



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ECUACIÓN DE RAYCHAUDHURI MODIFICADA POR LOOP QUANTUM GRAVITY

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

RAÚL ANTONIO LIZARDO CASTRO

TUTOR PRINCIPAL

DR. ALEJANDRO CORICHI RODRÍGUEZ GIL
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR

DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR

DR. ROBERT OECKL
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mis padres que me han entregado más de lo que han podido y siempre han ido en la búsqueda incesante del bienestar de sus hijos

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mis padres por haberme apoyado desde el inicio de esta carrera sin cuestionar mis sueños que, en momento difíciles, siempre nos hemos apoyado como familia. A, mis hermanos, Cecilia y Santiago por siempre encontrar un apoyo emocional en ellos. A mis abuelas, mi tía Lilian y mi prima Silvia por toda la comprensión y apoyo que pudieron brindarme en estos años difíciles. A, mis amigos, Oswaldo, Leslie, Ricardo, Rosa, Dulce, Laura y Marco por siempre brindarme palabras de apoyo. A mi terapeuta por ayudarme a salir de la depresión. A mis alumnos por darle un significado a todo lo aprendido en estos años en momentos muy difíciles.

También quiero agradecerle a mi tutor Dr. Alejandro Corichi por todo el apoyo en el transcurso de estos años. Además, por el apoyo con la beca del proyecto IN114620 del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT). Por último, quiero agradecer a, mis sinodales, Dr. Yuri Bonder, Dr. José Vergara, Dr. José Zapata, Dr. Robert Oeckl y Dr. Hugo Morales por valiosos comentarios que mejoraron el resultado final de este proyecto.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice de figuras	VI
1 Resumen	1
2 Introducción	3
3 Formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)	6
§3.1 Introducción	6
§3.2 Curvatura Extrínseca	8
§3.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi	9
§3.3.1 Curvatura extrínseca en términos de la 3-métrica	12
§3.4 Ecuaciones de Einstein y Hamiltoniano de Relatividad general	13
§3.4.1 Tensores de Einstein, Riemann y escalar de curvatura	13
§3.4.2 Densidad Lagrangiana de Einstein-Hilbert	15
§3.4.3 Hamiltoniano de Relatividad General	15
4 Las variables Ashtekar-Barbero	18
§4.0.1 Triadas	18
§4.0.2 Interpretación geométrica	22
5 Ecuación de Raychaudhuri	24
§5.1 Condiciones de energía	24
§5.2 Congruencia de geodésicas temporales	26
§5.2.1 Cinemática	27

§5.2.2	Teorema de Frobenius	28
§5.2.3	Ecuación de Raychaudhuri	30
§5.2.4	Teorema de Enfoque	30
6	Interior de un agujero negro de Schwarzschild	33
§6.1	Métrica de Schwarzschild	33
§6.1.1	Diagrama de Penrose-Carter	34
§6.2	Interior como una métrica de Kantowski-Sachs	36
§6.2.1	Métrica	37
§6.2.2	Símbolos de Christoffel	37
7	Teoría clásica	40
§7.1	Métrica Fiducial	40
§7.2	Constricción Hamiltoniana	43
§7.3	Ecuaciones de movimiento	45
8	Cuantización por lazos	50
§8.1	Cinemática Cuántica	50
§8.1.1	Espacio de Hilbert \mathcal{H}	51
§8.2	Geometría cuántica	53
§8.3	Dinámica cuántica	55
§8.4	Dinámica semiclásica	60
§8.5	Esquemas de cuantización	65
§8.5.1	Esquema de Cuantización Corichi-Singh	65
§8.5.2	Esquema de Cuantización Ashtekar-Olmedo-Singh	66
§8.5.3	Comparación de los distintos esquemas en las variables canónicas	68
9	Correcciones efectivas de LQG a la ecuación de Raychaudhuri	74
§9.1	Ecuación de Raychaudhuri para observadores cosmológicos en una métrica de Kantowski-Sachs	74
§9.2	Dinámica efectiva de la ecuación de Raychaudhuri	79
§9.2.1	Ecuación de Raychaudhuri Efectiva	80

§9.3 Resultados	83
§9.3.1 Parámetros geométricos: expansión θ y shear σ^2	83
§9.3.2 Ecuación semi-clásica de Raychaudhuri	87
§9.3.3 Componente del tensor de Ricci	89
§9.3.4 Comparación en la interpretación de las correcciones cuánticas . . .	90
10 Conclusiones	93
Bibliografía	98

Índice de figuras

6.1 Figura tomada de [1]	35
7.1 Gráfica de la variable c contra t donde se mide en unidades de $M = m$ en unidades naturales.	46
7.2 Gráfica del momento de p_c vs t en unidades de m	47
7.3 Gráfica del momento de b vs t en unidades de m	48
7.4 Gráfica de p_b vs t en unidades de m . Hay que recordar que p_b se puede obtener de la constricción Hamiltoniana o al resolver directamente las ecs. de movimiento.	48
8.1 Gráfica del momento de N vs t en unidades de m . La función de lapso clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS y AOS	68

8.2 Las figuras 8.2a y 8.2b representa el comportamiento de la función de lapso $N(t)$ al rededor del tiempo de Modesto t_* . La figura 8.2a representa el esquema CS en donde la línea punteada es la parte imaginaria debido a la contribución $b(t < t_*)$ y la línea continua es la parte real de la misma $N(t)$, lo mismo sucede para la figura 8.2b para el esquema de AOS. 69

8.3 Gráfica de b vs t en unidades de m . La función de b clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS (naranja) y AOS (verde) 70

8.4 Gráfica de c/L_0 vs t en unidades de m . La función de $c(t)/L_0$ clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. 70

8.5 Gráfica de p_b/L_0 vs t en unidades de m . La función de $p_b(t)/L_0$ clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. 71

8.6 Gráfica de p_c vs t en unidades de m . La función de p_c clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. 71

8.7 Gráfica de $t_*(M)$ vs M 72

9.1 Gráfica del momento de $\theta(t)$ vs t en unidades de m . El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS y AOS. La línea azul representa la dinámica clásica 84

9.2 Gráfica de $\theta(t)$ vs t en unidades de t_* . El esquema de CS está representado por la línea azul. La línea punteada representa la parte imaginaria del parametro de expansión. 85

9.3 Gráfica de $\theta(t)$ vs t en unidades de t_* . El esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las línea punteada representa la parte imaginaria θ 85

9.4 Gráfica $\sigma(t)^2$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas. 86

9.5 Gráfica de $-\theta^2/3 - \sigma^2$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas. 87

9.6 Gráfica de $d\theta/dt$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas. 88

9.7 Gráfica \mathfrak{R}_{tt}/N^2 vs t en unidades de m . La dinámica clásica es 0. La línea azul es el esquema CS y el esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas. 89

9.8 Gráfica \mathfrak{R}_{tt} vs t en unidades de m . La dinámica clásica es 0. La línea azul es el esquema CS y el esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas. 91

Capítulo 1

Resumen

En recientes años, el estudio de Agujeros Negros ha llegado a una nueva época dorada al tener resultados experimentales que confirman la robustez de la teoría de la Relatividad General. Sin embargo, aún quedan muchas preguntas sin respuesta sobre Agujeros Negros ya que muchas de estas respuestas requieren una nueva teoría de la gravedad. Una de estas preguntas es acerca de la singularidad, que se encuentra en el interior de los Agujeros Negros. Esta resulta ser una pregunta abierta porque la física se rompe.^{en} esta singularidad. Para abordar este problema en esta tesis se hace uso de una teoría cuántica de la Gravedad llamada Loop Quantum Gravity (Teoría Cuántica de Lazos). Este nuevo acercamiento a la Gravedad nos arroja ciertas modificaciones de la teoría clásica, entre estas modificaciones se encuentra la resolución de la singularidad la cual nos indica que hay física más allá de la singularidad, en concreto el Agujero Negro se conecta con un Agujero Blanco. En esta tesis abordaremos la resolución de la singularidad via la ecuación de Raychaudhuri, es decir, investigaremos el comportamiento de la congruencia de los observadores que se dirigen hacia la singularidad dada por las correcciones cuánticas de la Teoría Cuántica de Lazos. Como parte de los resultados, encontramos una componente del tensor de Ricci que tiene un origen cuántico dada por las suposiciones de la teoría. Finalmente, analizamos el comportamiento de las congruencias en tiempos de interés como el tiempo de rebote como un tiempo llamado tiempo de Modesto donde se presenta una nueva singularidad emergida de las correcciones cuánticas. Al analizar este tiempo de Modesto nos damos cuenta que hay cantidades físicas que además de diverger en este tiempo también se convierten en

números imaginarios para tiempos menores al tiempo de Modesto. Esto sugiere que la evolución de estas cantidades físicas debe ser detenida justo antes del tiempo de Modesto.

Capítulo 2

Introducción

La teoría de Relatividad General es una de las teorías físicas más exitosas en la actualidad junto con la Mecánica Cuántica. Desde el hallazgo de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y su comprensión con el teorema de singularidad [2, 3], la comunidad científica se interesó por el estudio de las singularidades que se presentaban en estas soluciones. En un principio, estas singularidades se interpretaban como regiones en el espacio-tiempo tales que las cantidades físicas divergían. Sin embargo, se encontraron singularidades que podían ser removibles dado que una mejor elección de coordenadas podía eliminarlas, éstas son llamadas singularidades tipo coordenadas o removibles. Existen otro tipo de singularidades donde éstas son reconocidas como regiones tales que las geodésicas pueden alcanzar en un tiempo propio finito pero no pueden extenderse más allá de estas regiones, estas geodésicas son llamadas geodésicas incompletas. En 1955, Raychaudhuri estudió estas singularidades mediante el análisis de puntos conjugados [4]. Más adelante, Hawking y Penrose demostraron teoremas [2, 3] importantes, bajo suposiciones físicas viables, que indican que algunas soluciones exactas que representan Agujeros Negros de la Relatividad General tendrán incompletez geodésica y por lo tanto presentará una singularidad irremovible.

Es del consenso científico que estas singularidades [5] son una predicción más allá de la predictibilidad de la Relatividad General y que una herramienta más completa deberá regularizar el comportamiento singular de las soluciones físicas. En este consenso, la

comunidad plantea que una teoría donde la gravedad sea cuantizada podría solucionar este tipo de singularidades. Sin embargo, aún no se ha logrado obtener tal teoría, pero se encuentran disponibles algunas candidatas con una estructura matemática rigurosa con la cuál podemos indagar sobre la posible resolución de la singularidad. Una de esas teorías es la Gravedad Cuántica de Lazos (Loop Quantum Gravity) [6]. A pesar que usaremos una teoría de gravedad cuántica para tratar este problema, otra de las motivaciones es tratar de tener una teoría que unifique tanto la Mecánica Cuántica como la relatividad General [7].

El estudio de interiores de agujeros negros no es nuevo [8, 9, 10, 11]. Todos estos fueron motivados por el estudio de la singularidad (Big Bang) de la métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker [12], la cual, por su isotropía y homogeneidad, se usa una cuantización del espacio fase llamada cuantización polimérica. Esta cuantización está caracterizada por un parámetro el cuál dicta la escala donde los efectos cuánticos se vuelven relevantes. Es claro que existen varios tipos de esquemas de cuantización basados en las distintas variables en las que el parámetro polimérico puede depender.

En esta tesis, investigamos el problema de la resolución de la singularidad con un caso particular: La métrica de Schwarzschild bajo el estudio de la ecuación de Raychadhuri con las modificaciones de Loop Quantum Gravity e interpretamos la modificación a la ecuación de Raychadhuri como una de las componentes del tensor de Ricci con esta métrica. Este análisis se realiza de forma estándar; es decir, usamos la isometría de la solución de Schwarzschild con la métrica de Kantowski-Sachs y escogemos las holonomías y los flujos (las cuales son las variables de la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos) en este espacio-tiempo de forma estándar. Además, calculamos los parámetros geométricos de las congruencias de observadores cosmológicos que viajan hacia al pasado, tales parámetros como la expansión o el shear. Encontramos que el parámetro de expansión detiene su dinámica al tomar valores complejos y a partir de un tiempo t_* , el cual le llamaremos tiempo de Modesto [13]. Además, este tiempo t_* genera una nueva divergencia en las cantidades físicas donde Modesto indicó un nuevo horizonte de eventos. A pesar de esto, logramos encontrar esta componente del tensor de Ricci de manera exacta y estudiar su límite clásico, el cual es

correcto para masas muy lejanas de la escala de Planck.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: En el Capítulo 1, resumimos el formalismo ADM para descomponer el espacio-tiempo en rebanadas espaciales. En el Capítulo 2, enunciamos las variables de Ashtekar-Barbero. En el Capítulo 3, presentamos la ecuación de Raychaudhuri junto con las propiedades geométricas de las congruencias. En el Capítulo 4, justificamos el uso del espacio-tiempo de Kantowski-Sachs como una versión cosmológica equivalente del interior de la métrica de Schwarzschild. En el Capítulo 5, usamos la métrica de Kantowski-Sachs y construimos la Constricción Hamiltoniana en término de las holonomías. En el Capítulo 6, repasamos construcción de la cuantización de este espacio-tiempo. En el Capítulo 7, encontramos como escribir la ecuación de Raychaudhuri en términos de las nuevas variables clásicas como también presentamos las correcciones semi-clásicas de la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos. En el Capítulo 8, presentamos y graficamos los resultados de esta tesis. En las conclusiones, discutimos y concluimos brevemente los resultados obtenidos.

Capítulo 3

Formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)

3.1. Introducción

Para comenzar el proceso de cuantización por lazos primero tenemos que encontrar la densidad Hamiltoniana de la teoría de gravedad de Einstein. En este caso, necesitamos 'hamiltonizar' la densidad lagrangiana dada por la acción de Einstein-Hilbert.

$$S(g) = \int_M R \text{vol}, \quad (3.1)$$

donde (M, g) es una variedad Lorentziana de dimensión 4 junto con una métrica g de signatura $(-, +, +, +)$, R es el escalar de curvatura y vol es la 4-forma asociada a g .

Escogiendo una carta de coordenadas locales podemos reescribir la ec. (3.1) como:

$$S(g) = \int_M R \sqrt{|\det g|} d^4x. \quad (3.2)$$

Se puede ver directamente de la ec. (3.2) que la densidad lagrangiana \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L} = R \sqrt{|\det g|} \quad (3.3)$$

A su vez, la variedad (M, g) tiene asociada una conexión de Levi-Civita:

$$\nabla_v w = v^\alpha (\partial_\alpha w^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} w^\gamma) \partial_\beta, \quad (3.4)$$

donde $v, w \in T_p M$, $\{\partial_\alpha\}$ es una base asociada a las coordenadas y $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ son los símbolos de Christoffel.

Para dar marcha a la 'hamiltonización' usando el formalismo de ADM, primero tenemos que restringirnos a la variedades Lorentzianas que son difeomorfas a $\mathbb{R} \times \Sigma$, donde Σ representa el espacio y $t \in \mathbb{R}$ representa el tiempo. Es decir, lo que haremos será 'cortar' a M en rebanadas de instante de tiempo t , estos espacios son llamados espacios hiperbólicos. Es evidente que no hay una elección única en el cómo encontrar estas. En otras palabras, hay una infinidad de maneras en el cómo elegir un difeomorfismo:

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma.$$

Por lo anterior, podemos formalizar la elección de t sobre M como el pullback de ϕ del tiempo t sobre $\mathbb{R} \times \Sigma$:

$$\tau = \phi^* t.$$

Después, tomaremos una sub-variedad $\Sigma \subset M$ que es una rebanada de M a tiempo constante τ .

En este capítulo lograremos ver la forma de las 10 ecuaciones de Einstein independientes en términos de objetos geométricos dada por la sub-variedad Σ y su curvatura extrínseca K , la cual describe la curvatura de Σ desde el punto de vista de M . Un ejemplo de esto es un cilindro dentro de \mathbb{R}^3 , sabemos que la curvatura intrínseca del cilindro es 0 pero desde el punto de vista de \mathbb{R}^3 no lo es; es decir, su curvatura extrínseca $K \neq 0$.

Por último, nos daremos cuenta que, de las 10 ecuaciones de Einstein, 4 son constricciones y 6 son ecuaciones de evolución. Todo esto y más es llamado el formalismo Arnowitt-Deser-

Misner (ADM)

3.2. Curvatura Extrínseca

Sea Σ una rebanada del espacio-tiempo $\mathbb{R} \times S$. Asumiremos que Σ es una rebanada espacial; es decir, cualquier vector $u \in T_p\Sigma$ tendremos que $g(u, u) > 0$. Esta métrica sobre Σ la denotaremos como la 3-métrica 3g . Con la misma métrica g podremos encontrar con Σ un conjunto de vectores temporales y ortogonales n a Σ :

$$g(n, n) = -1 \text{ y } \forall v \quad g(n, v) = 0.$$

Sin embargo, lo anterior no nos indica si el vector temporal n apunta hacia el futuro o al pasado, lo cual puede considerarse una elección de signo. A pesar de esto, escogemos aparentemente al vector n como el vector que apunta hacia el futuro en un punto y que este mismo sea continuo.

Una vez hecha la elección, podremos descomponer cualquier $v \in T_pM$ en su componente paralela y ortogonal a Σ mediante la métrica g [14]:

$$v = \underbrace{-g(v, n)n}_{\perp} + \underbrace{(v + g(v, n)n)}_{\parallel} \quad (3.5)$$

Reescribiendo la derivada covariante v en dirección w donde $v, w \in T_p\Sigma$; es decir, $\nabla_w v$. Este nuevo campo vectorial $\nabla_w v$ no necesariamente es un vector paralelo a Σ ya que $\Sigma \subset M$, pero sí podemos descomponerlo en su parte paralela y perpendicular a Σ , con ayuda de la ec. (3.5), de la siguiente forma:

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n) \quad (3.6)$$

El primer término de la ec. (3.6) es reescrito de la siguiente manera:

$$-g(\nabla_u v, n)n = K(u, v)n, \quad (3.7)$$

el cual $K(u, v)$ es llamado la curvatura extrínseca y mide la curvatura de Σ desde M . El segundo término se denota como:

$${}^3\nabla_u v = \nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n, \quad (3.8)$$

el cual es la conexión de Levi-Civita (ec. (3.4)) para Σ asociado a la métrica 3g . El operador ${}^3\nabla$ satisface la regla de Leibnitz y preserva la métrica.

Por otro lado, las propiedades básicas de $K(u, v)$ son que es un tensor y es simétrico. La primera propiedad quiere decir que depende $C^\infty(\Sigma)$ -linealmente sobre los vectores u, v :

$$K(u, v) = K_{ij}u^i v^j,$$

donde $K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j)$ y $\{\partial_i\}$ es una base asociada a las coordenadas con i, j como los índices espaciales(1, 2, 3). Con esta misma base $\{\partial_i\}$ la propiedad simétrica se escribe $K_{ij} - K_{ji} = 0$.

Otra definición del tensor $K(u, v)$, ya que ∇ preserva la métrica, es:

$$K(u, v) = g(\nabla_u n, v).$$

Esta definición nos otorga otro significado geométrico de $K(u, v)$. Esta interpretación sería la rotación del vector unitario n en dirección de v cuando es trasladado paralelamente a lo largo de u .

3.3. Ecuaciones de Gauss-Codazzi

En esta sección mostraremos que 4 ecuaciones de Einstein son constricciones sobre la 3-métrica y curvatura extrínseca. Las restantes 6 describen como la 3-métrica cambia a lo largo del vector n . Antes de llegar a esas conclusiones, encontraremos las ecuaciones de Gauss-Codazzi que nos ayudarán a escribir la densidad lagrangiana en términos de la

curvatura extrínseca y de otras cantidades por definir como el 'lapse' o el 'shift'. Tomamos un manera de partir el espacio-tiempo en espacio y tiempo mediante el difeomorfismo.

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S.$$

Lo anterior nos permite definir un tiempo sobre M por medio del pullback $\tau = \phi^*t$ y seleccionar el conjunto de rebanadas espaciales Σ con $\{\tau = s\}$ constante. Además, nos da un vector ∂_τ que apunta la dirección de evolución. Debido a esto último, podemos descomponer ∂_τ en sus componentes normal y tangente a Σ dada la ec. (3.5):

$$\partial_\tau = -g(\partial_\tau, n)n + (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n) = Nn + \vec{N},$$

donde es claro observar que definimos la función lapso como $N := -g(\partial_\tau, n)$ y el vector shift $\vec{N} = (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n)$. Despejando n de la última ecuación obtenemos:

$$n = \frac{1}{N} (\partial_\tau - \vec{N}) \quad (3.9)$$

Ahora tomamos un punto $p \in \Sigma$ y escogemos unas coordenadas locales en una vecindad de p : x^0, x^1, x^2 y x^3 , donde los super-índices 1, 2 y 3 son las coordenadas espaciales y $x^0 = \tau$ ($\partial_0 = \partial_\tau$). Por último, los vectores ∂_1, ∂_2 y ∂_3 son tangentes a Σ .

Ahora escribiremos los símbolos de Christoffel de la conexión ${}^3\nabla$ (3.8) sobre la rebanada Σ como ${}^3\Gamma_{jk}^i$ y tensor de Riemann de la 3-métrica como ${}^3R_{ijk}^m$.

Definiendo el tensor de Riemann como:

$$R(u, v)w = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u, v]}) w \quad (3.10)$$

Escogiendo una base ortonormal $\{e_\alpha\}$ de M :

$$R(e_\beta, e_\gamma) e_\delta = (\nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\beta) e_\delta = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} e_\alpha, \quad (3.11)$$

donde $\nabla_\alpha = \nabla_{e_\alpha}$ y $\nabla_{[\beta,\gamma]} = 0$ ya que nuestro espacio-tiempo es libre de torsión. En componentes el tensor de Riemann se puede escribir como:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\sigma_{\gamma\delta} \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}. \quad (3.12)$$

Este tensor tiene las siguientes simetrías:

$$R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} = -R^\lambda{}_{\gamma\beta\delta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\delta\beta\gamma\alpha} \quad \text{y} \quad R^\lambda{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \quad (3.13)$$

Tomando los vectores base de la hipersuperficie junto con el tensor de Riemann:

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k. \quad (3.14)$$

Usando la ec. (3.6) para reescribir la derivadas covariantes involucradas como:

$$\nabla_i \partial_j = K_{ij} n + {}^3\Gamma^m_{ij} \partial_m \quad \text{y} \quad \nabla_i n = K_i^m \partial_m. \quad (3.15)$$

Podemos llegar a:

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = & \underbrace{(K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk} K_{im} - K_{ik,j} - {}^3\Gamma^m_{ik} K_{jm})}_{({}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik})} n + \\ & (K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m + \\ & \underbrace{({}^3\Gamma^m_{jk,i} - {}^3\Gamma^m_{ik,j} + {}^3\Gamma^\ell_{jk} \Gamma_{i\ell}^m - {}^3\Gamma^\ell_{ik} {}^3\Gamma_{j\ell}^m)}_{{}^3R^m_{ijk}} \partial_m \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, encontramos las ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = ({}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik}) n + ({}^3R^m_{ijk} + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m. \quad (3.17)$$

Si aplicamos la 1-forma dx^0 , escogiendo como $\partial_0 = n$, en ambos lados de la ec. (3.17), obtenemos la ecuación de Gauss:

$$R^0_{ijk} = {}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik} \quad (3.18)$$

Por otro lado, aplicando dx^m a la misma ecuación (3.17), obtenemos la ecuación de Codazzi:

$$R^m_{ijk} = {}^3R^m_{ijk} + K_{jk}K_i^m - K_{ik}K_j^m. \quad (3.19)$$

Es evidente que si la curvatura extrínseca es cero sobre Σ , las componentes del tensor de Riemann espaciales son idénticas al 3-tensor ${}^3R^m_{ijk}$.

3.3.1. Curvatura extrínseca en términos de la 3-métrica

Otra forma de encontrar la curvatura extrínseca en términos de la 3-métrica es por medio de la derivada de Lie de la siguiente forma:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}, \quad (3.20)$$

en notación abstracta de índices donde h_{ab} es la 3 métrica 3g y la derivada de Lie a lo largo de v es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} &= v^c \nabla_c T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} - \sum_{i=1}^k T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots c \dots a_k} \nabla_c v^{a_i} \\ &+ \sum_{j=1}^l T_{b_1 \dots a_k}^{a_1 \dots a_k} \dots c \dots b_l \nabla_{b_j} v^c. \end{aligned}$$

Es decir, podemos reescribir el tensor de curvatura extrínseca como:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} N^{-1} [\mathcal{L}_\tau h_{ab} - \mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab}], \quad (3.21)$$

donde el primer término se refiere a la evolución temporal de la 3-métrica $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_\tau h_{cd}$ y el segundo término del miembro derecho se refiere a la derivada de Lie con respecto al vector shift.

3.4. Ecuaciones de Einstein y Hamiltoniano de Relatividad general

3.4.1. Tensores de Einstein, Riemann y escalar de curvatura

Las ecuaciones de Einstein son 10 y se escriben en términos del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu}$, el escalar de curvatura $R = R_{\mu\mu}$ y el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ como:

$$G_{\mu}^{\nu} = R^{\mu\alpha}{}_{\nu\alpha} - \frac{\delta_{\nu}^{\mu}}{2} R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R = 8\pi T_{\mu}^{\nu}. \quad (3.22)$$

Si nuevamente tomamos la elección de $n = \partial_0$ sin perder generalidad encontramos que la componente G_0^0 , al usar las simetrías del tensor de Riemann, es la siguiente:

$$G_0^0 = R^{01}{}_{01} + \cdots + R^{03}{}_{03} - \frac{1}{2} (R^{01}{}_{01} + \cdots + R^{03}{}_{03} + R^{10}{}_{10} + R^{12}{}_{12} + R^{13}{}_{13} + \cdots).$$

Notamos que los términos $R^{0\alpha}{}_{0\alpha}$ se suman dos veces dentro del paréntesis y se cancelan con los mismos términos pero fuera del paréntesis. Entonces la componente 00 es:

$$G_0^0 = - (R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31}), \quad (3.23)$$

usando las simetrías en las ecs. (3.13). Escribiendo cada una de las componentes del tensor de Riemann de la ec. (3.23) de la forma de la ecuación de Codazzi (3.19):

$$G_0^0 = -\frac{1}{2} ({}^3R + (\text{tr } K)^2 - \text{tr } (K^2)), \quad (3.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^3R &= {}^{(3)}R_{12}{}^{12} + R^{23}{}_{23} + {}^{(3)}R_{31}{}^{31}, \\ (\text{tr } K)^2 &= K_1^2 K_2^1 + K_2^3 K_3^2 + K_3^1 K_1^3 + K_1^1 K_3^3, \end{aligned}$$

y

$$\text{tr } K^2 = K_2^2 K_1^1 + K_3^3 K_2^2 + K_1^1 K_3^3.$$

Por otro lado, la componente G_i^0 se puede desarrollar buscando los términos no cero del tensor de Riemann por sus simetrías, entonces se escribe como :

$$G_i^0 = R^{0\alpha}{}_{1\alpha} = R^0{}_{\alpha 1}{}^\alpha = R^0{}_{01}{}^0 + R^0{}_{11}{}^1 + R^0{}_{21}{}^2 + R^0{}_{31}{}^3 \quad (3.25)$$

Al usar las simetrías del tensor de Riemann (3.13), notamos que los primeros dos términos son idénticamente cero y en consecuencia podemos llegar a:

$$G_i^0 = {}^3\nabla_j K_i^j - {}^3\nabla_i K_j^j. \quad (3.26)$$

Las ecuaciones (3.24) y (3.25) son un caso particular al elegir $n = \partial_0$. Para un vector n mas general, las ecuaciones (3.24) y (3.25) se presentan como:

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -\frac{1}{2} ({}^3R + (\text{tr } K)^2 - \text{tr } (K^2)) \quad \text{y} \quad G_{\mu i} n^\mu = {}^3\nabla_j K_i^j - {}^3\nabla_i K_j^j. \quad (3.27)$$

Por otro lado, el escalar de curvatura se puede escribir como:

$$R = 2 (G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu), \quad (3.28)$$

La tensor de Riemann se logra reescribir por definición como [15]:

$$R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -(\text{tr } K)^2 + \text{tr } (K^2) - \nabla_\mu (n^\mu \nabla_\nu n^\nu) + \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu) \quad (3.29)$$

Finalmente podemos sustituir las ecs. (3.27) y (3.29) en el escalar de Ricci (3.28) para obtener lo siguiente:

$$R = {}^3R - (\text{tr } K)^2 + \text{tr } (K^2) + 2 [\nabla_\mu (n^\mu \nabla_\nu n^\nu) - \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu)] \quad (3.30)$$

Esto nos ayudará a reescribir el lagrangiano en términos de el 3-escalar de curvatura y los invariantes de la curvatura extrínseca para su posterior hamiltonización.

3.4.2. Densidad Lagrangiana de Einstein-Hilbert

Como habíamos visto al inicio del capítulo, la densidad de Einstein-Hilbert es:

$$\mathcal{L} = R\sqrt{|\det g|}.$$

Al hacer una elección en esta descomposición $3 + 1$; es decir, al escoger nuestra función lapso y el vector shift se puede escribir el determinante de la 4-métrica g como [15]:

$$\det g = \sqrt{h}N, \quad (3.31)$$

donde h es el determinante de la 3-métrica 3g y h_{ij} serán sus componentes. Reemplazando las ecs. (3.31) y (3.30) en la acción de Einstein-Hilbert ec. (3.2):

$$S(g) = \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} \sqrt{h}N d\tau d^3x \left\{ {}^3R - (\text{tr } K)^2 + \text{tr } (K^2) + 2[\nabla_\mu (n^\mu \nabla_\nu n^\nu) - \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu)] \right\}.$$

Es evidente que los últimos dos términos del lado derecho son divergencias, entonces, al integrar sobre la variedad e imponer las condiciones de frontera de Cauchy, esos términos se anularán y no van a contribuir en las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto, la densidad lagrangiana de Relatividad General en el formalismo de Arnowitt, Deser y Misner es:

$$\mathcal{L} = N\sqrt{h}({}^3R - (\text{tr } K)^2 + \text{tr } (K^2)) \quad (3.32)$$

) Esta última ecuación nos ayudará a aplicar el formalismo hamiltoniano a la teoría de Relatividad General donde tendremos el espacio fase compuesto por el lapso N , el shift \vec{N} , la 3-métrica y sus respectivos momentos conjugados.

3.4.3. Hamiltoniano de Relatividad General

El último paso para encontrar las ecs. de Einstein en el formalismo de ADM, es hallar los momentos conjugados de las componentes de la 3-métrica. Al emplear la ec. (3.21), los

momentos canónicamente conjugados son :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h} (K^{ij} - (\text{tr } K)h^{ij}), \quad (3.33)$$

en componentes espaciales y estas variables del espacio fase cumplen con las siguientes paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\pi^{ij}(x), q_{kl}(y)\} &= (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j) \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= 0 \\ \{q_{ij}(x), q_{kl}(y)\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Además, es claro que la lagrangiana (3.3) no contiene derivada temporal para N o \vec{N} , por lo que sus momentos conjugados son idénticamente cero y la Hamiltoniana se puede construir con la siguiente definición:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}. \quad (3.35)$$

Reemplazando las ecs. (3.3) y (3.33) en (3.35):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = h^{1/2} \left\{ N \left[-{}^{(3)}R + h^{-1} \text{tr}(\pi^2) - \frac{1}{2} h^{-1} (\text{tr } \pi)^2 \right] - 2N_j [{}^3\nabla_i (h^{-1/2} \pi^{ij})] \right. \\ \left. + 2 {}^3\nabla_i (h^{-1/2} N_j \pi^{ij}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\text{tr } \pi = \pi^i_i$ y $\text{tr}(\pi^2) = \pi^{ij} \pi_{ij}$. Los dos últimos términos son divergencias, las cuales no van a contribuir a las ecuaciones de movimiento como en la ec. (3.3). Encontrando las ecuaciones de movimiento para la función N y N_i :

$$N : \quad -{}^{(3)}R + h^{-1} \text{tr}(\pi^2) - \frac{1}{2} h^{-1} (\text{tr } \pi)^2 = 0, \quad (3.37)$$

$$\vec{N} : \quad {}^3\nabla_i (h^{-1/2} \pi^{ij}) = 0, \quad (3.38)$$

las cuales, si sustituimos la ec. (3.33) en las anteriores, pueden ser reconocidas como ecuaciones de constricción a las condiciones frontera. En este mismo sentido, es evidente que la ec.(3.37) es la densidad Hamiltoniana y con eso concluimos que la ec. (3.36) es, en sí

misma, una restricción. Por otro lado, las ecuaciones dinámicas de la 3-métrica son [15]:

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^{ij}} = 2h^{-1/2}N \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}(\text{tr } \pi) \right) + 2 {}^3\nabla_{(i}N_{j)}, \quad (3.39)$$

y:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta h_{ij}} = & -Nh^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R h^{ij} \right) \\ & + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ij} \left(\text{tr}(\pi^2) - \frac{1}{2}(\text{tr } \pi)^2 \right) \\ & - 2Nh^{-1/2} \left(\pi^{ik}\pi_k^j - \frac{1}{2}\text{tr } \pi \pi^{ij} \right) \\ & + h^{1/2} \left({}^{(3)}\nabla^i {}^{(3)}\nabla^j N - h^{ij} {}^{(3)}\nabla^k {}^{(3)}\nabla_k N \right) \\ & + h^{1/2} {}^{(3)}\nabla_k \left(h^{-1/2}N^k \pi^{ij} \right) - 2\pi^{k(i} {}^{(3)}\nabla_k N^{j)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Las ecs. (3.37-3.40) son equivalentes a las 10 ecuaciones de Einstein. Sólo que estas representan la evolución de las rebanadas espaciales a lo largo de una elección del tiempo τ .

En resumen, encontramos las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano para Relatividad General. Esto nos ayudará a presentar la restricción Hamiltoniana para Relatividad General. Sin embargo, para aplicar el formalismo de la Teoría de Lazos, es necesario hacer uso de las variables de Ashtekar-Barbero en cual se presentará en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Las variables Ashtekar-Barbero

En este capítulo presentaremos una nueva representación del Hamiltoniano de Relatividad General y desde su introducción [16] han dado un nuevo empuje para el formalismo de cuantización por lazos.

4.0.1. Triadas

En relatividad general, definimos las tetrádas como un conjunto de marcos ortogonales en cada punto del espacio-tiempo, lo cual nos deja con una métrica interna η_{AB} que representa a una métrica minskowskiana de la siguiente forma [17]:

$$g_{\mu\nu} = E_{\mu}^A E_{\nu}^B \eta_{AB},$$

donde μ, ν representan los índices asociados a la métrica espacio-temporal que se comportan que en el resto de tensores vistos desde ahora, mientras que los índices internos A y B debido a los grados de libertad adicionales introducidos en esta representación y $\{E_{\mu}^A\}$ son cuatro campos co-vectoriales que forman una base del espacio cotangente T_p^*M .

Bajo este mismo esquema y dado que en el capítulo anterior hemos hecho una descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo, definimos las tríadas de una forma similar

como a las tetrádas pero con el tensor de la 3-métrica h_{ab} de la siguiente manera:

$$h_{ij} = E_i^A E_j^B \delta_{AB}, \quad (4.1)$$

donde A, B también toman los valores de 1, 2, 3. al igual que i, j . Al momento de integrar en un elemento de volumen, el integrando debe ser densidades escalares de peso +1. Para llegar a esto, necesitamos multiplicar o dividir las veces requeridas por la raíz del determinante de la 3-métrica. Esto se denota de la siguiente forma:

$$\tilde{f} \equiv \sqrt{h} f \quad \text{y} \quad \underset{\sim}{f} \equiv \frac{f}{\sqrt{h}}. \quad (4.2)$$

Bajo esta definición, llamaremos la tríada densitizada como:

$$\tilde{E}_A^i = \sqrt{q} E_A^i, \quad (4.3)$$

donde E_A^i forman la base del espacio tangente $T_p M$ Como indicamos anteriormente, se debe multiplicar o dividir por \sqrt{h} las veces requeridas.

$$\tilde{\tilde{h}}^{ij} = h h^{ij} = \tilde{E}_A^i \tilde{E}_B^j \delta^{AB}. \quad (4.4)$$

También definimos la curvatura extrínseca:

$$K_i^A = \frac{K_{ij} \tilde{E}_k^A \delta^{jk}}{\sqrt{h}}. \quad (4.5)$$

Esto nos ayuda escribir el siguiente término canónico de una forma más compacta:

$$\pi^{ij} \dot{h}_{ij} = 2 E_A^i \dot{K}_i^A. \quad (4.6)$$

Podemos escribir las constricciones (3.37) y (3.38), presentadas con (h_{ij}, K_{ij}) con estas nuevas variables del espacio de configuraciones (E_A^i, K_i^A) . Sin embargo, ahora tenemos más grados de libertad (9) en esta representación que en la anterior (6). Esta redundancia es sólo geométrica ya que esas tres extras representan nuestra libertad al escoger distintas

marcos locales E_i^A por el grupo local de rotaciones $SO(3)$ que actúa sobre los índices internos $A, B = 1, 2, 3$. Por lo tanto, debe existir otra constricción que nos ayude a reducir los grados de libertad. Esta ligadura adicional proviene de la ecuación (4.5) junto con la propiedad simétrica del tensor de curvatura extrínseca $K_{[ij]} = 0$ que se logra escribir de la siguiente forma:

$$\epsilon_{ABC} E^{iB} K_i^C = 0, \quad (4.7)$$

esta constricción (3 ecs.) es conocida como constricción de Gauss y se une a las otras 4 encontradas (3.37) y (3.38) para definir un nuevo hamiltoniano.

La estructura simpléctica de estas nuevas variables es:

$$\{E_B^i(x), K_j^A(y)\} = \kappa \delta_j^i \delta_B^A \delta(x, y), \quad \{E_B^i(x), E_A^j(y)\} = \{K_i^B(x), K_j^A(y)\} = 0 \quad (4.8)$$

Conexiones de espín.

Hasta en este punto, hemos hecho un ligero cambio de variable con la tríada el cual agrega otra ligadura por la libertad de elección del marco ortogonal. Después, notamos que el momento conjugado del conjunto de las tríadas es K_i^A . Además, para definir una derivada covariante hay una forma natural a partir de la conexión de $so(3)$. Esta conexión es llamada la conexión de espín Γ_i^A y es la solución de las ecuaciones de estructura de Cartan [17]:

$$\partial_{[i} E_{j]}^A + \epsilon_{BC}^A \Gamma_{[i}^B E_{j]}^C = 0, \quad (4.9)$$

el ϵ_{BC}^A describe la simetría de las rotaciones $so(3)$. La conexión de espín es escrita en término de las tríadas de la siguiente forma:

$$\Gamma_i^A = -\frac{1}{2} \epsilon_C^{AB} E_B^j (\partial_{[i} E_{j]}^C + \delta^{CL} \delta_{MS} E_L^k E_i^M \partial_j E_k^S), \quad (4.10)$$

donde E_J^i es la inversa de la tríada. La conexión de espín es un conexión de $so(3)$ que transforma de una manera inhomogena bajo transformaciones locales de $SO(3)$. Las variables

de Ashtekar-Barbero [18] son definidas por una nueva conexión dada por:

$$A_i^A = \Gamma_i^A + \gamma K_i^A, \quad (4.11)$$

donde γ es un número real (no cero) llamado el parámetro de Immirzi. Esta nueva variable también representa el momento conjugado de las tríadas densitizadas \tilde{E}_A^i , lo cuales poseen los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\left\{ \tilde{E}_J^i(x), A_J^A(y) \right\} = \kappa \gamma \delta_J^i \delta_B^A \delta(x, y), \quad \left\{ \tilde{E}_B^i(x), \tilde{E}_A^j(y) \right\} = \left\{ A_i^B(x), A_j^A(y) \right\} = 0. \quad (4.12)$$

Una vez definida la conexión de espín A_i^A , podemos definir un tensor de curvatura como una teoría de Yangs-Mills de la siguiente forma:

$$F_{ij} = \partial_i A_j^A - \partial_j A_i^A + \epsilon_{BC}^A A_i^B A_j^C \quad (4.13)$$

Al reescribir las constricciones encontradas en términos de estas variables de conexión ($\tilde{E}_J^i(x)$) [19]:

$$N : \quad \frac{\tilde{E}_A^i \tilde{E}_B^j}{\sqrt{\det(\tilde{E})}} (\epsilon^{AB} F_{ij}^C - 2(1 + \gamma^2) K_{[i}^A K_{j]}^B) = 0 \quad (4.14)$$

$$\vec{N} : \quad \tilde{E}_A^i F_{ij}^A - (1 + \gamma^2) K_j^A D_i \tilde{E}_A^i = 0, \quad (4.15)$$

y la constricción de Gauss:

$$D_i \tilde{E}_A^i = \partial_i \tilde{E}_A^i + \epsilon_{AB}^C A_i^B \tilde{E}_C^i = 0, \quad (4.16)$$

donde D_i es la derivada covariante asociado a la conexión A . Las ecuaciones (4.15), (4.14) y (4.16) son las mismas ecuaciones que (3.38), (3.37) y (4.7) en la representación de estas variables de Ashtekar, respectivamente. Además, la ec. (4.16) coincide con la Ley de Gauss de una Teoría de Yangs-Mills ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ en electromagnetismo). De hecho si ignoramos las constricciones para el shift \vec{N} y la función lapso N , podemos indicar que esta teoría está caracterizada por el espacio fase de (A_a^i, E_j^b) de una teoría de Yangs-Mills de $SU(2)$. Una

teoría de Yangs Mills se encuentra definida sobre una geometría de espacio-tiempo de fondo y su dinámica está descrita por una hamiltoniana en términos de su campo eléctrico y su conexión. En el caso de Relatividad General su hamiltoniana está dada por una combinación lineal de constricciones por lo cual su dinámica está codificada en las ecuaciones de ligadura. Al encontrar esta analogía entre una teoría de Yangs-Mills y Relatividad en estas nuevas variables de Ashtekar podemos aplicar técnicas útiles al momento de cuantizar la teoría de Relatividad General.

Por último, escribimos la densidad hamiltoniana de la teoría de Einstein en términos de estas nuevas variables de Ashtekar para comenzar el proceso de cuantización por lazos. La hamiltoniana se escribe como una combinación lineal de todas las constricciones del sistema incluyendo la constricción de Gauss:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & \frac{N \tilde{E}_A^i \tilde{E}_B^j}{\sqrt{\det(\tilde{E})}} \left[\epsilon_C^{AB} F_{ij}^C - 2(1 + \gamma^2) K_{[i}^A K_{j]}^B + D_i \tilde{E}_A^i \right] \\ & + N^j \left[\tilde{E}_A^i F_{ij}^A - (1 + \gamma^2) K_j^A D_i \tilde{E}_A^i \right] + \alpha^A D_i \tilde{E}_A^i, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde α^A es un multiplicador de Lagrange.

4.0.2. Interpretación geométrica

La interpretación de la conexión A_i^A es la estándar de una teoría de Yangs-Mills. Es decir, esta conexión provee una noción de transporte paralelo de los vectores en la variedad Σ . Más precisamente, definimos la holonomía denotada por $h_e[A]$ donde $e \subset \Sigma$ es una trayectoria y A es la conexión [17]:

$$h_e[A] = P \exp \left[- \int_e A \right], \quad (4.18)$$

donde P es el ordenamiento de camino exponencial.

Por otro lado, las tríadas densitizadas (-campos eléctricos-) \tilde{E}_A^i tienen un significado más

sencillo y claro a partir de (4.4). Con base a estos objetos se pueden construir una diversidad de cantidades geométricas como funcionales de esta tríada densitizada ya que estas codifican toda la información de la geometría de Riemanniana de las hipersuperficies Σ . Un ejemplo de estas pueden ser el área de y una 3-superficie $S \subset \Sigma$: $A_S[\tilde{E}_A^i]$, o el volumen de ésta $V_S[\tilde{E}_A^i]$.

En conclusión, las variables de Ashtekar nos permite obtener una nueva representación de la teoría de Relatividad General. Se logra reescribir su construcción Hamiltoniana a partir de la elección de las triadas. Además, la conexión asociada A se puede relacionar con la holonomía en alguna trayectoria. Todo esto nos ayudará a definir lo que son los operadores cuánticos de holonomía para encontrar un conjunto de eigenestados, como también operadores de volumen. Una vez definido esto y llevado al regimen semi-clásico, podremos emplear las correcciones a la ecuación de Raychaudhuri.

Capítulo 5

Ecuación de Raychaudhuri

En este capítulo plantearémos la ecuación de Raychaudhuri la cual le daremos un tratamiento general para recalcar que en cualquier variedad Pseudoriemanniana es aplicable. Además, mostraremos como un conjunto de geodésicas, que no se intersectan, se comportan en las regiones del espacio tiempo.

5.1. Condiciones de energía

Una parte importante de la ecuaciones de Einstein (3.22) es el miembro derecho, más precisamente el tensor de energía-momento T_{ab} que modela la materia que se encuentra dentro del espacio-tiempo. Reescribiendo las ecuaciones de Einstein para cualquier observador con 4-velocidad normalizada ξ^a :

$$R_{ab}\xi^a\xi^b = 8\pi \left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab} \right] \xi^a\xi^b = 8\pi \left[T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T \right]. \quad (5.1)$$

Es claro que el término $T_{ab}\xi^a\xi^b$ es la densidad de energía de la materia medida por el observador con 4-velocidad ξ^a . Se supone, que para toda materia clásica y físicamente razonable, esta densidad de energía de materia es no negativa, en otras palabras:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0, \quad (5.2)$$

para cualquier observador temporal. La anterior suposición es llamada *condición de energía débil* [20]. Bajo este esquema también se puede postular otra condición para 4-vectores nulos k^a que también satisfagan $T_{ab}k^ak^b \geq 0$, esta condición es llamada *condición de energía nula*. Existe otra condición, físicamente plausible, que es llamada *condición de energía fuerte*. Esta consiste en que las fuerzas de la materia no se convertirán tan grandes y negativas como para hacer negativo el miembro derecho de (5.1); es decir:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T \quad (5.3)$$

para cualquier ξ^a temporal y normalizado. Esta condición es más bien para el tensor de Ricci ($R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0$). Por último y por completez, existe otra condición, llamada *condición de energía dominante*, físicamente razonable para la materia clásica: Para cualquier 4-vector temporal dirigido hacia el futuro ξ^a , $-T^a{}_b\xi^b$ debe ser un 4-vector dirigido hacia el futuro temporal o nulo. La interpretación física de $-T^a{}_b\xi^b$ es la de una 4-corriente de densidad de energía-momento vista desde ξ^a . Además, el significado físico de la condición de energía dominante es que la velocidad del flujo de energía de la materia no debe ser mayor a la velocidad de la luz.

Notemos que las tres condiciones de energía son suposiciones matemáticas parcialmente independientes. En particular, la condición de energía fuerte no implica a la condición de energía débil ni dominante. Esta es sólo 'fuerte' en el sentido de ser una suposición con una mayor restricción física que la condición débil. Sin embargo, la condición dominante sí implica a la débil porque al pedir que la velocidad del flujo de energía no debe exceder la velocidad de la luz medida por un observador ξ^a implica que la energía debe ser no negativa vista desde el mismo observador.

Todo el anterior análisis sin escoger una base, lo cual le da generalidad a cada una de las condiciones. Sin embargo, todos los tensores de energía-momento que son físicamente

razonables también son diagonalizables. Esto quiere decir:

$$T_{ab} = \rho t_a t_b + p_1 x_a x_b + p_2 y_a y_b + p_3 z_a z_b, \quad (5.4)$$

donde $\{t^a, x^a, y^a, z^a\}$ es una base ortornormal. Los autovalores tienen distintas interpretaciones: ρ representa la densidad de energía en reposo de la materia y p_1, p_2, p_3 son llamados las presiones principales. Esto nos ayuda a presentar de otra forma cada una de las condiciones de energías enunciadas anteriormente. La condición de energía débil se cumple si y solo si:

$$\rho \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.5)$$

La condición de energía fuerte es equivalente a:

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.6)$$

Por último, la condición de energía dominante es equivalente a:

$$\rho \geq |p_i| \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

5.2. Congruencia de geodésicas temporales

Sea \mathcal{O} un abierto del espacio-tiempo (M, g) . Una congruencia en \mathcal{O} es una familia de curvas tal que, a través de cada punto en \mathcal{O} , pasa una y sólo una curva de esta familia. En otras palabras, las curvas no se intersectan. En este capítulo nos interesaremos una congruencia de geodésicas temporales; es decir, que cada curva de esta familia de curvas representa una geodésica temporal y analizaremos la evolución de cada una mediante el comportamiento del vector de desviación. Por último terminaremos escribiendo la ecuación de Raychaudhuri.

5.2.1. Cinemática

Sea u^a un campo vectorial temporal y normalizado asociado a la congruencia de las curvas geodésicas temporales. A su vez, podemos definir un campo vectorial ξ^a ortogonal a u^a . Es decir, u^a y ξ^a cumple con las siguientes relaciones :

$$u^a u_a = -1, \quad u^b \nabla_b u^a = 0, \quad \xi^a, \quad u^a \xi_a = 0. \quad (5.8)$$

Además, a representa desplazamientos espaciales infinitesimales de la congruencia, por lo que podemos pedir que $\mathcal{L}_\xi n^a = 0$; es decir: $\xi^b \nabla_b u^a = u^b \nabla_b$. Además, dado la congruencia u^a y la métrica del espacio-tiempo g_{ab} podemos encontrar la métrica transversal h_{ab} de la siguiente forma:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b. \quad (5.9)$$

Esta métrica es 'espacial' en el sentido que es ortogonal a la congruencia $h_{ab} u^b = 0 = h_{ab} u^a$, como se esperaba.

Para encontrar la cinemática de estas curvas congruentes, analizamos el transporte paralelo de ξ^a a lo largo de las congruencias u^a de la siguiente forma:

$$\frac{d\xi^a}{d\tau} = u^b \nabla_b \xi^a = \xi^b \nabla_b u^a, \quad (5.10)$$

donde τ es el tiempo propio de la geodésica u^a . Por la ecuación anterior podemos definir un tensor $B^a_b = \nabla_b u^a$; es decir $d\xi^a/d\tau = B^a_b \xi^b$. Este tensor se puede descomponer através de su traza, su parte simétrica sin traza y su parte antisimétrica de la siguiente forma [20]:

$$B_{ab} = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (5.11)$$

donde $\theta = B^a_a$ es el parámetro de expansión, $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \theta h_{ab}/3$ el tensor de *shear* y $\omega_{ab} = B_{[ab]}$ el tensor de rotación. Estas cantidades vienen de las distintas interpretaciones físicas que parten de las diferentes deformaciones que pueden sufrir las congruencias en un medio. El parametro de expansión se interpreta como el cambio del volumen a lo

largo de u^a . El tensor de shear es, físicamente, la deformación del volumen a lo largo de las congruencias (e. g. iniciar con una esfera con un volumen dado y a lo largo de la trayectoria deformarlo hasta concluir con una elipsoide con el mismo volumen). Por último, el tensor de rotación indica, precisamente, la orientación que puede tomar esa sección transversal a través de toda la trayectoria (Para una visión más amplia de las implicaciones físicas de esta descomposición, revisar la sección 2.2 de [20]).

5.2.2. Teorema de Frobenius

Algunas congruencias poseen un tensor de rotación $\omega_{ab} = 0$. Esto nos dice que son hipersuperficies ortogonales; es decir, que las congruencias (de geodésicas temporales) son, en todas partes, ortogonales a la familia de foliaciones de las hipersuperficies (espaciales) de \mathcal{O} . En esta sección mostraremos una prueba parcial del enunciado anterior que contendrá la idea geométrica [20].

Una congruencia será hipersuperficie ortogonal si u^a es en todo lados proporcional al vector normal n^a a las hipersuperficies, dadas por la relación $\Phi(x) = c$ donde c es una constante. En matemáticas se entiende de la siguiente forma:

$$u_a = -\mu \nabla_a \Phi, \quad (5.12)$$

donde μ es un factor de proporcional normalizado dado que u^a es temporal. Aplicando la regla de Leibnitz $\nabla_b u_a = -\mu \nabla_b \nabla_a \Phi - \nabla_a \Phi \nabla_b \mu$. Ahora calculando el tensor $(\nabla_{[b} u_a) u_c]$ y usando el hecho que $\nabla_a \nabla_b \Phi = \nabla_b \nabla_a \Phi$, es directo encontrar que $(\nabla_{[b} u_a) u_c] = 0$. Esto prueba que:

$$\text{hipersuperficies ortogonales} \Rightarrow (\nabla_{[b} u_a) u_c] = 0.$$

El regreso de este enunciado es más difícil de probar pero es cierto que si tenemos $(\nabla_{[b} u_a) u_c] = 0$ implica la existencia de un campo escalar tal que $u_a \propto \nabla_a \Phi$.

Ahora tomaremos el siguiente caso llamado el teorema de Frobenius: Una congruen-

cia de curvas (temporales, espaciales o nulas) es hipersuperficie ortogonal si y sólo si $(\nabla_{[b}u_a)u_c] = 0$, donde u^a es tangente a las curvas.

Para demostramos usaremos $(\nabla_{[b}u_a)u_c]u^c$ con $B_{ab}u^b = 0$ y las ecs. (5.8):

$$\begin{aligned} 3! (\nabla_{[b}u_a)u_c]u^c &= 2 (\nabla_{[b}u_a)(-1) + \nabla_{[a}u_c]u_bu^c + \nabla_{[b}u_c]u_a u^c) \\ &= 2 (-B_{[ab]} + B_{[ca]}u^c u_b + B_{[bc]}u^c u_a) \\ &= -2\omega_{ab}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Por otro lado, sabemos que al tener las hipersuperficies ortogonales implica que $(\nabla_{[b}u_a)u_c] = 0$; es decir: $\omega_{ab} = 0$. En este cálculo sólo hicimos el caso donde la congruencia es geodésica y temporal. Para el caso nulo los cálculos son ligeramente distintos y para el caso espacial, se pierde el interés físico.

En resumen. Un campo vectorial u^a (temporal, espacial o nulo, no necesariamente una geodésica) es hipersuperficie ortogonal si existe un campo escalar Φ tal que $u_a \propto \partial_a \Phi$, lo cual implica que $(\nabla_{[b}u_a)u_c] = 0$. Si el campo vectorial u^a es temporal y geodésico, entonces es hipersuperficie ortogonal si existe un campo escalar Ψ tal que $u_a = -\partial_a \Psi$, lo cual implica que $\omega_{ab} = 0$. Esta dirección del teorema de Frobenius es la más relevante para nosotros ya que escogeremos congruencias que sean hipersuperficies ortogonales, lo cual, por este teorema, sabemos el valor del tensor de rotación que es útil cuando se emplea la ecuación de Raychaudhuri. Sin embargo, realizar el regreso del teorema ($\omega_{ab} = 0 \Rightarrow$ hipersuperficies son ortogonales) es posible pero es más difícil de demostrarlo. La idea en general se basa en usar el teorema de Frobenius. Primero comenzamos escogiendo una congruencia u^a con un tensor de rotación nulo, entonces las curvas no se curvan ni se giran entre sí, esto conlleva que en cada punto tiene una dirección preferencial (tangente a la geodésica). Usando el teorema de Frobenius, nos garantiza encontrar hipersuperficies que sean ortogonales a esta dirección preferencial en cada punto y eligiendo estas hipersuperficies. Entonces la hipersuperficies también son ortogonales a la geodésicas de las congruencias. En resumen, si tenemos una congruencia de geodésicas con tensor de rotación nulo, podemos encontrar hipersuperficies que serán ortogonales a estas congruencias.

5.2.3. Ecuación de Raychaudhuri

Para encontrar la ecuación de Raychaudhuri es necesario encontrar la evolución de la expansión escalar θ . Comenzamos desarrollando el transporte paralelo del tensor B_{ab} a lo largo de la congruencia u^a que tiene un tiempo propio τ :

$$\begin{aligned}
 u^c \nabla_c B_{ab} &= u^c \nabla_c \nabla_b u_a \\
 &= u^c (\nabla_b \nabla_c u_a - R_{adbc} u^d) \\
 &= \nabla_b (u^c \nabla_c u_a) - (\nabla_c u_a) (\nabla_b u^c) - R_{adbc} u^d u^c \\
 &= -B_{ac} B_b^c - R_{acbd} u^c u^d.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Tomando $B_a^a = \theta$ en la ecuación anterior encontramos la siguiente ecuación:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = u^c \nabla_c B_a^a = -B^{ab} B_{ba} - R_{ab} u^a u^b. \tag{5.15}$$

Usando el hecho que $B^{ab} B_{ab} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^{ab}\sigma_{ab} - \omega^{ab}\omega_{ab}$ y sustituyendolo, obtenemos la ecuación de Raychaudhuri para una congruencia de geodésicas temporales:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\omega_{ab} - R_{ab} u^a u^b. \tag{5.16}$$

Entre los términos de la ecuación anterior, podemos notar que el tensor de shear y el de rotación son puramente espaciales, y por lo tanto, $\sigma^{ab}\sigma_{ab} \geq 0$ y $\omega^{ab}\omega_{ab} \geq 0$. En esta tesis será muy importante la ecuación (5.16) ya que buscaremos las correcciones debido a la cuantización de lazos en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

5.2.4. Teorema de Enfoque

La importancia de la ec. (5.16) para Relatividad General viene de la mano del siguiente teorema [20]:

Sea u^a una congruencia de geodésicas temporales que son hipersuperficies ortogonales ($\omega_{ab} = 0$) y la condición de energía fuerte se mantiene (5.3) ($R_{ab} u^a u^b \geq 0$). Entonces, la

ecuación de Raychaudhuri (5.16) implica que $d\theta/d\tau \leq 0$.

El anterior enunciado es una clara evidencia del efecto atractivo de la curvatura del espacio-tiempo en la teoría de la Relatividad General. Esto lo podemos ver de la siguiente forma: el parámetro de expansión θ siempre debe decrecer durante la evolución de la congruencia. Es decir, si inicialmente la congruencia es divergente ($\theta > 0$), la congruencia divergirá menos rápido en su futuro. Mientras que si inicialmente converge ($\theta < 0$), la congruencia convergerá más rápidamente en el futuro.

Bajo las mismas condiciones del teorema del Enfoque, tenemos que $\omega_{ab} = 0$, $-R_{ab}u^a u^b \leq 0$ y $\sigma^{ab}\sigma_{ab} \geq 0$ al ser la congruencia u^a temporal. Lo anterior implica que:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}u^a u^b \leq 0.$$

La anterior ecuación puede ser integrada una vez dando como resultado lo siguiente:

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{\tau}{3}, \quad (5.17)$$

donde θ_0 es la condición inicial con $\tau = 0$. Esto muestra que si la congruencia es convergente en un inicio ($\theta_0 < 0$), entonces $\theta(\tau) \rightarrow -\infty$ en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$. La interpretación del resultado es que algunas geodésicas se unen en un punto del espacio-tiempo, a este fenómeno se le llama una caústica. Sin embargo, esta caústica es únicamente una singularidad de las congruencias y no las singularidades del espacio-tiempo. En particular, el teorema de enfoque se utiliza en la demostración de los teoremas de singularidad de Penrose, que establecen condiciones bajo las cuales se formarán singularidades gravitatorias en la teoría de la Relatividad General [3], al definir lo que son superficies atrapadas, las cuales son regiones del espacio-tiempo, que al pasar una congruencia de geodésicas nulas sobre ellas, tienen un parámetro de expansión θ negativa.

En conclusión de este capítulo, presentamos la ecuación de Raychaudhuri por medio de un tensor B_{ab} descrito por una congruencia de geodésicas con cuadrivelocidad u^a . Esto

lo emplearemos en la métrica de Kantowski-Sachs que modela el interior de un Agujero Negro de Schwarzschild. Estas dos métricas y su relación con el interior de un Agujero Negro se detallarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Interior de un agujero negro de Schwarzschild

En este capítulo abarcaremos la solución encontrada por Karl Schwarzschild en 1916, poco meses después de la publicación de las ecs. de Einstein. Esto nos llevará a analizar las propiedades de este espacio-tiempo como la singularidad que se encuentra cubierta por el horizonte de eventos. Por último, encontraremos que el interior de este agujero negro podrá ser modelado por una métrica cosmológica de Kantowski-Sachs la cual nos ayudará a aplicar el formalismo de cuantización por lazos para hallar la métrica efectiva.

6.1. Métrica de Schwarzschild

La métrica de un agujero negro de Schwarzschild es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.1)$$

donde $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2$. Esta métrica representa la única solución de un agujero negro estático y esféricamente simétrico. Cuando nos referimos a la propiedad de estaticidad es necesario primero definir la propiedad de estacionariedad.

Un espacio tiempo es estacionario si existe un grupo uniparamétrico de isometrías. ϕ_y , tal que sus órbitas son curvas temporales (*i.e.* $g_{ab}u^a u^b < 0$). La interpretación física de

estos grupos es que el espacio tiempo tiene la simetría de traslación temporal. Otra forma de declarar la estacionariedad, equivalente a la primera, es mediante la existencia de un campo vectorial de Killing temporal, ξ^a .

Se dice que un espacio-tiempo es estático si es estacionario y, además, existen hipersuperficies espaciales que son ortogonales al campo vectorial de Killing ξ^a . Matemáticamente podemos expresar este requerimiento por el teorema de Frobenius, el cual nos lleva a:

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0.$$

Por otro lado, decimos que un espacio es esféricamente simétrico si su grupo de isometrías contiene un subgrupo isomorfo al grupo $SO(3)$, y las órbitas de este subgrupo son esferas de dos dimensiones. Con lo anterior decimos que un espacio esféricamente simétrico es aquel que es invariante bajo rotaciones; es decir, posee campos vectoriales de Killing que satisfacen el algebra de Lie del grupo $SO(3)$.

La métrica presentada en la ec. (6.1) presenta dos singularidades: una es aparente y la otra es una singularidad verdadera. Esto se puede observar con el escalar de Krestchmann:

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (6.2)$$

esto nos indica que $r = 2M$ es una singularidad de coordenada y $r = 0$ es una singularidad genuina. La singularidad aparente se debe a nuestra elección de coordenadas, por lo que escogiendo otras coordenadas esa singularidad desaparece, y la segunda es irremovible para cualquier elección de coordenadas.

6.1.1. Diagrama de Penrose-Carter

Para estudiar la estructura causal del espacio-tiempo de un agujero negro de Schwarzschild es necesario realizar un cambio de coordenadas ya que (t, r) representan una mala elección para eventos cercanos al horizonte de eventos $r = 2M$, en este caso re-

sulta adecuado usar las coordenadas de Kruskal mediante una compactificación de esas nuevas coordenadas con la ayuda de la función arctan. Al hacer esta compactificación, podemos graficar (aparentemente) el espacio-tiempo en un intervalo finito. El diagrama de Penrose-Carter de un agujero negro de Schwarzschild es el siguiente:

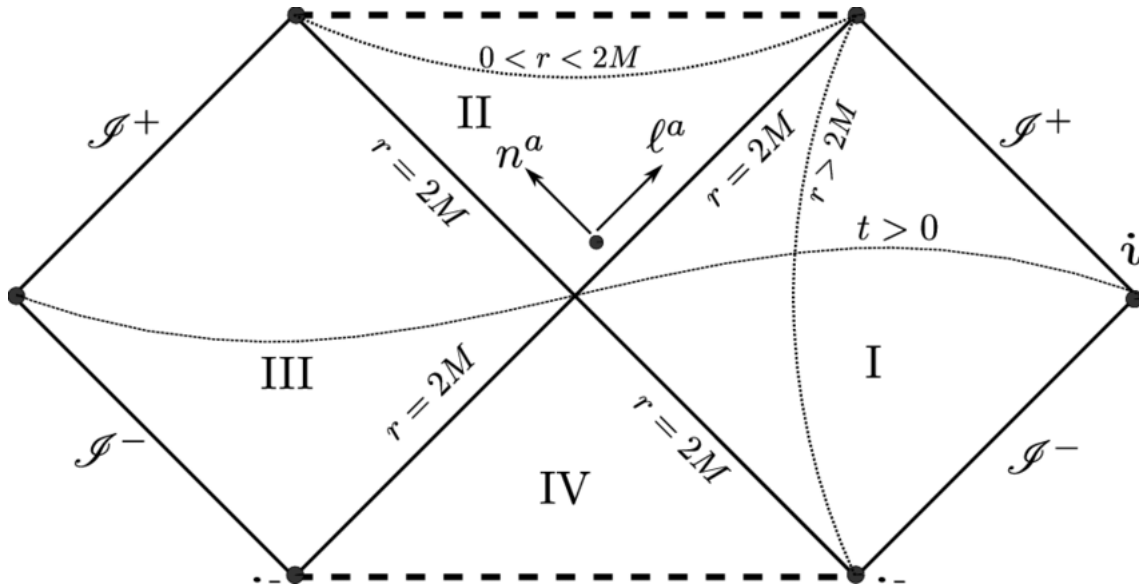


Figura 6.1: Figura tomada de [1]

Al hacer esta transformación podemos catalogar los distintos tipos de infinitos que existen en este espacio-tiempo. Podemos catalogarlos en los infinitos nulos: \mathcal{S}^+ (futuro) y \mathcal{S}^- (pasado), los infinitos espaciales: i , y los futuros temporales: i^+ (futuro) y i^- (pasado). Además, podemos observar que este diagrama contiene la singularidad verdadera en $r = 0$ y el horizonte de eventos $r = 2M$.

Se debe distinguir la superficie $r = 2M$ que separa las regiones **I-II** de la superficie $r = 2M$ que separa **I-IV**. Es evidente que los observadores que viven en **IV** no perciben los eventos de la región **I** y los que se encuentran en la región **I** no ven lo que sucede en la región **II**. Para distinguir estas dos superficies llamamos a la superficie que divide **I-II** como el horizonte futuro y a la otra superficie, como el horizonte pasado. La región **IV** también es llamada como un agujero blanco (White hole). Por último, hay que recalcar que no existe una trayectoria tal que se pase de la región **IV** y a la región **II**.

6.2. Interior como una métrica de Kantowski-Sachs

La métrica de la ec. (6.1) modela un agujero negro de estático y esféricamente simétrico. Es sabido que al cruzar el horizonte de eventos ($r = 2M$) no presenta ningún cambio físico y los problemas matemáticos se deben a una mala elección de coordenadas. Si realizamos un cambio de coordenadas (*i. e.* $t \leftrightarrow r$), entonces la métrica se convierte:

$$ds^2 = - \left(\frac{2M}{t} - 1 \right) dt^2 + \left(\frac{2M}{t} - 1 \right)^{-1} dr^2 + t^2 d\Omega^2, \quad (6.3)$$

donde ahora podemos pensar que el tiempo de Schwarzschild se ubica en el intervalo $(0, 2M)$. Esta métrica cae en una familia de espacio-tiempos conocida como las métricas de Kantowski-Sachs.

$$ds^2 = - \frac{dT^2}{F^2(T, x)} + X^2(T, x) dx^2 + Y^2(T, x) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (6.4)$$

donde $F(T, x)$ es un grado de libertad. Este conjunto de métricas tienen 4 campos vectoriales de Killing linealmente independientes, tres de ellos generan hipersuperficies S^2 con $T, x = \text{constantes}$; es decir, este espacio-tiempo contiene un grupo isomorfo al grupo $SO(3)$, por lo tanto, podemos decir que la métrica (6.4) es esféricamente simétrica [21]. Además, el campo vectorial de Killing restante se puede escribir como $\eta^a = (\partial/\partial x)^a$. Recordando que intercambiamos la coordenada temporal por la espacial, esto se puede interpretar como el campo vectorial de Killing temporal restante. Nos damos cuenta que la métrica de Kantowski-Sachs tiene las mismas simetrías que la métrica de Schwarzschild y podemos usar la primera como un modelo para el interior de un agujero negro de Schwarzschild. Haremos esto dado que usaremos las herramientas matemáticas de la Cosmología Cuántica de Lazos para hallar las correcciones cuánticas de la nueva métrica.

Por último, si comparamos la métricas (6.3) y (6.4). Podemos reducir la dependencia

de las funciones $F(T, x)$, $X(T, x)$ y $Y(T, x)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ds_{KS}^2 &= -N(T)^2 dT^2 + g_{xx}(T) dx^2 + g_{\vartheta\vartheta}(T) d\vartheta^2 + g_{\phi\phi}(T) d\phi^2 \\ &= -d\tau^2 + g_{xx}(\tau) dx^2 + g_{\Omega\Omega}(\tau) d\Omega^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde el τ es el tiempo propio, $d\Omega^2$ es el mismo diferencial del ángulo sólido. Por último, es evidente que los tiempos τ , T y t están relacionados de la siguiente forma:

$$d\tau^2 = N(T)^2 dT^2 = \left(\frac{2GM}{t} - 1 \right)^{-1} dt^2. \quad (6.6)$$

En conclusión, el interior de la métrica de Schwarzschild puede ser modelado por una métrica de Kantowski-Sachs que tiene las mismas simetrías $\mathbb{R} \times SO(3)$ y topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Esto nos ayudará a hallar su hamiltoniano así como aplicar las herramientas de cuantización de Loop Quantum Cosmology y así encontrar la métrica efectiva.

6.2.1. Métrica

La elección de la métrica es escogida de la siguiente forma:

$$ds^2 = -N^2 dT^2 + \frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} dx^2 + r_0^2 p_c (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\phi^2), \quad (6.7)$$

donde $N := N(t)$ es la función de lapso, p_b y p_c son funciones que dependen de la coordenada T . Escogemos la anterior métrica ya que toma el caso cuando $L_0 = 1$ que se reduce al caso utilizado en el artículo [10] y cuando $r_0 = 1$ se reduce al caso presentado en el artículo [11].

6.2.2. Símbolos de Christoffel

Ahora encontraremos los símbolos de Christoffel vía la ecuación de las geodésicas por medio del langragiano:

$$L = -N^2 \dot{T}^2 + \frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} \dot{x}^2 + r_0^2 p_c \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\vartheta) \dot{\phi}^2 \right), \quad (6.8)$$

donde $\dot{} = d/d\tau$ denota la derivada total del parámetro τ (tiempo propio para geodésicas temporales y algún parámetro afín para geodésicas nulas). Obteniendo las ecuaciones de movimiento para la coordenada T tenemos:

$$\ddot{T} + \frac{N^2}{N} \dot{T}^2 + \frac{1}{N^2} \frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c} \right) \dot{x}^2 + \frac{r_0^2 p'_c}{2N^2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{r_0^2 p'_c \sin^2 \vartheta}{2N^2} \dot{\phi}^2 = 0, \quad (6.9)$$

donde $' = d/dT$. La anterior ecuación nos permite obtener los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{TT}^T = \frac{N'}{N} \quad \text{y} \quad \Gamma_{xx}^T = \frac{1}{N^2} \left(\frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} \right) \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c} \right) \quad (6.10)$$

junto con:

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^T = \frac{r_0^2 p'_c}{2N^2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\phi\phi}^T = \frac{r_0^2 p'_c \sin^2 \vartheta}{2N^2}. \quad (6.11)$$

Siguiendo con la ecuación de movimiento para x del lagrangiano (6.8):

$$\ddot{x} + 2 \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c} \right) \dot{T} \dot{x} = 0, \quad (6.12)$$

lo cual nos lleva a los siguientes símbolos:

$$\Gamma_{Tx}^x = \frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c}. \quad (6.13)$$

Para la coordenada θ obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{p'_c}{p_c} \dot{T} \dot{\vartheta} - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (6.14)$$

Es directo ver que los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{T\vartheta}^{\vartheta} = \frac{p'_c}{2p_c} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (6.15)$$

Por último, para la coordenada ϕ se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\phi} + \frac{p'_c}{p_c} \dot{T} \dot{\phi} + 2 \cot \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\phi} = 0. \quad (6.16)$$

Los últimos símbolos de Christoffel están dado por:

$$\Gamma_{T\vartheta}^{\vartheta} = \frac{p'_c}{2p_c} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (6.17)$$

Estos símbolos serán de gran importancia al momento de calcular la ecuación de Raychaudhuri.

A lo largo de este capítulo se justificó la relación de las simetrías entre la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kantowski-Sachs para modelar el interior de un Agujero Negro esférico. Además, se calcularon los símbolos de Christoffel que serán de utilidad al calcular las cantidades geométricas involucradas en la ecuación de Raychaudhuri (5.16). Por último, definir la métrica de estudio nos ayudará a representar esta métrica con las variables de Ashtekar como veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Teoría clásica

En este capítulo escribiremos las ecuaciones el Hamiltoniano del sistema que corresponde al interior del Agujero Negro de Schwarzschild que será modelado por la métrica de Kantowski-Sachs en términos de las variables geométricas. Esto se logrará al imponer una métrica fiducial que tenga las mismas simetrías a la métrica original. Por último, veremos las soluciones a las variables canónicas del Hamiltoniano.

7.1. Métrica Fiducial

Como hemos mencionado en capítulos pasados, la porción del espacio-tiempo de Schwarzschild que le corresponde al interior del Agujero Negro es descrita por una métrica homogénea cosmológica con el mismo grupo de simetrías $\mathbb{R} \times SO(3)$. Esta métrica fiducial es una métrica auxiliar que se utiliza para construir y definir los estados cuánticos del espacio a través de las holonomías o nodos de esta métrica auxiliar, como se verá más adelante. Ésta misma se relaciona con la parte espacial de la métrica original mediante una transformación conforme. En el caso de cosmológico con un espacio-tiempo FRLW se usa una métrica fiducial (espacial) con topología \mathbb{R}^3 donde su factor conforme $a^2(t)$.

Para proceder de la cuantización de las rebanadas espaciales con topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ es conveniente usar la formulación Hamiltoniana de los minisuper-espacios como en los estudios previos [16]-[22]. El procedimiento estándar es definir una métrica fiducial ${}^\circ q_{ab}$ sobre

las rebanas antes mencionadas y definir su tríada ${}^o e_a^i$ y co-tríada ω_i^a .

A comparación de los modelos isótropos y homogéneos [16]-[22], esta variedad tiene sólo una dirección no compacta por lo que debemos introducir una distancia auxiliar L_0 para esta dirección. La elección de la métrica fiducial es de la forma de [10] y [11], que en contraste con las métricas propuestas por [9] sí tienen las dimensiones correctas. Esta propuesta considera la esfera, dada por \mathbb{S}^2 , de área $a_0 = 4\pi r_0^2$ y radio r_0 , el cual no necesariamente es el radio de Schwarzschild. En concreto, la propuesta de la métrica fiducial es:

$$ds_o^2 := dx^2 + r_o^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (7.1)$$

con determinante ${}^o q = r_o^4 \sin^2 \vartheta$. Hay que recalcar que este parámetro r_0 no es una complicación para tratar otras situaciones de agujero negro estático y esféricos ya que este parámetro puede ser tratado como un parámetro libre y abarcar todos los posibles interiores de agujeros negros. Además, escoger unas coordenadas diferentes para el mismo espacio-tiempo cambia la métrica fiducial, así como el factor conforme que relaciona la métrica fiducial con la parte espacial de la métrica original.

Para definir una estructura simpléctica se debe especificar una celda porque al realizar integrales sobre toda la variedad pueden diverger y dar como resultados infinitos no deseados en las cantidades físicas de interés. Por esto mismo se debe agregar la noción de una celda para restringir estas direcciones no compactas. Pero cuidando que estas cantidades físicas no dependan de la elección de la celda. En el caso de la métrica de FRLW, se toma una celda tipo caja de tamaño finita en las tres direcciones espaciales no compactas $[0, L_o] \times [0, L_o] \times [0, L_o]$ por ser homogéneos e isotrópos. En nuestro caso, sólo tenemos una sola dirección no compacta dado que \mathbb{S}^2 sí lo es. Por lo anterior, se restringe x en el intervalo $[0, L_o]$. Finalmente, el volúmen obtenido de la celda es $V_o = 4\pi r_o^2 L_o$.

Hasta este punto hemos introducido dos conceptos que pueden confundirse pero que son estructuras auxiliares distintas para la cuantización. Uno es la métrica fiducial y celda.

La métrica fiducial, como lo he explicado anteriormente, es una métrica de apoyo la cual nos ayudará a definir los estados cuánticos de la teoría y que está relacionada con la parte espacial de la métrica original mediante una transformación conforme. Por esta transformación conforme es válido aplicar los resultados obtenidos en la métrica fiducial hacia la métrica original. Por otro lado, la celda es otra estructura auxiliar que es útil para mantener finitas las direcciones no compactas de la métrica fiducial con la finalidad que las cantidades físicas no diverjan al calcularlas sobre toda la variedad y cuidando que estas cantidades físicas no dependan de esta celda. Esto es utilizado al cuantizar las cantidades físicas sobre espacio-tiempos con direcciones no compactas y, en nuestro caso, la métrica de Kantowski-Sachs tiene presente una dirección (x) no compacta.

Utilizando las simetrías del espacio-tiempo (y después de imponer la constricción de Gauss), la conexión y las tríadas pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$A_a^i \tau_i dx^a = \bar{c} \tau_3 dx + \bar{b} r_o \tau_2 d\vartheta - \bar{b} r_o \tau_1 \sin \vartheta d\phi + \tau_3 \cos \vartheta d\phi \quad (7.2)$$

y

$$E_i^a \tau_i \frac{\partial}{\partial x^a} = \bar{p}_c r_o^2 \tau_3 \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \bar{p}_b r_o \tau_2 \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \bar{p}_b r_o \tau_1 \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (7.3)$$

donde τ_i son los generadores de $SU(2)$ relacionados por la matrices de Pauli σ_i via $\tau_i = i\sigma_i/2$ y $\bar{b}, \bar{c}, \bar{p}_b, \bar{p}_c$ son las variables dinámicas. Este espacio fase es etiquetado por dos variables de configuración (\bar{b}, \bar{c}) y por sus momentos conjugados (\bar{p}_b, \bar{p}_c) . Este espacio fase de Relatividad General está definido sobre la hipersuperficie que son estas rebanadas espaciales escogidos al inicio del capítulo. Además, cuando estas variables canónicas son evolucionadas temporalmente dan lugar a una familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein. En este caso, dará como resultado a la familia de la solución de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos.

La estructura simpléctica de este espacio fase está dada por [11]:

$$\bar{\Omega} = \frac{L_o r_o^2}{2G\gamma} (2 d\bar{b} \wedge d\bar{p}_b + d\bar{c} \wedge d\bar{p}_c) \quad (7.4)$$

donde γ es el parámetro de Barbero-Immirzi. Este parámetro surge en el camino de pasar de lo clásico a la teoría cuántica. En la teoría cuántica, este determina las brechas entre los valores de su área Δ con $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$, donde ℓ_{Pl}^2 es la longitud de Planck. Su valor es fijado por $\gamma = 0.2375$ al usar las consideraciones de la entropía de agujeros negros.

Podemos notar que la estructura simpléctica depende explícitamente de la longitud L_o de la celda y del radio de la esfera r_o de la métrica $\overset{\circ}{q}_{ab}$. Esto nos dará problemas debido a que la física no debe depender de las dimensiones. Para resolver esto podemos redefinir las variables de configuraciones (\bar{b}, \bar{c}) y sus momentos conjugados (\bar{p}_b, \bar{p}_c) de la siguiente forma: $b = r_o\bar{b}$, $c = L_o\bar{c}$, $p_b = L_or_o\bar{p}_b$ y $p_c = r_o^2\bar{p}_c$. Donde los paréntesis de Poisson son:

$$\{c, p_c\} = 2G\gamma, \quad \{b, p_b\} = G\gamma. \quad (7.5)$$

La conexión gravitacional y las tríadas toman la forma de:

$$A_a^i \tau_i dx^a = \frac{c}{L_o} \tau_3 dx + b\tau_2 d\vartheta - b\tau_1 \sin \vartheta d\phi + \tau_3 \cos \vartheta d\phi \quad (7.6)$$

y

$$E_i^a \tau_i \partial_a = p_c \tau_3 \sin \vartheta \partial_x + \frac{p_b}{L_o} \tau_2 \sin \vartheta \partial_\vartheta - \frac{p_b}{L_o} \tau_1 \partial_\phi. \quad (7.7)$$

Podemos observar que bajo los escalamientos $r_o \rightarrow \beta r_o$ (donde β es una constante) la conexión (7.6) y las tríadas (7.7) son invariantes bajo esta transformación. Sin embargo, bajo los escalamientos de longitud de la celda $L_o \rightarrow \alpha L_o$ (α es una constante), obtenemos que $b \rightarrow b, c \rightarrow \alpha c, p_b \rightarrow \alpha p_b$ y $p_c \rightarrow p_c$. Con lo anterior, podemos concluir que las cantidades físicas sólo pueden depender de b, p_c o combinaciones de c/L_o y p_b/L_o .

7.2. Constricción Hamiltoniana

Dada una elección de tiempo t y su función de lapso asociado $N(t)$, cada punto del espacio fase define una métrica homogéneo con las isometrías de Kantowski-Sachs por

medio de la métrica:

$$g_{ab} dx^a dx^b \equiv ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{p_b^2}{|p_c| L_o^2} dx^2 + |p_c| (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (7.8)$$

Restringiendo $t < 2M$, podemos realizar la siguiente comparación con la métrica del interior de un Agujero Negro de Schwarzschild:

$$N(t) = \left(\frac{2m}{t} - 1 \right)^{-1} = \frac{|p_c| L_o^2}{p_b^2}, \quad \text{y} \quad |p_c| = t^2.$$

Para propósitos posteriores expresaremos explícitamente el volumen físico de la celda fiducial

$$V = \int d^3x \sqrt{\det q} = 4\pi L_o r_o^2 |\bar{p}_b| \left\| |\bar{p}_c|^{1/2} \right\| = 4\pi |p_b| \left\| |p_c|^{1/2} \right\| \quad (7.9)$$

Las superficies de interés son $S_{x,\varphi}$, $S_{x,\vartheta}$ y $S_{\vartheta,\varphi}$ las cuales están acotadas por el intervalo \mathcal{I} y el ecuador; \mathcal{I} y un círculo maximal a lo largo de una longitud; y el ecuador y una longitud (de tal forma que $S_{\vartheta,\varphi}$ es un cuarto de una esfera \mathbb{S}^2), respectivamente. Sus áreas están dadas por:

$$A_{x,\vartheta} = 2\pi |p_b|, \quad A_{x,\varphi} = 2\pi |p_b|, \quad \text{and} \quad A_{\vartheta,\varphi} = \pi |p_c| \quad (7.10)$$

Finalmente podemos considerar el Hamiltoniano de constricción y la dinámica clásica mediante la ec. (4.17) al introducir las constricciones del sistema. Esto se puede escribir cómo:

$$C_{\text{Ham}} = - \int d^3x e^{-1} \varepsilon_{ijk} E^{ai} E^{bj} (\gamma^{-2} F_{ab}^k - \Omega_{ab}^k), \quad (7.11)$$

donde usamos curvatura extrínseca $K_a^i = \gamma^{-1} (A_a^i - \Gamma_a^i)$, su curvatura ${}^\circ F_{ab}^k$ y $\Omega = -\sin \vartheta \tau_3 d\vartheta \wedge d\phi$ es la curvatura (7.4) que corresponde a la conexión de espín donde su conexión es $\Gamma = \cos \vartheta d\phi$ y $e := \sqrt{|\det E|} \text{sgn}(\det E)$. Al introducir todas estas cantidades, esto se traduce a tener una constricción Hamiltoniana de la siguiente forma:

$$C_{\text{class}} = - \frac{8\pi N \text{sgn}(p_c)}{\gamma^2} \left((b^2 + \gamma^2) \frac{p_b}{\sqrt{|p_c|}} + 2bc |p_c|^{1/2} \right), \quad (7.12)$$

esta se relaciona con el Hamiltoniano clásico como: $H_{\text{class}} = C_{\text{class}} / 16\pi G$. Por lo que haría falta fijar la última libertad de norma (función de lapso N) para encontrar las ecuaciones de movimiento que se realizará en la siguiente sección.

7.3. Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, es necesario fijar una función de lapso $N(t)$ y usar los paréntesis de Poisson (7.5). Al elegir $N = \gamma \operatorname{sgn}(p_c) |p_c|^{1/2} / b$ y usar (7.5), podemos encontrar las siguientes ecs. de movimiento:

$$b' = -\frac{1}{2} \left(b + \frac{\gamma^2}{b} \right), \quad p_b' = \frac{p_b}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{b^2} \right) \quad (7.13)$$

y

$$c' = -2c, \quad p_c' = 2p_c, \quad (7.14)$$

donde la derivada $'$ denota la derivada con respecto un parámetro afín T del Hamiltoniano. Las ecuaciones para el par. (c, p_c) se resuelven fácilmente dando resultado como $c(T) = c_0 e^{-2T}$ y $p_c(T) = p_c^{(0)} e^{2T}$. Por otro lado, el par (b, p_b) tiene como solución $b(T) = \pm \gamma \sqrt{e^{-(T-T_0)} - 1}$ y usando la constricción Hamiltoniana para encontrar p_b (i.e $\mathcal{C}_{\text{Ham}} \approx 0$ sobre la superficie de constricción), se obtiene $p_b(T) = p_b^{(0)} \sqrt{e^{T+T_0} - e^{2T}}$, donde $p_b^{(0)}$ es una constante de integración. Si introducimos un nuevo parámetro de tiempo $t := e^T$ y la constante T_0 se relaciona con otra constante $m := \frac{1}{2} e^{T_0}$, esto nos da que las ecuaciones de movimiento se escriben como:

$$\begin{aligned} b(t) &= \pm \gamma \sqrt{(2m - t)/t}, & p_b(t) &= p_b^{(0)} \sqrt{t(2m - t)}, \\ c(t) &= \mp \gamma m p_b^{(0)} t^{-2}, & p_c(t) &= t^2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde fijamos la contante de integración $p_c^{(0)} = 1$ en la ecuación 7.15 para p_c ya que requerimos que $|p_c|$ sea el radio geométrico de las órbitas sobre las 2-esfera. Más adelante podemos encontrarle un significado geométrico a estas nuevas variables que nos ayudarán a determinar el signo para b y c .

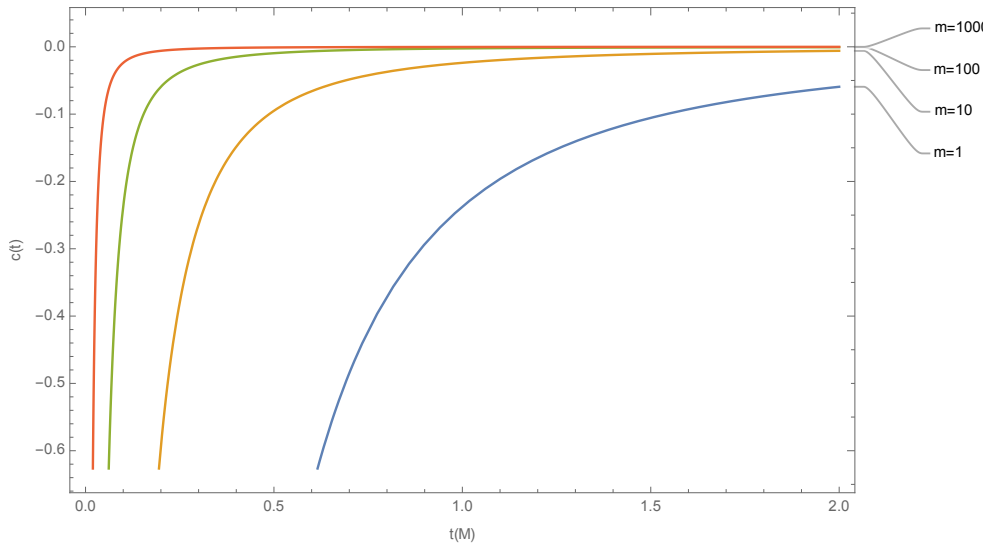


Figura 7.1: Gráfica de la variable c contra t donde se mide en unidades de $M = m$ en unidades naturales.

Notamos que las ecuaciones (7.15) son una familia de soluciones de 2 parámetros etiquetadas por m y $p_b^{(0)}$. Esto se espera ya que el espacio fase reducido es de dos dimensiones (c, b) . En contraste con la solución del Schwarzschild, esperamos que sólo dependan de un parámetro m . Esta discrepancia también aparece en los modelos de Bianchi [23] y en los modelos esféricamente simétricos ([24]-[25]).

En los anteriores, como en este caso, se puede observar que los escalamientos en $p_b^{(0)}$ no corresponden a una norma porque no son generados por alguna restricción, además, estos pueden ser absorbidos por la coordenada espacial x . Por lo tanto, como nuestro objetivo es hacer contacto con la descripción de un espacio tiempo es de nuestra conveniencia fijar $p_b^{(0)} = 1$. Ahora las soluciones (7.15) con $p_b^{(0)} = 1$ representan una familia uniparamétrica que definen con precisión el interior de un agujero negro de Schwarzschild con masa m . A partir de estos resultados clásicos, será útil notar que, en estas soluciones $p_c > 0$, $p_b = 0$ en el horizonte de eventos ($t = 2m$) y $p_c = 0$ y b junto con c divergen en la singularidad $t = 0$.

Como mencioné anteriormente es claro observar que $|p_c|$ es el cuadrado de los radios de las 2-esferas cayendo a la singularidad. Para entender mejor el rol de las variables de b y c podemos usar la elección de norma por la función de lapso $N = \gamma \operatorname{sgn}(p_c) |p_c|^{1/2} / b$ y

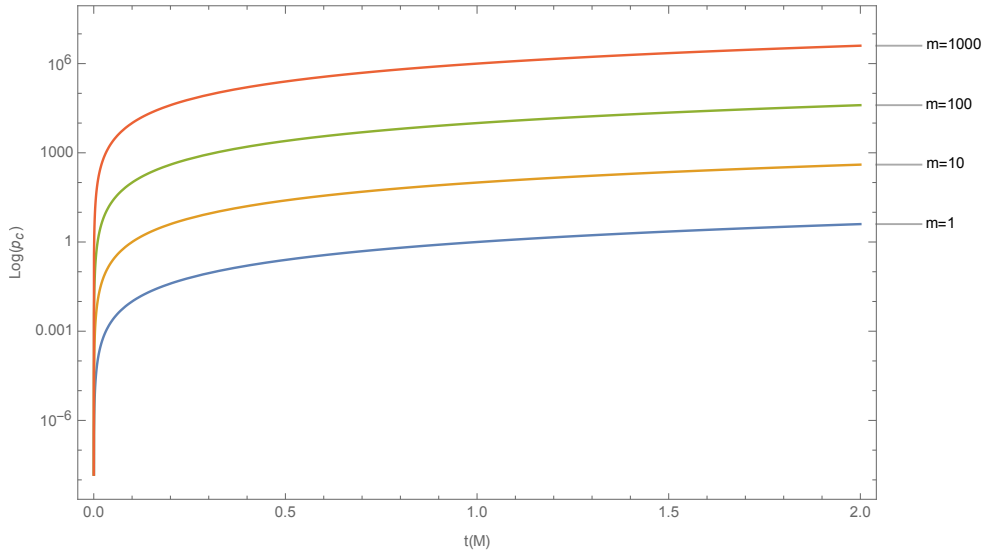


Figura 7.2: Gráfica del momento de p_c vs t en unidades de m .

reescribir la ec. de movimiento (7.14) de la siguiente forma:

$$b = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{p_c}} \frac{dp_c}{d\tau} = \gamma \frac{d}{d\tau} \sqrt{|p_c| (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{A_{\theta,\phi}}. \quad (7.16)$$

De la anterior ec. se puede deducir que la variable b es proporcional a la tasa de cambio de la raíz cuadrada de las áreas de las 2-esferas físicas. Por esta razón, a medida que el parámetro t se incrementa, esperamos que el área de las 2-esferas aumente también; es decir, seleccionamos + para $b(t)$.

Por otro lado, para interpretar el rol de c se usa el mismo método para encontrar un significado de c :

$$c = \gamma \frac{d}{d\tau} \left(\frac{p_b}{\sqrt{p_c}} \right) = \gamma \frac{d}{d\tau} (L_0 \sqrt{g_{xx}}). \quad (7.17)$$

Es decir, clásicamente c es proporcional a la tasa de cambios de la longitud física de la celda fiducial en un intervalo \mathcal{I} . Por el mismo razonamiento que para b , esperamos que c disminuya mientras t también aumente, esto implica que el signo es $-$. Se puede observar en la figura (7.1) que esta tasa de cambio indica que la celda se encoge al acercarse a la singularidad.

En este capítulo, usamos las variables de Ashtekar en la métrica de Kantowski-Sachs

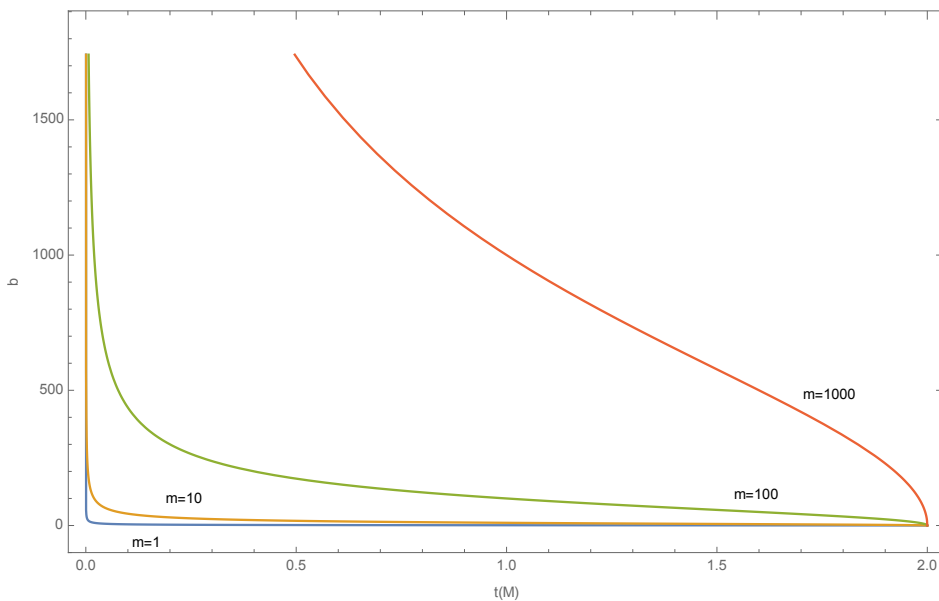


Figura 7.3: Gráfica del momento de b vs t en unidades de m .

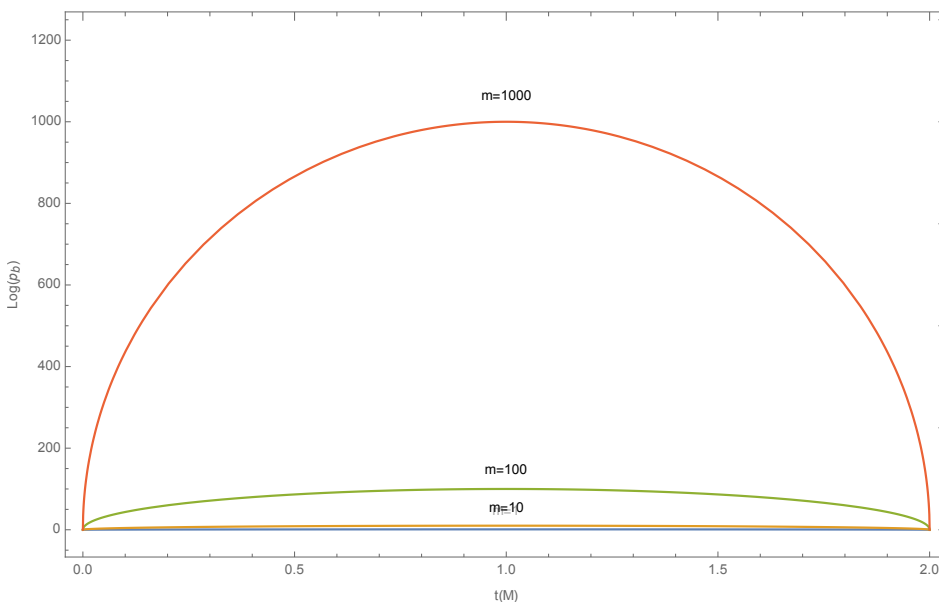


Figura 7.4: Gráfica de p_b vs t en unidades de m . Hay que recordar que p_b se puede obtener de la constricción Hamiltoniana o al resolver directamente las ecs. de movimiento.

y se encontró la constricción Hamiltoniana (7.12). Con esta constricción obtuvimos la evolución temporal de las variables canónicas b , c , p_b y p_c que al mismo tiempo le dimos una interpretación geométrica. Esto nos servirá de guía al momento de emplear las herramientas de Gravedad Cuántica de Lazos, como también de promover a operadores y encontrar un espacio de Hilbert adecuado para la física encontrada en este capítulo.

Capítulo 8

Cuantización por lazos

En este capítulo trataremos de resumir las herramientas usadas para encontrar las ecuaciones de diferencias al cuantizar los operadores geométricos asociados al espacio de Hilbert cinemáticos de la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos a la métrica de Kantowski-Sachs. Repasaremos brevemente cómo construir la constricción hamiltoniana a partir de las holonomías propuestas en los capítulos anteriores para después discutir sobre la dinámica cuántica de la teoría. Por último, se muestra cómo se propone la dinámica semiclásica y se presentan los esquemas de cuantización los cuales se van a comparar en esta tesis.

8.1. Cinemática Cuántica

Al igual que en el modelo isótropo [16], seguiremos el procedimiento general usado en la teoría completa [6]-[26]. Es decir, las variables de configuración elementales estarán dadas por las holonomías de curvas en la hipersuperficie espacial \mathcal{M} y los momentos por flujo de las tríadas a lo largo de las superficies bidimensionales de la misma hipersuperficie. Para hacer esto nos apoyaremos de las simetrías de la hipersuperficie espacial ya que con esto no es necesario escoger todas las curvas y las superficies posibles.

Comenzamos con las holonomías. Nos restringimos con tres conjuntos de curvas: aquellas que van en dirección de \mathbb{R} con una orientación τL_o ; aquellas en el ecuador en la esfera \mathbb{S}^2 con orientación μ y aquellas que se encuentran a lo largo de las longitudes de \mathbb{S}^2 con orientación μ , donde todas las longitudes y orientaciones están definidas a partir de la

tríada fiducial (7.3). Esto quiere decir que las orientaciones τ y μ son positivas (negativas) si el vector tangente de la respectivas curvas es paralela (antiparalela) al vector. Las holonomías a lo largo de las curvas debido a la conexión de espín (7.6):

$$h_x^{(\tau)}(A) = \exp \int_0^{\tau L_o} dx \bar{c} \tau_3 = \cos \frac{\tau c}{2} + 2\tau_3 \sin \frac{\tau c}{2}, \quad (8.1)$$

$$h_\varphi^{(\mu)}(A) = \exp - \int_0^\mu d\varphi \bar{b} \tau_1 = \cos \frac{\mu b}{2} - 2\tau_1 \sin \frac{\mu b}{2}, \quad (8.2)$$

$$h_\theta^{(\mu)}(A) = \exp \int_0^\mu d\theta \bar{b} \tau_2 = \cos \frac{\mu b}{2} + 2\tau_2 \sin \frac{\mu b}{2}. \quad (8.3)$$

Los elementos de matriz de estas holonomías son funciones de la conexión de espín y constituyen nuestras variables de configuración. Los elementos de este álgebra generan funciones cuasi-periodicas de b y c de la forma $f(b, c) = \sum_{\mu, \tau} f_{\mu\tau} \exp \frac{i}{2}(\mu b + \tau c)$, donde $f_{\mu, \tau} \in \mathbb{C}$, $\mu, \tau \in \mathbb{R}$ y la suma se extiende sobre un conjunto finito. Esta álgebra es la análoga de Kantowski-Sachs al álgebra de la funciones cilíndricas a la teoría completa [26]-[6].

8.1.1. Espacio de Hilbert \mathcal{H}

En la subsección anterior encontramos las funciones $f(b, c)$ que son generadas por álgebra anteriormente mencionada. Esta álgebra la denotamos con Cyl_{KS} . Al completar Cyl_{KS} usando la norma sup, se obtiene una C^* álgebra. De la estructura de este álgebra se obtiene que su espectro es isomorfo a la compactificación de Bohr $\overline{\mathbb{R}}_{\text{Bohr}}^2$ del grupo Abeliano \mathbb{R}^2 [27]. El espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ se obtiene mediante la terminación de Cauchy del álgebra de Cyl_{KS} con respecto a una medida de Haar μ_o sobre el grupo abeliano $\overline{\mathbb{R}}_{\text{Bohr}}^2$; $\tilde{\mathcal{H}} : L(\overline{\mathbb{R}}_{\text{Bohr}}^2, d\mu_o)$. Ahora, usando la notación de bra y ket, podemos definir una base de eigenectores $|\mu, \tau\rangle$ en este espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$\langle b, c | \mu, \tau \rangle = e^{\frac{i}{2}(\mu b + \tau c)} \quad \mu, \tau \in \mathbb{R}, \quad (8.4)$$

que naturalmente es una base ortonormal:

$$\langle \mu', \tau' | \mu, \tau \rangle = \delta(\mu' - \mu) \delta(\tau' - \tau), \quad (8.5)$$

donde este es la proyección del estado primado sobre el no primado y este se encuentra en términos de deltas de Dirac.

Los operadores de holonomía $\hat{h}_x^{(\tau)}$, $\hat{h}_\varphi^{(\mu)}$, $\hat{h}_\vartheta^{(\mu)}$ actúan por multiplicación en esta representación. Sin embargo, como sucede en la teoría completa, estos operadores no es necesario que sean débilmente continuos en los parámetros μ y τ , y a pesar de que sólo tenemos un número finito de grados de libertad, el teorema de unicidad de von-Neumann es inaplicable en esta ocasión. Se debe a que las holonomías son exponenciales de caminos ordenados de la conexión gravitacional A , y una de las condiciones del teorema de Von-Neumann es que los parámetros μ y τ no pueden estar en una teoría dinámica independiente de fondo de las conexiones [28]. Esto ocasiona que no se tenga una equivalencia a la representación de la cuantización de Schrödinger.

Los operadores de momento son representados por los operadores:

$$\hat{p}_b = -i\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 \frac{\partial}{\partial b}, \quad \hat{p}_c = -2i\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 \frac{\partial}{\partial c}. \quad (8.6)$$

Estos operador actúan de la siguiente forma a la base ortonormal $|\mu, \tau\rangle$:

$$\hat{p}_b|\mu, \tau\rangle = \frac{1}{2}\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\mu|\mu, \tau\rangle, \quad \hat{p}_c|\mu, \tau\rangle = \gamma\ell_{\text{Pl}}^2\tau|\mu, \tau\rangle$$

Además, nos hace falta incorporar la libertad de norma faltante que se relaciona con la reflexión de paridad en la variable b . Por lo tanto, únicamente los estados que pertenecen a $\tilde{\mathcal{H}}$ y además son invariantes bajo el operador de paridad $\hat{\Pi}_b : |\mu, \tau\rangle \rightarrow |-\mu, \tau\rangle$ pueden pertenecer al espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H} . La base sobre \mathcal{H} está dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|\mu, \tau\rangle + |-\mu, \tau\rangle]. \quad (8.7)$$

Ahora podemos expresar el operador de volumen en términos de los operadores \hat{p}_b, \hat{p}_c . Antes de esto, hay que recordar que la región de \mathcal{M} bajo consideración es del tipo $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, en la cual hemos definido una métrica fiducial. En esta métrica, el volumen es $V = 4\pi|p_b|\sqrt{|p_c|}$,

proponiendo lo anterior a un operador de volumen $\hat{V} = 4\pi |\hat{p}_b| \sqrt{|\hat{p}_c|}$. Lo anterior nos permite encontrar los eigenvalores de la base (8.7):

$$V_{\mu\tau} = 2\pi\gamma^{3/2} |\mu| \sqrt{|\tau|} \ell_{\text{Pl}} \quad (8.8)$$

8.2. Geometría cuántica

En el caso isotrópo los operadores de los momentos conjugados \hat{p}_b, \hat{p}_c conmutan entre sí, contrario al caso de la teoría completa. En esta sección estudiaremos la geometría Riemanniana cuántica a través de la representación de las tríadas.

Primero tomaremos un estado general ψ en el espacio de Hilbert \mathcal{H} y lo escribiremos en términos de los estados propios de estos operadores tríada:

$$|\psi\rangle = \sum_{\mu\tau} \psi_{\mu\tau} |\mu, \tau\rangle, \quad (8.9)$$

con los coeficientes $\psi_{\mu\tau}$ como representación del estado. Esta función de onda $\psi_{\mu\tau}$ encuentra soporte en la minisuperficie \mathcal{M} coordinizada por las variables p_b y p_c . Además, hay que recordar de las ecs. (7.15) que, clásicamente, las líneas $p_b = 0$ y $p_c = 0$ son especiales ya que la primera representa el horizonte de eventos y la segunda, la singularidad. En el primer caso la tríada se vuelve degenerada mientras que en el segundo caso diverge. Lo anterior nos indica que debemos preguntarnos sobre el comportamiento de la función de onda sobre las líneas $\mu = 0$ y $\tau = 0$.

A partir de la tríada encontradas en las ecs. (7.7) se puede encontrar las cotríadas donde sus componentes son $\omega_c = \text{sgn}(p_c) |p_b| / |p_c|$ y $\omega_b = \text{sgn} p_b \sqrt{|p_c|}$. Debido a que ω_c depende inversamente proporcional de p_c y existen estados normalizables donde $\tau = 0$, no nos es posible construir el operador $\hat{\omega}_c$ a través de una correspondencia directa de los operadores \hat{p}_b, \hat{p}_c . Para lograr construir este operador se sigue la estrategia de Thiemann [29]. Esta estrategia consta, a grandes rasgos, de escribir esta cotríada en términos de las variables

elementales de teoría, las cuales no poseen ambigüedades con sus respectivas correspondientes operadores cuánticos, y de los paréntesis de Poisson entre ellos. Por medio de este esquema ω_c se puede escribir de la siguiente forma:

$$\omega_c = \frac{1}{2\pi\gamma G} \text{Tr} (\tau_3 h_x \{h_x^{-1}, V\}) \quad (8.10)$$

donde h_x es la holonomía a lo largo del intervalo \mathcal{I} . Reemplazando h_x por la ecuación (8.1) y su paréntesis de Poisson por $1/i\hbar$ veces por su conmutador:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_c &= -\frac{i}{2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2} \text{Tr} \left(\tau_3 \hat{h}_x \left[\hat{h}_x^{-1}, \hat{V} \right] \right) \\ &= -\frac{i}{2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2} \left(\sin \frac{\delta_{c\mathcal{C}}}{2} \hat{V} \cos \frac{\delta_{c\mathcal{C}}}{2} - \cos \frac{\delta_{c\mathcal{C}}}{2} \hat{V} \sin \frac{\delta_{c\mathcal{C}}}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Este operador es diagonalizable por nuestra base:

$$\hat{\omega}_c |\mu, \tau\rangle = \frac{1}{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2} (V_{\mu, \tau+1} - V_{\mu, \tau-1}) |\mu, \tau\rangle = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \ell_{\text{Pl}} |\mu| (\sqrt{|\tau+1|} - \sqrt{|\tau-1|}) |\mu, \tau\rangle \quad (8.12)$$

Para grandes valores de τ (lejos de la singularidad), estos valores propios se aproximan a los valores clásicos. Por otro lado, cerca de la singularidad clásica $p_c = 0$ el comportamiento se vuelve completamente diferente. El valor propio de $\hat{\omega}_c$ es cero donde $|p_b| / \sqrt{|p_c|}$ diverge clásicamente.

Por último, hace falta encontrar el operador correspondiente para la componente de la cotriada $\omega_b = \text{sgn } p_b \sqrt{|p_c|}$. Al contrario de $\hat{\omega}_c$, tenemos que $\sqrt{|\tau|}$ es una función bien definida en todo el espectro de \hat{p}_c y podemos cuantizar de manera directa el ω_b . Además, es diagonalizable como el operador $\hat{\omega}_c$ bajo la misma base de la siguiente forma:

$$\hat{\omega}_b |\mu, \tau\rangle = \sqrt{\gamma} \ell_{\text{Pl}} \text{sgn}(\mu) \sqrt{|\tau|} |\mu, \tau\rangle. \quad (8.13)$$

Es de esperarse que, al ser cuantizado de forma directa, los eigenvalores no difieran de las expresiones clásicas de ω_b .

Las propiedades de los operadores de co-tríada sugieren que las líneas de $\mu = 0$ y $\tau = 0$ poseen características diferentes que al comportamiento clásico ($p_b = 0$ y $p_c = 0$ respectivamente). Por ejemplo, cerca de los valores de $\tau = 0$ que representan la singularidad, las correcciones cuánticas son grandes y podemos inferir que se remueve la singularidad clásica al no diverger más. Por otro lado, en la línea $\mu = 0$ no representa cambios, sin embargo, esta línea representa el horizonte eventos y debido a la elección de la carta de coordenadas nos encontraremos con singularidades removibles al usar otro tipo de coordenadas.

A pesar de que se presentan indicios que la singularidad genuina es removida, esto no puede ser una conclusión definitiva ya que sólo la dinámica cuántica de la teoría nos dirá si la singularidad persiste a lo largo de sus soluciones.

8.3. Dinámica cuántica

En esta sección abordaremos el cómo escribir la constricción Hamiltoniana \mathcal{C} dada la ec. (4.17) pero nos restringiremos al espacio-tiempo de Kantowski-Sachs; es decir, usaremos las simetrías de la variedad para simplificar la constricción y llegar al operador de constricción que nos da las ecuaciones de Einstein cuánticas para que en la siguiente sección se puedan escribir las correcciones efectivas a la dinámica.

Primero comenzamos con la constricción de la teoría completa:

$$\mathcal{C}_{\text{Ham}} = \int d^3x N e^{-1} \left[\epsilon_{ijk} E^{ai} E^{bj} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) E_i^a E_j^b K_{[a}^i K_{b]}^j \right]. \quad (8.14)$$

Se puede observar que es posible realizar simplificaciones debido las homogeneidades del espacio (recordar que aquí no tenemos la propiedad isotrópa). Además, la conexión A y la conexión del espín Γ están relacionadas con la curvatura extrínseca via $A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i$, donde $\Gamma_a^i = \cos\vartheta d\phi$ es la conexión del monopolo magnético. De lo anterior podemos obtener la expresión para la curvatura que anteriormente habíamos escrito como $\Omega = -\sin\vartheta_{\tau_3} d\vartheta \wedge d\phi$.

Ahora, la curvatura de la conexión completa A puede ser expandida de la siguiente forma:

$$F_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]} + [A_a, A_b] = \Omega_{ab} + 2\gamma\partial_{[a}K_{b]} + \gamma^2 [K_a, K_b] + \gamma [\Gamma_a, K_b] - \gamma [\Gamma_b, K_a] \quad (8.15)$$

Para reducir aún más la constricción es necesario calcular los siguiente conmutadores usando los expresiones para Γ y su relación con K :

$$[\Gamma, \gamma K] = b\tau_2 \cos \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi = -\gamma dK, \quad \epsilon_{ijk} (\partial_{[a}K_{b]}^i) E_j^a E_k^b = 0 \quad (8.16)$$

Usando las ecs. (8.16), podemos simplificar la constricción Hamiltoniana \mathcal{C} 4.17:

$$\mathcal{C}_{\text{Ham}}(x) = e^{-1} E^{ai} E^{bj} \left(\epsilon_{ijk} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right) = e^{-1} E^{ai} E^{bj} \left(\epsilon_{ijk} \Omega_{ab}^k - 2K_{[ai} K_{bj]} \right). \quad (8.17)$$

Para pasar a la teoría cuántica sólo es necesario reescribir (8.17) como también a la curvatura Ω y la curvatura extrínseca K en términos de las holonomías y las tríadas.

Usando (8.16) en la ec. (8.17) se puede escribir $\mathcal{C}_{\text{Ham}}(x)$ en términos de F y Ω :

$$\mathcal{C}_{\text{Ham}}(x) = \frac{1}{\gamma^2} \epsilon_{ijk} e^{-1} E^{ai} E^{bj} \left[(1 + \gamma^2) \Omega_{ab}^k - F_{ab}^k \right]. \quad (8.18)$$

Las holonomías de la curvatura extrínseca a lo largo de las x , ϑ y ϕ se convierten a las holonomías (8.1), (8.2) y (8.3) calculadas en el ecuador. Para ser precisos escogemos los lazos en los planos $x - \vartheta$, $x - \phi$ y $\vartheta - \phi$. La longitud a lo largo de x (dirección de \mathbb{R}) es $\delta_c \ell_c$ con $\ell_c = L_o$ y los lados a lo largo del ecuador y las longitudes en el ecuador de \mathbb{S}^2 son $\delta_b \ell_b$ cada uno con $\ell_b = r_o$. Por lo tanto, el término $\epsilon_{ijk} e^{-1} E^{ai} E^{bj}$ puede ser expresado de la siguiente manera en términos de la co-tríadas y las holonomías usando las identidades del espacio fase clásico:

$$\epsilon_{ijk} e^{-1} E^{aj} E^{bk} = \sum_k \frac{{}^o \epsilon_{abc} {}^o \omega_c^k}{2\pi\gamma G \delta_{(k)} \ell_{(k)}} \times \text{Tr} \left(h_k^{(\delta_{(k)})} \left\{ \left(h_k^{(\delta_{(k)})} \right)^{-1}, V \right\} \tau_i \right) \quad (8.19)$$

donde $\delta_{(i)}$ (y $\ell_{(i)}$) corresponden δ_b o δ_c (es decir, L_o o r_o) dependiendo de la dirección donde la holonomía es calculada, ya que puede ser en una dirección angular δ_b y r_o o en la dirección no compacta δ_c . y L_o . Por otro lado, clásicamente el tensor de curvatura se puede escribir en términos de las holonomías de la siguiente manera:

$${}^o F_{ab}^k = -2 \lim_{Ar_{\square} \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\frac{h_{\square_{ij}}^{(\delta_{(i)}, \delta_{(j)})} - 1}{\delta_{(i)} \delta_{(j)} \ell_{(i)} \ell_{(j)}} \right) \tau^k \omega_a^i \omega_b^j, \quad (8.20)$$

donde

$$h_{\square_{ij}}^{(\delta_{(i)}, \delta_{(j)})} = h_i^{(\delta_{(i)})} h_j^{(\delta_{(j)})} \left(h_i^{(\delta_{(i)})} \right)^{-1} \left(h_j^{(\delta_{(j)})} \right)^{-1}. \quad (8.21)$$

Debido a la discretización de la geometría cuántica, el lazo \square_{ij} formado por las holonomías (8.21) no puede encogerse hasta un área cero, por lo que el límite de la ecuación (8.20) deberá tender a un área definida en la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos: $\Delta = \beta \ell_{\text{Pl}}^2$,

$${}^o F_{ab}^k = -2 \lim_{Ar_{\square} \rightarrow \Delta} \text{Tr} \left(\frac{h_{\square_{ij}}^{(\delta_{(i)}, \delta_{(j)})} - 1}{\delta_{(i)} \delta_{(j)} \ell_{(i)} \ell_{(j)}} \right) \tau^k \omega_a^i \omega_b^j, \quad (8.22)$$

donde β es del orden de la unidad y ℓ_{Pl}^2 es la longitud de Planck [16]. Por lo tanto, el área del lazo de $x - \vartheta$ y $\vartheta - \phi$ está restringido a $\delta_b r_o \delta_c L_o = \Delta$. En esta tesis nos restringiremos en los esquemas de cuantización μ [10, 9, 11]; es decir, donde las δ 's son constantes. Por otro lado existen otros casos donde estas δ 's tienen una dependencia de los momentos conjugados de p_b o p_c (esquema de cuantización 'improved'). Más adelante, hablaremos sobre dos esquemas de cuantización μ distintos.

Combinando las ecs. (8.19) y (8.20) en (8.18) obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C^{(\delta_b, \delta_c)} = & -\frac{2}{\gamma^3 G \delta_b^2 \delta_c} \left[2\gamma^2 \delta_b^2 \text{Tr} \left(\tau_3 h_x^{(\delta_c)} \left\{ \left(h_x^{(\delta_c)} \right)^{-1}, V \right\} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{ijk} \varepsilon^{ijk} \text{Tr} \left(h_{\square_{ij}}^{(\delta_{(i)}, \delta_{(j)})} h_k^{(\delta_{(k)})} \left\{ \left(h_k^{(\delta_{(k)})} \right)^{-1}, V \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Promoviendo a operador la ec. (8.23):

$$\begin{aligned}
 \hat{C}^{(\delta_b, \delta_b)} = & \frac{32i}{\gamma^3 \delta_b^2 \delta_c} \left[\sin\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \hat{V} \cos\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \hat{V} \sin\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\sin^2\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\delta_b b}{2}\right) + \frac{1}{4} \gamma^2 \delta_b^2 \right) \left(\sin\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \hat{V} \cos\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \hat{V} \sin\left(\frac{\delta_c c}{2}\right) \right) \right] \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Sin embargo, mientras que la constricción clásica es una función real en el espacio cinemático en su espacio fase, $\hat{C}^{(\delta_b, \delta_b)}$ no es autodjunta en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Por lo anteriores, necesitamos agregar su operador adjunto; es decir, simetrizar la operador (8.24):

$$\hat{C}_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)} = (1/2) \left(\hat{C}^{(\delta_b, \delta_c)} + \hat{C}^{(\delta_b, \delta_c)\dagger} \right). \quad (8.25)$$

Este operador $\hat{C}_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)}$ actuando sobre los estados $\Psi(\mu, \tau) = \langle \Psi | \mu, \tau \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)} \Psi(\mu, \tau) = & \frac{1}{2\gamma^3 \delta_b^2 \delta_c \ell_{\text{Pl}}^2} [(V_{\mu+\delta_b, \tau} - V_{\mu-\delta_b, \tau} + V_{\mu+3\delta_b, \tau+2\delta_c} \\
 & - V_{\mu+\delta_b, \tau+2\delta_c}) \Psi(\mu + 2\delta_b, \tau + 2\delta_c) \\
 & + (V_{\mu-\delta_b, \tau} - V_{\mu+\delta_b, \tau} + V_{\mu+\delta_b, \tau-2\delta_c} - V_{\mu+3\delta_b, \tau-2\delta_c}) \Psi(\mu + 2\delta_b, \tau - 2\delta_c) \\
 & + (V_{\mu-\delta_b, \tau} - V_{\mu+\delta_b, \tau} + V_{\mu-3\delta_b, \tau-2\delta_c} - V_{\mu-\delta_b, \tau+2\delta_c}) \Psi(\mu - 2\delta_b, \tau + 2\delta_c) \\
 & + (V_{\mu+\delta_b, \tau} - V_{\mu-\delta_b, \tau} + V_{\mu-\delta_b, \tau-2\delta_c} - V_{\mu-3\delta_b, \tau-2\delta_c}) \Psi(\mu - 2\delta_b, \tau - 2\delta_c) \\
 & + \frac{1}{2} [(V_{\mu, \tau+\delta_c} - V_{\mu, \tau-\delta_c} + V_{\mu+4\delta_b, \tau+\delta_c} - V_{\mu+4\delta_b, \tau-\delta_c}) \Psi(\mu + 4\delta_b, \tau) \\
 & + (V_{\mu, \tau+\delta_c} - V_{\mu, \tau-\delta_c} + V_{\mu-4\delta_b, \tau+\delta_c} - V_{\mu-4\delta_b, \tau-\delta_c}) \Psi(\mu - 4\delta_b, \tau)] \\
 & + 2(1 + 2\gamma^2 \delta_b^2) (V_{\mu, \tau-\delta_c} - V_{\mu, \tau+\delta_c}) \Psi(\mu, \tau) \quad (8.26)
 \end{aligned}$$

donde hay que recordar que estos estados $\Psi(\mu, \tau)$ deben satisfacer la invariancia ante paridad para b , es decir, $\hat{\Pi}_b \Psi(\mu, \tau) = \Psi(-\mu, \tau)$.

Si uno considera que τ es un reloj dado que el parámetro τ está asociada a la direc-

ción no compacta de la métrica fiducial, entonces la evolución ocurre en pasos de $2\delta_c$. Si especificamos que los pasos iniciales son $\tau = 2n\delta_c$ y $\tau = 2(n-1)\delta_c$, entonces es evidente que podemos evolucionar hacia atrás la ecuación a través de la singularidad clásica $\tau = 0$. Para mostrar lo anterior tomemos el caso cuando $\mu = n\delta_b$ donde n es un entero positivo mayor que 4, ya que si tomamos un valor $n < 4$ el comportamiento de la ec. (8.26) cambia pero preserva su comportamiento no singular en $\tau = 0$. Tomando $n > 4$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{|\tau|} + \sqrt{|\tau + 2\delta_c|} \right) \left(\Psi_{(n+2)\delta_b, \tau+2\delta_c} - \Psi_{(n-2)\delta_b, \tau+2\delta_c} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\sqrt{|\tau + \delta_c|} - \sqrt{|\tau - \delta_c|} \right) \left[(n+2)\Psi_{(n+4)\delta_b, \tau} \right. \\
 & \left. + (n-2)\Psi_{(n-4)\delta_b, \tau} - 2n(1 + 2\gamma^2\delta_b^2) \Psi_{n\delta_b, \tau} \right] \\
 & + \left(\sqrt{|\tau|} + \sqrt{|\tau - 2\delta_c|} \right) \left(\Psi_{(n-2)\delta_b, \tau-2\delta_c} - \Psi_{(n+2)\delta_b, \tau-2\delta_c} \right) \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Dado que el término $(\Psi_{(n-2)\delta_b, \tau-2\delta_c} - \Psi_{(n+2)\delta_b, \tau-2\delta_c})$ nunca es cero, podemos usar la ecuación anterior para determinar los valores negativos de τ comenzando de una evolución de valores positivos a negativos. Esto es un indicio que 'evolucionar' a través de la singularidad es permitido. Sin embargo, esto no es más que un indicio, y no una demostración de la resolución de la singularidad clásica bajo esta cuantización. Para tener un desarrollo más detallado de la solución, es necesario construir un espacio de Hilbert físico y encontrar los valores esperados de las observables de Dirac (como en el caso isotrópico [30]).

Esta ecuación de diferencias se logra reducir al mismo operador de [16], salvo un factor 2 multiplicando el último término del miembro derecho de la ec. (8.26). En [16], consideran el hecho que $\delta_b = \delta_c$ y, a pesar de esta diferencia, varias propiedades de su ecuación de diferencias se mantienen similar a la ec. (8.26) incluyendo la naturaleza no-singular de las ecuaciones de diferencias.

8.4. Dinámica semiclásica

Es oportuno recordar que la ec. (8.23) representa la constricción hamiltoniana de la métrica de Kantowski-Sachs escrita en términos de las holonomías descritas por los lazos de la sección anterior. Más explícitamente, la ec. (8.23) está expresada en funciones trigonométricas de las holonomías que además contienen información de las longitudes mínimas en cada uno de los lazos (δ_b, δ_c) . Reescribiendo la ec. (8.23):

$$H_{\text{eff}}^{(N)} := C^{(\delta_b, \delta_c)} = -\frac{N}{2G\gamma^2} \left[\left(\frac{\sin^2(\delta_b b)}{\delta_b^2} + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} + 2 \frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b} \frac{\sin(\delta_c c)}{\delta_c} \sqrt{p_c} \right], \quad (8.28)$$

donde podemos obtener la constricción clásica (7.12) a partir del límite $\delta_b \rightarrow 0$ y $\delta_c \rightarrow 0$. Esta ec. (8.28) es llamada como Hamiltoniano efectivo.

Para obtener este hamiltoniano efectivo se hace uso de la formulación geométrica de la mecánica cuántica empleada en las subsecciones anteriores donde obtuvimos el operador de la constricción hamiltoniana $\hat{C}_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)}$ de la ec. (8.26). Para adquirir el hamiltoniano efectivo uno buscaría encontrar el valor esperado de $\langle C_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)} \rangle_\psi$ sobre un estado apropiado semi-clásico ψ . Eso nos ayuda para reemplazar el hamiltoniano clásico por el hamiltoniano efectivo $H \rightarrow H_{\text{eff}}^N$ en las ecuaciones de movimiento mediante el uso de paréntesis de Poisson $\dot{q} = \{q, \mathcal{C}_{\text{eff}}\}$ y $\dot{p} = \{p, \mathcal{C}_{\text{eff}}\}$, con (q, p) como variables canónicas del espacio fase clásico Γ .

Sin embargo, este procedimiento está lleno de sutilezas las cuales vamos a describir para justificar la forma de capturar la dinámica semi-clásica de nuestro análisis.

Este espacio de Hilbert puede ser visto como un espacio simpléctico por medio de su producto interior y su parte imaginaria sobre los estados normalizados:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{2\hbar} G_{\mathcal{H}}(\phi, \psi) + \frac{i}{2\hbar} \Omega_{\mathcal{H}}(\phi, \psi) \quad (8.29)$$

donde $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ y $G_{\mathcal{H}}$ da una métrica Riemanniana y $\Omega_{\mathcal{H}}$ una estructura simpléctica sobre los estados normalizados de \mathcal{H} [31]. Para ser más claros, llamaremos Γ_Q como el subconjunto de estados normalizados de \mathcal{H} . Esto nos ayudará a hacer contraste con su contraparte clásica.

Por otro lado, el tratamiento clásico podemos definir una función F sobre el espacio fase clásico Γ donde se construye el campo vectorial Hamiltoniano asociado con F apoyandose de la estructura simpléctica:

$$X_{(F)}^a = \Omega^{ab} \nabla_b F \quad (8.30)$$

Regresando a lo cuántico, para cada observable \hat{F} se puede definir una función $\bar{F} := \langle \hat{F} \rangle$ sobre estados normalizados de \mathcal{H} donde existe un campo vectorial Hamiltoniano para cada función \bar{F} : $X_{\bar{F}}^\alpha = \Omega_{\mathcal{H}}^{\alpha\beta} \partial_\beta \bar{F}$. Además, el conmutador de observables en \mathcal{H} y con el correspondiente paréntesis de Poisson $\{\bar{F}, \bar{G}\}_{\mathcal{H}} := \Omega_{\mathcal{H}}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{F} \partial_\beta \bar{G}$ queremos que satisfagan la relación:

$$\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle = i\hbar \{\bar{F}, \bar{G}\}_{\mathcal{H}}, \quad (8.31)$$

por la cuantización de Dirac. Lo anterior nos provee un punto de vista donde la dinámica cuántica puede ser analizada como un campo vectorial $X_{\bar{H}}^\alpha$ donde $\bar{H} = \langle C_{SA}^{(\delta_b, \delta_c)} \rangle_\psi$.

Una pregunta que debemos responder para encontrar las ecuaciones efectivas es: ¿Cómo podemos relacionar la evolución cuántica de estados en Γ_Q con la evolución clásica sobre el espacio fase clásico Γ ? La idea es simple, es proyectar la dinámica sobre Γ_Q a Γ por medio de funciones de coordenadas apropiadas. El espacio fase clásico Γ tiene coordenadas (q^i, p_j) , mientras que el espacio de Hilbert \mathcal{H} tiene operadores (\hat{q}^i, \hat{p}_j) . Ahora se puede definir una proyección Π de la función de onda Ψ a $(\langle \hat{q}^i \rangle_\Psi, \langle \hat{p}_j \rangle_\Psi)$, es decir, $\Pi : \Gamma_Q \rightarrow \Gamma$. Esta proyección nos permite tomar un estado cuántico Ψ y encontrar su correspondiente par ordenada (q^i, p_j) en estado fase clásico Γ por medio de los valores esperados de esta función de onda. Sin embargo, sabemos que si tomamos la evolución de un estado Ψ y mapeamos esta evolución con la proyección Π hacia Γ , es muy probable que esta trayectoria no sea una solución clásica, dado que la evolución de Ψ está regida por el operador de constricción

hamiltoniana. Por lo anterior será necesario definir formalmente las trayectorias cuánticas (evolución de un estado cuántico) que sí pueda ser utilizada en el mapeo Π ; es decir, que esta trayectoria cuántica tenga una correspondencia en el espacio fase clásico Γ .

Podemos definir una trayectoria cuántica $\Upsilon_t(\Psi)$ sobre Γ_Q que está compuesta por la evolución de un estado cuántico Ψ y, por lo tanto, definir la trayectoria clásica proyectada γ_t sobre Γ como: $\gamma_t = \Pi(\Upsilon_t)$. Ahora buscaremos que el Hamiltoniano efectivo de la ec. (8.28) se encuentre definida sobre el espacio fase Γ ; es decir, que sea descrito por las variables canónicas y algunos parámetros extras tal que la trayectoria $\gamma_t = (\bar{q}^i, \bar{p}_j)$ satisfaga las ecuaciones de Hamilton $\dot{\bar{q}}^i = \{\bar{q}^i, H_{\text{eff}}\}$ y $\dot{\bar{p}}_j = \{\bar{p}_j, H_{\text{eff}}\}$. Para que estas condiciones se satisfagan, uno debe escoger un estado inicial con el fin de seleccionar una trayectoria preferente Υ_t que sea la evolución cuántica de los estados Ψ en \mathcal{H} .

En la práctica uno busca algo más simple, se utiliza el enfoque de incrustación (embedding approach), más explícito es tomar una subvariedad $\bar{\Gamma}_Q$ de Γ_Q donde en $\bar{\Gamma}_Q$ se encuentren todos los estados cuánticos Ψ_{γ^o} que tengan centrados una trayectoria clásica γ^o de Γ ; es decir, tomamos la evolución de estados semi-clásicos. Esperamos que el mapeo $\Pi : \bar{\Gamma}_Q \rightarrow \Gamma$ capture aproximadamente la dinámica cuántica de los estados semi-clásicos. Para definir $\bar{\Gamma}_Q$ para cualquier punto $\gamma_0 = (q_i^o, p_j^o) \in \Gamma$ uno describe un estado cuántico Ψ_{γ^o} y el primer requisito de incrustación debe ser tal que el punto inicial γ_0 sea idéntico a los valores esperados de los operadores (\hat{q}^i, \hat{p}_j) sobre la función de onda descrita Ψ_{γ^o} en el punto γ_0 ; esto quiere decir, $q_i^o = \langle \Psi_{\gamma^o} \hat{q}_i \Psi_{\gamma^o} \rangle$ y $p_j^o = \langle \Psi_{\gamma^o} \hat{p}_j \Psi_{\gamma^o} \rangle$.

La segunda condición es más dinámica y no trivial; está requiere que el campo vectorial Hamiltoniano formado por la estructura simpléctica $\Omega_{\mathcal{H}}^{\alpha\beta}$ debe ser aproximadamente tangente a \mathcal{H} visto como un espacio simpléctico. Si esto sucede, uno puede proyectar la trayectoria semi-clásica $\bar{\Upsilon}_t$ sobre Γ para obtener la trayectoria clásica $\gamma_t = \Pi(\bar{\Upsilon}_t)$. Es directo considerar como el candidato al H_{eff} , el valor esperado del Hamiltoniano cuántico incrustado en la sub-variedad: $H_{\text{eff}}(q_i^o, p_j^o) := \langle \Psi_{\gamma^o} \hat{C}_{\text{SA}}^{(\delta_b, \delta_c)} \Psi_{\gamma^o} \rangle$, donde Ψ_{γ^o} representa un estado semi-clásico. Al terminar toda esta justificación, podemos utilizar al Hamiltoniano

efectivo (8.28) como sustitución del Hamiltoniano clásico y que además captura las correcciones cuánticas. Para ver más acerca de la obtención del Hamiltoniano efectivo en métricas de Bianchi o FRLW véase [32].

Haciendo la transformación $H \rightarrow H_{\text{eff}}^N$, las ecuaciones de movimiento dado los paréntesis de Poisson $\{c, p_c\} = 2G\gamma$ y $\{b, p_b\} = G\gamma$:

$$b' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b} + \gamma^2 \frac{\delta_b}{\sin(\delta_b b)} \right) \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} p'_b &= \frac{1}{2} \cos(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right) \\ c' &= -2 \frac{\sin(\delta_c c)}{\delta_c} \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$y \quad p'_c = 2p_c \cos(\delta_c c),$$

donde ' son derivadas con respecto a T . Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son directas y pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$b(T) = \pm \frac{1}{\delta_b} \cos^{-1} \left[b_o \tanh \left(\frac{1}{2} (b_o T + 2 \tanh^{-1}(1/b_o)) \right) \right] \quad (8.34)$$

donde

$$\begin{aligned} b_o &= (1 + \gamma^2 \delta_b^2)^{1/2}, \\ c(T) &= \frac{2}{\delta_c} \tan^{-1} \left(\mp \frac{\gamma L_o \delta_c}{8m} e^{-2T} \right), \\ p_c(T) &= 4m^2 \left(e^{2T} + \frac{\gamma^2 L_o^2 \delta_c^2}{64m^2} e^{-2T} \right), \end{aligned} \quad (8.35)$$

en la solución para p_b se usa el hecho que $H_{\text{eff}}^{(N)} \approx 0$. Podemos ver que para la ec. (8.34) es una solución homogénea hasta que cumple con la igualdad trigonométrica $\cos \delta_b b \geq -1$. Podemos usar un cambio de variable de $t = 2me^T$ para presentar la ec. (8.34) de la siguiente forma [13]:

$$\cos(\delta_b b(t)) = b_o \left[\frac{(b_o + 1) - \left(\frac{2m}{t}\right)^{b_o} (b_o - 1)}{(b_o + 1) + \left(\frac{2m}{t}\right)^{b_o} (b_o - 1)} \right], \quad (8.36)$$

esto nos permite encontrar el tiempo t_* donde $\cos(\delta_b b(t_*)) = -1$, dado por:

$$t_* = 2m \left(\frac{b_o - 1}{b_o + 1} \right)^{\frac{2}{b_o}}. \quad (8.37)$$

Este tiempo t_* tiende a 0 cuando $\delta_b \rightarrow 0$. A este tiempo t_* le llamaremos como tiempo de Modesto. Este tiempo representa una nueva singularidad al reescribir la métrica efectiva ya que la función de Lapso se indetermina cuando $\sin(b(t_*)) = 0$ y toma valores imaginarios cuando $t < t_*$. Modesto concluye que no hay problemas con esta nueva singularidad ya que se asemeja a aquella la cual aparece en gravedad cuántica de seguridad asintótica [33]. Modesto menciona que no hay inconveniente porque en la métrica efectiva la función $\sin(b(t))$ siempre aparece elevada al cuadrado. Sin embargo, como veremos más adelante, este tiempo sí es un problema porque hay cantidades físicas como el parámetro de expansión θ donde se presenta esta misma indeterminación tomando valores reales cuando $t \rightarrow t_*^+$ pero valores imaginarios cuando $t \rightarrow t_*^-$. Esto no puede ser permitido ya que el parámetro θ es una cantidad con interpretación geométrica y física. Cabe recalcar que esto sucede para cualquier $b_o \neq 1$, aunque esto se vuelve importante para valores donde m se acerca a la masa de Planck. Por lo anterior, considero que no podemos nombrar a $t = t_*$ como un nuevo horizonte de eventos. Además, podemos concluir que evolucionar las cantidades físicas en todo el interior del agujero negro $t \in (0, 2M)$ no tiene sentido, dado que hay cantidades físicas que no son funciones en el intervalo $(0, t_*)$. Por lo tanto, la región en la cual podemos estudiar la física de las correcciones semi-clásicas es en el intervalo $(t_*, 2M)$. Aún así, en las gráficas de la tesis se muestra todo el interior del agujero negro ya que el tiempo de Modesto t_* es una cantidad muy pequeña para masas M muy grandes y este mismo tiempo está representado con rectas verticales $t = t_*$ para cada esquema de cuantización.

Por otro lado, la dinámica efectiva predice un rebote no singular para p_c y p_b a medida que nos acercamos a la singularidad clásica. En particular, el comportamiento de p_c

tiene un mínimo. Este tiempo se considera:

$$t_c = 2m\sqrt{\frac{\gamma L_0 \delta_c}{8m}}. \quad (8.38)$$

Este tiempo es considerado el tiempo de rebote ya que se alcanza un volúmen mínimo dado que p_c representa los radios de \mathbb{S}^2 . Este compartamiento del rebote se puede observar tanto en p_c como en p_b en el régimen efectivo cuando el radio alcanza el valor t_c (8.38). Lo anterior nos puede dar indicios que la singularidad clásica es resuelta dado que los invariantes de Riemann, los cuales son proporcionales a potencias de $1/p_c$ (como se muestra en [11]), no divergen en ningún punto del interior del agujero negro pero toman cotas superiores muy grandes donde se indica una alto grado de curvatura del espacio tiempo.

8.5. Esquemas de cuantización

Hasta este momento no hemos hablado sobre las distintas elecciones en las distancias mínimas de las celdas δ_b y δ_c en sus distintas direcciones b y c , respectivamente. Esto representa una elección que en diversos trabajos se han considerado de distintas formas [10, 11, 9, 34]. En esta tesis sólo compararemos los realizados en los artículos [10] y [11]. A la elección particular de δ_b y δ_c lo llamaremos esquemas de cuantización.

8.5.1. Esquema de Cuantización Corichi-Singh

Debido a la forma discreta de la geometría cuántica, el lazo \square_{ij} , que nos ayuda a calcular los operadores de constricción (8.26), sólo se puede encoger hasta un área mínima en la Teoría de gravedad cuántica de lazos (teoría completa) a un valor de $\Delta = \beta \ell_{\text{Pl}}^2$, donde β es cerca de la unidad. Dado que el área del lazo en las direcciones $x - \vartheta$ y $x - \phi$ está restringida a:

$$\delta_b r_o \delta_c L_o = \Delta. \quad (8.39)$$

El inconveniente que nos encontramos es que el lazo $\vartheta - \phi$ es un lazo abierto. Sin embargo, debido a la homogeneidad del espacio-tiempo, uno puede asociar una área efectiva a este

lazo y restringirlo con Δ :

$$(\delta_b r_o)^2 = \Delta \quad (8.40)$$

donde r_o representa el radio de Schwarzschild del agujero negro. Usando las ecs. (8.39) y (8.40) obtenemos:

$$\delta_b = \frac{\sqrt{\Delta}}{r_o}, \quad \text{y} \quad \delta_c = \frac{\sqrt{\Delta}}{L_o}. \quad (8.41)$$

Ambas cantidades δ_b y δ_c dependen de las escalas de longitud del modelo. Sin embargo, diferenciar entre su dependencia es importante ya que δ_b sólo es afectada por el radio de Schwarzschild asociado con la simetría de S^2 y, por otro lado, δ_c sólo depende de la longitud L_o del intervalo fiducial. Esta estructura es auxiliar y la física procedente de ella no debe depender a los cambios de escala de L_o . Los autores de [10] usan este esquema donde lo llamaremos Esquema **CS**.

8.5.2. Esquema de Cuantización Ashtekar-Olmedo-Singh

Para este esquema de cuantización [11] primero definen una región del espacio-tiempo llamada \mathcal{T} que es la superficie de transición donde los observadores pasan del interior de un agujero negro a un agujero blanco. Esta superficie esta definida por las expansiones de congruencias nulas las cuales deben satisfacer la condición que $p'_c = 0$. Después de definir esta región del espacio-tiempo, la estrategia que definen para encontrar los parámetros cuánticos δ_b y δ_c es imponiendo que el área de las plaquetas dadas con $\square_{\vartheta-\phi}$ y $\square_{\phi-x}$ sea el área mínima Δ dado por la teoría de LQG pero en la región \mathcal{T} .

Primero comienzan con la plaqueta $\square_{\phi-x}$, es decir un lazo que se encuentre en el plano $\phi-x$, en el plano ecuatorial de la celda fiducial. Esta plaqueta tiene dos enlaces paralelos a lo largo de x y dos enlaces paralelos a lo largo de $\vartheta = \pi/2$. Los autores denotan δ_c como la fracción de la longitud a lo largo x . De manera similar denotan la fracción de la dirección ϑ como δ_b . De la métrica de Kantowski-Sachs, se encuentra que el área de esta plaqueta está dada por:

$$\text{Ar}(\square_{\phi-x}) = \delta_b \delta_c (2\pi \|p_b\|_{\mathcal{T}}), \quad (8.42)$$

donde $|_{\mathcal{T}}$ indica que se evalúa en la región \mathcal{T} . De la ecuación anterior podemos notar que $2\pi |p_b| |_{\mathcal{T}}$ es el área $A_{\phi,x}$ de la celda fiducial y como se esperaba $\delta_b \delta_c$ tiene la interpretación que es al tasa del área del lazo $\square_{\phi-x}$ y el área $A_{\phi,x}$ dentro de la celda en la dirección $\phi - x$.

Por otro lado, consideran ahora la plaqueta dada por el lazo $\square(\vartheta - \phi)$ en el plano $\vartheta - \phi$ para cualquier 2-esfera con radio constante x sobre la superficie de transición \mathcal{T} . Ahora, consideran una fracción δ_b a lo largo de las direcciones ortogonales de plaqueta. Entonces, se sigue que la misma métrica que el área encerrada sobre esta plaqueta y evaluada en la superficie de transición \mathcal{T} se obtiene:

$$\text{Ar}(\square(\phi, x)) = (\delta_b)^2 (4\pi p_c |_{\mathcal{T}}), \quad (8.43)$$

donde δ_b^2 tiene la misma interpretación que $\delta_b \delta_c$ en la ec. (8.42) pero para la plaqueta $\square(\vartheta - \phi)$. Por último, la estrategia principal es restringir el valor de estas áreas al área mínima por la teoría completa Δ , dando como resultado que:

$$2\pi \delta_c \delta_b |p_b| |_{\mathcal{T}} = \Delta \quad (8.44)$$

y

$$4\pi \delta_b^2 p_c |_{\mathcal{T}} = \Delta. \quad (8.45)$$

Dado que las trayectorias dinámicas de las variables p_b y p_c son fijas sobre la superficie transición restringidas por las expansiones de las congruencias nulas anteriormente mencionadas, es claro que se obtienen dos ecuaciones las cuales ayudan a determinar los valores δ_b y δ_c . Los autores en [11] usan las suposiciones bien motivadas como $\delta_b \ll 1, \delta_c \ll 1$ y $m \gg \ell_{\text{Pl}}$ (para ver una demostración más precisa y clara de este resultado, se puede consultar el Apéndice B de [11]). El resultado final es:

$$\delta_b = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi\gamma^2 m}} \right)^{1/3}, \quad L_o \delta_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \Delta^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/3}. \quad (8.46)$$

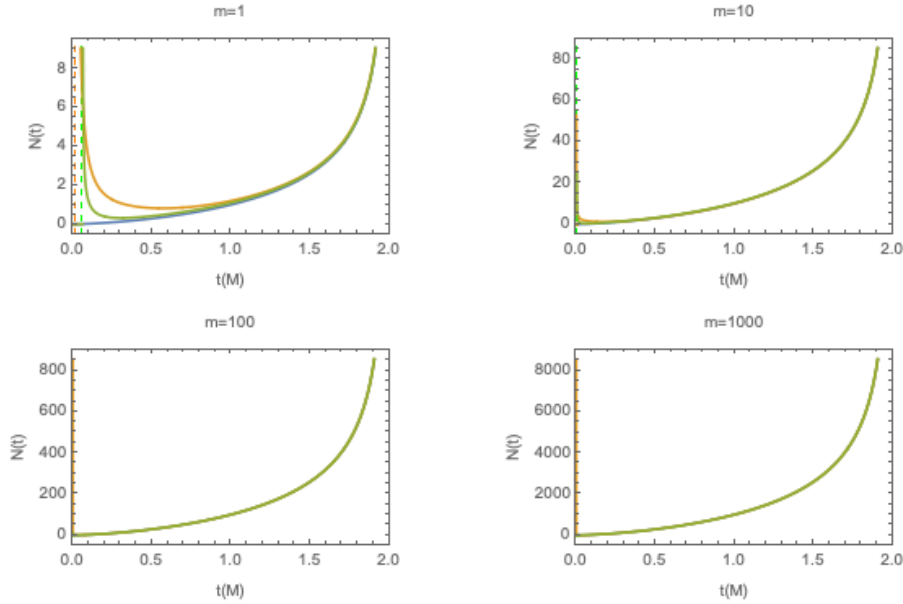


Figura 8.1: Gráfica del momento de N vs t en unidades de m . La función de lapso clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS y AOS

Es importante notar que ambos parametros dependen de $m^{-\frac{1}{3}}$. Esta propiedad es relevante para las propiedades físicas de la métrica efectiva.

8.5.3. Comparación de los distintos esquemas en las variables canónicas

En esta subsección abordaremos el comportamiento semi-clásico de los distintos esquemas de cuantización en las soluciones dadas por las variables canónicas b , c , p_b y p_c . Pero antes de empezar con las variables canónicas, es necesario discutir sobre la función de lapso, la cual es la elección de norma escogida en todos los esquemas de cuantización [9, 11, 10].

En la figura 8.1 podemos notar que ambos esquemas tienden muy rapidamente al comportamiento clásico. Sin embargo, las funciones semi-clásicas tienen un tiempo t_* el cual para tiempos inferiores $t < t_*$ la función de lapso $N(t)$ toma valores complejos dado que

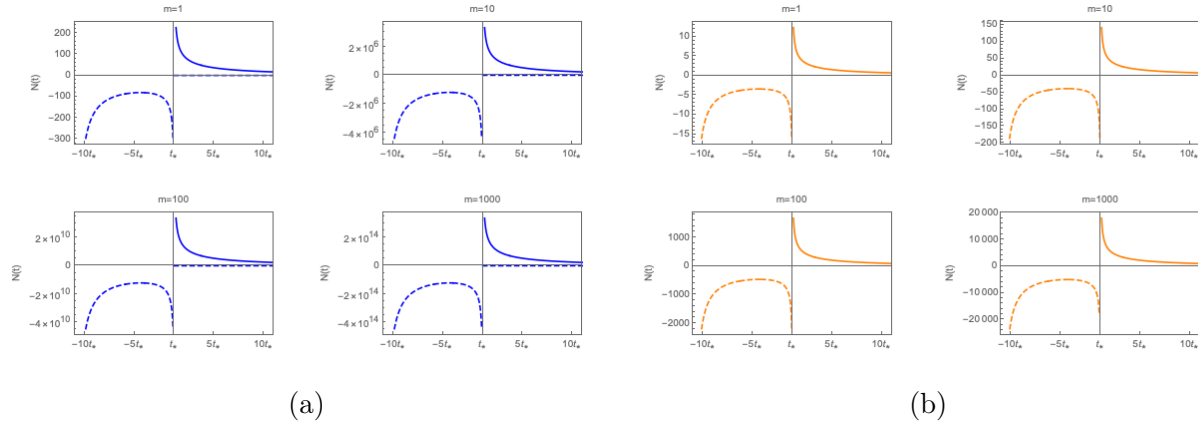


Figura 8.2: Las figuras 8.2a y 8.2b representa el comportamiento de la función de lapso $N(t)$ al rededor del tiempo de Modesto t_* . La figura 8.2a representa el esquema CS en donde la línea punteada es la parte imaginaria debido a la contribución $b(t < t_*)$ y la línea continua es la parte real de la misma $N(t)$, lo mismo sucede para la figura 8.2b para el esquema de AOS.

$b(t < t_*)$ lo hace y se encuentra en el denominador de $N(t)$ (véase la ec. (4.14)).

Podemos notar que el comportamiento de la función de lapso $N(t)$ en el tiempo de Modesto es un comportamiento divergente pero que su evolución temporal se detiene para tiempos $t < t_*$. Modesto comentó [13] que esto representa un nuevo horizonte de eventos ya que $N(t)$ sólo se presentaba en términos cuadráticos; es decir, sólo se obtendría términos reales con $N^2(t)$. También, en la teoría de la gravedad de seguridad asintótica [33], se presenta una singularidad después de realizar el proceso de cuantización. Sin embargo, como en el caso de Modesto, no se comenta más acerca de ello.

Podemos observar que en la la fig. (8.7) el esquema AOS genera tiempos de Modesto ligeramente mayores que el esquema CS. Esto indica que al usar el esquema AOS, las funciones donde están involucradas la variables b en potencias impares, como la función lapso $N(t)$, su evolución se interrumpe de forma más pronta que para el esquema CS. Pero la diferencia entre una y otra no es más que un orden de magnitud y a masas grandes la diferencia desaparece.

A pesar que el tiempo de Modesto nos indica el intervalo donde la dinámica semi-clásica es válida, el comportamiento para grandes valores de la masa m , que representa la masa del agujero negro, es claramente clásica y la diferencia entre la clásica y los distintos esquemas

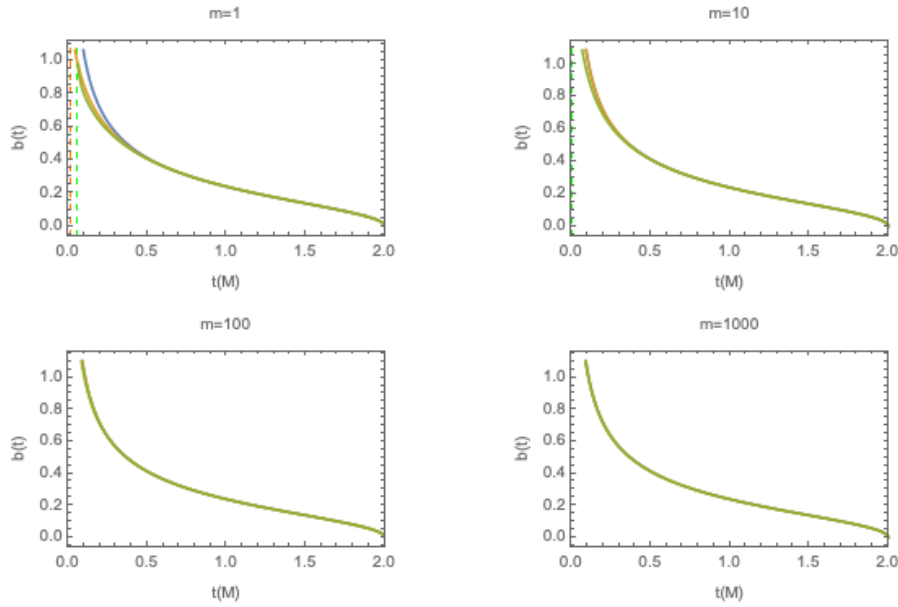


Figura 8.3: Gráfica de b vs t en unidades de m . La función de b clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS (naranja) y AOS (verde)

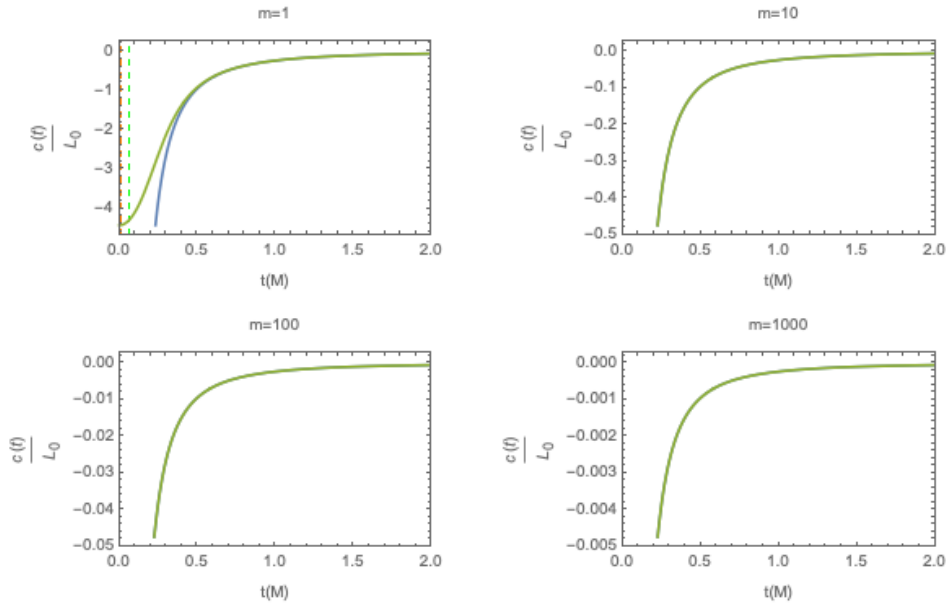


Figura 8.4: Gráfica de c/L_0 vs t en unidades de m . La función de $c(t)/L_0$ clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS.

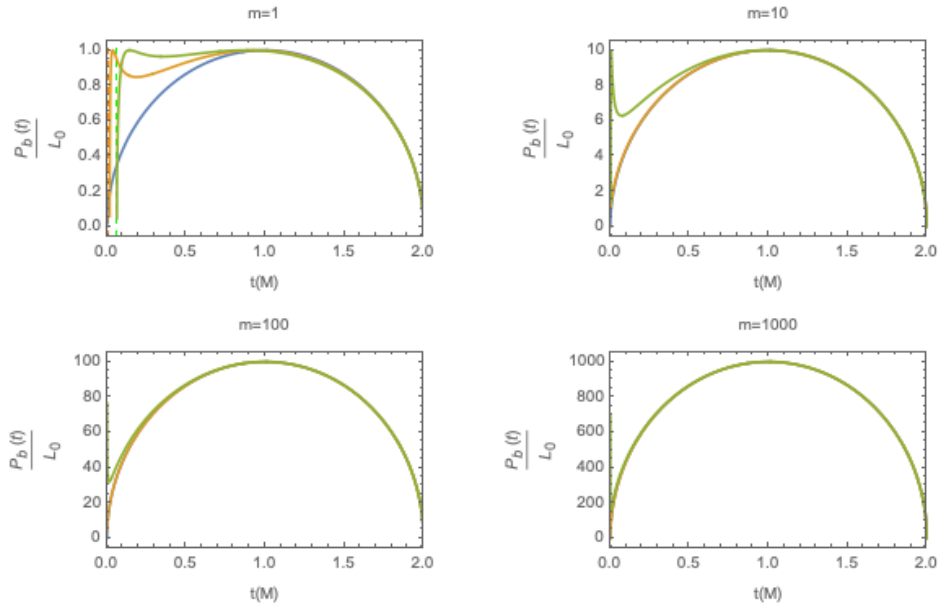


Figura 8.5: Gráfica de p_b/L_0 vs t en unidades de m . La función de $p_b(t)/L_0$ clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS.

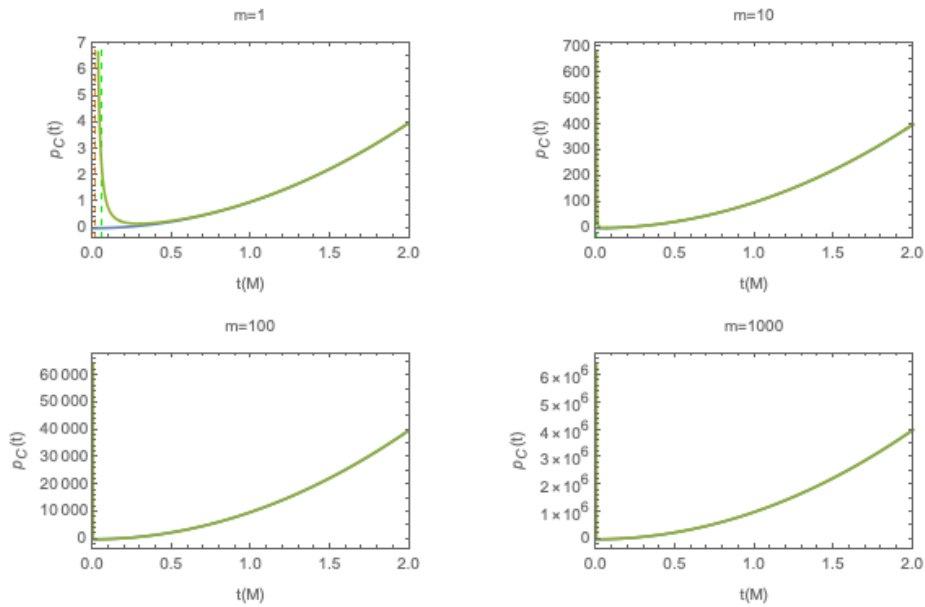


Figura 8.6: Gráfica de p_c vs t en unidades de m . La función de p_c clásico es la línea azul. El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS.

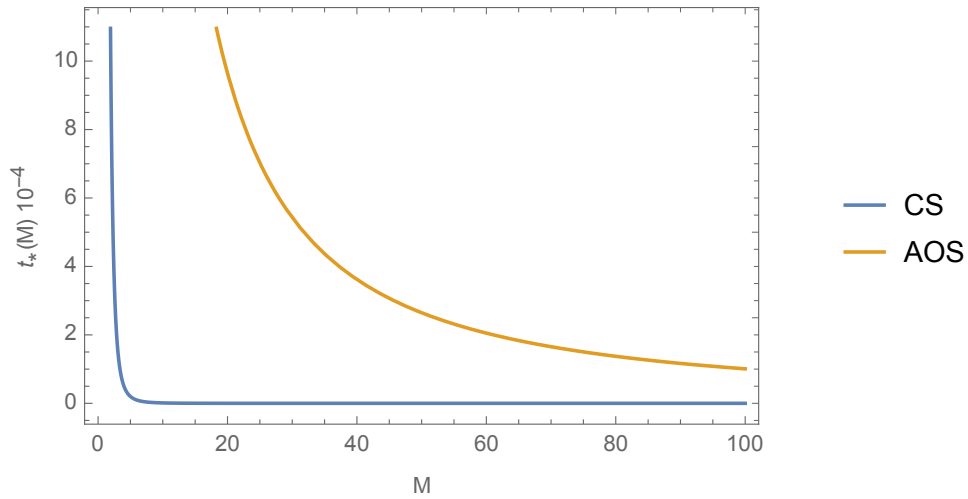


Figura 8.7: Gráfica de $t_*(M)$ vs M .

es imperceptible. Las mayores desviaciones se encuentran para la masa $m = 1$ donde el valor de t_* es el mayor (CS: $0.0174895m$ y AOS: $0.0630975m$), sin embargo, no hay que considerar con certeza el comportamiento de estas variables para masas cercanas a la masa de Planck (m del orden de la unidad) ya que esta es una aproximación semiclásica y es de esperarse que las correcciones cuánticas sean mucho mayores en esta región.

En resumen, promovimos a operadores las co-triadadas empleadas en las variables de Ashtekar, al igual que las homomías generadas por el transporte paralelo en los diferentes planos de las coordenadas de la métrica fiducial x , y ϕ . Lo anterior, para encontrar el operador de restricción Hamiltoniana (8.23), en términos de los operadores de holonomía y co-triadadas asociados a un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Posteriormente, y como el objetivo de la tesis es encontrar las correcciones basadas en la Teoría de Lazos, se justificó el cómo podemos encontrar las correcciones basadas en la Teoría de Lazos al restringirnos a estados coherentes (semi-clásicos). De esta forma, encontramos ecuaciones de movimiento efectivas y sus respectivas soluciones. Inmediatamente, notamos que existen tiempos t , como el tiempo de rebote t_c o el tiempo de Modesto t^* , que son de interés físico. Por último, explicamos los diferentes esquemas de cuantización que se emplearán en esta tesis que en el siguiente capítulo serán usadas en la ecuación de Raychaudhuri para encontrar las

correcciones de la Teoría de Lazos a esta ecuación.

Capítulo 9

Correcciones efectivas de LQG a la ecuación de Raychaudhuri

En este capítulo mostraremos los resultados de este trabajo de investigación. Partiremos de escribir la ecuación de Raychaudhuri con ayuda de la congruencia de observadores cosmológicos y calcularemos ambos miembros de la ecuación de Raychaudhuri. Posteriormente, usaremos distintos esquemas de cuantización donde calcularemos ambos miembros de la ecuación de Raychaudhuri y notaremos que la componente del tensor de Ricci \mathfrak{R}_{tt} es distinto de cero para que la ecuación de Raychaudhuri se satisfaga.

9.1. Ecuación de Raychaudhuri para observadores cosmológicos en una métrica de Kantowski-Sachs

Partiremos de la métrica de Kantowski-Sachs inducida:

$$g_{ab} dx^a dx^b \equiv ds^2 = -N_\tau^2 d\tau^2 + \frac{p_b^2}{|p_c| L_o^2} dx^2 + |p_c| (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)$$

como en la sección de Cuantización de Lazos. Ahora sólo utilizaremos la congruencia de observadores cosmológicos dados por la 4-velocidad $u^a = u(\partial/\partial T)^a$. Esta 4-velocidad debe estar normalizada:

$$-1 = g_{ab}u^a u^b = -N^2 u^2 \quad \Rightarrow \quad u(T) = -\frac{1}{N} \quad \circ \quad u_a = +N(dT)_a,$$

donde $N = N_\tau$ y escogeremos las congruencias de observadores cosmológicos que van dirigidas hacia la singularidad. Ahora empezaremos a calcular los parámetros los cuales están involucrados en la ecuación de Raychaudhuri (5.16) que son el parámetro de expansión θ , el shear σ^2 y el parámetro de rotación ω^2 . En este caso, al escoger la congruencia de observadores cosmológicos, su 4-vector es ortogonal a cada una de las hipersuperficies por lo cual se cumple el teorema de Frobenius y el parámetro de rotación $\omega^2 = 0$. Esto nos deja en la búsqueda del parámetro θ y σ^2 . Primero comenzamos al encontrar las componentes del tensor $B_{\mu\nu}$ el cual es definido de la siguiente forma:

$$B_{\mu\nu} = \nabla_\nu u_\mu = \partial_\nu u_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma u_\gamma. \quad (9.1)$$

Teniendo la ecuación anterior y la contracción que se tiene con el índice γ se reduce a $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma u_\gamma = \Gamma_{\mu\nu}^T u_T$ por la única componente temporal de la congruencia. Además, los únicos símbolos de Christoffel, donde se encuentra T de forma contravariante, son el conjunto de ecuaciones (6.10) y (6.11). Esto reduce, junto con el hecho que $u^T = -1/N(T)$, las componentes no cero evidentes del tensor $B_{\mu\nu}$ dejando únicamente a las componentes diagonales B_{TT} , B_{xx} , $B_{\vartheta\vartheta}$ y $B_{\phi\phi}$. Primero calculamos la componente TT :

$$B_{TT} = \partial_T u_T - \Gamma_{TT}^T u_T = -N' + N' = 0. \quad (9.2)$$

Calculando las demás componentes distintas a cero:

$$B_{xx} = -\Gamma_{xx}^T u_T = -\frac{1}{N} \left(\frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} \right) \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c} \right), \quad (9.3)$$

$$B_{\vartheta\vartheta} = -\Gamma_{\vartheta\vartheta}^T u_T = -\frac{r_0^2 p'_c}{2N}, \quad (9.4)$$

$$B_{\phi\phi} = -\Gamma_{\phi\phi}^T u_T = -\frac{r_0^2 p'_c \sin^2 \vartheta}{N}. \quad (9.5)$$

Hemos calculado las componentes del tensor $B_{\mu\nu}$ y ahora encontramos el parámetro de expansión θ por medio de su definición como la traza de $B_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\theta = B^\mu{}_\mu &= g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = g^{xx} B_{xx} + g^{\vartheta\vartheta} B_{\vartheta\vartheta} + g^{\phi\phi} B_{\phi\phi} \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{p_b^2}{L_0^2 p_c}\right)} \left(\frac{p_b^2}{L_0^2 p_c}\right) \frac{1}{N} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{2p_c}\right) - \frac{1}{r_0^2 p_c} \frac{r_0^2 p'_c}{2N} - \frac{1}{r_0^2 p_c \sin^2 \theta} \frac{r_0^2 p'_c \sin^2 \theta}{2N} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{p'_b}{p_b} + \frac{p'_c}{2p_c}\right).\end{aligned}\tag{9.6}$$

Por otro lado, para calcular el tensor shear $\sigma_{\mu\nu}$ primero debemos calcular la métrica transversal dada por la congruencia u^T . Esta métrica está definida por:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu.\tag{9.7}$$

Dado que la métrica $g_{\mu\nu}$ es diagonal y la congruencia geodésica elegida sólo tiene componente T , entonces la métrica transversal $h_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Calculando la componente TT de la métrica transversal:

$$h_{TT} = g_{TT} + u_T u_T = -N^2 + N^2 = 0.\tag{9.8}$$

Para las componentes espaciales tenemos $h_{ij} = g_{ij}$ donde los índices espaciales son $i = x, \vartheta, \phi$. Es decir:

$$(h_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_b^2}{L_0^2 p_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0^2 p_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_0^2 p_c \sin^2 \vartheta. \end{pmatrix}\tag{9.9}$$

Para las componentes del tensor shear $\sigma_{\mu\nu}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}.\tag{9.10}$$

Debido a que $B_{\mu\nu}$ es diagonal al igual que $h_{\mu\nu}$, entonces sólo tendremos componentes diagonales de $\sigma_{\mu\nu}$ y la simetrización es $B_{(\mu\nu)} = B_{\mu\nu}$. Uniendo todas estas observaciones

encontramos las componentes distintas de cero:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= B_{xx} - \frac{1}{3}\theta h_{xx} = -\frac{g_{xx}}{N} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{1}{2} \frac{p'_c}{p_c} \right) + \frac{g_{xx}}{3N} \left(\frac{p'_b}{p_b} + \frac{p'_c}{2p_c} \right) \\ &= -\frac{g_{xx}}{N} \left(\frac{2}{3} \frac{p'_b}{p_b} - \frac{4}{3 \cdot 2} \frac{p'_c}{p_c} \right) = -\frac{2g_{xx}}{3N} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right).\end{aligned}\tag{9.11}$$

Para la componente $\sigma_{\vartheta\vartheta}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta\vartheta} &= B_{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{3}\theta h_{\vartheta\vartheta} = \frac{g_{\vartheta\vartheta}}{N} \left(\frac{p'_c}{2p_c} \right) - \frac{1}{3} \frac{g_{\vartheta\vartheta}}{N} \left(\frac{p'_b}{p_b} + \frac{p'_c}{2p_c} \right) \\ &= \frac{g_{\vartheta\vartheta}}{3N} \left[\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right].\end{aligned}\tag{9.12}$$

Para la última componente $\sigma_{\phi\phi}$:

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{g_{\phi\phi}}{3N} \left[\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right] \quad \text{con} \quad \sigma^{\phi\phi} = \frac{1}{3g_{\phi\phi}N} \left[\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right].\tag{9.13}$$

Por último, calculando el parámetro shear σ^2 que mide la deformación de la sección transversal a la que se transportan las geodésicas congruentes:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma^{ab}\sigma_{ab} = \sigma^{xx}\sigma_{xx} + \sigma^{\vartheta\vartheta}\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma^{\phi\phi}\sigma_{\phi\phi} \\ &= \frac{4}{9N^2} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right)^2 + \frac{1}{9N^2} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right)^2 + \frac{1}{9N^2} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right)^2 \\ &= \frac{2}{3N^2} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right)^2,\end{aligned}$$

es decir:

$$\sigma^2 = \frac{2}{3N^2} \left(\frac{p'_b}{p_b} - \frac{p'_c}{p_c} \right)^2\tag{9.14}$$

Además, podemos usar las ecuaciones de movimiento con la elección de la función de Lapso

$$N \equiv \frac{\gamma \sqrt{p_c(T)}}{b(T)}:$$

$$\begin{aligned} b' &= \frac{db}{dT} = \{b, H\} = -\frac{1}{2} \left(b + \frac{\gamma^2}{b} \right) \\ p_b' &= \frac{dp_b}{dT} = \{p_b, H\} = \frac{p_b}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{b^2} \right) \\ c' &= \frac{dc}{dT} = \{c, H\} = -2c \\ p_c' &= \frac{dp_c}{dT} = \{p_c, H\} = 2p_c \end{aligned} \tag{9.15}$$

Es decir, sustituyendo las ecs. (9.15) en (9.6) y (9.14):

$$\theta^2 = \frac{1}{4N^2} \left(3 - \frac{\gamma^2}{b^2} \right)^2 = \frac{1}{4N^2} \left(9 - 6\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\gamma^4}{b^4} \right) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{2}{4 \cdot 3N^2} \left(9 + 6\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\gamma^4}{b^4} \right),$$

las cuales nos llevan a la ecuación de Raychaudhuri:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{4N^2} \left(9 + 2\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\gamma^4}{b^4} \right) \tag{9.16}$$

Es evidente que el cuadrado de la variable b y el parámetro de Immirzi γ (donde $\gamma \in \mathbb{R}$) son positivos y en consecuencia el miembro derecho de la ecuación (9.16) es negativa en todo tiempo propio τ ; es decir, la congruencia de los observadores cosmológicos se enfoca en la métrica de Kantowski-Sachs de la misma forma que pasa en el interior un agujero negro de Schwarzschild.

Una observación importante para el parámetro de expansión θ es que ésta se anula cuando $t = 1.5(2M)$. Además que para tiempos $t > 1.5(2M)$, $\theta > 0$ y $\theta < 0$ para el caso $t < 1.5(2M)$. Esto nos recalca que al hacer la isometría entre la métrica de Kantowski-Sachs, una métrica cosmológica, lo que estamos tomando como congruencia de geodésicas son de observadores cosmológicos. Con esto en mente, la interpretación que le damos a este comportamiento del escalar θ es que la congruencia se expande para valores $t > 1.5(2M)$ mientras se acerca al horizonte de eventos y se contrae al momento de tomar valores $t < 1.5(2M)$. Esto no es indicativo de un rebote, si no de un recolapso en las congruencias. Este efecto, seguirá presente al realizar las correcciones cuánticas de la teoría de LQG.

Por último, la ecuación (9.14) es distinta a la presentada en [10] y [35] por un factor de 2, como se reporta en [34]. Esto hace que al momento de calcular $d\theta/d\tau$ con ayuda de las ecs. de movimiento (9.15) no coincida con el miembro del lado derecho de la ecuación de Raychaudhuri (9.16). Esto es importante recalcar ya que buscaremos reinterpretar algunos términos del miembro izquierdo de (9.16) como una componente del tensor de Ricci R_{TT} .

9.2. Dinámica efectiva de la ecuación de Raychaudhuri

El comportamiento del interior del Agujero Negro de Schwarzschild (de acuerdo a Loop Quantum Gravity) se puede obtener apartir del Hamiltoniano efectivo (7.12), en términos de las holonomías h_x , h_ϑ y h_ϕ , que representan las direcciones radial y angulares, y los flujos, en vez de las conexiones o las tríadas. Esta representación no es unitaria; es decir, no es equivalente a la representación de Schrödinger. Además, no hay difeomorfismos infinitesimales y sólo se proveé difeomorfismos finitos, lo cual nos lleva a la discretización del espacio. La discretización del espacio nos genera operadores espaciales donde aparecen las escalas mínimas permitidas. Esta escala se denota por el parámetro Δ .

Luego de obtener el Hamiltoniano cuántico, a partir del método descrito anteriormente y mostrado en el capítulo anterior, se obtiene un Hamiltoniano efectivo . Este método nos indica que el Hamiltoniano efectivo también se puede obtener heurísticamente al reemplazar las variable canónicas:

$$\begin{aligned} b &\rightarrow \frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b} \\ c &\rightarrow \frac{\sin(\delta_c c)}{\delta_c}, \end{aligned} \tag{9.17}$$

donde δ_b y δ_c son las constantes definidas en los distintos esquemas **CS** y **AOS**. Este reemplazo también es propuesto en la cuantización polimérica [36, 37]

El Hamiltoniano efectivo es:

$$H_{\text{eff}}^{(N)} = -\frac{N}{2G\gamma^2} \left[\left(\frac{\sin^2(\delta_b b)}{\delta_b^2} + \gamma^2 \right) \frac{p_b}{\sqrt{p_c}} + 2 \frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b} \frac{\sin(\delta_c c)}{\delta_c} \sqrt{p_c} \right]. \tag{9.18}$$

Para mostrar las desviaciones del comportamiento clásica, debemos usar una función de lapso bajo las transformaciones (9.17):

$$N = \frac{\gamma \delta_b \sqrt{p_c}}{\sin(\delta_b b)} \quad (9.19)$$

Sustituyendo la función de Lapso N (9.19) en (9.18), se logra obtener:

$$H_{\text{eff}} = -\frac{1}{2\gamma G} \left[p_b \left[\frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b} + \gamma^2 \frac{\delta_b}{\sin(\delta_b b)} \right] + 2p_c \frac{\sin(\delta_c c)}{\delta_c} \right]. \quad (9.20)$$

Por medio de la ec. (9.20) podremos obtener la dinámica efectiva y calcular los parámetros necesarios para las correcciones a la ecuación de Raychadhuri clásica, que estudiamos a continuación.

9.2.1. Ecuación de Raychaudhuri Efectiva

La ecuación de Raychaudhuri es una ecuación derivada de conceptos geométricos independiente de la teoría a la cual se aplique. Es importante remarcar este punto ya que, a pesar de tener una nueva métrica efectiva dada por el Hamiltoniano efectivo (esta métrica es estudiada más a fondo en [13]), la ecuación de Raychaudhuri dada por la ecuación (5.16) sigue siendo cierta. Además, al obtener nuevas correcciones por la cuantización se tiene que revisar si cada uno de los términos del miembro derecho en la ec. (5.16) siguen manteniendo el mismo rol que en el caso clásico.

Para ver las diferencias entre el comportamiento clásico y correcciones dada por la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos debemos utilizar la misma congruencia de observadores cosmológicos $u^a = -N(\partial/\partial T)^a$. Lo anterior nos lleva a que la congruencia cumpla con el teorema de Frobenius y, al mismo tiempo, el tensor de rotación sea idénticamente cero $\omega_{\mu\nu} = 0$ y, en consecuencia, $\omega^2 = 0$.

Por otro lado, los parámetros de expansión θ y el shear σ^2 siguen teniendo la misma forma que en las ecs. (9.6) y (9.14), a excepción de las soluciones de las variables canónicas

que tienen ecuaciones de movimiento que son distintas al ámbito clásico. Caso contrario con el término que involucra al tensor de Ricci \mathfrak{R}_{ab} ya que éste está determinado por las simetrías del sistema y por las ecuaciones de Einstein. En la situación clásica, este término es nulo ya que se cumple que el tensor de energía-momento $T_{ab} = 0$ por la ausencia de materia y las ecuaciones de Einstein son $R_{ab} = 0$. Sin embargo, en este caso al tener una métrica efectiva que no satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{ab} \neq 0$. El término $\mathfrak{R}_{ab}u^a u^b = \mathfrak{R}_{tt}(u^t)^2 \neq 0$ tomará un rol crucial a medida que nos estemos acercando a la singularidad $r = 0$ ya que su contribución ayudará a evitar la singularidad $r = 0$ que se presenta en el caso clásico. En conclusión, la ecuación (5.16) se convierte en la siguiente ecuación debido a la métrica efectiva:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - \frac{1}{N^2}\mathfrak{R}_{tt}. \quad (9.21)$$

Ahora procederemos a calcular individualmente cada término del miembro derecho excepto \mathfrak{R}_{TT} y, por otro lado, el término $d\theta/d\tau$ se calcula a partir de las ecuaciones de movimiento efectivas (8.32) y (8.33). Para calcular el parámetro de expansión θ usamos la ecuación (9.6) pero sustituimos p'_b con las ecs. de movimiento (8.32) y (8.33):

$$\theta^2 = \frac{1}{4N^2} \left[\cos^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right)^2 + 4 \cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right) + 4 \cos^2(\delta_c c) \right]. \quad (9.22)$$

De igual forma se hace para el parámetro del shear:

$$\sigma^2 = \frac{2}{4 \cdot 3N^2} \left[\cos^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right)^2 - 8 \cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right) + 16 \cos^2(\delta_c c) \right] \quad (9.23)$$

Calculando los primeros dos términos del miembro derecho de la ec. (9.21):

$$-\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{4N^2} \left[\cos^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right)^2 - 4 \cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)} \right) + 12 \cos^2(\delta_c c) \right] \quad (9.24)$$

Si realizamos el límite clásico; es decir, cuando $\delta_c, \delta_b \rightarrow 0$, entonces $\cos(\delta_c c) \rightarrow 1$, $\cos(\delta_b b) \rightarrow$

1 y $\sin(\delta_b b)/\delta_b \rightarrow b$. Aplicando los anteriores límites nos da como resultado:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 &= -\frac{1}{4N^2} \left[\left(1 - \gamma^2 \frac{1}{b^2}\right)^2 - 4 \left(1 - \gamma^2 \frac{1}{b^2}\right) + 12 \right] \\ &= -\frac{1}{4N^2} \left[9 + 2\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\gamma^4}{b^4} \right] \end{aligned}$$

Los resultados que tenemos hasta el momento nos permiten escribir la ec. de Raychaudhuri para la métrica efectiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{-1}{4N^2} \left[\cos^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)}\right)^2 - 4 \cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) \left(1 - \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)}\right) + 12 \cos^2(\delta_c c) \right] \\ &\quad - \frac{R_{TT}}{N^2}. \end{aligned}$$

También se puede encontrar el miembro izquierdo $d\theta/d\tau$ de la ecuación anterior mediante las ecs. de mov. efectivas (8.32) y (8.33) y por medio de la regla de la cadena ($d\theta/d\tau = (dt/d\tau)(d\theta/dt)$), todo lo anterior nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{N^2} \left[\frac{\cos^2(\delta_b b)}{4} \left(1 + \gamma^2 \frac{\delta_b^2}{\sin^2(\delta_b b)}\right)^2 + \frac{\sin^2(\delta_b b)}{4} \left(1 - \gamma^4 \frac{\delta_b^4}{\sin^4(\delta_b b)}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) - \cos^2(\delta_c c) + 2 \sin^2(\delta_b b) \right]. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Nuevamente, si realizamos el límite clásico como se aplicó a la ec. (9.24), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{-1}{4N^2} \left[\left(1 + \gamma^2 \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4 + 4 \right] + 0 \\ &= -\frac{1}{4N^2} \left[9 + 2\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\gamma^4}{b^4} \right], \end{aligned}$$

lo cual coincide con la ecuación clásica (9.16) y el límite clásico de la ec. (9.24). Por último, podemos sustituir la ecuación (9.24) y (9.25) en (9.21), para después encontrar la componente tt del tensor de Ricci el cual es:

$$\mathfrak{A}_{tt} = 2 [\cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) - 1] + \frac{\delta_b^2 \cos(\delta_b b)}{\sin^2(\delta_b b)} [\cos(\delta_b b) - \cos(\delta_c c)] - \frac{1}{4} \sin^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^4 \frac{\delta_b^4}{\sin^4(\delta_b b)}\right) \quad (9.26)$$

Si realizamos el límite clásico, obtenemos:

$$\lim_{\delta_c, \delta_b \rightarrow 0} \mathfrak{R}_{tt} = 2[1 - 1] + \frac{1}{b^2}(1 - 1) - \frac{1}{4} \times 0 \times \left(1 - \frac{1}{b^4}\right) = 0,$$

lo cual nos lleva al resultado correcto ya que en el ámbito clásico suponemos que se cumplen las ecuaciones de Einstein ($R_{ab} = 0$).

La componente \mathfrak{R}_{tt} es un ente puramente basado en Gravedad Cuántica de Lazos que emerge de las correcciones de escribir la constrictión hamiltoniana en términos de las holonomías. Sin embargo, el artículo [11], los autores mencionan que el hecho que las ecuaciones de Einstein no son satisfechas por la nueva métrica es por una contribución de la materia a la que se le asocia un tensor de energía-momento cuántico \mathfrak{T}_{ab} , la cual no cumple que ciertas condiciones de energía. Sin embargo, desde, un inicio en nuestro análisis y el de los anteriores autores, se partió desde la métrica de Schwarzschild, la cual es una métrica sin materia (i. e. $T_{ab} = 0$). Por lo tanto, nos parece contradictorio que se comience de un espacio-tiempo sin materia y por las correcciones basadas por Gravedad Cuántica de Lazos emerja un objeto matemático que tenga la interpretación física de materia. Desde nuestro análisis, nos parece más apropiado que estas correcciones tengan una interpretación geométrica que surjan al imponer la restricción de áreas mínimas que propone la Teoría Cuántica de Lazos. Además, como se verá gráficamente más adelante, esta corrección es opuesta a la tasa de expansión, por lo cual evita la singularidad.

9.3. Resultados

9.3.1. Parámetros geométricos: expansión θ y shear σ^2

La dinámica de congruencias en un espacio-tiempo, se puede describir por medio de los parámetros geométricos de expansión, vorticidad y shear con la ecuación de Raychaudhuri (5.16). En la propuesta hecha por Gravedad Cuántica de Lazos, se ven modificadas las propiedades geométricas del espacio-tiempo y en consecuencia la expansión y el shear de las congruencias. La vorticidad sigue siendo cero dado que con el tensor B_{ab} , con la nueva

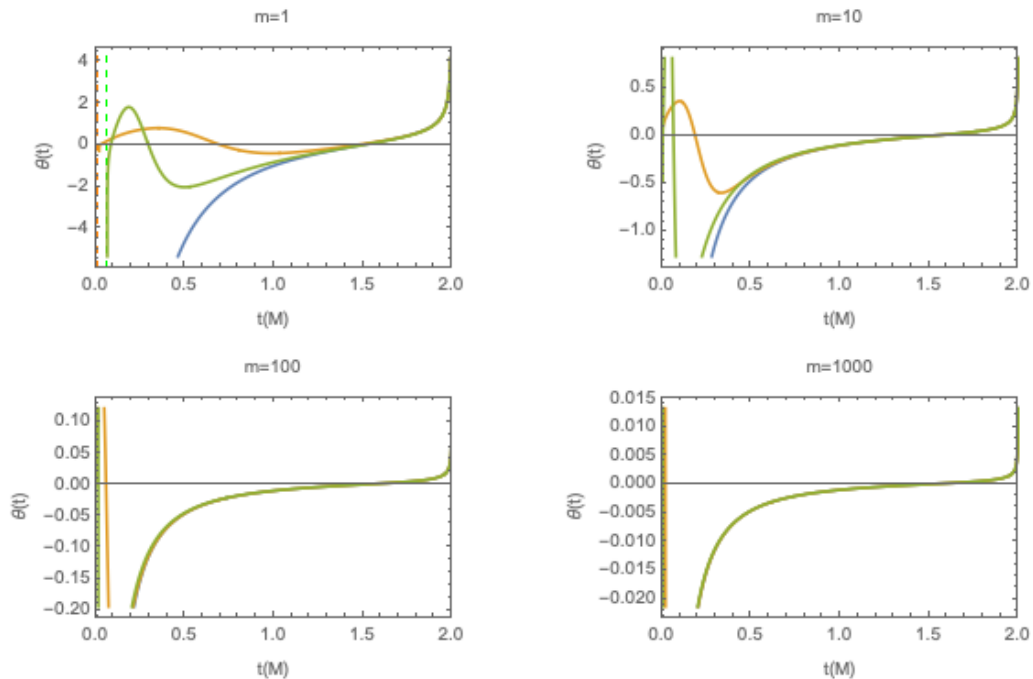


Figura 9.1: Gráfica del momento de $\theta(t)$ vs t en unidades de m . El esquema de CS está representado por la línea naranja mientras que la línea verde representa el esquema de AOS. Las líneas verticales punteadas representan los tiempos de Modesto t_* de los distintos esquemas CS y AOS. La línea azul representa la dinámica clásica

métrica efectiva, no tiene una parte antisimétrica. Se puede notar en la figura 9.1 que los distintos esquemas de cuantización en los límites clásicos sí logran recuperar la dinámica clásica de las congruencias de los observadores cosmológicos.

La dinámica clásica también presenta un comportamiento, donde para tiempos $t > 1.5M$, la tasa de volumen de la congruencia con respecto al tiempo coordinado va aumentando. Esto puede contrastar con los observadores en caída libre hacia un Agujero Negro que siempre se está contrayendo. Lo anterior nos puede decir que los observadores cosmológicos en la métrica de Kantowski-Sachs no son equivalentes a observadores en caída libre de un Agujero Negro de Schwarzschild. Mientras tanto en las figuras 9.2 y 9.3 representan la dinámica semi-clásica alrededor del tiempo de Modesto. Como indiqué en los capítulos pasados, la función lapso $N(t)$ se vuelve compleja para tiempos $t < t_*$ y el parametro de expansión θ es inversamente proporcional a esta función $N(t)$. Esto ocasiona que θ se

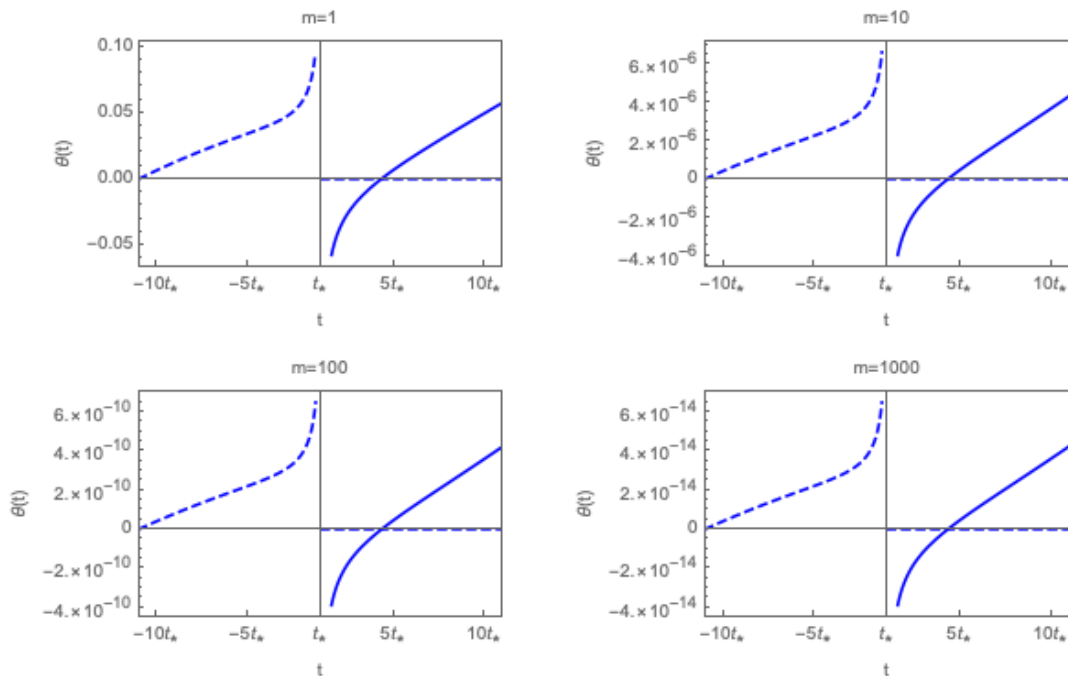


Figura 9.2: Gráfica de $\theta(t)$ vs t en unidades de t_* . El esquema de CS está representado por la línea azul. La línea punteada representa la parte imaginaria del parámetro de expansión.

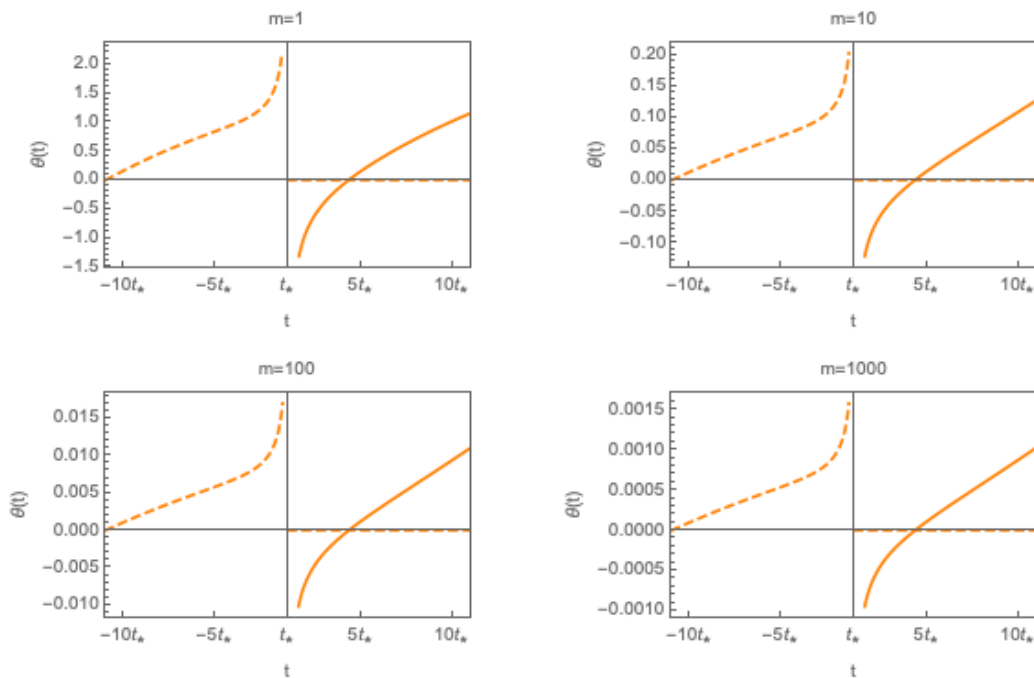


Figura 9.3: Gráfica de $\theta(t)$ vs t en unidades de t_* . El esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las línea punteada representa la parte imaginaria θ .

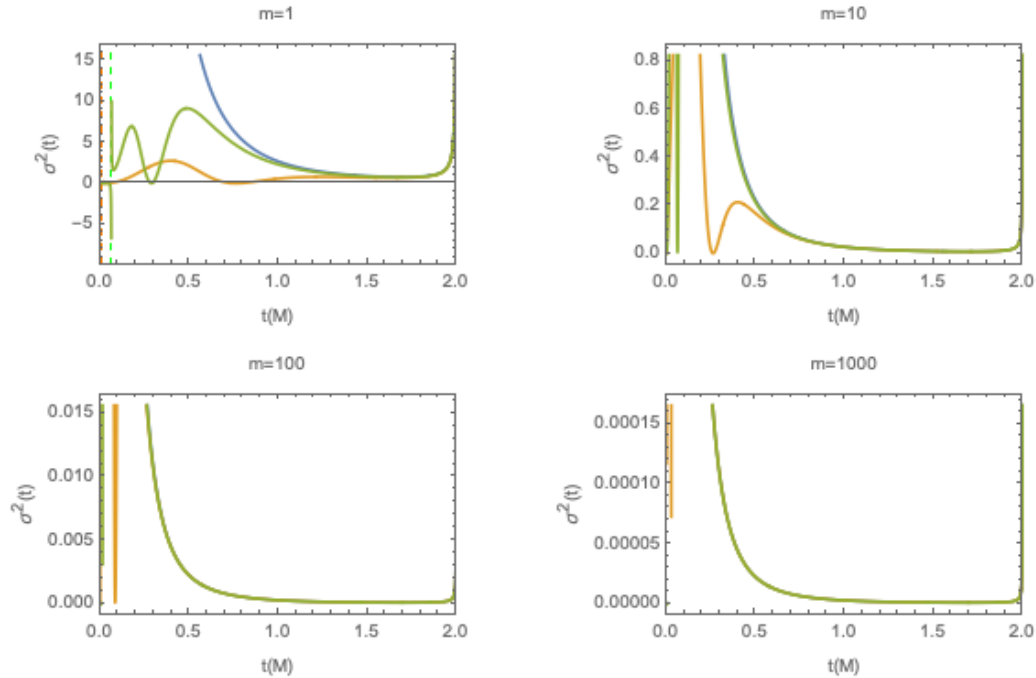


Figura 9.4: Gráfica $\sigma(t)^2$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas.

vuelva complejo para tiempos $t < t_*$. También es cierto que estos tiempos son pequeños en masas lejanas a la escala de Planck, por lo que esperamos que la aproximación semi-clásica pierda validez en estos tiempos menores a tiempo de Modesto t_* .

Por otro lado, el otro parámetro geométrico es el shear σ^2 , ec. (9.14). Al igual que la dinámica de θ tendía al comportamiento clásico cuando m se alejaba de la escala de Planck ($m \gg 1$), este parámetro σ^2 también lo hace, como se muestra la fig 9.4. Pero al contrario que en la figura 9.1, σ^2 sólo toma valores reales ya que al depender únicamente de N^2 , donde $N(t < t_*)$ toma valores imaginarios, este se convierte en valores reales y negativos $N^2(t < t_*) < 0$. Lo anterior se observa de forma más evidente para el caso de $m = 1$ y para los tiempos $t < t_*$. Nuevamente, estas escalas las debemos tomar con cautela ya que no tenemos una teoría cuántica completa de la gravedad que nos dictaría la dinámica exacta.

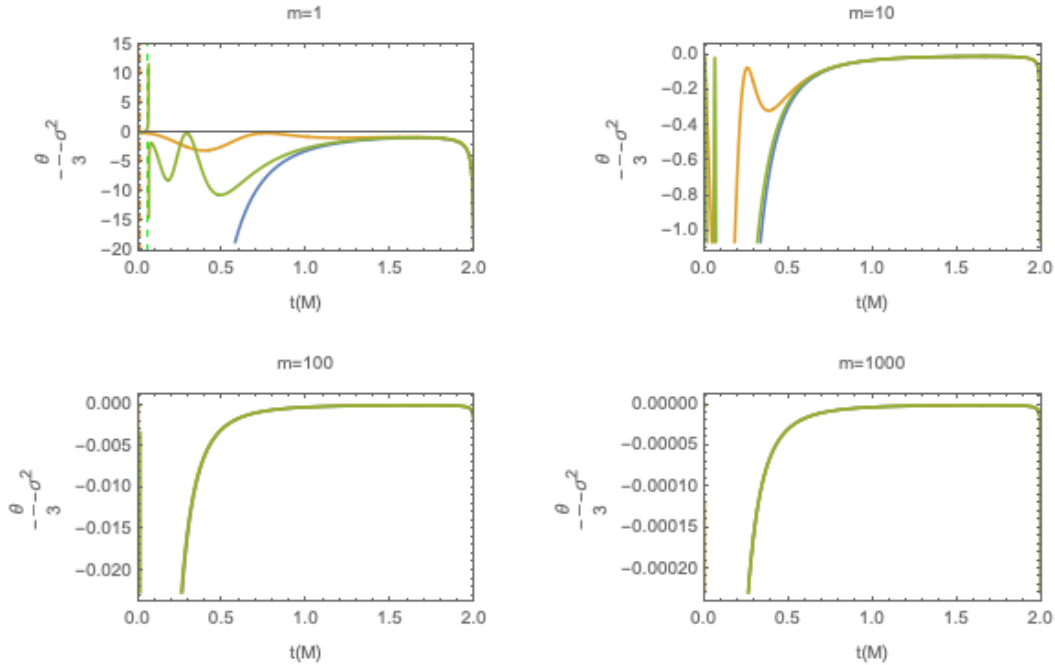


Figura 9.5: Gráfica de $-\theta^2/3 - \sigma^2$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas.

9.3.2. Ecuación semi-clásica de Raychaudhuri

Como se comentó en la Sec. 8.2.2 acerca de la ecuación de Raychaudhuri efectiva (semi-clásica), ésta presenta una modificación directa de la geometría del espacio-tiempo como se muestra en la ecuación (9.21). En esta sección nos enfocaremos en la descomposición geométrica de esta ec. (9.21), nos referimos a los términos en conjunto $-\theta^2/3 - \sigma^2$, y la derivada del parámetro de expansión $d\theta/dt$ donde t es el tiempo coordinado. Estas, dos por sí solas, ya presentan correcciones semi-clásicas, como se vió en el capítulo anterior.

Estas dos gráficas 9.5 y 9.6 no poseen valores complejos ya que tienen la misma dependencia cuadrática de $N(t)$, de la misma forma que con la figura 9.4. Además, se puede observar que ambos esquemas tienden al límite clásico de forma rápida respecto a valores más grandes de m ; es decir, no es necesario tomar valores muy grandes de m para observar un comportamiento clásico. Hay que mencionar que el esquema AOS tiende más rápido a

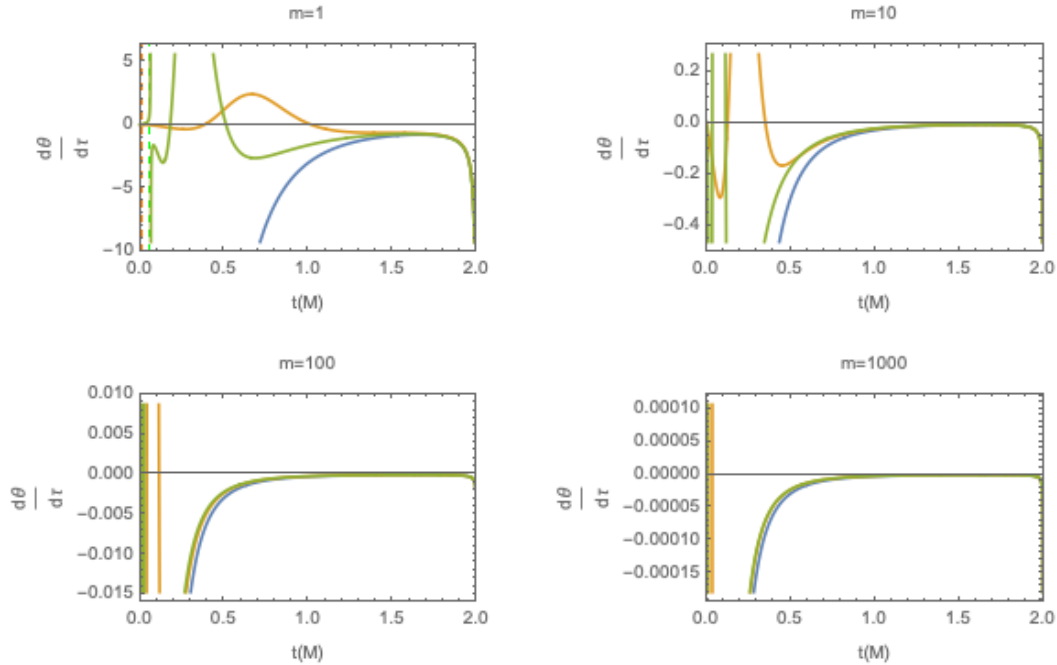


Figura 9.6: Gráfica de $d\theta/dt$ vs t en unidades de m . La dinámica clásica es la línea azul. La línea verde es el esquema AOS y el esquema de CS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas.

la dinámica clásica de lo que hace el esquema CS. Por último, es evidente que las gráficas 9.5 y 9.6 no son iguales para la dinámica semi-clásica. Esto se debe, como se mencionó en la Sección 8.2.2, a que la métrica efectiva posee un tensor de Ricci \mathfrak{R}_{ab} distinto a cero como en el caso clásico. Algunos autores, como en [11], interpretan esta corrección como un tensor de energía momento efectivo \mathfrak{T}_{ab} que viola las condiciones de energía y se vuelve relevante, cerca de la singularidad, en una zona llamada de transición \mathcal{T} del Agujero Negro al Agujero Blanco [11].

También debemos recalcar, que al proponer que estas correcciones dan un origen a una componente de \mathfrak{R}_{ab} , damos a entender que interpretamos estas correcciones cuánticas como la nueva geometría del espacio-tiempo y no, como en [11], que se interpretan estas correcciones como un tensor de materia \mathfrak{T}_{ab} donde clásicamente g_{ab} era una métrica en el vacío. La componente \mathfrak{R}_{tt} se calculará en la siguiente subsección.

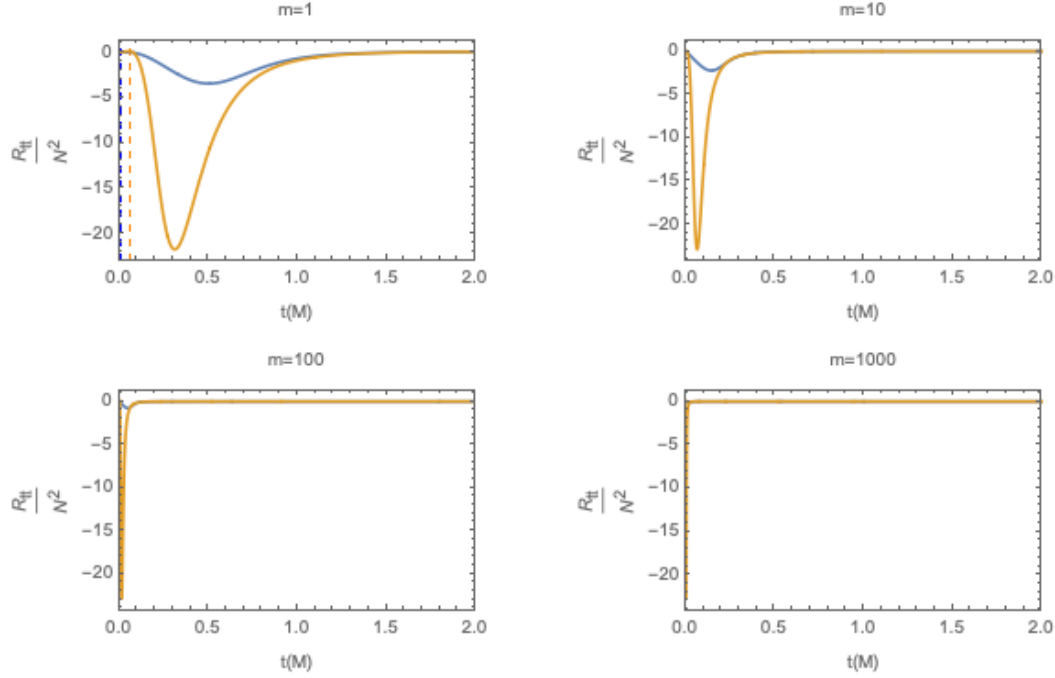


Figura 9.7: Gráfica \mathfrak{R}_{tt}/N^2 vs t en unidades de m . La dinámica clásica es 0. La línea azul es el esquema CS y el esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas.

9.3.3. Componente del tensor de Ricci

Como se ha reiterado a lo largo de la tesis, clásicamente no se presenta una componente del tensor de Ricci \mathfrak{R}_{ab} ya que la métrica es una solución exacta de la ecuaciones de Einstein en el vacío. Sin embargo, al proponer las correcciones heurísticas por la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos, las variables canónicas cambian su dinámica pero sin perder su límite clásico. Para encontrar la componente tt del tensor de Ricci podemos realizar la resta exacta hecho por la ec. (9.21):

$$\frac{\mathfrak{R}_{tt}}{N^2} = -\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab}, \quad (9.27)$$

como se muestra en la ec. (9.26) y en la figura 9.7. En esta figura podemos notar que el cociente entre la componente del tensor de Ricci y la función de lapso tiende a cero a medida que m se vuelve más grande. Lo anterior está acorde a lo esperado en la dinámica clásica.

Para encontrar la componente del tensor de Ricci \mathfrak{R}_{tt} es suficiente con multiplicar por la función de lapso N^2 , la cual se encuentra explícitamente en la ec. (9.26):

$$\mathfrak{R}_{tt} = 2 [\cos(\delta_c c) \cos(\delta_b b) - 1] + \frac{\delta_b^2 \cos(\delta_b b)}{\sin^2(\delta_b b)} [\cos(\delta_b b) - \cos(\delta_c c)] - \frac{1}{4} \sin^2(\delta_b b) \left(1 - \gamma^4 \frac{\delta_b^4}{\sin^4(\delta_b b)} \right), \quad (9.28)$$

graficada en la figura 9.8. En esta figura 9.8 notamos que el tiempo de modesto t_* sigue presente y es evidente en $m = 1$ en ambos esquemas. También resulta tener un límite clásico muy aceptable para esta componente de la curvatura ya que rápidamente tiende a cero como en la dinámica clásica.

9.3.4. Comparación en la interpretación de las correcciones cuánticas

En [11], interpretan las correcciones cuánticas como un fluido perfecto anisótropo por medio de un tensor de energía momento \mathfrak{T}_{ab} :

$$\mathfrak{T}_{ab} := \frac{1}{8\pi G} G_{ab}$$

que satisface la ecuación anterior y que surge al resolver la singularidad por la teoría de Loop Quantum Gravity. Pero en un principio, el tensor de Einstein era nulo $G_{ab} = 0$ dado que nos encontrábamos en el vacío para la métrica de Schwarzschild. Se dice que tenemos un fluido anisótropo perfecto dado que se puede encontrar una densidad de energía y sus respectivas presiones por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho &= -\mathfrak{T}_0^0 = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{1}{p_c} + \frac{1}{N^2} \frac{\dot{p}_b \dot{p}_c}{p_b p_c} - \frac{1}{N^2} \frac{\dot{p}_c^2}{4p_c^2} \right), \\ \mathfrak{p}_x &= \mathfrak{T}_1^1 = \frac{1}{8\pi G} \left(-\frac{1}{p_c} + \frac{1}{N^2} \frac{\dot{p}_c^2}{4p_c^2} - \frac{1}{N^2} \frac{\ddot{p}_c}{p_c} + \frac{\dot{N}}{N^3} \frac{\dot{p}_c}{p_c} \right), \\ \mathfrak{p}_\parallel &= \mathfrak{T}_2^2 = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\dot{p}_b \dot{p}_c}{2p_b p_c} - \frac{1}{N^2} \frac{\dot{p}_c^2}{4p_c^2} - \frac{1}{N^2} \frac{\ddot{p}_b}{p_b} + \frac{\dot{N}}{N^3} \frac{\dot{p}_b}{p_b} \right), \end{aligned}$$

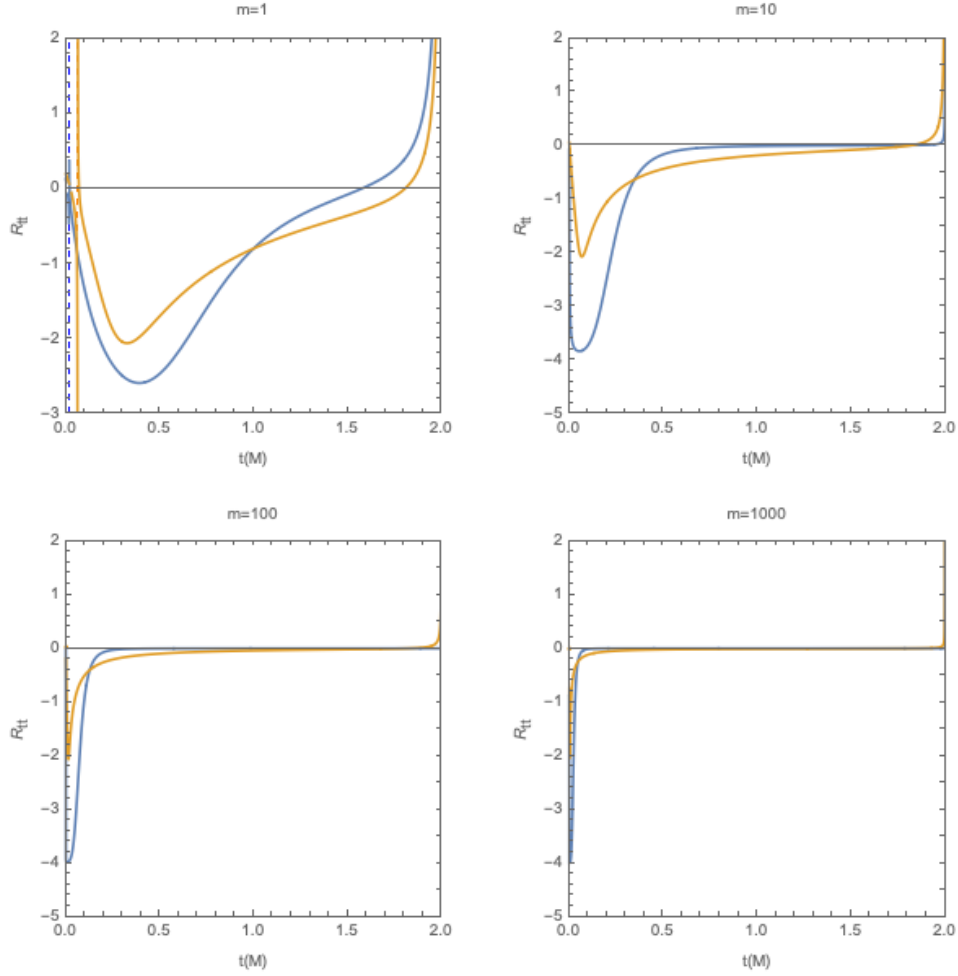


Figura 9.8: Gráfica \mathfrak{R}_{tt} vs t en unidades de m . La dinámica clásica es 0. La línea azul es el esquema CS y el esquema de AOS está representado por la línea naranja. Las líneas punteadas representan el tiempo de Modesto t_* en los distintos esquemas.

donde ρ es la densidad de energía, \mathbf{p}_x es la presión radial y \mathbf{p}_\parallel es la presión tangencial. Lo anterior es útil para verificar si se cumple la condición de energía fuerte. Los autores en [11] observaron que en la superficie de transición \mathcal{T} entre el Agujero Negro y Agujero Blanco no se satisfacía esta condición:

$$\left(\mathfrak{T}_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathfrak{T} \right) T^a T^b \Big|_{\mathcal{T}} < 0,$$

dato que las presiones y la densidad de energía de este fluido es negativa. Esto ayuda a resolver la singularidad porque existen fuerzas repulsivas que evitan que se genere una

singularidad y los invariantes de curvatura no diverjan en esta singularidad. Sin embargo, nosotros creemos que si en un principio no había presencia de materia (por medio de un tensor de energía momento) en la métrica de Schwazschild, no debería haber materia después de realizar las correcciones basadas en un enfoque geométrico como lo es la Teoría de Lazos. Por lo anterior nosotros interpretamos las correcciones cuánticas como una corrección a la discretización del espacio que no origina materia y la singularidad se evita por las fuerzas repulsivas cuasadas por la discretización del espacio y no por la existencia de la materia.

Finalmente, cabe mencionar que la ec. (9.28) representa la nueva componente del tensor de Ricci \mathfrak{R}_{tt} para la geometría semiclásica basadas en la Teoría de Lazos. Esta corrección es exacta ya que no hacemos ninguna otra suposición mas que el enfoque semiclásico basado en la Teoría de Lazos ni tampoco algún desarrollo en serie de Taylor para las variables. Esto nos da confianza en nuestro resultado principal, que es la ec. (9.28) ya que es un resultado exacto para los enfoques donde δ_c y δ_b son constantes.

Capítulo 10

Conclusiones

En esta tesis estudiamos la dinámica semiclásica de un agujero negro de Schwarzschild por medio de la isometría que posee con la métrica de Kantowski-Sachs. Este análisis se llevó a cabo mediante la ecuación de Raychaudhuri y al proponer correcciones heurísticas, motivadas por la teoría de Gravedad Cuántica de Lazos. Un primer análisis de las variables canónicas c , p_c , b y p_b nos mostró que la función $\sin(\delta_b b)$ puede tomar valores imaginarios al tener tiempos menores al tiempo de Modesto ($t < t_*$) [13]. Esto ocasiona que la dinámica en algunas variables que dependan de $\sin(\delta_b b)$ se detengan como la función de lapso $N(t)$ o el parámetro de expansión θ al tomar valores imaginarios. A pesar de este hecho existen algunas cantidades geométricas con dependencia $\sin^2(\delta_b b)$, como N^2 , σ^2 , \mathfrak{R}_{tt} o $d\theta/dt$, tienen todos sus valores reales pero con una asíntota vertical justo en $t = t_*$. Modesto indica que esta divergencia en $t = t_*$ es la creación de un nuevo horizonte de eventos como sucede en gravedad cuántica de seguridad asintótica [33]. Sin embargo, Modesto no se percató que el parámetro de expansión θ es imaginario para los tiempos $t < t_*$ y por lo que se muestra la figura 9.3, el parámetro θ tiende a $-\infty$ cuando $t \rightarrow t_*^+$ y la variable $b \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_*^+$. Aunque esto resulta ser un problema evidente, siempre hay que recordar que los tiempos de Modesto t_* toman valores cercanos a los tiempos de Planck y por esto esperamos que las correcciones semiclásicas no tengan una gran capacidad de predicción en el régimen de Planck.

Además, siguiendo el análisis del interior del agujero negro de Schwarzschild mediante la ecua-

ción de Raychaudhuri. Calculamos cada uno de los términos por separado de la ec. de Raychaudhuri de manera analítica para los esquemas de cuantización con $\delta_{b,c} = \text{const.}$ En nuestro caso sólo usamos los esquemas propuestos por AOS [11] y CS [10], donde el primero se determinan las constantes $\delta_{b,c}$ al asociarlas con el área de la superficie de transición del Agujero Negro al Agujero Blanco, mientras que en CS sólo las restringen a la estructura fiducial y al área de la esfera con radio de Schwarzschild $r_o = 2m$, en unidades naturales. Las diferencias entre los esquemas son: *i)* AOS tiene tiempos t_* mayores al esquema CS, entonces la dinámica se detiene antes en AOS *ii)* de las figuras 9.3, 9.4, 9.5, 9.6 y 9.8 es visible que el esquema AOS tiende más rápido al límite semiclásico que el esquema CS pero no sucede así para las variables canónicas (8.3, 8.5, 8.4 y 8.6).

Por último, y como resultado principal de la tesis, presento el cálculo y la interpretación de la discrepancia entre la derivada total del parámetro de expansión $d\theta/d\tau$ respecto al tiempo propio τ y la descomposición geométrica de la sección transversal de las congruencias dada por los términos $-\theta^2/3 - \sigma^2$. Dado que la ecuación de Raychaudhuri dicta la dinámica de las congruencia de geodésicas y se proponen correcciones heurísticas en las variables canónicas, la derivada del parámetro de expansión y la descomposición geométrica no deben de coincidir ya que estamos en un espacio-tiempo con correcciones semi-clásicas basadas en la Teoría de Lazos. Nosotros proponemos que esta discrepancia (como se muestra en la figura 9.7) esté asociada a una de las componentes del tensor de Ricci ($\mathfrak{R}_{ab} \neq 0$), para usar observadores cosmológicos u^t debe ser la componente \mathfrak{R}_{tt} . Como se muestran en las figuras 9.7 y 9.8, esta componente tiene un límite clásico aceptable. Además, este resultado es novedoso dado que nuestra interpretación, a compración de [11], es de un origen geométrico vía la ecuación de Raychaudhuri sin intepretar esta corrección como materia cuántica que surge por las correcciones. Esto es útil porque creemos que los esfuerzos no se deben enfocar en estudiar estas correcciones como materia y todo los análisis que conllevan a ella, si no a estudiar todas las demás consecuencias de tener un tensor de Ricci $R_{ab} \neq 0$ a nivel macroscópico.

Hipersuperficies

En una variedad espacio-temporal de 4 dimensional, una hipersuperficie es una subvariedad que puede ser espacial, temporal o nula. Diremos que una hipersuperficie Σ está dada por la siguiente restricción de las derivadas:

$$\Phi(x^\alpha) = 0 \tag{10.1}$$

o dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x^\alpha = x^\alpha(y^i) \tag{10.2}$$

donde y^i ($i = 1, 2, 3$) son coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie.

Vector normal

De manera natural, podemos encontrar un vector normal a la hipersuperficie Σ de la forma $\nabla_a \Phi$. Gracias a esto podemos determinar un vector normal unitario (no nulo) definido como:

$$n^a n_a = \varepsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es espacial} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es temporal} \end{cases} \tag{10.3}$$

Al imponer el caso donde n^a es unitario, se obtiene lo siguiente:

$$n_a = \frac{\varepsilon \nabla_a \Phi}{|g^{bc} \nabla_b \Phi \nabla_c \Phi|^{1/2}}. \tag{10.4}$$

Es evidente que en el caso que la hipersuperficie Σ sea nula el término $g^{bc}\nabla_b\Phi\nabla_c\Phi$ es cero. En este caso nulo, sólo definimos el vector normal como:

$$k_a = -\nabla_a\Phi. \quad (10.5)$$

Este vector nulo (10.5) cumple propiedades peculiares como ser un vector normal a Σ y tangente (al satisfacer las ecuaciones de las geodésicas). Sin embargo, en esta tesis no se abordará hipersuperficies nulas por lo que se le invita al lector consultar la bibliografía [20].

Métrica inducida

La métrica intrínseca a la hipersuperficie Σ se obtiene al restringir los elementos de línea a desplazamientos confinados a la hipersuperficie. Usando las ecuaciones paramétricas 10.2 podemos encontrar los coeficientes de los vectores unitarios en cada una de las direcciones de y^a :

$$e_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}, \quad (10.6)$$

donde $e_a = e_a^\alpha \partial^\alpha$ estos son tangentes a las curvas contenidas en Σ ; es decir, $e_a n^a = 0$ en el caso no nulo y $e_a k^a = 0$ en el caso nulo. Encontrando los desplazamientos diferenciales sobre la hipersuperficie Σ :

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} dy^i \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= h_{ij} dy^i dy^j, \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde

$$h_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \quad (10.8)$$

es la métrica inducida, o la primera forma fundamental, de la hipersuperficie. Esta ec. (10.8) es un escalar bajo las transformaciones de coordenadas del espacio-tiempo $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$. Sin

embargo, para las transformaciones $y^i \rightarrow y^{i'}$, la métrica h_{ij} sí se comporta como un tensor. Aquellos tensores que se transforman bajo las coordenadas y^i serán nombrados como tres-tensores, con un supra-índice al principio ³. Finalmente concluimos con la inversa de 3-métrica asociada a Σ que se relaciona con la inversa de la métrica del espacio tiempo de la siguiente forma:

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta. \quad (10.9)$$

Como se mencionó anteriormente sólo tomaremos en cuenta los casos de hipersuperficies no-nulas.

Bibliografía

- [1] Hideo Kodama and Hirotaka Yoshino. Axiverse and Black Hole. In *International Journal of Modern Physics Conference Series*, volume 7 of *International Journal of Modern Physics Conference Series*, pages 84–115, January 2012.
- [2] Roger Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. , 14(3):57–59, January 1965.
- [3] S. W. Hawking and R. Penrose. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 314(1519):529–548, January 1970.
- [4] Amalkumar Raychaudhuri. Relativistic Cosmology. I. *Physical Review*, 98(4):1123–1126, May 1955.
- [5] Abhay Ashtekar, Adrián del Río, and Marc Schneider. Space-like singularities of general relativity: A phantom menace? *General Relativity and Gravitation*, 54(5):45, May 2022.
- [6] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. 2007.
- [7] Reiner Hedrich. Quantum Gravity: Motivations and Alternatives. *arXiv e-prints*, page arXiv:0908.0355, August 2009.
- [8] Christian G. Böhrmer and Kevin Vandersloot. Loop quantum dynamics of the Schwarzschild interior. , 76(10):104030, November 2007.
- [9] Abhay Ashtekar and Martin Bojowald. Quantum geometry and the Schwarzschild singularity. *Class. Quant. Grav.*, 23:391–411, 2006.

- [10] Alejandro Corichi and Parampreet Singh. Loop quantization of the schwarzschild interior revisited. *Classical and Quantum Gravity*, 33(5):055006, feb 2016.
- [11] Abhay Ashtekar, Javier Olmedo, and Parampreet Singh. Quantum extension of the Kruskal spacetime. *Phys. Rev. D*, 98(12):126003, 2018.
- [12] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum Nature of the Big Bang. , 96(14):141301, April 2006.
- [13] Leonardo Modesto. Black Hole Interior from Loop Quantum Gravity. *Advances in High Energy Physics*, 2008:1–13, January 2008.
- [14] John Baez and Javier P Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. WORLD SCIENTIFIC, 1994.
- [15] R. M. Wald. *General relativity*. 1984.
- [16] Abhay Ashtekar, Martin Bojowald, and Jerzy Lewandowski. Mathematical structure of loop quantum cosmology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 7(2):233–268, 2003.
- [17] Ivan Agullo and Parampreet Singh. Loop Quantum Cosmology: A brief review. *arXiv e-prints*, page arXiv:1612.01236, December 2016.
- [18] Abhay Ashtekar. New Hamiltonian formulation of general relativity. , 36(6):1587–1602, September 1987.
- [19] Alejandro Perez. Introduction to loop quantum gravity and spin foams. In *2nd International Conference on Fundamental Interactions*, 9 2004.
- [20] Eric Poisson. *A relativist’s toolkit : the mathematics of black-hole mechanics*. 2004.
- [21] C. B. Collins. Global structure of the “Kantowski-Sachs” cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, 18(11):2116–2124, November 1977.
- [22] Martin Bojowald. Homogeneous loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 20(13):2595–2615, July 2003.

- [23] A. Ashtekar and J. Samuel. Bianchi cosmologies: the role of spatial topology. *Classical and Quantum Gravity*, 8(12):2191–2215, December 1991.
- [24] H. A. Kastrup and T. Thiemann. Spherically symmetric gravity as a completely integrable system. *Nuclear Physics B*, 425(3):665–686, August 1994.
- [25] Karel V. Kuchař. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. *Physical Review D*, 50(6):3961–3981, September 1994.
- [26] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: a status report. *Classical and Quantum Gravity*, 21(15):R53–R152, August 2004.
- [27] Abhay Ashtekar, Stephen Fairhurst, and Joshua L. Willis. Quantum gravity, shadow states and quantum mechanics. *Classical and Quantum Gravity*, 20(6):1031–1061, March 2003.
- [28] Abhay Ashtekar and Parampreet Singh. Loop quantum cosmology: a status report. *Classical and Quantum Gravity*, 28(21):213001, November 2011.
- [29] T. Thiemann. Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity. *Physics Letters B*, 380(3):257–264, February 1996.
- [30] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum nature of the big bang: Improved dynamics. *Phys. Rev. D*, 74:084003, Oct 2006.
- [31] Victor Taveras. Corrections to the Friedmann equations from loop quantum gravity for a universe with a free scalar field. , 78(6):064072, September 2008.
- [32] Ivan Agullo and Alejandro Corichi. Loop Quantum Cosmology. In Abhay Ashtekar and Vesselin Petkov, editors, *Springer Handbook of Spacetime*, page 809. 2014.
- [33] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. , 57(2):971–985, January 1998.
- [34] Keagan Blanchette, Saurya Das, Samantha Hergott, and Saeed Rastgoo. Black hole singularity resolution via the modified raychaudhuri equation in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 103:084038, Apr 2021.

- [35] Anton Joe and Parampreet Singh. Kantowski-Sachs spacetime in loop quantum cosmology: bounds on expansion and shear scalars and the viability of quantization prescriptions. *Classical and Quantum Gravity*, 32(1):015009, January 2015.
- [36] Alejandro Corichi, Tatjana Vukašinac, and José A. Zapata. Polymer quantum mechanics and its continuum limit. , 76(4):044016, August 2007.
- [37] Alejandro Corichi, Tatjana Vukasinac, and José A. Zapata. Hamiltonian and physical Hilbert space in polymer quantum mechanics. *Classical and Quantum Gravity*, 24(6):1495–1511, March 2007.