



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN DE ESTADOS  
CUÁNTICOS A TRAVÉS DE MEDIDAS DE  
DISTINGUIBILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

P R E S E N T A :

ATHZIRI JAZMÍN PÉREZ CRUZ

TUTOR

DRA. ANDREA VALDÉS HERNÁNDEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.





1. Datos del alumno  
Pérez  
Cruz  
Athziri Jazmín  
5529293931  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
314184835
2. Datos del tutor  
Dra.  
Valdés  
Hernández  
Andrea
3. Datos del sinodal 1  
Dra.  
Cetto  
Kramis  
Ana María Beatriz
4. Datos del sinodal 2  
Dra.  
Sánchez  
Morales  
Vicenta
5. Datos del sinodal 3  
Dra.  
Villavicencio  
Torres  
Mirna
6. Sinodal 4  
Dr.  
Paris  
Mandoki  
Asaf
7. Datos del trabajo escrito  
Análisis de la evolución de estados cuánticos  
a través de medidas de distinguibilidad  
46 p.  
2023

## **Dedicado a...** Cookies (el mejor perro del mundo),

Quería compartir este momento y muchos otros contigo, pero la vida no nos lo permitió; en su lugar te dedicó una mención especial en este trabajo que aunque no reemplaza tu ausencia, me permite hacerle saber al mundo, o al menos a quien lean esta tesis, que tenerte a mi lado, no fue algo bueno, fue lo mejor. Te extrañaré por siempre.

*«There are three things all wise men fear: the sea in storm, a night with no moon, and the anger of a gentle man.»*

Patrick Rothfuss



# Agradecimientos

A mi tutora, la Dra. Andrea Valdés Hernández. Por haberme aceptado como su alumna, agradezco su paciencia y constancia, sin usted, este trabajo no lo hubiese logrado tan fácil. Sus consejos fueron siempre útiles cuando no salían de mí las ideas para escribir lo que hoy he logrado. Muchas gracias por sus múltiples palabras de aliento, cuando más las necesite; por estar allí cuando mis horas de trabajo se hacían confusas. Gracias por sus orientaciones, correcciones y enseñanzas.

Al proyecto PAPIIT-IN113720. Por el apoyo otorgado, que ha posibilitado que me dedique enteramente a la realización de la tesis.

A mis papás, Arcadia Cruz y Luciano Pérez. Por su cariño, paciencia y apoyo. Gracias a mi madre porque a pesar de las dificultades que presenta la vida siempre ha estado a mi lado y ha sabido enseñarme a salir adelante y no rendirme. Sin su apoyo incondicional en todos los ámbitos no hubiera podido llegar a donde estoy. Gracias a mi padre por su dedicación y por su esfuerzo que ha hecho por mí y por mi educación.

A mis hermanas Dalia y Azucena, Por ser mis mejores amigas, compañeras y cómplices. Gracias por apoyarme desde principio hasta el fin, gracias por ser tan buenas y admirables y sobre todo por darme tanto mal y tanto amor. Gracias por siempre cuidarme y protegerme.

A mis Abuelitos, Guillermina Gómez y Marcos Pérez. Por cuidarme y protegeme todos estos años. Agradezco el esfuerzo que han hecho por mí. Siempre estaré agradecida por todo su apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de mi vida.

Y sin dejar tras a toda mi familia, abuelita, tíos, primos y mascotas, gracias por su apoyo y por ser parte de mi vida.





# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Evolución y medidas de distinguibilidad</b>	<b>3</b>
1.1. Ecuación de Schrödinger . . . . .	3
1.2. Probabilidad de supervivencia . . . . .	6
1.3. Medida de distinguibilidad $D$ . . . . .	7
1.4. Medida de distinguibilidad $\bar{S}$ . . . . .	10
1.5. Comportamiento de $D$ y $\bar{S}$ a tiempos cortos . . . . .	11
<b>2. Evolución de sistemas cuánticos</b>	<b>13</b>
2.1. Sistema de un qubit . . . . .	13
2.2. Oscilador armónico . . . . .	18
2.2.1. Dinámica de la distinguibilidad . . . . .	20
2.3. Partícula en un pozo . . . . .	23
2.3.1. Dinámica de la distinguibilidad . . . . .	25
2.3.2. Comparación oscilador armónico vs. partícula atrapada en un pozo de potencial. . . . .	28
2.4. Sistema de dos qubits . . . . .	30
2.4.1. Comparación oscilador armónico vs. 2-qubits . . . . .	33
<b>3. Análisis y conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Apéndice A. Valor máximo de <math>D_L</math></b>	<b>41</b>
<b>Apéndice B. Valores extremos de <math> A(\tau) ^2</math> para el sistema de dos qubits</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>



# Introducción

En los últimos años, el concepto de distinguibilidad (u ortogonalidad) de estados cuánticos ha cobrado relevancia debido a sus importantes aplicaciones en la física, principalmente en el campo de la información cuántica. Muchas de sus ideas están relacionadas con el concepto de tiempo de ortogonalidad, que es el tiempo requerido para que un sistema cuántico evolucione hacia un estado que sea perfectamente distinguible del estado inicial [1] [2], lo que equivale a realizar un paso computacional elemental. Es por esto que las investigaciones sobre la evolución hacia estados ortogonales son importantes para el análisis teórico y experimental de la dinámica de los estados cuánticos, además de ser relevantes para el establecimiento de limitaciones físicas fundamentales (generalmente expresadas como relaciones de incertidumbre) [3] [4].

Al estudiar la evolución hacia estados ortogonales, tenemos la posibilidad de caracterizar la evolución de un sistema cuántico utilizando el tiempo de ortogonalidad y el número total de estados ortogonales que visita en un intervalo de tiempo dado. Semejante dinámica es de particular interés para ahondar en las limitaciones del procesamiento de información. Sin embargo, la mayoría de los sistemas no evoluciona a estados ortogonales, por lo que no es posible estudiarlos con el mismo método que se emplea para caracterizar la dinámica de los sistemas que alcanzan la ortogonalidad [5].

Para analizar la dinámica de un sistema que en general no evoluciona hacia estados ortogonales al inicial, se requiere considerar otras cantidades que permitan caracterizar el grado de evolución del sistema, en el entendido de que una evolución mayor significa que el sistema visita estados que son altamente distinguibles entre sí. Una de estas cantidades es la probabilidad de supervivencia,  $|A|^2$ , definida como el módulo al cuadrado del traslape entre el estado inicial y el estado al tiempo  $t$ . Aunque en principio esta cantidad no es directamente una medida de distinguibilidad, sirve como base para desarrollar otras cantidades que se estudian a lo largo de este trabajo y que pueden interpretarse como cuantificadores de distinguibilidad. En particular, se puede considerar  $1 - |A|^2$  para medir la distinguibilidad entre el estado inicial y el estado al tiempo  $t$ . Promediando esta cantidad dentro de un intervalo temporal  $[0, T]$  obtenemos  $\bar{S}$ , una medida que cuantifica el grado de distinguibilidad promedio entre el estado inicial y los estados que visita el sistema en el intervalo de tiempo. En forma similar, a partir del traslape entre dos estados a tiempos arbitrarios dentro de  $[0, T]$ , obtenemos  $D$ , una medida que representa la distinguibilidad promedio de los estados que visita el sistema en dicho intervalo.

Este trabajo se enfoca en estudiar la dinámica de  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  con el objetivo de contestar la pregunta fundamental: ¿Qué tanto evoluciona un sistema cuántico cuando medimos el grado de evolución con las medidas  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$ ? Otro objetivo es profundizar en el análisis comparativo de  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  determinando algunas propiedades importantes con el fin de entender mejor el contenido físico de estas cantidades. También se busca develar las ventajas de caracterizar la dinámica del sistema con cada una de estas medidas propuestas.

La presentación de este trabajo se divide en capítulos. En el capítulo 1 se desarrollan los conceptos teóricos indispensables para el estudio de las medidas  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  como sigue: En la sección 1.1 se hace un breve repaso de la ecuación de Schrödinger, que determina el tipo de evolución que se va a considerar. En la sección 1.2 se revisa el concepto de distinguibilidad y se introduce la primera medida,  $|A(T)|^2$ . En las secciones 1.3 y 1.4 se introducen y discuten las propiedades de las medidas  $D$  y  $\bar{S}$ , respectivamente. En la sección 1.5 se estudia el comportamiento de  $D$  y  $\bar{S}$  a tiempos cortos. En el capítulo 2, se analiza la dinámica de las cantidades  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  propuestas, para diversos sistemas y se estudia la relación entre las tres. Finalmente, en el capítulo 3 se presenta un resumen y algunos comentarios finales.

# Capítulo 1

## Evolución y medidas de distinguibilidad

### 1.1. Ecuación de Schrödinger

La función de onda  $\Psi(x, t)$  de un sistema cuántico describe completamente su dinámica. Para que  $\Psi(x, t)$  califique como la función de onda cuántica de una partícula de masa  $\mu$ , que se mueve en una dimensión bajo una potencial  $V$ , debe ser solución de la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi, \quad (1.1)$$

y estar restringida por las siguientes condiciones:

- I. Debe de ser univaluada, es decir, para cualquier valor del argumento de la función, la función de onda sólo puede tener un valor.
- II. Debe ser suave, esto significa que la función de onda y su primera derivada deben ser continuas.
- III. Debe estar normalizada por la condición de Integrabilidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (1.2)$$

donde el módulo al cuadrado  $|\Psi(x, t)|^2$  se llama densidad de probabilidad y  $|\Psi(x, t)|^2 dx$  representa la probabilidad de que la partícula se encuentre en un intervalo de ancho  $dx$  alrededor del punto  $x$  al tiempo  $t$  [6] [7].

Adicionalmente  $\Psi(x, t)$ , debe satisfacer las condiciones de frontera del problema en particular.

La ecuación (1.1), es conocida como la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en una dimensión y describe la evolución de un sistema cuántico no relativista. Otra forma de escribirla es mediante la expresión

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}\Psi, \quad (1.3)$$

donde  $\hat{H}$  representa el operador lineal hamiltoniano,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V. \quad (1.4)$$

En el caso en que  $V$  sea una función únicamente dependiente de  $x$  ( $V = V(x)$ ), la ecuación de Schrödinger puede ser resuelta por el método de separación de variables, el cual propone escribir a  $\Psi$  como producto de dos funciones, una que dependa únicamente de  $x$  y la otra solo de  $t$ ,

$$\Psi(x, t) = \varphi(x)\phi(t). \quad (1.5)$$

Sustituyendo (1.5) en (1.1), la ecuación de Schrödinger queda como:

$$i\hbar\varphi(x) \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\phi(t) \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V\varphi(x)\phi(t). \quad (1.6)$$

Dividiendo entre  $\varphi(x)\phi(t)$ ,

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x). \quad (1.7)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior es solo función de  $t$ , mientras que el lado derecho es solo función de  $x$ . La única forma de que esto sea posible es que ambos lados sean igual a una constante que llamaremos  $E$ , entonces

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = E, \quad (1.8)$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x) = E. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) son ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera es fácil de resolver, y su solución general es:

$$\phi(t) = ce^{-iEt/\hbar}. \quad (1.10)$$

Esta es la solución únicamente de la porción temporal de la función  $\Psi(x, t)$  y determina cómo evoluciona la función de onda en el tiempo dado un valor de energía  $E$ . La segunda ecuación (ecuación (1.9)), se puede reescribir como

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \varphi(x) = E\varphi(x), \quad (1.11)$$

esta es conocida como ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, pues sus soluciones  $\varphi(x)$  describen solo el comportamiento espacial de la función de onda cuántica  $\Psi(x, t)$  (el comportamiento temporal es descrito por las funciones  $\phi(t)$ ). Y aunque las soluciones dependen de la naturaleza de la energía potencial  $V$ , se puede decir mucho con solo observar detenidamente la ecuación (1.11). Lo primero que notamos es que es una ecuación de eigenvalores. Para ver esto, la reescribimos utilizando el operador hamiltoniano:

$$\hat{H}\varphi = E\varphi, \quad (1.12)$$

y como se espera esta expresión tiene la forma de una ecuación de eigenvalores, con eigenfunción  $\varphi(x)$  y eigenvalor  $E$ . En este tipo de ecuaciones, tratamos de determinar todos los valores de  $E$  (eigenvalores) para los cuales (1.12) tiene una solución distinta de cero, y sus funciones  $\varphi$  correspondientes (eigenfunciones del operador  $\hat{H}$ ).

Por ser  $\hat{H}$  un operador autoadjunto, podemos elegir una base ortonormal de eigenfunciones  $\{\varphi_n\}$  (ver [8]), por lo que las funciones  $\varphi_n$  cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x)\varphi_n^*(x)dx = \delta_{nm}, \quad (1.13)$$

donde  $\delta_{nm} = 1$  para  $n = m$  y  $\delta_{nm} = 0$  para  $n \neq m$ . Haciendo  $n = m$  en (1.13) vemos que las funciones  $\varphi_n(x)$  están normalizadas, y con  $n \neq m$  notamos que  $\varphi_n$  y  $\varphi_m$  son ortogonales.

Como las funciones  $\varphi_n$  son funciones propias de  $\hat{H}$  entonces

$$\hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n, \quad (1.14)$$

para algún  $E_n$ . Para obtener la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, sustituimos  $\varphi_n$  y (1.10) en (1.5),

$$\Psi_n(x, t) = e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(x), \quad (1.15)$$

donde la constante  $c$  de la ecuación (1.10) es absorbida por  $\varphi_n$ . Las soluciones del tipo (1.15) reciben el nombre de estados estacionarios, los cuales tienen energía bien definida  $E_n$ . El conjunto de todos los posibles valores de  $E_n$  se denomina el espectro de energía, o bien, espectros de valores propios o autovalores del Hamiltoniano.

Como  $\{\varphi_n\}$  forma una base ortogonal completa, cualquier función con las mismas condiciones de frontera puede sintetizarse mediante una superposición de esas funciones propias, por lo tanto, la solución más general  $\Psi(x, t)$  de la ecuación (1.1) es:

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(x), \quad (1.16)$$

donde los  $c_n$  son los coeficientes de desarrollo para cada valor de energía, y se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. El módulo cuadrado  $|c_n|^2$



representa la probabilidad de encontrar al sistema en el estado de energía  $E_n$ , por lo tanto,

$$\sum_n |c_n|^2 = 1, \quad (1.17)$$

lo cual garantiza que se cumple la condición III [9] [10].

## 1.2. Probabilidad de supervivencia

La ortogonalidad juega un rol decisivo en la distinguibilidad de estados. Un estado  $\Psi$  puede distinguirse de otro,  $\Phi$ , sí y solo si  $\langle \Psi | \Phi \rangle = 0$  [11], donde

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Phi(x, t) dx \quad (1.18)$$

es el producto escalar de las funciones de estado correspondientes en el espacio de coordenadas. Entonces  $\Psi$  y  $\Phi$  son distinguibles sí y solo si son ortogonales.

Consideremos el producto escalar de la función  $\Psi$  dada por (1.16) en diferentes tiempos ( $t$  y  $t'$ )

$$\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t') dx = \sum_{nm} c_n^* c_m e^{i(E_n t - E_m t')/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) dx. \quad (1.19)$$

Aplicando la propiedad (1.13) tenemos que

$$\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle = \sum_{nm} c_n^* c_m e^{i(E_n t - E_m t')/\hbar} \delta_{nm} = \sum_n |c_n|^2 e^{iE_n(t-t')/\hbar}. \quad (1.20)$$

La interpretación más general de  $\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle$ , es que representa la amplitud de probabilidad de que el sistema al tiempo  $t$  se encuentre en el mismo estado que al tiempo  $t'$ . Entonces,

$$|\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle|^2 = \sum_{nm} |c_n c_m|^2 e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} \quad (1.21)$$

es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el mismo estado a tiempos  $t$  y  $t'$  y puede interpretarse como un indicador de cuán diferentes son los estados, es decir, de qué tan distinguible es el estado  $|\Psi_t\rangle$  con respecto a  $|\Psi_{t'}\rangle$ . La ecuación (1.21) está acotada inferiormente por cero, (cuando esto ocurre, nos encontramos con estados perfectamente distinguibles) y superiormente por 1 (este resultado corresponde a estados indistinguibles, salvo por una fase global irrelevante físicamente) [12].

Si  $|\Psi_{t'}\rangle = |\Psi_0\rangle$ , obtenemos la probabilidad de transición entre el estado inicial  $\Psi_0$  y el estado  $\Psi_t$  también conocida como probabilidad de supervivencia

$$|A(t)|^2 = |\langle \Psi_t | \Psi_0 \rangle|^2 = \sum_{nm} |c_n c_m|^2 e^{i(E_n - E_m)t/\hbar}. \quad (1.22)$$

Al igual que (1.21), cuando  $|A(t)|^2$  toma el valor de 1 el sistema se encuentra en un estado indistinguible respecto al estado inicial (en un estado igual a  $|\Psi_0\rangle$  salvo por una fase arbitraria  $e^{i\alpha} |\Psi_0\rangle$ ). Por otro lado, entre más cercano sea el valor de  $|A(t)|^2$  a cero, el estado  $|\Psi_t\rangle$  es menos “parecido” al estado inicial, de modo que al llegar  $|A(t)|^2$  a cero el estado se vuelve completamente distinguible de aquel a  $t = 0$  [13].

### 1.3. Medida de distinguibilidad promedio

Como vimos en la sección anterior, la ecuación (1.21) es un indicador de qué tan distinguible es el sistema en el estado  $|\Psi_t\rangle$  respecto a  $|\Psi_{t'}\rangle$ . Modificamos la expresión como sigue:

$$1 - |\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle|^2, \quad (1.23)$$

cantidad que, a diferencia de (1.21), actúa como medida cuantitativa de distinguibilidad, tomando el valor uno cuando los estados son distinguibles y cero cuando son indistinguibles.

Promediando (1.23) en un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  obtenemos  $D(t_1, t_2)$ , una medida del grado de variedad o evolución promedio del sistema cuántico durante dicho intervalo de tiempo

$$D(t_1, t_2) = \frac{1}{T^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} (1 - |\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle|^2) dt dt' = 1 - \frac{1}{T^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} |\langle \Psi_t | \Psi_{t'} \rangle|^2 dt dt', \quad (1.24)$$

donde  $t$  y  $t' \in [t_1, t_2]$  y  $T = t_2 - t_1$ .

Esta última ecuación cuantifica la distinguibilidad del sistema dentro de un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ . Los valores altos de  $D(t_1, t_2)$ , cercanos a 1, indican que la evolución del sistema varía mucho en el intervalo temporal, de modo que es muy probable encontrar un estado que sea distinguible respecto a otro, mientras que valores bajos (cercanos a 0) reflejan poca variación del sistema en cualquier momento dentro del intervalo [5].

Para facilitar el estudio de  $D(t_1, t_2)$ , la evaluamos como función de  $T$  y tomamos a  $\Psi$  que evolucione de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, para ello sustituimos la ecuación (1.21) en (1.24) y tomamos  $t_1 = 0$  y  $t_2 = T$ :

$$D(T) = 1 - \frac{1}{T^2} \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \int_0^T \int_0^T e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} dt dt'. \quad (1.25)$$

Resolvamos primero cuidadosamente la integral,

$$\int_0^T e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} dt, \quad (1.26)$$

la cual tiene dos casos:

- **Caso I** Si  $E_n \neq E_m$

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} dt &= \frac{\hbar e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar}}{i(E_n - E_m)} \Big|_0^T \\ &= \frac{i\hbar}{E_n - E_m} \left( e^{-i(E_n - E_m)t'/\hbar} - e^{i(E_n - E_m)(T-t')/\hbar} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

- **Caso II** Si  $E_n = E_m$

$$\int_0^T e^{i0(t-t')} dt = \int_0^T dt = T. \quad (1.28)$$

Resolviendo (1.25) usando el resultado anterior tenemos entonces que

$$\begin{aligned} D(T) &= 1 - \frac{1}{T^2} \left( \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} |c_n c_m|^2 \int_0^T \int_0^T e^{i(E_n - E_m)(t-t')/\hbar} dt dt' + \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' \right) \\ &= 1 + \frac{\hbar^2}{T^2} \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} \frac{|c_n c_m|^2}{(E_n - E_m)^2} (e^{-i(E_n - E_m)T/\hbar} + e^{i(E_n - E_m)T/\hbar} - 2) - \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Como

$$\text{sinc}^2 x = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = -\frac{1}{4x^2} (e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) \quad (1.30)$$

si hacemos  $x = (E_n - E_m)T/2\hbar$  y definimos

$$\omega_{nm} = |E_n - E_m|/\hbar, \quad (1.31)$$

podemos reescribir (1.29) como

$$D(T) = 1 - \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} |c_n c_m|^2 \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2) - \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2. \quad (1.32)$$

Usando que  $\sum_{nm} |c_n c_m|^2 = 1$  y que si  $E_n = E_m$  entonces  $\omega_{nm} = 0$ , mientras que si  $E_n \neq E_m$  entonces  $\omega_{nm} \neq 0$ , llegamos a la siguiente expresión

$$D(T) = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 [1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2)]. \quad (1.33)$$

La ecuación anterior muestra que la evolución del sistema dentro del intervalo  $[0, T]$  exhibe altibajos determinados no solo por  $T$ , sino también por las frecuencias  $\omega_{nm}$ , es decir, por los estados accesibles que el sistema puede visitar durante su evolución [12].

Una propiedad importante de la función  $D(T)$  es que tiene un valor máximo  $D_L$ , al que además tiende cuando  $T \rightarrow \infty$

$$D_L = \lim_{T \rightarrow \infty} D(T) = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2. \quad (1.34)$$

La expresión anterior es una suma que recorre todo par de números  $n, m$  tales que  $\omega_{nm} \neq 0$ , es decir,  $E_n \neq E_m$ , además que da a  $D_L$  explícitamente en términos de los coeficientes de expansión  $c_n$  del estado inicial  $|\Psi_0\rangle$ , de tal forma que, para todos los valores de  $T$ , se tiene  $D(T) \leq D_L$ .

En ausencia de degeneración, podemos sumar todos los pares de índices  $nm$  que cumplan que  $n \neq m$ , por lo que permite reescribir a  $D_L$  como,

$$D_L = 2 \sum_{\substack{nm \\ n < m}} |c_n c_m|^2. \quad (1.35)$$

Si el número de términos en la suma (1.16) es finito, (1.35) es máximo para  $|c_n| = 1/\sqrt{N}$  para toda  $n$ , donde  $N$  es el número de términos en la suma (véase Apéndice A) y en este caso

$$D_L = 2 \frac{1}{N^2} \frac{N(N-1)}{2} = 1 - \frac{1}{N}. \quad (1.36)$$

Esto indica que el valor de  $D_L$  aumenta (tiende a 1) a medida que  $N$ , el número de términos de la función de onda (ecuación (1.16)) aumenta, por lo que entre más uniforme sea la distribución de energía (los estados tienden a estar igualmente pesados) más variada es la evolución [12].

Otra propiedad interesante que posee  $D(T)$  ocurre cuando  $D(T) = D_L$ , es decir, cuando la evolución promedio del sistema es máxima (en estos  $T$  diremos que el sistema presenta su máxima evolución promedio). Para obtener los  $T$  donde se alcanza la máxima evolución promedio igualamos (1.33) con (1.34)

$$\sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 [1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2)] = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2, \quad (1.37)$$

lo que implica

$$\sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2) = 0. \quad (1.38)$$

Como todos los términos de la suma son mayores o iguales a cero, (1.38) conlleva a que se debe cumplir que,

$$\text{sinc} \frac{\omega_{nm}T}{2} = 0, \quad \forall \omega_{nm} \neq 0. \quad (1.39)$$

Por lo tanto, la condición  $D(T) = D_L$  se cumple sí y solo si:

$$\omega_{nm}T = 2\pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.40)$$

para toda frecuencia  $\omega_{nm}$  en la expresión (1.33).

## 1.4. Medida de distinguibilidad promedio respecto al estado inicial

Al igual que como hicimos con la ecuación (1.21), construyamos ahora a partir de la ecuación (1.22) una medida que evalúe qué tan distinguible es el sistema al tiempo  $t$  respecto al sistema en su estado inicial.

$$1 - |\langle \Psi_t | \Psi_0 \rangle|^2. \quad (1.41)$$

Calculando el promedio temporal de esta cantidad en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  obtenemos un promedio de cuánto varían los estados que visita el sistema con respecto al estado inicial. A esta nueva medida la llamaremos  $\overline{S(T)}$ ,

$$\overline{S(T)} = \frac{1}{T} \int_0^T (1 - |\langle \Psi_t | \Psi_0 \rangle|^2) dt = 1 - \frac{1}{T} \int_0^T |\langle \Psi_t | \Psi_0 \rangle|^2 dt. \quad (1.42)$$

$\overline{S(T)}$  describe cómo evoluciona la distinguibilidad de los estados de un sistema dentro del intervalo del tiempo  $[0, T]$  respecto al estado inicial. Entre más cerca esté  $\overline{S(T)}$  de cero menos distinguible es el estado del sistema (en promedio a ese  $T$ ), respecto al estado inicial.

Si  $\Psi$  evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, entonces podemos reescribir a  $\overline{S(T)}$ , sustituyendo la expresión (1.22) en la ecuación (1.42)

$$\overline{S(T)} = 1 - \frac{1}{T} \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \int_0^T e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} dt. \quad (1.43)$$

Utilizando el resultado (1.26) (y haciendo  $t' = 0$ ) tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{S(T)} &= 1 - \frac{1}{T} \left( i\hbar \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} \frac{|c_n c_m|^2}{E_n - E_m} (1 - e^{i(E_n - E_m)T/\hbar}) + \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2 T \right) \\ &= 1 - \frac{i\hbar}{T} \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} \frac{|c_n c_m|^2}{E_n - E_m} e^{-i(E_n - E_m)T/2\hbar} 2i \sin \left( \frac{(E_n - E_m)T}{2\hbar} \right) - \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2 \\ &= 1 - \frac{\hbar}{T} \sum_{\substack{nm \\ E_n \neq E_m}} \frac{|c_n c_m|^2}{E_n - E_m} \sin [(E_n - E_m)T/\hbar] - \sum_{\substack{nm \\ E_n = E_m}} |c_n c_m|^2, \end{aligned} \quad (1.44)$$

entonces, usando (1.31) llegamos a

$$\overline{S(T)} = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 [1 - \text{sinc}(\omega_{nm}T)]. \quad (1.45)$$

Al igual que  $D(T)$ , la evolución de  $\overline{S}$ , depende no solo de  $T$ , sino también de las frecuencias  $\omega_{nm}$ .

Evaluando el límite cuando  $T \rightarrow \infty$  de la ecuación (1.45),

$$\bar{S}_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{S(T)} = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2, \quad (1.46)$$

y como en ausencia de degeneración  $\omega_{nm} \neq 0$  es análogo a decir que  $n \neq m$ , en ese caso (no degenerado) reescribimos la ecuación anterior como

$$\bar{S}_L = 2 \sum_{\substack{nm \\ n < m}} |c_n c_m|^2. \quad (1.47)$$

Comparando la ecuación (1.35) con la (1.47) notamos que  $D_L = \bar{S}_L$ , es decir que el límite de  $D(T)$  y  $\overline{S(T)}$  cuando  $T \rightarrow \infty$  es el mismo; sin embargo, para  $D(T)$  este límite actúa como una cota superior (es decir que para  $\forall T D(T) \leq D_L$ ), mientras que en  $\overline{S(T)}$  opera como un valor al que la función converge, pero puede existir un  $T$  para el cual  $\overline{S(T)}$  puede ser mayor que  $S_L$ .

Como ya se mencionó, (1.47) no acota a  $\overline{S(T)}$  como el caso de  $D_L$  con  $D(T)$ , sin embargo, tal como se hizo en la sección anterior, determinemos los valores de  $T$  para los cuales  $\overline{S(T)} = \bar{S}_L$ , para ello igualamos (1.45) con (1.46),

$$\sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 [1 - \text{sinc}(\omega_{nm} T)] = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 \quad (1.48)$$

es decir, para toda  $T$  que cumpla con

$$\sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 \text{sinc}(\omega_{nm} T) = 0. \quad (1.49)$$

A diferencia de la ecuación (1.38), la ecuación (1.49) no implica que cada sumando es cero, por lo que resolver esta ecuación es una tarea más complicada en la que son necesarios métodos especiales, además de que resolverla no es el propósito fundamental de este trabajo.

## 1.5. Comportamiento de $D$ y $\bar{S}$ a tiempos cortos

Para estudiar el comportamiento a tiempos cortos de  $D(T)$  (ecuación (1.33)) y  $\overline{S(T)}$  (ecuación (1.45)), partimos de la definición de la serie de Taylor:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (1.50)$$

donde  $f(x)$  es una función infinitamente diferenciable y  $a$  es el punto alrededor del que se desee obtener el valor aproximado de la función.

Usamos la fórmula (1.50) para obtener la expansión de  $D(T)$  alrededor de cero, obteniendo a segundo orden en  $T$

$$D(T) \approx \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 \frac{\omega_{nm}^2 T^2}{12}. \quad (1.51)$$

Análogamente para  $\overline{S(T)}$

$$\overline{S(T)} \approx \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 \frac{\omega_{nm}^2 T^2}{6}. \quad (1.52)$$

De (1.51) y (1.52) vemos que, a orden más bajo en  $T$ ,

$$D(T) = \frac{1}{2} \overline{S(T)}, \quad (1.53)$$

y, por lo tanto,  $\overline{S}$  crece inicialmente (a tiempos cortos) más rápido que  $D$ .

# Capítulo 2

## Análisis de las medidas de distinguibilidad para diversos sistemas cuánticos

En este capítulo se analiza la dinámica de las cantidades  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\overline{S}$  para diversos sistemas cuánticos unidimensionales, que incluyen: un sistema de dos niveles bajo un hamiltoniano arbitrario, un oscilador armónico, una partícula confinada en un pozo infinito, y un sistema de dos qubits no interactuantes.

### 2.1. Sistema de un qubit

Un bit cuántico o qubit es un sistema cuántico de dos niveles y es el análogo cuántico de un bit clásico. Un bit tiene dos estados, siendo estos 0 y 1, y solo puede estar en uno de estos estados y solo en esos. Por otro lado, el qubit puede encontrarse en un número infinito de estados los cuales pueden ser representados en la esfera unitaria (los puntos en la esfera equivalen a estados cuánticos) [14].

Matemáticamente, el estado más general del qubit se representa por una combinación lineal de los estados (comúnmente escritos en notación de Dirac)  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$

$$|\Psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (2.1)$$

donde  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ ,  $|0\rangle$  el vector en  $\mathbb{C}^2$  que tiene coordenadas  $(1, 0)$  y  $|1\rangle$  el vector en  $\mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(0, 1)$  [15].

Tomado a  $|\Psi\rangle$  que evolucione según la ecuación de Schrödinger, donde el hamiltoniano es una matriz de  $2 \times 2$  diagonal en la base  $|0\rangle, |1\rangle$  y con eigenvalores correspondientes  $E_0$  y  $E_1$ , y pasando a la representación de la función de onda, escribimos el estado general de un qubit como

$$\Psi(x, t) = c_0 \varphi_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar} + c_1 \varphi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar}. \quad (2.2)$$



Para determinar qué tan indistinguible es el estado al tiempo  $t$  con respecto al estado inicial se usa la ecuación (1.22),

$$\begin{aligned} |A(t)|^2 &= |c_0c_0|^2 + |c_0c_1|^2 e^{i(E_0-E_1)t/\hbar} + |c_0c_1|^2 e^{-i(E_0-E_1)t/\hbar} + |c_1c_1|^2 \\ &= |c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0c_1|^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde se definió  $\omega_{01} = \omega$ .

Para obtener la expresión de  $D(T)$  recurrimos a la ecuación (1.33)

$$D(T) = \sum_{nm, \omega_{nm} \neq 0} |c_n c_m|^2 [1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2)], \quad (2.4)$$

y recordando que  $\omega_{nm} = |E_n - E_m|/\hbar$  obtenemos:

$$D(T) = 2|c_0c_1|^2 \left( 1 - \text{sinc}^2 \frac{\omega T}{2} \right). \quad (2.5)$$

Tomamos el límite de  $D(T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$  como en la ecuación (1.35) para obtener  $D_L$

$$D_L = 2|c_0c_1|^2. \quad (2.6)$$

Análogamente obtenemos las expresiones de  $\overline{S(T)}$  y  $\overline{S_L}$  utilizando las ecuaciones (1.45) y (1.47):

$$\overline{S(T)} = 2|c_0c_1|^2 (1 - \text{sinc} \omega T), \quad (2.7)$$

$$\overline{S_L} = 2|c_0c_1|^2. \quad (2.8)$$

Para facilitar el estudio de  $|A(T)|^2$ ,  $D(T)$ , reescribamos sus ecuaciones en términos del tiempo adimensional  $\tau = t/T^c$ , donde  $T^c$  es el tiempo característico del sistema, y debido a que este tiene asociada una única frecuencia  $\omega$  entonces  $T^c = \frac{2\pi}{\omega}$ . Por lo tanto,

$$|A(\tau)|^2 = |c_0|^4 + |c_1|^4 + 2|c_0c_1|^2 \cos 2\pi\tau, \quad (2.9)$$

$$D(\tau) = 2|c_0c_1|^2 (1 - \text{sinc}^2 \pi\tau), \quad (2.10)$$

$$\overline{S(\tau)} = 2|c_0c_1|^2 (1 - \text{sinc} 2\pi\tau). \quad (2.11)$$

La Figura 2.1 exhibe el comportamiento de las ecuaciones (2.9)-(2.11) para diferentes valores de  $|c_0|$  (el valor de  $|c_1|$  queda fijado por la relación  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ ). A continuación se hace un análisis de estas ecuaciones y de sus correspondientes gráficas.

La dinámica de  $|A(\tau)|^2$  se presenta en la Figura 2.1a, como se observa  $|A(\tau)|^2$  tiene un comportamiento periódico, con periodo 1, por lo cual al transcurrir un intervalo de tiempo  $\tau = 1$  el sistema regresa al mismo estado salvo por una fase arbitraria. Además, notamos cambios en la amplitud al variar  $|c_0|$ ; para encontrar la relación entre amplitud y  $|c_0|$  hacemos uso la ecuación (2.9), a partir de esta obtenemos que la

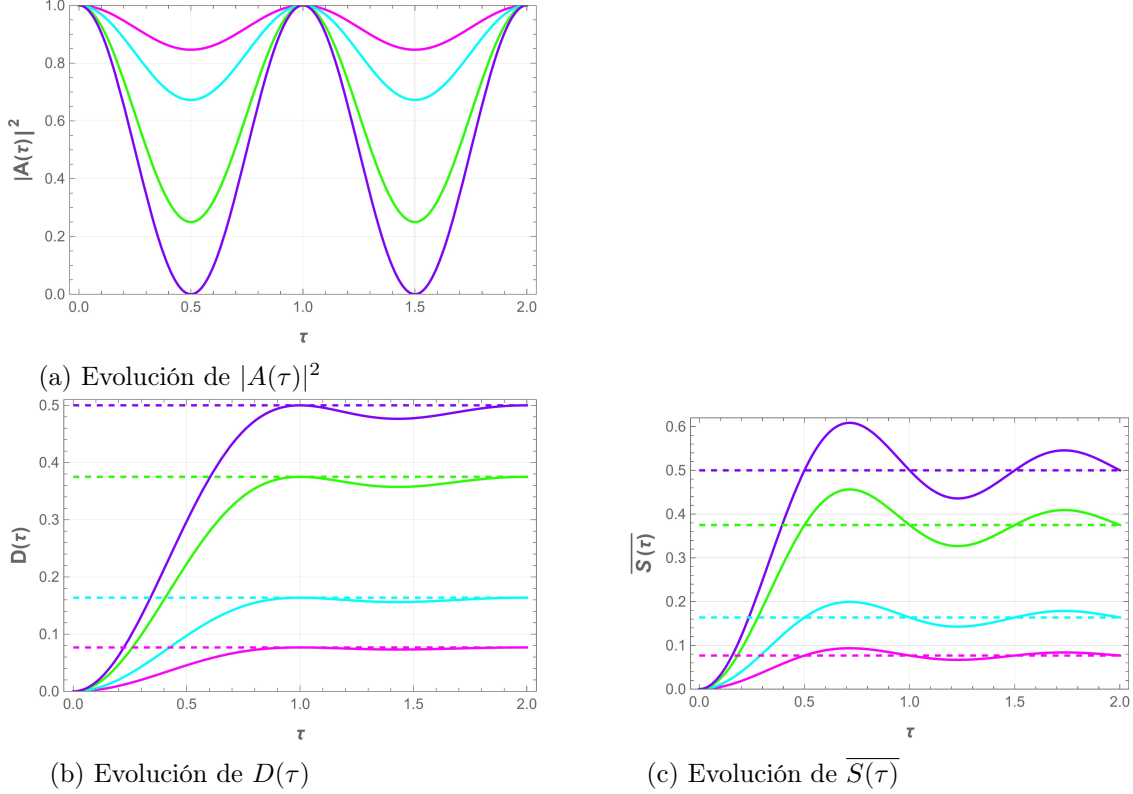


Figura 2.1: Evolución de  $|A(\tau)|^2$  (Figura 2.1a),  $D(\tau)$  (Figura 2.1b) y  $\overline{S}(\tau)$  (Figura 2.1c) para un qubit con  $|c_0|^2 = 0.04$  y  $|c_1|^2 = 0.96$  curva magenta,  $|c_0|^2 = 0.09$  y  $|c_1|^2 = 0.91$  curva cian,  $|c_0|^2 = 0.25$  y  $|c_1|^2 = 0.75$  curva verde,  $|c_0|^2 = 1/2$  y  $|c_1|^2 = 1/2$  curva morada. Los valores  $D_L$  y  $\overline{S}_L$  están representados por las líneas punteadas.

amplitud de  $|A(\tau)|^2$  está dada por  $2|c_0c_1|^2 = 2|c_0|^2(1-|c_0|^2)$ . Graficando esta expresión obtenemos la Figura 2.2, de donde se deduce que la amplitud crece a medida que  $|c_0|$  aumenta para  $|c_0| \in [0, 1/\sqrt{2}]$  y decrece para  $|c_0| \in [1/\sqrt{2}, 1]$ , lo que se traduce a que entre mayor sea el valor de  $|c_0|^2$  los estados se alejan más del estado inicial para  $|c_0| \in [0, 1/\sqrt{2}]$ ; esto es análogo a decir que si  $|c_0|$  aumenta, el estado se vuelve cada vez más distinguible con respecto al inicial, en comparación con uno con  $|c_0|$  menor, y en términos de probabilidades es análogo a decir que la probabilidad de encontrar un estado semejante al inicial decrece conforme nos acercamos a  $|c_0| = 1/\sqrt{2}$ . Por otro lado, para  $|c_0| \in [0, 1/\sqrt{2}]$ , ocurre lo contrario, es decir, a medida de  $|c_0|$  aumenta el estado tiende a ser más indistinguible (es más probable encontrar un estado similar al inicial conforme nos acercamos a  $|c_0| = 1$ ) de modo que para  $|c_0| = 1$  el estado es completamente indistinguible en todo  $\tau$ , es decir,  $|A(\tau)|^2$  no evoluciona. Esto se puede comprobar fácilmente con la ecuación (2.9), ya que si  $|c_0| = 1$  entonces  $|c_1| = 0$  y, por lo tanto,  $|A(\tau)|^2 = 0$  para todo  $\tau$ .

De acuerdo con la Figura 2.2, se observa que el valor máximo de la amplitud ocurre en  $|c_0|^2 = 1/2$ , que corresponde a la gráfica morada de la Figura 2.1a, para este valor de  $|c_0|$  el sistema llega a evolucionar hasta un estado que es completamente

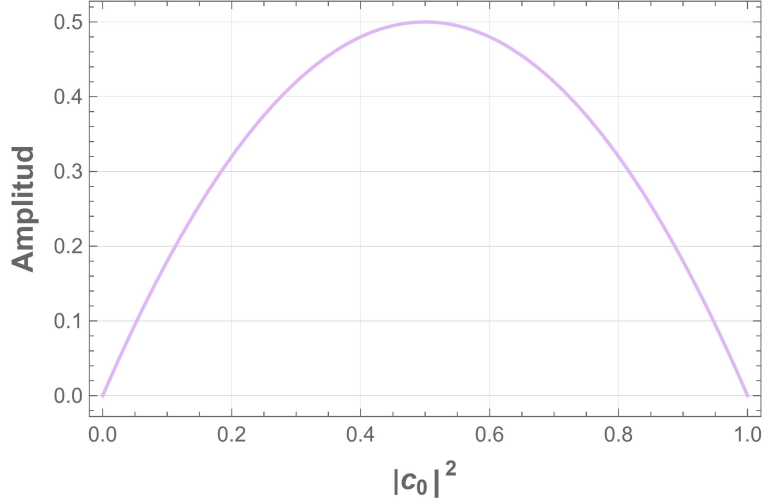


Figura 2.2: Amplitud de las oscilaciones de  $|A|^2$ .

distinguible al estado inicial, es decir, a un estado ortogonal a  $|\Psi_0\rangle$ . Para verificar analíticamente lo anterior, es decir que en  $|c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  se alcanza un estado ortogonal al estado inicial, demostremos que si  $|c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  entonces  $|\langle\Psi_\tau|\Psi_0\rangle|^2 = 0$  para algún  $\tau$ . Iniciaremos suponiendo que  $|c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y como  $\sum_n |c_n|^2 = 1$  entonces  $|c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sustituyendo ambos valores en la ecuación (2.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} |A(\tau)|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^4 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^4 + 2\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \cos 2\pi\tau \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\tau) \\ &= \cos^2 \pi\tau, \end{aligned} \tag{2.12}$$

de modo que la ortogonalidad se alcanza para  $\tau$  tales que

$$\tau = n - \frac{1}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.13}$$

por lo tanto se verifica que cuando la amplitud es máxima ( $|c_0|^2 = \frac{1}{2}$ ), el sistema llega a un estado ortogonal al estado inicial en los  $\tau$  dados por la ecuación (2.13) ( $\tau = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ), este resultado es consistente con lo demostrado en el apéndice A. Dado que la amplitud es máxima solo para  $|c_0|^2 = 1/2$  (con los resultados anteriores se puede asegurar unicidad), entonces solo para superposiciones (2.2) igualmente pesadas ( $|c_0|^2 = |c_1|^2 = 1/2$ ) es posible que el qubit llegue a un estado ortogonal.

La Figura 2.1b muestra la dinámica de  $D(\tau)$  la cual es creciente hasta  $\tau = 1$  cuando el sistema regresa a su estado inicial y alcanza el máximo de la evolución promedio. Para  $\tau > 1$  el comportamiento de  $D(\tau)$  es oscilante, y a pesar de que  $D(\tau)$  decrece, nunca se aleja demasiado de  $D_L$  debido a que es un promedio acumulado.

Para ver cuando  $D(\tau) = D_L$ , usamos la ecuación (1.40) tomando  $\omega_{nm} = \omega$ ,

$$T = \frac{2k\pi}{\omega} = T^c k, \quad (2.14)$$

de modo que para  $\tau = T/T^c$  igual a

$$\tau = k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

entonces la evolución promedio del sistema es máxima en  $\tau$ 's enteras, lo que es consistente con la Figura 2.1b.

Comparando las Figuras 2.1a y 2.1b y las ecuaciones (2.9) y (2.10) nos damos cuenta de que entre menor sea la amplitud de  $|A(\tau)|^2$ , más bajo es el valor de  $D_L$ , pues de acuerdo con las ecuaciones mencionadas la amplitud de  $|A(\tau)|^2$  es igual a  $D_L$ . En particular, para  $|c_0| = 1/\sqrt{2}$ ,  $D_L$  alcanza el valor máximo posible, lo cual se ajusta con lo visto en la sección 2.3 donde se demuestra que  $D_L$  es máximo para  $|c_n| = 1/\sqrt{N}$  con  $N$  el número de términos de la ecuación (2.2) (en este caso  $N = 2$ ). Mientras que para  $|c_0| = 0$  o para  $|c_0| = 1$   $D(\tau)$  no evoluciona y, por lo tanto,  $D_L = 0$  y como ya se mencionó para cualquiera de estos dos valores  $|A(\tau)|^2 = 1$ , es decir,  $|A|^2$  es independiente del tiempo, por lo que el sistema se encuentra en un estado estacionario.

La Figura 2.1c muestra la dinámica de  $\overline{S(\tau)}$ . En esta figura notamos que  $\overline{S(\tau)}$  tiene un comportamiento semejante al de  $D(\tau)$  ya que ambas crecen hasta alcanzar su máximo y posteriormente tienen un comportamiento oscilatorio (creciendo y decreciendo, pero sin alejarse de su valor asintótico) que se va atenuando a medida que transcurre  $\tau$ . Sin embargo, se distingue que  $\overline{S}$  adquiere primero que  $D$  su valor asintótico, y como dicho valor es el mismo para ambas cantidades,  $D_L = \overline{S_L}$ , entonces se deduce que  $\overline{S(\tau)}$  crece más rápido que  $D(\tau)$ , y por lo tanto alcanza antes su valor máximo (esto es consistente con lo mencionado en la sección 1.5). Vemos también que  $\overline{S(\tau)}$  muestra mayor variación a tiempos relativamente cortos, pero a tiempos largos  $\overline{S(\tau)}$  y  $D(\tau)$  convergen al mismo valor límite  $D_L = \overline{S_L}$ .

Por otro lado, comparando  $\overline{S(\tau)}$  con  $|A(\tau)|^2$  notamos que  $\overline{S(\tau)} = \overline{S_L}$  cada vez que  $|A(\tau)|^2$  alcanza un máximo o un mínimo, esto se puede probar partiendo de la ecuación (1.49)

$$2|c_0 c_1|^2 \text{sinc } \omega T = 0, \quad (2.16)$$

donde  $\omega_{nm} = \omega$ . Posteriormente, reescribimos la expresión en términos de  $\tau$ ,

$$\text{sinc } 2\pi\tau = 0, \quad (2.17)$$

la cual se cumple sí y solo si,

$$\tau = \frac{k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.18)$$

es decir, para  $\tau = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Por otra parte, calculamos los máximos y mínimos de  $|A(\tau)|^2$

$$\frac{d|A(\tau)|^2}{d\tau^2} = -4\pi|c_0c_1|^2 \sin 2\pi\tau = 0 \quad (2.19)$$

si y solo si

$$\tau = \frac{k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.20)$$

tal como en (2.18), con esto se concluye que  $\overline{S(\tau)} = \overline{S_L}$  cada vez que  $|A(\tau)|^2$  alcanza un máximo o mínimo, tal como se esperaba.

## 2.2. Oscilador armónico

Un oscilador armónico es un objeto que está sujeto a una energía potencial cuadrática,

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2, \quad (2.21)$$

que produce una fuerza restauradora contra cualquier desplazamiento del equilibrio que es proporcional al desplazamiento. La ecuación de Schrödinger para tal objeto cuyo movimiento está confinado en una dimensión es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right)\Psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (2.22)$$

donde  $\mu$  es la masa y  $\omega$  es la frecuencia de oscilación. La expresión anterior tiene la misma forma que la ecuación (1.1), entonces proponemos estados estacionarios  $\Psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(x)$  como solución particular y obtenemos la ecuación de valores propios para el hamiltoniano

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (2.23)$$

Para resolver esta ecuación de manera más sencilla, reescribimos el hamiltoniano en la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}[\hat{p}^2 + (\mu\omega\hat{x})^2]. \quad (2.24)$$

donde  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$ , son los operadores de momento y posición respectivamente.

Si  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$  fuesen números, podríamos factorizar  $\hat{H}$  de la siguiente manera

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v). \quad (2.25)$$

Sin embargo, debido a que  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$  son operadores que no conmutan entre sí, conviene definir los operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}}(i\hat{p} + \mu\omega\hat{x}), \quad (2.26)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}}(-i\hat{p} + \mu\omega\hat{x}), \quad (2.27)$$

conocidos como operadores escalera u operadores de bajada o aniquilación ( $\hat{a}$ ) y subida o creación ( $\hat{a}^\dagger$ ). Utilizamos estos operadores para reescribir (2.23)

$$\hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \varphi(x) = E\varphi(x). \quad (2.28)$$

Si  $\varphi(x)$  satisface la ecuación de Schrödinger con energía  $E$  ( $\hat{H}\varphi = E\varphi$ ) entonces  $\hat{a}^\dagger\varphi$  y  $\hat{a}\varphi$  satisfacen también la ecuación de Schrödinger con energía ( $E \pm \hbar\omega$ ), de la siguiente forma:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger\varphi) = (E + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger\varphi), \quad (2.29)$$

$$\hat{H}(\hat{a}\varphi) = (E - \hbar\omega)(\hat{a}\varphi). \quad (2.30)$$

El operador de ascenso  $\hat{a}^\dagger$  se puede aplicar indefinidamente (pues este suministra cuantos de energía al sistema de magnitud  $\hbar\omega$ ); por otro lado, el operador de descenso no se puede aplicar indefinidamente debido a que no se le puede sacar energía infinita al sistema, por lo tanto debe existir un estado  $\varphi_0$ , al cual al aplicarle el operador  $\hat{a}$  nos da cero [9] [7], es decir, un estado al que no le podemos extraer más energía

$$\hat{a}\varphi_0 = 0, \quad (2.31)$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}} \left( \hbar \frac{d}{dx} + \mu\omega x \right) \varphi_0 = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{\mu\omega}{\hbar} x \varphi_0. \quad (2.33)$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$\varphi_0(x) = A e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}}, \quad (2.34)$$

y normalizando para obtener  $A$  encontramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega x^2/\hbar} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{\mu\omega}} = 1. \quad (2.35)$$

Entonces  $A^2 = \sqrt{\mu\omega/\pi\hbar}$ , y por lo tanto

$$\varphi_0(x) = \left( \frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (2.36)$$

Para determinar la energía sustituimos  $\varphi_0$  en la ecuación (2.28) y usamos que  $\hat{a}\varphi_0 = 0$ , entonces:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega. \quad (2.37)$$

Aplicamos el operador  $\hat{a}^\dagger$  sucesivamente sobre  $\varphi_0$  para construir todos los estados estacionarios del oscilador armónico cuántico, obteniendo

$$\varphi_n(x) = A_n (a^\dagger)^n \varphi_0, \quad \text{con } E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad \text{y } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

donde  $A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ .

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.22) es

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \quad (2.39)$$

con  $\varphi_n(x)$  y  $E_n$  dadas por (2.38).

### 2.2.1. Dinámica de la distinguibilidad

Consideremos un oscilador armónico en un estado que es una superposición de los primeros  $d$  niveles, cada uno de los cuales tiene la misma probabilidad de ocurrir de modo que

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{d}}, \quad \text{para } n = 0, \dots, d-1$$

y

$$c_n = 0, \quad \text{para } n \geq d. \quad (2.40)$$

La función de onda correspondiente es:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{d-1} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \quad (2.41)$$

con  $E_n$  dado por la ecuación (2.38).

Utilizando la definición de la ecuación (1.22) tenemos que:

$$|A(t)|^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{n,m=0}^{d-1} e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} = \frac{1}{d^2} \sum_{n,m=0}^{d-1} e^{i\omega(n-m)t}. \quad (2.42)$$

Por otro lado, usando la ecuación (1.33) obtenemos

$$D(T) = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} [1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2)]. \quad (2.43)$$

Sustituimos los valores de  $E_n$  y  $E_m$  en la ecuación (1.31) para obtener

$$\omega_{nm} = \frac{|E_n - E_m|}{\hbar} = \frac{|\hbar\omega(n + 1/2) - \hbar\omega(m + 1/2)|}{\hbar} = \omega|n - m|, \quad (2.44)$$

entonces  $D(T)$  se reescribe como

$$D(T) = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}} \left[ 1 - \text{sinc}^2 \left( \frac{\omega |n - m| T}{2} \right) \right]. \quad (2.45)$$

Usando la ecuación (1.35) obtenemos que la expresión  $D_L$  para el oscilador armónico es:

$$D_L = \sum_{\substack{nm \\ \omega_{nm} \neq 0}} |c_n c_m|^2 = 2 \sum_{\substack{nm \\ n < m}} |c_n c_m|^2 = 2 \frac{1}{d^2} \frac{d(d-1)}{2} = 1 - \frac{1}{d}. \quad (2.46)$$

Finalmente usando las ecuaciones (1.45) y (1.47) obtenemos que

$$\overline{S(T)} = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}} 1 - \text{sinc}(\omega |n - m| T) \quad (2.47)$$

y

$$\overline{S_L} = 1 - \frac{1}{d}. \quad (2.48)$$

Para este ejemplo, al igual que como se hizo con en el qubit, se elige al tiempo característico como  $T^c = 2\pi\omega^{-1}$  ya que este sistema también tiene asociada una sola frecuencia  $\omega$ . Reescribiendo las ecuaciones de  $|A(t)|^2$ ,  $D(T)$  y  $\overline{S(T)}$  en términos de  $\tau = t/T^c$  obtenemos

$$|A(\tau)|^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{n,m=0}^{d-1} e^{i2\pi(n-m)\tau}, \quad (2.49)$$

$$D(\tau) = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}}^{d-1} [1 - \text{sinc}^2(\pi |n - m| \tau)], \quad (2.50)$$

$$\overline{S(\tau)} = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}}^{d-1} [1 - \text{sinc}(2\pi |n - m| \tau)]. \quad (2.51)$$

La Figura 2.3 muestra la evolución de las cantidades (2.49)-(2.51) para algunos valores  $d$ . A continuación se realiza un análisis de estas ecuaciones y de sus gráficos correspondientes.

La Figura 2.3a presenta el comportamiento de  $|A(\tau)|^2$ , el cual es oscilatorio y con periodo 1, por lo que al transcurrir un periodo de tiempo adimensional igual a 1 el sistema regresa al mismo estado salvo por una fase arbitraria. Además,  $|A(\tau)|^2$  llega varias veces al valor cero; en otras palabras el sistema visita varios estados ortogonales a  $|\Psi_0\rangle$ . Dentro del intervalo  $\tau \in [0, 1]$  el estado visita  $d - 1$  estados ortogonales antes de retomar su estado inicial [3]. También se observa que a medida que  $d$  aumenta, la amplitud de  $|A(\tau)|^2$  (para  $\tau$ 's no enteras) se va atenuando, por lo que va creciendo la probabilidad de encontrar un estado ortogonal, es decir, los estados se vuelven más



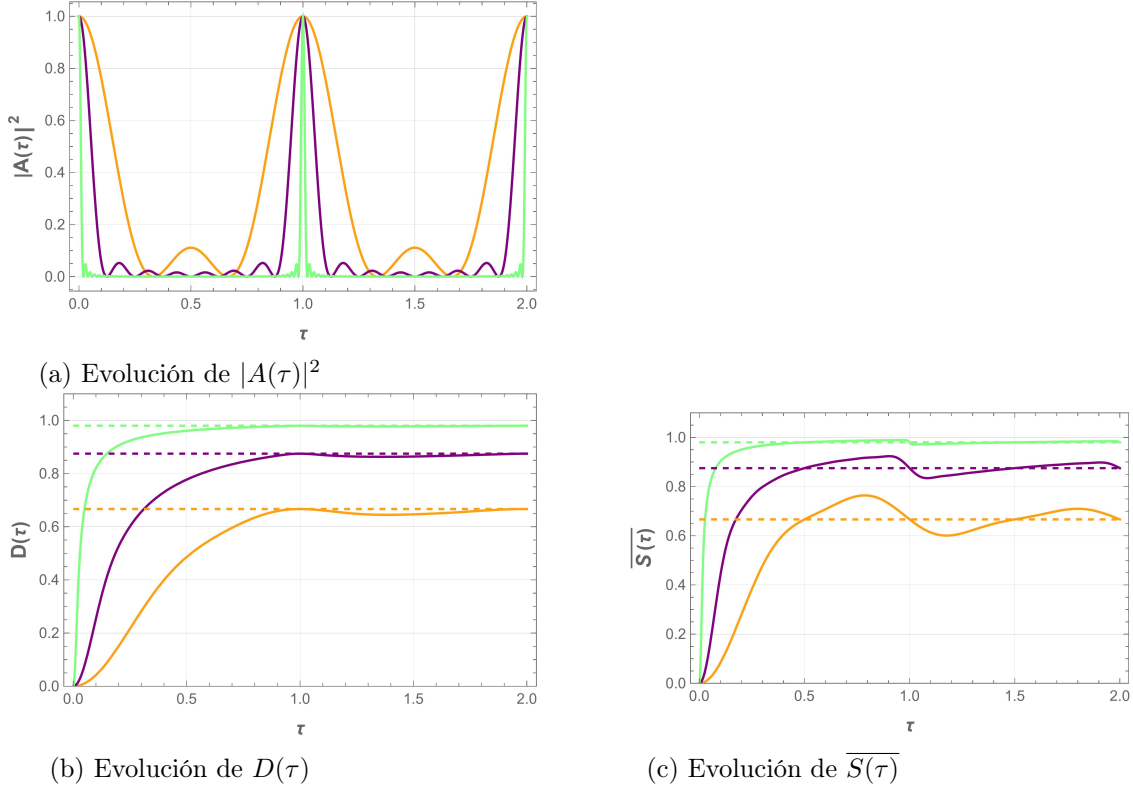


Figura 2.3: Análisis de la evolución de  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  para el estado (2.41) de un oscilador armónico con  $d=3$ (Naranja), 8(morado), 50(verde). Los valores  $D_L$  y  $\overline{S}_L$  están representados por la correspondiente línea punteada.

distinguibles respecto al estado inicial, de modo que para  $d \rightarrow \infty$  el sistema se encuentra en un estado prácticamente ortogonal al estado inicial en todo  $\tau$  no entero.

La Figura 2.3b muestra la dinámica de  $D(\tau)$ . En esta figura se aprecia nuevamente que  $D(\tau)$  tiende a  $D_L$  a medida que aumenta  $\tau$  (comportamiento asintótico). Además, se observa que el valor de  $D_L$  crece al incrementar  $d$ , por lo que, entre menor sea  $d$ , menor será la variación promedio del sistema. Esto coincide con la ecuación (2.46), en la cual vemos que el máximo valor que puede alcanzar  $D_L$  es 1, lo que ocurre para  $d \rightarrow \infty$  y el mínimo es 0, cuando  $d = 1$ . Al comparar las figuras 2.3a y 2.3b nos percatamos que entre menor sea  $d$  (o menos estados ortogonales a  $|\Psi_0\rangle$  visite el sistema) menos es la evolución de  $D(\tau)$ . Para ver cuando la evolución promedio del sistema es máxima, utilizamos (1.40)

$$\omega|n - m|T = 2k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, y \quad n \neq m. \quad (2.52)$$

Si  $l = |n - m| = 1, 2, 3, \dots$  se tiene que:

$$\frac{\omega l}{2\pi}T = l \frac{T}{T^c} = k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.53)$$

Lo anterior se cumple para toda  $l$  siempre que  $T/T^c$  sea un entero, por lo tanto,

$D(\tau) = D_L$  para

$$\tau = \frac{T}{T_c} = p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.54)$$

tal como se observa en la gráfica 2.3b, en  $\tau$  enteras. Queda por destacar que este ejemplo es el caso particular en el que los coeficientes  $|c_n|$  son igualmente pesados, por lo que siempre se alcanza el valor máximo de  $D_L$ , del que se habla en el Apéndice A.

La Figura 2.3c muestra el comportamiento de  $\overline{S(\tau)}$ . Notamos que al igual que  $D(\tau)$ ,  $\overline{S(\tau)}$  se acerca a 1 a medida que aumenta  $d$ , esto es consistente con lo mencionado en el análisis de  $D(\tau)$ , entre mayor sea el valor de  $d$ , más estados ortogonales a  $|\Psi_0\rangle$  visita el sistema y, por lo tanto, aumenta la distinguibilidad promedio. Por otro lado, para obtener para qué  $\tau$ 's  $\overline{S} = \overline{S}_L$  partimos de la ecuación (1.49), que aplicada a este ejemplo es

$$\frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}} \text{sinc}(\omega|n - m|T) = 0. \quad (2.55)$$

Reescribiendo la ecuación anterior en términos de  $\tau$  obtenemos

$$\frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ n \neq m}}^{d-1} \text{sinc}(2\pi|n - m|\tau) = 0. \quad (2.56)$$

Una forma de que la igualdad anterior se cumpla es que el argumento de sinc sea múltiplo entero de  $\pi$ . Sabemos que  $l = |n - m|$  es entero y que la multiplicación de dos o más enteros da como resultado otro entero, por lo tanto (2.56) se satisface para

$$\tau = \frac{1}{2}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.57)$$

como se aprecia en la gráfica de la evolución de  $\overline{S(\tau)}$ , Fig. (2.3c) contiene todos los puntos donde  $\overline{S(\tau)} = \overline{S}_L$ .

## 2.3. Partícula en un pozo

Consideremos una partícula de masa  $\mu$  confinada en un pozo de potencial infinito unidimensional de ancho  $a$ . La partícula dentro del pozo es completamente libre de moverse, excepto en los bordes, donde una fuerza infinita previene que la partícula escape. Suponiendo que este pozo está situado en el intervalo  $0 \leq x \leq a$  entonces el potencial  $V(x)$  está dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a. \\ \infty & \text{otro lado.} \end{cases} \quad (2.58)$$

Fuera del pozo,  $\Psi(x) = 0$  (la probabilidad de encontrar la partícula fuera es cero). Dentro del pozo, donde  $V(x) = 0$ , la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t), \quad (2.59)$$

y sus soluciones estacionarias son de la forma  $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ , de manera que (2.59) se reduce a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x), \quad x \in [0, a]. \quad (2.60)$$

La solución general de la ecuación anterior es:

$$\varphi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.61)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias y

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar}}. \quad (2.62)$$

Como  $\varphi$  debe ser continua entonces, usando las condiciones de frontera, llegamos a

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0, \quad (2.63)$$

lo que implica que  $B = 0$  pues  $\varphi(0) = B$ , por lo que (2.61) queda como:

$$\varphi(x) = A \sin kx, \quad x \in [0, a]. \quad (2.64)$$

Por otro lado,

$$\varphi(a) = A \sin ka = 0, \quad (2.65)$$

lo cual se cumple si y solo si  $k = \frac{n\pi}{a}$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De esta condición y de (2.62), obtenemos el espectro de energía para la partícula en el pozo

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2\mu a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.66)$$

Para encontrar  $A$ , utilizamos el hecho de que  $\varphi$  está normalizada y que fuera del pozo la función se anula; lo que conduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx = \int_0^a |A|^2 \sin^2 kx dx = |A|^2 \frac{a}{2} = 1, \quad (2.67)$$

entonces

$$|A|^2 = \frac{2}{a}. \quad (2.68)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.64) tenemos:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (2.69)$$

De esta manera, la solución general de la ecuación (2.59) es:

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x), \quad (2.70)$$

con  $\varphi_n(x)$  dada por la ecuación (2.69) y  $E_n$  por (2.66) [8] [16].

### 2.3.1. Dinámica de la distinguibilidad

Para analizar la dinámica del sistema consideremos el estado (2.70) con  $c_n = 0$  para  $n > 3$ , de modo que la función de onda es

$$\Psi(x, t) = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \varphi_1(x) + c_2 e^{-E_2 t/\hbar} \varphi_2(x) + c_3 e^{-iE_3 t/\hbar} \varphi_3(x). \quad (2.71)$$

Calculando la expresión de  $|A(t)|^2$  a partir de (1.21) obtenemos

$$|A(t)|^2 = |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + 2|c_1 c_2|^2 \cos(\omega_{12} t) + 2|c_2 c_3|^2 \cos(\omega_{23} t) + 2|c_1 c_3|^2 \cos(\omega_{13} t). \quad (2.72)$$

Y de la ecuación (1.33) obtenemos  $D(T)$  para este ejemplo

$$D(T) = 2|c_1 c_2|^2 [1 - \text{sinc}^2(\frac{\omega_{12} T}{2})] + 2|c_1 c_3|^2 [1 - \text{sinc}^2(\frac{\omega_{13} T}{2})] + 2|c_2 c_3|^2 [1 - \text{sinc}^2(\frac{\omega_{23} T}{2})]. \quad (2.73)$$

Finalmente, con las ecuaciones (1.45) y (1.47) obtenemos que

$$\overline{S(T)} = 2|c_1 c_2|^2 [1 - \text{sinc}(\omega_{12} T)] + 2|c_1 c_3|^2 [1 - \text{sinc}(\omega_{13} T)] + 2|c_2 c_3|^2 [1 - \text{sinc}(\omega_{23} T)] \quad (2.74)$$

y

$$D_L = \overline{S_L} = 2|c_1 c_2|^2 + 2|c_1 c_3|^2 + 2|c_2 c_3|^2. \quad (2.75)$$

Para este problema es necesario un análisis más elaborado que en los ejemplos anteriores para determinar el tiempo característico del sistema,  $T^c$ , debido a que tiene asociadas varias frecuencias. Partiremos de la definición clásica de la energía total  $E$  de la partícula:

$$E = K + V, \quad (2.76)$$

donde  $K$  es la energía cinética y  $V$  la energía potencial. Como dentro del pozo  $V = 0$ , entonces la energía total coincide con la energía cinética de la partícula. la energía clásica total cuando la partícula se encuentra en el estado base es entonces

$$E = \frac{p^2}{2\mu} = E_1. \quad (2.77)$$

Despejando  $p$  de la ecuación anterior tenemos que:

$$p = \sqrt{2\mu E} = \mu v, \quad (2.78)$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad de la partícula. Si en este análisis semiclásico la partícula recorre el pozo en un tiempo  $T$ , entonces tenemos que  $v = \frac{a}{T}$ . Sustituyendo en la ecuación (2.78) y despejando  $T$  obtenemos:

$$T = \frac{\mu a}{\sqrt{2\mu E}}, \quad (2.79)$$

y tomando que  $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2}$  obtenemos finalmente

$$T = \frac{\mu a^2}{\pi \hbar}. \quad (2.80)$$

Sea

$$T^c = \alpha T, \quad (2.81)$$

con  $\alpha$  un número entero, entonces

$$T^c = \frac{\alpha \mu a^2}{\pi \hbar} \quad (2.82)$$

como  $\omega_{nm} = \frac{\pi^2 \hbar}{2\mu a^2} |n^2 - m^2|$ , entonces

$$\omega_{nm} T = \frac{\alpha \pi}{2} \tau |n^2 - m^2|. \quad (2.83)$$

Reescribiendo la ecuación (2.72) en términos de  $\tau = T/T^c$  obtenemos

$$|A(\tau)|^2 = |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + 2|c_1 c_2|^2 \cos\left(\alpha \frac{3\pi}{2} \tau\right) + 2|c_2 c_3|^2 \cos\left(\alpha \frac{5\pi}{2} \tau\right) + 2|c_1 c_3|^2 \cos(\alpha 4\pi \tau) \quad (2.84)$$

Es decir,  $|A|^2$  es de la forma

$$|A(\tau)|^2 = a + b \cos\left(\alpha \frac{3\pi}{2} \tau\right) + c \cos\left(\alpha \frac{5\pi}{2} \tau\right) + d \cos(\alpha 4\pi \tau). \quad (2.85)$$

Supongamos que el periodo de la dinámica es  $P$ . Esto implica que

$$|A(\tau)|^2 = |A(\tau + P)|^2 \quad (2.86)$$

y desarrollando esta condición se llega a que debe cumplirse:

$$\cos\left(\alpha \frac{3\pi}{2} P\right) = \cos\left(\alpha \frac{5\pi}{2} P\right) = \cos \alpha 4\pi P = 1 \quad (2.87)$$

entonces

$$\alpha \frac{3\pi}{2} P = 2\pi r, \quad \alpha \frac{5\pi}{2} P = 2\pi k, \quad \alpha 4\pi P = 2\pi l \quad (r, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.88)$$

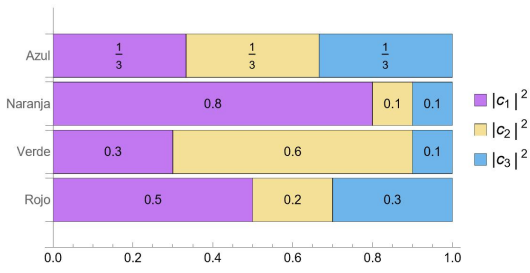
El menor valor de  $P$  para el cual se cumple la condición es

$$P = \frac{4}{\alpha}, \quad (\text{para } r = 3, k = 5, l = 8). \quad (2.89)$$

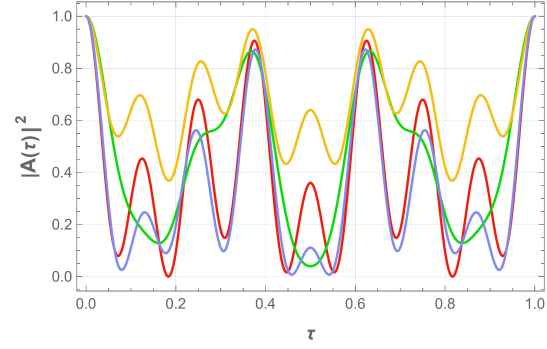
Entonces, si queremos que  $P = 1$ , debemos tomar  $\alpha = 4$ , por lo tanto, de la ecuación (2.81), el tiempo característico es  $T^c = 4T$  y las ecuaciones (2.72)-(2.74) quedan entonces expresadas como:

$$|A(\tau)|^2 = |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + 2|c_1 c_2|^2 \cos(6\pi\tau) + 2|c_2 c_3|^2 \cos(10\pi\tau) + 2|c_1 c_3|^2 \cos(16\pi\tau) \quad (2.90)$$

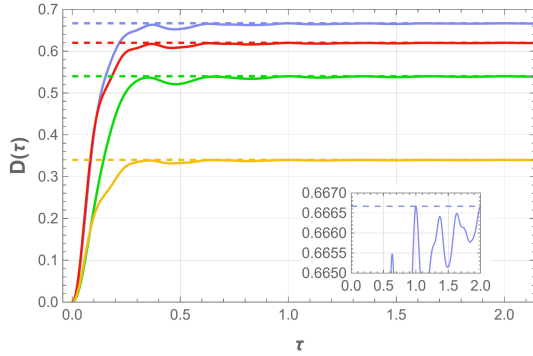
$$D(\tau) = 2|c_1 c_2|^2 [1 - \text{sinc}^2(3\pi\tau)] + 2|c_2 c_3|^2 [1 - \text{sinc}^2(5\pi\tau)] + 2|c_1 c_3|^2 [1 - \text{sinc}^2(8\pi\tau)] \quad (2.91)$$



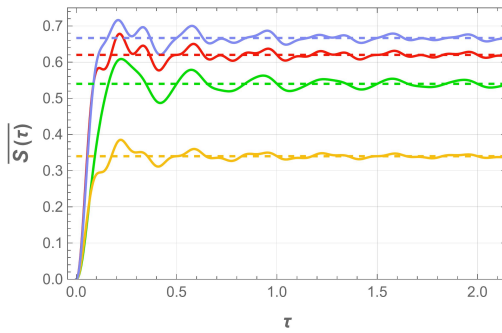
(a) Pesos de los coeficientes  $|c_i|^2$  que contribuyen a cada estado



(b) Evolución de  $|A(\tau)|^2$



(c) Evolución de  $D(\tau)$ . Inset zoom de grafica azul para el tiempo intervalo de  $\tau$



(d) Evolución de  $\overline{S(\tau)}$

Figura 2.4: Análisis de la evolución de  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  para el estado (2.71) (partícula atrapada en un pozo de potencial infinito) con  $|c_1|^2 = 0.5$ ,  $|c_2|^2 = 0.2$  y  $|c_3|^2 = 0.3$  curva roja;  $|c_1|^2 = 0.3$ ,  $|c_2|^2 = 0.6$  y  $|c_3|^2 = 0.1$  curva verde;  $|c_1|^2 = 0.8$ ,  $|c_2|^2 = 0.1$  y  $|c_3|^2 = 0.1$  curva amarilla;  $|c_1|^2 = 1/3$ ,  $|c_2|^2 = 1/3$  y  $|c_3|^2 = 1/3$  curva azul. Los valores  $D_L$  y  $\overline{S}_L$  están representados por la correspondiente línea punteada. La Figura 2.4a representa los valores de los  $|c_i|^2$  de cada curva de su correspondiente color.

$$\overline{S(\tau)} = 2|c_1c_2|^2[1 - \text{sinc}(6\pi\tau)] + 2|c_2c_3|^2[1 - \text{sinc}(10\pi\tau)] + 2|c_1c_3|^2[1 - \text{sinc}(16\pi\tau)]. \quad (2.92)$$

La Figura 2.4 muestra el comportamiento de las ecuaciones (2.90)-(2.92).

El comportamiento de  $|A(\tau)|^2$  se presenta en la Figura (2.4b), el cual es oscilatorio, pasando por máximos y mínimos locales antes de alcanzar un estado indistinguible al inicial en  $\tau = n$  (periodo 1). El sistema solo alcanza estados ortogonales para determinados valores de  $|c_1|$ ,  $|c_2|$  y  $|c_3|$ , como por ejemplo, para  $|c_1| = 1/\sqrt{2}$ ,  $|c_2| = 1/\sqrt{5}$  y  $|c_3| = \sqrt{3}/10$  (gráfica roja), además entre más pesado sea alguno de los coeficientes  $|c_i|$ , en comparación con los otros coeficientes, menos evoluciona el sistema (curva naranja). En el caso en que los coeficientes son  $|c_i|$  igualmente pesados (curva azul), el sistema no evoluciona hacia estados ortogonales a  $|\Psi_0\rangle$ .

La Figura 2.4c presenta el comportamiento de  $D(\tau)$ . Aquí vemos nuevamente un comportamiento creciente y asintótico. El valor máximo de  $D_L$  ocurre para  $|c_1| =$

$|c_2| = |c_3| = 1/\sqrt{3}$  (curva azul), tal como se espera por lo demostrado en el Apéndice A. También se observa que  $D = D_L$  en  $\tau$  enteras; para comprobarlo analíticamente, partimos de la ecuación (1.40), usando (2.82) tenemos que

$$\omega_{nm}T = 2\pi|n^2 - m^2|\tau = 2k\pi; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad n \neq m. \quad (2.93)$$

Como  $l = |n^2 - m^2|$  es un entero positivo, la expresión anterior se reescribe como:

$$l\tau = k; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.94)$$

lo cual se cumple para toda  $l$  siempre que  $\tau$  sea un entero, es decir:

$$\tau = p, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.95)$$

tal como se quería demostrar.

La Figura 2.4d presenta el comportamiento de la función  $\overline{S(\tau)}$ . Vemos que al igual que  $D(\tau)$  es creciente hasta llegar a un valor máximo, posteriormente tiene un comportamiento oscilatorio (que se va atenuando conforme transcurre  $\tau$ ) alrededor de  $\overline{S_L}$ . La mayor diferencia entre  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  (que también se observa en los ejemplos anteriores) es que  $\overline{S(\tau)}$  presenta más oscilaciones y más pronunciadas. Para ver para qué  $\tau$ 's,  $\overline{S} = \overline{S_L}$  partimos de la ecuación (1.49), que en este caso se reduce a

$$|c_1c_2|^2 \text{sinc } \omega_{12}T + |c_2c_3|^2 \text{sinc } \omega_{23}T + |c_1c_3|^2 \text{sinc } \omega_{13}T = 0. \quad (2.96)$$

Reescribiéndola en términos de  $\tau$

$$|c_1c_2|^2 \text{sinc } 6\pi\tau + |c_2c_3|^2 \text{sinc } 10\pi\tau + |c_1c_3|^2 \text{sinc } 16\pi\tau = 0. \quad (2.97)$$

Sin embargo, encontrar las  $\tau$ 's que cumplen la ecuación anterior no es tan trivial como en los otros casos, pues (2.97) tiene muchas soluciones no todas enteras. Pero observando la Figura 2.4d notamos que el número de veces en el que  $\overline{S} = \overline{S_L}$  depende de los valores de  $|c_1|$ ,  $|c_2|$  y  $|c_3|$  tal como se espera según la ecuación (2.97).

### 2.3.2. Comparación oscilador armónico vs. partícula atrapada en un pozo de potencial.

La Figura 2.5 compara el oscilador armónico (con  $d = 3$ ) con la partícula atrapada en un pozo de potencial infinito para  $|c_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $|c_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $|c_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Esta comparación se realiza con el objetivo de comprender cómo afecta la distribución de los niveles de energía en el comportamiento de las medidas  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  para un mismo conjunto de probabilidades  $|c_i|^2$ , en este caso  $|c_i|^2 = 1/3$  para los tres primeros niveles. Sabemos que las energías permitidas de un oscilador cuántico solo pueden tener valores energéticos igualmente espaciados (ecuación (2.38)), a diferencia del caso de la partícula cuántica en un pozo, donde los niveles de energía permitidos

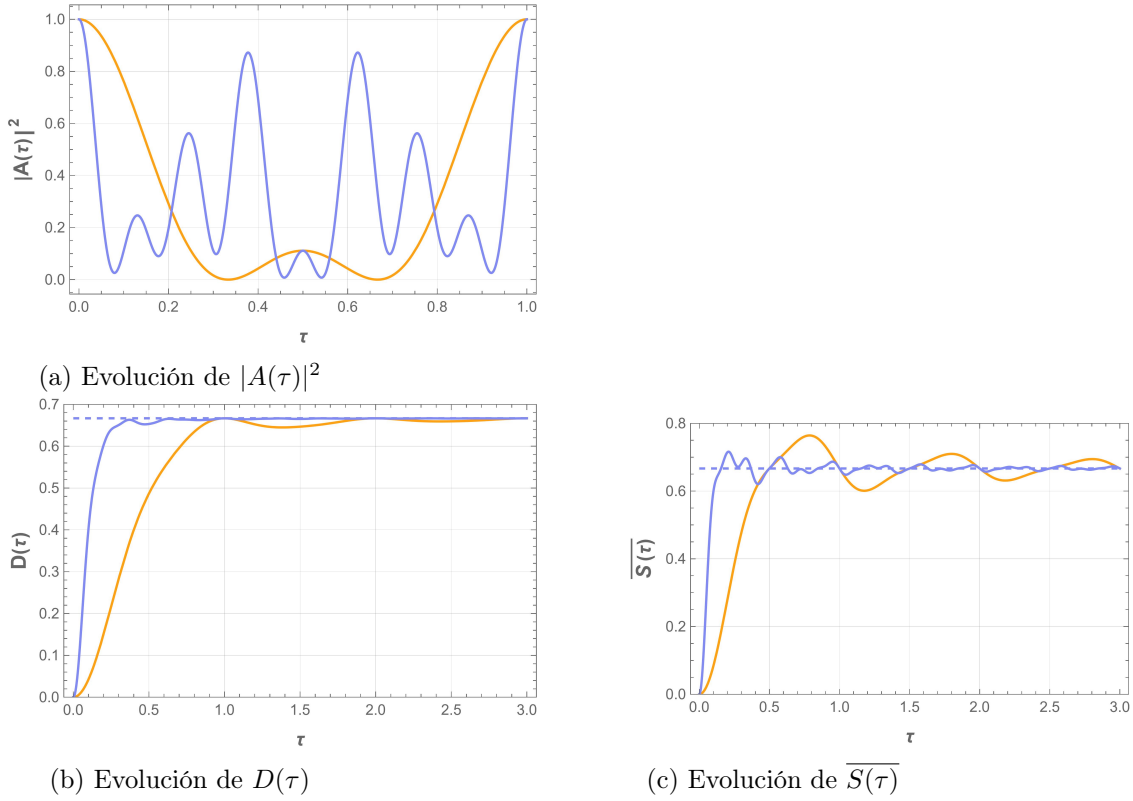


Figura 2.5: Análisis comparativo de  $|A(\tau)|$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  entre el oscilador armónico con  $d = 3$  (naranja) y la partícula atrapada en un pozo de potencial infinito con  $|c_1| = |c_2| = |c_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (azul).

están dados por (2.66).

En la Figura 2.5a se presenta la evolución de  $|A(\tau)|^2$ . Lo primero que notamos es que dentro de un mismo intervalo de tiempo adimensional  $\tau$ <sup>1</sup>, la evolución de  $|A(\tau)|^2$  para la partícula en un pozo es más variada (curva azul). También notamos que el oscilador armónico (curva naranja) evoluciona hasta estados ortogonales a  $|\Psi_0\rangle$  en dos ocasiones, mientras que la partícula atrapada en un pozo nunca alcanza estados ortogonales al estado inicial (aunque se acerca mucho a un estado ortogonal en dos puntos cercanos a  $\tau = 1/2$ ).

Por otro lado, en las Figuras 2.5b y 2.5c, vemos que la velocidad de evolución inicial de  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$  es mayor en el caso de la partícula atrapada en un pozo y para  $\tau$ 's muy grandes las dos funciones tienden al mismo valor (tanto como para  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$ ). Esto se ajusta con el análisis de  $|A(\tau)|^2$  en el que se menciona que la evolución del pozo cambia entre estados más y menos distinguibles al estado inicial.

Por lo anterior notamos que la separación entre los niveles de energía que con-

<sup>1</sup> $\tau$  es el tiempo adimensional relativo, pero el tiempo absoluto es diferente para cada sistema, pues  $\tau = T/T^c$  y este es numéricamente diferente en el pozo y el oscilador.



tribuyen a  $|\Psi(t)\rangle$  (o de forma equivalente las frecuencias  $\omega_{nm}$ ) juega un papel importante en la evolución de  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$ . En particular, y en términos de la distinguibilidad de los estados, notamos que para una superposición de estados no degenerados igualmente ponderados y espaciados, el estado evolucionará hasta un estado distinguible del inicial, a diferencia de una superposición de estados con diferente espaciamiento tal como se propone en [3] y por lo tanto, la evolución de estas cantidades será menos variada en sistemas con distribución de energía igualmente espaciada.

## 2.4. Sistema de dos qubits

Como se discutió en la sección 2.1, los estados de un qubit están representados por la combinación lineal de los vectores  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Cuando tenemos un sistema cuántico de dos qubits, utilizamos el producto tensorial de los vectores de estado de cada qubit individual. Esto nos da un espacio vectorial complejo cuatridimensional.

Sean  $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$  y  $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$  las bases ortonormales para cada uno de los qubits (1 y 2). Entonces una base ortonormal para el espacio producto es:

$$\{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\}. \quad (2.98)$$

Utilizando la notación  $|n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 = |nm\rangle$  podemos escribir el estado general de dos qubits como

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \quad (2.99)$$

donde  $|c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = 1$  [15].

En el estado  $|00\rangle$  el primer qubit se encuentra en el estado  $|0\rangle$  y el otro en el estado  $|0\rangle$ , en el estado  $|01\rangle$  el primer qubit se encuentra en el estado  $|0\rangle$  y el segundo en el estado  $|1\rangle$ , en el estado  $|10\rangle$  el primer qubit se encuentra en el estado  $|1\rangle$  y el segundo en  $|0\rangle$  y finalmente en el estado  $|11\rangle$  ambos qubits se encuentran en  $|1\rangle$ .

El estado  $\Psi(x, t)$  evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, donde el hamiltoniano para el sistema completo de dos partículas es

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12} \quad (2.100)$$

donde  $\hat{H}_1$  y  $\hat{H}_2$  son el hamiltoniano libre de la primera y segunda partícula respectivamente ( $\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2\mu_1} + \hat{V}(x_1)$  y una expresión análoga para  $\hat{H}_2$ ) y  $\hat{H}_{12}$  el hamiltoniano de interacción entre ambas partículas. En ausencia de interacción ( $\hat{H}_{12} = 0$ ), y si la base 2.98 es la base de eigenestados de  $\hat{H}$ , entonces (2.99) queda como:

$$\Psi(x, t) = c_{00}e^{-iE_{00}t/\hbar}\varphi_{00}(x) + c_{01}e^{-iE_{01}t/\hbar}\varphi_{01}(x) + c_{10}e^{-iE_{10}t/\hbar}\varphi_{10}(x) + c_{11}e^{-iE_{11}t/\hbar}\varphi_{11}(x). \quad (2.101)$$

Para simplificar la notación renombramos los estados como sigue:  $|00\rangle \rightarrow |1\rangle$ ,  $|01\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $|10\rangle \rightarrow |3\rangle$  y  $|11\rangle \rightarrow |4\rangle$ . Consideremos el siguiente espectro de energía:

$E_1 = 0$ ,  $E_2 = E_3 = E$  y  $E_4 = 2E$ , de aquí vemos que la energía de cada qubit que se encuentra en el estado  $|0\rangle$  es cero, mientras que si se encuentran en el estado  $|1\rangle$  la energía  $E$ , por lo tanto, la ecuación (2.101) se puede reescribir como:

$$\Psi(x, t) = c_1\varphi_1(x) + [c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)]e^{-iEt/\hbar} + c_4e^{-i2Et/\hbar}\varphi_4(x). \quad (2.102)$$

Utilizando (1.22) y tomando  $\omega = |E|/\hbar$  tenemos que

$$\begin{aligned} |A(t)|^2 &= |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2|c_1|^2|c_4|^2 \cos 2\omega t + 2|c_2|^2|c_3|^2 \\ &+ 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Para  $D(T)$  utilizamos (1.33)

$$\begin{aligned} D(T) &= 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) [1 - \text{sinc}^2(\omega T/2)] \\ &+ 2|c_1|^2|c_4|^2 [1 - \text{sinc}^2(\omega T)], \end{aligned} \quad (2.104)$$

y para obtener  $\overline{S(T)}$  usamos (1.45)

$$\begin{aligned} \overline{S(T)} &= 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) [1 - \text{sinc}(\omega T)] \\ &+ 2|c_1|^2|c_4|^2 [1 - \text{sinc}(2\omega T)]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Finalmente las expresiones para  $D_L$  y  $\overline{S_L}$  se obtienen a partir de la ecuación (1.47)

$$D_L = \overline{S_L} = 2|c_1|^2|c_2|^2 + 2|c_1|^2|c_3|^2 + 2|c_1|^2|c_4|^2 + 2|c_2|^2|c_4|^2 + 2|c_3|^2|c_4|^2. \quad (2.106)$$

Debido a que el sistema solo tiene asociada una frecuencia  $\omega$ , entonces el tiempo característico es  $T^c = 2\pi\omega^{-1}$ . Rescribiendo las ecuaciones (2.103)-(2.105) en términos de  $\tau = T/T^c$

$$\begin{aligned} |A(\tau)|^2 &= |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2|c_1|^2|c_4|^2 \cos 4\pi\tau + 2|c_2|^2|c_3|^2 \\ &+ 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) \cos 2\pi\tau, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} D(\tau) &= 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) [1 - \text{sinc}^2 \pi\tau] \\ &+ 2|c_1|^2|c_4|^2 [1 - \text{sinc}^2 2\pi\tau], \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \overline{S(\tau)} &= 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) [1 - \text{sinc} 2\pi\tau] \\ &+ 2|c_1|^2|c_4|^2 [1 - \text{sinc} 4\pi\tau]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

En las figuras 2.6b-2.6d se encuentran graficadas las ecuaciones (2.107)-(2.109); es decir,  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$ . La Figura 2.6b corresponde a  $|A(\tau)|^2$ , en ella se observan distintos comportamientos. El primero es similar al que se observó en el sistema de un qubit en el sentido de que dentro del intervalo de  $\tau$  que va de 0 a 1, el sistema solo alcanza un mínimo en  $\tau = 0.5$  (véase Apéndice B); este comportamiento está presente en las gráficas azul y verde, que corresponden a las que tienen los coeficientes  $|c_2|$  y  $|c_3|$  más o igualmente pesados que los coeficientes  $|c_1|$  y  $|c_4|$ . El otro comportamiento que se observa en las curvas rosa, roja y morada, es similar al que tiene el oscilador

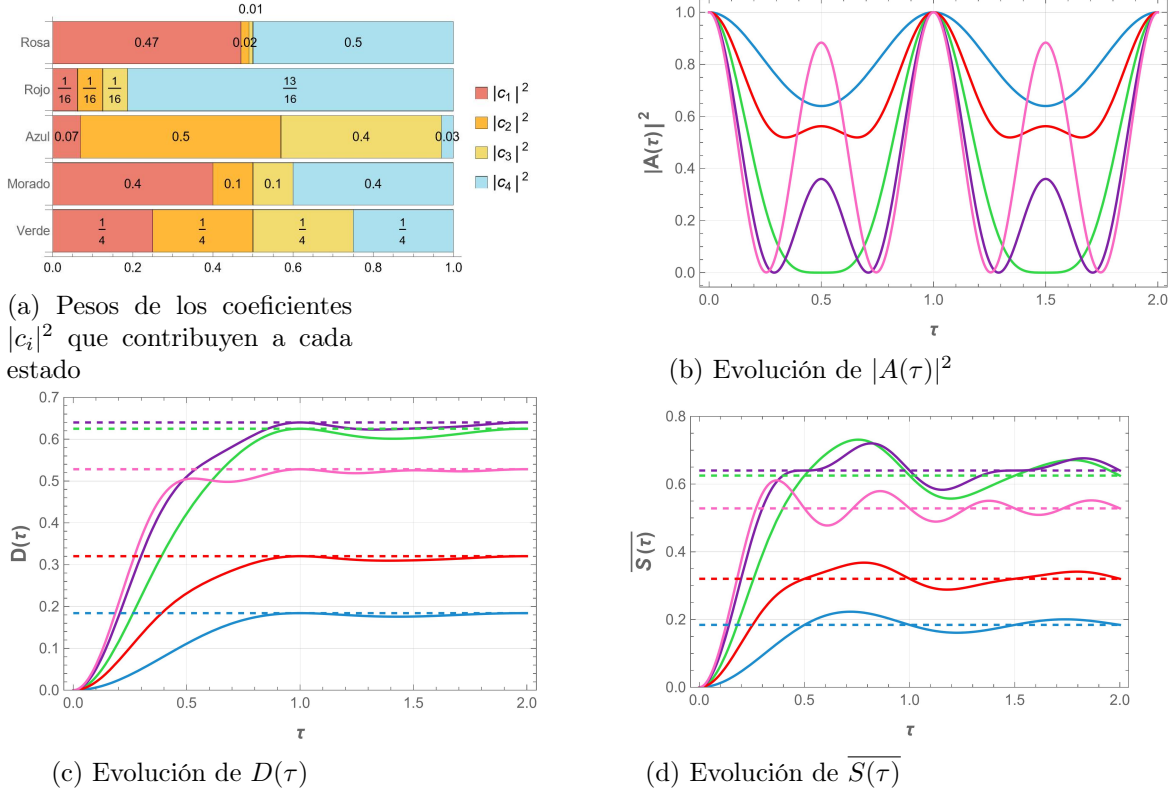


Figura 2.6: Evolución de  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S(\tau)}$ , estado de dos qubits, con  $|c_1|^2 = 1/4$ ,  $|c_2|^2 = 1/4$ ,  $|c_3|^2 = 1/4$  y  $|c_4|^2 = 1/4$  curva verde;  $|c_1|^2 = 0.4$ ,  $|c_2|^2 = 0.1$ ,  $|c_3|^2 = 0.1$  y  $|c_4|^2 = 0.4$  curva morada;  $|c_1|^2 = 0.07$ ,  $|c_2|^2 = 0.5$ ,  $|c_3|^2 = 0.4$  y  $|c_4|^2 = 0.03$  curva azul;  $|c_1|^2 = 1/16$ ,  $|c_2|^2 = 1/16$ ,  $|c_3|^2 = 1/16$  y  $|c_4|^2 = 13/16$  curva roja;  $|c_1|^2 = 0.47$ ,  $|c_2|^2 = 0.02$ ,  $|c_3|^2 = 0.01$  y  $|c_4|^2 = 0.5$  curva rosa. La Figura 2.6a representa los valores de los  $|c_i|^2$  de cada curva de su correspondiente color

armónico con  $d = 3$ , en el sentido de que dentro del intervalo que va de  $\tau = 0$  a  $\tau = 1$  el sistema alcanza dos mínimos (alrededor de  $\tau$  igual a 0.3 y 0.7) y un máximo local en  $\tau = 0.5$  (ver Apéndice B), siendo mayor en el caso en el que  $|c_2|$  y  $|c_3|$  son menos pesados (curva rosa); sin embargo, en estos casos no siempre se alcanzan estados que sean ortogonales al estado inicial, a diferencia del ejemplo del oscilador armónico que siempre llega a estados ortogonales.

La Figura 2.6c presenta el comportamiento de  $D(\tau)$ . Al igual que en los casos anteriores,  $D(\tau)$  está acotada superiormente por  $D_L$ . Sin embargo, en este ejemplo, el máximo valor de  $D_L$  no ocurre cuando las  $|c_i|$ 's son igualmente pesadas (curva verde), como en los casos anteriores, pues como se puede observar, el valor de  $D_L$  es mayor cuando  $|c_1| = |c_4|$  y  $|c_2| = |c_3|$  (curva morada). Aunque al principio esto parezca una incongruencia con lo demostrado en el apéndice A hay que recordar que lo demostrado ahí únicamente considera estados no degenerados, y como en este caso existe degeneración en los niveles de energía ( $E_2 = E_3 = E$ ), no es válida dicha demostración. Por otro lado, vemos que la curva azul es la que menos evoluciona seguida de

la roja, lo cual es consistente, ya que vemos que son las curvas que menos se alejan del estado inicial en la Figura 2.6b. Otra observación importante de la Figura 2.6c es que la curva rosa en un inicio es la que evoluciona con mayor rapidez, trascurrido un tiempo su rapidez disminuye, causando que se intercepte con las curvas morada y verde. Dado que este comportamiento no está presente en los ejemplos anteriores, es probable que se deba que el sistema tiene degeneración en sus niveles de energía.

Finalmente, la Figura 2.6d presenta la evolución de  $\overline{S}(\tau)$ . El comportamiento en esta figura es similar al comportamiento de  $D(\tau)$  y como en los ejemplos anteriores,  $\overline{S}$  presenta una dinámica más rica que la de  $D(\tau)$ , con oscilaciones más pronunciadas y con una velocidad de evolución inicial mayor que la de  $D(\tau)$ . También notamos que la velocidad de evolución de  $\overline{S}$  es mayor que la velocidad de evolución de  $D$ , por lo que a pesar de que ambas medidas a tiempos largos tiendan al mismo valor asintótico  $D_L = \overline{S}_L$ ,  $\overline{S}$  llegará antes a valores cercanos a  $\overline{S}_L$ . Esto último, aunque no se mencionó explícitamente en todos los ejemplos anteriores acaeció, ya que es una propiedad propia de  $D$  y  $\overline{S}$  por lo demostrado en la sección 1.5.

### 2.4.1. Comparación oscilador armónico vs. 2-qubits

Con el objetivo de analizar cómo afecta la degeneración en los niveles de energía a las medidas  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\overline{S}$ , haremos la comparación entre: un sistema de tres niveles sin degeneración, con energías igualmente espaciadas y probables (oscilador armónico, ecuación (2.41) con  $d = 3$ ); un sistema de cuatro niveles con degeneración en los niveles  $E_2$  y  $E_3$  (sistema de dos qubits, ecuación (2.102)) y coeficientes  $|c_n|$  iguales ( $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = 1/4$ ); y un sistema que presenta las mismas características que el anterior a excepción de los coeficientes, eligiendo en su lugar los valores  $|c_1|^2 = |c_4|^2 = 1/3$  y  $|c_2|^2 = |c_3|^2 = 1/6$ , con el fin de que las energías diferentes sean igualmente probables. Esta elección de coeficientes equivale a remover la degeneración y tener sólo tres estados no degenerados e igualmente probables.

Las curvas amarillas de la Figura 2.7 representan a dos sistemas: el oscilador armónico y el caso de dos qubits con donde los coeficientes  $|c_1|^2 = |c_4|^2 = 1/3$  y  $|c_2|^2 = |c_3|^2 = 1/6$ . Se observa que en ambos casos tienen el mismo comportamiento, por lo que caen en las mismas curvas. Esto es de esperarse pues al removerse la degeneración el sistema se comporta como uno sin degeneraciones. En resumen, en este caso en particular, el sistema de dos qubits con degeneración con las tres energías igualmente probables, se comporta como el oscilador armónico con  $d = 3$  y niveles igualmente probables, es decir, como un sistema de tres niveles de energía accesibles sin degeneración.

Ahora nos centraremos en la comparación entre el oscilador armónico y el sistema de dos qubits con coeficientes igualmente pesados para cada eigenestado  $|i\rangle$ . Este último caso corresponde a las curvas verdes de la figura 2.7. En la gráfica de  $|A|^2$  vemos que la curva amarilla, la que corresponde al oscilador armónico, alcanza dos veces el valor cero, lo que muestra que el sistema llega a dos estados ortogonales al

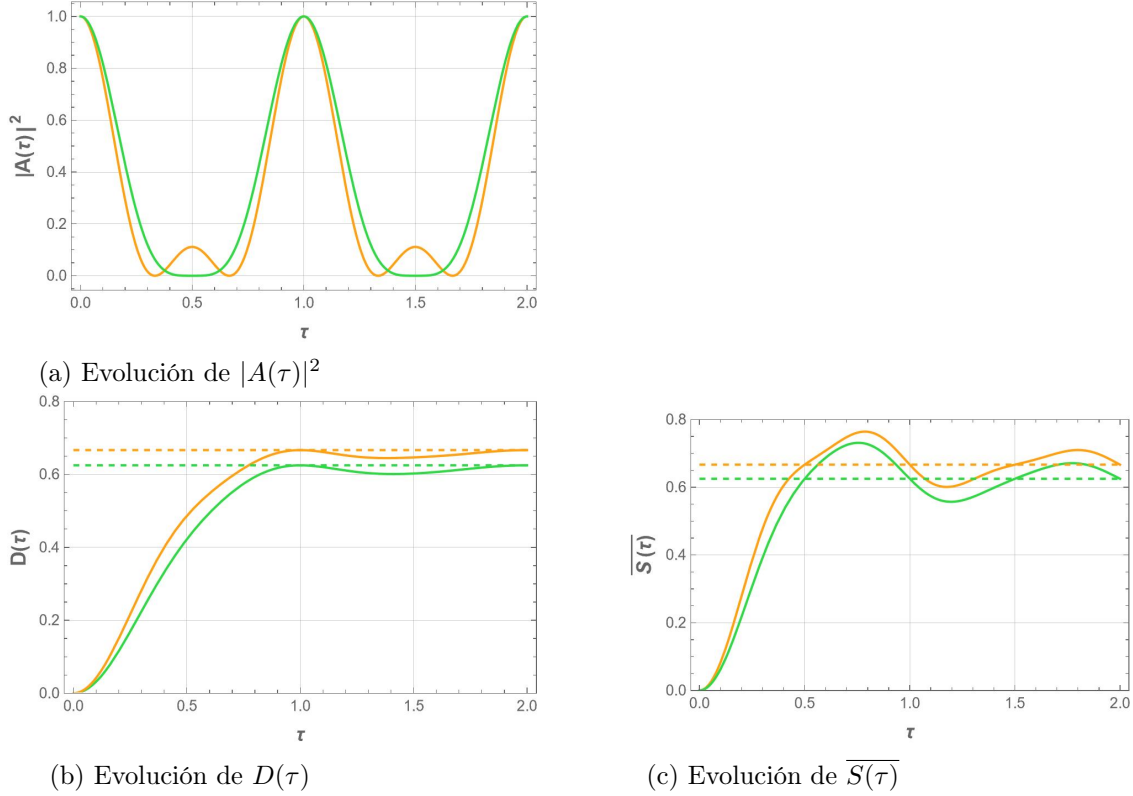


Figura 2.7: Evolución de  $|A(\tau)|^2$ ,  $D(\tau)$  y  $\overline{S}(\tau)$ , donde la curva verde representa al estado de dos qubits, con  $|c_1|^2 = 1/4$ ,  $|c_2|^2 = 1/4$ ,  $|c_3|^2 = 1/4$  y  $|c_4|^2 = 1/4$  y la curva amarilla representa al oscilador armónico, ecuación (2.41) con  $d = 3$ , y al sistema de dos qubits, ecuación (2.102), con  $|c_1|^2 = |c_4|^2 = 1/3$  y  $|c_2|^2 = |c_3|^2 = 1/6$ .

inicial en un periodo, mientras que la curva verde toma únicamente una vez el valor cero, lo que indica que únicamente alcanza un estado ortogonal (como ya se discutió al analizar la curva verde de la fig. 2.6b). De aquí se puede concluir que la degeneración en los niveles de energía afecta el número de estados ortogonales que alcanza el sistema. Esta observación únicamente considera superposiciones donde cada estado  $|\varphi_n\rangle$  es igualmente pesado.

En las gráficas de  $D$  y  $\overline{S}$  se observa que las correspondientes curvas amarillas alcanzan valores de  $D$  mayores, por lo que se concluye que el oscilador armónico visita estados más variados (entre sí y respecto al estado original). Sin embargo, este resultado es esperado por la definición de  $D_L$ , ecuación (1.34), ya que para el oscilador  $D_L = 2/3 \approx 0.66$  y para el caso del dos qubits  $D_L = 5/8 \approx 0.62$ . Lo relevante del comportamiento de estas dos medidas en sistemas con degeneración es que cuando los estados son igualmente pesados  $D_L$  no alcanza su valor máximo, como sí ocurre en el caso sin degeneración (véanse las ecs. (1.35) y (1.36)). En conclusión, la degeneración también afecta a las medidas  $D$  y  $\overline{S}$  tal como se esperaba del análisis de  $|A|^2$ .

Como conclusiones generales de esta sección, tenemos que la degeneración en la energía afecta el comportamiento de las medidas  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\overline{S}$  principalmente reduciendo el grado de variación entre los estados visitados por el sistema. Sin embargo, las características cualitativas generales de  $D$ ,  $|A|^2$  y  $\overline{S}$  se mantienen, y es por esto que estas medidas aún siguen dando información en sistemas con degeneración.



# Capítulo 3

## Análisis y conclusiones

Se estudiaron tres medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos,  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\overline{S}$ , las cuales dan información sobre la evolución que experimenta un sistema en un estado puro  $|\psi\rangle$  que evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger durante un cierto intervalo de tiempo.

La primera medida que se estudió fue  $|A(t)|^2$ . Esta surge al considerar el traslape entre los estados  $|\psi_0\rangle$  y  $|\psi_t\rangle$ , donde  $|\psi_0\rangle$  es el estado inicial de un sistema cuántico y  $|\psi_t\rangle$  el estado al tiempo  $t$ .  $|A(t)|^2 = |\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle|^2$  es comúnmente conocido como probabilidad de supervivencia, ya que determina la probabilidad de transición entre el estado inicial  $|\psi_0\rangle$  y el estado  $|\psi_t\rangle$ , lo que permite obtener información acerca de qué tan distinguibles son los estados que visita el sistema respecto al estado inicial. Al ser una probabilidad, los valores de  $|A|^2$  se encuentran acotados entre cero y uno, tomando el valor uno cuando los estados son indistinguibles (iguales salvo por una fase) y cero cuando son distinguibles u ortogonales.

A partir de los ejemplos analizados, podemos dar una descripción de la dinámica de  $|A|^2$ . En las curvas que corresponden a esta medida vemos un comportamiento periódico. Al analizar el ejemplo del qubit se observa que el sistema únicamente alcanza estados ortogonales a  $|\psi_0\rangle$  cuando  $|c_0| = |c_1| = 1/\sqrt{2}$  (y solo una vez en el intervalo que va de  $\tau = 0$  a  $\tau = 1$ ), por lo tanto, este resulta ser el único caso donde el qubit alcanza estados completamente distinguibles al estado inicial. Por otro lado, en el ejemplo del oscilador armónico (con eigenestados igualmente pesados) se observó que el sistema siempre llegará a estados ortogonales a  $|\psi_0\rangle$ , y que a medida que aumenta  $N$  (el número de eigenestados  $\varphi_n$  que contribuyen a la función de onda) aumenta el número de estados ortogonales a  $|\psi_0\rangle$ , garantizando que el sistema alcanza  $N - 1$  estados ortogonales a  $|\psi_0\rangle$  antes de regresar a su situación original ( $|A|^2=1$ ). Lo anterior verifica que para sistemas no degenerados con niveles de energía igualmente espaciados y con coeficientes  $|c_i|$  iguales, el sistema alcanza  $N - 1$  estados ortogonales al estado inicial ( $|A|^2 = 0$ ), antes de volver a su situación original, es decir, antes de que  $|A|^2 = 1$  [3].



A pesar de que con  $|A|^2$  tenemos la posibilidad de caracterizar la riqueza de la evolución experimentada por un sistema cuántico, esta cantidad solo da información sobre la distinguibilidad entre el estado inicial y el estado a un tiempo  $t$ , pero no sobre la distinguibilidad entre los diferentes estados que visita el sistema a lo largo de su evolución. Es por esto que estudió una segunda medida,  $D$ , la cual también surge a partir de la noción de traslape, pero a diferencia de  $|A|^2$  que toma el traslape entre el estado inicial y el estado al tiempo  $t$ ,  $D$  considera dos estados a tiempos arbitrarios (los estados  $|\psi_t\rangle$  y  $|\psi_{t'}\rangle$ ) y cuantifica la distinguibilidad entre ellos, promediando en un cierto intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Matemáticamente,  $D = 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\langle \psi_t | \psi_{t'} \rangle|^2 dt dt'$ , y puede entenderse como una medida de cuánta evolución experimenta en promedio, un sistema cuántico durante un intervalo de tiempo.  $D$  tiene propiedades matemáticas y físicas interesantes, algunas de estas son [5]: **1)** Satisface una simetría de traslación temporal  $D(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) = D(t_1, t_2)$ , por lo que depende del intervalo de tiempo solo mediante su duración  $T = t_2 - t_1$ . **2)** Está acotada entre  $[0, D_L]$  donde  $D_L = \lim_{T \rightarrow \infty} D(T)$ , a su vez  $D_L \in [0, 1]$ . **3)** Valores altos (cercanos a  $D_L$ ) indican una evolución variada, es decir, el sistema visita estados que tienen alto grado de distinguibilidad entre sí. Por el contrario, una evolución monótona, aquella en la que los estados visitados son similares entre sí, conduce a un valor de  $D$  cercano a cero. **4)** A tiempos largos  $D \rightarrow D_L$ .

En los ejemplos se observó que  $D(T)$  es una función que a tiempos muy cortos es creciente, posteriormente tiene un comportamiento oscilatorio cuyas oscilaciones se atenúan a medida que transcurre  $T$  (por lo que los valores de  $D$  en cada oscilación se separan menos de  $D_L$ ) de manera que para  $T$  relativamente grandes  $D \rightarrow D_L$ . La condición  $D = D_L$  a tiempos finitos depende de las frecuencias de transición  $\omega_{nm}$  (véase la ecuación (1.40)): si hay solo una frecuencia de transición  $\omega$ , entonces los  $T$ 's donde ocurre la máxima evolución serán múltiplos del periodo de transición, pero si se tiene más de una frecuencia de transición la condición  $D(T) = D_L$  requiere que las frecuencias sean conmensurables entre sí, ya que (ec. 1.40) implica que  $T = \frac{2\pi k}{\omega_{ij}} = \frac{2\pi k'}{\omega_{i'j'}}$  para todas las  $\omega_{ij}, \omega_{i'j'}, \dots$  con  $k, k', \dots$  enteras. Por otro lado, los coeficientes  $|c_i|$  juegan un papel importante en la evolución de  $D$ ; por ejemplo, si el sistema tiene un espectro no degenerado y la descomposición de  $|\psi(0)\rangle$  en la base  $\{\varphi_n\}$  tiene un número finito  $N$  de términos, entonces la mayor evolución y el valor máximo que puede tener  $D_L$  ocurre cuando los coeficientes  $|c_i|$  son iguales, es decir, cuando  $|c_i| = 1/\sqrt{N}$  para toda  $i$ ; en consecuencia  $D_L$  aumenta (tiende a 1) a medida que aumenta el número de términos en la función de onda, por lo cual entre menos información tengamos sobre el estado del sistema, más variada y rápida será su evolución.

Comparando los resultados de  $|A|^2$  y  $D$  vemos que para estados  $\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n(x)$  tales que los niveles de energía que contribuyen son no degenerados e igualmente espaciados y  $|c_i| = 1/\sqrt{N}$ , el sistema alcanzará estados ortogonales a  $|\psi_0\rangle$  y  $D$  tendrá la máxima evolución y rapidez posible. Considerando tiempos finitos  $T$  para los cuales  $D(T) = D_L$ , la ecuación(1.40) y la expresión (1.22) conducen a que en esos tiempos

$|A(T)|^2 = \sum_{nm} |c_n c_m|^2 e^{i2\pi k} = 1$ , de modo que la máxima evolución ( $D = D_L$ ) ocurre cuando  $|A|^2 = 1$  y el sistema regresa a un estado indistinguible de  $|\psi_0\rangle$ .

Con la última medida que se estudió,  $\bar{S}$ , podemos conocer qué tan distinguibles son en promedio los estados que visita el sistema en comparación con el estado inicial. Esta medida  $\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T (1 - |\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^2) dt$  se puede ver como un caso particular de  $D$  en el que  $t' = 0$ , pero nos brinda información diferente a la que proporciona  $D$  (pues  $\bar{S}$  mide la distinguibilidad promedio con respecto al estado inicial). Algunas propiedades de  $\bar{S}$  son: **1)**  $\bar{S} \leq 1$ . **2)** Los valores de  $\bar{S}$  cercanos a uno indican que los estados que visita el sistema son en promedio muy diferentes al estado inicial  $|\psi_0\rangle$ , mientras que valores cercanos a cero indican que los estados que visita son prácticamente indistinguibles del estado inicial. **3)**  $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}(T) = \bar{S}_L = D_L$  (a tiempos largos  $\bar{S} \rightarrow \bar{S}_L$ ).

Los ejemplos exhiben que el comportamiento de  $\bar{S}$  a tiempos cortos es creciente, posteriormente es oscilatorio y las oscilaciones se atenúan alrededor de  $\bar{S}_L$  a medida que transcurre  $T$ , por lo que para  $T$  grandes  $\bar{S} \approx \bar{S}_L$ . Debido a que  $D_L = \bar{S}_L$ , tal como sucede con  $D$ , el valor  $\bar{S}_L$  tiende a 1 a medida que aumenta el número de términos de la función de onda, y en ausencia de degeneración y con coeficientes  $|c_i|$  iguales  $\bar{S}_L$  adquiere el mayor valor posible.

Comparando  $\bar{S}$  con  $D$  vemos que tienen un comportamiento cualitativamente similar. Sin embargo, algunas diferencias son:  $\bar{S}$  puede alcanzar a valores más altos que su valor asintótico, la rapidez de evolución a tiempos cortos es mayor en  $\bar{S}$  que en  $D$ ,  $\bar{S}$  presenta una dinámica más variada y con oscilaciones más pronunciadas que las de  $D$ , aunque a tiempos largos  $D$  y  $\bar{S}$  coinciden, pues ambas tienden al mismo valor límite.

En conclusión,  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  son útiles para caracterizar la evolución de sistemas cuánticos desde diferentes puntos de vista.  $|A(t)|^2$  nos permite analizar la variación del estado al tiempo  $t$  con respecto al estado inicial, haciendo posible identificar directamente el número total de estados ortogonales que se alcanzan, o bien determinar qué tanto se alejan los estados  $|\psi_t\rangle$  de  $|\psi_0\rangle$ .  $\bar{S}(T)$  brinda información sobre la variación promedio de los estados que visita el sistema cuántico (durante el intervalo  $[0, T]$ ) con respecto al estado inicial, lo que permite conocer cómo evoluciona el sistema en relación con el estado inicial. Finalmente,  $D(T)$  nos permite obtener información sobre la variación promedio entre todos los estados que visita el sistema en un intervalo de tiempo y proporciona así una medida de qué tanto evoluciona el sistema en dicho intervalo. Estas tres medidas nos permiten extraer información complementaria sobre la dinámica del sistema, y pueden ayudar a conocer, por ejemplo, el tiempo que hay que esperar para que el sistema haya mostrado un cierto grado de evolución o para que la evolución no varíe apreciablemente en el tiempo. También, con el estudio de  $|A|^2$ ,  $D$  y  $\bar{S}$  es posible analizar cuáles estados iniciales (determinados por los  $|c_i|$ ) evolucionan más rápido, o más lento, lo que puede ser de relevancia en el procesamiento de información en sistemas cuánticos, ya que en este tipo de procesos se desea

transitar entre estados altamente distinguibles en el menor tiempo posible. Desde un punto de vista más fundamental, la principal aportación de esta tesis es la de extender estudios previos sobre la caracterización de la evolución de un sistema cuántico [5], abarcando diferentes medidas para cuantificarla y su análisis comparativo.

# Apéndice A

## Valor máximo de $D_L$

Para encontrar el valor máximo de  $D_L$  partimos de la ecuación (1.34)

$$D_L = \sum_{nm, n \neq m} |c_n c_m|^2 = \sum_{nm} |c_n c_m|^2 - \sum_n |c_n|^4 = 1 - \sum_n |c_n|^4, \quad (\text{A.1})$$

para la que supusimos que ningún estado es degenerado. Sea  $|c_n|^2 = p_n$ , entonces

$$D_L(p_1, p_2, \dots, p_N) = 1 - \sum_{n=1}^N p_n^2 \quad (\text{A.2})$$

sujeta a la restricción

$$\sum_{n=1}^N p_n = 1. \quad (\text{A.3})$$

Para determinar el conjunto  $\{p_1, \dots, p_N\}$  para el cual (A.2) es máximo empleamos el método de multiplicadores de Lagrange. Definimos

$$L(p_1, p_2, \dots, p_N, \lambda) = 1 - \sum_{n=1}^N p_n^2 - \lambda \left( \sum_{n=1}^N p_n - 1 \right), \quad (\text{A.4})$$

con  $\lambda$  el multiplicador de Lagrange.

Calculamos las derivadas parciales de  $L$  respecto a las  $N + 1$  variables e igualamos a cero

$$\left( \frac{\partial L}{\partial p_1}, \frac{\partial L}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial p_N}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -2p_i - \lambda = 0, \quad (\text{A.6})$$

para toda  $i = 1, \dots, N$  y

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^N p_n - 1 = 0. \quad (\text{A.7})$$

De la ecuación (A.6) tenemos que:

$$p_i = -\frac{\lambda}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.7) tenemos que:

$$-\frac{N\lambda}{2} - 1 = 0, \quad (\text{A.9})$$

entonces  $-\lambda = 2/N$  y por lo tanto, de (A.8) obtenemos

$$p_i = \frac{1}{N}. \quad (\text{A.10})$$

Como  $p_n = |c_n|^2$  entonces el máximo de  $D_L$  ocurre para

$$|c_n|^2 = \frac{1}{N}. \quad (\text{A.11})$$

## Apéndice B

### Valores extremos de $|A(\tau)|^2$ para el sistema de dos qubits

Partimos de la ecuación (2.107) para  $|A(\tau)|^2$ :

$$|A(\tau)|^2 = |c_1|^4 + |c_2|^4 + |c_3|^4 + |c_4|^4 + 2|c_1|^2|c_4|^2 \cos 4\pi\tau + 2|c_2|^2|c_3|^2 + 2(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) \cos 2\pi\tau. \quad (\text{B.1})$$

Derivando respecto a  $\tau$  obtenemos

$$\frac{d|A(\tau)|^2}{d\tau} = -8\pi|c_1|^2|c_4|^2 \sin 4\pi\tau - 4\pi(|c_1|^2|c_2|^2 + |c_1|^2|c_3|^2 + |c_2|^2|c_4|^2 + |c_3|^2|c_4|^2) \sin 2\pi\tau, \quad (\text{B.2})$$

e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos y resolvemos para cada caso particular presentado en la Figura 2.6.

- Curva verde: Si  $|c_1| = |c_2| = |c_3| = |c_4| = 1/\sqrt{4}$ , entonces B.2 conduce a

$$\frac{1}{2} \sin 4\pi\tau + \sin 2\pi\tau = 0 \quad (\text{B.3})$$

lo cual se cumple si y solo si

$$\tau = n, \quad \tau = \frac{1+2n}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.4})$$

Observando la gráfica 2.6b notamos que para  $\tau = n$   $|A(\tau)|^2$  es máxima mientras que para  $\tau = \frac{1+2n}{2}$  es mínima. En particular, entre  $\tau = 0$  y  $\tau = 1$  solo hay un mínimo en  $\tau = 1/2$ .

- Curva morada: Si  $|c_1| = \sqrt{2/5}$ ,  $|c_2| = \sqrt{1/10}$ ,  $|c_3| = \sqrt{1/10}$ ,  $|c_4| = \sqrt{2/5}$ , la condición (B.2) = 0 conduce a

$$\frac{8}{25} \sin 4\pi\tau + \frac{4}{25} \sin 2\pi\tau = 0 \quad (\text{B.5})$$

cuya solución es:

$$\tau = n, \quad \tau = \frac{1+2n}{2}, \quad \tau \approx \frac{\pm 1.823 + 2\pi n}{2\pi}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.6})$$

En este caso, notamos que en el intervalo entre  $\tau = 0$  y  $\tau = 1$  hay un solo máximo local en  $\tau = 1/2$  y dos mínimos en  $\tau \approx \frac{1.823}{2\pi}$  y  $\tau \approx \frac{2\pi-1.823}{2\pi}$ .

- Curva azul: Si  $|c_1| = \sqrt{7/100}$ ,  $|c_2| = \sqrt{1/2}$ ,  $|c_3| = \sqrt{2/5}$ ,  $|c_4| = \sqrt{3/100}$  la ecuación (B.2) igualada a cero implica

$$\frac{21}{5000} \sin 4\pi\tau + \frac{9}{100} \sin 2\pi\tau = 0 \quad (\text{B.7})$$

con solución

$$\tau = n, \quad \tau = \frac{1+2n}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

y el comportamiento es similar al de la curva verde.

- Curva roja: En este caso  $|c_1| = \sqrt{1/16}$ ,  $|c_2| = \sqrt{1/16}$ ,  $|c_3| = \sqrt{1/16}$ ,  $|c_4| = \sqrt{13/16}$ , lo que conduce a

$$\frac{13}{128} \sin 4\pi\tau + \frac{7}{64} \sin 2\pi\tau = 0 \quad (\text{B.9})$$

con solución

$$\tau = n, \quad \tau = \frac{1+2n}{2}, \quad \tau \approx \frac{\pm 2.139 + 2\pi n}{2\pi}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.10})$$

- Curva rosa: En este caso  $|c_1| = \sqrt{47/100}$ ,  $|c_2| = \sqrt{1/50}$ ,  $|c_3| = \sqrt{1/100}$ ,  $|c_4| = \sqrt{1/2}$  y los valores extremos se alcanzan cuando

$$\frac{47}{100} \sin 4\pi\tau + \frac{221}{10000} \sin 2\pi\tau = 0 \quad (\text{B.11})$$

o sea, cuando

$$\tau = n, \quad \tau = \frac{1+2n}{2}, \quad \tau \approx \frac{\pm 1.594 + 2\pi n}{2\pi}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.12})$$

Los resultados de B.4, B.6, B.8, B.10 y B.12 son consistentes con lo que se observa en la Figura 2.6b.

# Bibliografía

- [1] M. R. Frey, “Quantum speed limits—primer, perspectives, and potential future directions,” *Quantum Information Processing*, vol. 15, pp. 3919–3950, Oct. 2016.
- [2] N. Margolus and L. B. Levitin, “The maximum speed of dynamical evolution,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 120, pp. 188–195, Sept. 1998.
- [3] A. Valdés-Hernández and F. J. Sevilla, “A new route toward orthogonality,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 54, p. 025301, Dec. 2020.
- [4] S. Deffner and S. Campbell, “Quantum speed limits: from Heisenberg’s uncertainty principle to optimal quantum control,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, p. 453001, Nov. 2017.
- [5] A. P. Majtey, A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, and A. R. Plastino, “Entropic Characterization of Quantum States with Maximal Evolution under Given Energy Constraints,” *Entropy*, vol. 21, p. 770, Aug. 2019.
- [6] M. Le Bellac, *Quantum Physics*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [7] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. Two Volumens Bound as One. New York: Dover Publications, 1999.
- [8] B. C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*. New York: Springer, 2013.
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Education International, second ed., 2005.
- [10] D. Fleisch, *A Student’s Guide to the Schrödinger Equation / General and classical physics*. Student’s Guide series, New York: Cambridge University Press, 2020.
- [11] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. New York: Cambridge University Press, 10th anniversary edition ed., 2010.
- [12] A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, A. P. Majtey, and A. R. Plastino, “Entanglement and the ticking of the clock,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, June 2020.
- [13] S. Luo, “On survival probability of quantum states,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, pp. 2991–2995, Mar. 2005.



- [14] E. Rieffel and W. Polak, *Quantum Computing, A Gentle Introduction*. London, England: Cambridge, 2011.
- [15] R. S. Sutor, *Dancing with Qubits, How quantum computing works and how it can change the world*. Packt Publishing, 2019.
- [16] J. Dimock, *Quantum Mechanics and Quantum Field Theory: A Mathematical Primer*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.