Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Notas de apoyo para el curso de Álgebra Lineal I

Reporte de Actividad Docente

Que para obtener el título de:

Actuaria

Presenta:

Melania Stefania Spinoso Quiñones

Tutor
Dr. Fidel Casarrubias Segura
Julio 2017

1. Datos del alumno
Spinoso
Quiñones
Melania Stefania
5521870680
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Actuaría
307271215

2. Datos del tutor
Dr
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dra
Bertha María
Tomé
Arreola

4. Datos del sinodal 2
Dra
Diana
Avella
Alaminos

5. Datos del sinodal 3
Mat
Margarita Elvira
Chávez
Cano

6. Datos
Dr
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

7. Datos del trabajo escrito
Notas de apoyo para el curso
de Álgebra Lineal I
133 p
2017

Introducción

El trabajo que presentamos constituye el material de un curso de Álgebra Lineal I el cual se imparte como materia obligatoria para las carreras de Actuaría, Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM (planes 2000, 2006, 2015, plan 2002 y plan 1983, respectivamente).

En la preparación de estas notas nos hemos esforzado en satisfacer las necesidades teóricas de los alumnos de un curso de Álgebra Lineal I. Nuestro objetivo principal es proporcionar al alumno un trabajo en el que se desarrollan con gran rigor matemático todos los temas importantes de un curso de este tipo. Damos tratamiento riguroso a cada uno de los temas, haciendo énfasis en sus aspectos teóricos y damos también una cantidad suficiente de ejemplos que muestran el uso de las principales herramientas que se exponen en el curso. Los alumnos podrán recurrir a estas notas de apoyo como un texto básico.

Una lectura rápida al contenido del trabajo permite observar que en éste se cubren los materiales más importantes del temario oficial del curso de Álgebra Lineal I. Nuestro trabajo consta de seis capítulos. El primero de ellos trata someramente el tema de los campos algebraicos. En dicho apartado exponemos la definición de campo, así como las propiedades más básicas que poseen los elementos de los campos. Por ejemplo, enunciamos, y demostramos, las llamadas leyes de cancelación para la suma y el producto del campo algebraico.

En el capítulo dos introducimos la definición de espacio vectorial (sobre un campo algebraico) y demostramos las propiedades más básicas de los elementos de los espacios vectoriales, como las leyes de cancelación para la suma vectorial y para la multiplicación por escalares.

En este mismo apartado mostramos que algunos de los objetos matemáticos que se analizan en otros cursos son espacios vectoriales. Por ejemplo, mostramos que los espacios $\mathbb{R}^n$ que se estudian en la Geometría Analítica, y en el cálculo de varias variables, son espacios vectoriales. Mostramos también que los conjuntos de funciones de tipo $\mathcal{F}(X, K)$, dotados con las operaciones usuales de suma de funciones y de multiplicación por constantes, son ejemplos de espacios vectoriales, donde K es un campo algebraico y X es un conjunto (no vacío). Aprovechando este último ejemplo, mostramos al estudiante que al formalizar a la noción de matriz de tamaño $m \times n$ (con coeficientes en un campo algebraico K) con la noción de función $f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K$, obtenemos que el conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en un campo algebraico K es un espacio vectorial porque coincide con el espacio vectorial $\mathcal{F}(\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, K)$.

En este capítulo también se introduce la importante noción de subespacio vectorial y se prueban las propiedades más relevantes de los subespacios vectoriales. Se introduce la noción del subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores y se demuestran sus propiedades más importantes.

En el capítulo 3 definimos a los subconjuntos linealmente dependientes de un espacio vectorial. Damos una caracterización de la noción de independencia lineal. Introducimos la importante noción de base para un espacio vectorial y la noción de dimensión para espacios vectoriales que poseen una base finita. Finalizamos el capítulo demostrando varios resultados relacionados a la dimensión de espacios vectoriales de dimensión finita.

Los capítulos 4 y 5 tratan el tema de las transformaciones lineales.

En el capítulo 4 introducimos la importante noción de transformación lineal entre espacios vectoriales y demostramos sus principales propiedades. Demostramos el teorema de la dimensión y algunos otros resultados relacionados. Introducimos la noción de isomorfismo y demostramos resultados relacionados con los isomorfismos y la dimensión (para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita).

En el capítulo 5 tratamos el tema de la representación matricial de una transformación lineal, el de las matrices de coordenadas de un vector y el de las matrices de cambio de coordenadas. Demostramos las principales propiedades de estas importantes nociones y mostramos sus relaciones.

El tema de valores y vectores propios es desarrollado en el capítulo 6. Usamos la noción de subespacio vectorial invariante de una transformación lineal para motivar la noción de valor propio, y por ende, la noción de vector propio. En relación a la pregunta natural de la existencia de valores propios para operadores lineales, analizamos los casos de operadores lineales reales y complejos. Demostramos, por ejemplo, que todo operador lineal (no cero) definido en un espacio vectorial real de dimensión impar tiene por lo menos un valor propio. Introducimos también la noción de operador lineal diagonalizable y demostramos que un operador lineal es diagonalizable si y sólo si existe una base para el espacio dominio formada por vectores propios del operador lineal. Introducimos también la noción del polinomio característico y mostramos su uso para la búsqueda de valores propios de un operador lineal.

En la parte final de estas notas de apoyo se presenta un compendio de ejercicios enumerados en el orden de los capítulos, estos ejercicios fueron seleccionados para reforzar el conocimiento adquirido en el curso. Y en la bibliografía presentamos una lista breve de libros con los cuales los alumnos podrán complementar el material expuesto en estas notas.

Es importante mencionar que estas notas de apoyo son el resultado de los cursos que el tutor impartió en los semestres: 2002-I, 2003-I, 2004-I, 2005-I, 2007-I y 2009-I. Los manuscritos de clases de esos cursos ha sido puestos y mejorados en este trabajo.

Contenido

Capítulo 1

Campos

En este pequeño capítulo introduciremos la importante noción de campo que es esencial para introducir a los espacios vectoriales. La noción de campo abstrae todas las propiedades algebraicas del conjunto de los números reales (y que son comunes a otros conjuntos como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$) y son las que permiten probar en $\mathbb{R}$ todas las leyes del álgebra elemental.

1.1 Definición de campo algebraico

En esta parte introducimos la noción de campo y sus propiedades más básicas que nos serán muy útiles en las siguientes partes de estas notas.

1.1 Definición. Un campo es un conjunto K en el cual están definidas dos operaciones binarias: $+, \cdot : K \times K \to K$, que son usualmente llamadas *adición* y *multiplicación* del campo, y que tienen las siguientes propiedades:

C1. (*Ley de cerradura para la adición*)

$$\forall\ a, b \in K\ :\ a + b \in K.$$

C2. (*Ley de cerradura para la multiplicación*)

$$\forall\ a, b \in K\ :\ a \cdot b \in K.$$

C3. (*Ley conmutativa para la adición*)

$$\forall\ a, b \in K\ :\ a + b = b + a.$$

C4. (*Ley conmutativa para la multiplicación*)

$$\forall\ a, b \in K\ : a \cdot b = b \cdot a.$$

C5. (*Ley asociativa para la adición*)

$$\forall\ a, b, c \in K\ : (a + b) + c = a + (b + c).$$

C6. (*Ley asociativa para la multiplicación*)

$$\forall\ a, b, c \in K\ :\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

C7. (*Ley distributiva*)

$$\forall\ a, b, c \in K\ : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

C8. (*Existencia del neutro aditivo*)

Existe un elemento de K, que usualmente se denota con el símbolo 0_K ó simplemente 0, que posee la siguiente propiedad:

$$\forall\ a \in K : a + 0 = a.$$

El elemento 0 es llamado *neutro aditivo* de K.

C9. (*Existencia del neutro multiplicativo*).

Existe un elemento en K, denotado con el símbolo 1_K ó 1, que tiene las siguientes propiedades:

$$1 \neq 0 \quad \text{y} \quad \forall\ a \in K : a \cdot 1 = a.$$

Es costumbre llamar al elemento 1 *neutro multiplicativo* de K.

C10. Para todo $a \in K$ existe $a_1 \in K$ tal que $a + a_1 = 0$.

C11. Para todo $a \in K$ con $a \neq 0$ existe $a_2 \in K$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Antes de dar algunos ejemplos clásicos de campos, demostraremos algunas propiedades básicas que tienen los elementos de cualquier campo K.

Las primeras de estas propiedades son las llamadas leyes de cancelación.

1.2 Proposición (Leyes de cancelación)**.** *Sea K un campo. Las siguientes propiedades son válidas para cualesquiera elementos a, b y c de K.*

1. *$a + b = a + c$ implica que $b = c$.*

2. *Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot b = a \cdot c$ implica que $b = c$.*

Demostración. (1) Aplicando C10 al elemento a, podemos garantizar la existencia de un elemento a_1 en K tal que $a + a_1 = 0$. Notemos ahora que la igualdad $a + b = a + c$ implica que $a_1 + (a + b) = a_1 + (a + c)$. Utilizando la asociatividad de la adición (C5), podemos deducir que $(a_1 + a) + b = (a_1 + a) + c$. Como $a_1 + a = a + a_1 = 0$ (aplique C3 para convencerse de esto) y $(a_1 + a) + b = (a_1 + a) + c$, tenemos que $0 + b = 0 + c$. Aplicando ahora C8, obtenemos que $b = c$.
(2) Por C11, existe un elemento a_2 de K tal que $a \cdot a_2 = 1$ (como $a \neq 0$ tal propiedad es aplicable al elemento a). Como $a \cdot b = a \cdot c$, tenemos que $a_2 \cdot (a \cdot b) = a_2 \cdot (a \cdot c)$. Utilizando la asociatividad de la multiplicación (C6), podemos concluir que $(a_2 \cdot a) \cdot b = (a_2 \cdot a) \cdot c$. Como $a_2 \cdot a = a \cdot a_2 = 1$ (véase C4), de lo anterior deducimos que $1 \cdot b = 1 \cdot c$. Aplicando ahora C9, tenemos que $b = c$. □

Utilizando la ley de cancelación para la adición podemos demostrar la siguiente propiedad del elemento 0_K.

1.3 Proposición. *Supongamos que K es un campo. Para cada elemento $a \in K$, se tiene que*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Demostración. Como $0 + 0 = 0$ (esto es una consecuencia inmediata de C8), tenemos que $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (observe que la última igualdad está garantizada por C7). Así que $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Aplicando de nuevo C8, obtenemos que $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$. Por lo cual $(a \cdot 0) + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Aplicando ahora la ley de cancelación para la suma (véase la proposición anterior) podemos concluir que $a \cdot 0 = 0$. □

El resultado de la siguiente proposición nos será de suma utilidad para lograr establecer sobre buenas bases la importante noción de inverso aditivo.

1.4 Proposición. *Supongamos que K es un campo. Dado un elemento $a \in K$, existe uno y sólo un elemento $a_1 \in K$ con la propiedad de que $a + a_1 = 0$.*

Demostración. Aplicando C10 al elemento $a \in K$ garantizamos la existencia de al menos un elemento $a_1 \in K$ con la propiedad de que $a + a_1 = 0$.

Verifiquemos ahora que el elemento a_1 es el único que posee la anterior propiedad. Para este último propósito, supongamos que $a_2 \in K$ tiene la misma propiedad que posee a_1, esto es, supongamos que a_2 es tal que $a + a_2 =$

0. Tenemos entonces que $a + a_1 = a + a_2$. Por la ley de cancelación para la suma (véase la Proposición 1.2), lo anterior implica que $a_1 = a_2$. $\square$

1.5 Definición. Supongamos que K es un campo. Dado $a \in K$, el símbolo $-a$ denotará al único elemento en K con la propiedad de que $a + (-a) = 0$. Como es una costumbre, llamaremos a $-a$ el *inverso aditivo* en K de a.

Con esta definición sabemos ya que los elementos -1 y -0 son los inversos aditivos de los elementos 1 y 0 de un campo K, respectivamente; por esta razón, los números -1 y -0 son los únicos elementos de K que tienen las siguientes propiedades (en forma respectiva):

$$1 + (-1) = 0, \qquad 0 + (-0) = 0.$$

Como es bien conocido, sucede que $-0 = 0$, y la razón de ello está en lo postulado en C8 y en la definición de inverso aditivo: recordemos que -0 es el único elemento de K que tiene la propiedad de que $0 + (-0) = 0$, pero observando C8 notamos que 0 tiene la misma propiedad. Como -0 es el único elemento de K que tiene esta propiedad, la única opción es que $0 = -0$. Esta curiosa propiedad que tiene el elemento 0 de todo campo K (la de ser su propio inverso aditivo), la tienen también algunos elementos distintos de cero de algunos campos; esto lo veremos en la lista de ejemplos de campos que daremos un poco más adelante.

1.6 Proposición. *Supóngase que K es un campo. Para cada elemento $a \in K$ con $a \neq 0$, existe uno y sólo un elemento $a_2 \in K$ con la siguiente propiedad: $a \cdot a_2 = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Por C11, aplicado al elemento a, existe al menos un elemento $a_2 \in K$ con la propiedad de que $a \cdot a_2 = 1$. Verifiquemos ahora que tal elemento es el único que satisface esta condición. Para comprobarlo, supongamos que $a_3 \in K$ tiene la misma propiedad que posee a_2, esto es, supongamos que a_3 es tal que $a \cdot a_3 = 1$. Entonces $a \cdot a_2 = a \cdot a_3$. Aplicando ahora la ley de cancelación para la multiplicación (véase la Proposición 1.2), tenemos que $a_2 = a_3$. $\square$

El resultado de esta última proposición nos permite establecer la siguiente definición.

1.7 Definición. Sea K un campo. Dado $a \neq 0$, el símbolo a^{-1} denotará al único elemento en K con la propiedad de que $a \cdot a^{-1} = 1$. El número a^{-1} es llamado el *inverso multiplicativo* de a en K.

Una vez establecidas las Definiciones 1.5 y 1.7 podemos definir la resta y la división (por números diferentes de 0) en cualquier campo K.

1.8 Definición. Sea K un campo y sean $a, b \in K$. Definimos al elemento $a - b$ como el elemento $a + (-b)$ de K. Asimismo, si $b \neq 0$ entonces definimos $\frac{a}{b}$ como el elemento $a \cdot b^{-1}$ (es decir, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$) del campo K.

Observe que si b es un elemento de K distinto del cero de K entonces $\frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1}$. Por esta razón ocurre que $\frac{1}{b} \cdot b = 1$ (puesto que, como hemos visto, $\frac{1}{b} = b^{-1}$ y b^{-1} es el inverso multiplicativo del número b).

Ahora exponemos, y demostramos, algunas de las propiedades más elementales de los conceptos que hemos definidosÁ hasta este momento.

1.9 Proposición. *Las siguientes propiedades son válidas para cualesquiera elementos a, b, c y d en un campo K.*

1. $-(-a) = a$.
2. *Si* $a \neq 0$ *entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.
3. $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
4. $-(a \cdot b) = (-a)b = a(-b)$.
5. *Si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
6. *Si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$ *entonces* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.
7. *Si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$ *entonces* $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
8. *Si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ *entonces* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} = \dfrac{b}{a}$.

Demostración. (1) Por definición, $-(-a)$ es el único elemento de K que tiene la propiedad de que $-a + [-(-a)] = 0$, así que para demostrar que $-(-a) = a$ bastará demostrar que $-a + a = 0$ (al ser $-(-a)$ el único número con la propiedad de que al sumarselo a $-a$ nos da cero, si sucede que $-a + a = 0$, necesariamente deberá ocurrir que $-(-a) = a$). Observe ahora que la

propiedad $-a+a=0$ es cierta por la propia definición del número $-a$ (véase la Definición 1.5).
(2) Primeramente observemos que si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \neq 0$ (la razón de hacer esta observación es que para hablar de $(a^{-1})^{-1}$, necesariamente debemos de verificar primero que a^{-1} es distinto de 0_K, puesto que, recuerde, que el inverso multiplicativo de un elemento de K solamente existe para elementos distintos del 0_K). En efecto, si $a^{-1}=0$ entonces $1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$ (véase la Proposición 1.3). Con lo cual concluiríamos que $1 = 0$, pero esto último contradice C9. Así que si $a \neq 0$ necesariamente $a^{-1} \neq 0$. Este hecho nos permite considerar a $(a^{-1})^{-1}$. Demostremos ahora que $(a^{-1})^{-1} = a$.

Notemos que por la unicidad de $(a^{-1})^{-1}$ (éste es el único elemento de K tal que $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$), para demostrar que $a = (a^{-1})^{-1}$ bastará demostrar que $a^{-1} \cdot a = 1$. Obsérvese ahora que esta última propiedad es consecuencia inmediata de la propia definición de a^{-1} (véase Definición 1.7).
(3) Sólo necesitamos verificar que $(a+b)+[(-a)+(-b)] = 0$. Comprobemos ahora que esto último sucede.

$$\begin{aligned}
(a+b)+[(-a)+(-b)] &= (a+b)+[(-b)+(-a)] && \text{(C3)}\\
&= [(a+b)+(-b)]+(-a) && \text{(C5)}\\
&= [a+(b+(-b))]+(-a) && \text{(C5)}\\
&= [a+0]+(-a) && \text{(definición de } -b\text{)}\\
&= a+(-a) && \text{(C8)}\\
&= 0 && \text{(definición de } -a\text{)}
\end{aligned}$$

(4) Por la unicidad del elemento $-(ab)$, sólo necesitamos verificar que $ab + [(-a)b] = 0$ y que $ab + [a(-b)] = 0$. Los siguientes argumentos justifican estos dos hechos.

$$\begin{aligned}
ab+[(-a)b] &= ba+b(-a) && \text{(C4)}\\
&= b[a+(-a)] && \text{(C7)}\\
&= b \cdot 0 && \text{(definición de } -a\text{)}\\
&= 0 && \text{(Proposición 1.3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ab+[a(-b)] &= a[b+(-b)] && \text{(C7)}\\
&= a \cdot 0 && \text{(definición de } -b\text{)}\\
&= 0 && \text{(Proposición 1.3)}
\end{aligned}$$

(5) Como $a \neq 0 \neq b$, tenemos que $a \cdot b \neq 0$. Esto justifica la existencia de $(ab)^{-1}$. Notemos ahora que para demostrar la igualdad $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,

bastará demostrar que $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = 1$. Pero

$$
\begin{array}{rcll}
(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) & = & [(a \cdot b) \cdot a^{-1}] \cdot b^{-1} & \text{(C6)} \\
& = & [(b \cdot a) \cdot a^{-1}] \cdot b^{-1} & \text{(C4)} \\
& = & [b \cdot (a \cdot a^{-1})] \cdot b^{-1} & \text{(C6)} \\
& = & [b \cdot 1] \cdot b^{-1} & (\text{definición de } a^{-1}) \\
& = & b \cdot b^{-1} & \text{(C9)} \\
& = & 1 & (\text{definición de } b^{-1})
\end{array}
$$

(6)

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} & = & a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} & \left(\text{definición de } \dfrac{a}{b} \text{ y de } \dfrac{c}{d}\right) \\
& = & (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 & \text{(C9)} \\
& = & (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot d^{-1}) + (c \cdot d^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) & (\text{definición de } d^{-1} \text{ y de } b^{-1}) \\
& = & a \cdot (b^{-1} \cdot d) \cdot d^{-1} + c \cdot (d^{-1} \cdot b) \cdot b^{-1} & \text{(C6)} \\
& = & a \cdot (d \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1} + c \cdot (b \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1} & \text{(C4)} \\
& = & (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) + (c \cdot b) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) & \text{(C6)} \\
& = & (a \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1} + (c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} & (\text{inciso (5)}) \\
& = & (a \cdot d + c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} & \text{(C7)} \\
& = & \dfrac{ad + bc}{bd} & \left(\text{definición de } \dfrac{ad+bc}{bd}\right)
\end{array}
$$

(7)

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} & = & (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) & \left(\text{definición de } \dfrac{a}{b} \text{ y de } \dfrac{c}{d}\right) \\
& = & a \cdot (b^{-1} \cdot c) \cdot d^{-1} & \text{(C6)} \\
& = & a \cdot (c \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1} & \text{(C4)} \\
& = & (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) & \text{(C6)} \\
& = & (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} & (\text{inciso (5)}) \\
& = & \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d} & \left(\text{definición de } \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)
\end{array}
$$

(8) Bastará verificar los siguientes dos hechos: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} = 1$ y $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{a^{-1}}{b^{-1}} &= (a \cdot b^{-1})(a^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1}) \\
&= a \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot b \\
&= a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot b \\
&= (a \cdot a^{-1})(b^{-1} \cdot b) \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} &= \frac{a \cdot b}{b \cdot a} && \text{(inciso (7))} \\
&= (a \cdot b) \cdot (b \cdot a)^{-1} && \left(\text{definición de } \frac{a \cdot b}{b \cdot a}\right) \\
&= (a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) && \text{(Proposición 1.9 inciso 5)} \\
&= (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) && \text{(C4)} \\
&= (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} && \text{(Proposición 1.9 inciso 5)} \\
&= 1 && \text{(propiedad del inverso multiplicativo)}
\end{aligned}$$

□

1.10 Ejemplos.

1. Supongamos que el conjunto K está formado por dos elementos *distintos* que denotaremos con los símbolos 0 y 1; es decir, $K = \{0, 1\}$. En el conjunto K podemos definir las operaciones binarias $+ : K \times K \to K$ y $\cdot : K \times K \to K$ por medio de las relaciones: $+(0,0) = 0$, $+(1,0) = 1$, $+(0,1) = 1$, $+(1,1) = 0$ y $\cdot(0,0) = 0$, $\cdot(1,0) = 0$, $\cdot(0,1) = 0$, $\cdot(1,1) = 1$. Las siguientes tablas resumen las anteriores relaciones.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Un rápido análisis nos muestra que 0 es el neutro aditivo de K y que 1 es el neutro multiplicativo. Es claro también que las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ tienen las propiedades Ci para cada $i = 1, 2, \ldots, 11$. Note que el elemento 1 satisface que $1 + 1 = 0$ (y por ello, $1 = -1$). Por todo lo anterior, podemos concluir que el número $n = 2$ es el más pequeño de los números naturales tales que $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} = 0$ (recuerde que en un campo K siempre se tiene por definición que $1 \neq 0$). A este número natural se le llama característica del campo K. Existen sin embargo campos para los cuales no existe un número natural n tal que $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = 0$. Este tipo de campos son llamados campos de característica cero. En los siguientes incisos establecemos algunos ejemplos de campos de característica cero.

2. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con sus operaciones de suma usual y su multiplicación usual es un campo algebraico.

3. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con sus operaciones de suma usual y su multiplicación usual es un campo algebraico.

4. Consideremos el conjunto $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. En el conjunto $\mathbb{C}$ definimos las siguientes operaciones, para cada $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$:

$$(a,b)+(c,d) = (a+b, c+d) \quad \text{y} \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc),$$

donde $a+b$ y ac son la suma y el producto usual de números reales. El conjunto $\mathbb{C}$ junto con estas operaciones es un campo algebraico. El elemento neutro de la adición de $\mathbb{C}$ es $(0,0)$ y el neutro multiplicativo es el elemento $(1,0)$. Obsérvese que si $i = (0,1)$ entonces $i^2 = (-1,0)$.

Si denotamos con x al elemento $(x,0)$ entonces cualquier elemento $(a,b) \in \mathbb{C}$ puede ser escrito en la forma: $a+bi$. Además, $i^2 = -1$. De esta manera,

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}\}$$

(donde $i = (0,1)$) y las operaciones de $\mathbb{C}$ pueden ser escritas en la forma siguiente:

$$(a+bi)+(c+di) = a+b+(c+d)i \quad \text{y} \quad (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Como bien sabemos $\mathbb{C}$ es llamado el campo de los números complejos y sus elementos números complejos. Si denotamos con z al número complejo $a+bi$, es decir, si $z = a+bi$ entonces el número real a es llamado parte real de z y es denotada con el símbolo $Re(z)$. El número real b es llamado parte imaginaria de z y es denotada con el símbolo $Im(z)$. Al número complejo $\bar{z} = a-bi$ se le llama conjugado de z y al número real $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ se conoce con el nombre de módulo de z. Note que si el número complejo $z \neq 0 = (0,0)$ entonces su inverso multiplicativo es el número complejo siguiente:

$$z^{-1} = \tfrac{a}{a^2+b^2} + \tfrac{-b}{a^2+b^2}i = \tfrac{\bar{z}}{|z|^2}$$

5. Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Definimos al conjunto de los números gaussianos como el conjunto
$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{p + q\sqrt{a} : p, q \in \mathbb{Q}\}.$$
En el conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ podemos considerar las siguientes dos operaciones binarias:
$$(p + q\sqrt{a}) + (x + y\sqrt{a}) = (p + x) + (q + y)\sqrt{a}$$
y
$$(p + q\sqrt{a}) \cdot (x + y\sqrt{a}) = (px + qya) + (py + qx)\sqrt{a}.$$
El conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ junto con estas dos operaciones es un campo algebraico. El neutro multiplicativo es el número gaussiano $1 = 1 + 0\sqrt{a}$ y el neutro aditivo lo es el número $0 = 0 + 0\sqrt{a}$. Si $(p + q\sqrt{a}) \neq 0 + 0\sqrt{a}$ entonces el inverso multiplicativo es el número gaussiano:
$$(p + q\sqrt{a})^{-1} = \tfrac{p}{p^2 - q^2 a} + \tfrac{-q}{p^2 - q^2 a}\sqrt{a}.$$

Terminamos este pequeño capítulo sobre campos algebraicos comentando que, a menos que se diga explícitamente lo contrario, todos los campos considerados en este trabajo serán siempre campos de característica cero.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

En esta parte introduciremos la importante noción de espacio vectorial sobre un campo K. Para motivar la noción de espacio vectorial recordemos y analicemos las propiedades más básicas del espacio de ternas ordenadas o espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ que se estudia frecuentemente en cursos elementales de cálculo diferencial e integral de varias variables.

Recordemos que el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z); esto es, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Como sabemos dos ternas ordenadas $(x, y, z) = (a, b, c)$ *son iguales si y sólo si* $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Como es bien sabido, en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ podemos definir una forma de sumar dos ternas ordenadas utilizando para ello la suma que tiene el campo de los números reales:

$$(x, y, z) + (a, b, c) := (x + a, y + b, z + c). \tag{1}$$

También podemos multiplicar ternas ordenadas de $\mathbb{R}^3$ por números reales:

$$r\,(x, y, z) := (rx, ry, rz), \tag{2}$$

De la misma definición de las anteriores operaciones podemos notar dos hechos importantes:

1. La suma en (1) define una operación binaria $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y (2) define una función $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2. Debido a que (1) y (2) utilizan para su definición a la suma y multiplicación de números reales, estas operaciones *heredan* de las operaciones del campo $\mathbb{R}$ muchas de sus propiedades. En particular, las siguientes propiedades son válidas:

(a) Si $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (a, b, c) + (x, y, z);$$

(b) Si $(x, y, z), (a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$(x, y, z) + \big((a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)\big) = \big((x, y, z) + (a, b, c)\big) + (\alpha, \beta, \gamma);$$

(c) El elemento $\vec{0} = (0, 0, 0)$ es el único elemento de $\mathbb{R}^3$ que tiene la siguiente propiedad:

Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, se tiene que* $(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$.

(d) Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ entonces el elemento $(-x, -y, -z)$ de $\mathbb{R}^3$ es el único elemento que tiene la propiedad de que $(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (0, 0, 0)$.

(e) Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1\,(x, y, z) = (x, y, z)$.

(f) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(\alpha\,\beta)(x, y, z) = \alpha\,(\beta\,(x, y, z)).$$

(g) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$(\alpha + \beta)(x, y, z) = \alpha\,(x, y, z) + \beta\,(x, y, z).$$

(h) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $(x, y, z), (a.b, c) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\alpha\big((x, y, z) + (a, b, c)\big) = \alpha\,(x, y, z) + \alpha\,(a, b, c).$$

Todas estas propiedades son comunes a otros conjuntos que tienen estructuras aditivas y multiplicativas parecidas a las de $\mathbb{R}^3$; y todas ellas son ejemplos de la noción de espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{R}$). La noción de espacio vectorial surge simplemente de abstraer estas propiedades que tiene $\mathbb{R}^3$ respecto del campo de los números reales $\mathbb{R}$. En la siguiente sección establecemos formalmente esta noción.

2.1 Espacios vectoriales

2.1 Definición. Supongamos que K es un campo. Un *espacio vectorial sobre el campo* K es un conjunto V en el cual están definidas dos operaciones, la adición de vectores y la multiplicación por escalares, de tal modo que a cada par de elementos $u, v \in V$ se les asocia un único elemento $u + v \in V$, y para cada $u \in V$ y cada $\alpha \in K$, existe un único elemento $\alpha u \in V$, tales que:

1. (*Conmutatividad de la adición de vectores*).

   Para cada $u, v \in V$, se tiene que $u + v = v + u$

2. (*Asociatividad de la adición de vectores*).

   Para cada $u, v, w \in V$ se tiene que $u + (v + w) = (u + v) + w$

3. (*Propiedad del neutro aditivo*).

   Existe un elemento $\vec{o} \in V$ con la siguiente propiedad:

   $$\forall\, u \in V : u + \vec{o} = u$$

4. (*Existencia de inversos aditivos*).

   Para cada $u \in V$ existe $u' \in V$ tal que $u + u' = \vec{o}$.

5. (*Propiedad del elemento neutro multiplicativo del campo*).

   Para cada $u \in V$ se tiene que $1 \cdot u = u$; donde 1 es el elemento neutro multiplicativo del campo K.

6. (*Asociatividad de la multiplicación por escalares*).

   Para cada $\alpha, \beta \in K$ y cada $u \in V$ se tiene que $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.

7. (*Propiedad distributiva*).

   Para cada $\alpha, \beta \in K$ y cada $u \in V$ se tiene que $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

8. (*Propiedad distributiva*).

   Para cada $\alpha \in K$ y cada $u, v \in V$ se tiene que $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Como es de esperarse, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ es un ejemplo de espacio vectorial (sobre el campo $\mathbb{R}$). El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un caso particular de un ejemplo más general de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; que a su vez es un caso particular de una construcción más general de espacios vectoriales. El primer ejemplo de la siguiente serie de ejemplos muestra esto último.

2.2 Ejemplos.

1. Si K es un campo, entonces podemos ver a K como un espacio vectorial sobre K simplemente definiendo $V = K$.

2. Si K es un campo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$K^n = \begin{cases} K, & \text{si } n = 1; \\ \underbrace{K \times K \times ... \times K}_{n-factores}, & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

es decir, $K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in K \text{ para toda } i = 1, 2, \ldots, n\}$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

La estructura de espacio vectorial de K^n sobre el campo K es la siguiente:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

A continuación verificamos que K^n es en verdad un espacio vectorial sobre el campo K. La demostración está basada en las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación del campo K. En las diferentes pruebas omitiremos escribir explícitamente cuál es la propiedad que se aplica. Dejamos al lector escribir la propiedad que se aplica.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in K$, $u = (x_1, x_2, ..., x_n), v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $w = (b_1, b_2, ..., b_n)$ elementos de K^n.

(a) $u+v = (x_1, x_2, ..., x_n)+(a_1, a_2, ..., a_n) = (x_1+a_1, x_2+a_2, ..., x_n+a_n) = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n) = (a_1, a_2, ...a_n) + (x_1, x_2, ..., x_n) = v + u$

(b) $u + (v + w) = (x_1, x_2, ..., x_n) + \big((a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n)\big) = (x_1, x_2, ..., x_n)+(a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n) = (x_1+(a_1+b_1), x_2+(a_2+b_2), ..., x_n + (a_n + b_n)) = ((x_1 + a_1) + b_1, (x_2 + a_2) + b_2, ..., (x_n + a_n) + b_n) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, ..., x_n + a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = \big((x_1, x_2..., x_n) + (a_1, a_2, ..., a_n)\big) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (u + v) + w$

(c) Definamos $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, donde 0 es el neutro aditivo del campo K. Por la definición de K^n es claro que $\vec{0} \in K^n$. Además, para cada $u \in K^n$ se tiene que: $u + \vec{0} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (0_1, 0_2, ..., 0_n) = (x_1 + 0_1, x_2 + 0_2, ..., x_n + 0_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = u$

(d) $1 \cdot u = 1(x_1, x_2, ..., x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, ..., 1 \cdot x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = u$

(e) $(\alpha\beta)u = (\alpha\beta)(x_1, x_2, ..., x_n) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, ..., (\alpha\beta)x_n) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), ..., \alpha(\beta x_n)) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n)$
$= \alpha(\beta(x_1, x_2, ..., x_n)) = \alpha(\beta u)$

(f) $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, x_2, ...x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, ..., (\alpha + \beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, ..., \alpha x_n + \beta x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n) = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha u + \beta u$

(g) $\alpha(u+v) = \alpha((x_1, x_2, ...x_n)+(a_1, a_2, ..., a_n)) = \alpha(x_1+a_1, x_2+a_2, ..., x_n+a_n) = (\alpha(x_1 + a_1), \alpha(x_2 + a_2), ..., \alpha(x_n + a_n)) = (\alpha x_1 + \alpha a_1, \alpha x_2 + \alpha a_2, ..., \alpha x_n + \alpha a_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)+$
$(\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n) = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = \alpha u + \alpha v$

(h) Para cada elemento $u = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ definamos

$$u' = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Claramente $u' \in K^n$. Además, se tiene que $u + u' = (x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., x_n) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), ..., x_n + (-x_n)) =$
$(0, 0, ..., 0) = \vec{0}$

3. El conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$ puede ser visto como un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Para poder hacerlo esto consideremos las siguientes operaciones: $x \boxplus y = x \cdot y$ ($x \cdot y$ es la multiplicación en $\mathbb{R}$) y $\alpha \boxdot x = x^\alpha$.

   El espacio vectorial es el conjunto $V = \mathbb{R}^+$ y el campo K es el campo de los números reales $\mathbb{R}$. La operación $\boxplus$ es la suma de vectores y la operación $\boxdot$ es la *multiplicación por escalares*. Con estas operaciones el conjunto $\mathbb{R}^+$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. A continuación demostramos esto (de nuevo dejamos al lector establecer cuáles son las propiedades del campo $\mathbb{R}$ que son usadas en algunas partes de la demostración).

   Supongamos que $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ y que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Entonces

   (a) $x \boxplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \boxplus x$

   (b) $x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (x \boxplus y) \cdot z = (x \boxplus y) \boxplus z$

   (c) Definamos $\vec{0} = 1$. Es claro que $\vec{0} \in \mathbb{R}^+$. Además, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $x \boxplus \vec{0} = x \cdot 1 = x$.

   (d) $1 \boxdot x = x^1 = x$

   (e) $(\alpha \cdot \beta) \boxdot x = x^{(\alpha \cdot \beta)} = x^{(\beta \cdot \alpha)} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \boxdot (x^\beta) = \alpha \boxdot (\beta \boxdot x)$

   (f) $(\alpha + \beta) \boxdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = (\alpha \boxdot x) \cdot (\beta \boxdot x) = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\beta \boxdot x)$

   (g) $\alpha \boxdot (x \boxplus y) = (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = (x^\alpha) \boxplus (y^\alpha) = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\alpha \boxdot x)$.

   (h) Si $x \in \mathbb{R}^+$ definimos $x' = \frac{1}{x}$. Es claro que $x' \in \mathbb{R}^+$. Además, $x \boxplus x' = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \vec{0}$.

4. Sean X un conjunto no vacío y K un campo arbitrario. Definimos al conjunto $F(X, K) = \{f : X \to K : \text{ f es una función } \}$. En este conjunto consideramos las siguientes operaciones:

- Para cada $f, g \in F(X, K)$, $f + g : X \to K$ es la única función que tiene la regla de asociación $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in X)$.
- Por otro lado, si $f \in F(X, K)$ y $\alpha \in K$ entonces $\alpha \cdot f : X \to k$ es la única función cuya regla de asociación es $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ $(x \in X)$.

El conjunto $F(X, K)$ con esta estructura es un espacio vectorial sobre K. Demostremos esta afirmación.

(a) Sean $f, g \in F(X, K)$. Como $f + g$ y $g + f$ son funciones con dominio X y contradominio K, bastará demostrar que tienen la misma regla de asociación. Para demostrar esto último, consideremos un elemento arbitrario $x \in X$. Entonces

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Por lo tanto, $f + g = g + f$.

(b) Sean $f, g, h \in F(X, K)$. Como $f + (g + h)$ y $(f + g) + h$ son funciones con dominio X y contradominio K, bastará demostrar que tienen la misma regla de asociación. Para demostrar esto último, consideremos un elemento arbitrario $x \in X$. Entonces $(f+(g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) = ((f + g) + h)(x)$. Por lo tanto $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(c) Definamos $\vec{0}$ como la función $\vec{0} : X \to K$ cuya regla de asociación es $\vec{0}(x) = 0_K$ para cada $x \in X$. Supongamos que $f \in F(X, K)$. Al igual que en los casos anteriores para demostrar que $f + \vec{0} = f$ bastará demostrar que las funciones $f + \vec{0}$ y f tienen la misma regla de asociación. Para hacer esto último, consideremos un elemento cualquiera $x \in X$, entonces $(f + \vec{0})(x) = f(x) + \vec{0}(x) = f(x) + 0_K = f(x)$. Por lo tanto, $f + \vec{0} = f$.

(d) Sean $f \in F(X, K)$ y $x \in X$ elementos arbitrarios. Entonces $(1 \cdot f)(x) = 1\, f(x) = f(x)$. Por lo tanto $1 \cdot f = f$.

(e) Supongamos que $f \in F(X, K)$ y que $\alpha, \beta \in K$. Supongamos también que $x \in X$ es cualquier elemento. Entonces $((\alpha\beta) \cdot f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha(\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(x)$. En consecuencia, $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$.

(f) Supongamos que $f \in F(X, K)$ y que $\alpha, \beta \in K$. Supongamos también que $x \in X$ es cualquier elemento. Entonces $((\alpha + \beta) \cdot f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha \cdot f)(x) + (\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x)$. Por lo tanto, $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$.

(g) Sean $f, g \in F(X, K)$ y $\alpha \in K$. Supongamos que x es cualquier elemento de X. Entonces $(\alpha \cdot (f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) = (\alpha \cdot f + \alpha \cdot g)(x)$. Por lo tanto, $\alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

(h) Sea $f \in F(X, K)$. Definamos $f' : X \to K$ como la función cuya regla de asociación es $f'(x) = -f(x)$ para cada $x \in X$. Entonces para cada $x \in X$ se tiene que $(f + f')(x) = f(x) + f'(x) = f(x) + (-f(x)) = 0_K = \vec{0}(x)$. Por lo tanto, $f + f' = \vec{0}$.

5. Supongamos que K es un campo. Un caso particular del ejemplo anterior es el espacio vectorial de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el campo K. Este espacio vectorial es el espacio vectorial

$$F(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, K)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$. Debido a que los elementos de $F(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, K)$ son funciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ en el campo K, un elemento típico $f : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$ de $F(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, K)$ está completamente determinado por su valor en cada uno de los mn elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} = \{(i, j) : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$. Una manera de tener presente a todos los valores $f(i, j)$ de la función f es escribirlos en un arreglo rectángular de la siguiente forma:

$$f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde $a_{ij} = f(i, j)$ el valor de f en el elemento (i, j) de $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. A cualquier arreglo de tipo (2.1) se le acostumbra llamar *matriz de tamaño* $m \times n$ *con coeficientes en* K. Al espacio vectorial $F(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, K)$ se le denota con los símbolos $M_{m \times n}(K)$ y se le suele llamar *espacio vectorial de matrices de tamaño* $m \times n$ *con coeficientes en el campo* K.

6. Un polinomio con coeficientes en un campo fijo K es una expresión de la forma: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot + a_n x^n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_0, \ldots, a_n \in K$. Si todos los coeficientes $a_0, \ldots, a_n = 0_K$ entonces diremos que el polinomio $p(x)$ es el polinomio cero y escribiremos $p(x) = 0$. Definimos el grado de este polinomio como -1. Si $p(x) = a_0$ para algún $a_0 \in K \setminus \{0_K\}$ entonces diremos que el polinomio $p(x)$ es un polinomio constante y que su grado es

cero[1]. Por otro lado, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n$ no es un polinomio constante (y por eso no es el polinomio cero) entonces definimos el grado de $p(x)$ (o de p)[2] como el número $grad(p(x)) = \max\{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0_K\}$. Como es usual, diremos que dos polinomios son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de potencias iguales son iguales.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en K es denotado con $P(K)$ y el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en K y de grado a lo más $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es denotado con $P_n(K)$.

Ambos conjuntos son espacios vectoriales sobre el campo K si en ellos consideramos las siguientes operaciones.

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdot + b_nx^n$ y $\alpha \in K$, entonces definimos:

(a) $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdot + (a_n + b_n)x^n$;

(b) $\alpha p\,(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdot + \alpha a_nx^n$.

7. Supongamos que K es un campo y que V es un conjunto con un único elemento x. Si en V definimos la suma: $x + x = x$, y la multiplicación por escalares: $\alpha \cdot x = x$ para cada $\alpha \in K$, entonces V es un espacio vectorial sobre el campo K. Como el único elemento de V debe ser el inverso aditivo de V, es común escribir $V = \{\vec{0}\}$ (es decir, $x = \vec{0}$). El espacio V es llamado el espacio (trivial) cero definido sobre el campo K.

2.2 Propiedades básicas de los espacios vectoriales

En esta sección demostraremos las propiedades más básicas de los elementos de los espacios vectoriales. Iniciamos con la siguiente proposición.

2.3 Proposición. *Sea $(V, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial.*

1. *Existe un único elemento $\vec{0}$ en V que tiene la siguiente propiedad:*

$$\forall\, v \in V \,:\, v + \vec{0} = v. \tag{2.2}$$

[1]Obsérvese que el polinomio cero es un polinomio constante pero su grado es -1.

[2]Cuando el campo K es un conjunto infinito, al polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n$ se le indentifica con la función $p : K \to K$ cuya regla de asociación es: $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdot + a_nz^n$ para cada $z \in K$. En este caso, la notación usual para $p(x)$ es p.

2. Para cada $v \in V$ existe un único $v' \in V$ tal que $v + v' = \vec{0}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. La propiedad (3) de la definición 2.1 muestra que por lo menos existe un elemento $\vec{0}$ en V que tiene la propiedad (2.2). De esta forma, basta probar la unicidad de $\vec{0}$. Supongamos que tanto $\vec{0}$ como $\vec{0}'$ satisfacen (2.2). Como $\vec{0}$ tiene la propiedad (2.2), $\vec{0}' = \vec{0}' + \vec{0}$. Por otro lado, $\vec{0}'$ también tiene la propiedad (2.2); entonces $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}'$. Por lo tanto $\vec{0}' = \vec{0}$.

2. Sea $u \in V$ arbitrario. Por definición de espacio vectorial sabemos ya que existe por lo menos un $u_0 \in V$ tal que $u + u_0 = \vec{0}$.
   Para probar que es único, supongamos que $u_1 \in V$ es tal que $u + u_1 = \vec{0}$. Entonces:

$$\begin{aligned} u_0 = u_0 + \vec{0} &= u_0 + (u + u_1) \\ &= (u_0 + u) + u_1 \\ &= \vec{0} + u_1 \\ &= u_1 \end{aligned}$$

□

Por la proposición anterior podemos llamar *neutro aditivo de V* al elemento $\vec{0}$ que tiene la propiedad (1) enunciada en la proposición 2.3. Además, para cualquier elemento $v \in V$ al elemento $v' \in V$ tal que $v + v' = \vec{0}$ se le llama *inverso aditivo de v en V* y se le denota con los símbolos $-v$.

La siguiente proposición tiene otras propiedades básicas de los elementos de un espacio vectorial.

2.4 Proposición. *Sea $(V, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial. Entonces*

1. (Ley de cancelación para la suma de vectores)

   Si $u, v, w \in V$ y $u + v = u + w$, entonces $v = w$.

2. (Primera ley de cancelación para el producto escalar)

   Si $\alpha \neq 0_K$ y $\alpha u = \alpha v$, entonces $u = v$.

3. Las siguientes condiciones son equivalentes para cualesquiera $u \in V$ y $\alpha \in K$:

   (a) $\alpha = 0_K$ *ó* $u = \vec{0}$.

   (b) $\alpha \cdot u = \vec{0}$

4. (Segunda ley de cancelación para el producto escalar)

Si $u \neq \vec{0}$ *y* $\alpha u = \beta u$*, entonces* $\alpha = \beta$

5. $\forall\, \alpha \in K\ \forall\, u \in V : -(\alpha u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$.

DEMOSTRACIÓN.

1.

$$\begin{array}{rrcl} & u+v &=& u+w \\ \Rightarrow & (-u)+(u+v) &=& (-u)+(u+w) \\ \Rightarrow & (u+(-u))+v &=& (u+(-u))+w \\ \Rightarrow & \vec{0}+v &=& \vec{0}+w \\ \Rightarrow & v &=& w \end{array}$$

2. Como $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in K$ tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_K$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha u &=& \alpha v \\ \Rightarrow & \alpha^{-1}(\alpha u) &=& \alpha^{-1}(\alpha v) \\ \Rightarrow & (\alpha^{-1}\alpha)u &=& (\alpha^{-1}\alpha)v \\ \Rightarrow & 1_K u &=& 1_K v \\ \Rightarrow & u &=& v \end{array}$$

3. (a)$\Rightarrow$ (b). Supongamos que $\alpha = 0_K$. Sea $u \in V$. Como $\alpha \cdot u = 0_K \cdot u = (0_K + 0_K) \cdot u = 0_K \cdot u + 0_K \cdot u$ y $0_K \cdot u = 0_K \cdot u + \vec{0}$, tenemos que $0_K \cdot u + 0_K \cdot u = 0_K \cdot u + \vec{0}$. Aplicando (1) tenemos que $\alpha \cdot u = \vec{0}$.

   Supongamos ahora que $u = \vec{0}$. Sea $\alpha \in K$. Como $\alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0}$ y $\alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} + \vec{0}$, obtenemos que: $\alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} + \vec{0}$, y por ley de cancelación para vectores (vea (1)), $\alpha \cdot u = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

   (b)$\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\alpha = 0_K$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $\alpha \neq 0_K$. Por esto último, existe $\alpha^{-1} \in K$ tal que $\alpha\, \alpha^{-1} = 1_K = \alpha^{-1}\, \alpha$. Luego $u = 1_K\, u = (\alpha^{-1}\, \alpha)\, u = \alpha^{-1}\, (\alpha\, u) = \alpha^{-1}\, \vec{0} = \vec{0}$.

4. Sabemos que $\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0_K \cdot u = \vec{0}$. Por ello, $\vec{0} = \alpha u + (-\alpha)u = \beta u + (-\alpha)u = (\beta + (-\alpha))u$.

   Como $u \neq \vec{0}$, entonces por el inciso anterior necesariamente tenemos que $\beta + (-\alpha) = 0_K$. Entonces $(\beta + (-\alpha)) + \alpha = 0_K + \alpha = \alpha$. Pero también $(\beta + (-\alpha)) + \alpha = \beta + (\alpha + (-\alpha)) = \beta + 0_k = \beta$. Luego $\beta = \alpha$.

5. Supongamos que $u \in V$ y que $\alpha \in K$. Como $-(\alpha u)$ es el único elemento de V tal que $\alpha\, u + (-(\alpha u)) = \vec{0}$, bastará probar que $\alpha \cdot u + (-\alpha)u = \vec{0}$. Pero $\alpha \cdot u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0_k \cdot u = \vec{0}$. Por lo tanto, $-(\alpha u) = (-\alpha)u$.

   Por otro lado, como $\alpha\, u + \alpha(-u) = \alpha\, (u + (-u)) = \alpha\, \vec{0} = \vec{0}$ (vea (2)), obtenemos por la unicidad de $-(\alpha\, u)$ que $-(\alpha\, u) = \alpha\, (-u)$.

2.3 Subespacios vectoriales

Si consideramos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ al conjunto $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}^3\}$, podemos observar que al considerar dos elementos cualesquiera de este conjunto, digamos $(x, y, 0)$ y $(a, b, 0)$, que son sumados con la operación suma del espacio $\mathbb{R}^3$ el resultado de esa suma vuelve a ser un elemento de W: $(x, y, 0)+(a, b, 0) = (x+a, y+b, 0+0) = (x+a, y+b, 0)$. También, si multiplicamos cualquier elemento de W por cualquier elemento α del campo de los números reales $\mathbb{R}$, entonces el vector resultante vuelve a ser un elemento de W: $\alpha\,(x, y, 0) = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, 0) = (\alpha\, x, \alpha\, y, 0)$. Además, es claro que el neutro aditivo $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ también es un elemento de W. Seguramente al lector no le asombrá el comportamiento del conjunto W porque conoce otros subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ que tienen propiedades semejantes.

Incluso puede ser que el lector conozca subconjuntos de otros espacios vectoriales que tienen las mismas propiedades que el conjunto W. Por ejemplo, en el espacio vectorial $M_{3\times 3}(K)$ sobre un campo K el subconjuntos W_0 de todas las matrices diagonales; esto es, $W_0 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in K\}$ o el subconjunto $W_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d, e, f \in K\}$ de todas las matrices triangulares superior tienen las mismas propiedades que tiene el subconjunto W.

La razón por la que estos conjuntos tienen esas propiedades es que todos ellos tienen la cualidad de volverse por sí mismos espacios vectoriales al ser restringidas las operaciones del espacio vectorial del cual son subconjuntos. Todos ellos son ejemplos de la noción de subespacio vectorial. A continuación introducimos esta noción.

2.5 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Diremos que un subconjunto W de V es subespacio vectorial de V (sobre el campo K) si W es un espacio vectorial sobre K con las operaciones de V.

Como hemos hecho notar en el párrafo anterior a la definición 2.5, para verificar que un subconjunto de un espacio vectorial sea un subespacio vectorial sólo es necesario verificar tres cosas.

2.6 Proposición. *Sean $(V, +, \cdot, K)$ un espacio vectorial sobre K y $W \subseteq V$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *W es un subespacio vectorial de V;*

2. *W tiene las siguientes propiedades:*

   (a) $\vec{0} \in W$, donde $\vec{0}$ es el neutro aditivo del espacio vectorial V;

(b) $\forall\, u, v \in W : u + v \in W$,

(c) $\forall\, \alpha \in K, \forall\, u \in W : \alpha\, u \in W$

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Como W es un espacio vectorial con las operaciones que tiene V, existe un único elemento $\vec{0}_W \in W$ con la siguiente propiedad:

$$\forall\, w \in W : w + \vec{0}_W = w.$$

Observe ahora que debido a que V es un espacio vectorial y a que $\vec{0}_W \in W \subseteq V$, tenemos que $\vec{0} = 0_K \cdot \vec{0}_W$. Pero como W es espacio vectorial con las operaciones de V y $\vec{0}_W \in W$, también se tiene que $\vec{0}_W = 0_K \cdot \vec{0}_W$. Por lo tanto, $\vec{0} = \vec{0}_W \in W$.

Por otro lado, debido a que W es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalares, obtenemos que:

$$\forall\, u, v \in W : u + v \in W,$$

y que

$$\forall\, \alpha \in K, \forall\, u \in W : \alpha\, u \in W.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Las condiciones (b) y (c) muestran que la funciones

$$+ \restriction_{W \times W} : W \times W \to W \text{ y } \cdot \restriction_{K \times W} : K \times W \to W,$$

son funciones bien definidas, donde $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : K \times V \to V$ son la suma y la multiplicación que hacen que V sea un espacio vectorial sobre el campo K. Luego resta demostrar las propiedades (1)–(8) de la definición 2.1 para el conjunto W.

Recuerde que como $(V, +, \cdot, K)$ es un espacio vectorial sobre K, los siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $\forall\, u, v \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$
2. $\forall\, u, v \in V : u + v = v + u$
3. $\forall\, u, v \in V$ y $\alpha \in K : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
4. $\forall\, \alpha, \beta \in K,\ u \in V : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
5. $\forall\, u \in V : 1 \cdot u = u$
6. $\forall\, \alpha, \beta \in K$ y $u \in V : (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

En particular, como $W \subseteq V$ las anteriores proposiciones son verdaderas para todos los elementos de W; es decir, las proposiciones siguientes son verdaderas:

1. $\forall\, u, v \in W : (u + v) + w = u + (v + w)$
2. $\forall\, u, v \in W : u + v = v + u$
3. $\forall\, u, v \in W$ y $\alpha \in K : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
4. $\forall\, \alpha, \beta \in K,\ u \in W : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
5. $\forall\, u \in W : 1 \cdot u = u$
6. $\forall\, \alpha, \beta \in K$ y $u \in W : (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

Note ahora que por la hipótesis (a), el neutro aditivo de V, $\vec{0}$, pertenece a W. Luego, existe $\vec{0} \in W$ con la siguiente propiedad:

$$\forall\, w \in W : w + \vec{0} = w.$$

Todo lo anterior demuestra que W es un subespacio vectorial de V. $\square$

Uno puede verificar más rápidamente si un subconjunto W de un espacio vectorial es, o no, un subespacio de él. El siguiente corolario establece qué condiciones debe satisfacer el subconjunto.

2.7 Corolario. *Sean V un espacio vectorial sobre K y W un subconjunto W de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *W es un subespacio vectorial de V;*
2. *W tiene las siguientes propiedades:*
   (a) $W \neq \emptyset$
   (b) $\forall\, u, v \in W, \forall\, \alpha \in K : (\alpha u) + v \in W$.

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Debido a que W es un subespacio vectorial de V, el neutro aditivo de V, $\vec{0}$, pertenece a W. Luego $W \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $\alpha \in K$ y $u, v \in W$ son elementos arbitrarios entonces $\alpha\, u \in W$ por ser cerrado bajo multiplicación por escalares. Como W es cerrado bajo sumas y $\alpha\, u, v \in W$, podemos concluir que $(\alpha\, u) + v \in W$.

(2) $\Rightarrow$ (1). La idea de la demostración es mostrar que W satisface las tres condiciones del inciso (2) de la proposición 2.6, haremos esto en una serie de tres afirmaciones.

Afirmación 1. $\vec{0} \in W$, donde $\vec{0}$ es el neutro aditivo de V.

Demostración de la afirmación. Como $W \neq \emptyset$, existe $a \in W$. Por hipótesis $(-1_K)a + a \in W$. Pero como a es elemento de V, tenemos que $\vec{0} = (-1_K)a + a$. Por lo tanto, $\vec{0} \in W$. $\square$

Afirmación 2. $\forall\, u \in W,\ \forall\, \alpha \in K : \alpha u \in W$.

Demostración de la afirmación. Sean $u \in W$ y $\alpha \in K$ elementos arbitrarios. Definamos $v = \vec{0}$. Por hipótesis, tenemos que $\alpha u + \vec{0} \in W$, pero $\alpha u + \vec{0} = \alpha u$. Por lo tanto $\alpha u \in W$. $\square$

Afirmación 3. $\forall\, u, v \in W : u + v \in W$.

Demostración de la afirmación. Supongamos que $u, v \in W$ son elementos arbitrarios. Definamos $\alpha = 1_K$. Por hipótesis tenemos que $(1_K\, u) + v = (\alpha\, u) + v \in W$. Pero $(1_K\, u) + v = u + v$. Por lo tanto, $u + v \in W$. $\square$

A continuación establecemos una serie ejemplos, entre ellos están los ejemplos más clasicos de subespacios vectoriales.

2.8 Ejemplos.

1. Para todo espacio vectorial V siempre se tiene que $W_0 = \{\vec{0}\}$ y $W_1 = V$ son subespacios de V. Estos espacios son llamados en algunas ocasiones *subespacios triviales de* V. Obsérvese que cuando $V = \{\vec{0}\}$, estos dos subespacios coinciden.

2. Recordemos que todo campo K puede ser visto como espacio vectorial sobre sí mismo. Una pregunta natural es cuáles son los subespacios vectoriales de K. Resulta que cuando K es visto como espacio vectorial sobre sí mismo, sólo hay dos subespacios vectoriales, a saber, los subespacios triviales: $\{0\}$ y K. Recuerde que todo campo K tiene por lo menos dos elementos diferentes, O_K y 1_K. Por ello, nunca $K = \{\vec{0}\}$. No obstante, K sólo tiene, como hemos mencionado, únicamente dos subespacios: los triviales.

   Para demostrarlo, supongamos que $W \subseteq K$ es un subespacio vectorial de K. Note que si no existe $u \in W$ tal que $u \neq \vec{0} = 0_K$, entonces necesariamente $W = \{\vec{0}\}$. Por otro lado, si existe $u \in W$ tal que $u \neq \vec{0}$, entonces existe $u^{-1} \in K$ tal que $u \cdot u^{-1} = 1_K$. Por lo cual, $1_K = u^{-1} \cdot u \in W$ porque $u \in W$ y $u^{-1} \in K$ y W es un subespacio vectorial. Consideremos ahora a cualquier elemento $x \in K$. Debido a que $x = x \cdot 1_K$ y $1_K \in W$, obtenemos que $x \in W$ (porque W es un subespacio vectorial y por ello es cerrado bajo multiplicación por escalares). Por lo tanto, todo elemento de K es un elemento de W, y por ello $K = W$, como deseabamos demostrar.

3. En K^2 visto como espacio vectorial sobre K toda recta que pasa por el origen es subespacio vectorial de K^2. Es decir, todo conjunto de tipo $W(v) = \{\alpha\, v :$

$\alpha \in K\}$ donde $v \in K^2$ es un subespacio vectorial de K^2. Efectivamente, observe primero que si $v = \vec{0} \in K^2$ entonces $W(v) = \{\vec{0}\}$, el cual es uno de los subespacios triviales de K^2. Así que, en lo que sigue, supondremos que $v \neq \vec{0}$. Debido a que $\vec{0} = 0_K\, v$ obtenemos facilmente que $\vec{0} \in W(v)$. Supongamos ahora que $y_1, y_2 \in W(v)$ y que $\beta \in K$. Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tales que $y_i = \alpha_i\, v$ para $i = 1, 2$. Note ahora que $\beta\, y_1 = (\beta\, \alpha_1)\, v \in W(v)$ y que $y_1 + y_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\, v \in W(v)$. De esta manera hemos verificado que $W(v)$ es un subespacio vectorial de K^2.

Podemos concluir entonces que $\{\vec{0}\}$, K^2 y las rectas que pasan por el origen, $W(v)$, son subespacios vectoriales de K^2. La pregunta natural es si hay más. La respuesta es negativa. Los anteriores son todos los tipos de subespacios vectoriales que tiene K^2. Verificaremos esta última afirmación en las posteriores secciones.

4. Dado un campo K y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. El espacio vectorial $P_n(K)$ de todos los polinomios de grado a lo más n y con coeficientes en el campo K es un subespacio vectorial del espacio vectorial $P(K)$ de todos los polinomios con coeficientes en K.

5. Sabemos que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Desde los cursos de Cálculo de una variable sabemos que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas entonces también lo es la función $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. También sabemos que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces la función $\alpha\, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Además, cualquier función constante $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua (en particular, la función $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante de valor 0 es continua). Todo lo anterior nos dice que el conjunto

$$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función continua en } \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ya sabemos que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos $W_1 = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$. Note que $(1, 1) \in W_1$ y que $(1, -1) \in W_2$, y por ello, $(1, 1), (1, -1) \in W_1 \cup W_2$; pero $(1, 0) = (1, 1) + (1, -1) \notin W_1 \cup W_2$. De esta manera, podemos concluir que no es necesariamente cierto que la unión de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

En contra parte, en la siguiente proposición se demuestra que no importa cuántos subespacios vectoriales de un espacio vectorial se intersequen, esta intersección siempre será un subespacio vectorial.

2.9 Proposición. *Sea V un subespacio vectorial sobre un campo K. La intersección de cualquier cantidad de subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial de V.*

Demostración. Supongamos que $\{W_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de subespacios vectoriales de V no vacía. Para demostrar que $\bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$ es un subespacio vectorial de V, observemos que:

1. $\vec{0} \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$ porque $\vec{0} \in W_\alpha$ para todas las $\alpha \in I$.

2. Si $u, v \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$ entonces $u, v \in W_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Como cada W_α es un subespacio vectorial, tenemos que $u + v \in W_\alpha$ para cada $\alpha \in I$; por lo tanto, tenemos que $u + v \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$.

3. Por otro lado, si $u \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$ y $\gamma \in K$, entonces como $u \in W_\alpha$ para cada $\alpha \in I$ y cada W_α es subespacio vectorial de V, tenemos que $\gamma u \in W_\alpha$ para todas las $\alpha \in I$. De esto, podemos concluir que $\gamma \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$.

Lo anterior nos permite concluir que $\bigcap\limits_{\alpha\in I} W_\alpha$ es un subespacio vectorial de V. □

Debido a que todos los subespacios vectoriales de un espacio vectorial V (de hecho, todos los subconjuntos) siempre contienen al subconjunto φ, la colección

$$\{W : W \text{ es subespacio de } V \text{ y } \varphi \subseteq W\}$$

es igual a la colección

$$S = \{W : W \text{ es subespacio vectorial de} V\}.$$

Aplicando la proposición anterior, la intersección

$$\cap\{W : W \text{ es subespacio vectorial de } V\} := \{x \in V : (\forall W \in S)(x \in W)\},^3$$

es un subespacio vectorial de V y $\{\vec{0}\} = \cap_{W\in S} W$. Es claro que todo el proceso anterior lo podemos realizar con cualquier otro subconjunto además del subconjunto vacío.

[3] Esta colección también es denotada con $\bigcap_{W\in S} W$

2.10 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Consideremos a un subconjunto cualquiera $E \subseteq V$. El *subespacio vectorial generado por* E en V es la intersección de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a E; esto es,

$$gen(E) = \cap\{W : W \subseteq V \text{ subespacio vectorial tal que } E \subseteq W\}.$$

Es importante mencionar que este subespacio también es denotado de las siguientes maneras: $gen(E), \langle E\rangle, Span(E)$. Nosotros usaremos en estas notas la notación $gen(E)$. En el siguiente lema se muestran algunas propiedades básicas del generado de un conjunto. La propiedad (4) es la razón de llamar a $gen(E)$ el subespacio generado por E.

2.11 Lema. *Sean V es un espacio vectorial sobre un campo K y $E \subseteq V$ cualquier subconjunto.*

1. *$gen(E)$ es siempre un subespacio vectorial de V.*
2. *$E \subseteq gen(E)$.*
3. *Si W es subespacio vectorial de V y $E \subseteq W$, entonces $gen(E) \subseteq W$.*

   Es decir, $gen(E)$ es el más pequeño de los subespacios de V que contiene a E.
4. *Si $E \subseteq V$ no es vacío, entonces*

$$gen(E) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ..., x_n \in E, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}.$$

5. *Si W es un subespacio vectorial de V entonces $gen(W) = W$.*
6. *$gen(gen(E)) = gen(E)$.*
7. *$E \subseteq F \subseteq V$ implica que $gen(E) \subseteq gen(F)$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Es consecuencia de la proposición 2.9.
2. Como

$$gen(E) = \cap\{W : W \subseteq V \text{ subespacio vectorial tal que } E \subseteq W\},$$

   obtenemos fácilmente que $E \subseteq gen(E)$.

3. Como $W \in \{W : W \subseteq V$ subespacio vectorial tal que $E \subseteq W\}$ y

$$gen(E) = \cap\{W : W \subseteq V \text{ subespacio vectorial tal que } E \subseteq W\},$$

se tiene que $gen(E) \subseteq W$.

4. Sea $W = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ..., x_n \in E, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}$. Debemos demostrar que $gen(E) \subseteq W$ y que $W \subseteq gen(E)$.

   Para demostrar que $gen(E) \subseteq W$ primero observemos que $E \subseteq W$. Efectivamente, note que si $x \in E$, como $x = 1 \cdot x$, entonces x satisface la definición del conjunto W, es decir, $x \in W$. Por ello, $E \subseteq W$. Demostremos ahora que W es un subespacio vectorial de V.

   Afirmación. W es un subespacio vectorial de V.

   Demostración de la afirmación. Sea $u, v \in W, \gamma \in K$. Entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m \in E \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in K$ tales que $u = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$ y $v = \beta_1 y_1 + ... + \beta_m y_m$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma u + v &= \gamma(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) + (\beta_1 y_1 + ... + \beta_m y_m) \\ &= (\gamma\alpha_1)x_1 + ... + (\gamma\alpha_n)x_n + \beta_1 y_1 + ... + \beta_m y_m \in W \end{aligned}$$

   Por lo tanto W es un subespacio vectorial que contiene a E. $\boxtimes$.

   Debido a que $gen(E)$ es el más pequeño subespacio vectorial de V que contiene a E, podemos concluir que $gen(E) \subseteq W$.

   Demostremos ahora que $W \subseteq gen(E)$. Para ello supongamos que $u \in W$ es cualquier elemento. Entonces $u = \alpha x_1 + ... + \alpha x_n$ donde $x_1, ..., x_n \in E$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K, n \in \mathbb{N}$. Como $E \subseteq gen(E)$, $x_1, x_2, ..., x_n \in gen(E)$. Además, $gen(E)$ es un subespacio vectorial, luego $u = \alpha x_1 + ... + \alpha x_n \in gen(E)$. Por lo tanto $W \subseteq gen(E)$. Y con todo lo anterior podemos concluir que $W = gen(E)$.

5. Aplicando (2), obtenemos $W \subseteq gen(W)$. Por (3), como W es un subespacio vectorial de V que contiene a W, tenemos que $gen(W) \subseteq W$. Por todo ello, $W = gen(W)$.

6. Es fácil consecuencia de (1) y de (5).

7. Como $E \subseteq F$ y $F \subseteq gen(F)$, tenemos que $E \subseteq gen(F)$. Aplicando ahora (3), tenemos que $gen(E) \subseteq gen(F)$. $\square$

Sabemos que no es necesariamente cierto que la unión de dos subespacios vectoriales W_1 y W_2 de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial. Pero podemos preguntarnos por el más pequeño de los subespacios vectoriales de V que contienen a la unión $W_1 \cup W_2$. Por el lema anterior, el más pequeño de los subespacios vectoriales de V que contienen a $W_1 \cup W_2$ es $gen(W_1 \cup W_2)$. Note que el inciso (3) del lema anterior nos proporciona una descripción más simple del subespacio $gen(W_1 \cup W_2)$, esto es,

$$gen(W_1 \cup W_2) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ..., x_n \in W_1 \cup W_2, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}.$$

Cada sumando de tipo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ donde $x_1, x_2, ..., x_n \in W_1 \cup W_2$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, puede ser reescrito en la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i \in S_1} \alpha_i x_i + \sum_{i \in S_2} \alpha_i x_i$, donde $S_j = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in W_j\}$ para $j = 1, 2$. Observe también que $\sum_{i \in S_1} \alpha_i x_i \in W_1$ y que $\sum_{i \in S_2} \alpha_i x_i \in W_2$ por ser tanto W_1 como W_2 subespacios vectoriales de V. De esta manera, hemos probado que

$$gen(W_1 \cup W_2) = \{x + y : x \in W_1, y \in W_2\}.$$

El conjunto del lado derecho de la última igual recibe un nombre especial, es llamado *suma de los conjuntos* W_1 y W_2. Note además que hemos demostrado que la suma de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V es el más pequeño de los subespacios vectoriales de V que contiene a la unión de los subespacios vectoriales.

Enseguida damos otra forma de demostrar esta última afirmación, pero antes de ello formalizamos la noción de suma de subconjuntos de un espacio vectorial.

2.12 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $A, B \subseteq V$ subconjuntos (no necesariamente subespacios vectoriales). Definimos la *suma de A con B* como el conjunto:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

2.13 Lema. *Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Entonces:*

1. *$W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V.*

2. *$W_1 + W_2 = gen(W_1 \cup W_2)$; es decir, $W_1 + W_2$ es el más pequeño de los subespacios de V que contienen a $W_1 \cup W_2$.*

Demostración.

1. Como $\vec{0} \in W_1, W_2$ y $0 = \vec{0} + \vec{0}$ tenemos que $\vec{0} \in W_1 + W_2$. Por otro lado, si $u, v \in W_1 + W_2$ y $\alpha \in K$, entonces $u = a + b$ y $v = c + d$, donde $a, c \in W_1$ y $b, d \in W_2$. Entonces $\alpha u+v = \alpha(a+b)+(c+d) = (\alpha a+c)+(\alpha b+d) \in W_1+W_2$. Por lo tanto, $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V.

2. Si $a \in W_1$ entonces $a \in W_1 + W_2$ puesto que $a = a + \vec{0}$. Por lo tanto $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. Análogamente, si $b \in W_2$ entonces $b \in W_1 + W_2$ porque $b = \vec{0} + b$. Por lo tanto $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Por lo tanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Por el inciso (3) del lema 2.11, tenemos que $gen(W_1 \cup W_2) \subseteq W_1 + W_2$.

   Por otro lado, si $u = a + b \in W_1 + W_2$, donde $a \in W_1, b \in W_2$. Entonces $a, b \in W_1 \cup W_2 \subseteq gen(W_1 \cup W_2)$. Así que $a, b \in gen(W_1 \cup W_2)$. Como $gen(W_1 \cup W_2)$ es subespacio vectorial tenemos que $u = a+b \in gen(W_1 \cup W_2)$. Por lo tanto $W_1 + W_2 \subseteq gen(W_1 \cup W_2)$. $\square$

Capítulo 3

Bases de espacios vectoriales

Sabemos que el conjunto $\mathbb{R}^+$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ si en él consideramos a las operaciones siguientes:

$$x \boxplus y = x \cdot y;$$

$$\alpha \boxdot x = x^\alpha$$

Un hecho interesante es que si $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}) \in \mathbb{R}^+$ entonces cualquier elemento $x \in \mathbb{R}^+$ se puede escribir en términos de e, utilizando a las operaciones antes mencionadas: $x = ln(x) \boxdot e$. De hecho, esto sucede con cualquier número real positivo a que este fijo. Si $x \in \mathbb{R}^+$ es cualquier elemento entonces $x = log_a(x) \boxdot a$, donde $\log_a$ denota al logaritmo en base a de x.

Esta propiedad también la tienen el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Cualquier elemento (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ puede ser escrito en términos de los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, utilizando las operaciones de $\mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

En este capítulo estudiaremos la noción de combinación lineal, y algunas otras importantes nociones relacionadas a ésta: independencia lineal, base, etcétera.

3.1 Subconjuntos linealmente independientes

En esta sección introducimos la importante noción de independencia lineal.

3.1 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K.

1. Un subconjunto $S \subseteq V$ es llamado *conjunto linealmente dependiente de vectores* o simplemente *linealmente dependiente* si existen elementos $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ (no todos iguales a 0_K) tales que: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$.

2. Diremos que $S \subseteq V$ es *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente.

La siguiente proposición muestra propiedades básicas de la dependencia lineal.

3.2 Proposición. *Sea V un espacio vectorial sobre K y $S, T \subseteq V$.*

1. *Si $\vec{0} \in S$ entonces S es linealmente dependiente.*

2. *Si $S \subseteq T$ y S es linealmente dependiente, entonces T también es linealmente dependiente.*

3. *Si $S \subseteq T$ y T es linealmente independiente, entonces S también es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Tomemos $\alpha = 1_K \in K$. Como $\vec{0} = \alpha \cdot \vec{0}$ y $\vec{0} \in S$, podemos concluir que S es un conjunto linealmente dependiente.

2. Como S es linealmente dependiente, existen elementos $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ (no todos iguales a 0_K) tales que: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$. Debido a que $S \subseteq T$, podemos concluir que existen elementos $v_1, v_2, ..., v_n \in T$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ (no todos iguales a 0_K) tales que: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$. Por ello, T es un conjunto linealmente dependiente.

3. Si S fuera un conjunto linealmente dependiente, por el inciso (3) el conjunto T también lo sería; pero esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, S es linealmente independiente. □

3.3 Ejemplos. Sea V es un espacio vectorial sobre el campo K.

1. El espacio vectorial V es en sí mismo un conjunto linealmente dependiente de vectores (en V) porque $\vec{0} \in V$.

2. El conjunto $\emptyset \subseteq V$ es linealmente independiente por vacuidad.

3. Si $v \neq \vec{0}$ entonces $\{v\}$ es linealmente independiente. Efectivamente, note que $\alpha \cdot v = \vec{0}$ y $\alpha \neq 0_K$ implican que $\alpha^{-1}(\alpha \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Pero por otro lado $v = \alpha^{-1}(\alpha \cdot \vec{v})$. Luego $v = \vec{0}$. Por lo tanto, las condiciones $\alpha \cdot v = \vec{0}$ y $v \neq \vec{0}$ implican que $\alpha = 0_K$. Esto último nos dice que el conjunto $\{v\}$ es linealmente independiente.

La independencia lineal está puesta en términos de la dependencia lineal. La siguiente proposición muestra una forma sencilla para verificar si un conjunto es linealmente independiente. En la demostración usamos la misma técnica empleada en el último ejemplo.

3.4 Proposición. *Sea V un espacio vectorial sobre K. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El subconjunto $S \subseteq V$ es linealmente independiente.*
2. *Para cada $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y cada $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ ($n \in \mathbb{N}$), la condición $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0_K$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y que $\alpha_1, \alpha_2, ...,$ $\alpha_n \in K$ tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$.

Si existiera $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_j \neq 0_K$, entonces podemos concluir que existen $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, no todos iguales a 0_K, tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$. Es decir, que el conjunto S es linealmente dependiente. Pero esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, no existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_j \neq 0_K$, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0_K$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos, para obtener una contradicción, que el conjunto S no es linealmente independiente; luego, S es un conjunto linealmente dependiente. Por la definición de dependencia lineal, podemos concluir que existen $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, no todos iguales a 0_K, tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \vec{0}$. Note ahora que esto último contradice la hipótesis. Por lo tanto, S es un conjunto linealmente independiente. □

3.5 Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$, el conjunto $S = \{(1,1), (2,2)\}$ es linealmente dependiente pues $1(1,1) + (-\frac{1}{2})(2,2) = \vec{0} = (0,0)$.
2. Supongamos que K es un campo. En K, visto como espacio vectorial sobre sí mismo cualquier conjunto con por lo menos dos elementos es un conjunto linealmente dependiente.

   En efecto, suponga que $S \subseteq K$ tiene por lo menos dos elementos diferentes. Supongamos que $x, y \in S$ son tales que $x \neq y$ y que $0_K \notin \{x, y\}$[1] entonces para demostrar que S es linealmente dependiente bastará demostrar que $\{x, y\}$ lo es. Para demostrar esto último, simplemente note que $(-y)x + xy = \vec{0} = 0_K$ y que $x, y \neq 0_K$. Esto muestra la dependencia lineal de $\{x, y\}$.

[1] Observe que si $0_K \in \{x, y\}$ entonces $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente; y en consecuencia, también lo es S.

3. Según el inciso (2) el conjunto $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ es un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}$ cuando el campo $\mathbb{R}$ es considerado espacio vectorial sobre sí mismo. No obstante, cuando $\mathbb{R}$ es considerado espacio vectorial sobre el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ el conjunto $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ es un conjunto linealmente independiente

   En efecto, supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ son tales que $\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3} = \vec{0} = 0_{\mathbb{R}}$. Verifiquemos que la condición $\alpha \neq 0 \neq \beta$ genera una contradicción. Para ello primero note que la anterior condición implica que $\frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, pero esto es una contradicción porque no existe un número racional p tal que $p^2 = \frac{2}{3}$.

4. En el espacio vectorial $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (sobre el campo $\mathbb{R}$), consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = n; \\ 0, & \text{si } x \neq n. \end{cases}$$

   El conjunto $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   En efecto, supongamos que $f_{n_1}, f_{n_2}, ..., f_{n_m} \in A$ son elementos diferentes entre sí y que $\alpha_1 f_{n_1} + \alpha_2 f_{n_2} + ... + \alpha_m f_{n_m} = 0$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $0(x) = 0_{\mathbb{R}}$.

   Evaluando la función $\alpha_1 f_{n_1} + \alpha_2 f_{n_2} + ... + \alpha_m f_{n_m}$ en n_j para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ obtenemos, por un lado, que

$$\alpha_j = (\alpha_j f_{n_j})(n_j) = (\alpha_1 f_{n_1} + \alpha_2 f_{n_2} + ... + \alpha_m f_{n_m})(n_j)$$

   Por otro lado,

$$(\alpha_1 f_{n_1} + \alpha_2 f_{n_2} + ... + \alpha_m f_{n_m})(n_j) = 0(n_j) = 0_{\mathbb{R}}.$$

   Por lo tanto, podemos concluir que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_j = 0_{\mathbb{R}}$. Entonces el conjunto A es linealmente independiente.

3.2 Bases de espacios vectoriales

3.6 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Diremos que un $B \subseteq V$ es una *base de* V si tiene las siguientes propiedades:

1. $gen(B) = V$

2. B es linealmente independiente.

Es claro, por la misma definición de $gen(B)$ que $gen(B)$ siempre es un subconjunto de V. Luego para que B sea una base de V es necesario y suficiente que $V \subseteq gen(B)$ y que B sea un subconjunto linealmente independiente. Esta observación será usada cada vez que se desee probar que una colección es una base de un espacio vectorial.

Por otro lado, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces para todo vector $v \in V$ existen escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Efectivamente, como $v \in V = gen(B)$ entonces agrupando y factorizando términos comunes si es necesario podemos concluir que existe $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots n\}$ subconjunto no vacío y escalares $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ tales que $v = \sum_{j=i}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j}$. Completando ahora si es necesario con términos iguales a cero, podemos concluir que $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, donde $\beta_{i_j} = \alpha_{i_j}$ para toda $j = 1, \ldots, m$ y $\beta_l = 0_K$ si $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$. En consecuencia, v siempre se puede escribir como una combinación lineal de *todos* los elementos de la base B (completando *adecuadamente con ceros* si es necesario). Por otra parte, si $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ y $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ entonces $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = \vec{0}$. Como B es un conjunto linealmente independiente, lo anterior implica que $\alpha_1 - \beta_1 = 0_K = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n$. Es decir, $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Una inquietud muy normal es saber si todo espacio vectorial tiene por lo menos una base. Suponiendo el axioma de elección, la respuesta es positiva: Si $V = \{\vec{0}\}$ entonces el conjunto vacío es una base para V. Supongamos que $V \neq \{\vec{0}\}$. Definamos $\mathfrak{C} = \{B \subseteq V : \emptyset \neq B$ es linealmente independiente $\}$. Si ordenamos parcialmente a $\mathfrak{C}$ con la contención podemos demostrar que toda cadena en $\mathfrak{C}$ tiene una cota superior en $\mathfrak{C}$. Por el principio de maximalidad de Hausdorff, $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal. Supongamos que B es un elemento maximal para $\mathfrak{C}$. Este elemento maximal es una base para V. Puesto que si ocurriera que hay un elemento $v \in V$ tal que $v \notin gen(B)$ entonces el conjunto $B \cup \{v\}$ es linealmente independiente y contiene propiamente a B; lo cual contradice la maximalidad de B.

3.7 Ejemplos. 1. En K^n, visto como espacio vectorial sobre K, el conjunto $B = \{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\}$ donde $\zeta_j = (0, 0...., 0, 1, 0, ..., 0) \in K^n$ es una base de K^n, la base B es llamada o conocida como *base canónica* de K^n. Veamos que B es efectivamente una base de K^2. Es decir, verifiquemos lo siguiente:

(a) $gen(B) = K^n$.
Supongamos que $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n) \in K^n$ es un elemento cualquiera. Como $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n) = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + ... + x_n\zeta_n$, tenemos que $\vec{x} \in gen(B)$. Por lo tanto $K^n \subseteq gen(B)$.

(b) B es linealmente independiente.
Supongamos que $\alpha_1\zeta_1+\alpha_2\zeta_2+...+\alpha_n\zeta_n = \vec{0}$. Observe que $\alpha_1\zeta_1+\alpha_2\zeta_2+ .... + \alpha_n\zeta_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ y que $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$. Así que la anterior ecuación implica que $\alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n$. Como deseábamos probar. Por lo tanto, B es un conjunto linealmente independiente.

2. Si K es un campo arbitrario que es visto como espacio vectorial sobre sí mismo, entonces $B = \{1_K\}$ es una base para K. Efectivamente, primero veamos que el conjunto B es linealmente independiente. Para ello simplemente observe que la ecuación $\alpha \cdot 1_K = 0_K$ implica trivialmente que $\alpha = 0_K$. Por otro lado, supongamos que $x \in K$ es cualquier elemento. Como $x = x \cdot 1_K$, tenemos fácilmente que $x \in gen(B)$. Todo lo anterior muestra que $\{1_K\}$ es una base de K.

   Note que el espacio vectorial K sólo puede tener bases de cardinalidad 1 porque ya hemos hecho notar que todos los subconjuntos de K de cardinalidad mayor o igual que dos son linealmente dependientes. De hecho, es fácil notar que todo subconjunto de K que únicamente tiene un elemento y que no sea igual al cero, es una base para K.

3. Por el inciso anterior, cuando $\mathbb{R}$ es visto como espacio vectorial sobre sí mismo, $\mathbb{R}$ tiene una base de cardinalidad finita (de cardinalidad 1). Pero cuando $\mathbb{R}$ es visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ no tiene bases finitas. La razón de esto es que para cualquier subconjunto finito F de $\mathbb{R}$ el conjunto $gen(F)$ tiene cardinalidad a lo más numerable, y $\mathbb{R}$ no es un conjunto numerable; por ello, no puede ocurrir que $gen(F) = \mathbb{R}$ para un conjunto finito F.

4. El espacio vectorial $V = \{\vec{0}\}$ tiene como una base al conjunto vacío porque el conjunto $\emptyset$ es linealmente independiente, $\emptyset \subseteq V$, y además, $gen(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.

5. $\mathbb{C}$ tiene como una base al conjunto $B = \{1_{\mathbb{C}}, i\}$ cuando es visto como espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$; pero cuando es visto como espacio vectorial sobre sí mismo una base para él es el conjunto $\{1_{\mathbb{C}}\}$.

6. El espacio vectorial $P(K)$ de todos los polinomios con coeficientes en un campo K tiene como una base al conjunto $B = \{1\} \cup \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. El espacio vectorial $P_m(K)$ de todos los polinomios con coeficientes en un campo K, y de grado a lo más m, tiene como una base al conjunto $B = \{1, x^1, x^2, \ldots, x^m\}$.

3.8 Definición. Diremos que un espacio vectorial V sobre un campo K, es de *dimensión finita*, o es *dimensionalmente finito*, si V tiene una base con una cantidad finita de elementos.

Todos los ejemplos anteriores son ejemplos de espacios vectoriales de dimensión finita, a excepción del espacio vectorial $\mathbb{R}$ sobre el campo $\mathbb{Q}$. Otro ejemplo de un espacio vectorial que no es de dimensión finita es el espacio $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Para demostrar esta afirmación requerimos de la proposición 3.10; a la vez, para demostrar esta proposición requeriremos el siguiente lema cuya demostración haremos en páginas posteriores.

3.9 Lema. *Supongamos que:*

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones con n-incógnitas, donde $a_{ij} \in K$ para cada $i, j \in K$. Si $m < n$ entonces (1) tiene una solución no trivial en K (i.e, existen $x_1, ..., x_n \in K$, no todos iguales a 0_K, que son solución de (1)).

3.10 Proposición. *Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo K. Si $V = gen(\{v_1, ..., v_m\})$ entonces todo subconjunto de V que es linealmente independiente tiene a lo más m vectores.*

Demostración. Bastará verificar que si A es un conjunto con más de m vectores entonces A es linealmente dependiente. Supongamos entonces que $A = \{w_1, ..., w_n\}$ es un subconjunto de V donde $n > m$. Deseamos demostrar que existen $x_1, ..., x_n \in K$ no todos iguales a 0_K a la vez tales que

$$x_1w_1 + ... + x_nw_n = \vec{0}, \tag{I}$$

es decir, estamos buscando solución no trivial en K de la ecuación (I).

Como cada $w_j \in V = gen\{v_1, ..., v_m\}$, para cada $j = 1, ..., n$ existen escalares $a_{1j}, ..., a_{mj}$ tales que $w_j = a_{ij}v_1 + ... + a_{mj}v_m$. Sustituyendo en (I), obtenemos que

$$x_1(a_{11}v_1 + ... + a_{m1}v_m) + x_2(a_{12}v_1 + ... + a_{m2}v_m) + ... + x_n(a_{1n}v_1 + ... + a_{mn}v_m) = \vec{0}.$$

Equivalentemente

$$\begin{array}{rl} (x_1a_{11}+x_1a_{12}+...+x_na_{1n})v_1 & + \\ (x_1a_{21}+x_2a_{22}+...x_na_{2n})v_2 & + \\ \dots & + \\ (x_na_{m1}+x_2a_{m2}...+x_na_{mn})v_n & =\vec{0}. \end{array} \tag{II}$$

Observe ahora que una solución no trivial para el siguiente sistema:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

es una solución no trivial para (II), y por ello, para (I). Por el lema anterior, (1) tiene una solución $x_1, x_2..., x_n$ no trivial en K. Entonces hemos encontrado escalares $x_1, ..., x_n$ no todos iguales a 0_K que satisfacen (I). □

Debido a que el espacio vectorial $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tiene un subconjunto linealmente independiente infinito, este espacio no puede ser generado por una cantidad finita de elementos (por la proposición 3.10). Luego él no es un espacio de dimensión finita.

En la demostración de la proposición 3.10 hicimos la prueba de lo siguiente.

3.11 Corolario. *Si V es un espacio vectorial tal que $V = gen(\{v_1, ..., v_n\})$, entonces todo subconjunto de V que tenga más de n vectores es linealmente dependiente.*

3.12 Corolario. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Debido a que V es de dimensión finita, existe una base para V con una cantidad finita de elementos. Supongamos que $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es esta base. Supongamos también que B_2 es otra base cualquiera para V. Para demostrar el resultado, bastará demostrar que B_1 y B_2 tienen la misma cantidad de elementos. Para demostrar esto último, primero notemos que como B_2 es linealmente independiente y $V = gen(\{v_1, ..., v_r\})$, por la proposición 3.10 tenemos que la cantidad de elementos de B_2 es finita y esta cantidad de elementos es menor o igual que r. Supongamos que $B_2 = \{w_1, ..., w_s\}$. Luego $s \leqslant r$.

Usando un argumento semejante al anterior (intercambiando los papeles de B_1 y B_2) podemos demostrar que $r \leqslant s$. Y entonces podemos concluir que $r = s$. □

El resultado plasmado en el corolario anterior nos permite introducir la noción de dimensión para espacios vectoriales de dimensión finita.

3.13 Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Si V es un espacio de dimensión finita, definimos la dimensión $dim(V)$ de V como el número de elementos, común, que tienen todas las bases de V.

3.14 Ejemplos.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $dim(K^n) = n$. Cuando $n = 1$, definimos, como es usual a K^1 como el campo K (visto como espacio vectorial sobre K).

2. Como ya hemos verificado en la introducción al capítulo, la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$ del inciso (2) del ejemplo 2.2 es igual a 1.

3. Observe que la definición de dimensión sólo es aplicable a espacios de dimensión finita. Con este acuerdo, el espacio $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no tiene dimensión. Pero cuando X es un conjunto finito (no vacío) y K es un campo cualquiera, entonces el espacio $F(X, K)$ es de dimensión finita y su dimensión es la cardinalidad de X, es decir, es igual a la cantidad de elementos que tiene X.

   Afirmación. Sea K un campo. Si $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ (donde $p \in \mathbb{N}$) entonces el espacio vectorial $F(X, K)$ es de dimensión finita y además $dim(F(X, K)) = p$.

   En efecto: Bastará exhibir una base para $F(X, K)$ de p elementos para demostrar completamente la afirmación. Consideremos el siguiente conjunto $B = \{f_j : j = 1, \ldots, p\}$, donde

$$f_j(x) = \begin{cases} 1_K & \text{si } x = x_j \\ 0_K & \text{si } x \neq x_j, \end{cases}$$

   para cada $j = 1, \ldots, p$. Deseamos demostrar que B es una base para $F(X, K)$. Para ello, obsérvese que si $g \in F(X, K)$ es un elemento cualquiera de $F(X, K)$ entonces $g = g(x_1)f_1 + g(x_2)f_2 + \cdots + g(x_p)f_p$; esto muestra que $g \in gen(B)$. En consecuencia $gen(B) = F(X, K)$. Para finalizar la demostración, demostraremos que B es un conjunto linealmente independiente. Para ello, supongamos que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p = \vec{0}$. Como $\vec{0}$ es la función de valor constante de valor 0_K, al evaluar la primera parte de la anterior igual en cada elemento x_j de X obtenemos que

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p)(x_j) = \vec{0}(x_j) = 0_K. \tag{1}$$

Pero sabemos que

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1_K & \text{si } i = j \\ 0_K & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Entonces $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p)(x_j) = \alpha_j\, f_j(x_j) = \alpha_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$. Luego, B es un conjunto linealmente independiente. La base B es comúnmente llamada *base canónica* del espacio vectorial $F(X, K)$. ⊠

4. Por el inciso anterior, si K es un campo arbitrario entonces el espacio $M_{m\times n}(K)$ de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el campo K (vea el inciso (4) de ejemplos 2.2) es un espacio vectorial de dimensión finita y su dimensión es la cardinalidad del conjunto $X = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$; es decir, $dim(M_{m\times n}(K)) = m\,n$. No es difícil darse cuenta que para este caso el conjunto B, definido en el inciso anterior, es el conjunto $B = \{f_{ij} : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$ porque el conjunto $X = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} = \{(i, j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$. De esta manera, la base canónica B del espacio vectorial $M_{m\times n}(K)$ es el conjunto $B = \{f_{ij} : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$ donde

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} 0_K & \ldots & 0_K & \ldots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \ldots & 1_K & \ldots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \ldots & 0_K & \ldots & 0_K \end{pmatrix}$$

es la matriz cuya única entrada diferente de cero está en el lugar (i, j).

5. El espacio vectorial $P(K)$ de todos los polinomios con coeficientes en un campo K tiene como una base al conjunto $B = \{1\} \cup \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ello este espacio vectorial no es un espacio de dimensión finita.

6. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. El espacio vectorial $P_m(K)$ de todos los polinomios con coeficientes en un campo K, y de grado a lo más m, tiene como una base al conjunto $B = \{1, x^1, x^2, \ldots, x^m\}$. Por lo tanto, la dimensión del espacio vectorial $P_m(K)$ es $m + 1$.

El siguiente lema será muy importante para posteriores resultados.

3.15 Lema. *Si V espacio vectorial sobre un campo K y $V = gen(\{v_1, ..., v_m\})$ y existe $j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que v_j es combinación lineal de los vectores*

$$v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_m$$

entonces

$$V = gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que

$$V \subseteq gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}).$$

Para ello supongamos que $v \in V$ es cualquier elemento. Como $v \in V = gen(\{v_1, ..., v_m\})$, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in K$ tal que:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i. \tag{1}$$

Por otro lado, existen escalares $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, ..., \beta_m \in K$ tales que

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \beta_i v_i \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha(\textstyle\sum_{i=1}^{j-1} \beta_i v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \beta_i v_i) + \\ &\quad + \alpha_{j+1} v_{j+1} + ... + \alpha_m v_m \\ &= (\alpha_1 + \alpha_j \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_j \beta_1) v_2 + \ldots \\ &\quad \ldots + (\alpha_{j-1} + \alpha_j \beta_{j-1}) v_{j-1} + (\alpha_{j+1} + \alpha_j \beta j + 1) v_{j+1} + \ldots \\ &\quad \ldots + (\alpha_n + \alpha_j \beta_m) v_m \\ &\in gen\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_m\}. \end{aligned}$$

□

Utilizando el anterior lema podemos demostrar la siguiente proposición que esencialmente nos permitirá probar que en todo espacio vectorial de dimensión finita, digamos n, de todo conjunto que genere al espacio teóricamente posible seleccionar algunos elementos para formar una base del espacio.

3.16 Proposición. *Supongamos que $V = gen\{v_1, ..., v_m\}$ donde no todos los vectores v_i son iguales a $\vec{0}$. Entonces existen índices $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ tales que $B = \{v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in}\}$ es una base para V.*

DEMOSTRACIÓN. *Construcción de B.* Primero nótese que $\{i \in \{1, 2, ..., m\} : v_i \neq \vec{0}\} \neq \emptyset$. Sea $i_1 = min\{i \in \{1, 2, ..., m\} : v_i \neq \vec{0}\}$. Nótese que $v_{i_1} \neq \vec{0}$ y que, para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$ con $j < i_1$, $v_j = \vec{0}$. Definamos $i_2 = min\{i \in \{1, 2, ..., m\} : i_1 < i$ y v_i no es combinación lineal de $v_1, v_2, .., v_{i-1}\}$. Nótese que v_{i_2} no es combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_{i_2}$ y que para cada $j < i_2$, v_j es combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_{j-1}$. Continuando de esta forma, si tenemos construidos a $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$, el vector $v_{i_{k+1}}$ es construido de la siguiente forma: definimos a

$i_{k+1} = min\{i \in \{1, 2, ..., m\} : i_k < i$ y v_i no es combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_{i-1}\}$ y consideramos a $v_{i_{k+1}}$. Como $\{1, 2, ..., m\}$ es finito, el proceso anterior debe terminar después de un número finito de pasos. Supongamos que v_{i_t} es el último vector de esta forma generado.

Definamos $B = \{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_t}\}$. Afirmamos que B es base de V. En efecto:

a) *Primero demostraremos que B genera a V.* Consideremos al conjunto $M = \{1, 2, ..., m\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_t\}$.

- Si $M = \emptyset$ entonces $\{1, 2, ..., m\} = \{i_1, i_2, ..., i_t\}$. Por ello, $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_t}\} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Entonces

$$gen(B) = gen\{v_{i_1}, v_{i_2}, .., v_{i_t}\} = gen(\{v_1, v_2, ..., v_m\}) = V.$$

- Si $M \neq \emptyset$, entonces podemos suponer que $M = \{j_1, j_2, ..., j_{m-t}\}$. Nótese que por construcción de los $i_1, i_2, ...i_t$, los vectores v_{j_k} (para cada $k = 1, 2, ..., m-t$) son combinación lineal de los vectores $\{v_r : r \neq j_k\}$. Aplicando el lema anterior, tenemos que:

$$gen(\{v_1, v_2, ..., v_m\} \setminus \{v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_{m-t}}\}) = V$$

Entonces $gen(B) = gen\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_t}\} = V$ porque

$$\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_t}\} = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \setminus \{v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_{m-t}}\}.$$

b) *Ahora demostraremos que B es linealmente independiente.* Supongamos, por el contrario, que B es linealmente dependiente. Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t \in K$ no todas iguales a 0_K tales que:

$$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + ... + \alpha_t v_{i_t} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Sea $k = max\{j \in \{1, \ldots, t\} : \alpha_j \neq 0_K\}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (1): $k = 1$. En este caso, $(*)$ se convierte en la ecuación $\alpha_1 v_{i1} = \vec{0}$. Pero esto implica que $\alpha_1 = 0$ (porque $v_{i_1} \neq \vec{0}$). Esto último contradice el hecho de que no todas las α_i son iguales a cero.

Caso (2): $k > 1$. En este caso, la ecuación $(*)$ se convierte en la siguiente ecuación:

$$\alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + ... + \alpha_k v_{i_k} = \vec{0}.$$

Despejando, tenemos que:

$$v_{i_k} = \alpha_k^{-1}(-\alpha_1)v_{i_1} + \alpha_k^{-1}(-\alpha_2)v_{i_2} + ... + \alpha_k^{-1}(-\alpha_{k-1})v_{i_{k-1}},$$

pero esto último es una contradicción ya que v_{i_k} fue elegido de tal manera que no es combinación lineal de los vectores $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}$.

Como suponer que B es linealmente dependiente nos lleva a una contradicción, podemos concluir que B es linealmente independiente. $\square$

En el siguiente teorema demostramos que todo conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial de dimensión finita se puede extender a una base.

3.17 Teorema. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (sobre un campo K). Supongamos que $n = dim(V)$. Si $\{v_1 \ldots, v_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, existen vectores $w_1, ..., w_{n-m}$ tales que*

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_m, w_1, w_2, ..., w_{n-m}\}$$

es base de V.

Demostración. Como la $dim(V) = n$, existe $B_0 = \{a_1, ..., a_n\}$ base de V. Como B_0 es base de V, tenemos que $gen(B_0) = V$. Entonces

$$gen\{v_1, v_2, ..., v_m, a_1, a_2, ..., a_n\} = V.$$

Por la proposición anterior existen $w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_t}$ en

$$\{v_1, v_2, ..., v_m, a_1, a_2, ..., a_n\}$$

tales que $w_{i_j} = v_j$ para cada $j = 1, 2, ..., n$ y $w_{i_j} \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ para toda $j = m + 1, ..., n$ y además $\{w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_n}\}$ es base para V. $\square$

Hemos probado en el teorema anterior que en todo espacio vectorial de dimensión finita, todo subconjunto linealmente independiente se puede extender a una base. Esto nos permite concluir lo siguiente.

3.18 Corolario. *Si $dim(V) = n$ entonces todo subconjunto de V linealmente independiente de n vectores es una base para V.*

Demostración. Supongamos que $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V. Según la proposición anterior existe un conjunto S de $n - n$ vectores de V tal que $B \cup S$ es una base para V. Es claro que $S = \emptyset$. Así que $B \cup S = B$. De donde B es una base para V. $\square$

3.19 Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.*

1. *Si W es un subespacio vectorial de V entonces $dim(W) \leqslant dim(V)$.*
2. *Sea W un subespacio vectorial de V. Son equivalentes:*

   (a) $W = V$,

(b) $dim(W) = dim(V)$.

Demostración. (1) Primero note que W es un espacio vectorial de dimensión finita porque todo subconjunto de vectores linealmente independientes en W es un subconjunto de vectores linealmente independientes[2] en V. De esta manera, toda base para W es un subconjunto de vectores linealmente independientes de V; y por ello, toda base de W no puede tener una infinidad de elementos, es decir, W también es de dimensión finita.

Supongamos que $m = dim(W)$ y supongamos que $B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es una base para W. Como B es base de W, B es un subconjunto linealmente independiente de W. Así que B es un subconjunto linealmente independiente de V. Como $dim(V) = n$, n es el máximo número de elementos que todo subconjunto linealmente independiente de V puede tener, luego $m \leqslant n$. Por lo tanto $dim(W) \leqslant dim(V)$.

(2) La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es clara. Para demostrar $(b) \Rightarrow (a)$ supongamos que $dim(W) = dim(V)$. Bastará verificar que $V \subseteq W$. Sean $n = dim(W) = dim(V)$ y $B = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ una base para W. Como B es un subconjunto linealmente independiente en W, B es un subconjunto linealmente independiente en V.

Note ahora que como $dim(V) = n$ y B consta de n vectores, por el corolario anterior, B es una base para V.

Demostremos ahora que $V \subseteq W$. Sea $v \in V$ arbitrario, como B es base de V, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ tal que $v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$. Como $w_1, w_2, ..., w_n \in W$ y W es un subespacio vectorial, entonces $v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n \in W$. Por lo tanto, $V \subseteq W$; y por ello $W = V$. □

[2]Si fuese un subconjunto linealmente dependiente en V, entonces existirían escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in K$ no todos iguales a cero tales que $\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m = \vec{0}$. Pero entonces B es linealmente dependiente en W; lo cual es imposible.

Capítulo 4

Transformaciones lineales

En cursos elementales de cálculo diferencial e integral de una variable estudiamos las propiedades más básicas de la función logaritmo en base e, $\log_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, recuerde que el número real e se define como $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Es bien sabido que la función $\log_e$ es la función inversa de la función exponencial en base e, $exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $exp_e(x) = e^x$. Es decir, $\log_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es la única función (biyectiva) tal que:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} : \log_e(e^x) = x$.
2. $\forall\, y \in \mathbb{R}^+ : e^{\log_e(y)} = y$.

También es bien conocido que dos de las propiedades más básicas de la función $\log_e$ son las siguientes:

1. Para cada par de números reales positivos x, y se tiene que $\log_e(xy) = \log_e(x) + \log_e(y)$;
2. Para cada número real positivo x y cualquier número real α, se tiene que $\log_e(x^\alpha) = \alpha\log_e(x)$.

Debido a que el conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$ puede ser visto como un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, si uno introduce las operaciones: $x \boxplus y = x \cdot y$ ($x \cdot y$ es la multiplicación en $\mathbb{R}$) y $\alpha \boxdot x = x^\alpha$, entonces las anteriores propiedades pueden ser escritas en la siguiente forma:

1. Para cada par de números reales positivos x, y se tiene que $\log_e(x \boxplus y) = \log_e(x) + \log_e(y)$;
2. Para cada número real positivo x y cualquier número real α, se tiene que $\log_e(\alpha \boxdot x) = \alpha\log_e(x)$.

De esta forma podemos notar que la función logaritmo envía la suma de dos elementos en $\mathbb{R}^+$ en la suma de sus imágenes y envía al producto de un escalar por un vector de $\mathbb{R}^+$ en el producto de mismo escalar por la imagen en $\mathbb{R}$ del vector; podemos entonces decir que la función logaritmo $\log_e$ *preserva o respeta la estructura de espacio vectorial de su dominio y de su codominio.* En forma más técnica se dice que es una transformación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ (observe que ambos son espacios vectoriales sobre el mismo campo, a saber, $\mathbb{R}$).

En la siguiente sección introducimos formalmente la noción de transformación lineal.

4.1 Transformaciones lineales

Inspirándonos en las propiedades de la función logaritmo $\log_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ introducimos la siguiente definición.

4.1 Definición. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Diremos que una función $T : V \to W$ es una transformación lineal (o una aplicación lineal) si tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall\, u, v \in V : T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall\, u \in V$ y $\forall\, \alpha \in K : T(\alpha u) = \alpha T(u)$

4.2 Ejemplos.

1. Como hemos mencionado con anterioridad, si consideramos en el conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$ a las operaciones: $x \boxplus y = x \cdot y$ ($x \cdot y$ es la multiplicación en $\mathbb{R}$) y $\alpha \boxdot x = x^\alpha$, entonces $\mathbb{R}^+$ puede ser visto como un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, y con ello la función logaritmo natural $\log_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal.

   Observe que su función inversa, es decir, la función exponencial en base e

   $$exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

   definida por medio de la regla $exp_e(x) = e^x$ (donde $x \in \mathbb{R}$), también es una tranformación lineal con las operaciones de $\mathbb{R}^+$ ya mencionadas.

2. Si consideramos a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces la función $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por la regla: $T(a + ib) = \overline{a + ib} = a - ib$ (para todo

complejo $a+ib$), es una transformación lineal. Efectivamente, si $u=a+ib$ y $v=c+id$ están en $\mathbb{C}$, entonces $u+v=(a+c)+i(b+d)$. Así que:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \overline{u+v} \\ &= (a+c)-i(b+d) \\ &= (a+c)-ib-id \\ &= (a-ib)+(c-id) \\ &= \overline{u}+\overline{v} \\ &= T(u)+T(v). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $u=a+ib\in\mathbb{C}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $T(\alpha u)=\overline{\alpha u}=\overline{\alpha a+i\alpha b}=\alpha a-i\alpha b=\alpha(a-ib)=\alpha\overline{u}=\alpha T(u)$.

3. Supongamos que K es un campo cualquiera. La función $tr: M_{n\times n}(K)\to K$ definida por

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

donde $A=(a_{ij})$, es una transformación lineal. Efectivamente, si suponemos que

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

son elementos arbitrarios de $M_{n\times n}$ y que $\alpha\in K$, entonces

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{2n} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia $tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(A)+tr(B)$. Y además, $tr(\alpha A)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii})=\alpha\big(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\big)$.

No es difícil demostrar la siguiente equivalencia a la definición de transformación lineal. Dejamos la prueba al cuidado del lector.

4.3 Observación. Supongamos que V, W son espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Suponga que $T:V\to W$ es una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. T es una transformación lineal;

2. Para cada $x,z\in V$ y cada $\alpha\in K$, $T(x+\alpha z)=T(x)+\alpha T(z)$.

La siguiente proposición muestra dos propiedades básicas de las transformaciones lineales.

4.4 Proposición. *Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces*

1. $T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$
2. *Si* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *y* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, *entonces:*

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$$

Demostración. (1) Debido a que T es una transformación lineal tenemos que

$$T(\vec{0_v}) = T(\vec{0_v} + \vec{0_v}) \quad = \quad T(\vec{0_v}) + T(\vec{0_v})$$

Además $\vec{0_w} + T(\vec{0_v}) = T(\vec{0_v}) = T(\vec{0_v}) + T(\vec{0_v})$. Entonces $\vec{0_w} + T(\vec{0_v}) = T(\vec{0_v}) + T(\vec{0_v})$. En consecuencia, $\vec{0_w} = T(\vec{0_v})$.

(2) Haremos la demostración por inducción sobre n (para $n \geqslant 2$).

Para $n = 2$ tenemos que probar que:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

Pero como T es transformación lineal,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

Ahora supongamos que el resultado es válido para n y probésmolo para $n+1$. Note que

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1}) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) + T(\alpha_{n+1} v_{n+1}).$$

Pero por hipótesis de inducción,

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n).$$

Luego

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1}) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) + \alpha_{n+1} T(v_{n+1}),$$

lo que muestra que la afirmación también es válida para $n + 1$. □

A continuación introducimos las nociones de núcleo e imagen de una transformación lineal entre espacios vectoriales.

4.5 Definición. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

1. El conjunto $Nu(T) = ker(T) = N(T) = \{v \in V : T(v) = \vec{0}\}$ es llamado *núcleo de la transformación* T.

2. El conjunto $Im(T) = \{T(v) : v \in V\}$ es llamada *imagen de* T.

Observe que en términos puramente conjuntistas, el núcleo y la imagen de una transformación lineal $T : V \to W$ no son más que los conjuntos $T^{-1}(\{\vec{0}_W\})$ y $Rang(T) = \{T(x) : x \in \text{Dom } T\}$. Lo relevante del caso de las transformaciones lineales es que resulta que el núcleo y la imagen de una transformación lineal son siempre subespacios vectoriales del dominio y del contradominio, respectivamente.

4.6 Proposición. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:*

1. *$Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V.*

2. *$Im(T)$ es un subespacio vectorial de W*

Demostración. (1) Como $T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$, entonces $\vec{0_v} \in Nu(T)$. Supongamos que $u, v \in Nu(T)$ y que $\alpha \in K$. Entonces $T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$. Como $u, v \in Nu(T)$, tenemos que $T(u) = \vec{0} = T(v)$. Por ello, $T(u+\alpha v) = T(u)+\alpha T(v) = \alpha\vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$. En consecuencia, $u+\alpha v \in Nu(T)$. Por lo tanto, $Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V.

(2) Como $T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$, tenemos que $\vec{0_w} \in Im(T)$. Supongamos ahora $a, b \in Im(T)$ y que $\alpha \in K$. Sean $u, v \in V$ tales que $T(u) = a$ y $T(v) = b$ (estos elementos existen por la definición de $Im(T)$). Es claro que $u + \alpha v \in V$. Además, como T es transformación lineal, $T(u+\alpha v) = T(u)+\alpha T(v) = a+\alpha b$. Luego, $a+\alpha b \in Im(T)$. Por lo tanto, $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W. □

La siguiente observación contiene tres hechos relevantes de las transformaciones lineales definidas en espacios de dimensión finita.

4.7 Observación.

1. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces T está totalmente determinada por sus valores en cualquiera de las bases para V.* Es decir, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $c_i = T(v_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$ entonces para cada $v \in V$ se tiene que $T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^v c_i$, donde $\alpha_1^v, \ldots, \alpha_n^v \in K$ son los únicos escalares tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^v v_i$.

2. *Si V y W son espacios vectoriales sobre el mismo campo K, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para V y $w_1, \ldots, w_n$ son elementos de W (no necesariamente diferentes entre sí), entonces existe una (única) transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

3. *Sean V y W espacios vectoriales sobre K ambos de dimensión finita y tales que $dim(V) \leqslant dim(W)$. Si A es un subespacio vectorial de V, entonces existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $Nu(T) = A$.*

Demostración. (1). Si $v \in V$ entonces existen escalares únicos $\alpha_1^v, \ldots, \alpha_n^v \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i^v v_i$. Luego, como T es transformación lineal se tiene que $T(v) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i^v v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^v T(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^v c_i$.

(2). Definamos $T : V \to W$ por medio de la regla siguiente: si $v \in V$ y $\alpha_1^v, \ldots, \alpha_n^v \in K$ son los únicos escalares en K tales que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i^v v_i$ entonces $T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^v w_i$. Dejamos al lector demostrar que T es una transformación lineal. Note que si $v = v_j \in B$ entonces

$$\alpha_i^v = \begin{cases} 1_K & \text{si } i = j \\ 0_K & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En consecuencia, $T(v_j) = w_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

(3). Supongamos que $n = dim(V), m = dim(W)$ y que $r = dim(A)$.

Sea $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ una base para A. Podemos extender esta base de A a una base para todo V. Supongamos entonces que $b_1, ..., b_{n-r}$ son elementos de V tales que: $B = \{a_1, a_2, ..., a_r, b_1, ..., b_{n-r}\}$ es una base de V.

Por otro lado, sea $L = \{x_1, ..., x_m\}$ una base para W. Definamos $T : V \to W$ por medio de la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} T(a_i) = \vec{0_W} & i = 1, \ldots, r \\ T(b_j) = x_j & j = 1, .., n - r. \end{cases}$$

Resulta que T es una transformación lineal y además $Nu(T) = A$. Efectivamente, dejamos al lector verificar que T es una transformación lineal. Por otro lado, por la definición de T es claro que $A \subseteq Nu(T)$. Supongamos ahora que $x \in Nu(T)$. Como B es una base para V, existen escalares únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_{n-r}$ tales que:

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-r} b_{n-r}.$$

Como $x \in Nu(T)$ obtenemos que:

$$\vec{0}_W = T(x) = \alpha_1 T(a_1) + \cdots + \alpha_r T(a_r) + \beta_1 T(b_1) + \cdots + \beta_{n-r} T(b_{n-r});$$

es decir,

$$\vec{0}_W = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-r} x_{n-r}.$$

Luego, como $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es una base para W, lo anterior implica que $\vec{0}_K = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-r}$. En consecuencia, $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r \in A$. Por lo tanto, $Nu(T) \subseteq A$; y por lo cual, $A = Nu(T)$. $\square$

4.8 Ejemplo. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(3)+p(0) \end{pmatrix}$$

donde $P_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Recordemos que una base para $P_2(\mathbb{R})$ es el conjunto $B = \{1, x, x^2\}$. Recordemos también que $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$ y que la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es el conjunto siguiente:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como T es una transformación lineal, el conjunto $Im(T) = \{T(q) : q \in P_2(\mathbb{R})\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Note que debido a que B es una base de V, todo elemento $q \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se puede escribir de manera única como una combinación lineal de los elementos de B; por ello, $Im(T) = gen(\{T(1), T(x), T(x^2)\})$. Pero por la definición de T se tiene que $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. En consecuencia, obtenemos que

$$Im(T) = gen(\{T(1), T(x), T(x^2)\}) = gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right\}\right).$$

Definamos

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Note ahora que ninguna de los elementos de β es combinación lineal de los restantes; es decir, β es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, β es una base para $Im(T)$. De esta forma hemos demostrado que $dim(Im(T)) = 3$.

Observe ahora que si $T(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, entonces $p(1) = 0$, $p(0) = 0$ y $p(3) + p(0) = 0$. De donde, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, $a_0 = 0$, y $3a_1 + 9a_2 = 0$. Por lo cual, $0 = a_0 = a_1 = a_2$. Es decir, $p(x) = 0$. En consecuencia $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ y $dim(Nu(T)) = 0$.

Observe que en el anterior ejemplo sucede que $dim(Im(T)) + dim(Nu(T)) = 3 + 0 = 3 = dim(P_2(\mathbb{R}))$. A pesar de lo que pudiera pensarse, lo anterior no es resultado de que V, W y de T sean los espacios particulares $P_2(\mathbb{R})$, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y que T sea la función $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(3)+p(0) \end{pmatrix}$. En realidad lo anterior es consecuencia del hecho de que T es una transformación lineal y de que $V = PM_2(\mathbb{R})$ es un espacio de dimensión finita. El resultado general que trata este hecho es llamado *teorema de dimensión*. Para demostrarlo primero demostraremos la siguiente sencilla observación que fue usada implícitamente en el ejemplo anterior.

4.9 Observación. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V entonces $Im(T) = gen\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W, tenemos que $gen(\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\} \subseteq Im(T)$.

Sea $y \in Im(T)$. Entonces existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. Como B es una base para V, existen escalares únicos $\alpha_1^x,\ldots,\alpha_n^x$ tales que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^x v_i$. Siendo T una transformación lineal tenemos que $y = T(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^x T(v_i) \in gen\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$. Por lo tanto, $Im(T) \subseteq gen\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$. □

4.10 Teorema (de dimensión)**.** *Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K, y $T : V \to W$ una transformación lineal cualquiera. Si V es de dimensión finita, entonces los subespacios vectoriales $Im(T)$ y $Nu(T)$ también son de dimensión finita y además*

$$dim(V) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T)).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $dim(V) = n$. Primero note que como V es de dimensión finita y $Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V, entonces $Nu(T)$ también es de dimensión finita. Por otro lado, si $B = \{z_1,\ldots,z_n\}$ es una base para V entonces por la observación anterior,

$$Im(T) = gen\{T(z_1),\ldots,T(z_n)\}.$$

Aplicando ahora la proposición 3.16 tenemos que $Im(T)$ es de dimensión finita (note que si todos los elementos $T(z_1),\ldots,T(z_n)$ son iguales a $\vec{0}_W$ entonces T es la transformación lineal constante cero y $Im(T) = \{\vec{0}_W\}$, el cual es de dimensión finita).

Demostremos ahora la ecuación $dim(V) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$. Supongamos que $n = dim(V)$ y que $r = dim(Nu(T))$. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq Nu(T)$ una base para $Nu(T)$. Como $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es linealmente independiente en V, existen $v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_{r+(n-r)} \in V$ tales que

$$C = \{v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$$

es una base de V.

Por la observación anterior (vea 4.9),

$$Im(T) = gen(\{T(v_1),\ldots T(v_r), T(v_{r+1}),\ldots,T(v_n)\}).$$

Nótese que $T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_r) = \vec{0}_W$ porque $v_1,\ldots,v_r \in Nu(T)$. Entonces $Im(T) = gen\{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}),\ldots,T(v_n)\}$.

Afirmación. $D = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}),\ldots,T(v_n)\}$ es una base para $Im(T)$.

En efecto: bastará verificar que C es linealmente independiente. Para ello, supongamos que

$$\alpha_1 T(v_{r+1}) + \alpha_2 T(v_{r+2}) + \cdots + \alpha_{n-r} T(v_{r+n-r}) = \vec{0}_W.$$

Como T es una transformación lineal, tenemos que:

$$\vec{0}_W = T(\alpha_1 v_{r+1} + \alpha_2 v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n).$$

Así que $\alpha_1 v_{r+1} + \alpha_2 v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in Nu(T)$.

Como $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base de $Nu(T)$ y $\alpha_1 v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in Nu(T)$, existen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in K$ tales que

$$\alpha_1 v_{r+1} + \alpha_2 v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_r v_r.$$

Luego

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_r v_r - \alpha_1 v_{r+1} - \alpha_2 v_{r+2} - \cdots - \alpha_n v_n = \vec{0}_V.$$

Como C es base, lo anterior implica que

$$0_K = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r.$$

En consecuencia $\{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. $\boxtimes$

La anterior afirmación permite concluir que $dim(Im(T)) = n - r$. Por lo tanto, $dim(V) = n = r + (n - r) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$. $\square$

4.11 Definición. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si $Nu(T)$ y $Im(T)$ son espacios vectoriales de dimensión finita definimos:

1. La nulidad de T como el número natural $nul(T) = dim(Nu(T))$.
2. El rango de T como el número natural $ran(T) = dim(Im(T))$.

4.12 Ejemplo. Supongamos que K es un campo cualquiera. La función $tr : M_{n\times n}(k) \to k$ dada por:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

donde $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una transformación lineal. Como $dim(M_{n\times n}(K)) = n^2$ es finita, por el teorema de dimensión tenemos que $n^2 = dim(Nu(tr)) + dim(Im(tr))$. Pero $Im(tr)$ es un subespacio de K, así que $Im(tr) = \{0_K\}$ o bien $Im(tr) = K$.

Si $A = (a_{ij})$ donde $a_{11} = 1_K$ y $a_{ij} = 0_K$ para todo $(i, j) \neq (1, 1)$, se tiene que $tr(A) = 1_K \neq 0_k$. Por lo tanto, $Im(tr) \neq \{\vec{0} = 0_K\}$. En consecuencia $Im(tr) = K$. Luego $dim(Im(tr)) = 1$. Por lo cual, $dim(Nu(tr)) = n^2 - 1$.

Recordemos que una función $f : X \to Y$ entre conjuntos es sobreyectiva si $Im(f) = Y$, esto es, si para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por otra parte, se dice que f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$ (o equivalentemente, si $x \neq y$ implica que $f(x) \neq f(y)$).

4.13 Observación. En el caso de las transformaciones lineales, la inyectividad es equivalente a una propiedad del núcleo de la transformación.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es inyectiva;
2. $Nu(T) = \{\vec{0}\}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Como $\{\vec{0}_V\} \subseteq Nu(T)$, basta probar que si $x \in Nu(T)$ entonces $x = \vec{0}_V$. Supongamos entonces que $x \in Nu(T)$. Luego $T(x) = \vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$. Como T es inyectiva, lo anterior implica que $x = \vec{0_V}$. Por lo tanto, $Nu(T) \subseteq \{\vec{0}_V\}$. Es decir, $Nu(T) = \{\vec{0}\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $x, y \in V$ son tales que $T(x) = T(y)$. Consideramos ahora a $x - y$. Como T es transformación lineal, $T(x - y) = T(x) - T(y)$. Pero $T(x) = T(y)$ implica que $T(x - y) = \vec{0}_W$. Así que $x - y \in Nu(T) = \{\vec{0}_V\}$. Por lo tanto, $x - y = 0_V$, es decir $x = y$. Esto último muestra la inyectividad de T. $\square$

Para el caso de espacios vectoriales de la misma dimensión finita, la inyectividad de una transformación lineal entre ellos es equivalente a su sobreyectividad. Cabe mencionar que esta propiedad es muy difícil de que se cumpla para el caso general de funciones entre conjuntos.

4.14 Proposición. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supóngase que ambos espacios son de dimensión finita y que $dim(V) = dim(W)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es inyectiva;*
2. *T es sobreyectiva.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Como T es inyectiva, $Nu(T) = \{\vec{0}_V\}$. Por ello, $dim(Nu(T)) = 0$. Aplicando el teorema de la dimensión tenemos que $dim(W) = dim(V) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T)) = dim(Im(T))$. Luego, $W = Im(T)$. Por lo tanto, T es una función sobreyectiva.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si T es sobreyectiva, entonces $W = Im(T)$. Luego por el teorema de la dimensión, $dim(V) = dim(Im(T)) + dim(Nu(T)) = dim(W) + dim(Nu(T)) = dim(V) + dim(Nu(T))$. En consecuencia, $dim(Nu(T)) = 0$. Por ello, $Nu(T) = \{\vec{0}_V\}$; es decir T es inyectiva. $\square$

4.2 Isomorfismos

El propósito en esta sección es introducir la noción de isomorfismos entre espacios vectoriales.

4.15 Definición. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Diremos que V es isomorfo a W, y escribiremos $V \simeq W$, si existe una transformación lineal $T : V \to W$ biyectiva.

Si $T : V \to W$ es un isomorfismo entonces T es una función biyectiva, y por ello, existe su función inversa, es decir, existe una función, denotada con los símbolos $T^{-1} : W \to V$, y que es la única función que tiene las siguientes dos propiedades:

1. Para cada $x \in V$, $T^{-1}(T(x)) = x$, y
2. Para cada $y \in W$, $T(T^{-1}(y)) = y$.

Resulta que si T es un isomorfismo entonces la función inversa $T^{-1} : W \to V$ también es una transformación lineal, y en consecuencia, también es un isomorfismo. Efectivamente, si $y_1, y_2 \in W$ y $\alpha \in K$ son elementos arbitrarios, entonces $T(T^{-1}(y_1 + \alpha y_2)) = y_1 + \alpha y_2 = T(T^{-1}(y_1)) + \alpha T(T^{-1}(y_2))$. Pero como T es una transformación lineal, $T(T^{-1}(y_1)) + \alpha T(T^{-1}(y_2)) = T(T^{-1}(y_1) + \alpha T^{-1}(y_2))$. La inyectividad de T implica ahora que $T^{-1}(y_1 + \alpha y_2) = T^{-1}(y_1) + \alpha T^{-1}(y_2)$. Lo que muestra que T^{-1} es una transformación lineal según la observación 4.3.

Lo anterior nos permite concluir dos cosas. Primeramente, si V es isomorfo a W entonces la estructura de espacio vectorial de V es *identica* a la estructura de espacio vectorial de W; es decir, la suma en V y la multiplicación por escalares es esencialmente la misma que la suma en W y la multiplicación por escalares en W. Lo otro que nos dice lo anterior, es que si V es isomorfo a W entonces W también es isomorfo a V. La siguiente proposición tiene, además de esta última propiedad, otras dos propiedades de los isomorfismos de espacios vectoriales.

4.16 Proposición. *Supongamos que V, W y Z son espacios vectoriales sobre el mismo campo K. Entonces:*

1. *V es siempre isomorfo a V;*
2. *Si V es isomorfo a W entonces W es isomorfo a V.*
3. *Si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z, entonces V es isomorfo a Z.*

Demostración. (1). Definamos $T : V \to V$ por medio de la regla: $T(v) = v$ para cada $v \in V$. Es claro que T es una transformación lineal biyectiva.

(2). Vea el párrafo posterior a la definición 4.15.

(3). No es difícil demostrar que si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son transformaciones lineales biyectivas, entonces la función composición $S \circ T : V \to Z$ es una transformación lineal biyectiva. Dejamos la demostración al cuidado del lector. $\square$

La siguiente proposición muestra que los isomorfismos respetan, como es de esperarse, las nociones de independencia lineal, y por ello, la noción de base.

4.17 Proposición. *Supóngase que $T : V \to W$ es un isomorfismo y que $S \subseteq V$. En cada uno de los incisos (1), (2) y (3), las condiciones enunciadas en ellos son equivalentes:*

1. *(a) $S \subseteq V$ es linealmente independiente en V;*

   (b) $T(S) = \{T(x) : x \in S\}$ es linealmente independiente en W.

2. *(a) $gen(S) = V$;*

   (b) $gen(T(S)) = W$.

3. *(a) $B \subseteq V$ es una base de V;*

   (b) $T(B)$ es una base de W.

Demostración. (1). $(a) \to (b)$. Supongamos que $y_1, y_2, ..., y_n$ son elementos de $T(S)$ tales que $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = \vec{0}_W$. Como T es biyectiva, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe un único $x_i \in V$ tal que $T(x_i) = y_i$ para cada i. Entonces $\vec{0}_W = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \cdots + \alpha_n T(x_n)$. Por ello, $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \vec{0}_W$. Como T es inyectiva, lo anterior implica que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \vec{0}_V$. Como S es linealmente independiente, podemos concluir que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_K$. Por lo tanto, $T(S)$ es linealmente independiente.

$(b) \to (a)$ Sean $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ y supongamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}_V$. Entonces $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n) \in T(S)$, y además,

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0}_W \qquad \text{(I)}$$

puesto que

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

Como $T(S)$ es linealmente independiente, el conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Por lo cual, (I) implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0_K$. Por lo tanto S es linealmente independiente.

(2) $(a) \to (b)$. Claramente $gen(T(S)) \subseteq W$. Supongamos que $y \in W$. Como T es sobreyectiva, existe $x \in V$ tal que $T(x) = y$. Como $x \in V = gen(S)$, existen $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $v_1, v_2, ..., v_n \in S$ tales que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Siendo T una transformación lineal,

$$y = T(x) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

Como $T(v_j) \in T(S)$ para cada $j = 1, 2, ..., n$ podemos concluir que $y \in gen(T(S))$. Por lo tanto $W \subseteq gen(T(S))$. Por lo tanto, $W = gen(T(S))$.

$(b) \to (a)$. Es suficiente demostrar que $V \subseteq gen(S)$. Supomgamos que $x \in V$. Entonces $T(x) \in W = gen(T(S))$. Por ello, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ tales que $T(x) = \beta_1 T(x_1) + \beta_2 T(x_2) + \cdots + \beta_n T(x_n)$. Entonces $T(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n) = T(x)$. Como T es inyectiva, lo anterior implica que $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \in gen(S)$. Por lo tanto $V = gen(S)$.

(3) La equivalencia entre (a) y (b) es una consecuencia sencilla de los incisos (1) y (2). Dejamos al lector la escritura de la demostración. □

El siguiente teorema muestra que para el caso de espacios vectoriales (sobre el mismo campo K) de dimensión finita. La existencia de un isomorfismo entre ellos es equivalentes a los espacios tengan la misma dimensión.

4.18 Teorema. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita (sobre el mismo campo K). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $V \simeq W$;

2. $dim(V) = dim(W)$.

Demostración. $(1) \to (2)$. Como $V \simeq W$, existe una transformación lineal biyectiva $T : V \to W$. Por el teorema de la dimensión tenemos que $dim(V) = nul(T) + rango(T)$. Como T es inyectiva , $dim(Nu(T)) = 0$; y como T es sobreyectiva, $rango(T) = dim(W)$. Por lo tanto, $dim(V) = dim(W)$.

$(2) \to (1)$. Supongamos que $n = dim(V) = dim(W)$. Sean $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bases para V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ la única transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ (vea la observación 4.7). Demostremos que T es un isomorfismo.

Si $w \in W$ entonces existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$. Entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in V$ es tal que

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n = w. \end{aligned}$$

Por lo anterior, T es suprayectiva. Como $dim(V) = dim(W)$, la proposición 4.14 implica que T también es inyectiva; y por ello, un isomorfismo. □

4.19 Corolario. *Supóngase que K es un campo. Entonces para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $M_{m\times n}(K)$ es isomorfo a K^{mn}.*

4.20 Definición. Si V y W son espacios vectoriales sobre un campo K. Definimos al conjunto

$$\mathcal{L}(V, W) = Hom(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ es transformación lineal}\}.$$

En el conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ podemos definir una estructura de espacio vectorial definiendo una suma de elementos en $\mathcal{L}(V, W)$ y una multiplicación de elementos de $\mathcal{L}(V, W)$ por elementos del campo K. Esto se logra simplemente usando la estructura de espacio vectorial de W:

(1) si $R, S \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces $R + S : V \to W$ es definida de la siguiente manera:

$$(R + S)(x) = R(x) +_W S(x) \qquad (x \in V),$$

aquí el símbolo $+_W$ denota a la suma de vectores en el espacio vectorial W.

(2) Si $R \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha R : V \to W$ es la función definida por la siguiente regla:

$$(\alpha R)(x) = \alpha R(x) \qquad (x \in V).$$

No es difícil verificar que si $R, S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\alpha \in K$ entonces $R + S, \alpha R \in \mathcal{L}(V, W)$. Tampoco es difícil demostrar que $\mathcal{L}(V, W)$, junto con la suma de transformaciones lineales y la multiplicación por escalares, es un espacio vectorial sobre K, cuando V y W lo son (dejamos como un ejercicio al lector la demostración de las anteriores afirmaciones).

Nuestro próposito ahora es demostrar que si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ (con $m, n \in \mathbb{N}$), entonces $\mathcal{L}(V, M)$ es isomorfo a K^{mn}.

4.21 Proposición. *Supongamos que V y W son espacios de dimensión finita sobre el campo K. Si $\dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) entonces $dim(L(V, W)) = mn$. En consecuencia, $\mathcal{L}(V, M) \simeq K^{mn}$.*

Demostración. Verificamos que $dim(L(V, W)) = mn$. Para hacerlo exhibiremos una base para $L(V, W)$ de tamaño mn.

Como $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, existen bases $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ de V y W respectivamente. Definamos, para cada $(j, i) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\}$ a $T^i_j : V \to W$ como la única transformación lineal tal que:

$$T^i_j(v_l) = \begin{cases} w_i & \text{si } l = j \\ \vec{0}_W & \text{si } l \neq j; \end{cases}$$

donde $l \in \{1, 2, ..., n\}$.

Afirmación. $D = \{T_j^i : (j, i) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2..., m\}\}$ es una base para $\mathcal{L}(V, W)$.

En efecto. Demostremos primero que $\mathcal{D}$ genera a $\mathcal{L}(V, W)$. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es cualquier elemento. Como C es base de W, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ existen escalares únicos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m.$$

Resulta entonces que $T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i \in gen(D)$. Efectivamente, para probar esta última igualdad bastará demostrar que para cada $l \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $T(v_l) = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i)(v_l)$ (recuerde que B es una base para V). Fijemos entonces una $l \in \{1, \ldots, n\}$. Por un lado sabemos que $T(v_l) = \alpha_{1l}w_1 + \alpha_{2l}w_2 + ... + \alpha_{ml}w_m$. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl}(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i)(v_l) & = & \big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i1}T_1^i + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i2}T_2^i + ... + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}T_n^i\big)(v_l) \\ & = & \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i1}T_1^i(v_l) + \cdots + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}T_n^i(v_l)\end{array}$$

Pero por la definición de T_j^i tenemos que $T_j^i(v_l) = \vec{0}_W$ si $l \neq j$. Consecuentemente tenemos que

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i1}T_1^i(v_l) + \cdots + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}T_n^i(v_l) & = & \alpha_{1l}w_1 + \alpha_{2l}w_2 + ... + \alpha_{ml}w_m \\ & = & \sum_{i=1}^{m}\alpha_{il}w_i.\end{array}$$

Por lo tanto $T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i$. Entonces $\mathcal{L}(V, W) \subseteq gen(\mathcal{D})$. Por esto último podemos concluir que D genera a $\mathcal{L}(V, W)$.

Demostremos ahora que D es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{L}(V, W)$. Para ello supongamos que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i = 0$$

donde $\alpha_{ij} \in K$ para cada j y cada i.

Fijemos $l \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces

$$(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}T_j^i)(v_l) = \vec{0}(v_l).$$

Como $T_j^i(v_l) = \vec{0}_W$ si $l \neq j$ obtenemos que la anterior igualdad se convierte en

$$(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{il}T_l^i)(v_l) = \vec{0}_W;$$

y como $T_j^i(v_l) = w_i$ si $l = j$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{il} w_i = \vec{0}_W.$$

Como C es base de W, lo anterior implica que $\alpha_{il} = 0$ para cada $i = 1, 2, ..., m$. Debido que l es un elemento cualquiera de $\{1, 2, ..., n\}$ podemos concluir que

$$\forall\ l = 1, 2, ..., n\ \forall\ i = 1, 2, ..., m\ :\ \alpha_{il} = 0_K.$$

Por lo tanto $\mathcal{D}$ es linealmente independiente. □

4.22 Ejemplo. Como $P_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4 (ya que $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para $P_3(\mathbb{R})$), este espacio vectorial es isomorfo a $\mathbb{R}^4$. El lector debe darse cuenta que en las demostraciones de las anteriores proposiciones pudimos incluso establecer un isomorfismo. La idea para hacerlo es simple. Recordaremos la idea en este caso particular.

Debido a que $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para $P_3(\mathbb{R})$ la única transformación lineal $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1) = e_1, T(x) = e_2, T(x^2) = e_3, T(x^3) = e_4,$$

donde

$$C = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es necesariamente un isomorfismo ya que siendo los dos espacios de la misma dimensión finita, para una transformación lineal entre ellos es equivalente que ella sea inyectiva a que ella sea sobreyectiva. Como C es una base de $\mathbb{R}^4$, para todo elemento $y \in \mathbb{R}^4$ existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$. Resulta que, por la forma en que se definió a T, el elemento $p(x) = \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ es tal que $T(p(x)) = y$; es decir, T es sobreyectiva, y por ello, un isomorfismo.

Por otro lado, por la proposición anterior, el espacio vectorial $\mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4)$ tiene dimensión 16. Obsérvese que la base canónica para este espacio vectorial (es decir, la base exhibida en la prueba de la proposición anterior) tiene por elementos a las siguientes 16 transformaciones lineales $T_j^i : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ (donde $i, j = 1, \ldots, 4$ y $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3$) definidas por las reglas:

$$t_j^i(v_l) = \begin{cases} e_i & \text{si } l = j \\ (0, 0, 0, 0) & \text{si } l \neq j. \end{cases}$$

4.3 Una aplicación del teorema de dimensión

En este apartado aplicaremos algunos de los teoremas que hemos demostrado hasta el momento con la finalidad de demostrar un resultado relacionado a sistemas de ecuaciones lineales.

El resultado que demostraremos es el lema 3.9 cuya demostración quedo pendiente. Antes de demostrar este lema estableceremos alguna nomenclatura útil para el tema.

Supongamos que K es un campo cualquiera. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en el campo K:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

Es claro que el sistema $(*)$ es un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Escribamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Con la anterior notación, es claro que el sistema $(*)$ se puede reescribir en la forma $Ax = B$.

Definamos ahora a la función $L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$ por medio de la siguiente regla: $L_A(X) = AX$ para toda $X \in M_{n\times 1}(K)$.

Recordemos que en el caso particular en que

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema $(*)$ es llamado sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Observe que en el caso de sistemas homogéneos se tiene que $L_A^{-1}(\{B\}) = L_A^{-1}(\{\vec{0}\}) = Nu(L_A)$. Y de esta manera, para el caso de sistemas homogéneos, todo elemento $X \in Nu(L_A)$ es una solución al sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(*)$. Y viceversa, toda solución X del sistema homogéneo $(*)$ es un elemento de $Nu(L_A)$. En resumen, cuando $B = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$Nu(L_A) = \{X \in M_{n\times 1}(K) : X \text{ es solución de } (*)\}.$$

En seguida enunciamos de nuevo el lema 3.9, demostraremos este lema como una aplicación muy sencilla del teorema de la dimensión 4.10.

4.23 Lema. *Supongamos que:*

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n*-incógnitas, donde* $a_{ij} \in K$ *para cada* $i, j \in K$*. Si* $m < n$ *entonces (1) tiene una solución no trivial en* K *(i.e, existen* $x_1, ..., x_n \in K$*, no todos iguales a* 0_K*, que son solución de (1)).*

Demostración. Consideremos a la transformación lineal

$$L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$$

definida por la regla: $L_A(X) = AX$ para toda $X \in M_{n\times 1}(K)$. Por el teorema de la dimensión $n = dim(M_{n\times 1}(K)) = dim(Nu(L_A)) + dim(Im(L_A))$. Note que como $m < n$ y $Im(L_A)$ es un subespacio de $M_{m\times 1}(K)$, tenemos que $dim(Im(L_A)) \leqslant m < n$. Si ocurriera que $Nu(L_A) = \{\vec{0}\}$ entonces $dim(Nu(L_A)) = 0$, y en consecuencia, $n = dim(M_{n\times 1}(K)) = dim(Nu(L_A)) + dim(Im(L_A)) = dim(Im(L_A)) \leqslant m < n$ lo que es evidentemente una contradicción. Entonces no puede ocurrir que $Nu(L_A) = \{\vec{0}\}$. Por lo tanto existe $X \in Nu(L_A)$ tal que $X \neq \vec{0}$. Por lo dicho en los párrafos previos al enunciado del lema, X es entonces una solución no trivial de (1). □

Capítulo 5

La matriz de representación de una transformación lineal

Diremos que una base B de un espacio vectorial V es una *base ordenada para* V si en B existe un orden para sus elementos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, las colecciones $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $C = \{(0,1),(1,0)\}$ son bases para el espacio $\mathbb{R}^2$. Note que desde el punto de vista de teoría de conjuntos, estas dos bases, como conjuntos, son iguales. Sin embargo, con nuestra definición de base ordenada, ambas bases tienen un orden, y como bases ordenadas son diferentes porque el primer elemento de la base B, el vector $(1,0)$, es diferente del primer elemento de la base C, a saber, el vector $(0,1)$. En este sentido, cada vez que escribamos la frase $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es una base ordenada para un espacio vectorial* V, estaremos implícitamente pensando en el orden dado por los subíndices (cuando escribimos a una base exhibiendo sus elementos sin ponerles un subíndice a éstos, estamos tácitamente suponiendo que el primer elemento listado tiene el subíndice 1, el segundo elemento listado tiene el subíndice 2 y así sucesivamente. Por ejemplo en el caso de la base $B = \{(1,0),(0,1)\}$ suponemos tácitamente que $v_1 = (1,0)$ y que $v_2 = (0,1)$; pero para el caso de la base $C = \{(0,1),(1,0)\}$, suponemos que $v_1 = (0,1)$ y que $v_2 = (1,0)$).

Usando la idea de base ordenada asociaremos a cada transformación lineal $T : V \to W$ (que está definida en espacios vectoriales de dimensión finita), una única matriz que tenga toda la información de la transformación lineal. En seguida explicamos el procedimiento para crear la matriz asociada a la transformación lineal T.

En lo que resta de este capítulo siempre se supone que todos los espacios vectoriales considerados son de dimensión finita.

5.1 La matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que V y W son espacios vectoriales (sobre el mismo campo K) de dimensión finita, digamos que $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Y tomemos bases ordenadas $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ para los espacios vectoriales V y W, respectivamente.

Es claro que como T es en particular una función se tiene que, para cada $j = 1, 2, ..., n$, $T(v_j) \in W$. Ahora bien, como $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ es una base de W, existen escalares únicos α_{1j}, $\alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj} \in K$ tales que

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2 + ... + \alpha_{m1}w_m \\ & \vdots & \\ T(v_j) & = & \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & \alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + ... + \alpha_{mn}w_m \end{array}$$

Sabemos ya que para poder conocer a una transformación lineal es suficiente conocer los valores de ésta en los elementos de una base de su dominio de definición (vea el inciso (2) de la observación 4.7). Para el caso de la anterior transformación lineal T, tenemos ya escritos, de manera única, a cada uno de los valores de ésta en cada uno de los elementos de la base B en términos de los elementos de la base C. Así que para reconstruir a cada elemento de la forma $T(v_j)$ sólo es necesario conocer a los escalares únicos α_{1j}, $\alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj} \in K$ que nos permiten escribir a $T(v_j)$ como una combinación lineal de los elementos de la base ordenada C. Podemos reflejar el orden de C ordenando a los escalares α_{1j}, $\alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ según el orden de los elementos de C. De esta manera podemos decir que los escalares α_{ij} tienen toda la información para poder reconstruir a la transformación lineal T (utilizando a las bases ordenadas B y C).

Por esta razón coleccionando en una matriz a los escalares α_{ij} tenemos entonces la matriz

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

que tiene toda la información de la transformación lineal T. La matriz $[T]_B^C$ (cuyo tamaño es $m \times n$) será llamada *matriz asociada a T respecto a las bases ordenadas B y C* (también es llamada *matriz de representación de T en las bases ordenadas B y C*). Es fácil notar que la j-ésima columna de la matriz $[T]_B^C$ tiene a los escalares

$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ escritos (*de arriba hacia abajo*) en el orden que tienen en relación a los elementos de la base C.

La siguiente proposición muestra que efectivamente la matriz $[T]_B^C$ tiene toda la información de la transformación lineal T.

5.1 Proposición. *Sean $R, T : V \to W$ transformaciones lineales, y sean B y C bases ordenadas para V y W, respectivamente. La siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $R = T$.
2. $[R]_B^C = [T]_B^C$.

Demostración. Suponga que $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y que $C = \{w_1, ..., w_m\}$. Como C es una base ordenada de W, para cada $j = 1, 2, ..., n$ existen escalares únicos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{mj}$ tales que

$$R(v_j) = \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m.$$

Entonces

$$[R]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Asimismo, para cada $j = 1, 2, ..., n$ tenemos que $T(v_j) \in W$. Como C es base de W, existen escalares únicos $\theta_{1j}, \theta_{2j}, ..., \theta_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = \theta_{1j}w_1 + \theta_{2j}w_2 + ... + \theta_{mj}w_m.$$

Luego

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & ... & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & ... & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & ... & \theta_{mn} \end{pmatrix}.$$

De esta manera es muy claro que $[R]_B^C = [T]_B^C$ si y sólo si $\alpha_{ij} = \theta_{ij}$ para cada $j = 1, \ldots, n$ y cada $i = 1, \ldots, m$.

Observe ahora que $T = R$ si y sólo si $T(v_j) = R(v_j)$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Efectivamente, si $R = T$ es claro que $T(v_j) = R(v_j)$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Suponga entonces que $T(v_j) = R(v_j)$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Considere cualquier elemento $x \in V$. Como B es una base (ordenada) para V, existen escalares únicos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tales que $x = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n$. Entonces

$$\begin{aligned} R(x) &= R(\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n) = \gamma_1 R(v_1) + \cdots + \gamma_n R(v_n) \\ &= \gamma_1 T(v_1) + \cdots + \gamma_n T(v_n) \\ &= T(\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

Debido a que $x \in V$ es un elemento cualquiera, podemos concluir que $R = T$.

Por todo lo anterior, para concluir nuestra demostración bastará demostrar la siguiente afirmación:

Afirmación Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cada $j = 1, \ldots, n$, $R(v_j) = T(v_j)$.
2. $[R]_B^C = [T]_B^C$.

En efecto: (1) $\to$ (2) Sean $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ elementos cualesquiera. Por (1), $R(v_j) = T(v_j)$. Luego,

$$(\alpha_{1j} - \theta_{1j})w_1 + (\alpha_{2j} - \theta_{2j})w_2 + ... + (\alpha_{mj} - \theta_{mj})w_m = \vec{0}_W.$$

Como C es una base, lo anterior implica que $\alpha_{lj} - \theta_{lj} = 0_K$ para toda $l = 1, \ldots, m$. En particular, $\alpha_{ij} = \theta_{ij}$. Como i y j son elementos arbitrarios podemos concluir que $\alpha_{ij} = \theta_{ij}$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y toda $j \in \{1, \ldots, n\}$; es decir, $[R]_B^C = [T]_B^C$.

(2) $\to$ (1) Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ cualquier elemento. Como $[R]_B^C = [T]_B^C$, la columna j-ésima de $[R]_B^C$ es igual a la columna j-ésima de $[T]_B^C$. Por ello, $\alpha_{ij} = \theta_{ij}$ para toda $i = 1, \ldots, m$. Entonces

$$\begin{aligned} R(v_j) &= \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m \\ &= \theta_{1j}w_1 + \theta_{2j}w_2 + ... + \theta_{mj}w_m \\ &= T(v_j). \end{aligned}$$

□

A continuación damos unos ejemplos del cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal.

5.2 Ejemplo.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más n con coeficientes en $\mathbb{R}$. Definamos $T : P_{n+1}(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ por medio de la regla: $T(p(x)) = p'(x)$ para cada $p(x) \in P_{n+1}(\mathbb{R})$ (aquí $p'(x)$ denota a la derivada del polinomio $p(x)$).

   Sabemos que los conjuntos $B = \{1, x, x^2, ..., x^{n+1}\}$ y $C = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ son bases (ordenadas) para $P_{n+1}(\mathbb{R})$ y $P_n(\mathbb{R})$. Para hallar a la matriz $[T]_B^C$ de representación de T en las bases ordenadas B y C (la cual tiene tamaño $n + 1 \times (n + 2)$) procedemos de la siguiente manera.

Calculamos los valores de T en cada uno de los elementos de la base B y expresamos éstos como combinación lineal de los elementos de la base C:

$$\begin{array}{rcccl} T(1) & = & 0 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^n \\ T(x) & = & 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^n \\ T(x^2) & = & 2x & = & 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^n \\ T(x^3) & = & 3x^2 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^n \\ & \vdots & & & \\ T(x^{n+1}) & = & (n+1)x^n & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + (n+1)\cdot x^n \end{array}$$

Entonces la matriz $[T]_B^C$ es la siguiente matriz:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n+1 \end{pmatrix}$$

2. Consideremos ahora a la transformación lineal $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por la regla:
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p(3) \end{pmatrix},$$
para cada $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$. Supongamos que B y C son las siguientes bases ordenadas:
$$B = \{1, x, x^2\} \quad \text{y} \quad C = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}.$$
Calculamos los valores de T en cada uno de los elementos de la base B y expresamos éstos como combinación lineal de los elementos de la base C:
$$\begin{array}{rcccl} T(1) & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & = & 1\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 1\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ T(x) & = & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) & = & 0\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 1\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 3\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ T(x^2) & = & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 9 \end{smallmatrix}\right) & = & 0\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 0\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 9\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$
Por lo tanto $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, se define a la transformación lineal $L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$ por medio de la siguiente regla: $L_A(X) = AX$ para toda $X \in M_{n\times 1}(K)$.

   No es difícil verificar que si B es la base canónica del $M_{n\times 1}(K)$ y C es la base canónica de $M_{m\times 1}(K)$ entonces $[L_A]_B^C = A$.

4. Supongamos que V es un espacio vectorial sobre el campo K y que $dim(V) = n$. Supongamos que $T : V \to V$ es la transformación lineal cuya regla es: $T(x) = x$ para cada $x \in X$; es decir, $T = id_V$. Supongamos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada para V. Debido a que

$$\begin{array}{rcccl} T(v_1) & = & v_1 & = & 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \ldots + 0 \cdot v_n \\ T(v_2) & = & v_2 & = & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \ldots + 0 \cdot v_n \\ T(v_3) & = & v_3 & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + \ldots + 0 \cdot v_n \\ & \vdots & & & \\ T(v_n) & = & v_n & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \ldots + 1 \cdot v_n \end{array}$$

obtenemos que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = Id_n.$$

Es decir, $[T]_B^B$ es la matriz identidad (con coeficientes en K) de tamaño $n \times n$.

El último de los anteriores ejemplos muestra una propiedad general del cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal: *la matriz asociada a la transformación identidad de un espacio vectorial V respecto de una base ordenada fija es la matriz identidad de tamaño $n \times n$* (donde n es la dimensión del espacio vectorial V).

En lo que sigue demostraremos algunas otras propiedades generales relacionadas al cálculo de la matriz asociada a transformaciones lineales. Primeramente necesitaremos la siguiente noción.

Recuerde que si $R : V \to W$ y $S : W \to Z$ son funciones entonces la composición de R y S se define como la función $S \circ R : V \to Z$ cuya regla de asociación es la siguiente: $(S \circ R)(v) = S(R(v))$ para cada $v \in V$.

Resulta que si R y S son transformaciones lineales entonces $S \circ R$ también es una transformación lineal. Efectivamente, sean $x, y \in V$ y $\alpha \in K$. Entonces $(S \circ R)(\alpha x + y) = S(R(\alpha x + y)) = S(\alpha R(x) + R(y)) = \alpha S(R(x)) + S(R(y)) = \alpha(S \circ R)(x) + (S \circ R)(y)$.

5.3 Proposición. *Sean $R, T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales, $\alpha \in K$, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ y $D = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ bases ordenadas para V, W y Z respectivamente. Entonces:*

1. $[R + T]_B^C = [R]_B^C + [T]_B^C$.
2. $[\alpha R]_B^C = \alpha [R]_B^C$.
3. $[S \circ R]_B^D = [S]_C^D [R]_B^C$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $j = 1, 2, ..., n$ tenemos que $R(v_j) \in W$. Como C es base de W, existen escalares únicos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{mj}$ tales que

$$R(v_j) = \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m.$$

Entonces

$$[R]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Asimismo, para cada $j = 1, 2, ..., n$ tenemos que $T(v_j) \in W$. Como C es base de W, existen escalares únicos $\theta_{1j}, \theta_{2j}, ..., \theta_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = \theta_{1j}w_1 + \theta_{2j}w_2 + ... + \theta_{mj}w_m.$$

Entonces

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & ... & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & ... & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & ... & \theta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Para demostrar el inciso (1), notemos primero que, para cada $j = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$\begin{aligned} (R+T)(v_j) &= R(v_j) + T(v_j) \\ &= \alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m \\ &+ \theta_{1j}w_1 + \theta_{2j}w_2 + ... + \theta_{mj}w_m \\ &= (\alpha_{1j} + \theta_{1j})w_1 + (\alpha_{2j} + \theta_{2j})w_2 + ... + (\alpha_{mj} + \theta_{mj})w_m. \end{aligned}$$

Luego

$$[R+T]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\theta_{11} & \alpha_{12}+\theta_{12} & ... & \alpha_{1n}+\theta_{1n} \\ \alpha_{21}+\theta_{21} & \alpha_{22}+\theta_{22} & ... & \alpha_{2n}+\theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\theta_{m1} & \alpha_{m2}+\theta_{m2} & ... & \alpha_{mn}+\theta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}+\theta_{11} & \alpha_{12}+\theta_{12} & ... & \alpha_{1n}+\theta_{1n} \\ \alpha_{21}+\theta_{21} & \alpha_{22}+\theta_{22} & ... & \alpha_{2n}+\theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\theta_{m1} & \alpha_{m2}+\theta_{m2} & ... & \alpha_{mn}+\theta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & ... & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & ... & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & ... & \theta_{mn} \end{pmatrix},$$

tenemos que $[R+T]_B^C = [R]_B^C + [T]_B^C$. Esto demuestra el inciso (1).

Para demostrar el inciso (2) simplemente notemos que si $\alpha \in K$ entonces $(\alpha R)(v_j) = \alpha R(v_j) = \alpha(\alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m) = \alpha\alpha_{1j}w_1 + \alpha\alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha\alpha_{mj}w_m$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Por ello

$$[\alpha R]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_{11} & \alpha\alpha_{12} & ... & \alpha\alpha_{1n} \\ \alpha\alpha_{21} & \alpha\alpha_{22} & ... & \alpha\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\alpha_{m1} & \alpha\alpha_{m2} & ... & \alpha\alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha[R]_B^C.$$

Finalmente, para el inciso (3), tenemos además que para cada $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} S(R(v_j)) &= S(\alpha_{1j}w_1 + \alpha_{2j}w_2 + ... + \alpha_{mj}w_m) \\ &= \alpha_{ij}S(w_1) + \alpha_{2j}S(w_2) + ... + \alpha_{mj}S(w_m) \end{aligned}$$

Y como $S(w_i) \in Z$ para cada $i = 1, 2, ..., m$, y D es una base ordenada para Z, existen, para cada i, escalares únicos $\beta_{1i}, \beta_{2i}, ..., \beta_{pi}$ tales que $S(w_i) = \beta_{1i}z_1 + \beta_{2i}z_2 + ... + \beta_{pi}z_p$. Entonces

$$[S]_C^D = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & ... & \beta_{pm} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, para cada $j = 1, 2, ..., n$ tenemos que

$$\begin{aligned} S(R(v_j)) &= \alpha_{1j}S(w_1) + \alpha_{2j}S(w_2) + ... + \alpha_{mj}S(w_m) \\ &= \alpha_{ij}(\beta_{11}z_1 + \beta_{21}z_2 + ... + \beta_{p1}z_p) \\ &+ \alpha_{2j}(\beta_{12}z_1 + \beta_{22}z_2 + ... + \beta_{p2}z_p) + \\ \vdots \\ &+ \alpha_{mj}(\beta_{1m}z_1 + \beta_{2m}z_2 + ... + \beta_{pm}z_p) \end{aligned}$$

Es decir, para cada $j = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$\begin{aligned} S(R(v_j)) = (\alpha_{1j}\beta_{11} + \alpha_{2j}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{mj}\beta_{1m})z_1 \\ +(\alpha_{1j}\beta_{21} + \alpha_{2j}\beta_{22} + \ldots + \alpha_{mj}\beta_{2m})z_2 + \\ \vdots \\ +(\alpha_{1j}\beta_{p1} + \alpha_{2j}\beta_{p2} + \ldots + \alpha_{mj}\beta_{pm})z_p \end{aligned}$$

Por ello,

$$[S \circ R]_B^D = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \alpha_{i1}\beta_{1i} & \sum_{i=1}^m \alpha_{i2}\beta_{1i} & ... & \sum_{i=1}^m \alpha_{im}\beta_{1i} \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{i1}\beta_{2i} & \sum_{i=1}^m \alpha_{i2}\beta_{2i} & ... & \sum_{i=1}^m \alpha_{im}\beta_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{i1}\beta_{pi} & \sum_{i=1}^m \alpha_{i2}\beta_{pi} & ... & \sum_{i=1}^m \alpha_{im}\beta_{pi} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado teníamos que

$$[S]_C^D = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pm} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [R]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[S]_C^D \cdot [R]_B^C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_{1i}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^m \beta_{1i}\alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_{1i}\alpha_{in} \\ \sum_{i=1}^m \beta_{2i}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^m \beta_{2i}\alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_{2i}\alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \beta_{pi}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^m \beta_{pi}\alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m \beta_{pi}\alpha_{in} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $[S \circ R]_B^D = [S]_C^D [R]_B^C$. □

Recuerde que una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es invertible si existe una matriz D cuadrada de tamaño $n \times n$ tal que $A \cdot D = Id_n = D \cdot A$.

5.4 Proposición. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $C = \{w_1, ..., w_n\}$ bases ordenadas para V y W respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es un isomorfismo.*
2. *$[T]_B^C$ es invertible.*

Demostración. (1) → (2) Como T es isomorfismo, $n = dim(V) = dim(W) = m$. Además, existe $T^{-1} : W \to V$, la función inversa de T que sabemos que también es una transformación lineal biyectiva. Definamos $D = [T^{-1}]_C^B$. Es claro que D es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Además, como $T^{-1} \circ T = id_V$ y $T \circ T^{-1} = id_W$, tenemos por la proposición anterior que:

$$Id_n = [id_V]_B^B = [T^{-1} \circ T]_B^B = [T^{-1}]_C^B \cdot [T]_B^C = D \cdot [T]_B^C$$

y

$$Id_n = [id_W]_C^C = [T \circ T^{-1}]_C^C = [T]_B^C \cdot [T^{-1}]_C^B = [T]_B^C \cdot D.$$

Por lo tanto, la matriz $[T]_B^C$ es invertible (y su inversa es la matriz $[T^{-1}]_C^B$; es decir $([T]_B^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^B$).

(2) → (1) Como $[T]_B^C$ es una matriz invertible, por definición, ésta debe ser una matriz cuadrada, por ello necesariamente $m = n$. Supongamos que

$$D = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

es la matriz inversa de $[T]_B^C$, es decir, D es una matriz de tamaño $n \times n$ tal que $[T]_B^C \cdot D = Id_n = D \cdot [T]_B^C$.

Sea $U : W \to V$ la única transformación lineal tal que

$$U(w_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i = b_{1j} v_1 + b_{2j} v_2 + ... + b_{nj} v_n$$

para cada $j = 1, 2, ..., n$. Observe que por la definición de U se tiene que $[U]_C^B = D$.

Además,

$$[id_V]_B^B = Id_n = D \cdot [T]_B^C = [U]_C^B \cdot [T]_B^C = [U \circ T]_B^B$$

y

$$[id_W]_C^C = Id_n = [T]_B^C \cdot D = [T]_B^C [U]_C^B = [T \circ U]_C^C.$$

Por la proposición 5.1 podemos concluir que $id_V = U \circ T$ y $id_W = T \circ U$. De esto último se deduce que T es biyectiva y que su inversa es la transformación lineal U. Por lo tanto T es un isomorfismo. $\square$

5.2 Matriz de coordenadas de un vector (respecto de una base)

El lector seguramente ha notado que por la definición de base, todo vector de un espacio vectorial de dimensión finita siempre tiene asociados una cantidad finita de escalares (tantos como la dimensión del espacio vectorial) que lo definen en el sentido de que el vector puede ser reconstruido a partir de esos escalares y de los elementos de la base, y además, son los únicos con esta propiedad.

Esta asociación (vectores-escalares) define una importante función que permite demostrar que un espacio vectorial de dimensión n definido sobre un campo K es esencialmente (es decir, es isomorfo) el espacio K^n.

Para iniciar este análisis, damos la definición de la matriz de coordenadas de un vector.

5.5 Definición. Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada para un espacio vectorial V definido sobre un campo K. Si $v \in V$ es cualquier elemento, sabemos que existen escalares únicos $\alpha_1^v, \ldots, \alpha_n^v$ tales que

$$v = \alpha_1^v v_1 + \cdots + \alpha_n^v v_n.$$

La matriz

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1^v \\ \vdots \\ \alpha_n^v \end{pmatrix}$$

es llamada *matriz de las coordenadas de v respecto de la base B* (o bien, matriz de representación de v respecto de la base B).

5.6 Ejemplo.

1. Si K es un campo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ la matriz de las coordenadas del vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ respecto de la base canónica $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de K^n es la matriz:

$$[(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Recuerde que $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más n con coeficientes en $\mathbb{R}$ y que la colección $C = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base ordenada para $P_n(\mathbb{R})$ (llamada *base canónica de $P_n(\mathbb{R})$*).

   Si $p(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n$ es un elemento cualquiera de $P_n(\mathbb{R})$ entonces la matriz de coordenadas de $p(x)$ respecto de la base ordenada C es la matriz:

$$[p(x)]_C = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

3. Sabemos que en el espacio de matrices $M_{2\times2}(\mathbb{C})$ la base canónica ordenada es el conjunto

$$C = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

   En este espacio, la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1+i & 9 \\ 7-2i & -i \end{smallmatrix}\right)$ tiene como matriz de coordenadas respecto de C a la siguiente matriz:

$$[\left(\begin{smallmatrix} 1+i & 9 \\ 7-2i & -i \end{smallmatrix}\right)]_C = \begin{pmatrix} 1+i \\ 9 \\ 7-2i \\ -i \end{pmatrix}.$$

Como hemos mencionado, la asociación que acabamos de definir tiene importantes propiedades. La principal es que ella define un isomorfismo.

5.7 Proposición. *Sea V un espacio vectorial sobre K y supongamos que $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ordenada para V. Entonces la función $\varphi_B : V \to M_{n\times1}(K)$ definida por $\varphi_B(V) = [V]_B$ para cada $v \in V$, es un isomorfismo.*

Demostración. Primero probaremos que φ_β es transformación lineal. Para ello, supongamos que $x, y \in V$ y que $\alpha \in K$ son elementos arbitrarios. Como B es base de V, existen escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ tales que $x = \alpha_1v_1 +$

$\alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ y $y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$. Entonces $\alpha x + y = (\alpha\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta_2)v_2 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta_n)v_n$. Por ello,

$$\varphi_B(\alpha x + y) = [\alpha x + y]_B = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta_1 \\ \alpha\alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha[x]_\beta + [y]_\beta = \alpha\varphi_B(x) + \varphi_B(y).$$

Por lo tanto, φ_B es una transformación lineal.

Note que como $dim(V) = dim(M_{n\times 1}(K))$ para demostrar que φ_B es un isomorfismo bastará demostrar que es una función inyectiva. Para hacer esto último, bastará demostrar que el núcleo de φ_B es el subespacio trivial $\{\vec{0}\}$.

Supongamos entonces que $\varphi_B(v) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Como $\varphi_B(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, tenemos que $\alpha_j = 0$ para cada $j = 1, 2, ..., n$. Entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_K v_1 + 0_K v_2 + \ldots + 0_K v_n = \vec{0}$. Por lo tanto, $Nu(\varphi_B) = \{\vec{0}\}$. Es decir, φ_B es inyectiva. $\square$

Una pregunta muy natural es saber qué pasa con la matriz de las coordenadas de un vector respecto de una base ordenada, cuando consideramos otra base ordenada. Para responder esta pregunta demostraremos primero la siguiente propiedad.

5.8 Proposición. *Supongamos que $T : V \to W$ es una transformación lineal y que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases ordenadas para V y W, respectivamente. Entonces:*

$$(\forall\, v \in V)\,([T(v)]_C = [T]_B^C \cdot [v]_B).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Supongamos también que $v \in V$ es cualquier elemento y que $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Entonces $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Por ello, $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$. Ahora bien, como $[T]_B^C$ es la matriz de representación de T, se tiene que $T(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $T(v) = \alpha_1(\sum_{i=1}^m \alpha_{i1} w_i) + \cdots + \alpha_n(\sum_{i=1}^m \alpha_{in} w_i) = \alpha_1(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 + \ldots + \alpha_{m1} w_m) + \alpha_2(\alpha_{12} w_1 + \alpha_{22} w_2 +$

$\cdots + \alpha_{m2}w_m) + \cdots + \alpha_n(\alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + \ldots + \alpha_{mn}w_m) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{1j})w_1 + (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{2j})w_2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{mj})w_m$. Por lo tanto,

$$[T(v)]_C = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\alpha_{mj}. \end{pmatrix}$$

Notemos ahora que

$$[T]_B^C \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_{11}+\alpha_2\alpha_{12}+\cdots+\alpha_n\alpha_{1n} \\ \alpha_1\alpha_{21}+\alpha_2\alpha_{22}+\cdots+\alpha_n\alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_{m1}+\alpha_2\alpha_{m2}+\cdots+\alpha_n\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces concluir que $[T]_B^C \cdot [v]_B = [T(v)]_C$. □

Como una aplicación de la anterior proposición podemos responder a la pregunta planteada de saber cuál es la relación entre las matrices de coordenadas de un vector respecto a bases ordenadas diferentes.

5.9 Corolario. *Supongamos que B y D son bases ordenadas de un espacio vectorial V. Entonces para todo $v \in V$ se tiene que $[v]_D = [id_V]_B^D[v]_B$.*

Demostración. Consideremos a la transformación lineal $id_V : V \to V$. Por la proposición anterior tenemos que, para todo $v \in V$, $[id_V(v)]_D = [id_V]_B^D[v]_B$. Pero $id_V(v) = v$. Entonces $[v]_D = [id_V]_B^D[v]_B$ para todo $v \in V$. □

La matriz $[id_V]_B^D$ es llamada *matriz de cambio de las B-coordenadas a las D-coordenadas* (o *matriz de cambio de coordenadas* de la base B a a las coordenadas de la base D).

Sabemos, por la proposición 5.7, que todo espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo al espacio $M_{n\times 1}(K)$; es decir, el espacio V es esencialmente un espacio de matrices. En este contexto, en el corolario **??** demostramos que toda transformación lineal es esencialmente una transformación lineal de tipo $L_A : M_{m\times 1}(K) \to M_{n\times 1}(K)$.

Recuerde que, dada una matriz A de tamaño $m \times n$, se define a la función $L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$ por medio de la siguiente regla: $L_A(X) = AX$ para toda $X \in M_{n\times 1}(K)$.

5.10 Proposición. *Sean V y W espacios vectoriales y supongamos que B y C son bases ordenadas para V y W, respectivamente. Entonces para toda transformación lineal $T : V \to W$ se tiene lo siguiente:*

$$\varphi_C \circ T = L_A \circ \varphi_B,$$

donde $A = [T]_B^C$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & W \arrow[d, "\varphi_C"] \\
M_{n\times 1}(K) \arrow[r, "L_A"] & M_{m\times 1}(K)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $x \in V$ es un elemento arbitrario. Entonces $(L_A \circ \varphi_B)(x) = L_A(\varphi_B(x)) = L_A([x]_B) = A[x]_B = [T]_B^C[x]_B = [T(x)]_C = \varphi_C(T(x)) = (\varphi_C \circ T)(x)$. Por lo tanto, $\varphi_B \circ T = L_A \circ \varphi_C$. $\square$

Como una aplicación inmediata de la proposición anterior, podemos demostrar que toda transformación lineal entre espacios de dimensión finita es esencialmente una transformación lineal de tipo L_A, donde A es una matriz de representación de T.

5.11 Corolario. *Sean V y W espacios vectoriales (cuyas dimensiones son n y m, respectivamente). Supóngase que B y C son bases ordenadas para V y W, respectivamente. Entonces para toda transformación lineal $T : V \to W$ se da la igualdad: $T = \varphi_C^{-1} \circ L_A \circ \varphi_B$, donde $A = [T]_B^C$.*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & W \\
M_{n\times 1}(K) \arrow[r, "L_A"] & M_{m\times 1}(K) \arrow[u, "\varphi_C^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Para finalizar esta sección respondemos a la pregunta (natural) de cómo cambia la matriz de representación de una transformación lineal cuando cambiamos las bases que tenemos en consideración.

5.12 Proposición. *Supongamos que $T : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y supongamos que $B, B^{'}$ son bases ordenadas para V, y que C y $C^{'}$ son bases ordenadas para W. Entonces*

$$[T]_{B'}^{C^{'}} = [id_W]_C^{C^{'}} \cdot [T]_B^C \cdot [id_V]_{B'}^B,$$

ó equivalentemente,

$$[id_W]_{C'}^C \cdot [T]_{B'}^{C^{'}} = [T]_B^C \cdot [id_V]_{B'}^B.$$

Demostración. Aplicando el inciso (3) de la proposición 5.3, se tiene que $[id_W]_{C'}^C \cdot [T]_{B'}^{C^{'}} = [id_W \circ T]_{B'}^C = [T \circ id_V]_{B'}^C = [T]_B^C \cdot [id_V]_{B'}^B$. $\square$

El siguiente corolario nos será muy útil en el capítulo 6 cuando tratemos el tema de la diagonalización de operadores lineales.

5.13 Corolario. *Supongamos que* $T : V \to V$ *es una transformación lineal definida en un espacio vectorial de dimensión finita y supongamos que* B, C *son bases ordenadas para* V. *Entonces*

$$[T]_C^C = [id_V]_B^C \cdot [T]_B^B \cdot [id_V]_C^B.$$

o equivalentemente,

$$[T]_C^C = ([id_V]_C^B)^{-1} [T]_B^B [id_V]_C^B.$$

Capítulo 6

Vectores y valores propios

En el capítulo anterior estuvimos interesados en transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. En este capítulo estaremos interesados en estudiar a las transformaciones lineales $T : V \to W$ cuando $V = W$. Las transformaciones lineales de este tipo tienen un nombre especial. Diremos que una transformación lineal $T : V \to W$ es un *operador lineal* si $V = W$. Si V es un espacio vectorial cualquiera denotaremos con $\mathcal{L}(V, V)$, o simplemente con $\mathcal{L}(V)$, al conjunto de todos los operadores lineales definidos en V; es decir:

$$\mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V) = \{T : V \to V : T \text{ es una transformación lineal } \}.$$

Sabemos que si $T : V \to W$ es una transformación lineal y si U es un subespacio vectorial de V entonces la función restricción $T \restriction U : U \to W$ es de nuevo una transformación lineal. Naturalmente, cabe preguntarse si este es el caso para los operadores de un espacio vectorial; es decir, ¿es cierto que si $T : V \to V$ es un operador lineal y U es un subespacio vectorial de V, entonces $T \restriction U$ es un operador lineal sobre U?. Como seguramente ha intuido el lector, no siempre es así. El problema está en el hecho de que para un operador lineal $T : V \to V$ y un subespacio vectorial U de V, puede ocurrir que la imagen $T(U) = \{T(x) : x \in U\}$ no esté contenida en U (y de esta manera, $T \restriction U : U \to U$ ni siquiera es una función bien definida).

Lo primero que debemos hacer es estudiar bajo qué condiciones para un subespacio vectorial U y para un operador $T : V \to V$, sí sucede que $T \restriction U : U \to U$ es una función bien definida (y por tanto, un operador lineal). Los subespacios vectoriales que tienen esta última propiedad tienen un nombre especial. Para un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ y un subespacio vectorial U de V, diremos que U es *invariante bajo* T (o respecto de T) si $u \in U$ implica que $Tu \in U$, en otras palabras, U es invariante bajo T si $T \restriction U : U \to U$ es un operador lineal.

Por ejemplo, si T es el operador diferencial en $P_7(\mathbb{R})$, es decir, si $T : P_7(\mathbb{R}) \to P_7(\mathbb{R})$ es la transformación lineal $T(p(x)) = p'(x)$ para cada $p(x) \in P_7(\mathbb{R})$, entonces el subespacio vectorial $P_4(R)$ de $P_7(R)$ es invariante bajo T porque, como recordará el lector, la derivada de cualquier polinomino de grado a lo más 4 es un polinomio de grado a lo más 4.

Nuestro propósito en este capítulo es estudiar a los subespacios invariantes de dimensión uno. Dicho análisis nos llevará a los conceptos de vector propio y de valor propio.

A través de todo este capítulo todos los espacios vectoriales son de dimensión finita. Y todos los espacios vectoriales son distintos del espacio trivial $\{\vec{0}\}$.

6.1 Vectores y valores propios

Supongamos $T \in \mathcal{L}(V)$. Es fácil comprobar que el subespacio trivial $\{0\}$ es invariante bajo T. También es fácil darse cuenta que el espacio vectorial V visto como subespacio vectorial de sí mismo, es invariante respecto de T. Una buena pregunta es saber si todo operador lineal siempre tiene un subespacio invariante distinto de los dos anteriores. En el caso en que T no es un isomorfismo podríamos encontrar otros subespacios vectoriales invariantes para T y que son canónicos en cierto sentido, a saber: los subespacios vectoriales $Nu(T)$ y $Ran(T) = T(V) = \{T(x) : x \in V\}$. Efectivamente, note que si $x \in Nu(T)$ entonces $T(x) = \vec{0} \in Nu(T)$ y que si $T(z) \in Ran(T)$ entonces $T(T(z)) \in Ran(T)$ porque $T(z) \in V$. No obstante, sabemos que cuando T es inyectiva (y por tanto, suprayectiva puesto que V es de dimensión finita) entonces $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ y $Ran(T) = V$; es decir, no hemos encontrado nuevo subespacios vectoriales invariantes para T. Así que para nuestros propósitos (la búsqueda de subespacios invariantes para un operador lineal), el caso en que T es un isomorfismo es un caso trivial.

De manera natural surge la pregunta siguiente: ¿Cuándo un subespacio vectorial de dimensión 1 es un subespacio invariante para un operador T? Como sabemos, los subespacios vectoriales de dimensión 1 de un espacio vectorial V son caracterizados por vectores no nulos del espacio V; esto es, sabemos que para un subespacio vectorial U de V las siguientes condiciones son equivalentes:

1. U es de dimensión 1.

2. Existe $u \in V \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $U = \{\lambda u : \lambda \in K\}$.

Por lo tanto, para que un subespacio vectorial U de dimensión 1 sea invariante para un operador lineal $T : V \to V$ es necesario y suficiente que, para cada $\lambda \in K$, exista $\alpha \in K$ tal que $T(\lambda u) = \alpha u$. Obsérvese que cuando $\lambda = 0_K$ se tiene que

$T(\lambda u) = \vec{0} = 0_K\, u$. Luego podemos concluir que las siguientes condiciones son equivalentes (cuando $u \in V \setminus \{\vec{0}\}$ es fijo):

(a) $U = \{\lambda u : \lambda \in K\}$ es invariante respecto de T;

(b) Para cada $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, existe $\alpha \in K$ tal que $T(\lambda u) = \alpha\, u$.

Si analizamos el inciso (b), podemos darnos cuenta que éste es equivalente a la siguiente proposición:

(c) Existe $\alpha \in K$ tal que $T(u) = \alpha\, u$.

Efectivamente, si suponemos verdadero (b), para $\lambda = 1_K$ existe $\alpha \in K$ tal que $T(u) = T(1_K\, u) = \alpha\, u$. Luego (c) es cierto. Recíprocamente, si suponemos (c) cierto y tomamos $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$ arbitrario, entonces por (c) existe $\alpha \in K$ tal que $T(u) = \alpha u$. Luego, $T(\lambda\, u) = \lambda T(u) = \lambda\alpha\, u$. Por lo tanto, hemos demostrado que para $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$ existe un escalar $\alpha_0 = \lambda\alpha \in K$ tal que $T(\lambda\, u) = \lambda T(u) = \alpha_0\, u$. Por lo cual, (b) es cierto.

Por todo lo anterior, podemos concluir que las siguientes dos condiciones son equivalentes para cualquier vector $u \in V \setminus \{\vec{0}\}$:

(a) $U = \{\lambda u : \lambda \in K\}$ es un subespacio invariante de dimensión 1 respecto de T;

(d) Existe $\alpha \in K$ tal que $T(u) = \alpha\, u$.

De esta manera hemos llegado a la conclusión de que *la búsqueda de subespacios vectoriales de dimensión 1 que sean invariantes respecto de un operador T equivale a encontrar un escalar $\lambda \in K$ para el cual exista un vector no cero u tal que $T(u) = \lambda\, u$.* Como es de esperarse, los escalares del tipo de λ tienen un nombre especial.

6.1 Definición. Diremos que un escalar $\lambda \in K$ es un *valor propio de T* si existe un vector no nulo $u \in V$ tal que $T(u) = \lambda\, u$.

El vector $u \in V \setminus \{\vec{0}\}$ en la anterior definición es llamado *vector propio correspondiente al valor propio λ*. Obsérvese que un valor propio puede tener varios vectores propios asociados a él (y cada uno de esos vectores propios define un subespacio vectorial invariante respecto de T)

Recordemos que nuestra pregunta inicial fue cuándo un operador lineal T tiene un subespacio vectorial invariante de dimensión 1. Ahora podemos concluir lo siguiente:

6.2 Proposición. *Un operador lineal $T : V \to V$ tiene un subespacio vectorial invariante de dimensión 1 si y sólo si T tiene un valor propio.*

Por tanto, nuestra pregunta (y tarea inicial) se convierte en la siguiente:

6.3 Pregunta. ¿Cuándo un operador lineal $T : V \to V$ tiene un valor propio?

En lo que sigue del capítulo nuestros propósitos estarán encaminados en la respuesta a esta última pregunta. Y en preguntas relacionadas a ella, como lo son: *¿Todo operador tiene siempre por lo menos un valor propio?, Si es así, ¿Cómo podemos hallarlos?*

La siguiente observación nos permite notar un hecho relacionado a la búsqueda de valores propios de un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$.

6.4 Observación. Es fácil notar que la *ecuación vectorial* $Tu = \lambda u$ es equivalente a $(T - \lambda id_V)(u) = \vec{0}$. Entonces podemos concluir que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lambda \in K$ es un valor propio de T.

(b) El operador lineal $T - \lambda id_V$ no es inyectivo, y por ello, no es un isomorfismo[1].

(c) El operador lineal $T - \lambda id_V$ es no sobreyectivo[2].

A partir de este momento nos dedicaremos a exponer resultados que establecen condiciones bajo las cuáles un operador lineal tiene, o puede tener, valores propios; y resultados que nos establecen propiedades que se tienen en el caso de que existan valores propios.

Es este último el sentido de la siguiente observación 6.4, de la proposición 6.5, del teorema 6.7 y del corolario 6.8. Ellos establecen propiedades que se tienen en el caso de que existan valores propios.

Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y que $\lambda \in K$ es un valor propio de T. No es difícil notar que si $u \in V \setminus \{\vec{0}\}$ es un vector propio correspondiente al valor propio λ, entonces pertenece al subespacio $Nu(T - \lambda id_V)$. Lo verdaderamente relevante es que el conjunto de vectores propios correspondientes a un valor propio λ, junto con el vector cero $\vec{0}$, es un subespacio vectorial de V.

[1] Algunos autores llaman *invertibles* a los operadores lineales biyectivos; en este lenguaje lo anterior puede ser expresado diciendo: $T - \lambda id_V$ no es invertible. A partir de este momento usaremos indistintamente la frase *invertible* y la frase *no invertible* para referirnos a operadores lineales biyectivos y operadores lineales no biyectivos, respectivamente.

[2] Recuerde que V es de dimensión finita.

6.5 Proposición. *Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si $\lambda \in K$ es un valor propio de T entonces el conjunto $E_\lambda = \{u \in V : T(u) = \lambda\, u\}$ es un subespacio vectorial de V.*

DEMOSTRACIÓN. Primero observe que $\vec{0} \in E_\lambda$. Ahora, supongamos que $u, v \in E_\lambda$ y que $\alpha \in K$ son elementos cualesquiera. Entonces $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) = \alpha(\lambda u) + \lambda v = \lambda(\alpha u + v)$. Luego podemos concluir que $\alpha u + v \in E_\lambda$. Por lo que E_λ es un subespacio vectorial de V. $\square$

A continuación establecemos algunos ejemplos.

6.6 Ejemplo.

1. Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre el campo K. Si $\lambda \in K$, entonces el operador lineal $\lambda\, id_V : V \to V$ tiene sólo un valor propio, a saber, λ. Además $E_\lambda = V$.

2. Consideremos al operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-y, x)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Geométricamente, T es una rotación de 90 grados respecto de el origen en $\mathbb{R}^2$ (es decir, T rota 90 grados respecto del origen a todo vector de $\mathbb{R}^2$). Intuitivamente, la rotación (por 90 grados) de un vector no cero en $\mathbb{R}^2$ nunca es igual a un múltiplo escalar de sí mismo. Ello nos permite concluir que el operador T no tiene valores propios. De manera formal, T no tiene valores propios porque si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $(-y, x) = T(x, y) = \lambda(x, y)$ implica que $-y = \lambda x$ y $x = \lambda y$. Consecuentemente, $-y = \lambda^2 y$. Es decir, $0 = y(\lambda^2 + 1)$. Por ello, $(-y, x) = T(x, y) = \lambda(x, y)$ implica que $(x, y) = (0, 0)$ ó $\lambda^2 + 1 = 0$. Por lo anterior podemos concluir que el operador T no tiene valores propios.

3. Si en el ejemplo anterior cambiamos a $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{C}^2$, el operador T sí tiene valores propios. De manera más precisa, si $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ está definido por medio de la regla: $T(z, w) = (-w, z)$ para cada $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, entonces T sí tiene valores propios.

   Para encontrar valores propios de T, debemos encontrar escalares λ tales que $T(z, w) = \lambda(z, w)$ para $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ no cero. Pero notemos que

   $$(-w, z) = T(z, w) = \lambda(z, w) \;\leftrightarrow\; -w = \lambda z \text{ y } z = \lambda w.$$

   Sustituyendo el valor de z de la segunda ecuación (del lado derecho) en la primera obtenemos que $-z = \lambda^2 z$. Ahora z no puede ser igual a 0 porque, de otra manera, se tendría que $w = 0$, y estamos suponiendo que $(z, w) \neq (0, 0)$. Entonces lo anterior implica que $\lambda^2 + 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $\lambda = i$ y $\lambda = -i$.

Todo lo anterior nos sugiere que i y $-i$ son valores propios de T. En efecto, un vector propio correspondiente al valor i es cualquier vector no cero de la forma $(w, -wi)$ con $w \in \mathbb{C}$, y un vector propio correspondiente al valor propio $-i$ es cualquier vector (no cero) de la forma (w, wi) con $w \in \mathbb{C}$. De hecho, $E_i = \{(w, -wi) : \text{con } w \in \mathbb{C}\}$ y $E_{-i} = \{(w, wi) : \text{con } w \in \mathbb{C}\}$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Todo vector $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ con $(x, y, 0) \neq (0, 0, 0)$ es vector propio de T. Efectivamente, note que $T(x, y, 0) = (x, y, -0) = (x, y, 0) = 1_{\mathbb{R}}(x, y, 0)$.

   El vector $(0, 0, 1)$ también es un vector propio de T puesto que $T(0, 0, 1) = (-1)(0, 0, 1)$.

Ahora veremos que los vectores propios correspondientes a valores propios di ferentes (entre sí) siempre forman un conjunto de vectores linealmente independiente.

6.7 Teorema. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de T distintos entre sí. Si v_i es un vector propio correspondiente al valor propio λ_i, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre $n \geqslant 2$.

Para $n = 2$. Supongamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0}$. Aplicando T a la anterior igualdad obtenemos que:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = T(\vec{0}) = \vec{0} \tag{1}$$

Multiplicando la primera igualdad por λ_2 obtenemos que $\lambda_2 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 = \vec{0}$. Restando está última igualdad a la igualdad (1) obtenemos que:

$$\vec{0} = (\alpha_1 \lambda_1 - \lambda_2 \alpha_1) v_1 = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 \tag{2}$$

Debido a que $v_1 \neq \vec{0}$ y a que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, lo anterior implica que $\alpha_1 = o_K$. Entonces la igualdad $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0}$ se convierte en la igualdad $\alpha_2 v_2 = \vec{0}$, lo cual implica que $\alpha_2 = 0_K$ porque $v_2 \neq \vec{0}$. Por lo tanto, $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Eso demuestra el primer paso de la inducción matemática.

Supongamos ahora que el resultado es válido para n, y demostrémoslo para $n + 1$. Es decir, suponiendo que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente, debemos demostrar que $\{v_1, v_2, ..., v_{n+1}\}$ también lo es. Para hacer esto último, supongamos que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = \vec{0} \tag{3}$$

Aplicando T a (3), obtenemos que

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) + \alpha_{n+1} T(v_{n+1}) = \vec{0} \tag{4}$$

Entonces

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + ... + \alpha_n\lambda_n v_n + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}v_{n+1} = \vec{0} \tag{5}$$

Ahora, multiplicando (3) por λ_{n+1} y estando esta nueva ecuación de (5) tenemos que

$$(\lambda_{n+1}\alpha_1 - \alpha_1\lambda_1)v_1 + (\lambda_{n+1}\alpha_2 - \alpha_2\lambda_2)v_2 + ... + (\lambda_{n+1}\alpha_n - \alpha_n\lambda_n)v_n = \vec{0} \tag{6}$$

Como $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente (por hipótesis de inducción), se tiene que $\alpha_i\lambda_{n+1} - \alpha_i\lambda_i = 0_K$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Es decir, $\alpha_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0_K$ para toda i. Como $\lambda_{n+1} \neq \lambda_i$ para toda i, lo anterior implica que $\alpha_i = 0_K$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), obtenemos que $\alpha_{n+1}v_{n+1} = \vec{0}$. Aplicando el hecho de que $v_{n+1} \neq \vec{0}$ (porque es un vector propio), tenemos que $\alpha_{n+1} = 0$. Por lo tanto, $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ es linealmente independiente. Esto demuestra el segundo paso de la inducción matemática. Por lo tanto, el resultado es válido para toda $n \geqslant 2$. □

Como un corolario al anterior teorema podemos demostrar que la cantidad de valores propios diferentes de un operador lineal que está definido en un espacio vectorial de dimensión finita no puede exceder a su dimensión.

6.8 Corolario. *Cada operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene como máximo $dimV$ valores propios diferentes.*

Demostración. Sea $T \in L(V)$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de T diferentes entre sí. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea v_i un vector propio asociado al valor propio λ_i. Por la teorema anterior, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. Así $n \leqslant dimV$. Y esto muestra que el resultado es cierto. □

6.2 Operadores lineales sobre espacios vectoriales complejos

Como hemos mencionado, los resultados plasmados en la observación 6.4, en la proposición 6.5, en el teorema 6.7 y en el corolario 6.8 son resultados que nos dicen que, en caso de que existan valores propios de un operador lineal T, los correspondientes vectores propios asociados a ellos deben tener ciertas propiedades. Pero, como puede apreciarse, estos resultados no son resultados que muestren condiciones bajo las cuales los valores propios de un operador lineal existan.

En esta sección mostramos un primer resultado de existencia de valores propios para el caso de operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales complejos (es decir, definidos sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$): *demostraremos que todo operador lineal definido sobre un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre los complejos, tiene un valor propio en* $\mathbb{C}$. Para hacerlo necesitaremos de la notación establecida en la siguiente observación.

6.9 Observación. Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces la composición $T \circ T$ tiene sentido y además está en $\mathcal{L}(V)$. De ahora en adelante, escribimos T^2 en lugar de $T \circ T$. En general, si $m \in \mathbb{N}$ es un entero positivo, entonces definimos a T^m por medio de la regla:

$$T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ veces}}$$

Por coveniencia definimos T^0 como el operador identidad $id_V : V \to V$.

Recordemos que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador lineal invertible (es decir, biyectivo), entonces la inversa de T es denotada por T^{-1}. Si m es un entero positivo, entonces definimos T^{-m} como $(T^{-1})^m$.

No es difícil verificar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador lineal biyectivo y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$T^m T^n = T^{m+n} \quad \text{y} \quad (T^m)^n = T^{mn}.$$

Si $T \in \mathcal{L}(V)$ no es necesariamente invertible entonces se puede verificar que

$$T^m T^n = T^{m+n} \quad \text{y} \quad (T^m)^n = T^{mn},$$

para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea

$$P(K) = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \ldots, a_m \in K\}$$

el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en K (no es difícil verificar que $P(K)$ es un espacio vectorial sobre el campo K). Si $T \in L(V)$ y $p \in P(K)$ es un polinomio dado por: $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_m z^m$ para $z \in K$, entonces $p(T)$ es el operador lineal en $\mathcal{L}(V)$ definido por:

$$p(T) = a_0 id_V + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_m T^m.$$

Si p y q son polinomios con coeficientes en K, entonces pq es el polinomio definido por: $(pq)(z) = p(z)q(z)$ para $z \in K$. Luego tenemos la siguiente propiedad multiplicativa: si $T \in L(V)$, entonces $(pq)(T) = p(T)q(T)$ para todos los polinomios p y q con coeficientes en K. Obsérvese que dos polinomios en T conmutan. Es decir, $p(T)q(T) = q(T)p(T)$.

Ahora demostraremos el resultado ya mencionado. En esta parte supondremos que los espacios vectoriales son de dimensión finita y están definidos sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ (es decir, son espacios vectoriales complejos de dimensión finita).

6.10 Teorema. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre $\mathbb{C}$. Todo operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$, no cero, tiene un valor propio (en $\mathbb{C}$).*

Demostración. Supongamos que $dim(V) = n > 0$. Sea $v \in V$ con $v \neq \vec{0}$. Entonces el conjunto de vectores $\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^n(v)\}$ no puede ser linealmente independiente porque V tiene dimensión n y tenemos $n+1$ vectores. Así existen números complejos $a_0, \ldots, a_n$ no todos iguales a $0_{\mathbb{C}}$ tales que

$$0_{\mathbb{C}} = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v). \tag{6.1}$$

Sea $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ el más grande índice tal que $a_m \neq 0_{\mathbb{C}}$. Note que debido a que $v \neq \vec{0}$, se tiene que $0 < m \leqslant n$. Entonces la anterior ecuación se convierte en la siguiente ecuación:

$$0_{\mathbb{C}} = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_m T^m(v). \tag{6.2}$$

Consideremos al polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Por el teorema fundamental del álgebra, existen números complejos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m = c(z - \lambda_1)....(z - \lambda_m),$$

donde c es un número complejo no cero. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= a_o v + a_1 T(v) + \cdots + a_m T^m(v) \\ &= (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m)(v) \\ &= p(T) \\ &= [c(T - \lambda_1 id_V) \circ \cdots \circ (T - \lambda_m id_V)](v) \end{aligned}$$

Lo que significa que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $T - \lambda_j id_V$ no es inyectiva[3]. Luego existe $w \in Nu(T - \lambda_j id_V)$ con $w \neq \vec{0}$. Entonces $T(w) = \lambda_j w$ y $w \neq \vec{0}$; es decir, λ_j es un valor propio de T. □

Sabemos que la matriz de representación de una transformación lineal tiene toda la información de la transformación lineal. Esto muestra pues la importancia de la representación matricial de una transformación lineal. De hecho, uno de los

[3]Si todas las $T - \lambda_j id_V$ fueran operadores lineales inyectivos entonces la igualdad $[c(T - \lambda_1 id_V) \circ \cdots \circ (T - \lambda_m id_V)](v) = \vec{0}$ implica que $v = \vec{0}$; lo cual no es cierto.

objetivos de los cursos de Álgebra Lineal es mostrar resultados que establezcan que las matrices de representación de una transformación lineal tienen formas muy simples.

Por lo anterior, uno de los propósitos inmediatos para nosotros es obtener resultados que muestren que para un operador lineal $T \in L(V)$ dado, existe una base B de V con respecto a la cual T tiene una matriz de representación razonablemente simple.

Para el caso de un espacio vectorial V de dimensión finita, que está definido sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, el teorema 6.10 nos da suficiente información para demostrar que hay una base de V con respecto a la cual la matriz de representación de T tiene 0 en toda la primera columna, excepto posiblemente la primera entrada. En otras palabras, hay una base B de V con respecto a la cual la matriz $[T]_B^B$ de T se ve de la siguiente manera:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Para demostrarlo, sea λ un valor propio de T (por el teorema anterior existe este valor propio) y sea v un vector propio correspondiente al valor propio λ. Por el teorema 3.17, podemos extender el conjunto $\{v\}$ a una base $B = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ de V. Entonces la matriz de representación de T con respecto a la base B tiene la forma de arriba porque $T(v) = \lambda v = \lambda v + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_n$.

A continuación estableceremos alguna nomenclatura relacionada a matrices que usaremos más adelante.

6.11 Observación. La diagonal de una matriz cuadrada consta de las entradas a lo largo de la línea recta desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Es decir, en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

la diagonal de A esta formada por los coeficientes: $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$. Algunos autores escriben $diag(A) = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$ para denotar a la diagnonal de A.

Una matriz es llamada *triangular superior* si todas las entradas que están por debajo de la diagonal son iguales a 0 y una matriz es es llamada *triangular inferior* si todas las entradas que están por encima de la diagonal son iguales a 0. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular superior.

Las matrices triangulares superiores tienen una forma razonablemente simple, así que cabe la pregunta de cuándo un operador lineal tiene una matriz de representación (en alguna base) que sea una matriz triangular superior. Lo primero que tenemos que hacer es mostrar alguna relación entre estos dos conceptos: los operadores lineales y las matrices triangulares superiores. La siguiente proposición muestra una relación entre los subespacios invariantes respecto de un operador lineal, las matrices triangulares superiores, y la matriz de representación del operador lineal.

6.12 Proposición. *Sea V un espacio vectorial definido sobre un campo K (aquí $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$). Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La matriz $[T]_B^B$ de representación de T con respecto a B es triangular superior.*
2. *$T(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$, para cada $k = 1, \ldots, n$.*
3. *$gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$ es invariante bajo T, para cada $k = 1, \ldots, n$.*

Demostración. (1) $\to$ (2). Supongamos que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sea que $k \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrario. Por la definición de $[T]_B^B$ (vea la sección 5.1), tenemos que $T(v_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ik} v_i$. Como $\sum_{i=1}^k \alpha_{ik} v_i \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$, podemos concluir que $T(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

(2) $\to$ (3). Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ fijo. De (2) sabemos que $T(v_1) \in gen(\{v_1\}), T(v_2) \in gen(\{v_1, v_2\}), \ldots, T(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$. Pero además se tiene que

$$gen(\{v_1\}), gen(\{v_1, v_2\}), \ldots, gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}) \subseteq gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}).$$

Entonces $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k) \in gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$. Por ello, si v es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_k$; es decir, si

$$v \in gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

entonces $T(v)$ es una combinación lineal de $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$, y por ello, $T(v) \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$. En otras palabras, $gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$ es invariante bajo T.

(3) $\rightarrow$ (1). Como $T(gen\{v_1\}) \subseteq gen\{v_1\}$, tenemos que existe un escalar a_{11} tal que $T(v_1) = a_{11}v_1$. Luego, $T(v_1) = a_{11}v_1 + 0v_2 + \cdots + 0 + v_n$ (recuerde que toda representación de cualquier vector respecto de una base es única). Asimismo, como $T(gen\{v_1, v_2\}) \subseteq gen\{v_1, v_2\}$ existen escalares a_{12}, a_{22} tales que $T(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$. Luego $T(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + 0v_3 + \ldots + 0v_n$. Siguiendo de esta manera, como $T(gen\{v_1, \ldots, v_n\}) \subseteq gen\{v_1, \ldots, v_n\}$, existen escalaras $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}$ tales que $T(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$. Luego, $T(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$. Por lo tanto,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

es una matriz triangular superior. □

Si aplicamos los resultados del teorema 6.10 y de la anterior prosición 6.12 llegamos a la siguiente conclusión.

6.13 Teorema. *Para todo espacio vectorial V, de dimensión finita, definido sobre el campo $\mathbb{C}$, se tiene lo siguiente:*

Todo operador lineal T sobre V, tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base ordenada de V.

Demostración. Haremos la demostración por inducción en la dimensión de los espacios vectoriales V. Claramente el resultado es cierto para todo espacio vectorial V con $dimV = 1$.

Supongamos ahora el resultado deseado es cierto para todo espacio vectorial complejo cuya dimensión es menor o igual que n, donde $n > 1$. Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $n + 1$ y que $T \in \mathcal{L}(V)$.

Por el teorema 6.10, existe un valor propio λ para T. Sea $U = Im(T - \lambda id_V)$. Como λ es valor propio de T, existe un vector no nulo $w \in W$ tal que $T(w) = \lambda w$. Luego $w \in Nu(T - \lambda id_V)$. Por lo tanto, $T - \lambda id_V$ no es una transformación lineal inyectiva, y como V es de dimensión finita, lo anterior implica que $T - \lambda id_V$ no es sobreyectiva. Por ello, $dimU < dimV$. Observe además que U es invariante bajo T. Efectivamente, para probar esto último supongamos $u \in U$. Entonces $T(u) = (T - \lambda id_V)(u) + \lambda u$. Obviamente $(T - \lambda I)u \in U$ y $\lambda u \in U$. Así $T(u) \in U$. Esto muestra que U es invariante bajo T.

De esta manera la restricción $T \restriction U$ es un operador lineal de U; es decir, $T \restriction U \in \mathcal{L}(U)$. Por nuestra inducción, hay una base $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de U

con respecto a la cual $T \upharpoonright U$ tiene una matriz triangular superior. Así, por la proposición 6.12, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos que

$$Tu_j = (Tu)(u_j) \in gen(\{u_1, \ldots, u_j\}) \tag{6.3}$$

Por un resultado anterior (vea el capítulo 3), existen $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que $C = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para V. Observe que para cada $k = 1, \ldots, n$ tenemos que $T(v_k) = (T - \lambda id_V)(v_k) + \lambda v_k$. La definición de U muestra que $(T - \lambda id_v)(v_k) \in U = gen\{u_1, \ldots, u_m\}$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Así la ecuación 6.3 muestra que:

$$T(v_k) \in gen(\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k\}), \text{ para cada } k = 1, \ldots, n. \tag{6.4}$$

Por la proposicion 6.12, de las ecuaciones (6.3) y (6.4) podemos concluir que T tiene una matriz triangular superior con respecto a la base C. □

Si sabemos de antemano que operador lineal tiene una matriz triangular superior como una matriz de representación entonces se pueden obtener conclusiones importantes a partir de ello. Por ejemplo, podemos conocer si el operador es un isomorfismo o no.

6.14 Proposición. *Supongamos $T \in L(V)$ tiene como matriz de representación a una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es invertible (es decir, un isomorfismo);*
2. *Todas las entradas en la diagonal de la matriz triangular superior de T son diferentes de cero.*

Demostración. Por hipótesis existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V con respecto a la cual la matriz $[T]_B^B$ es triangular superior. Es decir,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

(1) $\rightarrow$ (2). Probaremos que si alguno de los elementos de la diagonal a_{ii} es igual a 0, entonces T no es invertible.

Si $a_{11} = 0$, entonces por la definición de $[T]_B^B$ tenemos que $T(v_1) = a_{11}v_1 + 0\,v_2 + \cdots + 0\,v_n = 0$; y por lo tanto T es no inyectiva (porque $v_1 \neq \vec{0}$) y por ello no es invertible.

Supongamos ahora que $1 < k \leqslant n$ y $a_{kk} = 0$. Entonces por la definición de $[T]_B^B$ tenemos que $T(v_k) = a_{1k}v + a_{1k}v_2 + \cdots + a_{k-1\,k}v_{k-1} + 0\,v_k + \cdots + 0\,v_n = a_{1k}v_+ a_{1k}v_2 + \cdots + a_{k-1\,k}v_{k-1}$. Entonces $T(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$.

Lo anterior nos permite definir a la transformación lineal

$$S : gen(\{v_1, \ldots, v_k\}) \to gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$$

por medio de $S = T \restriction gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$; es decir, $S(x) = T(x)$ para cada $x \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

Nota ahora que $gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$ tiene dimensión k y $gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$ tiene dimensión $k-1$. Como la dimensión de $gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$ es más grande que la dimensión de $gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$, la transformación lineal S no puede ser inyectiva. Así existe un vector no cero $v \in gen(\{v_1, \ldots, v_k\})$ tal que $S(v) = T(v) = 0$. Por lo tanto, T no es inyectiva, y por ello, no es invertible.

(2) $\to$ (1). Demostraremos la contrarrecíproca. Supongamos que T es no invertible. Así T es no inyectiva, y por lo tanto, existe un vector no cero $v \in V$ tal que $T(v) = 0$. Como $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, podemos escribir $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, donde $a_1, \ldots, a_n \in K$. Note que como $v \neq \vec{0}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$. Sea $k = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \neq 0\}$. Entonces $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, con $a_k \neq 0$. Tenemos entonces que

$$0 = T(v) = T(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + \cdots + a_{k-1}T(v_{k-1}) + a_kT(v_k).$$

La ecuación anterior muestra que $a_kT(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$. Entonces $1/a_k \cdot (a_kT(v_k)) \in gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$ (recuerde que $a_k \neq 0$). Por lo anterior, podemos concluir que $T(v_k) \in gen(\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$. Así cuando $T(v_k)$ está escrito como combinación lineal de los elementos de la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ el coeficiente de v_k debe ser igual a 0. En otras palabras a_{kk} debe ser igual a 0. Esto completa la demostración. $\square$

Si un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene una matriz triangular superior como matriz de repesentación en alguna base de V entonces podemos encontrar de manera muy sencilla a los valores propios del operador.

6.15 Proposición. *Supongamos que $T \in L(V)$ tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V. Entonces el conjunto de todos los valores propios de T es el conjunto de todas las entradas de la diagonal de la matriz triangular superior que representa a T.*

Demostración. Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para V para la cual

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

es una matriz triangular superior. Entonces no es difícil demostrar que

$$[T - \lambda\, id_V]_B^B = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

es la matriz de representación del operador $T - \lambda id_V$, donde $\lambda \in K$ es un escalar fijo.

Recordemos que por la observación 6.4 las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lambda \in K$ es un valor propio de T.

(b) El operador lineal $T - \lambda id_V$ no es invertible.

De esta forma, $\lambda \in K$ es un valor propio de T si y sólo si $T - \lambda id_V$ no es invertible. Pero por la proposición 6.14, el operador $T - \lambda id_V$ es invertible si y sólo si todos los elementos de la diagonal de $[T - \lambda id_V]_B^B$ son diferentes de cero. En conclusión, $\lambda \in K$ es un valor propio de T si y sólo si $\lambda = a_{ii}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por lo tanto, el conjunto de los valores propios de T es igual al conjunto de los elementos de la diagonal de $[T]_B^B$. □

Un caso particular de matrices triangulares superiores son las matrices diagonales. Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada que es 0 en todas partes excepto posiblemente a lo largo de la diagonal. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal. Obviamente, como hemos dicho, cada matriz diagonal es triangular superior, aunque en general una matriz diagonal tiene muchos más ceros que una matriz triangular superior.

Es claro que de la definición de la matriz asociada a una transformación lineal con respecto a una base se sigue que un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene una matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

como matriz de representación para alguna base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V si y sólo si

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Si un operador tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base, entonces las entradas a lo largo de la diagonal son precisamente los valores propios del operador (vea la proposición anterior). Por lo tanto, podemos concluir que un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene una matriz diagonal como matriz de representación con respecto a una base de V si y sólo si V tiene una base que consiste de vectores propios de T.

Infortunadamente no todos los operadores tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base. Por ejemplo, consideremos al operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ definido por

$$T(w, z) = (z, 0) \tag{6.5}$$

El único valor propio de T es el escalar 0 (la ecuación $(z, 0) = \lambda(w, z)$ implica que $z = \lambda w$ y que $0 = \lambda z$. Luego $0 = \lambda^2 w$. Lo que implica que $\lambda = 0$ o $w = 0$) y el conjunto correspondiente de vectores propios asociados a $\lambda = 0$ es el subespacio unidimensional $\{(w, 0) \in \mathbb{C}^2 : w \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{C}^2$. Como $\mathbb{C}^2$ tiene dimensión 2, no es posible haya una base para $\mathbb{C}^2$ de tal manera que la matriz de representación de T respecto de esa base sea una matriz diagonal (si eso ocurriera, T debería tener dos valores propios diferentes). Por lo tanto T no tiene una matriz diagonal con respecto a ninguna base $\mathbb{C}^2$.

La siguiente proposición muestra que si un operador tiene tantos valores propios (diferentes) como la dimensión del espacio vectorial, entonces el operador lineal tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base.

6.16 Teorema. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene $dimV$ valores propios diferentes, entonces T tiene una matriz diagonal con respecto alguna base de V.*

Demostración. Suponga que $dim(V) = n$ y que $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene n valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diferentes. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, seleccionemos un vector propio $v_j \in V$ correspondiente al valor propio λ_j. Por la proposición 6.7, el conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. Como B tiene exactamente $n = dim(V)$ elementos, el conjunto B una base para V (vea el capítulo 3). Con respecto a esta base B que consiste de vectores propios de T, el operador T tiene una matriz diagonal. $\square$

Es importante mencionar que el recíproco a la anterior proposición no es necesariamente cierto. Hay operadores que tienen menos valores propios (diferentes entre sí) que la dimensión de su espacio dominio, pero tienen matrices diagonales como matrices de representación. Por ejemplo, el operador T definido en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ por medio de la regla:

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_1, 4z_2, 5z_3)$$

tiene solo dos valores propios diferentes (4 y 5) y este operador lineal tiene una matriz diagonal con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

Terminamos la sección dando un resultado que aclara la anterior situación. En la siguiente proposición se dan algunas condiciones equivalentes a la condición de que un operador lineal tenga una matriz diagonal con respecto a alguna base.

6.17 Proposición. *Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son los distintos valores propios de T. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T tiene una matriz diagonal con respecto alguna base de V;*
2. *V tiene una base que consiste de vectores propios de T;*
3. *Existen subespacios unidimensionales $U_1, \ldots, U_n$ de V, cada uno invariante bajo T, tales que*
$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n;$$
4. *$V = Nu(T - \lambda_1 id_V) \oplus \cdots \oplus Nul(T - \lambda_m id_V)$;*
5. *$dimV = dim(Nu(T - \lambda_1 id_V)) + \cdots + dim(Nu(T - \lambda_m id_V))$.*

Demostración. Ya hemos mostrado en la página 94 que (1) y (2) son equivalentes.

(2) $\to$ (3). Suponga que $dim(V) = n$. Entonces V tiene una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ que consiste de vectores propios de T. Para cada $j = 1, \ldots, n$, definamos $U_j = gen(\{v_j\})$. Obviamente cada U_j es un subespacio unidimensional de V. Además es invariante bajo T (porque cada v_j es un vector propio de T).

Como B es una base de V, cada vector en V puede ser escrito de manera única como una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Es decir, para cada $v \in V$ existen escalares únicos $\alpha_1^v, \ldots, \alpha_n^v$ tales que $v = \alpha_1^v v_1 + \cdots + \alpha_n^v v_n$. Note que para cada $v \in V$ y cada j, $\alpha_j^v v_j \in U_j$. Así, cada vector $v \in V$ puede ser escrito de manera única como una suma $u_1 + \cdots + u_n$, donde cada $u_j \in U_j$. Entonces $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(3) $\to$ (2). Si suponemos (3) entonces hay subespacios vectoriales de dimensión 1 $U_1, \ldots, U_n$ de V, cada uno invariante bajo T, tales que

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

Para cada j, sea v_j un vector no nulo en U_j. Entonces cada v_j es un vector propio de T. Efectivamente, como U_j es un subespacio vectorial de dimensión 1, $\{v_j\}$ base de U_j. Como $v_j \in U_j$ y U_j es invariante bajo T, tenemos que $T(v_j) \in U_j$. Pero como $\{v_j\}$ base de U_j, existe $\lambda_j \in K$ tal que $T(v_j) = \lambda_j v_j$. Esto muestra que v_j es un vector propio de T.

Verifiquemos ahora que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base para V. Efectivamente, sabemos que cada $v \in V$ puede ser escrito de manera única como una suma $v = u_1^v + \cdots + u_n^v$, donde cada $u_j \in U_j$. Como cada $\{v_j\}$ es una base para el correspondiente U_j, existen escalares únicos $\alpha_j^v \in K$ tales que $u_j^v = \lambda_j^v v_j$, para cada $j = 1, \dots, n$ y cada $v \in V$. Por lo tanto, todo elemento $v \in V$, se puede escribir de manera única como una combinación lineal de tipo:

$$v = \lambda_1^v v_1 + \cdots + \lambda_n^v v_n.$$

Esto último muestra que B es una base de V.

Hasta este momento hemos demostrado que las condiciones (1), (2) y (3) son equivalentes. Terminaremos la demostración mostrando que (2) $\to$ (4), (4) $\to$ (5) y (5) $\to$ (2).

(2) $\to$ (4) Sea B una base para V formada por vectores propios de T. Como por hipótesis $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los distintos valores propios de T, necesariamente B tiene a lo más m elementos. Por otro lado, si por cada valor propio $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ seleccionamos un vector propio $v_1, \dots, v_m$ entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente; y como B es una base, necesariamente m es menor o gual a la cardinalidad de B. En consecuencia B tiene exactamente m elementos. Así que sin perder generalidad podemos suponer que $B = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde, para cada $j = 1, \dots, n$, v_j es un vector propio asociado al valor propio λ_j.

Por otro lado, note que para cada j el vector propio $v_j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$. En consecuencia, cualquier múltiplo escalar de la forma αv_j también pertenece a $Nu(T - \lambda_j id_V)$ (para cada j).

Como cada vector en V es una combinación lineal de los vectores en $B = \{v_1, \dots, v_m\}$, por lo comentado en el párrafo anterior podemos concluir que

$$V = Nu(T - \lambda_1 id_V) + \cdots + Nu(T - \lambda_m id_V). \tag{I}$$

Para mostrar que la suma de arriba es una suma directa, suponga que $\vec{0} = u_1 + \cdots + u_m$ donde cada $u_j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$. Afirmamos que necesariamente todos los u_j son iguales al vector $\vec{0}$. Si esto último no ocurriera entonces necesariamente $\{j \in \{1, \dots, m\} : u_j \neq \vec{0}\}$ tiene cardinalidad mayor o igual que 2. Supongamos que $\{j \in \{1, \dots, m\} : u_j \neq \vec{0}\} = \{j_1, \dots, j_\ell\}$ con $\ell \geqslant 2$. Como cada $u_{j_i} \in Nu(T - \lambda_{j_i} id_V) \setminus \{\vec{0}\}$, éste es un vector propio correspondiente al valor propio λ_{j_i} (para cada $i = 1, \dots, \ell$). Como los valores propios $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_\ell}$ son distintos entre sí, tenemos que el conjunto de vectores propios correspondientes $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\ell}\}$ es linealmente independiente. Pero la ecuación $\vec{0} = u_1 + \cdots + u_m$ implica que $\vec{0} = u_{j_1} + \cdots + u_{j_\ell}$, la cual contradice que $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\ell}\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto, todos los vectores u_j son iguales al vector $\vec{0}$. Por lo tanto la suma (I) es una suma directa.

(4) $\rightarrow$ (5) Supongamos que $dim(Nu(T - \lambda_j id_V)) = n_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Fijemos $B_j = \{v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j\}$ una base para cada espacio $Nu(T - \lambda_j id_V)$. Demostraremos que la colección

$$B = \{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^m, \ldots, v_{n_m}^m\}$$

es una base para V.

Efectivamente, supongamos que $v \in V$. Por la hipótesis, existen vectores únicos $u_j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$ tales que $v = u_1 + \cdots + u_m$. Como cada $u_j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$, existen, para cada j, escalares únicos $\beta_1^j, \ldots, \beta_{n_j}^j$ tales que $u_j = \beta_1^j v_1^j + \cdots + \beta_{n_j}^j v_{n_j}^j$. Por lo tanto,

$$v = \beta_1^1 v_1^1 + \cdots + \beta_{n_1}^1 v_{n_1}^1 + \beta_1^2 v_1^2 + \cdots + \beta_{n_2}^2 v_{n_2}^2 + \cdots + \beta_1^m v_1^m + \cdots + \beta_{n_m}^m v_{n_m}^m.$$

Por lo tanto, $genB = V$.

Por otro lado, supongamos que

$$\alpha_1^1 v_1^1 + \cdots + \alpha_{n_1}^1 v_{n_1}^1 + \alpha_1^2 v_1^2 + \cdots + \alpha_{n_2}^2 v_{n_2}^2 + \cdots + \alpha_1^m v_1^m + \cdots + \alpha_{n_m}^m v_{n_m}^m = \vec{0}.$$

Como la suma en (4) es una suma directa y cada suma $\alpha_1^j v_1^+ \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$, lo anterior implica que $\alpha_1^j v_1^+ \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j = \vec{0}$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Pero para cada j, el conjunto B_j es una base de $Nu(T - \lambda_j id_V)$. Por ello, la igualdad $\alpha_1^j v_1^+ \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j = \vec{0}$ implica que $\alpha_1^j = \cdots = \alpha_{n_j}^j = 0_K$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, el conjunto B es un conjunto de vectores linealmente independientes. Y por ello, B es una base para V. Observe ahora que B tiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ elementos. Luego $dim(V) = n_1 + n_2 + \cdots + n_m = dim(Nu(T - \lambda_1 id_v)) + \cdots + dim(Nu(T - \lambda_m id_v))$.

(5) $\rightarrow$ (2). Como

$$dim(V) = dim(Nu(T - \lambda_1 id_V)) + \cdots + dim(Nu(T - \lambda_m id_V)). \tag{6.6}$$

Fijemos, para cada $j = 1, \ldots, m$, una base de cada $Nu(T - \lambda_j id_V)$; digamos que $B_j = \{v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j\}$. Note que cada elemento de B_j es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ_j, todo esto es cierto para todas las $j \in \{1, \ldots, m\}$ (recuerde que ningún elemento de una base puede ser igual al vector cero).

Definamos ahora al conjunto

$$B = \{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^m, \ldots, v_{n_m}^m\}.$$

Afirmamos que B es una base para V y que está formada por vectores propios de T. Como, por hipótesis,

$$dim(V) = dim(Nu(T - \lambda_1 id_V)) + \cdots + dim(Nu(T - \lambda_m id_V)). \tag{6.7}$$

tenemos que B tiene exactamente $dim(V)$ elementos. Así que para probar que B es una base para V bastará demostrar que B es un conjunto linealmente independiente de vectores.

Supongamos entonces que

$$\alpha_1^1 v_1^1 + \cdots + \alpha_{n_1}^1 v_{n_1}^1 + \alpha_1^2 v_1^2 + \cdots + \alpha_{n_2}^2 v_{n_2}^2 + \cdots + \alpha_1^m v_1^m + \cdots + \alpha_{n_m}^m v_{n_m}^m = \vec{0}.$$

Denotemos u_j a cada suma de tipo $\alpha_1^j v_1^j + \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j$. Entonces $u_j \in Nu(T - \lambda_j id_V)$ para cada j y además

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = \vec{0}.$$

Observe que la anterior ecuación implica que todos los $u_j = \vec{0}$. Porque de lo contrario, el conjunto $\{j \in \{1, \ldots, m\} : u_j \neq \vec{0}\}$ tiene cardinalidad mayor o igual que 2. Supongamos que $\{j \in \{1, \ldots, m\} : u_j \neq \vec{0}\} = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$ con $\ell \geqslant 2$. Como cada $u_{j_i} \in Nu(T - \lambda_{j_i} id_V) \setminus \{\vec{0}\}$, éste es un vector propio correspondiente al valor propio λ_{j_i} (para cada $i = 1, \ldots, \ell$). Como los valores propios $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_\ell}$ son distintos entre sí, tenemos que el conjunto de vectores propios correspondientes $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\ell}\}$ es linealmente independiente. Pero la ecuación $\vec{0} = u_1 + \cdots + u_m$ implica que $\vec{0} = u_{j_1} + \cdots + u_{j_\ell}$, la cual contradice que $\{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\ell}\}$ es linealmente independiente. Por esta razón es que sucede que todos los vectores u_j son iguales al vector $\vec{0}$.

Observe ahora que como cada $u_j = \vec{0}$, para cada $j = 1, \ldots, m$ se tiene que $\alpha_1^j v_1^j + \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j = \vec{0}$. Pero recordemos que $B_j = \{v_1^j, \ldots, v_{n_j}^j\}$ es una base para $Nu(T - \lambda_j id_V)$; en particular son un conjunto de vectores linealmente independiente. Por ello, la igualdad $\alpha_1^j v_1^j + \cdots + \alpha_{n_j}^j v_{n_j}^j = \vec{0}$ implica que $\alpha_1^j = \cdots + \alpha_{n_j}^j = 0_K$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Esto último muestra que B es un conjunto linealmente independiente de vectores. Y por lo tanto una base para V formada por vectores propios de T. $\square$

6.3 Subespacios invariantes de espacios vectoriales reales

Hemos demostrado ya que cada operador lineal no cero definido en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tiene al menor un valor propio (vea 6.10). Para el caso de operadores lineales no nulos definidos sobre espacios vectoriales reales no es posible esperar un resultado análogo al anterior (el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del inciso (2) de los ejemplos 6.6 es un ejemplo de un operador lineal no cero sin valores propios).

Como sabemos, la existencia de un valor propio para un operador lineal no cero es equivalente a la existencia de un subespacio vectorial no trivial que es invariante respecto al operador lineal. Para el caso de operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales reales demostraremos a continuación que éstos pueden tener subespacios invariantes cuya dimensión es o 1 o 2 (infortudamente no podemos decir que la dimensión sea exactamente 1).

En la demostración del mencionado resultado haremos uso de la siguiente proposición cuya demostración puede ser encontrada en el libro [1] (vea el teorema 4.14):

6.18 Teorema. *Si $p \in P(\mathbb{R})$ es un polinomio no constante, entonces p tiene una única factorización (salvo por el orden de los factores) de la forma siguiente:*

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M),$$

donde $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_M, \beta_M) \in \mathbb{R}^2$, con $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ para toda $j = 1, \ldots, M$ $(m, M \in \mathbb{N})$.

A continuación enunciamos y demostramos el resultado antes comentado.

6.19 Teorema. *Cada operador lineal no cero definido en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, de dimensión finita, tiene un subespacio invariante de dimension 1 o de dimensión 2.*

Demostración. Supongamos que V es un espacio vectorial definido sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y supongamos que su dimensión es $n \in \mathbb{N}$. Suponga también que $T \in \mathcal{L}(V)$ es no cero.

Como V no es un espacio trivial podemos fijar un vector $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Consideremos ahora al conjunto de vectores siguiente:

$$E = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^n(v)\}.$$

Como $dim(V) = n$, E no puede ser un conjunto de vectores linealmente independiente porque tiene cardinalidad $n + 1$. Por lo tanto, existen números reales $a_0, \ldots, a_n$, no todos igual a 0 tales que:

$$\vec{0} = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v).$$

Consideremos ahora al polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ en $P(\mathbb{R})$. Por el teorema 6.18 existen escalares $c \neq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y existen $(\alpha_1, \beta_1), \ldots,$

$(\alpha_M, \beta_M) \in \mathbb{R}^2$, con $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ para toda $j = 1, \ldots, M$ (donde $m, M \in \mathbb{N}$), tales que

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \ldots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \vec{0} &= a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v) \\ &= (a_0 id_V + a_1 T + \cdots + a_n T^n)(v) \\ &= [c(T - \lambda_1 id_V) \circ \cdots \circ (T - \lambda_m id_V) \circ \\ &\quad \circ (T^2 + \alpha_1 T + \beta_1 id_V) \circ \cdots \circ (T^2 + \alpha_M T + \beta_M id_V)](v), \end{aligned}$$

el cual significa que $T - \lambda_j id_V$ es no inyectivo para al menos una j o que $(T^2 + \alpha_j T + \beta_j id_V)$ es no inyectivo para al menos una j (o ambos caso).

Si $T - \lambda_j id_V$ es no inyectivo para al menos una $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces existe un vector no cero $u \in V$ tal que $T(u) = \lambda_j u$. Luego podemos concluir que T tiene un valor propio (a saber, λ_j), y por lo tanto, un subespacio invariante de dimensión 1.

Si $(T^2 + \alpha_j T + \beta_j I)$ no inyectivo para alguna $j \in \{1, \ldots, M\}$. Entonces existe un vector no nulo $u \in V$ tal que

$$T^2(u) + \alpha_j T(u) + \beta_j u = 0 \tag{6.8}$$

Afirmamos que el subespacio $U = gen(\{u, T(u)\})$ es un subespacio invariante de T (observe que esto terminará la demostración porque $dim(U) \in \{1, 2\}$)

Para demostrar que U es invariante respecto de T, considere un elemento cualquiera del conjunto $gen(\{u, T(u)\})$; es decir, consideremos un elemento de la forma $a\,u + bT(u)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$T(au + bTu) = aT(u) + bT^2(u) = aT(u) - b\alpha_j T(u) - b\beta_j u = (-b\beta_j)u + (a - b\alpha_j)T(u)$$

(en la segunda igualdad usamos la ecuación (6.8)). En consecuencia,

$$T(au + bTu) \in gen(\{u, T(u)\}).$$

Por lo tanto, $gen(\{u, T(u)\})$ es un subespacio vectorial invariante de T (de dimensión 1 o 2). □

Para nuestro siguiente resultado necesitaremos la notación que establecemos en la siguiente definición-observación.

6.20 Observación. Suponga que U y W son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V tales que $V = U \oplus W$. Como V es la suma directa de U y de W, cada vector de $v \in V$ puede ser escrito de manera única en la forma $v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$. Definamos $P_{U,W} : V \to V$ como el operador lineal definido por

$$P_{U,W}(v) = u, \text{ cada vez que } v = u + w \text{ donde u} \in U \text{ y } w \in W.$$

De manera análoga, intercambiando los papeles de U y W podemos definir al operador lineal $P_{W,U} : V \to V$ por medio de la regla:

$$P_{W,U}(v) = w, \text{ cada vez que } v = u + w \text{ donde u} \in U \text{ y } w \in W.$$

No es difícil verificar los siguientes hechos (dejamos la demostración al lector):

1. $P_{U,W}(v) = v$ si y sólo si $v \in V$.
2. Para cada $v \in V$ se tiene que $v = P_{U,W}(v) + P_{W,U}(v)$.
3. $P_{U,W}^2 = P_{U,W}$.
4. $Im(P_{U,W}) = U$ y $Nu(P_{U,W}) = W$.
5. $Im(P_{W,U}) = W$ y $Nu(P_{W,U}) = U$.

En los ejemplos 6.6 vimos un ejemplo de un operador lineal definido en $\mathbb{R}^2$ que no tiene valores propios. El siguiente teorema muestra que ejemplos de este tipo no pueden existir en relación al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ (o en forma más general, no pueden existir en relación a espacios vectoriales reales de dimensión impar).

6.21 Teorema. *Todo operador lineal (no cero) definido en un espacio vectorial real de dimensión impar tiene por lo menos un valor propio.*

Demostración. Si V es un espacio vectorial real con dimensión impar entonces $dim(V) = 2n - 1$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, podemos usar inducción matemática sobre n, para demostrar que cada operador lineal (no cero) definido en un espacio vectorial real de dimensión impar tiene un valor propio.

Para empezar, notemos que el resultado deseado es cierto si $n = 1$. Es decir, el resultado es cierto para todos los operadores lineales (no cero) definidos en cualquier espacio vectorial real de dimensión 1. Efectivamente, supongamos que V es un espacio vectorial con $dim(V) = 1$. Entonces $V = \{\lambda\, v : \lambda \in \mathbb{R}\})$ donde $v \neq \vec{0}$. Luego si $T \in \mathcal{L}(V)$ entonces $T(v) \in V$. Por ello, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Claramente, λ es por tanto un valor propio de T.

Ahora suponga que el resultado es cierto para n y probémoslo para $n + 1$. Es decir, supongamos que cualquier operador lineal definido en un espacio vectorial real de dimensión $2n-1$ tiene por lo menos un valor propio y demostremos que cada operador lineal definido en algún espacio vectorial real de dimensión $2(n+1)-1 = 2n+1$ tiene al menos un valor propio.

Suponga que V es un espacio vectorial real de dimensión $2n+1$ y que $T \in \mathcal{L}(V)$. Como la dimensión de V es finita, por el teorema 6.19, T tiene un subespacio vectorial invariante U de dimensión 1 o de dimensión 2.

Si U es de dimensión 1 entonces $U = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ para algún vector no cero $u \in V$. Luego T tiene un valor propio. Y hemos terminado.

Si $dim(U) = 2$, como la dimensión de V es impar y es mayor que 1, necesariamente hay un subespacio vectorial W de V tal que $V = U \oplus W$. Efectivamente, considere una base $\{u_1, u_2\}$ de U. Como los vectores u_1, u_2 son linealmente independientes en V, existen $w_1, \ldots, w_{2n+1-2} \in V$ tales que $B = \{u_1, u_2, w_1, \ldots, w_{2n-1}\}$ es una base para V (recuerde que $dim(V) = 2n+1$). Considere ahora al subespacio vectorial $W = gen(\{w_1, \ldots, w_{2n-1}\})$. No es difícil demostrar que $V = U \oplus W$. Note que $T \restriction W$ puede no ser un operador lineal. No obstante si componemos éste con la transformación lineal $P_{W,U}$ sí obtendremos un operador lineal. Definamos entonces $S : W \to W$ por medio de la regla:

$$S(w) = P_{W,U}(T(w)) \text{ para cada } w \in W.$$

Es fácil notar ahora que $S = P_{W,U} \circ (T \restriction W)$, y por ello, S es un operador lineal en W.

Por nuestra hipótesis de inducción (note que $dim(W) = 2n-1 = dim(V) - 2$ y por eso es de dimensión impar), S tiene un valor propio λ. Mostremos que λ es también un valor propio para T.

Sea $w \in W$ un vector propio para S correspondiente al valor propio λ. Entonces $S(w) - \lambda w = \vec{0}$.

Consideremos ahora un elemento cualquiera $\eta u + aw$ del subespacio vectorial $U + gen(\{w\})$, donde $u \in U$ y $a \in \mathbb{R}$. Aplicando el inciso (2) de la observación 6.20 (a $T(w)$), la definición de S y el hecho de que $S(w) - \lambda w = \vec{0}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(T - \lambda id_V)(u + aw) & = & T(u) - \lambda u + a(T(w) - \lambda w) \\ & = & T(u) - \lambda u + a(P_{U,W}(T(w))) + P_{W,U}(T(w)) - \lambda w) \\ & = & T(u) - \lambda u + a(P_{U,W}(T(w)) + S(w) - \lambda w) \\ & = & Tu - \lambda u + aP_{U,W}(T(w)).\end{array}$$

Note ahora que en el lado derecho de la última ecuación sucede que $T(u) \in U$ (porque U es invariante bajo T), $\lambda u \in U$ (por que $u \in U$), y $aP_{U,W}(T(w)) \in U$ (por la definición de $P_{U,W}$, vea la observación 6.20). Entonces podemos concluir que el operador $T - \lambda id_V$ envía $U + gen(\{w\})$ dentro de U. Como $U + gen(\{w\})$ es un subespacio vectorial de V que tiene dimensión más grande que $dim(U)$, no puede ocurrir que este operador lineal sea inyectivo. Entonces existe un vector no nulo $v \in U + gen(\{w\}) \subset V$ tal que $(T - \lambda id_V)(v) = \vec{0}$. Por lo tanto, T tiene un valor propio (a saber, λ). Esto termina la demostración del segundo paso de inducción matemática.

Por el método de inducción matemática, el resultado es cierto para toda n. En consecuencia, el resultado es cierto. $\square$

6.4 Diagonalización

En los cursos usuales de Álgebra Lineal, se introduce la noción de operador lineal diagonalizable y la noción de matriz diagonalizable, y se muestra la relación que hay entre estos conceptos y la búsqueda de los valores propios del operador lineal. El propósito de esta sección es mostrar esta relación. En esta sección K denota a cualquiera de los campos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Primeramente introducimos la noción de operador lineal diagonalizable.

6.22 Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre el campo K y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Diremos que el operador lineal T es *diagonalizable* si existe una base ordenada B de V para la cual la matriz $[T]_B^B$ es una matriz diagonal.

Por ejemplo, si $A \in M_{n\times n}(K)$ es una matriz cuadrada, el operador lineal $L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{n\times 1}(K)$ es diagonalizable si existe una base B de $M_{n\times 1}(K)$ tal que la matriz $[L_A]_B^B$ es una matriz diagonal. Recuerde el lector que cuando C denota a la base canónica de $M_{n\times 1}(K)$ se tiene que

$$[L_A]_C^C = A.$$

También sabemos por el corolario 5.13 que para las bases B y C sucede que:

$$[L_A]_C^C = ([id_{M_{n\times 1}(K)}]_C^B)^{-1} \cdot [L_A]_B^B \cdot [id_{M_{n\times 1}(K)}]_C^B.$$

Luego si L_A es diagonalizable entonces existe una matriz diagonal $D = [L_A]_B^B$ y una matriz invertible $Q = [id_{M_{n\times 1}(K)}]_C^B$ tales que $A = Q^{-1}DQ$.

Algunos autores llaman a las matrices como A, que son similares a las matrices diagonales, matrices diagonalizables. Más formalmente: dos matrices A y D son *semejantes* si existe una matriz invertible Q tal que $A = Q^{-1}BQ$. De esta manera, una matriz cuadrada A es diagonalizable si y sólo si es semejante a una matriz diagonal. De ahí la razón de llamar diagonalizables a estas matrices.

Debido a la relación que hemos visto entre operadores lineales diagonalizables y matrices diagonalizables es claro que el análisis de condiciones bajo las cuáles es una matriz cuadrada A es diagonalizable se puede reducir al análisis de cuando un operador de tipo L_A es diagonalizable. Esta relación es resumida en la siguiente proposición que damos sin demostración (dejamos la demostración como un ejercicio para el lector).

6.23 Proposición. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio vectorial de dimensión finita V, cualquier operador lineal $T : V \to V$, y cualquier base ordenada C de V.*

1. *T es diagonalizable;*

2. *$[T]_C^C$ es una matriz diagonalizable.*

La siguiente proposición muestra la relación entre operadores diagonalizables y los valores propios de los operadores lineales. La demostración es simplemente la equivalencia entre (1) y (2) que demostramos en la proposición 6.17.

6.24 Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier operador lineal $T : V \to V$:*

1. *T es diagonalizable.*

2. *Existe una base B de V formada por vectores propios de T.*

Hasta este momento, hemos demostrado que diagonalizar un operador lineal (o una matriz) es equivalente a la búsqueda de valores propios del operador lineal. No obstante, hasta este momento carecemos de un método (salvo la misma definición) para la búsqueda de valores propios de un operador lineal. Introducimos ahora la noción de polinomio característico de un operador lineal (de una matriz) para poder contar con un método para la búsqueda de los valores propios de un operador lineal.

6.25 Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre el campo K. Dada una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ definimos al *polinomio característico de T* como el siguiente polinomio:

$$p(t) = det(tid_n - [T]_B^B)$$

donde B es una base ordenada cualquiera de V.

Seguramente el lector intuye que se debe comentar algo en relación a la base que se elige para poder aplicar la anterior *definición* del polinomio característico. El comentario es el siguiente. Si C y B son bases ordenadas de V entonces sabemos que $[T]_B^B = Q^{-1}[T]_C^C Q$, donde Q es la matriz invertible $Q = [id_V]_B^C$. No es difícil demostrar que $det(tid_n - [T]_B^B) = det(tQ^{-1}id_nQ - Q^{-1}[T]_C^CQ) = det(Q^{-1}(tid_nQ - [T]_C^CQ)) = det(Q^{-1})det(tid_n - [T]_C^C)det(Q)$. Como Q es invertible, Q^{-1} también lo es, y además, $det(Q) \neq 0 \neq det(Q^{-1})$. De hecho, $det(Q) \cdot det(Q^{-1}) = 1$. Por esta razón, $det(tid_n - [T]_B^B) = det(tid_n - [T]_C^C)$. Y con ello, la definición del polinomio característico está bien establecida.

También para las matrices se definen a los polinomios característicos. Dada $A \in M_{n\times n}(K)$, $p(t) = det(tIn - A)$ es el polinomio característico de A.

La siguiente proposición aclara porqué para la búsqueda de valores propios de un operador lineal se necesita del polinomio característico del mismo.

6.26 Proposición. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *λ es valor propio de T.*
2. *λ es raíz del polinomio característico de T.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que B es una base de V. Para la base B se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \text{ es valor propio de } T & \leftrightarrow & \exists v \in V \setminus \{\vec{0}\} \text{ tal que } T(v) = \lambda v \\
& \leftrightarrow & \exists v \in V \setminus \{\vec{0}\} \text{ tal que } \lambda id_V(v) - T(v) = \vec{0} \\
& \leftrightarrow & (id_V - T) \text{ no es isomorfismo} \\
& \leftrightarrow & [\lambda id_v - T]_B^B \text{ no es invertible} \\
& \leftrightarrow & \lambda In - [T]_B^B \text{ no es invertible} \\
& \leftrightarrow & det(\lambda In - [T]_B^B) = 0 \\
& \leftrightarrow & p(\lambda) = 0 \text{ donde } p(t) = det(tIn - [T]_B^B) \\
& \leftrightarrow & \lambda \text{ es raíz del polinomio característico de } T
\end{array}$$

Las proposiciones 6.24 y 6.26 nos permiten concluir lo siguiente:

6.27 Corolario.

1. *Para que un operador lineal sea diagonalizable es necesario que su polinomio característico tenga raíces en el campo K.*
2. *Si la dimensión de un espacio vectorial es n y el polinomio característico de un operador lineal tiene exactamente n raíces diferentes en el campo K, entonces el operador es diagonalizable.*

Los resultados del anterior corolario ya los habíamos concluido (con otro lenguaje) en las proposiciones 6.17 y 6.24. Finalizamos este capítulo dando algunos ejemplos del cálculo de algunos valores propios para algunos operadores lineal.

6.28 Ejemplos.

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$(\forall\ (x, y,) \in \mathbb{R}^2)(T(x, y) = (x + y, x - y))$$

¿Cúal es el polinomio característico de T? Sabemos que para construirlo podemos usar cualquier base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Así que consideremos a la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tenemos lo siguiente: $T(1, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$, $T(0, -1) = (1, -1) = 1(1, 0) + (-1)(0, 1)$. Entonces

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por ello, el polinomio caractrerístico de T es el polinomio

$$p(t) = det(tI_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) = det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix}$$

$$= (t - 1)(t + 1) - 1 = t^2 - 2.$$

Las raíces de $p(t)$ (en $\mathbb{R}$) son $t = \sqrt{2}$ y $t = -\sqrt{2}$. Entonces los valores propios de T son $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2 y hay dos raíces diferentes, el operador T es diagonalizable. Encontremos una base de vectores propios de T para $\mathbb{R}^2$.

Para ello hallemos primero un vector propio asociado a $\lambda_1 = \sqrt{2}$.

Note que $T(x, y,) = \sqrt{2}(x, y,)$ implica que $(x + y, x - y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$. Por ello, $x + y = \sqrt{2}x$ y $x - y = \sqrt{2}y$. Si tomamos $y = 1$ en la anteriores ecuaciones entonces $X = 1 + \sqrt{2}$. El lector puede comprobar muy fácilmente que el vector no nulo $(1 + \sqrt{2}, 1)$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = \sqrt{2}$.

Para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ tenemos que $\begin{cases} x + y = -\sqrt{2}x \\ x - y = -\sqrt{2}y. \end{cases}$ Entonces, tomando $y = 1$ obtenemos que $x = 1 - \sqrt{2}$. Luego el vector no nulo $(1 - \sqrt{2}, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Debido a que los valores propios λ_1 y λ_2 son diferentes, $B = \{(1+\sqrt{2}, 1), (1-\sqrt{2}, 1)\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$; y por ello, una base ordenada formada por vectores propios de T. Para esta base sucede que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ el operador lineal dada por $T(p(x)) = p(x)+xp^{'}(x)+p^{'}(x)$ para cada $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$.

Consideremos al polinomio característico de T. Sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$. Para esta base tenemos lo siguiente: $T(1) = 1$, $T(x) = 2x + 1$, $T(x^2) = x^2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 2x$. Luego

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el polinomio característico de T es el polinomio

$$p(t) = det(tI_n - [T]_B^B) = det(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}) = det(\begin{pmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ 0 & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}).$$

Entonces $p(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$. Es fácil notar que las raíces (en $\mathbb{R}$) de p son los número reales $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Ellos son los valores propios de T. Como la dimensión de $P_2(\mathbb{R})$ es 3 y hay tres raíces (valores propios) diferentes, podemos concluir que T es diagonalizable. Si B es una base de $P_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T entonces

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problemas

En este apartado exponemos una lista, lo más completa posible, de ejercicios que el lector puede realizar para fortalecer sus conocimientos. La lista está ordenada de acuerdo a la aparición del tema (de los ejercicios) en el texto; es decir, de acuerdo al orden de la exposición.

1. (Números gaussianos) Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Defina $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a+b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es un campo bajo las siguientes operaciones:
$$(a + b\sqrt{d}) + (c + e\sqrt{d}) = (a + c) + (b + e)\sqrt{d}$$
$$(a + b\sqrt{d}) \cdot (c + e\sqrt{d}) = (ac + bed) + (ae + cb)\sqrt{d}.$$

2. Demuestre que cada uno de los siguientes conjuntos de matrices es un campo bajo la suma y la multiplicación de matrices:
   (a) $K = \{\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ -q & p \end{smallmatrix}\right) : p, q \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que K tiene un elemento α tal que $\alpha \cdot \alpha = 1$, donde 1 es el neutro multiplicativo de K.
   (b) $K = \{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) : q \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $K = \{\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ 2q & p \end{smallmatrix}\right) : p, q \in \mathbb{Q}\}$. Demuestre que K tiene un elemento α tal que $\alpha \cdot \alpha = 2 \cdot 1$, donde 1 es el neutro multiplicativo de K.

3. Sea F un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que tiene la propiedad de que junto con las operaciones usuales de adición y multiplicación de números reales es un campo. Demuestre que $F = \mathbb{Q}$.

4. Sea K un campo, y sean a, b, c elementos arbitrarios de K. Demuestre las siguientes propiedades:
   (a) $a^2 = b^2$ si y sólo si $a = b$ o bien $a = -b$.
   (b) $a^2 = a$ si y sólo si $a = 0_K$ o bien $a = 1_K$.
   (c) Si $a \neq 0_K$ entonces existe un único elemento $y \in K$ tal que $ay = b$ para todo $b \in K$.

(d) $ab = 0_k$ si y sólo si $a = 0_K$ o $b = 0_K$.

(e) Si $a \neq 0_K$ y $b \neq 0_K$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$ y $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

5. Demuestre que un espacio vectorial sobre un campo que tiene una cantidad infinita de elementos no puede ser igual a la unión de una cantidad finita de sus subespacios propios.

6.

   (a) Demuestre que la condición $\forall\, v \in V : 1_K \cdot v = v$ no se sigue de las restantes condiciones en la definición de espacio vectorial.

   (b) ¿Sucede lo mismo con la condición $\forall\, v, w \in V : v + w = w + v$? (argumente su respuesta).

   (c) Demuestre que la condición $\forall\, v \in V : 1_K \cdot v = v$ en la definición de espacio vectorial puede ser sustituida por la condición

$$\forall\, \alpha \in K, v \in V\ :\ \alpha\, v = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0_K \text{ o } v = \vec{0}.$$

7. Demuestre que el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

8. (El espacio de Hilbert) Sea $H = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \boxplus (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\alpha \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Demuestre que H con estas operaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

9. (Suma directa externa de espacios vectoriales). Sean $V_1, \ldots, V_n$ $(n \in \mathbb{N})$ espacios vectoriales sobre el mismo campo K. En el conjunto $V_1 \times \cdots \times V_n = \{(v_1, \ldots, v_n) : v_i \in V_i \text{ para toda } i = 1, \ldots, n\}$ considere la siguiente adición y multiplicación por escalares: $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$ y $\alpha \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (\alpha \cdot v_1, \ldots, \alpha \cdot v_n)$. Demuestre que $V_1 \times \cdots \times V_n$, junto con estas operaciones, es un espacio vectorial sobre el campo K. (Se dice que V es la suma directa externa de los espacios vectoriales $V_1, \ldots, V_n$. Este hecho se denota escribiendo $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$)

10. Suponga que $K = \mathbb{Z}$ y que $V = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y considere en el conjunto V como las siguientes operaciones: $(x, y)+(a, b) = (x+a, y+b)$ y $\alpha\cdot(x, y) = (\alpha\cdot x, \alpha\cdot y)$, donde $(x, y), (a, b) \in V$ y $\alpha \in K$. ¿Es V un espacio vectorial sobre K?

11. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestre que si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ (o ambos casos).

12. (a) Demuestre que los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^1$ son $\{0\}$ y $\mathbb{R}^1$.
    (b) Demuestre que los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, y los subespacios vectoriales de tipo $\mathcal{G}en(\vec{v})$, donde $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
    (c) ¿Son ciertos los anteriores incisos si en lugar de $\mathbb{R}$ consideramos un campo arbitrario K?

13. Sean $W = \{(2x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $U = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Halle $W \cap U$. ¿Es $W \cup U$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$? Halle $\mathrm{G}en(W \cup U)$ y $W + U$.

14. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, y sea $f : V \to K$ una función tal que $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$ para todo $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in K$. Demuestre que el conjunto $\{x \in V : f(x) = 0_K\}$ es un subespacio vectorial de V.

15. (Suma directa interna de subespacios) Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

    (a) Para todo $v \in V$ existen vectores $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$. Además w_1 y w_2 son los únicos con esta propiedad.
    (b) $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

    Cuando existen subespacios W_1 y W_2 que satisfacen la condición (b), se dice que V es la suma directa interna de los subespacios W_1 y W_2. En forma más general, dado un espacio vectorial V sobre un campo K, y subespacios W_1, W_2, …, W_n (para algún $n \geqslant 1$) tales que todo vector v in V se puede escribir de manera única como una suma de tipo $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, donde cada $w_i \in W_i$, se dice que V es la suma directa interna de los subespacios $W_1, \ldots, W_n$. Demuestre que V es la suma directa interna de los subespacios $W_1, \ldots, W_n$ si y sólo si $V = W_1 + \cdot + W_n$ y $W_i \cap (W_1 + \cdot + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.

16. (Espacio cociente). Dado un espacio vectorial V sobre un campo K, y un subespacio W de V, definimos la siguiente relación entre los elementos de V:

$x \sim y$ si y sólo si $x - y \in W$. Demuestre que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en V. Denote con $x+W$ a la clase de equivalencia de x respecto de $\sim$. En el conjunto $V/W = \{x + W : x \in V\}$ considere las siguientes operaciones: $(x+W)+(y+W) = (x+y)+W$ y $\alpha(x+W) = (\alpha \cdot x)+W$ para todo $x, y \in V$ y toda $\alpha \in K$. Demuestre que estas operaciones están bien definidas y que V/W, junto con estas operaciones, es un espacio vectorial sobre el campo K (el espacio V/W es llamado el espacio cociente de V respecto de W). ¿Quién es V/W cuando $W = \{0\}$ y cuando $W = V$?

17. Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales ($\mathbb{R}$ tiene su estructura de campo usual). Demuestre que $W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ es un subespacio vectorial de V. Demuestre también que $U = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es finita $\}$ es un subespacio vectorial de V y que $U \subseteq W$. ¿Es $W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V : (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\}$ un subespacio vectorial de V? (argumente su respuesta).

18. Sean X un conjunto no vacío y V un espacio vectorial sobre un campo K. En el conjunto $\mathcal{F} = \{f : X \to V : f$ es una función $\}$ considere las siguientes operaciones: $f + g$ y $\alpha \cdot f$ para toda $f, g \in \mathcal{F}$ y $\alpha \in K$, donde $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ para todo $x \in X$. Demuestre los siguientes hechos:

    (a) $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial sobre K.

    (b) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{g \in \mathcal{F} : e_x(g) = 0_K\}$ es un espacio vectorial sobre K, donde e_x es la función $e_x : \mathcal{F} \to K$ dada por $e_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

19. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, y sean S y T subconjuntos de V. Demuestre los siguientes hechos:

    (a) $S \subset gen(S)$.

    (b) $gen(S) = gen(gen(S))$.

    (c) Si $S \subset T$ y T es un subespacio vectorial de V, entonces $gen(S) \subset T$.

    (d) S es subespacio vectorial de V si y sólo si $S = gen(S)$.

    (e) Si $S \subset T$ entonces $gen(S) \subset gen(T)$.

    (f) $gen(S \cap T) \subset gen(S) \cap gen(T)$. Dé un ejemplo de un espacio vectorial V y de dos subconjuntos S y T de V tales que $gen(S \cap T) \subsetneq gen(S) \cap gen(T)$.

    (g) $gen\,(S \cup T) = gen\,(S) + gen\,(T)$

(h) Demuestre que para cualquier elemento v de un espacio vectorial V, sobre un campo K, se tiene que $gen(v) := gen(\{v\}) = \{\lambda v : \lambda \in K\}$.

(i) Sea W un subespacio de V, y $u, v \in V$. Supongamos que $u \notin W$ pero que $u \in gen\,(W \cup \{v\})$. Muestre que $v \in gen\,(W \cup \{u\})$.

20. Sean W_1, W_2, W_3 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V.

    (a) ¿Es cierto que $W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$?

    (b) ¿Es cierto que $W_1 \cap (W_2 + W_3) \supset (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$?

    (c) ¿Es cierto que $W_1 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$?

    (d) Observe la relación que existe entre los incisos (a) y (d). Podemos auxiliar un poco al lector, comentándole que la propiedad plasmada en el inciso (d) es llamada *identidad modular*. Con ello se intuirá que esta propiedad es cierta (y que la propiedad (a) es falsa —para probar esto se deberá proporcionar un contraejemplo). Así que la pregunta natural es la siguiente: ¿Para cuáles espacios vectoriales V es cierto que $W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$, donde W_1, W_2, W_3 subespacios vectoriales?

21. A continuación se proporcionan cinco afirmaciones. Decida si cada una de ellas es falsa o verdadera. En cada caso argumente su respuesta (si concluye que la afirmación es verdadera proporcione una demostración del hecho; si decide que la afirmación es falsa proporcione un ejemplo que muestre ello).

    (a) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es un conjunto linealmente independiente.

    (b) Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ (o ambos casos).

    (c) Si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ son tales que $(1,0) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ y $(0,1) = \gamma\vec{v}_1 + \sigma\vec{v}_2$, para algunos escalares $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$, entonces los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ forman una base para $\mathbb{R}^2$.

    (d) Los espacios $\mathbb{R}^1$, $\{0\}$ son los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^1$.

22. Suponga que V es un espacio vectorial sobre un campo K. Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales de V. Demuestre que

$$W_1 + W_2 = \{v + w : v \in W_2, w \in W_2\}$$

    es el más pequeño de los subespacios de V que contiene a $W_1 \cup W_2$.

23. Sea V un espacio vectorial sobre un campo arbitrario K. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

    (a) $\{u, v\}$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los dos vectores (u o v) es un multiplo escalar del otro.

    (b) $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{u + v, u - v\}$ es linealmente independiente.

    (c) $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{u + v, u + w, v + w\}$ es linealmente independiente.

    (d) un conjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ es linealmente dependiente si y sólo si $v_1 = \overrightarrow{0}$ o si $v_{k+1} \in \mathrm{Gen}(\{v_1, v_2, ..., v_k\})$ para alguna $k < n$.

24. Sean V un espacio vectorial sobre un campo K, y sean

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m \in V$$

vectores cualesquiera. Demuestre que si un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, y cada vector v_i es una combinación lineal de los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$, entonces v es una combinación lineal de los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$.

25. Demuestre que los vectores $v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ no generan a $\mathbb{R}^3$.

26. Sean

$$y_1 = (y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}), y_2 = (y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}), \ldots, y_n = (y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{nn})$$

vectores en K^n (donde K es un subcampo del campo de los números complejos $\mathbb{C}$). Demuestre que si $|A| \neq 0$, donde A es la matriz $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

27. Considere como V al espacio $\mathbb{R}^4$. Decida si los siguientes vectores son linealmente independientes o no.

    (a) $v_1 = (0, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 3)$ y $v_4 = (6, 3, 2, 4)$

    (b) $v_1 = (8, 6, 3, 0)$, $v_2 = (9, 5, 7, 4)$, $v_3 = (3, 8, 2, 1)$ y $v_4 = (-1, 1, 0, -4)$.

28. Demuéstrese que los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 2, -1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$ son una base para el espacio $\mathbb{R}^3$.

29. (a) Demuestre que los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^1$ son $\{0\}$ y $\mathbb{R}^1$.
    (b) Demuestre que los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, y los subespacios vectoriales de tipo $\mathcal{G}en(\vec{v})$, donde $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

30. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Suponga que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V. Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ (o ambos casos).

31. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (recuerde que V es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$). Sean

$$V_p = \{f \in V : f(-x) = f(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$V_i = \{f \in V : f(-x) = -f(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}\}.$$

    (a) Demuestre que V_p y V_i son subespacios vectoriales de V.
    (b) Demuestre que $V = V_p + V_i$.
    (c) Demuestre que $V_p \cap V_i = \{0\}$.

32. Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Demuestre que
    (a) Para todo $v \in V$ existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.
    (b) Para todo $v \in V$, los vectores $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ cuya existencia está garantizada por el resultado del inciso anterior son los únicos vectores con la propiedad de que $v = w_1 + w_2$.

33. Demuestre que los vectores $\vec{v_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$.

34. Demuestre que los vectores $\vec{v_1} = (1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v_3} = (0, 2, 0)$ no son una base de $\mathbb{R}^3$. Halle un vector $\vec{w}$ de tal manera que el conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w}\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.

35. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Demuestre que los vectores $\vec{v_1} = (a, b)$ y $\vec{v_2} = (c, d)$ son una base de $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

36. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto de todos los vectores $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tales que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2 que está contenido en $\mathbb{R}^3$. Halle una base para este espacio vectorial.

37. Determine todos los valores del escalar c tales que los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, -2, 1)$ y $\vec{v}_3 = (c, 1, 1)$ no sean una base para $\mathbb{R}^3$.

38. Sean $\vec{v}_1 = (a, b)$ y $\vec{v}_2 = (c, d)$ una base para $\mathbb{R}^2$. Demuestre que la única solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

y del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + cy &= 0 \\ bx + dy &= 0 \end{aligned}$$

en las incógnitas x y y, es $x = y = 0$.

39. Demuestre que si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ son tales que $(1, 0) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ y $(0, 1) = \gamma\vec{v}_1 + \sigma\vec{v}_2$, para algunos escalares $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$, entonces los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ forman una base para $\mathbb{R}^2$.

40. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vectores en V tales que $Gen(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}) = V$. Demuestre que si $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ son vectores arbitrarios de V, entonces el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ es siempre un conjunto de generadores de V, esto es, demuestre que

$$Gen(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}) = V.$$

41. Demuestre que el conjunto de vectores

$$S = \{(1, 1, -1), (2, 1, 1), (3, 2, 0), (-1, 0, 1)\}$$

genera a $\mathbb{R}^3$. Extraiga una base para $\mathbb{R}^3$ de este conjunto de vectores.

42. Halle un vector v en $\mathbb{R}^2$ de tal manera que $\{(1, -1), v\}$ sea una base de $\mathbb{R}^2$.

43. Halle un vector v en $\mathbb{R}^3$ de tal manera que el conjunto

$$\{(\sqrt{2}, e, \pi), (0, 1, -1), v\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$.

44. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Supóngase que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Demuestre que el conjunto $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_1\}$ es también linealmente independiente.

45. ¿Es cierto el resultado del ejercicio anterior si en lugar de un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ tomamos un espacio vectorial sobre el campo $K = \{0, 1\}$? (Argumente su respuesta).

46. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Suponga que existen un número finito de vectores que generan a V. Demuestre que V es de dimensión finita.

47. Sea K un campo. Demuestre que el espacio vectorial de todas las matrices de tamaño $m \times n$ sobre K tiene dimensión $m \cdot n$.

48. Sea V el conjunto de los números reales y considere a V como un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$. Demuestre que V no es un espacio vectorial de dimensión finita.

49. Sea E un conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Muestre que E es un conjunto linealmente independiente si y sólo si para todo subconjunto propio E' de E se tiene que $\mathcal{G}en\,(E') \neq \mathcal{G}en\,(E)$. Equivalentemente, muestre que E es linealmente dependiente si y sólo si existe un subconjunto propio E' de E tal que $\mathcal{G}en\,(E') = \mathcal{G}en\,(E)$.

50. Sea $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ y consideremos funciones $f, g, h \in F\,(S, \mathbb{R})$ definidas por

$$\begin{aligned} f\,(x_1) &= 0, \quad f\,(x_2) = 1, \quad f\,(x_3) = 1, \\ g\,(x_1) &= 1, \quad g\,(x_2) = 0, \quad g\,(x_3) = 1, \\ h\,(x_1) &= 1, \quad h\,(x_2) = 1, \quad h\,(x_3) = 0 \end{aligned}$$

¿forman $\{f, g, h\}$ un conjunto linealmente independiente?

51. Sean E_1 y E_2 conjuntos linealmente independientes de vectores en V. Muestre que:

    (a) $E_1 \cap E_2$ es linealmente independiente.

    (b) $E_1 \cup E_2$ es linealmente independiente si y sólo si $\mathcal{G}en\,(E_1) \cap \mathcal{G}en\,(E_2) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

52. Demuestre que en todo espacio vectorial se tienen los siguientes hechos:

    (a) Si $\{u, v\}$ es una base de V entonces $\{u + v, u - v\}$ es también una base de V.

(b) Si $\{u,v\}$ es una base de V entonces $\{\alpha u, \beta v\}$ es también una base de V para todo α, $\beta \in K$ distintos de 0_K.

(c) Si $\{u,v,w\}$ es una base de V entonces $\{u+v+w, u+v, w\}$ es también una base de V.

(d) Suponga que los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son una base para el espacio vectorial V. Demuestre que[4]

$$V = \mathcal{G}en\left(\{v_1\}\right) \oplus \mathcal{G}en\left(\{v_2\}\right) \oplus ... \oplus \mathcal{G}en\left(\{v_n\}\right).$$

53. Para todo espacio vectorial V se cumple:

(a) Si V es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2, y $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente, entonces $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ y además $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V.

(b) Recíprocamente, si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de W_1 y W_2, tales que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base para V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.

54. (a) Demuestre que el conjunto de vectores

$$S = \{(1,1,-1), (2,1,1), (3,2,0), (-1,0,1)\}$$

genera a $\mathbb{R}^3$. Extraiga una base para $\mathbb{R}^3$ de este conjunto de vectores.

(b) Halle un vector v en $\mathbb{R}^2$ de tal manera que $\{(1,-1), v\}$ sea una base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Halle un vector v en $\mathbb{R}^3$ de tal manera que el conjunto

$$\left\{\left(\sqrt{2}, e, \pi\right), (0, 1. -1), v\right\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$.

(d) ¿Bajo qué condiciones de los escalares x, son los vectores $(1,1,0)$, $(1,x,x^2)$ una base de $\mathbb{C}^2$?

(e) ¿Bajo qué condiciones de los escalares x, son los vectores

$$(0,1,x), (x,0,1), (x,1,1+x)$$

una base de $\mathbb{C}^2$?

[4] De ahora en adelante utilizaremos el símbolo $\bigoplus$ para denotar a la suma directa interna.

(f) Sean V un espacio vectorial (sobre un campo K) de dimensión n y W un subespacio de V de dimensión m. Halle la dimensión de V/W (demuestre todas sus afirmaciones).

(g) ¿Existe un subconjunto S del conjunto $\mathbb{R}^3$, de tal manera que S sea linealmente independiente sobre $\mathbb{R}^3$, cuando $\mathbb{R}^3$ se ve como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, pero que sea linealmente dependiente sobre $\mathbb{R}^3$, cuando $\mathbb{R}^3$ se ve como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?

55. Demuestre que todo espacio vectorial tiene una base.
Idea de demostración.

(a) Para la demostración de este hecho, utilice el resultado del siguiente lema.

Lema. (Tukey-Teichmüller) *Toda colección no vacía de carácter finito tiene un elemento maximal respecto a la contención.*[5]

Se dice que una familia[6] $\mathcal{F}$ de conjuntos *es de carácter finito* si sucede que un conjunto A es un elemento de $\mathcal{F}$ si y sólo si todo subconjunto finito de A es un elemento de $\mathcal{F}$.

Observe que la anterior definición no dice que los elementos de $\mathcal{F}$ sean únicamente subconjuntos finitos, sino que establece que para que un conjunto A (el cual posiblemente es infinito) sea un elemento de la familia $\mathcal{F}$ es necesario y suficiente que todos sus subconjuntos finitos sean elementos de $\mathcal{F}$. Un ejemplo típico de una familia de carácter finito es la familia de todos los subconjuntos linealmente independientes de un espacio vectorial (véase el inciso (b)).

Definición. Sea $\mathcal{F}$ una familia. Diremos que un elemento $A \in \mathcal{F}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ maximal respecto a la contención si no existe elemento $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ y $A \neq B$.

Observe que un elemento $A \in \mathcal{F}$ es maximal con respecto a la contención si y sólo si para todo $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$, se tiene que $A = B$.[7]

---

[5]Daremos por cierto este resultado. Es valioso mencionar también que esta proposición es equivalente al axioma de elección.

[6]Utilizamos el término *familia* como sinónimo de la frase *conjunto*.

[7]El lector debe notar que $A \subset B$ no significa necesariamente que A esté contenido propiamente en B.

(b) Demuestre que si V un espacio vectorial sobre un campo K, entonces la familia

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es un subconjunto linealmente independiente de } V\}$$

es una familia de carácter finito de V.

(c) Aplicando el Lema de Tukey-Teichmüller a la familia $\mathcal{F}$ del inciso (b), podemos garantizar la existencia de un elemento $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ que es maximal respecto a la contención. Demuestre ahora que $\mathcal{B}$ es una base para V.

56. Dado un espacio vectorial V sobre un campo K y un conjunto no vacío X, en el conjunto $\mathcal{F}(X,V) = \{f : f : X \to V \text{ es una función }\}$ podemos considerar la siguiente estructura de espacio vectorial sobre K:

(a) Para toda $f, g \in \mathcal{F}(X,V)$, $f+g$ es la función en $\mathcal{F}(X,V)$ definida por $f+g(x) = f(x)+g(x)$ para toda $x \in X$ (nótese que $f(x)+g(x)$ es la suma de elementos de V, para toda $x \in X$).

(b) Para toda $f \in \mathcal{F}(X,V)$ y $\alpha \in K$, $\alpha \cdot f$ es la función en $\mathcal{F}(X,V)$ definida por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ para toda $x \in X$ (nótese que $\alpha f(x)$ es la multiplicación por escalares de V, para toda $x \in X$).

Demuestre los siguientes hechos:

(a) $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial sobre K.

(b) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{g \in \mathcal{F} : e_x(g) = 0_K\}$ es un espacio vectorial sobre K, donde e_x es la función $e_x : \mathcal{F} \to K$ dada por $e_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

(c) Suponga ahora que W un subespacio de V, que S un conjunto y $s \in S$ fijo. Demuestre que $\{f \in F(S,V) : f(s) \in W\}$ es un subespacio de $F(S,V)$.

(d) Si W es un subespacio del espacio vectorial V, demuestre que $F(S,W)$ es un subespacio de $F(S,V)$.

(e) Si U y W son subespacios de V, demuestre que

$$F(S,U) + F(S,W) = F(S,U+W).$$

57. Sea V el conjunto de los números reales. Considere a V como un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales Q. Demuestre que V no tiene bases finitas.

58. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Suponga que existen un número finito de vectores que generan a V. Demuestre que V es un espacio vectorial de dimensión finita.

   (a) Suponga que V es un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Demuestre o refute la siguiente afirmación:Si $W_1, W_2, ..., W_n$ son subespacios de V tales que $V = W_1 + ... + W_n$ entonces $\dim(W_i) = 1$ para toda $i = 1, 2, ..., n$.

   (b) Suponga que V es un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Demuestre o refute la siguiente afirmación: Si W_i son subespacios vectoriales de V tales que $\dim(W_i) = 1$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $V = W_1 + ... + W_n$.

   (c) Demuestre o refute la siguiente afirmación: En un espacio vectorial V de dimensión 3, si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales diferentes del espacio nulo $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ y con la propiedad de que $V = W_1 + W_2$, entonces uno de los subespacios es de dimensión 1 y el otro es de dimensión 2.

59. Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K, entonces V es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2 si y sólo si $V = W_1 + W_2$ y $\dim(W_1)$ +$\dim(W_2)$.

   (a) Demuestre que si un espacio vectorial V de dimensión finita tiene exactamente dos subespacios entonces $\dim(V) = 1$. Demuestre que el recíproco es cierto.

   (b) Demuestre que todo espacio vectorial V (sobre el campo $\mathbb{R}$) que tiene dimensión 2, tiene una infinidad de subespacios de dimensión 1.

   (c) Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W_1 es un subespacio de V arbitrario, entonces siempre existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

60. Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Se dice que el espacio vectorial V es la *suma directa* de los subespacios W_1 y W_2 en caso de que las siguientes dos condiciones sean ciertas

   (a) $V = W_1 + W_2$

   (b) $W_1 \cap W_2 = V$.

   Es costumbre escribir $V = W_1 \bigoplus W_2$ cuando V es la suma directa de los subespacios W_1 y W_2.

Demuestre que si V es un espacio de dimensión finita, entonces los siguientes hechos son equivalentes:

(a) $V = W_1 \bigoplus W_2$;

(b) $V = W_1 + W_2$ y $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$;

(c) Para cada $v \in V$ existen vectores únicos $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$;

(d) Si $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ es una base de W_1 y $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_m}$ es una base de W_2, entonces $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}, \vec{w_1}, \ldots, \vec{w_m}$ es una base de V.

61. Demuestre que si un espacio V tiene exactamente dos subespacios entonces $\dim V = 1$. Demuestre también el recíproco.

62. Demuestre que V es un espacio vectorial de dimensión infinita si y sólo si V contiene un subconjunto linealmente independiente con un número infinito de elementos.

63. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{Q}$. Suponga que $T : V \to V$ que no fija ningún vector diferente de cero (es decir, $T(x) \neq x$ para todo $x \in V$). Suponga que existe un número primo p tal que $T^p = id_V$. Demuestre que $p - 1$ divide a $\dim(V)$.

64. Suponga que V un espacio vectorial de dimensión finita, digamos que $1 < n = \dim(V)$. Sea $T : V \to V$ un operador lineal tal que $T^n = 0$ y $T^{n-1} \neq 0$. Demuestre que no puede existir un operador lineal $R : V \to V$ tal que $R^2 = T$.

65. (a) Dé un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para la cual suceda que $Im(T) = Nu(T)$.

    (b) Suponga que $dim(V) = n$. Demuestre que si $T : V \to V$ es una transformación lineal para la cual sucede que $Im(T) = Nu(T)$, entonces n es par.

66. El resultado del problema 55 establece que todo espacio vectorial tiene una base[8]. Por otro lado, es posible demostrar que en cualquier espacio vectorial,

[8] Cabe mencionar que esta proposición “todo espacio vectorial tiene una base" también es equivalente al axioma de elección (véase la página 190 del libro *Teoría de los conjuntos: una introducción*, Fernando Hernandez Hernández, Aportaciones Matemáticas, 13).

todas sus bases tienen el mismo número de elementos (es decir, tienen la misma cardinalidad).[9]

Dando por cierto este último hecho (el referente a que las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad), podemos definir la dimensión de un espacio vectorial arbitrario como la cardinalidad de alguna de sus bases (y por tanto, de todas sus bases).

DEFINICIÓN. Dado un campo K y un espacio vectorial V sobre K, la dimensión $\dim(V)$ del espacio V es la cardinalidad de alguna de sus bases.

La idea del problema de este inciso es demostrar el siguiente resultado cuya demostración ya conocemos para el caso de los espacios de dimensión finita.

TEOREMA. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K. Los espacios V y W son isomorfos si y sólo si* $\dim(V) = \dim(W)$.

SUGERENCIA DE DEMOSTRACIÓN.

(a) Para demostrar la necesidad, demuestre primeramente que si V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K, y $f : V \to W$ es una transformación lineal inyectiva y $\mathcal{B} \subset V$, entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente si y sólo si $f(\mathcal{B}) = \{f(v) : v \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto linealmente independiente de W.

(b) Para demostrar la suficiencia, demuestre primeramente la siguiente proposición.

   PROPOSICIÓN. (propiedad universal de las bases). *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo campo K. Sean $\mathcal{B}$ una base para V. Suponga que $f : \mathcal{B} \to W$ es una función arbitraria. Entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v) = f(v)$ para toda $v \in \mathcal{B}$.*

   Después considere bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ para V y W, respectivamente, tales que $|\mathcal{B}| = \dim(V) = \dim(W) = |\mathcal{C}|$. Considere una función biyectiva $f : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Aplique ahora la proposición anterior.

67. Sea K un campo. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$, ambas con coeficientes en el campo K. Defina

    $L_A : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$

[9] Se dice que dos conjuntos A y B *tienen la misma cardinalidad* o que *tienen el mismo número de elementos* (lo cual se denota escribiendo $|A| = |B|$) si existe una función biyectiva $f : A \to B$.

por medio de la siguiente fórmula:$L_A(X) = AX$ para toda $X \in M_{n\times 1}(K)$. Sean β y β' las bases ordenadas canónicas de $M_{n\times 1}(K)$ y de $M_{m\times 1}(K)$ respectivamente. Demuestre los siguientes hechos:

(a) $[LA]_\beta^{\beta'} = A$.

(b) $L_A = L_B$ si y sólo si $A = B$.

(c) $L_{A+B} = L_A + L_B$ y $L_{\alpha A} = \alpha L_A$ pata toda $\alpha \in K$.

(d) Si $T : M_{n\times 1}(K) \to M_{m\times 1}(K)$ es una transformación lineal cualquiera entonces existe una única matriz A de tamaño $m \times n$ tal que $T = L_A$.

(e) Si C es una matriz de tamaño $n \times p$ con coeficientes en K, entonces $L_{AC} = L_A \circ L_C$.

(f) Si $m = n$ entonces $L_{In} = id_{M_{n\times 1}(K)}$.

(g) Suponga que V y W son espacios vectoriales sobre el campo K tales que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal arbitraria. Demuestre que existen bases ordenadas β y β' de V y de W, respectivamente y una matriz A de tamaño $m \times n$ con coeficientes en K, e isomorfismos $\phi : V \to M_{m\times 1}(K)$ y $\chi : M_{n\times 1}(K) \to W$, tales que $T = \chi \circ L_A \circ \phi$.

68. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea T una proyección de V sobre un subespacio W de V. Halle una base ordenada β para V de tal manera que la matriz $[T]_\beta^{\beta'}$ sea una matriz diagonal.

69. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal donde $\dim(V)$=n y $\dim(W)$=m. Sean β y β' bases ordenadas de V yW respectivamente. Demuestre que $rango(T) = rango(L_A)$ y $nulidad(T) = nulidad(L_A)$ donde A=$[T]_\beta^{\beta'}$.

70. Sea $f : \mathbb{R}_n(x) \to \mathbb{R}_n(x)$ tal que $f(p(x)) = p(x + 1)$ para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n(x)$. Se pide:

(a) Si d:$\mathbb{R}_n(x) \to \mathbb{R}_n(x)$ es la transformación derivación, demostrar que:

$f = Id + \dfrac{d}{1!} + \dfrac{d^2}{2!} + ... + \dfrac{d^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{d^n}{n!}$ donde Id es la transformación lineal identidad de $\mathbb{R}_n(x)$.

(b) Obtener la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_n(x)$.

71. De un ejemplo de una transformación lineal no nula $f : V \to V$, del $\mathbb{R}-$espacio vectorial V se conocen los siguientes datos:

(a) f tiene la misma matriz respecto a las bases de V

$\beta = \{e_1, e_2.e_3\}$ y $\beta' = \{2e_1 - e_2, -e_1 + 2e_2, e_1 + e_2 + 2e_3\}$.

(b) Si A es el conjunto de todos los vectores de la forma $xe_1 + 2e_3$, y $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(A) = Imf$.

(c) $f^2 = f$.

(d) $e_1 - e_2$ pertenece a Imf.

Se pide:

(1) Determinar la matriz M de f respecto a la base β.

(2) Hallar $nulidad(f)$ y $rango(f)$.

72. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, sobre el campo K. Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Demuestre que si $\mathcal{B}$ es una base para V entonces $f(\mathcal{B}) = \{f(v) : v \in \mathcal{B}\}$ es una base de W.

73. Sea B una matriz invertible de tamaño $n \times n$ con coeficientes en el campo K. Defina $T : M_{n\times n}(K) \to M_{n\times n}(K)$ por medio de la fórmula $T(A) = B^{-1} A\, B$. Demuestre que T es un isomorfismo.

74. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, sobre el campo K. Suponga que $T : V \to W$ es un isomorfismo. Sea X un subespacio de V. Demuestre los siguientes hechos.

    (a) $T(X)$ es un subespacio de W.

    (b) $\dim(T(X)) = \dim(X)$.

75. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Demuestre que $\text{rango}(T) = \text{rango}(L_A)$ y que $\text{nulidad}(T) = \text{nulidad}(L_A)$, donde $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

76. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y que $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y $\mathcal{D}$ son bases ordenadas para V.

    (a) Suponga que Q es la matriz de cambio de coordenadas, de $\mathcal{B}$-coordenas en $\mathcal{C}$-coordenadas, y que R cambia $\mathcal{C}$-coordenadas en $\mathcal{D}$-coordenadas. Demuestre que RQ cambia $\mathcal{B}$-coordenadas en $\mathcal{D}$-coordenadas.

    (b) Suponga que Q es la matriz de cambio de coordenadas, de $\mathcal{B}$-coordenas en $\mathcal{C}$-coordenadas, demuestre que Q^{-1} cambia $\mathcal{C}$-coordenas en $\mathcal{B}$-coordenadas.

77. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(a, b) = (2a + b, a - 3b)$. Suponga que $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y que $\mathcal{B}'\{(1, 1), (1, 2)\}$. Halle $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ utilizando a la matriz de cambio de coordenas y la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

78. Determine cuáles de las siguientes funciones $f : V \to K$ son funcionales lineales.

    (a) $V = P(\mathbb{R})$; $f(p) = 2p'(0) + p''(1)$, para $p \in V$.
    (b) $V = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (2x, 4y)$, para $(x, y) \in V$.
    (c) $V = M_{2\times 2}(K)$; $f(A) = \mathrm{tr}(A)$, donde K es un campo fijo y $A \in V$.
    (d) $V = P(\mathbb{R})$; $f(p) = \int_0^1 p(t)dt$, $p \in V$.

79. Para cada uno de los siguientes casos, halle explicitamente la base dual $\mathcal{B}^*$ correspondiente a $\mathcal{B}$.

    (a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$.
    (b) $V = P_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

80. Sea $V = \mathbb{R}^3$, y defina $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ de la siguiente manera: $f_1(x, y, z) = x - 2y$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$ y $f_3(x, y, z) = y - 3z$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, f_2\}$ es una base de V^* y halle la base $\mathcal{B}$ de V de la cual es $\mathcal{C}$ dual.

81. Sea $V = P_1(\mathbb{R})$, y defina $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ de la siguiente manera:
$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt \qquad \text{y} \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(t)dt,$$
    donde $p \in V$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ es una base de V^* y halle la base $\mathcal{B}$ de V de la cual es $\mathcal{C}$ dual.

82. Sea $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ dada por $T(f) = f'$, donde f' denota a la derivada de f. Suponga que $\mathcal{B} = \{1, x\}$ y que $\mathcal{B}'\{1 + x, 1 - x\}$. $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ utilizando a la matriz de cambio de coordenas y la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

83. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, ambos sobre el campo K. Para cualquier transformación lineal $T : V \to W$, considere la función $T^t : W^* \to V^*$ definida por $T^t(g) = g \circ T$ para todo $g \in W^*$. Demuestre que T^t es una transformación lineal y que si $\mathcal{B}$ y γ son bases ordenadas para V y W respectivamente, entonces $[T^t]_{\gamma^*}^{\mathcal{B}^*} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\gamma}\right)^t$.

84. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Suponga que $\mathcal{B}$ es una base ordenada para V. Demuestre que $\mathcal{B}^{**} = \psi(B)$.

85. Suponga que V es un espacio vectorial sobre el campo K, de dimensión finita. Para cualquier subconjunto $S \subset V$ se difine el *anulador* de S como el conjunto
$$S^0 = \{f \in V^* : f(s) = 0 \ \text{ para todo } s \in S\}.$$
    Demuestre los siguientes hechos.

(a) Para todo $S \subset V$, S^0 es un subespacio de V^*.

(b) Si W es un subespacio de V y $x \notin W$, entonces existe un $f \in W^0$ tal que $f(x) \neq 0$.

(c) Demuestre que $S^{00} = \mathrm{Gen}(\psi(S))$.

(d) Suponga que W_1, W_2 son subespacios de V. Demuestre que $W_1 = W_2$ si y sólo si $W_1^0 = W_2^0$.

(e) Suponga que W_1, W_2 son subespacios de V. Demuestre que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

86. Suponga que W es un subespacio de V (V de dimensión finita sobre K). Demuestre que $\dim(W) + \dim(W^0) = \dim(V)$.

87. Suponga que $T : V \to V$ es un isomorfismo (V es un espacio vectorial de dimensión finita). Demuestre que T es diagonabilizable si y sólo si $T^{-1} : V \to V$ es diagonabilizable.

88. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K y $S \subset V$ un subespacio vectorial.

    (a) Demuestre que si $T : S \to V$ tiene como un valor propio a $\lambda \in K$, entonces $\alpha\lambda$ es un valor propio de $\alpha T : S \to V$, para todo $\alpha \in K$.

    (b) Suponga que v es un vector propio de $T_1 : S \to V$ y de $T_2 : S \to V$, demuestre que v es también vector propio de $\alpha T_1 + \beta T_2$, para todo $\alpha, \beta \in K$. ¿Cómo estan relacionados los valores propios de T_1 y T_2, con los valores propios de $\alpha T_1 + \beta T_2$?

89. (a) Supóngase que $T : V \to V$ tiene a un vector v como vector propio. Demuestre que v es un vector propio de $T^n : V \to V$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n\text{-veces } T}$.

    (b) Supóngase que $T : V \to V$ tiene a un vector v como vector propio. Demuestre que v es un vector propio de $\alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \cdots + \alpha_n T^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$.

90. Dé un ejemplo de una transformación lineal $T : V \to V$ que no tenga vectores propios, pero tal que T^2 sí posea vectores propios.

91. Suponga que $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que T^2 tiene como valor propio a λ^2. Demuestre que por lo menos uno de los valores λ o $-\lambda$ es un valor propio de T.

92. Sea $V = \{f : f : (0,1) \to \mathbb{R}$ es derivable en $(0,1)\}$ $(K = \mathbb{R})$. Sea $T : V \to V$ dada por lo siguiente: si $f \in V$ entonces $T(f) : (0,1) \to \mathbb{R}$ es la función dada por $T(f)(x) = xf'(x)$ para todo $x \in (0,1)$. Demuestre que todo número real λ es un valor propio de T. Determine los vectores propios correspondientes a λ.

93. Sea $V = P(R)_n$ el espacio vectorial formado por todos los polinomios $p(x)$ en la variable x con coeficientes reales y con grado menor o igual que n (recuerde que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). Sea $T : V \to V$ dada por $T(p) = q$, donde $q(t) = p(t+1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que el único valor propio para T es el real $\lambda = 1$.

94. Demuestre que cada una de las siguientes matrices tiene dos valores propios en el campo de los números reales. Además, halle para cada valor propio de cada una de estas matrices, los vectores propios correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

95. Suponga que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esta dada por $T(1,0) = (0,0)$ y $T(0,1) = (1,0)$. Halle los valores propios de T, y halle también los correspondientes vectores propios para cada uno de los valores propios de T.

96. Demuestre que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(1,1) = (-1,1)$ $T(1,-1) = (1,1)$, no tiene ningún vector propio en $\mathbb{R}^2$.

97. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal cuya matriz en cierta base ordenada $\mathcal{B}$ es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Demuestre que T tiene vectores propios si y sólo si $(a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Demuestre que si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ entonces existe una base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ es una matriz diagonal.

98. Demuestre o refute lo siguiente: *Si $T : V \to V$ es operador lineal, entonces todo vector v distinto de cero (si hay) del núcleo de T es un vector propio de T.* (¿A qué valor(es) propios corresponden estos vecto(res) propios?)

99. Demuestre o refute lo siguiente: *Si $T : V \to V$ es operador lineal tal que rango$(T) = \dim(V)$, entonces todo valor propio de T es distinto de cero.*

100. Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Suponga que $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que T tiene n vectores propios linealmente independientes y para cual existe un número natural n tal que $T^n = 0$. Demuestre que $T = 0$.

101. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, donde $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Halle una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $(1,1)$ sea un vector propio de la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

102. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K. Suponga que $T : V \to V$ es un operador lineal. Sea $\lambda \in K$ fijo. Demuestre que $W = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial de V. Demuestre que $\dim W \neq 0$ si y sólo si λ es un valor propio de T. Demuestre que $\dim(W) = n$ si y sólo si $T = \lambda \mathrm{id}_V$.

103. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son continuas en todo $\mathbb{R}$ (V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). Sea $T : V \to V$ dada por $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Demuestre que T no tiene valores propios.

104. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal que tiene como representación matricial (en la base canónica de $\mathbb{R}^3$) a la siguiente matriz: $\left(\begin{smallmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ Demuestre que T es diagonalizable (halle explicítamente una base $\mathcal{B}$ en la cual $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal).

105. Sea $V = \{f : f : (0,1) \to \mathbb{R}$ donde f admite derivadas de todos los ordenes en cada punto de $(0,1)\}$ y $K = \mathbb{R}$. Suponga que $T : V \to V$ está dada por $T(f) = f'$ para toda $f \in V$ (f' denota a la derivada de f). Halle (si los hay) los vectores y valores propios de T.

106. Sea V el conjunto de todas las sucesiones $\{x_n\}$ de números reales, que son convergentes. El conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con las siguientes operaciones:

    (a) $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

    (b) $\alpha \cdot \{x_n\} = \{\alpha \cdot x_n\}$.

    Sea $T : V \to V$ dada por $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ donde $y_m = x_m - a$ y a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Halle los vectores y valores propios de esta transformación lineal.

107. Suponga que $T : V \to V$ es un isomorfismo (V es un espacio vectorial de dimensión finita). Demuestre que T es diagonabilizable si y sólo si $T^{-1} : V \to V$ es diagonabilizable.

108. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K y $S \subset V$ un subespacio vectorial.

    (a) Demuestre que si $T : S \to V$ tiene como un valor propio a $\lambda \in K$, entonces $\alpha\lambda$ es un valor propio de $\alpha T : S \to V$, para todo $\alpha \in K$.

(b) Supomga que v es un vector propio de $T_1 : S \to V$ y de $T_2 : S \to V$, demuestre que v es también vector propio de $\alpha T_1 + \beta T_2$, para todo $\alpha, \beta \in K$. ¿Cómo estan relacionados los valores propios de T_1 y T_2, con los valores propios de $\alpha T_1 + \beta T_2$?

109. (a) Supóngase que $T : V \to V$ tiene a un vector v como vector propio. Demuestre que v es un vector propio de $T^n : V \to V$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n\text{-veces } T}$.

(b) Supóngase que $T : V \to V$ tiene a un vector v como vector propio. Demuestre que v es un vector propio de $\alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \cdots + \alpha_n T^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$.

110. Dé un ejemplo de una transformación lineal $T : V \to V$ que no tenga vectores propios, pero tal que T^2 sí posea vectores propios.

111. Suponga que $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que T^2 tiene como valor propio a λ^2. Demuestre que por lo menos uno de los valores λ o $-\lambda$ es un valor propio de T.

112. Sea $V = \{f : f : (0,1) \to \mathbb{R}$ es derivable en $(0,1)\}$ $(K = \mathbb{R})$. Sea $T : V \to V$ dada por lo siguiente: si $f \in V$ entonces $T(f) : (0,1) \to \mathbb{R}$ es la función dada por $T(f)(x) = xf'(x)$ para todo $x \in (0,1)$. Demuestre que todo número real λ es un valor propio de T. Determine los vectores propios correspondientes a λ.

113. Sea $V = P(R)_n$ el espacio vectorial formado por todos los polinomios $p(x)$ en la variable x con coeficientes reales y con grado menor o igual que n (recuerde que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). Sea $T : V \to V$ dada por $T(p) = q$, donde $q(t) = p(t+1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que el único valor propio para T es el real $\lambda = 1$.

114. Demuestre que cada una de las siguientes matrices tiene dos valores propios en el campo de los números reales. Además, halle para cada valor propio de cada una de estas matrices, los vectores propios correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

115. Suponga que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esta dada por $T(1,0) = (0,0)$ y $T(0,1) = (1,0)$. Halle los valores propios de T, y halle también los correspondientes vectores propios para cada uno de los valores propios de T.

116. Demuestre que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(1,1) = (-1,1)$ $T(1,-1) = (1,1)$, no tiene ningún vector propio en $\mathbb{R}^2$.

117. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal cuya matriz en cierta base ordenada $\mathcal{B}$ es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Demuestre que T tiene vectores propios si y sólo si $(a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Demuestre que si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ entonces existe una base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ es una matriz diagonal.

118. Demuestre o refute lo siguiente: *Si $T : V \to V$ es operador lineal, entonces todo vector v distinto de cero (si hay) del núcleo de T es un vector propio de T.* (¿A qué valor(es) propios corresponden estos vecto(res) propios?)

119. Demuestre o refute lo siguiente: *Si $T : V \to V$ es operador lineal tal que rango$(T) = \dim(V)$, entonces todo valor propio de T es distinto de cero.*

120. Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Suponga que $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que T tiene n vectores propios linealmente independientes y para cual existe un número natural n tal que $T^n = 0$. Demuestre que $T = 0$.

121. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, donde $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Halle una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $(1,1)$ sea un vector propio de la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

122. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Demuestre que A tiene dos valores propios positivos y dos valores propios negativos.

123. Demuestre que la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1.00001 & 1 \\ 1.00001 & 1 & 1.00001 \\ 1 & 1.00001 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene un valor propio positivo y un valor propio negativo.

124. Sea A una matriz $n \times n$ Hermitiana que satisface $A^5 + A^3 + A = 3I_n$. Demuestre que $A = I$.

125. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ tal que $A^k = I_n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que A es diagonalizable.

Bibliografía

[1] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Segunda edición. Editorial Springer. Undergraduate text in mathematics. 1996.

[2] C. W. Curtis, *Linear Algebra*. New York: Springer, 1984.

[3] S. H. Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E., *Álgebra Lineal*. México: Publicaciones Cultural, 1982.

[4] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Lineal*. Bogotá: Prentice Hall Internacional, 1973.

[5] S. Lang, *Álgebra Lineal*. México: Sistemas Técnicos de Edición, 1986.

[6] K. Nomizu, *Fundamentals of Linear Algebra*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[7] H. A. Rincón, H. A., *Álgebra Lineal*. México: Las Prensas de Ciencias, 2002.