UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN FILOSOFÍA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
ÁREA DE LÓGICA, FILOSOFÍA DEL LENGUAJE Y FILOSOFÍA DE LA MENTE

ASPECTOS LÓGICOS Y FILOSÓFICOS DE LOS PRINCIPIOS DE REFLEXIÓN EN TEORÍA DE CONJUNTOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN FILOSOFÍA

PRESENTA:
MTRO. CÉSAR DE JESÚS ESCOBEDO SÁNCHEZ

TUTOR:
DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE (IIFs-UNAM)

COMITÉ TUTORAL:
DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ (FFyL-UNAM)
DR. LUIS ESTRADA GONZÁLEZ (IIFs-UNAM)
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS (IIFs-UNAM)
DR. AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA (IIFs-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D. F. JUNIO DE 2023

Agradecimientos

Considero de gran importancia que, antes de comenzar todo lo que vendrá en este trabajo, yo exprese mi agradecimiento a todas aquellas personas que me hay ayudado a hacer posible esta labor. He tenido la oportunidad de hablar acerca de los contenidos de este trabajo con muchas personas, y en todas esas ocasiones he podido obtener valiosa retroalimentación que sin duda me sirvió para obtener la forma final de este trabajo. Me gustaría mencionar a todas las personas que me han ayudado a llegar hasta la terminación de este trabajo, aunque seguramente omitiré (no intencionalmente) varios nombres que debería mencionar. Sin embargo, desde ahora expreso mi gratitud a todas las personas que me han ayudado.

Doy gracias a todos los miembros de mi comité tutoral y sínodo. Dr. Mario Gómez Torrente, Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez, Dr. Luis Estrada González, Dra. Carmen Martínez Adame Isais y Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia. Gracias a todos ellos, que en todas las ocasiones que he podido discutir con ellos acerca de estos temas he sido capaz de aprender más y más. Sin su ayuda, yo no habría logrado llegar hasta aquí. Expreso mi gratitud al Dr. Mario, pues no sólo ha sido mi tutor desde la maestría, sino que siempre me ha brindado su ayuda a través de todos los cursos, seminarios y asesorías que he podido llevar con él, además de haberme tenido una inmensa paciencia durante todo este tiempo. Ha sido sorprendente todo lo que he aprendido de él. También expreso mi gratitud al Dr. Cristian, pues desde que lo conocí durante el curso de mi maestría me brindó su amistad y ha sido muy amable conmigo. Además de ayudarme a encaminarme por los temas que más me han gustado por medio de cursos, seminarios, materiales y asesorías, Cristian ha sido parte muy influyente para que yo sea lo que soy ahora.

Todos los profesores que he tenido por todo mi paso por el Posgrado en Filosofía de la UNAM también tienen mi agradecimiento. Dr. Mario Gómez, Dr. Francisco Hernández Quiroz, Dr. Raymundo Morado, Dra. Ivonne Pallares, Dra. Maite Ezcurdia, Dra. Lourdes Valdivia, Dr. Alessandro Torza, Dr. Luis Estrada, Dr. Axel Barceló y varios otros, gracias por brindarme la formación en filosofía que he adquirido durante todos esto años. Ha sido una experiencia verdaderamente enriquecedora.

No puedo dejar de mencionar a los compañeros que he tenido por mi paso a través del Posgrado, varios de ellos también me han brindado su amistad. Carlos César Jiménez (póstumamente), Aliosha Celesta, Armando Lavalle, Ingrid Vera, Inti Reyes, Débora Vázquez, María Urteaga, Alejandro Solares, y varios otros, agradezco a todos ellos.

Agradezco también a todas las personas con quienes pude compartir diversos seminarios a lo largo del Posgrado. Menciono en especial al seminario de Filosofía de las Matemáticas que pude llevar con Cristian Gutiérrez, Carlos César Jiménez, Javier García, Pedro Ramos, Esperanza y más miembros. El seminario de Noción de Consecuencia Lógica que pude llevar con Cristian Gutiérrez, Manuel Tapia, Carlos César Jiménez y más miembros, agradezco por todas las sesiones que pudimos tener. Por último, pero para nada menos importante, el seminario de Teoría de Conjuntos. Agradezco a todas las muchas personas que han sido miembros de este seminario, varias otras personas que han llegado y se han ido, y en especial quiero mencionar a Manuel Tapia y Daniel Garibay, pues ellos dos fueron en gran medida quienes me ayudaron a adentrarme en el mundo de los conjuntos. También menciono especialmente a Cristian Gutiérrez, quien desde que comencé a llevar este seminario él fue de los más grandes apoyos para que mi aprendizaje de estos temas creciera aún más. Una mención especial también para Raymundo Meza y Javier Gómez, ambos miembros del seminario con quienes he podido discutir bastante de conjuntos desde que comencé a coordinar y dirigir el seminario.

También agradezco a las personas con quienes pude aprender acerca de filosofía por mi paso a través de la Unidad Académica de Filosofía de la Universidad Autónoma de Zacatecas. En especial, quiero agradecer a mis profesores, Dr. Jorge Tagle, Dr. Juan Reyes, Dr. Jorge Ornelas, Dr. Víctor Peralta, pues gracias a ellos pude comenzar a perfilar mis intereses dentro de la filosofía. Especialmente agradezco al Dr. Jorge Tagle, quien siempre me ayudó mucho por todo mi paso en la licenciatura hasta tutorarme para graduarme, además de brindarme su amistad. También menciono especialmente al Dr. Juan Reyes, quien igualmente me apoyó mucho durante la licenciatura y aún después de graduarme me ha brindado su apoyo y su amistad. También agradezco a dos buenos compañeros y amigos, Thomas Meier y Gerardo Martínez De la Torre, con quienes compartí mis inicios como universitario y mis primeros acercamientos a diversos temas y discusiones de filosofía. Agradezco también a un excelente amigo, Manuel de Jesús Márquez Cabrera (póstumamente), de quien admiro su gran talento como filósofo y aprecio mucho la sincera amistad que tuve con él desde la licenciatura, definitivamente una excelente persona y amigo que valoro mucho.

Muy especialmente agradezco a toda mi familia. Mis padres, Juan Carlos y María Elena, mis hermanos, Juan Carlos y Nélida Alejandra, mis sobrinas María Fernanda y Julieta, mis cuñados, Horacio y Sandra, y el resto de mi familia. Su gran apoyo y ayuda incondicionales han influenciado, sin duda, el que yo haya podido llegar hasta aquí.

Finalmente, agradezco al Programa de Posgrado en Filosofía, con las dependencias de la Facultad de Filosofía y Letras y el Instituto de Investigaciones Filosóficas. También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo de beca que me otorgó desde el año 2016 hasta el año 2020.

Índice general

Agradecimientos……………………………………………………………………….I

Introducción……………………………………………………………………………1

1. Sobre el desarrollo contemporáneo de la Teoría de Conjuntos. Problemas de indecidibilidad y robustecimiento de la Teoría mediante recursos adicionales……24

1.1. Algunos requisitos formales preliminares………………………………………..24

1.1.1. Algo de Lógica y Teoría de Modelos……………………………………26

1.1.3. Bases preliminares en Teoría de Conjuntos………………………………33

1.2. Desarrollo y crisis en Teoría de Conjuntos. Sobre problemas de indecidibilidad y el programa de Gödel…………………………………………………………………….38

1.2.1. Dificultades en TC, o sobre cómo obtener enunciados especiales……….39

1.2.1.1. La Hipótesis del Continuo………………………………………40

1.2.1.1.1. La independencia de HC respecto de TC: El universo constructible L…………………………………………………………43

1.2.1.1.2. La independencia de HC respecto de TC: El *forcing*………..47

1.2.1.2. La consistencia de TC…………………………………………52

1.2.1.3. El Axioma de Elección………………………………………..60

1.2.1.3.1. V=L implica AC…………………………………………..62

1.2.1.3.2. Una extensión genérica $M[G] \nvDash AC$…………………………65

1.2.2. El programa de Gödel. En búsqueda de resolver problemas de indecidibilidad………………………………………………………………...74

1.2.2.1. Motivación del programa. Indecidibilidad y Realismo………..76

1.2.2.2. El programa de Gödel. Criterios para elegir nuevos axiomas…83

1.3. Conclusiones……………………………………………………………………89

2. Teoría de Conjuntos aumentada. Principios de Reflexión, nuevos axiomas y alcance de la Teoría……………………………………………………………………………..96

2.1. Programa de la búsqueda de nuevos axiomas……………………………………..96

2.2. ¿El universo conjuntista “reflejado”? Introduciendo los Principios de Reflexión..101

2.3. Formulación de los Principios de Reflexión………………………………….…...108

2.3.1. Formas de Reflexividad: Nociones conjuntistas compatibles con PR….113

2.3.1.1. Reflexividad en conjuntos estacionarios……………………...113

2.3.1.2. Delta-reflexión…………………………………………….…...117

2.4. Algunas cuestiones acerca de los Principios de Reflexión………………………..121

2.4.1. Sobre la noción de Categoricidad y PR…………………………………..121

2.4.2. Formas parciales de PR……………………………………………………129

2.3. Conclusiones……………………………………………………………………….133

3. Reflexión e indecidibilidad en órdenes superiores…………………………………135

3.1. Algunos problemas en el uso de los Principios de Reflexión. La crítica de Reinhardt-Tait-Koellner……………………………………………………………………………..135

3.1.1. PR y el obstáculo mínimo………………………………………………..136

3.1.2. La crítica a PR en tercer orden…………………………………………..144

3.1.2.1. Alcances de la expresividad de la noción de Reflexión. Introducción a la Γ_n-relfexión……………………………………………146

3.1.3. Restricciones a PR en el lenguaje de tercer orden………………………151

3.2. Conclusiones……………………………………………………………………….163

4. Un estudio modal de la Teoría de Conjuntos………………………………………166

4.1. Limitaciones de PR. Enfoque lógico y modal en Teoría de Conjuntos…………….166

4.1.1. Modalidad y aspectos metafísicos/ontológicos de la Teoría de Conjuntos.168

4.1.2. Sobre la fundamentación ontológica de PR……………………………170

4.1.2. Modalidad desde el enfoque axiomático de la Teoría de Conjuntos……..190

4.2. Potencialismo revisado: Bases modales en el estudio teórico-conjuntista…………..194

4.2.1. Preliminares: Lógica modal y pluralidades………………………………194

4.2.2. PR y modalidad…………………………………………………………...199

4.2.2.1. Apéndice: Labor potencialista en forcing………………………208

4.3. Conclusiones……………………………………………………………………..216

5. Multiversismo conjuntista. Otra visión ontológica del universo *V*, PR revisados y alternativas para tratar de resolver la indecidibilidad en TC………………………..219

5.1. Multiversismo conjuntista. Una postura ontológica alternativa sobre los conjuntos………………………………………………………………………………219

5.2. Base teórica del Multiversismo. Presentación de los principios y axiomas compatibles con los múltiples universos conjuntistas…………………………………………………226

5.3. Categoricidad y Verdad desde el Multiversismo…………………………………...230

5.4. Problemas de PR revisados con los recursos multiversistas………………………..233

5.4.1. La objeción RTK desde el Multiversismo………………………………...233

5.4.2. Multiversismo, MH y PR en tercer orden………………………………...236

5.4.3. Un caso particular: Multiversismo zermeliano…………………………...247

5.5. Conclusiones……………………………………………………………………..255

Conclusiones Finales……………………………………………………………….259

Bibliografía…………………………………………………………………………262

Introducción

En la actualidad, no suele resultar extraño que diversas cuestiones en áreas específicas de estudio sean abordadas desde la perspectiva de conglomerados de objetos. Sea por su versatilidad o simplemente porque hay la impresión de tener una mejor comprensión, en muchas ocasiones resulta más sencillo trabajar con colecciones de ciertos objetos que tienen determinadas propiedades, de modo que se consiguen ciertos resultados que pueden tener diversas finalidades, como el predecir fenómenos o comprender la conducta de tales objetos. Esto hace que, en general, los conglomerados de objetos tengan cierto privilegio a la hora de sopesar los recursos a disposición en el estudio de diversos problemas y cuestiones. Incluso no nos es complicado notar que las colecciones de objetos como recurso práctico no es nada ajeno, pues con la sola idea rudimentaria de colección de objetos se aborda una cantidad enorme de situaciones, comenzando por las más básicas como lo es el proceso de conteo.

Lo anterior puede resultar suficiente acerca de lo que se requiere saber acerca de las consideraciones teóricas, e incluso prácticas, acerca de lo que significa ser una colección de objetos. Sin embargo, en la historia del conocimiento llegó un momento en que se volvería necesario indagar con más profundidad y precisión los aspectos más sutiles acerca de lo que llegan a ser tales colecciones. Sea lo que sea que podamos tener como "idea intuitiva acerca de lo que es una colección de objetos", siempre parece que están involucrados por los menos dos aspectos relevantes que estamos dispuestos a tomar en cuenta al momento de identificar y comenzar a estudiar tales colecciones: (1) Las propiedades de los objetos en la colección, (2) la cantidad de objetos de la colección. Podemos llegar a pensar que esto es así debido a que los primeros acercamientos a lo que sean las pluralidades de objetos se efectúan mediante nociones más o menos rústicas acerca de la naturaleza de los objetos y de cómo se individúan respecto de los demás, pero en realidad notamos que hay mucho más trasfondo del que se sugiere con estas solas ideas. Como se ha mencionado antes, los conglomerados de objetos toman parte en prácticamente todas las disciplinas del conocimiento, y aunque el interés por indagar acerca de los aspectos de tales conglomerados varía de una disciplina de estudio a otra, es innegable que un entendimiento mejor acerca de lo que los conglomerados o colecciones de objetos pueden ser resultará en un mejor manejo de este recurso que es tan socorrido para efectuar estudios de diversos fenómenos y situaciones.

Lo anterior adquiere una importancia considerable al tomar una rama de estudio tan prolífica como las matemáticas como el terreno de estudio acerca de las colecciones de objetos. En la matemática, la noción de conjunto[1] es vital para el que ha sido -y sigue siendo- el vasto desarrollo de buena parte de la disciplina debido a la implementación de varias nociones teóricas que han permitido un manejo preciso de una importante cantidad de nociones, conceptos y resultados en términos de conjuntos. Por lo que ahora dirigimos la atención hacia los aspectos lógicos y matemáticos que subyacen a los conjuntos, pues desde ahí exploraremos un importante fenómeno que ha sido de interés desde hace tiempo.

[1] Hasta ahora, he querido referirme a los conjuntos en sentido intuitivo como colecciones de objetos o conglomerados, dejando el término "conjunto" como uno de uso especial que estudiaré en este trabajo (pero nótese que esto, para nada, implica que los usos cotidianos de términos como "colección", "conglomerado" y "conjunto" estén clara y terminantemente delimitados, pues por el contrario, es usual que se les vea como sinónimos) . Aunque no niego que haya posturas que defiendan la idea de que se traten los términos "colección", "conglomerado" y "conjunto" como sinónimos, en este trabajo procederemos con la idea de que no serán lo mismo. Los conjuntos serán el objeto de estudio de la teoría lógico-matemática que será de amplio interés aquí, mientras que la idea de conglomerado será una más cercana a aquellas colecciones de objetos que pueden no ser conjuntos entendidos en esa teoría (siendo así algo más cercano a las clases de objetos). Ciertamente se puede abordar una discusión interesante acerca de la distinción entre colecciones, pero no será tratada aquí salvo en grado mínimo.

El que es quizá el más famoso exponente de la Teoría de Conjuntos, Georg Cantor (1845-1918), fue también de los primeros en comenzar a plantearse cuestiones acerca del papel que los conjuntos como colecciones de ciertos objetos abstractos desempeñan en el estudio especial que se realiza en diversas ramas matemáticas. Sean conjuntos de números, o de puntos o líneas, o de funciones, lo cierto es que Cantor notó que el concepto de conjunto era uno que ya permeaba buena parte de la matemática, y como tal, parecía adecuado estudiarlo con la precisión y rigor que se exige dentro de la disciplina.[2] Con esto en mente, se comenzó a analizar el concepto de conjunto a la luz de las consideraciones matemáticas y así dotarle de un mejor entendimiento, y así se comenzó también a dar una estructura teórica más sólida que subyaciera la noción de conjunto. Con esto, se empezó a dar más forma a lo que ahora conocemos como la Teoría Matemática de Conjuntos, la cual ha sido objeto de estudio intenso e incluso de polémica tanto para matemáticos como para lógicos y filósofos. Exploremos esto con más detalle.

Desde el punto de vista filosófico, hay buenas razones para pensar que hay un llamado concepto "preteórico" de conjunto que proporciona una suerte de base para poder trabajar de manera más técnica con la noción más formal de conjunto desde la teoría. Ese concepto preteórico consistiría, *grosso modo*, en que una colección de objetos con ciertas características determina un conjunto, y esto da pie a que se tenga una pluralidad basta de conjuntos a considerar. Además, otro aspecto a destacar es la estrecha relación de los conjuntos con los objetos que los conforman, por lo que otro concepto preteórico, que es el

[2] Vale la pena mencionar que, específicamente, Cantor empezó a involucrarse con el estudio de los conjuntos mientras estudiaba propiedades de convergencia de series trigonométricas dentro del análisis matemático real. Aunque en varios lugares esto se presenta en mayor o menor medida, en Dauben (1990) se puede consultar una exposición de esto con detalle.

de pertenencia a un conjunto, evidentemente está en juego aquí.[3] Por lo que los conceptos preteóricos de conjunto y de pertenencia ya se hallan en cierta medida dentro de las consideraciones formales que la teoría de conjuntos tenga que decir acerca de estos objetos. Más aún, podemos notar dentro de los axiomas básicos de la teoría que las ideas preteóricas ya están involucradas, pues ellas dan el sustento al significado de tales principios de la teoría. Así, por ejemplo, podemos pensar en los axiomas de Extencionalidad, de Unión o del Par, y notaremos que las ideas preteóricas de conjunto y de pertenencia ya se encuentran jugando un rol importante en la comprensión del contenido de esos axiomas. Así, los axiomas de la teoría de conjuntos incluyen lo que parece ser los intentos por precisar exactamente qué queremos decir cuando pensamos en conjuntos, o qué significa que determinados objetos sean miembros de tal o cual conjunto. Sin embargo, esta idea se encuentra lejos de ser admitida como la mejor explicación de los conceptos preteóricos de conjunto y pertenencia, pues por lo menos desde el punto de vista matemático, hay fuertes razones para creer que el concepto formal de conjunto no recupera del todo las ideas intuitivas acerca de lo que es una colección de objetos.

Desde la Teoría de Conjuntos es generalmente aceptado que hay colecciones de objetos que no estamos dispuestos a admitir como conjuntos. Esto es mejor entendido si lo aterrizamos a un par de ejemplos concretos en que se requiera trazar una distinción:

(1) En un momento dentro de la denominada forma ingenua de hacer Teoría de Conjuntos,[4] se tuvo la impresión de que cualquier colección de objetos de cualquier tipo determina un

[3] Puede resultar un tanto peculiar que los aspectos de tales conceptos preteóricos, el de conjunto y el de pertenencia, sean analizables con las nociones teóricas de los mismos dentro de la Teoría de Conjuntos. Preguntas como, ¿Qué colecciones de objetos determinan un conjunto? o ¿Exactamente qué significa que un objeto determinado pertenezca a un conjunto?, resultan naturalmente al indagar dentro del estudio de la teoría de conjuntos. Sin embargo, aquí no nos decantaremos por las cuestiones acerca del grado de adecuación que tendrían las nociones formales con las nociones preteóricas.

[4] Que incluso ha recibido el título de *naive set theory* en inglés.

conjunto. Después de todo, en la práctica cotidiana no parecía haber dificultad con el hecho de tomar como conjuntos a cualesquiera conglomerados de objetos, y esto parecía ser el caso al trasladarlo al terreno lógico-formal de la teoría matemática que los estudia. Pero esto mostró ser falso por lo siguiente. Si hay objetos cuya propiedad determinante consiste en que no sean miembros de sí mismos,[5] entonces esto conduce al siguiente resultado. El conjunto de objetos que no se pertenecen a ellos mismos es un conjunto, y tiene sentido preguntarse acerca de si dicho conjunto se pertenece a sí mismo. Si lo llamamos C y C pertenece a C, entonces cumple con la propiedad definitoria del conjunto C, a saber, no pertenecerse a sí mismo, luego C no pertenece a C; si C no pertenece a C, entonces C es un conjunto más de aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, por lo que C es uno de los elementos de C. Así que resulta que en cualquiera de las respuestas acerca de la pregunta sobre si C es o no miembro de sí mismo nos lleva a contradicciones.[6] Por lo que resulta claro que los conjuntos vistos desde la teoría matemática no pueden coincidir con una forma enteramente irrestricta de formación.[7]

(2) Ya que estamos en un tratamiento estrictamente formal en la Teoría de Conjuntos acerca de estos objetos, tiene sentido preguntarse por el "conjunto mayor" que engloba a todos los demás. ¿Qué podemos decir de la colección de todos los conjuntos?, ¿Es a su vez un conjunto? Esto se responde en modo negativo por lo siguiente. Mediante ciertas

---

[5] Aquí estoy pensando en una forma básica en que los objetos (dentro y fuera del universo de los conjuntos) constituyen colecciones en el sentido en que ellos mismos son el conjunto que los tiene. Y entre los objetos así pensados figuran aquellos cuya propiedad conjuntista es la de ser conjuntos donde esos mismos objetos no están. Esta idea es mejor abordada en su forma más abstracta dentro de la Teoría de Conjuntos.
[6] Esta es una exposición sucinta de lo que se conoce como la Paradoja de Russell y viene a poner fin a la idea de que los conjuntos en la teoría axiomática son tales que su formación obedece una forma irrestricta de ser efectuada.
[7] Aquí no estamos de ninguna forma comprometiéndonos a que la noción intuitiva de conjunto es una donde sí estemos dispuestos a aceptar cualquier colección de objetos como conjunto. El cuidado a tener aquí consiste en que no debemos asumir ninguna postura acerca de las condiciones necesarias y suficientes de lo que constituye un conjunto en sentido intuitivo, pues este problema es más complicado que sólo representar paradojas como la de Russell.

operaciones conjuntistas[8] y un cuidadoso proceso de reflexión[9] nos percatamos de que ese "conjunto mayor" tendría el siguiente problema: Nombrando a ese conjunto mayor como M, llamamos $\wp(M)$ al conjunto formado por todos aquellos conjuntos que son subconjuntos[10] de M; nos basta con meditar un poco para convencernos de que M es un miembro de $\wp(M)$ debido a que todo miembro de M (o sea, cualquier conjunto) es un miembro de $\wp(M)$, pero aquí radica el problema con M pues por definición es el conjunto de todos los conjuntos, y en particular $\wp(M)$ es un conjunto más de todos aquellos que se hayan dentro de M, por lo que en términos de tamaño se estaría cumpliendo que $\wp(M)$ tiene menos o por lo menos tantos elementos como M a la vez que M tiene menos o por lo menos tantos elementos como $\wp(M)$. Así que $M = \wp(M)$ y hay un conjunto para el que no tenemos su potencia, contradiciendo que la operación de potencia se puede efectuar en cualquier conjunto.[11]

Vemos pues que la noción matemática de conjunto no sólo no recupera por completo la noción intuitiva de conjunto -y tampoco la de pertenencia- que solemos tener en mente cuando trabajamos con colecciones de objetos, sino que desde los aspectos considerados más fundamentales ya hay el surgimiento de cuestiones que más bien exigen un esclarecimiento mayor al tenido a primera impresión sobre las nociones básicas de la teoría. Esto es importante debido a que, desde los planteamientos tempranos de la teoría, se

---

[8] Principalmente la operación de conjunto potencia y el axioma acerca de su funcionamiento.

[9] Aquí estoy pensando en uno de los Teoremas de Cantor, a saber: Para cualquier conjunto X, el tamaño de X es estrictamente menor que el de su potencia, lo que en símbolos viene a ser: $|X| < |\wp(X)|$.

[10] El entendimiento usual de la noción de subconjunto aquí es la usual dada desde los aspectos básicos de la Teoría de Conjuntos.

[11] Aquí he querido establecer un problema lo más aterrizado posible a las nociones básicas de la teoría. En su forma original, el razonamiento conduce a una contradicción con el Teorema de Cantor mencionado en la nota 9, pues lo que se consigue con el conjunto de todos los conjuntos es que $|\wp(M)| < |M|$. El problema incluso se expande en la forma de la conocida Paradoja de Orayen cuando se estudia en relación con los modelos de la Teoría de Conjuntos. Para los propósitos expositivos de esta introducción, no es necesario explorar a profundidad estos aspectos más sutiles.

ha tenido la pretensión de que sirva como una forma de fundamentar la práctica matemática en una cantidad considerable de áreas. Desde los desarrollos y resultados alcanzados en aritmética elemental, pasando por ramas como el álgebra, análisis y geometría, hasta áreas de clara especialización en nociones y fenómenos matemáticos,[12] los conjuntos como los objetos de desarrollo en las teorías matemáticas tienen un papel preponderante que hoy en día no es puesto fácilmente en duda. El papel fundacionista de la Teoría de Conjuntos no parece poner en tela de juicio que una mejor comprensión de los conjuntos puede proporcionar una mayor facilidad y entendimiento de las matemáticas y su práctica en general, lo cual es deseable si se tiene la aspiración de hacer de la matemática una disciplina de estudio más precisa y rigurosa de lo que ya es. De modo que la Teoría de Conjuntos adquiere una dimensión de importancia para los estudiosos en búsqueda de razones para determinar todo el rol de la teoría dentro de las matemáticas.

Hasta aquí con algunos aspectos y problemas que suelen surgir para los teórico-conjuntistas acerca de: (i) la naturaleza ontológica de los conjuntos -como objetos pensados tanto dentro como fuera de las matemáticas, (ii) los conjuntos como los "bloques" de construcción que fundamentan la estructura de todo el edificio teórico que las matemáticas han desarrollado.[13] Si bien la búsqueda de respuestas a las cuestiones acerca de la naturaleza básica de los conjuntos y la noción de pertenencia es de los principales intereses, es desde el punto de vista matemático de donde podemos tomar la mayor comprensión de la forma abstracta en que tales objetos se comportan. Y aquí debemos decir que tendremos la

[12] Aquí entrarían en juego ramas matemáticas como el análisis complejo, el álgebra moderna, el uso de recursos extra que permiten estudiar la topología desde aspectos más concretos como son las variedades (topología diferencial) o las estructuras con operaciones particulares (topología algebraica), entre otras.

[13] Es importante notar aquí, particularmente con el punto (ii), que no se intenta negar la existencia de otras posturas acerca de lo que es la fundamentación de las matemáticas. Hay resultados interesantes de estudiar acerca de que teorías como la de categorías, o la homotópica de tipos, proporcionan otra forma de fundamentación. Este es otro tema que por sí mismo nos llevaría demasiado lejos de los propósitos de este trabajo.

inclinación por favorecer una postura que defiende que nuestro entendimiento de los conjuntos y objetos que los conforman se ve enriquecido por el estudio de los conceptos tanto preteórico como formal de los conjuntos y la pertenencia a éstos.[14] Por lo que ahora dirigiremos la atención a aspectos más específicos de los conjuntos dentro de la labor matemática. Actualmente es bien sabido que entre los conceptos más básicos en las matemáticas están los de número, función, punto y línea los cuales tienen gran incidencia en prácticamente todas las áreas, y el estudio de las relaciones y propiedades de ellos tiene una dimensión muy amplia. Las cuestiones que involucran conceptos como los anteriores aparecen sin parar en la labor matemática, por lo que se vuelve necesario contar con un entendimiento de ellos lo más claro, preciso y amplio del que se pueda disponer, y resulta que es por medio de conjuntos de tales objetos con lo que se efectúa su estudio. Cuestiones acerca de las características que tienen determinados conjuntos de números, funciones, puntos o líneas suelen ser la traducción más adecuada para trabajar con las diversas preguntas que involucran a todos esos objetos, siendo así los conjuntos los que aparecen al centro de las discusiones acerca de esos objetos. Ahora bien, uno de los detalles que más han llamado la atención en el estudio de los conjuntos de tales objetos ha sido su relación con la noción de infinito,[15] pues hasta el momento en que Cantor inició el estudio formal de los conjuntos dicha noción no figuraba entre aquellas que contaban con un tratamiento riguroso y preciso dado por las matemáticas. La forma intuitiva de entender el infinito es como una colección de objetos que no tienen un término en el sentido de que podemos

[14] Una precaución para dar aquí es la siguiente. En este trabajo no estamos procediendo con la aparente idea de que hay una clara distinción entre los conceptos técnico y preteórico (o intuitivo) de conjunto. Cuando hablamos aquí del concepto preteórico de conjunto, nos referimos a esa noción intuitiva de colección de objetos en el sentido expuesto al inicio de esta introducción. Debemos pensar aquí que no hay la pretensión de que dicha noción intuitiva está exhaustivamente explicada y entendida.

[15] Dauben (1990) es nuevamente un lugar adecuado para hallar una exposición acerca de la noción de infinito y cómo fue abordada por la teoría protocolar de conjuntos de Cantor.

encontrar más de dichos objetos, y esta idea permea diversas colecciones entre las que figuran los números -usualmente no distinguibles de los conjuntos de números naturales, enteros, etc.- o el universo físico mismo.[16] En cambio, la forma matemática de pensar al infinito hasta antes de las formas tempranas de hacer Teoría de Conjuntos consistía en un concepto sin demasiado peso dentro de la labor matemática que indicaba ciertos límites a la hora de obtener resultados,[17] de modo que tratar con dicho concepto no figuraba entre los pendientes de los matemáticos. Y esto no cambió hasta que Cantor y el desarrollo de la Teoría matemática de Conjuntos dotaron de una complejidad y sofisticación al concepto de infinito como no se había visto antes, pues en la Teoría de Conjuntos aparecieron nociones como las de rango y cardinalidad, mediante la cuales Cantor introdujo el concepto de número transfinito que serviría en delante para discernir entre conjuntos de distintos tamaños infinitos. Con dichos números transfinitos, Cantor propuso las bases para fundamentar la llamada Aritmética Cardinal Transfinita con la que se recuperan ciertos elementos para emplear la aritmética elemental y se introduce todo un tratamiento formal de los conjuntos infinitos para desarrollar formas nuevas de las operaciones usuales de la aritmética que dan sentido a las operaciones entre números transfinitos. Con esto, la labor

[16] Aquí estoy presentando una forma de infinito que se encuentra en la cotidianidad de aquellos no-versados. La idea de infinito aquí es una muy simple en el sentido de que su principal característica definitoria consiste en ser una colección o agrupación sin fin, y cuando menciono el ejemplo del universo físico mismo aquí es porque recurro al entendimiento de las personas no-versadas en alguna forma de estudio de la física en la que se pueden presentar razones fuertes para creer que el universo no es infinito.

[17] Se consideran como ejemplos ilustrativos del papel del infinito mencionado aquí a los casos de conjuntos de números particulares que formaban parte de ciertos resultados. El conjunto de números algebraicos es uno que se demostró era infinito sin que se indagara más al respecto, el infinito está presente en el estudio temprano de las sucesiones y series por medio de la propiedad de divergencia, e incluso el concepto de infinito ya estaba presente con la noción de límite de ciertas funciones en relación con su comportamiento alrededor de determinados puntos.

En general, la idea de infinito hasta antes de los estudios teórico-conjuntistas de Cantor era como el llamado infinito *actual* en el sentido que Aristóteles manejaba. Esto es, una totalidad demarcada por un principio y un fin, pero con infinitos miembros. Y Cantor propuso su forma de tratar el infinito como infinito *potencial*, esto es, como colecciones de objetos que tenían la propiedad de "añadir" miembros a la totalidad sin terminar en algún momento.

teórico-conjuntista empezaría a cobrar fuerza y atención en la comunidad matemática debido a lo novedoso que resultaba el intento por incursionar dentro del concepto de infinito que Cantor desarrolló.[18]

¿Por qué el concepto de infinito se relaciona con el estudio de los conjuntos que hemos venido explorando hasta ahora? Aunque dentro del concepto intuitivo que tengamos de conjunto difícilmente se explora el peso que tiene algo como la noción de infinito, el concepto especializado de conjunto no pasa por alto el papel que puede tener el infinito en vista de su aparición constante en diversos resultados. El mismo Cantor llegó a estudiar el papel del infinito cuando, en su estudio de los tamaños de los conjuntos de números naturales y reales, se dio cuenta de que ellos eran infinitos de diferentes tamaños. Por lo que se volvería importante el comprender este aspecto para esclarecer más tanto el concepto matemático mismo de conjunto como la relación que mantiene con la forma intuitiva de pensar en conjuntos.

Pese a la importancia que se vislumbró en el concepto matemático de conjunto, ésta vino con ciertas dificultades que más bien se convertirían en problemas serios que alcanzarían a repercutir en la considerada, pero no del todo clara, fundamentación de las matemáticas. Al respecto, podemos retomar el concepto de infinito estudiado por Cantor y con el que se obtuvo el importante resultado acerca de la existencia de diversos infinitos. Cantor mismo se encontró con la cuestión, aparentemente tratable con las nuevas herramientas conjuntistas que propuso en su momento, acerca de si el infinito correspondiente a los números naturales y conocido por ω y el infinito correspondiente a los números reales y conocido por ϵ eran tales que no había ningún otro número infinito por

[18] Esto no vino sin serias consecuencias para Cantor cuando seguía con vida trabajando dentro de la Teoría de Conjuntos. En Dauben (1990) se encuentra la recapitulación de este periodo de la vida de Cantor considerado más bien como uno muy complicado para él.

en medio de ellos. La cuestión era importante debido a que, entre otras cosas, ayudaría a comprender la jerarquía entre los conjuntos de números y el paso del dominio de lo discreto a lo continuo, y Cantor en principio tenía la convicción de que tales infinitos no tenían ningún otro conjunto de números con tamaño intermedio. Esto es lo que se conocería después como la Hipótesis del Continuo y es un problema que resultó más complicado de lo que parecía, tanto para Cantor como para estudiosos coetáneos y posteriores a él.[19] La cuestión permaneció como un problema abierto durante el resto de la vida de su autor y siguió abierto durante tiempo después. Luego de que dicho problema fue estudiado con más detalle, se encontró un aspecto más bien inusual sobre la respuesta que se le podía dar, la cual consistía en que, bajo ciertos desarrollos de la teoría misma, resultaba que la respuesta al problema de la hipótesis del continuo resultaba tanto afirmativa como negativa de manera consistente.

El fenómeno resultante de dicho estudio propició que los interesados en él se formaran preguntas acerca del rol de la lógica como fundamentación del proceder y rigor en matemáticas. Una concepción clásica acerca de la verdad en matemáticas afirma que cada proposición dentro de la disciplina admite un único valor de verdad de los conocidos como Verdadero y Falso.[20] Por lo que la aparición de una cuestión que admitiera ambas respuestas dentro de una teoría matemática sin duda requería un análisis más minucioso para comprender lo que ocurría, y la necesidad de comprender el papel de la lógica dentro de la Teoría de Conjuntos se volvió totalmente clara. Esto porque, según el aspecto acerca

---

[19] Este problema, al cual dedicaremos su espacio en este trabajo, es famoso no sólo por su dificultad para abordarse y trabajarse, sino por la historia que se ha formado con su surgimiento y vigencia. Cantor lo enfrentó sin poder darle una respuesta satisfactoria, y Hilbert en 1900 lo puso a la cabeza de su famosa lista de 23 problemas. En Dauben (1990) puede hallarse más información acerca de la hipótesis del continuo.

[20] Dicha concepción clásica recibió un tratamiento filosóficamente más fino con el fenómeno producido por la hipótesis del continuo, además que propició la aparición de propuestas acerca de lo que es la verdad en matemáticas. Todo lo anterior sobre una base teórico-conjuntista y a esto dedicaremos un análisis en este trabajo.

de que cada proposición matemática admite un único valor de verdad, se requería saber más acerca del procedimiento efectivo de decisión dentro de la Teoría de Conjuntos para resolver la cuestión de la hipótesis del continuo. Aquí es donde cobra su importancia el estudio de la *decidibilidad* dentro de la lógica y cómo esta propiedad se comporta en teorías como la de conjuntos. Al tiempo de tener los resultados mutuamente excluyentes sobre la hipótesis del continuo, lógicos como Tarski y Gödel ya habían hecho sus estudios acerca de lo que significa que los sistemas formales lógicos (como el empleado por la Teoría de Conjuntos) tengan la propiedad de ser *completos*, lo cual consiste en que, dada cualquier proposición legítima p dentro de un sistema formal lógico decidible S, el sistema formal S tendrá una respuesta acerca del valor de verdad de p.[21] Pero con lo anterior, si la hipótesis del continuo es una de tales proposiciones matemáticas p y la Teoría de Conjuntos vista como sistema formal S es la encargada de responder a la cuestión por el valor de verdad de esa proposición, entonces resulta claro que hay que examinar lo que pasa con la noción de decidibilidad en la Teoría de Conjuntos.

La hipótesis del continuo como proposición especial de la teoría en sentido de que su valor de verdad parecía depender de cómo se enriquece la teoría misma inició una investigación acerca de la relación que hay entre la lógica con las propiedades de consistencia y decidibilidad. Como parte de la pretensión fundacionista que se le atribuía a la Teoría de Conjuntos acerca del resto de las matemáticas, debía garantizarse que la teoría cumpliera con estos dos requisitos:

[21] Esto se está pensando en el modo usual contemporáneo, que consiste en que el sistema S tiene una teoría de la demostración bien definida en el sentido de que son claros (si los hay) los axiomas, las reglas de inferencia y la noción de demostrabilidad. Aquí también estamos pensando que las matemáticas contemporáneas (por lo menos desde el periodo de tiempo que incluye a estudiosos clásicos como Cantor, Frege y Tarski) son interpretadas dentro de sistemas formales.

(1) *Teoría consistente.* Dentro de la teoría misma, el riesgo de derivar una contradicción debe mantenerse al mínimo. De lo contrario, no podría garantizarse que el resto de la labor matemática, que está permeada por los conjuntos, sea confiable en la obtención de sus resultados específicos sin caer en absurdos.

(2) *Teoría completa.* En vista de que la teoría es el terreno de base para el planteamiento y examinación de buena parte de las matemáticas, debe contar con los recursos para decidir sobre el valor de verdad de las proposiciones que surgen como parte de su tema de estudio.

Es verdad que el mismo Gödel menciona que, en vista de que la cuestión de la hipótesis del continuo permanecía abierta, la Teoría de Conjuntos era una empresa "inacabada" en el sentido de que sus axiomas no alcanzaban a proporcionar los medios para decidir sobre todas las cuestiones de la teoría -pues por lo menos una de dichas cuestiones quedaba fuera del alcance de su capacidad demostrativa-, lo cual sólo resultaba de la insuficiente capacidad para comprender todo el comportamiento de ciertas nociones clave de los conjuntos, y entre ellas, la del infinito. La hipótesis del continuo representó la aceleración de una investigación lógica exhaustiva de la Teoría de Conjuntos, pues el descubrimiento de otras proposiciones que también escapaban al alcance de los axiomas de la teoría dejaba ver que la decidibilidad y compleción en la teoría no podían asumirse sin más, sino por el contrario, su constante revisión a la luz de nuevo contenido teórico-conjuntista, junto con un desarrollo lógico más exhaustivo, es una obligación.[22] De modo que una de las vías de estudio en Teoría de Conjuntos más fuertes en la actualidad es la que consiste en explorar las cuestiones acerca de la decidibilidad de la teoría.

[22] Aunque volveremos repetidamente sobre la noción de decidibilidad en este trabajo, no está de más mencionar ahora que la propiedad es de suma importancia para todos los estudios y teorías que empleen alguna forma de sistema formal lógico debido a que dicha propiedad es la que brinda información acerca de la propiedad de compleción de las teorías. Algunos ejemplos de lo anterior son la Lógica misma, Teoría de la Computabilidad y Teoría de la Recursión.

¿Qué hay que decir acerca de la propiedad misma de decidibilidad en Teoría de Conjuntos? Se comprende que en ella misma se halla información acerca del poder demostrativo de la teoría, y recae así la propiedad de compleción de ésta, pero aumentar esa capacidad de demostración no viene simplemente por la inclusión de nuevos axiomas y nociones sin más a la teoría. Como se ha mencionado anteriormente, uno de los propósitos de la Teoría de Conjuntos fue el incorporar un concepto de conjunto que resultara más claro para la labor matemática que venía evidenciando el claro uso de colecciones de objetos. Sin embargo, y en vista de lo ocurrido con la hipótesis del continuo, es innegable que se debe estudiar el concepto más general de conjunto el cual parece guardar más contenido que no está siendo recuperado -por lo menos hasta ahora- por el concepto técnico. Más aún, hay buenas razones para sostener que nuestro concepto más intuitivo de conjunto como colección de objetos con propiedades es el que tiene buena cantidad de información que requiere elucidarse. Pensemos en las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las condiciones mínimas requeridas para que cierta propiedad defina un conjunto?, ¿Qué ocurre exactamente cuando un objeto pertenece, o no, a un conjunto?, ¿Cuál es el estatus sobre la existencia de los conjuntos?, ¿Existen condiciones sobre la existencia de los conjuntos, de modo que se admitan conjuntos existentes mientras que otros no lo son?, ¿Hay características esenciales (básicas o no) de los objetos que determinan un conjunto, de modo que se puedan encontrar objetos que no pueden formar parte de conjuntos?, ¿Qué se puede decir acerca de la modalidad en los conjuntos?, ¿En qué sentido se habla de conjuntos necesarios o posibles?, etc. Nos damos cuenta de que este tipo de cuestiones no son de las que se puedan resolver empleando sólo los recursos formales que la Teoría de Conjuntos nos ofrece desde sus axiomas y nociones más básicas, pues las cuestiones son acerca de la naturaleza y propiedades esenciales más básicas de esos objetos que son estudiados por la teoría matemática. Resolver cuestiones de ese tipo requiere de cuidadosas reflexiones filosóficas, pues las diversas posturas desde las que se intente responderlas conllevarán también delicados compromisos ontológicos acerca de lo que es ser conjunto o que ciertos objetos pertenezcan a conjuntos. Para tratar de resolver las cuestiones acerca de la decidibilidad en la Teoría de Conjuntos desde una perspectiva no sólo matemática, sino también filosófica, se requiere poner atención en por lo menos dos aspectos alrededor del concepto de conjunto:

(1) *Aspecto epistemológico*. ¿Qué se sabe acerca del concepto de conjunto y de nociones como la pertenencia?

(2) *Aspecto metafísico/ontológico*. ¿Cuáles son las propiedades que determinan la extensión de un conjunto, así como su estatus de existencia?

Ahora, explorar cuestiones como las anteriores es útil también por lo siguiente. Pese a que la hipótesis del continuo admite una respuesta tanto afirmativa como negativa según sea el desarrollo de la Teoría de Conjuntos, se requiere argumentar por una expansión de la teoría que se considere como “la mejor” en el sentido de que este desarrollo de la Teoría de Conjuntos continue dando la homogeneidad al edificio matemático, y no resulte que la teoría, que es pensada como un elemento nuclear en la fundamentación de las matemáticas, tenga un fuerte componente relativo que, dependiendo de los recursos de ésta y de quiénes den propuestas para conducir la teoría, arroje resultados cada vez más dispersos y provocadores de disputas para lógicos y matemáticos. Además, que esto también resulte en la retención de la idea clásica de que toda proposición matemática tiene un único valor de verdad. Pero esto último no sólo no ocurre para el caso de la hipótesis del continuo, sino que la presencia de nuevas proposiciones de la teoría para las que ni siquiera se tiene una respuesta definitiva acerca de su valor de verdad es muestra de que la teoría aún no se encuentra en una fase terminada. Estas proposiciones reciben la etiqueta de *indecidibles* y son las que indican que carecen de una demostración, o refutación, dentro de la teoría. Es este fenómeno de indecidibilidad dentro de la teoría el que tiene nuestra atención y sobre el que procederemos a analizar.

El objetivo de este trabajo es explorar una propuesta especial dada en la Teoría de Conjuntos para tratar de reducir el nivel de indecidibilidad. Esta propuesta viene dada por un esquema axiomático conocido como *Principio de Reflexión*.[23] Puesto en términos sencillos, lo que se afirma con tales principios es que, si una cierta fórmula φ es verdadera del universo de los conjuntos, entonces podemos "reflejarla" a una parte inicial de este universo en el que φ ya es satisfecha. Hemos escogido analizar esta propuesta de expansión de la Teoría de Conjuntos, y no otras propuestas que tienen sus propios méritos, debido a que los Principios de Reflexión son un medio relativamente sencillo de alcanzar algunos de los objetivos que se le suelen atribuir a la Teoría de Conjuntos, por mencionar algunos: (I) Mantienen la esencia gödeliana de la teoría al ser un instrumento para incluir nuevos axiomas; (II) han mostrado ser un método particularmente efectivo en el estudio de la noción de infinito matemático; (III) muestran ser un instrumento eficaz en la noción general de conjunto infinito, en sentido de que proporcionan vías de explicación al comportamiento de muchos conjuntos cuando éstos poseen infinitos objetos. En este trabajo se pretende tomar la noción de reflexión como es entendida para formular dichos principios y examinarla exhaustivamente, de modo que los aspectos lógicos y filosóficos de los principios de reflexión queden claramente presentados en los siguientes rubros: Los antecedentes que llevaron a la propuesta de la noción de reflexión, la formulación y

[23] La noción de reflexión que se piensa aquí es una vinculada con la acción de reflejar un objeto en una superficie apta para ello, en vez de la acción de reflexionar como una actividad racional.

funcionamiento de los principios de reflexión, las motivaciones filosóficas que conlleva la adopción de estos principios, sus alcances para atender la problemática de la indecidibilidad en la Teoría de Conjuntos, y propuestas de cómo emplear nuevos recursos que conduzcan a un mejoramiento de tales principios y su uso para aumentar la capacidad demostrativa de la teoría de conjuntos.

El capítulo 1 está dedicado a presentar los preliminares lógicos y teóricos necesarios para motivar el desarrollo de la Teoría de Conjuntos (en versiones conocidas como ZF y ZFC) hasta la aparición del fenómeno de la indecidibilidad en la teoría. Se brinda un panorama general de la indecidibilidad y cómo ésta constituye un obstáculo para la propiedad de compleción de la Teoría de Conjuntos, además que se presentan algunos casos importantes de enunciados indecidibles en la teoría (además de la ya conocida hipótesis del continuo). Posteriormente se procederá a exponer y analizar algunos aspectos importantes desde un punto de vista filosófico acerca de la indecidibilidad y la teoría misma que son relevantes para estudiar la ontología y epistemología de los conjuntos, además que se presentará el programa gödeliano sobre la búsqueda de recursos extra -en forma de axiomas- para tratar de alcanzar la reducción de incompleción en la teoría (esto presentando algunas ideas del propio Gödel sobre las direcciones que la teoría debería tomar para responder a cuestiones sobre indecidibilidad), esto acompañado con ciertos compromisos filosóficos que se requieren adoptar para efectuar en buena medida el programa según Gödel.

En el capítulo 2 se procede a presentar las nociones y conceptos básicos de los principios de reflexión, no sin antes presentar un poco de la motivación filosófica de ellos en relación con el universo de los conjuntos V y cómo la teoría suele emplearse para estudiar esta forma de entender el entorno de los conjuntos. La presentación intuitiva de estos principios es la siguiente: Si se tiene un enunciado φ tal que es verdadero del mundo de los conjuntos, entonces existe un segmento inicial de ese mundo -que es medido en extensión por algún número ordinal- tal que en esta porción del mundo el enunciado φ es verdadero. Por lo que una característica importante del universo conjuntista que resalta con los principios de reflexión es que tal universo resulta "totalmente inabarcable" en el sentido de que, para toda fórmula verdadera de la teoría, siempre existe un modelo de un segmento inicial en que dicha fórmula es verdadera. La formulación de estos principios se hace utilizando los recursos propios de las formas actuales en que se trabaja Teoría de Conjuntos, además que se plantea su uso en relación con el programa gödeliano de la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría, más específicamente en la propuesta de axiomas que introducen nuevos números transfinitos conocidos como Números Cardinales Grandes. Luego de presentar algunos ejemplos de cómo usar los Principios de Reflexión para adquirir nuevos resultados en la teoría (y de paso exhibir cómo se puede eliminar el carácter indecidible de algunas oraciones) y ciertas formas particulares de introducir la noción de reflexión en la teoría, se procede a explorar más el trasfondo de los principios en relación con el impacto ontológico y epistemológico tenido en la Teoría de Conjuntos, esto al respecto de cómo los axiomas de grandes cardinales afectan la visión del mundo V de los conjuntos y cómo influyen en el trabajo modelo-teórico de la teoría, específicamente en la discusión acerca de la categoricidad de la teoría. Se termina con la exposición del uso de los Principios de Reflexión en grados según sea el tipo de modelo que se esté pensando para el fragmento de la teoría.

El capítulo 3 está dedicado, en principio, a presentar las ideas que llevan establecer los límites de los Principios de Reflexión en su empresa por reducir la incompleción dentro de la teoría. Estas barreras teóricas culminan en la presentación del llamado Obstáculo

Mínimo, el cual establece que, para que la noción de reflexión sea efectiva en eliminar la indecidibilidad de enunciados como la hipótesis del continuo y otros similares, se requiere que los principios mantengan su eficacia al operar la Teoría de Conjuntos con lenguajes lógicos de tercer orden y superiores. Sin embargo, veremos que los críticos de los Principios de Reflexión como método de reducción de incompleción, presentados por Koellner en sus (2003) y (2008), presentan dos problemas importantes para la noción de reflexión: (i) Para ciertos enunciados en lenguaje de tercer orden acerca de segmentos iniciales de números ordinales en los que se involucran nociones como la de rango, los Principios de Reflexión resultan ser inconsistentes; (ii) los Principios de Reflexión en su forma más potente sólo muestran un buen funcionamiento en términos de efectividad hasta el segundo orden en la teoría, y tratar de aumentar la eficacia de tales principios hasta el tercer orden por los medios estándar (esto es, forcing, ultraproductos, encajes, etc.) resulta en inconsistencia dentro de la teoría. Para presentar los detalles del problema (ii), se expone un mecanismo para relacionar ciertos números cardinales grandes con la noción misma de reflexión, lo cual Koellner presenta como la Γ_n-reflexión, la cual permite tener un estudio modelo-teórico más preciso de las fórmulas reflejadas. Se termina explorando algunas vías alternativas en que se puede proceder ante el obstáculo mínimo, pero que no parecen arrojar alguna manera satisfactoria de arreglar los problemas.

En el capítulo 4 se comenzará a explorar una propuesta de trabajar en Teoría de Conjuntos, dicha propuesta es tal que, a diferencia de la considerada hasta ahora, no estará restringida a proponer nuevas nociones o axiomas para robustecer su capacidad de demostración, sino que dependerá de tomar el lenguaje formal de la teoría y añadirle propiedades adicionales de modo que se enriquezca la expresividad de la teoría. En el camino de proveer al lenguaje formal con estas propiedades extra, se discute una distinción importante acerca de la postura ontológica asumida sobre el ambiente de los objetos llamados conjuntos, la cual es la distinción *Actualismo/Potencialismo*. La distinción, presentada muy sucintamente, consiste en la adopción de alguna de las siguientes posturas:

Actualismo: El universo de los conjuntos ya está dado en su totalidad y la teoría y sus resultados se adaptan a describir de la mejor forma posible este universo y su comportamiento.

Potencialismo: El universo se va formando de acuerdo con la evolución de la teoría (nuevas nociones, nuevos axiomas, etc.), así que la estructura de este universo adquiere mayor sofisticación de acuerdo con los nuevos conjuntos resultantes de los nuevos resultados de la teoría.

Se optará en este trabajo por una visión potencialista de los conjuntos, y las propiedades adicionales del lenguaje formal de la teoría que exploraremos vienen dadas por una modalización de dicho lenguaje. Exploraremos el impacto de la modalización del lenguaje formal conjuntista y algunas consecuencias filosóficas acerca de la concepción de conjunto cuando se añade este carácter modal. También se expondrá la compatibilidad de la postura potencialista de los conjuntos con el lenguaje modal de la teoría y cómo esto nos ayuda a definir una nueva estructura formal desde los axiomas modalizados de la teoría y cómo esto nos ayuda a introducir consideraciones acerca de nuevas colecciones de objetos que sustentan todo este carácter modal, donde tales nuevas colecciones son conocidas como pluralidades de objetos. En una primera revisión, se podrá pensar en tales pluralidades de objetos como una *forma posible* de crear nuevos conjuntos para el universo, sin embargo, veremos que la noción de pluralidad es de hecho más delicada. Dedicaremos la última parte a estudiar una forma particular de teoría modal de conjuntos en que se adopten las pluralidades dichas y cómo esto produce una forma especial de reflexión que sustenta una forma nueva de pensar en los principios de reflexión en estos términos modales, y tendremos algunos resultados teóricos que nos permitirán introducir y estudiar la versión modalizada de los Principios de Reflexión. Se finaliza con la presentación de una forma potencialista modal de trabajar el forcing en la Teoría de Conjuntos, esto con varios resultados al respecto.

En el capítulo 5 se hará énfasis en que la postura modal teórico-conjuntista presentada anteriormente no proporciona una solución efectiva a los problemas que tienen los Principios de Reflexión. Por lo que se explorará una nueva forma de trabajar la teoría que está apoyada en una nueva visión ontológica del universo de los conjuntos, y dicha visión es compatible con las formas de Potencialismo y modalización de la teoría que hemos analizado hasta ahora. Esta nueva visión es presentada con ayuda de otra distinción acerca de la naturaleza del universo de los conjuntos, que es conocida comúnmente como *Universismo/Multiversismo*. Ambas posturas son resumidas de la siguiente manera:

Universismo: Existe un solo mundo absoluto de los conjuntos que las teorías se encargan de estudiar. Este mundo es exhaustivo en dos aspectos: (I) Todos los conjuntos -con lo variado de sus propiedades- que puedan llegar a aparecer en las teorías; (II) los valores de verdad de todos los enunciados de la teoría, es decir que cada enunciado tiene un único valor de verdad dentro de la teoría.

Multiversismo: Existen múltiples universos de los conjuntos, donde cada universo posee ciertas propiedades esenciales básicas (desde los que se consideren sus conjuntos más básicos hasta aquellos en las partes superiores de cada universo), y tales universos pueden ser accesibles desde otros mediante nociones modales modelo-teóricas (relaciones de accesibilidad bien definidas). En ciertos mundos pueden existir conjuntos que en otros no pueden darse, esto debido a las características fundamentales de los universos estudiados.

Esta postura no es exhaustiva en los valores de verdad de todos los enunciados de la teoría, pues aquí el que un enunciado sea verdadero o falso también dependerá del universo -y sus propias características- que esté siendo usado en la verificación de su valor de verdad.

Según la formulación del Multiversismo, es claro que un problema para los Principios de Reflexión en esta postura radica en que su formulación inicial se estanca con la presencia de diversos universos de los conjuntos, pues según la idea detrás de la formulación intuitiva de esos principios, ¿Qué significa que una fórmula φ sea verdadera *del* mundo de los conjuntos cuando no hay un solo universo? Así que exploraremos una vía en que se puede hacer que la noción misma de reflexión sea compatible con una postura multiversista. Después de ofrecer una lista de principios y axiomas propios del multiverso, se presentarán dos resultados centrales en este trabajo, que pueden ser resumidos en los siguientes puntos:

(I) En el enfoque multiversista, se tiene que la colección de todos los números ordinales es de hecho una totalidad "absolutamente inabarcable" en el mismo sentido que el universo V en una postura universista de los conjuntos. Con este resultado, no se pueden construir oraciones en tercer orden que resulten inconsistentes por el uso de un principio de reflexión en un orden inferior.

(II) Desde el enfoque multiversista, es posible construir Principios de Reflexión que superen el Obstáculo Mínimo sin caer en la inconsistencia que esto arroja desde el enfoque universista. Las razones, que están fuertemente ligadas a la existencia de ciertos conjuntos que expresan formas de modelos para la teoría misma, tienen como núcleo que la noción de reflexión desde el Multiversismo no admite formas de satisfacción de enunciados de la teoría que permiten que los enunciados sean verdaderos "por encima" del estrato ordinal del universo mismo en que dichos enunciados sean verdaderos. Esto significa que la inconsistencia que surge del uso de la noción de reflexión para superar el Obstáculo

Mínimo no alcanza a presentarse, pues requiere de conjuntos cuya cardinalidad es “muy grande” para que vivan dentro del universo en cuestión.

Además, se expondrá un caso particular en que se pueden emplear los Principios de Reflexión dentro de una postura multiversista que incluye características de la noción de cuasi-categoricidad estudiada por Zermelo. Se concluye con un panorama sobre el horizonte de los estudios teórico-conjuntistas a la luz de la postura multiversista y los resultados alcanzados en este trabajo.

Capítulo 1

Sobre el desarrollo contemporáneo de la Teoría de Conjuntos. Problemas de indecidibilidad y robustecimiento de la Teoría mediante recursos adicionales

1.1.- Algunos requisitos formales preliminares

Sabemos ahora que la Teoría de Conjuntos (TC) es objeto de mucho estudio y análisis debido al desarrollo que ha tenido en décadas recientes. Sin embargo, no por ello la teoría misma se considera de desarrollo reciente. Al contrario, desde sus inicios TC ha sido objeto de estudio intenso, por una parte, por la gran cantidad de conceptos y resultados que ahí se manejan, por otra parte, debido al interés que despierta en el manejo formal de nociones como la de conjunto como colección de objetos, o las intuiciones que hay detrás del entendimiento de que un objeto pertenezca a un conjunto. Históricamente, Georg

Cantor, considerado el fundador del estudio formal moderno de los conjuntos, desarrolló en buena parte la teoría y motivó los estudios posteriores que se daríian en ésta.[24]

No es mi objetivo en este trabajo ofrecer un estudio minucioso de TC y su desarrollo hasta los más novedosos resultados. Más bien, en este trabajo me concentraré en tomar algunas nociones y resultados pertinentes que permiten el surgimiento de ciertos fenómenos en la teoría, fenómenos que resultan de especial interés dentro del estudio de TC. Me enfocaré en estos fenómenos desde un desarrollo específico de TC, este desarrollo a analizar ha arrojado resultados que llaman mucho la atención dentro del desarrollo de la teoría. De modo que este trabajo tendrá por objetivo concentrarse en estos fenómenos o anomalías y los recursos nuevos de TC para enfrentarlos. Pero antes de enfocarnos en nuestro estudio principal, deberemos preparar el terreno que nos servirá para plantear con todo el rigor formal posible los problemas que hay que enfrentar y las soluciones a estos que se deben analizar. Para lograrlo, presentaremos el siguiente marco teórico.

La siguiente presentación tiene a fin responder parcialmente la siguiente pregunta: ¿En qué consiste el trabajo teórico-conjuntista contemporáneo? He dicho que la respuesta a la pregunta es parcial porque es un hecho que TC ha tomado papel en diversas disciplinas de estudio que no es posible reducir a sólo los intereses de la teoría. En este trabajo, sin embargo, nos interesamos en aspectos que involucran principalmente el estudio interno de TC. A continuación, presentaré algunas nociones y definiciones básicas a considerar de la teoría de modelos en relación con TC. Posterior a eso introduciré una parte básica elemental de TC que servirá para la siguiente sección.

[24] Se recomienda revisar Dauben, J. W. (1990) para un estudio detallado de la obra de Cantor, su motivación y varios de sus principales resultados.

1.1.1.- Algo de Lógica y Teoría de Modelos

Nos enfocamos en el trabajo dentro de TC relacionado con los modelos de la teoría que pueden darse. Algunos resultados limitativos de TC, como el fenómeno de la incompleción y los teoremas de Gödel para estudiarlo, han mostrado que TC no tiene un modelo global, sino que se "toman partes de TC"[25] para estudiarse desde una perspectiva modelo-teórica. En otras palabras, nuestro objetivo siguiente es presentar las nociones, definiciones y algunos resultados concernientes al estudio modelo-teórico de TC con miras a comprender el surgimiento de diversos modelos para la teoría.

Comenzamos dando las siguientes nociones sintácticas básicas:

(1) Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto de símbolos, decimos que un <u>lenguaje formal</u> se representa como $\mathcal{L}_S = < S, \Phi >$ donde $\Phi \subseteq E_S$ es la colección de expresiones (fórmulas) bien formadas del lenguaje y $E_S = S^{<\omega}$ donde x es una S-expresión sii $x \in S^{<\omega}$.

(1.1) El lenguaje formal estándar de TC es $\mathcal{L}_{\in}$ y su signatura $\rho = \{\in\}$ sólo consta de la pertenencia como único símbolo no-lógico.[26] Los símbolos que se emplean en $\mathcal{L}_{\in}$ son:

i) *Var* = {*x*, *y*, *z*,…}, una cantidad numerable.

---

[25] Estas partes de TC están en relación con los tamaños de los niveles del universo *V* de TC. Aquí el tamaño tiene que ver con la cardinalidad del estrato conjuntista considerado. Sobre la marcha de la exposición, veremos qué significan estas ideas.

[26] Escogimos un lenguaje para TC con el nivel de complejidad de 1er orden expuesto aquí por la simplicidad que acarrea manejarlo. En capítulos posteriores de este trabajo, dependiendo de los requerimientos formales surgidos, se emplearán expansiones formales de $\mathcal{L}_{\in}$ a órdenes superiores, pero eso se señalará oportunamente.

ii) Las conectivas lógicas de la lógica proposicional. Pueden ser todas o un conjunto completo de ellas.[27]

iii) Símbolos auxiliares: {(,), ,, ‘,}.

iv) Cuantificadores: $\forall$, $\exists$.

v) Igualdad: =.

vi) La relacional R = $\in$.

vii) No hay funciones ni constantes determinadas aquí.

(2) Definimos el conjunto $\Phi_{\in}$ como sigue:

i) $Term_{\in} = Var$.

ii) $Atom_{\in} = \{a \in b |\ a, b \in Term_{\in}\} \cup \{a = b |\ a, b \in Term_{\in}\}$.

iii) $Atom_{\in} \subseteq \Phi_{\in}$.

iv) Si A, B son $\in$-fórmulas bien formadas, entonces $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ son $\in$-fórmulas bien formadas; si $x \in Var$, entonces $\forall x A, \exists x A$ son $\in$-fórmulas bien formadas.

(3) El lenguaje de TC es $\mathcal{L}_{\in} =< S_{\in}, \Phi_{\in} >$.

Lo anterior constituye la sintaxis estándar que el lenguaje de TC tiene.

La semántica estándar que se trabaja en TC es la dada con las nociones tarskianas básicas para lenguajes formales:

(1) Las $\mathcal{L}_{\in}$-interpretaciones consisten en un par Å $=< A, r >$ con una colección de objetos $A \neq \emptyset$ y $r \subseteq A \times A$ una relacional. Se definen las siguientes nociones:

---

[27] Un conjunto completo de conectivos es aquel que permite que todas las fórmulas de la lógica proposicional sean expresables sólo con los conectivos de dicho conjunto. Un ejemplo de un conjunto completo es {¬,∧}.

i) $Å \vDash \varphi_{[\sigma]}$ significa que la interpretación Å *satisface* la fórmula φ bajo la asignación σ.

ii) $Å \vDash \varphi$ significa que la interpretación Å hace *verdad* a la fórmula φ.

iii) $\vDash \varphi$ significa que φ es *universalmente válida*.

iv) Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\in}^{0} = \in -enunciados$. Se dice que Å es *modelo* de Σ sii $Å \vDash \sigma \; \forall\sigma \in \Sigma$.

v) Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\in}^{0}$. Σ es *consecuencia lógica* de Σ sii ∀Å-interpretación,

$Å \vDash \Sigma \rightarrow Å \vDash \sigma$.

Las siguientes propiedades serán consideradas en lo sucesivo y se espera una familiaridad mínima con ellas:

(Cons) Un sistema formal *S* se dice *consistente* sii existe una $\sigma \in \mathcal{L}_{\rho}(S \nvdash \sigma)$.[28]

(Corr) Un sistema formal *S* es *correcto* sii $\vdash_{S} \sigma$ implica que $\vDash_{S} \sigma$.

(Comp) Un sistema formal *S* es *completo* sii $\vDash_{S} \sigma$ implica que $\vdash_{S} \sigma$.

Las propiedades anteriores[29] son pensadas para estudiarse en lenguajes formales de cualquier orden. Ahora mismo, es conveniente para la exposición pensarlas en relación con lenguajes de 1er orden que expresen a TC.

Junto a las nociones anteriores, hay otras que tendremos en cuenta y que exploraremos en relación con los propósitos de este trabajo. Una importante es la noción de compleción en relación con la decidibilidad del sistema en cuestión estudiado:

[28] Notemos que la propiedad (Cons) también se dice de conjuntos de enunciados.
[29] En este trabajo no analizaré con mucha profundidad estas propiedades. Se recomienda revisar Enderton, H. B. (2004) para un estudio más detallado de ellas.

(Comp-Des) Un sistema formal S es *completo*$_{\text{dec}}$ sii para σ se cumple una de $S \vDash \sigma$ o $S \vDash \neg\sigma$.[30]

Además, consideraremos resultados como el *Teorema de Compacidad*, el *Teorema de Löwenheim-Skolem*, el *Teorema de Compleción de Gödel* y los *Teoremas de Incompleción de Gödel*. Ahora nos concentraremos en dar algunas nociones y definiciones que son fundamentales en el trabajo modelo-teórico de TC.

Consideramos que un modelo de TC consta de un par <*M*, *E*> donde *M* es una colección (clase) no-vacía de objetos y $E \subseteq M \times M$ es una relacional. *M* es la colección de objetos que se interpretan como los conjuntos y *E* es la relacional que se interpreta como la pertenencia (∈) en la colección *M*:

Definición (1).

Sea $\varphi \in Form_{TC,\in} = \{\psi \mid \psi\ es\ una\ fórmula\ bien\ formada\ de\ TC\}$[31]. *Se dice que φ tiene una* relativización *a <M, E> si φ es interpretada según <M, E>.*

Dada la sintaxis del lenguaje formal de TC, se puede dar la relativización de las expresiones del lenguaje desde las atómicas hasta las que involucran conectivos y cuantificadores recursivamente como sigue:

[30] Esta propiedad tiene su análoga en términos de la noción de demostración, donde el único cambio a realizar es cambiar " ⊨ " por " ⊢ ".
[31] Expresaremos esos conjuntos con el subíndice "TC" para indicar que los restringimos al lenguaje de la teoría de conjuntos.

(I) Para los elementos en $Atom_{TC,\in}$:

1) $(x = y)^{M,E}$ sii $x = y$;

2) $(x \in y)^{M,E}$ sii xEy.

(II) Si $\alpha, \beta \in Form_{TC,\in}$ y $x \in Var_{TC,\in}$:

1) $(\neg\alpha)^{M,E}$ sii $\neg\alpha^{M,E}$;

2) $(\alpha \wedge \beta)^{M,E}$ sii $\alpha^{M,E} \wedge \beta^{M,E}$;

3) $(\exists x\alpha(x))^{M,E}$ sii $\exists x \in M(\alpha(x)^{M,E})$.[32]

Ejemplos simples de relativizaciones son los siguientes:

1) $\forall y(X(y)) \Rightarrow \forall y(y \in M \rightarrow X(y)^{M,E})$;

2) $\exists x\forall y(y \notin x) \Rightarrow \exists x \in M\forall y \in M(\neg(yEx)^{M,E})$.

Con la definición (1) dada, el trabajo modelo-teórico en TC consiste en analizar los modelos para la teoría y estudiar las propiedades que adquiere el universo *V* de los conjuntos cuando se le interpreta con uno u otro modelo. Como hemos visto con la definición recursiva de la relativización, ésta se puede dar para una sola fórmula del lenguaje o para toda la teoría en cuestión: <*M*, *E*> es modelo del conjunto de enunciados Σ, escrito $\vDash \Sigma^{M,E}$, si todos los elementos de Σ son verdaderos bajo interpretación de los elementos de *M* y la relacional *E*. En particular, si $\Sigma = Ax_{TC,\in}$, <*M*, *E*> es la relativización de los axiomas de TC a la colección *M* y la relacional *E*, es decir, $ZF_i^{M,E}$ es la interpretación del respectivo axioma ZF_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ y k el número de axiomas considerado.

[32] Recordar lo dicho en la nota 4 sobre conjuntos completos de conectivas. En este caso, el conjunto completo es $\{\neg, \wedge, \exists\}$.

Además, la relativización preserva los resultados obtenidos en TC dado el modelo adecuado: $\Sigma \vDash (Teo(ZF))^{M,E}$ se cumple si lo que se demuestra desde los axiomas de TC sigue siendo verdadero en <*M*, *E*> según Σ.[33] En este caso, diremos que <*M*, *E*> es un modelo de TC.

Dadas las definiciones y nociones expuestas en líneas anteriores, el trabajo modelo-teórico en TC consiste en encontrar diferentes estructuras que sirvan para analizar el comportamiento de la teoría. Pues dependiendo de la estructura que modele a TC, la teoría se comporta diferente y se pueden deducir ciertos resultados dentro de ella. El siguiente teorema es muy importante a la hora de evaluar diferentes modelos para TC, pues proporciona condiciones para que una estructura propuesta sea un modelo de TC:

Teorema 1.- (Teorema Fundamental de Demostraciones Relativas de Consistencia) *Sea M una clase,* $E \subseteq M \times M$ *una relacional y* $\Gamma \in Form_{TC,\in}$. *Para Σ conjunto de fórmulas, si se cumple que:*

(I) $\Sigma \vdash \exists x(x \in M)$

(II) $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$

Entonces Con(Σ) implica Con(Γ).

Daremos una última definición en esta sección:

Definición (2).

Una interpretación <M, E> de $\mathcal{L}_{\in}$ *se dice que es* modelo estándar *según Σ sii*

(i) $\Sigma \vdash \exists x(x \in M)$

[33] Recordemos que $Teo(ZF) = \{\sigma \mid ZF \vdash \sigma\}$.

$(ii)\ \Sigma = \{< x, y >\in M \times M \mid x \in y\} = \in_M.$

$(iii)\ \Sigma \vdash M - transitiva.$

Puede decirse mucho más acerca del trabajo modelo-teórico que se hace en TC, pues lo que está expuesto aquí sólo sirve para introducir las bases más sencillas de la labor modelo-teórica respecto a esta teoría.[34] Antes de terminar con estos preliminares, diremos algo sobre el teorema (1) expuesto. La consistencia de TC (esta vez, entendida TC como ZF o ZFC) no puede ser demostrada utilizando sólo los recursos de TC en la labor, debido al 2do teorema de incompleción de Gödel. La estrategia al emplear diferentes estructuras para modelar a TC es ver qué tan consistente se vuelve la teoría al modelarla con esas estructuras, esto a través de modelar ya sea toda la base axiomática de la teoría o mantener total o parcialmente la teoría mientras se añaden uno o más enunciados para proponer un modelo de la nueva teoría y averiguar si la consistencia persiste (en el caso de mantener TC con su interpretación usual y añadir nuevos enunciados, un requisito adicional es asumir que TC ya es consistente):

> Sea T una teoría matemática (en nuestro caso, T es o ZF o ZFC), y sea A un axioma adicional. Decimos que T + A es *consistente relativo* a T (o que A es *consistente* con T) si la siguiente implicación se sostiene: Si T es consistente, entonces también lo es T + A. (Jech, 2006, P. 163)[35]

[34] Más adelante retomaré este estudio, ello en relación con la indecidibilidad de ciertos enunciados. Para mayor detalle y continuación del estudio modelo-teórico de TC, consultar el capítulo 12 de Jech, T. (2006), y Chang, C. C. y Keisler, H. J. (1992).

[35] "Let T a mathematical theory (in our case, T is ZF or ZFC), and let A be an additional axiom. We say that T + A is *consistent relative to* T (or that A is *consistent with* T) if the following implication holds: If T is consistent, then so is T + A." La traducción es mía.

De aquí en adelante, este trabajo hará énfasis en la importancia de la consistencia de TC al momento de considerar diferentes modelos, esto a través del Teorema 1 y otros resultados que aparecerán después en este trabajo.

1.1.3.- Bases preliminares en Teoría de Conjuntos

Ahora nos concentraremos en presentar el desarrollo suficiente en TC para abordar las cuestiones centrales de este trabajo. Empezaré diciendo que en este trabajo lo común será que tome a TC en su versión de ZF, es decir, asumiremos desde ahora que la teoría cuenta con los axiomas básicos como el ZF_1 o de Extencionalidad, ZF_2 o Existencia del Conjunto Vacío, ZF_3 o el Par formado por dos conjuntos, y así hasta el axioma ZF_8 o el Esquema Axiomático de Remplazo. A menos que se indique otra cosa, asumiremos que tenemos a disposición los axiomas listados.[36] Los resultados inmediatos que se obtienen a partir de los axiomas serán asumidos y no será necesario para este trabajo hacer un estudio de ellos. Comenzamos por definir los números ordinales y algunas propiedades interesantes:

Definición (3).

x es un número ordinal sii se cumplen las siguientes dos condiciones:

i) $< x, \in >$ *es un COBO.*

ii) x es un conjunto transitivo.[37]

[36] Para una revisión exhaustiva de TC vista como ZF y ZFC, consultar Jech, T. (2006), Amor, J. (2011) I, y Amor, J. (2011) II.

[37] Recuérdese que un conjunto X es transitivo sii $\forall y \in X (y \subseteq X)$.

Esta definición determina una clase de objetos muy particulares en TC. Dicha clase es ordenada por una relación dada en términos de la pertenencia habitual en TC:

Observación (1).

Se tiene la clase ORD = {x | x es un ordinal}.

Definición (4).

La relación $<_{ORD}$ *de orden en ORD se define como sigue:* $x <_{ORD} y$ *sii* $x \in y$.[38]

Algunos resultados que cumple la clase *ORD* que permiten apreciar el comportamiento de sus elementos, resultados que sólo mencionaré aquí, son los siguientes. *ORD* es una clase inductiva, es decir que el $0 = \emptyset \in ORD$ y $\forall x(x \in ORD \rightarrow s(x) = x + 1 \in ORD)$, donde $s: ORD \rightarrow ORD$ es la función sucesor estándar y $1 \in ORD$. También se cumple que todo subconjunto transitivo de un ordinal es un ordinal.

Antes de seguir dando más resultados, es necesario hablar acerca de algunas distinciones entre los elementos de *ORD*. Como dije antes, $0 = \emptyset \in ORD$ y se cuenta como el primer número ordinal de la clase *ORD*. Los ordinales sucesores se definen con base en la función s dada en el párrafo anterior: $\alpha \in ORD$ es sucesor sii $\exists\beta \in ORD(\beta^+ = \alpha)$, notemos con esto que los ordinales sucesores son vistos como los conjuntos de ordinales que son menores que el sucesor en cuestión. Otro tipo de ordinales a considerar son los ordinales límite: $\alpha \in ORD$ es límite sii no es el 0 ni el sucesor de otro ordinal, $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ con β-ordinal (nótese que α no tiene un ordinal anterior inmediato, pues no es sucesor, por

[38] Cuando no haya confusión en el contexto de su uso, omitiré el subíndice *ORD* en la relación.

lo que α puede verse como el límite de una sucesión infinita de ordinales menores que él). Es fácil notar que, si consideramos la colección del 0 y todos los ordinales sucesores y formamos su unión, obtenemos el primer ordinal límite llamado ω. La colección de los ordinales límites, $LIM = \{\alpha \mid \alpha - límite\}$, conforman una clase propia, lo cual significa que es "demasiado grande" para ser un conjunto.

La colección de ordinales-límite se construye de manera recursiva, usando la operación de potencia.[39] El modo es el siguiente: teniendo a ω como nuestro primer límite, como es transitivo, consideramos todos sus subconjuntos finitos de elementos menores que él (los cuales son ordinales) y los agrupamos en un nuevo conjunto con la potencia, $P(\omega)$. Está claro por un resultado debido a Cantor que $\omega < P(\omega)$, luego este nuevo conjunto es un ordinal-límite estrictamente mayor que ω y se denota $P(\omega) = \omega_1$. El proceso anterior es iterativo y permite obtener ordinales-límite cada vez más grandes que los anteriores:

$$\omega = \omega_0, \omega + 1, \omega + 2, \dots, (\omega + \omega) = 2 \cdot \omega, \omega + \omega + 1, \dots, (\omega \cdot \omega)$$
$$= \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega_1, \dots$$ [40]

ORD es una colección que es bien ordenada por la pertenencia en TC. Un par de resultados importantes y de gran utilidad son los esquemas de inducción y recursión ordinales que son dados a continuación:

[39] La cual estamos legitimados a usar, pues TC como la estamos considerando incluye el axioma de potencia.
[40] Es importante hacer notar lo siguiente: todos los elementos listados entre ω y ω_1 tienen el mismo tamaño que ω, en sentido de que son todos biyectables con él. La razón de esto viene por las definiciones de suma, producto y exponenciación ordinal las cuales no se verán aquí (la demostración de que son todos del mismo tamaño no es muy complicada de hacerse). Lo destacable en esta sucesión de ordinales es que el cambio de tamaño de ω a ω_1 es gracias a la operación conjuntista de potencia y la exponenciación ordinal.

Teorema 2.- (Inducción sobre los ordinales)

Sea $\varphi \in FORM_{TC,\in}$. *Si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\varphi(0)$;

(ii) $\forall\alpha \in OR(\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha^{+}))$;

(iii) $\forall\alpha \in LIM(\forall\beta\big(\beta < \alpha \to \varphi(\beta)\big) \to \varphi(\alpha))$;

entonces se cumple que $\forall\alpha \in OR(\varphi(\alpha))$.

Teorema 3.- (Recursión sobre los ordinales)

Sean $G, H: V \to V$ *funcionales y* $a \in V$. *Entonces se puede definir un único funcional* $F: OR \to OR$ *tal que cumple:*

(i) $F(0) = a$;

(ii) $F(\alpha^{+}) = G(F(\alpha))$;

(iii) $F(\gamma) = H(F\restriction_{\gamma})$, *si* $\gamma \in LIM$.[41]

Con tales resultados -cuya demostración no se verá aquí-, pasemos a hablar sobre cardinalidad y definir dos funcionales especiales para enunciar la hipótesis del continuo.

Para hablar de la cardinalidad de un conjunto, es necesario considerar que podemos averiguar qué tamaño tiene fijándonos en la cantidad de sus elementos. Ese tamaño vendrá dado por un ordinal que exprese el número de elementos, y esto se logra a través de establecer una función biyectiva entre los elementos del conjunto en cuestión y los elementos (ordinales) del ordinal con que se ponen en correspondencia. Pero para esto último, como los ordinales son conjuntos bien ordenados, debemos asumir que el conjunto

[41] Ver Amor, J. (2011) II. Hay varias maneras equivalentes de enunciar el teorema de recursión sobre ordinales (o recursión transfinita).

del que queremos determinar su cardinalidad es bien ordenable.[42] Dicho lo anterior, la cardinalidad de un conjunto es el mínimo ordinal con el cual es biyectable, denotado: para $x \in V$, $|x| = \bigcap\{\alpha \in ORD \mid \alpha \sim x \wedge \alpha - inicial\}$, donde ser un segmento inicial significa ser un ordinal no-biyectable con ningún ordinal anterior a él. Los números cardinales son aquellos que son cardinalidad de conjuntos bien ordenables, es decir que todos los ordinales pueden ser cardinales y todo conjunto puede ser bien ordenable gracias al Teorema del Buen Orden. Podemos dar las siguientes colecciones de números:

$CAR = \{\alpha \in ORD \mid \alpha \geq \omega \ \wedge \alpha - inicial\}$ y $Card = \omega \cup CAR$.

Ahora, definimos las siguientes funcionales:

Definición (5).

La funcional $\omega_{\_}: OR \rightarrow V$ *es dada recursivamente como:*

(i) $\omega_0 = \omega$*;*

(ii) $\forall \alpha - sucesor, \omega_{\alpha^+} = H(\omega_\alpha)$*, donde* $H(x) = \{\beta \mid \beta \precsim x\}$*;*[43]

(iii) $\forall \gamma \in LIM, \omega_\gamma = \cup \left\{\omega_\mu \mid \mu < \gamma\right\}$.

Definición (6).

La funcional $\aleph_{\_}: OR \rightarrow CAR$ *es dada recursivamente como:*

(i) $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$*;*

(ii) $\aleph_{\alpha^+} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$*;*

[42] Hemos tocado una parte delicada en nuestro estudio cuando decimos asumir esto. Asumir la buena ordenación de cualquier conjunto en realidad viene dado por el teorema del buen orden, el cual dice que todo conjunto es bien ordenable. Dicho teorema es una de las formas equivalentes del axioma de elección, otro de los enunciados indecidibles que estudiaremos después. Para conjuntos finitos, el asumir esto no genera controversia, pero a partir de ordinales-límite las cosas pueden cambiar drásticamente para el análisis de la cardinalidad, especialmente con la funcional $\aleph$ que será presentada en un momento.

[43] Este conjunto también es conocido como el número de Hartog de x.

(iii) $\forall \gamma \in LIM, \aleph_\gamma = \cup \{\omega_\mu \mid \mu < \gamma\}$.

Algunas propiedades importantes por mencionar acerca de la funcional $\aleph$ son las siguientes. Como en *ORD* el 0 no es cardinal sucesor ni límite y $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$, n es cardinal sucesor. $\omega = \aleph_0$ es el primer cardinal-límite y $\omega_1 = \aleph_1 = \aleph_0^+$ es un cardinal sucesor no contable. $\aleph_{\alpha^+} = \aleph_\alpha^+$ es cardinal sucesor para cada α. $\aleph_\omega = \cup \{\aleph_n \mid n \in \omega\}$ es el segundo cardinal límite, de hecho, $\aleph_\alpha$ es un cardinal-límite sii $\alpha \in LIM \cup \{0\}$.

El objetivo de definir la funcional $\aleph$ en términos de la funcional ω es para hacer clara una distinción que estaremos usando a lo largo de este trabajo, y esa es que la funcional ω servirá específicamente para hablar de propiedades de ordinales mientras que la funcional $\aleph$ servirá para hablar de propiedades de cardinales.

1.2.- Desarrollo y crisis en Teoría de Conjuntos. Sobre problemas de indecidibilidad y el programa de Gödel

A continuación, presentaré el panorama general en TC que permita apreciar el surgimiento de ciertos enunciados con características especiales dentro de la teoría. Estos enunciados resultan de gran interés para los teórico-conjuntistas porque algunos de ellos presentan un comportamiento muy especial al interior de la teoría misma. Incluso, la aceptación de algunos de ellos resulta muy prolífica en la obtención de resultados matemáticos.

En la sección 1.1.3 se expuso el desarrollo pertinente de la teoría de conjuntos que permite introducir y analizar los enunciados especiales mencionados en líneas anteriores. Ahora hablaré de algunos ejemplos de dichos enunciados especiales, posterior a esto expondré algunos datos pertinentes del programa para trabajar en TC propuesto por Gödel como respuesta a los problemas que acarrean dichos enunciados especiales.

1.2.1.- Dificultades dentro de TC, o sobre cómo obtener enunciados especiales

Cuando digo que estudiaremos el desarrollo de TC con miras a obtener los enunciados especiales mencionados antes, no estoy suponiendo que tomaremos la teoría y, a partir de ciertos axiomas dados, obtendremos los resultados pertinentes para obtener los enunciados buscados. Más bien, pretendo tomar TC y dar las condiciones relevantes para que tal o cual enunciado pueda obtenerse. Dicho esto, tomaremos TC en su forma estándar de ZF como fue tomada en la sección 1.1.3 de este trabajo.

Los enunciados especiales que hemos estado mencionando son los llamados *enunciados indecidibles* de la teoría de conjuntos. Globalmente, la noción de indecidibilidad tiene que ver con la capacidad de demostrabilidad que un sistema formal o teoría tiene. Así que damos la siguiente definición:

Definición (7).

Sea S un sistema formal de n-ésimo orden, Teo(S) es la teoría de S, y sea $\sigma \in \mathcal{L}_S$.

Se dice que σ es indecidible *sobre S si pasa que* $\sigma \notin Teo(S)$ *y* $\neg\sigma \notin Teo(S)$. *En* *otras palabras, si ocurre que* $S \nvdash \sigma$ *y* $S \nvdash \neg\sigma$.[44]

La definición (7) nos da el criterio que los enunciados especiales de TC que buscamos deben cumplir. Pueden darse varios ejemplos de dichos enunciados en TC, pero ahora nos enfocaremos en analizar tres enunciados indecidibles en TC que son de particular interés.

1.2.1.1.- La Hipótesis del Continuo

Este es quizá el ejemplo más conocido de un enunciado indecidible dentro de TC. Además de haber sido estudiado por Cantor en su momento (pues fue él quien lo formuló primero y dedico buena parte de su estudio a tratar de darle una respuesta), actualmente se dispone de una buena cantidad de información respecto de este enunciado conocido como la Hipótesis del Continuo (HC).

En principio puede parecer adecuado introducir HC en la terminología de la teoría cantoriana de conjuntos. La idea que subyace a la hipótesis es simple de entender a través de algunos conceptos y terminología relativamente elementales. *Grosso modo*, la idea que tenía Cantor sobre el "tamaño" de ciertos conjuntos de números como el de los naturales es que sabemos cuán grande es mediante el procedimiento de contar los elementos de dichos conjuntos, obteniendo que dichos conjuntos son de tamaño numerable (o denumerable,

---

[44] Con la definición (3), notemos lo siguiente: la Teoría de Conjuntos no debe entenderse como solamente el conjunto de las oraciones demostrables de algún sistema formal S en particular. El sentido que damos a la frase "Teoría de Conjuntos" es mucho más amplio que el de ser la teoría de algún sistema formal, pues la Teoría de Conjuntos se refiere al estudio matemático-formal de los conjuntos a través de sistemas lógicos asumidos (esto debido a que la teoría de conjuntos incluso puede ser estudiada con base en diferentes lógicas). Por lo que podemos hablar de la teoría de la Teoría de Conjuntos, Teo(TC), pues ésta última se refiere a aquellas oraciones del lenguaje teórico-conjuntista para las que existe una demostración a partir de los axiomas asumidos.

según la terminología de Cantor);[45] el "tamaño" de otros conjuntos de números como el de los reales no puede ser determinado por algún procedimiento de conteo, pues algunas de sus propiedades no permiten que sean contados en el sentido anterior dicho, de modo que dichos conjuntos son no-contables o incontables.[46] Con lo anterior, se agrupan los conjuntos que son de tamaño numerable (los finitos entran en esta categoría) como los conjuntos de tipo I, mientras que los conjuntos no-contables forman la categoría II. Así, una formulación aproximada de la Hipótesis del Continuo sería:

> Esbozo de la Hipótesis del Continuo (EHC):
>
> *No existen conjuntos de tamaño estrictamente mayor que los de tipo I y estrictamente menor que los de tipo II. En otras palabras, no hay conjuntos de tamaño estrictamente mayor que* $\mathbb{N}$ *y estrictamente menor que* $\mathbb{R}$.

Con EHC, hasta ahora hemos ofrecido la idea más general de la Hipótesis del Continuo desde sus orígenes en la teoría cantoriana de conjuntos. EHC aún dista considerablemente del enunciado indecidible que pretendemos abordar en este trabajo y, de hecho, también es una formulación demasiado vaga de lo que Cantor hubiera podido tener en mente.[47]

El enunciado indecidible que pretendemos abordar será presentado con base en la sección 1.1.3 de este trabajo. La precisión que requerimos para pasar de EHC a la

---

[45] Entre las propiedades que hacen que esto sea el caso, una que es importante mencionar es la que habla de conjuntos discretos. Intuitivamente, un conjunto se dice *discreto* sii sus elementos se pueden separar entre ellos, de modo que se puede saber el tamaño del conjunto contando los elementos separados que éste tiene, y su tamaño será la totalidad de elementos que lo conforman.

[46] Entre las propiedades que vuelven a estos conjuntos incontables, mencionamos la de densidad. Un conjunto se dice *denso* sii entre cualesquiera dos elementos suyos se encuentra un tercero. Nótese que para hablar de la densidad en este sentido, se requiere dotar al conjunto en cuestión de alguna relación de orden.

[47] Esto ciertamente es el caso, pues la clasificación de conjuntos en tipos I y II involucran más detalles técnicos que los aquí mencionados, haciendo de la hipótesis del continuo como fue pensada por Cantor algo bastante más elaborado que EHC. Ver Dauben, J. W. (1990), p. 78-79 y el capítulo 5 para más detalles.

formulación más rigurosa viene dada por las funcionales $\aleph$ y ω dadas en aquella sección, la formulación es del modo siguiente. Sabemos que $|\omega| = \aleph_0$, y la cantidad de números reales es la misma que el de la potencia de ω, es decir $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. El enunciado de la hipótesis del continuo es:

Hipótesis del Continuo (HC):

No existe ningún conjunto $A \in V$ tal que cumpla que $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$.

Dicho en palabras simples, HC afirma que no hay conjuntos cuyo tamaño sea intermedio entre los números naturales y los números reales. Asumiendo el axioma de elección, HC puede ser puesta en la siguiente forma equivalente:

Hipótesis del continuo' (HC'):

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$.[48]

Este es el enunciado especial indecidible que buscábamos al hacer la precisión formal de EHC. La diferencia con EHC es que HC expresa la misma idea en términos de cardinalidad y números que trabajan en el reino de lo transfinito. Ahora veamos a detalle por qué HC resulta indecidible dentro de TC.

[48] El axioma de elección hace que la hipótesis del continuo pueda expresarse en diferentes formas, aunque son equivalentes. De hecho, algo más fuerte puede decirse sobre esto: dependiendo de la teoría de conjuntos asumida, HC es un enunciado que puede ser expresado en forma única o tener versiones equivalentes. En nuestro caso, al trabajar con TC como ZF (o ZFC para el caso de la equivalencia recién mencionada), estamos en una forma de la teoría de conjuntos en que HC puede tener más de una forma equivalente. Por esto, mientras el contexto no dé cabida a confusiones y señalando explícitamente dónde asumimos el axioma de elección, podremos trabajar con HC o HC' sin riesgo de error de interpretación.

1.2.1.1.1.- La independencia de HC respecto de TC: El universo constructible *L*

La idea de esta sección y la siguiente es presentar de modo formal y condensado cómo resulta que HC y su negación resultan no-demostrables en TC estándar. Para ello usaré algunas nociones presentadas en la sección 1.1 de este trabajo y daré otras nuevas que serán de utilidad.

Antes he hablado de la relativización de fórmulas de TC. Dentro de estas fórmulas, son de especial interés aquellas que permanecen verdaderas en su forma global, es decir son verdaderas en su forma relativa y lo siguen siendo en un modelo más amplio que el considerado. Daré la siguiente definición:

Definición (8).

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_{\in}^{n}$ *y* $< M, E >$ *y* $< N, I >$ *modelos de TC. Diremos que φ es* absoluta *M, N según Σ sii*

(i) $\Sigma \vdash M \subseteq N;$

(ii) $\Sigma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \in M(\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{N,I}(x_1, \ldots, x_n))$.

Hemos decidido introducir la noción de absolutez de fórmulas en términos de dos modelos para TC que en principio podrían no coincidir ninguno con el universo *V*, pero haciendo el cambio $< N, I > = < V, \in >$ podemos adquirir la definición de absolutez para fórmulas restringidas a submodelos de TC.[49] La presencia de Σ en la Definición 8 no es circunstancial, pues por la Definición 1, sabemos que la interpretación usual de los axiomas de TC se aplica al universo *V*, pero se requiere relativizarlos al modelo *M* para que φ pueda expresar la propiedad de los conjuntos ahora respecto de los objetos de *M*. Hacemos notar que la relativización de los axiomas de TC al modelo *M* no garantiza que los objetos existentes en el universo *V* de hecho existan en el universo de *M*.[50]

Por la Definición 2, podemos restringirnos a los modelos transitivos para mostrar más fácilmente el resultado que buscamos. Una colección especial de fórmulas de TC será considerada ahora:

Definición (9).

El conjunto de fórmulas Δ_0 *es el* ⊆*-menor conjunto de* ∈*-expresiones que cumple:*

(i) si $x, y \in VAR$, *entonces* $(x \in y)$, $(x = y) \in \Delta_0$;

(ii) Si $x, y \in VAR$ *y* $\varphi, \psi \in Form_{TC,\in}$ *entonces:*

a) Si $\varphi, \psi \in \Delta_0$ *entonces* $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \Delta_0$;

b) Si $\varphi \in \Delta_0$ *entonces* $(\exists x < y\ \varphi) \in \Delta_0$.

Antes de hablar de la noción de *conjunto constructible*, introduciremos dos definiciones más:

[49] El cambio se hace en la condición (ii) de la Definición 8: $\Sigma \vdash \forall x_1, \dots, x_n \in M(\varphi^{M,E}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n))$.

[50] De este modo, la construcción de modelos no garantiza en medida alguna que los objetos iniciales de los que se habla en el modelo inicial se preserven en los nuevos modelos. A nivel ontológico, esto es importante en medida que ayuda a no tener una proliferación desmesurada de objetos en los modelos.

Definición (10).

Sean Def el conjunto de conjuntos definibles, $a = \{x \mid \varphi(x)\}$ *un conjunto expresado por la fórmula φ y* $< M, E >$ *un modelo donde vale a. Se tiene que* $b \in Def(a, n)$ *sii* $\exists\varphi \in \mathcal{L}_{\in}^{n}$ *tal que* *objeto de* M *a la i-ésima variable.* $Def(a, n)$ *es el conjunto de asignaciones de objetos de M que satisfacen la fórmula definitoria del conjunto a y si* $Def(a, n) \neq \emptyset$*, decimos que el conjunto a es* definible.

Definición (11).

Para cualquier conjunto $a \in V$*:*

$\mathfrak{D}(a) = \{x \subseteq a \mid \exists n \in \omega \exists s \in a^{n} \exists r \in Def(a, n+1)(x = \{b \in s \mid s^{\wedge}b \in r\})\}.$

$A\ \mathfrak{D}(a)$ *se le conoce como* potencia definible del conjunto a.[51]

Las Definiciones 10 y 11 dan las nociones necesarias para introducir el modelo de los conjuntos constructibles de TC. Consideramos la siguiente funcional:

Definición (12).

Se define recursivamente la funcional $L: OR \rightarrow V$ *como:*

(i) $L_0 = \emptyset$*;*

(ii) $\forall\alpha - sucesor, L_{\alpha^+} = \mathfrak{D}(L_\alpha)$*;*

(iii) $\forall\alpha \in LIM, L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$.

[51] Nótese que $\mathfrak{D}(a) \subseteq P(a)$.

Algunas propiedades por mencionar son que $L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha$, $\forall \alpha (L_\alpha \subseteq R_\alpha)$ donde R_α es un estrato del universo V,[52] y L es transitivo. Lo siguiente por mencionar nos ayudará a llegar al modelo de TC en que HC es válida.[53]

El siguiente resultado nos servirá para abordar la demostración del teorema donde *V*=*L* implica HC: "Corolario 13.15. La propiedad "x es constructible" es absoluta para modelos internos de *ZF*" (Jech, 2006, p. 187).[54] El siguiente es el teorema que nos interesa revisar:

> "Teorema 13.20 (Gödel). Si *V*=*L* entonces $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todo *α*.
>
> *Demostración.- Sea* ω_α *un cardinal infinito y sea X un subconjunto constructible de* ω_α*. Se demuestra que existe un* $\lambda < \omega_{\alpha+1}$ *tal que* $X \in L_\alpha$*. Esto prueba que* $\wp(\omega_\alpha)^L \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$*. Como* $\left|L_{\omega_{\alpha+1}}\right| = \aleph_{\alpha+1}$*, se tiene que* $|\wp(\omega_\alpha)^L| \leq \aleph_{\alpha+1}$*. Pero se sabía que* $|\wp(\omega_\alpha)^L| > \aleph_\alpha$*, entonces* $|\wp(\omega_\alpha)^L| = \aleph_{\alpha+1}$*, para todo α número ordinal. Por lo tanto, la HGC vale en L.*" (Jech, 2006, p. 190). ■[55]

La hipótesis generalizada del continuo (HGC) es una variante más fuerte de HC', pues dicha hipótesis expresa el consecuente del enunciado del teorema anterior, es decir, HGC = $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todo *α*. Al ser la versión generalizada de HC' la que se demuestra en *V*=*L*,

---

[52] Aquí entra en juego el axioma de buena fundación: $\forall S \in V(S \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in S(x \cap S = \emptyset))$.
[53] Me limitaré a sólo mencionar los resultados pertinentes para llegar al resultado que interesa aquí. Los detalles técnicos pueden ser consultados en Jech, T. (2006), cap. 13.
[54] "Corollary 13.15. *The property "x is constructible" is absolute for inner models of ZF."* La traducción es mía
[55] La demostración del teorema es tomada de Gutiérrez Ramírez, C. A. (2015), p. 58. Igual que el autor menciona en ese trabajo, la demostración del teorema usa un resultado adicional, el lema de condensación de Gödel, el cual puede hallarse en Jech, 2006, p. 188.

se obtiene como corolario que *V=L* implica HC' y HC. Así, hemos encontrado un modelo de TC donde HC vale.

1.2.1.1.2.- La independencia de HC respecto de TC: El *forcing*

El *forcing* es una técnica diseñada por Paul Cohen en su artículo "The Independence of the Continuum Hypothesis" en los años de 1963 y 1964. La idea básica del *forcing* consiste en tomar modelos de la teoría, ZF en este caso, y expandirlos a modelos que brinden más información sobre ciertos enunciados que en el modelo inicial no se puede saber. Esta técnica es muy útil para hacer demostraciones de consistencia de la teoría cuando se le añaden ciertos enunciados, y en nuestro caso nos enfocaremos en estudiar la consistencia de TC cuando se le añade la negación de HC.

El objetivo de esta sección consiste en dar un modelo de TC en su forma de ZFC donde, si ZFC es consistente, entonces ZFC añadida con la negación de HC es consistente en la expansión del modelo inicial del que partimos. Dar el procedimiento exhaustivo del modelo pertinente escapa a los propósitos de este trabajo, por lo que la estrategia será dar las nociones y definiciones básicas del *forcing* para después dar una expansión de un modelo donde TC en su forma ZFC junto con la negación de HC es consistente.[56] Comenzaré dando la siguiente definición:

[56] Una exposición exhaustiva del *forcing* puede encontrarse en Jech, T. (2006), cap. 14, y Kunen, K. (1980), cap. 7.

Definición (13).

Sea M un modelo estándar transitivo y numerable de ZFC:[57]

(i) Para $(P, <)$ *un orden parcial, decimos que P es una* noción de forcing *sobre M.*

A los elementos de P los llamaremos las condiciones de forcing. $\forall p, q \in P, p < q$

significa que p extiende a q.[58]

(ii) $\forall p, q \in P$, *p y q son* compatibles *si* $\exists r \in P(r < p \wedge r < q)$. *En otro caso, son*

incompatibles.

(iii) Se define $C \subseteq P$ *como una* cadena *si es conjunto de condiciones en M*

compatibles; $A \subseteq P$ *es una* anticadena *de condiciones en M incompatibles.*

(iv) $D \subseteq P$ *es* denso *sii* $\forall p \in P \exists d \in D(d \leq p)$.

(v) $F \subseteq P$ *es* filtro *si:*

a) $F \neq \emptyset$*;*

b) $\forall p, q \in P((p \in F \wedge p < q) \rightarrow q \in F)$*;*

c) $\forall p, q \in F \exists r \in F(r \leq p \wedge r \leq q)$.

(vi) Un filtro $G \subseteq P$ *es* genérico *sii* $\forall D \subseteq P$ *denso, se cumple que* $G \cap D \neq \emptyset$.

(vii) Si Δ *es familia de densos, G es un filtro* Δ-genérico *si* $\forall D \in \Delta(G \cap D \neq \emptyset)$.

Se requiere considerar un modelo estándar transitivo y numerable *M* de ZFC del cual partimos. En particular, fijamos la atención en los filtros *P*-genéricos que se pueden formar en *M*. A pesar de que no es necesario que los filtros *P*-genéricos *G* pertenezcan al *M*, pediremos que el filtro *G* sí pertenezca a *M*, pues requeriremos después que la

---

[57] Se puede omitir la característica de *M* de ser transitivo y numerable. Se pide el modelo con esa característica para hacer más fácil la construcción de extensiones de *M*.

[58] Se puede decir que “p es más fuerte que q”. Más adelante será evidente que esta forma de escribir el orden de los elementos de P obedece a una forma inversa de cierta relación particular (por ejemplo, la contención en conjuntos, u otra específica).

expansión de *M* tenga al filtro *G*. Para referirnos a los objetos del modelo expandido con base en el orden parcial *P*, se da la siguiente definición:

Definición (14).

A cada elemento x del modelo expandido de M, se describe en M como $\breve{x} \subseteq M$, $\breve{x}$ describe a *x*, $\breve{x}$ *es el* P-nombre *de x*. *Tenemos el siguiente conjunto*: P-nombres $= \{\breve{x} \mid x \in M\ expandido\}$.

La colección de los *P*-nombres que nos interesa es aquella que se refiere a los elementos de *M*. Los *P*-nombres son expresables por fórmulas absolutas, de modo que si algo es un *P*-nombre fuera del modelo en cuestión, lo seguirá siendo en la relativización al modelo. Es importante que el filtro *G* esté en *M* porque los *P*-nombres de los objetos hablan de aquellos elementos del modelo que son nombrados a través de los elementos del filtro *P*-genérico. Ahora podemos definir con precisión lo que significa ser una expansión del modelo *M:*

Definición (15).

Se dice que M[G] *es la* extensión genérica *del modelo M* y $M[G] = \{\breve{x} \mid x \in M_P\}$, *es decir, los elementos de M interpretados usando el filtro G P-genérico sobre M.*

Una ventaja de definir los P-nombres como $\breve{x}$ es que son los nombres canónicos de los objetos que ya estaban en el modelo M, así que se cumple que si $x \in M$ entonces $\breve{x} \in M$ y $\breve{x} = x$.[59] De modo que tenemos que $G \subseteq M[G]$.

Con lo anterior, y recordando la relativización de fórmulas, podemos hablar de lo que consiste en que una extensión genérica "fuerce" una fórmula interpretada en el modelo original:

Definición (16).

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de ZFC con n variables libres, M un modelo estándar transitivo y numerable de ZFC y $p \in (P, <)$ un forcing sobre M. Se dice que p fuerza *a φ, $p \Vdash \varphi$, sii*

$\forall G((G\ es\ un\ filtro\ P - genérico\ sobre\ M\ y\ p \in P) \rightarrow \models \varphi^{M[G]}(x_1, \ldots, x_n, p))$.

Los siguientes resultados son teoremas "fuertes" del *forcing* en TC:[60]

Teorema 4.- (Primer Teorema Fuerte de Forcing)

Sea M un modelo de ZF, $(P, <) \in M$ una noción de forcing en M y $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M. Entonces existe un modelo transitivo y numerable tal que:

(i) M[G] es modelo de ZFC;

(ii) $G \in M[G]$;

(iii) Si N es modelo de ZFC y $M \subseteq N, G \in N$, entonces $M[G] \subseteq N$;

---

[59] Por supuesto, los objetos de la extensión genérica M[G] que ya estaban en el modelo *M* cumplirán con esta igualdad por la manera en que se tomó el filtro genérico *G*. No obstante, el orden parcial *P* del que partimos determinará la interpretación de los *P*-nombres en el modelo expandido con la extensión genérica.

[60] Ver Jech, T. (2006), p. 203 y 204.

(iv) $OR^M = OR^{M[G]}$.

Teorema 5.- (Segundo Teorema Fuerte de Forcing)

Sea M un modelo transitivo y numerable. Si $(P, <)$ *es noción de forcing sobre* M *y* $G \subseteq P$ *es filtro P-genérico y σ es una fórmula de* $\mathcal{L}_{\in}$*, entonces:*

$M[G] \vDash \sigma \Leftrightarrow \exists p \in P(p \Vdash \sigma)$.

Los Teoremas 4 y 5 dan condiciones necesarias[61] para analizar cuándo una extensión genérica de un modelo de TC preserva las propiedades que nos interesa en nuestra teoría y qué ocurre con los nuevos objetos que se fuerzan en el modelo. Ahora ya estamos en condiciones de ofrecer un ejemplo de una extensión de un modelo de ZFC donde no vale la hipótesis del continuo. Para hacerlo, consideramos el ordinal ω_1 el cual, por la construcción ordinal que tiene, constituye un conjunto de tipo II o de tamaño no-numerable, y con la obtención de un modelo con elementos de ciertas características se forzará a ser un ordinal de tipo I o de tamaño numerable. La construcción es como sigue:

Supongamos que tenemos un modelo transitivo y numerable M para el que se cumple el enunciado Cons(ZFC), sea $(P, <)$ un orden parcial que tiene por elementos a sucesiones finitas con dominio los ordinales numerables y codominio el conjunto 2 = {0,1}, y el orden para los elementos de P viene dado por $\forall f, g \in P(f \leq g \leftrightarrow f \supseteq g)$; supongamos que se tiene $G \subseteq P$ un filtro P-genérico sobre M, dicho filtro cumple que: (i) si $f, g \in G$, entonces

[61] De hecho, existe un Tercer Teorema Fuerte de Forcing que podría mencionarse también. No lo hice aquí porque dicho teorema expresa las propiedades lógicas de las fórmulas de la teoría que el Forcing debe cumplir. Las propiedades en cuestión consisten básicamente en la definición recursiva de forzar las fórmulas de la teoría en la extensión genérica, según la complejidad lógica de ellas (una definición habitual cuando se introducen nociones como la de satisfacción y verdad lógica). Se puede ver a detalle este tercer teorema en Jech, T. (2006), p. 204.

$\exists r \in G((r \leq f \wedge r \leq g) \leftrightarrow (r \supseteq f \wedge r \supseteq g))$, (ii) si $n \in (dom(f) \cap dom(g))$ entonces *f(n) = r(n) = g(n), f(n) = g(n)* y f es compatible con g. Luego, podemos considerar la sucesión $F = \bigcup G$ y notemos que $F \notin M$ pero M tiene información sobre F, además $F \in M[G]$. Veamos que el dom(F) es infinito y numerable: es numerable porque las funciones consideradas son sobre ordinales numerables, y es infinito porque si consideramos $\forall n, D_n = \{f \in P \mid n \in dom(f)\}$ es denso en P, pues para $p \in P$, si $p \in D_n$ entonces $p \leq P$; si $p \nleq D_n$ entonces $n \notin dom(p)$, pero como podemos hacer $\{< n, k >\} \cup p \in P$ para un k adecuado, entonces $\{< n, k >\} \cup p \in D_n$. Como G es genérico, $G \cap D_n \neq \emptyset$ y $\forall n \in \omega \exists f_n \in D_n(f_n \in G)$, es decir, $f_n \subseteq F$ y $dom(f_n) \subseteq dom(F)$. Por tanto, $dom(F) = \omega$. Sabemos que $ran(F) \subseteq \omega_1^M$. Se cumple que $\forall \alpha < \omega_1^M, D_\alpha = \{f \in P \mid \alpha \in ran(f)\}$ es denso en P, luego $D_\alpha \cap G \neq \emptyset\ y\ \alpha \in ran(f) \forall a < \omega_1^M$. Entonces $F: \omega \to \omega_1^M$ es suprayectiva y ω_1^M es numerable.

El argumento anterior muestra que hemos encontrado una extensión genérica de un modelo *M* de TC donde, como $\aleph_0\ y\ \aleph_1$ son numerables, $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Entonces $Cons(ZFC + \neg HC)$ es verdadera en la extensión de *M*. Así, hemos encontrado un modelo donde HC es falso.

1.2.1.2.- La consistencia de TC

A diferencia de HC, el siguiente enunciado especial que expondré no se consigue directamente por el desarrollo y la noción de demostrabilidad que se pudiera tener en TC. Aunque es un enunciado relacionado con la teoría misma, para obtenerlo necesitaremos poner especial atención a los aspectos metateóricos de la teoría analizada. Particularmente, requeriremos estudiar el metalenguaje y las propiedades de consistencia, compleción, etc., que introduje en la sección 1.1.1 de este trabajo.

¿Cuál es la motivación detrás del enunciado que expresa la consistencia de TC? Este enunciado en particular no fue objeto de estudio en su momento, sino que se tuvo particular interés en él después de que Gödel diera a conocer los resultados de incompleción en "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme".[62] Con estos resultados, Gödel llegó a neutralizar seriamente la idea que se tenía en ese momento sobre encontrar una base sólida de fundamentación para las matemáticas a través de posturas formalistas, la cual tenía su principal soporte en ese momento en el programa de Hilbert. No obstante, el resultado es de un carácter limitativo muy importante que ha servido tener en cuenta para conocer el alcance de las teorías matemáticas.

A diferencia del enunciado HC que he analizado en secciones anteriores, el enunciado indecidible que es de interés ahora no lo obtendremos sólo de TC. Como lo sugiere el título del trabajo de Gödel, el resultado de incompleción en un sistema formal se puede obtener siempre y cuando dicho sistema reúna ciertos requisitos. Para el enunciado que nos interesa conseguir, ya podemos ofrecer una caracterización:

Consistencia de TC (Cons(TC)).

La teoría de conjuntos formulada con sus axiomas estándar y su teoría de demostración es consistente.[63]

[62] "Sobre enunciados formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines". Este artículo se puede encontrar en más de un lugar. Véase Gödel, K. (1981), p. 53-90.

[63] Recuérdese que la noción de consistencia que he venido manejando es la que dice que el sistema es consistente sii hay una fórmula suya que el sistema no demuestra. Otra manera en que puede resultar más sencilla de entender la consistencia es aquella que expresa que en el sistema en cuestión no puede demostrarse una contradicción.

No pretendo dar aquí todo el desarrollo técnico para mostrar el surgimiento de los elementos que permitan demostrar que Cons(TC) es un enunciado indecidible en TC. Para los fines de este trabajo, bastará con exponer las ideas, nociones y definiciones mínimas necesarias que permitan apreciar el proceso para nuestro objetivo.[64]

El primer requisito consiste en la consideración de un sistema formal *S* cuyo lenguaje permite expresar la parte más básica de la aritmética elemental PA (las siglas son para la expresión en inglés de la aritmética de Peano). Las expresiones y fórmulas de *S* se forman con los símbolos del siguiente alfabeto que también enumeraremos:

$0 \quad ` \quad (\quad) \quad f \quad , \quad v \quad \sim \quad \supset \quad \forall \quad = \quad \leq \quad \#$

$1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \eta \quad \delta \quad \varepsilon$

La numeración del alfabeto no será en vano debido a que con ella se podrán numerar todas las expresiones posibles del lenguaje de *S*. Así, a partir del número 10, las expresiones consistirán en concatenaciones de los símbolos arriba presentados.[65]

Ahora, los conjuntos de números naturales que se pueden expresar en PA cumplen la siguiente definición:

Definición (17).

Una fórmula $F(v_1, \ldots, v_k)$ *con* $v_1, \ldots, v_k$ *como sus únicas variables libres* expresa *en el lenguaje formal un conjunto C de k-tuplas ordenadas sii para toda k-tupla*

[64] La exposición de esta sección seguirá el desarrollo de Smullyan, R. (1992). Aunque es recomendable revisar toda la obra, mi exposición se centrará en los capítulos I-VI de la obra de Smullyan.

[65] Los números η, δ y ε funcionarán para no interferir con esta idea que no sería correcta para los números 10, 11 y 12, respectivamente.

$(n_1, \ldots, n_k)$, $(n_1, \ldots, n_k) \in C \leftrightarrow F(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$ *es verdadera.*

La noción usual de satisfacción que estamos acostumbrados a manejar en Lógica de 1er orden es recuperada en la Definición 17 con el carácter muy particular de que en este contexto estamos interesados en los conjuntos de números que cumplen una o varias propiedades expresadas en el conjunto *C*. Esta definición engloba todas las opciones que tenemos en PA para hablar de conjuntos de números, pues la definición funciona para expresar conjuntos de números, conjuntos de conjuntos de números, etc.

La idea detrás de lo anterior es que se permita hablar de las expresiones formales de *S* en términos de los números que corresponderían a cada símbolo en las ristras de símbolos que componen cada expresión de *S* (tanto expresiones bien formadas, o fórmulas, como las no bien formadas). Esta es la idea acerca de la numeración y los números de Gödel. A continuación, procedemos a presentar dos ideas que serán de gran importancia para proceder:

(i) Convenimos en denotar por E_n a la expresión con número de Gödel *n*. Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, la ristra de símbolos de la expresión en el lenguaje de *S* será referida por E_k.

(ii) Traducimos la cuestión de si uno o más objetos satisfacen una fórmula φ a una cuestión acerca de saber si un cierto número *m* satisface una cierta E_n, con *n* el número de Gödel de φ. Formalmente, esto significaría averiguar si $\forall x(x = 0^{(m)} \rightarrow E_n(x))$ es verdadera.

La fórmula $\forall x(x = 0^{(m)} \rightarrow E_n(x))$ tiene una importancia considerable en la continuación del estudio para terminar de dar sentido a la idea de que se puede hablar de las expresiones formales de *S* en términos de números. Esta idea se precisa por medio de la función $r: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada como *r(n, m)* = el número de Gödel que resulta de concatenar "$\forall x(x =$ " con el numeral para *m* con E_n con ")". De modo que la función *r* permite el intercambio entre la satisfacción de fórmulas con variables libres y objetos con la satisfacción de fórmulas con números de Gödel. Esto es lo que se suele conocer como *gödelizar* un sistema formal.

La representabilidad de conjuntos dentro de *S* es el siguiente elemento que se debe garantizar dentro del sistema formal. Consideramos la siguiente definición:

Definición (18).

Un conjunto A de números naturales es representable *en el lenguaje de S sii cumple la definición (17) y* $\forall x(x \in A \leftrightarrow Teo_{PA}(\varphi(t_x))$ *donde φ es la fórmula que expresa a A,* Teo_{PA} *es la propiedad de ser teorema en PA y* t_x *es el término que refiere a x.*[66]

Varios conjuntos de números son representables dentro del sistema PA. Algunos de ellos son el conjunto de números impares, o el conjunto de las potencias de un cierto número natural. Sin embargo, hay otros conjuntos que no son representables. Unos importantes para tener en cuenta son: (i) el conjunto de pares de números *(m, n)* tales que *m* satisface a *n*; (ii) el conjunto de números *n* tales que *n* es el número de una oración verdadera. Dicho más simple, las propiedades de satisfacción y verdad no pueden representarse dentro de PA. Sin embargo, la función *r* es representable en el lenguaje de PA.

[66] Una aclaración importante aquí es que la definición ya maneja una definición de teorema dentro de PA. Para que esto sea el caso debe haber una noción de demostrabilidad en nuestro sistema *S*: Una fórmula *φ* de PA es un teorema en PA sii existe una lista finita de fórmulas de PA cada una de las cuales o es un axioma de PA, o pertenece al conjunto de enunciados que son hipótesis iniciales de las que partimos, o es resultado de anteriores fórmulas por la aplicación de reglas de inferencia.

¿Hacia dónde nos dirigimos con las herramientas hasta ahora dichas del lenguaje para PA? Estamos interesados en la expresabilidad de fórmulas cuyos números de Gödel cumplan con lo dicho en la fórmula misma, o en otras palabras en lograr que los números logren autorreferirse en nuestro lenguaje. Se logrará la autorreferencia en PA recurriendo a una técnica conocida como diagonalización de las expresiones del lenguaje formal. Para ello definiré una nueva función con ayuda de la función *r*:

Definición (19).

Se define la función $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *como d(n) = r(n, n). El número de Gödel que resulta de aplicar el número de* E_n *a sí misma. d(n) es el número de Gödel de*

$\forall x(x = 0^{(n)} \to E_n(x))$.

Si hacemos *D(x, y)* la notación para $d(x) = y$, entonces, para cualquier conjunto *A* de números, la diagonalización de la fórmula que expresa al conjunto *A* y cuyo número de Gödel es *n*, viene dada por la expresión $\exists y(D(x,y) \wedge A(y))$, la cual expresa que *y* es el número de Gödel de una fórmula φ(x) en que su propio número de Gödel *n* sustituye a *x,* y *y* cumple con la propiedad del conjunto *A.*

Ahora que se tiene un mecanismo para representar dentro de *S*, estamos interesados en si determinados conjuntos particulares de números son o no representables dentro del sistema formal, tales como los conjuntos de números de fórmulas, de axiomas,[67] de los listados de fórmulas que constituyen demostraciones, y de teoremas de *S*. Lo anterior es

[67] El sistema *S* cuenta con los axiomas básicos de las lógicas de orden 0 y orden 1, además de axiomas básicos introducidos para la aritmética elemental. No daré toda la lista de ellos aquí, pero pueden encontrarse enumerados en Smullyan, R. (1992), p. 29.

posible porque se emplean métodos recursivos para lograrlo, es decir, partiendo de nociones más básicas se pueden definir fórmulas que expresan los conjuntos mencionados.

Con el procedimiento recursivo de la representabilidad y la Definición 19, ahora se está en posición de construir expresiones autorreferenciales dentro de *S*. Esto se logra por medio de la representabilidad de predicados como "ser una variable con al menos una aparición libre en una fórmula en *S*", "ser una oración en *S*" y "ser una oración demostrable en *S*". Para este último predicado, establecemos la notación *Dem(x)*.

Ahora procedemos a presentar la oración, que denotamos como *G*, que resulta indecidible para el sistema *S* con los componentes básicos dichos hasta ahora. Además, requerimos suponer que *S* es consistente y consistente-ω.[68] Como una variante del predicado *Dem(x)*, consideramos el predicado *DemFor(x)* para expresar que *x* es una fórmula demostrable en *S*, y formalmente se hace con la fórmula $\exists z\big(Pr(z,y)\big)$ donde *Pr(z, y)* es la relación que expresa que *z* es el número de Gödel de una demostración de *y*. Ahora consideramos la fórmula $\exists y(D(x,y) \wedge \neg DemFor(y))$. Una forma equivalente de hablar de la fórmula anterior es con la fórmula $\forall w{\sim}(\exists y \leq w)(\exists z \leq w)(D(x,y) \wedge \Pr(z,y))$, y llamamos k al número de Gödel de la fórmula anterior.[69] Lo que comúnmente debe entenderse con la fórmula anterior es que existe una oración tal que ella misma no es demostrable en *S*. Veamos que en ambos de casos, de tener la oración o su negación demostradas, llegamos a una contradicción. La oración G que será indemostrable en S es

[68] Esta es una forma especial de consistencia en el sistema que dice: El sistema formal *S* es *consistente-ω* sii no hay una fórmula F(x) de *S* tal que $\exists x F(x)$ sea demostrable en *S* y además toda fórmula de la forma ${\sim}F(0^{(n)})$ con $n \in \omega$ es demostrable en *S*.

[69] Un aspecto que se resalta de esta fórmula, y otras similares, es que toma en cuenta la distinción oración Σ/oración Π que distingue oraciones con cuantificación intercalada, siendo las oraciones Σ las que comienzan con cuantificación existencial, y las oraciones Π que comienzan con cuantificación universal.

$\forall w \sim (\exists y \leq w)(\exists z \leq w)(D(0^{(k)}, y) \wedge \Pr(z, y))$, la fórmula dice que la diagonalización de E_k no es demostrable, es decir, *d(k)* dice de sí misma no ser demostrable:

(i) Si G es demostrable, entonces también lo es $\neg(\exists y \leq w)(\exists z \leq w)(D(0^{(k)}, y) \wedge \Pr(z, y))$ y *S* es inconsistente, contradiciendo su consistencia.

(ii) Si $\neg G$ es demostrable, entonces es demostrable $\exists w(\exists y \leq w)(\exists z \leq w)(D(0^{(k)}, y) \wedge \Pr(z, y))$ y G no será demostrable, luego no habrá un número natural p tal que $(D(0^{(k)}, 0^{(d(k))}) \wedge \Pr(0^{(p)}, 0^{(d(k))}))$ sea verdadera, luego ninguna fórmula de la forma $(\exists y \leq 0^{(n)})(\exists z \leq 0^{(n)})(D(0^{(k)}, y) \wedge \Pr(z, y))$ para cualquier n número natural será verdadera, todas serán falsas, luego $\neg(\exists y \leq 0^{(n)})(\exists z \leq 0^{(n)})(D(0^{(k)}, y) \wedge \Pr(z, y))$ son verdaderas y demostrables, en particular para $0^{(n)} = w$, contradiciendo la consistencia-ω de S.

Por tanto, G y $\neg G$ no son demostrables en *S* y G es indecidible en *S*, haciendo que *S* sea incompleto.

Los elementos anteriormente expuestos y los argumentos de (i) y (ii) constituyen el esbozo de la demostración del primer teorema de incompleción de Gödel. El segundo teorema de incompleción se obtiene como un corolario mediante el siguiente razonamiento. Sabemos que la consistencia de un sistema formal como *S* (y también PA) puede expresarse equivalentemente por medio de la indemostrabilidad de oraciones que expresen una contradicción. Así, oraciones como $0 = 0'$ no deben ser teoremas de *S*. Si, por el contrario, hubiera una tal oración con *i* su número de Gödel, entonces Cons(S) es la fórmula $\forall x \neg \Pr\,(x, 0^{(i)})$, es decir que no hay un número natural que sea el número de Gödel de una demostración de E_i. De esto, podemos obtener la fórmula $Cons(S) \rightarrow G$, que admite una demostración dentro de *S*. Pero si el sistema es consistente y se da la demostración de la fórmula anterior en *S* entonces se demostraría *G*, contradiciendo el primer teorema de incompleción. Por la tanto Cons(*S*) no es demostrable dentro de *S*.

El segundo teorema de incompleción arroja el enunciado de interés para la sección actual de este trabajo. Es importante notar que el esbozo se hizo para un sistema formal *S* con los elementos mínimos para expresar la parte más elemental de la aritmética básica. La construcción que hace el propio Gödel se aplica a sistemas con características similares, como el usado en *Principia Mathematica*, o un sistema estándar con lógica de primer orden para trabajar la teoría de conjuntos ZF (o ZFC). Por lo que, en este último caso, la oración indecidible es Cons(ZF).

1.2.1.3.- El Axioma de Elección

El siguiente ejemplo de enunciado indecidible en TC es de un carácter distinto al de los dos anteriores presentados. Dicho enunciado es presentado como un axioma, por lo que no es resultado de aplicar definiciones y resultados previos en TC, y tampoco surge como resultado debido a las características metalógicas y el poder expresivo de la teoría. Este enunciado no surge como tal de TC, más bien es introducido a la teoría como un recurso extra para fortalecerla.

El Axioma de Elección fue postulado por Zermelo en 1904, durante la época en que TC estaba siendo sometida a un tratamiento formal más riguroso. La forma estándar en que se enuncia este axioma es como sigue:

Axioma de Elección (AE).

Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección, es decir, si A es familia de conjuntos tal que $\emptyset \notin A$ *entonces existe una función* $f\colon A \to \bigcup A$ *tal que* $\forall X \in A(f(X) \in X)$.

El axioma debe su carácter especial de indecidibilidad porque no se puede deducir ni él ni su negación del resto de axiomas de TC solamente. Además, es destacable que AE tiene más de una manera de enunciarse. Aunque se puede demostrar que las formas de enunciarlo son equivalentes, se usa una cierta forma de AE y no otra porque usualmente cada forma involucra nociones de TC particulares que ayudan a estudiar ciertos fenómenos y problemas. Por mencionar algunas de las formas más conocidas están: (i) el *Teorema del Buen Orden de Zermelo:* Todo conjunto se puede bien-ordenar; (ii) el *Lema de Zorn:* Si $(P, <)$ es un conjunto no-vacío y parcialmente ordenado tal que toda $<$-cadena tiene una cota superior, entonces P tiene un elemento $<$-maximal.

Es destacable mencionar que este axioma permite obtener una buena cantidad de resultados en TC y otras ramas de las matemáticas. Por mencionar algunos de dichos resultados están: (i) En TC, la existencia de ultrafiltros no-principales[70] se obtiene con AE, (ii) en teoría de anillos, dada una familia de ideales principales de un anillo ordenada por $\subseteq$, dicha familia tiene un elemento $\subseteq$-maximal que se obtiene con el Lema de Zorn, (iii) en topología, el Teorema de Tychonoff sobre la compacidad del producto topológico de espacios compactos se demuestra con el Lema de Zorn. Con lo anterior, nótese que el

[70] Un *filtro* se define: dada una familia no vacía de conjuntos S, un filtro F de S es un conjunto que cumple (i) $A, B \in F \to A \cap B \in F$, (ii) $(A \in F \wedge B \subseteq A) \to B \in F$. (i) y (ii) implican que $S \in F$. Un filtro *principal* se define: dado un subconjunto A no-vacío de S el filtro $F = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}$ es principal. Un *ultrafiltro* es un filtro maximal de S.

axioma permite obtener algunos resultados importantes y muy útiles en el desarrollo de la matemática, de modo que su utilidad es innegable para el teórico-conjuntista y el matemático que lo reconozca como axioma legítimo.

Para mostrar que AE es un enunciado indecidible de TC, procederé de modo muy similar a como se hizo para mostrar que HC es un enunciado indecidible, pues de nuevo emplearemos la maquinaria formal del universo $L=V$ para hacer notar que AE es compatible con TC, y emplearemos el *forcing* para mostrar que la negación de AC es compatible con TC. En ambos casos, daré algunas nociones nuevas para obtener los resultados deseados, y para dichas nociones junto con las ideas de la exposición seguiré los textos de Jech, T. (2006), cap. 14 y Kunen, K. (1980), cap. 6.

1.2.1.3.1.- *V*=*L* implica AC

Anteriormente he hablado del universo *L* de Gödel para mostrar que HC es un enunciado verdadero dentro de *V*=*L*. Ahora volveré a emplear el universo constructible para mostrar que AC vale aquí. Para esto, se inducirá un orden lexicográfico[71] sobre los niveles *L(α)* de la jerarquía construida y dicho orden permitirá la buena ordenación de los niveles enumerando los modos contables en que un nivel *L(α)* puede definirse con los elementos de $L(\alpha)^{<\omega}$, esto siguiendo la estrategia de Kunen, K. (1980).

Se da la siguiente definición que cumple algunas propiedades útiles:

[71] Este orden es el obtenido cuando se ajenizan dos conjuntos totalmente ordenados y se les ordena con una relación que *concatena* sus elementos.

Definición (20): (Kunen, 1980, p. 173)

Se define recursivamente sobre los ordinales la relación de buen orden

$\lhd_\alpha = \lhd(\alpha) \in L(\alpha)$ *como:*

Para 0, $\lhd_0 = 0$*;*

para $\alpha \in LIM, \lhd_\alpha = \{<x, y> \in L(\alpha)^2 \mid \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge <x, y> \in \lhd(\rho(x) + 1))\}$*;*[72]

para α sucesor, $\lhd_\alpha$ *induce* $\lhd_\alpha^n$ *como orden lexicográfico sobre* $L(\alpha)^n$*:*

$s \lhd_\alpha^n t \leftrightarrow \exists k < n(s \restriction_k = t \restriction_k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k))$.

La relación en la Definición (20) cumple las siguientes propiedades:

(i) Si $X \in L(\alpha + 1) = \mathfrak{D}(L(\alpha))$, *sea* n_X *el menor n tal que*

$\exists s \in L(\alpha)^n \exists R \in Def(L(a), n + 1)(X = \{x \in L(\alpha) \mid s^\frown < x > \in R\})$.

(ii) Sea s_X *el* $\lhd_\alpha^{n_X}$ *– menor* $s \in L(\alpha)^{n_X}$ *tal que*

$\exists R \in Def(L(a), n_X + 1)(X = \{x \in L(\alpha) \mid s^\frown < x > \in R\})$

y sea m_X *el menor* $m \in \omega$ *tal que*

$X = \{x \in L(\alpha) \mid s_X{}^\frown < x > \in En(m, L(\alpha), n_X\})$.[73]

---

[72] El rango de un conjunto, ρ, se define como: Si *x* es un conjunto bien fundado, $\rho(x) = mín\{\alpha \mid \alpha \in R_{\alpha^+}\}$ donde R_α es un estrato del universo conjuntista, asumiendo que *V* = *BF*, es decir, vale el axioma de regularidad.

[73] Aunque no retomaré nuevamente la relación *En* después de presentar la indecidibilidad de AC, se define rigurosamente del siguiente modo, según (Kunen, 1980, p. 155).

Por recursión sobre n ∈ *ω*, En(*m*, *A*, *n*) *es definida (para todo n simultáneamente) por las siguientes cláusulas:*

(a) Si $m = 2^i \times 3^j$ *y* $i, j < m$, *entonces* $En(m, A, n) = Diag_\in(A, n, i, j) = \{s \in A^n \mid s_i \in s_j\}$.

(b) Si $m = 2^i \times 3^j \times 5$ *y* $i, j < m$, *entonces* $En(m, A, n) = Diag_=(A, n, i, j) = \{s \in A^n \mid s_i = s_j\}$.

(c) Si $m = 2^i \times 3^j \times 5^2$, *entonces* $En(m, A, n) = A^n \setminus En(i, A, n)$.

(d) Si $m = 2^i \times 3^j \times 5^3$, *entonces* $En(m, A, n) = En(i, A, n) \cap En(j, A, n)$.

(e) Si $m = 2^i \times 3^j \times 5^4$, *entonces* $En(m, A, n) = Proy(A, En(i, A, n + 1), n) = \{s \in A^n \mid \exists t \in En(i, A, n + 1)(t \restriction_n = s)\}$.

(iii) Para $X, Y \in L(\alpha + 1)$*, se define* $X \lhd_{\alpha+1} Y$ *sii*

(a) $X, Y \in L(\alpha) \wedge X \lhd_{\alpha} Y$*, o*

(b) $X \in L(\alpha)$ *y* $Y \notin L(\alpha)$*, o*

(c) $X, Y \notin L(\alpha) \wedge [(n_X < n_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X \lhd_{\alpha}^{n_X} s_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X = s_Y \wedge m_X < m_Y)]$.

La definición (20) y sus propiedades dichas inducen la buena ordenación que se requiere a través de la relación $\lhd_{\alpha}$. No obstante, se debe revisar que la relación definida se comporta como deseamos, por ejemplo, en cómo pasar al buen orden de $L(\alpha)$ sin suponer que $\lhd_{\alpha}$ es un buen orden. Para lo anterior, serviría proponer a $\lhd_{\alpha+1} = 0$ si $\lhd_{\alpha}$ no es un buen orden y demostrar como un resultado adicional que $\lhd_{\alpha}$ bien ordena a todo ordinal α. No se hará esto aquí, y en su lugar se dará el resultado que estamos buscando:

Teorema 6.- (Lema 4.2, Kunen, 1980, p. 174)

$V = L \rightarrow AC$.

Demostración.- Sea $x \in L$*, entonces* $x \in L(\alpha)$ *para algún α ordinal. Entonces se sigue* $x \in \lhd_{\alpha}$ *para α que determina el buen orden* $\lhd_{\alpha}$*. Como todo x cumple lo anterior para algún α, se cumple el teorema del Buen Orden y esto equivale a que se cumple AC.* ■

Notemos que en el último paso de la demostración se usa fuertemente que $\lhd_{\alpha}$ es un buen orden para usar el teorema del Buen Orden. De modo que se requiere justificar con todo

---

(f) Si m no es alguna alternativa de (a)-(e), entonces $En(m, A, n) = 0$.

rigor que la relación cumple con ser un buen orden. Para lo anterior, basta completar lo suficiente las propiedades de la definición (20) para tener el resultado.

1.2.1.3.2.- Una extensión genérica $\boldsymbol{M[G]} \nvDash \boldsymbol{AC}$

Al igual que la subsección anterior, haré uso de una herramienta ya usada para mostrar que la negación de AC vale en un modelo de TC. Dicha herramienta es la técnica del *forcing,* pero antes de dar el resultado que muestra una extensión genérica donde vale la negación de AC, debemos tener el modelo adecuado para extenderlo según nuestros propósitos, y para eso requiero tener algunas nociones extra para hablar de dicho modelo. Ahora seguiré la estrategia de Jech en su (2006) (hago notar que las traducciones de los resultados expuestos a continuación son mías).

Las siguientes definiciones serán útiles para construir la extensión genérica buscada. Se requiere considerar una estructura algebraica booleana[74] con ciertas características.

Definición (21): (Jech, 2006, p. 79)

Sean B y C álgebras booleanas. Una función $h: B \rightarrow C$ *es un* homomorfismo *si*

preserva las operaciones:

(i) h(0)=0, h(1)=1,

---

[74] Antes de proseguir convendrá a la explicación el definir las álgebras booleanas como sigue: (Jech, 2006, p. 78)
Un álgebra booleana *es un conjunto B con al menos dos elementos, 0 y 1, junto con las operaciones binarias + y ·, y una operación unaria -. Dichas operaciones cumplen con los siguientes axiomas:*
(conmutatividad) $u + w = w + u$ $\quad$ $u \cdot w = w \cdot u$
(asociatividad) $u + (w + v) = (u + w) + v$ $\quad$ $u \cdot (w \cdot v) = (u \cdot w) \cdot v$
(distributividad) $u \cdot (w + v) = u \cdot w + u \cdot v$ $\quad$ $u + (w \cdot v) = (u + w) \cdot (u + v)$
(absorción) $u \cdot (u + v) = u$ $\quad$ $u + (u \cdot v) = u$
(complementación) $u + (-u) = 1$ $\quad$ $u \cdot (-u) = 0$

(ii) h(u+v)=h(u)+h(v), h(u·v)=h(u)·h(v), h(-u)=-h(u).

Algunas características de las funciones entre conjuntos, como la definición de encaje y la de isomorfismo, se aplican *mutatis mutandis* a los homomorfismos entre álgebras booleanas. Una característica que nos servirá tener en cuenta después es la de automorfismo: Un isomorfismo de un álgebra en sí misma.

Dotando a un álgebra booleana B de un orden parcial $\leq$, se expanden las operaciones de suma y producto sobre B para obtener generalizaciones importantes. Con el orden parcial, $u + v = \sup\{u, v\}$ y $u \cdot v = \inf\{u, v\}$. De modo que para cualquier $\emptyset \neq X \subset B$:

$$\sum\{u \mid u \in X\} = supX \qquad \text{y} \qquad \prod\{u \mid u \in X\} = infX,$$

garantizándose que las cotas mínima superior y máxima inferior existen. Además $\sum\emptyset = 0$ y $\prod\emptyset = 1$. Con esto, se tiene la siguiente definición:

Definición (22): (Jech, 2006, p. 82)

Un álgebra booleana B es completa *si la suma y producto infinitos están definidos para todo $X \subseteq B$.*[75]

A continuación, requerimos considerar al universo *V* relacionado con un álgebra booleana. Lo anterior lo haremos a través de un modelo[76] de *V* que cumple ciertas propiedades

[75] Como dato extra, se dice que un álgebra booleana *B* es κ-completa si las sumas y productos existen para todo conjunto *X* tal que $|X| < \kappa$.
[76] Antes de seguir, es necesario considerar lo que significa que un modelo sea booleano-valuado, según (Jech, 2006, p. 206-207).

relacionadas a las álgebras booleanas. En otras palabras, el modelo de V que estamos buscando es uno donde se les puede asignar valores booleanos a los conjuntos. Aunque es esencial a los modelos de TC, el modelo booleano-valuado que buscamos es uno donde valen todos los axiomas de la teoría, por ejemplo:

$||\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y|| \leq \left||X = Y|\right|$ (Extensionalidad).

El universo booleano-valuado se define similar a los conjuntos bien-fundados o los constructibles de Gödel. Sin embargo, hay una diferencia sustancial en esta manera de postularlo, pues ahora a los elementos de los conjuntos se les asigna un valor booleano dado por las funciones booleanas del álgebra que subyacerá al universo. La definición es la siguiente:

Definición (23): (Jech, 2006, p. 209)

Dada B un álgebra booleana completa, el universo booleano valuado V^B es una generalización de V y se define por recursión sobre los ordinales como:

Sea B un álgebra booleana completa. Un modelo booleano-valuado Σ consta de un universo booleano A y dos funciones de dos variables con valores en B,
$\left||x = y|\right|$, $\left||x \in y|\right|$ *(los valores booleanos de = y ∈)*
que satisfacen lo siguiente:
(i) $\left||x = x|\right| = 1$,
(ii) $\left||x = y|\right| = \left||y = x|\right|$,
(iii) $\left||x = y|\right| \cdot \left||y = z|\right| \leq \left||x = z|\right|$,
(iv) $\left||x \in y|\right| \cdot \left||v = x|\right| \cdot \left||w = y|\right| \leq \left||v \in w|\right|$.
Como parte de la definición de modelo, se define lo que significa evaluar las fórmulas en Σ como sigue, tomando en cuenta que estamos trabajando con un conjunto completo de conectivas lógicas:
Para toda fórmula φ de n variables, su valor booleano $\left||\varphi(a_1, \dots, a_n)|\right|$ *con* $(a_1, \dots, a_n) \in A$ *es*
(a) Para fórmulas atómicas, toma el valor $\left||x = y|\right|$ *o* $\left||x \in y|\right|$;
(b) si φ es ¬ψ entonces $\left||\neg\psi(a_1, \dots, a_n)|\right| = -\left||\psi(a_1, \dots, a_n)|\right|$;
(c) si φ es $\psi \wedge \chi$ *entonces* $\left||\psi(a_1, \dots, a_n)|\right| \cdot \left||\chi(a_1, \dots, a_n)|\right|$;
(d) si φ es $\exists x\, \psi$ *entonces* $\left||\exists x \psi(x, a_1, \dots, a_n)|\right| = \sum_{a \in A} \left||\psi(a, a_1, \dots, a_n)|\right|$.

(i) $V_0^B = \emptyset$,

(ii) $V_{\alpha+1}^B =$ *el conjunto de todas las funciones f tales que* $dom(f) \in V_\alpha^B$ *y sus valores están en B,*

$V_\alpha^B = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^B$ *si* $\alpha \in LIM$,

(iii) $V^B = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^B$.

Aunque no expondré con total especificidad los detalles, el modelo booleano-valuado V^Bpresenta varias características importantes y rescata ciertas propiedades deseables para tener un modelo adecuado de la teoría. Por ejemplo, V^B preserva las definiciones de las operaciones booleanas primitivas para las relaciones de pertenencia e igualdad, aplicadas ahora a las fórmulas sobre los objetos del universo booleano-valuado *A* conjuntista, además de las propiedades que dichas operaciones cumplen. También se cumple que las fórmulas Δ_0 lo siguen siendo en su evaluación booleana, esto es: si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una Δ_0-fórmula entonces $||\varphi(\breve{x}_1, \ldots, \breve{x}_n)|| = 1$, donde recuérdese que $\breve{x}_i$ es el respectivo P-nombre del objeto *x*. Es importante destacar que todos los axiomas asumidos de TC siguen siendo válidos en V^B con las operaciones booleanas del álgebra *B*.[77]

Ahora podemos hablar del modelo booleano-valuado V^B en relación con el *forcing*. No es difícil ver que las extensiones genéricas de los modelos de TC cumplen con que los P-nombres obedecen las operaciones booleanas de *B* para toda fórmula φ. Dicho esto, podemos considerar las extensiones genéricas de modelos hechas con ultrafiltros:

[77] Ver Jech, (2006), p. 212-214 para conocer los detalles de esto último.

Teorema 7.- (Teorema 14.29, Jech, 2006, p. 216)

Si G es un ultrafiltro M-genérico sobre B, entonces para todo $x_1, \ldots, x_n \in M^B$,

$M[G] \vDash \varphi(x_1^G, \ldots, x_n^G)$ *si y sólo si* $\left||\varphi(x_1, \ldots, x_n)|\right| \in G$.

La demostración de este teorema es rutinaria y no se hará aquí (consiste en llevar a cabo una inducción sobre la complejidad de φ). Ahora se puede emplear el *forcing* para exhibir un modelo de TC donde no se cumple el axioma de elección. Veamos cómo se construye este modelo.

La idea, debida a Cohen, consiste en considerar un modelo de TC y al obtener la extensión genérica de dicho modelo, construir un submodelo de la extensión genérica en la que AC falle. Para hacer esto, se requieren algunos resultados vistos antes y considerar lo siguiente. Sea B un álgebra booleana completa y $\pi': B \to B$ un automorfismo, se define inductivamente sobre el rango de *x*, $\rho(x)$, el automorfismo $\pi: V^B \to V^B$ como:

(1) $\pi(\emptyset) = \emptyset$;

(2) $dom(\pi x) = \pi(dom(x))$ y $(\pi x)(\pi y) = \pi(x(y))$ $\forall \pi(y) \in dom(\pi x)$.

Hay que destacar que π es suprayectiva y que deja fijos a los P-nombres en cualquier expansión del modelo V^B, es decir: $\pi(\check{x}) = \check{x}$ $\forall x$.

Ahora, se verán los siguientes lemas debidos a Jech:

Lema 1.- (Lema 14.37, Jech, 2006, p. 221)

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_{n)}$ *una fórmula. Si π es un automorfismo sobre B, entonces*

$\forall x_1, \dots, x_n \in V^B$,

$||\varphi(\pi x_1, \dots, \pi x_n)|| = \pi(||\varphi(x_1, \dots, x_n)||)$.

Demostración.- Se hace por inducción sobre formación de fórmulas. Aquí se hará el caso de la pertenencia y los demás se hacen de modo similar:

$$||\pi x \in \pi y|| = \sum_{t \in dom(\pi y)} \left(||\pi x = t|| \cdot (\pi y)(t)\right) = \sum_{z \in dom(y)} \left(||\pi x = \pi z|| \cdot (\pi x)(\pi z)\right)$$

$$= \pi(\sum_{z \in dom(y)} (||x = z|| \cdot y(z))) = \pi\left(||x \in y||\right) \blacksquare$$

Lema 2.- (Lema 14.38, Jech, 2006, p. 222)

Si $i \neq j$, *entonces todo p fuerza* $\breve{a}_i \neq \breve{a}_j$.

Demostración.- Las condiciones de *forcing* para extender el modelo cumplen que para todo *p* existe un $q \supset p$ tal que *q* asigna el *i-ésimo* objeto y no el *j*-ésimo al objeto *a n-ésimo,* esto es: para un $n \in \mathbb{N}$, $q(i, n) = 1$ y $q(j, n) = 0$ ■

Lema 3.- (Lema 14.39, Jech, 2006, p. 222)

En M[G], sea N la clase de todos los conjuntos hereditariamente ordinal-definibles sobre A, N=HOD(A). No hay una función inyectiva $f: A \to OR$, *ordinal-definible sobre A.*

Esbozo de demostración.- En lugar de dar la demostración total de este lema, me limitaré a dar la idea de ella, pues este lema será muy útil para el teorema principal que a continuación expondré.

Si dicha función f existe, es inyectiva y ordinal-definible sobre A, entonces hay una sucesión finita $s =< x_0, \dots, x_k >\in A$ tal que f es ordinal-definible de s y A. Y como f-inyectiva, se cumple que todo $a \in A$ es ordinal-definible de s y A. Tómese $a \in A$ tal que $a \notin s$, como $a \in ORD[s, A]$, hay una fórmula φ tal que:

(i) $M[G] \vDash a$ como el único conjunto tal que $\varphi(a, \alpha_1, \dots, \alpha_n, s, A)$

para unos ordinales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ahora, usando los P-nombres respectivos en la extensión genérica del modelo, sea $\dot{a}$ el P-nombre de a, sean $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_k$ los P-nombres de $x_0, \dots, x_k$ y sea $\dot{s}$el P-nombre de s. Lo siguiente debe ser el caso:

(ii) Para todo p_0 que fuerce a $\varphi(\dot{a}, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n, \dot{s}, \dot{A})$, existen un $\dot{b}$ y $q \leq p_0$ tales que q fuerza a $\dot{a} \neq \dot{b}$ y $\varphi(\dot{b}, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n, \dot{s}, \dot{A})$.

Sea $p_0 \Vdash \varphi(\dot{a}, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n, \dot{s}, \dot{A})$. Hay $i, i_0, \dots, i_k$ y $p_1 \leq p_0$ tales que $p_1 \Vdash \dot{a} = \dot{a}_i, \dot{x}_0 = \dot{a}_{i_0}, \dots, \dot{x}_k = \dot{a}_{i_k}$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \neq i$ y $\forall m((j, m) \notin dom(p_1))$.

La estrategia para construir el modelo buscado es mostrar que si (i) es el caso, entonces (ii) no puede darse a la vez que (i) en la extensión genérica. Seguiré esta estrategia en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 8.- (Teorema 14.36. Jech, 2006, p. 221)

Hay un modelo de ZF en el que los números reales no pueden ser bien-ordenados. De modo que el axioma de elección es independiente de los axiomas de ZF.

Demostración.- Tomamos el automorfismo $\pi: V^B \to V^B$ que satisface (1) y (2) dado anteriormente. Por el Lema (1), sabemos que ese automorfismo respeta las operaciones booleanas en V^B. Luego, se cumple que para todos los P-nombres $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \; sii \; \pi p \Vdash \varphi(\pi\dot{x}_1, \dots, \pi\dot{x}_n)$$

Supóngase que el modelo base *M* satisface que *V* = *L*. Se expande *M* añadiendo una cantidad contable de números reales en la extensión genérica. Sea *P* el conjunto de funciones *p* tales que

(*) *dom(p) es subconjunto finito de* ω^2,

(**) $ran(p) \subset \{0,1\}$,

y sea $p < q \; sii \; p \supset q$. Tomamos *G* un conjunto de condiciones de *forcing* y para cada $i \in \omega$, sea $a_i = \{n \in \omega \mid \exists p \in G(p(i,n) = 1\}$ y $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$. Sean $\dot{a}_i$, $\dot{A}$ los P-nombres de a_i y *A* respectivamente:

(***) $dom(\dot{a}_i) = \{\check{n} \mid n \in \omega\}$ y $\dot{a}_i(\check{n}) = \sum\{p \in P \mid p(i,n) = 1\}$,

(****) $dom(\dot{A}) = \{\dot{a}_i \mid i \in \omega\}$, y $\dot{A}(\dot{a}_i) = 1$.

El Lema (2) hace notar que los P-nombres de los $\dot{a}_i$ son todos diferentes para cada objeto a_i. En la extensión del modelo *M[G]*, se hace *N* = *HOD(A)* y *N* cumple con ser una extensión transitiva del modelo *M* que se queda contenida en *M[G]*. Como *A* es conjunto de elementos subindexados por números naturales, se cumple que $A \in N$. Veamos que *A* no puede ser bien-ordenado en *N*, usando el Lema (3): Tomamos el automorfismo π que intercambia subíndices *i* y *j*, y $\pi(x) = x$ de otra manera. Esto hace que se obtenga el automorfismo $\pi: P \to P$ y todo $p \in P$ satisface:

(*****) $dom(\pi p) = \{(\pi x, m) |\ (x, m) \in dom(p)\}$, $(\pi p)(\pi x, m) = p(x, m)$.

Este automorfismo de *B*, satisface que

$\pi(\dot{a}_i) = \dot{a}_j, \pi(\dot{a}_j) = \dot{a}_i, \pi(\dot{a}_x) = \dot{a}_x\ \forall x \neq i, j, \pi(\dot{A}) = \dot{A}\ y\ \pi(\dot{s}) = \dot{s}$. Nótese que si $(j, m) \notin dom(p_1)$ entonces $(i, m) \notin dom(p_1)$ y esto se cumple para todo *m*, luego p_1 y πp_1 son compatibles. Hacemos $q = p_1 \cup \pi p_1$ y se tiene:

$p_1 \Vdash \varphi(\dot{a}_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dot{s}, \dot{A})$

y como se cumple que $\pi\check{\alpha} = \check{\alpha}$, $\pi(\dot{s}) = \dot{s}$ y $\pi(\dot{A}) = \dot{A}$, se tiene $\pi p_1 \Vdash \varphi(\dot{a}_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dot{s}, \dot{A})$

luego, se sigue

$q \Vdash \varphi(\dot{a}_i, \dots)\ y\ q \Vdash \varphi(\dot{a}_j, \dots)$

y por el lema (2), $q \Vdash \dot{a}_i \neq \dot{a}_j$. Lo anterior es una instancia de la parte (ii) del Lema (3), lo cual contradice (i) del mismo lema. Por tanto, dicho π no puede existir y *A* no se bien ordena en la extensión *N* ■

Así, se ha exhibido un modelo en que no se cumple AE.

1.2.2.- El programa de Gödel. En búsqueda de resolver problemas de indecidibilidad

En las secciones anteriores, he tratado de ofrecer con detalle algunos ejemplos de oraciones de TC que son independientes de la teoría. Cabe hacerse la pregunta: ¿Por qué es importante que se estudien con cuidado dichos enunciados especiales en TC? Más que sólo representar ventajas en el trabajo matemático con el uso de algunos de esos enunciados (como AE), hay otras razones por las que los enunciados merecen especial atención. Dos de dichas razones son las siguientes:

i) La consistencia de la teoría entra en juego cuando surgen enunciados indecidibles, pues su aceptación puede introducir contradicciones en la teoría en el siguiente sentido. Si consideramos una oración φ de la teoría que sea tal que ni ella ni su negación sean demostrables con los sólo los recursos teóricos a disposición, se debe tener la expectativa de lo que ocurrirá si se llega a introducir φ o su negación a la teoría, pues aunque fuera evidente que alguna de las dos oraciones entra en contradicción con algún axioma u otro resultado tenido en la teoría, puede ocurrir que alguna de ambas oraciones signifique un problema de consistencia no tan evidente en principio debido a que la teoría misma no resulta tan manejable siempre que alguna de las dos oraciones se presenta. Lo anterior puede plantearse a modo de la siguiente pregunta: Dada la obtención de una oración φ, ¿qué podemos esperar de $Teo(TC+\varphi)$, o de $Teo(TC+\neg\varphi)$? Para TC en general no es evidente con los enunciados indecidibles que se agreguen a la teoría lo que ésta será capaz de predecir u obtener como resultados. De aquí que su análisis sea, generalmente, complicado y riesgoso.

ii) TC vista como fundamento de las matemáticas debería aspirar a ser un área de estudio por lo menos lo más fuera de controversia posible en sus métodos de estudio y sus resultados alcanzados (aunque esto pueda ser, de hecho, al contrario, dado el reciente desarrollo de TC). Por lo que la presencia de los enunciados independientes siempre viene acompañada de cierta renuencia, pues el riesgo de introducir inconsistencias en la teoría está presente (por lo dicho en (i)). Y aunque ya se cuenta con algunos recursos importantes, como el Teorema 1 visto en este trabajo, para estudiar la consistencia de la teoría al añadirle algún enunciado particular, es bastante deseable contar con más recursos teóricos o metodológicos que faciliten las pruebas de consistencia que se hacen para los enunciados a introducir en la teoría.

En esta parte del trabajo, recalcaré la importancia de la última parte dicha en la parte (ii), a saber: el estudio de recursos teóricos y metodológicos en el desarrollo de pruebas de consistencia. Para ello, me enfocaré en recursos particulares que se han venido proponiendo en el desarrollo reciente de TC. Tales recursos vienen propuestos como axiomas adicionales para TC sobre cardinalidad y números cardinales especiales que no se demuestra que existen con las solas herramientas de TC (de ahí que se deban proponer como axiomas). Estos recursos son los Axiomas de Grandes Cardinales, pero para llegar a ellos, expondré una motivación importante surgida en el desarrollo reciente de TC debida a Gödel, conocida como el Programa de Gödel.

1.2.2.1.- Motivación del programa. Indecidibilidad y Realismo

Una parte importante de la obra de Gödel en la Teoría de Conjuntos está enfocada en el problema que surgió con el enunciado HC y el desarrollo de la teoría que se dio para tratar de resolverlo. Estudiando su postura acerca de oraciones indecidibles en la teoría de conjuntos, parece que Gödel pensó en la indecidibilidad en más de un sentido durante algunos años. Es importante señalar los modos en que se entiende la indecidibilidad de las oraciones para comprender hasta dónde se limitan los recursos teóricos y metateóricos (en estos últimos, se considera por ejemplo nuestra capacidad de razonamiento), y para Gödel la indecidibilidad la entendió primero como

*) Indecidibilidad débilmente absoluta: *Oraciones indecidibles en ZFC e informalmente no es evidente su verdad a través de analizar la demostración de su indecidibilidad*,

la indecidibilidad absoluta entendida así es débil porque hay cabida a zanjar la cuestión sobre su valor de verdad mediante algún recurso formal, como expandir la teoría con nuevas nociones o axiomas para trabajar tales oraciones en este nuevo nivel, o reflexionar exteriormente de la teoría sobre las oraciones para convencernos en modo informal con algún razonamiento sobre su verdad o falsedad, de modo que el aceptar o rechazar las oraciones en este respecto no resulta una labor imposible. Pero nada de lo anterior parece ocurrir con la siguiente forma

**) Indecidibilidad fuertemente absoluta: *Oraciones indecidibles en ZFC no decididas en ninguna extensión evidente de ZFC, y no pueden ser decididas por razonamiento humano,*

pues esta forma de indecidibilidad absoluta es extrema, en sentido de que no podríamos llegar a saber el valor de verdad de las oraciones indecidibles así vistas por ningún método a nuestra disposición.[78] Algo más que podemos concluir de aceptar estas formas de indecidibilidad es que (**) parece fijar una suerte de cota sobre la capacidad de nuestras teorías para zanjar cuestiones sobre decidibilidad, e incluso nuestra capacidad de raciocinio sería ineficaz para tratar estos problemas desde una perspectiva externa a nuestras teorías. Gödel parecía tener una idea de la indecidibilidad absoluta más acorde a (*) durante el periodo posterior a sus resultados de incompleción (esto es, hasta 1940), pero su idea de indecidibilidad absoluta era más acorde a (**) en la época posterior a 1951.[79]

El enunciado HC es difícil de tratar y requiere un análisis lo más preciso posible para escudriñar todo su significado y obtener su valor de verdad. Consciente de ello, Gödel desarrolló una forma alternativa de estudiar los conjuntos que estuviera fundamentada en las nociones más primitivas de la teoría, de las cuales quizá la más crucial sea la de "ser conjunto de". Con esta noción y los axiomas de las operaciones básicas de teoría de conjuntos, Gödel crea la teoría de conjuntos basada en el universo constructible L y el axioma $V=L$, y como ya hemos visto antes en este trabajo,[80] este desarrollo de la teoría de conjuntos proporciona una respuesta afirmativa a la cuestión de la indecidibilidad de HC, siendo el enunciado verdadero en esta teoría. De modo que la Teoría de Conjuntos adquiere una versión que hace consistente HC con la teoría básica y el agregado teórico (los

[78] Para más información y más formas de indecidibilidad absoluta, ver Van Aten, M., Kennedy J. (2009), p. 3.
[79] Cfr. *Ibíd.* P. 5.
[80] Ver sección 1.2.1.1.1 de este trabajo.

constructibles, en este caso). Sin embargo, para Gödel esto no es todo lo que el universo de los constructibles y el axioma $V=L$ proporcionan. Este modo de ver y trabajar a la teoría de conjuntos es compatible con la postura filosófica de Gödel acerca de los objetos que estudia la teoría de conjuntos y las matemáticas. Gödel es un partidario del Realismo en matemáticas, más en específico, apoya la existencia objetiva del universo conjuntista y los objetos que lo habitan, y podemos estudiar ese universo objetivo mediante la Teoría de Conjuntos y profundizar en dicho estudio con los desarrollos teóricos adquiridos. La posición realista gödeliana sostiene la existencia de un único universo conjuntista salvo isomorfismo, es decir que otros posibles universos conjuntistas tienen el mismo tamaño y forma que el universo en el que Gödel descansa su teoría. Además, esto compromete a Gödel con una postura realista en valor de verdad de las oraciones. Cada oración en la Teoría de Conjuntos tiene un cierto valor de verdad que llegamos a conocer mediante su estudio teórico, y como el universo conjuntista es una totalidad dada, ciertas oraciones que van surgiendo con el desarrollo de la teoría de conjuntos son indecidibles debido a que la teoría no ha sido desarrollada lo suficiente. De modo que, al dar respuesta a la indecidibilidad de dichas oraciones, lo que se está haciendo es encontrar el desarrollo de la teoría que permite conocer el valor de verdad que tienen.

En este punto se deben tener ciertas precauciones, pues hay maneras de atacar el realismo gödeliano, y una de ellas es a través de la metodología en Teoría de Conjuntos. Esta forma de objetar el punto de vista gödeliano respecto al realismo en valor de verdad es como sigue: si el universo de los conjuntos ya existe objetiva e independientemente de la mente humana, ¿cómo puede ser que la teoría se desarrolle de modo tal que admite extensiones donde ciertas oraciones que eran indecidibles resultan verdaderas, y otras extensiones donde las mismas oraciones resultan falsas? Después de todo, en este trabajo hemos analizado el caso de la oración AE o la misma HC, oraciones que son ciertas en una extensión específica y falsas en otra extensión. Pero este tipo de objeciones no proceden, pues el desarrollo formal de la teoría debe tomarse aparte de la interpretación semántica que se le dé (aunque sea innegable la relación que hay entre los dos). Las extensiones de la Teoría de Conjuntos en que las oraciones indecidibles son decididas, vía métodos como la utilización del Teorema 1 de este trabajo, pueden ser muy variadas y no compatibles entre sí, y esto sólo afecta nuestro entendimiento del universo conjuntista objetivo e independiente de nuestra comprensión de él. De esto debemos recalcar la importancia de distinguir las nociones de consistencia y valores de verdad, y también la separación que hay entre el desarrollo de la Teoría de Conjuntos y el universo conjuntista independiente de nuestra capacidad racional, pues el universo no se modifica cuando se altera la teoría.[81]

El punto de vista realista de Gödel sobre el universo conjuntista es muy importante dentro del desarrollo que él mismo propuso dentro de la Teoría de Conjuntos. Siendo más específicos en la postura de Gödel, él sostiene que el universo conjuntista es descrito por la jerarquía cumulativa de los conjuntos que se construye recursivamente. No obstante, Gödel no toma exactamente las herramientas proporcionadas por la noción de conjuntos bien fundados, sino que procede a definir una maquinaria nueva sobre la cual construir la jerarquía cumulativa basada completamente en las nociones más primitivas dentro de la teoría, como la de "conjunto de" y las operaciones involucradas en los axiomas básicos de la teoría. Esta maquinaria es la que da la base a los conjuntos constructibles que se forman desde la parte "más baja" del universo conjuntista, a saber, con el conjunto vacío, y tomando la clase de los números ordinales se procede a definir recursivamente un funcional

[81] Ciertamente, hay otra variedad de objeciones que se le pueden hacer al realismo gödeliano, pero un estudio minucioso de ellas nos aleja de los propósitos de este trabajo.

F de los ordinales en el universo conjuntista que genera todos los niveles del universo ordenados de acuerdo con el orden de los ordinales. Cada nivel en el edificio conjuntista es indexado por un cierto número ordinal y los conjuntos constructibles cuya cardinalidad es dicho número son acomodados en ese nivel (con la ayuda de nociones como la de tipo de orden de un conjunto y rango). Empezando a construir los conjuntos desde la base en la jerarquía, se va escudriñando la complejidad del universo conjuntista. Pero hay puntos donde la teoría desarrollada no permite la comprensión de ciertos enunciados que surgen (los indecidibles), y es aquí donde el realismo de Gödel le da el sustento filosófico al carácter indecidible de dichos enunciados (nótese que el carácter matemático de la indecidibilidad es justo la falta de recursos teóricos que permitan decir dichos enunciados): la Teoría de Conjuntos no está lo suficientemente desarrollada para decidir sobre dichos enunciados porque la teoría no da una descripción completa del universo conjuntista. Gödel piensa que la aparición de dichas oraciones indecidibles se debe a que la teoría no está provista de los axiomas que permitan a la teoría dar una descripción completa del universo conjuntista:

> "[…] los axiomas correctos de la teoría de conjuntos no han sido descubiertos […] Él (Gödel) sin duda sostiene que nadie ha dado una descripción básica adecuada de ese mundo de los conjuntos en el que él cree – una descripción que nos permitiría decidir los problemas fundamentales de cardinalidad tales como la Hipótesis del Continuo de Cantor […] Yo [Menger] nunca le escuché dar indicaciones sobre dónde él esperaba encontrar tales axiomas". (Van Aten, M., Kennedy J. (2009), p. 15)[82]

[82] "[…] the right axioms of set theory had not yet been discovered […] He undoubtedly meant that no one had given an adequate basic description of that world of sets in which he believed –a description that would permit us to decide the fundamental problems of cardinality such as Cantor's continuum hypothesis […] I [Menger] myself never heard from him any indications about where he expected to find such axioms. ". Esta es una nota tomada de Menger en *Menger's Reminicenses,* (1994) p. 222. La traducción es mía.

Pese a esa limitante, Gödel sostiene que la teoría está abierta a ser expandida con nuevos axiomas para describir una porción cada vez mayor del universo conjuntista, y con esto comenzar a decidir sobre cuestiones como las motivadas por oraciones como HC o AE. La postura realista de Gödel da un empuje al desarrollo de la teoría de conjuntos sosteniendo que, por la presencia de HC y otras oraciones particulares, somos conscientes de que nuestro recurso teórico para estudiar el universo conjuntista no es suficiente, y esta es una buena razón para ver que las teorías de conjuntos actuales (y la desarrollada en el época de Gödel) pueden ser extendidas con nuevos axiomas que permitan comprender mejor la estructura y comportamiento del universo de los conjuntos:

"su indecidibilidad [la de las oraciones indecidibles] de los axiomas conocidos hoy en día sólo puede significar que esos axiomas no contienen una descripción completa de esta realidad [el universo conjuntista] […] los axiomas de la teoría de conjuntos no forman un sistema cerrado en sí mismo, sino, por el contrario, el concepto mismo de conjunto en que están basados sugiere su extensión por nuevos axiomas." (*Ibid.* P. 17-18)[83]

Sin embargo, hay otra razón por la que esta "búsqueda de nuevos axiomas" para la teoría debe llevarse a cabo. Como vimos antes con los puntos (*) y (**) sobre la indecidibilidad absoluta, no es evidente que las oraciones que son indecidibles en el sentido de (**) (y hasta cierto punto, las que caen en (*)) caigan, en principio, en alguna de las dos categorías al analizarlas con nuestra teoría una vez. Es después de un proceso más o menos complicado, dependiendo de la oración, que nos damos cuenta de su indecidibilidad.

[83] "its undecidability from the axioms as known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality […] the axioms of set theory by no means form a system closed in itself, but, quite on the contrary, the very concept of set on which they are based suggests their extension by new axioms.". Estas son notas tomadas de Gödel en su *Collected Works*. La traducción es mía.

¿Cómo la indecidibilidad de ciertas oraciones depende de la teoría? Nuevamente la concepción realista gödeliana sirve para dar razón de esto, pues se alude a que la indecidibilidad de ciertas oraciones está fuertemente ligada a la incompleción conceptual de la teoría, además de que está es otra razón para sostener que el universo conjuntista no es totalmente descrito por la teoría: "La sugerencia, entonces, es que los sistemas usuales de teoría de conjuntos tales como ZFC, además de ser formalmente incompletos como es mostrado en los teoremas de compleción, son también incompletos en otro sentido más básico; se les puede llamar "conceptualmente incompletos."".[84] La Teoría de Conjuntos no es una teoría conceptualmente acabada en sentido que nos provea de una explicación completa del universo conjuntista, y como evidencia de esto se tiene la carente comprensión de sus nociones básicas. Esto debe motivar la búsqueda de los recursos teóricos adecuados que permitan obtener una teoría más sofisticada y potente.[85]

El carácter epistémico que Gödel le atribuye al trabajo hecho con la teoría puede verse como una motivación para extender la Teoría de Conjuntos. Como se sostiene un realismo fuerte de los objetos que estudia la teoría, es importante que dicha teoría nos

---

[84] "The suggestion, then, is that the usual systems of set theory such as ZFC, as well as being formally incomplete as shown in the incompleteness theorems, are also incomplete in another, more basic sense; they may be called \conceptually incomplete."". (*Ibid.* P. 17) La traducción es mía.

[85] Hay algunas cuestiones que surgen acerca de este punto sobre el realismo que Gödel sostiene. A) Se habla del objetivo de expandir la teoría para incrementar su poder descriptivo del universo conjuntista al resolver cuestiones de indecidibilidad, ¿qué se puede decir acerca de la indecidibilidad fuertemente absoluta definida en (**)? Gödel ciertamente admite que hay oraciones fuertemente indecidibles en la teoría (cfr. Feferman, S. (ed.), (1995), p.103), así que en principio no parece que podamos aspirar a comprender toda oración que puede surgir en la teoría sin importar cómo tratemos de expandir nuestra teoría, mucho menos llegar a comprender en su totalidad ese universo conjuntista en que Gödel cree, pues nuestras propias capacidades intelectuales constituyen una fuerte limitación en nuestro intento por entender el universo de los conjuntos. B) Con lo dicho en (A), ¿cuál es el alcance de extensión de la Teoría de Conjuntos y cómo podemos conocerlo? Los teórico-conjuntistas manipulan la teoría, la estudian y la enriquecen según los resultados obtenidos mediante la introducción de nuevas nociones, pero ¿cómo se sabe cuándo se está ante una cuestión fuertemente indecidible? Las extensiones en la teoría no se limitan ante una cierta oración sospechosa, sino que tienden a abundar alrededor de ella, y en principio no parece haber un criterio para señalar que ninguna dicha extensión servirá para decidirla. De modo que se requiere hacer un estudio más profundo sobre esa distinción de indecidibilidad absoluta fuerte/débil.
Aún no tocaré estas cuestiones. Serán analizadas con mayor detenimiento en una sección posterior de este trabajo.

permita obtener un entendimiento lo más claro posible de ellos. La realidad independiente del universo conjuntista y su comportamiento sólo pueden ser estudiados con una teoría suficientemente potente para clarificar con detalle y rigor lo que esa realidad es. Nuestro mejor acceso al universo de los conjuntos es mediante la Teoría de Conjuntos, y (al menos durante la época de Gödel) ZFC es una de las versiones con mayor ventaja explicativa, pues aunque tiene recursos limitados cuando se intenta decidir sobre oraciones como HC, resulta evidente que expandir la teoría es una opción bastante atractiva no sólo para buscar decidir sobre las cuestiones de indecidibilidad, sino también para comprender más profundamente el objeto mismo de estudio de la teoría. Para los que aceptan el realismo gödeliano, se tiene la disposición de reconocer ciertas extensiones de la teoría en favor de otras cuando dichas extensiones proporcionen un mayor y mejor entendimiento del universo conjuntista. Cuáles sean los criterios para decidir entre tales extensiones teóricas dependerá de los compromisos teóricos, heurísticos y filosóficos que los simpatizantes de este realismo reconozcan como legítimos.

1.2.2.2.- El programa de Gödel. Criterios para elegir nuevos axiomas

Con lo dicho anteriormente, una de las propuestas de Gödel con su programa consiste en la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría que sirvan para completarla, y la teoría así expandida proporcione un estudio más completo y preciso del universo conjuntista. Las oraciones indecidibles lo son porque la teoría no es lo suficientemente fuerte para decidir sobre ellas o sus negaciones, pero al añadir nuevos axiomas se obtienen recursos adicionales que pueden ayudar a decidir sobre dichas oraciones. No obstante, los recursos extras añadidos con nuevos axiomas no pueden ser completamente irrestrictos, pues buscamos obtener un entendimiento lo más claro y extenso posible del universo conjuntista. ¿En qué se basa la elección de nuevos axiomas que extienden la teoría de conjuntos? En este punto entramos en consideraciones más bien epistemológicas, pues se trata de justificar la elección de axiomas para la teoría.

Antes de dar los criterios que justifican la elección de los axiomas, debemos exponer cómo los axiomas se relacionan con la descripción teórica del universo conjuntista. El realismo gödeliano sobre el universo de los conjuntos compromete con cierta visión epistemológica dentro de la Teoría de Conjuntos, pues si el universo es objetivo e independiente de los individuos entonces debería de haber una explicación de cómo es que se puede tener idea de ese universo y cómo puede la teoría desarrollada dar cuenta de él. A esto, Gödel introduce con su programa una noción de intuición especial que permite dar cuenta de los objetos en el universo conjuntista y sus relaciones, llamada *intuición matemática*. Esta forma de intuición es la que permite percibir los objetos del universo conjuntista y las relaciones que guardan entre ellos: "[…] la intuición matemática es similar al sentido físico en tanto que ella le permite a uno percibir relaciones entre conceptos. […] Gödel [32, p. 354, pie de nota 45] menciona la "percepción directa de los objetos matemáticos" como una de las razones para aceptar su existencia.".[86] Además, la postura realista de Gödel y sus resultados de incompleción le llevan a creer en la existencia de este tipo especial de intuición, pues los sistemas formales mínimamente adecuados para

[86] "[…] mathematical intuition is likened to a physical sense insofar as it enables one to perceive relationships between concepts. […] Gödel [32, p. 354, footnote 45] mentions the "direct perceptibility of mathematical objects" as one of the reasons for asserting their existence.". (Hauser, K., "Gödel's program revisited. Part I: The Turn to Phenomenology" en *Bulletin of Symbolic Logic,* vol. 12, 2006. P. 544-545) La traducción es mía. Nótese que la segunda parte de esta nota sugiere que Gödel tiene en mente que la intuición matemática no se restringe sólo al universo conjuntista, sino que cubre a todos los objetos de estudio de las matemáticas.

expresar la parte básica de la aritmética elemental tienen oraciones que no se demuestran dentro del sistema, pero reconocemos como verdaderas mediante un proceso de reflexión externo al proceso de demostrabilidad que dichos sistemas asumen (lo cual ya hemos expuesto anteriormente). Según Gödel, es este tipo de fenómenos matemáticos los que se nos presentan especialmente con la intuición matemática, pues, aunque se reconoce o "percibe" cierta relación entre objetos matemáticos (en el caso del fenómeno de incompleción, una oración que afirma tal propiedad de sí misma), no hay modo de representar dicha relación sin la presencia de problemas. De aquí que la intuición matemática juegue un papel importante en el estudio de los objetos de la teoría, e incluso de la matemática en general.[87]

Ahora ya podemos enfocarnos en examinar los criterios que Gödel propone para justificar los axiomas nuevos que se puedan añadir a la teoría. La aceptabilidad de nuevos axiomas depende de: i) su capacidad de explicar algún comportamiento esencial de los conjuntos en el universo tomando como base nociones básicas como la de "conjunto de", o ii) el éxito teórico-práctico que dicho candidato a axioma tiene al usarlo dentro de la teoría. Veamos a detalle estos criterios.[88]

El papel que tiene una justificación en sentido de (i) queda mejor establecido al considerarlo en relación con la intuición matemática especial que Gödel motiva con su

---

[87] Por ser un tema de discusión ortogonal al propósito de este trabajo, no daré un estudio más detallado de esa "intuición matemática" que Gödel asume en su programa. Este es uno de los elementos más controversiales de la filosofía de Gödel, pues es un elemento esencial para compatibilizar su punto de vista realista del universo con el estudio matemático. Por así decirlo, la intuición matemática es el puente que se tiene entre raciocinio y la teoría con el universo matemático objetivo e independiente. Gödel mismo no tiene problema en adoptar este tipo especial de intuición, pues la ve como una forma similar a la intuición física, pero especialmente enfocada a captar el universo de los conjuntos y demás objetos matemáticos. Por esto, él mismo no da mucha más justificación de la intuición matemática. Cabe señalar que una cuestión interesante al respecto de esta forma de intuición es si es igual en todos los individuos, o puede variar de sujeto a sujeto. Para profundizar en el tema de la intuición matemática, se recomienda Van Aten, M., Kennedy J. (2009) y Hauser, K., (2006).

[88] Una parte donde Gödel habla de estos criterios y la diferencia entre ellos es en Gödel (1947), p. 362-364.

programa realista. ¿Un nuevo axioma propuesto trata sobre la postulación de alguna propiedad o relación entre los conjuntos que no se adquiere desde la sola teoría?, ¿Acaso el nuevo axioma motiva alguna noción conjuntista expresable sólo en términos de nociones elementales como "conjunto de"? La aceptación de un nuevo axioma cuya justificación está encaminada a responder preguntas como las anteriores obedece a un criterio más bien interno de la teoría misma. Y el mismo Gödel tenía la convicción de que entre nuestros mejores recursos para justificar axiomas de esta naturaleza tenemos la intuición matemática, la cual nos ayuda a entender y explicar el contenido de tales candidatos a axiomas. Además, al ser un tipo especial de intuición, permite que haya una revisión constante de la teoría resultante con los nuevos axiomas en vista de que la presencia de nuevos enunciados indecidibles se suscita (es decir, no se llega la tesis más fuerte de que la intuición matemática sea un criterio último e infalible para aceptar o no ciertos candidatos a axiomas).[89]

Así que, cuando un candidato a axioma describe alguna característica o propiedad de los conjuntos, o describe alguna característica del universo conjuntista procurando involucrar las nociones básicas como la de "conjunto de", se dice que el candidato a axioma obedece el criterio interno a la teoría. Los axiomas propuestos bajo este criterio establecen una justificación formal de las intuiciones que se tienen sobre el universo conjuntista y sus objetos, y en dichas intuiciones usualmente se envuelven las nociones básicas como "conjunto de" relacionadas de alguna manera que es en principio preteórica, y el candidato a axioma es justo el intento por formalizar esas formas preteóricas captadas. Un axioma nuevo que cumpla el criterio interno usualmente permite obtener nuevas relaciones entre

---

[89] Gödel defiende esta forma interna de justificar axiomas en su obra entre 1938 y 1974, que es recogida en Gödel, *Collected Works* (ed. Feferman), 1990.

conjuntos o señala nuevas relaciones y comportamientos en el universo conjuntista. Más adelante en este trabajo, veremos que este criterio de elección de nuevos axiomas está estrechamente relacionado con la propuesta teórica que se pretende abordar.

Por otra parte, si el candidato a axioma es propuesto no como medio de formalizar alguna intuición preteórica sobre los conjuntos o el universo conjuntista, sino porque resulta que su empleo en la teoría expande los resultados, entonces dicho candidato a axioma obedece un criterio externo a la teoría. Los axiomas introducidos bajo tal criterio externo son fructíferos para la teoría resultante al añadirlos, pues hay un enriquecimiento de consecuencias que se obtienen por añadir dichos axiomas: puede que los nuevos axiomas ayuden a decidir cuestiones que permanecían irresolubles en la teoría original, o pueden establecer alguna herramienta o método novedoso y útil para trabajar con los conjuntos y descubrir nuevas relaciones entre ellos y el universo conjuntista (el *forcing* es un buen ejemplo de este tipo de métodos), o introducen nuevos conceptos formales a la teoría que la fortalecen o facilitan el trabajo en la teoría (incluso llegando a tener consecuencias importantes en otras áreas de la matemática, como AE), etc. Para Gödel, el criterio externo de justificación se asemeja a la postura verificacionista que adoptan las ciencias empíricas, pues, así como en una teoría física se someten a prueba ciertas hipótesis y, dependiendo del éxito dentro de la teoría física, se convierten en nuevos principios con consecuencias verificables, así los candidatos a axiomas en Teoría de Conjuntos son aceptados por la riqueza en resultados que se obtiene en la teoría al añadir esos axiomas. Sin embargo, el criterio externo sirve para introducir axiomas nuevos a la teoría por los beneficios en resultados que la teoría obtiene por añadirlo, lo cual puede no estar relacionado con establecer algún entendimiento sobre los objetos primarios del universo conjuntista y las relaciones intrínsecas que guardan, además que puede darse la ocasión en que los candidatos a axiomas fallen al proponer nuevos objetos, relaciones o métodos en la teoría debido a que de hecho no funciona como se propone. Con esto, se sostiene que el criterio externo no tiene el mismo peso justificativo que el interno al adoptar nuevos axiomas.[90]

Ahora que ambos criterios fueron establecidos, podemos resumir el programa de Gödel como sigue. La Teoría de Conjuntos como disciplina que pretende fundamentar la matemática es conceptualmente incompleta, y muestra de ello es la presencia de oraciones indecidibles (débil o fuertemente) a partir de los axiomas básicos de la teoría. Por lo que resulta indispensable enriquecer la teoría con axiomas adicionales para resolver tales problemas de indecidibilidad. Como se asume una postura platónica realista sobre los objetos de estudio de la teoría, es decir que los objetos de estudio de las matemáticas, en particular aquellos que competen a la teoría, pertenecen a una realidad que existe independientemente de los individuos, la teoría debe proporcionar información y un estudio lo más detallado posible de dichos objetos y las relaciones que guardan en ese universo independiente. Además, resulta vital para la postura realista del universo de objetos matemáticos que nuestro acceso epistémico es posible gracias a que tenemos una forma especial de intuición que nos permite captar no sólo los objetos que habitan en dicha realidad objetiva, sino que esa intuición nos provee de una cantidad considerable de información sobre las relaciones que guardan entre ellos y cómo repercute lo que ocurre con los objetos más básicos del universo en aquellos que se hallan determinados por dichos objetos básicos (esto porque no sólo se asume que el universo conjuntista es objetivo, sino que incluso tiene la forma de la jerarquía cumulativa descrita con ayuda de la clase de

[90] Nuevamente, que el criterio interno pese más que el externo al momento de justificar la elección de nuevos axiomas depende fuertemente de la intuición matemática y el realismo gödeliano asumido. Es bastante notorio dentro de la postura realista de Gödel la adopción de nociones de la fenomenología, en particular la de Husserl, para tratar de profundizar y fortalecer su postura realista y la existencia de la intuición matemática. Para un análisis y discusión más profundos de este punto, ver Hauser, K., (2006), y Gutiérrez, C., (2015).

números ordinales y el esquema general de recursión). Así que se propone la búsqueda de axiomas nuevos para la teoría que ayuden en el entendimiento del universo de objetos matemáticos mediante la sistematización formal de las intuiciones preteóricas que tenemos de dichos objetos y las relaciones entre ellos.

Estos axiomas nuevos se adoptan luego de que cumplen al menos uno de los siguientes criterios:

i) Los axiomas proporcionan una elucidación de las nociones más básicas de la teoría, como la de “conjunto de”, estableciendo que los objetos de la teoría están en determinadas relaciones relevantes para hacer un estudio más completo y detallado de algún aspecto particular de dichos objetos, o algún rasgo del universo, usualmente intuidos pre teóricamente.

ii) Los axiomas son tales que su uso complementa la teoría y la capacita a obtener nuevos resultados que sin dichos axiomas no se consiguen o resultaría extremadamente complicado obtenerlos. Los axiomas así aceptados pueden decidir cuestiones de indecidibilidad no resolubles en la teoría original, o pueden proponer alguna noción o método de trabajo útil en el tratamiento de problemas existentes en la teoría, etc. Aunque los axiomas así adoptados pueden no agrandar el entendimiento del universo conjuntista, también son apoyados por alguna idea preteórica.

1.3.- Conclusiones.

El estudio hecho hasta ahora nos informa de cómo se ha efectuado el quehacer teórico-conjuntista en épocas recientes de la mano con el desarrollo de la lógica y sus recursos para hacer el trabajo más riguroso y preciso en el estudio de propiedades como la consistencia de la teoría. No obstante, se presentan ciertas oraciones especiales cuyo análisis no es satisfactorio con los solos axiomas de la teoría, resultando que son independientes en términos de la demostrabilidad de ellas o sus negaciones. Gödel sostiene que la presencia de dichas oraciones es resultado de la incompleción de la teoría en cuanto a recursos formales, y propone un programa de búsqueda de nuevos axiomas basado en una visión realista del objeto de estudio de la teoría de conjuntos. Las conclusiones que tenemos ahora son:

(1) Se sabe que la Teoría de Conjuntos es una rama de la matemática fuertemente ligada a la lógica. El trabajo teórico-conjuntista se hace más preciso y riguroso con el empleo de sistemas formales, de los cuales, los elaborados con lenguajes de 1er orden son ampliamente estudiados y usados por su versatilidad y propiedades lógicas deseables, como definiciones precisas de validez y consecuencia lógica, además de ser consistentes, correctos y completos. En épocas recientes, se pone una atención especial a la consistencia de la teoría y se estudia en relación con oraciones de la teoría cuyo agregado puede seguir haciendo consistente a la teoría o no. (Secciones 1.1 a 1.1.3)

(2) La presencia de algunas oraciones "especiales" en la teoría hace que estudiarlas sea muy difícil, a pesar de contar con los recursos lógicos mencionados antes. Dichas oraciones son independientes de la teoría en sentido de que no se puede dar una demostración de ellas o sus negaciones, haciéndolas indecidibles en la. (Secciones 1.2 y 1.2.1)

Algunas de esas oraciones son:

a) La Hipótesis del Continuo (HC) es una oración de la teoría que expresa que no existen conjuntos cuya cardinalidad sea estrictamente mayor a la del conjunto de los números naturales y estrictamente menor a la del conjunto de los números reales. Controversial desde la época cantoriana de la teoría de conjuntos, esta oración ha sido objeto de mucho estudio matemático. Existen modelos de la teoría de conjuntos donde HC junto con los axiomas básicos forman una teoría consistente, como el del universo constructible gödeliano y el axioma $V=L$; y modelos donde la negación de HC junto con los axiomas básicos también forman una teoría consistente, como un modelo de la teoría en su forma ZFC expandido con *forcing*. (Secciones 1.2.1.1 a 1.2.1.1.2)

b) La consistencia de TC (Cons(TC)) es una oración especial de la teoría de conjuntos que resulta ser indecidible en la teoría misma cuando se analiza a la teoría desde una perspectiva metateórica. Gödel llegó a que dicha oración es indecidible por sus estudios de sistemas formales que reúnen ciertas características importantes, como ser correctos y consistentes, y que tienen un grado mínimo de poder expresivo de la parte elemental de la aritmética básica y cuentan con una noción aceptable de demostrabilidad. Mediante la codificación de las expresiones del lenguaje formal del sistema a números naturales (definiendo algunas funciones y relaciones específicas), es posible que en dichos sistemas se construya una oración que exprese de sí misma no ser demostrable. Aprovechando las propiedades de corrección y consistencia, y haciendo uso de la autorreferencia de dicha oración, se llega a que esa oración debe ser indecidible en ese sistema formal y este es el Primer Teorema de Incompleción. Tomando dicha oración, se construye la expresión sobre la consistencia del propio sistema formal y se obtiene que si la oración sobre la consistencia del sistema es demostrable entonces debería serlo la oración indemostrable construida en el primer teorema, lo cual no ocurre. Entonces, y como se toma el sistema consistente, la oración sobre la consistencia de la teoría y su negación son indemostrables en la teoría misma, por lo que es indecidible en ese sistema, y esto constituye el Segundo Teorema de Incompleción.

Como el proceso anterior es reproducible en aquellos sistemas mínimamente equipados como TC, Cons(TC) es indecidible. (Sección 1.2.1.2)

c) El Axioma de Elección (AE) es una oración que es particularmente importante debido a la proliferación de resultados alcanzados no sólo en TC, sino también en otras áreas de las matemáticas. Asevera la existencia de funciones de elección que no se pueden definir, y resulta que la teoría es consistente si esa oración o su negación se añaden a los axiomas. Sabemos que con el axioma $V=L$ es posible dar una demostración de Cons(TC + AE); usando el *forcing*, se halla una extensión genérica de un modelo de la teoría de conjuntos tal que se obtiene Cons(TC + ¬AE). De lo anterior se sigue que AE es independiente de la teoría, haciéndolo indecidible. (Secciones 1.2.1.3 a 1.2.1.3.2)

(3) La teoría es vista como un fundamento importante de las matemáticas, así que la presencia de oraciones indecidibles (que introducen duda sobre nociones importantes de conjuntos, como cardinalidad y existencia, o incluso si son útiles en el quehacer teórico-conjuntista) en la teoría compromete la consistencia de ésta, pues en principio la oración indecidible puede o resultar beneficiosa para la teoría (por ejemplo, como recurso de trabajo) o introducir contradicción en la teoría. Así que resulta indispensable analizar recursos que potencien la teoría para trabajar dichas cuestiones de indecidibilidad. (Sección 1.2.2)

(4) Oraciones como la misma HC han ocupado el trabajo teórico-conjuntista por bastante tiempo, e incluso han dado surgimiento a nuevos estudios sobre las propiedades metalógicas de las teorías, siendo la distinción de niveles de indecidibilidad absoluta débil y fuerte uno de tales estudios. Gödel sostuvo que la presencia de oraciones indecidibles en la teoría se debe a que la teoría no es formalmente cerrada en sentido que posea todos los axiomas pertinentes para analizar cualquier oración que surja, por lo que la teoría es conceptualmente incompleta. Él apoya esta idea con su postura realista respecto a los objetos de estudio de la teoría, la cual consiste en sostener que el universo conjuntista y las relaciones entre sus objetos existen independientemente de que los individuos los reflexionen. El universo así pensado posee ciertos elementos fundamentales (como el conjunto vacío) de los cuales se construye el resto de los objetos y las relaciones entre ellos, y la teoría describe esto mediante las nociones conjuntistas básicas como la de "conjunto de", hasta la parte más desarrollada de la teoría que habla sobre los objetos superiores de estudio. Esta postura realista supone una estructura del universo constructiva en sentido de que los objetos más simples y primarios subyacen al resto de la estructura conjuntista, por lo que se vuelve natural pensar a la jerarquía cumulativa como la explicación teórica de la estructura del universo. Esta visión realista del universo hace a Gödel proponer la maquinaria de los conjuntos constructibles y su axioma $L=V$ como complemento de la teoría, con el propósito de que en ésta disminuya la incompleción conceptual. (Sección 1.2.2.1)

(5) Ya que la realidad de los objetos matemáticos es independiente de los individuos, Gödel sostiene que tenemos una forma especial de intuición que nos permite acceder a esa

realidad y percibir sus objetos y las relaciones entre ellos, llamada intuición matemática. Esta intuición nos permite percibir el universo conjuntista, la teoría nos proporciona el andamiaje formal para moldear esas percepciones y convertirlas en los resultados que se obtienen al trabajar esas percepciones con la maquinaria axiomática. Esta intuición especial nos permite percibir las relaciones y comportamiento de los conjuntos.

Así, el programa de Gödel consiste en la búsqueda de nuevos axiomas para la Teoría de Conjuntos con los cuales se resuelvan los problemas de indecidibilidad que surgen. La propuesta de axiomas está mediada por la intuición matemática, y la admisión de axiomas obedece al menos uno de los siguientes criterios: i) El *criterio interno* evalúa los candidatos a axiomas por su efectividad en proponer y explicar nuevas formas de entender las nociones básicas de la teoría como la de "conjunto de", o postular nuevas formas de entender la estructura conjuntista del universo, es decir que estos candidatos a axioma pretenden recuperar algunas de nuestras intuiciones pre teóricas sobre los conjuntos y añadirlas a la base axiomática de la teoría; ii) el *criterio externo* evalúa a los candidatos a axioma por su éxito en la labor teórico-conjuntista, es decir por su utilidad en la obtención de resultados al incluirlos en los axiomas de la teoría, pues estos candidatos vienen en forma de alguna noción o herramienta teórica que facilita y/o expande los recursos teóricos y metodológicos de la teoría.

Hasta este punto, he presentado las bases formales de la teoría y he analizado casos de oraciones que hacen surgir complicaciones en la teoría. La indecidibilidad de dichas oraciones también sirve para darnos cuenta del alcance que tiene la teoría para solucionar cuestiones de ese tipo. Además, he examinado la propuesta de Gödel que consiste en la búsqueda de axiomas que enriquezcan la teoría y la fortalezcan formalmente, de modo que los problemas de indecidibilidad vayan desapareciendo. A continuación, el trabajo estará enfocado en presentar y examinar una propuesta particular para tratar con el fenómeno de la indecidibilidad. Esta propuesta está motivada parcialmente por el programa de Gödel, pues apoya la adopción de recursos adicionales en la teoría con los cuales se analizan oraciones que pueden llegar a ser indecidibles. Además, dicha propuesta está fuertemente vinculada con ciertos tipos de candidatos a axiomas que postulan la existencia de conjuntos cuya cardinalidad es considerada “demasiado grande”, y por ello no se puede demostrar que existen dichos conjuntos sin la ayuda de este recurso.

Capítulo 2

Teoría de Conjuntos aumentada. Principios de Reflexión, nuevos axiomas y alcance de la Teoría

2.1.- Programa de la búsqueda de nuevos axiomas

El programa de Gödel puede parecer una vía que goza de demasiada libertad al manejar en su propuesta el propósito de proponer nuevos axiomas para TC con los que se complete la teoría. Esto en sentido de brindarnos un acopio mayor de herramientas teóricas que nos permitan comprender el intrincado universo conjuntista y también en la resolución de los problemas de indecidibilidad que puedan surgir.

Este programa fue formulado por Gödel con el propósito de motivar el fortalecimiento de la teoría en vías de cumplir al menos dos objetivos: 1) Los conjuntos como objetos de estudio de la teoría precisan de una explicación de su naturaleza y de las relaciones que guardan entre ellos, y para alcanzar esto se requiere de nuevas definiciones y conceptos tanto epistemológicos como ontológicos que fundamenten a los conjuntos y las diversas propiedades que poseen; 2) la Teoría de Conjuntos en general no es un campo teórico acabado en el que se sometan a juicio todas las posibles proposiciones de la teoría, y muestra de ello son las diversas oraciones indecidibles, por lo que se requieren principios teóricos adicionales que vayan permitiendo el estudio de diversas proposiciones que presenten un contenido menos manejable con los solos recursos de la teoría estándar. Ambos objetivos son vitales para el programa gödeliano original y lo que haremos ahora será aislar cada uno para dirigirnos hacia nuestro tema central de estudio.

El primer objetivo del programa es el que toca los aspectos filosóficos que son de interés para Gödel en su búsqueda por elucidar la naturaleza más general de los conjuntos. La motivación del programa es impulsada con el objetivo de disminuir la incomprensión de los conjuntos entendidos como los "habitantes" del universo *V* que es el objeto de estudio de TC. Para Gödel esto supone un compromiso grande con una forma fuerte de realismo matemático que permee por lo menos la parte más fundamental de los objetos de estudio de las matemáticas, y esto ya tiene la inclinación hacia el platonismo matemático que caracteriza a la postura de Gödel acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos[91] –y así, el programa gödeliano ya tiene como objetivo sostener que la labor matemática tiende a ser descriptivista-. Sabemos por el capítulo anterior que dar cuenta de esos objetos matemáticos junto con sus propiedades y relaciones le supuso a Gödel proponer una forma especial de intuición que él llamó intuición matemática, con la que podemos acceder al mundo de los objetos matemáticos y estudiarlos con las diversas teorías. Esto último constituye uno de los aspectos cruciales del programa gödeliano estudiado desde el punto

[91] Sabemos con esto que el realismo matemático sostenido aquí también es un medio para rechazar toda forma radical de intuicionismo o de formalismo que desde años anteriores al auge de la obra de Gödel estaban presentados en la mesa de discusión. Las convicciones de Gödel en favor del realismo en matemáticas se verían reforzadas con la consecución de sus resultados de incompleción. Véase su [1951].

de vista epistemológico, pues la intuición matemática es una manera de responder a la cuestión sobre el conocimiento acerca de los objetos matemáticos. ¿Cómo es que tenemos acceso a los objetos de estudio de las matemáticas siendo estos de carácter fundamentalmente abstracto? A diferencia del conocimiento de los objetos físicos para los que se suele argumentar que los sentidos son la vía de acceso primaria para conocerlos, los objetos abstractos han sido objeto de estudio más delicado por lo difícil que resulta defender las tesis que apoyan una u otra forma en que podemos dar cuenta de ellos. La intuición matemática que propone Gödel es un recurso importante para considerarse en el estudio de los objetos abstractos, y dos razones de ello, directamente ligadas a lo aquí expuesto, son:

1) Esta forma especial de intuición concuerda con la tesis realista sobre la existencia de los objetos abstractos. Objetos tales como los números, los espacios vectoriales, los polígonos y poliedros en su forma más pura,[92] etc., existen independientemente de quienes los manipulan, y tenemos noción de su existencia porque contamos con tal intuición.

2) Nuestra capacidad de raciocinio y control sobre objetos como los trabajados en matemáticas esta mediada por esta forma especial de intuición. Es gracias a ella que tenemos acceso a ese reino objetivo donde habitan tales objetos que podemos estudiar y manipular para comprender su naturaleza, propiedades y relaciones que nos permiten el entendimiento y progresos en otras ramas de estudio científicas, sociales y de otros tipos.[93]

---

[92] Con esto me refiero a las figuras en el sentido propio de la geometría y desprovistas de otras características físicas.

[93] Hasta ahora solo he presentado la propuesta de la intuición matemática como recurso que apoya algunas formas de realismo matemático, y como un recurso perceptual que explicaría cómo es que tenemos acceso a los objetos de estudio propios de las matemáticas, lo cual puede comenzar a verse en Gödel [1951] y otros lugares.

Junto con las virtudes señaladas en esta exposición de los aspectos filosóficos del programa gödeliano, también hay fuertes críticas a la aceptación de esos elementos. El aspecto metafísico se encuentra frente a los detractores del realismo y su rechazo a la existencia independiente de objetos abstractos. El aspecto

El segundo objetivo del programa es el que toca los aspectos matemáticos del estudio teórico-conjuntista. Pese al componente técnico que posee el programa estudiado desde esta perspectiva, los motivos que tenía Gödel para sostener que la Teoría de Conjuntos –al menos la que estaba desarrollada hasta la época en que vivió- era teóricamente incompleta tenían que ver más con sus convicciones filosóficas respecto de los objetos de estudio de las matemáticas, que sabemos ahora de tales convicciones que eran metafísica y epistemológicamente comprometedoras. Para Gödel, la presencia de oraciones indecidibles en TC es un síntoma de que la teoría no es completa en sentido de que falla en clarificar y explicar ciertos aspectos y fenómenos del universo conjuntista,[94] además que esto indica que la teoría es conceptualmente incompleta en sentido de que carece de nociones y conceptos que clarifiquen todos los fenómenos del universo conjuntista. De modo que se tienen dos problemas a atender: 1) TC en cualquiera de sus variantes hasta ahora no decide toda proposición que describa aspectos específicos del universo conjuntista; 2) TC en cualquiera de sus variantes hasta ahora no puede explicar

epistemológico sobre la intuición es uno de especial atención debido a serias complicaciones que suelen resultar de estudiar esta forma especial de percepción, o lo que el mismo Gödel tenía en mente cuando hablaba de la intuición dentro de su programa. Como ejemplo de esto último señalo: “Una dificultad en la lectura de los escritos de Gödel sobre la intuición matemática es que él usa el término en ambos sentidos, el objeto-relacional y el de actitud proposicional, y en este último no siempre es claro qué fuerza epistémica se pretende que el término tenga.” (Parsons, 1995, en Feferman, Parsons y Simpson, 2010, pp. 341. La traducción es mía). Y aún si fuera claro lo que Gödel tenía en mente al usar el término, y con esto se refiriera a un modo especial de percepción como el que hemos expuesto aquí, todavía hay fuertes dudas acerca de la naturaleza y distinciones de los conceptos y objetos que la intuición matemática percibe: “[…] una respuesta apropiada parecería ser que ciertos *objetos* están ante la mente en modo análogo a que ciertos objetos físicos están presentes ante la percepción. La respuesta de Gödel es “conceptos”, quizá conceptos de un tipo particular. Pero en el caso de que o ’esto es rojo’ o verdades lógicas elementales o conceptos inferenciales están presentes en este modo parece ser un supuesto,” (*Ibid.* Pp. 344).
Ciertamente, hay maneras en que se ha tratado de defender el papel de la intuición matemática ante las cuestiones anteriores y otras que no he mencionado aquí (incluso para defender la postura gödeliana de la idea de que la intuición matemática sea una suerte de facultad perceptual extra que percibe los objetos matemáticos, lo cual no suele atribuirse a Gödel). Un examen minucioso de la presentación de la intuición matemática, así como de sus críticas y respuestas, se aleja del objetivo principal de este trabajo. Un lugar donde se presentan y revisan los aspectos filosóficos del programa gödeliano con más detalle es Parsons [1995].

[94] Ver Van Aten, M., Kennedy, J (2009), p. 15.

todo fenómeno conjuntista que surja en el mundo de los conjuntos, lo que hace que la teoría sea conceptualmente incompleta.

Hemos visto anteriormente que el programa gödeliano motiva la búsqueda de nuevos axiomas. Los problemas (1) y (2) son abordados con el programa de modo que, por una parte, los nuevos axiomas sirvan para fortalecer la teoría y se deduzcan las proposiciones que resultaban indecidibles y, por otra parte, los nuevos axiomas ofrezcan nuevas recombinaciones teóricas de nociones y conceptos que expliquen los fenómenos anteriormente inexplicados o mediante nuevas nociones propuestas que eluciden lo que ocurre dentro del universo. Así que esta búsqueda de nuevos axiomas está encaminada a reducir las dos formas de incompleción, teórica y conceptual.

Sabemos del estudio previo hecho en el capítulo anterior que la aceptación de nuevos axiomas de la teoría viene dada porque se cumple al menos uno de los dos criterios de justificación: la justificación interna es la que permite someter a escrutinio los nuevos axiomas por su capacidad de dotar de estructura formal nuestras intuiciones preteóricas y permitir nuevos manejos técnicos de ciertas nociones conjuntistas primitivas como la de “conjunto de”; la justificación externa juzga la aceptación de los nuevos axiomas basándonos en que tan prolíficos sean en la consecución de nuevos resultados en la teoría, que sean extremadamente difíciles o imposibles de conseguir con la teoría sin dichos axiomas. Mientras que la forma externa de justificación puede parecer atractiva desde un punto de vista pragmático, para lograr una forma de entendimiento más profundo del universo conjuntista y explicar qué ocurre con ciertos fenómenos más bien peculiares que involucran propiedades y relaciones más profundas de los conjuntos se requiere trabajar y proponer nociones y conceptos que admitan una forma interna de justificación. De aquí que nuestro interés se enfoque en el estudio y análisis de intuiciones preteóricas y aspectos formales que motiven la formulación de nuevos candidatos a axiomas conjuntistas, y entre estos elementos primitivos prestaremos especial atención a los recursos llamados Principios de Reflexión (PR), tanto a su motivación como los alcances que TC es capaz de adquirir cuando se le añaden nuevos axiomas mediante estos recursos.

2.2.- ¿El universo conjuntista "reflejado"? Introduciendo los Principios de Reflexión

Podría decirse que la Teoría de Conjuntos es una rama especial de estudio dentro de las matemáticas en parte debido a la basta variedad de cuestiones y situaciones que se suscitan en su interior. Debido a que los conjuntos en matemáticas suelen entenderse como objetos muy básicos y generales con los que se plantean y tratan de resolver diversos problemas, cuando tales objetos se someten a escrutinio resulta que en realidad se tiene bastante menos claridad acerca de su naturaleza y propiedades. Así, por ejemplo, las dudas suelen presentarse incluso desde niveles de estudio de la teoría bastante fundamentales mediante cuestiones como: ¿Qué es un conjunto?, ¿Exactamente que significa que algo pertenezca a un conjunto? Y se puede ir más lejos dentro de la teoría para tener dudas como: ¿Cuáles son los criterios para decidir cuándo se está ante un conjunto o no?, ¿Qué manipulaciones teóricas están permitidas al momento de manejar varios conjuntos?, ¿Existen conjuntos considerados "modelos" (por ejemplo, en estructura y tamaño) que sirvan como criterio de comparación para otros conjuntos que se consideren similares?[95] Y de este modo, podemos continuar al interior de la teoría para ir encontrando otras cuestiones acerca de los conjuntos y su comportamiento.

Debido a la estrecha relación que la Teoría de Conjuntos guarda con la lógica, no es extraño que varias cuestiones que se tratan de resolver tengan que ver con los sistemas formales que se usan para trabajar la teoría. En este trabajo, nosotros nos hemos enfocado en el problema particular de la indecidibilidad dentro de la Teoría de Conjuntos y sabemos que es uno de carácter lógico debido principalmente al alcance demostrativo de la teoría. Ahora bien, la idea que queremos explorar relaciona el carácter lógico de la teoría con una visión particular de cómo concebir el mundo o universo de los conjuntos.

Es sabido que una característica de la Teoría de Conjuntos es que carece de un modelo tal que su dominio sea absolutamente todo el universo conjuntista V.[96] Sin embargo, para el teórico de modelos de la teoría, la cuestión siguiente ha persistido: Dada una fórmula φ de la teoría, ¿Qué significa $V \vDash \varphi$? Nótese que la respuesta estándar desde el estudio de modelos no puede aplicarse aquí como se haría, por ejemplo, en la teoría del análisis real o la mecánica newtoniana. Esto debido a que, desde el inicio en la indagación de los modelos para TC, hay dificultades importantes para considerar cuál sería el dominio

[95] Con esto, no afirmo que tales preguntas han permanecido abiertas. Un buen número de ellas han recibido respuestas que en mayor o menor medida que han contribuido a responderlas. Así, por ejemplo, se han propuesto versiones más específicas de axiomas como comprensión y remplazo para decidir sobre cuándo se está ante un conjunto o no; las operaciones básicas conjuntistas en general han funcionado bien al manipular varios conjuntos; ciertas concepciones del universo de los conjuntos son compatibles con formas de proponer conjuntos especiales que sirvan de modelos. Sin embargo, esto no quiere decir que los problemas se consideren resueltos ya.

[96] La observación no es en modo alguno simple. Más adelante veremos que esto tiene serias consecuencias para la llamada propiedad de categoricidad de la teoría, la cual se estudia desde el punto de vista de la teoría de modelos.

de un tal modelo de la teoría.[97] Por lo que la pregunta acerca de lo que significa que una tal fórmula acerca de conjuntos sea verdadera del mundo de los conjuntos requiere de una respuesta que, por lo menos, involucre algún elemento que no está presente en el modo usual de proponer un modelo para otras teorías.

No es mi intención aquí argumentar a favor o en contra de alguna tesis que se tenga para tratar de zanjar este problema, sino más bien explorar una propuesta que se da sobre cómo tratar con situaciones como la verdad de enunciados en todo *V* a pesar de que no se tenga un modelo de todo *V*. La propuesta que pretendo analizar se inspira en la siguiente idea intuitiva: *Si una determinada oración φ es verdadera de todo el universo V, entonces tal oración ya se cumple en algún segmento inicial del universo V.* En otras palabras, a cualquier enunciado de la teoría tal que sea verdadero en el mundo de los conjuntos se le puede encontrar un nivel del universo conjuntista donde ese enunciado ya se cumple. Esta idea pone de manifiesto que lo que se tiene en esas situaciones en que se busca justificar la verdad de un enunciado en todo *V* es un escenario más pequeño dentro de *V* en el que se "refleja" la verdad del enunciado al resto de *V*. Esta es la idea que subyace a los llamados Principios de Reflexión, y desde ahora procederemos a exponer por qué es que tal noción se ha vuelto importante para estudiar los problemas de indecidibilidad en la teoría.[98]

Las oraciones indecidibles de interés suelen recibir atención debido a que un componente importante suele estar involucrado en su estudio: el infinito (salvo ejemplos como AE o

---

[97] La dificultad está vinculada a la ya conocida tesis de que la colección de todos los conjuntos no es ella misma un conjunto. Esto, en principio, bloquea las propuestas de modelos de la teoría debido a que el domino de ellos debe ser un conjunto.

[98] La idea de los Principios de Reflexión ya puede encontrarse en Levy (1960), p. 228. En ese trabajo, él se dedica a usar la noción de reflexión para explorar el infinito conjuntista desde la perspectiva mejor entendida de los modelos de ZF para segmentos iniciales del universo. En su (1959), se exploran formas en que los Principios de Reflexión pueden surgir de acuerdo con los aspectos que se estén estudiando en la teoría (rangos, fórmulas, etc.). Posteriormente, también se presentarán tanto la definición formal de los Principios de Reflexión como algunas de esas formas específicas en que se puede trabajar con la noción.

Cons(S), que involucran otros aspectos de la teoría). Así que se necesita estudiar lo que pasa en los niveles infinitos de V para comprender mejor el comportamiento de dichas oraciones indecidibles. Tales oraciones parecen originarse por el hecho de que TC no tiene los axiomas suficientes para trabajarlas, así que, como se ha visto revisando el programa de Gödel, los axiomas buscados servirán para resolver los problemas que surgen con dichas oraciones. Además, se sugiere que los axiomas buscados deben involucrar de algún modo el terreno transfinito de V, en vista de que las oraciones indecidibles así demandan su estudio.

Los conceptos primitivos de "ser conjunto de" y la relación $\in$ están en concordancia con los axiomas básicos de TC. También se tiene que la teoría arroja resultados no-problemáticos en los niveles finitos de V y muestra un nivel alto de solidez hasta el nivel o estrato conjuntista V_ω. Pero enunciados como Con(TC) o HC son problemáticos a partir de que se empieza a trabajar en los niveles infinitos de V (Con(TC) se presenta a partir de la generación de fórmulas del lenguaje de la aritmética de primer orden, es decir en V_ω; HC surge como un enunciado que envuelve la aritmética de los números reales o de segundo orden, es decir en 2^ω). Por lo que se hace evidente que la propuesta de nuevos axiomas de TC tiene su justificación en el manejo del concepto de lo transfinito y cómo las nociones preteóricas de "conjunto de" y $\in$ se desarrollan en los conjuntos en dichos niveles. Además, de lado de la teoría de modelos, se han dado resultados que restringen las características de los modelos que se pueden dar a TC, pues hemos visto que una de ellas consiste en que no se puede dar un dominio que abarque todo V, de modo que todas las aserciones que se hacen en la teoría quedan restringidas al nivel máximo en V que la teoría alcanza cuando es interpretada en el conjunto que maneja el modelo. Esta idea se hará más precisa a continuación.

Me concentraré en TC formulada en lenguaje de segundo orden, particularmente la teoría de *ZF*, y denotada ZF2. Los axiomas que se contemplan para ZF2 son los básicos como extencionalidad, unión, potencia y separación, entendidos como esquemas axiomáticos para las fórmulas de segundo orden. Sin olvidarnos de los conceptos que son dados por la clase de ordinales *ORD*. Además, los axiomas que tienen que ver con el rango, y el axioma de fundación, los cuales se expresan como sigue:

Fundación: $\forall X[\exists y(y \in X) \to \exists y \in X \forall z(z \in X \to z \notin y)]$;

Rango (1): $\forall x \forall y[y \in ran(x) \leftrightarrow \exists z \in x \forall u(u \in y \leftrightarrow \big(u \in ran(z) \vee u = ran(z)\big)]$;

Rango (2): $R(\alpha) = \{x | x \in ran(\alpha)\}$ y $\forall \alpha \in ORD(R(\alpha) \ \in V)$.

Al tener la idea de que no se tienen modelos de TC que abarquen todo *V*, los modelos que se puedan construir para la teoría son tales que interpretan las oraciones de la teoría en un segmento inicial del universo: "Es claro que los $R(\alpha), \alpha > 0$ son los modelos de T_0 [$= TC2$]. Por supuesto, cuando hablamos de los modelos de T_0, realmente deberíamos hablar de la estructura $\langle R(\alpha), \in_\alpha, ran_\alpha \rangle$ y no simplemente de su dominio $R(\alpha)$;" (Tait, (1998), p. 5).[99] Ahora veré un resultado importante que dará sustento a esta idea en ZF2, con lo cual se volverá más sencillo estudiar los modelos:

---

[99] "It is clear that the R(α) for α > 0 are models of T_0. Of course, when we speak of models of T_0, we really should be speaking of the structure $\langle R(\alpha), \in_\alpha, ran_\alpha \rangle$ and not simply of its domain R(α);". TC2 es la teoría de conjuntos formulada con lógica de segundo orden. La traducción es mía.

Teorema 9.- (Tait, 1988)

Todo modelo de T_0 es isomorfo a R(γ) para exactamente un γ > 0, y el isomorfismo es único.

Demostración. (contrad.) Si ocurre que hay un par de ordinales $\gamma, \delta > 0\ y\ \gamma \neq \delta$ tales que $\langle R(\gamma), \in_\gamma, ran_\gamma \rangle \cong M \cong \langle R(\delta), \in_\delta, ran_\delta \rangle$ con *M*-modelo de T_0, entonces existen los isomorfismos *f*, g tales que $f(x) \in Dom\big(R(\gamma)\big), g(x) \in Dom\big(R(\delta)\big) \forall x \in T_0$. Pero como se cumple al axioma de fundación para la teoría de segundo orden, la colección *ORD* es bien ordenada por la ∈, así que ocurre que $R(\gamma) \subseteq R(\delta)$ o viceversa. Sin perder generalidad, sea que $R(\gamma) \subseteq R(\delta)$, entonces $\exists x \in T_0(f(x) = \gamma < g(x) = \delta)$, pero como las estructuras que modelan a T_0 son isomorfas, entonces debe cumplirse que $\langle R(\gamma), \in_\gamma, ran_\gamma \rangle \cong \langle R(\delta), \in_\delta, ran_\delta \rangle$ y γ = δ, lo cual contradice que $f(x) = \gamma < g(x) = \delta$.

Respecto a la unicidad del isomorfismo, es sencillo notar que para todo $\alpha \in ORD$, si existen los isomorfismos $f: M \to R(\alpha), g: M \to R(\alpha)$ con *M*-modelo de T_0, entonces $\forall x \in T_0(f(x) = y = g(x))$. Y como las funciones coinciden en todos sus valores, son iguales ■

Esto sugiere que estos modelos para ZF2 tienen un carácter relativizador para las expresiones bien formadas del lenguaje, pues el valor de verdad de las oraciones dependerá del nivel de la jerarquía cumulativa donde se interpreten.

A continuación, debemos preparar el terreno para poder hablar de esas relativizaciones de fórmulas en ZF2. Ahora que tenemos el Teorema 9, sabemos que todo modelo de ZF2 es isomorfo a un segmento inicial del universo dado por el rango de un cierto ordinal.

Además, notemos también que, por lo dicho anteriormente sobre la restricción de la "altura" en el universo *V* para interpretar las fórmulas de TC sobre los conjuntos hasta el ordinal que indexa el rango de esa altura, para hablar de más nociones y propiedades de los conjuntos que no surgen en los niveles finitos ni en V_ω se recurre a considerar niveles infinitos más altos en *V* para disponer de los medios teóricos que permitan analizar esas nociones y conceptos. Desde el punto de vista de los modelos, lo anterior supone una expansión de los conjuntos que fungen como dominios de discurso cada vez que la labor teórica se emplea en el análisis de las proposiciones que expresan un contenido sobre conjuntos que requieren consideraciones sobre su tamaño que sólo se pueden hacer en dominios de discurso con un tamaño cada vez mayor.[100]

En el estudio hasta ahora realizado en este trabajo, hemos visto que las oraciones como HC u otras donde se maneje información de conjuntos infinitos que superen el estrato V_ω, la indecidibilidad resulta demasiado complicada para manejarse con modelos de conjuntos de tamaño a lo más numerable. Así que el tratamiento modelo-teórico que se puede desarrollar con las herramientas como el Teorema 1 de este trabajo sólo alcanza para estudiar aquellas proposiciones que involucren conjuntos de tamaño a lo más numerable, lo cual es un alcance muy corto para tocar las cuestiones de indecidibilidad que representan las oraciones como HC. Lo anterior se soluciona considerando los diferentes tamaños infinitos de los modelos de TC introduciendo dominios de discurso cada vez más grandes cuando sea necesario examinar las propiedades de conjuntos de estos tamaños infinitos, de

[100] En este punto, es importante señalar que, aunque estas consideraciones se han hecho para ZF2, el trabajo de la teoría de modelos con conjuntos de diferentes (y más grandes) tamaños infinitos ya se considera desde la teoría formulada en lenguajes formales de 1er orden. Esto quiere decir que desde la forma estándar más básica en que se formula TC, que es con lógica de primer orden, las cuestiones sobre conjuntos cuya cardinalidad sea de un infinito mayor al infinito numerable adquieren completa relevancia para el teórico de modelos de conjuntos. He decidido trasladar la discusión sobre modelos con dominios transfinitos superiores a ZF2 con el motivo de acelerar la llegada a la motivación central de este apartado.

modo que surge una motivación para introducir conjuntos infinitos que se consideran "demasiado grandes" desde el punto de vista de la numerabilidad. No obstante, la existencia de estos conjuntos con dichos tamaños no puede demostrarse desde los axiomas de ZFC solamente, por lo que para hablar de ellos se precisa de nuevas nociones propuestas que permitan el manejo de estos conjuntos. Recordando la motivación del programa de Gödel, en este punto alcanzamos el requerimiento de proponer nuevos axiomas a TC que permitan expandir el alcance formal para estudiar las proposiciones indecidibles de interés desde el punto de vista modelo-teórico. Por lo que proponer nuevos axiomas irá en concordancia con los Principios de Reflexión que nos ayudarán en la labor de encontrar candidatos a nuevos axiomas para tratar de resolver los problemas de indecidibilidad que tenemos.

2.3.- Formulación de los Principios de Reflexión

Una de las formulaciones estándar de los principios de reflexión (PR) consiste en presentarlos como esquemas axiomáticos adicionales que señalan el nivel en la jerarquía cumulativa en que los enunciados están siendo interpretados. Formalmente, PR se suele presentar de la siguiente manera:

Principio de Reflexión (PR).- Para cualquier oración φ de TC, $V \vDash \varphi \Rightarrow \exists \beta \in ORD(V_\beta \vDash \varphi^\beta)$, es decir, que si una oración vale para el universo V entonces existe un estrato en V subindexado por β-ordinal que hace verdadera a φ.

Nótese que el ordinal β garantiza que existe el nivel en *V* que hace verdadera a φ: "La expresión formal de que esta condición es una condición de existencia es el axioma $\forall X(\phi(X) \rightarrow \exists\beta\phi^{\beta}(X \cap R(\beta)))$ donde $\phi^{\beta}(X)$ es el resultado de restringir las variables acotadas de primer –y segundo- orden en $\phi(X)$ a $R(\alpha)$ y $R(\alpha+1)$, respectivamente." (*Ibid.* P. 6).[101] Los PR acotan el análisis de las oraciones de TC, pues con ellos se pasa de sostener que cualquier oración que valga para el universo *V*, su respectiva restricción es "reflejada" a algún nivel de la jerarquía cumulativa subindexado por un elemento de *ORD*. Notemos que esta manera de estudiar los enunciados de TC asume que tenemos una visión especial del universo *V*, pues se debe aceptar el axioma de regularidad (fundación) para asegurar que existen los niveles de la jerarquía cumulativa en los que se analizan los enunciados de TC. Además, otra consecuencia importante de PR es que se conserva la idea de que el universo *V* deja de ser "una totalidad que forma parte" de los recursos modelo-teóricos, pues el consecuente en el esquema general de PR permite deducir que siempre es posible hallar el ordinal β en *ORD* tal que el respectivo estrato V_β hace verdadera la fórmula φ de interés, por lo que el ordinal más grande de *ORD* sirve como cota superior para saber el tamaño de *ORD* en el modelo de V_β para que se cumpla $\vDash_{V_\beta} \varphi$.

Como se ha visto antes que no se puede dar un modelo exhaustivo de TC donde se abarque todo *V* como dominio, la idea de PR motiva la aparición de modelos con dominios parciales que abarcan sólo segmentos iniciales de la jerarquía cumulativa en los que se puede estudiar el comportamiento de los enunciados indecidibles. Los PR son adecuados para

---

[101] "The formal expression that this condition is an existence condition is the axiom
(1) $\forall X(\phi(X) \rightarrow \exists\beta\phi^{\beta}(X \cap R(\beta)))$
where $\phi^{\beta}(X)$ is the result of restricting the first- and second-order bound variables in $\phi(X)$ to $R(\alpha)$ and $R(\alpha+1)$ respectively.". La traducción es mía. Recordemos que estamos en el contexto de ZF2, por eso las variables restringidas son de primer y segundo orden.

exhibir números cardinales[102] con propiedades particulares, pues como veremos, los modelos que validen las relativizaciones φ^{α} con φ una oración de TC son tales que el tamaño de su dominio de discurso es justo el número α. El carácter axiomático de PR radica en introducir a consideración ciertos números cardinales cuya existencia no puede demostrarse con los solos axiomas básicos en la teoría. Dichos cardinales están relacionados con la idea de explicar el comportamiento de los conjuntos a nivel transfinito, dando empuje a la idea de complementar la teoría con nuevos axiomas. Así que la introducción de estos números cardinales no sólo no tiene el propósito de comprometer la consistencia de TC, sino que el Teorema Fundamental de Demostraciones Relativas de Consistencia es aplicable a dichos cardinales, obteniendo así el esquema general de consistencia vía un gran cardinal: si α es un cardinal introducido con un principio de reflexión φ_{α} entonces se cumple $Con(TC) \Rightarrow Con(TC + \varphi_{\alpha})$. Por su propiedad de ser números $\geq \omega$ y su independencia de los axiomas básicos, a estos números cardinales se les llama cardinales grandes.

Los axiomas de grandes cardinales (AGC) surgen con el empleo de PR para aumentar la fuerza demostrativa de la teoría. Además, hay algunos compromisos importantes al adoptar estos nuevos axiomas, entre ellos: (i) ontológicamente, *V* visto como jerarquía cumulativa adquiere un carácter "absolutamente infinito", pues por arriba de los niveles de la jerarquía cumulativa subindexados con elementos de *LIM* se hallan estratos del universo subindexados con números cada vez mayores dependiendo de las propiedades que el principio de reflexión correspondiente atribuye al gran cardinal -se expande *LIM*-; (ii) el uso de PR cada vez más sofisticado permite crear AGC cada vez más fuertes, pero a la vez

[102] Se asume la definición canónica de los elementos de la colección *CAR*. Es decir, $CAR = \{\alpha \mid \alpha \geq \omega \wedge \alpha - inicial\}$, donde ser α-inicial consiste en ser un segmento inicial de ordinales.

hay un compromiso cada vez mayor con la consistencia de la TC, es decir que el gran cardinal puede poseer más propiedades no deducibles dentro de la teoría.[103]

Antes he tomado la teoría ZF en segundo orden, ZF2, para comenzar a hablar de PR. Sin embargo, con la definición anterior de PR, resulta claro que en la teoría en primer orden ya es posible manejar dichos principios formulando las propiedades a ser reflejadas en V con las fórmulas respectivas de 1er orden. Ahora, veamos algunos ejemplos del uso de PR en TC:

1) Tomando la teoría ZF con la siguiente afirmación $\varphi :=$ "existen cardinales límites regulares", se tiene que "$\exists\alpha - inaccesible$" $\in Teo(ZF + \varphi)$.[104]

2) Tomando la teoría ZF con la siguiente afirmación $\varphi :=$ "una clase de segundo orden es coextensiva con un conjunto", y especificando la formulación de PR con esta φ, queda $\forall X[V \vDash \varphi(X) \Rightarrow \exists\alpha(V_\alpha \vDash \varphi^\alpha(X^\alpha)]$ con X una variable de segundo orden, por lo que se tiene que $\alpha \in LIM$. Luego "*Existe la clase LIM*" $\in Teo(ZF + \varphi)$.[105]

3) Tomando la teoría ZF con la siguiente afirmación $\psi :=$ "hay conjuntos de rango arbitrariamente grande", la formulación de PR que incluye al axioma ψ es $\forall X[V \vDash \psi(X) \Rightarrow \exists\alpha(V_\alpha \vDash \psi^\alpha(X^\alpha)]$ con X variable de segundo orden, y esto lo cumplen los ordinales que no son 0 ni sucesores. Luego, tomando el axioma dado por φ en (2) y el dado por ψ, se tiene que "$Existe\ la\ clase\ LIM \setminus \{\omega\}$" $\in Teo(ZF + \varphi, \psi)$.

---

[103] Debemos ser cuidadosos con este aspecto en vista de lo que hemos dicho anteriormente sobre que la introducción de grandes cardinales no tiene como propósito debilitar la consistencia de la teoría. En este punto nos enfocamos en un aspecto más profundo que involucra los PR al interior de la teoría en su forma de los respectivos nuevos axiomas, pues es cuando se están empleando tales axiomas que existe el riesgo de introducir inconsistencia en la teoría.

[104] Un número cardinal α es regular sii $cof(\alpha) = \alpha$. La noción misma de cofinalidad es expresable en primer orden en términos de funciones y de sucesiones, ambas introducidas mediante el vocabulario de primer orden.

[105] Recordar que la clase *LIM* es propia y no se deduce su existencia en *ZF*.

4) Como se ha visto en (3), los PR se pueden usar simultáneamente para obtener resultados teóricamente más fuertes. Tomando ZF con la afirmación $\theta :=$ "el tamaño de V es inaccesible y contiene un cardinal inaccesible", y se especifica el PR como $\forall X[V \vDash \theta(X) \Rightarrow \exists\alpha(V_\alpha \vDash \theta^\alpha(X^\alpha)]$ con X variable de segundo orden. Luego, usando φ y ψ, se tiene que "$Existe\ una\ clase\ propia\ de\ cardinales\ inaccesibles$" $\in Teo(ZF + \varphi, \psi, \theta)$.

5) Con este ejemplo se muestra cómo postular la existencia de cardinales incluso más grandes que los inaccesibles. Tomando ZF con la afirmación $\chi :=$ "existen ultrafiltros no-principales", se tiene que "$\exists\kappa - cardinal\ medible$" $\in Teo(ZF + \chi)$.

Además, vale la pena notar que hay unos ciertos números cardinales grandes con propiedades que están en estrecha relación con la definición de PR que hemos presentado. Los presentamos con la siguiente definición:

Definición (24): (Kanamori, (2009), p.58)

Para Q siendo $\sum_n^m$ *o* $\prod_n^m$*, el número* κ *es Q-indescribible sii para cualquier relación* $R \subseteq V_\kappa$ *y cualquier Q-oración* φ*, si* $< V_\kappa, \in, R > \vDash \varphi$ *entonces* $< V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha > \vDash \varphi$ *para un* $\alpha < \kappa$*.*

Los números cardinales indescribibles se introducen en TC por la definición de PR, de modo que le existencia de estos números es consecuencia inmediata del uso de PR.

2.3.1.- Formas de Reflexividad: Nociones conjuntistas compatibles con PR

Como parte de la presentación, mencionaré ahora el funcionamiento de PR respecto a nociones particulares de la Teoría de Conjuntos. Anteriormente he expuesto el funcionamiento de dichos principios en su forma estándar, es decir mediante su formulación lógica y mostrando con ésta que es posible emplearlos desde el primer orden. Además, con los ejemplos dados, hacemos notar que dichos principios son utilizables en órdenes superiores. Ahora, me enfocaré en PR acotados a aspectos conjuntistas más específicos, mostrando con esto que es posible hacer funcionar los principios de reflexión sólo para algunas partes de la teoría. Se debe mencionar que estas formas de reflexión no se separan de la formulación original y tampoco dejan de lado su función de introducir nuevos axiomas a la teoría. A lo largo de esta sección me apoyaré en algunas ideas que se presentan en Fontanella, L., "Reflection Principles and Large Cardinals".[106]

2.3.1.1.- Reflexividad en conjuntos estacionarios

Es pertinente que introduzca ahora la definición de conjunto estacionario para continuar:

[106] El texto es en sí una recopilación de notas. Puede consultarse en https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/laura.fontanella/papers/Scandinavian.pdf

Definición (25): (Jech, (2006), p. 91)

Si X es un conjunto de ordinales y $\alpha \in LIM \setminus \{0\}$*, entonces α es* punto límite *de X si* $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$*. Sea κ un cardinal regular no contable. Un conjunto* $C \subset \kappa$ *es* cerrado no acotado *(club) si C es no acotado en κ y contiene todos sus puntos límites menores que κ. Un conjunto* $C \subset \kappa$ *es* estacionario *si* $C \cap S \neq \emptyset$ *para todo S subconjunto cerrado no acotado de κ.*

Con esta definición, ya se puede dar la noción de reflexividad en términos de conjuntos estacionarios. Nótese que la definición que se dará a continuación no depende de haber aceptado algún PR previo en la teoría, sólo la idea que subyace a la formalización de los principios y su funcionamiento es lo que hay en común:

Principio de Reflexión en Conjuntos estacionarios (PRCE).- Decimos que PRCE se da en un cardinal κ si $\forall S \subseteq_{Est} \kappa(\exists \alpha < \kappa(cof(\alpha) > \omega \wedge Est(S \cap \alpha))$.[107]

Esta forma de reflexión tiene como característica adicional que los conjuntos estacionarios por debajo de κ son cerrados bajo cardinales menores que κ que sean de cofinalidad no contable. El siguiente resultado muestra que cierto tipo de cardinales grandes, los débilmente compactos, [108] cumplen con PRCE:

[107] Ver Fontanella, p. 5

[108] Aunque hay más de una manera equivalente de entender a los cardinales débilmente compactos, como el usar nociones de particiones de conjuntos usadas en combinatoria infinita, para efecto del teorema tomaré la que involucra lenguajes formales: Un cardinal regular κ es *débilmente compacto* si para toda teoría Γ en $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ (la lógica con conjunciones y disyunciones de menos de κ fórmulas, y cuantificación de menos de κ variables) con a lo más κ símbolos no lógicos, Γ es satisfacible sii es < κ-satisfacible (es decir, todo conjunto de menos de κ oraciones tiene modelo).

Teorema 10.- Si κ es débilmente compacto entonces todo subconjunto estacionario de κ cumple PRCE.

Demostración. Sea κ débilmente compacto. Sabemos por las propiedades de árboles en conjuntos y la compacidad débil que κ tiene la propiedad del árbol[109] y es regular. Además, no es difícil notar que $\forall\lambda < \kappa(E_\lambda^\kappa = \{\alpha \in \kappa | cof(\alpha) = \lambda\}\ es\ estacionario\ en\ \kappa)$. Con esto hemos mostrado que κ tiene conjuntos estacionarios.

Ahora, para cada α < κ sea la teoría $\Gamma_\alpha = \{\bigwedge_{j,i=1}^{\alpha} \exists x_i \forall x_j (x_i \neq x_j) \wedge (x_i = x_j \leftrightarrow i = j)\}$. Entonces para cualquier $S \subseteq_{Est} \kappa$ podemos hallar su respectiva teoría Γ_α tal que $|S| = |\Gamma_\alpha|$. Entonces, por construcción de Γ_α, $\Gamma_\alpha \subseteq_{Est} \kappa$ y $\forall C \subseteq_{club} \kappa(\Gamma_\alpha \cap C \neq \emptyset)$. Si para todo λ < κ con $cof(\lambda) > \omega$ ocurre que $\Gamma_\alpha \cap \lambda$ es no estacionario, entonces $\forall C \subseteq_{club} \kappa((\Gamma_\alpha \cap \lambda) \cap C = \emptyset)$, pero esto conlleva que la teoría $\Gamma_{|C|}$ que "cuenta" los elementos de C no tiene modelo y así $\Gamma_{|C \cap \lambda|}$ no es < κ-satisfacible, lo que contradice que κ es débilmente compacto. Por tanto, $\Gamma_\alpha \cap \lambda$ es estacionario ■

A continuación, se hará notar un resultado que mostrará que PRCE de hecho se preserva para cardinales mayores que el κ de interés, siempre y cuando los subconjuntos estacionarios se restrinjan sólo a la cofinalidad de los cardinales menores que dicho κ. Para esto será necesario manejar los cardinales fuertemente compactos:[110]

---

[109] Básicamente, un cardinal κ tiene esta propiedad si todo árbol de altura κ con todos sus niveles de tamaño menor a κ es tal que tiene una rama que es cofinal con κ.

[110] Usando la relación de estos cardinales con los débilmente compactos mencionados en una nota anterior, un cardinal regular κ es *fuertemente compacto* si cumple con la definición de compacidad débil eliminando el requerimiento de que toda teoría Γ en $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ disponga de a lo más κ símbolos no-lógicos.

Teorema 11.- Si κ es fuertemente compacto, entonces para todo $\lambda > \kappa$, todo subconjunto estacionario de $E^{\lambda}_{<\kappa} = \{\beta < \lambda \,|cof(\beta) < \kappa\}$ refleja hasta un punto $\alpha < \lambda$ de cofinalidad $< \kappa$.

Demostración. Supongamos que κ es fuertemente compacto. Por la Proposición 2.3 de las notas de Fontanella,[111] $\forall\lambda\exists j: V \to M$ encaje elemental con M-modelo interno de ZFC, $crit(j) = \kappa, j(\kappa) > \lambda$ y $\forall X \subseteq M \exists Y \in M\big(|X| < \lambda \to M \vDash |Y| < j(\kappa)\big)$. Para $\lambda > \kappa$ tomamos el encaje $j: V \to M$ que cumple lo anterior, y por definición de conjuntos estacionarios, se tiene que $\forall R \subseteq E^{\lambda}_{<\kappa}(j(R) \subseteq_{Est} E^{j(\lambda)}_{<\kappa} \wedge cof(j(R)) < \kappa)$ donde la segunda parte de la conjunción se cumple por la elementalidad del encaje j. Como hay un modelo M con el que se interpreta $E^{\lambda}_{<\kappa}$, se deduce que existe $Y \in M$ que cubre a $E^{\lambda}_{<\kappa}$ y $|j(Y)| < j(\kappa)$, entonces $j(R)^M$ es cubierto por $j(Y)$ y como $M \vDash |Y| < j(\kappa)$ y $\lambda > \kappa$, se cumple que $j(R) \cap \lambda$ es cubierto por $j(Y)$, y como $j(R) < \lambda$, ese conjunto refleja hasta un ordinal α tal que $cof(\alpha) < \lambda$. Usando que j es elemental, se cumple que R refleja hasta dicho ordinal α ■

Puede notarse con los dos teoremas anteriores que los cardinales compactos son cerrados respecto de PRCE, esto es, preservan la reflexividad estacionaria para los cardinales menores a uno compacto. De entrada, esto nos arroja una colección muy grande de cardinales grandes que cumplen PRCE, pues los inaccesibles y los de Mahlo ambos por debajo de los débilmente compactos, son cerrados bajo PRCE. El alcance de PRCE se

[111] Que dice lo siguiente: "$\kappa > \omega$ es un cardinal fuertemente compacto sii para todo λ hay un encaje elemental $j: V \to M$ donde M es un modelo interno de ZFC, κ es el punto crítico de j, $j(\kappa) > \lambda$ y todo conjunto $X \subseteq M$ de tamaño a lo más λ es cubierto por un conjunto $Y \in M$ tal que $M \vDash |Y| < j(\kappa)$." La traducción es mía.

reduce para cardinales que sean mayores que un débilmente compacto y menores que un fuertemente compacto (cardinales de Ramsey, medibles, de Woodin, por mencionar algunos) como queda manifestado en el último teorema. Otra forma de reflexión más específica es la que sigue.

2.3.1.2.- Delta-reflexión

Esta otra forma de PR restringido relaciona la reflexividad en conjuntos estacionarios con las álgebras entendidas como estructura conjuntista dotada de operaciones básicas con comportamiento de operaciones básicas entre conjuntos (unión, diferencia, intersección, etc.). La manera formal de hablar de este tipo de reflexividad, debida a Magidor y Shelah, es como sigue:

Definición (26):[112]

Dados dos cardinales $\kappa < \lambda$, $\Delta_{\kappa,\lambda}$ *es la oración que expresa que para todo cardinal* $\mu < \kappa$, $\forall S \subseteq_{Est} E^{\lambda}_{<\kappa}$ *y para toda álgebra sobre λ con μ operaciones, existe un álgebra A' de tipo de orden un cardinal regular* $\eta < \kappa$ *tal que* $S \cap A'$ *es estacionario en sup(A'). Un cardinal λ tiene la* delta-reflexión *si* $\Delta_{\kappa,\lambda}$ *se satisface para todo* $\kappa < \lambda$.

Debido a la presencia de álgebras en la definición, la delta-reflexión suele emplearse para justificar propiedades conjuntistas que se relacionan con el tamaño y con las operaciones

[112] Fontanella, p. 6. La traducción es mía.

del álgebra. Así, la delta-reflexión se usa para sostener los siguientes resultados: Para un cardinal κ que cumple delta-reflexión

1) κ satisface PRCE;

2) Si *F* es una familia de κ conjuntos contables, y toda subfamilia *F'* de *F* de menor cardinalidad tiene una función de elección, entonces *F* tiene una función de elección;

3) Si *X* es un espacio topológico de cardinalidad $< \kappa$ y *X* es κ-Hausdorff (i.e. todo subconjunto cerrado discreto de *X* de tamaño $< \kappa$ cumple que para cualquier conjunto de elementos de dicho subconjunto es tal que todo elemento tiene una vecindad que lo separa de los demás elementos) entonces *X* es Hausdorff.

Para este tipo de principio de reflexión también hay algunos resultados que vale la pena resaltar. El primero de ellos nos asegura que la compacidad débil es cerrada bajo la delta-reflexión:

Teorema 12.- Si κ es un cardinal débilmente compacto entonces κ tiene la delta-reflexión.

Demostración. (contrad.) Sea κ un cardinal débilmente compacto que no cumple la delta-reflexión. Entonces hay un $\lambda < \kappa$ tal que $\neg\Delta_{\kappa,\lambda}$. Empleando la notación de la definición de la delta-reflexión, sabemos por el Teorema de Representación de Stone que toda álgebra $A \cong B(A)$ – álgebra booleana (en particular, las subálgebras $A' \cong B(A')$-subálgebras booleanas), y al existir la relación de isomorfismo entre las álgebras booleanas con los sistemas lógicos formales, hay una lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ tal que $A \cong \mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$, de modo que tenemos la relación de la subálgebra *A'* con la teoría $B(A') \cong \Gamma_{B(A')} \subseteq \mathcal{L}_{\eta,\eta} \leq \mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ con S un conjunto estacionario contenido en $E^{\lambda}_{<\kappa}$.

Considerando una subálgebra particular *A'* de *A*, $B(A') \cong \Gamma_{B(A')}$ con tipo de orden un cardinal regular $\eta < \lambda$, entonces $(\Gamma_{B(A')} \cap S) \cap C \neq \emptyset$ para un club $C \subseteq Sup(A')$. Nótese que η no puede ser contable, pues de lo contrario $\Gamma_{B(A')} \subseteq \mathcal{L}_{\omega,\omega}$ que, al ser una teoría de la lógica de 1er orden, cumple con ser completa, y por la compacidad débil $\Gamma_{B(A')}$ es satisfacible sii es $< \omega$ – satisfacible, contradiciendo el supuesto inicial de que $S \cap A'$ no es estacionario en Sup(*A'*). Entonces $\eta < \lambda < \kappa$ con η – regular y no contable, pero $\eta = TO(\Gamma_{B(A')})$ y por la compacidad débil y PRCE todo subconjunto estacionario de κ refleja, y se tendría que no refleja $S \cap A' = S \cap \Gamma_{B(A')} = S \cap \eta \subseteq S$ pues se tendría que $S \cap A'$ no es estacionario en λ, contradiciendo que los conjuntos estacionarios son cerrados bajo intersecciones. Por tanto, κ cumple la delta-reflexión ■

Los siguientes resultados, debidos a Magidor, Shelah y Ekler (éste sólo involucrado con el último resultado), muestran una propiedad interesante de la delta-reflexión relacionada con algunos tamaños de alef's: Sólo a partir del escaño sub $\omega^2 + 1$, la consistencia de la teoría que admite sucesiones numerables de cardinales supercompactos[113] admite la delta-reflexión:

Teorema 13.- (1994)

$Cons(\exists\langle\kappa_n\rangle_{n<\omega}$ cardinales supercompactos) $\rightarrow Cons(\aleph_{\omega^2+1}$ tiene la delta-reflexión).

---

[113] Estos cardinales se definen: $\kappa > \omega$ es un *cardinal supercompacto* si para todo λ hay un encaje elemental $j: V \rightarrow M$ donde *M* es un modelo interno de ZFC, $\kappa = crit(j), j(\kappa) > \lambda$ y $\forall X \subseteq M(|X| \leq \lambda \rightarrow X \in M)$.

Teorema 14.- Ningún cardinal regular bajo $\aleph_{\omega^2+1}$ tiene la delta-reflexión.

Al ser éste un tipo de principio de reflexión particular para conjuntos estacionarios y álgebras puede parecer que el estudio acerca de la delta-reflexión se restringe demasiado, pues parece que sólo los conjuntos susceptibles de tener estructura algebraica tienen propiedades que se justifican solamente por estos principios. Sin embargo, lo anterior no es el caso en vista de que se tienen resultados más generales al respecto de la Teoría de Conjuntos, tales como los resultados de consistencia recién presentados. Además, se tienen otras características que podrían considerarse ventajosas al admitir este tipo de PR, tal es el caso de la compatibilidad de la delta-reflexión con la Hipótesis Generalizada del Continuo, lo cual permite rescatar todos los resultados de cardinales y aritmética transfinita que se obtienen al asumir dicha hipótesis.

Hasta ahora he presentado estas formas restringidas de reflexión, PRCE y la delta-reflexión, diseñadas para conjuntos específicos como los estacionarios. Además de un par de resultados relacionados con la consistencia de la teoría añadida con cardinales supercompactos y la compatibilidad con la Hipótesis Generalizada del Continuo. Hago notar que estas formas de reflexión no son ajenas a la idea original de PR, sino que su utilidad recae en proponer maneras específicas diseñadas para “reflejar” propiedades de conjuntos que con PR no se logra fácilmente. Ahora veamos las repercusiones de PR en la parte más ontológica de la teoría.

2.4.- Algunas cuestiones acerca de los Principios de Reflexión

2.4.1.- Sobre la noción de Categoricidad y PR

Ahora estamos en posición de decir más sobre la incidencia de PR en TC como recursos explicativos del comportamiento de los conjuntos. Por su funcionamiento y su relación con los modelos parciales que otorgan a TC, PR está relacionado con la Teoría de Modelos de los lenguajes de TC. Se hace notar especialmente la similitud que tiene con el Teorema de Löwenheim-Skolem, pues sabemos que ese teorema establece que los modelos de cualquier teoría formal contable de primer orden pueden ser de cualquier tamaño en términos de cardinalidad. Primero, no es difícil notar que TC (en su modo de ZF o semejantes) con PR en primer orden cumplen el Teorema de Löwenheim-Skolem, pues como se ha hecho notar antes, para estratos finitos y el primer paso infinito dado en V_ω (que es donde se puede desarrollar toda la parte finita y de primer orden de TC) PR se muestra efectivo y correcto en su uso. Segundo, la esencia del Teorema de Löwenheim-Skolem se conserva parcialmente en PR, pues a nivel de primer orden (de hecho, en segundo orden) los modelos de segmentos iniciales de V se pueden aumentar de tamaño al considerar cardinales cada vez más grandes, pero sin aumentar las condiciones formales a la teoría, por ejemplo: la teoría y las consecuencias $Teo(ZF + \varphi^\alpha)$ que se obtienen en algún estrato de V subindexado por un α-cardinal inaccesible y φ un PR en primer orden se seguirán sosteniendo al considerar estratos mayores subindexados por cardinales de Mahlo, medibles o más grandes, pues $Teo(ZF + \varphi^\alpha)$ no cambia en esos niveles mayores, salvo que se añada un cambio cualitativo a la teoría como pasar a otro orden en el lenguaje formal o añadir un nuevo axioma con PR. En este sentido, no se puede extender más ese resultado para añadir fuerza a PR, pues el Teorema de Löwenheim-Skolem en general no se cumple para el segundo orden. Con el uso de PR no se sabe del todo si hay algún enunciado que invalide algún axioma de grandes cardinales propuesto, lo más que se tiene ahora es evidencia de que el uso de PR en TC de segundo orden no ha arrojado una inconsistencia dentro de la teoría. En una sección posterior de este trabajo se presentará más información sobre el comportamiento de PR en segundo orden, además se mencionará algo sobre el alcance de la teoría en segundo orden con PR.

Algo más que es importante destacar es el hecho de que PR es una noción limitativa en términos de exhaustividad de modelos para TC. Al igual que el Teorema de Löwenheim-Skolem no permite establecer un único modelo salvo isomorfismo para las teorías de primer orden, el uso de PR siempre arroja modelos cuya interpretación no agota la totalidad de *V*. Al postular un axioma de grandes cardinales, lo que se hace es restringir la teoría de TC a un segmento inicial de la jerarquía cumulativa subindexada por el gran cardinal en cuestión, haciendo que toda colección que se halle por encima del nivel subindexado por dicho cardinal sea tratada como clase propia. Así que la teoría de TC no puede tener una interpretación en un modelo que agote la totalidad del universo *V*, por lo que la propiedad de categoricidad[114] entendida en modo estrictamente semántico-formal se pierde con el uso de PR. Sin embargo, desde el punto de vista ontológico, el estudio de la propiedad de categoricidad aún es de interés para tratar de mejorar el entendimiento del universo *V*. ¿Se puede alcanzar un entendimiento general acerca de los objetos de *V* que permita tener

[114] Decir que una teoría es categórica consiste en que existe un único modelo, salvo isomorfismo, que la interpreta. La propiedad de categoricidad se piensa como una propiedad semántica que especifica el grado de interpretabilidad de la teoría respecto del universo de discurso (sólo basta referirnos al modelo de la teoría categórica para entender cómo se interpretan sus expresiones bien formadas, y cuál es la estructura de los otros modelos que la teoría pueda tener, dicha estructura se hace evidente por el isomorfismo entre los modelos).

criterios para aceptar, o rechazar, modelos de la teoría? Notemos que, si se acepta la existencia de objetos fundamentales únicos de *V*, entonces la comprensión de sus características permitirá un estudio mucho más preciso de los modelos, salvo isomorfismo, de la teoría.[115] Por lo que vale la pena examinar con más detalle este aspecto más ontológico de la categoricidad en Teoría de Conjuntos.

Los tipos de modelos para TC que hemos presentado hasta ahora son los de tipo estándar que emplea la teoría en lógica de primer orden, y contemplamos los modelos que se construyen para ZF2 con lógicas de segundo orden. Ciertamente, podemos ser más ambiciosos en el estudio modelo-teórico de TC e ir más allá del segundo orden permitiendo operar la teoría con modelos construidos con lógica de órdenes superiores –de hecho, eventualmente tendremos que considerar modelos más potentes en este sentido-. Es este tipo de potenciación de la parte modelo-teórica el empleado para fortalecer los modelos, debido a que la principal característica que se ocupa en esta forma de trabajarlos consiste en estudiar y manipular la lógica en sus distintos órdenes. Pero podemos señalar otra forma de estudiar la parte modelo-teórica de TC, la cual consiste en notar la diversidad de modelos que se pueden proponer para la teoría. Por mencionar ejemplos:

1) Tenemos la forma estándar de proponer y analizar modelos para TC, que consiste en fijar dominios de discurso y establecer las reglas semánticas que nuestros signos no-lógicos obedecen en tales modelos. En otras palabras, tenemos *n*-ádas $\langle U, \ldots \rangle$ donde el tamaño *n* viene dado por la cantidad de signos no-lógicos que requieren interpretación.

[115] Esta forma de entender a las teorías como categóricas está más relacionada con el modo en que se piensa a los objetos de los que trata la teoría: “[…] categoricity still seems a reasonable requirement: it means that the reference of the theory—the structure to which it refers—is fixed (to within isomorphism): no new axioms about the specific mathematical concepts involved are needed.” (Tait, (1998), p. 11).

2) Más apegada a la visión constructible del universo conjuntista, los modelos internos para TC son los que piden condiciones más específicas al momento de ser propuestos. Los modelos internos adoptan la postura de que los conjuntos se van construyendo "desde abajo" mediante las operaciones elementales, haciendo que el Axioma de Constructibilidad: *Todo conjunto es construible*, junto al resto de los axiomas de ZF, sean elementos básicos que acogemos en la teoría para trabajar con estos modelos.[116]

3) Los modelos booleano-valuados constituyen otra manera de estudiar y emplear modelos para TC.[117] La característica principal de estos modelos es que el conjunto-dominio donde se definen es booleano (sus objetos se comportan de acuerdo con la definición de operaciones booleanas introducidas) y el estudio de las propiedades y relaciones entre sus objetos se realiza de acuerdo con los valores booleanos que se adquieren de traducir al vocabulario algebraico dichas propiedades y relaciones.

Es verdad que estudiar los modelos de TC desde la perspectiva de (1), (2) o (3) –que no necesariamente se excluyen entre sí- supone un entendimiento mínimo de la concepción preteórica de conjunto. Sin embargo, también es cierto que se estudian los modelos de la teoría con ideas acerca de la concepción preteórica que no necesariamente coinciden siempre. ¿Cómo es que la interpretación de los modelos de la Teoría de Conjuntos permite el estudio de las propiedades y relaciones de tales objetos dado un cierto concepto primitivo de conjunto? Pese a que aparentemente la idea que subyace al estudio de los objetos de V es que son "colecciones de cosas determinadas por una o más propiedades", resulta que el entendimiento acerca de esta idea no es mejor que ambiguo. La existencia de modelos de

[116] Ver Jech (2003), p. 275 a 183. Hay algunas condiciones extra para empezar a operar con los modelos internos, como aceptar que todos los ordinales –construibles- se encuentran dentro del modelo interno, o restringir la construcción de conjuntos a las formas impuestas por el axioma de constructibilidad, conocidas como operaciones de Gödel.

[117] Recordemos que en la sección 1.2.1.3.2 de este trabajo se introdujeron los aspectos generales que definen a un modelo booleano-valuado.

TC no isomorfos es en parte el resultado de que no se tiene un convenio general acerca de lo que es ser un conjunto.[118] Por lo que ahora nos encontramos frente a un problema de carácter más epistemológico, a saber, ¿Cuáles son los aspectos fundamentales que subyacen el entendimiento del concepto preteórico de conjunto (y la noción de "ser conjunto de")? Aspirar a tener una comprensión clara de la idea básica de conjunto daría surgimiento a una clasificación mucho más fina de los modelos de TC que se proponen. Y esta cuestión encamina hacia la otra acerca de la categoricidad en TC en un sentido más filosófico.[119]

La característica de categoricidad trae consigo la disposición de que se puede optar por algún modo particular de entender nuestras nociones preteóricas de conjuntos, y con ello la propuesta de los axiomas involucra el modo en que se entienden los objetos en esta fase primitiva, haciendo que los modelos propuestos se restrinjan a la comprensión que se tiene de los objetos. Así que si se asume una postura como la de McGee en su (1997) que consiste en adoptar axiomas básicos adicionales que postulan la existencia de *urelementos*, se llega a un Teorema de Categoricidad para TC:

"**Teorema de Categoricidad** (McGee). Cualesquiera dos modelos de la teoría de segundo orden $ZFCU + Axioma\ del\ conjunto\ de\ urelementos$ con el mismo universo de discurso tienen conjuntos puros isomorfos. En particular, cualesquiera dos modelos de la

[118] Esto da pie, por ejemplo, a que se estudien modelos de TC en que los conjuntos no son bien fundados, o se tenga una idea de la pertenencia de objetos en conjuntos más laxa de lo que usualmente se admite (piénsese en el caso de los conjuntos que ellos mismos son elementos de sí mismos).

[119] Ciertamente, dentro de la filosofía de la teoría de conjuntos hay quienes han propuesto alguna forma de que la teoría sea categórica por medio de la postulación de las ideas y nociones relevantes para ello. McGee en su (1997) propone que en el universo *V* existen también objetos primarios que no son ellos conjuntos, pero dan sustento a la práctica enteramente abstracta de manipular teóricamente los conjuntos dentro del universo. McGee llama a esos objetos básicos *urelementos*, y una característica importante de ellos es que, en el sentido filosófico de la categoricidad, se les propone como el elemento ontológico-epistemológico que conecta al estudioso de la teoría de conjuntos y su práctica con los objetos y su estructura dentro de *V*. McGee dedica buena parte de ese trabajo a defender esta postura.

teoría de segundo orden $ZFCU + Axioma\ del\ conjunto\ de\ urelementos$ en que las variables de primer orden corren sobre todo cuanto hay tienen conjuntos puros isomorfos." (McGee, (1997), p. 55).[120]

Este resultado se obtiene de aceptar un compromiso fuerte al respecto de los objetos básicos del universo V denominados *urelementos*. Estos objetos no son ellos mismos conjuntos, sino que conforman el resto de los objetos que habitan V, es decir, los conjuntos. Esto nos lleva a adoptar una nueva visión de la jerarquía cumulativa de V en la que el primer estrato V_0 ya no corresponde al conjunto vacío, sino que ese estrato es el conjunto de los urelementos. Del primer nivel en V se obtiene el resto de los conjuntos en el $\alpha + 1$ – ésimo nivel con la fórmula $V_0 + \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, y para $\lambda \in LIM$ se unen los estratos inferiores del mismo modo que en la forma de la jerarquía original.[121]

Los urelementos como objetos primarios y el Teorema de Categoricidad de McGee ofrecen una ventaja interesante a los partidarios del realismo. Con ese teorema se tiene la garantía de que cualesquiera dos modelos de la teoría son isomorfos, de modo que la investigación acerca de la naturaleza de los conjuntos y sus relaciones, además de problemas serios de indecidibilidad, queda fuertemente dirigida a averiguar qué ocurre con los conjuntos puros y los objetos fundamentales del universo.[122] La clave de que lo anterior

[120] "**Categoricity Theorem.** Any two models of ZFCU + the *Urelement* Set Axiom whit the same universe of discourse have isomorphic pure sets. In particular, any two models of ZFCU + the *Urelement* Set Axiom in which the first-order variables range over everything have isomorphic pure sets.". La traducción es mía. La demostración del teorema depende por entero de la aceptación del axioma de Urelementos de McGee: "$\exists x(set(x) \wedge \forall y(\neg set(y) \rightarrow y \in x))$" (McGee, (1997), p. 52).
Aquí los *urelementos* son los objetos de TC considerados primitivos y como los bloques primarios contenidos en los conjuntos. El axioma del conjunto de *urelementos* postula que la colección de urelementos constituye un conjunto.
[121] Es decir, aquella forma fundacionista recursiva de pensar al universo V. Cfr. *Ibid.* P. 52.
[122] En *Ibid* P. 55 se menciona un ejemplo de cómo los urelementos ayudan a resolver una cuestión particular sobre el tamaño de diversos estratos en la jerarquía cumulativa.

funcione recae en el compromiso de aceptar los urelementos: “Si fuéramos capaces de añadir un axioma especificando lo que sean los urelementos, la categoricidad de los conjuntos se esparciría a todos los conjuntos.”,[123] estos objetos primitivos son los que delimitan en modo definitivo todos los conjuntos y hacen que los modelos de TC sean todos isomorfos entre sí.

Es apreciable cómo la existencia de los urelementos es compatible con el uso de PR: $\forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\big(\forall x_1 \in U_\beta\big) \dots (\forall x_n \in U_\beta)(\varphi(x_1, \dots, x_n)^{U_\beta} \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n))$, pues estos principios son compatibles con la existencia de los urelementos.[124] Más bien, el principal obstáculo que PR debe superar respecto a la propiedad de categoricidad en el sentido de McGee es el siguiente: una vez que hemos asumido el axioma de urelementos y con ello la existencia de objetos básicos en V, todos los supuestos sobre la existencia de conjuntos con ciertas propiedades o tamaños dados por los AGC involucran conjuntos en los que hay la presencia de tales objetos primitivos, por lo que todas las cuestiones que se tratan en PR se trasladan directamente a la naturaleza y manipulación de tales conjuntos. El entendimiento y posterior trabajo para zanjar problemas serios de indecidibilidad como los aquí presentados requiere presentar postulados cada vez más fuertes sobre esa clase de conjuntos, haciendo que todo el tratamiento sobre esas cuestiones pase de PR a estudiar qué naturaleza y propiedades tienen los urelementos que permitan la aparición de conjuntos de cardinalidades infinitas cada vez mayores, y todas ellas no deducibles del listado inicial de axiomas a disposición. Pese las ventajas que los urelementos puedan proporcionar al estudio de los estratos más altos del universo V de la mano con los llamados conjuntos

[123] “If we were able to add an axiom specifying what the *Urelemente* were, the categoricity of the pure sets would carry over to all the sets.” *Ibid.* P. 56. La traducción es mía.
[124] Cfr. *Ibid.* P. 68. McGee no dice mucho más acerca del hecho de que en ZFCU, los PR no proceden sin la existencia de los urelementos.

puros, es inevitable que surja un problema filosófico importante al respecto de la naturaleza ontológica de tales objetos primarios. Este problema, que llamaremos el problema de la fundamentación metafísica de los urelementos, está directamente vinculado al estudio de todos los candidatos de AGC que se puedan presentar con los PR en TC que admita esta noción de urelementos y el respectivo axioma de urelementos.

Desde el punto de vista lógico, el panorama tampoco se ve demasiado promisorio al respecto de TC con el axioma de urelementos. La presencia de urelementos en la manipulación de conjuntos de gran tamaño -entendido esto como números cardinales grandes- parece arrojar una compatibilidad total al respecto de todo el trabajo hasta ahora hecho con PR. Esto quiere decir que, hasta hora, ningún PR conocido ha dependido de la postulación o ausencia de urelementos para proponer algún gran cardinal. Más aún, la noción de reflexión para proponer AGC no parece depender de ninguna forma estructural de urelementos para funcionar, puesto que la propuesta de la existencia de determinados conjuntos de gran tamaño dados por ciertos PR hasta ahora no han dependido de ninguna forma especial de elemento primitivo del estilo de los urelementos. Pero de esto sólo podemos deducir que, hasta ahora, los urelementos no han jugado un rol esencial en el trabajo de los PR, ya sea para proponer nuevos axiomas o estudiar problemas de indecidibilidad.[125] Así que la cuestión acerca del aporte de los urelementos para formular PR que propongan un nuevo axioma que relacione tales objetos primitivos con alguna solución a problemas de indecidibilidad permanece abierta.

---

[125] Es de esperar que el lector interesado en la veracidad de las afirmaciones hechas hasta aquí espere una prueba al respecto de ellas. Sin embargo, esto supone un análisis exhaustivo de todos los grandes cardinales que han surgido hasta ahora del estudio de PR (inaccesibles, Mahlo, indescribibles, inefables, medibles, etc.), y tal labor rebasa los límites de este trabajo. Sin embargo, el estudio hecho por McGee en su (1997) parece arrojar que los urelementos son entidades compatibles con todas las formas de reflexión propuestas para hablar de los AGC tenidos hasta ahora. Un resultado interesante sería encontrar que un gran cardinal muy específico resultara depender de los urelementos, pero esto es algo que yo no he encontrado hasta ahora.

Volviendo al Teorema de Categoricidad de McGee, este resultado sólo funciona al adoptar la existencia de urelementos en TC. *V* admite cualquier altura posible siempre que los conjuntos que "vivan" en todo estrato de *V* sean resultado de realizar las operaciones las veces que se requieran sobre los elementos de la base. Después veremos que es posible recuperar algunos aspectos importantes sobre la categoricidad en general para TC empleando PR.[126]

2.4.2.- Formas parciales de PR

Anteriormente hemos visto que también se añaden PR restringidos a ciertos elementos de la teoría, como a los conjuntos estacionarios y los conjuntos directamente relacionados al tamaño de la jerarquía cumulativa. Estos PR especiales funcionan bien con algunas nociones y grandes cardinales, como hemos visto en la presentación de algunos resultados sobre PRCE y delta-reflexión que muestran que estas nociones funcionan bien para cardinales compactos y menores a ellos. Además, hay otros resultados más generales al respecto, como la preservación de la consistencia de la teoría con la delta-reflexión al asumir la existencia de sucesiones numerables de cardinales supercompactos, y la compatibilidad de la Hipótesis Generalizada del Continuo con la delta-reflexión. Este tipo de resultados representa una ventaja para el trabajo sobre grandes cardinales, pues, aunque podría suceder que PR en general no valga para un tipo de cardinal grande, podemos asegurar que una variante de los principios de reflexión vale para una colección importante

[126] Hemos de notar que aquí no se ha defendido la tesis más fuerte al respecto de que no hay ninguna manera de defender una forma de categoricidad para TC que sea compatible con PR. Si bien más adelante se volverá a cuestiones sobre categoricidad en este trabajo, no dirigiremos la discusión a tratar de resolver el problema de categoricidad en TC.

de esos cardinales: (i) los cardinales supercompactos permiten la delta-reflexión a partir del estrato $\omega^2 + 1$ de la jerarquía de alef's; (ii) por debajo de los cardinales débilmente compactos vale PRCE. Este nuevo enriquecimiento de la teoría con ayuda de estos principios especiales resulta muy atractivo en el trabajo teórico-conjuntista en general, pues los resultados obtenidos tratan en general sobre problemas y huecos de la teoría tales que con sólo los recursos teóricos y PR no podrían obtenerse. Ejemplos de esto son los resultados de PRCE sobre los cardinales compactos, o la consistencia de la teoría al aceptar la delta-reflexión junto con los cardinales supercompactos, o la compatibilidad de la Hipótesis Generalizada del Continuo con la delta-reflexión. Es notable que incluso estos tipos de reflexión especial tengan incidencia directa con otras ramas matemáticas, como la teoría de grupos y la topología.

De estas observaciones se consideran las siguientes cuestiones. En vista de los resultados no-triviales que se obtienen con estos principios especiales, ¿qué tan lejos pueden llegar estos principios en la Teoría de Conjuntos?; si tiene sentido hablar de Principios de Reflexión para otras nociones de la teoría además de los conjuntos estacionarios, ¿hay condiciones teóricas comunes que deben considerarse cada vez que tratemos de introducir un tipo de reflexión especial?, ¿y qué otras nociones de reflexión especial podemos empezar a considerar con los recursos teóricos disponibles? Estas preguntas son metateóricas y tratan sobre la existencia y el alcance de la noción de reflexión más general que hemos considerado desde el inicio. Hasta este punto no hemos dado con las respuestas a estas cuestiones, pues en particular la primera de ellas no presagia una respuesta clara por ahora debido a que las nociones especiales de reflexión consideradas aquí propician el surgimiento de problemas en TC que no es sencillo resolver. Lo que sí puedo decir ahora es: 1) La noción de reflexión parece lo bastante versátil para relacionarla con relativo éxito con otras nociones conjuntistas, 2) parece posible considerar nociones de reflexión especiales que propician un esclarecimiento sobre las cuestiones de indecidibilidad que interesan en este trabajo. En lo sucesivo de este trabajo, me enfocaré en presentar algunos problemas serios acerca de PR y será parte de mi objetivo rescatar una forma de reflexión especial que pudiera servir para atacar esos problemas.

Con lo visto hasta ahora, sabemos que los PR son introducidos en la teoría para dar un mayor apoyo formal y semántico. Los ejemplos anteriormente exhibidos muestran el funcionamiento de dichos principios y con ellos surgen los nuevos axiomas AGC con los que se restringe el tratamiento de toda oración a cierto estrato de V subindexado por un cardinal particular. Aunque PR ofrece ventajas a la demostrabilidad en TC, la categoricidad de la teoría en el sentido de McGee no puede ser preservada en su totalidad si pretendemos conservar el uso de PR y los nuevos axiomas AGC sin que esto suponga traer más problemas acerca de la naturaleza de los objetos básicos del universo V, aunque ontológicamente se puede rescatar una forma de categoricidad ligada a la concepción de las nociones básicas y primitivas de TC como "ser conjunto de".

Ahora presentaré una relación importante entre PR y ciertas condiciones para desarrollar un Principio de Reflexión más fuerte. Primero, un modelo estándar transitivo (completo) para TC consiste en un conjunto A tal que es transitivo (completo)[127] y la pertenencia es entendida como $\{\langle x, y\rangle | x \in y \wedge x, y \in A\}$, es decir que los modelos transitivos son justo los conjuntos transitivos con la relación $\in$. Para los modelos estándar transitivos y la definición de los principios dada anteriormente, PR está formulado de modo parcial:

---

[127] La transitividad aquí es entendida del modo usual: Si Y es conjunto entonces Y es transitivo (completo) sii $\forall x \in Y(x \subseteq Y)$.

Principio de Reflexión Parcial sobre TC. Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ cualquier fórmula de la teoría con *n* variables libres. Si para la *n*-tupla $a_1, \dots, a_n$ dada, $V \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ entonces existe un modelo estándar transitivo *A* tal que $V_A \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$,

donde el dominio del modelo estándar transitivo es justo un conjunto de tamaño un cardinal del tamaño adecuado (inaccesible, Mahlo, etc.). Pero cuando se manejan modelos estándar transitivos se puede tener la conversa en la definición parcial de PR, es decir:

Principio de Reflexión Completa sobre TC. Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ cualquier fórmula de la teoría con *n* variables libres. Hay un modelo estándar completo *A* de TC tal que para cada *n*-tupla $a_1, \dots, a_n$, $V_A \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y sólo si $V \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Esto es una propiedad importante para la propuesta de modelos a través de PR tomando como base los conjuntos transitivos.[128] El Principio de Reflexión Completa ofrece una ventaja importante, pues con él se pueden estudiar los enunciados especiales en varios estratos de *V* en los que, al cumplirse dichos enunciados en esos estratos, se tiene que valen en todo *V*. Además, como los modelos transitivos son compatibles con todas las nociones específicas conjuntistas estándar de la teoría, el Principio de Reflexión Completa puede ajustarse a PRCE y la delta-reflexión para tener sus respectivas versiones de reflexión completa.

[128] Ambos, los principios de reflexión parcial y completa sobre TC son presentados en Lévy, (1960), p. 2. Las versiones que presento aquí son una modificación de los originales en el trabajo de Lévy, los aquí presentados están formulados con el aparato técnico presentado en este trabajo.

Pese a esas formas de entender la reflexión, la ventaja ofrecida no es totalmente universal en el estudio de los modelos de TC, pues es bien sabido que hay una buena cantidad de modelos que no se construyen sobre conjuntos transitivos, y menos aún con las relaciones primitivas no necesariamente similares a $\in$. Ya hemos hecho notar antes que PR no garantiza la propiedad de categoricidad en sentido de McGee en TC, pues esos principios son bastante generales para aplicarse en varias interpretaciones de las nociones primitivas, y ahora podemos añadir que la noción de reflexión se sigue cumpliendo en aquellas interpretaciones en que los elementos de los conjuntos no son conjuntos ellos mismos, esto es, conjuntos no necesariamente transitivos.

2.3.- Conclusiones

Las ventajas ofrecidas por PR parecen ser lo bastante buenas para tratar los problemas de indecidibilidad que interesan, como HC. A continuación, se presentan las conclusiones más importantes de lo presentado hasta ahora:

1) Con PR, la búsqueda del valor de verdad de las oraciones indecidibles cambia a ser una búsqueda relacionada con candidatos de AGC lo suficientemente fuertes para decidir las cuestiones.

2) Dichos principios son lo bastante flexibles para adaptar bien ciertas nociones específicas de la teoría. PRCE y la delta-reflexión muestran ser principios efectivos a la hora de extraer

algunas propiedades interesantes respecto a algunos cardinales grandes, como los compactos.

3) PR representa una manera efectiva de estudiar los modelos de la teoría. Por un lado, la postulación de AGC siempre permite proponer modelos en los que se estudien los enunciados clasificados indecidibles y averiguar si su indecidibilidad persiste o no. Por otro lado, PR representa un "tope o techo" para el universo *V* en sentido de que el entendimiento de los conjuntos abarcados por cierto estrato subindexado por un cardinal propuesto por reflexión está acotado a dicho nivel, pues no se puede decir nada más de lo que está por encima del estrato en cuestión (salvo que las colecciones de cosas por encima son clases desde el punto de vista del estrato subindexado).

4) Por su formulación y funcionamiento, PR es compatible con la postulación de urelementos como objetos primitivos del universo *V*. PR concuerda bien con la visión jerárquica de *V* en que es posible pensar objetos primitivos en la base del mundo de los conjuntos, de modo que haya conjuntos conformados por dichos elementos básicos aparte de los considerados conjuntos puros. Dependiendo de los modelos, se habla de los objetos de la teoría de una u otra forma, pero la estructura y relaciones entre ellos permanece independiente de cómo se les interprete. Esta es la forma ontológica-epistemológica de categoricidad que podemos rescatar para la teoría con el uso de PR.

En el siguiente capítulo exploraré un problema importante en el uso de PR y cómo la utilización de PR, en principio, no puede encargarse de todas las cuestiones de indecidibilidad. Al menos no de aquellas que son de interés aquí.

Capítulo 3

Reflexión e indecidibilidad en órdenes superiores

3.1.- Algunos problemas en el uso de los Principios de Reflexión. La crítica de Reinhardt-Tait-Koellner

En el capítulo anterior se introdujo la noción del Principio de Reflexión (PR) como propuesta de candidatos de axiomas para TC. En ese capítulo se presentó a los PR en su forma más estándar según los trabajos de Levy (1959, 1960, 1961), Koellner (2003, 2008) y en relación directa con algunos números cardinales grandes llamados indescribibles (Kanamori, (2009)). Recuérdese además que la motivación de los PR es para apoyar la tesis de que el universo V que es el objeto de estudio de TC es una totalidad "absolutamente inabarcable" en términos modelo-teóricos, es decir que no se puede dar una fórmula φ de TC tal que $V \vDash \varphi$ solamente (pues esto querría decir que TC tendría un modelo exhaustivo sobre V, lo cual no se cumple), sino que lo que se tiene es que $\exists \alpha \in OR(V_\alpha \vDash \varphi^\alpha)$. Con PR, lo que tenemos es una jerarquía de niveles en V en los que es posible comprobar la verdad o falsedad de tales enunciados de TC, limitando así el valor de verdad de todo enunciado de TC a un segmento inicial de la jerarquía *V*. Una de las ventajas de hacer restricciones con los PR es que se vuelve más sencillo evaluar los enunciados especiales de indecidibilidad, pues se puede hacer un análisis más preciso de dichos enunciados al someterlos a evaluación en diversos estratos de la jerarquía cumulativa. Recordemos que el objetivo en mente al considerar los PR es intentar erradicar los problemas de indecidibilidad que surgen con algunos enunciados especiales como HC o AE, por lo que se requiere estudiar el alcance y potencia de PR para averiguar si la complejidad lógica de tales enunciados es cubierta por el tratamiento que los nuevos axiomas ofrecen.

En este capítulo me centraré en el estudio de algunos problemas que acompañan el uso de los PR, problemas presentados principalmente en Koellner (2003, 2008).

3.1.1.- PR y el obstáculo mínimo

Recordemos que la idea que motiva el uso de PR es la afirmación de que *V* es "absolutamente infinito", es decir que no es caracterizable por ninguna fórmula de TC. Esta motivación surge en parte porque hay serias dificultades debidas a los enunciados indecidibles al tratar de sostener que TC tiene un modelo exhaustivo de la teoría. Desde secciones anteriores, se ha hecho especialmente notorio el uso de PR para enriquecer la base axiomática de la teoría, lo cual viene impulsado por el hecho de que *V* es totalmente inabarcable en el sentido de que no hay una fórmula que, desde la perspectiva semántica de estudio, se pueda verificar su verdad siendo todo el universo conjuntista el que la satisfaga. El uso de PR conlleva sostener que cualquier oración demostrable de TC sea consecuencia de la teoría en algún modelo parcial que tenga como dominio algún nivel subindexado por un ordinal en la jerarquía cumulativa: "Como una consecuencia del Principio de Reflexión, y del Segundo Teorema de Incompleción de Gödel, se sigue que la teoría ZF no es finitamente axiomatizable: Cualquier número finito de teoremas de ZF tiene un modelo (un conjunto) por el Principio de Reflexión, mientras que la existencia de un modelo de ZF no es demostrable".[129]

Como se expuso antes, los PR presentados por Levy tienen varias ventajas atractivas desde el punto teórico-formal (su uso permite manejar mejor algunas nociones conjuntistas y enunciados indecidibles), pues Koellner -y el mismo Levy- ven en los PR un papel justificatorio de: (i) el universo V no es caracterizable por un modelo único, y (ii) la extensión axiomática de TC concuerda con la estructura del universo asociada, la fundacionista. Además, esquemáticamente el uso de PR permite tener un mejor control sobre la propiedad de consistencia para toda TC, pues por su forma general esos principios permiten identificar cotas en las que se sigue cumpliendo la consistencia "hacia abajo" del estrato ordinal que subindexa el nivel en que determinada oración de la teoría se cumple. Generalmente, la verificación del cumplimiento o no de la propiedad de consistencia no tiene un método universal de análisis, y es necesario hacer la verificación según el contenido particular de la oración de interés.[130] No obstante, hay una crítica importante en el uso de PR, atribuida a Koellner, la cual limita seriamente la fuerza de dichos principios.

---

[129] "As a consequence of the Reflection Principle, and of Gödel's Second Incompleteness Theorem, it follows that the theory ZF is not finitely axiomatizable: Any finite number of theorems of ZF have a model (a set) by the Reflection Principle, while the existence of a model of ZF is not provable." (Jech, 2006, p. 168). La traducción es mía. Nótese que la oración con(T) que expresa la consistencia de la teoría T refuerza el hecho de que no se puede tener un sistema formal recursivamente numerable que englobe todas las proposiciones que son consecuencia lógica del conjunto de axiomas.

[130] Debemos ser cuidadosos en este punto, pues podría pensarse que lo que se sugiere es que las oraciones particulares que se pretenden incluir en la teoría requieren que toda la teoría se someta a una reformulación desde su base axiomática hasta todas las consecuencias lógicas que hasta ese momento se tuvieran. No obstante, eso no es el caso en vista de que tenemos el Teorema de Demostraciones Relativas de Consistencia (teorema 1) el cual, como se menciona en sus condiciones, requiere que las nuevas oraciones que se añaden a

Recordemos la distinción entre tipos de indecidibilidad débilmente absoluta/fuertemente absoluta analizada en el capítulo 1. Según se entiende, las oraciones indecidibles débilmente absolutas pueden llegar a ser decididas mediante algunos ajustes teóricos (como aumentar axiomáticamente el poder deductivo de la teoría); las oraciones indecidibles fuertemente absolutas no tienen esta característica y permanecen así bajo extensiones de la teoría, además que su valor de verdad no es evidente usando razonamientos considerados metateóricos en sentido de que no pueden formalizarse con los recursos técnicos de la teoría.[131] Koellner motiva una distinción parecida a través de clasificar a los enunciados en dos tipos llamados *indecidibles benignos/serios*. Las oraciones indecidibles benignas son aquellas tales que su indecidibilidad en la teoría implica que dichas oraciones son verdaderas, pues al no poderse demostrar en la teoría consistente se tiene que dichas oraciones pertenecen la colección de enunciados verdaderos que la teoría no alcanza a demostrar. El ejemplo más claro de este tipo de oraciones es el enunciado Con(T). Las oraciones indecidibles serias carecen de la característica recién dicha de las benignas, pues de no poderse demostrar en la teoría no se obtiene información acerca de su valor de verdad, o sea que si φ es un enunciado indecidible serio (por ejemplo, sea φ = “Existen números cardinales inaccesibles” o algún otro enunciado indecidible como

---

la teoría sean interpretables en el modelo que se adopta de manera consistente. Es decir que las nuevas oraciones permitan una interpretación de su contenido de manera consistente. Esto último es menos fuerte que la reestructuración de toda la teoría.

[131] En su momento, sólo presenté la distinción similar a como es manejada en Van Aten, M., Kennedy J. (2009) y cómo ese modo de ver la indecidibilidad pudo afectar el trabajo de Gödel. Ahora, una pregunta importante sobre la indecidibilidad fuerte es: ¿Qué cuenta para que una extensión de ZF sea evidente y no cuente como medio para decidir ciertas oraciones? Si se permite la variación de criterios para construir extensiones de TC no-estándar para analizar ciertas oraciones indecidibles, en principio no es claro que esas oraciones permanezcan indecidibles. Esta cuestión permanece abierta.

HC) de TC entonces no tenemos la garantía de que la implicación $Con(T) \Longrightarrow Con(TC + \{\varphi\})$ se cumpla.[132]

Para enfatizar formalmente la dificultad que representan los enunciados indecidibles serios, es necesario identificar el nivel de complejidad que tienen aquellos enunciados que sobrepasan la capacidad de demostrabilidad de la teoría. Para hacer lo anterior dicho, Koellner recurre a la jerarquía de fórmulas de Levy presentada anteriormente y obtiene algunos resultados importantes. En lo primero que debemos fijarnos es que las teorías consideradas son tales que podemos extraer sus componentes formales más primitivos (axiomas, noción de demostrabilidad, etc.) para con ellos quedarnos solamente con el sistema formal base de la teoría y con la colección $Teo(T) = \{\varphi | T \vdash \varphi\}$ (donde φ es un enunciado del lenguaje formal de *T*).[133] Para el aspecto semántico, lo anterior permite inducir una relación de interpretación entre resultados de las teorías, denotada como $\leq$, definida como: las teorías S, T cumplen que $S \leq T\ sii\ Teo(S) \subseteq Teo(T)$. De este modo, podemos fijarnos en la interpretación de las consecuencias formales entre teorías en vez de restringir la atención solamente a los axiomas añadidos de una teoría "extendida" respecto a otra.[134]

---

[132] Ver Koellner (2003), p. 36 y 37. Así expuesta, la distinción de Koellner rescata la idea de la indecidibilidad débil con las oraciones indecidibles benignas, pues una extensión adecuada de la teoría podría hacer decidibles a dichas oraciones. En cambio, las oraciones indecidibles serias comparten los elementos característicos de la indecidibilidad fuerte, pues añadir a esas oraciones como axiomas de la teoría ni siquiera asegura la consistencia de la teoría aumentada.

[133] Básicamente, *Teo(T)* es la colección resultante de fijarnos en la parte sintáctica de la teoría *T*.

[134] Sobre la relación $\leq$ vale la pena notar lo siguiente: Hay dos características interesantes de $\leq$ relacionadas con las oraciones Con(T) y HC, respectivamente. La primera es que se cumple que $S \leq T\ sii\ S \vdash_{\prod_1^1} \subseteq T \vdash_{\prod_1^1}$ (esta notación indica el conjunto de todas las Π_1^1 consecuencias de T, además recuérdese que las $\prod_1^1$-oraciones son las que comienzan con un cuantificador universal y los parámetros se restringen a los objetos sencillos), y esto implica que las oraciones de forma $\forall n \in \mathbb{N}(S \nvdash \varphi(n))$ con $\varphi = \exists x(x \neq x)$, son demostrables en *T*, lo cual arroja como resultado que $T + Con(T) > T$ para cualquier teoría *T*. La segunda es que se cumple que $S \leq T\ sii\ T \vdash Con(S\ |n)\ \forall n$, lo cual permite obtener $ZF + HC \leq ZF$ para la teoría ZF en particular, esto por las demostraciones de independencia de Gödel y Cohen para HC. Ver Koellner (2003), p. 38 y 39.

Con la relación $\leq$ en TC se vuelve sencillo rastrear los niveles de la jerarquía V y la capacidad expresiva de la teoría que se asume para analizar ciertos enunciados. Con los estudios y resultados conseguidos hasta ahora por los teórico-conjuntistas, no se conoce ningún enunciado que sea limitativo en algún estrato finito de la jerarquía V. Es en los primeros niveles infinitos en donde empiezan a surgir ejemplos de oraciones indecidibles, y esos ejemplos son las oraciones que hablan acerca de la consistencia de la teoría, pero con la distinción hecha antes sobre limitaciones benignas/serias, se sabe que dichas oraciones no representan mayor riesgo que el que sean no demostrables en la teoría implica que sean verdaderas:

"HECHO 3. No hay un ejemplo conocido de una oración natural φ de la aritmética de primer orden tal que (i) φ sea independiente de ZF y (ii) no se sabe si o no φ es verdadera. […] HECHO 4. No hay un ejemplo conocido de una $\sum_{\sim 2}^{1}$-oración natural φ tal que (i) φ sea independiente de ZF y (ii) no se sabe si o no φ es verdadera." (Koellner, (2003), p. 39 y 40)[135]

Recalquemos la relación entre la jerarquía de fórmulas de Levy analizada antes, la distinción de limitaciones benignas/serias, y la relación $\leq$ definida anteriormente. Al hablar de que no hay enunciados indecidibles serios en la aritmética de primer orden y tampoco los hay con la forma $\sum_{\sim 2}^{1}$, lo que se sostiene es que la aritmética hasta el segundo orden está libre de enunciados indecidibles serios de primer orden. Sin embargo, las cosas dejan de ser

[135] "FACT 3. There is no known example of a natural sentence φ of first order arithmetic such that (i) φ is known to be independent ZF and (ii) it is not known whether or not φ is true. […] FACT 4. There is no known example of a natural $\sum_{\sim 2}^{1}$ sentence φ such that (i) φ is known to be independent ZF and (ii) it is not known whether or not φ is true." La traducción es mía.
El esquema $\Sigma_{\sim n}^{\beta}$ que aparece en esta nota corresponde a la denominada *jerarquía de fórmulas de Levy*. Una fórmula φ es una $\Sigma_{\sim n}^{\beta}$ – fórmula si $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \ldots Q x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ donde Q es un cuantificador universal si n es par, y es un cuantificador universal si n es impar. Los cuantificadores y parámetros (éstos expresados con la sucesión $a_1, \ldots, a_m$) de φ son de orden $\leq \beta$, y el signo $\sim$ indica que la variación de parámetros en la fórmula está permitida -es decir, la fórmula permite la consideración de variables de distintos órdenes a la vez-. Cfr. *Ibid.* P. 30.

así cuando pasamos a las oraciones $\sum_{\sim 3}^{1}$, pues se pueden dar varios ejemplos de oraciones de ese tipo que representan limitaciones serias para TC. El siguiente enunciado es un ejemplo (semiformalizado) que proporciona una $\sum_{\sim 3}^{1}$-oración:

MED. $\exists \mu: P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \forall E \subseteq \mathbb{R} \exists (\mathbb{R}, S)(\exists \lambda: (\mathbb{R}, S) \longrightarrow \mathbb{R}((\lambda(E)\ está\ definida) \wedge (\lambda(E) \geq 0) \wedge (\lambda(\emptyset) = 0) \wedge (\lambda(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(E_i)\ \forall (E_i)_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\lambda(I) = long(I)\ si\ I \subseteq \mathbb{R}\ es\ intervalo) \wedge (\lambda(I + c) = \lambda(I) \forall c \in \mathbb{R})) \supset \hat{\lambda}(E) = \mu(E)\ está\ definida).$

La notación $(\mathbb{R}, S)$ es la notación de un espacio medible de números reales. La oración *MED* está constituida por fragmentos $\sum_{\sim 2}^{1}$ dados por la definición de intervalos de números reales, y la $\sum_{\sim 3}^{1}$-oración resultante de ella no se puede decidir únicamente con los recursos de ZF. *MED* es la expresión de un problema central de la Teoría de la Medida que, asumiendo AC, es una oración que es falsa por un resultado de Vitalli.[136] Así que se tiene lo siguiente: "REQUISITO. Necesitamos nuevos axiomas *A* tales que no haya limitaciones naturales serias conocidas de ZF + *A* respecto de $\sum_{\sim 3}^{1}$-oraciones.".[137]

El requisito dicho anteriormente encamina la investigación en el siguiente sentido. Sabemos que, para TC formulada en lógicas de primer y segundo órdenes, las cosas funcionan bien porque los PR sirven como criterio formal en la aceptación o rechazo de oraciones indecidibles formuladas aquí. Es a partir del tercer orden que notamos que existen enunciados como *MED* que escapan al tratamiento que tenemos con los PR. Por

[136] Ver Koellner, (2003), p. 37 para el ejemplo que él usa en este punto.
[137] "NEED. We need new axioms A such that there are no known natural serious limitations of ZF + A with regard to $\sum_{\sim 3}^{1}$-sentences." (Koellner, (2003), p. 40). La traducción es mía. La naturalidad a la que Koellner alude aquí se refiere a las oraciones propias del estudio de conjuntos de números con propiedades particulares que requieren el uso de nociones aritméticas para su manipulación.

esto, la solución que se debe buscar para que TC + PR pueda volver a constituir una solución al problema de indecidibilidad en tercer orden está dirigida a detener el comportamiento de los enunciados indecidibles en tercer orden. En otras palabras, lo que se busca es que TC en tercer orden sea controlable por los PR para que ciertas $\sum_{\sim 3}^{1}$-oraciones sean analizables con los recursos de PR. A esto es lo que Koellner denomina el *Obstáculo Mínimo* (MH). Ahora es claro dónde poner atención para analizar las limitaciones serias de indecidibilidad. El MH que menciona Koellner y que debe ser sobrepasado para que TC + PR se encargue de otros problemas de indecidibilidad consiste en controlar el comportamiento de los enunciados $\sum_{\sim 3}^{1}$ en el siguiente sentido: cualquier $\sum_{\sim 3}^{1}$-oración que sea añadida a la teoría (mediante técnicas de construcción de modelos como *forcing*, etc.) dando como resultado que la teoría con dicha oración es consistente, implica que dicha oración es verdadera en la teoría original. Tratar de resolver MH es de suma importancia para TC, pues de resolverlo se tiene la ventaja de reducir el análisis de oraciones especiales a utilizar el Teorema 1 de este trabajo para aceptar dichas oraciones o no.[138]

En lo que resta de esta sección, seguiremos explorando MH. Con la presentación que tenemos de los PR, sabemos que estos principios son formulables en lenguajes de primer orden y órdenes superiores señalando las restricciones respectivas a los cuantificadores y parámetros en cada orden. Vimos que la relación de PR con los cardinales indescribibles viene dada por la definición de Q-indescribibilidad: para Q siendo $\sum_{n}^{m}$ o $\prod_{n}^{m}$, el número κ es Q-indescribible sii para cualquier relación $R \subseteq V_{\kappa}$ y cualquier Q-oración φ,

---

[138] La formulación del obstáculo mínimo hecha por Koellner es: "Freeze $\sum_{\sim 3}^{1}$" (Koellner (2003), p. 41). El término "congelar" que él utiliza va enfocado a la construcción de modelos de TC *vía forcing* en los que se tiene el valor de verdad de enunciados indecidibles, habiendo demostrado antes la consistencia de la teoría al añadirle tales enunciados. Koellner se ayuda de un resultado de Shoenfield para llegar a esto (ver *Ídem*). Sin embargo, no es difícil deducir la conclusión más fuerte de que otras técnicas recursivas de construcción de modelos (como los modelos internos constructibles de Gödel) permiten obtener el resultado de Koellner.

si $< V_\kappa, \in, R > \vDash \varphi$ entonces $< V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha > \vDash \varphi$ para un $\alpha < \kappa$. Ahora es conveniente introducir la noción de *espectro* de una teoría T dada por medio del siguiente conjunto: $Spec(T) = \{\alpha \mid V_\alpha \vDash T\}$.[139] Así pasamos al resultado general:

$Spec(TC + \prod_n^m - reflexión) = \prod_n^m - indescribibles$.[140]

Tal resultado nos permite observar un hecho importante sobre la relación que la noción de reflexión sostiene con la indescribibilidad en grandes cardinales, el cual es un hecho que consiste en señalar que, para conjuntos de fórmulas particulares Γ, si se puede encontrar un cardinal κ tal que todas las fórmulas de Γ se cumplen en el κ-ésimo estrato del universo *V*, entonces dicho κ es un cardinal Γ-indescribible.[141]

El resultado anterior permite seguir escalando en los órdenes de las fórmulas para obtener axiomas de mayor potencia expresiva. Recordando la notación $\mathcal{L}_{\beta,\gamma}$ para referirnos al lenguaje de TC con cuantificadores de orden $\leq \beta$ y parámetros de orden $\leq \gamma$, lo anterior lleva a Koellner a obtener el siguiente: "HECHO 7. $\mathcal{L}_{\beta,2}$-reflexión implica la existencia de cardinales de Mahlo, débilmente compactos e indescribibles de orden superior." (Koellner, (2003), p. 45).[142] Otros tipos de cardinales no se obtienen únicamente extendiendo el orden de los cuantificadores. Aun así, es importante saber que el segundo orden ya proporciona

[139] Ver Koellner, (2003), p. 32.
[140] Koellner presenta este resultado restringido al primer orden, es decir, $\prod_1^1$- oraciones. No obstante, él sostiene que el resultado en los primeros niveles permite avanzar hasta el n-ésimo orden y el m-ésimo parámetro. Por ello se puede obtener el resultado de mayor alcance que pongo aquí. Cabe señalar que este resultado permite proponer la existencia de cardinales débilmente compactos gracias a este Teorema de Hanf-Scott: κ es $\prod_1^1$-indescribible sii κ es débilmente compacto (Kanamori, (2009), p. 59). Ver Koellner, (2003), p. 44 y 45.
[141] Ver la definición 6 en *íbíd.* P. 44. Si bien este aspecto de la noción de indescribibilidad permite considerarla para cualquier conjunto Γ en principio, el reto es hallar maneras de hacer sostenible el conjunto Γ con fórmulas indecidibles en algún estrato del universo.
[142] "FACT 7. $\mathcal{L}_{\beta,2}$ -reflection implies the existence of Mahlo, weakly compact, and indescribable cardinals of high-order.". La traducción es mía.

una buena cantidad de cardinales grandes y axiomas con los que se extiende la teoría de TC.

Se ha llegado a sostener que todos los axiomas de grandes cardinales tienen su base en algún PR, y esto permitiría zanjar todas las cuestiones de indecidibilidad contempladas hasta ahora, pues cualquiera de ellas podría ser aceptada o refutada por algún gran cardinal propuesto por un axioma. Pero para efecto del problema que ha señalado Koellner y que me interesa aquí, la cuestión es si con PR se puede sobrepasar el obstáculo mínimo que se presentó antes.[143]

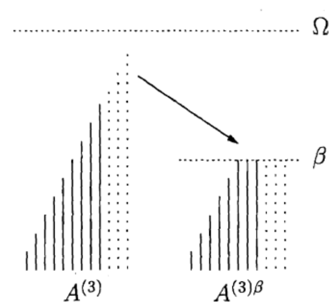
3.1.2.- La crítica a PR en tercer orden

En el obstáculo mínimo, hay que considerar lo que sucede con PR al trabajarse en 3er orden. Según la definición de los parámetros de las fórmulas de TC, las colecciones Y (clases) de β-ésimo orden relativizadas al estrato V_α se ven como $Y^{(\beta)\alpha} = \{X^{(\beta)\alpha} \middle| X^{(\beta-1)} \in Y^{(\beta)}\}, \beta \geq 1$. Así que la especificación de los parámetros de tercer orden en el lenguaje de TC se ve como $Y^{(3)\alpha} = \{X^{(2)\alpha} \middle| X^{(2)} \in Y^{(3)}\}$. Esta manera de trabajar con los parámetros es pensada por Koellner como una forma de relativizar las fórmulas del lenguaje al estrato deseado, y es una relativización irrestricta porque el número β dicho anteriormente puede ser cualquier ordinal.

Con lo anterior, nos fijamos en el siguiente ejemplo que propone Koellner. Considérese la clase de tercer orden $A^{(3)}$ cuyos miembros son todas las clases de segundo orden formadas por segmentos iniciales acotados de ordinales. La expresión formal de esa

[143] Ver *Ibid.* P. 46. Esto es lo que Koellner llama "programa débil".

clase es $A^{(3)} = \{[0, \dots, \alpha) | \alpha \in ORD\}$ y esta clase existe para cualquier β, pues podemos considerar los segmentos iniciales de ordinales que son menores que β. Ahora, si se relativiza la clase $A^{(3)}$ a cualquier nivel V_β con β menor a alguna de las cotas de los segmentos iniciales, obtendremos que la relativización $A^{(3)\beta}$ tendrá miembros que no cumplen con la condición de ser segmentos iniciales acotados, a saber, todos los segmentos $[0, \dots, \beta), [0, \dots, \beta + 1), \dots$ ya que por arriba de β se halla una infinidad de miembros de *ORD*. El siguiente diagrama es proporcionado por Koellner en (2003), p. 51 para



esquematizar la situación, donde Ω denota a *ORD*:

Así que estamos encontrando una relativización con PR de una clase de tercer orden que, al formularse en su respectivo orden del lenguaje de TC, produce una inconsistencia. En palabras más simples, el problema que surge aquí es básico en sentido de que no se requiere mucha maquinaria formal-conceptual para construir un caso de oración problemática para PR, pues los elementos de $A^{(3)}$ indican la disposición de "techos" ordinales los cuales, cuando consideramos una relativización β particular para aterrizar al estrato conjuntista deseado los intervalos de la clase, resulta que siempre podemos hallar elementos de $A^{(3)}$ que se escapan de la relativización, pero esto contradice el proceder de los PR resultantes en sentido de que obtenemos una fórmula condicional en tercer orden con consecuente $\exists \alpha \in OR(V_\alpha \vDash \varphi^\alpha)$ falso (donde φ es la fórmula en tercer orden para expresar el contenido de $A^{(3)}$), de aquí que surja la inconsistencia mencionada anteriormente. Más aun, $A^{(3)}$ y su relativización constituyen un ejemplo de que PR en tercer orden no preserva consistencia, pues la restricción a oraciones en segundo orden para expresar el contenido en tercer orden a algún estrato produce que las oraciones sean falsas ahí. Nosotros denotaremos al problema resultante como la objeción de Reinhardt-Tait-Koellner (RTK).[144]

De esto, Koellner extrae como conclusión: "HECHO 8. La $\mathcal{L}_{1,3}$-reflexión es inconsistente." (Koellner, (2003), p. 51).[145] Este hecho surge a raíz de que la relativización de clases de tercer orden como $A^{(3)}$permiten trabajar con objetos de la clase original que no se hallan en la clase relativizada (como mostró la presencia de los respectivos representantes de $A^{(3)\alpha}$). Las alternativas que propone Koellner para evitar la dificultad radican en añadir restricciones o al lenguaje de tercer orden o al modo de relativizar las fórmulas. En ambas no se tiene un resultado satisfactorio.

3.1.2.1.- Alcances de la expresividad de la noción de Reflexión. Introducción a la Γ_n-reflexión

Antes de seguir directamente a la presentación sobre el funcionamiento de la reflexión en los términos recién estudiados, conviene detenernos a examinar desde otra perspectiva, menos formal, lo que quiere decir que podamos hablar de la noción de reflexión con un vínculo más cercano a los lenguajes de órdenes superiores. En la siguiente sección se presentará una nueva manera de hablar sobre la reflexión en términos más específicos con un lenguaje formal mediante colecciones de fórmulas Γ_n. Estas colecciones

[144] La objeción se considera que tuvo su primera aparición en Reinhardt (1974). Después Tait se dedicó a explorarla en lugares como (1990) y (1998b). Nosotros la hemos explorado en el trabajo de Koellner.
[145] "FACT 8. $\mathcal{L}_{1,3}$-*reflection is inconsistent.*". La traducción es mía. Además, en las p. 50 y 51 se halla el tratamiento del ejemplo que apoya a este hecho.

tienen un papel preponderante en nuestra actual discusión por lo que a continuación se presenta.

En nuestra discusión hasta ahora desarrollada hemos procedido a considerar la noción de reflexión y varios aspectos sobre ella haciendo el siguiente importante supuesto: la relativización de las fórmulas a ciertos estratos del universo de TC siempre puede hacerse gracias a que el ordinal que subindexa el estrato en cuestión es expresable por una cierta fórmula de TC (usualmente con la presencia de alguna variable X libre de orden superior). Si bien esto nos permite alguna facilidad para manipular los PR en la teoría, parece inevitable que surjan cuestiones como las siguientes: ¿Por qué podemos suponer siempre que la fórmula a relativizar φ(X) tiene una forma lo suficientemente amigable para que el lenguaje lógico de TC en turno pueda trabajarla? En principio, no parece haber nada en especial en las fórmulas del tipo mencionado en la pregunta para que asumamos que es siempre posible construirlas teniendo la forma que deseemos. Pero esto en sí puede resultar problemático, pues se corre el riesgo de presentar fórmulas que de entrada no satisfacen el esquema de reflexión que hemos introducido en el estudio.

Afortunadamente, la dificultad sobre el buen manejo de fórmulas φ(X) con el lenguaje formal asumido para TC puede erradicarse en más de una forma, y veremos que el propósito de la colección Γ_n está encaminado precisamente a eliminar tal dificultad. Estas colecciones de fórmulas nos permiten tener una taxonomía de enunciados en el siguiente sentido. Como todas las fórmulas a evaluarse con un PR implican la existencia de un cierto estrato en el universo V, la complejidad de la fórmula se modifica a través del siguiente cambio:

$$V \vDash \varphi \Longrightarrow \exists \beta \in ORD(V^{\beta} \vDash \varphi^{\beta}) \xrightarrow[\text{Cambio de PR estándar a } \Gamma_n]{} \varphi = \forall X \exists Y \psi$$

donde los componentes de la fórmula φ como elemento de la clase Γ_n se describen: (1) la variable de *X* es de segundo orden y corre sobre la colección de objetos a definirse según la fórmula φ, (2) la variable *Y* es de orden finito y corre sobre las colecciones de objetos relevantes en la jerarquía *V* que se describen en la fórmula φ, y (3) ψ es una fórmula de primer orden que describe en TC estándar las propiedades y relaciones que definen a los nuevos conjuntos a introducirse, y que desde la perspectiva interna de la teoría son clases en que corre *X*.

Hay algunas consideraciones que se deben atender para comprender cómo es que las colecciones Γ_n funcionan. En primer lugar, se pide que la fórmula ψ sea de primer orden porque la TC en su forma estándar está formulada en este orden. Entre otras cosas, esto nos indica que, si nuestra teoría estuviera formulada en algún orden superior y contáramos con una noción de reflexión lo suficientemente clara para trabajarse ahí, entonces podríamos admitir el uso de fórmulas ψ construidas en el respectivo orden.

No obstante, en segundo lugar, es aquí donde se hace notar el uso de las variables *X*. El segundo orden en que opera la variable es importante debido a que recupera todas las colecciones de objetos (que en su estado teórico inicial vendrían a ser clases propias) que son definidas con la fórmula ψ y que no se pueden deducir con los solos recursos de la TC en turno (piénsese en las teorías ZFC, NBG, etc.).[146]

[146] Una razón de igual importancia, o incluso mayor si nos fijamos en los aspectos lógicos del lenguaje formal con el que se esté trabajando TC, es que el alcance de la noción de reflexión hasta ahora sólo se maneja bien en segundo orden. Más adelante se expondrá un resultado que presenta esta idea.

Finalmente, en tercer lugar, la variable *Y* permite la consideración de los órdenes adecuados a considerarse para los conjuntos relevantes de los que se habla en φ. Es importante que notemos que, como parte de la concepción de la clase *ORD* que hemos definido en *V*, el ordinal β que se postula viene dado por la existencia de un conjunto *Y* que engloba todas las clases *X* que satisfacen la fórmula ψ cuando se demuestra que la fórmula φ es consistente con el respectivo modelo *M* en turno de TC.

En este punto, conviene presentar el siguiente aspecto importante de las colecciones Γ_n que tiene que ver con la complejidad de las fórmulas ψ antes mencionada (la complejidad entendida en términos de la estructura lógica de la fórmula φ original del esquema de reflexión tradicional presentado). El subíndice n de Γ_n sirve para indicar el número de cuantificadores de orden superior necesarios para expresar el total de clases propias y estratos ordinales que se expresen en la fórmula. Así, las fórmulas que están en Γ_1 son las de tipo $\varphi = \forall X \exists Y \psi$; las fórmulas que están en Γ_2 son las de tipo $\varphi = \forall X_1 \exists Y_1 \forall X_2 \exists Y_2 \psi$; las de tipo Γ_3 son las respectivas fórmulas cuantificadas con una sucesión de cuantificadores universal y existencial hasta el subíndice 3… De modo que toda fórmula φ donde haya un número natural *n* de clases que se intenten definir mediante un PR puede ser recopilada en la respectiva colección Γ_n.

¿Por qué es importante considerar semejantes colecciones de fórmulas para operar generalmente los PR? Haremos notar la importancia metateórica de Γ_n diciendo que: (I) Si bien estas colecciones de fórmulas no aumentan el poder expresivo de la lógica que se usa para expresar la TC en turno, tales colecciones permiten un control mayor de todos los candidatos de fórmulas que se someten a PR según su estructura formal; (II) se obtienen algunas ventajas importantes que permiten un trabajo más fácil y ágil del tratamiento con

PR de tales fórmulas. Entre algunas de las ventajas que podemos listar ahora (y que en la siguiente sección serán abordadas con más detalle) son:

(i) Las fórmulas φ que se someten al tratamiento de PR caen dentro de alguna de las colecciones Γ_n, permitiendo averiguar cuántas clases propias es necesario abordar con la reflexión. Debido a que se asocia un estrato ordinal de *V*, lo anterior arroja automáticamente cuántos ordinales es necesario considerar en *ORD* para analizar la consistencia de φ.

(ii) Sabemos que la totalidad *V* no puede ser agotada por ninguna fórmula φ de la teoría debido al esquema general de PR, y esto hace que *ORD* en general se vea como la colección de ordinales en turno que hace verdadera a la oración φ de interés. Con ayuda de Γ_n esto se traduce directamente a que la noción de reflexión esté vinculada a la cierta Γ_n colección de fórmulas de interés, y así *ORD* también cumplirá con el tamaño de los ordinales relevantes para evaluar las fórmulas φ que hemos propuesta. Lo anterior hace posible introducir nuevas nociones conjuntistas que serán de gran utilidad, apoyadas principalmente por la noción de *n*-reflexión.[147]

(iii) En relación con la ventaja (ii), trabajar con la Γ_n-reflexión nos permitirá hacer el análisis de las fórmulas φ con más recursos teórico-conjuntistas que sólo el esquema general de PR puede permitir, pues veremos que ahora podemos hablar de los objetos que satisfacen las fórmulas φ en términos de objetos relacionados con sucesiones de ordinales, además de contar con una nueva clase de ordinales conocidos como *n*-inefables directamente ligados a la noción de *n*-reflexión. Todo esto nos ayudará a tener un par de

[147] En la siguiente sección, ahondaremos extensa y detalladamente sobre esta noción, que se dice de los conjuntos y algunas clases, tales como tener conjuntos *n*-reflectivos o que tengamos Γ_n-reflexión o que *ORD* sea Γ_n-reflectivo.

jerarquías nuevas de conjuntos que arrojan información valiosa sobre las colecciones Γ_n y sobre los ordinales *n*-inefables.

Ahora que hemos motivado las nuevas nociones que vienen con la introducción de las colecciones de fórmulas Γ_n, es necesario pasar a los detalles lógicos detrás de estas nociones, así como la obtención de algunos resultados útiles e informativos acerca de PR.

3.1.3.- Restricciones a PR en el lenguaje de tercer orden

El objetivo de restringir el uso del lenguaje de tercer orden para TC consiste en trabajar la teoría con dicho lenguaje llevado hasta el punto en que la teoría esté al borde de introducir alguna inconsistencia, pero siga siendo consistente mientras no se rebase ese límite. Al intentar restringir el lenguaje de tercer orden, se contemplan algunas nociones auxiliares:

(i) Para $\kappa \in CAR$, se dice que $X \subseteq \kappa$ es *n*-reflectivo en κ sii $\forall X_1 \dots \forall X_n (V_\kappa \vDash \varphi(X_1 \dots X_n) \rightarrow \exists \beta \in X \left(\varphi^\beta\left(X_1^\beta \dots X_n^\beta\right)\right))$, donde $\varphi(X_1 \dots X_n) \in \Gamma_n = \{\varphi \in \mathcal{L}^P_{<\omega} | \varphi = \forall X_1 \exists Y_1 \dots \forall X_n \exists Y_n \psi, \psi\ es\ de\ 1er\ orden, X_i\ es\ de\ 2do\ orden, Y_i es\ de\ orden\ arbitrario\ finito\}$ denotamos por Γ_n-reflexión al hecho de que *ORD* es n-reflectivo sobre *ORD*.

(ii) Para $X \subseteq \kappa$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $\mathcal{J}$ la colección de variables con o sin subíndices que corren sobre las sucesiones $\langle T_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ con $T_\alpha \subseteq V_\alpha$, y para $T \subseteq V_\kappa$, el conjunto donde T supone correctamente $\mathcal{J}$ es el dado por $G_{T,\mathcal{J}} = \{\alpha < \kappa | T \cap V_\alpha = \mathcal{J}(\alpha)\}$, la siguiente definición recursiva es para la suposición correcta de conjuntos según el ordinal:

$IN_0^\kappa = \{X \subseteq \kappa | X\ es\ estacionario\ en\ \kappa\}$,

$IN_{\gamma+1}^\kappa = \left\{X \subseteq \kappa \middle| \forall \mathcal{J} \exists \mathrm{T}\left(G_{T,\mathcal{J}} \cap X \in IN_\gamma^\kappa\right)\right\}, con\ IN_\gamma^\kappa \neq \emptyset$,

$IN_{\lambda}^{\kappa} = \bigcap_{\gamma<\kappa} IN_{\gamma}^{\kappa}\, , con\ \lambda \in LIM.$[148]

Se pueden establecer relaciones análogas a las anteriores para introducir los llamados cardinales inefables:

(i) X es inefable en κ sii $\forall\mathfrak{I}\exists S(G_{S,\mathfrak{I}} \cap X\ es\ estacionario\ en\ \kappa)$.

(ii) Sea $\mathfrak{I}^n$ la colección de variables con o sin subíndices que corren sobre las sucesiones $\langle S_{\alpha_1 \dots \alpha_n} | \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \kappa \rangle$ con $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \subseteq \alpha_1$, y para $S \subseteq \kappa$ el conjunto donde S supone correctamente $\mathfrak{I}^n$ es el dado por $G_{S,\mathfrak{I}^n} = \{(\alpha^1 \dots \alpha^n) \in [\kappa]^n | S \cap \alpha_1 = \mathfrak{I}^n(\alpha_1 \dots \alpha_n)\}$. X es *n*-inefable en κ sii $\forall\mathfrak{I}^n\exists S\exists W(W \subseteq X \wedge [W]^n_< \subseteq G_{S,\mathfrak{I}^n} \wedge W - estacionario\ en\ \kappa)$, con $[W]^n_<$ el conjunto de *n*-sucesiones estrictamente crecientes de ordinales de *W*, además la definición recursiva se sigue cumpliendo para la n-inefabilidad haciendo el cambio respectivo a $G_{S,\mathfrak{I}^n}$:

$In_0^{\kappa} = \{X \subseteq \kappa | X\ es\ estacionario\ en\ \kappa\}$,

$In_{\gamma+1}^{\kappa} = \left\{X \subseteq \kappa \middle| \forall\mathfrak{I}\exists S\left(G_{S,\mathfrak{I}} \cap X \in In_{\gamma}^{\kappa}\right)\right\}, con\ In_{\gamma}^{\kappa} \neq \emptyset$,

$In_{\lambda}^{\kappa} = \bigcap_{\gamma<\kappa} In_{\gamma}^{\kappa}\, , con\ \lambda \in LIM.$

Ahora disponemos de los elementos necesarios para relacionar la Γ_n-reflexión, que toma el alcance directo del lenguaje formal con que se trabaja TC, con la *n*-inefabilidad de ciertos cardinales, que permite señalar el rango de los tipos de orden de ordinales en las sucesiones que satisfacen las variables de objetos. Para esto se presentan los siguientes resultados:

[148] (i) y (ii) son parte de las nociones definitorias que introduce Koellner para hablar de algunos resultados siguientes. $\mathcal{L}^P_{<\omega}$ denota a la parte del lenguaje de orden finito que contiene a las expresiones en las que no ocurre "¬". En el texto original de Koellner se le llama la parte positiva del lenguaje de orden finito. Ver *Ibíd.* P. 52 y 53. Para profundizar más en la definición de conjuntos estacionarios, ver Jech, (2006), p. 91.

Teorema 14.- (Teorema 11 de Tait, en Koellner (2003) p. 54)

Sea $X \subseteq \kappa$. Las siguientes son equivalentes:

(1) X es n-reflectivo.

(2) $X \in IN_n^\kappa$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Se cumple que $\forall X_1, \dots, \forall X_m (V_\kappa \vDash \varphi(X_1, \dots, X_m) \to \exists \beta \in X \left(\varphi^\beta \left(X_1^\beta, \dots, X_m^\beta\right)\right), \forall \varphi(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma_n$ y X_i de orden arbitrario. Sean $\mathcal{I}$ el conjunto de variables con o sin subíndices que van en $\langle T_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tales que $T_\alpha \subseteq V_\alpha$, y para $T \subseteq V_\kappa$, sea $G_{T,\mathcal{I}} = \{\alpha < \kappa \mid T \cap V_\alpha = \mathcal{I}(\alpha)\}$, es decir, $X_i = X_i^\alpha$ es la interpretación de la i-ésima variable en la fórmula φ. Como *X* es *n*-reflectivo, para $X \in IN_n^\kappa$ se tiene que $\exists \beta \in X$ tal que $\varphi^\beta \left(X_1^\beta, \dots, X_m^\beta\right)$ se cumple en V_κ. Entonces $\forall \alpha < \kappa, X_1^\beta, \dots, X_m^\beta \in T \cap V_\alpha = \mathcal{I}(\alpha) \forall \varphi \in \Gamma_n$. Luego *X* es estacionario en κ y $G_{T,\mathcal{I}} \cap X \subseteq M \subseteq \kappa$ con M un CLUB y un argumento inductivo sobre *n* nos da la intersección para todo Γ_n. Luego, $\forall \mathcal{I} \exists \mathrm{T}(G_{T,\mathcal{I}} \cap X \subseteq M)$, es decir, $G_{T,\mathcal{I}} \cap X \in IN_{n-1}^\kappa$ por construcción de IN_n^κ. Por tanto, $X \in IN_n^\kappa$.

($\Leftarrow$) Sea $X \in IN_n^\kappa$. Procedemos por inducción sobre *n*:

$(n = 0)$ Como *X* es estacionario en κ, $\forall \varphi(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma_0, X_1^\beta, \dots, X_m^\beta \in T \cap V_\alpha = \mathcal{I}(\alpha)$, pues todas las variables suponen correctamente en $\alpha < \kappa$. Entonces $\forall X_1, \dots, \forall X_m \exists \beta \in X \left(\varphi^\beta \left(X_1^\beta, \dots, X_m^\beta\right)\right)$. Así, X es 0 – reflectivo.

(Hipótesis Inductiva) Supóngase que *X* es *n*-reflectivo para $X \in IN_n^\kappa$.

(Paso Inductivo) Sean $X \in IN_{n+1}^\kappa, \varphi(X_1, \dots, X_m)$. Como $G_{T,\mathcal{I}} \cap X \in IN_n^\kappa \forall \mathcal{I} \forall T$, sean $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \{\alpha' < \kappa \mid T \cap V_{\alpha'} = \mathcal{I}(\alpha + \beta)\}$ con $\beta = \min\{\gamma < \kappa \mid T_{\alpha+\gamma} \subseteq V_{\alpha'}\}$ y

$T \subseteq V_\kappa$. Entonces $G_{T,\mathcal{J}}, \cap X \in IN_n^\kappa$ por HI, y X es *n+1* – reflectivo. Por lo tanto, X es n – reflectivo $\forall n$ sucesor.

(*LIM*) Como $IN_\lambda^\kappa = \bigcap_{\gamma<\kappa} IN_\gamma^\kappa \text{, } con\ \lambda \in LIM$, el resultado se cumple y X es λ-reflectivo.■

Teorema 15.- (Lema 12 de Tait y Baumgartner, en *Ídem*)

Sea $X \subseteq \kappa$. Si (1) $X \in IN_n^\kappa$, entonces (2) X es n – inefable.

Demostración. Supóngase (1). Procediendo por inducción sobre *n*:

(n = 0) Como $X \in IN_0^\kappa$, X es estacionario en κ y se tiene que $\forall \varphi \in \Gamma_0$, las variables con o sin subíndices $\mathcal{J} = \mathfrak{J}$ y $S = T$, haciendo $G_{T,\mathcal{J}} = G_{S,\mathfrak{J}} = \{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha = \mathfrak{J}(\alpha)\}$ se cumple que $\forall \mathfrak{J} \exists S(G_{S,\mathfrak{J}} \cap X$ es estacionario en κ) y X es inefable.

(Hipótesis Inductiva) Supóngase el resultado cierto para *n* = *k*.

(Paso Inductivo) Si $X \in IN_{n=k+1}^\kappa$, para $\forall \varphi \in \Gamma_n$ hacemos $\mathcal{J} = \mathfrak{J}^n$ son las variables con o sin subíndices en sucesiones $\langle S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \mid \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \kappa \rangle$ y $S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \subseteq \alpha_1 < \kappa$. Entonces se tiene que $S \cap \alpha_1 = \mathfrak{J}^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y así $\forall \mathfrak{J}^n \exists S \exists W(W \subseteq X \wedge [W]_<^n \subseteq G_{S,\mathfrak{J}^n} \wedge W - estacionario\ en\ \kappa)$ pues W tiene todas las *n* – sucesiones estrictamente crecientes. Por lo tanto, X es *n* – inefable.

(*LIM*) Como $In_\lambda^\kappa = \bigcap_{\gamma<\kappa} In_\gamma^\kappa \text{, } con\ \lambda \in LIM$, el resultado se sigue y X es λ-inefable.■

Corolario 16.- (Corolario 13 en *Ídem*)

Supón que X es n – reflectivo. Entonces X es n – inefable.

Demostración. Por el Teorema 14, $X \in IN_n^\kappa$, y por el Teorema 15, X es *n* – inefable.

■

Con los resultados recién adquiridos, se establece una importante conexión entre las fórmulas para las cuales algún PR refleja a algún estrato conjuntista y ciertos cardinales que identifican las clases de objetos que satisfacen esas fórmulas. Esta conexión viene dada al aplicar el corolario anterior de manera conveniente a los estratos conjuntistas en que se cumplen tales fórmulas. En los siguientes resultados se presentan, por una parte, la relación de la Γ_n-reflexión con los cardinales inefables, por otra parte, la identificación de una cota cardinal superior en que se garantiza el buen funcionamiento de la Γ_n-reflexión:[149]

Teorema 17.- (Teorema 14 de Tait, en *Ídem*)

Supón que V_κ satisface la Γ_n-reflexión. Entonces κ es n-inefable.

Demostración. Como V_κ cumple la Γ_n-reflexión, se tiene que para todo $X \subseteq V_\kappa$, X es n-reflectivo. En particular κ cumple con ser n – reflectivo y aplicando el Corolario 16 se tiene que κ es n – inefable. ■

Teorema 18.- (Teorema 15 de Tait, en *Ibid*. P. 55)

Supón que κ es un cardinal medible.[150] *Entonces V_κ satisface la Γ_n-reflexión para todo n.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible. Por inducción sobre n:

(n = 0) Sea $X \subseteq \kappa$. Como κ es medible, existe un ultrafiltro no principal κ – completo U en κ, por lo que $X \in U$ o $(\kappa - X) \in U$. Entonces, como $\kappa \in U, \kappa \subseteq U$ por ser transitivo, así que $X \in U$. Como U es κ – completo, es cerrado bajo intersecciones de menos de κ miembros, así que si $Y \in U$ entonces $X \cap Y \in U$. Por tanto $X \in IN_0^\kappa$ y por Teorema 14, X es 0 – reflectivo. Por lo que V_κ satisface la Γ_0-reflexión.

---

[149] Ambos resultados son mencionados por Koellner en *Ibid.* P. 54 y 55.

[150] Siguiendo la definición 10.3 en Jech (2006), p. 127, un cardinal κ es medible si existe un ultrafiltro no-principal κ-completo *U* sobre κ.

(Hipótesis Inductiva) Supóngase el resultado cierto para $n = k$.

(Paso inductivo) Sea $X \subseteq \kappa$. Como $X \in U$ y se tiene $G_{T,\mathcal{J}} = \{\alpha < \kappa \mid T \cap V_\alpha = \mathcal{J}(\alpha)\}$ tal que $X \in IN^{\kappa}_{n-1}, \forall \varphi \in \Gamma_{k+1}$ se tiene que $X \cap G_{T,\mathcal{J}}$ cumple que $\forall \mathcal{J} \exists T \subseteq V_\kappa (T \cap V_{\alpha+1} = \mathcal{J}(\alpha))$ cumple con que $\exists \gamma \in X(V_\kappa \vDash \varphi^{\gamma}(X^{\gamma}_1, \ldots, X^{\gamma}_{n+1}))$ pues X es estacionario. Luego, $X \cap G_{T,\mathcal{J}} \in IN^{\kappa}_{n+1}$ y así $X \in IN^{\kappa}_{n+1}$. Por el Teorema 14, X es (n+1) – reflectivo y V_κ satisface la Γ_{n+1}-reflexión.

(LIM) Sea el resultado cierto para para todo $\beta < \lambda \in LIM$. Como $IN^{\kappa}_{\lambda} = \bigcap_{\beta<\kappa} IN^{\kappa}_{\beta} \in IN^{\kappa}_{\beta} \forall \beta < \lambda$, V_κ satisface la Γ_λ-reflexión.■

Esto nos dice que la Γ_n-reflexión funciona entre los cardinales n-inefables y un cardinal medible, y la preservación de la consistencia en el uso de PR restringidos a la Γ_n-reflexión también se halla entre un cardinal medible y los cardinales n-inefables. La cuestión ahora es si la Γ_n-reflexión puede sobrepasar el obstáculo mínimo. Otra manera de formular la cuestión es: ¿Para todas las oraciones indecidibles de la teoría existe algún PR asociado a alguna forma de Γ_n-reflexión, entre los cardinales n-inefables y un cardinal medible, tal que resuelve la cuestión de indecidibilidad de cada oración?

Recordemos que la notación $\kappa \to (\lambda)^n_m$ es para denotar la propiedad de partición que dice que toda partición de $[\kappa]^n = \{X \subset \kappa \mid |X| = n\}$ en m piezas tiene un conjunto homogéneo de tamaño λ, donde ser conjunto homogéneo significa que todos los subconjuntos de n elementos de dicho conjunto están en la misma pieza de la partición. Ahora, para $\alpha \geq \omega$, el cardinal de Erdös κ(α) es el menor κ tal que cumple $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$. El siguiente resultado es esencial para mostrar el alcance de la Γ_n-reflexión:

Teorema 19 (Koellner).- Asumiendo que $\kappa = \kappa(\omega)$ existe, hay un $\delta < \kappa$ tal que V_δ satisface la Γ_n-reflexión para toda n.

Y con él viene el siguiente resultado que expresa el alcance de los PR más potentes hasta ahora:

Teorema 20 (Koellner).- Asumiendo que $\kappa = \kappa(\omega)$ existe, hay un $\delta < \kappa$ tal que V_δ satisface la $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$-reflexión para toda n.[151]

Estos dos últimos teoremas establecen un hecho muy importante acerca del alcance actual de la noción de reflexión: la $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$-reflexión es consistente y "más débil" que los cardinales ω-Erdös (en sentido de que si asumimos la existencia de tales cardinales de Erdös entonces garantizamos el buen funcionamiento, en términos de no tener riesgo de introducción de inconsistencia, de la Γ_n-reflexión). Los PR son garantizados hasta ese nivel dentro de la teoría, ¿Qué ocurre con la noción de reflexión a partir del tercer orden en estos términos? Recordemos que oraciones como HC o MED manejan parámetros de órdenes superiores al segundo, por lo que ahora debemos poner atención al orden del lenguaje formal con el que estudiamos TC.

---

[151] Ambos teoremas son los Teoremas 17 y 18, respectivamente, en Koellner, (2003), P. 55 y 59. Aunque los enunciados de ambos teoremas parecen expresar una idea que no es muy complicada de entender, la demostración del Teorema 19 usa varios recursos introducidos por un par de lemas adicionales que no incluiré en este trabajo debido a que en la obra citada se hallan todos esos detalles y lemas. El lector interesado en los detalles puede acudir a la referencia dada al inicio de esta nota.
La notación $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$ del Teorema 20 es para denotar el caso de un lenguaje de orden β donde su parte positiva es tal que todos los cuantificadores universales son de segundo orden. Este teorema es consecuencia directa del Teorema 19 al considerar la Γ_n-reflexión restringida al caso de lenguaje de orden β y cuantificadores universales de segundo orden.

Es necesario hablar de la siguiente noción de modelo interno constructible basado en conjuntos particulares.[152] Dado el conjunto X, se define $X^{\#} = \{\varphi | (L_{\aleph_\omega}[X], \in, X) \vDash \varphi[\aleph_1, \dots, \aleph_n]\}$, es decir el conjunto de fórmulas φ tales que el $\aleph_\omega$-modelo constructible inducido por X hace verdadera a φ en las sucesiones $\aleph_1, \dots, \aleph_n$ de indiscernibles de Silver.[153] Un resultado importante e interesante es que la afirmación (°) "$X^{\#}$ existe" equivale a que existe un encaje elemental no-trivial $f: L[X] \to L[X]$.[154] La afirmación puede usarse convenientemente para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 21 (Lema 19 (Woodin, 1982)).- Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) $X^{\#}$ existe para todo conjunto X.

(2) Si G_1 es un conjunto genérico sobre V y G_2 es un conjunto genérico sobre $V[G_1]$, entonces $V[G_1]$ y $V[G_2]$ satisfacen las mismas $\sum_{\sim 3}^{1}$-oraciones (con parámetros en $V[G_1]$).[155]

---

[152] Ver las Definiciones 9, 10 y 11 de la sección 1.2.1.1.1 en capítulo 1 de este trabajo.

[153] Estos indiscernibles son una colección que es dada por el siguiente resultado de Silver: Si existe un cardinal de Ramsey, entonces:
(I) Si κ y λ son cardinales no contables tales que $\kappa < \lambda$, entonces $(L_\kappa, \in)$ es un submodelo de $(L_\lambda, \in)$.
(II) Hay una única clase cerrada no acotada de ordinales *I* conteniendo todos los cardinales no contables tales que para todo cardinal no contable κ:
(a) $|I \cap \kappa| = \kappa$.
(b) $I \cap \kappa$ es un conjunto de indiscernibles para $(L_\kappa, \in)$, y
(c) todo $\alpha \in L_\kappa$ es definible en $(L_\kappa, \in)$ desde $I \cap \kappa$.
Los indiscernibles de Silver son los miembros de la clase *I*. Véase Jech (2006), p. 311.

[154] Puede verse más a detalle el conjunto $X^{\#}$ en *Ibid.* P. 328.

[155] En Koellner (2003), p. 59 aparece este resultado. Enfatizo la importancia de la afirmación (°) para este lema porque su uso permite obtener una demostración más inmediata considerando el encaje elemental no trivial *f* de esa afirmación. Por medio del Teorema 20 y reconociendo la propiedad de que los encajes elementales sólo pueden modificar según el orden del lenguaje de TC que tengamos (que sabemos por el Teorema 20 que lo más potente que tenemos por ahora es el segundo orden), el tercer orden se queda fijo para las mencionadas extensiones genéricas mencionadas en (2) del lema de Woodin. Todo esto anterior constituye, desde luego, sólo un esbozo de la demostración más inmediata que tenemos en mente para el lema.

Ahora estamos en posición de presentar la objeción de Koellner a la propuesta de restringir el lenguaje de tercer orden. Se dice que el conjunto de axiomas A es genéricamente invariante sii *ZF+A* se preserva bajo extensiones de *forcing* de tamaño de conjuntos. Así, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 22 (Koellner).- Sea ZF+A. Si A es genéricamente invariante y ZF+A congela $\sum_{\sim 3}^{1}$*, entonces* $X^{\#}$ *existe para todo X.*[156]

Desde la perspectiva de Koellner, ya contamos con todos los recursos pertinentes para mostrar cómo es que la noción de reflexión en tercer orden falla. Sin embargo, aún queda un par de resultados pendientes que son necesarios para exhibir la carencia de fuerza de PR en tercer orden en términos enteramente formales:

Teorema 23 (Jech (2006), 18.8).- Todo indiscernible de Silver es inefable (por tanto débilmente compacto) en L.

Demostración. Para el caso del *n*-ésimo indiscernible i_n se cumple que los submodelos preservan el orden. Veamos el caso de i_ω:

Tomemos la función $j: L_{i_\omega} \to L_{i_\omega}$ la cual preserva el orden $<$ dado en ORD^L. Si se cumple que $j(i_\omega) = i_\omega$ entonces i_ω es constructible, está en L y ya está. De modo que sea que $j(i_n) = i_n$ y $j(i_\omega) > i_\omega$, entonces j se extiende a un encaje elemental $j: L \to L$ con i_ω (encaje no trivial).[157] Fijándonos en la restricción $j \restriction_{(L_{i_\omega}, <)}$ se

[156] En el trabajo de Koellner este corolario aparece con el número 20. Ver Koellner, (2003), p. 59 (la traducción es mía). La demostración es una consecuencia directa del lema de Woodin.

[157] Esto es de hecho el resultado 18.7 de Jech (2006).

cumple que $P^{L_{i_\omega}}(i_\omega)$ se preserva a L, y por este resultado: "Sean M y N modelos transitivos de ZFC y sea $j: M \to N$ un encaje elemental no trivial con κ el menor ordinal movido por tal encaje. Si $P^M(\kappa) = P^N(\kappa)$, entonces κ es inefable en M.",[158] se cumple i_ω es inefable. Un argumento inductivo muestra que todo indiscernible de Silver i_α con $\alpha > \omega$ es inefable■

Teorema 24 (Jech (2006), 18.10).- Si $0^\#$ existe entonces el cardinal de Erdös η_ω en L es más pequeño que el menor indiscernible de Silver.

Demostración. Supongamos que $0^\#$ existe y consideremos η_ω el ω-cardinal de Erdös. Tenemos el siguiente resultado: "Si $0^\#$ existe, $L \vDash \exists\kappa(\kappa \to (\omega)^{<\omega})$",[159] así que se cumple que $L \vDash \exists\kappa(\kappa \to (\omega)^{<\omega})$ y sabemos que η_ω es constructible en L. Esto hace que $(\eta_\omega)^L$ y para I nuestra colección de indiscernibles de Silver todo conjunto constructible es definible en ella, entonces por el corolario 18.2 (Jech (2006), p. 312): "Todo conjunto constructible y definible en L es contable", se tiene que η_ω es contable, y por Teorema 23, todo indiscernible de Silver es inefable en L. Como todo cardinal inefable es en particular no contable, en particular el indiscernible de Silver más chico $\iota_0 >_L \eta_\omega$■

Con los resultados adicionales expuestos, ya podemos ofrecer un argumento que muestra el fallo enteramente formal de PR cuando estamos en 3er orden. Supongamos por un momento que contamos con axiomas A vía Γ_n-reflexión que neutralizan a $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$ en el sentido

[158] Este resultado es de hecho el lema 17.32 de *Ibid.* P. 304. Un dato interesante es que la conclusión que ponemos aquí es la que se demuestra en el texto original y es más fuerte que la conclusión original del lema, que afirma que κ es débilmente compacto en *M*.
[159] Esto es de hecho el resultado 18.9 de Jech (2006).

de evitar los problemas de contradicción mencionados antes. De modo que contamos con la extensión teórica ZF + A que es además genéricamente invariante, y por el Corolario 22, tenemos que en ZF + A existe $X^{\#}$ para todo conjunto X. Sabemos que A obedece a alguna Γ_n-reflexión, y como en particular $0^{\#}$ existe, por el resultado 18.9 usado al comienzo de la demostración del Teorema 24, se tiene la existencia de κ(ω) y $L \vDash \kappa = \kappa(\omega)$ existe. Por lo que, por los Teoremas 19 y 20, para todo número natural *n*, Γ_n-reflexión y $\mathcal{L}_{\beta}^{P_2}$-reflexión se cumplen en un L_δ con $\delta < \kappa$. Pero por el Teorema 24, sabemos que κ es menor que el más pequeño de los indiscernibles de Silver, y por el Teorema 23 sabemos que todo indiscernible de Silver es inefable. Debe ser que en el modelo L_δ se cumple que $X^{\#}$ existe para todo X conjunto, pero esto no es el caso: Como por la extensión ZF +A llegamos a la existencia de κ de Erdös, consideramos el resultado "Todo conjunto definible constructible en L es contable"[160] y en la Γ_n-reflexión y $\mathcal{L}_{\beta}^{P_2}$-reflexión tendría que cumplirse para todo conjunto X inducido por el *n*-ésimo indiscernible de Silver ι_n que $L_{\aleph_\omega}[X] \vDash X\ es\ definible$, y todo conjunto definible es constructible, haciendo que X sea contable por el resultado citado anteriormente, pero en ι_n de hecho se expresa al *n*-ésimo ι_n de Silver (vía la fórmula φ que hace a ι_n definible en $L_{\aleph_\omega}[\iota_n]$) y como $L \vDash \kappa = \kappa(\omega) existe$ y κ es contable aquí, $\iota_n < \kappa$ y ι_n es contable, contradiciendo que ι_n es inefable dado por el Teorema 23. De esto se sigue que Γ_n-reflexión y $\mathcal{L}_{\beta}^{P_2}$-reflexión no neutralizan $\sum_{\sim 3}^{1}$ y no tenemos un PR que logre superar el obstáculo mínimo del 3er orden.

Lo anterior constituye el esbozo de la demostración de lo que Koellner tiene como resultado siguiente:

[160] Este es el corolario 18.2 en *Ibid*. P. 312.

Teorema 25 (Koellner).- Ningún principio de reflexión conocido que sea consistente puede superar el Obstáculo Mínimo.[161]

Es aquí donde apreciamos el alcance de PR para tratar el problema de la indecidibilidad seria, a saber, que en su forma actual es un problema que no puede superarse formalmente con ese recurso siendo de la forma expuesta hasta ahora.

En cuanto a la opción de restringir el modo de relativizar las fórmulas de tercer orden, se pueden dar formas variadas de establecer condiciones de restricción a las fórmulas para tratar de superar el obstáculo mínimo, no obstante, lo siguiente constituye una caracterización de algunas propiedades generales que se deben cumplir para toda forma de relativización de fórmulas de tercer orden. Sea M un modelo de TC y sea $j: M \to M$ un encaje no trivial, además sea $\kappa = crit(j)$, es decir que κ es el menor ordinal que es movido por j, digamos $j(\kappa) = \mu$. Por la definición del encaje j, se debe preservar lo que es verdad en M a la imagen de M bajo j, y esto hace indistinguible lo que es verdad en ambos modelos. Así que si se aplica j a la clase de orden superior $X^{(\beta)}$ sobre V_κ^M, entonces la relativización de la clase se queda en el κ-ésimo nivel, es decir $j\left(X^{(\beta)}\right)^\kappa = X^{(\beta)}$. Así que al evaluar la Γ_n-reflexión en j, se tiene que existe el cardinal de Erdös $\kappa = \kappa(\omega) > \mu$ y estamos en las condiciones del Teorema 19. Sabemos lo que pasa con los Teoremas 20 y siguientes respecto al modelo M y el ordinal κ, por lo que nuevamente se obtiene que ningún PR que esté restringido en relativización sobrepasa el obstáculo mínimo. Lo anterior haciendo algunas modificaciones al Teorema 25 que anteriormente expusimos aquí.

[161] Este es el teorema 21 de Koellner en su (2003), p. 60.

3.2.- Conclusiones

Si bien vimos antes que PR parecía promisorio en la búsqueda de nuevos axiomas que extiendan TC para atacar los problemas de indecidibilidad en general, con lo que hemos visto hasta ahora no es seguro que las ventajas sean demasiadas. Ahora recopilamos los principales resultados que hemos adquirido con ayuda de lo presentado en las últimas secciones:

1) La distinción entre indecidibilidad benigna/seria es importante para ofrecernos una clasificación más precisa de aquellos enunciados no-demostrables en la teoría que tienen consecuencias importantes al ser aceptados o rechazados: Mientras que oraciones como Con(TC) hacen que su no-demostrabilidad implique su verdad en la teoría(comportamiento benigno), oraciones como HC o MED no arrojan verdad de su no-demostrabilidad (comportamiento serio). Oraciones como éstas últimas podrían introducir inconsistencia a la teoría de ser aceptadas.

2) Mientras que tenemos resultados importantes sobre la noción de reflexión en primer y segundo órdenes de la teoría, a saber, que en primer orden no hay riesgos de inconsistencia y en segundo orden no hay comportamiento inconsistente registrado, el análisis sobre características conjuntistas muy básicas como la del rango muestra que PR en general falla para preservar consistencia en tercer orden. Es necesario considerar opciones de procedimiento para averiguar cómo la noción de reflexión puede superar el obstáculo

mínimo (MH): TC + PR "congela" las $\sum_{\sim 3}^{1}$-oraciones en sentido de que no surge indecidibilidad seria.

3) La Γ_n-reflexión es un nuevo recurso para trabajar PR desde la misma teoría, pues permite clasificar las fórmulas en términos de conjuntos y variables que corren sobre sucesiones de ordinales que definen toda una jerarquía nueva IN_λ^κ que especifican que conjuntos y estratos de la jerarquía en V definen. La jerarquía anterior está relacionada con una jerarquía In_λ^κde grandes cardinales especiales conocidos como n-inefables que nos permiten rastrear los conjuntos con tamaños expresados por determinados PR.

4) Para la opción que consiste en restringir el lenguaje de tercer orden con la Γ_n-reflexión, una serie de resultados arrojan que la Γ_n-reflexión es consistente por debajo de ciertos cardinales ω-Erdös. La forma más fuerte de reflexión conocida que es consistente, $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$-reflexión, también se halla por debajo de tales cardinales. Cualquier intento de llevar a PR en tercer orden más allá de su fuerza de consistencia en términos de extensiones genéricas dadas por nuevos axiomas produce inconsistencia con los modelos inducidos, por lo que este camino de proceder es infructuoso para eliminar MH con PR en tercer orden.

5) La otra opción que consiste en restringir la relativización de fórmulas en tercer orden también está sujeta a limitaciones similares que la anterior opción. Ligeras modificaciones en los modelos considerados y la consideración de encajes elementales arrojan que, en tercer orden, los cardinales en los que hay que analizar el paso de la consistencia de oraciones en tercer orden se halla por debajo de cardinales ω-Erdös. Por lo que aplicando

algunos de los resultados alcanzados antes obtenemos nuevamente la misma limitación de la primera opción.

En lo sucesivo, consideraremos nuevas medidas en las que podría considerarse trabajar con la noción de reflexión para emplearla en el estudio y posible erradicación de la indecidibilidad seria de algunos enunciados. En el siguiente capítulo analizamos la noción de PR con ayuda de nuevos recursos añadidos a TC brindados por lógicas modales.

Capítulo 4

Un estudio modal de la Teoría de Conjuntos

4.1.- Limitaciones de PR. Enfoque lógico y modal en Teoría de Conjuntos

Anteriormente presenté la objeción de Koellner al uso de PR. Con lo visto ahí, no es difícil ver que la objeción consta de dos partes: i) Con el propósito de anular MH, se proponen PR tan sofisticados como se requieran para obtener axiomas adecuados para la labor, pero esto no tiene el éxito esperado en vista de que PR resulta inconsistente cuando se da el paso al tercer orden en los sistemas lógicos, pues vimos que se construyen oraciones simples de tercer orden acerca del rango de algunos conjuntos que resultan verdaderas de *V* pero son falsas en su respectivo estrato de la jerarquía cumulativa; ii) tratar de fortalecer los principios que son consistentes para que anulen MH no es suficiente, pues la consistencia de dichos principios con la teoría sólo se mantiene hasta los cardinales ω-Erdös, los cuales se quedan por debajo de los cardinales medibles, por lo que no es suficiente aproximar la reflexión "desde abajo" de los cardinales medibles hasta llegar al tercer orden para sobrepasar MH. Así, todo parece indicar que sólo PR es incapaz de agotar todos los problemas de indecidibilidad que hemos venido analizando en este trabajo.

No obstante, es importante notar que los problemas resultantes de la objeción RTK y MH al uso de PR tienen algunas virtudes que merecen mencionarse:

1) La objeción especifica en manera precisa el funcionamiento de PR al relacionar su "fuerza deductiva" con aspectos teórico-conjuntistas que, en principio, resultan más sencillos de manejar. Este aspecto es más notable al relacionar los PR con la noción de Γ_n – reflexión, la cual a su vez se relaciona con los cardinales n-inefables que se estudian en términos de la noción de conjunto estacionario y sucesiones de ordinales, haciendo que los PR no sean sólo un recurso que se impone desde del exterior de la teoría, sino que también se trabajan y analizan recurriendo a aspectos que ya se conocen de la teoría.[162]

2) Al establecer de manera clara y precisa el alcance del funcionamiento consistente de PR en la teoría, esto es, conocer tanto los estratos en la jerarquía cumulativa como la complejidad expresiva del lenguaje formal en que los principios funcionan, se gana control sobre la noción de reflexión general que quede acotada por los parámetros específicos tanto de *V* como de los sistemas lógicos para expresar y trabajar la teoría. Aun si se tiene que la consistencia en el uso de PR se pierde a partir del tercer orden, si se desea trabajar específicamente al nivel formal con el alcance de PR entonces el estudio se puede hacer directamente en los grandes cardinales que son consistentemente introducidos con ellos o

[162] Notemos que en este punto se podría objetar el carácter externo de PR al darnos cuenta de que, al emplearlos, en el fondo parece que sólo se está haciendo uso de ciertas herramientas teóricas que ya estaban disponibles, como los conjuntos estacionarios. Sin embargo, esta idea pierde su potencia al observar que PR, de hecho, no es una traducción o una sustitución de las nociones teóricas previamente disponibles, pues la idea de fondo para definir y emplear cualquier PR, a saber, que si una cierta oración de la teoría es verdadera en *V* entonces lo es de un cierto estrato en la jerarquía cumulativa, no es una idea extraída de la base axiomática de los aspectos puramente formales de la teoría, sino que dicha idea está más relacionada con aspectos lógicos. Así que la lógica que subyace el estudio de la TC es más cercana que la teoría misma a la idea que motiva el uso de PR, pues el funcionamiento de estos principios siempre está vinculado al análisis de qué oraciones son consecuencias de la teoría según el sistema lógico formal empleado para trabajar la TC.

analizando directamente las diferentes variaciones que se hagan en los sistemas formales de la teoría hasta el segundo orden. En este punto, las objeciones RTK y MH permiten tener un mejor manejo de PR restringidos a los niveles y complejidad en que son consistentes.

Sin embargo, hay que notar que los puntos anteriores no constituyen el problema central de este trabajo. La disminución de la indecidibilidad en Teoría de Conjuntos sigue siendo el objetivo principal por el que se han estudiado los PR. Pero las objeciones presentadas resultan poner la cota restrictiva a la efectividad de PR muy por debajo de los niveles que se requieren para que tales principios se encarguen exitosamente de oraciones serias como HC. Por lo que en este punto se hace imprescindible recurrir a otros elementos que puedan añadirse a la teoría con el objetivo de reducir el problema de indecidibilidad. Ahora me enfocaré en presentar formas alternativas de la teoría y algunas nociones que puedan servir para tratar el problema de insuficiencia de PR. Entre las principales características de estas formas alternativas está la implementación de elementos modales en las lógicas subyacentes a la teoría.

4.1.1.- Modalidad y aspectos metafísicos/ontológicos de la Teoría de Conjuntos

Tratar de entender la naturaleza de los objetos de TC y las relaciones entre ellos es parte del trabajo que tiene la Filosofía de la Teoría de Conjuntos, y es de particular interés estudiar las propiedades modales de los conjuntos cuando comienzan a surgir preguntas acerca de las condiciones de su existencia o cómo se definen. Esto último hace que una opción para tratar de responder dichas preguntas consista en tomar las herramientas formales de la lógica modal para analizar los conjuntos.

La modalidad resulta muy útil para abordar esas cuestiones sobre la metafísica de los conjuntos, pues el estatus metafísico/ontológico de los objetos de V es abordado por preguntas acerca de las relaciones entre conjuntos con objetos de diversa naturaleza. Dicho lo anterior, parece que el modo de estudiar modalmente la Teoría de Conjuntos es el realizado por medio de los operadores modales, y la manera más sencilla puede parecer que consiste en aplicar los operadores modales a las aserciones teórico-conjuntistas. Siguiendo esta línea de procedimiento, un ejemplo consiste en pensar que si dos conjuntos tienen los mismos miembros y esto no cambiara sin importar cómo se altere el mundo, entonces podemos pensar en que tales conjuntos tienen una propiedad de "persistencia metafísica" de ser el mismo conjunto a través de distintos mundos posibles. Muy abstrusamente, dichos conjuntos serían una instancia del axioma de extensionalidad agregándole una característica de necesidad, al que llamamos (□Ext): $\Box\forall x\forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

El análisis anterior es demasiado básico para tratar de sostener que la modalización de TC consiste en hacer este tipo de cambios a las fórmulas de la teoría.[163] Pero como veremos, en realidad la modalización de la teoría es bastante más compleja que eso. Es importante analizar los aspectos más finos del estudio metafísico/ontológico de los objetos de la Teoría de Conjuntos. Además de la pregunta acerca del estatus ontológico de los conjuntos, surgen cuestiones como: ¿Los conjuntos comparten sus propiedades modales con sus elementos?, ¿Hay dependencia entre los conjuntos y sus elementos en sentido de

[163] Aunque ciertamente, un elemento importante es que la teoría posea condiciones específicas para saber cuándo podemos establecer un tratamiento modal de algún tipo. Pero no se puede negar que una buena parte de la literatura dedicada a la modalización de TC sostiene como práctica inicial este modo básico en que se introducen los operadores modales, a saber, el estudio de las formas de interpretar las fórmulas conjuntistas cuando se les trata con dichos operadores modales.

que unos subyacen a otros, o son interdependientes? Las cuestiones que surgen son a propósito de la contingencia, propiedades esenciales y determinación ontológica respecto de la existencia de los conjuntos. No es extraño que se adopte alguna postura metafísica sobre los conjuntos cuando la atención a tales preguntas, y cómo responderlas, es de interés.[164]

4.1.2.- Sobre la fundamentación ontológica de PR

Ahora que tenemos la atención sobre los aspectos ontológicos de los objetos de la Teoría de Conjuntos, y antes de proceder a ahondar en el estudio modal de la teoría que hemos presentado en la sección anterior, procederemos a analizar un punto delicado acerca de la propuesta misma de los PR en la teoría, además que no podremos avanzar mucho más sin explorar antes dicho punto. Una cuestión que a primera vista parece sencilla de responder es la siguiente: Sabemos que la formulación estándar de los PR es, dada una fórmula φ de la teoría, se tiene que $V \vDash \varphi \Rightarrow \exists \beta \in ORD(V_\beta \vDash \varphi^\beta)$, ¿Exactamente qué significa que $V \vDash \varphi$ en la formulación de PR? La pregunta tiene relevancia para el estudio de la efectividad de los PR, pues recordemos que no podemos emplear una respuesta estándar en términos modelo-teóricos debido a que en TC no disponemos de *el* modelo que nos permita interpretar lo que significa $V \vDash \varphi$. Por lo que se requiere hacer algunas precisiones al respecto.

[164] Ver Menzel (2017), p. 3. Vale la pena señalar que entre las motivaciones para estudiar modalmente la Teoría de Conjuntos se encuentran el surgimiento de paradojas. Aunque lo común ante el surgimiento de una paradoja sea revisar la teoría en búsqueda de los defectos que hacen surgir el problema para corregirlo, es metafísicamente relevante analizar la incidencia de la paradoja en los objetos de la teoría. Un ejemplo es el siguiente: “The lesson of Russell’s Paradox […] is that not all pluralities of things can *safely* constitute a further thing, viz., a set that contains them”. *Ibid.* P. 4.

Ahora expondremos una distinción importante acerca del carácter metafísico de los objetos del universo *V*, conocida como *Actualismo/Potencialismo*. Por una parte, la postura actualista sostiene que la totalidad de los objetos de *V* ya está dada, por lo que el universo *V* ya posee una estructura bien definida y es independiente de las interpretaciones teóricas en el sentido de que éstas no construyen nueva estructura conjuntista, sino que las interpretaciones teóricas son valoradas entre sí con el objetivo de encontrar aquella que describe correctamente cómo es el universo *V* por medio de sus nociones y resultados. Por otra parte, la postura potencialista niega justamente ese carácter acabado del universo *V*, pues la formación y progresos en la teoría también van construyendo el edificio conjuntista y dándole la forma que de hecho tiene de acuerdo con los resultados que se obtienen, por lo que depende de cuáles extensiones teóricas sean aceptadas el que *V* tenga determinada forma.[165] En su (2003), Koellner consideró la distinción sin profundizar demasiado en ella. Nosotros aquí nos enfocaremos en explorar más a detalle las dos posturas.

En Menzel (2017) se plantea un problema para la postura actualista en TC. Sabemos que, en vista del peligro de paradojas en la teoría, no se puede tomar la pluralidad conjuntista y manejarla como si fuera otro conjunto. Por lo que todos los niveles de la jerarquía cumulativa, finitos e infinitos, "están ahí" conformando el universo *V*, pero en ningún caso ordinal la totalidad de los ordinales conforma un conjunto. Todo nivel de *V* pertenece a un nivel superior. La totalidad *V* siempre escapará al tratamiento de conjuntos particulares debido a que no se puede manejar la totalidad de sus miembros con la teoría. A

[165] Aquí quizá sea de ayuda la comparación que se mencionó en la introducción de este trabajo al respecto de la visión aristotélica sobre las formas actual y potencial del infinito. Recordemos que ahí se mencionó que el infinito potencial es concebido como una totalidad que siempre admite todos los objetos considerados sin que tengan un fin, en contraste con el infinito actual concebido como una totalidad dada completamente e imposible de manipular.

esto se le conoce como *problema de compleción*[166] y con él se tiene la ventaja de no permitir el surgimiento de paradojas como la de Russell. Sin embargo, para el actualista en Teoría de Conjuntos hay desventajas importantes con dicho problema, pues si bien es cierto que bloquea exitosamente el surgimiento de ciertas paradojas, no se tiene la totalidad de criterios que permitan escoger de entre diversas colecciones cuáles sí serían objetos de TC y cuáles no. Otras cuestiones interesantes surgen de esta falta de conocimiento de criterios que determinan conjuntos: ¿Puede haber condiciones de definición propias de cada área de estudio que involucra conjuntos?, ¿Es posible agotar todas esas condiciones en un conglomerado general que, si no resuelve completamente la cuestión de decisión de lo que es un conjunto, al menos esté presente en cada colección considerada conjunto? Responder a cuestiones de este estilo es labor de la Filosofía de la Teoría de Conjuntos, y es importante señalar que esas preguntas no cuentan aún con respuestas satisfactorias en general. Llamaré a esto el *Problema de Indeterminación Ontológica en TC* (PIOTC).[167]

El Actualismo enfrenta serias dificultades con la consideración de PIOTC. Consideremos la tesis principal del actualista, a saber, que los conjuntos en sus diversas formas (esto es, todos los conjuntos de objetos físicos que se puedan considerar, además de aquellos propios de TC introducidos por nociones formales como los rangos, los ordinales, los órdenes, las cardinalidades, las cofinalidades… en general todo conjunto dado por las

[166] Ver *Ibid.* P. 11. Recordemos que parte de la motivación para introducir los PR en la teoría es esta idea de que el universo V es "totalmente inabarcable". Más formalmente: no se puede tener una fórmula de la teoría que sea verdadera de absolutamente todos los miembros de V.

[167] Puede parecer *a priori* que este problema sea demasiado general para que pueda resolverse con alguna visión particular conjuntista, sin embargo, una propuesta que encamina hacia una condición definitoria parcial de lo que es "ser conjunto" viene dada con la noción de los C-conjuntos manejada por Koellner en su (2003), aunque con esto no se alcanza a proponer una condición global de definición. La razón de esto es que las propiedades C aún no establecen criterios generales y objetivos para delimitar a los objetos que sean conjuntos. Y PIOTC no cuestiona la naturaleza de las propiedades C (lo cual no quiere decir que el problema no contemple el estudio de las condiciones para que tales objetos sean C-conjuntos o no), sino que se busca la clarificación de una característica general, si la hay, de que tales cosas sean o no objetos de TC en general (dicho de una manera más aterrizada, cómo sería para empezar que cierta colección de objetos sea un candidato para tener una C-propiedad).

mismas nociones técnicas de TC) ya poseen cierta forma de existencia en *V*, haciendo con ello que *V* sea “tan amplio y extenso como es”. Sin embargo, consideremos el siguiente razonamiento. Puesto que *V* ya es del tamaño que el actualista puede considerar que es (lo cual no implica que el actualista esté obligado a dar una respuesta sobre la cuestión del tamaño de *V*, aunque teóricamente sería deseable conocer ese tamaño), se está dejando fuera a situaciones en que *V* pudiera haber sido de otro tamaño. Esto surge naturalmente cuando surge la pregunta “¿La colección *X* es un conjunto?” dado que no se cuentan, en ese momento, con los suficientes recursos teóricos para responder afirmativa o negativamente a la pregunta anterior, haciendo que la frase “tan amplio y extenso como es” pierda la fuerza que el actualista quiere predicar al respecto del tamaño de *V*, y es que sólo debemos considerar que lo ocurrido cada vez que la pregunta se hace respecto de *X* conjuntos específicos pone en duda que el tamaño de *V* pudiera ser incluso más grande de lo que se considera cuando se admite que hay de hecho un conjunto *X* que no ha sido considerado hasta ese momento. Por lo que el PIOTC tiene relevancia para el estudio acerca del tamaño de *V*.

Aquí hemos entrado a un punto delicado sobre el PIOTC y la disputa Actualismo/Potencialismo en TC. Notemos lo siguiente: una posible respuesta que el actualista pudiera darnos al respecto de la cuestión sobre si *X* pudiera o no ser conjunto ya está de cierto modo presente en la frase “tan amplio y extenso como es”. ¿Por qué el actualista tendría que verse obligado a responder exhaustivamente la pregunta sobre el tamaño de *V*? Después de todo, al sostener que *V* es “tan amplio y extenso como es” no hay obligación de sostener que *V* tenga tantos conjuntos como una determinada cantidad específica -por infinita que pueda ser- dada por la jerarquía ordinal u otro medio. Ese “como es” en la respuesta actualista es lo suficientemente general para que el actualista se posicione de modo que, a preguntas sobre la "conjunticidad" o no de *X*, se limite a responder que *X* es parte *actual* de *V*, o no lo sea. En otras palabras, podría decirse que el carácter actual de *V* hace que en los casos que un *X* sea efectivamente un conjunto, hemos dado con otro de tantos objetos que ya están actualmente en *V*. Pero esto no es compatible de entrada con la idea de que otras colecciones de objetos *pudieran* constituir conjuntos en *V*, aunque de hecho no puedan serlo dados los recursos y supuestos teóricos (actuales) de la teoría, pues para el actualista lo único que puede ser modificado para el estudio de *V* es TC misma. ¿Cómo puede esto ser compatible con la búsqueda de una respuesta a la cuestión de condiciones de definición generales para que algo sea o no un conjunto? Recordemos que PIOTC es lo bastante general en la búsqueda de condiciones generales para que algo sea o no un conjunto (incluso si es que algo así puede justificarse para el caso de diversas ramas de estudio que manejen conjuntos propios de estudio), así que el Actualismo tiene una severa crisis como postura ontológica sobre la naturaleza de *V*.[168]

Ahora, si bien es cierto que ontológicamente el Actualismo ofrece una respuesta a paradojas como la russelliana, para las consideraciones de esta investigación no parece ser la postura más conveniente para estudiar los problemas de indecidibilidad con PR, incluso

---

[168] Un aspecto interesante que notar aquí es el siguiente. Según la respuesta actualista a la cuestión sobre si *X* es o no un conjunto, se puede dirigir la discusión al planteamiento de las siguientes dos preguntas: (i) ¿Cuáles son los alcances de la TC en turno (axiomas, nociones, conceptos, etc.) para responder si tal colección de objetos es un conjunto actual? (ii) ¿Qué tanto conocemos, y podemos conocer, acerca de la naturaleza de los conjuntos para tener acceso a un criterio general que permita decidir si tal colección es un conjunto actual? Sobre la pregunta (i), parte de la labor de este trabajo es responder de manera parcial a la pregunta (parcial principalmente porque, como veremos después, nosotros aquí nos inclinaremos por una postura potencialista) proponiendo una lista de nuevas consideraciones para saber cómo debemos proceder en esos casos en que, dados los recursos actuales conjuntistas a nuestra disposición, no podemos decir que tal colección *X* es un conjunto, pero con ciertos añadidos convenientes sí podríamos considerar que *X* constituya un conjunto.
La pregunta (ii) es un poco más delicada porque, a mi parecer, toca aspectos epistemológicos respecto de los conjuntos. La respuesta a la cuestión se relaciona fuertemente con la especificación de los aspectos y recursos epistémicos de que disponemos para decidir, fuera de toda axiomatización teórico-conjuntista (esto es, sin consideración a ninguna lista particular de axiomas de partida), cuándo estamos o no ante un conjunto. Pienso que para responder algo como esto, debemos remitirnos a cuestiones relacionadas con los aspectos más primitivos acerca de la noción misma de conjunto, tales como las nociones intuitivas de "conjunto de" o de pertenencia (sea lo que signifique ahora ese carácter intuitivo que podamos atribuirle a nuestra comprensión preteórica de tales conceptos). Más adelante volveremos parcialmente a estos asuntos.

restringiendo la atención a la forma estándar de tales principios. Consideremos la formulación estándar de PR, $V \vDash \varphi \Longrightarrow \exists \beta \in ORD(V^{\beta} \vDash \varphi^{\beta})$, desde una perspectiva actualista de estudio. ¿Qué significa el antecedente de la fórmula que expresa el PR? Dado que normalmente responderíamos algo como "que en el universo V de los conjuntos es verdadera φ", estaríamos obligados a sostener que en los casos donde deseamos aplicar PR, de algún modo ya contamos con una forma de discernir que los conjuntos, y sólo ellos, cumplen con φ y otras colecciones que no son conjuntos simplemente no entran en la cuestión. Sin embargo, podemos conceder, por ahora, que la postura actualista tiene permitido manipular la expresión $V \vDash \varphi$ sin decir más acerca de las características de V. ¿Qué ocurre cuando la fórmula φ es de orden dos o superior? Dada la postura actualista, en el caso del primer orden no hay mayores dificultades formales con la manipulación de $V \vDash \varphi$, pero es claro que esto no es así si se considera algo como $\wp(V) \vDash \varphi$. La manipulación formal de la reflexión en órdenes superiores parece comprometer al actualista a buscar formas de debilitar PIOTC que permitan conservar la visión de V.[169]

Con las observaciones que hemos hecho hasta ahora, veremos que adoptar el Potencialismo resulta en un mejor manejo de PR y del subsecuente tratamiento modal propuesto. Como hemos señalado antes, el Potencialismo sostiene la tesis de que V es una "totalidad inacabada" con una característica especial que señalamos con ayuda de la jerarquía cumulativa empleada para analizar el tamaño del universo: cualquier estrato V_{α} que se considere como el tope mayor del universo siempre admite un cúmulo de

[169] Nótese que aquí no estoy desechando al Actualismo como postura infructuosa sin más. En realidad, he dejado abierta la cuestión de cómo podría el actualista incorporar a su labor teórico-conjuntista recursos como los PR, pues creo que podría defenderse alguna forma en que esto podría llevarse a cabo. En Welch y Horsten (2016) la tesis principal consiste justo en defender el uso de PR desde la perspectiva actualista de TC mediante los llamados Principios de Reflexión Globales. Si bien tales principios rescatan el uso de la reflexión en segundo orden (y con razones para pensar que en órdenes superiores también pueden funcionar), la disputa por el carácter ontológico de V sigue siendo un obstáculo que se aborda en buena parte de ese trabajo y sin proponer una respuesta definitiva y satisfactoria.

posibilidades para que nuevas colecciones que no son conjuntos en cualquier estrato inferior puedan serlo a partir del estrato $V_{\alpha+1}$. Este carácter potencial de posibilidades será el elemento principal con el que *V* puede estudiarse con elementos modales incorporados a TC. Pero antes de hacerlo, veamos con más detalle las repercusiones a nivel ontológico que la postura potencialista tiene en *V*.

En el Potencialismo no se reconoce a *V* como una totalidad completa que reúne todas y sólo aquellas cosas que ya constituyen conjuntos. Más bien, *V* es visto como una gran colección que está siempre en constante cambio de acuerdo con el entendimiento teórico que se va desarrollando.[170] Esto encaja bien con dos aspectos importantes que venimos tratando:

1) Los aspectos lógicos, matemáticos y semánticos de TC[171] que envuelven a diversas proposiciones que logran superar el examen de consistencia (del estilo del Teorema 1 de este trabajo) encajan bien con la postura de cómo va modificándose *V* en relación con la aparición o desaparición de ciertos conjuntos. Esto debido a que las ciertas nuevas entidades, como el caso de los grandes cardinales, que vienen dadas con las nuevas nociones suelen proponer que hay nuevos conjuntos en estratos superiores de *V*.

2) Aunque se pierde la ventaja explicativa al respecto de la cuestión de las paradojas russellianas que viene dada por la postura actualista, el PIOTC es disminuido para el Potencialismo dado que siempre hay la posibilidad de encontrar nuevos conjuntos no contemplados hasta ahora con las nociones teóricas a disposición. La ventaja significativa que esto ofrece es que no es necesario desviar la atención a un problema adicional como

[170] Piénsese aquí no sólo en nuevas nociones, definiciones y conceptos que TC pueda incorporar a sus elementos, sino también en la demostración o refutación de proposiciones que afirman que determinadas colecciones de objetos con ciertas propiedades sean conjuntos.

[171] Aquí se podría dar un paso más y añadir que hay incluso ciertos aspectos epistémicos involucrados. Por ahora, no tocaré el tema de cómo ciertas intuiciones sobre el conocimiento de conjuntos pueden recuperarse por medio de pruebas teóricas adecuadas.

PIOTC en el Potencialismo debido a que la cuestión de si tal o cual colección de objetos es o no conjunto recae en el estudio más aterrizado el estrato de V en que los objetos que satisfacen la fórmula φ en cuestión habitan.[172]

Se recalca también que, para el Potencialismo, no surge el problema de emplear en general la noción de reflexión y órdenes superiores, pues la expresión $V \vDash \varphi$ no es aceptada sin más por el potencialista y en su lugar, V se convierte en el universo desarrollado hasta el momento con TC. Ahora, ¿Qué ocurre con la interpretación potencialista de $V \vDash \varphi \Longrightarrow \exists\beta \in ORD(V^{\beta} \vDash \varphi^{\beta})$, particularmente de $V \vDash \varphi$? Sabemos que, para el Potencialismo, $V \vDash \varphi$ no quiere decir que se comprende el ambiente de los conjuntos como aquel que hace verdad a la proposición φ,[173] sino que "los conjuntos" que conforman V son ese ambiente de escrutinio para la verdad de φ sin la intención de conllevar una estructura particular que deba explicarse adicionalmente. En este sentido, V representa el entorno total que se va desarrollando con los avances de TC, sin que haya un estatus de terminación para este ambiente -y notamos aquí la fidelidad con la idea de V como totalidad inacabada-. No obstante, "los conjuntos" representa una cuestión delicada, entre otras razones, debido a que la efectividad de la teoría se sopesa por qué tan certera y objetiva es con los resultados alcanzados. Además, recordando que un papel crucial de la teoría es proporcionar el fundamento de las Matemáticas, parece que la cuestión misma de la verdad en Matemáticas está de cierto modo comprometida con el entendimiento de dicha noción en TC. La cuestión acerca de *la verdad en Matemáticas* es una muy delicada que ha impactado todo el

[172] No hay que confundir el tratamiento potencialista de PIOTC con la afirmación más fuerte acerca de que esta postura deseche el problema completamente. El problema acerca de la clarificación de la naturaleza ontológica de los conjuntos sigue siendo genuino para el potencialista. No obstante, veremos que, para el caso de algunos recursos teóricos como PR, PIOTC no es un obstáculo para los potencialistas a nivel heurístico.
[173] Se recalca aquí que la pretensión del potencialista es exentarse de proveer de una forma de entendimiento de V fuertemente vinculada con alguna forma sofisticada de trabajar formalmente con la noción de verdad. Una forma usual de pensarlo es por medio de los modelos tarskianos.

proceso de formación y desarrollo de la teoría, y no se pasa por alto el papel de PR en dicha cuestión al involucrar fuertemente la noción de verdad en todo su funcionamiento.

Con respecto a *la* verdad, la postura actualista contribuye con ese terreno base sobre el cual justificar PR, pues la noción de reflexión se propone como una herramienta que permite preservar la idea de que toda proposición matemática tiene un único valor de verdad dentro del universo de los hechos y fenómenos matemáticos. Esto último es algo fuertemente comprometido desde una postura potencialista, pues aquí de entrada no se tiene una propuesta sobre lo que significaría que una fórmula φ sea verdadera de todo *V*. Así que el problema principal para el potencialista es acerca de cómo motivar la noción misma de reflexión.

En este punto conviene que nos detengamos un poco para examinar con más detalle qué significa aquí la expresión “$V \vDash \varphi$”. Como ya hemos hecho notar antes, el concepto de la verdad en Matemáticas es uno muy fino que requiere atención especial para trabajarse. Esto implica que no podemos sin más tomar la expresión $V \vDash \varphi$ en la formulación de PR y hacer todo el trabajo teórico que conlleva el consecuente $\exists\beta \in ORD(V^{\beta} \vDash \varphi^{\beta})$ de la fórmula sin antes tener una claridad aceptable acerca de lo que significa que cualquier fórmula φ se cumpla en el entorno *V*. Acerca de la *noción general de la verdad en Matemáticas*, Benacerraf en su (1973) señala que una buena teoría de la verdad en Matemáticas debe cumplir con los siguientes dos requisitos:

1) Una teoría general de la verdad en la que se sustente una postura acerca de lo que es la verdad matemática debe ser, en efecto, una teoría de la verdad que proponga condiciones para decidir cuándo una proposición matemática es verdadera.[174]

[174] Ver Benacerraf (1973), p. 666. Es importante destacar aquí un punto en el que el autor hace énfasis, el cual es acerca de cómo esta condición es diferente a las condiciones que indican cuándo una proposición

(2) Una teoría general de la verdad que sustenta una postura acerca de lo que es la verdad matemática presupone una noción clara de lo que es el *conocimiento matemático*: "[…] una postura sobre la verdad matemática, de ser aceptable, debe ser consistente con la posibilidad de tener conocimiento matemático: las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas no pueden hacer imposible para nosotros el saber que ellas son satisfechas.".[175]

No es la intención aquí el equiparar la elucidación de $V \vDash \varphi$ con la obtención de una teoría generalizada de la verdad que rescata la noción de *la* verdad matemática. Sin embargo, dada la naturaleza fundacionista que se atribuye a TC sobre el resto de las Matemáticas, no se puede negar que una teoría de la verdad que sea extensionalmente adecuada acerca de la noción de verdad matemática es requerida para aproximar lo que entendemos por $V \vDash \varphi$. Por lo que se vuelve importante que exploremos el concepto de verdad aterrizado al terreno de las Matemáticas, y las dos condiciones acerca de una teoría generalizada de la verdad para realizar la labor arrojan información importante sobre esa labor. Ahora bien, no parece que podamos explorar mucho desde la condición (1) lo que podamos clarificar acerca de la expresión $V \vDash \varphi$ en TC, pero la condición (2) es muy importante por lo siguiente.

¿Cuál es el alcance de lo que sabemos acerca del universo *V*? La pregunta adquiere especial importancia para nuestro estudio debido a que se requiere tener claro cuánta

matemática tiene la propiedad de *teoremicidad*. Ésta última está relacionada con la característica de que las proposiciones que son teoremas están en estrecha relación de consecuencia lógica con los principios y axiomas de determinada teoría matemática con algún sistema formal subyacente (lo que el autor llama la "postura combinatoria" acerca de las proposiciones que son verdaderas en determinada teoría matemática). Pero *la* verdad en Matemáticas difícilmente se puede reducir a la teoremicidad en determinado sistema formal. Por lo que la teoría general de la verdad también tiene el compromiso de explicar la relación entre la verdad matemática y la teoremicidad. Cfr. *Ibid.* P. 664-666.

[175] "[…] an account of mathematical truth, to be acceptable, must be consistent with the possibility of having mathematical knowledge: the conditions of the truth of mathematical propositions cannot make it impossible for us to know that they are satisfied." *Ibid.* P. 667. La traducción es mía.

comprensión tenemos acerca de los objetos que TC se encarga de estudiar. Dada la condición (2), es claro que se requiere comprender lo que conocemos acerca de la naturaleza primaria de los objetos de V si es que hay la aspiración de elucidar los fenómenos conjuntistas que han surgido. Ahora bien, la profundización en el entendimiento de V no parece provenir solamente de los principios y axiomas básicos de TC, esto porque la teoría en su vastedad de definiciones y resultados a ofrecer con sus estudios ha proporcionado datos valiosos acerca no sólo de los objetos de V (es común catalogar tales resultados y conceptos como parte de estudios hechos en Lógica, Teoría de Modelos y otras ramas de las Matemáticas), sino de prácticamente todas las áreas de estudio que involucren con cierto rigor el manejo de conjuntos, pero esto difícilmente ha proporcionado claridad a la hora de responder la cuestión filosófica acerca de la naturaleza de los conjuntos. Lo que podemos concluir de lo anterior es que, por lo menos hasta ahora, el "entendimiento general" de los conjuntos es un componente más de los que subyacen al desarrollo teórico-formal de TC en versiones como ZFC. Pero, ¿Qué significa ese entendimiento general que permite la manipulación de los objetos de la teoría, e incluso ha arrojado ese acopio de resultados que enriquecen las varias versiones de TC? Esto es sólo una reformulación de la elusiva cuestión acerca del estatus metafísico-ontológico de los objetos de TC. Al no contar con *el* concepto de conjunto para dirigir los estudios teóricos alrededor de él, TC se ha conducido en su lugar por medio de diversos conceptos que interpretan lo que es "ser conjunto" y se procede a estudiar los objetos de V con las ideas que envuelven tales conceptos.[176]

[176] Nótese que no estamos reincorporando la cuestión acerca de la elucidación de V como aquel objeto extra que arroja la verdad en la expresión "$V \vDash \varphi$", sino que la pregunta es acerca de lo que sabemos acerca de los conjuntos y cómo se relacionan sus características y propiedades con los resultados de TC.

Lo que aquí defendemos es la tesis de que incluso el actualista de conjuntos se restringe a un entendimiento de $V \vDash \varphi$ que resulta demasiado estrecho para que en la posición en la que está se pueda establecer un cambio radical al respecto de cómo una postura potencialista atendería la cuestión. Veamos esto con detalle. Desde el Actualismo se establece que $V \vDash \varphi$ conlleva una forma absoluta de manejar la verdad de la proposición φ que sostiene que tal proposición tiene un único y bien definido valor de verdad, y esto se apoya en la tesis de que *V* constituye un hábitat total absoluto conjuntista que solventa el valor de verdad bien definido de cada proposición sobre los conjuntos. Con ello, los PR tienen su terreno de apoyo en que la expresión $V \vDash \varphi$ significa que *el* valor de verdad de las proposiciones es dado por esta forma actualista de *V* que no se tiene en el Potencialismo. Pero al recordar lo que se nos dice en la característica (2) de las teorías acerca de la verdad matemática, no es complicado notar que desde una postura actualista no se está dando respuesta acerca *de lo que se sabe acerca de la verdad matemática* excepto mediante el uso de esas ideas preconcebidas de lo que significa ser un conjunto. Entonces notamos que la tesis actualista no escapa del uso de esas ideas que subyacen el entendimiento general de los conjuntos, y esto es otra manera de reconocer que no tenemos *el* concepto de conjunto sino diversos candidatos que ya traen contenidos variados permeando el entendimiento general de lo que son los conjuntos -y esto constituye un problema fuerte acerca de la inexistencia, hasta ahora, de un acuerdo general de lo que sería un conjunto- y sus propiedades. Es lo que Koellner en su (2003) denomina los *C*-conjuntos:

"Es útil extraer aproximaciones del concepto total de conjunto seleccionando una colección definida de principios de cerradura *C*. […] Refirámonos a esta aproximación del concepto de conjunto como el *concepto de C-conjunto.* Una noción útil es el *espectro de C,* definido como $\Lambda(C) = \{\alpha \mid V_\alpha \text{ es cerrado bajo } C\}$. Para cada V_α, donde $\alpha \in \Lambda(C)$, decimos que V_α *satisface* el concepto de *C*-conjunto. También decimos que V_α es una *interpretación permisible* del concepto de *C*-conjunto.". (Koellner, (2003), p. 29)[177]

Vemos, pues, que el concepto de conjunto que subyace al estudio de TC ya está permeado de interpretaciones que indican el alcance de la noción de conjunto aceptada para entender los objetos de *V*. Esto implicaría que, dependiendo de la riqueza conceptual de la noción de conjunto dados los principios de cerradura *C*, el alcance de las interpretaciones teórico-conjuntistas llegan tan lejos como "se pueda estirar" el concepto subyacente de *C*-conjunto, de modo que el reino de las clases propias se quedaría afuera de cualquiera que sea el alcance dentro de *V* de esa noción de conjunto. Por lo que, hasta ahora, podemos concluir que, para ambas posturas actualista y potencialista, hay una fuerte carga interpretativa para estudiar y comprender lo que significa $V \vDash \varphi$ en términos de recursos como los *C*-conjuntos.[178]

¿Por qué ha sido importante examinar nuevamente la cuestión acerca de la noción general de conjunto al respecto del entendimiento de $V \vDash \varphi$, la postura actualista, y el requisito (2) sobre la teoría de la verdad matemática de Benacerraf mencionado antes? Comencemos por sostener que la intención aquí no es tachar de incorrectas a las posturas actualistas sobre *V* por los aspectos epistemológicos acerca de lo que una teoría general de la verdad aplicada a la verdad matemática parece comprometer con recursos como los *C*-

[177] "It is useful to extract approximations to the full concept of set by selecting a definite collection of closure principles *C*. […] Let us refer to this approximation of the concept of set as the *concept of C-set.* A useful notion is the *spectrum of C*, defined to be $A(C) = \{\alpha \mid V_\alpha \text{ is closed under } C\}$. For each V_α, where $\alpha \in A(C)$, we shall say that V_α *meets* the concept of C-set. We shall also say that $V\alpha$ is a *permissible interpretation* of the concept of C-set.". La traducción es mía.

[178] No se ha querido con esto afirmar la tesis más fuerte acerca de que son los *C*-conjuntos aquellos que explican cómo funciona nuestro acceso y entendimiento de la noción general de conjunto. La tesis más débil consiste en sostener que hay la presencia de recursos como los *C*-conjuntos en el proceso explicativo de la noción general de conjunto.

conjuntos.[179] Más bien, el objetivo es aterrizar la característica epistemológica requerida de lo que es la verdad matemática en $V \vDash \varphi$ en relación con la formulación actualista de PR. Sobre esto último, podemos notar que *la motivación detrás del manejo de* $V \vDash \varphi$ *en PR desde la perspectiva actualista ya está acotada por el alcance que el concepto de conjunto adquiere con los C-conjuntos* puesto que todo aquello considerado como clase propia se encuentra más allá del alcance de este concepto de conjunto -y el terreno de las clases propias ciertamente no es vacío puesto que habitan colecciones de objetos consideradas propias como *ORD*-. Por lo que ahora tenemos por lo menos dos situaciones en el tratamiento actualista de PR:

(1) Las interpretaciones de $V \vDash \varphi$ en PR desde el Actualismo dependen de recursos adicionales de comprensión de los objetos de *V*. Particularmente, recursos como los *C*-conjuntos determinan el alcance teórico de *V* y *el* concepto de conjunto que determina lo que es la verdad matemática depende del entendimiento de los conjuntos vía condiciones de cerradura *C*. Esto hace que el uso de PR dependa de lo que se admite como los *C*-conjuntos.

(2) Hasta ahora, no hay una descripción generalmente aceptada de lo que es "ser conjunto" que no dependa de condiciones de cerradura *C*. Por lo tanto, aún no se está en posesión de una teoría general de la verdad que explique la verdad matemática, y particularmente, no se tiene una descripción de $V \vDash \varphi$ en términos que no usen recursos como los *C*-conjuntos.

Una de las consecuencias que podemos extraer de las reflexiones anteriores es que, si bien el actualista de conjuntos sostiene que *V* ya está dado independientemente de los desarrollos de TC, la elucidación actualista de lo que sea la verdad matemática en su

[179] Incluso, podría sostenerse que una manera de rescatar la postura actualista de cosas como los C-conjuntos es argumentando que el entendimiento necesario acerca de la expresión $V \vDash \varphi$ (por ende, de la verdad matemática) no obedece una caracterización como la dada por Benacerraf.

interpretación de $V \vDash \varphi$ no escapa de los compromisos epistemológicos que se carguen al explicar lo que son los conjuntos. Como la noción general de conjunto no está totalmente clarificada ni dentro ni fuera de TC, lo que hasta ahora constituyen las mejores aproximaciones para esclarecer las nociones tanto intuitiva como técnica de conjunto son aproximadas mediante el uso de recursos como los C-conjuntos, y esto impacta particularmente fuerte en aquellas nociones y herramientas teóricas que dependen del entendimiento de lo que es la verdad en TC, siendo PR una de las principales dependientes de saber lo que significa $V \vDash \varphi$. Algo más que podemos concluir ahora es que, dada la pretensión de hacer de la Teoría de Conjuntos el fundamento de las Matemáticas, resulta que el compromiso para el actualista acerca de la verdad en TC requiere la suficiente elucidación del concepto de verdad matemática, lo cual en particular ayudaría a entender lo que significa la expresión $V \vDash \varphi$.[180]

¿Qué se puede decir desde una postura potencialista al respecto de estos resultados acerca de la verdad matemática y $V \vDash \varphi$? Reconociendo el papel fundacionista de la Teoría de Conjuntos para las Matemáticas, el Potencialismo enfrenta un problema semejante al respecto de explicar lo que es la verdad matemática -admitiendo que el estudio se compromete con el requisito (2)- relacionado con el estudio de la verdad en TC, particularmente para entender lo que significa $V \vDash \varphi$. Desde esta postura no se cuenta con una definición extensionalmente adecuada de lo que sea $V \vDash \varphi$ -aún menos, de la verdad matemática- que esté relacionada con lo que se consideraría *el* concepto de conjunto. Sin embargo, desde el Potencialismo obtenemos la siguiente ventaja que se relaciona con el uso de PR. Sabemos que la noción de reflexión es puesta en duda para su empleo potencialista

[180] Debemos ser cautos en esto. Una forma de ser actualista de *V* sin el compromiso de explicar *la* verdad matemática no es inconsistente para quienes, por ejemplo, niegan que la Teoría de Conjuntos tenga tal papel fundacionista.

en vista de que, desde esta postura, la expresión "$V \vDash \varphi$" no parece tener sentido debido a que V tiene un comportamiento de crecimiento que se describe con dependencia de TC y sus resultados. Pero la noción misma de reflexión que se propone desde el Actualismo ya está de hecho comprometida con una forma restringida de comprensión de la verdad en TC que depende de recursos como los C-conjuntos, y esto de entrada ya pone cotas en el entendimiento de lo que significa $V \vDash \varphi$. Por lo que aquí se afirma que *el Potencialismo se haya en una posición semejante al defender que la noción de reflexión es compatible con una visión potencialista de V*, pues tanto para el actualista como el potencialista valen las cotas impuestas por los C-conjuntos que tiene V, dejando fuera del alcance del manejo del concepto de conjunto de TC a lo que sean las clases propias (y para el potencialista se deja fuera la obligación aparente de tratar a V como un objeto modelo-teórico acabado). En otras palabras, aunque la distinción Actualismo/Potencialismo es una que involucra la naturaleza ontológica de V, ambas posturas se encuentran en terreno semejante en cuanto a los aspectos epistemológicos de los objetos de V y de cómo se comporta la noción de verdad en TC, y esto se aplica a los usos de PR. Incluso, una ventaja para el potencialista sobre la noción de PR está en que aquí es perfectamente compatible la interpretación de la expresión "$V \vDash \varphi$" con la presencia de una noción de conjunto que está fuertemente vinculada con las condiciones de cerradura C que indican hasta dónde alcanza la interpretación de V cuando, con PR, se procede a estudiar lo que significa $V_\alpha \vDash \varphi^\alpha$ (y notamos que esto de hecho respeta la convicción de que PR justifica la idea de que V es "absolutamente inabarcable" en los términos que hemos estudiado antes). Por lo que podemos concluir lo siguiente: el Potencialismo no se ha encargado de elucidar lo que sería la verdad matemática dentro o fuera de TC, pero el empleo potencialista de la noción de reflexión es legítimo en la forma más general de PR, esto es, el concepto general de conjunto del que se dispone para operar con la noción -el que es trabajado con recursos como los C-conjuntos- es compatible con lo que, hasta ahora, el Potencialismo tiene que decir acerca de lo que significa $V \vDash \varphi$. Por lo que tenemos la compatibilidad del Potencialismo con el uso de PR.

Ahora que el uso de PR está justificado desde una perspectiva potencialista, volvamos ahora a la relación de las herramientas modales con el estudio de V. Se pueden dar varios ejemplos de recursos definidos con los que el estudio modal potencialista se lleva a cabo. Particularmente, para analizar la cuestión sobre los objetos que necesaria o posiblemente sean conjuntos, resulta útil enriquecer el criterio de lo que consiste ser conjunto añadiendo al lenguaje formal la noción de pluralidades de objetos xx y lo que significa que algo pertenezca a una pluralidad: $y \prec xx$.[181] De modo que una posible respuesta a la cuestión sobre propiedades necesarias que definan a conjuntos en términos de esta nueva noción consistiría en si todas las pluralidades posibles en que participan los miembros que definen al conjunto tienen tal propiedad.[182] Así que esta manera de trabajar con pluralidades permite el análisis de los conjuntos que necesaria o posiblemente tienen una propiedad y relación, y esto parece realizable sólo con el estudio de qué colecciones de objetos, en este caso como pluralidades, son posibles. Así que el Potencialismo compatibiliza bien con las ideas modales de los conjuntos.

Una idea atractiva para estudiar el carácter ontológico de V es que sabemos que ese entorno incluye aquellas colecciones de objetos que son conjuntos (sea porque se ha

[181] La idea y notación se hallan en Menzel (2017). Ahí mismo se exponen algunos resultados al respecto y sobre lo cual volveremos después.

[182] Nuevamente, esta es una manera demasiado simple de lo que consistiría una introducción de componentes modales en el estudio de los objetos de V. Más aún porque parece que estamos añadiendo más recursos que por si mismos requieren bastante más motivación en su uso, como el caso de las pluralidades. Afortunadamente, en nuestro estudio esto debe ser visto como sólo el comienzo de la introducción y justificación de la noción de pluralidad.

introducido exitosamente en la teoría alguna definición de tal o cual conjunto, o porque la existencia de tal o cual conjunto se deduce como resultado de alguna proposición), pero también parece incluir colecciones que podrían constituir conjuntos. Piénsese *V* como una jerarquía no-acabada en sentido de no estar totalmente dada según la teoría desarrollada hasta ahora, pues siempre es posible que en cierto estrato de la jerarquía cumulativa haya la posibilidad de toparnos con objetos que puedan constituir conjuntos y es conveniente contar con los recursos teóricos para estudiar esas posibilidades. Ahora presentaré algunas ideas al respecto de las ventajas que la concepción potencialista aquí tiene para ofrecer.[183]

Hay manera de visualizar un apoyo a la concepción potencialista a través de algunas ideas cantorianas al respecto del proceso de formación de conjuntos que, durante la etapa temprana de la Teoría de Conjuntos, no tenían un sustento satisfactorio para quienes se planteaban la pregunta sobre qué características debía cumplir un objeto para ser un conjunto: "El pensamiento de Cantor es que hay una diferencia intrínseca entre multiplicidades que forman conjuntos y multiplicidades que no lo hacen, y que esta diferencia intrínseca *explica* por qué algunas pero no todas las multiplicidades son elegibles para formar conjuntos. Un conjunto es caracterizado como una colección 'acabada', cuyos elementos *pueden 'existir juntos'* o ser imaginados como 'existiendo de hecho'.".[184] Nótese cómo se puede apoyar la tesis de que el proceso de formación de conjuntos viene equipado con un cierto componente potencialista que serviría como el primer filtro por el que se someten esas multiplicidades, pues ahora la pregunta sobre lo que es ser un conjunto se

---

[183] Es recomendable revisar en Linnebo (2013) para tener con más detalle algunas de las ideas que vienen a continuación.

[184] "Cantor's thought is that there is an intrinsic difference between multiplicities that form sets and multiplicities that do not, and that this intrinsic difference *explains* why some but not all multiplicities are eligible for set formation. A set is characterized as a 'finished' collection, all of whose elements can 'exist together' or be imagined as 'actually existing'." Linnebo, (2013), p. 207. La traducción y el segundo énfasis son míos.

puede interpretar de la forma potencialista en términos de la terminología de Cantor: ¿las colecciones en cuestión son acabadas en términos de que sus elementos *pueden existir juntos*?[185]

Ya hemos hecho hincapié en la búsqueda de respuestas a la pregunta sobre las condiciones que se deben cumplir para que algo sea conjunto. Vemos que, con ayuda de una noción como la de pluralidad, los conjuntos serían los objetos que resultan de las pluralidades de objetos existentes en un mundo tales que definen cierta propiedad que es característica de ellos. En este sentido, el conjunto hereda de la pluralidad que lo define la propiedad que es común a sus objetos.[186] El manejo de estas pluralidades con la modalidad en la teoría ofrece una ventaja clara sobre la versión estándar de la Teoría de Conjuntos, pues se acota el comportamiento de axiomas como el de comprensión cuando se interpretan modalmente: "Transpuesto a nuestro tratamiento potencialista y ligeramente generalizado, la cuestión [sobre qué instancias del axioma de comprensión son válidas] recién señalada corresponde a la cuestión sobre qué instancias del siguiente esquema son válidos: $\Diamond\, \exists x \Box \forall u [u \in x \leftrightarrow \Phi(u)]$",[187] esto porque al estar los conjuntos determinados por sus elementos, la posibilidad de que ciertas pluralidades formen conjuntos está en

[185] Debe hacerse una importante nota aclaratoria aquí. El estudio metafísico/ontológico de los objetos de la Teoría de Conjuntos no viene necesariamente cuando se empieza a trabajar con la teoría enriquecida con las nociones modales. Esto es así porque es perfectamente viable separar las cuestiones acerca de la naturaleza metafísica de los objetos, del estudio técnico con las herramientas modales introducidas. Las nociones técnicas para trabajar con pluralidades como la mencionada en un párrafo anterior son introducidas sin tener que comprometerse necesariamente con una postura metafísica sobre la relación transmundana que pueda haber entre dichas pluralidades. Ver *Ibid.* P. 208 para seguir esta aclaración.

[186] Ver *Ibid*. P. 217. Esta es una manera particular de entender el trasfondo del axioma de separación restringido que se usa comúnmente en la teoría. Básicamente se sostiene con esto que los objetos de los conjuntos primarios (en sentido de que son conjuntos que no resultan de las operaciones básicas de la teoría) son lo que está "por debajo" de los demás conjuntos sirviendo de bloques de construcción para obtener las colecciones que de hecho son los conjuntos. Esta es una tesis metafísicamente fuerte, pues sostiene que los objetos siempre anteceden a los conjuntos.

[187] "Transposed to our potentialist setting and slightly generalized, the question just posed corresponds to the question of which instances of the following scheme are valid:
$\Diamond \exists x \Box \forall u [u \in x \leftrightarrow \varphi(u)]$". *Ibid.* P. 219. La traducción es mía.

consideración siempre. Aquí se obtiene otra forma de entender el proceso de formación de conjuntos, la cual consiste en que una pluralidad define un conjunto cuando la propiedad asociada a la pluralidad es extensionalmente definida.[188]

Ahora, una clara ventaja en relación con problema que nos interesa es que con este enfoque potencialista en términos modales se dispone de nuevas interpretaciones sobre los PR. A continuación, se presenta una de tales interpretaciones. En las consideraciones hechas acerca del tratamiento de las fórmulas de la teoría, se tiene lo siguiente: "Este principio es mejor entendido como postulando que la verdad de una afirmación en 'el modelo' proporcionado por la jerarquía potencialista de los conjuntos asegura que la afirmación es posible. Porque una afirmación φ es verdadera en este 'modelo' es que φ sea verdadera cuando todos sus cuantificadores corren en todos los conjuntos posibles, incluidos los que aún no han sido formados.".[189] En otras palabras, el principio sostiene que las oraciones verdaderas en la jerarquía potencialista tienen un nivel en la jerarquía cumulativa posible donde hay conjuntos que hacen verdadera dicha oración. Si bien, los PR usuales que he venido analizando a lo largo de este trabajo señalan que las oraciones verdaderas en V tienen un estrato en la jerarquía cumulativa, se puede entender esta versión potencialista de PR como una forma débil de la reflexión, pues las oraciones verdaderas lo son en conjuntos que en principio son posibles, haciendo que la condición de existencia de dichos conjuntos sea más débil.

[188] Ver *Ídem*. Notemos que la extensionalidad en juego supone que la propiedad en cuestión corresponda de hecho con cierta colección de objetos que la cumplirían. Hay que ser cuidadosos en este punto, pues el mismo Linnebo tiene como restricción que el aparato modal esté restringido al mundo actual.
[189] "This principle is best understood as stating that the truth of a claim in 'the model' provided by the potential hierarchy of sets ensures that the claim is possible. For a claim φ to be true in this 'model' is for φ to be true when all its quantifiers are understood as ranging over all possible sets, including ones not yet formed.". *Ibid*. P. 222. La traducción es mía.

4.1.2.- Modalidad desde el enfoque axiomático de la Teoría de Conjuntos

Con lo que hemos manejado en la sección anterior, se ha motivado la idea de introducir nociones modales a la Teoría de Conjuntos para ofrecer otra forma de estudiar los objetos de la teoría. Vimos que resulta en cierto modo natural que la Teoría de Conjuntos así expandida motive el interés extra en el estudio de las cuestiones sobre el estatus metafísico/ontológico de los conjuntos, llegando a ofrecer opciones de justificación sobre qué condiciones son las que se cumplirían en la formación de conjuntos (no sin que tales opciones lleven a considerar problemas delicados acerca de la naturaleza ontológica de estos objetos). Ahora me concentraré en estudiar los aspectos modales de la teoría dejando de lado las cuestiones sobre la naturaleza de los objetos y enfocando la atención al aparato formal de la teoría.

Comenzaré por decir que la distinción Actualismo/Potencialismo también influye directamente en el trabajo formal de la teoría. Por lo dicho desde la sección anterior, adoptaremos la postura potencialista para el estudio formal de la teoría. Ahora veremos que esta postura es compatible con formas de trabajar con semánticas modales kripkeanas, es decir, que es compatible con estructuras $\langle W, R, e\rangle$ donde W es un conjunto de mundos, R es la relación de accesibilidad y e es la función valuación. Para compatibilizar estas estructuras con el enfoque potencialista es pertinente analizar qué propiedades debe poseer la relación de accesibilidad R para rescatar la idea de que la totalidad conjuntista es no acabada. Una opción para hacer esto es como sigue: "Decimos que [la estructura $\langle W, R, e\rangle$] es un *sistema potencialista*, si la relación de accesibilidad es reflexiva y transitiva y si, además, cuando sea que un mundo accede a otro en W, entonces el dominio del primer mundo está contenido en el segundo.”.[190] Aunque no es la única, esta manera permite apreciar fácilmente cómo relacionar la tesis potencialista con la semántica formal de TC. Haciendo las acotaciones pertinentes, es notorio que las estructuras modales kripkeanas potencialistas rescatan las nociones usuales de satisfacción, verdad y validez que se tienen con la versión modal estándar.

Veremos que no sólo puede añadirse la postura potencialista a la semántica de TC. La idea de incorporar el Potencialismo en la parte formal de la teoría es que el estudio modal potencialista puede realizarse poniendo atención a aspectos internos de ésta dándoles un tratamiento modal, además que no es necesario recurrir a la introducción de más nociones similares como las pluralidades. Siguiendo lo dicho por Hamkins y Linnebo en su (2018), p. 13, se presentan varias formas de interpretar la modalidad en Teoría de Conjuntos mediante nociones teóricas sobre las que se tiene mejor control y entendimiento, por mencionar algunas:

1) *Potencialismo en rango.* $V = \{V_\beta \mid \beta \in ORD\}$ y $\lozenge\, \varphi \coloneqq \varphi\ vale\ en\ un\ V_\beta\ mayor.$

2) *Potencialismo en conjuntos transitivos.* $T = \{W \mid W - trans\}$ y $\lozenge\, \varphi \coloneqq \varphi\ vale\ en\ un\ conjunto\ transitivo\ mayor.$

3) *Potencialismo de Grothendieck-Zermelo.* $Z = \{V_\kappa \mid \kappa - inaccesible\}$ y $\lozenge\, \varphi \coloneqq \varphi\ vale\ en\ un\ V_\kappa\ mayor\ con\ \kappa - inaccesible.$

[190] “We say that W is a potentialist system, if the accessibility relation is reflexive and transitive and if, furthermore, whenever one world accesses another in W, then the domain of the first world is contained within that of the second.”. (Hamkins, Linnebo (2018), p. 3) Traducción mía. Nótese que la relación de contención entre dominios de mundos es la que traduce el requisito potencialista a los marcos kripkeanos.

4) *Potencialismo en forcing.* $M = \{V[G] |\, G\ es\ V - generico\}$ y $\Diamond\, \varphi \coloneqq \varphi\ vale\ en\ una\ extensión\ por\ forcing.$

5) *Potencialismo de modelos contables-transitivos.* $C = \{M | M \vDash ZFC, transitivo\ y\ contable\}$ y $\Diamond\, \varphi \coloneqq \varphi\ vale\ en\ un\ modelo\ transitivo\ contable\ más\ grande\ de\ ZFC.$

Hay algunos aspectos importantes que debemos notar con estas formas de Potencialismo:

1) El Potencialismo puede ser interpretado dentro de TC según el enfoque formal con el que pretenda trabajarse la noción de "conjunto posible". Esto quiere decir que las formas de Potencialismo son sensibles a la interpretación que adquieren según la herramienta teórico-conjuntista empleada para incluirlos en la teoría. Por esto, podemos tener interpretaciones de Potencialismo que dependen de lo que utilicemos de la teoría para justificar su introducción en el trabajo formal: *Potencialismo de rango* para hablar de estratos posibles, *Potencialismo de Grothendieck-Zermelo* para hablar de niveles del universo subindexados por algún cardinal inaccesible, etc. Estas formas de Potencialismo tienen como rasgo común que poseen un principio de justificación teórica que adapte las herramientas teóricas con la noción menos manejable de "conjunto posible".

2) Todas las formas de Potencialismo expuestas para conciliar los tratamientos formales teórico-conjuntistas tienen en común que *el enfoque modal teórico-conjuntista es traducido a alguna(s) nociones más precisas y conocidas ya establecidas de la teoría*. Esto quiere decir que la teoría no incorpora algún compromiso metafísico/ontológico sobre los conjuntos según el Potencialismo asumido al estar éste restringido como recurso teórico

que permita el estudio de colecciones que pudieran ser conjuntos en términos de nociones mejor conocidas más próximas a interpretar esa posibilidad. Así, por ejemplo, la cuestión de si tales colecciones son conjuntos posibles se reinterpreta a una sobre la posibilidad de conjuntos transitivos posibles en el Potencialismo de conjuntos transitivos, o se reinterpreta a una sobre la posibilidad de extensiones genéricas posibles en el Potencialismo de forcing, etc. En otras palabras, la cuestión sobre qué conjuntos son posibles se reinterpreta en cuestiones sobre el estudio y comportamiento de colecciones que son posiblemente conjuntos según una noción particular (estratos posibles, extensiones genéricas posibles, etc.).

Un dato interesante que notar con la presentación de diversas formas de incorporar una visión potencialista en el estudio teórico-conjuntista es que en cada una de ellas se pueden hacer preguntas interesantes acerca de las nociones modales en términos de los componentes formales relevantes para interpretar la modalidad en cada caso. Así, por ejemplo, en el Potencialismo en forcing el estudio acerca de qué elementos deben considerarse para hablar acerca de extensiones genéricas *posibles* cobra importancia considerable.[191] Sin embargo, nosotros abordaremos el estudio formal potencialista del forcing desde una perspectiva más fundamental para apreciar las ventajas de los conceptos, definiciones y resultados que son propios de sistemas lógicos modales para trabajar en TC. Además, el siguiente estudio nos servirá para averiguar cómo incluir los PR en el tratamiento modal de la teoría, de modo que propongamos una posible solución al problema de estancamiento de los PR en segundo orden.

[191] En Hamkins, Löwe (2005) y Hamkins (2008) hay trabajo realizado al respecto que se sugiere revisar acerca del Potencialismo en forcing.

4.2.- Potencialismo revisado: Bases modales en el estudio teórico-conjuntista

En vista de que un acercamiento modal a TC ofrece un mejor entendimiento de las cuestiones acerca del alcance de *V*, lo más conveniente es motivar con más precisión la introducción de recursos lógico-modales en la parte más fundamental de la teoría. Debemos tener en mente que lo que se pretende en esta extensión modal de TC *no es* motivar alguna postura metafísica acerca de la necesidad o posibilidad que se quisiera atribuir a determinados conjuntos, sino más bien se trata de justificar un carácter potencialista de TC al ofrecer recursos adecuados que nos permitan traducir las cuestiones acerca de colecciones de objetos que *podrían* ser conjuntos sin que de hecho lo sean aún.[192]

4.2.1.- Preliminares: Lógica modal y pluralidades

Anteriormente he señalado que el estudio modal motivado por el Potencialismo va bien con semánticas kripkeanas de mundos posibles. Comenzamos por definir los componentes de un marco modal $< W, R, D, v >$ en el modo estándar para una lógica de predicados modal: W es el conjunto de mundos en el que se trabaja, R es la relación de accesibilidad entre mundos, D es una función que asigna a cada mundo de W un dominio, y

[192] Dicho en términos más cercanos al estudio de la modalidad en metafísica, el estudio modal conjuntista que analizaremos no está enfocado en responder cuestiones acerca de la existencia necesaria o posible de determinados conjuntos a través de diversos mundos posibles (*persistencia esencial* si se prefiere). Más bien, las herramientas modales conjuntistas motivadas por el Potencialismo conjuntista son de un carácter más matemático: estas herramientas permiten un análisis preciso de aquellas colecciones de objetos que *pudieran* ser conjuntos (siguiendo con la comparación con el estudio modal metafísico, el estudio que nos interesa hacer aquí es acerca de los conjuntos y colecciones que pudieran serlo *en el mundo de hecho*, en vez de diversos mundos posibles). Ver Linnebo (2013), p. 208.

v es una función que asigna sucesiones de objetos que satisfacen propiedades en los mundos de W. La relación R opera por medio de la función D como sigue: dos mundos w y w' están R-relacionados, esto es, wRw' implica que $D(w) \subseteq D(w')$. La relación entre mundos cumple con ser un orden parcial (reflexiva, anti-simétrica y transitiva) y ser un orden bien fundado (existencia de elementos minimales), pues esto permitirá una buena correspondencia con la visión bien fundada del universo V en términos de la jerarquía cumulativa. Además, dada la naturaleza creciente y expandible de V, notemos que la relación R debe permitir arrastrar los conjuntos tenidos a nuevos estratos del universo, haciendo con esto que los objetos que ya son conjuntos no dejen de serlo en estratos superiores. Lo anterior hace que R deba ser *dirigida* en términos de que los dominios de conjuntos se vayan incluyendo en los nuevos niveles de V. Formalmente, la dirección de R se dice: $\forall w_1 \forall w_2 \exists w_3 (w_1 R w_3 \wedge w_2 R w_3)$. Siempre hay un dominio mayor o igual en el que podamos incluir los objetos de aquellos conjuntos en V.

Dada la forma en que hemos adoptado la relación R para justificar el comportamiento de los conjuntos según la contención de dominios en niveles superiores de V, se vuelve necesario explicar cómo el comportamiento de V en términos de estratos de una jerarquía cumulativa es compatible con la visión potencialista que admite consideraciones de conjuntos posibles, mientras conserva los conjuntos de hecho tenidos en determinado nivel de V. Una manera de lograr lo anterior es mediante la introducción del siguiente principio de Maximalidad: *En todo nivel todos los conjuntos que puedan ser formados son de hecho formados.*[193] Con este principio, se justifica la idea de que R deba

[193] *Ibid.* P. 209. La traducción es mía.
Este principio de maximalidad es uno que funciona al nivel de la lógica modal que se adopte para trabajar TC modalizada. Debemos destacar que otras formas de maximalidad que puedan exponerse después no necesariamente deben regresarnos a esta forma más básica de comprender el comportamiento de los conjuntos

ser dirigida en vista de que se debe tener un conjunto que reúna los dominios de todos los demás conjuntos tenidos sin que se pierdan en niveles superiores de V.

En cuanto al sistema lógico modal que se emplea para trabajar con la visión potencialista modal que viene dada por los elementos anteriormente expuestos, debe resultarnos claro que debe ser un sistema que recupere todas las características cuantificacionales y sea compatible con las propiedades de la relación R mencionadas. En Linnebo (2013), Hamkins, Linnebo (2018), Hamkins, Löwe (2005) y Hamkins (2008) existen indicios y buenas razones para sostener que es una lógica modal (en forma proposicional) con los siguientes axiomas:

(i) K: $\Box (P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$;

(ii) T: $\Box P \rightarrow P$;

(iii) 4: $\Box P \rightarrow \Box \Box P$;

(iv) G: $\Diamond \Box P \rightarrow \Box \Diamond P$.

Este sistema formal es conocido como Sistema S4.2 y es adecuado para recuperar los aspectos de la relación R y el principio de maximalidad dicho antes. El siguiente axioma: $x \neq y \rightarrow \Box (x \neq y)$, junto con las reglas básicas usuales de la lógica básica de 1er orden y los axiomas de S4.2 son lo que conforman la lógica de 1er orden modal indicada para estudiar TC desde la postura potencialista que nos interesa, la cual será llamada como MFO (Modal First-Order Logic por sus siglas en inglés).[194]

---

que posiblemente puedan aparecer.
Adicionalmente, y como se menciona inmediatamente después de la exposición de ese principio, no hay nada que sea materialmente equivalente en TC estándar que sea recuperado con ese principio de maximalidad. En otras palabras, no hay nada en los axiomas o resultados conocidos respecto del proceso de formación de conjuntos que sostenga la exhaustividad de este proceso en cada estrato de V.

[194] Aunque no será estudiado en este trabajo, en los anteriores textos mencionados se halla todo el desarrollo y discusión a favor de que la lógica S4.2, y no otros sistemas lógicos modales, es la adecuada para estudiar la modalización de TC desde el Potencialismo. Además, tal como se menciona en la definición de MFO en Linnebo (2013), p. 210, otra propiedad que será de utilidad en esta lógica es la fórmula Barcan conversa:

Anteriormente hemos mencionado que la noción de pluralidad xx de objetos se perfila bien en el estudio de aquellas colecciones que posiblemente sean conjuntos, dados avances relevantes de TC. Ahora precederemos a introducir la noción con más precisión en el sistema MFO mediante las siguientes consideraciones. Las pluralidades podrán ser introducidas en el estudio lógico modal en un sentido semejante a como se usan las variables de objetos, de modo que expresiones como '$\forall xx$' o '$\exists xx$' tendrán un significado asociado a cómo comprendemos las pluralidades y la cuantificación, esto es "para todos (cualesquiera) objetos xx…' y 'existen unos objetos xx…' respectivamente. Además, adoptaremos el siguiente predicado que es propio de las pluralidades: '$u \prec xx$' que significa 'u es uno de los xx'. Las nociones anteriores son las que suelen introducirse para empezar a trabajar con una lógica plural[195] y nosotros las adoptaremos para el estudio modal de TC. Con la noción de pluralidad añadida al estudio teórico-conjuntista, recurriremos a la idea familiar del uso esquemático de fórmulas para señalar el primer paso formal que indique lo que significa que una cierta pluralidad sea candidato para ser un nuevo conjunto o miembro de *V*:

(P-Comp) $\exists xx \forall u(u \prec xx \leftrightarrow \varphi(u))$

donde φ(u) es una formula en que *xx* aparece libre. Notemos que P-Comp guarda gran similitud con el esquema de comprensión, pues no se ha dejado de lado el procedimiento que indica por medio de fórmulas del lenguaje formal de TC cuáles son las propiedades que definen a conjuntos en específico.

$\Box \forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \Box \varphi(x)$.

[195] Ver *Ibid*. P. 210.

El esquema P-Comp da entrada a las ideas y nociones básicas relevantes acerca de conjuntos posibles por medio de la relación R. A continuación, damos algunos nuevos esquemas formales que indican qué significa que un objeto sea miembro de una pluralidad que persista "trans-mundo", esto es, que cumpla con la relación R (y su propiedad de dirección):

(Stb$^+$-$\prec$) $u \prec xx \rightarrow \Box\ (u \prec xx)$

(Stb$^-$-$\prec$) $u \nprec xx \rightarrow \Box\ (u \nprec xx)$

(Stb$^+$-φ) $\varphi(u) \rightarrow \Box\ \varphi(u)$

(Stb$^-$-φ) $\neg\varphi(u) \rightarrow \Box\ \neg\varphi(u)$

donde los últimos dos esquemas son las condiciones para que una fórmula φ sea *estable*, lo cual ahondaremos después. Hasta aquí hemos alcanzado una nueva versión de MFO en la que se consideran las pluralidades desde el punto de vista modal, de modo que sirvan en el estudio de conjuntos posibles. MFO con estos añadidos se convierte en MPFO (Modal Plural First-Order Logic por sus siglas en inglés).[196] Resta que se justifique la característica de extensión definida por parte de los objetos que sean posibles conjuntos, esto es, que podamos introducir al vocabulario modal de TC que, para cualquier conjunto posible definido por propiedades que no han sido introducidas o deducidas por los medios teórico-conjuntistas disponibles, exista alguna pluralidad que indique, por lo menos en potencia, que se está ante un conjunto. Lo anterior ya se puede realizar con los recursos formales que

[196] *Ibid.* P. 211-212. Los recursos anteriormente expuestos sirven para justificar algo más: Linnebo considera que la "inextensibilidad" de las pluralidades, esto es que tales colecciones de objetos no escapan al control de los conceptos conjuntistas de la teoría, queda garantizada por la definición de MFO y la adecuación de la fórmula Barcan al siguiente esquema: $\forall u(u \prec xx \rightarrow \Box\ \theta) \rightarrow \Box\ \forall u(u \prec xx \rightarrow \theta)$.

hemos introducido hasta ahora, pues contamos con el esquema P-Comp y el modo en que la relación R permite cotejar dominios que se contienen en otros cada vez más grandes, sin perder los objetos que sean conjuntos en los niveles inferiores de la jerarquía cumulativa:

(Ed-φ) $\exists xx \, \Box \, \forall u(u \prec xx \leftrightarrow \varphi(u))$.

El esquema (Ed-φ) arroja la estabilidad de la fórmula φ desde el enfoque modal para todas las instancias que se han dado antes, como (Stb^{+}-φ) y (Stb^{-}-φ).[197] Con esto se termina de introducir las nociones básicas modales que dan sentido al discurso modal potencialista en TC, vía las pluralidades como candidatos a conjuntos posibles.

4.2.2.- PR y modalidad

Ahora nos enfocaremos en explorar la parte modalizada de TC con el enfoque potencialista, de modo que extraigamos las principales características que nos permitan, por una parte, seguir con el análisis de los conjuntos que la teoría en su versión estándar nos permite y, por otra parte, introducir el estudio de las pluralidades que permitan la investigación de los conjuntos posibles.

Primero, requerimos que el lenguaje lógico en que se trabajará la versión potencialista modal de los conjuntos admita las versiones modalizadas de las fórmulas. Esto ya lo hemos alcanzado con los recursos preliminares hasta ahora presentados, pues si llamamos Ⱡ al lenguaje formal con que se trabaja la TC, entonces $Ⱡ^{\Diamond}$ = MPFO es la

[197] Ver el lema 4.2 en *Ibid.*

modalización que hemos propuesto para analizar modalmente la teoría. Con este lenguaje $L^{\Diamond}$ lo que se está haciendo es incluir en las consideraciones del lenguaje formal el uso de operadores modales $\Box$ y $\Diamond$.[198] Con esto ya podemos decir más acerca de la estabilidad de las fórmulas, pues la propiedad consiste en preservar el valor de verdad de las oraciones en el lenguaje L de TC a su versión modalizada. Luego veremos que la propiedad de estabilidad es importante para analizar nociones como la contención o la pertenencia potencialistamente.

Estamos listos para exponer un resultado importante al respecto del alcance de los resultados tenidos en la versión estándar de TC con $TC^{\Diamond}$. La idea detrás de este resultado es que, con las condiciones adecuadas, los resultados en $TC^{\Diamond}$ no se alejan de aquello que ya se tiene (o se pudiera tener) como resultado en la versión estándar de la teoría. Nuevamente, se expone el resultado en su forma más general:

Teorema 24 (Linnebo (2013), Teorema 5.4).- Sea $\vdash$ la relación de deducibilidad clásica en un lenguaje L, aunque si L es un lenguaje plural, decimos la deducibilidad clásica sin el uso de cualquiera de los esquemas de comprensión plural. Sea $\vdash^{\Diamond}$ la deducibilidad en $L^{\Diamond}$ por $\vdash$, S4.2 y los axiomas de estabilidad en $L^{\Diamond}$. Sean $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ y ψ L-fórmulas. Entonces tenemos:

$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ *sii* $\varphi_1^{\Diamond},\ldots,\varphi_n^{\Diamond} \vdash^{\Diamond} \psi^{\Diamond}$.[199]

---

[198] Cfr. Def. 5.1 en *Ibid*. La notación $L^{\Diamond}$ es usada en esa definición de modo más general. Esto es, que se toma un lenguaje formal L específico y su modalización resultante considera la utilización de operadores modales.

[199] "THEOREM 5.4. *Let _ be the relation of classical deducibility in a language* L, *although if* L *is a plural language, we mean classical deducibility without the use of any plural comprehension axioms. Let _3 be deducibility in* L3 *by _, S4.2, and the stability axioms for* L3. *Let* $\phi_1,\ldots,\phi_n$ *and* ψ *be* L-*formulas. Then we have:* $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$ *iff* $\phi_1^{\Diamond},\ldots,\phi_n^{\Diamond} \vdash^{\Diamond} \psi^{\Diamond}$.". La traducción es mía. La demostración, que no aparece aquí, se encuentra en el texto donde se haya este teorema. La idea general de la demostración consiste en una

Dicho de modo más natural, el Teorema 24 nos asegura que podemos trabajar con TC y TC$^\Diamond$ de manera simultánea, pues con este resultado podemos trabajar con TC$^\Diamond$ y su contraparte no modal de manera conveniente para obtener y analizar conceptos, nociones y resultados de manera comparada entre ambas versiones de TC.

Pasamos ahora a señalar otro aspecto de importancia acerca de conjuntos y pluralidades que será de utilidad en lo que sigue. Esta forma modal de la teoría para trabajar la concepción potencialista de la misma defiende la prioridad de los elementos sobre los conjuntos de los que sean miembros, en sentido de que para que tal o cual conjunto surja en V se requiere que sus elementos se encuentren disponibles para su formación. Esta idea por sí sola puede parecer poco informativa desde el punto de vista estándar de la teoría, pero tiene un gran peso desde la perspectiva modal puesto que sustenta:

1) Los conjuntos posibles que tienen su base en las pluralidades son accesibles a estudiarse por medio de las propiedades exhibidas por los miembros de tales pluralidades.

2) Dadas las propiedades de la relación R en el marco modal $< W, R, D, v >$, es necesario que la permanencia "trans-mundo" de los conjuntos permita identificar y comparar conjuntos a través de sus elementos. Por lo que siempre es posible preguntarse acerca de si dos conjuntos son los mismos, aunque estén en mundos diferentes por medio de los elementos que los conforman.

La importancia de (2) es estimada desde los aspectos formales de la teoría. Pensemos en nuestro recurso básico formal para comparar conjuntos, el cual viene dado por el axioma de extensionalidad (EXT).[200] Para que comencemos siquiera a responder a preguntas sobre

---

inducción sobre la complejidad de las fórmulas y en el uso de la propiedad de estabilidad que hemos mencionado en el párrafo anterior.

[200] Cuya forma básica es: $x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$.

comparación entre conjuntos posibles requerimos un análogo de (EXT) que viene dado con las pluralidades y el esquema (ED-φ):

(Ed-∈) $\exists xx \Box \forall u(u \prec xx \leftrightarrow u \in z)$.[201]

Metafísicamente, (1) sustenta la postura de que los conjuntos posibles tienen como justificación inicial de existencia las colecciones de objetos (pluralidades) que se comportan de acuerdo con las nociones o conceptos que se proponen. Nuevamente, esto está de acuerdo con la idea de que la concepción de cualquier conjunto está apoyada por la existencia antecedente de sus miembros, lo cual concuerda bien con el modo inicial en que se suele hablar de conjuntos en la forma estándar de TC. Esta prioridad de los elementos a los conjuntos, tal que vienen dados por las pluralidades, motiva que los esquemas de estabilidad para fórmulas, la noción de pertenencia, y (Ed-∈) sean válidos por medio de la noción de pluralidad.[202]

En modo similar a como se adopta (Ed-∈) para dar un tratamiento modal a la noción de pertenencia estándar de TC, disponemos de una noción modal de "ser subconjunto de" con ayuda de los elementos introducidos hasta ahora. El siguiente esquema se encarga de esta labor:

(ED-⊆) $\exists xx \Box \forall u(u \prec xx \leftrightarrow u \subseteq a)$.[203]

---

[201] Ver *Ibid*. P. 215. En este caso, *x* ocupa el lugar de una variable que denota un conjunto cualquiera.
[202] En *Ibid*., la forma de hacer esto es por medio de una noción extra que conecta las pluralidades con conjuntos: $x \equiv uu$, que denota "*x* es el conjunto formado de *uu*". Los esquemas mencionados quedan como (Stb^{+}-≡), (Stb^{-}-≡), (Ed-≡), etc.
[203] Ver *Ibid.* P. 217. En este caso, *a* es un conjunto cualquiera que contiene al conjunto *u*.

No obstante, se debe tener cierta precaución con el esquema anterior, puesto que, a diferencia de los anteriores, éste requiere del Principio de Maximalidad para funcionar en general. La razón de esto es que, sin el Principio, en (ED-⊆) los conjuntos posibles que existen en determinados estratos de *V* no tienen la garantía de que todos sus subconjuntos desconocidos sean asumidos como tal desde el comienzo. Ahora, hemos visto con el desarrollo de TC que, en general, no se conocen todos los conjuntos de determinado nivel sino hasta que la teoría ha sido más desarrollada y enriquecida con herramientas que permitan un estudio más preciso y extenso de los conjuntos de interés. Pero con el Principio de Maximalidad, vemos que todos los conjuntos posibles que sean desconocidos en principio tienen su posibilidad fundamentada en el hecho de que las pluralidades en que se basan ya son consideradas (pues la Maximalidad obliga a considerar como conjuntos, por lo menos posibles, a esas colecciones de objetos que aún no lo son), dejándolo pues como una cuestión acerca de los desarrollos de TC el que se pueda justificar o no que tales conjuntos posibles se vuelvan conjuntos de hecho. Así que la teoría, y su desarrollo, es lo que se encarga de interpretar los conjuntos contenidos en otros desde la postura potencialista con (ED-⊆).

Vemos, con lo anterior, que tenemos la adecuación extensional de las nociones modales presentadas con la postura potencialista de TC y el tratamiento estándar de ésta. Si pensamos en el axioma de comprensión (Comp): $\exists x \forall u(u \in x \leftrightarrow \varphi(u))$, y tenemos el esquema modal siguiente:

(C) $\Box \forall xx \Diamond \exists y \Box \forall u(u \in y \leftrightarrow u \prec xx)$, entonces se cumple que la respuesta a la pregunta acerca de las condiciones de definición de determinado conjunto viene dada, en principio, por si es posible que haya una pluralidad de objetos que satisfacen las propiedades que tendría ese conjunto. Lo que tenemos es:

(Comp$^{\Diamond}$) $\Diamond\exists x \Box \forall u(u \in x \leftrightarrow \varphi(u))$,

lo que implica la siguiente interpretación potencialista en términos de pluralidades: $\Diamond\exists xx \Box \forall u(u \prec yy \leftrightarrow \varphi(u))$. Esto concilia nuestra concepción más intuitiva acerca de la formación de conjuntos, en términos de conglomerados de objetos que cumplen determinada propiedad, lo cual es sometido al rigor de TC que arroje como resultado que determinado conglomerado cumpla con ser conjunto o no.[204]

Vale la pena notar que las nociones modales presentadas hasta ahora permiten una traducción adecuada de la parte axiomática básica de TC estándar (y, por ende, la interpretación modal de los resultados tenidos en TC),[205] pero nos enfocaremos en emplear estos recursos modales para analizar los PR y obtener así algunas características importantes sobre su interpretación y utilización. Recordemos que la forma básica de los PR: $V \vDash \varphi \rightarrow \exists\beta \in ORD(V_\beta \vDash \varphi^\beta)$ se sustenta en la idea de que el universo de los conjuntos es "totalmente inabarcable" y todo resultado (que en general afirma la posesión de una o más propiedades por parte de cierto conjunto) se sostiene en cierto estrato de la jerarquía cumulativa. Esta idea es recuperada en la versión potencialista de TC mediante el siguiente esquema modal:

---

[204] Ver *Ibid.* P. 217 y ss. Adicionalmente, Linnebo apoya la tesis de la adecuación extensional de las nociones modales presentadas por medio de algunos resultados útiles al respecto de la "subconjunticidad" y otras relacionadas.

[205] Los Teoremas 8.2 y 8.3 en *Ibid.* muestran el modo en que la parte básica de TC es recuperada por la versión potencialista de la teoría.

(◊-Refl) $\varphi^{\Diamond} \rightarrow \Diamond\varphi$,

para una fórmula φ dada. La reinterpretación potencialista de φ nos sugiere que la fórmula es verdadera de la jerarquía cumulativa que contempla los conjuntos posibles, de lo cual deducimos que existe un modelo dado por un marco $< W, R, D, v >$ en que φ es verdadera. Notemos con esto que la idea de PR es llevada más lejos con la consideración de conjuntos posibles dados por el análisis de pluralidades, así que PR no sólo no se descarta del tratamiento potencialista de TC, sino que adquiere un alcance mayor.

Es importante recalcar que la versión modal de PR tiene un carácter más especulativo que su contraparte estándar. Mientras que la forma usual de PR se refiere a un proceso enfocado en la formación de conjuntos que hagan verdaderas a determinadas fórmulas, (◊-Refl) nos da información acerca del alcance y el proceso de formación de determinados objetos tratados por la teoría, en palabras de Linnebo: "El principio [(◊-Refl)] dice que debemos reconocer cualquier situación que es lograda en la jerarquía potencialista como genuinamente posible.".[206] Los PR modales proporcionan información acerca de la extensión de los mundos posibles en términos de los conjuntos que pueden existir, siendo tales mundos accesibles en el caso de que los conjuntos conjeturados sean exitosamente justificados por medio de la teoría.

Terminamos esta sección con un resultado que señala, para TC modalizada en el estilo aquí hecho, las condiciones que se deben cumplir para que los PR posean una contraparte modal (◊-Refl) que recupere el sentido original descrito por la versión estándar

---

[206] "The principle says that we should recognize any situation that is realized in the potential hierarchy as genuinely possible.". *Ibid.* P. 222. La traducción es mía.

de éstos. Para lograr esto, requerimos un par de resultados preliminares que enunciamos a continuación:

> *Teorema 25 (Linnebo (2013), 6.3).- Sea φ una $L_{\in}$-fórmula acotada, y sea $\varphi^{\Diamond}$ su traducción potencialista. Entonces MPFO y los dos axiomas asociados al principio transmundo de extensionalidad demuestran $\varphi \leftrightarrow \varphi^{\Diamond}$. Esta teoría demuestra que φ es estable.*

> *Teorema 26 (Linnebo (2013), 8.7).- La teoría de conjuntos modal MS es interpretable en la teoría no-modal ZF y es por tanto consistente garantizando que ZF lo es.*

Donde MS en el Teorema 26 es MPFO con los esquemas añadidos que hemos mencionado antes, desde los esquemas de estabilidad hasta ($\Diamond$-Refl).

Con ambos resultados[207] podemos ofrecer una demostración relativamente sencilla de la adecuación entre ambas versiones de PR, la estándar y la modal, que nos será muy informativa y de ayuda después:

---

[207] "LEMMA 6.3. *Let* φ *be a bounded* $L\in$*-formula, and let* $\phi^{\Diamond}$ *be its potentialist translation. Then MPFO and the two axioms associated with the transworld principle of extensionality prove* $\phi \leftrightarrow \phi^{\Diamond}$*. This theory also proves that* φ *is stable." Y "THEOREM 8.7. The modal set theory MS is interpretable in the nonmodal theory ZF and is therefore consistent provided that ZF is."*. *Ibid*. P. 215 y 224. La traducción es mía. Las demostraciones de ambos teoremas, que no se incluyen aquí, se encuentran en el mismo texto. La idea de ambas demostraciones es simple, pero laboriosa, consistiendo principalmente en inducciones sobre la complejidad de fórmulas (en el caso del teorema 25) y la traducción potencialista a estándar de las nociones modales introducidas para hablar del proceso de formación de conjuntos por medio de pluralidades, la pertenencia y subconjunticidad, y los axiomas modales de S4.2 al lenguaje modal de TC (en el caso del teorema 26).

Teorema 27.- Para cualquier PR modal K, con la estructura (◊-Refl), si MS + K es consistente entonces K tiene una contraparte no modal K' que es PR.

Demostración. Sea $K \equiv \varphi^{\Diamond} \rightarrow \Diamond\, \varphi$ para una $\varphi \in \mathcal{L}_{MS}$. Se tiene que φ es estable. Primero notemos que, como MS cumple con los esquemas (ED-⊆) y (Comp◊), por el Teorema 26 se cumple que la contraparte no modal K' existe. Veamos que K' es PR: Supongamos que $V \vDash \varphi$. Como φ es estable, se cumple que $\varphi \equiv \varphi^{\Diamond}$ por el Teorema 25. Como vale (◊-refl), se cumple que ◊φ. Por la interpretación potencialista de ◊φ y el Teorema 26, es consistente que existen conjuntos posibles que satisfacen φ en MS. Si *A* es uno de tales conjuntos posibles y $\alpha = ran(A)$, entonces se cumple que $\exists \alpha \in ORD(V_{\alpha} \vDash \varphi^{\alpha})$. Por tanto, $K' \equiv V \vDash \varphi \Rightarrow \exists \alpha \in ORD(V_{\alpha} \vDash \varphi^{\alpha})$ ■

Hay algunos datos útiles que podemos señalar del resultado anterior. Primeramente, notemos que el teorema no nos proporciona nuevos terrenos de confirmación para justificar que determinados PR no modales sean aceptados en la TC estándar. Recordemos que una característica principal del desarrollo potencialista de TC aquí examinado es su papel como traducción entre TC estándar y su versión modalizada. Con lo anterior, no podemos usar este teorema como un mecanismo para verificar nuevos PR en TC estándar.

En segundo lugar, hay una ventaja importante que obtenemos para el aspecto metodológico de los PR que viene dada con este teorema, particularmente por la forma en que está expresado. Las nociones modales introducidas, en especial (◊-refl), nos dotan de una ventaja notoria con respecto a la contraparte no modal de PR, a saber, la expansión especulativa en términos de la formación de los PR en su forma modal. Lo anterior quiere decir que, con ayuda de las pluralidades y los resultados que conocemos al respecto, se nos abre un terreno más amplio de consideraciones sobre qué colecciones de objetos *podrían* constituir conjuntos por medio de las modalidades, lo cual puede ser recuperado por medio de los mecanismos potencialistas introducidos. En otras palabras, damos el proceso de considerar en el terreno especulativo-formal potencialista a fórmulas φ, entendidas aquí como $\varphi^{\Diamond}$, un análisis en términos de $\Diamond\varphi$. Esto porque nuestra Teoría MS está diseñada para elaborar todo el proceso de manera formal. De modo que podemos pasar con las herramientas teórico-conjuntistas a la evaluación de la oración Cons(MS + φ) con los medios que disponemos acerca de la traducción entre TC y MS + φ. Si se tiene un resultado favorable acerca de Cons(MS + φ), queriendo esto decir que no hay inconsistencia en la teoría al introducir φ, se aplica el Teorema 27 para garantizar que φ es de hecho un PR en el sentido estándar de nuestra teoría.

Con lo anterior, notemos que el elemento a destacar es que el Teorema 27 nos permite un medio para considerar qué colecciones de objetos -pluralidades- constituirían, mediante un análisis riguroso y preciso, objetos del universo *V*. De modo que la visión potencialista, y particularmente el Teorema 27, permiten al teórico-conjuntista acceder a un terreno de especulación de mayor alcance que el tenido con la práctica estándar en TC de los PR.

4.2.2.1.- Apéndice: Labor potencialista en forcing

Anteriormente se expuso la definición y los requerimientos básicos para el forcing en Teoría de Conjuntos, además de algunos resultados importantes conocidos como los

Teoremas Fuertes del forcing. Ahora nos concentraremos en aplicar algunas de las nociones potencialistas para interpretar modalmente el forcing.

Recordemos que $M[G] = \{\breve{x} \mid x \in M_P\}$ es la extensión genérica del modelo M con la extensión P-genérica G, donde P es el conjunto parcialmente ordenado y $\breve{x}$ son los P-nombres de los objetos *x* del modelo original *M*. Ahora bien, es claro que las extensiones de modelos por forcing preservan las relaciones entre los objetos que se interpretan con los modelos base, pues los filtros P-genéricos no alteran el comportamiento de dichos objetos. De modo que es posible hablar de extensiones de forcing para las que se preserva la verdad de ciertas oraciones de interés. Ahora nos enfocamos en la pregunta: ¿Cómo debe interpretarse una oración como $\Diamond\varphi$ en los términos estándar del forcing?, la respuesta vendrá dada por el siguiente desarrollo que inicia con estas definiciones:

Definición (27): (Hamkins, Löwe (2005))

Una oración φ de la teoría de conjuntos se dice forceable *o* posible *si φ se sostiene en alguna extensión de forcing de algún modelo M donde φ es verdadera.*

Una oración φ de la teoría de conjuntos es necesaria *si φ se sostiene en toda extensión de forcing de un modelo M donde φ es verdadera.*

Se usa la notación $\Box\varphi$*,* $\Diamond\varphi$ *para decir que φ es necesaria o posible, respectivamente.*[208]

En la Definición 27 se destaca la manera en que se aborda la cuestión sobre $\Diamond\varphi$ desde el forcing. Al estudiar los aspectos fundamentales del Potencialismo, se tiene la idea

[208] "[…] a statement of set theory ϕ is *forceable* or *possible* if ϕ holds in some forcing extension, and ϕ is *necessary* if it holds in all forcing extensions. The modal notation ◊ϕ and □ϕ expresses, respectively, that ϕ is possible or necessary.". Hamkins, Linnebo, (2005), p. 2. La traducción es mía.

de que las modalidades están vinculadas a la existencia de colecciones de objetos llamadas pluralidades, siendo que una oración necesaria o posible para TC se traduce a la cuestión de la existencia posible o necesaria de las pluralidades que son candidatos a ser los conjuntos que satisfacen lo dicho por la oración en cuestión. Ahora notemos que el estudio de esas pluralidades viene dado por el análisis teórico-conjuntista de aquellas colecciones de objetos que son candidatos a ser las extensiones genéricas que ciertos conjuntos con órdenes parciales inducen. Así, la cuestión ahora es dirigida a la búsqueda de extensiones genéricas posibles que satisfarían determinadas oraciones de TC.[209] Notamos que se siguen cumpliendo los resultados básicos dichos en una sección anterior respecto de los operadores modales, es decir que dichos resultados se trasladan al forcing de la teoría y se obtienen las interpretaciones potencialistas respectivas. Así, se sostienen las propiedades (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, (Q o Dual) $\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\, \varphi$, (G o .2) $\Diamond\, \Box\varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi$, (4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$.

Ahora, una fórmula φ de la Teoría Modal de Conjuntos es satisfacible si hay una extensión posible por forcing en que es verdadera; φ es válida en general si vale en todas las extensiones por forcing de todos los modelos en que dicha φ es verdadera. Para esta teoría se destaca la noción formal de principios de validez del forcing, la cual se define:

Definición (28): (Hamkins, Löwe (2005))

[209] Nótese que hasta aquí no hemos abandonado el carácter de traducción que desde los fundamentos potencialistas de TC se ha sostenido con este estudio modal de la teoría.

Un enunciado modal $\varphi(q_0, \dots, q_n)$ es un principio válido del forcing *si para todas las oraciones ψ_i de la teoría de conjuntos, $\varphi(\psi_0, \dots, \psi_n)$ se sostiene bajo la interpretación de forcing de ◊ y □.*[210]

Con estas nociones modales entendidas con forcing, una cuestión interesante se presenta: ¿Cuáles son los principios válidos del forcing? Ciertamente no es trivial averiguar cuáles esquemas formales de conjuntos se mantiene válidos para toda noción de forcing que se pueda dar. No obstante, en algunos lugares como Hamkins y Löwe (2005) o Menzel (2017) se defiende en mayor o menor medida que el sistema lógico modal S4.2[211] proporciona justamente los esquemas de validez que establecen una base adecuada. El resultado queda expresado como sigue:

Teorema 28: (Hamkins, Löwe (2005))

Si ZFC es consistente, entonces los principios válidos del forcing ZFC-demostrables son exactamente los de la teoría modal S4.2.[212]

Este es un resultado fuerte de esta Teoría Modal de Conjuntos que establece una delimitación explícita de los esquemas válidos del forcing que subyacen a las oraciones que se analicen con dicho método. Demostrar este teorema es una labor ardua que no realizaré

---

[210] "**Main Definition 1**. A modal assertion $\phi(q_0, \dots, q_n)$ is a *valid principle of forcing* if for all sentences ψ_i in the language of set theory, $\phi(\psi_0, \dots, \psi_n)$ holds under the forcing interpretation of ◊ and □." *Ibid.* P. 3. La traducción es mía.

[211] Este sistema lógico consta de (T), (Q), (G), (4) y (K) $\square(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\square\varphi \rightarrow \square\psi)$.

[212] "**Main Theorem 6**. *If* ZFC *is consistent, then the* ZFC-*provable principles of forcing are exactly those in the modal theory* S4.2.". *Ibid.* P. 7. La traducción es mía.

en este trabajo debido a que nos llevaría demasiado lejos del mismo,[213] aunque sí trabajaré tomando el resultado y las consecuencias que pudieran obtenerse con él.

Hay que resaltar el hecho importante de que los principios válidos del forcing para TC no quedan englobados totalmente por la lógica S4.2. Pueden darse modelos de la teoría que validen algún principio en alguna extensión por forcing y que dicho principio no sea reducible a alguna instancia de los axiomas de S4.2 (incluidos los resultados que se obtienen de dicho sistema). Resulta pues que $\{\varphi \mid \varphi\ es\ principio\ válido\ ZFC - demostrable\ de\ forcing\} \subsetneq \{\varphi \mid \varphi\ es\ principio\ válido\ de\ forcing\}$, pero más aún, se da el siguiente resultado que expande la adquisición de estos principios:

Teorema 29: (Hamkins, Löwe (2005))

Si ZFC es consistente, entonces es consistente con ZFC la afirmación de que todas las proposiciones de S5 son principios válidos del forcing.[214]

El impacto de este teorema no es de minimizarse, pues la lógica S5 puede verse como una expansión de los axiomas de modalidad (forcing) junto con un principio de modalidad conocido como:

Principio de Maximalidad (MP): (Hamkins (2008))

Cualquier oración de la teoría de conjuntos que sea forceablemente necesaria es verdadera. Expresado de otra forma, φ es forceablemente necesaria cuando φ se

[213] El artículo Hamkins y Löwe (2005) está por entero dedicado a la demostración de este resultado.
[214] "**Theorem 15**. *If* ZFC *is consistent, then it is consistent with* ZFC *that all* S5 *assertions are valid principles of forcing.*". *Ibid.* P. 20. La traducción es mía.

cumple en alguna extensión de forcing V^P *y todas las extensiones ulteriores* V^{P*Q}. *Formalmente expresado como* $\Diamond \Box\varphi \rightarrow \varphi$.[215]

El principio MP da homogeneidad al valor de verdad que tengan las oraciones en las extensiones genéricas de sus modelos. Básicamente, dicho principio garantiza que, si una oración φ vale en una extensión genérica de un modelo de TC, entonces en toda otra extensión genérica con la que se combine la primera resultando en una extensión producto de las dos anteriores se seguirá cumpliendo dicha φ. MP es otra forma de expresar el sistema formal S5, así que el principio es consistente con la afirmación del Teorema 29 anterior.

Como dije anteriormente, debido a que la Teoría Modal de Conjuntos preserva los resultados de modalidad en los sistemas lógicos, de entrada, MP es equivalente a todas las formas equivalentes con el axioma de S5.[216] Además, no es difícil notar que MP mismo implica su propia versión modalizada □MP. Junto con lo anterior, una versión más específica de MP que involucra oraciones específicas sobre parámetros (números) reales puede ser formulada añadiendo un alcance de forcing adicional a las oraciones:

---

[215] Ver Hamkins (2008), P. 2 y 3. Una precaución debe hacerse ahora. MP aquí presentado no es el mismo Principio de Maximalidad que tenemos en la parte metafísica de los conjuntos entendidos como pluralidades que fue presentada para introducir los aspectos básicos potencialistas de la sección anterior. Aunque no se niega que hay una cierta similitud entre MP y aquel Principio en el siguiente sentido: los conjuntos que son posibles en cierto universo de conjuntos son de hecho formados, da el soporte para que las oraciones forceablemente necesarias tengan su respectiva extensión genérica en que se cumplen.
[216] En Hamkins (2008), p. 4 se expone un resultado a propósito de esto.

Principio de Maximalidad, versión remarcada ($\underset{\sim}{MP}$):

Cualquier oración en el lenguaje de la teoría de conjuntos con parámetros reales arbitrarios que es forceablemente necesaria es necesaria. Es decir: $\Diamond \Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$.[217]

Esta versión remarcada de MP es de particular interés para nosotros debido a la ocurrencia de parámetros. Pero antes de revisar con mayor detalle esto, veamos lo que hay acerca de los principios de maximalidad en relación con la consistencia de la teoría.

Los siguientes lemas constituyen propiedades importantes de las oraciones forceablemente necesarias:[218]

Teorema 30.- (Hamkins (2008))

(i) Para ninguna oración φ *se cumple que ambas* φ *y* $\neg\varphi$ *son forceablemente necesarias.*

(ii) Sobre cualquier modelo de la teoría de conjuntos, la colección de oraciones forceablemente necesarias forman una teoría consistente.

(iii) $(\Diamond \Box\varphi \rightarrow \Box(\Diamond \varphi))$ *y* $(\neg \Diamond \Box\varphi \rightarrow \Box(\neg \Diamond \Box\varphi))$. *Esto es, la colección de oraciones forceablemente necesarias es invariante por forcing.*

Con este resultado y el Teorema 1 se obtiene:

[217] "**Maximality Principle, Boldface Version** (mp∼) Any statement in the language of set theory with arbitrary real parameters that is forceably necessary is necessary. That is, $(\Diamond \Box\varphi) \Longrightarrow \Box\varphi$.". *Ibid.* P. 5. La traducción es mía.

[218] Todos ellos son resultados de Hamkins en su (2008), particularmente el Lema 5.3 ahí presentado. La demostración del siguiente teorema se halla en tal lugar.

Teorema 31.- (Hamkins (2008))

$Cons(ZFC) \rightarrow Cons(ZFC + MP)$.

Usando hechos similares a los del Teorema 30, se puede obtener que $\underset{\sim}{MP}$ también es consistente con ZFC. Un hecho a remarcar sobre MP y su versión remarcada es que son consistentes con la teoría junto con la existencia de grandes cardinales como los inaccesibles, de Mahlo, compactos, medibles, etc., así como con su no-existencia.

Finalmente, y regresando a uno de los objetivos centrales de este trabajo, no debemos olvidar que la objeción RTK no puede evadirse con sólo los recursos hasta ahora vistos. La razón de esto descansa principalmente en que este estudio modal teórico-conjuntista no es esencialmente una salida de hacer Teoría de Conjuntos como se había hecho para conseguir los resultados limitativos de PR, sino que está pensado para ser un modo de traducir el trabajo hecho a un terreno modal en el que se puede interpretar lo obtenido desde un enfoque más particular en la teoría (piénsese que incluso hay una motivación más bien filosófica detrás del estudio). No obstante, la labor próxima es mostrar cómo nos beneficiará contar con estas herramientas formales para tratar de superar el obstáculo MH que no permite la implementación de PR en órdenes lenguajes lógicos superiores al segundo.

4.3.- Conclusiones

En este capítulo hemos introducido tanto cuestiones como desarrollos filosóficos y formales acerca de una visión modalizada de TC que, afirmamos, nos proporciona información valiosa acerca del estudio teórico-conjuntista en general acerca de *V*. En vista de que la objeción RTK mina el alcance de PR a no más allá del segundo orden en los aparatos formales para trabajar la TC, la visión modalizada viene como una forma de trabajar la TC que nos ofrece un repertorio atractivo de nociones, conceptos y resultados que proporcionan al estudio teórico-conjuntista un mayor alcance tanto filosófico como formal. La recopilación de tales resultados aparece listada ahora:

1) Con la distinción Actualismo/Potencialismo hemos abordado por lo menos dos visiones del estatus ontológico de los objetos de *V*. En su forma de tesis metafísica, el Potencialismo impulsa una visión no-acabada de *V* en términos de nociones como la de pluralidad, la cual sirve para ofrecer una idea inicial de qué objetos, en general, pueden tener características que los dotaría de *conjunticidad* desde el punto de vista de TC. Además, la visión potencialista permite un modo para que, con la teoría, se estudien problemas como el de Compleción o PIOTC.

2) Dadas las dificultades que se tiene con los conceptos tanto básico como teórico de conjunto, el trabajo acerca de lo que es la verdad en TC depende de las ideas preteóricas que carguen esos conceptos, y que vienen dadas por medio de herramientas como los *C*-conjuntos. Mientras se tengan estos aspectos acerca de lo que son los conjuntos, la

formulación y empleo de PR por parte tanto del Actualismo como del Potencialismo está igualmente permitida.

3) El Potencialismo concilia bien nuestras intuiciones acerca de las colecciones que "podrían" ser conjuntos con el comportamiento de las modalidades en términos de las pluralidades. Así que se vuelve viable el trabajar con cierta seguridad "por fuera" del universo V con ayuda de tales pluralidades, en el sentido de que las consideraciones teórico-conjuntistas se aplican con cierta corrección a esas clases de objetos con ayuda del vocabulario modal.

4) Formalmente, el Potencialismo se adapta para introducir las nociones modales en términos de conceptos mejor dominados en TC, tales como el Potencialismo en rango o de forcing. No obstante, es valioso considerar las bases modales de la visión potencialista de TC debido a que la noción de pluralidad se encuentra al centro de las consideraciones especulativas acerca de los conjuntos *posibles*. Generalmente, varias nociones como la de pertenencia, subconjunto (con reservas en el Principio de Maximalidad), y preservación de satisfacción de fórmulas se recuperan adecuadamente en las modalizaciones MPFO o MS del lenguaje formal de TC.

5) El tratamiento modal de la parte axiomática básica de TC arroja buenos resultados acerca del desarrollo de la teoría, incluyendo sus consecuencias. Vimos que la propiedad de estabilidad nos permite tener un manejo adecuado de la modalización de las fórmulas de interés, de modo que las fórmulas resultantes pueden analizarse y evaluarse con éxito en la teoría. Esto se sigue cumpliendo aún en puntos de avance considerable en la teoría, como

los PR y su contraparte modal (◊-Refl), que con resultados como el teorema 27 nos permite hacer comparaciones interesantes sobre determinados PR y sus versiones modales.

La visión potencialista de TC como modalización de ésta ofrece en general varias ventajas que filosófica y lógicamente son valiosas. Pero a partir de ahora, revisaremos cómo podemos emplear esto, junto con más recursos filosóficos y técnicos, para dirigir el análisis y estudio al problema central de este trabajo, a saber, cómo podemos colaborar en la optimización de los PR en el intento de superar los problemas de limitación tenidos con el Obstáculo Mínimo, o MH. Esto será la labor que haremos a continuación.

Capítulo 5

Multiversismo conjuntista. Otra visión ontológica del universo *V*, PR revisados y alternativas para tratar de resolver la indecidibilidad en TC

5.1.- Multiversismo conjuntista. Una postura ontológica alternativa sobre los conjuntos

Hasta ahora, hemos procurado presentar los objetos de estudio en esta investigación –toda la maquinaria formal de los PR, la objeción RTK a los PR, el sistema lógico modal potencialista- con cierta disposición a estar al margen de cuestiones que envuelven el carácter más fundamental de los objetos que son el tema de estudio de la Teoría de Conjuntos, a saber, los conjuntos mismos. Tenemos lo siguiente:

1) La objeción RTK nos posiciona ante un obstáculo que resulta imposible de sortear con los solos recursos de ZFC y sistemas afines para que los PR de orden superior sean adecuados ante el problema de indecidibilidad.

2) Los recursos lógicos modales estudiados antes ayudan a llevar por un nuevo rumbo lo que sabemos de nociones como el forcing, permitiendo traducir al lenguaje formal modal muchos de los resultados y, en su parte más fundamental, el empleo de esas técnicas visto desde el enfoque modal para interpretar de esta manera lo que significan varios resultados de la Teoría de Conjuntos desde dicho enfoque. Pero esto es lo mayor que podemos lograr con dichos recursos modales.

Llegados a este punto, ¿Podemos proponer alguna manera de superar la objeción RTK a los PR de orden superior, empleando lo que tenemos a nuestra disposición en teorías de tipo ZFC y otros recursos como los dados por lógicas modales? A partir de ahora, iremos más allá del margen en que nos hemos quedado hasta ahora en este trabajo sobre la naturaleza de los conjuntos, y nos fijaremos en aspectos más filosóficos al explorar una postura ontológica diferente sobre lo que serían los conjuntos y el ambiente *V* de todos ellos. A lo largo de esta sección se presentará esta postura y propondremos un medio por el que los PR en orden superior podrían superar la objeción RTK. El cambio que viene dado con esta postura supone una reestructuración completa desde lo que podría considerarse como "las bases ontológicas y epistemológicas del edificio *V*" que no necesariamente son alcanzadas por distinciones del tipo Actualismo/Potencialismo a las que nos hemos restringido.

Sea que adoptemos una visión actualista o potencialista, hasta ahora hemos restringido la atención a lo que eso conlleva dentro de *V*. En este sentido, decidimos si adoptamos la postura que nos dice si todos los objetos de *V* ya están dados y las teorías nos permiten esclarecer las propiedades de dichos objetos y las relaciones que vienen dadas por su estructura –su tamaño, su tipo ordinal, sus subconjuntos, su potencia, etc.-, lo que es la idea general del actualista; o si nuestra postura es tal que, dados objetos específicos sobre los cuales se teoriza, siempre hay otros objetos que escapan a las versiones actuales de las teorías pero que son alcanzables –sea porque son constructibles, o *forceables*, o definibles, etc.- al contar con refinamientos de tales teorías o formulando nuevas teorías que sean más potentes, lo cual un potencialista generalmente aceptaría. Ambas visiones conciben la naturaleza de los objetos de V de manera que se justifique el comportamiento de tales objetos según se trabaje con una determinada visión u otra, y las dos visiones son compatibles con una postura más general conocida como *Universismo*. Esta postura sostiene que el universo V es único y absoluto, y en él contamos con un concepto primordial de conjunto bien establecido y todos los objetos de V se comportan de acuerdo con dicho concepto básico, por lo que las diversas Teorías de Conjuntos tienden a conllevar cambios en el entendimiento del concepto primordial de conjunto para ajustarlo a la explicación de los diversos comportamientos dados al interior de V. Este punto es señalado por Hamkins en su [2011]: "La postura universista es la posición filosófica comúnmente aceptada de que hay un concepto de conjunto de fondo único y absoluto, instanciado en el universo teórico-conjuntista absoluto correspondiente, el universo cumulativo de todos los conjuntos, en el que toda aseveración teórico-conjuntista tiene un valor de verdad definido.".[219]

[219] "The universe view is the commonly held philosophical position that there is a unique absolute background concept of set, instantiated in the corresponding absolute set-theoretic universe, the cumulative universe of all sets, in which every set-theoretic assertion has a definite truth value.". Hamkins (2011), p. 1. La traducción es mía.

Ahora nos concentraremos en analizar una postura esencialmente contraria al Universismo, conocida como *Multiversismo*. En esta postura se sostiene que no es sólo un único universo conjuntista V el que existe y sobre el cual las diversas teorías se fundamentan, sino que existen diversos universos conjuntistas en los que se instancian los diversos conceptos primordiales propuestos de conjunto, y en tales universos con un concepto primordial particular se sostienen diversas afirmaciones conjuntistas. Esta postura es la defendida por Hamkins en su [2011]: "[…] la *postura multiversista*, que sostiene que hay diversos conceptos distintos de conjunto, cada uno instanciado en un universo teórico-conjuntista correspondiente, que exhibe diversas verdades teórico-conjuntistas. Cada uno de tales universos existe independientemente en el mismo sentido platónico que los proponentes de la postura universista tratan a su universo como existente.".[220] Así, los diversos medios y herramientas teórico-conjuntistas como el forcing, la constructibilidad y los modelos internos pueden verse desde la perspectiva de diversos universos conjuntistas que se comportan de acuerdo con tales recursos. La estructura de los diversos universos varía según se adopten algunos conceptos primitivos de conjunto sobre otros, o los modelos de las teorías tengan determinada propiedad, o las extensiones genéricas por forcing se construyan sólo sobre determinados filtros, etc., justificándose así la proliferación de resultados teórico-conjuntistas tan variados que algunos de ellos resultaran inconsistentes entre ellos –piénsese en el trabajo de Gödel y Cohen para enriquecer la Teoría de Conjuntos lo suficiente para que tanto CH como su negación sean resultados válidos-, o modelos de

[220] "[…] the multiverse view, which holds that there are diverse distinct concepts of set, each instantiated in a corresponding set-theoretic universe, which exhibit diverse set-theoretic truths. Each such universe exists independently in the same Platonic sense that proponents of the universe view regard their universe to exist.". *Ibid*. P. 2. La traducción es mía. Nótese además que en este sentido específico de definir el Multiversismo ya hay un compromiso metafísico adicional respecto de los diversos universos conjuntistas. A saber, que todos existen independientemente entre sí. Este aspecto está más relacionado con un componente modal similar al que hemos estudiado antes en este trabajo.

las teorías en que se introducen cardinales supercompactos pero no vale la determinación proyectiva de conjuntos de números reales. El Multiversismo concilia todos esos resultados y nociones propuestas, algunas de ellas fuertemente opuestas[221] entre sí, en diversos universos cada uno de ellos tan legítimo como los otros.

El Multiversismo pone en conflicto a la visión universista clásica de *V* por razones tanto metafísicas como metodológicas:

1) Desde el terreno metafísico, el universista se ve obligado a privilegiar un solo universo conjuntista *V* de los que hay en el multiverso, quedando los demás universos en la incertidumbre respecto a su estatus debido a que no es claro cómo su existencia afectaría al universo único *V*.

2) Desde el terreno metodológico, el que haya modelos o extensiones de forcing que resultan contrarias para trabajar el universo único *V* es inadmisible por razones de consistencia de la teoría. Sabemos que, desde el Universismo, toda oración teórico-conjuntista tiene un único valor de verdad al evaluarse respecto de *V*, por lo que se tiene la obligación de decidir sobre ciertas extensiones de forcing sobre otras, o en favor de unos modelos sobre otros, o ciertos conjuntos constructibles sobre otros, al momento de toparse con cuestiones acerca de la decidibilidad de ciertas oraciones.

Sin embargo, el Multiversismo también tiene una importante característica que lo hace atractivo para sostener la tesis fundacionista de la Teoría de Conjuntos como fundamento general del edificio matemático en el siguiente sentido. Tanto las aserciones propias de la Teoría de Conjuntos como aquellas que pertenecen a alguna de las áreas de

[221] Como se expuso antes, la oposición en que se piensa aquí es más extensa de lo que parece. Tenemos que tanto CH como su negación son resultados válidos de la Teoría de Conjuntos añadida con recursos adicionales específicos que permiten la obtención de ambas. Y en el caso de los modelos de la teoría, la posibilidad de obtener modelos que en principio no parecen exhibir ninguna cualidad contraria entre sí, pero que hacen verdaderas oraciones de la teoría que son incompatibles dentro del mismo modelo, como el caso de obtener ultrafiltros no-principales y la oración *MED*.

estudio más específicas de las matemáticas, que representen alguna dificultad de inconsistencia o indecidibilidad reciben un nuevo tratamiento a la luz del Multiversismo, pues en lugar de limitarse a parar por un estancamiento en la teoría u otra de las áreas dichas, otra opción será el preguntarse por el concepto primitivo de conjunto, o el forcing, o el modelo en turno que subyacen a la dificultad surgida (o en otras palabras, deberemos prestar atención al universo conjuntista particular en el que estemos trabajando). De esta manera, las respuestas a los problemas de inconsistencia e indecidibilidad adquieren un carácter más fino al incluir en su consideración los conceptos más primitivos de conjunto que se estén asumiendo. Para la práctica matemática, se puede justificar de un modo más sencillo el poder recurrir a las consideraciones conjuntistas cuando se sostienen una postura multiversista, pues hay la entrada al planteamiento de cuestiones que subyacen los conceptos más fundamentales de conjuntos que se puedan estar asumiendo.[222]

Precisamente, dentro de la idea de tránsito entre diversas áreas matemáticas para la resolución de problemas viene una forma particular de comprender lo que está pasando al momento de tratar de estudiar las relaciones entre los distintos universos conjuntistas para el multiversista. Mientras que el universista se restringe a *V* para trabajar con conjuntos constructibles o extensiones de forcing, no tiene sentido preguntarse si sus recursos teóricos le permiten explorar fuera de *V*, pues *V* ya constituye todo lo que podría estar a su alcance (esto último valdría incluso aunque el universista en cuestión fuera además un partidario del potencialismo). En el caso del Multiversismo esta restricción no se tiene, y se pueden exponer algunos datos importantes al respecto sobre el forcing. Para empezar, en el

[222] De hecho, este tipo de movimiento no es tan sorprendente para el caso del matemático. En el quehacer matemático es usual que para atender alguna situación problemática o poco comprensible se recurra a nociones y resultados mejor entendidos y manejables para trabajar tal situación. Un caso típico es el de la geometría analítica en la que se trabajan diversas cuestiones geométricas con ayuda de herramientas algebraicas.

Multiversismo se pueden dar extensiones genéricas por forcing de la clase V misma, pues se admiten niveles por extensiones genéricas del tipo $V \subseteq V[G]$ donde G es un filtro V-genérico, pero la extensión genérica en este caso constituye una versión expandida del universo V dado por el modelo base y dicha expansión existe aparte de V.

Lo anterior constituye la idea del siguiente resultado válido en el Multiversismo, denominado como el *enfoque naturalista del forcing* (de ahora en adelante ENF). Una manera de presentar ENF es del siguiente modo:

(ENF) Para cualquier noción de *forcing* $\mathbb{P}$, hay un encaje elemental $V \lesssim \bar{V} \subseteq \bar{V}[G]$ del universo V en un modelo clase $\bar{V}$ para el que hay un filtro $\bar{V}$-genérico $G \subseteq \bar{\mathbb{P}}$. En particular, $\bar{V}[G]$ es una extensión de forcing de $\bar{V}$, y la extensión entera $\bar{V}[G]$, incluyendo el encaje de V en $\bar{V}$, son clases definibles en V, y $G \in V$.[223]

Tales extensiones genéricas no son admisibles dentro de V en el Universismo, por lo que, para el universista, ENF se restringe a las extensiones genéricas permitidas y no va más allá de proponer ejemplos de lo que sería V dada cierta extensión u otra. Sin embargo, el multiversista no tiene problema en reconocer que las extensiones genéricas de V de hecho constituyen otros escenarios conjuntistas a los que podemos acceder según dispongamos de ciertas extensiones. Por lo que ahora podemos considerar más herramientas, como las de la lógica modal del forcing estudiadas antes, para inspeccionar más detalladamente estos accesos.

[223] Este resultado constituye el tercer resultado presentado en Hamkins (2011), p. 9. En *Ídem* se hallan al menos dos maneras de presentar el ENF.

5.2.- Base teórica del Multiversismo. Presentación de los principios y axiomas compatibles con los múltiples universos conjuntistas

A la luz de la nueva postura acerca de la variación del concepto primitivo de conjunto, la pregunta acerca de cuáles aspectos generales, si los hay, sobre la postura multiversista son los adecuados -esto es, lógica y filosóficamente pertinentes- surge de manera natural. Los aspectos metafísicos y ontológicos del Multiversismo incluyen una tendencia a desechar la idea del "único universo conjuntista" en el que toda oración de TC tiene un único valor de verdad determinado.

En este punto es importante que definamos una relación importante entre universos que servirá para justificar una gran variedad de ideas. Dentro del Multiverso nos topamos con universos de conjuntos que se quedan atrapados dentro de otros más grandes debido a que el universo tiene un mayor acopio de recursos teóricos que justifican más definiciones y resultados que en los universos menores, empezando por la idea de que, para empezar, un universo es "mayor" que otro en sentido de que admite una mayor cantidad de ordinales en su estratificación de niveles. Esa idea motiva una relación de orden entre los universos relacionados y es la que nos permitirá hacer comparación entre universos a nivel teórico. La relación de orden dada por la idea anterior se define del siguiente modo:

(**Relación** $\preccurlyeq$) Dados dos universos de conjuntos V y W, decimos que $V \preccurlyeq W$ si existe un encaje $j: V \to W$ tal que $crit(j) \in W$. Es decir, la base teórica de V está contenida en la de W, donde dicha base teórica consiste en los axiomas, definiciones y resultados con los que se estudia un universo conjuntista, y dado un modelo M de W se puede encontrar un submodelo $M' \subseteq M$ de V.

Con la relación $\preccurlyeq$ se puede estudiar el comportamiento de diversos universos de conjuntos contenidos en otros de acuerdo con lo que en tales universos se disponga desde la TC usada para trabajarlos. Además, dicha relación es compatible con el crecimiento del universo estudiado con la TC en turno de acuerdo con las variadas técnicas proporcionadas por forcing, modelos internos, PR, etc. A partir de ahora, consideramos el Multiverso con la relación $\preccurlyeq$ definida como antes.[224]

La siguiente lista de principios y axiomas es una forma estándar en que se introduce la postura multiversista en el estudio teórico-conjuntista. Estos principios se hallan expuestos en Hamkins (2011), sección 9, en modo similar:

1) *Maximización*. No hay un límite en los universos conjuntistas que podrían existir en el Multiverso.
2) *Realización.* Para cualquier universo V, si W es un modelo de la TC y es definible o interpretable en V, entonces W es un universo. Un ejemplo: En un universo base, los modelos internos de la teoría que lo estudia son acerca de colecciones de conjuntos tales que esas colecciones tienen un tipo de existencia real en el universo base.
3) *Extensión de forcing*. Para cualquier universo V y cualquier noción de forcing $\mathbb{P}$ en V, hay una extensión de forcing $V[G]$ tal que $G \subseteq \mathbb{P}$ es V-genérico. En otras

[224] Se pueden plantear diversas cuestiones filosóficas acerca de la relación $\preccurlyeq$ definida ahora. Algunas de tales cuestiones son: ¿La relación $\preccurlyeq$ surge debido a que el Multiverso tiene una estructura de orden que induce dicha relación, o la introducción de dicha relación induce una estructura ordenada al multiverso?, ¿Todo encaje de universos determina una contención entre ellos?, ¿Existe algún criterio general que decida, dado el uso de alguna forma de expandir la teoría (forcing, PR, etc.), si se tiene un crecimiento del universo, o hay modos de tener una teoría expandida sin que el universo crezca?... No obstante, notaremos que en el estudio de este trabajo podemos hacer pleno uso de la relación $\preccurlyeq$ sin que se requiera poner especial atención en cuestiones como las anteriores.

palabras, cualquier universo puede extenderse a otro universo "más alto" en sentido de que éste es subindexado por un ordinal mayor al del primero.

4) *Axioma de reflexión.* Para todo universo *V*, hay un universo con mayor altura ordinal W y un ordinal θ tales que $V \preccurlyeq W_{\theta} \prec W$. Es decir, ningún universo es correcto acerca de la altura de *ORD*.

5) *Numerabilidad*. Todo universo *V* es numerable desde la perspectiva de otro universo W.

6) *Ilusión de Buena Fundación.* Todo universo *V* es mal fundado desde la perspectiva de otro universo "mejor" en sentido de que este universo puede ser tan o más grande que el primero y cuenta con una base teórica refinada con nociones y resultados adicionales (como se ha rechazado la idea de una base teórica-conjuntista definitiva con un concepto absoluto de conjunto, con principios como (3) y (4) se tiene la existencia de otros universos con una noción de Buena Fundación más refinada).

7) *Axioma de encaje revertido*. Para todo universo V y todo encaje $j: V \to M$, hay un universo W y un encaje h tales que:

$$W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{j} M$$

tal que $j \restriction_{im(h)} = h$.

8) *Absorción en L*. Todo universo V tiene un modelo transitivo contable en otro universo W tal que $V = L$. En otras palabras, con el suficiente desarrollo teórico, se puede encontrar un universo que contenga al universo de interés y tal que éste último admite las nociones de definibilidad y contructibilidad de *L*.

Con esta lista de principios y axiomas multiversistas, podemos explorar un poco más el sentido de rechazo hacia la idea del “único y absoluto universo de conjuntos” que se tiene en el Universismo. Es particularmente notoria la convicción de que esa idea motiva a sostener alguna propiedad de categoricidad que debe cumplir la TC interpretada en V para empezar a hablar en la teoría, entre otras cosas, de preservación de consistencia por medio de modelos, nuevos axiomas, etc. Tal propiedad de categoricidad se piensa estando fuertemente relacionada con las nociones primitivas de conjunto o de pertenencia que subyacen la parte más básica de TC, puesto que el desarrollo posterior de la teoría -dado según los axiomas y resultados tenidos- arroja las consecuencias obtenidas de partir de dichos nociones y principios primitivos. Esto lleva a que en el desarrollo universista estándar de TC sea recurrente la aparición de cuestiones sobre si modelos, extensiones de forcing, etc., son mejores que otros a la luz de la corrección con tales conceptos primitivos de TC y, por ende, con la categoricidad de la teoría. No obstante, desde la perspectiva multiversista, se adquiere un aligeramiento acerca de la categoricidad de TC, pues al considerar distintos universos de conjuntos también entra en la discusión la elección de los conceptos primitivos de conjunto en ellos. Por lo que ciertas prácticas en TC como el rechazo de ciertos modelos, extensiones de forcing, nuevos axiomas, etc., a la luz de la propiedad de categoricidad que se pudiera tener en TC universista se modifican con la idea de que hay distintos universos de conjuntos en donde tales modelos o extensiones valen en lugar de otros, y esto conlleva la idea de que parte del trabajo teórico-conjuntista que se pudiera desechar en realidad adquiera nuevas consideraciones que pudieran dar surgimiento a distintas formas de expansión de TC (como de hecho la práctica teórico-conjuntista más contemporánea ha sugerido). Esto abre una nueva brecha en las cuestiones de indecidibilidad que llega hasta cuestiones acerca de saber en qué universos y bajo cuáles conceptos primitivos de conjunto se están considerando las oraciones candidatas a ser indecidibles. Utilizaremos este aspecto para explorar a partir de ahora y desde el enfoque multiversista las cuestiones principales que hemos analizado en este trabajo.

5.3.- Categoricidad y Verdad desde el Multiversismo

En la sección anterior se ha dicho, respecto de nociones como la categoricidad y la verdad en la teoría, que éstas tienen una dependencia sobre los requisitos teóricos que se tienen en la TC en turno (particularmente, sobre lo que se entienda por "ser conjunto de " o la noción de pertenencia), pues esto nos dirá información acerca del universo conjuntista y otros universos relacionados con éste -si los hay- y el comportamiento de los objetos ahí. Sin embargo, ¿Acaso la categoricidad no implica la existencia de un modelo único, salvo isomorfismo, de la teoría que se considera *el* modelo sobre el que se interpreta lo que es el entorno de los conjuntos?, ¿Y la noción de *la* verdad en TC no está ligada a esa interpretación dada por ese modelo pretendido?

Similar a como hemos analizado la cuestión acerca de *la* verdad en TC respecto a la postura potencialista, podemos apreciar que en el Multiversismo la cuestión de hecho no tiene un tratamiento mejor. Más aún, dado que en esta postura la teoría no se restringe a un solo entorno de los conjuntos, sino que las nociones y resultados son interpretados en modelos acerca de tal o cual universo, se sitúa la cuestión acerca de *la* verdad todavía más lejos de obtener una respuesta satisfactoria en los términos que se trabajan desde una postura universista. Esto es en parte debido a que recursos como los *C*-conjuntos en el Multiversismo acarrean un compromiso ontológico mayor que antes, pues ahora se tendrán ciertos universos conjuntistas de acuerdo con cuáles sean las propiedades descriptivas y epistemológicas detrás del concepto de “conjunto de”. Esta forma de emplear recursos como los *C*-conjuntos para obtener determinados universos de conjuntos impactará la forma estándar de la defensa de las propiedades de categoricidad que se busque atribuir a la teoría puesto que no se cuenta con *el* concepto de conjunto que pueda decidir cuáles universos serían privilegiados sobre otros y por qué esto es así, de modo que se propongan modelos para dichos universos.[225]

Por lo tanto, hemos obtenido una postura acerca de *la* noción de verdad que no es muy diferente a la que obtenemos desde la postura potencialista explorada en el capítulo anterior de este trabajo. Esto es, sabemos que el concepto subyacente de conjunto en los estudios de TC está determinado por las condiciones básicas dadas por las intuiciones epistemológicas, ontológicas, etc., de lo que es un conjunto -sin olvidarnos de que aquí también se consideran las intuiciones preteóricas que se pudieran tener- y son recuperadas por recursos como los *C*-conjuntos. Dentro del multiverso conjuntista, esto significa que las nociones básicas de conjunto o de pertenencia marcan desde un inicio cuáles universos de conjuntos son accesibles de acuerdo con los desarrollos de TC llevando en su base teórica esas nociones. Además, otro aspecto importante de esto último es que, usualmente, este modo en que los universos accesibles de conjuntos quedan determinados no implica que se sabe desde un comienzo cuál es el alcance de los universos considerados por esas nociones básicas de conjunto, por lo que ocurre algo similar a la postura universista al respecto de nociones como la altura de los ordinales -el rango- y la estratificación del universo, pero

[225] Hamkins en *Ibid.* P. 13 explora este aspecto sobre la categoricidad de TC relacionándolo con un argumento debido a Donald Martin en su (2001), el cual consiste en sostener que entre las propiedades de la categoricidad de TC figuran aquellas que, por ejemplo, mantienen una noción absoluta de rango (en sentido de que cualesquiera dos interpretaciones de *V* deberán mantener un crecimiento del universo conjuntista que sea mutuamente proporcional). Hamkins objeta esto sosteniendo que, desde una postura multiversista, *el* concepto subyacente de conjunto no puede sostener este tipo de características.

esta vez con la restricción al universo en que se esté trabajando, afectando en modo similar a conceptos como PR que están relacionados con tales nociones. Por lo tanto, la noción de reflexión en el multiverso sigue dependiendo de lo que se entienda como el concepto subyacente de conjunto (ciertamente, con otros conceptos como el de pertenencia en juego), y se añade a esa dependencia los universos que sean descritos por tales conceptos básicos.

No obstante, puede haber la presunción de que la cuestión acerca de *la* verdad en TC u otros conceptos de carácter absoluto se ha desechado para las posturas multiversistas, o incluso que se pudiera sugerir que la cuestión ha perdido legitimidad con esas consideraciones multiversistas. Tales ideas son equivocas por lo siguiente. Similar a como ocurre en la distinción Actualismo/Potencialismo, lo que se tiene acerca del estudio de *la* verdad en TC sigue siendo condicionado al uso de recursos como los *C*-conjuntos, y esto significa que hasta ahora no se tiene un concepto general básico de lo que es la "conjunticidad" que no recurra a esa proliferación de diversas nociones básicas de conjunto, y que en el Multiversismo ahora acarrean la consideración de varios universos conjuntistas. Así que, en el caso multiversista, seguimos teniendo las mismas consideraciones que los actualistas y potencialistas de conjuntos tienen en el Universismo, pero esta vez con el aspecto adicional de que hay universos enteros de conjuntos en juego.

Así, notemos que la cuestión acerca del carácter absoluto de nociones como "ser conjunto de", *la* verdad en Teoría de Conjuntos o la categoricidad de la teoría permanecen como cuestiones abiertas en el Multiversismo. Más aún, con la consideración de distintos universos de objetos estudiados con la teoría, la respuesta a esas cuestiones arrojaría luz sobre por qué se escogen determinados universos de conjuntos, y no otros, como privilegiados al momento de estudiar la teoría y los progresos alcanzados ahí.[226]

5.4.- Problemas de PR revisados con los recursos multiversistas

Comenzaremos a mostrar varios resultados que ilustran la respuesta multiversista a los problemas que hemos presentado anteriormente en este trabajo (principalmente en el tercer capítulo). La conclusión principal de tales problemas es que, bajo el espectro universista en que se estudia TC, problemas como RTK y MH hacen imposible que el empleo de PR permita zanjar diversos problemas serios de indecidibilidad. Sin embargo, para el multiversista se tienen a disposición varias herramientas que de entrada permiten bloquear el surgimiento de tales problemas.

5.4.1.- La objeción RTK desde el Multiversismo

Comenzaremos por presentar el argumento que ilustra la no-procedencia de la objeción RTK a los PR desde la postura multiversista. Este argumento funciona, por una

[226] En *Ibid.* P. 14, Hamkins se dedica a sostener por qué los estudios acerca de *la* verdad en TC o *el* concepto de conjunto desde el Universismo no son compatibles con las posturas multiversistas. Es interesante notar que, entre las razones que se dan ahí, se destaca una de carácter práctico en las Matemáticas, en sentido de que no es infrecuente que, dependiendo de cómo se definan los objetos básicos a trabajarse teóricamente (sean conjuntos de números, o de funciones, etc.), esto produce modelos matemáticos que no son isomorfos entre sí, y ello lleva a desarrollos teórico-conjuntistas que son incompatibles entre sí (lo que desde una postura multiversista también conlleva a trabajar con diversos universos de conjuntos no relacionados), siendo el caso de las varias interpretaciones de números naturales (y de la aritmética elemental) el que Hamkins revisa. Por lo que un estudio acerca de lo que sean la verdad o la categoricidad de la teoría en sentido absoluto también debe considerar estos aspectos.

parte, por las clases de objetos que se consideran en RTK y, por otra parte, debido a uno de los principios fundamentales del Multiversismo relacionado con la naturaleza de *ORD*:

1) La objeción RTK depende de las nociones de tamaño ordinal y absolutez de la clase *ORD* en un sentido fuertemente universista: Recordemos que se considera la colección en 3er orden $A^{(3)} = \{[0, \dots, \alpha) | \alpha \in ORD\}$ como la clase de segmentos iniciales de ordinales que son acotados, se relativiza $A^{(3)}$ a un $\gamma > \beta$ haciendo $A^{(3)\gamma} = A^{(3)} \cap V_\gamma$ y esta relativización arroja una inconsistencia al PR en 3er orden para los segmentos $[0, \dots, \gamma) \in A^{(3)}$ pues la cota se fija en V_β.

2) La objeción RTK se apoya en que la clase *ORD* es absoluta e inacabada en *V*. Así que dentro de *V*: $\forall \alpha \in ORD(V \vDash \varphi(A^{(3)}) \rightarrow \exists \beta > \alpha(V_\beta \vDash \varphi(A^{(3)\beta}))$ es falso, donde $A^{(3)}$ es como en (1).

3) Los PR en 3er orden no se cumplen en general debido a (2). Para RTK, la posición universista de *V* es que es maximal con respecto a su altura y "anchura", y cada V_α es un segmento inicial de *V*.

4) En contraste con la posición en (3), el conjunto $A^{(3)}$ de (1) en el multiverso conjuntista sólo se da con universos *V* en los que $ORD = ORD_V$, esto es, cada universo tiene una "altura" γ y los ordinales interpretados están acotados hasta ese γ (Axioma de Reflexión).

5) Por el Principio de Numerabilidad, el V_γ donde vale $A^{(3)}$ es numerable en otro universo *W* mejor entendido.

6) La clase *ORD* no puede tomarse como una totalidad inacabada desde un solo universo para el Multiversismo debido a (4) y (5).

7) Por (6), la expresión formal $\forall\alpha \in ORD(V \vDash \varphi(X)$, con X una variable de orden superior, usada para $A^{(3)}$ no tiene el sentido original que el Universismo le atribuye, pues "todos los segmentos iniciales de elementos de *ORD* que son acotados" depende del universo -y su tamaño- en que se considere.

8) Para el multiversista y dado (7), $\forall\alpha \in ORD(V \vDash \varphi(A^{(3)}) \rightarrow \exists\beta > \alpha(V_\beta \vDash \varphi\left(A^{(3)\beta}\right))$ no puede ser falsa porque el antecedente no está permitido. La relativización de $\varphi(A^{(3)})$ requiere de recursos especiales para considerarse como admisible en el Multiversismo. Entre esos recursos puede optarse por el uso de encajes no triviales de tipo

$j: (V_\beta, \in, V_{\beta+1}) \rightarrow (V_\kappa, \in, V_{\kappa+1})$ con *crit(j)=β*, o extensiones V_β-genéricas que fuercen $\varphi(A^{(3)})$ en una extensión del universo considerado, o algún modelo interno en el que $A^{(3)}$ se vea como conjunto.

∴ La relativización inconsistente de $A^{(3)}$ no surge desde esta postura multiversista, pues en principio no hay algo como *la* clase de segmentos de elementos de *ORD* que son acotados en ningún *V* particular.

Así, los tipos de enunciados que se apoyan en la noción de acotación ordinal relativizados incorrectamente por PR dejan de representar el obstáculo que la objeción RTK señala desde el Multiversismo. Es de importancia destacar que el argumento no es acerca del no-funcionamiento de PR en los universos propuestos por el Multiversismo, pues no se ha dicho nada acerca de que PR no esté permitido en su forma estándar en esta postura. De hecho, la parte más formal de RTK no ha perdido legitimidad dentro de las consideraciones multiversistas, es decir, la construcción de la forma de reflexión para $A^{(3)}$ sigue siendo válida en cualquiera de los universos V en que tenga sentido hablar de la colección de segmentos de ordinales hasta un nivel ordinal determinado. Más bien, lo que ya no se permite es que de la colección $A^{(3)}$ se obtenga el carácter absoluto de *ORD* para un determinado universo en que se evalúe $A^{(3)}$, pues en vista de los axiomas multiversistas 3 y 4, ningún universo se halla por encima del resto. La prohibición del carácter absoluto de *ORD* dentro de algún universo particular es lo que detiene a la objeción RTK como obstáculo de los PR en el multiverso conjuntista. Así que las construcciones de PR para clases como $A^{(3)}$ no constituyen un problema para el carácter de PR dentro de la postura multiversista.

5.4.2.- Multiversismo, MH y PR en tercer orden

Quizá la objeción más seria hacia PR sea la que se hace desde la incapacidad de los Principios de Reflexión para funcionar adecuadamente en la Teoría de Conjuntos a partir de la lógica de 3er orden. Incluso una de las consecuencias del llamado obstáculo mínimo, o MH, es que si PR aspira a ser consistente en tercer orden entonces de hecho la teoría misma se vuelve inconsistente.[227]

Ahora veremos que el Multiversismo nos dota de recursos adecuados para sostener que MH también deja de ser un obstáculo en el uso de PR para atacar los problemas serios de indecidibilidad a partir del tercer orden. Para esto, presentamos un par de resultados que permiten detener el avance de MH en los términos presentados por los principios y axiomas multiversistas. El primer resultado consiste en la justificación de que *ORD* tiene en efecto

[227] El detalle de la inconsistencia dentro de la teoría tiene que ver con la afirmación inconsistente de que cualquier conjunto *X* determina un modelo de la Teoría de Conjuntos en que, no obstante, vale cierta afirmación acerca de diferentes tamaños simultáneos de *X*. Los detalles de esto se encuentran expuestos específicamente en la exposición de MH en el capítulo 3 de este trabajo.

un carácter absoluto, pero no como en el Universismo se sugiere, sino que *ORD* misma se vuelve inabarcable dentro del multiverso;[228] el segundo resultado muestra, con ayuda del primero y ciertos principios y axiomas multiversistas, cómo el carácter específico de la objeción MH deja de ser un problema para PR en tercer orden.

A continuación, se presenta un lema que trata sobre la inabarcabilidad de *ORD* y, por ende, en cualquier universo particular considerado.

Lema 32.- En el multiverso, ORD es una totalidad "absolutamente inabarcable" en sentido de que no hay un universo V en el que se definen todos los miembros de V.

Demostración. Suponemos, por el contrario, que *ORD* no es una totalidad absolutamente inabarcable en el multiverso conjuntista. Entonces hay una fórmula φ y un $\alpha \in ORD$ tales que $W_\alpha \vDash \varphi(x)$ tal que $\varphi(x)$ es satisfecha $\forall x \in ORD$. $\forall X \subset ORD$, podemos hacer de X una noción de forcing definiendo una relación como sigue: $\leq := \supseteq$ y decimos $\forall \gamma, \delta \in ORD(\gamma \leq \delta \equiv \delta \subseteq \gamma)$, la cual notemos que ya es transitiva. Por la Definición 13 de forcing en este trabajo, $(X, \leq)$ tiene cadenas, anticadenas y filtros *G*-genéricos $\forall G \subseteq X$ que sea denso. Entonces, por el Principio multiversista (3) de extensión de forcing, existe una extensión de forcing $V[G]$, con *G* siendo *V*-genérico, así que podemos extender el universo W_α. Por el axioma multiversista de Reflexión, existe un universo *W* con un $\theta \in ORD$ tales que $W_\alpha \preccurlyeq W_\vartheta \prec W$, y por la hipótesis inicial, se cumple que $W_\alpha = W_\theta$. Sea λ el tipo ordinal de *W*, y como W_θ es un estrato inicial de *W*, entonces elegimos $\mu \in ORD$ tal que $\mu = \min\{\beta \in ORD \mid \theta < \beta\}$ y consideramos $Y = \{\mu, \ldots\}$ la colección de ordinales que

[228] Aunque es cierto que en la sección anterior se usó la no-absolutez de *ORD* en universos específicos para frenar la objeción RTK, no optamos por hacer un uso injustificado de ese carácter de *ORD* al interior del multiverso de los conjuntos.

empieza desde el μ-ésimo ordinal. Entonces $X \cap Y = \emptyset$ y tenemos que $V_\alpha \nvDash \varphi(x)\ \forall x \in Y$, lo que contradice que en el α-ésimo estrato del universo *V* la fórmula φ es satisfecha por todos los ordinales. Por tanto, φ no es satisfecha por todos los ordinales en un estrato y *ORD* es absolutamente inabarcable en el multiverso conjuntista.■

La inabarcabilidad absoluta de *ORD* es una consecuencia natural de los axiomas y principios multiversistas presentados. Esto debido a que, dado el carácter relativo de conjunto, no tenemos -al menos por ahora- un universo de conjuntos en el que se establezca una forma de “medición ordinal” con la que se pueda establecer una sucesión canónica de universos que concuerde con lo que sería *el* concepto de conjunto que determina *la* clase *ORD*. Por lo que, a partir del Lema 32, se fija el carácter de *ORD* dentro del multiverso conjuntista como una colección que no es instanciada por el tamaño de ningún universo particular. Si todos los universos de conjuntos siempre tienen una cota ordinal, entonces, para la postura multiversista asumida, no está permitido hacer afirmaciones sobre *ORD* que traten de relativizarse a un universo acotado por un miembro de *ORD*.

Ahora daremos el siguiente resultado acerca de cómo detener MH y la posibilidad de tener PR consistentes en tercer orden dentro del Multiversismo. Aunque MH es el obstáculo que los PR deben superar, que MH parezca insalvable desde posturas universistas se debe al Teorema 21 y al Corolario 22, los cuales afirman que cualquier PR que aspire a superar MH debe implicar la existencia de $X^\#$ para todo conjunto *X*. Las demostraciones de dichos resultados nos dan un argumento que muestra por qué lo anterior no es posible en general (exhibiendo conjuntos *X* de tamaño algún indiscernible para los que su respectivo $X^\#$ no existe). Por lo que una manera de comenzar a solucionar el problema de MH es ofrecer razones que permitan erradicar la inconsistencia que los resultados mencionados conllevan. El siguiente resultado muestra cómo se detiene el surgimiento de esa inconsistencia desde la perspectiva multiversista.

Teorema 33.- Sea Σ el conjunto de axiomas básicos de ZF con los axiomas y principios del multiverso conjuntista con M la colección de multiversos conjuntistas, y sea φ:= "Si A es un PR que supera MH, entonces $X^{\#}$ existe para todo conjunto X dado Σ + A". Entonces Con(Σ + φ) es verdadero relativo a un cardinal medible.

Demostración. El objetivo es mostrar que podemos obtener el resultado en dos partes con ayuda del Teorema 1 de este trabajo: (I) Mostraremos que el enunciado φ añadido al conjunto Σ es consistente, (II) Mostraremos que podemos llevar esa consistencia hasta el nivel óptimo pedido por los PR en tercer orden, esto es, hasta los cardinales medibles.

Primero, veamos que se cumplen las condiciones del Teorema 1 para demostrar (I):

En primer lugar, por las consideraciones multiversistas hechas con los principios y axiomas, no es difícil notar que la clase *M* es no vacía, pues $V \in M$. De esto se sigue que $\Sigma \vdash \exists x(x \in M)$.

A continuación, veamos que se puede obtener φ relativizado a partir de Σ. Para esto, consideremos la relativización de *φ*, $\varphi^{M,E}$, donde $E \coloneqq \in$. Mostremos que $\Sigma \vdash \varphi^{M,E}$:

Si *A* es un PR que supera MH, por el Corolario 22, tenemos que *A* "congela" a $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_3$ y se sigue que $X^{\#}$ existe para todo conjunto *X*, es decir que existen todos los $X^{\#} =$

$\{\varphi|(L_{\aleph_\omega}[X], \in, X) \vDash \varphi[\aleph_1, \dots, \aleph_n]\}$ donde $L_{\aleph_\omega}[X]$ es el modelo inducido por el conjunto *X*.

Notemos que, en el caso de *X* finito, no hay nada que probar en vista de que $L_{\aleph_\omega}[X] \vDash \varphi[\aleph_1, \dots, \aleph_n]$ donde $n = |X|$.

Según el argumento para mostrar que PR es inconsistente en tercer orden con MH desde la perspectiva universista, debemos mostrar que la existencia de los $X^\#$ para los *X* infinitos es consistente, particularmente en los indiscernibles de Silver:

Tomamos un conjunto *Y* tal que $|Y| = \iota_i \in I$ donde *I* es la clase de los indiscernibles de Silver. Como estamos asumiendo que $\eta(\omega)$ existe, tenemos que $L \vDash "\kappa = \eta(\omega)\ existe"$, y de la existencia del cardinal de ω −Erdös tenemos que vale la Γ_n −reflexión y los PR de orden $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$ se cumplen en un L_δ con $\delta < \kappa$. Por el Teorema 23, también se cumple que los indiscernibles de Silver son inefables. Ahora, como vale Γ_n −reflexión y los PR de orden $\mathcal{L}_\beta^{P_2}$, se tiene que $X^\#$ existe para todo conjunto *X*, en particular $0^\#$ existe, por lo que del Teorema 24 tenemos que $\kappa = \eta_\omega < \min\{\iota_i \in I\}$, pero por el siguiente resultado: "Bajo la hipótesis de la existencia de $0^\#$, todo conjunto constructible definible en *L* es contable",[229] tenemos que $\kappa = \eta(\omega)$ es contable. Ahora, sabemos que, en general, $L_{\aleph_\omega} \nvDash "Y\ es\ definible"$ en la postura universista, pero en el Multiversismo y por el Lema 32, $\exists\alpha(L_{\aleph_\omega} \subseteq V_\alpha)$, y se sigue por el Teorema 21(2) y el Principio multiversista 3 que $\exists\beta \in ORD$ tal que $V_\alpha \preccurlyeq V_\beta$ y $V_\beta \succcurlyeq V[G_2]$ con G_2 un conjunto genérico sobre G_1 genérico sobre V_α, es decir, $V[G_2]$ es una extensión genérica sobre $V[G_1]$. Por el Principio 5 y el Axioma 7 multiversistas, $\exists\gamma \in ORD$ tal que $V_\gamma \succcurlyeq V_\beta$ y en V_γ se

[229] Este es el corolario 18.2 en Jech (2006), p. 312.

cumple que ι_i es definible $\forall i \in I$ por el Principio 8 multiversista. De esto, obtenemos que Y es definible y constructible en el universo $V_\gamma \succcurlyeq V_\beta \succcurlyeq V_\alpha$ y así $Y^\#$ existe, Entonces $\Sigma \vdash \varphi^{M,E}$, y asumiendo $Con(\Sigma)$, por el Teorema 1, se cumple $Con(\Sigma + \exists Y)$.

Para demostrar (II), usaremos la técnica del forcing para "escalar" hasta el estrato conjuntista subindexado por un cardinal medible:

Primero, definimos una noción de forcing del siguiente modo. Sea P el conjunto de sucesiones finitas de 0's y 1's, dadas mediante la notación $p(i) = 0$ o $p(i) = 1$ con $0 \leq i \leq n - 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de modo que los elementos de P se ven como $< p(0), \dots, p(n-1) >$. Usando la Definición 13 de este trabajo, notemos que cualesquiera elementos $p, q \in P$ son compatibles si ocurre que $p \subset q$ o $q \subset p$ como sucesiones. Con el orden de subsucesiones usual, $(P, \leq)$ es un orden parcial y denotamos como M a su modelo base. Ahora, para un filtro genérico $G \subset P$ sobre M, sea $f = \bigcup G$. Los conjuntos $D_n = \{p \in P \mid n \in dom(p)\}$ siempre cumplen con que $\exists q \in G$ tal que $q \in D_n$ por la segunda condición de filtros: $\forall p, q \in P((p \in F \wedge p < q) \rightarrow q \in F)$, siendo en este caso $F = G$. Entonces $\forall n(D_n \cap G \neq \emptyset)$ y tenemos que f es función. Podemos notar que f define un cierto conjunto $X \subset \mathbb{N}$ del siguiente modo: para cualquier sucesión $q \in P$ podemos encontrar otra sucesión p tal que $p \not\subset q \Leftrightarrow p =< p(0), \dots, p(i), \dots, p(n-1) > \neq < q(0), \dots, q(j), \dots, q(m-1) > \neq q \Leftrightarrow q(j) \neq p(i)$ para unos $i \leq n - 1$ y $j \leq m - 1$, a su vez para unos $n, m \in \mathbb{N}$ (tomamos, sin pérdida de generalidad, que $n < m$), y así podemos considerar el conjunto $Y_q = \{p \in P \mid p \not\subset q\}$ el cual es denso y $Y_q \cap G \neq \emptyset$. Por lo que los números n son los que determinan a $X = \{n \mid \exists p \in P(p_n \in Y_q)\}$ donde p_n es un valor tal que $p \not\subset q$. Y como q es una función interpretada en el modelo *M*, entonces el conjunto *X* no está en el modelo *M*. Por lo que *X* constituye un nuevo conjunto de números naturales que de inicio no es dado por el modelo *M*.[230]

Segundo, para cualquier cardinal μ superior a los indiscernibles que se quiera alcanzar definible y constructiblemente, se define la siguiente noción de forcing. El conjunto parcialmente ordenado P tiene como elementos a sucesiones $< \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \dots >$ de ordinales α cuyo tamaño es no contable, además que el conjunto P satisface la condición de la μ-cadena, es decir que P es μ-c.c.[231] Estas sucesiones tienen el mismo orden que el forcing anterior y, para un filtro genérico $G \subset P$ sobre *M*, volvemos a considerar $f = \bigcup G$. También por la misma razón que en la parte anterior, *f* es función. Del mismo modo en que en la primera parte el conjunto *X* es determinado por los conjuntos Y_q, la estrategia aquí es considerar aquí conjuntos $Y_\alpha = \{p \in P \mid \alpha \in ran(p)\}$ y esto hace que se fuerce al rango de *f* a contener a todos los $\alpha < \mu$, y como los Y_α son densos en P y G es genérico, entonces $G \cap Y_\alpha \neq \emptyset \; \forall \alpha < \mu$. De esto deducimos que *f* es suprayectiva sobre μ.

Debido al Axioma 4 y al Principio 8 multiversistas, se puede aplicar el colapso cardinal anterior a todos los cardinales $\mu > \iota_i \forall i \in I$ hasta los cardinales de Ramsey y los cardinales medibles. Por el Teorema 1, deducimos que $Con(\Sigma + \varphi)$ se cumple. ■

[230] Esta técnica de *forcing* es una inspirada por el conocido resultado del Colapso de Levy. Una exposición detallada de esto se puede hallar en Jech (2006), p. 238.

[231] En términos de la Definición 13 de este trabajo, significa que toda anticadena en *P* tiene cardinalidad menor que μ. La condición de la cadena es necesaria aquí para que el cardinal a colapsar μ no termine colapsado en sí mismo.

En primer lugar, es importante resaltar la idea detrás del resultado recién presentado en relación con el problema MH. Puede malentenderse el resultado en el sentido de creer que en el Multiversismo no surge el problema MH, pero no es esto lo que debemos extraer como consecuencia. El resultado nos sindica que, en el caso de que el obstáculo MH se supere mediante el uso de PR, entonces la existencia resultante de los conjuntos $X^{\#}$ hasta el nivel ordinal óptimo no produce inconsistencia en la teoría. En cambio, la labor de cómo "congelar" el carácter $\underset{\sim}{\Sigma}^1_3$ de aquellos enunciados que representen riesgo de inconsistencia dicha por MH dentro del Multiversismo es una que debe realizarse aparte. En este punto será importante hacer las siguientes observaciones acerca del Teorema 33:

1) Sabemos de los Teoremas 17 y 18 de este trabajo que los cardinales inefables y, por ende, los indiscernibles de Silver, están acotados por un cardinal medible, pero la jerarquía de grandes cardinales nos dice que la existencia de cardinales de Ramsey es consistente relativa a la existencia de los cardinales medibles, y los cardinales de Ramsey acotan a los cardinales inefables. Entonces el Teorema 33 vale para los estratos conjuntistas subindexados por cardinales Ramsey y la existencia de los conjuntos $X^{\#}$ se garantiza en los estratos Ramsey hasta llegar a lo más a los estratos medibles. Como tal, el Teorema 33 no dice nada acerca de la validez del resultado en estratos subindexados con cardinales mayores a los medibles.

2) Este teorema no da un método para obtener PR particulares que superen MH. Pese a que en la demostración se hace uso explícito de recursos que sugieren la existencia de modelos en los que cada conjunto X determina un conjunto $X^{\#}$, todo lo que obtenemos es la consistencia de la existencia de tales conjuntos $X^{\#}$ para determinados PR que superen MH.

Proponer ciertos PR y modelos de la teoría en los que se muestre que la reflexión "congela" la indecidibilidad en tercer orden es una labor aparte, y en este sentido vale la pena explorar el uso de los recursos extra que han surgido en la Teoría de Conjuntos contemporánea, como es el caso de la Teoría Modal de Conjuntos que hemos analizado anteriormente.

Para poner un ejemplo sobre una forma de trabajar en la búsqueda de PR particulares para zanjar cuestiones de indecidibilidad en tercer orden desde esta perspectiva multiversista, podemos considerar la modalización de la TC estudiada en el capítulo anterior de este trabajo. Recordemos que, según el Teorema 27, podemos considerar candidatos a PR dados por pluralidades de objetos con determinadas características que puedan usarse para estudiar determinadas oraciones indecidibles. Según el Teorema 27, podemos tomar la teoría modal MS y explorar los PR sugeridos en términos de cuestiones como las siguientes: ¿Una determinada pluralidad con una posible propiedad, dada por una fórmula φ, puede determinar un posible PR con la estructura (◊-refl) en un estrato de un universo conjuntista? Y si se presentan dificultades en torno al rango de los cardinales en el sentido de la objeción RTK o el obstáculo MH, podemos usar los argumentos multiversistas presentados antes y el Teorema 33 para superar la barrera.[232] Por lo tanto, podemos concluir que en el multiverso conjuntista no sólo podemos aspirar a lograr una reducción de la incompleción de la teoría desde el lenguaje lógico de tercer orden por medio de recursos como el Teorema 33, sino que hay una amplia gama de posibilidades en que se pueden proponer nuevos axiomas para la teoría al considerar variantes que introduzcan propiedades cuya consideración requiere un mayor alcance, y así, más recursos para estudiar formalmente cómo introducir elementos para el avance de la teoría (por medio de recursos como el teorema 27).

[232] Siempre que la barrera a superar esté dentro del alcance del teorema 33.

Cierro esta sección llamando la atención hacia una relación que desde el punto de vista lógico puede resultar peculiar. Ahora que hemos explorado el fenómeno de la indecidibilidad con algunos ejemplos en Teoría de Conjuntos, también nos hemos dado a la labor de explorar propuestas de trabajo en la misma Teoría de Conjuntos para tratar dicha indecidibilidad en la teoría vía PR:

1) Por una parte se propone la incorporación de elementos extra en el sistema formal de la teoría, tanto para el lenguaje formal como a las reglas y normas lógicas que se aceptan para trabajar. El ejemplo que manejamos es la modalización de la Teoría de Conjuntos mediante la consideración de nociones como la de pluralidad de objetos, además de todas las reglas y propiedades que, según hemos estudiado, recuperan gran cantidad del comportamiento de los axiomas y nociones estándar que se tienen en Teoría Clásica de Conjuntos. Y no olvidemos que, con este tipo de cambios al sistema formal de la teoría, también se puede incluir al estudio los componentes metafísicos y ontológicos que conllevan las pluralidades. Recordemos que la noción de pluralidad de objetos conlleva el respectivo componente modal al considerar el estudio de la necesidad o posibilidad de tales pluralidades de objetos y cómo esas modalidades afectan otras nociones como el forcing.

2) Por otra parte, se puede considerar un cambio en la perspectiva ontológica del universo conjuntista al proponer cambios en la forma que tiene el universo de los conjuntos.[233] La propuesta de interés aquí ha sido la del multiverso conjuntista cuya principal tesis es que el mundo de los conjuntos no tiene la forma de un universo en el que todos los conjuntos conviven, sino que ese mundo se compone de todo un conglomerado de universos

[233] Una observación de cuidado que se hace aquí consiste en la distinción fina entre una propuesta acerca de la ontología del mundo de los conjuntos, y una propuesta más bien epistemológica que se restringiría al modo en que nosotros mismos concebimos los conjuntos (sin que tenga que haber el compromiso de que esa forma de percepción concuerde con el mundo conjuntista).

conjuntistas. Estos universos están delimitados por una o más propiedades que los objetos en ellos cumplen y tenemos recursos con los cuales podemos transitar entre tales universos. Para esto, contamos con diversas herramientas que el Multiversismo proporciona para efectuar el estudio desde esta perspectiva, desde los axiomas y principios propios hasta los resultados que envuelven el uso del forcing en este contexto.

Aunque es posible comenzar a trabajar TC desde el enfoque modal potencialista revisado anteriormente, la postura universista del universo *V* sólo nos permite llegar tan lejos como el Teorema 27 nos lo permite al respecto de los PR modales.[234] Por esto, al hacer el cambio de postura ontológica acerca de la naturaleza del mundo conjuntista del Universismo al Multiversismo, logramos alcanzar respuestas eficaces para zanjar MH. Si bien el Teorema 33 resulta clave para proponer un modo en que PR supere MH desde la postura multiversista, el Lema 32 constituye un resultado cuya importancia no es en modo alguno disminuida, pues proporciona una de las piezas más importantes para que PR en órdenes tercero y superiores procedan a superar MH. La restricción de la clase *ORD* a universos específicos como resultado de su naturaleza totalmente inabarcable en el multiverso permite, en primer lugar, bloquear objeciones de tipo RTK en universos específicos indexados por ciertos cardinales, y, en segundo lugar, permite el manejo de modelos en los que se va "forzando" la existencia de determinados conjuntos que permiten la consistencia de PR suficientemente fuertes para superar la barrera MH. Por lo anterior, nuestra propuesta resultante de combinar (1) y (2) proporciona un terreno de estudio

[234] He de aclarar aquí que no sostengo que el Potencialismo modal ha alcanzado sus límites con lo que hemos revisado en este trabajo. En este trabajo no reviso cuál es el alcance de esta postura, pero teniendo en cuenta lo que hemos investigado acerca de la noción de reflexión modal y su capacidad para superar obstáculos como MH, hay razones para pensar que sólo el Potencialismo modal no basta para arreglar el problema.

teórico-conjuntista que puede resultar eficaz para atacar problemas serios de indecidibilidad.

5.4.3.- Un caso particular: Multiversismo zermeliano

Ahora veamos un caso particular de estudio de TC con el Multiversismo aplicado. Antes hemos dicho que las nuevas herramientas con esta postura son compatibles con varias de las ya tenidas en los estudios estándar de TC, pero también es cierto que el Multiversismo puede ajustarse a formas de interpretación de los conjuntos que son compatibles con posturas filosóficas y formales que ya se tienen.[235]

Con el propósito de mejorar el entendimiento de varias nociones teóricas, ya hemos analizado la propiedad de categoricidad que algunos estudiosos proponen para TC. Tal como hemos visto, que la teoría sea categórica significa que existe un modelo para la teoría el cual es pensado como "el modelo bueno" para interpretar el universo de los conjuntos.[236] Entre los intentos para dar con tal modelo, algunos como McGee proponen la admisión de los llamados urelementos o bloques primordiales de modo que son estos objetos los que nos permiten reflexionar y analizar las propiedades de los conjuntos en su forma más abstracta,

---

[235] En esta sección me apoyaré primordialmente de las ideas presentadas en Barton (2015). El trabajo citado sigue una línea de estudio similar a lo hecho aquí acerca del robustecimiento formal de varias nociones conjuntistas a la luz de una forma específica de Multiversismo que admite nociones zermelianas acerca de los conjuntos y el mundo que habitan. Entre los objetivos centrales del trabajo, está la defensa de la tesis de que un cambio de postura ontológica hacia una forma particular de Multiversismo (el Zermeliano) no sólo no disminuye seriamente las ventajas que pudieran tenerse en el Universismo, sino que hay una ganancia importante en evidencia a favor de que el uso de PR para obtener nuevos axiomas, el estudio de fenómenos como la determinación proyectiva, y el estudio en específico de grandes cardinales, entre otras cosas (lo que recurrentemente en tal trabajo se llama la "riqueza" en contenido teórico) con el multiverso permite adquirir avances sustanciales en el estudio de TC.

[236] Como se ha indicado anteriormente, este modelo no nos dice que los otros modelos sean malos modelos de la teoría. La idea es más bien que los otros modelos se acercan en mayor o menor medida a este modelo privilegiado en un intento de interpretar correctamente los conjuntos y su comportamiento.

además que los objetos primitivos propuestos dotan de una nueva estructura más elaborada al universo *V*. Sin embargo, no todos están dispuestos a admitir axiomas como el de urelementos debido a que enfrenta dificultades que suponen un fuerte compromiso con la existencia de entidades que, ontológica y heurísticamente, son difíciles de explicar.[237]

Ahora, recordemos que Zermelo en su (1930)[238], en su desarrollo de las nociones primitivas y axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos, llega a sus resultados sobre *Cuasi-Categoricidad* de la teoría que pueden ser enunciados resumidamente como sigue:[239]

Primer Teorema de Cuasi-categoricidad.- Todo modelo de los axiomas básicos de TC puede ser dividido en dos partes, tales que una de ellas es constituida por un conjunto "base" de objetos básicos (primitivos) que permite la formación de la estructura más compleja del universo *V* mediante las operaciones elementales conjuntistas y los axiomas de la teoría, y la otra señala la "altura" que adquiere el universo *V* en términos de la jerarquía dada por la clase *CAR*.

Segundo Teorema de Cuasi-categoricidad.- Cualesquiera dos modelos de las nociones y axiomas básicos de TC que cumplan con que sus conjuntos base sean biyectables son isomorfos, o uno de ellos tiene un conjunto dominio que es isomorfo a un segmento inicial de ordinales que constituye el conjunto dominio de un submodelo del otro.

[237] Cfr. Capítulo 2 de este trabajo para mayores detalles.
[238] Esta es la presentación que estaré siguiendo en esta sección para exponer la información al respecto de lo que Zermelo pensó sobre Cuasi-Categoricidad. Recalco que en tal trabajo se encuentran los resultados a continuación expuestos con ayuda de varias definiciones y resultados adicionales.
[239] Zermelo en su (1930) llega a estos resultados presentando una lista de otras nociones y resultados preliminares que sirven de apoyo.

El primer gran contraste que notamos sobre la postura de Zermelo con otras como la de McGee es el rol que los urelementos tienen para cada una. Sabemos, según McGee, que los urelementos en TC son una parte importante no sólo para explicar cómo es que podemos manipular formalmente todas las características y propiedades de los conjuntos en su forma más general y abstracta, sino que los urelementos como bloques primarios del mundo de los conjuntos justifican: (i) La propiedad de categoricidad de TC al fundamentar la idea de modelos isomorfos de la teoría al cumplirse las condiciones relevantes; (ii) Son los que dan el acceso epistémico a la manipulación de los conjuntos y, ontológicamente, son candidatos a proporcionar el terreno para establecer fronteras entre conjuntos y no-conjuntos (principalmente objetos básicos sobre los que se da el resto del mundo conjuntista, de la mano con los conjuntos puros). En cambio, para Zermelo, los urelementos tienen una carga teórica menor al ser éstos los que se consideran dentro del conjunto base, sin tener algún otro compromiso fuerte acerca de si determinan o no alguna forma de "material primario" del universo conjuntista.[240] De modo que ese carácter cuasi-categórico de TC se tiene por: (i) Lo que se entienda por los urelementos debe ser tal que conforman una base que la teoría estudia; (ii) Las relaciones de altura y anchura en el universo conjuntista deben satisfacer ciertas condiciones para establecer relaciones de isomorfismo entre diversos modelos de TC. Zermelo no favorece una forma privilegiada de urelemento que deba aceptarse dentro del universo conjuntista, a diferencia de posturas como la de McGee. Pero el carácter cuasi-categórico de la teoría es importante porque, a pesar de que no se tiene la categoricidad respecto de los modelos de ella, preserva la interpretación

[240] A lo largo de su (1930), Zermelo está a favor de la postura de que los urelementos desempeñan un papel más bien heurístico en todo el estudio que él realiza. En las pp. 1219 y 1220 (especialmente el Axioma (F)), además de sus Teoremas de Isomorfismo y p. 1231, se afirma que los urelementos sirven para estudiar esas llamadas bases que se propongan con diversos modelos de la teoría ZF, sin mencionar que los urelementos tengan un papel más sustancial.

deseada de las nociones de ordinalidad y cardinalidad que son esenciales para comprender la estructura del universo *V*.

Es en esta vía de pensamiento en que a continuación analizamos una forma especial de Multiversismo, el cual tiene propiedades que se desprenden de los Teoremas de Cuasi-Categoricidad de Zermelo. Esta postura se presenta como:

Multiversismo zermeliano [Barton (2015), p. 2].- "No hay un único universo de conjuntos puros que es maximal con respecto a la altura, sino que hay una serie de universos, los cuales satisfacen la teoría de segundo orden ZFC_2. Cada universo, cuando es visto desde un universo más alto (o desde la perspectiva del universista) es de la forma V_κ para κ fuertemente inaccesible, y ningún V_κ es especialmente privilegiado."[241]

En modo similar a la postura multiversista que hemos estudiado anteriormente, aquí no hay un solo universo de los conjuntos, sino que, a la par de la clase *ORD*, hay una jerarquía de universos de conjuntos que se acumulan de manera ascendente y los ordinales transfinitos indexan esta jerarquía. Con esta postura se introducen las siguientes nociones de universos:[242]

(1) Los PZ-universos o universos zermelianos primordiales son los modelos de ZFC_2 para cada particular $V_0, V_1, \ldots, V_\alpha, \ldots, V_\gamma, \ldots$, donde α y γ son ordinales sucesor y límite, respetivamente.

[241] "[Zermelian multiversism] There is no one unique universe of pure sets that is maximal with respect to height, but rather a series of universes, all of which satisfy second-order ZFC_2. Each universe, when viewed from a taller universe (or from the universist's perspective), is of the form $V\kappa$ for strongly inaccessible κ, and no one $V\kappa$ is especially privileged.". La traducción es mía. La postura universista mencionada aquí consiste en negar que haya esa pluralidad de universos, y cada V_κ es un segmento inicial del único universo.
[242] Ver Barton, (2015), p. 331.

(2) Los *CZ*-universos o universos zermelianos canónicos son los universos *V* que satisfacen la Teoría Zermeliana de Conjuntos mejor justificada.

Ciertamente, debemos analizar con cuidado estos tipos de universos para comprender mejor su papel en esta postura multiversista. Los *CZ*-universos son los que determinan nuestro punto de partida en sentido de que ellos son el primer escenario para comenzar a estudiar nuestra Teoría de Conjuntos, mientras que los *PZ*-universos son a los cuales accedemos mediante nuestra teoría y aquellas nociones y resultados que se vayan obteniendo con el estudio (PR, AGC, etc.). La diversidad en la TC usada es la que permite los cambios entre *CZ*-universos, y esto determina cuáles *PZ*-universos son accesibles desde el *CZ*-universo en turno, pero sin olvidar que los universos obedecen los resultados de los Teoremas de Cuasi-Categoricidad, y así tienen ciertas propiedades acerca de la altura y anchura de cada universo.[243] Con esto en cuenta, ahora exploraremos algunos resultados obtenidos con esta forma de Multiversismo.

El primer resultado a señalar es el propio tratamiento que reciben los PR en esta postura multiversista. Existe una forma más de reflexión que fue formulada de modo que fuera una “forma fuerte” de la noción de reflexión que hemos trabajado aquí, y que aparece en Welch (2014). Esta forma fuerte de reflexión involucra algunas nociones conjuntistas diferentes y que están más relacionadas con el estudio modelo-teórico de TC. Para comenzar a hablar de esta forma de reflexión, requerimos la noción usual de encaje elemental de TC:[244] Esta forma global de reflexión toma la estructura $(V, \in, C)$, donde C es

---

[243] Quizá uno de los aspectos que puede ser más problemático es dado por la forma en que se ha definido a los *CZ*-universos, a saber, con la Teoría Zermeliana de Conjuntos mejor justificada.

[244] Tenemos la idea intuitiva de encaje elemental: un encaje elemental entre dos modelos *M, M’* de la teoría consiste en una asignación $j: M \to M'$ tal que, para toda fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $a_1, \dots, a_n \in M$, se cumple que $M \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ *sii* $M' \vDash \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n))$, y $j(M)$ es un submodelo de *M’*. Sin embargo, definir esto con todo el rigor es laborioso e innecesario para la labor presente. Se recomienda Jech (2006), p. 158-161 para una introducción a la noción de encaje elemental y ultraproducto, la p. 285 para una presentación de encajes

la colección de todas las clases que no son conjuntos, y se refleja a algún estrato $\kappa+1$-ésimo de la jerarquía mediante un encaje elemental tal que $\kappa = crit(\kappa)$, de modo que este principio de reflexión queda como sigue:

(PREE)

Hay un encaje elemental no-trivial j y un ordinal κ tales que $crit(j) = \kappa$ y $j: (V_\kappa, \in, V_{\kappa+1}) \to (V, \in, C)$.

Si bien, PREE difiere de PR estándar en que postula la existencia de encajes elementales en lugar fórmulas reflejadas (lo cual también debe entenderse como un requisito más fuerte que el impuesto por la noción de reflexión estándar), la esencia de la noción de reflexión es la misma en el sentido de que el universo conjuntista es muy similar a un segmento inicial suyo.

Aunque PREE constituye un fortalecimiento de la noción estándar de reflexión, no está exenta de los problemas que suponen MH y la objeción RTK. Sin embargo, lo novedoso de PREE acerca del Multiversismo Zermeliano consiste en el nuevo tratamiento a la luz de los PZ-universos. Las clases C ahora son vistas como las clases respecto de PZ-universos específicos, digamos V_γ, y como en esta postura siempre se trabaja desde un universo indexado por un cierto cardinal inaccesible α, entonces en este caso podemos suponer que V_γ es un segmento inicial de V_α y tenemos el encaje elemental $j: (V_\gamma, \in, V_{\gamma+1}) \to (V_\alpha, \in, C)$. De modo que los PREE en el Multiversismo Zermeliano tienen la

elementales con modelos desde ultraproductos, y la p. 323 para la idea de punto crítico. Éste último consiste en el menor ordinal α tal que $j(\alpha) \neq \alpha$, es decir, es el primer ordinal tal que ha sido movido de lugar de aparición en el modelo del codominio del encaje elemental.

estructura que obtenemos con herramientas como el Lema 32, y también poseen las propiedades de altura y anchura dadas por los Teoremas de Cuasi-Categoricidad.[245]

El segundo resultado es con respecto al trabajo logrado al respecto de AGC con el uso de PR en esta postura. Un resultado conocido de la forma estándar de TC nos dice que al postular la existencia de ciertos grandes cardinales, entonces las operaciones conjuntistas usuales que sirven para desplazarse hacia arriba en la jerarquía cumulativa se "estacionan" en el sentido de que en cierto momento ya no es posible seguir con ese desplazamiento con esas solas operaciones. De aquí que se requieran recursos del tipo AGC para lograr analizar los estratos superiores de la jerarquía cumulativa. Como las funciones normales[246] son el recurso para comprender el comportamiento de los grandes cardinales, y las operaciones conjuntistas de potencia y remplazo son las usadas para analizar y aclarar el crecimiento ordinal, entonces, por lo que sabemos acerca de que esas operaciones no bastan para agotar todo ese crecimiento, esas funciones normales tienen un punto fijo en donde ya no arrojan ordinales superiores a dicho punto dado. De esto, tenemos los siguientes axiomas sobre el comportamiento de funciones normales:

(AxFN1) Toda función normal sobre los ordinales tiene un punto fijo regular.

(AxFN2) Toda función normal sobre los ordinales tiene un punto fijo de tipo Φ, donde Φ(x)

[245] Adicionalmente, Barton en su (2015) usa esta caracterización de PREE en el multiversismo zermeliano para argumentar a favor de la postura de que los partidarios de esta forma de multiversismo aún pueden responder a las críticas de los universistas acerca del uso consistente de la noción de reflexión en el multiversismo. Al respecto, véase pp. 335-337.

[246] Funciones continuas y crecientes.

es la fórmula para expresar "x es inaccesible", "x es Mahlo", y subvariantes de estos cardinales.[247]

Conocer estos axiomas ayuda a tener un mejor panorama sobre lo que se puede esperar de las funciones normales en relación con grandes cardinales. Y esto es motivo de que desde el Universismo se haga la siguiente objeción a la postura multiversista zermeliana: (i) Dentro del Multiversismo Zermeliano, los PR no pueden formularse debido a que, por su forma condicional, el antecedente no permite hablar de fórmulas verdaderas en todo *V*; (ii) ¿Por qué en el Multiversismo Zermeliano se pueden encontrar los *PZ*-universos relevantes para justificar el uso de determinados PR? Sin embargo, dado el carácter cuasi-categórico de los universos primordiales (altura y anchura de los universos) y las limitaciones impuestas por las operaciones conjuntistas de potencia y remplazo, en el Multiversismo Zermeliano se pueden responder estos problemas. No olvidemos que las sucesiones de ordinales de cualquier tipo se estacionan en determinado momento según las funciones normales (de tipo enumerativo) que se usen para construirlas. Por los que los *PZ*-universos relevantes para estudiar dichos cardinales serán aquellos en que la existencia de esas sucesiones de cardinales sea consistente, pues los *PZ*-universos son los modelos de ZFC_2 en que se construyen dichas sucesiones de cardinales, en tanto que se admite que el *CZ*-universo adecuado es el que interpreta la teoría en que se construyen esas sucesiones. Por lo que la distinción *PZ*-universo/*CZ*-universo resuelve estos problemas.[248]

Para terminar, es importante notar que, aunque esta forma de Multiversismo no resuelve los problemas serios de indecidibilidad, sí proporciona buenas razones para

[247] La fórmula $\Phi(x)$ que aparece en este axioma es para cardinales inaccesibles y Mahlo solamente. Aunque hay razones para pensar que una versión del axioma se sostiene para cardinales superiores a los ahí mencionados.
[248] La solución de este problema obedece el desarrollo que Barton da específicamente para superar el problema en los estratos inaccesibles, Mahlo e indescribibles. Véase su (2015) pp.346-352.

considerar que los PR estudiados desde esta perspectiva proporcionan elementos útiles para comenzar a resolver tales dificultades.

5.5.- Conclusiones

Con las consideraciones hechas en este capítulo, hemos alcanzado varias conclusiones acerca del carácter y desarrollo de la Teoría de Conjuntos cuando se reinterpreta con una postura como el Multiversismo. Ahora presentamos tales conclusiones:

1) Ha quedado claro con los desarrollos de los pasados dos capítulos que en la postura tradicional universista no hay un pronóstico favorable acerca de cómo se pueden resolver problemas como los planteados por la objeción RTK o el problema MH. Así que una alternativa que se presenta es hacer un cambio de postura hacia la ofrecida por el Multiversismo conjuntista. La visión multiversista de los conjuntos desecha la idea de que hay un único universo conjuntista V y la remplaza por la idea que postula la existencia de varios universos de conjuntos. Los universos son considerados de acuerdo con las ideas detrás de los que se consideren los conceptos básicos de conjunto y de pertenencia, además que se establece la maquinaria formal para transitar entre los universos fundamentada principalmente en ciertas relaciones entre ellos (siendo tales relaciones con determinadas características). Esto concuerda con la visión potencialista que se adoptó anteriormente y pone a PR en un terreno de acción tanto en modo usual como modal, con la consideración del universo en que se está trabajando la teoría. Además, el Multiversismo viene acompañado por una lista de principios y axiomas propios de esta postura los cuales sirven

para establecer el comportamiento de los universos de conjuntos, tanto dentro de universos particulares como fuera de ellos mediante la relación con otros universos de conjuntos (esto apoyado por nociones conocidas como el forcing, conjuntos constructibles, encajes de universos, modelos internos y externos, etc.).

2) Sobre los conceptos como el de *la* verdad en TC o la característica de categoricidad, la postura multiversista no nos pone en una mejor posición de la que estamos cuando se opta por un modo potencialista de entender *V*. Las cuestiones acerca de *la* verdad en TC, la propiedad de categoricidad, y ultimadamente los conceptos básicos de conjunto o de pertenencia, dependen de las ideas que subyacen al entendimiento de esos objetos que llamamos conjuntos (y esto es lo que hace que permanezcan como preguntas abiertas). Por lo que en la postura multiversista no sólo tenemos una justificación de índole ontológica a la cuestión de por qué ciertos desarrollos excluyentes en TC son legítimos, a saber, una justificación que propone la existencia de diversos universos en los que *el* concepto básico de conjunto en turno subyace el desarrollo teórico posterior en los universos accesibles desde la base, sino que también hay compatibilidad con la postura potencialista y la recuperación de nociones importantes para las teorías como la del rango, o PR mismo, restringidas al universo en que se desarrolle la teoría.

3) El Multiversismo puesto en acción mediante los principios y axiomas propuestos sirve para proponer respuestas desde esta postura a los problemas planteados por la objeción RTK y MH a los PR. La restricción en el manejo de *ORD* en modo multiversista es vital para bloquear la objeción RTK a los PR en 3er orden debido a que *ORD* no puede ser manipulado como clase en universos particulares (lo cual está permitido en el

Universismo), por lo que la formulación misma de la objeción no puede darse aquí. Esto conlleva la obtención del resultado acerca de la inabarcabilidad absoluta de *ORD* -Lema 32- y, con la ayuda de varios resultados junto con los principios y axiomas multiversistas, el inicio del bloqueo del problema planteado por MH -Teorema 33- desde esta postura. La consistencia de la existencia de los conjuntos $X^{\#}$ que es implicada por algún PR que supere MH asegura que, dentro del Multiversismo, aún es seguro explorar el uso de los Principios de Reflexión como medio para atender problemas de indecidibilidad seria como HC.

4) La labor recuperada por el uso de PR en 3er orden pone sobre la mesa la admisión de diversas propuestas para atender los problemas de indecidibilidad. Una propuesta en particular notoria es la que consiste en seguir el trabajo de TC desde la postura multiversista con las nociones y resultados que la Teoría Modal de Conjuntos tiene para ofrecer, como el sistema MS. Si bien, parece que desde siempre ha sido parte de la práctica teórico-conjuntista el concebir colecciones de objetos como candidatos a ser conjuntos -los cuales se buscan definir de manera consistente con la teoría-, ahora tenemos a nuestra disposición un aparato formal más robusto para hacerlo. El manejo modal que se introduce con el estudio de las pluralidades de objetos compatibiliza bien con la consideración de diversos universos en los que tales pluralidades "pudieran" constituir conjuntos, siendo la teoría misma la que se puede encargar de responder esa cuestión con las herramientas modales y multiversistas al alcance.

Otra propuesta interesante es la planteada por el Multiversismo Zermeliano. Con ella, se recuperan las ideas detrás de los resultados de Cuasi-Categoricidad de Zermelo y se ponderan con el empleo de diversos universos de conjuntos, éstos últimos delimitados por los *PZ*-universos y los *CZ*-universos. Esto permite tener una nueva manera de manejar la noción de reflexión en la teoría que es compatible con esta forma de concebir diversos universos de conjuntos (la noción de reflexión pensada como la tercera forma de PR, PREE). Por lo que tenemos aquí otra forma en que se trabaja con PR desde una forma más específica de Multiversismo que está en posibilidad de arrojar otros resultados, o llevarse al estudio mismo de la indecidibilidad en TC.

Conclusiones Finales

Ahora que conocemos los alcances del uso de PR en los usos tradicionales de la Teoría de Conjuntos -las efectuadas desde una postura universista-, no es sencillo encontrar una salida a las cuestiones de indecidibilidad que nos interesan sólo con las formas estándar de PR en vista de que los problemas planteados por la objeción RTK o el problema MH colocan la barrera muy por encima de lo que se puede lograr con tales principios.[249] Por lo que, en la búsqueda de alternativas para salvar el uso de PR más allá del segundo orden que ayuden a alcanzar esa reducción de incompleción de la teoría resultante de la presencia de proposiciones indecidibles, una de las alternativas que se ofrecen para proceder es la consistente en cambiar los conceptos y definiciones más básicos acerca de los objetos primordiales de estudio de TC, reestructurando con ello la forma de concebir y entender la naturaleza del mundo *V* que es estudiado por la teoría.

¿Cómo se logran estos cambios en el nivel más fundamental de TC, sin que ello modifique profundamente el desarrollo y resultados actuales que se han alcanzado con la teoría? Pensemos que la restructuración al nivel fundamental de la teoría no puede ser de cualquier tipo en vista de que no se desea que los cambios realizados resulten en desarrollos de TC completamente inconexos e inconsistentes entre sí, esto es, no buscamos que los desarrollos de TC sean de carácter completamente arbitrario. De aceptar cualquier propuesta de restructuración a los fundamentos de TC, estaríamos optando por una relativización generalizada de TC, lo cual compromete toda la labor hecha hasta ahora y la

[249] En este sentido, podemos apreciar el carácter limitativo de los resultados como el Teorema de Baumgartner acerca de la noción de reflexión en segundo orden como la forma más fuerte de reflexión actualmente conocida.

ulterior.[250] Por lo que esta restructuración debe cumplir: (i) Estar al nivel básico de los conceptos definitorios de conjunto y de pertenencia, de modo que se arroje información sobre el comportamiento de los objetos llamados conjuntos, (ii) explicar la naturaleza de los conjuntos y del universo *V* que habitan, y (iii) mantener un carácter de generalidad que permita la interpretación y los desarrollos de TC que son propios de las disciplinas matemáticas.

Aquí hemos optado por analizar la postura multiversista acerca de los conjuntos, con la que observamos una gran recuperación del comportamiento y resultados de la teoría que se alcanzan en las posturas universistas clásicas. En el multiversismo conjuntista hay la suficiente libertad para efectuar las consideraciones metateóricas relevantes en el estudio de aquellas colecciones de objetos que son candidatos para conformar conjuntos, pues la postura es compatible incluso con las formas modales de concebir tales colecciones y estudiar formalmente lo que pasaría con su tratamiento conjuntista (esto es, con las pluralidades y la Teoría Modal de Conjuntos MS). Además, la teoría tratada multiversistamente es adecuada para erradicar y disminuir los problemas limitativos planteados por la objeción RTK y el problema MH, haciendo con esto no sólo que el empleo de PR bajo la postura multiversista sea recuperado, sino que es enriquecido con un aparato formal más potente para trabajar lo que significa que enunciados de TC sean relativizados a estratos inferiores de universos de conjuntos.

Sin embargo, se ha mencionado que el Multiversismo conjuntista recupera casi en su totalidad las nociones y desarrollos teóricos. ¿Qué es lo que no ha podido recuperarse con el cambio de postura ontológica? Los estudios acerca del carácter absoluto que deben

---

[250] Adicionalmente, pensemos en que esto no puede ser el caso puesto que en Matemáticas no se trabajan las nociones ni se obtienen los resultados desde cualesquiera principios arbitrarios propuestos.

tener los conceptos fundamentales de la teoría -conceptos básicos como el de conjunto y la noción de pertenencia-, qué es *la* verdad en TC -y su vinculación directa con el concepto de verdad en Matemáticas-, o la propiedad de categoricidad de la teoría, son unos que no se recuperan completamente al pasar al Multiversismo. Esto es un problema para los defensores del carácter absoluto que desean tener tales conceptos, pues la manera tradicional en que se suele pensar al progreso en una teoría como lo es la de los conjuntos es que esté apoyada en nociones lo más básicas y objetivas posibles, siendo así que la presunción por hallar *el* concepto fundamental general de conjunto no se abandona sin más. Algo similar puede decirse acerca *del* concepto de verdad en TC, pues aunado a ese carácter absolutista de la verdad está la característica fuertemente prescriptiva que se le atribuye a TC, siendo la postura acerca de que cada proposición matemática tiene un único valor de verdad -incluso aquellas oraciones indecidibles- que fundamenta esa característica prescriptiva.[251] No se sostiene que dentro de la postura multiversista no se puede realizar una justificación en términos de absolutez para las nociones primordiales, sin embargo sí puede resultar complicado puesto que se añaden a los problemas sobre la justificación de las nociones básicas nuevos problemas acerca de la búsqueda de universos de conjuntos primarios en los que se apoyan tales conceptos fundamentales, así como la justificación de por qué tales universos -si existen- son más básicos que el resto en que se basa el resto del desarrollo de TC. Esto es sólo parte del trabajo posterior que la Teoría de Conjuntos desde estas posturas multiversistas tendría que atender.

[251] Esto está relacionado fuertemente con la tesis de que TC es efectivamente el fundamento de las Matemáticas.

Bibliografía

- Amor, J. A. (2005), *El problema del continuo después de Cohen. (1964)-2004)* en Aportaciones Matemáticas. Memorias, Ciudad de México. PP. 71-80.

- Amor, J. A. (2008), "La teoría de modelos de la teoría de conjuntos: un concepto delicado" en *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (Comp. García de la Sienra, A.), Serie: Antologías, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Ciudad Universitaria, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2008. PP. 79-92.

- Asperó, D., Larson, P., Moore, J. T., *Forcing Axioms and the Continuum Hypothesis,* Mittag-Leffler Institute, Suecia, 2010.

- Bagaria, J., *Axioms og Generic Absoluteness*, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Cataluña, 2000.

- Bagaria, J., *Paul Cohen y la técnica del forcing,* Departamento de Lógica, Gaceta de la Real Sociedad Académica Española, Vol. 2, No. 3. Barcelona, 1999. PP. 543-553.

- Bagaria, J., Vänäänen, J. (2016), "On the Symbiosis between model-theoretic and set-theoretic properties of large cardinals" en *The Journal of Symbolic Logic, 81(2), Cambridge University Press, Reino Unido. PP. 584-604.*

- Barton, N. (2016), "Richness and Reflection" en *Philosophia Mathematica (III),* Vol. 24, No. 3, Oxford University Press, Reino Unido. PP. 330-359.

- Benacerraf, P. (1973), "Mathematical Truth" en *Journal of Philosophy,* Vol 70, No.19, Columbia University, Hannover, Alemania. PP. 661-679.

- Boney, W. (2020), "Model Theoretic Characterizations of Large Cardinals" en *Israel Journal of Mathematics* (236), *Hebrew University of Jerusalem,* Jerusalem. PP. 133-181.

- Dauben, J. W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Princeton University Press, New Jersey, 1990.

- Di Prisco, C., "Are we closer to a solution of the continuum problem?" en *Rev. Int. Fil.* Vol. 28, No. 2, Campinas, 2005. PP. 331-350.

- Fitch, F. B., "A Complete and Consistent Modal Set Theory" en *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 32, No. 1, Cambridge University Press, Reino Unido, 1967. PP. 93-103.

- Fontanella, L., *Reflection Principles and Large Cardinals,* Notas de clase, Hebrew University of Jerusalem, Israel. http://www.logique.jussieu.fr/_fontanella

- Geschke, S., *Models of Set Theory,* Notas de clase. Boise State University.

- Gómez Torrente, M. (2208), "Interpretaciones y conjuntos" en *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (Comp. García de la Sienra, A.), Serie: Antologías, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Ciudad Universitaria, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2008. PP. 207-222.

- Hamkins, J. D., "A Simply Maximality Principle" en *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 68, No. 2, Cambridge University Press, Reino Unido, 2003. PP. 527-550.

- Hamkins, J. D., "The Set-Theoretic Multiverse!" en *The Review of Symbolic Logic,* Vol. 5, No. 3, Cambridge University Press, Reino Unido, 2012. PP. 416-449.

- Hamkins, J. D., Linnebo, Ø., "The modal logic of set-theoretic potentialism and the potentialist maximality principles" en *The Review of Symbolic Logic,* Vol. 15, No. 1, Cambridge University Press, Reino Unido, 2022. PP. 1-35.

- Hamkins, J. D., Löwe, B., "The Modal Logic of Forcing" en *American Mathematical Society,* Vol. 360, No. 4, 2008. PP. 1793-1817.

- Heck, R. G., *Formal Background of Incompleteness and Undefinability Theorems,* Notas de clase.

- Jané, I. (2008), "Axiomas, formalización y teoría de conjuntos" en *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (Comp. García de la Sienra, A.), Serie: Antologías, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Ciudad Universitaria, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2008. PP. 93-118.

- Jech, T., *Set Theory*, 3era edición, Springer, Alemania, 2006.

- Kanamori, A., *The Higer Infinity. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings,* 2da edición, Springer, Alemania, 2009.

- Koellner, P., "On Reflection Principles" en *Annals of Pure and Applied Logic,* Vol. 157, No. 2-3, Netherlands, 2009. PP. 206-219.

- Koellner, P., *The search for New Axioms,* P.H.D. Dissertation, MIT, 2003.

- Koellner, P., "On the Question of Absolute Undecidability" en *Philosophia Mathematica,* Vol. 14, No. 2, Oxford University Press, Reino Unido, 2006. PP. 153-188.

- Koellner, P., "Strong Logics of First and Second Order" en *The bulletin of Symbolic Logic,* Vol. 16, No.1, Reino Unido, 2010. PP. 1-36.

- Krajicek, J., *Modal Set Theory,* Notas de Clase, Checoslovaquia, 1989.

- Gödel, K., *Obras Completas,* Mosterin, J. (tr.), Alianza, Madrid, 2006.

- Kreisel, G., "Informal Rigour and Completeness Proofs" en *Problems in the Philosophy of Mathematics,* Lakatos, I. (ed.), North.Holland, Amsterdam, 1967. PP. 138-171.

- Lévy, A., Vaught, R. L. (1960), "Principles of Partial Reflection in the Set Theories of Zermelo and Ackermann" en *Pacific Journal of Mathematics,* Vol. 11, No. 3, Badmonth, 1961. PP. 1045-1062.

- Lévy, A., "Axiom Schemata of Strong Infinity in Axiomatic Set Theory" en *Pacific Journal of Mathematics,* Vol. 10, No. 1, Badmonth, 1960. PP. 223-238.

- Lévy, A., “Principles of Reflection in Axiomatic Set Theory” en *Fundamenta Mathematicae*, Cambridge, 1959. P. 1-10.

- Linnebo, Ø., “Pluralities and Sets” en *Journal of Philosophy*, Vol. 107, No. 3, Estados Unidos, 2010. PP. 144-164.

- Linnebo, Ø., “The Potential Hierarchy of Sets” en *The Review of Symbolic Logic*, Vol. 6, No. 2, Cambridge University Press, Reino Unido, 2013. PP. 205-228.

- Magidor, M., Vänäänen, J., *On Löwenheim-Skolem-Tarski numbers for extensions of first order logic*, Mittag-Leffler Institute, Suecia, 2009.

- McGee, V., “How We Learn Mathematical Language” en *The Philosophical Review,* Vol. 106, No. 1, Duke University Press, Cornell University, Estados Unidos, 1997. PP. 35-68.

- Menzel, C., “Modal Set Theory” en *The Routledge Handbook of Modality*, Bueno, O., Shalkowski, S., Londres, Nueva York. De próxima aparición.

- Nepomuceno Fernández, A. (2008), “Semánticas de la lógica de segundo orden” en *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (Comp. García de la Sienra, A.), Serie: Antologías, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Ciudad Universitaria, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2008. PP. 153-174.

-Reinhardt, W. N., “Remarks on Reflection Principles, Large Cardinals and Elementary Embeddings” en *Proceedings on Symposia in Pure Mathematics,* Vol. 13, No. 2, Nueva York, 1936. PP. 189-205.

- Smullyan, R., *Gödel’s Incompleteness Theorems,* Oxford University Press, Reino Unido, 1992.

- Solovay, R. M., Reinhardt, W. N., Kanamori, A., “Strong Axioms of Infinity and Elementary Embeddings” en *Annals of Mathematical Logic*, Vol. 13, No. 1, North-Holand, Amsterdam, 1978. PP. 73-116.

- Tait, W. W., *Constructing Cardinals from Below,* 2003. PP. 1-26.

- Tait, W. W., "The Iterative Hierarchy of Sets" en *Iyyun: The Jerusalem Philosophical Quarterly,* Bergman Center for Philosophical Studies, Israel, 1990. PP. 65-79.

- Tarski, A. (1930), "Investigations into the Sentential Calculus" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP. 38-59.

- Tarski, A. (1936), "On the Limitations of Deductive Theories" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP. 384-392.

- Tarski, A. (1928), "On some Fundamental Concepts of Metamathematics" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP. 30-37.

- Tarski, A. (1929), "On Definable Sets of Real Numbers" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP.110-142.

- Tarski, A. (1931), "The Concept of Truth in Formalized Languages" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP.152-278.

- Tarski, A. (1933), "Some Observations on the Concepts of ω-Consistency and ω-Completeness" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP. 279-295.

- Tarski, A. (1936), "On the Concept of Logical Consequence" en Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (tr, Woodger), Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1956. PP. 409-420.

- Torrez, Alcaraz, C., *Hilbert y Gödel: Dos perspectivas de la Matemática (1era ed.)*, Las Prensas de las Ciencias, Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, 2018.

- Väänänen, J., *Multiverse Set Theory and Absolutely Undecidable Propositions*, New-York-Amsterdam Universities, 2013. PP. 1-28.

- Atten, M. v., Kennedy, J., "Gödel's Modernism: On Set-Theoretic Incompleteness," Revisited en Lindström, S., Palmgren, E., Segerberg, K., Stoltenberg-Hansen, V. (eds) *Logicism, Intuitionism, and Formalism*, Synthese Library, vol 341. Springer, Dordrecht. 2009. PP. 303-365.

- Welch, P. D. (2012), "Global Reflection Principles" en *Logic, methodology and philosophy of science: proceedings of the fifteenth international congress*, College Publications, University of Bristol, Reino Unido, 2017. PP. 1-17.

- Welch, P. D., Horsten, L., "Reflecting on Absolute Infinity" en *Journal of Philosophy*, Vol. 113, No. 2, 2016, Estados Unidos, 2016. PP. 89-111.

- Woodin, W. H. (1982)., "On the consistency strength of projective uniformization" *en* J. Stern (ed.), *Proceedings of the Herbrand Symposium. Logic Colloquium '81*, North-Holland, Amsterdam. PP. 365-383.

- Woodin, W. H., *Strong Axioms of Infinity and the search of V*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 2010.

- Zermelo, E. (1930), "On Boundary Numbers and Domains of Sets: New Investigations on the Foundations of Set Theory" en Ewald, William B. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols. Oxford University Press, Reino Unido, 1996. PP. 1219–33.