\begin{array}{r} {\color{red}3\,5} \\ -\begin{array}{r} 4\,3\,4\,0\,1 \\ \underline{1\,2\,3\,2\,1} \end{array} \\ 3\,1\,0\,3\,0 \end{array}$$

Las demás cifras las restamos como usualmente

Como a 0 no podemos restarle 2, entonces el 4 le "*presta*" una unidad de su orden (que representa 5 unidades porque esa es la base) a su *vecino* de la derecha, así ya podemos realizar **5 - 2 = 3**

El 4 le *prestó* una unidad a su *vecino*, por tanto se convirtió en 3 entonces restamos 3 – 3 = 0

$$-\begin{array}{r} 6\,4\,2\,1\,3 \\ \underline{3\,7\,2\,1\,6}_8 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 5\,6\,2\,5\,6\,2 \\ \underline{4\,2\,6\,6\,4\,5}_7 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 8\,9\,3\,A \\ \underline{1\,2\,7\,7}_B \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 2\,3\,3\,3\,0\,5 \\ \underline{1\,5\,4\,4\,4\,1}_6 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r} 3\,2\,1\,0\,1\,1\,3 \\ \underline{1\,1\,1\,0\,3\,2\,2}_4 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 3\,1\,2\,3\,1\,0 \\ \underline{3\,0\,3\,2\,1\,3}_4 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 3\,5\,7\,2\,5\,6\,2 \\ \underline{2\,4\,2\,7\,7\,4\,5}_8 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} C\,7\,A\,5\,8 \\ \underline{B\,5\,9\,6\,8}_{13} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r} 2\,0\,1\,2\,2\,1\,0\,1\,2\,1\,1\,2 \\ \underline{1\,2\,1\,0\,0\,1\,2\,1\,1\,0\,1\,1}_3 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0}_2 \end{array}$$

XIII. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

Ejemplo: Realice la siguiente multiplicación en base 5.

Las multiplicaciones debemos hacerlas convirtiendo cada resultado obtenido a la base indicada, es decir, si multiplicamos en base 5, 2 por 3 obtendremos 11. Y serán éstas las que indicaremos en cada renglón para posteriormente sumarlos respetando a la base.

$$\begin{array}{r} 4\,1\,3\,2\,4 \\ \times\;\;2\,4\,1 \\ \hline 4\,1\,3\,2\,4 \\ 3\,2\,1\,1\,1\;\; \\ 1\,3\,3\,2\,0\,3\;\;\;\; \\ \hline 1\,4\,2\,3\,3\,2\,3\,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1 \\ \times\qquad 1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1_{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\,6\,1\,2\,3\,4 \\ \times\quad 2\,3\,4_{7} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,2\,1\,2\,0 \\ \times\;\;1\,1\,2_{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\,9\,A\,2\,B \\ \times\quad 3\,A_{12} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1\,3\,2\,1 \\ \times\quad 3\,1\,0_{4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\,4\,7\,1 \\ \times 4\,9\,8_{11} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,2\,6\,5\,8\,7 \\ \times\quad 2\,4\,2_{9} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\,3\,1\,2\,3\,1 \\ \times\quad 2\,3\,2_{4} \\ \hline \end{array}$$

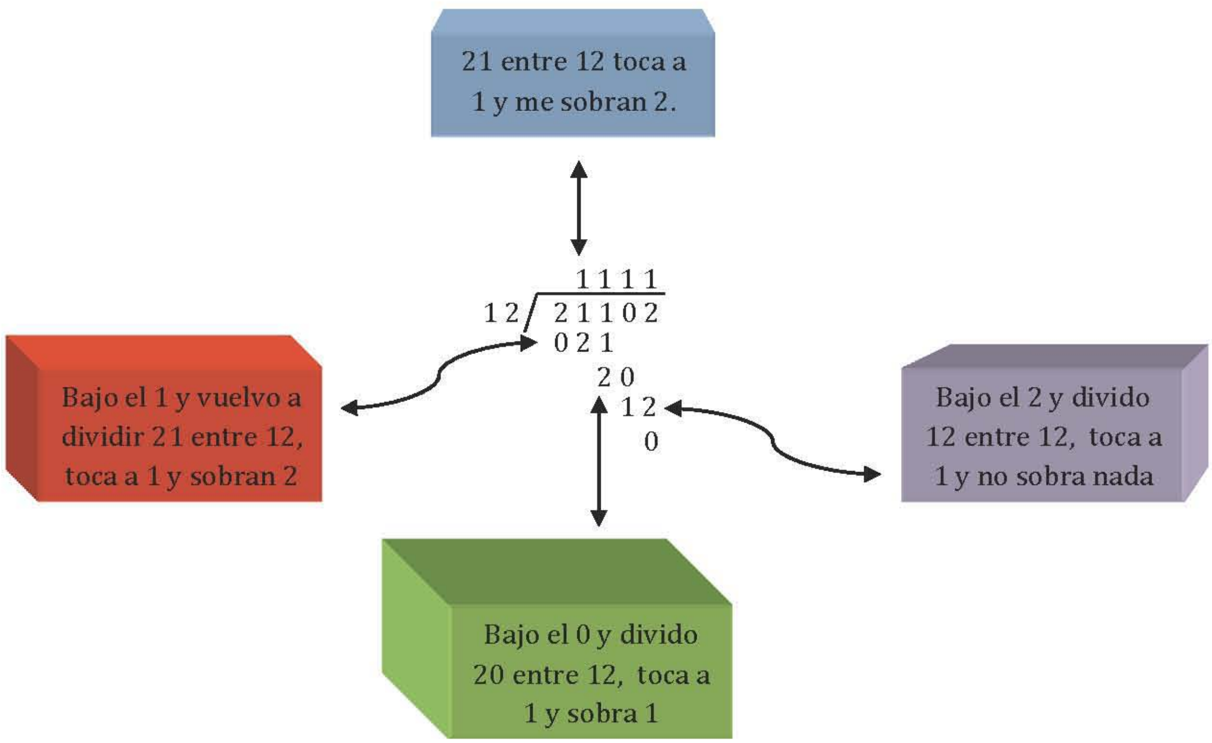
$$\begin{array}{r} 7\,4\,1\,2\,3 \\ \times\;\;7\,4\,1_{8} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\,4\,F\,C\,B\,D\,4\,9\,A \\ \times\qquad 4\,A\,F\,9\,8_{16} \\ \hline \end{array}$$

$1 = 1$
$2 = 2$
$3 = 10$
$4 = 11$
$5 = 12$
$6 = 20$
$7 = 21$
$8 = 22$
$9 = 100$

XIV. Realice las siguientes divisiones en las bases indicadas.

Ejemplo: Utilizaremos lenguaje coloquial para explicar el procedimiento a seguir paso a paso.



Para saber a qué número *"toca"* debemos hacer la multiplicación correspondiente, entonces cuando sepamos el resultado de esa multiplicación hacemos la resta correspondiente y obtenemos el residuo, es decir, 12 es 5 en sistema decimal y 21 es 7, entonces 7 entre 5 toca a 1 y sobran 2, o lo que es lo mismo 12 entre 21 toca a 1 y sobran 2. Bajamos el siguiente número al lado del residuo y así sucesivamente hasta terminar la división.

$102_3 \overline{)2110211_3}$

$132_4 \overline{)1321233123211_4}$

$26_8 \overline{)74123621_8}$

$42_6 \overline{)34545011_6}$

$41_{13} \overline{)41A2156401 2_{13}}$

CAPÍTULO 3: EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

3. 1 Naturales

Los primeros números que surgieron históricamente son los naturales y sirven para contar. Denotaremos a este conjunto por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Además sirven para ordenar, es decir, para posicionar objetos entonces los números reciben otro nombre:

$$\begin{array}{cc} 1^0 & primero \\ 2^0 & segundo \\ 3^0 & tercero \\ 4^0 & cuarto \\ 5^0 & quinto \\ 6^0 & sexto \\ 7^0 & séptimo \\ 8^0 & octavo \\ 9^0 & noveno \\ 10^0 & décimo \end{array}$$

Las propiedades de los números naturales se dividen de acuerdo a la función que deberán realizar, entonces, para cualesquiera números naturales a, b, c se cumple:

- Conmutatividad para la suma: $a + b = b + a$
- Asociatividad para la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Conmutatividad para el producto: $ab = ba$
- Asociatividad para el producto: $(ab)c = a(bc)$
- Distributividad: $(a + b)c = ac + bc$

<u>Criterios de divisibilidad:</u>

Para 2: Un número es divisible entre 2, si termina en un número par o en cero.

Para 3: Si la suma de los dígitos de un número es 3 o un múltiplo de 3.

Para 4: Si las dos últimas cifras del número es un múltiplo de cuatro.

Para 5: Si el número termina en cero o en cinco.

Para 6: Si el número es divisible entre 2 y entre 3, también es divisible entre 6.

Para 7: Separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 2, restando éste producto de lo que queda a la izquierda y sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.

Para 8: Si los tres últimos dígitos son cero o el número formado por éstos es múltiplo de 8

Para 9: Si al sumar los dígitos el resultado es nueve o un múltiplo de nueve.

Ejemplo: **1980** es divisible entre

- 2 porque termina en cero
- 3 porque $1 + 9 + 8 + 0 = 18$ y 18 es múltiplo de 3
- 4 porque sus dos últimas cifras 80 es múltiplo de 4
- 5 porque termina en cero
- 6 porque es divisible entre 2 y 3, por tanto es divisible entre 6
- 9 porque $1 + 9 + 8 + 0 = 18$ y 18 es múltiplo de 9

I. Determine entre que números se pueden dividir las siguientes cifras.

1) 5 637
2) 4 579
3) 23 817
4) 67 954
5) 823
6) 93 833
7) 15 645
8) 112 866
9) 110 000
10) 193 000

Definición: los números primos son aquellos que solamente pueden ser divisibles entre ellos mismos y uno. El uno no es primo.

II. Encuentre los números primos desde 1 hasta 150 y escríbalos debajo de la tabla. Utilizando el procedimiento conocido como ***Criba de Eratóstenes***, el cual consiste en dado un número primo, tachar todos sus múltiplos. Por ejemplo, al comenzar con el 2, tacharemos todos los números pares, ya que todos son múltiplos de dos. El siguiente primo es el 3, por tanto tachamos todos los múltiplos de 3; y así sucesivamente quedarán sólo los primos desde 1 hasta 150.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Los números primos obtenidos son:

Descomponer un número en sus factores primos es dividirlo utilizando únicamente números primos tantas veces como sea necesario.

Ejemplo: Descomponga 204 en sus factores primos.

Dividiremos al número 204 entre los primeros primos, en este caso 204 es divisible entre 2, y el resultado 102 lo volvemos a dividir entre 2, ahora el cociente 51 ya no es divisible entre 2, por tanto buscamos al siguiente primo que lo pueda dividir, que es el 3. El nuevo resultado es 17, quien al ser primo, solamente es divisible entre el mismo, por tanto nos queda 1 como cociente. El proceso termina cuando el último número del lado izquierdo es 1.

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$207 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$$

Los factores primos de 204 son 2, 3 y 17

III. Descomponga en sus factores primos los siguientes números

a) 12 740

b) 13690

c) 15700

d) 20677

e) 21 901

f) 47 601

g) 48 763

h) 208 537

i) 327 701

j) 496 947

Para encontrar el máximo común divisor ***MCD*** de dos números, debemos encontrar sus factores primos y multiplicar aquellos que se repitan en ambos números. Si el número primo se obtiene en más de una ocasión repetido en ambos números, se debe multiplicar tantas veces como se halla encontrado.

Ejemplo: Encuentre el máximo común divisor de 120 y 84.

De manera individual encontraremos a sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{2 \cdot 2 \cdot 3 = 12}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{2 \cdot 2 \cdot 3 = 12}$$

Por tanto 12 es el MCD de 120 y 84

Los números primos que se repiten en 120 y 84 son 2, 2 y 3. Al multiplicarlos el resultado es el Máximo Común Divisor.

IV. Encuentre el máximo común divisor de los siguientes números.

a) 20 y 80

b) 144 y 520

c) 345 y 850

d) 19 578 y 47 190

e) 33, 77 y 121

f) 425, 800 y 950

g) 2168, 7336 y 9187

h) 464, 812 y 870

i) 840, 960, 7260 y 9135

j) 2738, 9583, 15059, 3367 y 12691

3. 2 Algoritmo de Euclides

Mediante el algoritmo de Euclides, encontraremos el Máximo Común Divisor ***MCD*** de dos números *a* y *b*.

Paso 1: se divide el número mayor entre el menor.

Paso 2: El residuo se convierte en el nuevo divisor, y el dividendo será el antiguo divisor; esto sucede si y sólo si en la primera división el residuo es diferente de cero.

Paso 3: Se realiza el mismo procedimiento hasta que el residuo sea cero.

Paso 4: El Máximo Común Divisor es el penúltimo residuo, es decir, aquel residuo diferente de cero.

Ejemplo 1: utilizando el algoritmo de Euclides, encuentre el MCD de 120 y 84.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 84\,\overline{\big)\,120} \\ 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 36\,\overline{\big)\,84} \\ 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 12\,\overline{\big)\,36} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto 12 es el MCD de 120 y 84

Ejemplo 2: utilizando el Algoritmo de Euclides, encuentre el MCD de 60 y 25.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 25\,\overline{\big)\,60} \\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 10\,\overline{\big)\,25} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 5\,\overline{\big)\,10} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto el MCD de 60 y 25 es 5

V. Utilizando el algoritmo de Euclides, encuentre el Máximo Común Divisor de los siguientes números

a) 8 y 9 b) 14 y 21 c) 15 y 45

d) 45 y 90 e) 12 y 40 f) 108 y 45

g) 320 y 848 h) 930 y 3100 i) 7856 y 9293

j) 9504 y 14688 k) 10108 y 15162 l) 0 y -1

m) El MCD de dos números es 2 y el MCM 16. Halle el producto de los números

n) El MCD de dos números es 115 y el MCM 230. ¿Cuál es el producto de los dos números?

o) El MCM de dos números es 450 y el MCD 3. Si uno de los números es 18 ¿cuál es el otro?

3. 3 Enteros

Para poder restar cualquier par de naturales es necesario introducir los números enteros negativos que junto con el cero y los naturales, constituyen el conjunto de los números enteros.

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Las propiedades que poseen son: si a, b y c son tres números enteros, entonces

- Cerradura en suma: $a + b \in \mathbb{Z}$
- Propiedad conmutativa en suma: $a + b = b + a$
- Propiedad asociativa en suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existencia del neutro aditivo en suma: $a + 0 = a$
- Existencia del opuesto, inverso aditivo ó simétrico: $a + (-a) = 0$
- Cerradura en producto: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$
- Propiedad conmutativa para producto: $ab = ba$
- Propiedad asociativa: $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$
- Existencia del neutro multiplicativo: $a \cdot 1 = a$
- Distributiva: $(a + b)c = ac + bc$

El orden de los enteros.

Dados dos números enteros a y b, decimos que a es menor que b si al colocarlos en la recta numérica a queda a la izquierda de b, y escribimos $a < b$ que se lee "a es menor que b". Otra manera de escribirlo es $b > a$ en cuyo caso leemos "b es mayor que a".

Escribimos $a \leq b$ para indicar que $a < b$, o bien $a = b$ y leemos "a es menor o igual que b".

Las propiedades que cumplen son:

- Tricotomía: dados dos enteros a y b se cumple exactamente una de las siguientes propiedades
  $$a < b \qquad\qquad a > b \qquad\qquad a = b$$
- Transitividad: Si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c, entonces a está a la izquierda de c.
  Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
- Relación con la suma: Si $a < b$ y c es cualquier entero, entonces $a + c < b + c$
- Multiplicación por un número positivo: Si $a < b$ y c es cualquier entero positivo, entonces $ac < bc$, es decir, no se altera el sentido de la desigualdad.
- Multiplicación por un número negativo: Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$, es decir, se invierte el sentido de la desigualdad.

VI. Coloque en el cuadro $<$, $>$ o $=$ para que cada afirmación sea cierta

a) 3 _______ 5

b) -5 _______ -6

c) 1 _______ -1

d) -34 _______ -34

e) 67 ______ -67

f) 0 _______ -12

g) -21 _______ -20

h) 8 _______ 25

i) -2 _______ 0

j) -12 _______ -13

VII. En cada inciso, ordene los números de menor a mayor.

$11)\ 0, -3, 4, -1$

12) $1, -1, 2, -2$

$13)\ -54, -56, -61, -51$

$14)\ 3, -3, 7, -7$

$15)\ 0, -18, 18, 34, -32, -33, 33$

3. 4 Racionales

Son los números que pueden escribirse como cociente de dos enteros, de la forma $\frac{p}{q}$, en donde $q \neq 0$. Denotaremos al conjunto de los números racionales con la letra $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Un número racional puede llamarse también fracción o quebrado, donde p es el numerador y q el denominador.

Para determinar si dos racionales son iguales, podemos convertirlos a fracciones con el mismo denominador, multiplicando a p y a q por el mismo entero.

Ejemplo: Determine si $\frac{21}{28}$ y $\frac{15}{20}$ son fracciones equivalentes.

Multiplicaremos $\frac{21}{28}$ por $\frac{20}{20}$ y obtenemos $\frac{21 \cdot 20}{28 \cdot 20} = \frac{420}{560}$

Ahora $\frac{15}{20}$ por $\frac{28}{28}$, lo que resulta $\frac{15 \cdot 28}{20 \cdot 28} = \frac{420}{560}$

Por tanto, podemos concluir que $\frac{21}{28}$ y $\frac{15}{20}$ son fracciones equivalentes.

VIII. Determine si los siguientes pares de fracciones son equivalentes o no.

1) $\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{15}$

2) $\frac{2}{10}$ y $\frac{4}{15}$

3) $\frac{3}{12}$ y $\frac{18}{72}$

4) $\frac{101}{210}$ y $\frac{10}{21}$

5) $\frac{498}{1494}$ y $\frac{13}{39}$

El proceso inverso, es la reducción de fracciones, la cual obtendremos al dividir entre el mismo número al numerador y al denominador, hasta llegar a su mínima expresión, es decir, el proceso termina cuando ya no tienen factores comunes.

Ejemplo: reduzca a su mínima expresión $\frac{72}{144}$

Utilizando los criterios de divisibilidad, utilizaremos los números primos.

$$\frac{72 \div 2}{144 \div 2} = \frac{36}{72}$$

$$\frac{36 \div 2}{72 \div 2} = \frac{18}{36}$$

$$\frac{18 \div 2}{36 \div 2} = \frac{9}{18}$$

$$\frac{9 \div 3}{18 \div 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\frac{72}{144} = \frac{1}{2}$

IX. Reduzca las siguientes fracciones a su mínima expresión.

6) $\frac{539}{833}$

7) $\frac{260}{286}$

8) $\frac{2004}{3006}$

9) $\frac{1955}{3910}$

10) $\frac{286}{1859}$

11) $\frac{1470}{4200}$

12) $\frac{7854}{9922}$

13) $\frac{4459}{4802}$

14) $\frac{1798}{4495}$

15) $\frac{1690}{3549}$

16) $\frac{2016}{3584}$

17) $\frac{1598}{1786}$

18) $\frac{4235}{25410}$

19) $\frac{1573}{11011}$

20) $\frac{2535}{20280}$

Podemos escribir cualquier racional en su forma decimal, para encontrar la expresión basta con efectuar la división correspondiente

Ejemplo: Encuentre la expresión decimal de $\frac{5}{4}$

$$\begin{array}{r|l} & 1.25 \\ \hline 4 & 5 \\ & 10 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad \text{Por tanto} \quad \frac{5}{4} = 1.25$$

X. Encuentre la expresión decimal de los siguientes racionales. En caso de ser negativa la fracción, omita el signo, divida y al escribir el resultado escriba el signo.

a) $\frac{28}{36}$

b) $-\frac{54}{96}$

c) $\frac{84}{144}$

d) $-\frac{121}{143}$

e) $\frac{105}{98}$

Para sumar dos fracciones, deben tener el mismo denominador, de no ser así, las convertiremos a fracciones equivalentes para poder sumarlas.

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{32}{40} + \frac{15}{40} = \frac{47}{40}$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{4}{5} + \frac{3}{8} = \frac{47}{40}$$

XI. Realice las sumas correspondientes.

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

2) $\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$

3) $\frac{5}{8}+\frac{11}{64}$

4) $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$

5) $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}$

6) $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$

7) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

8) $\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60}$

9) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$

10) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$

11) $\frac{7}{12}+\frac{5}{9}-\frac{4}{24}$

12) $\frac{11}{15}-\frac{7}{30}+\frac{3}{10}$

13) $\frac{6}{9}-\frac{1}{90}+\frac{4}{7}$

14) $\frac{4}{41}+\frac{7}{82}-\frac{1}{6}$

15) $\frac{11}{26}+\frac{9}{91}-\frac{3}{39}$

16) $\frac{31}{108}+\frac{43}{120}+\frac{59}{150}$

17) $\frac{111}{200}+\frac{113}{300}-\frac{117}{400}$

18) $3+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}$

19) $6+1\frac{1}{3}-\frac{2}{5}$

20) $9-5\frac{1}{6}+4\frac{1}{12}$

21) $35-\frac{1}{8}-\frac{3}{24}$

22) $80-3\frac{3}{5}-4\frac{3}{10}$

23) $6\frac{1}{15}-4\frac{1}{30}+\frac{7}{25}$

24) $\frac{7}{20}+3\frac{1}{16}-2\frac{1}{5}$

25) $9\frac{2}{3}+5\frac{7}{48}-\frac{1}{60}$

26) $-8+11$

27) $(-32)+(-71)$

28) $(-4.6)+5.3+(-8.7)+(-1.2)$

29) $0.5+0.25+\left(-\frac{1}{2}\right)+0.75$

30) $(-3.6)+(-2.4)+(-5.1)+(-6.12)$

31) $(-35.9)+(-49.8)+172.4+(-53.4)$

32) $0.5+0.02+\frac{1}{2}$

33) $4\frac{1}{5}+0.16-0.666$

34) $-2\frac{7}{10}+3.196-\frac{1}{2}$

35) $5.13+8.932+31.786-40.1567-63.1$

36) $31+14.76+17-8.35-0.03+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$

37) $8-\frac{3}{10}+\frac{25}{5}-0.16-\frac{90}{30}+14.324$

38) $15+18\frac{36}{100}-71+80.1987-0.000132$

39) $\frac{12}{40}+0.05-0.170+3\frac{39}{156}$

40) $1\frac{11}{52}+7\frac{7}{26}-0.8-0.125+16.6$

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican entre sí los denominadores que será el denominador del resultado; el producto de los numeradores será el numerador del resultado, es decir, se multiplican en línea recta.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo: Realice el producto de $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}$ y reduzca el resultado a su mínima expresión. Recuerde que podemos simplificar las fracciones como se hizo en los ejercicios IX antes de realizar el producto o al finalizar.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

XII. Efectúe las siguientes multiplicaciones y reduzca el resultado a su mínima expresión.

a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{9}$

b) $\frac{52}{24}\cdot\frac{4}{13}$

c) $\frac{18}{15}\cdot\frac{90}{36}$

d) $\frac{13}{4}\cdot\frac{72}{39}$

e) $\frac{24}{102}\cdot\frac{51}{72}$

f) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}$

g) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$

h) $\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}$

i) $\frac{7}{19}\cdot\frac{19}{13}\cdot\frac{26}{21}$

j) $\frac{23}{34}\cdot\frac{17}{28}\cdot\frac{7}{69}$

k) $(0.5)(0.3)$

l) $(16.84)(0.003)$

m) $(134.786)(0.1987)$

n) $5(0.7)(0.739128)$

o) $\left(2\frac{1}{2}\right)(-3.7172)$

p) $(-3.141592)\left(\frac{19}{21}\right)$

q) $\left(\frac{29}{80}\right)(-2.717)\left(3\frac{1}{10}\right)$

r) $12(-7.00171)\left(\frac{39}{17}\right)$

s) $16.64\left(8\frac{512}{1000}\right)(3)$

t) $(9.374)(380)(-193.50783)\left(\frac{2}{100}\right)$

Para dividir dos fracciones, se multiplica el numerador de la primera fracción, por el denominador de la segunda fracción y el resultado es el numerador de la división y se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda y el resultado es el denominador de la división, es decir, se multiplican cruzados.

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}}$$

Ejemplo: Realice la división de $\frac{4}{3} \div \frac{5}{8}$ y, de ser posible, reduzca el resultado a su mínima expresión.

$$\frac{4}{3} \div \frac{5}{8} = \frac{32}{15}$$

XIII. Efectúe las siguientes divisiones y, de ser posible, reduzca el resultado a su mínima expresión.

a) $\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{12} \div \frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{14} \div \frac{7}{22}$

d) $\frac{19}{21} \div \frac{38}{7}$

e) $\frac{21}{30} \div \frac{6}{7}$

f) $8 \div \frac{1}{2}$

g) $9 \div \frac{2}{3}$

h) $52 \div \frac{14}{65}$

i) $\frac{3}{8} \div 5$

j) $\frac{81}{97} \div 18$

k) $3\frac{12}{31} \div 2\frac{13}{31}$

l) $1\frac{8}{109} \div 1\frac{133}{218}$

m) $4\frac{1}{50} \div 24\frac{3}{25}$

n) $1\frac{11}{52} \div 7\frac{7}{26}$

o) $1\frac{99}{716} \div 9\frac{19}{179}$

p) $0.729 \div 0.009$

q) $1318 \div 0.24567$

r) $0.8976 \div 19$

s) $19.14 \div 175$

t) $9.183 \div 0.00012$

XIV. Simplifique las siguientes expresiones y, de ser posible, reduzca a su mínima expresión cada resultado.

1) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{30}}{23/30}$

2) $\dfrac{\frac{1}{1/3}-\frac{1}{1/2}}{\frac{2}{1/5}+\frac{4}{1/10}}$

3) $\left(\dfrac{\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}{\frac{2\frac{1}{2}}{5/6}-\frac{1/3}{1/6}}\right)\left(23\frac{1}{2}\div\frac{47}{12}\right)$

4) $\dfrac{(0.03+0.456+8)6}{25.458}$

5) $\dfrac{(8.006+0.452+0.15)\div 0.1}{(8-0.1+0.32)\cdot 4}$

6) $(1\div 7)+(1\div 3)$

Una razón es el cociente de dos números. Podemos representarla por medio de una fracción, utilizar el símbolo de división o separar las cantidades por medio de dos puntos.

Ejemplos:

- La razón 8 es a 5 la escribimos como: $\frac{8}{5}$ o $8 \div 5$ o $8 : 5$
- Escribir una razón para comparar 45 minutos con 2 horas. Primero recordemos que

2 horas = 120 minutos.

Entonces escribimos la razón y simplificamos

$$\frac{45 \text{ minutos}}{120 \text{ minutos}} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$$

La razón es $\frac{3}{8}$

- ¿Cuál es la razón de la altura de una casa de 10 metros y la altura de su maqueta de 20 centímetros?

Convirtiendo a las mismas unidades ambas cantidades tenemos que

10 metros = 1 000 centímetros,

entonces escribimos la razón y simplificamos.

$$\frac{1000 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \frac{1000}{20} = \frac{50}{1}$$

La razón es $\frac{50}{1}$.

Una proporción es una igualdad que establece que dos razones son iguales, de la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Propiedad de la proporción: Para cualesquiera números enteros a, b, c y d, donde $b \neq 0, d \neq 0$: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$

Ejemplos:

- Cuatro hombres realizan un trabajo en doce días. ¿Cuántos días tardarán en realizar el trabajo nueve hombres?

  Planteamos el problema como una proporción

$$\frac{4\,hombres}{9\,hombres} = \frac{12\,días}{x}$$

  Como el planteamiento del problema indica que a mayor cantidad de trabajadores menor será el tiempo empleado, decimos que se trata de una regla simple de tres inversa, que se resuelve al multiplicar los numeradores y dividir el resultado entre el denominador.

$$\frac{4(12)}{9} = 5.\overline{3}$$

  Que es el equivalente a 5 días y ocho horas.

- Una inversión de \$3324 produce \$277 de rédito en un año, ¿cuánto producirán \$3780 a la misma tasa de interés?

  Llamaremos x al rédito producido por la segunda inversión. La razón del capital a los réditos en el primer caso es: $\frac{3\,324}{277}$ y en el segundo caso es: $\frac{3\,780}{x}$

  Como la tasa de interés es la misma, igualamos las razones y resolvemos la ecuación

$$\frac{3324}{277} = \frac{3780}{x}$$

$$3324\,x = 3780 \cdot 277$$

$$x = \frac{3780 \cdot 277}{3324} = 315$$

  Por tanto el rédito generado por \$$3\,780$ es \$$315$.

XV. Resuelva los siguientes problemas de razones y proporciones.

1) Dos números están en razón $\frac{3}{7}$. Si el menor de ellos es 189, ¿cuál es el otro?

2) Dos obreros trabajan en una fábrica empacando calcetines, pero mientras uno empaca 3 cajas, el otro empaca 7. Si el más hábil ha empacado 91 cajas ¿cuántas ha empacado el otro?

3) Dos números se encuentran en razón $\frac{1}{4}$. Si se sabe que uno es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

4) Si al comer 90 gramos de cereal se consumen 360 calorías, ¿qué cantidad de cereal debe comerse para consumir solamente 80 calorías?

5) Dos ángulos están en razón 6 a 7. Si el menor mide 30°, ¿cuánto mide el otro?

6) En un triángulo isósceles, el lado desigual está en razón $\frac{1}{3}$ a los dos lados iguales. Si el lado mayor mide 1.8 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

7) En la República de Haití en 1970, la razón entre el número km^2 de superficie y el número de habitantes era de 1 a 175. Si en ese momento había 4 856 250 habitantes, ¿qué superficie tiene Haití?

8) Las velocidades máximas de una mariposa y un avestruz están en razón $\frac{2}{3}$. Si la mariposa, que es la que alcanza la menor velocidad puede recorrer 48 km en una hora, ¿cuántos kilómetros recorrerá el avestruz en el mismo tiempo?

9) Se estima que uno de cada 25 bebés hijos de madres que contrajeron rubeola durante el cuarto mes de embarazo sufre alguna anomalía congénita. ¿Qué número de bebés afectados habrá en 25 575 niños, hijos de madres que contrajeron la enfermedad?

10) En 1974, la razón entre las especies de insectos descritos hasta entonces y el total de ellos era $\frac{19}{60}$. Si entonces se tenía la descripción de 950 000 especies, ¿cuál era el total de especies de insectos?

11) 8 hombres han cavado una zanja de 50 metros de largo, 4 metros de ancho y 2 metros de profundidad en 20 días. ¿Cuánto habrían tardado en realizar el mismo trabajo 2 hombres?

12) 10 hombres trabajando en la construcción de un puente hacen $\frac{3}{5}$ del trabajo en 8 días. Si retiran a 8 hombres, ¿cuánto tiempo tardarán en terminar el puente?

3. 5 Irracionales

Desde el siglo V antes de nuestra era, los pitagóricos se dieron cuenta que no se puede medir con un número racional la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1; es decir, el número $\sqrt{2}$ no se puede escribir como cociente de dos enteros $\frac{p}{q}$, lo cual llegó a causarles problemas teológicos, pues llegaron a pensar que se debía a un error de los dioses, por lo que guardaron en secreto este descubrimiento. Entonces se crea el conjunto que conocemos como los irracionales, conjunto que denotaremos como $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

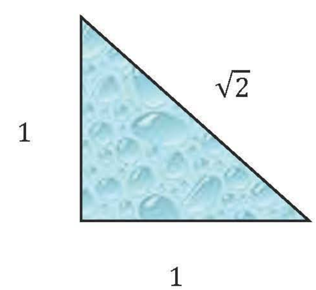
$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.71828182\ldots$$

$$\varphi = 1.6180339\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.732050\ldots$$



Los irracionales cumplen todas las propiedades de los enteros, excepto las de neutro aditivo, neutro multiplicativo y cerradura, ya que en algunos casos, cuando multiplicamos dos irracionales, no siempre da como resultado un irracional. Por ejemplo:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

Y sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ pero $2 \in \mathbb{Z}$, por tanto los irracionales no cumplen con la propiedad de cerradura en la multiplicación.

3. 6 Reales

La colección de números formada por los números racionales y los números irracionales se llama el conjunto de los *números reales*.

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{I}\}$$

Propiedades:

- Cerradura de la suma: Si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real.
- Conmutatividad de la suma: Si a y b son números reales, entonces $a + b = b + a$
- Asociativa de la suma: Si a, b y c son números reales, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existencia del neutro aditivo: El número 0 satisface la igualdad $a + 0 = a$ para cualquier número real a.
- Existencia del opuesto o inverso aditivo: Si a es un número real cualquiera, existe un único número real al que llamamos $-a$ que satisface la igualdad: $a + (-a) = 0$
- Propiedad de cerradura del producto: Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b$ es un número real.
- Conmutatividad del producto: Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$
- Asociativa del producto: Si a, b y c son números reales, entonces $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$
- Existencia del neutro para el producto: El número 1 satisface la igualdad $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a.
- Existencia del recíproco o inverso multiplicativo: Si a es un número real distinto de cero, existe un único número real denotado como a^{-1} o $\frac{1}{a}$, que satisface la igualdad: $a \cdot (a^{-1}) = 1$
- Distributividad: Si a, b y c son números reales, entonces $a(b + c) = ab + ac$

Propiedades de orden:

- Tricotomía: dados dos reales a y b se cumple exactamente una de las siguientes propiedades

  $a < b$ $\qquad\qquad$ $a > b$ $\qquad\qquad$ $a = b$
- Transitividad: Si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c, entonces a está a la izquierda de c.

  Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
- Relación con la suma: Si $a < b$ y c es cualquier real, entonces $a + c < b + c$
- Multiplicación por un número positivo: Si $a < b$ y c es cualquier real positivo, entonces $ac < bc$, es decir, no se altera el sentido de la desigualdad.
- Multiplicación por un número negativo: Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$, es decir, se invierte el sentido de la desigualdad.

XVI. Trace dos rectas numéricas y localice los siguientes números.

a) 3 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{2}{7}$ d) -1.72 e) π

f) $-\frac{11}{8}$ g) $\frac{3\pi}{4}$ h) 2.005 i) e j) $-\frac{3}{4}$

XVII. Resuelva los siguientes problemas.

a) ¿Qué número al ser multiplicado por sí mismo da como resultado -1?

b) Un comprador, al ver los documentos que certifican la propiedad de un terreno cuadrado, descubre que el área de éste es de -400 metros, ¿cuánto mide de cada lado el terreno?

3. 7 Imaginarios

Los números imaginarios surgen de la necesidad de resolver ecuaciones cuadráticas como: $x^2 + 1 = 0$ es decir $x^2 = -1$

Entonces, al no existir algún número que satisfaga esta expresión, se crea el campo de los complejos. Un número complejo es un par ordenado de números reales; si $z = (a, b)$ es un número complejo, se dice entonces que a es la parte real de z, y que b es la parte imaginaria de z.

Cuando la parte real de un número complejo es cero, decimos que el número complejo es puramente imaginario.

Definimos

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{por lo tanto} \qquad i^2 = -1$$

Entonces podemos definir a un número complejo como un real más un imaginario.

Ejemplo: escriba un ejemplo de algún número imaginario utilizando en la parte real un número irracional.

$$2\sqrt{3} + 7i$$

Donde $\sqrt{3}$ es un número irracional.

XVIII. Escriba ejemplos de números imaginarios utilizando como parte real lo que se pida:

a) Un número natural

b) Un número entero

c) Un número racional

d) Un número irracional

e) Cualquier número real

3. 8 Complejos

Como ya vimos, un número complejo es un par ordenado de números reales; si $z = (a, b)$ es un número complejo, se dice entonces que a es la parte real de z, y que b es la parte imaginaria de z. Entonces podemos escribir a $z = (a, b)$ como $z = a + bi$. El conjunto de todos los números complejos es designado por la letra $\mathbb{C}$.

Sabemos que dos pares ordenados de números reales (a, b) y (c, d) son iguales si $a = c$ y si además $b = d$. De aquí surge la definición de igualdad para números complejos.

Para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ entonces $z_1 = z_2$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, y $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ entonces:

Suma de complejos:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Multiplicación de complejos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El + y el · que aparecen a la izquierda son símbolos nuevos que se están definiendo, mientras que el + y el · que aparecen a la derecha representan la suma y la multiplicación conocidas en los números reales.

Ejemplo: efectúe las siguientes operaciones con números complejos

$$(1,0) + (3,0) = (1 + 3,0 + 0) = (4,0) = 4 + 0i$$

$$(2, 3) + (-4, 1) = (2 + (-4), 3 + 1) = (-2, 4) = -2 + 4i$$

$$(3, 0) \cdot (5, 0) = (3 \cdot 5 - 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5) = (15 - 0, 0 + 0) = (15, 0) = 15 + 0i$$

$$(1, 2) \cdot (1, 2) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2,\ \ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = (1 - 4, 2 + 2) = (-3, 4) = -3 + 4i$$

XIX. Efectúe las siguientes operaciones con números complejos.

1) $\left(2\sqrt{3}+7i\right)+\left(5+i\sqrt{2}\right)$

2) $-6i+15i$

3) $(8+3i)+(9+3i)$

4) $(12-i)+(12+i)$

5) $(2,6)+(-4,-10)$

6) $(1,12)+(15,7)$

7) $\left(8+\sqrt{2}i\right)+\left(3-3\sqrt{2}i\right)$

8) $7+\left(5-\sqrt{3}i\right)$

9) $\left(5\sqrt{3}-i\right)+\left(i+5\sqrt{3}\right)$

10) $\left(-5+i4\sqrt{5}\right)+\left(-5-i4\sqrt{5}\right)$

11) $(0,1)\cdot(0,1)$

12) $(1,3)\cdot(2,5)$

13) $(2,5)\cdot(1,3)$

14) $(5,-2)\cdot(4,-6)$

15) $(-10-7i)\cdot(-5-12i)$

16) $(-7-i)\cdot(-i)$

17) $(11-5i)\cdot(9-13i)$

18) $(-15-8i)\cdot(1+15i)$

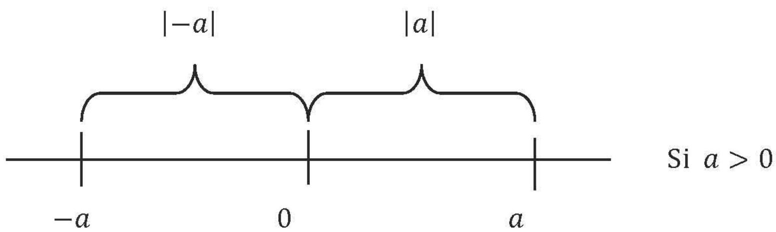
19) $(11-6i)\cdot(11-6i)$

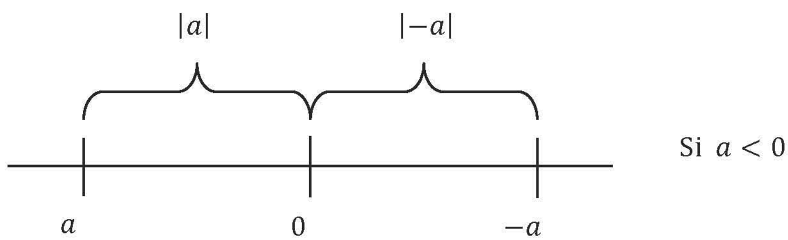
20) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i\right)\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{2}i\right)$

3. 9 Valor absoluto de un número real

Podemos definir el valor absoluto de un número real como su distancia al cero, sin importar si es negativo o positivo, únicamente importa su magnitud. Para referirnos al valor absoluto de un número, lo escribiremos entre líneas verticales, y dada la definición, podemos decir que:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$





La letra a representa un número que puede ser positivo, negativo o cero. Por consiguiente, $-a$ no representa necesariamente un número negativo, y podremos decidirlo hasta que sepamos qué número representa a.

Si $a = \frac{3}{4}$, entonces $-a = -\frac{3}{4}$. Análogamente, si $a = -1.6$ entonces $-a = 1.6$

Propiedades del valor absoluto.

- $|-a| = |a|$
- $|a|^2 = a^2$
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- $|ab| = |a||b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

XX. Utilizando las propiedades anteriores, simplifique los siguientes valores absolutos.

a) $|-19|$

b) $-|48|$

c) $|0.63|$

d) $\left|\frac{0}{14}\right|$

e) $\left|-\frac{21}{13}\right|$

f) $\left|-\frac{1}{5}\right|$

g) $|-\sqrt{3}|$

h) $-|-\sqrt{6}|$

i) $-|-\sqrt{2}|$

j) $-|37.95|$

k) $|-\pi|$

l) $-|-(-1.28)|$

m) $|-0.25|$

n) $|0.58|$

o) $|-(-9)|$

p) $-|68|$

q) $-|-1.3|$

r) $|-76.05|$

s) $\left|5\frac{3}{4}\right|$

t) $-\left|-3\frac{7}{12}\right|$

3. 10 Intervalo

Una de las formas de denotar a los intervalos es utilizando conjuntos. Hay diversos tipos de intervalos, entonces analizaremos la notación correspondiente para cada tipo.

- Si $a < b$, el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$, se llama intervalo abierto y se representa gráficamente:

- Si a y b están incluidos en el conjunto, es decir, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$, se llama intervalo cerrado y se representa gráficamente:

- Un intervalo es semiabierto si contiene sólo uno de los dos extremos, es decir
  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ o $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

- Utilizamos el símbolo ∞ para hablar de intervalos de longitud infinita, el ∞ no es un número real y no satisface las reglas de la suma y el producto de los números reales. Si $a \in \mathbb{R}$ denotamos:
  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ o $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

Análogamente si deseamos incluir a a como elemento del intervalo, solamente debemos cambiar el paréntesis circular por uno cuadrado.

XXI. Escriba usando notación de intervalos.

1) $\{x \in \mathbb{R} | -4 < x < 4\}$

2) $\left\{z \in \mathbb{R} | \frac{3}{4} < z \leq 9\right\}$

3) $\left\{b \in \mathbb{R} | b < \frac{1}{2}\right\}$

4) $\{w \in \mathbb{R} | -21 \leq w < -7\}$

5) $\{a \in \mathbb{R} | -8.74 \leq a\}$

6) $(-2, 5) \cup [1, 7]$

7) $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} | -1 < x\}$

8) $(-8, 5) \cap [-3, 6]$

9) $(5, 9) \cup (-2, 8)$

10) $(7, \infty) \cap (-\infty, -1)$

11) $\left(-\infty, -4\right] \cup \left(0, \frac{12}{7}\right]$

12) $\left(-\infty, -\frac{11}{5}\right) \cap (-2, \infty)$

3. 11 Propiedades de los exponentes

Si a es un número real y n un entero no negativo, definimos a^n como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \ veces}$$

Propiedades de los exponentes:

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^0 = 1$$

Ejemplo: utilizando las leyes de los exponentes, simplifique la expresión $8^{-\frac{1}{3}}$

$$8^{-\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

XXII. Utilizando las leyes de los exponentes, simplifique las siguientes expresiones.

1) $5^7 \cdot 5^3$
2) $(8^9)^3$
3) $(2 \cdot 6)^{15}$
4) $\left(\frac{1}{20}\right)^4$
5) $(-2)^2(-2)^5$
6) $(7)^3(7)^8(7)^4$
7) $(2^8)^7$
8) $(-8)^{12}(-8)^6$
9) $-1.5(4^5)^2$
10) $7(5)\left(\frac{5^{11}}{14}\right)6(5^2)$
11) $8(-3(-9))\left(\frac{5}{18}(-9)\right)\left(\frac{(-9)^{17}}{10}\right)$
12) $\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(-12\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4$
13) $4\left(\frac{2}{7}\right)^8\left(3\left(\frac{2}{7}\right)^7\right)^4$
14) $-7\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$
15) $\left((0.5)\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^5$
16) $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}$
17) $2(4^{-2})$
18) $5\left(125^{\frac{1}{3}}\right)$
19) $(-3.7)^{-\frac{4}{3}}$
20) $6(2 \cdot 3)^{-1}$

3. 12 Notación científica

Para escribir cifras demasiado grandes o pequeñas, utilizamos la notación científica, la cual consiste en utilizar potencias de 10 y escribir los números como decimales con un solo entero.

Ejemplo: Exprese en notación científica las siguientes cantidades 345.0042 y 0.000479

$$345.0042 = 3.450042 \times 10^{2}$$

El exponente indica el número de lugares que recorrimos el punto.

Recorremos el punto decimal para que quede solamente un entero y todos los demás dígitos como decimales

$$0.000479 = 4.79 \times 10^{-4}$$

Si recorremos el punto decimal a la izquierda, entonces el exponente será positivo. Si el punto lo movemos a la derecha, entonces el exponente será negativo.

XXIII. Exprese en notación científica las siguientes cifras.

1) 0.009876
2) 12 745 300 000 100
3) 0.0000001230001
4) 2,905 198,000 000
5) 0.0000008

XXIV. Exprese en notación decimal los siguientes números expresados en notación científica.

6) $8(4.5 \times 10^{3})$
7) $5.3(2.1 \times 10^{-8})$
8) $(3.2 \times 10^{4})(1.5 \times 10^{5})$
9) $\dfrac{(7.2 \times 10^{-3})(8.1 \times 10^{2})}{(4.3 \times 10^{5})}$
10) $\dfrac{(4.1 \times 10^{3})(5.8 \times 10^{-9})}{(5.2 \times 10^{4})}$

3. 13 Logaritmos

Si N y b son números positivos y si $b \neq 1$, entonces

$\log_b N = L$ si, y sólo si $N = b^L$

Observaciones:

- $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$
- $\log_a a^n = n$ ya que $a^n = a^n$

XXV. Utilizando la definición de logaritmo, cambie de la forma exponencial a la logarítmica.

1) $5^4 = 625$
2) $25^{\frac{1}{2}} = 5$
3) $10^{-4} = 0.0001$
4) $3^{-5} = \frac{1}{243}$
5) $6^1 = 6$

XXVI. Utilizando la definición de logaritmo, cambie de la forma logarítmica a la exponencial.

6) $\log_3 9 = 2$
7) $\log_{10} 1000 = 3$
8) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$
9) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
10) $\log_{0.1} 100 = -2$

Propiedades:

1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3) $\log_a M^k = k \log_a M$

Ejemplo: Utilice las propiedades de logaritmos para encontrar una expresión equivalente.

$$\log_7 \frac{(30)^2(40)}{17}$$

Note que hay dos números que se multiplican y dividen a un tercer número, lo cual significa que la expresión log_7 también aparecerá en tres ocasiones.

De acuerdo a las propiedades 1) y 2): $log_7 \frac{(30)^2(40)}{17} = \log_7(30)^2 + \log_7(40) - log_7 17$

Finalmente utilizamos la propiedad 3) en el primer sumando para obtener $log_7 \frac{(30)^2(40)}{17} = 2\log_7 30 + \log_7(40) - log_7 17$

XXVII. Ejercicio: Utilizando las propiedades de logaritmos, escriba la expresión equivalente.

11) $\log_{15}(36)(84)$

12) $\log_{10}\frac{75}{15}$

13) $\log_{20}(408)^{\frac{1}{2}}$

14) $\log_5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$

15) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{.40}{3.21}$

16) $\log_{10}\frac{(20)(30)^2}{15^{\frac{1}{2}}}$

17) $\log_{10}(93)^{\frac{1}{2}}(18)$

18) $\log_{10}\frac{(100)^2(36.8)^{\frac{1}{3}}}{(45)^{\frac{3}{2}}}$

XXVIII. En los siguientes ejercicios, exprese como un solo logaritmo las expresiones.

19) $\log_5 20 + \log_5 100 - \log_5 30$

20) $5\log_{10} 200$

21) $\frac{1}{2}\log_{20} 300 - 2\log_{20} 500$

22) $\log_{10} 100 - 4(\log_{10} 20 - \log_{10} 60)$

Si el logaritmo de un número es la potencia a que se tiene que elevar la base para obtener el número, cualquier base positiva diferente de 1 servirá para construir un sistema de logaritmos. El más usado es el de base 10, y se les denomina logaritmos comunes o de Briggs en honor de Henry Briggs que fue quien los uso por primera vez. El otro sistema que también tiene muchas aplicaciones es el de base e ($e = 2.71828\ \cdots$).

Logaritmos en base 10:

$$\log_{10} 0.0001 = -4 \quad \therefore \quad 10^{-4} = 0.0001$$

$$\log_{10} 0.001 = -3 \quad \therefore \quad 10^{-3} = 0.001$$

$$\log_{10} 0.01 = -2 \quad \therefore \quad 10^{-2} = 0.01$$

$$\log_{10} 0.1 = -1 \quad \therefore \quad 10^{-1} = 0.1$$

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \therefore \quad 10^{0} = 1$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \therefore \quad 10^{1} = 10$$

$$\log_{10} 100 = 2 \quad \therefore \quad 10^{2} = 100$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \therefore \quad 10^{3} = 1000$$

$$\log_{10} 10000 = 4 \quad \therefore \quad 10^{4} = 10000$$

El logaritmo de cualquier número tiene dos partes, la característica (positiva, negativa o cero) y la mantisa (fracción decimal positiva mayor que cero y menor que uno).

Para encontrar la característica de un número, solamente debemos ubicarlo encima del logaritmo que le corresponde, por ejemplo, si deseo encontrar la característica de 5, el resultado es 0 porque $\log_{10} 1 = 0$ y 5 es mayor que 1 y menor que 10. Si deseo encontrar la característica de 849, el resultado es 2 porque $\log_{10} 100 = 2$ y 849 es mayor que 100 y menor que 1000. Si la característica es negativa, se escribe el signo menos arriba del número.

Normalmente para referirnos al logaritmo en base 10, solamente utilizamos log y cuando deseemos hacerlo en otra base, lo indicaremos como en los casos anteriores.

XXIX. Encuentre la característica de los siguientes logaritmos

23) $\log 311$

24) $\log 0.311$

25) $\log 3.11$

26) $\log 0.00809$

27) $\log 80.9$

28) $\log 1.16$

29) $\log 1917.8$

30) $\log 3749.43$

USO DE TABLA PARA OBTENER LA MANTISA DEL LOGARITMO DE UN NÚMERO.

Las tablas II y III a las que se hace referencia en los siguientes párrafos, se encuentran en los anexos, donde la tabla II es la tabla de logaritmos y la tabla III es la tabla de antilogaritmos, en las páginas 155 a 158.

En la primera columna de la tabla II se encuentran los números del 10 al 99. La parte superior tiene 10 columnas marcadas del 0 al 9 y por último 9 columnas más que se llaman partes proporcionales y se abrevian como pp.

Para encontrar la mantisa de un número, nos movemos hacia abajo en la primera columna y después nos movemos hacia la derecha hasta encontrar en la parte superior el número buscado entonces el número donde se intersectan la columna y el renglón es la mantisa buscada.

Ejemplo: encuentre utilizando la tabla II el $\log 193.8$

En la primera columna ubicamos el 19, ahora nos movemos a la derecha hasta llegar al número 3 y leemos el número 2856, ahora nos movemos en ese mismo renglón a la sección de partes proporcionales hasta el 8 y el número indicado es 18 y sumamos ambas cantidades, es decir $2856 + 18 = 2874$

Finalmente agregamos la característica, como $\log 193.8$ es mayor que $\log_{10} 100 = 2$ el resultado es:

$$\log 193.8 = 2.2874$$

XXX. Utilizando la tabla II, encuentre los siguientes logaritmos.

31) $\log 28.6$

32) $\log 324$

33) $\log 8.194$

34) $\log 56.71$

35) $\log 3824$

36) $\log 0.179$

37) $\log 0.004621$

38) $\log 0.0972$

39) $\log 0.0006718$

40) $\log 0.3085$

Encontrar el antilogaritmo de un número a significa elevar 10 a la potencia a. Esta operación es la inversa del logaritmo, para encontrar el logaritmo de un número si tenemos el resultado, es decir,

$\log 2858 = 3.456$ esto implica que $\text{antilog}\, 3.456 = 2858$

De igual forma que buscamos en tablas los valores del logaritmo, buscaremos los del antilogaritmo, pero en la tabla III.

XXXI. Utilizando la tabla III, encuentre los siguientes antilogaritmos.

41) $\text{antilog}\, 5.201$

42) $\text{antilog}\, 2.335$

43) $\text{antilog}\, 1.896$

44) $\text{antilog}\, 4.7219$

45) $\text{antilog}\, 0.781$

CAPÍTULO 4: OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

4.1 Monomio

Los monomios son los polinomios más sencillos, consisten en un número, una variable o el producto de una o más variables. La parte numérica se llama coeficiente y la otra parte variable, incógnita o literal.

El grado de un monomio es la suma de los grados de todas sus variables. Si el monomio es una constante, entonces su grado es cero.

I. Complete la siguiente tabla:

Monomio	**Coeficiente**	**Variables**	**Grado**
$2s^2$			
	-40	x^3y^4	
$\frac{8}{11}uvw$			
	-0.2	m	
$\frac{a^6c^4}{b^{11}d^3}$			
	6.62	x^0	
w^{-9}			
	1	$rs^{1000}t^{-3}$	
$-\frac{45}{7}x^3yz^3$			
	-5×10^{23}	$\frac{1}{h}$	

4.2 Polinomio

Un polinomio es la suma de uno o más monomios. Algunos polinomios reciben nombres especiales, de acuerdo con el número de sumandos que tienen: monomio (un término), binomio (dos términos), trinomio (tres términos).

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos, después de haber simplificado.

II. Encuentre el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

1) $11 + 8x - 4(10 - 3x)$

2) $-y^2 + 6y - 15$

3) $23w^5 - 5w + 8w^7 - 10w^2 + 9$

4) $2z^4 - 3z^2 + 7z^2 - 3(8z^4 + 2z^3)$

5) $20x^7 + 14(3x^5 - 2x^7) - 9(2x^5 + 3x^4) + 16(-3x^5 - 2x^3) + 12$

III. Ordene los siguientes polinomios en orden ascendente de acuerdo a la variable que se indique:

6) $45a^6b^4 - 121a^5b^8 - 7abc + 7a^4b^2c$ (con respecto a b)

7) $16xy^2z^5 + 2x^4y + 3x^2y^7z - 11x^5y^2 - 3y^6x^3 - 8x^7y^5z^4 + 81$ (con respecto a x)

8) $18z^5w + 4w^3z^2 + 7w^2(z^7 + z + 2) - 6(z^{14}w - z^{11}w^3 + z^7w^4)$ (con respecto a z)

9) $x^4v^2 + 7xv^3 - 11x^5v - 6x^3w^6 - 18x^2w^5$ (con respecto a v)

10) $6xy^7 + 7xy^2 + 30x^3y - 2x^2y^3 - x^4y^5$ (con respecto a y)

IV. Construya el polinomio que se indica:

11) Un monomio de grado 3 con dos variables.

12) Un monomio de grado 1 con una variable.

13) Un binomio de grado 8 con tres variables.

14) Un binomio de grado 6 con dos variables.

15) Un trinomio de grado 5 con una variable.

16) Un trinomio de grado 4 con tres variables.

17) Un polinomio de grado 2 con una variable y seis términos.

18) Un polinomio de grado 10 con tres variables y cinco términos.

4.3 Adición y sustracción de monomios y polinomios

V. Calcule la suma de las siguientes expresiones algebraicas:

1) $2a^3 - 2a^2b + 2b^3,\ 3a^2b - 4ab^2 - 4b^3,\ 2ab^2 - a^3$

2) $4m^2 - 3mn + 2n^2,\ 6mn - 2n^2 + 5,\ 3n^2 - 3 - 2m^2$

3) $x^2 - 4xy + 3y^2,\ 2x^2 + 2xy - 2y^2,\ 2xy - y^2 - x^2$

4) $3x^3 - 8x^2 + 9x, -x^3 + 3x^2 - 8,\ 2x^3 - 2x^2 - 7x + 5$

5) $c^2 + 2cd - 2d,\ 3c - 3cd - 2d^2,\ c^2 + 4d - 2c + 2d^2$

VI. Calcule la resta de las siguientes expresiones algebraicas:

6) $3a - 2b + 4c - d,\ 2a + b - 3c - d$

7) $x^3 - 4x^2 + 2x - 5, -x^3 + 2x^2 - 3x - 3$

8) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\ a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + b^3$

9) $2a + 4by - 2cy^2 + dy^3,\ 2dy^3 - 2by - a + 3cy^2$

10) $m^4 + 6m^3 - 7m^2 + 8m - 9,\ 2m^3 + 3m^2 - 4m - 3$

VII. En los siguientes ejercicios conteste lo que se pide:

11) Halle la expresión que debe sumarse a $3a - 2b + 4c$ para obtener $2a + 3b - 2c$.

12) Encuentre la expresión que debe restarse de $4x + 2y - 7$ para que la diferencia sea igual a $3x - y + 5$.

13) Encuentre la expresión que debe disminuirse en $2m - 2n + 3p$ para obtener una diferencia igual a $4m + n - 2p$.

14) El minuendo es $2a^2 + 2ab - b^2$; la diferencia es $a^2 + 3ab - 2b^2$. Encontrar el sustraendo.

VIII. Traduzca cada problema algebraico. Después simplifique la expresión algebraica que obtuvo.

a) Cuatro veces la diferencia de 11 menos $2z$, menos el triple de la resta de 10 menos z.

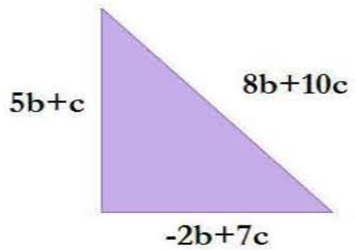
b) El triple de la suma de 5 y x, más el doble de la diferencia de $3x$ menos 4.

c) El cuádruple de la suma de 17 mas w, menos el triple de la suma de $2w$ y 5.

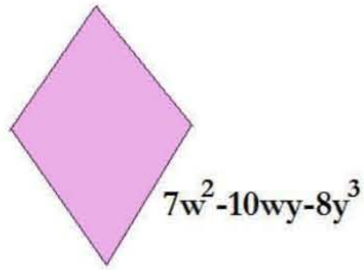
d) Un número de cuatro dígitos satisface lo siguiente: si al dígito de las decenas menos el de las unidades se le agrega la suma del dígito de las centenas más el de los millares más el de las unidades, a lo obtenido se le resta la diferencia del dígito de las decenas menos el de los millares y finalmente se resta la diferencia del dígito de las centenas menos el de las decenas, el resultado es 8.

IX. Encuentre el perímetro de las siguientes figuras:

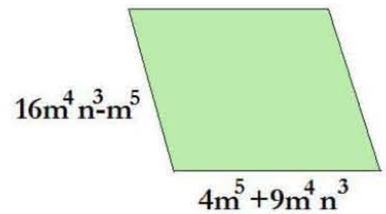
(a)



(b)

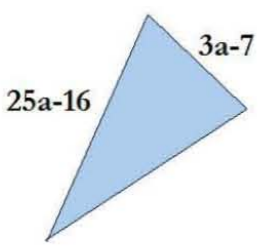


(c)



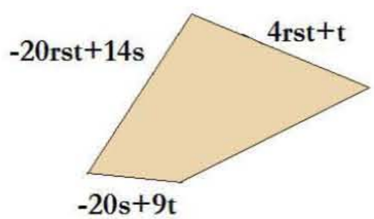
X. Dado del perímetro de cada figura, encuentre el valor del lado faltante:

(a)



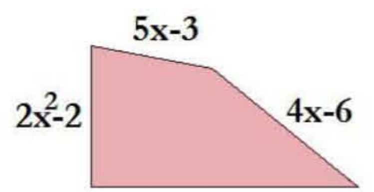
Perímetro: 9a-15

(b)



Perímetro: -35rst-11t

(c)



Perímetro: $3x^2+9x-8$

4.4 Multiplicación de monomios y polinomios

La multiplicación de monomios o polinomios se indica por medio de paréntesis, corchetes, llaves o utilizando el símbolo $\cdot$ .Ya no usamos "×" porque se podría confundir con la variable x.

Ejemplos:

Primero se eleva a la potencia indicada, cada componente del monomio

$$(4x^4)^3 \cdot (5x^2)^2 = (64x^{12})(25x^4)$$
$$= 1600x^{16}$$

Ya que los monomios no tienen exponentes, se multiplican los signos, después los coeficientes y por último las variables

El monomio debe multiplicar a cada término del polinomio, siguiendo las reglas del ejemplo anterior

$$(-2w^2y)[3wy^2 - 5w^2y^3 + 7w^3y^4] = -6w^3y^3 + 10w^4y^4 - 14w^5y^5$$

El producto de un binomio por otro binomio o trinomio, se hace también término a término, y en caso de ser posible, se reducen términos semejantes al final

Recuerda que se pueden hacer multiplicaciones horizontales (recomendadas para binomios) y multiplcaciones verticales (se recomienda su uso para polinomios por polinomios)

$$(a+5)(a-3) = a^2 - 3a + 5a - 15$$
$$= a^2 + 2a - 15$$

$$\begin{array}{r} a + 5 \\ \times \quad a - 3 \\ \hline a^2 + 5a \\ -3a - 15 \\ \hline a^2 + 2a - 15 \end{array}$$

XI. Efectúe los siguientes productos:

a) $(2y)^3(2x^3)^2$

b) $(5x^2y)^4(4zyx^2)^3$

c) $(2x^2y^3)(-3xy^2)$

d) $(-4x^2y^3)(-3x^5y^2)$

e) $a(10-3b)$

f) $-6b(b^3-4b)$

g) $\frac{2}{3}m(8m^5-4m^4-16)$

h) $2xy^2(3x^2+5xy^2+6xy+x-y)$

i) $\frac{4}{5}a^4b^3\left(\frac{15}{4}a^8b^6-\frac{5}{8}a^4b^3+\frac{1}{6}a^5\right)$

j) $(3x+2y)(2x-3y)$

k) $2x^2y(3y-2x)-3xy^2(2x-y)$

l) $(4x+1)(3x^2+4x-1)$

m) $(5x^2+2x-3)(x^2-3x-3)$

n) $(2x^2+3xy-3y^2)(3x^2-xy-2y^2)$

XII. Resuelva los siguientes problemas:

o) El cuadrado de la suma de tres números es igual a la suma de los cuadrados de los tres números más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del primero por el tercero, más el doble producto del segundo por el tercero.

p) La suma de los cubos de dos números es igual al producto de la suma de los números por el cuadrado del primero menos el producto de dos números más el cuadrado del segundo.

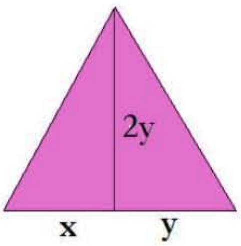
q) La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos impares es -32. Encuentre dichos números.

r) Tres números enteros consecutivos satisfacen la siguiente condición: 8 veces el primero más el cubo del segundo, menos el cubo del primero es igual al cubo del tercero menos el cubo del segundo. Encuentre dichos números.

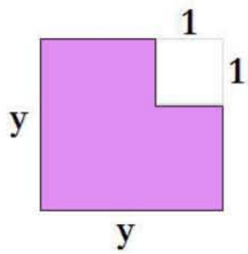
s) Cuatro números enteros consecutivos satisfacen que el producto de los tres primeros es igual al producto de los tres últimos menos tres veces el cuadrado del primero, menos 51. Encuentre dichos números.

XIII. Obtenga el área de las figuras sombreadas:

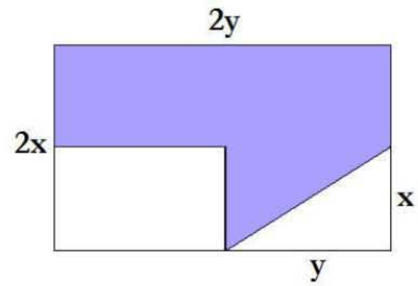
(a)



(b)

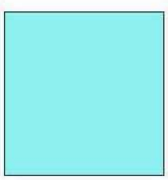


(c)



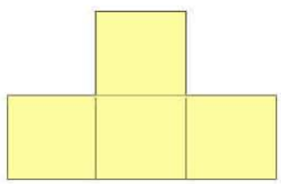
XIV. Dada el área de las siguientes figuras, encuentre el lado o los lados faltantes:

(a)



Área: $(5a+8)^2$

(b)



Área: $16x^2$

(c)

Área: x^2+5x

4.5 Factor común

El factor común de un polinomio se obtiene con los siguientes pasos

MCD de los coeficientes

Busque la o las incógnitas que aparezca o aparezcan en todos los términos

Escriba la incógnita con el menor exponente de la o las elegidas en el paso anterior

Escriba tus respuestas como un monomio

Ejemplos:

$$12a^8 - 6a^7b + 18a^6b^2 - 24a^4b^2c$$

- MCD es 6
- La única variable que aparece en todos los términos es a
- La a del menor exponente es a^4
- El factor común es: $6a^4$

$$125x^3yz^3 - 75x^2y^2z^2 + 200xy^3z^2$$

- MCD es 25
- Las variables que aparecen en todos los términos son: xyz
- Las del menor exponente: xyz^2
- El factor común es: $25xyz^2$

$$2m + 4n^2p - 7mnp$$

- MCD es 1
- Ninguna variable aparece en todos los términos
- No hay variable que aparezca en todos los términos
- El factor común es 1, por tanto no necesito escribirlo como monomio

XV. Obtenga el factor común de los siguientes polinomios:

1) $a^2 + ab$

2) $b + b^2$

3) $5m^2 + 15m^3$

4) $ab - bc$

5) $2a^2x + 6ax^2$

6) $abc + abc^2$

7) $15y^3 + 20y^2 - 5y$

8) $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$

9) $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$

10) $96 - 48mn^2 + 144n^3$

11) $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$

12) $2x^2 - 6x^3 + 8x^4 - 10x^5$

13) $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$

14) $16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3$

15) $4x^3y^7z^6 + 16x^{12}y^3z^8 - 36x^9z^6y^4$

16) $36x^2y^7z^5 - 45x^3y^6z^6 - 1$

17) $12x^7y^6z^{10} + 24x^6y^3z^8 - 8x^4y^2z^{12} + 36x^6y^{12}z^{18}$

18) $\frac{3}{2}x^4y^7z^{10} - \frac{5}{8}x^7y^{12}z^{15} + \frac{3}{4}x^9y^7z^{16}$

19) $5x^{12}y^{14}z^{10} - 14x^2y^9z^{15} + 19x^7y^6z^{12} + 12x^2y^9z^{15}$

20) $a(x + 1) + b(x + 1)$

4.6 División de polinomios

Para esta sección realizaremos dos casos, el más fácil de ellos es el de un monomio entre otro monomio, ya que se dividen los coeficientes y para las variables se siguen las propiedades de los exponentes. En caso de que el dividendo sea un polinomio, se debe realizar el mismo procedimiento, tantas veces como sea necesario

Ejemplos:

$$\frac{12x^4y^3}{6x^2y} = 2x^2y^2$$

$$\frac{25a^4-15a^3}{5a^2} = 5a^2 - 3a$$

$$\frac{6m^2n - 24mn^4}{12mn^3} = \frac{1}{2}mn^{-2} - 2n$$

Recuerda que el término $n^{-2} = \frac{1}{n^2}$ así que úsalo indistintamente

XVI. Efectúe la división indicada y compruebe el resultado:

1) $\frac{8x^3y^2z^6}{48x^2y^7z^{10}}$

2) $\frac{12x^7y^3z^{12}}{4x^2y^8z^5}$

3) $\left(\frac{15x^8y^3z^{16}}{5x^3y^9z^{12}}\right)^2$

4) $\left(\frac{12x^6y^8z^{10}}{18x^3y^5z^2}\right)^{-3}$

5) $\left(\frac{6x^5y^7z^9}{24x^3y^{10}z^{12}}\right)^{-3/2}$

6) $\frac{8x^4y^3z^2}{-4x^2y^2z}$

7) $\frac{4abx^3-8b^2x^2y}{2bx^2}$

8) $\frac{16v^4w^6-8v^3w^7+24v^2w^8x}{4v^3w^5x}$

El caso complicado de la división de polinomios es cuando tenemos a un polinomio en el divisor y a otro en el dividendo. El procedimiento consiste en hacer la división de manera similar al método que se usa en una división numérica.

Ejemplos:

a) Divida $x^4 + 3 + x - 9x^2$ entre $x + 3$

Primero debemos acomodar los términos y considerar aquellos que no están en el dividendo. Así tendremos:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 3x^2 + 0 + 1 \\
\hline
x + 3 & x^4 + 0x^3 - 9x^2 + x + 3 \\
 & \underline{x^4 + 3x^3} \\
 & \quad -3x^3 - 9x^2 \\
 & \quad \underline{-3x^3 - 9x^2} \\
 & \qquad\qquad 0 + x + 3 \\
 & \qquad\qquad \underline{\quad x + 3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es el producto de $x + 3$ por x^3

Se realiza la resta y se “baja” el siguiente término

Se hace el mismo procedimiento hasta que ya no quede nada por “bajar”

b) Divida $8a^3 - 9b^3 - 6a^2b + 5ab^2$ entre $2a - 3b$

Primero agrupamos los términos de acuerdo a la variable con el mayor exponente y procedemos a realizar la división como en el ejemplo anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2 + 3ab + 7b^2 \\
\hline
2a - 3b & 8a^3 - 6a^2b + 5ab^2 - 9b^3 \\
 & \underline{8a^3 - 12a^2b} \\
 & \qquad 6a^2b + 5ab^2 \\
 & \qquad \underline{6a^2b - 9ab^2} \\
 & \qquad\qquad 14ab^2 - 9b^3 \\
 & \qquad\qquad \underline{14ab^2 - 21b^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 12b^3
\end{array}
$$

Siempre se calcula el cociente de acuerdo al primer número del dividendo

No siempre puede quedar cero de residuo

XVII. Realice las siguientes divisiones entre polinomios.

9) $\frac{m^4-n^4}{m+n}$

10) $\frac{3x^3-5x^2y-8xy^2-2y^3}{3x+y}$

11) $\frac{a^5-4a^4+3a^3+3a^2-3a+2}{a^2-a-2}$

12) $\frac{x^3-3x^2+x+2}{x-2}$

13) $\frac{x^3+2x^2-x+6}{x^2-x+2}$

14) $\frac{a^4+a^3b-ab^3-b^4}{a^2+ab+b^2}$

15) $\frac{x^4+2x^3+1}{x^3+x^2-x+1}$

16) $\frac{2x^2+3xy-2y^2-2x-14y-12}{x+2y+2}$

17) $\frac{y^2+2}{y^2+1}$

18) $\frac{x^4-1}{x^2+2x}$

19) $\frac{2x^2-11x+5}{x-3}$

20) $\frac{x^2-8x+7}{x-2}$

21) $\frac{5x^2+6x-9}{x+3}$

22) $\frac{12x^3+4x^2-15x+5}{x+\frac{1}{3}}$

23) $\frac{5x^3-4x-12}{x-2}$

24) $\frac{x^4-64}{x+4}$

25) $\frac{6x^3-3x^2-8x-4}{x-\frac{1}{2}}$

26) $\frac{6t^2-23t+15}{3t-4}$

4.7 Valor de un polinomio

El valor de un polinomio se obtiene al sustituir para ciertos valores de las variables, los valores numéricos indicados para cada variable; se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene el resultado.

Ejemplos:

a) Obtenga el valor del polinomio: $a^2 + 2ab + b^2$ cuando $a = 3$ y $b = -1$

$$
\begin{aligned}
(3)^2 + 2(3)(-1) + (-1)^2 &= \\
&= 9 - 6 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

b) Obtenga el valor del polinomio: $12a - 24a^2 + 6a^3$ cuando $a = -2$

$$
\begin{aligned}
12(-2) - 24(-2)^2 + 6(-2)^3 &= \\
&= 24 - 96 - 48 \\
&= -120
\end{aligned}
$$

XVIII. Obtenga el valor de los siguientes polinomios en los valores indicados de las variables.

1) $3a^4 + 15a + 4 - 16a^2 + 2a^2 + 5a$ cuando $a = 1$ y $a = -1$

2) $3b^3 - \frac{5}{2}b + 4$ cuando $b = 2$ y $b = -2$

3) $6c - 3cd + 9cd^2 + 3c + 4cd - 9c^2d$ cuando $c = 4$ y $d = -2$

4) $e^2 - 3f^2 - \frac{1}{3}e^3f$ cuando $e = 3$ y $f = -1$

5) $\frac{-60g^3h^7j^4}{12h^3j}$ cuando $g = -1,\ h = 1$ y $j = 3$

6) $\frac{12k^2l - 6kl^2}{2kl}$ cuando $k = 4$ y $l = -1$

7) $\frac{m^2 - 4n^2}{m + 2n}$ cuando $m = 3$ y $n = 2$

8) $\frac{p^3 - q^3r^3}{p - qr}$ cuando $p = 1,\ q = -1$ y $r = -2$

4.8 Polinomio como $f(x)$

Una función es una relación en la que a cada elemento del dominio (le llamaremos x o variable independiente) le corresponde una y sólo una imagen (le llamaremos y o variable dependiente). Esto significa que cada vez que sustituya un valor determinado de x en un polinomio, me debe dar un resultado.

Existen diversas clasificaciones de las funciones, como si fueran las cualidades de una persona, pero en este curso solamente nos concentraremos en las funciones polinomiales de acuerdo a su grado y a sus respectivas gráficas.

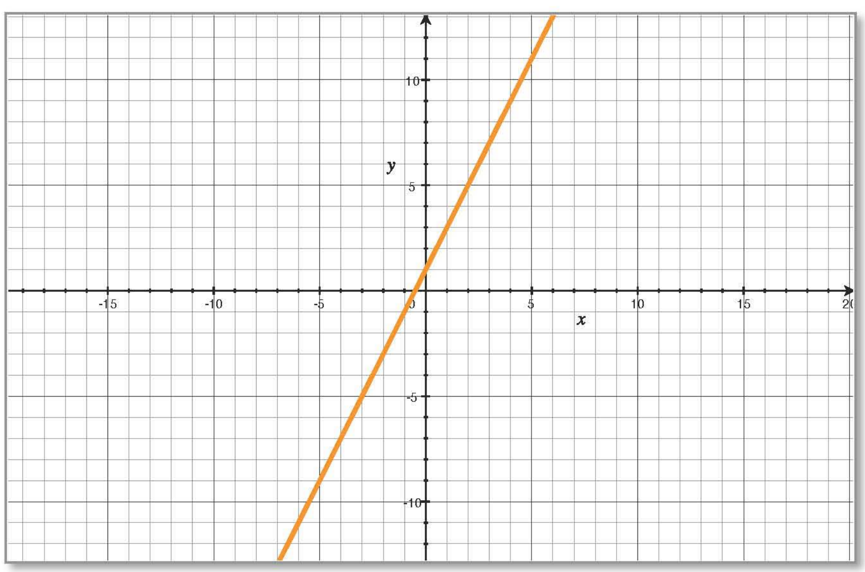
✓ Lineales: grado 1

Ejemplos:

1) Grafique la función $f(x) = 2x + 1$

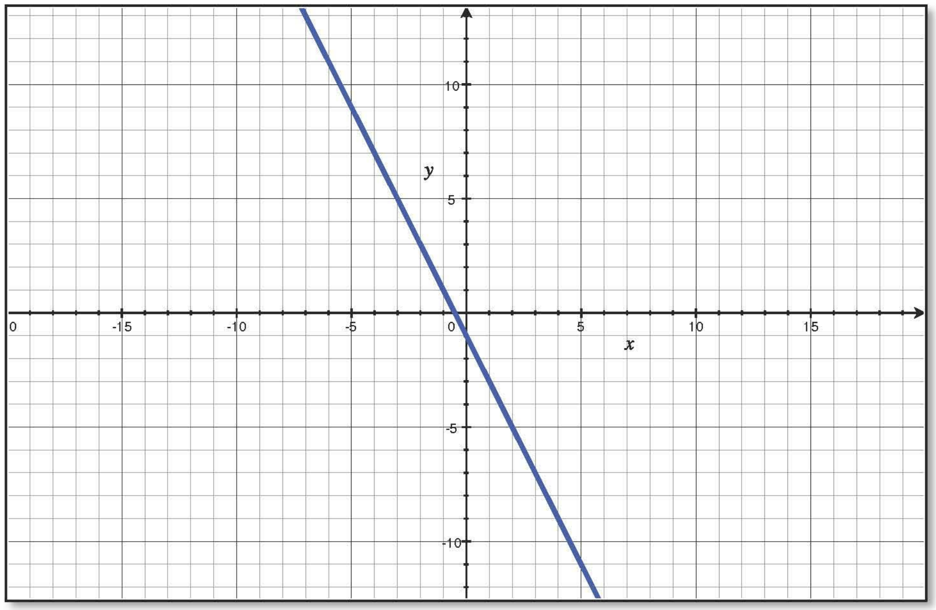
Asigno los valores de x que yo desee y realizo las operaciones indicadas

x	*f(x)*
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7



2) Grafique la función $f(x) = -2x - 1$

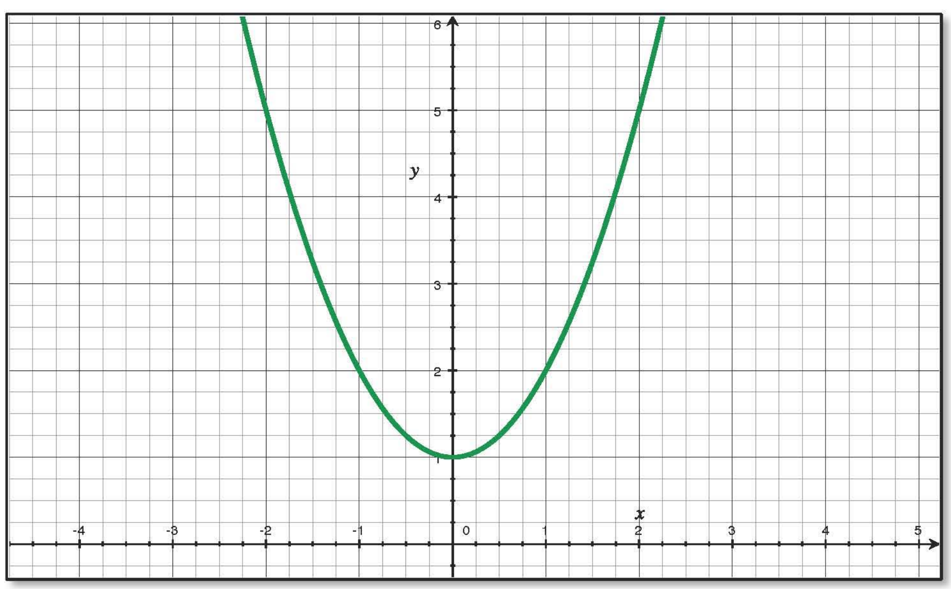
x	$f(x)$
-3	5
-2	3
-1	1
0	-1
1	-3
2	-5
3	-7



✓ Cuadráticas: grado 2

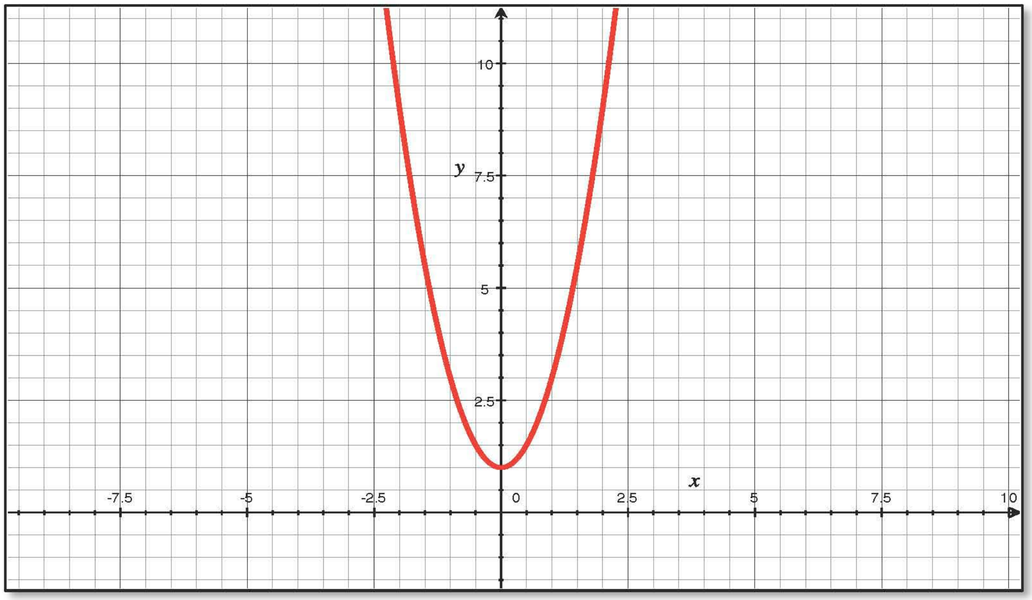
3) Grafique la función $f(x) = x^2 + 1$

x	$f(x)$
-2	5
-1	2
-0.5	1.25
0	1
0.5	1.25
1	2
2	5



4) Grafique la función: $f(x) = 2x^2 + 1$

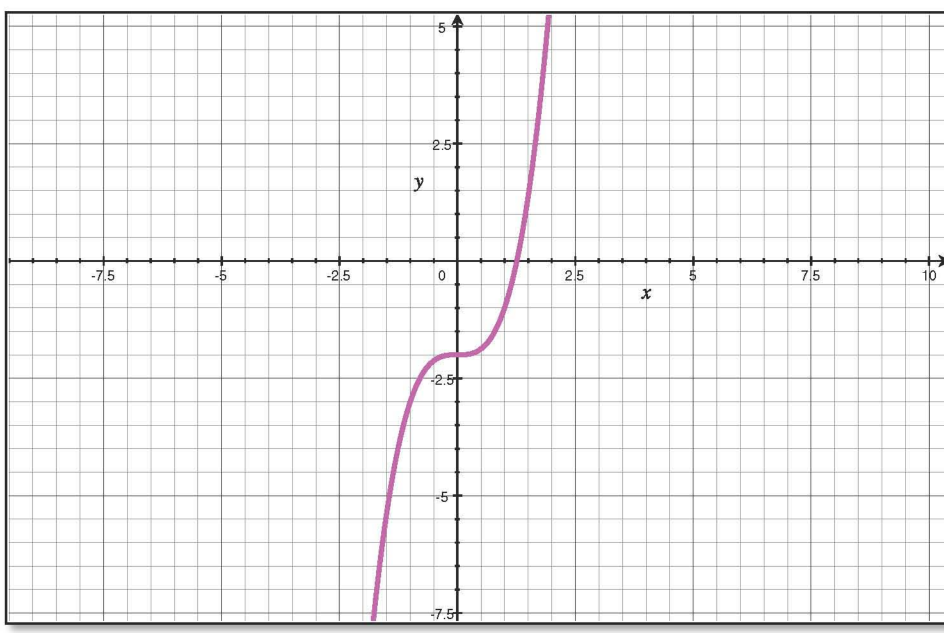
x	$f(x)$
-2	9
-1	3
-0.5	1.5
0	1
0.5	1.5
1	3
2	9



✓ Cúbicas: grado 3

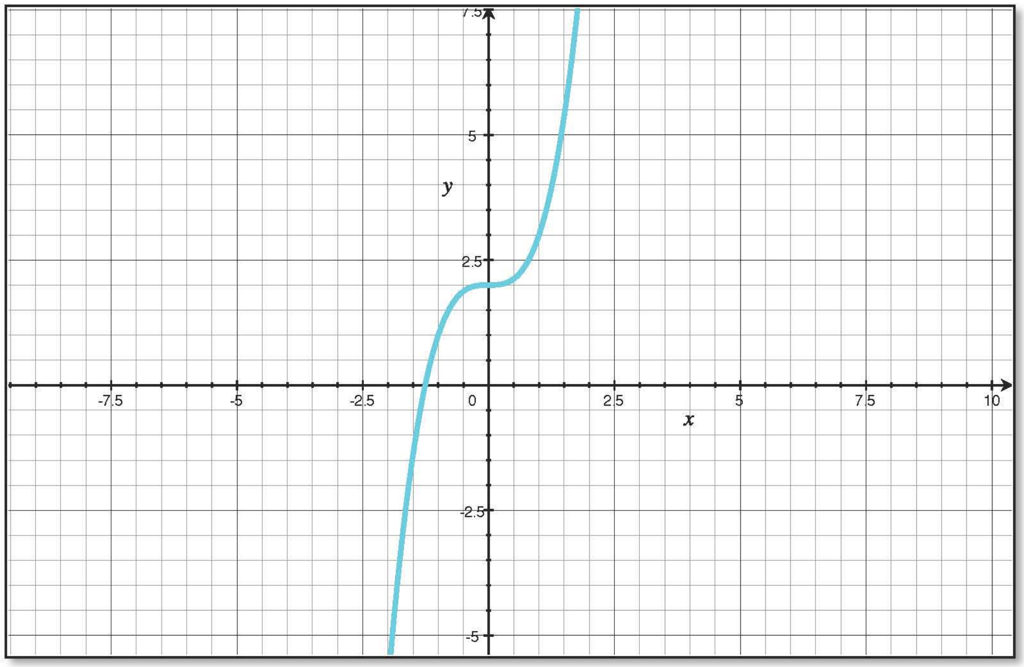
5) Grafique la función: $f(x) = x^3 - 2$

x	$f(x)$
-2	-10
-1.5	-5.375
-1	-3
-0.5	-2.125
0	-2
0.5	-1.875
1	-1
1.5	1.375
2	6



6) Grafique la función: $f(x) = x^3 + 2$

x	$f(x)$
-2	-6
-1.5	-1.375
-1	1
-0.5	1.875
0	2
0.5	2.125
1	3
1.5	5.375
2	10



XIX. Grafique las siguientes funciones

1) $f(x) = x$
2) $f(x) = -x$
3) $f(x) = 3x$
4) $f(x) = 3x + 2$
5) $f(x) = 3x - 2$
6) $g(x) = -3x^2$
7) $g(x) = -2x^2$
8) $g(x) = x^2$
9) $g(x) = 2x^2$
10) $g(x) = 3x^2$
11) $h(x) = 2x^3 - 2$
12) $h(x) = 2x^3$
13) $h(x) = 2x^3 + 2$
14) $h(x) = -x^3 + 1$
15) $h(x) = x^3 + 1$

CAPÍTULO 5: PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

5. 1 Factor común

En el capítulo anterior aprendimos a multiplicar polinomios y a expresarlos como un único polinomio. El proceso que denominamos factorización es la operación inversa de la multiplicación. Entonces podemos definir al proceso de factorizar una expresión algebraica como encontrar los factores que, al multiplicarlos nos den como resultado aquella expresión que deseábamos factorizar.

Ejemplo:

Realice la siguiente operación: $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

Entonces si ahora queremos factorizar la expresión $x^2 + x + 6$ debemos encontrar aquellos factores que al multiplicarlos me darán como resultado la expresión anterior.

Por lo tanto, la factorización de $x^2 + x + 6 = (x+2)(x+3)$

De los diferentes casos de factorización, retomaremos el visto en la sección 4.5 con el mismo procedimiento.

MCD de los coeficientes

Busca la o las incógnitas que aparezca en todos los términos

Escribe la incógnita con el menor exponente de la o las elegidas en el paso anterior

Escribe tus respuestas como un producto

Calcula los términos faltantes para que el producto sea el polinomio original

I. Realice las siguientes factorizaciones.

1) $a^2 + ab$

2) $b + b^2$

3) $3a^3 - a^2$

4) $x^3 - 4x^4$

5) $5m^2 + 15m^3$

6) $ab - bc$

7) $x^2y + x^2z$

8) $2a^2x + 6ax^2$

9) $15c^3d^2 + 60c^2d^3$

10) $abc + abc^2$

11) $a + a^2 + a^3$

12) $4x^2 - 8x + 2$

13) $15y^3 + 20y^2 - 5y$

14) $x^3 + x^5 + x^7$

15) $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$

16) $a^2b^2c^2 - a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2$

17) $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$

18) $25x^7 - 10x^5 - 5x^2$

19) $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$

20) $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 -$

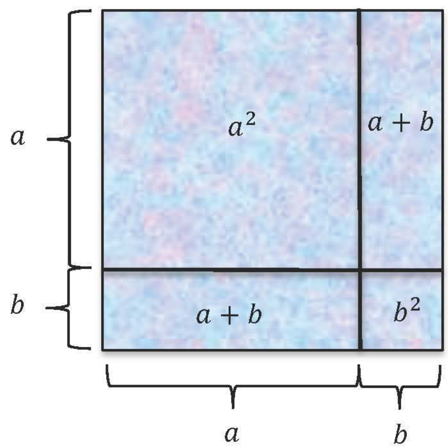
$+200abc^2$

5. 2 Cuadrado de un binomio

Definimos anteriormente un binomio como aquella expresión algebraica que consta de dos términos. Entonces elevar un binomio al cuadrado es multiplicar el binomo por sí mismo.

Ejemplo: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

Graficamente tenemos:



Podemos escribir una regla que nos permita recordar siempre que el cuadrado de un binomio es:

El cuadrado del primero
El doble producto del primero por el segundo
El cuadrado del segundo

Recuerde que los signos del primero y del tercer términos siempre serán positivos. El signo del segundo término depende del signo del segundo monomio.

Ejemplo:

a) Encuentre $(x+3)^2$

Aplicando la regla anterior, tendríamos que:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2$$

realizando las operaciones indicadas llegamos a

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

b) Obtenga $(h-5)^2$

Aplicando la regla anterior, tendríamos que:

$$(h-5)^2 = h^2 - 2(h)(5) + 5^2$$

realizando las operaciones indicadas llegamos a

$$(h-5)^2 = h^2 - 10h + 25$$

Observe que en éste trinomio el signo del término central es negativo, ya que el segundo término del binomio era negativo.

II. Efectúe los productos indicados.

1) $(x+y)^2$

2) $(5+g)^2$

3) $(a-7)^2$

4) $(d+k)^2$

5) $(t-9)^2$

6) $(6-p)^2$

7) $(x-y)^2$

8) $(ab+1)^2$

9) $(2q-10)^2$

10) $(7+3k)^2$

11) $(2x^2+3)^2$

12) $(f^7-5)^2$

13) $(r^4+6t^3)^2$

14) $\left(10-a^{1/2}\right)^2$

15) $\left(6g^{1/4}+4h^8\right)^2$

16) $(12w^8-10z^4)^2$

17) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)^2$

18) $\left(\frac{2g}{9}-\frac{1}{8}\right)^2$

19) $\left(\frac{a}{4}-\frac{5}{b}\right)^2$

20) $\left(\frac{2w^2}{5}+\frac{3y^3}{z^4}\right)^2$

5. 3 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Cuando elevamos un binomio al cuadrado obtenemos como resultado un trinomio cuadrado perfecto, entonces el factorizar un trinomio cuadrado perfecto es en efecto, el proceso inverso de elevar un binomio al cuadrado, es decir, ahora tendremos un trinomio y lo primero que debemos hacer es verificar que sea cuadrado perfecto, de esta forma al factorizarlo, solamente debemos escribir un binomio elevado al cuadrado.

¿Cómo saber si un trinomio es cuadrado perfecto?

Recordamos la regla para obtener un trinomio cuadrado perfecto

El cuadrado del primero

El doble producto del primero por el segundo

El cuadrado del segundo

Entonces si el trinomio que tenemos cumple con esta regla es un trinomio cuadrado perfecto. Recuerde que el primer y el tercer término deberán ser siempre positivos.

Por tanto, para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, ya que lo identificamos como tal, solamente debemos escribir el binomio que lo produce.

Obtenemos la raíz del primer término

El signo del segundo

La raíz del tercer término

Ejemplo: Factorice los siguientes trinomios

c) $x^2 + 26x + 169$

Primero identifico al trinomio:

- ¿El primer término está elevado al cuadrado? Sí porque es $x \cdot x = x^2$
- ¿El segundo término está escrito como el doble producto del primero por algún otro número? Sí porque 26 es el doble de 13 y además x es la incógnita del primer término.
- ¿El segundo término está elevado al cuadrado? Sí porque $13 \cdot 13 = 169$

Por tanto podemos concluir que se trata de un trinomio cuadrado perfecto, entonces seguimos las reglas para factorizarlo:

$$x^2 + 26x + 169 = (x + 13)^2$$

III. Realice las siguientes factorizaciones y compruebe sus resultados multiplicando.

1) $a^2 - 2ab + b^2$

2) $a^2 + 2ab + b^2$

3) $y^4 + 2y^2 + 1$

4) $a^2 - 10a + 25$

5) $w^2 + w + \frac{1}{4}$

6) $m^4 + 36 + 12m^2$

7) $1 - 2a^3 + a^6$

8) $a^8 + 18a^4 + 81$

9) $b^6 - 2b^3c^3 + c^6$

10) $4x^4 - 12xy + 9y^2$

11) $9b^2 - 30a^2b^2 + 25a^4$

12) $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$

13) $1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$

14) $g^4 - g^2h^2 + \frac{h^4}{4}$

15) $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$

16) $16j^6 - 2j^3k^2 + \frac{k^4}{16}$

17) $\frac{n^2}{9} + 2mn + 9m^2$

18) $-4p + 4 + p^2$

19) $q^2 - 7q + 9$

20) $r^2 + 16r + 64$

21) $900 + s^2 + 60s$

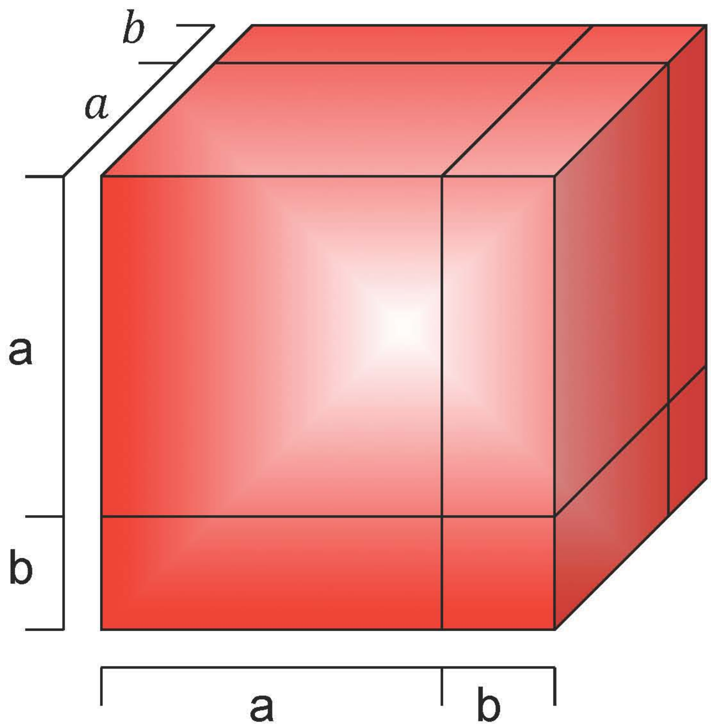
22) $t^2 - 22t + 121$

23) $u^8 + 14u^4 - 49$

24) $v^2w^2 + 2vw + 1$

25) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{25}$

5. 4 Cubo de un binomio. Factorización de un cubo perfecto



El cubo de un binomio se forma al multiplicar el binomio por si mismo en tres ocasiones, entonces para formar: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ debemos seguir las reglas de multiplicación de binomios o seguir la siguiente regla:

El cubo del primero

El triple del primero al cuadrado por el segundo

El triple del primero, por el segundo al cuadrado

El cubo del tercero

De ésta forma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo: Obtenga el desarrollo de $(a+2)^3 =$

$$= a^3 + 3a^2(2) + 3a(2)^2 + 2^3$$
$$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8$$

Ejemplo: Realice el desarrollo de $(a-3)^3 =$

$$= a^3 - 3a^2(3) + 3a(3)^2 - (3)^3$$
$$= a^3 - 9a^2 + 27a - 27$$

IV. Obtenga los siguientes desarrollos

1) $(a+2)^3$
2) $(y-4)^3$
3) $(g+5)^3$
4) $(h-1)^3$
5) $(a+b)^3$
6) $(2x+2)^3$
7) $(3w-1)^3$
8) $(2-b)^3$
9) $\left(f+\frac{1}{2}\right)^3$
10) $\left(\frac{1}{2}-f\right)^3$
11) $\left(2x+\frac{2}{3}\right)^3$
12) $(3k-4)^3$
13) $(2h-3j)^3$
14) $(5t-u)^3$
15) $(10x-11y)^3$
16) $\left(\frac{2}{3}c-\frac{1}{2}d\right)^3$
17) $(xy+w)^3$
18) $(2ab-1)^3$
19) $\left(\frac{1}{2}fg+4h\right)^3$
20) $\left(\frac{1}{2}wx-\frac{3}{5}yz\right)^3$

Factorización de cubos perfectos

Para factorizar un cubo perfecto, es decir, una expresión algebraica de la forma $a^3 \pm b^3$ debemos recordar las multiplicaciones directas de:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

Producen como resultados cubos perfectos, entonces para factorizarlos debemos seguir los modelos de las multiplicaciones expresadas anteriormente.

Ejemplo: Factorice $x^3 - 27$

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

Ejemplo: Factorice completamente $8y^3 + 1$

$$\begin{aligned} 8y^3 + 1 &= (2y + 1)((2y)^2 - (2y)(1) + (1)^2) \\ &= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1) \end{aligned}$$

V. Realice la factorización completa de los siguientes cubos perfectos

1) $x^3 - a^3$
2) $x^3 + a^3$
3) $8b^3 + 1$
4) $(x - a)^3 + b^3$
5) $x^6 - y^6$
6) $g^3 + 125$
7) $8t^3 - \frac{1}{8}$
8) $s^6 + \frac{8}{27}$
9) $z^9 + 1$
10) $216x^3y^3 - 1$
11) $1331a^6b^3 + 64c^3$
12) $\frac{1}{27}k^9 - \frac{27}{512}l^{12}$
13) $1000x^{15} - 1$
14) $\frac{1}{216}m^6 - \frac{8}{343}n^6$
15) $729 - 8x^9$

Para polinomios de grado mayor

Realizamos el mismo procedimiento que en los ejercicios anteriores, pero con:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Observación: Note que para $a^4 - b^4$ existen dos fórmulas que se pueden utilizar indistintamente, y no hay fórmula para $a^4 + b^4$

VI. Factorice completamente los siguientes polinomios de grado mayor.

16) $a^{10} - b^{10}$

17) $x^4 - 16$

18) $y^8 - 264$

19) $w^{15} + 243$

20) $a^5b^5 + 3125c^5$

5.5 Producto de dos binomios con un término común

Para multiplicar dos binomios con un término en común, se eleva al cuadrado la parte en común, se suman las partes diferentes y se les agrega como producto el término común, y finalmente se multiplican las partes diferentes.

Ejemplos: i) $(x-2)(x+4) = x^2 + (-2+4)x + (-2)(4) = x^2 + 2x - 8$

ii) $(2x+3)(2x+5) = (2x)^2 + (3+5)(2x) + (3)(5) = 4x^2 + 16x + 15$

iii) $\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{y^4}{4} - \frac{5y^2}{24} - \frac{1}{6}$

VII. Resuelva los siguientes ejercicios de acuerdo a las reglas mencionadas.

a. $(a+1)(a+2)$

b. $(b+2)(b+4)$

c. $(c+5)(c-2)$

d. $(d-6)(d-5)$

e. $(e+7)(e-3)$

f. $(f+2)(f-1)$

g. $(g-3)(g-1)$

h. $(h-5)(h+4)$

i. $(i-11)(i+10)$

j. $(j-19)(j+10)$

k. $(k^2+5)(k^2-9)$

l. $(l^5-2)(l^5+7)$

m. $(m^x-3)(m^x+8)$

n. $(2n+3)(2n-7)$

o. $(3p+6)(3p-4)$

p. $(4q-1)(4q+2)$

q. $\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{r}{2}-\frac{3}{4}\right)$

r. $\left(\frac{s}{5}-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{s}{5}-\frac{1}{2}\right)$

s. $\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{4}-\frac{3}{5}\right)$

t. $\left(\frac{2u}{3}-\frac{4}{v^2}\right)\left(\frac{3u}{4}-\frac{4}{v^2}\right)$

5.6 Descomposición en factores de un trinomio de segundo grado de la forma $x^2 + px + q$

Un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ en algunas ocasiones se descompone en dos factores binomiales cuyo primer término es x, es decir, la raíz cuadrada del primer término sin considerar su valor absoluto. En el primer factor, después de x se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.

Si los signos de p y q son iguales, entonces se buscan dos números cuya suma sea el coeficiente del término central de trinomio y cuyo producto sea el último término.

Si los signos de p y q son diferentes, entonces se buscan dos números cuya diferencia sea el coeficiente del término central del trinomio y cuyo producto sea el último término.

Ejemplos: i) $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

ii) $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

iii) $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

VIII. Factorice los siguientes trinomios

1) $x^2 + 7x + 10$
2) $x^2 - 5x + 6$
3) $x^2 + 3x - 10$
4) $x^2 + x - 2$
5) $a^2 + 4a + 3$
6) $m^2 + 5m - 14$
7) $y^2 - 9y + 20$
8) $x^2 - 6 - x$
9) $x^2 - 9x + 8$
10) $c^2 + 5c - 24$
11) $x^2 - 3x + 2$
12) $a^2 + 7a + 6$
13) $y^2 - 4y + 3$
14) $12 - 8n + n^2$
15) $x^2 + 10x + 21$
16) $a^2 + 7a - 18$
17) $m^2 - 12m + 11$
18) $x^2 - 7x - 30$
19) $n^2 - 6n - 16$
20) $20 + a^2 - 11a$
21) $y^2 + y - 30$
22) $28 + a^2 - 11a$
23) $n^2 - 6n - 40$
24) $x^2 - 5x - 36$
25) $a^2 - 2a - 35$
26) $x^2 + 14x + 13$
27) $a^2 - 2a + 35$
28) $x^2 - 14x + 13$
29) $c^2 - 13c - 14$
30) $x^2 + 15x + 54$
31) $a^2 + 7a - 60$
32) $x^2 - 17x - 60$
33) $x^2 - 15x + 56$
34) $x^2 + 8x - 180$
35) $m^2 - 20m - 300$
36) $x^2 + x - 132$
37) $m^2 - 2m - 168$
38) $c^2 + 24c + 135$
39) $m^2 - 41m + 400$
40) $a^2 + a - 380$

5.7 Producto de dos binomios conjugados. Descomposición en factores de una diferencia de cuadrados

Se llaman binomios conjugados a aquellos que son prácticamente iguales, salvo por un signo. Su producto se convierte en el cuadrado del primero y el segundo elementos siendo siempre los términos resultantes uno positivo y el otro negativo.

Ejemplos: i) $(x+2)(x-2)=x^2-4$

ii) $(2a^2+3)(2a^2-3)=4a^2-9$

iii) $\left(\frac{3}{w}+\frac{y^3}{7}\right)\left(\frac{3}{w}-\frac{y^3}{7}\right)=\frac{9}{w^2}-\frac{y^6}{49}$

IX. Realice los siguientes productos de binomios conjugados

1. $(a+2)(a-2)$
2. $(b+10)(b-10)$
3. $(c-4)(c+4)$
4. $(d+7)(d-7)$
5. $(e+9)(e-9)$
6. $(f^2+1)(f^2-1)$
7. $(g^3+2)(g^3-2)$
8. $(h^4+5)(h^4-5)$
9. $(2i+3)(2i-3)$
10. $(3j^2+11)(3j^2-11)$
11. $(4k^2+2l)(4k^2-2i)$
12. $(3m^3+4n^2)(3m^3-4n^2)$
13. $\left(\frac{7}{p}+2\right)\left(\frac{7}{p}-2\right)$
14. $\left(5-\frac{q^2}{3}\right)\left(5+\frac{q^2}{3}\right)$
15. $\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{s}\right)\left(-\frac{r}{2}+\frac{3}{s}\right)$
16. $\left(\frac{1}{t^2}+\frac{u^3}{2}\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{u^3}{2}\right)$
17. $\left(\frac{1}{3}v+4\right)\left(\frac{1}{3}v-4\right)$
18. $(2w^2x^3+3)(2w^2x^3-3)$
19. $(2y^a+1)(2y^a-1)$
20. $(3z^{x+1}+10a)(3z^{x+1}-10a)$

La descomposición en factores de los binomios conjugados consta de dos pares de paréntesis en los cuales se escribe exactamente lo mismo, salvo por un signo. Y cada término de la factorización, es la raíz cuadrada del binomio.

Ejemplos: i) $1-a^2=(1-a)(1+a)$

ii) $16x^2-25y^4=(4x-5y^2)(4x+5y^2)$

iii) $49x^2y^6z^{10}-a^{12}=(7xy^3z^5-a^6)(7xy^3z^5+a^6)$

iv) $\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}=\left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$

X. Factorice las siguientes diferencias de cuadrados

1. $x^2 - y^2$
2. $a^2 - 1$
3. $a^2 - 4$
4. $9 - b^2$
5. $1 - 4m^2$
6. $16 - n^2$
7. $a^2 - 25$
8. $25 - 36x^4$
9. $64 - 49a^2b^2$
10. $4x^2 - 81y^4$
11. $a^2b^8 - c^2$
12. $100 - x^2y^6$
13. $a^{10} - 49b^{12}$
14. $25x^2y^4 - 121$
15. $144m^4n^2 - 169x^8$
16. $a^2m^4n^6 - 100$
17. $4x^{2n} - \frac{4}{16}$
18. $a^{6n} - 225b^8$
19. $25x^{2m} - \frac{y^{4n}}{64}$
20. $\frac{49a^{10x}}{9b^{4m}} - \frac{25c^{6y}}{81d^{6n}}$

5.8 Factorización por agrupación de términos

Para este tipo de factorización se requiere observar aquellos términos que tengan algo en común y asociarlos en pares o de tres en tres o como convenga. Se realiza el mismo procedimiento con aquellos términos que aún no estén asociados, y finalmente (en la mayoría de los casos) se podrán reescribir agrupándolos en dos paréntesis que se multiplican.

Ejemplo: i) $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (x + y)(a + b)$

ii) $3m^2 - 6mn + 4m - 8n = 3m(m - 2n) + 4(m - 2n) = (3m + 4)(m - 2n)$

iii) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y = x(2x - 3y) - 2(x - 3y) = (x - 2)(2x - 3y)$

XI. Realice las siguientes factorizaciones

1) $a^2 + ab + ax + bx$

2) $am - bm + an - bn$

3) $ax - 2bx - 2ay + 4by$

4) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$

5) $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$

6) $x^2 - a^2 + x - a^2x$

7) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

8) $x + x^2 - xy^2 - y^2$

9) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$

10) $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

11) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

12) $6ax + 3a + 1 + 2x$

13) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$

14) $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$

15) $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$

16) $6m - 9n + 21nx - 14mx$

17) $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$

18) $1 + a + 3ab + 3b$

19) $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$

5.9 Descomposición en factores de la suma o diferencia de dos potencias iguales

De acuerdo al Teorema del Residuo (que analizaremos en el capítulo 6) podemos establecer que:

$a^n - b^n$ es divisible entre $a - b$ siendo n par o impar
$a^n - b^n$ es divisible entre $a + b$ cuando n es par
$a^n + b^n$ es divisible entre $a + b$ siendo n impar
$a^n + b^n$ nunca es divisible entre $a + b$ ni entre $a - b$ cuando n es un número par

Ejemplos: i) Factorice $m^5 + n^5$

Dividiendo entre $m + n$ tenemos:

$$\frac{m^5 + n^5}{m + n} = m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$$

Entonces $m^5 + n^5 = (m + n)(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$

ii) Factorice $x^5 + 32$

Dividiendo entre $x + 2$ tenemos: $\frac{x^5+32}{x+2} = x^4 - x^3(2) + x^2(2)^2 - x(2)^3 + (2)^4$

Entonces $x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

iii) Factorice $x^7 - 1$

Dividiendo entre $x - 1$ tenemos: $\frac{x^7-1}{x-1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Entonces: $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

XII. Factorice las siguientes expresiones

1. $a^5 + 1$
2. $a^5 - 1$
3. $a^7 + b^7$
4. $g^5 + 243$
5. $x^7 + 128$
6. $243 - 32b^5$
7. $h^5 + j^5k^5$
8. $1 + x^7$
9. $m^7 + 2187$
10. $x^{10} + 32y^5$

5.10 Mínimo Común Múltiplo de dos o más polinomios

El Mínimo Común Múltiplo de monomios consiste en obtener el MCM de los coeficientes, posteriormente se eligen aquellas variables que cuenten con el exponente mayor, así MCM de $4x^4y^3z$ y de $3xy^2z^3$ es el mínimo común múltiplo de 4 y 3, es decir, 12 y las variables con sus respectivos exponentes, de mayor valor. De ésta forma el MCM de $4x^4y^3z$ y de $3xy^2z^3$ es $12x^4y^3z^3$

Hallar el MCM de $15x^2, 10x^2 + 5x,\ 45x^3$

Si observamos bien los términos, notaremos que el primero es un factor del último término $45x^3 = 3x(15x^2)$ entonces podemos trabajar con el segundo y el tercer término.

Factorizamos el segundo término: $10x^2 + 5x = 5x(2x + 1)$

Obtenemos los factores primos del tercer término $45x^3 = 3^2 \cdot 5 \cdot x^3$

Ahora seleccionamos los coeficientes y variables de exponente mayor, así como los factores no comunes.

$3^2 \cdot 5x^3(2x + 1)$, de donde, la respuesta es: $45x^3(2x + 1)$

XIII. Obtenga el Mínimo Común Múltiplo de los siguientes polinomios.

1) $2a, 4x - 8$
2) $x^2y,\ x^2y + xy^2$
3) $6a^2b, 3a^2b^2 + 6ab^3$
4) $9m,\ 6mn^2 - 12mn$
5) $10{,}5 - 15b$
6) $12xy^2,\ 2ax^2y^3 + 5x^2y^3$
7) $2a^2,\ 6ab,\ 3a^2 - 6ab$
8) $9a^2,\ 18b^3,\ 27a^4b + 81a^3b^2$
9) $4x,\ x^3 + x^2 - 2x, x^2 + 4x + 4$
10) $2a^2b^2, 3ax + 3a. 6x - 18$
11) $6ab, x^2 - 4xy + 4y^2, 9a^2x - 18a^2y$
12) $a^2x^2, 4x^3 - 12x^2y + 9xy^2, 2x^4 - 3x^3y$
13) $an^3, 2n, n^2x^2 + n^2y^2, nx^2 + 2nxy + ny^2$
14) $3x + 3, 6x - 6$
15) $x^3 + 2x^2y, x^2 - 4y^2$
16) $4a^2 - 9b^2, 4a^2 - 12ab + 9b^2$
17) $3ax + 12a, 2bx^2 + 6bx - 8b$
18) $(x - 1)^2, x^2 - 1$
19) $x^3 + y^3, (x + y)^3$
20) $2a^2 + 2a, 3a^2 - 3a, a^4 - a^2$

5.11 Otras factorizaciones

- Polinomios tipo $ax^2 + bx + c$

Para un polinomio del tipo $ax^2 + bx + c$ con $c \neq 0$, intentaremos que el término central bx sea descompuesto como la suma de dos números, que renombraremos como r y s, tales que: $\begin{matrix} r + s = b \\ r \cdot s = a \cdot c \end{matrix}$ y sustituimos en la ecuación, para posteriormente factorizar por agrupación de términos.

i. Factorice: $5x^2 - 14x - 3$

Entonces: $r \cdot s = 5(-3) = -15$ y $r + s = -14$ por lo tanto, los números que cumplen dichas condiciones son $r = -15$ y $s = 1$. Y ya podemos reescribir el trinomio original, con estos coeficientes reemplazando el valor de b.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 14x - 3 &= 5x^2 - 15x + 1x - 3 \\ &= 5x(x - 3) + x - 3 \\ &= (5x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

ii.Factorice: $2x^2 + 3x - 2$

Entonces $r \cdot s = 2(-2) = -4$ y $r + s = 3$ por lo tanto, los números que cumplen dichas condiciones son $r = 4$ y $s = -1$. Con estos coeficientes reescribimos la ecuación original, factorizamos y agrupamos términos semejantes.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 2x^2 + 4x - 1x - 2 \\ &= 2x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

XIV. Factorice los siguientes trinomios.

1) $3x^2 - 13x + 4$
2) $6a^2 - 20a - 16$
3) $9x^2 - 11x + 2$
4) $14y^2 - 19y - 3$
5) $-6h^2 - 26h - 8$
6) $4j^2 - 8j - 5$
7) $24k^2 + 22k - 35$
8) $3 + 11m - 20m^2$
9) $2n^2 - 17n + 21$
10) $3p^2 - 5p - 2$
11) $12q^2 - 13q - 35$
12) $20r^2 - 7r - 40$
13) $7s^2 - 33s - 10$
14) $5t^2 + 13t - 6$
15) $20u^2 - 9u - 20$
16) $30v^2 + 13v - 10$
17) $12w^2 - w - 6$
18) $15x^2 - 8x - 12$
19) $14y^2 - 45y - 14$
20) $12z^2 - 7z - 10$

5.12 Fórmula del binomio de Newton

La fórmula del binomio de Newton sirve para encontrar las variables con sus respectivos exponentes, cuando elevamos un binomio a cualquier potencia grande.

Fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n$$

Observaciones:

- Para el desarrollo de $(a+b)^n$ se obtienen $n+1$ términos.
- En cada término del desarrollo, la suma de los exponentes debe ser igual a n.
- Los exponentes son simétricos, mientras el de a disminuye, el de b aumenta.

Triángulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Observaciones:

- Todos los renglones comienzan y terminan con 1.
- El segundo número de cada renglón, coincide con la potencia del desarrollo.
- El triángulo es simétrico.
- Los coeficientes del binomio se obtienen al sumar del renglón superior aquellos dos que estén a la izquierda y a la derecha del valor que se desea obtener.

i. Obtenga el desarrollo de $(x+y)^8$

Utilizando la fórmula del binomio de Newton para $n=8$ y el triángulo de Pascal con el renglón donde el segundo número es 8, obtenemos:

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$$

ii. Obtenga el desarrollo de $(a-2)^5$

Cuando uno de los términos del binomio es negativo, los signos de los términos se alternan. Escribiré el desarrollo indicando las operaciones, y posteriormente, se harán las multiplicaciones correspondientes para llegar al resultado deseado.

$$\begin{aligned}(a-2)^5 &= a^5 - 5a^4(2) + 10a^3(2)^2 - 10a^2(2)^3 + 5a(2)^4 - (2)^5 \\ &= a^5 - 10a^4 + 40a^3 - 80a^2 + 80a - 32\end{aligned}$$

XV. Obtenga el desarrollo completo de los siguientes binomios

1) $(a-3)^7$

2) $(2b+1)^6$

3) $(5-c)^9$

4) $(4d+2e)^8$

5) $\left(\frac{1}{2}-f\right)^{10}$

6) $\left(\frac{g}{2}+\frac{3}{h}\right)^5$

7) $\left(\frac{1}{x^2}-y^2\right)^{11}$

CAPÍTULO 6: OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS Y RADICALES

6.1 Teoremas del residuo y del factor.

División sintética

Una forma más práctica de realizar una división entre un binomio y un polinomio, es la división sintética. En este método únicamente utilizamos los coeficientes en un acomodo entre columnas y realizamos las operaciones correspondientes.

i. Realice la división de $(2x^3 + 8x^2 + 15x + 9) \div (x + 1)$

- Se toma el número opuesto del término independiente del divisor, en este caso usaremos -1. Obtenido de $x + 1 = 0$.
- Acomodamos los coeficientes del dividendo.
- Bajamos intacto el primer coeficiente.
- Multiplicamos ese número por el opuesto el término independiente del divisor, y se coloca en la columna derecha debajo del coeficiente de segundo orden.
- Se realiza la suma correspondiente para obtener un nuevo resultado y se vuelve a multiplicar, y así sucesivamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 8 & 15 & 9 \\ -1 & \downarrow & -2 & -6 & -9 \\ \hline & 2 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

El último número es el residuo de la división. Los demás números, son los que formarán el cociente. Por tanto $(2x^3 + 8x^2 + 15x + 9) \div (x + 1) = 2x^2 + 6x + 9$

ii. Divida $(x^4 + 7x + 5) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -1 & 7 \end{array}$$

Cuando el residuo es diferente de cero, expresamos el resultado como una fracción en la que el numerador es el valor obtenido y el denominador es el divisor. De esta forma:

$$(x^4 + 7x + 5) \div (x + 2) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1 + \boxed{\frac{7}{x+2}}$$

I. Utilice la división sintética para encontrar el cociente y el residuo de los siguientes polinomios.

1) $(5x^2 - 7x) \div (x - 3)$
2) $(4x^3 - 4x^2 + 4x - 9) \div (x - 4)$
3) $(8x^5 - 6x^3 + x - 8) \div (x + 2)$
4) $(x^4 + 5x) \div (x + 5)$
5) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 4) \div (x + 2)$
6) $(9x^3 - 15x^2 + 4x) \div (x - 3)$
7) $(y^3 + 1) \div (y + 1)$
8) $(3x^3 + 7x^2 - 13x + 10) \div (x + 2)$
9) $(x^3 + 6x^2 - x - 30) \div (x - 2)$
10) $(x^3 - 27) \div (x - 3)$

Teorema del Residuo

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera y a un número real. De la división de $P(x)$ entre $x-a$ obtiene la descomposición $P(x)=Q(x)(x-a)+R$ donde $Q(x)$ es el cociente y R es el residuo. Si $x=a$ entonces $P(a)=R$, por lo tanto

El valor de $P(a)$ es el residuo obtenido al dividir $P(x)$ entre $x-a$

iii. Sin efectuar la división, calcule el residuo de $(x^3-2x^2+2x+5)\div(x-1)$

Al igual que en la división sintética, tomamos el signo opuesto del término independiente del divisor. Lo sustituimos en el dividendo y realizamos las operaciones indicadas.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3-2(1)^2+2(1)+5 \\ &= 1-2+2+5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por tanto, el residuo es 6

iv. Sin efectuar la división, calcule el residuo de $(2x^3+7x^2-3)\div(x+3)$

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2(-3)^3+7(-3)^2-3 \\ &= 2(-27)+7(9)-3 \\ &= -54+63-3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

II. Sin efectuar la división, calcule el residuo de las siguientes divisiones.

1) $(x^2-2x+3)\div(x-1)$
2) $(x^3-3x^2+2x-2)\div(x+1)$
3) $(x^4-x^3+5)\div(x-2)$
4) $(a^4-5a^3+2a^2-6)\div(a+3)$
5) $(m^4+m^3-m^2+5)\div(m-4)$
6) $(x^5+3x^4-2x^3+4x^2-2x+2)\div(x+3)$
7) $(a^5-2a^3+2a-4)\div(a-5)$
8) $(6x^3+x^2+3x+5)\div(2x+1)$
9) $(n^4-5n^3+4n-48)\div(n+2)$
10) $(x^4-3x+5)\div(x-1)$
11) $(x^5+x^4-12x^3-x^2-4x-2)\div(x+4)$
12) $(a^5-3a^3+4a-6)\div(a-2)$
13) $(x^5-208x^2+2076)\div(x-5)$
14) $(x^6-3x^5+4x^4-3x^3-x^2+2)\div(x+3)$
15) $\left(x^6-x^4+\frac{15}{8}x^3+x^2-1\right)\div(2x+3)$

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera y a un número real, entonces $(x-a)$ es factor de $P(x)$ si, y sólo si $P(a)=0$

v. Determine si $x+2$ es un factor de $P(x)=x^5-4x^3+5x^2+4x-12$

De $x+2=0$ obtenemos $x=-2$ y evaluaremos en 2.

$$
\begin{aligned}
P(-2) &= (-2)^5-4(-2)^3+5(-2)^2+4(-2)-12\\
&= -32-4(-8)+5(4)+4(-2)-12\\
&= -32+32+20-8-12\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Como **el residuo es cero**, entonces podemos concluir que $x+2$ **sí es un factor** de $P(x)=x^5-4x^3+5x^2+4x-12$

vi. Determine si $x-3$ es un factor de $x^3-7x^2+17x-6$

De $x-3=0$ obtenemos $x=3$ y evaluamos en el polinomio:

$$
\begin{aligned}
P(3) &= (3)^3-7(3)^2+17(3)-6\\
&= 27-63+51-6\\
&= 9
\end{aligned}
$$

Dado que el **residuo es diferente de cero**, solamente podemos decir que:
$x-3$ **no es factor** de $x^3-7x^2+17x-6$

III. Determine si el binomio de la forma $x-a$ e factor del polinomio $P(x)$ dado.

1) $a+1;\quad a^3-2a^2+2a+5$
2) $x-5;\quad x^5-6x^4+6x^3-5x^2+2x-10$
3) $4x-3;\quad 4x^4-7x^3+7x^2-7x+3$
4) $3n+2;\quad 3n^5+2n^4-3n^3-2n^2+6n+7$
5) $a+2;\quad 2a^3-2a^2-4a+16$
6) $a+1;\quad a^4-a^2+2a+2$
7) $x-1;\quad x^4+5x-6$
8) $x-6;\quad x^6-39x^4+26x^3-52x^2+29x-30$
9) $x-4;\quad x^6-4x^5-x^4+4x^3+x^2-8x+25$
10) $4x-1;\quad 16x^4-24x^3+37x^2-24x+4$
11) $3a+5;\quad 15a^5+25a^4-18a^3-18a^2+17a-11$
12) $2x-1;\quad 2x^3-3x^2+7x-5$
13) $3x+2;\quad 3x^3-4x^2+5x+6$
14) $3x-1;\quad 3x^4-4x^3+4x^2-10x+8$
15) $5x-2;\quad 5x^4-12x^3+9x^2-22x+21$

6.2 Operaciones con fracciones algebraicas.

Las fracciones algebraicas se deben ir simplificando paulatinamente, hasta llegar a expresiones que sean fáciles de expresar, ya sea como producto de binomios, o como una división de fracciones.

vii. Resuelva la siguiente fracción algebraica $\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{x}}{1+\frac{x+4}{x}}$

$$\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{x}}{1+\frac{x+4}{x}}=\frac{\frac{x^2-4}{4x}}{\frac{x+x+4}{x}}$$

Factor común.

Reescribir 1 como $\frac{x}{x}$

Reducir términos semejantes

$$=\frac{\frac{x^2-4}{4x}}{\frac{2x+4}{x}}$$

Realizar la división de fracciones

$$=\frac{x(x^2-4)}{4x(2(x+2))}$$

Factorizar

$$=\frac{x(x+2)(x-2)}{8x(x+2)}$$

$$=\frac{x-2}{8}$$

viii. Determine un valor equivalente de la siguiente fracción algebraica $\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+1}}}$

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x+1}}}=\frac{1}{x+\frac{1}{x\left(\frac{x+1}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}}}=\frac{1}{x+\frac{1}{\frac{x^2+x+1}{x+1}}}=\frac{1}{x+\frac{x+1}{x^2+x+1}}$$

Multiplica por 1

Reduce términos

$$=\frac{1}{x\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}\right)+\frac{x+1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{\frac{x^3+x^2+x+x+1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{\frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+2x+1}$$

IV. Realice los siguientes ejercicios:

1) $\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{2a}}{a+\frac{a}{2}}$

2) $\dfrac{3-\frac{1}{y}}{2-\frac{1}{y}}$

3) $\dfrac{\frac{1}{m}+\frac{9}{m^2}}{2+\frac{1}{m^2}}$

4) $\dfrac{1+\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-1}}$

5) $\dfrac{\frac{2}{x-1}+2}{\frac{2}{x+1}-2}$

6) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}}{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}}$

7) $\dfrac{\frac{5}{5-x}+\frac{6}{x-5}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x-5}}$

8) $\dfrac{\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{3}{m-1}}{\frac{6}{m-1}}$

9) $\dfrac{\frac{2}{x^2+x-20}+\frac{3}{x^2-6x+8}}{\frac{2}{x^2+3x-10}+\frac{3}{x^2+2x-24}}$

10) $\dfrac{\frac{n}{n-4}-\frac{3}{n+3}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n-4}}$

11) $\dfrac{2+x-\frac{3}{x-1}}{\frac{2}{x-1}+x-1}$

12) $\dfrac{k-\frac{1}{1+\frac{1}{k}}}{k+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}$

13) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

14) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

15) $1-\dfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{x}{3}-1}}$

16) $x+\dfrac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{x+1}}}$

17) $w+\dfrac{1}{w+\frac{1}{w+\frac{1}{w+\frac{1}{2w}}}}$

18) $\dfrac{2}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{x}}}$

19) $\dfrac{1}{x-\frac{x}{x-\frac{x^2}{x+1}}}$

20) $\dfrac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}$

6.3 Radicales.

Propiedades:

i. $\sqrt[2]{a^2} = |a|$

ii. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

iii. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

iv. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

v. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Donde n y m son números enteros positivos

Si n es par, entonces estas propiedades se cumplen cuando a y b son números reales positivos. Y se pueden utilizar indistintamente, dependiendo del propósito para el que se usen.

Simplificación de radicales

Utilizando las propiedades anteriores, podemos hacer expresiones más maniobrables con radicales y más fáciles de entender.

ix. Simplifique

a. $\sqrt[15]{(2h)^5} = (2h)^{\frac{5}{15}} = (2h)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2h}$

b. $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20} = (a^2b^3c)^{\frac{20}{4}} = (a^2b^3c)^5 = a^{10}b^{15}c^5$

c. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}}} = \sqrt[12]{a^{24}} = a^{\frac{24}{12}} = a^2$

d. $5\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5\sqrt{4}\sqrt{6} + \sqrt{9}\sqrt{6} = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 3\sqrt{6} =$

$10\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$

e. $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 - 4\sqrt[3]{3}$

f. $\sqrt{6x^3}\sqrt{8x^6} = \sqrt{6x^3 \cdot 8x^6} = \sqrt{48x^9} = \sqrt{16x^8}\sqrt{3x} = 4x^4\sqrt{3x}$

g. $\sqrt{3x^2 - 30x + 75} = \sqrt{3(x^2 - 10x + 25)} = \sqrt{3(x-5)^2} = \sqrt{3}|x-5|$

V. Simplifique los siguientes radicales

1) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5$
2) $2\sqrt[4]{y} - 11\sqrt[4]{y}$
3) $5\sqrt{x} - 8\sqrt{y} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x}$
4) $\sqrt{75} + \sqrt{108}$
5) $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{20x} - 4\sqrt{45x}$
6) $3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
7) $2\sqrt[3]{a^4b^2} + 4a\sqrt[3]{ab^2}$
8) $x\sqrt[3]{27x^5y^2} - x^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 4\sqrt[3]{x^8y^2}$
9) $\sqrt{3}\sqrt{27}$
10) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{54}$
11) $\sqrt[3]{9x^7y^{10}}\sqrt[3]{6x^4y^3}$
12) $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
13) $\sqrt{9m^3n^7}\sqrt{3mn^4}$
14) $\sqrt[4]{3x^9y^{12}}\sqrt[4]{54x^4y^7}$
15) $\left(\sqrt[3]{2x^3y^4}\right)^2$

Racionalización.

La racionalización de expresiones con radicales significa quitar las raíces del denominador, es decir, reescribirlas de forma que en caso de haber radicales, ninguno de ellos esté en el denominador, para emplearlas de manera más sencilla.

x. Racionalice la expresión: $\sqrt{\frac{6}{7}}$

$$\sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Propiedad iii.

Multiplicar por 1

Reducir

El paso importante en la racionalización surge de multiplicar por 1, el 1 que convenga a cada expresión y que será conformado por el denominador de lo que se desee racionalizar, escrito arriba y abajo, para que su división sea 1.

xi. Racionalice $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b}$$

Recuerda que todo binomio al cuadrado, es un TCP

El 1 que necesitamos es el cociente del conjugado del denominador entre él mismo

VI. Racionalice las siguientes expresiones.

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{6}{\sqrt{6}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{z}}$

4) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

5) $\frac{15x}{\sqrt{x}}$

6) $\sqrt{\frac{5m}{8}}$

7) $\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{y^3}}$

8) $\frac{2n}{\sqrt{18n}}$

9) $\sqrt{\frac{120x}{4y^3}}$

10) $\sqrt{\frac{18x^4y^3}{2z^3}}$

11) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$

12) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

13) $\frac{3}{6+\sqrt{x}}$

14) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{a}-3}$

15) $\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$

16) $\frac{\sqrt{8x}}{x+\sqrt{y}}$

17) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$

18) $\frac{\sqrt{c}-\sqrt{2d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$

19) $\frac{2\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

20) $\frac{4}{\sqrt{x+2}-3}$

21) $\frac{8}{\sqrt{y-3}+6}$

22) $\frac{y}{\sqrt{2}x+\sqrt{x}}$

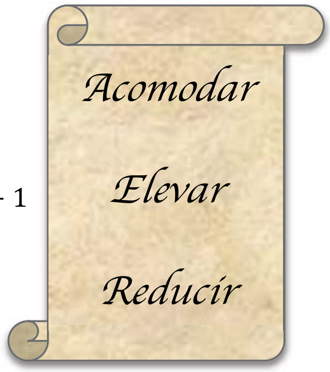
23) $\frac{2a}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}$

24) $\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{a+2}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+2}}$

25) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

Ecuaciones con radicales

xii. Resuelva la ecuación: $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$



$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2-15} &= 2x-1\\
\left(\sqrt{4x^2-15}\right)^2 &= (2x-1)^2\\
4x^2-15 &= 4x^2-4x+1\\
4x^2-4x^2+4x &= 1+15\\
4x &= 16\\
x &= 4
\end{aligned}$$

xiii. Resuelva la ecuación: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= 5-\sqrt{x-1}\\
\left(\sqrt{x+4}\right)^2 &= \left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\\
x+4 &= 5^2-2(5)\left(\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{x-1}\right)^2\\
x+4 &= 25-10\sqrt{x-1}+x-1\\
x-x+4-25+1 &= -10\sqrt{x-1}\\
-20 &= -10\sqrt{x-1}\\
2 &= \sqrt{x-1}\\
2^2 &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2\\
4 &= x-1\\
x &= 5
\end{aligned}$$

El procedimiento es el mismo que en el ejemplo anterior, pero al tener 2 raíces, se debe elevar al cuadrado en 2 ocasiones, hasta obtener una expresión sencilla.

xiv. Resuelva la ecuación: $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

$$\left(\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)-\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}-(x-1)=2$$

$$\sqrt{x^2+3x-4}=x+1$$

$$\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)^2 = (x+1)^2$$

$$x^2+3x-4 = x^2+2x+1$$

$$x^2-x^2+3x-2x = 1+4$$

$$x = 5$$

Nuevamente, al tener más de una raíz, debemos elevar al cuadrado en 2 ocasiones, en 3 o las que sean necesarias hasta despejar la variable.

VII. Resuelva las siguientes ecuaciones

1) $\sqrt{x-8} = 2$

2) $5-\sqrt{3x+1} = 0$

3) $7+\sqrt{5x-2} = 9$

4) $\sqrt{9x^2-5}-3x = -1$

5) $\sqrt{x^2-2x+1} = 9-x$

6) $15-\sqrt{7x-1} = 12$

7) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7} = 7$

8) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x-14} = 9$

9) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19} = -1$

10) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29}$

11) $\sqrt{5x-19}-\sqrt{5x} = 1$

12) $\sqrt{9x-14} = 3\sqrt{x+10}-4$

13) $\sqrt{x-16}-\sqrt{x+8} = -4$

14) $\sqrt{5x-1}+3 = \sqrt{5x+26}$

15) $13-\sqrt{13+4x} = 2\sqrt{x}$

16) $\sqrt{x-2}+5 = \sqrt{x+53}$

17) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1}$

18) $\sqrt{9x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{16x-7} = 0$

19) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5} = \frac{10}{\sqrt{x}}$

20) $\sqrt{4x-11}+2\sqrt{x} = \frac{55}{\sqrt{4x-11}}$

21) $\sqrt{x}-\sqrt{x-7} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

22) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+13}$

23) $\frac{6}{\sqrt{x+8}} = \sqrt{x+8}-\sqrt{x}$

24) $\sqrt{x+3}+\frac{8}{\sqrt{x+9}} = \sqrt{x+9}$

25) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-1}$

CAPÍTULO 7: ECUACIONES Y DESIGUALDADES

7.1 Ecuaciones de primer grado en una variable.

Definición: una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las incógnitas se representan con letras del abecedario.

Definición: una identidad es una igualdad que se verifica para cualesquiera de los valores de las letras que intervienen en su expresión. El signo de identidad es $\equiv$ y se lee: idéntico a.

Axioma fundamental de las ecuaciones:

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, los resultados serán iguales

i. Obtenga la raíz de la siguiente ecuación: $35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$

Observación: se llama raíz o solución de una ecuación, al número que hace cierta la expresión, es decir, obtener el resultado.

$$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$$

$$30x - 22x - 18x = 14 + 32 - 35 - 6$$

$$-10\mathrm{x} = 5$$

$$\mathrm{x} = \frac{5}{-10}$$

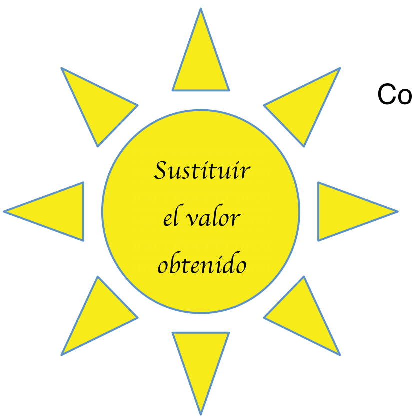
$$\mathrm{x} = -\tfrac{1}{2}$$

Comprobación: $35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$

$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$

$$61 \equiv 61$$



ii. Obtenga la raíz de la ecuación: $4x-(2x+3)(3x-5)=49-(6x-1)(x-2)$

$$4x-(6x^2-x-15)=49-(6x^2-13x+2)$$

$$4x-6x^2+x+15=49-6x^2+13x-2$$

$$6x^2-6x^2+4x+x-13x=49-2-15$$

$$-8x=32$$

$$x=-4$$

Comprobación: $4(-4)-(2(-4)+3)(3(-4)-5)=49-(6(-4)-1)(-4-2)$

$$-16—(-5)(-17)=49—(-25)(-6)$$

$$-16-85=49-150$$

$$-101\equiv-101$$

iii. Resuelva la siguiente ecuación $3(2x+1)(-x+3)-(2x+5)^2$

$$3(2x+1)(-x+3)-(2x+5)^2=-[-\{-3(x+5)\}+10x^2]$$

$$3(-2x^2+5x+3)-(4x^2+20x+25)=-[-\{-3x-15\}+10x^2]$$

$$-6x^2+15x+9-4x^2-20x-25=-[3x+15+10x^2]$$

$$-10x^2-5x-16=-3x-15-10x^2$$

$$10x^2-10x^2-5x+3x=16-15$$

$$-2x=1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Comprobación:

$$3\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)-\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+5\right)^2=-\left[-\left\{-3\left(-\frac{1}{2}+5\right)\right\}+10\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$3(-1+1)\left(\frac{7}{2}\right)-(-1+5)^2=-\left[-\left\{-3\left(\frac{9}{2}\right)\right\}+10\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$3(0)\left(\frac{7}{2}\right)-(16)=-\left[-\left\{-\frac{27}{2}\right\}+\frac{10}{4}\right]$$

$$-16=-\left[\frac{27}{2}+\frac{5}{2}\right]$$

$$-16=-\frac{32}{2}$$

$$-16\equiv-16$$

I. Obtenga las raíces de las siguientes ecuaciones y realice las comprobaciones de cada una.

1) $9y - 11 = -10 + 12y$

2) $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$

3) $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$

4) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

5) $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$

6) $15x + (-6x + 5) - 2 - \left(- x + 3\right) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$

7) $16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [-(3x + 2) - (x + 3)]$

8) $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$

9) $-\{3x + 8 - [-15 + 6x - (-3x + 2) - (5x + 4)] - 29\} = -5$

10) $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$

11) $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$

12) $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5)$

13) $7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$

14) $3x(x - 3) + 5(x + 7) - x(x + 1) - 2(x^2 + 7) + 4 = 0$

15) $-3(2x + 7) + (-5x + 6) - 8(1 - 2x) - (x - 3) = 0$

16) $(3x - 4)(4x - 3) = (6x - 4)(2x - 5)$

17) $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 0$

18) $(3x - 7)^2 - 5(2x + 1)(x - 2) = x^2 - [-(3x + 1)]$

19) $6x - (2x + 1) = -\{-5x + [-(-2x - 1)]\}$

20) $2x + 3(-x^2 - 1) = -\{3x^2 + 2(x - 1) - 3(x + 2)\}$

7.2 Ecuación de segundo grado. Resolución de una ecuación de segundo grado.

Definición: una ecuación cuadrática con una incógnita en su forma canónica se define como $ax^2 + bx + c = 0$ donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación cuadrática tiene 2 raíces, las cuales pueden ser 2 números reales diferentes, el mismo número real o puede tener ambas raíces cuyos valores sean números imaginarios, en cuyo caso solamente escribiríamos que esa ecuación, no tiene solución en el campo de los reales; aunque sabemos que si existe la solución.

Factorización

Este método es el más práctico y fácil de desarrollar, siempre y cuando exista la factorización de la ecuación. Se factoriza el trinomio igualado a cero y se obtienen sus raíces al igualar cada factor a cero.

iv. Resuelva la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Factorizamos $(x-1)(x-2) = 0$

De $x - 1 = 0$ o de $x - 2 = 0$ tenemos las 2 respuestas que necesitamos

$\boldsymbol{x_1 = 1}$ y la otra raíz es $\boldsymbol{x_2 = 2}$

Comprobación: $x^2 - 3x + 2 = 0$ en la ecuación original sustituimos las raíces

Para $\boldsymbol{x_1 = 1}$

$$(1)^2 - 3(1) + 2 = 0$$
$$1 - 3 + 2 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

Para $\boldsymbol{x_2 = 2}$

$$(2)^2 - 3(2) + 2 = 0$$
$$4 - 6 + 2 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

v. Factorice para obtener las raíces de la ecuación: $x^2 - x - 12 = 0$

Factorizamos $(x-4)(x+3) = 0$ e igualamos cada producto a cero. Entonces de $x - 4 = 0$ y de $x + 3 = 0$ tenemos las raíces $\boldsymbol{x_1 = 4}$ y $\boldsymbol{x_2 = -3}$

Comprobación: en la ecuación original sustituimos ambos resultados

Para $\boldsymbol{x_1 = 4}$

$$(4)^2 - (4) - 12 = 0$$
$$16 - 4 - 12 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

Para $\boldsymbol{x_2 = -3}$

$$(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$$
$$9 + 3 - 12 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

vi. Obtenga las raíces de: $2(x+1)^2 - x = 4$

Primero debemos realizar las operaciones indicadas para tener un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resolverlo factorizando. Entonces

$$2(x^2 + 2x + 1) - x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 4x + 2 - x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 2) = 0$$

De $2x - 1 = 0$ tenemos $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}}$ y de $x + 2 = 0$ obtenemos $\boldsymbol{x_2 = -2}$

Comprobación:

Para $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}}$

$$2\left(\frac{1}{2}+1\right)^2 - \frac{1}{2} = 4$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 4$$

$$2\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{1}{2} = 4$$

$$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$4 = 4$$

Para $\boldsymbol{x_2 = -2}$

$$2\left((-2)+1\right)^2 - (-2) = 4$$

$$2(-1)^2 + 2 = 4$$

$$2(1) + 2 = 4$$

$$2 + 2 = 4$$

$$4 \equiv 4$$

II. Obtenga las raíces de las siguientes ecuaciones, por el método de factorización.

1) $3y^2 + 2y - 1 = 0$
2) $6z^2 + z - 2 = 0$
3) $(x-2)^2 + 2 = x$
4) $2(x+1)^2 - 4 = x(x+3)$
5) $(x-3)(x+2) = 6$
6) $(y-1)^2 - 3(y+1) = 4$
7) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x-2}{x+1} = 1$
8) $\frac{3x-5}{x+1} = \frac{2(x+4)}{2x-3}$
9) $x^2 - 2x - 1 = 0$
10) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
11) $x^2 - 4 = 0$
12) $x^2 + 3x - 10 = 0$
13) $x(x-2) = 15$
14) $x^2 - 12 = x$
15) $9y^2 = 25$
16) $4y^2 + 4y + 1 = 0$
17) $25x^2 + 4 = 20x$
18) $(z-4)^2 = -25$
19) $4x^2 - 8x = 0$
20) $x^2 - 19 = -7x^2 - 3$
21) $7x^2 - 10 = x^2 - 4$
22) $x^2 + 12x + 20 = 0$
23) $x^2 - 3x = 18$
24) $x^2 - 9x + 20 = 0$
25) $7x^2 - 35x - 42 = 0$

Completar el cuadrado

Como ya vimos, una ecuación de segundo grado en su forma canónica es del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ y las ecuaciones de segundo grado no siempre pueden factorizarse, por ejemplo $x^2 - 6x + 3 = 0$ ya que no existen números enteros tales que al multiplicarse den como resultado 3 y al sumarse -6. Entonces debemos emplear otro método que nos sirva para ecuaciones de este tipo.

El método de completar cuadrados funciona para cualquier ecuación y surge de la ecuación canónica $ax^2 + bx + c = 0$ en la que utilizaremos los términos que contengan a la variable para formar un trinomio cuadrado perfecto. El término c debe ir del otro lado de la igualdad y se complementará con ***"lo que le falte"*** para ser un trinomio cuadrado perfecto.

"Lo que le falte" para ser un trinomio cuadrado perfecto se obtiene al dividir entre 2 al coeficiente b y elevarlo al cuadrado, entonces por contrucción tenemos un trinomio cuadrado perfecto. Pero no debemos olvidar, que el término $+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ que acabamos de sumar de un lado, debemos sumarlo del otro lado también, para no afectar nuestra ecuación original. El proceso sigue al factorizar, despejar la variable y reducir términos semejantes.

vii. Resuelva la ecuación: $x^2 - 6x + 3 = 0$

Ordenar

$$x^2 - 6x = -3$$

$+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ de ambos lados

$$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

Factorizar

$$(x-3)^2 = -3 + 9$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{6}$$

$$|x-3| = \sqrt{6}$$

Despejar

$$x - 3 = \pm\sqrt{6}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 3 + \sqrt{6}} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{x_2 = 3 - \sqrt{6}}$$

Comprobación:

Para $\boldsymbol{x_1 = 3 + \sqrt{6}}$

$$\left(3+\sqrt{6}\right)^2 - 6\left(3+\sqrt{6}\right) + 3 = 0$$

$$\left(3^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{6} + \sqrt{6}^2\right) - 6\cdot 3 - 6\cdot\sqrt{6} + 3 = 0$$

$$9 + 6\sqrt{6} + 6 - 18 - 6\sqrt{6} + 3 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Para $\boldsymbol{x_2 = 3 - \sqrt{6}}$

$$\left(3-\sqrt{6}\right)^2 - 6\left(3-\sqrt{6}\right) + 3 = 0$$

$$\left(3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{6} + \sqrt{6}^2\right) - 6\cdot 3 + 6\cdot\sqrt{6} + 3 = 0$$

$$9 - 6\sqrt{6} + 6 - 18 + 6\sqrt{6} + 3 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

viii. Complete el cuadrado para resolver la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x^2 + 6x = -5$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -5 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$(x+3)^2 = -5 + 9$$

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{4}$$

$$|x+3| = 2$$

$$x + 3 = \pm 2$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x_2 = -5}$$

Comprobación:

Para $\boldsymbol{x_1 = -1}$

$$(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 0$$

$$1 - 6 + 5 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Para $\boldsymbol{x_2 = -5}$

$$(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 0$$

$$25 - 30 + 5 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

ix. Resuelva la ecuación: $2x^2 - x = -5$

$$x^2 - \frac{1}{2}x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = -\frac{5}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{-\frac{39}{16}}$$

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| = \sqrt{-\frac{39}{16}}$$

Como tenemos la raíz de un número negativo, podemos concluir que esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales.

III. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando el método de completar el cuadrado.

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$
2) $x^2 + 8x + 15 = 0$
3) $x^2 + 6x + 8 = 0$
4) $x^2 - 7x + 6 = 0$
5) $x^2 + 9x + 18 = 0$
6) $2x^2 + x - 1 = 0$
7) $3c^2 - 4c - 4 = 0$
8) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
9) $4w^2 + 9w = 9$
10) $y^2 - 13y + 40 = 0$
11) $x^2 + x - 12 = 0$
12) $-x^2 + 6x + 7 = 0$
13) $-z^2 - 5z + 14 = 0$
14) $-a^2 + 9a - 20 = 0$
15) $-b^2 - 4b + 12 = 0$
16) $w^2 = 3w + 28$
17) $-x^2 = 6x - 27$
18) $y^2 + 10y = 11$
19) $-z^2 + 40 = -3z$
20) $a^2 - 4a - 10 = 0$
21) $b^2 - 6b + 2 = 0$
22) $c^2 + 8c + 5 = 0$
23) $q^2 + 4q - 8 = 0$
24) $r^2 - r - 3 = 0$
25) $t^2 - 5t = 4$

Fórmula general

A partir de la ecuación canónica $ax^2 + bx + c = 0$, utilizando el método de completar el cuadrado, se despeja x y llegamos a la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x. Resuelva la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Note que en la fórmula general, solamente sustituimos los valores de los coeficientes, jamás utilizamos variables. Siendo así $a = 3,\ b = -7$ y $c = 2$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$\boldsymbol{x_1 = 2}$ y $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{3}}$

Comprobación:

Para $\boldsymbol{x_1 = 2}$

$$3(2)^2 - 7(2) + 2 = 0$$

$$3(4) - 14 + 2 = 0$$

$$12 - 14 + 2 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Para $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{3}}$

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$$

$$3\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{7}{3} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

xi. Utilizando la fórmula general, obtenga las raíces de $a^2 - 6a + 9 = 0$

$a = 1,\ b = -6$ y $c = 9$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = 3}$$

Comprobación: $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 3}$

$$3^2 - 6(3) + 9 = 0$$

$$9 - 18 + 9 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

xii. Obtenga las raíces de la ecuación: $(x + 4)^2 = 2x(5x - 1) - 7(x - 2)$

Primero debemos realizar las operaciones indicadas

$$x^2 + 8x + 16 = 10x^2 - 2x - 7x + 14$$

$$10x^2 - x^2 - 8x - 2x - 7x + 14 - 16 = 0$$

$$9x^2 - 17x - 2 = 0$$

Entonces $a = 9,\ b = -17$ y $c = -2$

$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(9)(-2)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 72}}{18}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{361}}{18}$$

$$x = \frac{17 \pm 19}{18}$$

$\boldsymbol{x_1 = 2}$ y $\boldsymbol{x_2 = -\frac{1}{9}}$

Comprobación:

Para $\boldsymbol{x_1 = 2}$

$$(2+4)^2 = 2(2)(5(2)-1) - 7(2-2)$$

$$6^2 = 4(9) - 7(0)$$

$$36 \equiv 36$$

Para $\boldsymbol{x_2 = -\frac{1}{9}}$

$$\left(-\frac{1}{9}+4\right)^2 = 2\left(-\frac{1}{9}\right)\left(5\left(-\frac{1}{9}\right)-1\right) - 7\left(-\frac{1}{9}-2\right)$$

$$\left(\frac{35}{9}\right)^2 = -\frac{2}{9}\left(-\frac{14}{9}\right) - 7\left(-\frac{19}{9}\right)$$

$$\frac{1225}{81} = \frac{28}{81} + \frac{133}{9}$$

$$\frac{1225}{81} = \frac{28}{81} + \frac{1197}{81}$$

$$\frac{1225}{81} \equiv \frac{1225}{81}$$

IV. Utilizando la fórmula general, resuelva las siguientes ecuaciones.

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
2) $y^2 - 5y - 14 = 0$
3) $z^2 + z - 20 = 0$
4) $a^2 + 3a - 4 = 0$
5) $b^2 - 2b - 24 = 0$
6) $c^2 - 7c - 18 = 0$
7) $d^2 - 7d + 10 = 0$
8) $3m^2 + m - 10 = 0$
9) $2n^2 - n - 21 = 0$
10) $2p^2 - 11p + 15 = 0$
11) $3q^2 - 24q + 45 = 0$
12) $3r^2 + 5r + 1 = 0$
13) $4u^2 - 6u + 11 = 0$
14) $2v^2 - 8v + 3 = 0$
15) $6w^2 - 17w + 10 = 0$
16) $x(x + 3) = 5x + 3$
17) $9y + 1 = 3(y^2 - 5) - (y - 3)(y + 2)$
18) $25(z + 2)^2 = (z - 7)^2 - 81$
19) $3a(a - 2) - (a - 6) = 23(a - 3)$
20) $(b - 2)(b + 2) - 7(b - 1) = 21$
21) $\frac{c^2}{5} - \frac{c}{2} = \frac{3}{10}$
22) $\frac{5}{d} - \frac{1}{d+2} = 1$
23) $\frac{e-13}{e} = 5 - \frac{10(5e+3)}{e^2}$
24) $\frac{4w-1}{2w+3} = \frac{2w+1}{6w+5}$
25) $\frac{3x+2}{4} = 5 - \frac{9x+14}{12x}$

7.3 Desigualdad de primer grado en una variable y sus propiedades.

Como ya habíamos visto en la unidad 3 en el tema de reales, las propiedades de orden entre los enteros, establecen también las propiedades que utilizaremos en las desigualdades, también conocidas como inecuaciones, y su principal característica es que a diferencia de las ecuaciones lineales que tienen una sola raíz, las inecuaciones constan de una infinidad de resultados posibles, contenidos en uno o en varios intervalos (vistos en la unidad 3 sección 3.10).

Propiedades

i. $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

ii. $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

iii. $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

La tercera propiedad es en la que debemos poner más atención al resolver los ejercicios, ya que al multiplicar por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte, y cambia el sentido del resultado.

xiii. Resuelva: $2x - 5 \leq x + 1$

$$2x - x \leq 1 + 5$$
$$x \leq 6$$

xiv. Obtenga el resultado de: $-3 \leq 4x + 1 < 7$

Restar 1 en las 3 partes

$$-3 - 1 \leq 4x < 7 - 1$$
$$-4 \leq 4x < 6$$
$$-\frac{4}{4} \leq \frac{4x}{4} < \frac{6}{4}$$
$$-1 \leq x < \frac{3}{2}$$

Dividir todo entre 4

xv. Determine el resultado de: $-8x + 21 < x - 6$

$$-8x - x < -6 - 21$$
$$-9x < -27$$

Propiedad iii

$$x > \frac{-27}{-9}$$
$$x > 3$$

xvi. Resuelva: $-\frac{x}{4}+\frac{x}{6}<\frac{x-3}{6}$

MCM de 4 y 6

$$(12)\left(-\frac{x}{4}\right)+(12)\left(\frac{x}{6}\right)<(12)\left(\frac{x-3}{6}\right)$$

$$-3x+2x<2x-6$$

$$-3x+2x-2x<-6$$

$$-3x<-6$$

$$x>\frac{-6}{-3}$$

Propiedad iii

$$x>2$$

V. Resuelva las siguientes desigualdades

1) $x-9>-6$
2) $3-x<-4$
3) $12a-5\leq 8a+7$
4) $4(b+2)\leq 5b+10$
5) $5c-6\geq 3(c+3)+2c$
6) $-6(d+2)<-9d+3(d-1)$
7) $2e-6e+8\leq 2(-2e+9)$
8) $\frac{f}{2}+\frac{4}{5}\leq 3$
9) $4+\frac{4g}{3}<6$
10) $4-3h<5+2h+17$
11) $\frac{j-5}{3}-j\geq -3(j-1)$
12) $\frac{k}{2}-\frac{5}{6}<\frac{7}{8}+k$
13) $\frac{m}{3}-m+7\leq -\frac{4m}{3}+8$
14) $\frac{6(n-2)}{5}>\frac{10(2-n)}{3}$
15) $-3p+1<3[(p+2)-2p]-1$
16) $4[q-(3q-2)]>3(q+5)-15$
17) $-2\leq r+3<4$
18) $-7<s-6\leq -5$
19) $-15<-3t<12$
20) $-16<5-3u<13$
21) $4\leq 2v-4<7$
22) $-12<3w-5\leq -1$
23) $14\leq 2-3x<15$
24) $\frac{1}{2}<3y+4<13$
25) $5\leq\frac{3z+1}{2}\leq 11$

Desigualdades lineales con valor absoluto

De acuerdo con la definición de valor absoluto que estudiamos en la unidad 3, debemos considerar el caso positivo y el caso negativo. En las desigualdades resolveremos de manera análoga, es decir, considerando ambos casos.

xvii. Resuelva la siguiente desigualdad: $|2x+1| \leq 9$

Cuando el valor absoluto es "menor que" un número real, es decir, sin variables del otro lado del valor absoluto, podemos reescribir la desigualdad como una desigualdad doble, de la forma $-9 \leq 2x+1 \leq 9$ ya que en la misma inecuación consideramos el caso negativo y el caso positivo. Entonces:

$$-9 \leq 2x+1 \leq 9$$

$$-9-1 \leq 2x \leq 9-1$$

$$-\frac{10}{2} \leq x \leq \frac{8}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 8$$

xviii. Resuelva la desigualdad: $|2x+3| > 5$

Cuando el valor absoluto es "mayor que" el otro miembro, ya sea con o sin variables, debemos realizar dos desigualdades por separado, una considerando el caso positivo, donde sólo quitamos la indicación de valor absoluto; y el caso negativo, donde al quitar el signo de valor absoluto, debemos escribir entre paréntesis y con signo negativo, aquello que estaba considerado en el interior del valor absoluto. De esta forma:

$$|2x+3| > 5$$

$+)\quad 2x+3>5$

$$2x > 5-3$$

$$x > \frac{2}{2}$$

$$x > 1$$

$-)\quad -(2x+3) > 5$

$$-2x-3 > 5$$

$$-2x > 5+3$$

$$x < \frac{8}{-2}$$

$$x < -4$$

Entonces tenemos dos resultados que se pueden escribir como intervalos, de la forma $x \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ y son igualmente válidos.

xix. Determine el resultado de: $|6w-5|<4w+7$

Cuando el valor absoluto es "menor que" el segundo miembro que cuenta con variables, no podemos resolver utilizando una desigualdad doble (como en el primer ejemplo de esta sección). Debemos realizar dos desigualdades por separado, considerando el caso positivo y el caso negativo. Y procedemos como en el ejemplo anterior.

$$+)\quad 6w-5<4w+7$$
$$6w-4w<7+5$$
$$2w<12$$
$$w<6$$

$$-)\quad -(6w-5)<4w+7$$
$$-6w+5<4w+7$$
$$-6w-4w<7-5$$
$$-10w<2$$
$$w>-\frac{1}{5}$$

Nuevamente tenemos dos resultados que se pueden escribir como un solo intervalo que cumple ambas respuestas de manera simultánea $x\in\left(-\frac{1}{5},6\right)$.

Observación: Utilizamos un solo intervalo cuando ambos resultados son incluyentes, es decir, los números que satisfacen una desigualdad igualmente pueden satisfacer la otra. Cuando no hay ningún intervalo de números que satisfagan ambas desigualdades al mismo tiempo, expresamos el resultado mediante la unión de ambos intervalos.

VI. Resuelva las siguientes desigualdades

1) $|x-5|<6$
2) $|2-y|<7$
3) $|a+2|\le 3$
4) $|2b-3|<-(-5)$
5) $\left|\frac{2}{3}c-\frac{1}{4}\right|\le\frac{5}{8}$
6) $|5d-1|>9$
7) $|3e+2|\ge 8$
8) $|1-4f|>13$
9) $|3g-1|\ge 2$
10) $|6h-11|\ge 5$
11) $|3-j|\ge 2j+1$
12) $|3k+5|>2k-3$
13) $|6m-10m|\le 2-5m$
14) $|2n+9|\ge n+3$
15) $\left|\frac{4}{10}p-1\right|<\frac{10}{2}p$

7.4 Desigualdad de segundo grado. Resolución de una desigualdad de segundo grado.

El objetivo de resolver una desigualdad de segundo grado, es obtener las raíces de la inecuación (por cualquier método), y verificar en la ecuación original, que parte es la que hace la desigualdad válida.

xx. Resuelva la inecuación: $3x^2 + 5x \leq x^2 + x + 22$

Reducimos términos semejantes $$3x^2 - x^2 + 5x - x \leq 22$$

$$2x^2 + 4x \leq 22$$

Dividimos todos los términos entre 2 $$x^2 + 2x \leq 11$$

Completamos el cuadrado $$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \leq 11 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

Factorizamos lado izquierdo y reducimos lado derecho $$(x+1)^2 \leq 12$$

Obtenemos la raíz cuadrada de ambos lados $$\sqrt{(x+1)^2} \leq \sqrt{12}$$

Resolvemos la desigualdad lineal con valor absoluto $$|x+1| \leq \sqrt{12}$$

$$-\sqrt{12} \leq x + 1 \leq \sqrt{12}$$

$$-1 - \sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12} - 1$$

xxi. Determine para qué intervalo es cierta la desigualdad: $y^2 < 121$

Realizamos el despeje de la variable $$\sqrt{y^2} < \sqrt{121}$$

$$|y| < 11$$

$$-11 < y < 11$$

Por lo tanto, la desigualdad es cierta cuando $y \in (-11, 11)$

xxii. Resuelva la desigualdad: $3z^3 - 3z^2 - 6z \geq 0$

$$3z(z^2 - z - 2) \geq 0$$

$$3z(z-2)(z+1) \geq 0$$

Entonces tenemos tres opciones que debemos considerar para que la desigualdad sea igual a cero, ya que cero por cualquier número es cero, entonces basta con que alguna de nuestras opciones sea cero para que se cumpla la condición: $3z = 0,\ \ z - 2 = 0$ o $z + 1 = 0$ de donde $z_1 = -1,\ z_2 = 0$ y $z_3 = 2$

Formamos cuatro intervalos de prueba para asignar valores en dichos intervalos y determinar si cumplen con la condición

$-3 \in (-\infty, -1)$: $3(-3)^3 - 3(-3)^2 - 6(-3) \geq 0$ resultado $-90 \ngeq 0$ no funciona

$-\frac{1}{2} \in (-1,0)$: $3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$ resultado $\frac{15}{8} \geq 0$ sí funciona

$1 \in (0,2)$: $3(1)^3 - 3(1)^2 - 6(1) \geq 0$ resultado $-6 \ngeq 0$ no funciona

$4 \in (2, \infty)$: $3(4)^3 - 3(4)^2 - 6(4) \geq 0$ resultado $120 \geq 0$ sí funciona

Entonces podemos concluir que $3z^3 - 3z^2 - 6z \geq 0$ cuando $z \in (-1,0) \cup (2, \infty)$

xxiii. ¿Cuándo es válida la desigualdad: $\frac{(w-1)(w+4)}{w+1} > 0$?

Debemos evitar que el denominador sea cero para que la inecuación tenga sentido. Por lo tanto, el primer valor a considerar será $w_1 = -1$ Obtenido al igualar el denominador a cero. Y en este caso, la desigualdad ya está factorizada, entonces sabemos que $w_2 = 1$ y $w_3 = -4$.

Al analizar los intervalos formados, de manera análoga al ejemplo anterior, concluimos que $\frac{(w-1)(w+4)}{w+1} > 0$ cuando $w \in (-4, -1) \cup (3, \infty)$

VII. Resuelva las siguientes desigualdades

1) $w^2 - 2w - 8 \geq 0$

2) $x^2 - 2x - 9 < 0$

3) $y^2 + 7y + 6 > 0$

4) $z^2 + 8z + 7 < 0$

5) $a^2 - 6a + 9 \leq 0$

6) $b^2 - 8b \leq 0$

7) $c^2 - 16 < 0$

8) $d^2 - 5d > 0$

9) $2e^2 + 5e - 3 \leq 0$

10) $3f^2 - 7f \leq 6$

11) $5g^2 \leq -6g + 8$

12) $5h - 3 \leq -3h^2$

13) $2j^2 + 9 \leq 12j$

14) $5k^2 + 4 \leq -20k$

15) $l^3 - 9l \leq 0$

16) $\frac{m^2-5m-6}{m+3} < 0$

17) $\frac{n^2+n-6}{n-5} > 0$

18) $\frac{p^2-8p+7}{p+2} \geq 0$

19) $\frac{q-5}{q^2-3q-54} \geq 0$

20) $\frac{2r^2-r-15}{r-4} \geq 0$

21) $\frac{s+9}{s^2+2s-8} > 0$

22) $\frac{3}{t+2} < 2t - 1$

23) $\frac{-3u}{u^2-9} > 0$

24) $\frac{v}{v+1} < \frac{v-1}{v+2}$

25) $\frac{w^2-4}{1-w^2} > 2$

CAPÍTULO 8: SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE DESIGUALDADES

8.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Métodos de solución.

Definición: Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son simultáneas cuando los mismos valores satisfacen las mismas ecuaciones.

Definición: Las ecuaciones equivalentes son aquellas donde una es múltiplo de la otra. Por ejemplo: $4x + 4y = 4$ es un múltiplo de $x + y = 1$. Y tienen una infinidad de representaciones.

Definición: Las ecuaciones independientes son las que no se obtienen una de otra.

Método de solución: Igualación

1. Despejar la misma variable de ambas ecuaciones
2. Igualar los despejes y reducir términos semejantes
3. Sustituir el valor encontrado en alguna de las ecuaciones originales
4. Comprobar ambos valores en ambas ecuaciones

i. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 & \dots\dots\dots\dots 1 \\ 5x - 2y = 19 & \dots\dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

Paso 1: Despejamos x de ambas ecuaciones

De 1: $x = \frac{13-4y}{7}$ De 2: $x = \frac{19+2y}{5}$

Paso 2: Igualar y reducir términos: $\frac{13-4y}{7} = \frac{19+2y}{5}$

$$5(13 - 4y) = 7(19 + 2y)$$

$$65 - 20y = 133 + 14y$$

$$-14y - 20y = 133 - 65$$

$$-34y = 68$$

$$y = -2$$

Paso 3: Sustituir en alguna ecuación: en 1 sustituyo $y = -2$: $7x + 4(-2) = 13$

$$7x = 13 + 8$$

$$x = 3$$

Paso 4: Comprobar

En 1: $7(3) + 4(-2) = 13$

$$21 - 8 = 13$$

$$13 \equiv 13$$

En 2: $5(3) - 2(-2) = 19$

$$15 + 4 = 19$$

$$19 \equiv 19$$

ii. Utilizando el método de igualación, resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x + 6y = 27 & \dots\dots\dots\dots 1 \\ 7x - 3y = 9 & \dots\dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

Paso 1: Despejamos x de ambas ecuaciones

De 1: $x = 27 - 6y$

De 2: $x = \frac{9+3y}{7}$

Paso 2: Igualar y reducir términos

$$27 - 6y = \frac{9 + 3y}{7}$$

$$7(27 - 6y) = 9 + 3y$$

$$189 - 9 = 3y + 42y$$

$$y = 4$$

Paso 3: Sustituir en alguna ecuación: en 1 sustituyo $y = 4$

$$x + 6(4) = 27$$

$$x = 27 - 24$$

$$x = 3$$

Paso 4:Comprobar con $x = 3$ y $y = 4$

En 1: $3 + 6(4) = 27$

$3 + 24 = 27$

$27 \equiv 27$

En 2: $7(3) - 3(4) = 9$

$21 - 12 = 9$

$9 \equiv 9$

I. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación

1) $\begin{cases} 3x - y = 19 \\ 3x + y = 29 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x = 2 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 10 - 2x \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 4y = 13 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4y = 6x + 9 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ 3x + 18 = 9y \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 10 \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{8} = 11 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3y+2x}{5} + \frac{y+6}{7} = 2 \\ \frac{2x-5y}{3} + \frac{x+7}{4} = 1 \end{cases}$

Método de solución: sustitución

1. Despejar alguna variable de cualquier ecuación
2. Sustituir el despeje en la ecuación donde no se despejó, reducir términos semejantes y resolver la ecuación.
3. Sustituir el valor encontrado en alguna de las ecuaciones originales
4. Comprobar

iii. Utilizando el método de sustitución, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 & \dots\dots\dots\dots\ 1 \\ x + 2y = 1 & \dots\dots\dots\dots.\ 2 \end{cases}$$

Paso 1: de 2 despejamos x: $x = 1 - 2y$

Paso 2: sustituimos el despeje en 1: $2(1 - 2y) + 5y = 3$

$$2 - 4y + 5y = 3$$

$$y = 1$$

Paso 3: sustituimos $y = 1$ en la ecuación 2: $x + 2(1) = 1$

$$x + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Paso 4: Con $x = -1$ y $y = 1$:

En 1: $2(-1) + 5(1) = 3$

$$-2 + 5 = 3$$

$$3 \equiv 3$$

En 2: $(-1) + 2(1) = 1$

$$-1 + 2 = 1$$

$$1 \equiv 1$$

iv. Para qué valores de a y b es válido el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a + b = -1 & \dots\dots\dots\dots\ 1 \\ a - 4b = 13 & \dots\dots\dots\dots\ 2 \end{cases}$$

Paso 1: De 1 despejamos b: $b = -2a - 1$

Paso 2: Sustituimos el despeje en 2: $a - 4(-2a - 1) = 13$

$$a + 8a + 4 = 13$$

$$9a = 9$$

$$a = 1$$

Paso 3: sustituimos $a = 1$ en la ecuación 1: $2(1) + b = -1$ de donde $b = -3$

Paso 4: con $a = 1$ y $b = -3$:

En 1: $2(1) + (-3) = -1$

$$2 - 3 = -1$$

$$-1 \equiv -1$$

En 2: $1 - 4(-3) = 13$

$$1 + 12 = 13$$

$$13 \equiv 13$$

II. Resuelva los siguientes ejercicios por el método de sustitución

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 1 = y + 3 \\ x - 3 = 3y - 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + 2y = -12 \\ 8x - 2y = -54 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 15a - 4b = -46 \\ a - 2b = -10 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x - 3y = 13 \\ 4x - 5y = 24 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4m - 3n = -14 \\ 3m + 5n = 4 \end{cases}$

Método de solución: eliminación (suma y resta)

1. Igualar los coeficientes de ambas ecuaciones, pero con signos diferentes mediante la multiplicación o división de la ecuación completa. Y reducir términos semejantes y resolver la ecuación.
2. Sustituir el valor encontrado en alguna de las ecuaciones originales.
3. Comprobar.

v. Resuelva el sistema por el método de eliminación $\begin{cases} 2x - 5y = 20 \\ -4x + 5y = -40 \end{cases}$

Paso 1: Los coeficientes de y son iguales pero de signos opuestos, por lo tanto procedemos a sumar en forma vertical ambas ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x - 5y = 20 \\ \underline{-4x + 5y = -40} \\ -2x \qquad = -20 \end{array}$$

$$x = \frac{-20}{-2}$$

$$x = 10$$

Paso 2: En la ecuación 1, sustituimos $x = 10$

$$2(10) - 5y = 20$$

$$20 - 5y = 20$$

$$-5y = 0$$

$$y = 0$$

Paso 3: Con $x = 10$ y $y = 0$

En 1: $2(10) - 5(0) = 20$

$20 - 0 = 20$

$20 \equiv 20$

En 2: $-4(10) + 5(0) = -40$

$-40 + 0 = -40$

$-40 \equiv -40$

vi. Encuentre los valores de cada variable por el método de suma y resta

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \quad \dots\dots\dots\dots \; 1 \\ -2x + 3y = 10 \quad \dots\dots\dots\dots \; 2 \end{cases}$$

Paso 1: Multiplicamos la ecuación 1 por 2 y sumamos de forma vertical para obtener el valor de y

$$\begin{array}{r} 2x - 4y = 18 \\ -2x + 3y = 10 \\ \hline -y = 28 \end{array}$$

$$y = -28$$

Paso 2: Sustituimos el valor obtenido en la ecuación 1

$$x - 2(-28) = 9$$

$$x + 56 = 9$$

$$x = -47$$

Paso 3: Con $x = -47$ y $y = -28$

En 1: $(-47) - 2(-28) = 9$

$$-47 + 56 = 9$$

$$9 \equiv 9$$

En 2: $-2(-47) + 3(-28) = 10$

$$94 - 84 = 10$$

$$10 \equiv 10$$

III. Utilizando el método de eliminación, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

1) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2a - b - 3 = 0 \\ a - 2b + 3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8c + 5d = 65 \\ 7c + 6d = 65 \end{cases}$

4) $\begin{cases} e - 2f = 2 \\ 3e + f = 13 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2g - 3h = 28 \\ 3g + 2h = 16 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2j - 4k = -10 \\ 3j - 2k = 25 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5m + 2n = 74 \\ 6m - 2n = 36 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 10x + 30y = 90 \\ 35x - 10y = -30 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x - 1 = 2(y + 6) \\ x + 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$

Método de solución: determinantes

Un determinante es un arreglo de columnas en los que solamente se incluyen números y se obtiene su valor al multiplicar sus diagonales y restar una de la otra.

Para un sistema de ecuaciones de la forma: $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ el determinante es:

$\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ conocido como el determinante del sistema

$\Delta_x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix} = rd - bs$ es el determinante de x, en el que no aparecen los coeficientes asociados a x sino los términos independientes.

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix} = as - rc$ es el determinante de y, en el que no aparecen los coeficientes asociados a y sino los términos independientes.

Obtenemos los valores de las variables de la forma $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}$ y $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$

vii. Utilizando el método de determinantes resuelva el siguiente sistema

$\begin{cases} 5x + 2y = -15 \\ 7x - 3y = 37 \end{cases}$

Calculamos el valor de los tres determinantes

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (5)(-3) - (2)(7) = -15 - 14 = -29$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -15 & 2 \\ 37 & -3 \end{vmatrix} = (-15)(-3) - (2)(37) = 45 - 74 = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 7 & 37 \end{vmatrix} = (5)(37) - (-15)(7) = 185 + 105 = 290$$

Entonces los valores de las incógnitas son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-29}{-29} = 1 \qquad\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{290}{-29} = -10$$

Comprobación: para $x = 1$ y $y = -10$

En 1: $5(1) + 2(-10) = -15$

$5 - 20 = -15$

$-15 \equiv -15$

En 2: $7(1) - 3(-10) = 37$

$7 + 30 = 37$

$37 \equiv 37$

viii. Resuelva el siguiente sistema utilizando determinantes

$$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$$

Calculamos los determinantes

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (6)(7) - (-5)(4) = 42 + 20 = 62$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (1)(7) - (-5)(2) = 7 + 10 = 17$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (6)(2) - (1)(4) = 12 - 4 = 8$$

Entonces los valores de las incógnitas son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{17}{62} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{8}{62}$$

Comprobación para $x = \frac{17}{62}$ y $y = \frac{8}{62}$

En 1: $6\left(\frac{17}{62}\right) - 5\left(\frac{8}{62}\right) = 1$

$$\frac{102}{62} - \frac{40}{62} = 1$$

$$1 \equiv 1$$

En 2: $4\left(\frac{17}{62}\right) + 7\left(\frac{8}{62}\right) = 2$

$$\frac{68}{62} + \frac{56}{62} = 2$$

$$2 \equiv 2$$

IV. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando determinantes.

1) $\begin{cases} 3x - 5y = -15 \\ 2x + y = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7a + 8b = -5 \\ -a + 9b = 21 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6c - 5d = 28 \\ 4c + 9d = -6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8e - 5f = -4 \\ 2e - 3f = -8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2g - h = 6 \\ g - 2h = -9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} -j - 9k = 11 \\ 7j - 15k = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6m - 5n = 28 \\ 4m + 9n = -6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3v + 2w = 2 \\ -2v + w = 8 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{5x}{12} - y = 9 \\ x - \frac{3y}{4} = 15 \end{cases}$

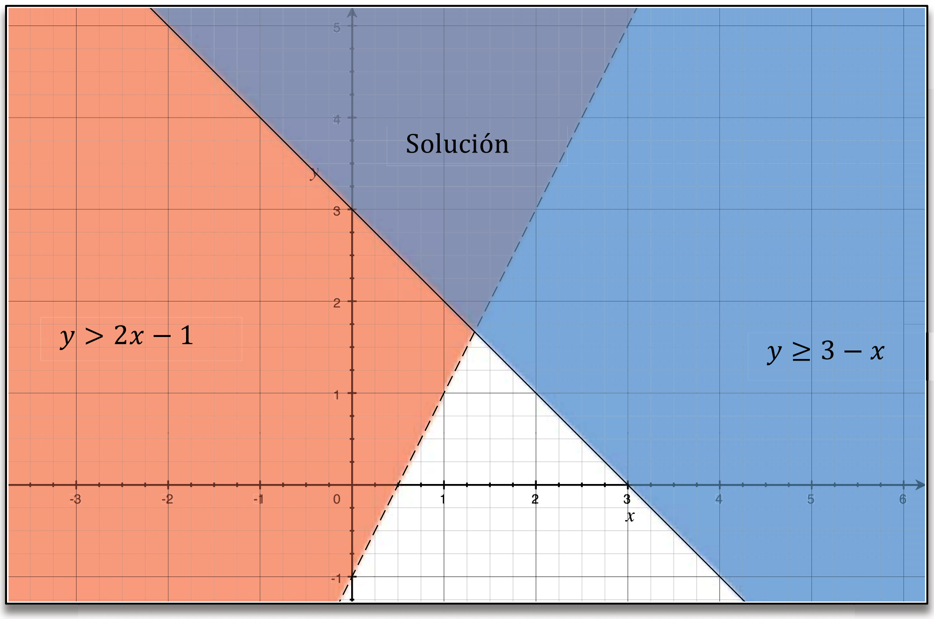
10) $\begin{cases} x = -\frac{3y+3}{4} \\ y = -\frac{1+5x}{4} \end{cases}$

8.2 Solución de un sistema de dos desigualdades de primer grado en dos variables.

Para graficar las desigualdades en el plano, debemos despejar y y posteriormente, seleccionar mediante una evaluación numérica, la región que cumple con la desigualdad. Por conveniencia y para distinguir si la desigualdad es estricta o no, se suele utilizar una línea punteada para $<$ o $>$; y una línea continua para $\leq$ o $\geq$.

ix. Grafique el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$

Despejamos y de ambas desigualdades: $\begin{cases} y > 2x - 1 \\ y \geq 3 - x \end{cases}$



Por lo tanto, cualquier punto que se encuentre en el interior de la región de solución, satisface las condiciones establecidas.

Comprobemos con el punto $(1,3)$ donde $x = 1$ y $y = 3$

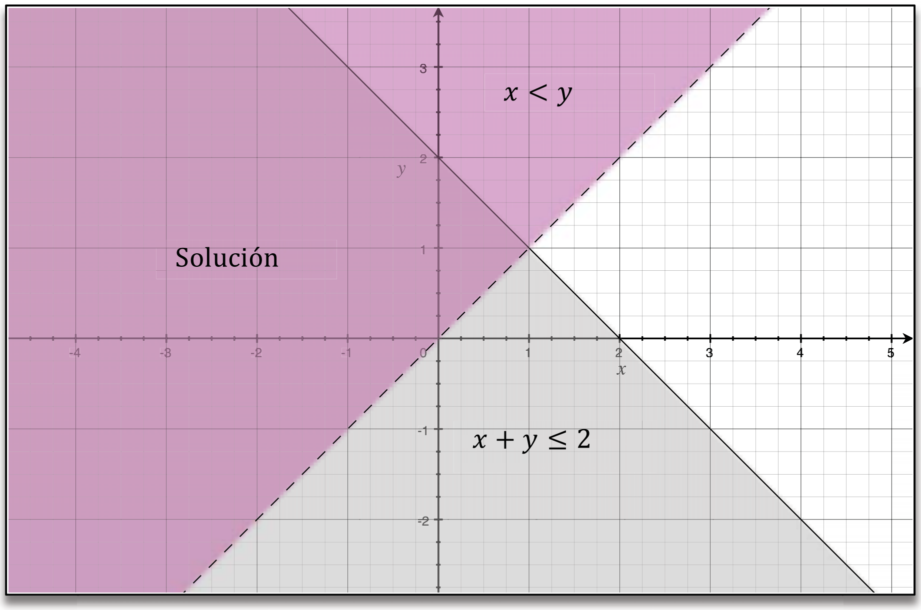
$$2(1) - 3 < 1 \qquad\qquad 1 + 3 \geq 3$$

$$-1 < 1 \qquad\qquad 4 \geq 3$$

Como se cumplen ambas desigualdades, podemos concluir que nuestra región solución es la correcta.

x. Grafique el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x < y \end{cases}$

Despejamos y de ambas desigualdades y resulta $\begin{cases} y \leq 2 - x \\ y > x \end{cases}$



Comprobemos con el punto $(-1,2)$ donde $x = -1$ y $y = 2$

$$(-1) + 2 \leq 2 \qquad\qquad -1 < 2$$

$$1 \leq 2$$

Como se cumplen ambas desigualdades, podemos concluir que nuestra región solución es la correcta.

V. Grafique el conjunto solución de los siguientes sistemas de desigualdades.

1) $\begin{cases} -x + 3y > 6 \\ 2x - y \leq 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x - 2y \leq 10 \\ 3x + 2y > 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y > 2x + 3 \\ y < -x + 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > -2y + 4 \\ y < -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ -2x + y \leq 3 \\ x \leq 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y < 6 \\ 4x + y \leq 8 \\ x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ 4x + 5y > 20 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$

8.3 Resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales.

Para resolver un sistema de la forma $\begin{cases} ax+by+cz=r \\ dx+ey+fz=s \\ gx+hy+iz=t \end{cases}$ utilizaremos determinantes

Método por menores.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg)$$

Tomamos la primera letra del primer renglón y la multiplicamos por el determinante que se forma al eliminar el primer renglón y la primera columna; restamos la segunda letra, que se multiplica por el determinante formado al eliminar el primer renglón y la segunda columna; finalmente sumamos el producto de la tercera letra con el determinante formado al ignorar el primer renglón y la tercera columna. El procedimiento para resolver cada determinante pequeño, es la regla de Cramer que utilizamos en la sección 8.1 Método de solución por determinantes. Y análogamente a ese procedimiento, debemos obtener cuatro determinantes, el del sistema, el de x, y y el de z. Entonces:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} r & b & c \\ s & e & f \\ t & h & i \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} s & f \\ t & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} s & e \\ t & h \end{vmatrix} = r(ei-fh) - b(si-ft) + c(sh-et)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & r & c \\ d & s & f \\ g & t & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} s & f \\ t & i \end{vmatrix} - r\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & s \\ g & t \end{vmatrix} = a(si-ft) - r(di-fg) + c(dt-sg)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & r \\ d & e & s \\ g & h & t \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & s \\ h & t \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & s \\ g & t \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(et-sh) - b(dt-sg) + r(dh-eg)$$

Y las soluciones son $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s}$

xi. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3z = 16 \\ x - 3y + 2z = -20 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Obtenemos los determinantes

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\big(9 - (-4)\big) + 5(-3 - 2) - 3\big(-2 - (-3)\big) = 52 - 25 - 3 = 24$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 16 & -5 & -3 \\ -20 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} -20 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -20 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 16\big(9 - (-4)\big) - (-5)(60 - 8) + (-3)\big(40 - (-12)\big) = 208 + 260 - 156 = 312$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 16 & -3 \\ 1 & -20 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -20 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4(60 - 8) - 16(-3 - 2) + (-3)\big(4 - (-20)\big) = 208 + 80 - 72 = 216$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & -20 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -3 & -20 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-12 - 40) - (-5)\big(4 - (-20)\big) + 16\big(-2 - (-3)\big) = -208 + 120 + 16 = -72$$

Entonces las soluciones son

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{312}{24} = 13; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{216}{24} = 9; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{-72}{24} = -3$$

Comprobaciones:

En 1:

$$4(13) - 5(9) - 3(-3) = 16$$

$$52 - 45 + 9 = 16$$

$$16 \equiv 16$$

En 2:

$$13 - 3(9) + 2(-3) = -20$$

$$13 - 27 - 6 = -20$$

$$-20 \equiv -20$$

En 3:

$$13 - 2(9) - 3(-3) = 4$$

$$13 - 18 + 9 = 4$$

$$4 \equiv 4$$

xii. Determine las soluciones de $\begin{cases} 2x + y - z = -11 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$

Obtenemos los determinantes.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\big(2-(-2)\big) - 1(1-6) - 1(-1-6) = 8 + 5 + 7 = 20$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -11\big(2-(-2)\big) - 1(1-12) - 1(-1-12) = -44 + 11 + 13 = -20$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-11)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-12) + 11(1-6) - 1(6-3) = -22 - 55 - 3 = -80$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-11)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\big(12-(-1)\big) - 1(6-3) - 11(-1-6) = 26 - 3 + 77 = 100$$

Entonces las soluciones son

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-20}{20} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{-80}{20} = -4; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = \frac{100}{20} = 5$$

Comprobaciones:

En 1:	En 2:	En 3:
$2(-1) + (-4) - 5 = -11$	$(-1) + 2(-4) + 2(5) = 1$	$3(-1) - (-4) + 5 = 6$
$-2 - 4 - 5 = -11$	$-1 - 8 + 10 = 1$	$-3 + 4 + 5 = 6$
$-11 \equiv -11$	$1 \equiv 1$	$6 \equiv 6$

VI. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de determinantes.

1) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x - y - 2z = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 4y + 7z = 2 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x + 5y + 8z = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 5 \\ 3x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = -7 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ 5x + 3y - 4z = 4 \\ 6x - 4y - 5z = 12 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + 7y - z = 7 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

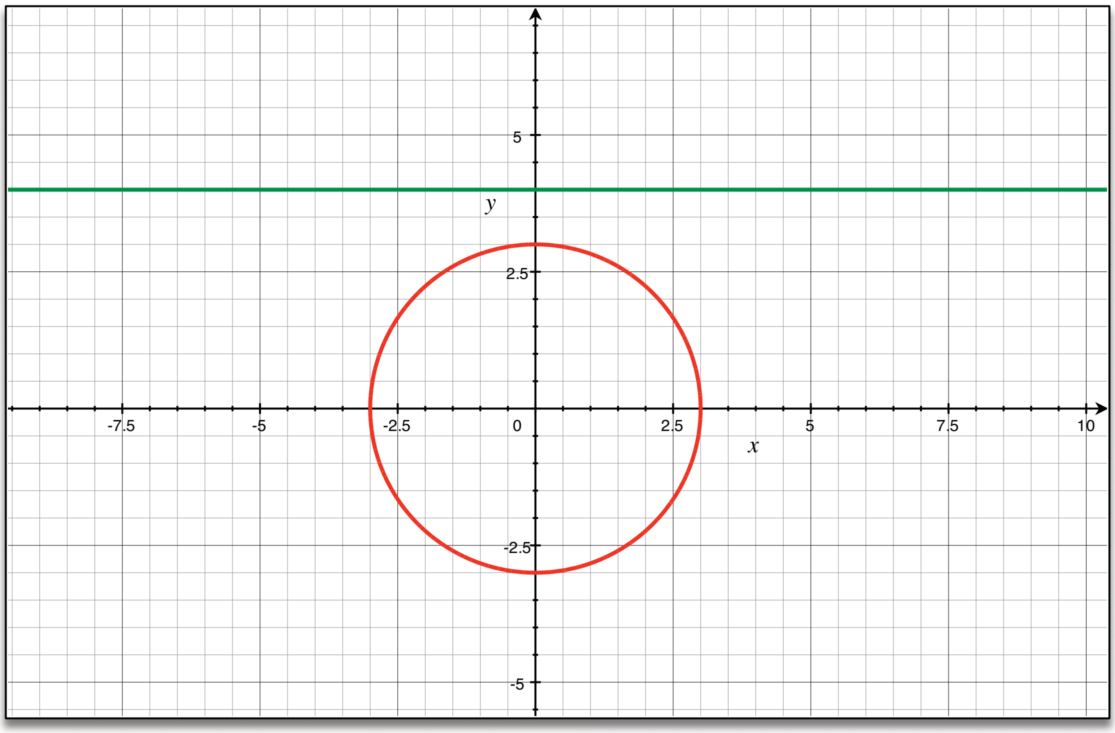
8.4 Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables formado por una de primer grado y la otra de segundo.

Al resolver un sistema conformado por una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, tenemos 3 posibilidades: que la recta cruce a la ecuación cuadrática en dos puntos, que la cruce en un solo punto o que no la cruce, en cuyo caso decimos que el sistema es inconsistente, es decir, no tiene solución en el campo de los números reales.

Para resolver el sistema despejamos cualquiera de las dos variables de la ecuación lineal y sustituimos en la ecuación cuadrática. Este proceso nos puede dar una, dos o ninguna respuesta, tal como mencioné en el párrafo anterior. Cada respuesta va acompañada de su otra variable, es decir, si obtenemos dos valores diferentes para x, entonces tendremos dos valores diferentes para y y esto lo obtenemos al sustituir el o los valores obtenidos en la ecuación lineal.

xiii. Encuentre la intersección de la recta $y = 4$ con $x^2 + y^2 = 9$
Como $y = 4$ tenemos que $x^2 + (4)^2 = 9$

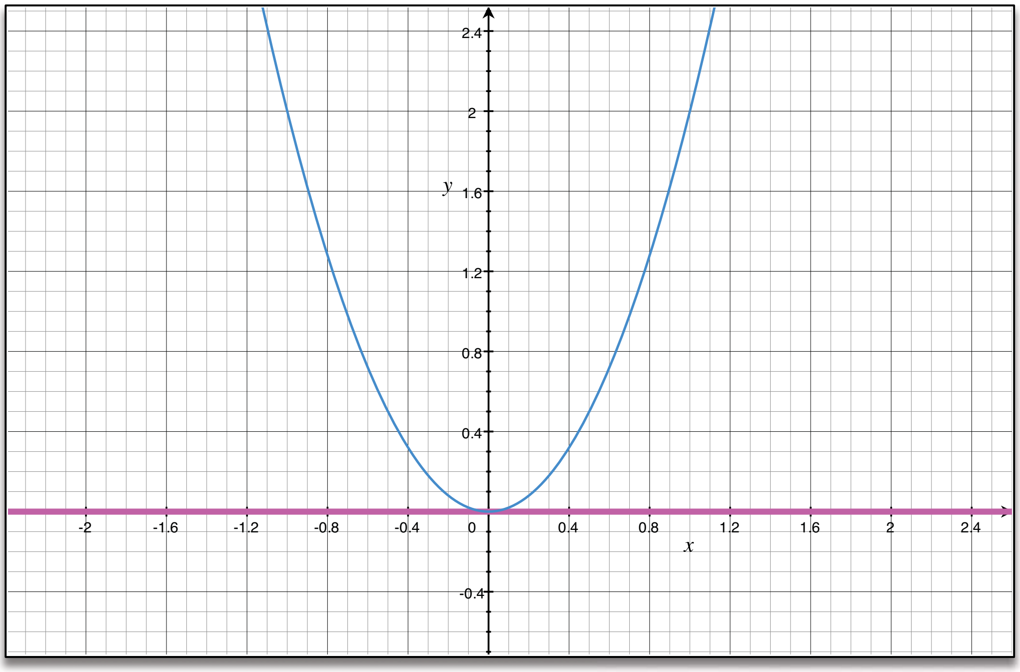
$x^2 = -7$ y no existe ningún número real que elevado al cuadrado de como resultado un número negativo. Por lo tanto, decimos que el sistema no tiene solución en los reales.



Como vemos claramente en la gráfica, el sistema es incosistente ya que las ecuaciones no se cortan.

xiv. Determine los puntos de intersección de la recta $y = 0$ con $y = 2x^2$

Sabemos que $y = 0$ entonces sutituimos en la ecuación cuadrática $y = 2x^2$ de donde $0 = 2x^2$ entonces $x = 0$ lo cual nos proporciona el único punto de intersección $(0{,}0)$



xv. Determine el punto de intersección de la recta $x - y = -2$ con la curva $y = x^2$

Despejamos: $y = x + 2$

Sustituimos en la ecuación cuadrática $x + 2 = x^2$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

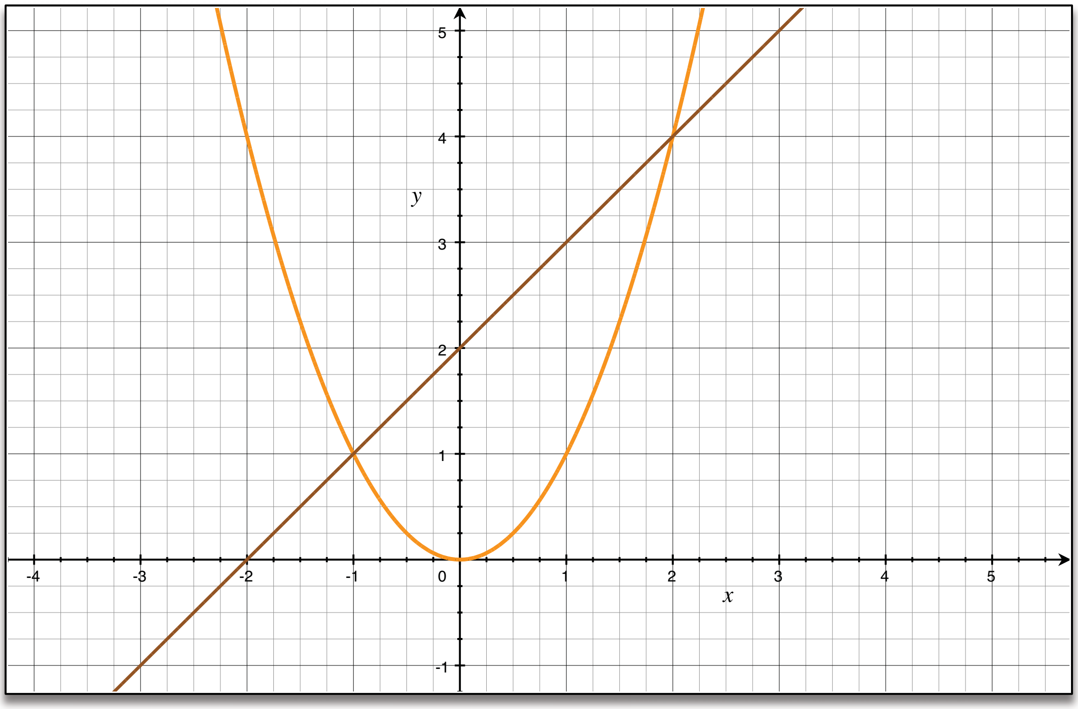
Factorizamos $(x - 2)(x + 1) = 0$

$$x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -1 .$$

Buscamos sus valores correspondientes de y en la ecuación lineal.

Con $x_1 = 2 : 2 - y = -2$ entonces $y_1 = 4$, por lo tanto la solución 1 es $(2,4)$

Con $x_2 = -1 : -1 - y = -2$ entonces $y_2 = 1$, por lo tanto la solución 2 es $(-1,1)$



VII. Obtenga el o los puntos solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y^2 = x \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - y + 2x = -1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - 6x - y = -8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ x^2 - y + 2x = -1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ -4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

Anexos

I. Tabla de Potencias

Potencia	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
8	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
9	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489
10	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401
11	2048	177147	4194304	48828125	362797056	1977326743	8589934592	31381059609
12	4096	531441	16777216	244140625	2176782336	13841287201	68719476736	282429536481
13	8192	1594323	67108864	1220703125	13060694016	96889010407	549755813888	2541865828329
14	16384	4782969	268435456	6103515625	78364164096	678223072849	4398046511104	22876792454961
15	32768	14348907	1073741824	30517578125	470184984576	4747561509943	35184372088832	205891132094649

Potencia	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1
1	10	11	12	13	14	15
2	100	121	144	169	196	225
3	1000	1331	1728	2197	2744	3375
4	10000	14641	20736	28561	38416	50625
5	100000	161051	248832	371293	537824	759375
6	1000000	1771561	2985984	4826809	7529536	11390625
7	10000000	19487171	35831808	62748517	105413504	170859375
8	100000000	214358881	429981696	815730721	1475789056	2562890625
9	1000000000	2357947691	5159780352	10604499373	20661046784	38443359375
10	10000000000	25937424601	61917364224	137858491849	289254654976	576650390625
11	100000000000	285311670611	743008370688	1792160394037	4049565169664	8649755859375
12	1000000000000	3138428376721	8916100448256	23298085122481	56693912375296	129746337890625
13	10000000000000	34522712143931	106993205379072	302875106592253	793714773254144	1946195068359370
14	100000000000000	379749833583241	1283918464548860	3937376385699290	11112006825558000	29192926025390600
15	1000000000000000	4177248169415650	15407021574586400	51185893014090800	155568095557812000	437893890380859000

II. Tabla de Logaritmos

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional Parts								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	33 5	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

III. Tabla de Antilogaritmos

ANTILOGARITMOS

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
:45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Bibliografía

1. Allen R, Angel; *Algebra Intermedia*; Pearson Prentice Hall; 7ª Edición (2008)

2. Amor, J.; *Teoría de Conjuntos para estudiantes de Ciencias*; Las Prensas de Ciencias; 2ª Edición (2005)

3. Carpinteyro E., et al; *Álgebra*; Grupo Editorial Patria; 3ª Edición (2012)

4. Cuellar, J.A.; *Álgebra*; McGraw Hill; 2ª Edición (2010)

5. Fisher R. W.; Mastering Essential *Math Skills Pre-Algebra Concepts;* Sturm Media and Communications. 1ª Edición (2009)

6. Jonard, N., et al; *Álgebra*; MacMillan; 1ª Edición (2013)

7. Kleiman, A.; et al; *Conjuntos Aplicaciones Matemáticas a la Administración*; Limusa; 1ª Edición (1972)

8. Lehmann J.: *Elementary and Intermediate Algebra: Functions & Authentic applications; Pearson.* 5ª Edición (2014)

9. Lovaglia, F., et al; *Álgebra*; Oxford University Press; 1ª Edición (1972)

10. Oteyza, E., et al; *Algebra*; Pearson, Prentice Hall; 3ª Edición (2007)

11. Oteyza, E., et al; *Aritmética y pre álgebra*; Prentice Hall (2004)

12. Oteyza, E., et al; *Conocimientos fundamentales de Matemáticas Algebra;* Pearson Educación; 1ª Edición (2006)

13. Oteyza, E., et al; *Temas Selectos de Matemáticas*; Prentice Hall; 1ª Edición (1998)

14. Peña, J.; *Álgebra en todas partes*; Fondo de Cultura Económica; 1ª Edición (1999)

15. Posamentier A., Salkind C.; *Challenging Problems in Algebra;* Dover Publications Inc.; 3ª Edición (1996)

16. Swokowski/Cole; *Álgebra*. Cengage Learning; 12ª Edición (2009)

17. Vargas E., et al; *Matemáticas Álgebra*; Santillana; 1ª Edición (2006)