UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUCESIONES Y SERIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

GABRIEL GONZÁLEZ OSORNIO

Directora: M. en C. Emma Lam Osnaya

México, D.F. 2011

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
González
Osornio
56 75 95 68
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
085263578

2. Datos del Tutor
M. en C.
Emma
Lam
Osnaya

3. Sinodal 1
M. en C.
Elena
de Oteyza
de Oteyza

4. Sinodal 2
M. en C.
Agustín
Ontiveros
Pineda

5. Sinodal 3
Dr.
Carlos
Hernández
Garciadiego

6. Sinodal 4
Mat.
María Berenice
Mendoza
Gámez

7. Datos del trabajo escrito
Sucesiones y Series
102P
2011

Índice

Introducción

El presente trabajo es una breve presentación correspondiente al estudio del tema ***"Sucesiones y Series"***, está pensado principalmente como un instrumento de apoyo tanto a profesores como alumnos de nivel bachillerato, sin embargo, puede ser utilizado como una introducción al tema, para los alumnos de los primeros semestres de las carreras afines a las de matemáticas. Se ha buscado que sea una herramienta que permita a los alumnos conocer un poco más sobre un tema que debido al tiempo y al temario no se le puede dar el seguimiento que requiere, pero que es de suma importancia para sentar las bases de un buen desarrollo en el área de las matemáticas.

En el intento de lograr que el material sirva para los alumnos de nivel superior, se han incorporado las demostraciones de algunos de los resultados, en el entendido que en el bachillerato, las mismas no deben ser incluidas.

El trabajo se divide en dos partes, la primera está dedicada al estudio las sucesiones y la segunda al de las series.

En ambas partes, se encontrarán las definiciones de cada uno los conceptos con que se trabaja, así como demostraciones y ejemplos con el fin de tener una mejor comprensión. En algunos casos, se han elaborado gráficas buscando ser más explícitos, de tal modo que sea un trabajo en donde el estudiante pueda tener la información necesaria para un mejor aprovechamiento con conceptos, ejemplos y demostraciones.

La primera parte está dedicada a las sucesiones, en donde se define qué es una sucesión y se muestran ejemplos, también se establecen diferentes tipos de sucesiones, se analiza su convergencia o divergencia, y dedicamos varias páginas en busca de garantizar la convergencia o divergencia de una sucesión, con el uso de los criterios más importantes como lo son los de comparación, el de la razón, el de la raíz y otros.

En la segunda parte hacemos un estudio de las series. Se define una serie en términos de sus sumas parciales. Igualmente se definen las operaciones entre series. Teniendo como apoyo los conceptos vistos en la primera parte, de manera natural, puesto que las series son sucesiones, se aborda el tema de convergencia y divergencia de una serie, presentando los principales criterios de convergencia, entre los que se encuentran los de: comparación, del cociente, de la razón, de Rabee, etc.

Es importante destacar que presentar al alumno los conceptos de sucesiones y series de manera sencilla, le permiten iniciarse en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que representa uno de los primeros acercamientos con las demostraciones matemáticas. Para lograr que el paso a la formalidad y rigor matemático sea menos agresivo, es importante contar con material de apoyo que le permita adentrarse en el conocimiento, desarrollando adicionalmente, las habilidades que requerirá durante el curso de la carrera que elija.

Sucesiones

El primer contacto que tenemos con el tema de sucesiones lo obtenemos de manera relativamente formal en un curso de Cálculo cuando se trabajan los conceptos de progresión aritmética y progresión geométrica, en ese momento la idea que tenemos de una sucesión es la de un conjunto infinito de valores que presentan características especiales.

Para el caso de una progresión aritmética, cada término, es decir, cada valor de la misma, se va obteniendo sumándole al anterior una constante a la que se conoce como diferencia "d", por ejemplo:

En la progresión $\{7, 4, 1, -2, -5, \ldots\}$, cada término de la progresión se ha designado de la siguiente manera:

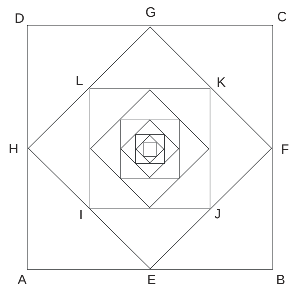
$$\begin{aligned}
&a_1 = 7 \\
&a_2 = 4 = a_1 + d \\
&a_3 = 1 = a_2 + d \\
&\vdots \\
&a_n = a_{n-1} + d
\end{aligned}$$

El primer término de la progresión es a_1, no es difícil ver que el valor de la diferencia es la constante –3. El n-ésimo término se denota por a_n.

En una progresión geométrica cada término se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante "r" llamada razón.

Ejemplo:

Consideremos el cuadrado $ABCD$ que tiene 4 cm de lado. Construimos una colección de cuadrados, de manera que los puntos medios de los lados del primero sean los vértices del segundo; los puntos medios del segundo sean los vértices del tercero y así sucesivamente como se muestra en la figura.



Como el lado del cuadrado $ABCD$ es de 4 cm, entonces el área del triángulo AEH es

$$A = \frac{2(2)}{2} = 2\ cm^2,$$

y la suma de las áreas de los triángulos

$$AEH + EBF + GFC + GDH = 8\ cm^2.$$

Notemos que el lado del cuadrado $EFGH$ mide $2\sqrt{2}$ (**Teorema de Pitágoras**). Por tanto, el área del triángulo IEJ es

$$A = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1\ cm^2.$$

De esta forma la suma de las áreas de los triángulos

$$IEJ + JFK + KGL + LHI = 4\ cm^2.$$

Por lo que si iteramos el proceso con la suma de las áreas de los triángulos que se forman con los puntos medios obtenemos la progresión geométrica $\left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$ donde cada término se designa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 8\\
&a_2 = 4 = a_1(r)\\
&a_3 = 2 = a_2(r)\\
&\vdots\\
&a_n = a_{n-1}(r)
\end{aligned}$$

Vemos que el primer término de la progresión geométrica es a_1, y la razón es $\frac{1}{2}$, así como el n-ésimo término está dado por a_n.

Las progresiones anteriores son ejemplos de sucesiones a las que se conoce como recurrentes o definidas inductivamente y que trataremos más adelante.

De la discusión anterior tenemos una primera noción de lo que será una sucesión, hasta aquí la pensamos como una colección de números reales de manera que cada uno de ellos está asociado a un número natural.

Podemos dar una definición formal de una sucesión si observamos la relación entre la notación de subíndices y los valores obtenidos.

Definición: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función, llamamos a la función f una sucesión, y la denotaremos abreviadamente como:

$$f(\mathbb{N}) = \{f(n); n \in \mathbb{N}\}$$

Denotamos por a_n a la imagen bajo f del número natural n, así:

$$f(n) = a_n.$$

Para referirnos a la función f, escribimos brevemente:

$$f(n) = a_n \text{ o simplemente } \{a_n\}.$$

Así, una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y la imagen un subconjunto de los reales: al número natural n lo asociamos con el n-ésimo elemento o término de la sucesión.

Ejemplos:

1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=n$.

La sucesión es: $\{a_n\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\dfrac{1}{n}$.

La sucesión es: $\{a_n\}=\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$

3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=(-1)^n$.

La sucesión es: $\{a_n\}=\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$

Hay sucesiones que presentan ciertas características, de acuerdo a ellas reciben nombres especiales:

Definición: Sea $\{a_n\}$ una sucesión, decimos que:

I. $\{a_n\}$ es estrictamente creciente si: $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

II. $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente si: $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

III. $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

IV. $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

V. $\{a_n\}$ es acotada, si existen M, $m \in \mathbb{R}$, tales que $m \leq a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1:

$\{a_n\}$ es acotada $\Leftrightarrow \exists\ M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Leftarrow$) $|a_n| \leq M$ implica $-M \leq a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces a_n es acotada.

$\Rightarrow$) a_n está acotada, $\Rightarrow \exists\ K, k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq a_n \leq K$.

Sea $M = \max\{\,|k|,\ |K|\,\}$ esto implica que $a_n \leq K \leq |K| \leq M$.

Por otro lado $-k \leq |k| \leq M$

$$a_n - k \le a_n + |k| \le M + a_n$$

y $\quad a_n - k \ge 0$,

es decir, $\quad 0 \le a_n + M$,

entonces $\quad -M \le a_n$.

Por tanto, $\quad -M \le a_n \le M$.

Ejemplos:

1) Probar que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es estrictamente decreciente.

Llamamos $a_n = \frac{1}{n}$.

Sabemos que para n en los naturales $\quad n < n+1$

entonces $\quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

de donde $\quad a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es estrictamente decreciente.

2) Probar que la sucesión $\left\{2^n\right\}$ es estrictamente creciente y no acotada superiormente.

Sabemos que $\quad 1 < 2$

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\quad (2^n)1 < (2^n)2$

de donde $\quad 2^n < 2^{n+1}$.

Por tanto, la sucesión $\left\{2^n\right\}$ es estrictamente creciente.

Demostraremos que $2^n > n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Por inducción:

$$2^1 > 1$$

Se cumple para $n = 1$.

Suponemos cierto para $n = k$, es decir,

$$2^k > k$$

Por demostrar que el resultado es válido para $n = k+1$

Por hipótesis sabemos que

$$2^k > k \quad \Rightarrow$$
$$2^k \cdot 2 > 2 \cdot k \quad \Rightarrow$$
$$2^{k+1} > k + k \geq k+1$$

Por lo tanto $\qquad 2^n > n$.

Supongamos ahora que la sucesión es acotada superiormente, es decir, existe $M > 0$ tal que $2^n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $M \geq 2^n > n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que M es una cota superior del conjunto de los números naturales, lo cual es una contradicción.

Por tanto, la sucesión $\left\{2^n\right\}$ no es acotada superiormente.

3) Probar que la sucesión $\left\{n + (-1)^n\right\}$ no es creciente ni decreciente.

Llamamos $a_n = n + (-1)^n$.

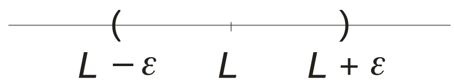
No es creciente pues $\qquad a_2 = 3 > a_3 = 2$

y no es decreciente ya que $\qquad a_1 = 0 < a_2 = 3$.

Convergencia de Sucesiones

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ converge a un número real L si: para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ y en ese caso escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$



Ejemplos:

1) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Por demostrar para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Observemos que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, de esta forma $n \geq n_0$, implica que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, es decir, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, pero sabemos que $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$.

Por tanto, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

2) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Por demostrar para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Sea $n \geq n_0$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$, además como $2^n > n$, implica $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, entonces tenemos que, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, de donde $\left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

3) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Por demostrar para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| &= \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, de esta forma si $n \geq n_0$,

se tiene que $n+1 > n_0$, lo cual implica que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, es decir,

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Por tanto, $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

4) Probar que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) = 1$.

Por demostrar para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left| 1 + \frac{3}{n} - 1 \right| < \varepsilon$.

Observemos que $\left| 1 + \frac{3}{n} - 1 \right| = \left| \frac{3}{n} \right| = \frac{3}{n}$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$ de esta forma, si $n \geq n_0$ se tiene que:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(3)\frac{1}{n} < (3)\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{3}{n} < \varepsilon$$

pero sabemos que $\frac{3}{n} = \left| 1 + \frac{3}{n} - 1 \right|$.

Por tanto, $\left|1+\frac{3}{n}-1\right|<\varepsilon$ si $n \geq n_0$.

Teorema 2:

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales que convergen a a y b respectivamente entonces:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$. Si $b_n\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$

Demostración:

Por hipótesis sabemos que para todo $\varepsilon>0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n\geq N_1$, entonces $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, tal que si $n\geq N_2$, entonces $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, si $N_0=\max\{N_{1,}\ N_2\}$, se deduce que, para todo $n\geq N_0$, se tiene:

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|$$

y por la desigualdad del triángulo,

$$|(a_n-a)+(b_n-b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ .$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

Por hipótesis sabemos que para todo $\varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N_1$, entonces, $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N_2$, entonces $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

.

Por lo tanto, si $N_0 = \max\{N_{1,}\ N_2\}$, se deduce que, para todo $n \geq N_0$, se tiene:

$$\left|(a_n - b_n) - (a - b)\right| = \left|(a_n - a) + (b - b_n)\right|$$

y por desigualdad del triángulo,

$$\left|(a_n - a) + (b - b_n)\right| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Por demostrar para todo ε >0 $\exists$ N_0 $\in$ $\mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
|\ a_n b_n - ab\ | &= |\ (a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)\ | \\
&\leq |\ a_n b_n - a_n b\ | + |\ a_n b - ab\ | \\
&= |\ a_n (b_n - b)\ | + |\ b(a_n - a)\ | \\
&= |\ a_n\ |\ |\ b_n - b\ | + |\ b\ |\ |\ a_n - a\ | \\
|\ a_n b_n - ab\ | &\leq |\ a_n\ |\ |\ b_n - b\ | + |\ b\ |\ |\ a_n - a\ |
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, por el **Teorema 7**, que probaremos más adelante, podemos encontrar $M_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n| \leq M_1$, así que si definimos $M = \max\{M_{1,} |b|\}$, tenemos:

$$|a_n b_n - ab| \leq M\,|b_n - b| + M\,|a_n - a|.$$

Como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen, para todo $\varepsilon > 0 \ \exists \ N_1$ y N_2, tal que para todo $n \geq N_1$, tenemos $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ y para todo $n \geq N_2$, tenemos $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Definimos $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N_0$ de se tiene:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq M\,|b_n - b| + M\,|a_n - a| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

De manera particular podemos establecer que:

$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$, con $c \in \mathbb{R}$.

Sea $\{b_n\} = \{c\}$, y por el inciso anterior se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$.

Por el inciso iii), basta demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tenemos que para $\varepsilon_1 = \dfrac{|b|}{2} > 0 \ \exists \ \mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N_1$, $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$.

Notemos que $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ da como resultado que $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{2}{|b|}$, pues

$$|b|-|b_n| \le |b-b_n| = |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$|b|-|b_n| < \frac{|b|}{2}$$

$$|b|-\frac{|b|}{2} < |b_n|$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n|$$

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \text{...} (1)$$

Por otro lado sabemos que para $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon |b|^2}{2} > 0 \; \exists \, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \ge N_2$, $|b_n - b| < \varepsilon_2$ ....(2)

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces se tiene $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \le \frac{\frac{\varepsilon |b|^2}{2}}{|b_n||b|}$

por (2) y $\frac{\frac{\varepsilon |b|^2}{2}}{|b_n||b|} = \frac{1}{|b_n|}\frac{\frac{\varepsilon |b|^2}{2}}{|b|} < \frac{2}{|b|}\frac{\frac{\varepsilon |b|^2}{2}}{|b|} = \frac{\varepsilon |b|^2}{|b|^2} = \varepsilon$ por (1), se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ y por el inciso iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \frac{1}{b_n}\right) = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Definición: Toda sucesión que no es convergente, diremos que es divergente, entre ellas distinguiremos las que divergen a ∞ o a $-\infty$.

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ diverge a ∞ cuando n tiende a ∞ si para cada $M > 0 \, \exists \; n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$ entonces $a_n > M$, y lo denotamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ diverge a -∞ cuando n tiende a ∞ si para cada $M > 0 \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n < -M$, y lo denotamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Ejemplos:

1) Probar que $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Demostración:

Para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > M$, entonces si $n \geq n_0$ tenemos $n > M$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

2) Probar que si $a_n = nb$, entonces:

a) Si $b > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

b) Si $b < 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

a) **Demostración:**

Sea $M > 0$ y supongamos $b > 0$.

Por demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $nb > M$.

Sea $n_0 > \frac{M}{b} > 0$, $n \geq n_0 > \frac{M}{b}$

$n > \frac{M}{b}$, lo cual implica $nb > M$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, si $b > 0$.

b) **Demostración:**

Sea $M>0$ y supongamos $b<0$.

Por demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $nb<-M$.

Sea $n_0 > -\dfrac{M}{b} > 0$, $n \geq n_0 > -\dfrac{M}{b}$, entonces

$n > -\dfrac{M}{b} \Rightarrow nb < -M$.

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si $b<0$.

Teorema 3:

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} \infty & si\ c>0 \\ -\infty & si\ c<0 \end{cases}$$

Demostración:

Por demostrar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, si $c>0$, es decir:

Para cada $M>0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n>N$ entonces $a_n b_n > M$.

En efecto: como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Para cualquier $0<\varepsilon<c$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n>N_1$, entonces:

$$\left| a_n - c \right| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$$
$$c-\varepsilon < a_n < \varepsilon + c$$
$$c-\varepsilon < a_n$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces dado $M' > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$ entonces $b_n > M'$.

Sea $M' = \dfrac{M}{c-\varepsilon} > 0$ y

$N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n > N$ entonces $n > N_1$ y $n > N_2$ y

$$a_n > c - \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$a_n b_n > (c-\varepsilon) b_n > M'(c-\varepsilon) = \frac{M}{c-\varepsilon}(c-\varepsilon) = M.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Por demostrar $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$, si $c < 0$, es decir:

Para cada $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $a_n b_n < -M$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Para cualquier $0 < \varepsilon < -c$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ entonces

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < a_n < \varepsilon + c < 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces dado $M' > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$ entonces $b_n > M'$.

Sea $M' = \dfrac{M}{-(\varepsilon + c)} > 0$ y

$N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n > N$ entonces $n > N_1$ y $n > N_2$ y

$$a_n < \varepsilon + c$$

$$a_n b_n < (\varepsilon + c) b_n < (\varepsilon + c) M' = (\varepsilon + c)\frac{M}{-(\varepsilon + c)} = -M.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

Lema: $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^m} = 0.$

Demostración:

Lo haremos por Inducción sobre m, ya que nos interesa demostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$ cuando n tiende a infinito, el $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^m} = 0$

- Para $m = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} &= \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\ &= c \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

- Suponemos cierto para $m = k$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0 .$$

- Por demostrar que el resultado es válido para $m = k+1$, es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^{k+1}} &= 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k \cdot n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} \cdot \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Por hipótesis sabemos $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^m}=0.$

Teorema 4:

Consideremos la sucesión $a_n=\frac{c_pn^p+c_{p-1}n^{p-1}+c_{p-2}n^{p-2}+\cdots+c_0}{d_qn^q+d_{q-1}n^{q-1}+d_{q-2}n^{q-2}+\cdots+d_0}$ con $c_p\neq 0$ y $d_q\neq 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\frac{c_p}{d_q} & si\ \ p=q\\ \infty & si\ \ p>q\ \ y\ \ \frac{c_p}{d_q}>0\\ \text{-}\infty & si\ \ p>q\ \ y\ \ \frac{c_p}{d_q}<0\\ 0 & si\ \ p<q\end{cases}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{c_pn^p+c_{p-1}n^{p-1}+c_{p-2}n^{p-2}+\cdots+c_0}{d_qn^q+d_{q-1}n^{q-1}+d_{q-2}n^{q-2}+\cdots+d_0}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p\left(c_p+c_{p-1}n^{-1}+c_{p-2}n^{-2}+\cdots+c_0n^{-p}\right)}{n^q\left(d_q+d_{q-1}n^{-1}+d_{q-2}n^{-2}+\cdots+d_0n^{-q}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}n^{p-q}\left[\frac{\left(c_p+c_{p-1}n^{-1}+c_{p-2}n^{-2}+\cdots+c_0n^{-p}\right)}{\left(d_q+d_{q-1}n^{-1}+d_{q-2}n^{-2}+\cdots+d_0n^{-q}\right)}\right]\end{aligned}$$

Caso 1. $p = q \Rightarrow p - q = 0$ de donde

$$= \lim_{n\to\infty} n^{p-q} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\left(c_p + c_{p-1}n^{-1} + c_{p-2}n^{-2} + \cdots + c_0 n^{-p}\right)}{\left(d_q + d_{q-1}n^{-1} + d_{q-2}n^{-2} + \cdots + d_0 n^{-q}\right)} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{0} \cdot \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_p + \lim\limits_{n\to\infty} c_{p-1}n^{-1} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{p-2}n^{-2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} c_0 n^{-p}}{\lim\limits_{n\to\infty} d_q + \lim\limits_{n\to\infty} d_{q-1}n^{-1} + \lim\limits_{n\to\infty} d_{q-2}n^{-2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} d_0 n^{-q}} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_p + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{p-1}}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{p-2}}{n^2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_0}{n^p}}{\lim\limits_{n\to\infty} d_q + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{q-1}}{n^1} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{q-2}}{n^2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_0}{n^q}} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 . \frac{c_p}{d_q}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{c_p}{d_q} = \frac{c_p}{d_q}.$$

Caso 2. $p > q \Rightarrow p - q > 0$ por lo que

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q} = \infty$, además, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{\left(c_p + c_{p-1}n^{-1} + c_{p-2}n^{-2} + \cdots + c_0 n^{-p}\right)}{\left(d_q + d_{q-1}n^{-1} + d_{q-2}n^{-2} + \cdots + d_0 n^{-q}\right)} \right] = \frac{c_p}{d_q} > 0$.

Usando el **Teorema 3** se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{p-q} \left[\frac{\left(c_p + c_{p-1}n^{-1} + c_{p-2}n^{-2} + \cdots + c_0 n^{-p}\right)}{\left(d_q + d_{q-1}n^{-1} + d_{q-2}n^{-2} + \cdots + d_0 n^{-q}\right)} \right] = \infty$$

Caso 3. $p > q \Rightarrow p - q > 0$ y $\frac{c_p}{d_q} < 0$

Usando el **Teorema 3** nuevamente se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{p-q}\left[\frac{\left(c_p + c_{p-1}n^{-1} + c_{p-2}n^{-2} + \cdots + c_0 n^{-p}\right)}{\left(d_q + d_{q-1}n^{-1} + d_{q-2}n^{-2} + \cdots + d_0 n^{-q}\right)}\right] = -\infty$$

Caso 4. $p < q \Rightarrow p - q < 0$ de donde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{c_p}{d_q}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{q-p}}\frac{c_p}{d_q}$$

y como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{q-p}} = 0$,

entonces $\lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{c_p}{d_q} = 0.$

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+3}{3n^2-2n-7}$

Demostración:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n^2+5n+3}{3n^2-2n-7} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+3}{3n^2-2n-7} = \frac{1}{3}$.

2) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+3n+3}{2n^4-5n^2+4}$

Demostración:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+3n+3}{2n^4-5n^2+4}=$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)=0.$$

3) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-7n^2+2n-6}{4n^3-7}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-7n^2+2n-6}{4n^3-7}=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

y como $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$ y $\frac{3}{4}>0$ por el **Teorema 3** $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3}{4}\right)=\infty$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-7n^2+2n-6}{4n^3-7}=\infty$.

4) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^4+5n^3}{-2n^4-7n^2+3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^4+5n^3}{-2n^4-7n^2+3}=\lim_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)$$

como $\lim_{n\to\infty}n=\infty$ y $-\frac{1}{2}<0$ por el **Teorema 3**

$$\lim_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)=-\infty.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^4+5n^3}{-2n^4-7n^2+3}=-\infty$.

Criterios de Convergencia

Es importante mencionar que algunas sucesiones presentan ciertas dificultades para determinar su convergencia de manera directa o usando los resultados demostrados previamente, por esta razón se recurre a criterios que determinan la convergencia, sin embargo, en muchos casos, al aplicarlos podemos establecerla pero sin saber cuál es el valor del límite.

Teorema 5: (Criterio del Sandwich):

Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones tales que:

i) Para todo $n \geq N$ se cumple: $a_n \leq b_n \leq c_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Demostración:

Por demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|b_n - L| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_1$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$, esto es si $n \geq n_1$, entonces $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

También existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$, entonces $|c_n - L| < \varepsilon$ esto es $n \geq n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$.

Además $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2, N\}$ entonces, si $n \geq n_0$

$L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon$, es decir, $L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$, entonces $|\, b_n - L| < \varepsilon$.

Ejemplos:

1) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

Sabemos que $-1 \le (-1)^n \le 1$

$$0 \le (-1)^n + 1 \le 2$$

$$0 \le \frac{(-1)^n + 1}{n} \le \frac{2}{n}.$$

Y como $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, se tiene que, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

2) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Observemos que $\frac{\ln n}{n} = \frac{2 \ln n^{\frac{1}{2}}}{n}$, y consideremos a la sucesión $a_n = \frac{\ln n^{\frac{1}{2}}}{n}$.

Demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración:

Consideremos la función $f(x) = x - \ln x$ la cual es creciente para todo $x \in [1,\infty)$, pues $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ para $x \in (1,\infty)$.

En particular, si $1 < x$, entonces $f(1) < f(x)$, es decir,

$$1 - \ln 1 < x - \ln x$$

$$1 < x - \ln x$$

$$\ln x < x - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora, $n \geq 1$, entonces $\sqrt{n} \geq 1$ y como la función $f(x) = \ln x$ es creciente, se tiene:

$$\ln 1 \leq \ln n^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\ln 1}{n} \leq \frac{\ln n^{\frac{1}{2}}}{n} \text{ para todo } n > 1$$

Usando (1)

$$0 < \frac{\ln n^{\frac{1}{2}}}{n} \leq \frac{n^{\frac{1}{2}} - 1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{n} \text{ para todo } n > 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Usando el criterio del **sandwich** tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^{\frac{1}{2}}}{n} = 0 \quad .$$

de donde $\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n^{\frac{1}{2}}}{n} = 0$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$.

3) Probar $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Tomemos

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{n!}{n^n} &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= 1 \cdot \left[\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{2}{n} \right] \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Pero $\frac{k}{n} \le 1$ para $2 < k \le n-1$, entonces

$$\frac{n!}{n^n} \le 1 \cdot \left[(1) \cdot (1) \cdots (1) \right] \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$, por lo tanto,

$$0 \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}.$$

Y como $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

El siguiente lema se utilizará como una herramienta para demostrar el **Teorema 6.**

Lema: Si $h > 0$, entonces $(1+h)^n \ge 1 + nh$.

Demostración:

Haremos la demostración por inducción.

Para $n = 1$: $1 + h \ge 1 + h$

Suponemos cierto para $n = k$, es decir, $(1+h)^k \ge 1 + kh$

Por demostrar que la desigualdad es cierta para $n = k+1$, es decir,

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$$

Como $h > 0$, entonces $1+h > 0$, por hipótesis de inducción sabemos que

$(1+h)^k \geq 1+kh$ por lo que

$$(1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h)$$

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+h+kh+kh^2 = 1+h(1+k)+kh^2 \geq 1+(k+1)h$$

Por tanto, $(1+h)^n \geq 1+nh$.

4) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Notemos que la convergencia de esta sucesión ya la hemos demostrado por medio de la definición, ahora lo haremos usando el **Teorema 5**.

Sabemos que $2^n > n$

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

y como $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente Teorema, cuando $a = \frac{1}{2}$.

Teorema 6:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \text{ con } 0 < a < 1.$$

Demostración:

Como $0<a<1$, se tiene que $\frac{1}{a}>1$, entonces $\frac{1}{a}=1+h$ para algún $h>0$.

Y como $\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=(1+h)^n\geq 1+nh$, por el lema anterior se tiene $\frac{1}{a^n}\geq 1+nh>nh$, de donde $0<a^n\leq\frac{1}{nh}$.

Y por el **Teorema 5**, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

Ahora demostraremos el resultado que se utilizó en el inciso iii) del Teorema 2.

Teorema 7:

Si $\{a_n\}$ es convergente entonces $\{a_n\}$ está acotada.

Demostración:

Como $\{a_n\}$ es convergente entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ y se cumple que para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$, entonces $|a_n-a|<\varepsilon$.

Sea $\varepsilon=1$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$, entonces $|a_n-a|<1$, pero sabemos que $|a_n|-|a|\leq|a_n-a|$ entonces $|a_n|<1+|a|$ si $n\geq n_0$.

Sea $M=\max\left\{1+|a|,|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_{n_0-1}|\right\}$, con lo que $|a_n|\leq M$ para todo n.

Por tanto, $\{a_n\}$ es acotada.

Observación importante: Debemos señalar que el recíproco no siempre se cumple, es decir, si una sucesión es acotada, no necesariamente converge.

Es importante señalar que este Teorema se puede utilizar como un criterio de divergencia, es decir, si una sucesión no es acotada, entonces no es convergente.

Ejemplo:

Sea $\{ a_n \} = (-1)^n$, la cual está acotada por $M = 2$, ya que

$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow | a_n | < 2$, y sin embargo a_n no converge.

Por demostrar que $\{(-1)^n\}$ es divergente.

Demostración:

Por demostrar que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq \alpha$ para todo α en los reales.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, llamamos $J_0 = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, entonces 1 y -1 no pertenecen a J_0, pues si ambos pertenecieran a J_0, la longitud de $J_0 > 2$, por lo tanto no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = (-1)^n \in J_0$, es decir, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq \alpha$.

Ejemplos:

1) Probar que $\{ a_n \} = \{2^n\}$ no converge.

Demostración:

Supongamos $\{2^n\}$ es acotada, esto es, existe

$M > 0$ tal que $|2^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $2^n \leq M$, lo cual es una contradicción, pues sabemos que $n < 2^n$ y eso implicaría que el conjunto de los naturales está acotado superiormente.

Por tanto, $\{2^n\}$ no es acotada, y por el **Teorema 7** anterior, $\{2^n\}$ no converge.

Cabe mencionar que ya se había demostrado utilizando el **Teorema 1,** pero de manera más práctica se usó este teorema.

2) Probar que $a_n = (-1)^n n$ no converge.

Por demostrar que $\{a_n\}$ no es acotada.

Supongamos que sí lo es, entonces existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $|(-1)^n n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $|(-1)^n n| = n < M$, lo cual implica $n \leq M$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\{a_n\}$ no es acotada, y por el **Teorema 7**, diverge.

3) Probar que si $a > 1$, entonces $\{a^n\}$ no converge.

Demostración:

Como $a > 1$, entonces existe $b > 0$, tal que $a = 1 + b$, entonces $a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > 0$.

Supongamos que $\{a^n\}$ converge, esto implica que $\{a^n\}$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| \leq M$, entonces $1+nb \leq \left| a^n \right| \leq M$, de así $1+nb \leq M$, de donde $nb \leq M-1$, lo que implica $n \leq \dfrac{M-1}{b}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\left\{a^n\right\}$ no converge.

Teorema 8:

Sea $\left\{a_n\right\}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 .$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > n_0$ entonces $a_n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \dfrac{1}{a_n} \Leftrightarrow \left| \dfrac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon.$

Por tanto, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Ejemplo:

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = \infty$.

Demostración:

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{n!}{n^n}} = \infty,$$

por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$.

En ocasiones es difícil determinar la convergencia o divergencia de una sucesión. El siguiente teorema nos permite establecer la divergencia, comparándola con otra cuyo comportamiento conocemos.

Teorema 9 (Criterio de Comparación)

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supóngase que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le b_n$ para todo $n \ge n_0$, entonces

i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demostración:

i) Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, para todo $M>0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_1$, entonces $a_n > M$.

Pero como $a_n \le b_n$ si $n \ge n_0$, tomamos $N = \text{máx}\ \{n_0,\ n_1\}$ entonces se tiene $b_n > M$ para todo $n \ge N$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

ii) Como $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, para todo $M>0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_1$, entonces $b_n < -M$, pero como $a_n \le b_n$ si $n \ge n_0$, tomamos $N = \max\{n_0, n_1\}$ así que, para todo $n \ge N$, $a_n \le b_n \le -M$, entonces $a_n \le -M$, por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Ejemplos:

1) Probar que $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$.

Demostración:

Sean $a_n = n$ y $b_n = n!$.

Sabemos que $n \leq n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces, $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$.

2) Probar que $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

Primero probaremos que para todo $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \leq e^x$.

Demostración:

Sea $f(x) = -x + e^x$, derivando

$f'(x) = -1 + e^x \geq 0 \;\; \forall\, x \geq 0$, entonces

$f(x)$ es creciente, y además observemos que

$f(x) \geq f(0)$.

Así, si $x \geq 0$, se tiene

$-x + e^x \geq -0 + e^0$

$-x + e^x \geq 1$

así que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq e^n$

y como $\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

Teorema 10 (Criterio de la Razón):

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, entonces

i) Si $L<1$ entonces la sucesión a_n converge a cero.

ii) Si $L>1$ entonces la sucesión a_n diverge a infinito.

iii) Si $L=1$ entonces no se tiene información.

Demostración:

i) Como $L<1$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $0\le L<b<1$.

Sea $\varepsilon=b-L>0$ entonces $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que si $n\ge N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\varepsilon$.

Si $n\ge N$ entonces $-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L<\varepsilon$

$$\Rightarrow -\varepsilon+L<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\varepsilon+L$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<b \text{ si } n\ge N$$

si $n=N \Rightarrow a_{N+1}<ba_N$

si $n=N+1 \Rightarrow a_{N+2}<ba_{N+1}<b^2a_N$

si $n=N+2 \Rightarrow a_{N+3}<ba_{N+2}<b^3a_N$

$$\vdots$$

$$a_{N+k}<b^k a_N$$

si $n\ge N$ $n=N+k$, entonces

$$a_n<b^{n-N}a_N=\frac{b^n}{b^N}a^N$$

Sea $c = \dfrac{a_N}{b^N}$, entonces por el **Teorema 6** $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ y por el **Teorema 1**, $\{a_n\}$ es acotada $\Leftrightarrow \exists\, M > 0$ tal que $|a_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) Sea $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, notemos que $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Por lo que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{L} < 1$, y por i) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ahora como $\{b_n\}$ converge a cero, entonces $\{a_n\}$ diverge a infinito (**Teorema 8**).

A continuación veremos dos ejemplos de sucesiones, una convergente y otra divergente para las cuales $L = 1$, es decir, en ese caso, no se tiene información.

iii) Sea $a_n = \dfrac{1}{n}$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Sea $b_n = n$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ y:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

sin embargo $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, el criterio no da información.

El teorema anterior se usa en los casos en los que el límite del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es fácil de calcular.

Ejemplos:

1) Probar que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

Demostración:

Como $a_n=\frac{1}{n!}$ entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$=\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{n!}{(n+1)n!}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

2) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$.

Sea $a_n = \frac{3^n}{2^n}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{3^n}{2^n}} = \frac{(2^n)(3^{n+1})}{(2^{n+1})(3^n)} = \frac{3}{2}$$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} > 1.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$.

Teorema 11 (Criterio de la Raíz)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, entonces

i) Si $L < 1$ entonces la sucesión a_n converge a cero.

ii) Si $L > 1$ entonces la sucesión a_n diverge a infinito.

iii) Si $L = 1$ entonces no hay información.

Demostración:

i) Como $L < 1$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq L < b < 1$.

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Sea $\varepsilon = b - L > 0$ entonces $\exists$ N ϵ $\mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, de donde $\left| \sqrt[n]{a_n} - L \right| < \varepsilon$.

Si $n \geq N$ entonces $-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - L < \varepsilon$

$$-\varepsilon + L < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + L$$

$$2L-b<\sqrt[n]{a_n}<b\,.$$

Si $n\geq N$ entonces $0<\sqrt[n]{a_n}<b$ $\Rightarrow 0<a_n<b^n$ y como $b<1$, por el **Teorema 6** $\lim_{n\to\infty} b^n=0$.

Y por el **Teorema 5** $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

ii) Sea $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ entonces $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\dfrac{1}{L}<1$, por i) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.

Ahora como $\{b_n\}$ converge a cero, entonces $\{a_n\}$ diverge a infinito **(Teorema 8).**

Al igual que en el criterio de la Razón veremos dos ejemplos de sucesiones, una convergente y la otra divergente para las cuales $L=1$.

iii) Sea $a_n=n$.

Por lo que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$.

Notemos que $n^{\frac{1}{n}}=e^{ln(n)^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{1}{n}ln(n)}=e^{\frac{ln(n)}{n}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}&=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{ln(n)}{n}}\\&=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n}}\,.\\ e^0&=1\end{aligned}$$

Y sabemos que $\lim_{n\to\infty} n=\infty$.

Sea $b_n=\dfrac{1}{n}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$ y por ejercicio anterior $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$

Pero $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$, el criterio no da información.

El teorema anterior es útil para analizar la convergencia de sucesiones que contienen potencias n-ésimas

Ejemplos:

1) Probar que la sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge a cero. Obsérvese que por el **Teorema 6**, se conoce el resultado, no obstante, lo verificaremos usando el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

2) Probar que la sucesión $a_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ diverge.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n} = 2>1.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n = \infty$.

Como hemos visto, para la convergencia no es suficiente que la sucesión sea acotada; los siguientes dos Teoremas, dan una condición suficiente para ello.

Teorema 12

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y acotada superiormente entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\ \{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$

Demostración:

1) Si $\{a_n\}$ es creciente entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$.

2) Si $\{a_n\}$ es acotada superiormente entonces existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, notemos que $A \ne \phi$, como A está acotado superiormente entonces existe el supremo de A, a quien denotamos como α, es decir, $\alpha = \sup A$.

Afirmación: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Demostración:

Como $\alpha = \sup A$, $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de A, y se tiene que existe $a_{n_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ si $n \geq n_0$, como $\{a_n\}$ es creciente, $a_{n_0} < a_n$ de donde $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} < a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$ entonces $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

Por tanto la sucesión es convergente.

1) Probar que $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1$ usando el **Teorema 12**.

Sea $a_n = \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$.

Por demostrar que a_n es creciente y $\sup\left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\} = 1$

a_n creciente.

Por demostrar $a_n < a_{n+1}$, es decir, $1 - \frac{\sqrt{2}}{n} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Sabemos que $n+1 > n \Rightarrow \frac{n+1}{\sqrt{2}} > \frac{n}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{n} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{n+1} > -\frac{\sqrt{2}}{n}$

$\Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{n+1} > 1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$.

Afirmación: Sup $\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}=1$.

Notemos que 1 es cota superior pues $1>1-\frac{\sqrt{2}}{n}$ para todo $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$.

Supongamos que existe $\lambda\ \epsilon\ \mathbb{R}$ tal que $0<\lambda<1$ y λ es cota superior. Como $\frac{\sqrt{2}}{1-\lambda}>0$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>\frac{\sqrt{2}}{1-\lambda}$, así por el principio arquimediano, $\frac{n}{\sqrt{2}}>\frac{1}{1-\lambda}$, lo cual implica que, $\frac{\sqrt{2}}{n}<1-\lambda$, de donde, $\lambda<1-\frac{\sqrt{2}}{n}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\sup\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}=1$.

Y por **Teorema 12** $\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{\sqrt{2}}{n}=1$.

Teorema 13

Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente y acotada inferiormente entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\ \{a_n;\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}\}$.

Demostración:

1) Si $\{a_n\}$ es decreciente entonces para todo $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$, $a_n>a_{n+1}$.

2) Si $\{a_n\}$ es acotada inferiormente entonces existe $m\ \epsilon\ \mathbb{R}$, tal que $m\leq a_n$ para todo $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$.

Sea $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$, notemos que $A\neq\phi$, como A está acotado inferiormente entonces existe el ínfimo de A, a quien denotamos como β, es decir, $\beta=\inf A$.

Afirmación: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\beta$.

Como, $\beta=\inf A$, $\beta+\varepsilon$ no es cota inferior de A, y se tiene que existe $a_{n_0}\in A$ tal que $\beta+\varepsilon>a_{n_0}$ como $\{a_n\}$ es decreciente, si $n\geq n_0$, entonces, $a_{n_0}>a_n$ de donde $\beta-\varepsilon<\beta\leq a_n<a_{n_0}<\beta+\varepsilon$ entonces $|a_n-\beta|<\varepsilon$ si $n\geq n_0$.

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\beta$.

Por tanto la sucesión es convergente.

1) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ usando el **Teorema 13**.

Sea $a_n=\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$. P.d. que a_n es decreciente y inf $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}};n\in\mathbb{N}\right\}=0$.

a_n decreciente. P.d. $a_n>a_{n+1}$, es decir, $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

Sabemos que $n<n+1\Rightarrow\sqrt{n}<\sqrt{n+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow a_n>a_{n+1}$.

Afirmación: inf $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}};n\in\mathbb{N}\right\}=0$.

Podemos ver que 0 es cota inferior, es decir, $0\leq a_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por demostrar que 0 es la máxima cota inferior. Supongamos que no lo es.

Existe $\lambda>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que λ es cota inferior, es decir, $\lambda<a_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por el principio arquimediano existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal

que $n_0 > \frac{1}{\lambda^2}$, de donde, $\sqrt{n_0} > \frac{1}{\lambda}$, es decir, $\lambda > a_{n_0}$, lo cual implica una contradicción.

Por tanto, 0 es inf $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}; n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

Y por **Teorema 13** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Teorema 14

Sea $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in (a,b)$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos en (a,b) tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Demostración:

Por demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como f es continua en x_0, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a,b)$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, entonces dado $\varepsilon_1 = \delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - x_0| < \varepsilon_1 = \delta$. Además tenemos que $a_n \in (a,b)$.

De donde, si $n > n_0$ entonces $|a_n - x_0| < \delta$ y como $a_n \in (a,b)$ se tiene $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

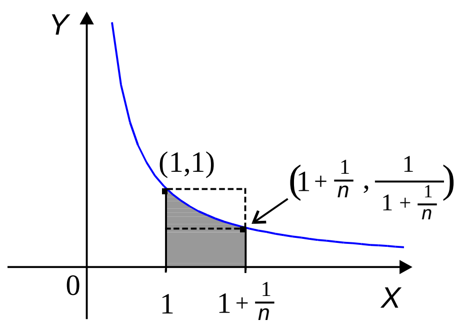
Por tanto, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Ejemplo:

Probar que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Sea $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Sabemos que si $a \geq 1$, entonces $\ln a$ es igual al área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x}$, el eje X y la recta $x=1$ y $x=a$.



Entonces tenemos que $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}(1)$ para $n \geq 1$, tomando en cuenta las áreas que aparecen en la figura anterior.

Pero notemos que $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}$, por lo que tenemos que

$$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) < \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$\left(\frac{n}{n+1}\right) < n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < 1$, para $n \geq 1$, es decir, $\left(\frac{n}{n+1}\right) < a_n < 1$.

Y como $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Por el Teorema anterior, tenemos: $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n} = e^1 = e$,

pero $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Series

Dada una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$, se puede formar una nueva sucesión sumando los términos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1\,, \\
S_2 &= S_1 + a_2 = a_1 + a_2\,, \\
S_3 &= S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3\,, \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
S_n &= S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\,.
\end{aligned}
$$

Este modo de considerar los términos se puede continuar y se obtiene una nueva sucesión $\{S_n\}$ que representa la forma de sumar los términos de la sucesión $\{a_n\}$, así,

$$\{S_n\} = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots a_n, \cdots\},$$

a esta nueva sucesión se le llama la serie generada por la sucesión $\{a_n\}$ y sus elementos se denominan términos de la serie.
Escribimos lo anterior de manera formal:

Sumas Parciales

Definición: Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, a la suma de los primeros n términos se le llama n-ésima suma parcial, es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Definición: Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales se llama serie infinita o simplemente serie y se denota como.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es la serie generada por $\{a_n\}$. Cada a_n se denomina término de la serie

Ejemplos:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+1+\cdots$

Como $S_n = 1+1+1+\cdots+1 = n$,

entonces la serie dada es igual a la sucesión

$\{S_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$, de donde,

$S_1 = 1$ $\quad$ $S_2 = 1-1 = 0$ $\quad$ $S_3 = 1-1+1 = 1$, es decir,

$$S_n = \begin{cases} 0 \; si \; n \; es \; par \\ 1 \; si \; n \; es \; impar \end{cases}$$

entonces la serie es igual a la sucesión:

$\{S_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, 0, \cdots\}$

3) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$, entonces,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Demostración: Por inducción.

Sea $n = 1$, entonces $S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$.

Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir,

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Por demostrar para $n = k + 1$.

Por hipótesis sabemos que

$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$, entonces

$$S_{k+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{2 - 1}{2^{k+1}}\right)$$

$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$S_{k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Con lo que queda demostrado que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Entonces la serie es igual a la sucesión:

$$\{S_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots,1-\frac{1}{2^n},\cdots\right\}.$$

Operaciones con Series

Definimos

i) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

ii) $c\sum_{n=\infty}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$

Convergencia de Series

Resulta natural decir que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge a α si la sucesión de sus sumas parciales tiene como límite a α, es decir:

Definición: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge a un número real α si para cada $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que si $n\geq N$, entonces $|S_n-\alpha|<\varepsilon$ donde S_n es la n-ésima suma parcial, es decir, $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i-\alpha\right|<\varepsilon$ para $n\geq N$. Y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$.

Ejemplo:

1) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$ si $0 < a < 1$

Sea $S_n = 1 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1}$

y sea $aS_n = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n$

restando $aS_n - S_n = a^n - 1$

de donde, $S_n(a-1) = a^n - 1$

por lo que $S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - 1}{a-1} = \frac{-1}{a-1}$ ya que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

cuando $0 < a < 1$. (**Teorema 6** del capítulo de sucesiones)

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$, es decir,

$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$ si $0 < a < 1$.

Series Divergentes

Toda serie que no es convergente se llama divergente. Entre éstas distinguimos las que divergen a ∞ o a $-\infty$.

Definición: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a ∞ si $\{S_n\}$ diverge a ∞, es decir, si para cada número real $M > 0$ existe un número natural N tal que si $k \geq N$, entonces $\sum_{n=1}^{k} a_n > M$ para.

En este caso, se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Definición: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$ si $\{S_n\}$ diverge a $-\infty$, es decir, si para cada número real $M > 0$ existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que tal que si $k \geq N$, entonces $\sum_{n=1}^{k} a_n < -M$.

En este caso, se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Ejemplos:

1) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \infty$, si $a \geq 1$.

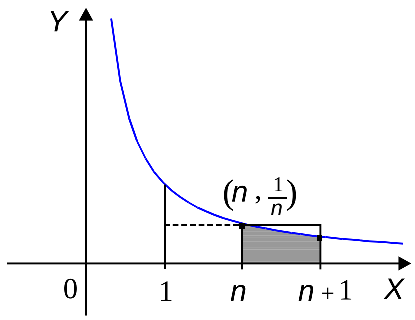
Como $a \geq 1$, para $n \geq 1$, $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} > n$, y como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ por (**Teorema 9** de sucesiones) comparación.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \infty$.

2) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (S_n)$, donde $S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

Consideremos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.



Notemos de acuerdo a la gráfica que:

Si tomamos la partición del intervalo $[1,n]$:

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n\}$, tenemos:

$\int_1^n \frac{1}{x}dx \le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, es decir:

$$\ln(n)-\ln(1)\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\ln(n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

$$\ln(n)<S_n$$

Como $\lim_{n\to\infty}\ln(n)=\infty$, por el **Teorema 9** de sucesiones:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty\end{aligned}.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

Como es de esperarse, las series convergentes se comportan bien bajo la suma y el producto por escalares.

Teorema 1:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c\alpha$.

Demostración:

$(S_n + T_n)$ es la n-ésima suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ respectivamente, entonces:

i) $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} T_n = \beta$, entonces

$\lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = \alpha + \beta$, de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta.$$

ii) $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = c\alpha.$

Teorema 2:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge.

Demostración:

Por contradicción. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converge y sean $\{S_n\}$ la sucesión de sus sumas parciales, $\{T_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\{C_n\}$ la sucesión de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Sea $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, entonces $\sum_{n=1}^{n} b_n = \sum_{n=1}^{n} \left[(a_n + b_n) - a_n \right]$

$= \sum_{n=1}^{n} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{n} a_n$, de donde $C_n = S_n - T_n \ldots(1)$

Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sea $\lim_{n\to\infty} T_n = \alpha$ y supusimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converge, sea $\lim_{n\to\infty} S_n = \beta$.

De donde:

$\lim_{n\to\infty} C_n = \beta - \alpha$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge.

En general, salvo por algunas excepciones, es difícil saber a qué valor converge una serie, sin embargo utilizando algunos criterios de convergencia y comparación podemos saber si al menos converge o diverge.

Teorema 3:

Sea $a_n \geq 0$ para cada $n \geq 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente.

Demostración:

$\Rightarrow$) $\{S_n\}$, la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es convergente, entonces existe α tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$, entonces S_n es acotada por el **Teorema 7** de sucesiones.

$\Leftarrow$) Como S_n es acotada superiormente, existe M tal que $S_n \leq M$, sabemos que la sucesión es creciente por ser de términos positivos, lo que implica que existe α tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$, por el **Teorema 8** de sucesiones.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo:

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n}$ converge.

Primero observemos que como

$$\left| \operatorname{sen}^3(n+1) \right| \leq 1$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}^3(n+1) \leq 1$$

$$1 \leq 2+\operatorname{sen}^3(n+1) \leq 3$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n} \leq \frac{3}{2^n} \forall\ n \in \mathbb{N}$$

de donde $a_n = \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n} \geq 0$.

Ahora veremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n}$ está acotada.

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n}\le\sum_{n=1}^{k}\frac{2+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{k}3\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}-1\right)\le 3\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)=3(1)=3.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n}$ converge.

Teorema 4 (de Comparación):

Supongamos $a_n\ge 0$, $b_n\ge 0$ y $c\ge 0$ tales que $a_n\le cb_n$ para todo n.

Si $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.

Demostración:

Sean $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ y $T_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$, por hipótesis sabemos que $a_n\le cb_n$ para toda n, entonces $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\le cb_1+cb_2+cb_3+\cdots+cb_n$, es decir, $S_n\le cT_n$ para toda n.

Como $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge entonces T_n es acotada (**Teorema anterior**), lo cual implica que existe $M > 0$ tal que $T_n < M \; \forall \, n$, entonces $S_n \leq cT_n \leq cM$, por lo que S_n es acotada. Como además $\{S_n\}$ es creciente $(a_n \geq 0$ para todo $n)$, entonces S_n converge.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Por otro lado tenemos que $\ln(x) < x$ (pues sabemos que $f(x) = x - \ln(x)$ es creciente para $x > 1$).

En particular tenemos

$$\ln(n) < n \; \forall \; n > 1, \text{ entonces}$$

$$\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}, \text{ de donde}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Afirmación: $n^{\beta} \geq n$ para $n \in \mathbb{N}$ y con $\beta > 1$.

Demostración: Por inducción.

- Para $n = 1$

$1^{\beta} \geq 1$ porque $n^{\beta} = 1$.

- Suponemos cierto para $n = k$, es decir,

$k^{\beta} \geq k$.

- Por demostrar que es cierto para $n = k+1$, es decir, $(k+1)^{\beta} \geq k+1$.

$(k+1)^{\beta} = k^{\beta} + \beta \cdot k^{\beta-1} \cdot 1 + \dfrac{\beta \cdot (\beta - 1)}{2!} \cdot k^{\beta-2} \cdot 1^2 + \cdots + 1^{\beta} \geq k^{\beta} + 1$, pues todos los términos son positivos.

Y por hipótesis tenemos $k^{\beta} \geq k$, es decir, $k^{\beta} + 1 \geq k+1$.

de donde $(k+1)^{\beta} \geq k^{\beta} + 1 \geq k+1$, es decir, $(k+1)^{\beta} \geq k+1$

Por tanto, $n^{\beta} \geq n$ para $n \in \mathbb{N}$ y con $\beta > 1$.

Afirmación: $n^{\alpha} \leq n$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Demostración:

Consideremos la función $f(x) = x^{\alpha}$, derivando, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} > 0$, de donde $f(x)$ es creciente para $x \geq 0$.

Por otro lado, como:

$$0 \leq \alpha \leq 1, \text{ entonces}$$

$$n^1 \leq n^{\frac{1}{\alpha}} \ \forall \ n \geq 1$$

$$f(n) \leq f\left(n^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$n^\alpha \leq \left(n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \ \Rightarrow$$

$$n^\alpha \leq n.$$

Por tanto, $n^\alpha \leq n$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ diverge para $k \leq 1$.

Como

$$k \leq 1$$

$$n^k \leq n$$

$$\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ diverge para $k \leq 1$

.

3) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ diverge.

Sabemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$$

Y por el ejercicio anterior tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}-1}$ diverge.

Teorema 5: Criterio de Comparación por Paso al Límite

Consideremos las sucesiones $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$, si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$

, entonces:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Demostración:

Primero veamos que como $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que si $n \geq N$ entonces $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon$ de donde

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 1 < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + 1$$

En particular, si elegimos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si para todo $n \geq N$

se cumple

$$1-\frac{1}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{1}{2}+1$$
$$\frac{1}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}$$

de donde

$$\frac{1}{2}<\frac{a_n}{b_n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$b_n<2a_n$$

y

$$\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$a_n<\frac{3}{2}b_n$$

$\Rightarrow$) Usando (1)

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces por el criterio de comparación tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

$\Leftarrow$) Usando (2)

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces nuevamente por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

El teorema anterior puede generalizarse, lo escribimos como corolario ya que la demostración puede hacerse poniendo c en lugar de 1.

Corolario

Consideremos las sucesiones $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

Tomemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual sabemos que diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ diverge.

Tomemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual sabemos que diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Notemos que si definimos $u = \frac{1}{n}$, cuando $n \to \infty$, $u \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ diverge.

Series Alternantes

Definición: Una serie es alternante si es de la forma $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n \geq 0$.

Lema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión y

$b_k = k$-ésimo término de índice par

$c_k = k$-ésimo término de índice impar

Si $\lim_{n\to\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} c_k = \alpha$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 > 0$, tal que $|\, b_k - \alpha \,| < \varepsilon$ si $k \geq N_1$.

También existe $N_2 > 0$, tal que $|\, c_k - \alpha \,| < \varepsilon$ si $k \geq N_2$.

Sea $N = 2\max\{N_1, N_2\}$.

Si $n \geq N$, $a_n = \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ es par} \\ c_{\frac{n+1}{2}} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

$$|\, a_n - \alpha \,| = \begin{cases} \left| b_{\frac{n}{2}} - \alpha \right| \text{si } n \text{ es par} \\ \left| c_{\frac{n+1}{2}} - \alpha \right| \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si $n \geq N$, entonces $n \geq 2N_1$, de donde $\dfrac{n}{2} \geq N_1$ y $\left| b_{\frac{n}{2}} - \alpha \right| < \varepsilon$.

Si $n \geq N$, entonces

$$n \geq 2N_2 > 2N_2 - 1$$
$$n + 1 \geq 2N_2$$
$$\frac{n+1}{2} > N_2$$

y $\left| c_{\frac{n+1}{2}} - \alpha \right| < \varepsilon$.

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$.

Teorema 6 (Criterio de Leibniz):

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ una serie alternante. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente y converge a cero, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ converge y su límite es positivo.

Demostración:

Consideremos S_{2n}, demostraremos que es creciente y acotada superiormente.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

como $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, se tiene que cada sumando es de la forma $a_{2k-1} - a_{2k} > 0$ con $1 \le k \le n$, por lo que $S_{2n} > 0$.

Sea $S_{2n+2} = \underbrace{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}}_{S_{2n}} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$, entonces

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$ y como $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$ entonces $S_{2(n+1)} > S_{2n}$.

Por otra parte $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$, observemos que a a_1 se le restan términos positivos, por lo que $S_{2n} < a_1$.

De lo anterior tenemos que S_{2n} es creciente y acotada superiormente, lo que implica S_{2n} converge a un límite positivo, es decir, $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \alpha > 0$.

Ahora consideremos $S_{2n-1} = S_{2n} - (-a_{2n}) = S_{2n} + a_{2n}$ con $n \ge 1$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, así que,

$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \alpha$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \alpha > 0$.

Por consiguiente, como $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \alpha = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha > 0$.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge.

Demostración:

Sea $a_n = \frac{1}{n}$

i) Entonces, $a_{n+1} \leq a_n$, es decir, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ya que $n+1 \geq n$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge.

Demostración:

Sea $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

i) Por demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$, es decir, $\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$.

En efecto:

$$n+1 \geq n$$
$$(n+1)^2 \geq n^2$$
$$(n+1)^2+1 \geq n^2+1$$
$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ (**Teorema 4 de sucesiones**)

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge.

3) Sea $a_1 = 1$, $a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}$ $\cdots$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \quad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \quad n = 1, 2, \ldots$$

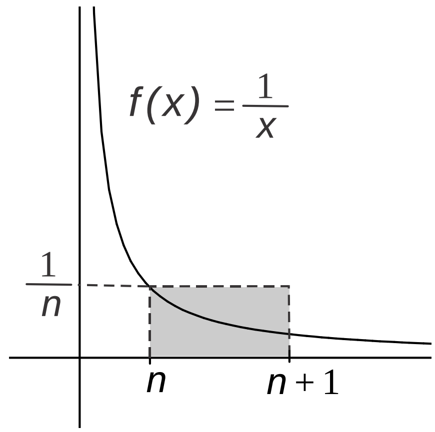
Probar que a_n converge a cero y es estrictamente decreciente.

Demostración:

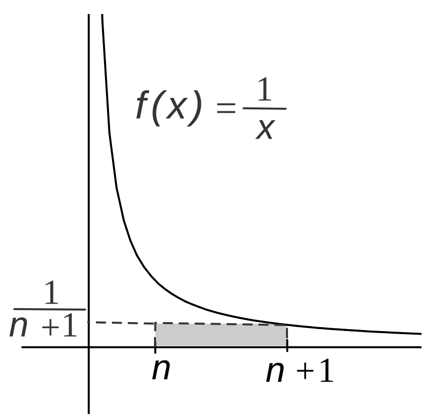
Para demostrar que a_n es estrictamente decreciente, es decir,

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln(n) > \frac{1}{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, notemos que el rectángulo de base $(n+1)-n$ y altura igual a $\frac{1}{n}$, corresponde al rectángulo sombreado en la figura, cuya área es mayor a la que se encuentra bajo la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[n, n+1]$, con lo cual queda demostrado que $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln(n)$.



Ahora, si tomamos el rectángulo de base $(n+1) - n$ y altura igual a $\frac{1}{n+1}$, el cual está sombreado en la figura siguiente, su área es menor a la que se encuentra bajo la gráfica de la función de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[n, n+1]$, con lo cual queda demostrado que $\ln(n+1) - \ln(n) > \frac{1}{n+1}$, entonces la sucesión a_n es estrictamente decreciente.



Demostraremos que la serie converge a cero, para lo cual utilizaremos el lema anterior, entonces es necesario mostrar que las sucesiones formadas por los términos de índice par e impar respectivamente, es decir, $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ convergen a cero.

Pero $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, lo mismo ocurre con $\lim_{n \to \infty} \left[\ln(n+1) - \ln(n) \right]$, ya que está acotada por cero y es decreciente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \to \infty} \left[\ln(n+1) - \ln(n) \right]$$

y a_n converge a cero.

Series Absolutamente Convergentes

Definición: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 7:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Demostración:

Sea $b_n = a_n + |a_n| = \begin{cases} 0 & si\ a_n < 0 \\ 2a_n & si\ a_n \geq 0 \end{cases}$, observemos que $0 \leq b_n \leq 2|\, a_{\mathrm{n}}\,|$, lo cual implica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|\, a_n\,|$, por hipótesis sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_{\mathrm{n}}\,|$ converge y por el criterio de comparación para series tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Como $a_n = b_n - |\, a_{\mathrm{n}}\,|$, usando sumas parciales, tenemos $\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} b_i - \sum_{n=1}^{k} |\, a_n\,|$ y tomando límite $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} b_i - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\, a_n\,|$, ya vimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n\,|$ converge.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ahora, notemos que $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\, a_i\,|$, tomando límite

$\lim_{k\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{k} a_n \right| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\, a_n\,|$, de donde

$$\left| \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \right| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\, a_n\,|$$

Por tanto, $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n\,|$.

Observación: el recíproco no es válido.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Ya se demostró que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge.

Ahora, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, la cual no converge.

Con lo que queda demostrado que el recíproco no es válido.

Series Telescópicas

Definición: La serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es telescópica si existe una sucesión $\{ a_k \}$ tal que $b_k = a_k - a_{k+1}$, así $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 - a_{n+1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+1}$.

Ejemplo:

Probar que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ es telescópica.

Observación:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}$$

$$1=A(2k+1)+B(2k-1)$$

$$1=k(2A+2B)+A-B$$

$$2A+2B=0$$

$$A-B=1$$

$$A=-B$$

$$2A=1$$

$$A=\frac{1}{2}$$

$$B=-\frac{1}{2}$$

Sea $a_k=\dfrac{1}{2(2k-1)}$, lo cual implica que

$$a_k-a_{k+1}=\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2(k+1)-1)}=\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k+1)}=$$

$$\frac{(2k+1)-(2k-1)}{2(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{2(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2(2k+1)}$.

Teorema 8:

Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ dos sucesiones tales que se satisface $b_k=a_k-a_{k+1}$ si $k\geq 1$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_k$ converge si, y sólo si, la sucesión $\{a_k\}$ converge. En ese caso:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = a_1 - \alpha \text{ , donde } \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Demostración:

Sea $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 - a_{n+1}$, aplicando límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} a_1 - a_{n+1}$$

$$= a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\Leftarrow$) Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

sustituyendo en (1),

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 - \alpha$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 - \alpha$$

$\Rightarrow$) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$

sustituyendo en (1)

$$\beta = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \beta$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 - \beta .$$

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1$.

Demostración:

Notemos que

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$
$$1=An+A+Bn$$
$$1=(A+B)n+A$$
$$A+B=0,\ \ A=1$$
$$A=-B$$

De donde

$$b_k=a_k-a_{k+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$=1$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1$.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge.

Notemos que

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln(n)-\ln(n+1)$$

De donde

$$b_k = a_k - a_{k+1}$$
$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$$

Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+n}\right) = \ln(1) - \lim_{n\to\infty} \ln(n)$$
$$= -\infty.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge.

3) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

Notemos que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

De donde

$$b_k = a_k - a_{k+1}$$
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n = 1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

Teorema 9: (Criterio del $n-$ésimo término)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración:

Sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$a_n = S_n - S_{n-1}$, de donde

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

y como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se tiene que

$\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, si $\alpha = \lim_{n\to\infty} S_n$,

como $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \alpha$,

entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha - \alpha = 0$.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, hicimos un análisis en el que utilizamos integrales, a continuación veremos un criterio general que usa dicha idea.

Teorema 10: (Criterio de la Integral).

Sea $f(x)$ una función positiva, decreciente para todo $x \geq 1$. Para cada $n \geq 1$, sea:

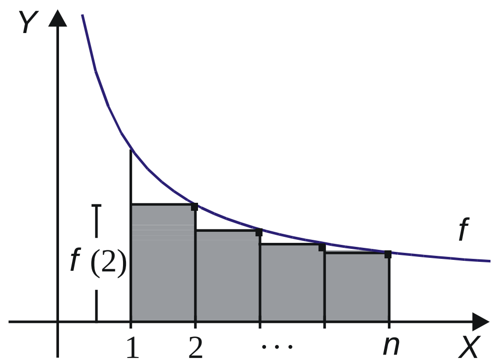
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad \text{y} \qquad T_n = \int_1^n f(x)dx.$$

Entonces:

$$S_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad T_n \quad \text{converge}$$

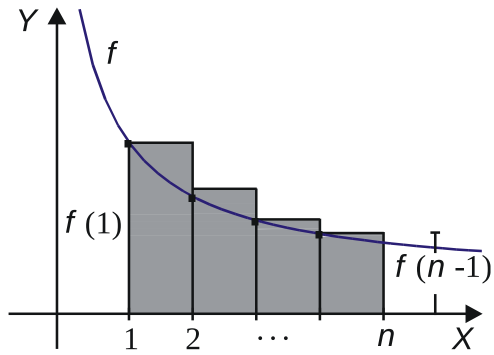
Demostración:

Considere las sumas de las áreas de los rectángulos sombreados en la figura:



Sea A_n el área del n-ésimo rectángulo sombreado, entonces $A_n =$ (base)(altura)$=(1)\, f(n+1) \quad \Rightarrow f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \le \int_1^n f(x)dx$, de donde $\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)dx$.

Similarmente la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la siguiente gráfica, nos permiten ver ahora que la integral esta acotada por arriba.



Así que $\int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(3) + \cdots + f(n-1)$, es decir,

$$\int f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

De donde $f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(3) + \cdots + f(n-1)$

$$\Rightarrow S_n - f(1) \leq T_n \leq S_{n-1}.$$

Como las sucesiones $\{ S_n \}$ y $\{ T_n \}$ son crecientes, con las desigualdades se puede ver que ambas están acotadas superiormente o ambas no están acotadas.
Por tanto, ambas convergen o ambas divergen, mediante el criterio de comparación para series.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ converge para $k > 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^k}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{k-1}(-k+1)} - \frac{1}{-k+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{-k+1}$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ converge, para $k>1$.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ converge.

Demostración:

$$\int_1^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x}$$

$$u = x \qquad dv = e^{-x}$$

$$du = dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b e^{-x}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_1^b\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-be^{-b} - e^{-b}\right) - \left(-1e^{-1} - e^{-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b} + \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e}.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ converge.

Al igual que en sucesiones, para las series en ocasiones no es fácil determinar su convergencia o divergencia. El criterio siguiente nos permite saber, en muchos casos, si una serie converge o diverge.

Teorema 11: (Criterio de la Raíz):

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tales que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \Rightarrow$

i) Si $R<1$ la serie converge.

ii) Si $R>1$ la serie diverge.

iii) Si $R=1$ el criterio no da información.

Demostración:

i) Como $R<1$, sea $b\in\mathbb{R}$, tal que $R<b<1$ y sea $\varepsilon = b-R$.

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, entonces $\left| \sqrt[n]{a_n} - R \right| < \varepsilon$. De donde $-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - R < \varepsilon$

$R-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + R$ sustituyendo $\varepsilon = b-R$

$2R-b < \sqrt[n]{a_n} < b$, si $n \geq N$. Así

$0<\sqrt[n]{a_n}<b \Rightarrow 0<a_n<b^n$, y como $0<b<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ converge.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Como $R>1$, sea $b\in\mathbb{R}$, tal que $1<b<R$ y sea $\varepsilon=R-b$.

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=R$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$\left|\sqrt[n]{a_n}-R\right|<\varepsilon$ si $n\geq N$, de donde

$R-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<\varepsilon+R$, sustituyendo $\varepsilon=R-b$

$$b<\sqrt[n]{a_n}<2R-b$$
$$b<\sqrt[n]{a_n}$$
$$b^n<a_n$$

en particular $\sum_{n=1}^{\infty}b^n<\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, pero $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$ diverge, ya que $b>1$.

Por tanto, por el **Teorema de Comparación**, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

iii) Sea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$.

Como $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$, entonces, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$.

Por otra parte sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Ahora sea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}=1$.

Pero sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Por tanto, cuando $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ el criterio no da información.

Ejemplos:

1) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ converge.

Demostración:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{n^2}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}e^{-n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0<1.\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ converge.

2) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$ diverge.

Demostración:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt[n]{n}}\right)=e>1\end{aligned}$$

ya que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$ diverge.

3) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

Al igual que el criterio de la raíz, el criterio de la razón nos permite, en ocasiones, saber si una serie converge o diverge, a partir de la obtención de un límite.

Teorema 12: (Criterio de la razón o del Cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tales que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L \quad \text{entonces:}$$

i) Si $L<1$, la serie converge.

ii) Si $L>1$, la serie diverge.

iii) Si $L=1$, el criterio no da información.

Demostración:

i) Si $L<1$. Como L es el límite de una sucesión de términos positivos entonces $L\geq 0$.

Sea b tal que $L<b<1$. Sea $\varepsilon=b-L$ entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n>N$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<b-L$ entonces

$$-b+L<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L<b-L$$

$$-b+2L<\frac{a_{n+1}}{a_n}<b,\ n\geq N$$

Ahora escribimos $b=\frac{b^{n+1}}{b^n}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b^{n+1}}{b^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{b^{n+1}}<\frac{a_n}{b^n}.$$

Es decir, la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b^n}\right\}$ es decreciente para todo $n\geq N$, en particular si $n\geq N$, entonces

$$\frac{a_n}{b^n} \leq \frac{a_N}{b^N}$$

por lo que $\qquad a_n \leq \frac{a_N}{b^N} \cdot b^n$

y sea $\qquad k = \frac{a_N}{b^N}$, entonces $a_n \leq kb^n$.

Esto nos permite ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esta acotada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$, que es convergente ya que $b<1$. Por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Si $L>1$, entonces por el criterio del cociente para sucesiones, tenemos que $\{a_n\}$ diverge a ∞. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Y sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Ahora Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}=1$$

Pero sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Por tanto, cuando $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ el criterio no da información.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ converge.

Demostración:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot(n+1)!}{n!\cdot(n+1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\cdot(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{A^n}$ converge si $A > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{A^{n+1}}}{\frac{n}{A^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A^n \cdot (n+1)}{A^{n+1} \cdot n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{A \cdot n}$$

$$= \frac{1}{A} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{A} < 1$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{A^n}$ converge si $A > 1$.

Teorema 13: (Criterio de Rabee)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos distintos de cero. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} i \left(1 - \frac{|\, a_{n+1} \,|}{|\, a_{\mathrm{n}} \,|} \right) = \alpha$$

i) Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

ii) Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración:

i) Como $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = \alpha > 1$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\left| n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) - \alpha \right| < \varepsilon$$

de donde

$$-\varepsilon < n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) - \alpha < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \alpha < n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) < \varepsilon + \alpha$$

Como $\alpha > 1$ entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $1 < b < \alpha$ de donde $\alpha - b > 0$.

Para $\varepsilon = \alpha - b$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\alpha - (\alpha - b) < n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) < (\alpha - b) + \alpha$$

En particular

$$b < n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \text{ si } n \geq N,$$

por lo que $$b < n - \frac{n|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$b\ |a_n| < n|a_n| - n\ |a_{n+1}|$$
$$\mathrm{n}\ |a_{n+1}| < n|a_n| - b\ |a_n| = n|a_n| - |a_n| - b\ |a_n| + |a_n| \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$\mathrm{n}\ |a_{n+1}| < (n-1)\ |a_n| - (b-1)\ |a_n|$$

como $b-1>0$ podemos considerar $\underbrace{n|a_{n+1}|}_{b_{n+1}} \leq \underbrace{(n-1)|a_n|}_{b_n} \forall\, n \geq N$, es decir, la sucesión $b_n = (n-1)|a_n|$ con $n \geq N+1$ es decreciente y dado que está acotada inferiormente por el cero, ya que sus términos son positivos, entonces es convergente.

Definimos $z_k = (k-1)|a_k| - k|a_{k+1}|$.

Sea S_k la k-ésima suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

$$\begin{aligned} S_k &= -|a_2| + |a_2| - 2|a_3| + \cdots + (k-1)|a_{nk}| - k|a_{k+1}| \\ &= -k|a_{k+1}| \end{aligned}$$

y como existe $\lim_{k\to\infty}(k|a_{k+1}|)$, entonces, $\exists\ \lim_{k\to\infty} S_k$, de donde, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es convergente.

Por otro lado por (1) se tiene

$$(b-1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|$$
$$|a_n| \leq \frac{(n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|}{b-1} = \frac{z_n}{b-1}$$

y como $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge, por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

ii) Como $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)=\alpha<1$, entonces para todo $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces

$$\left|n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)-\alpha\right|<\varepsilon$$

de donde

$$-\varepsilon<n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)-\alpha<\varepsilon$$

$$-\varepsilon+\alpha<n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)<\varepsilon+\alpha$$

Como $\alpha<1$, entonces existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha<c<1$ de donde $c-\alpha>0$.

Para $\varepsilon=c-\alpha$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces

$$\alpha-(c-\alpha)<i\left(1-\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|}\right)<(c-\alpha)+\alpha$$

En particular

$$n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)<c.$$

Por lo que

$$n-\frac{n\,|a_{n+1}|}{|a_n|}<c$$
$$n\,|a_n|-n\,|a_{n+1}|<c\,|a_n|$$

Y como $c<1$, tenemos

$$n|a_n|-n|a_{n+1}|<|a_n|\,\forall\, n\geq N\,,$$
$$n|a_n|-|a_n|<n|a_{n+1}|$$
$$(n-1)|a_n|<n|a_{n+1}|,$$

es decir, la sucesión $b_k=(n-1)|a_n|$ es creciente para todo $n\geq N$, en particular $(n-1)|a_n|>(N-1)|a_N|>|a_N|$ para $n\geq N+1$, por lo que

$$(n-1)|a_n|>|a_N|$$
$$|a_n|>\frac{|a_N|}{(n-1)}\text{ para todo }\ n\geq N+1,$$

y como $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ diverge.

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Ejemplos:

1) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ converge.

Demostración:

$$\lim_{n=1} \mathrm{n}\left(1-\frac{\left|\frac{1}{(n+1)^4}\right|}{\left|\frac{1}{n^4}\right|}\right)=\lim_{n=1} \mathrm{n}\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)^4}}{\frac{1}{n^4}}\right)$$

$$=\lim_{n=1}\left(1-\frac{n^4}{(n+1)^4}\right)$$

$$=\lim_{n=1} \mathrm{n}\left(\frac{(n+1)^4-n^4}{n^4}\right)$$

$$=\lim_{n=1} \mathrm{n}\left(\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n^4}{i^4}\right)$$

$$=\lim_{n=1} \mathrm{n}\left(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^4}\right)$$

$$=\lim_{n=1}\left(\frac{4n^4+6n^3+4n^2+n}{n^4}\right)$$

$$=4>1.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ converge.

2) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge.

$$\lim_{n\to\infty} i\left(1-\frac{\left|(-1)^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n}\right|}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|-1\right|\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(0\right)$$
$$= 0 < 1.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}$ diverge.

Bibliografía

- Robert G. Bartle; Introducción al Análisis Matemático de una Variable, Limusa Wiley, 2ª edición.
- M. Spivak; *Calculus. Cálculo Infinitesimal*, Reverté, S. A. 2ª edición
- H. Arizmendi y M. Carrillo; *Cálculo*, C.E.C.S.A, 1ª edición.
- Leithold; *El cálculo con geometría analítica*, Harla, 5ª edición.
- W.Granville; *Cálculo Diferencial e Integral*, Limusa, 6ª edición.
- J. Stewart; *Cálculo de una variable,* Internacional Thomson Editores, 3ª edición.
- Murray H. Protter; Intermediate Calculus, Springer, 2ª edition.
- E. Swokowski; *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª edición.
- Takeuchi, Yu; Sucesiones y Series, Limusa, 3ª reimpresión

Índice Temático