



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**TEOREMAS TIPO RAMSEY
EN NERVIOS DE
COMPLEJOS SIMPLICIALES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANTONIO DE JESÚS TORRES HERNÁNDEZ

DIRECTOR:
DRA. DEBORAH OLIVEROS BRANIFF
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD JURIQUILLA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD JURIQUILLA
DR. JESÚS A. DE LOERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UC DAVIS

QUERÉTARO, MÉXICO, MAYO DE 2023.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

**TEOREMAS TIPO RAMSEY
EN NERVIOS DE
COMPLEJOS SIMPLICIALES**

Antonio de Jesús Torres Hernández

Tesis presentada para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Tutor principal:

Dra. Déborah Oliveros Braniff

Comite tutor:

Dr. Luis Montejano Peimbert

Dr. Jesús A. De Loera

Querétaro, México, Mayo de 2023.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. El teorema de Tverberg y los nervios de particiones de puntos	5
1.2. La teoría de Ramsey y su relación con el teorema de Tverberg	7
1.3. Resumen	8
2. Un nuevo modelo para gráficas aleatorias de intervalos	11
2.1. La metáfora del observador de aves	11
2.2. Estableciendo un modelo general	12
2.2.1. El caso especial que analizamos	17
2.3. Gráficas de intervalos aleatorios y comportamiento esperado	19
2.4. Grado, clanes y comportamiento asintótico	21
2.4.1. Clanes.	24
2.4.2. Comportamiento del nervio a medida que el número de muestras tiende a infinito	25
2.5. Distribuciones uniformes y la probabilidad de obtener un árbol como nervio	28
3. Gráficas bipartitas como nervios	35
3.1. Palabras y gráficas	35
3.1.1. Gráficas palabra y k -palabra representables	36
3.1.2. Gráficas d -palabra-representables generales	37

3.1.3.	Gráficas 2-palabra-representables y polígono-circulares	38
3.2.	Nervios sobre el politopo cíclico y su relación con las palabras	39
3.3.	Extensiones y teoremas tipo Tverberg	41
3.3.1.	Extensiones en \mathbb{R}^2	42
3.3.2.	Extensiones en \mathbb{R}^d	44
3.3.3.	Bipartitas como gráficas d -palabra-representables generales	44
3.3.4.	Las gráficas bipartitas son d -Tverberg	46
3.3.5.	El hipercubo Q_n	48
3.3.6.	Los prismas con un número par de vértices en sus bases	50
4.	Gráficas de particiones de Tverberg	53
4.1.	Gráficas de complejos simpliciales	53
4.2.	Gráficas de r -particiones	54
4.3.	Gráficas de r -particiones de Tverberg	57
4.3.1.	Conectividad	58
4.3.2.	Máximo y mínimo grado	59
4.3.3.	Clanes	63
4.4.	Gráficas de particiones de Radón	63
5.	Conclusiones y trabajo a futuro	67
6.	Apéndice: Definiciones y conceptos básicos	71
6.1.	Gráficas	71
6.2.	Complejos simpliciales y nervios	73
6.3.	Tipos de orden	74
6.4.	El teorema de Erdős-Szekeres	76
6.5.	El teorema de Helly	76
6.6.	Carathéodory y Carathéodory coloreado	77
6.7.	Procesos estocásticos	78

Capítulo 1

Introducción

En todo caos hay un cosmos, en todo desorden un orden secreto.

(C.G. Jung)

1.1. El teorema de Tverberg y los nervios de particiones de puntos

La geometría discreta está repleta de problemas hermosos, de enunciados simples y de mucha profundidad. Uno de los teoremas más famosos y bellos de esta área se debe al matemático noruego Helge Arnulf Tverberg y establece lo siguiente:

Teorema 1.1 (Teorema de Tverberg 1966 [Tve66]). Todo conjunto S con al menos $(d + 1)(r - 1) + 1$ puntos en el d -espacio euclidiano \mathbb{R}^d puede ser particionado en r partes $P = S_1, \dots, S_r$ tal que todas las envolventes convexas de estas partes tienen intersección no vacía. Dichas particiones son llamadas r -particiones de Tverberg.

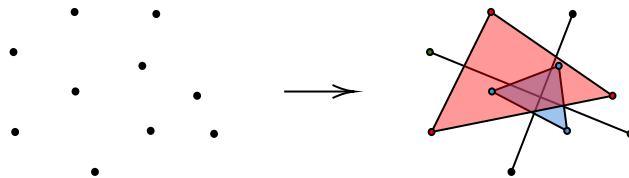


Figura 1.1: Conjunto de puntos y una 4-partición de Tverberg.

Este importante resultado surge como la generalización del lema de Radón [Rad21] (donde $r = 2$), mismo que ha dado lugar a diversos e interesantes trabajos en áreas como la Topología y la Geometría Combinatoria, entre otras.

En el artículo [DLHOY21] los autores notaron la inherente relación de este teorema con un concepto ampliamente estudiado en la geometría convexa, los nervios de complejos simpliciales, mismos que se definen de la siguiente manera.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$ una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . El *nervio* $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ es el complejo simplicial cuyos k -simplejos son los $(k+1)$ -subconjuntos $I \subset [r]$ tales que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ (ver [Mat13],[Tan13] y apéndice 6.2 para más detalles).

Dado un conjunto de puntos en posición general en \mathbb{R}^d y una partición de este, digamos en clases cromáticas, observemos que al considerar las envolventes convexas de estas partes obtenemos una familia de convexos. De esta manera, podemos entonces codificar combinatoriamente el nervio que induce esta partición. Es decir, de manera formal tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3. Dada una colección finita de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ y una r -partición $P = S_1, \dots, S_r$ de S , el *nervio de la partición*, $\mathcal{N}(P)$ es el nervio $\mathcal{N}(\{\text{conv}(S_1), \dots, \text{conv}(S_r)\})$, donde $\text{conv}(S_i)$ denota a la envolvente convexa de los elementos de parte S_i , para $i \in [r]$.

Esta tesis trata principalmente con nervios provenientes de particiones de puntos, por lo que a lo largo del texto nos referiremos a ellos simplemente como nervios cuando no haya peligro de confusión.

Diremos que un complejo simplicial \mathcal{K} es *inducido por una partición* en un conjunto finito de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ si existe una partición P de S de manera que el nervio de la partición sea isomorfo a \mathcal{K} (ver figura 1.2). Entonces, \mathcal{K} es *d -Tverberg* si existe una constante $c > 0$, de manera que para todo conjunto de puntos S con al menos c puntos, existe una partición P , tal que $\mathcal{N}(P) = \mathcal{K}$. El mínimo de estos números, denotado por $Tv(\mathcal{K}, d)$, es llamado el *número de Tverberg* para \mathcal{K} en dimensión d .

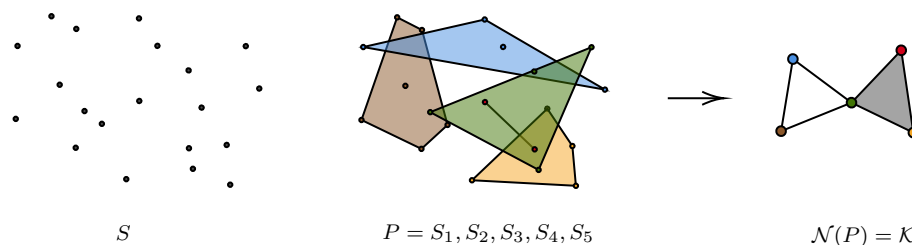


Figura 1.2: Un conjunto de puntos S , una partición P de S y el complejo simplicial \mathcal{K} inducido como nervio.

1.2. La teoría de Ramsey y su relación con el teorema de Tverberg

La denominada teoría de Ramsey (en honor del matemático y filósofo británico Frank Plumpton Ramsey) es un campo fascinante dentro de las matemáticas. Este vio la luz hace ya casi 100 años con la publicación en 1928 de un artículo con la prueba de lo que más tarde sería conocido como el teorema de Ramsey.

Curiosamente, aunque Ramsey estuvo involucrado en una amplia variedad de disciplinas, sobre todo en la economía, donde trabajó con el famoso economista John Maynard Keynes y produjo varios artículos, se considera a este teorema como su más grande aportación. Lamentablemente, Ramsey murió en 1930 a la corta edad de 26 años a causa de complicaciones producto de una cirugía abdominal.

De manera muy general, la teoría de Ramsey es un compendio de teoremas que estudian las condiciones que se han de cumplir para que en un conjunto dado suficientemente grande aparezca un cierto tipo de orden. Más concretamente, cuántos elementos ha de haber en un conjunto para que aparezca una determinada propiedad.

Es en este sentido que podemos pensar al antes mencionado teorema de Tverberg como un teorema tipo Ramsey donde el “conjunto” es un conjunto de puntos y “suficientemente grande” significa con al menos $Tv(\mathcal{K}, d) = (d+1)(r-1) + 1$ puntos y la llamada “determinada propiedad” se refiere a la existencia de una partición P en r partes de S , tales que $\mathcal{N}(P) = \mathcal{K}$ donde \mathcal{K} es un simplejo. Esto nos permite reformular el teorema de Tverberg en la filosofía de los nervios de particiones de puntos como sigue:

Teorema 1.4 (Teorema de Tverberg reformulado). El $(r - 1)$ -simplejo Δ_{r-1} es un complejo d -Tverberg para todo $d \geq 1$, con número de Tverberg $Tv(\Delta_{r-1}, d) = (d + 1)(r - 1) + 1$.

Esta formulación fue dada por los autores en [DLHOY21], señalando que el teorema de Tverberg puede ser interpretado como un caso especial de una situación más general. Ellos analizaron otras familias de complejos simpliciales obteniendo interesantes resultados. Por ejemplo, probaron en particular, que los árboles y los ciclos C_n con $n \geq 3$ son d -Tverberg para toda $d \geq 2$.

A lo largo de este trabajo responderemos algunas de las preguntas que los autores propusieron en ese artículo. Además, propondremos nuevas técnicas y enfoques que amplían y dan continuidad al tema. También enunciaremos nuevas preguntas y conjeturas.

1.3. Resumen

Esta tesis es el compendio de tres artículos generados durante nuestra investigación. Aunque todos ellos surgen del concepto de nervios de particiones de puntos, abarcan problemas con diferentes enfoques.

En el capítulo 2, exploramos el concepto de nervios de particiones de familias de puntos en la línea [LJROT23]. Proponemos un nuevo modelo para generar gráficas de intervalos aleatorias. Hablaremos de la relación de este modelo con el problema clásico del coleccionista de cupones [FS14] y veremos que por el teorema de Helly estas gráficas determinan por completo a los nervios en la línea. Compararemos además este modelo con otros modelos similares como el modelo de J., Scheinerman [Sch88], analizaremos también sus diferencias y mostraremos algunos de los resultados estructurales sobre las gráficas obtenidas. Este modelo podría aplicarse a actividades de muestreo cronológico.

En el capítulo 3 introduciremos un nuevo enfoque para el análisis de los nervios provenientes de conjuntos de puntos en dimensiones superiores [OT21]. Relacionaremos los nervios con un nuevo e interesante concepto en la combinatoria, las gráficas palabra-representables (ver [KL15]). Propondremos una definición que generaliza a

estas gráficas y que tiene una relación geométrica con conjuntos de puntos sobre la curva momento. Utilizando estos conceptos probaremos que toda gráfica G libre de triángulos que sea inducida como nervio en conjuntos de n puntos en posición convexa en el plano es 2-Tverberg. También responderemos una de las preguntas propuestas en [DLHOY21] mostrando que toda gráfica bipartita es d -Tverberg para alguna dimensión suficientemente grande. Finalmente, mejoraremos las cotas para la dimensión necesaria en el caso en que las gráficas bipartitas sean también hipercubos o prismas.

Hacia el final de la tesis, en el capítulo 4 exploramos la estructura subyacente en las distintas particiones de Tverberg tratando de extraer las propiedades generales de las mismas. Proponemos una nueva gráfica que contiene mucha de la estructura geométrica y combinatoria de estas particiones, llamada gráfica de r -particiones de Tverberg. En esta gráfica los vértices son las r -particiones de Tverberg de un conjunto de puntos S en posición general en espacio euclidiano. Con la propiedad de que una arista entre dos de estas particiones existe si y solo si difieren exactamente en un elemento. Daremos cotas para algunos parámetros comúnmente estudiados en la teoría de gráficas como la conexidad, el grado mínimo y grado máximo, el número de clan, entre otros. Estudiaremos también, algunas propiedades que tienen fuerte relación con resultados importantes obtenidos en la literatura como por ejemplo la tolerancia de las particiones de Tverberg.

En el capítulo 5, a manera de conclusión haremos un listado de los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo. Plantearemos también algunas preguntas y conjeturas que creemos resultan interesantes y las cuales podrían generar posibles líneas de investigación para continuar la investigación en un futuro.

Por último, con el objetivo de que este trabajo resulte cómodo en su lectura y lo más autocontenido posible, agregamos un apéndice con las definiciones, conceptos básicos y teoría necesaria para la plena comprensión de esta tesis. Naturalmente esta sección puede ser omitida por lectores versados en el área.

Capítulo 2

Un nuevo modelo para gráficas aleatorias de intervalos

A todo el mundo le gustan los pájaros. ¿Qué criatura salvaje es más accesible a nuestros ojos y oídos, tan cercana a nosotros y a todos en el mundo, tan universal como un pájaro?

(David Attenborough)

2.1. La metáfora del observador de aves

Supongamos que eres un ávido observador de aves y estás interesado en los patrones migratorios de las distintas aves que pasan por tu área este invierno. Cada día, sales a tu patio trasero y vigilas los cielos; cada vez que ves un pájaro, tomas nota de la especie, el día y la hora en que lo observaste. Sabes por experiencia previa que hay r especies diferentes de aves que pasan por tu casa cada año y te encantaría observar al menos un representante de cada especie. Naturalmente, comienzas a preguntarte: *después de n observaciones, ¿qué probabilidad existe de que se hayan visto todos los tipos de aves?* Si solo nos preocupamos de que todos los r tipos de aves se observen al menos una vez después de n observaciones, reconocemos esta situación como un ejemplo del famoso *problema del coleccionista de cupones* (para una revisión completa de este problema, consulte [FS14] y sus referencias). En este problema clásico, una persona está tratando de coleccionar r tipos de objetos, los cupones,

etiquetados $1, 2, \dots, r$. Los cupones llegan uno por uno como una secuencia ordenada X_1, X_2, \dots de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.) que toman valores en $[r] = \{1, \dots, r\}$.

Pero un observador de aves profesional tal vez está interesado en información un tanto más específica que el coleccionista de cupones. Para comprender por ejemplo las interacciones entre especies, no solo esperando observar cada ave, sino que también desearía saber qué especies pasaron por el área al mismo tiempo. Por ejemplo, el observador de aves también podría preguntarse lo siguiente:

- *¿Cuál es la probabilidad de que las visitas de los r tipos de aves no se empalmen en absoluto?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que dos especies distintas de aves estén presentes en el mismo intervalo de tiempo?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que en el intervalo de tiempo en el que se observa una especie de ave se observen otras r especies?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que todos los tipos de aves sean vistas a lo largo de un intervalo de tiempo?*

Matemáticamente, necesitamos un buen modelo que capture y resuelva las preguntas anteriores sobre la interacción entre las diferentes especies de aves. Nuestro propósito en esta sección es presentar un nuevo *modelo de gráficas de intervalos aleatorias* para responder estas cuatro preguntas.

Este modelo es muy general, pero para evitar formalismos y tecnicismos innecesarios, presentamos respuestas claras en algunos casos especiales que generalizan directamente el problema del coleccionista de cupones. Para los casos especiales que analizaremos, las únicas herramientas que utilizaremos son una combinación de probabilidad elemental y geometría combinatoria.

2.2. Estableciendo un modelo general

Nuestras observaciones son muestras de un proceso estocástico $Y = \{Y_t : t \in [0, T]\}$ que toma valores en $[r]$ (ver apéndice 6.7). Para cada $i \in [r]$, las probabilidades de que $Y_t = i$ nos dan una función de $[0, T] \rightarrow [0, 1]$, que llamaremos la *función de tasa*

de Y correspondiente a i ; el nombre está inspirado en el lenguaje de los procesos de puntos de Poisson donde la densidad de puntos en un intervalo está determinada por un parámetro *tasa* (ver [Ros96]).

Definición 2.1. Sea $Y = \{Y_t : t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico con conjunto de índices $I = [0, T]$ y espacio de estados $S = [r]$. La *función de tasa* correspondiente a la etiqueta $i \in S$ en este proceso es la función $f_i : I \rightarrow [0, 1]$ dada por $f_i(t) = \mathbb{P}(Y_t = i) = \mathbb{P}(\{\omega : Y_t(\omega) = i\})$.

La figura 2.1 muestra dos ejemplos de la función de tasa de algunos procesos estocásticos hipotéticos. Aclararemos el significado de estacionario y no estacionario más adelante en esta sección cuando discutamos un caso especial de nuestro modelo. Observe que en un tiempo fijo t_0 , los valores $f_i(t_0)$ suman 1 determinando la función de densidad de probabilidad de Y_{t_0} . Por tanto, las funciones de tasa describen el cambio de las funciones de densidad de probabilidad de las variables Y_t con respecto a la variable de índices t .

Ahora, tengamos en cuenta que el conjunto de veces en que la especie i puede estar presente es exactamente el *soporte* de la función de tasa f_i . Recuerde, el soporte de una función es el subconjunto de su dominio para el cual la función no es cero, en nuestro caso será una porción de $[0, T]$. Por lo tanto, *nuestro problema clave es estimar el soporte de las funciones de tasa a partir de un número finito de muestras*.

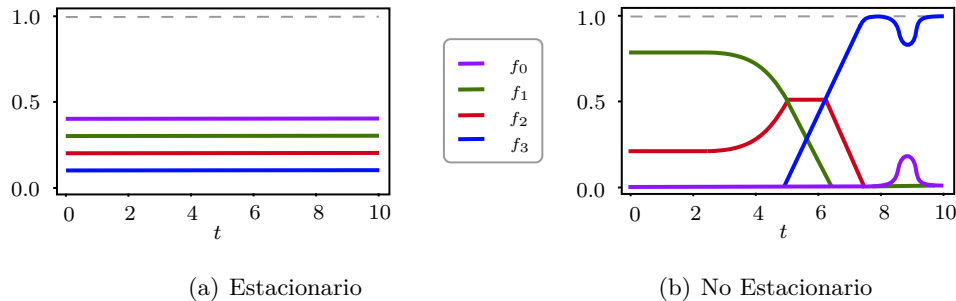


Figura 2.1: Dos ejemplos de funciones de tasa hipotéticas.

Notemos que el proceso estocástico Y está definido para tomar valores en $[r]$, debido a nuestra elección del modelo. Alternativamente, se podría hacer que Y tome valores en el conjunto de potencias $2^{[r]}$, para permitir observar múltiples especies de aves al mismo tiempo. Sin embargo, elegir $[r]$ en lugar de $2^{[r]}$ simplifica algunos cálculos y además es bastante razonable. En lugar de registrar “tres pájaros a las 6 en punto”,

nuestro observador de aves puede registrar tres avistamientos: un pájaro a las 6 : 00 : 00, un segundo a las 6 : 00 : 01 y un tercero a las 6 : 00 : 02 por ejemplo.

Esto nos lleva a nuestra siguiente opción de modelado: todas las funciones de tasa f_i tienen soporte conexo para cada $i \in [r]$. Lo cual es razonable también para nuestra motivación; después de todo, no es probable que una especie de ave vista por primera vez un lunes y vista por última vez un viernes esté repentinamente fuera del área el miércoles. El principal beneficio de esto es que ahora el soporte de la función de tasa f_i , $\text{supp}(f_i)$, es un subintervalo de $[0, T]$. Este hecho proporciona una forma natural de aproximar el soporte de f_i : dada una secuencia de observaciones $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ con $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, sea $I_n(i)$ el subintervalo de $[0, T]$ cuyos extremos son el primer y el último tiempo t_k para el cual $Y_{t_k} = i$. Hay que tener en cuenta que es posible que $I_n(i)$ esté vacío o sea un solo punto. De ello se deduce que $I_n(i) \subset \text{supp}(f_i)$, por lo que podemos usarlo para aproximar $\text{supp}(f_i)$. Llamaremos al intervalo $I_n(i)$ el *soporte empírico* de f_i , ya que es una aproximación de $\text{supp}(f_i)$ tomado de una muestra aleatoria y satisface que $\text{supp}(f_i) \supset I_n(i)$.

En resumen, nuestro modelo es bastante simple: dada una secuencia de observaciones $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ construimos r intervalos aleatorios $I_n(1), \dots, I_n(r)$ cuyos extremos son la primera y la última vez que vemos la especie correspondiente.

Las cuatro preguntas anteriores sobre observación de aves pueden expresarse en términos de los soportes empíricos de la siguiente manera:

- *¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los soportes empíricos $I_n(i)$ se intersecten?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que un par específico de soportes empíricos $I_n(i)$ y $I_n(j)$ se intersecten?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que un soporte empírico, $I_n(i)$, se cruce con otros k soportes?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que la colección de todos los soportes empíricos tenga una intersección no vacía?*

Para hacer que estas preguntas sean aún más fáciles de analizar, utilizaremos la *gráfica de intersección de intervalos* $G = (V, E)$ (ver apéndice 6.1), cuyo conjunto de vértices $V(G)$ es $[r]$ y en el cual existe la arista $\{i, j\} \in E(G)$ si $I_n(i) \cap I_n(j) \neq \emptyset$.

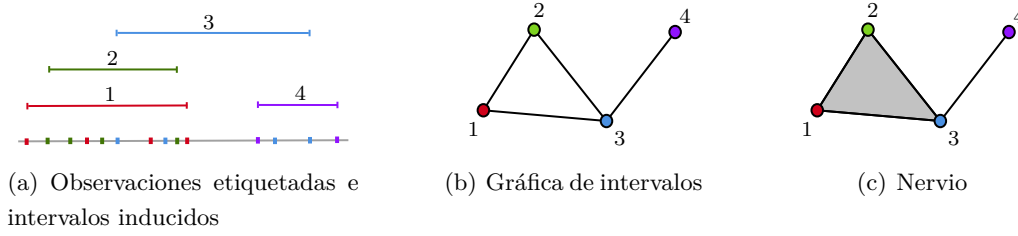


Figura 2.2: Ejemplo de observaciones con su correspondiente gráfica y nervio.

La figura 2.2 ejemplifica la construcción de la gráfica de intervalos deseada a partir de algunas observaciones. La figura 2.2(a) muestra una secuencia de $n = 11$ puntos en la línea real, que corresponde al conjunto de índices I de nuestro proceso aleatorio Y . Encima de cada punto tenemos una etiqueta que representa una muestra de Y en ese momento. Arriba de los datos se muestran los soportes empíricos $I_n(i)$ para cada $i \in [r] = [4]$. Finalmente, la figura 2.2(b) muestra la gráfica de intervalos construida a partir de estos cuatro intervalos, donde cada vértice está etiquetado con el intervalo al que corresponde. En este ejemplo, no hay intersección entre las especies $\{1, 2\}$ y la especie $\{4\}$, por lo que no aparecen aristas entre esos vértices.

Hacemos hincapié en que la gráfica de intervalos construida de esta manera podría tener hasta r vértices, pero también podría contener menos si algunos de los intervalos $I_n(i)$ están vacíos, es decir, si nunca vemos representantes de la especie i en nuestras observaciones.

La figura 2.2(c) muestra el nervio construido a partir de los intervalos $I_n(i)$ en la figura 2.2(a). Nótese la presencia de un 2-simplejo (triángulo) con vértices $\{1, 2, 3\}$ porque los intervalos correspondientes se intersectan mutuamente.

Por construcción, la gráfica de intervalos G es exactamente el 1-esqueleto del nervio \mathcal{N} generado por los intervalos. De hecho, debido a que nuestros intervalos se encuentran en un espacio unidimensional, \mathcal{N} está completamente determinado por G . Para ver esto, supongamos que tenemos una colección de intervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ tales que todos los intervalos se cruzan por pares. Se sigue que $y_i \geq x_j$ para todo $i, j \in [k]$, y así $(\max\{x_1, \dots, x_k\}, \min\{y_1, \dots, y_k\}) \subseteq \bigcap_{i=1}^k (x_i, y_i)$. Por lo tanto, toda la colección tiene una intersección no vacía; éste es un caso especial del teorema de Helly [Bar02], que es necesario durante la investigación del problema en dimensiones superiores. De aquí que por lo tanto, las caras k -dimensionales del nervio son precisamente k -facetas de la gráfica de intervalos.

Por lo tanto, a lo largo de este capítulo nos referiremos al nervio \mathcal{N} y a la gráfica G indistintamente según el contexto, pero el lector debe entender que estos son fundamentalmente el mismo objeto siempre que la familia de conjuntos convexos \mathcal{F} se encuentra en un espacio unidimensional. Hacemos hincapié en que en dimensiones superiores la gráfica de intersección de conjuntos convexos *no* determina el nervio (lo demostramos con un ejemplo al final de este capítulo).

Ahora podemos presentar nuestro modelo de gráficas de intervalos aleatorios en su totalidad:

Definición 2.2 (El modelo de gráficas de intervalos aleatorias). Sea $Y = \{Y_t : t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico como el anterior y sea $\mathcal{P} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un conjunto de n tiempos de observación distintos o puntos de muestra en $[0, T]$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Entonces sea $Y_{\mathcal{P}} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ un vector aleatorio cuyos componentes Y_i son muestras de Y donde $Y_i = Y_{t_i}$, por lo que cada Y_i toma valores en $\{1, \dots, r\}$. Para cada etiqueta i definimos el intervalo (posiblemente vacío) $I_n(i)$ como la envolvente convexa de los puntos t_j para los cuales $Y_j = i$, es decir, el intervalo definido por los puntos coloreados en i . Explícitamente $I_n(i) = \text{conv}(\{t_j \in \mathcal{P} : Y_j = i\})$, y nos referimos a $I_n(i)$ como *soporte empírico* de la etiqueta i . Además, debido a que proviene de las n observaciones o muestras, llamamos al nervio, $\mathcal{N}(\{I_n(i) : i = 1, \dots, r\})$, el *nervio empírico* de Y y lo denotamos $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$.

Bajo este modelo de gráficas de intervalos aleatorias, nuestras cuatro preguntas se pueden reformular en términos de la gráfica aleatoria $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$

- ¿Cuál es la probabilidad de que $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$ no tenga aristas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una arista particular esté presente en $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$?
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un vértice de grado al menos k en $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$?
- ¿Cuál es la probabilidad de que $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$ sea la gráfica completa K_r ?

¡Nuestras preguntas originales se han convertido en preguntas sobre gráficas aleatorias!

2.2.1. El caso especial que analizamos

Presentamos un modelo muy general porque capta mejor los matices y sutilezas de nuestro problema. Sin embargo, sin supuestos adicionales sobre la distribución Y , responder a las preguntas anteriores se vuelve muy técnico y poco intuitivo debido a la prevalencia de casos patológicos. Por lo tanto, nuestro análisis se centrará en un caso especial de este problema en el que presentamos dos suposiciones adicionales sobre Y , de esta manera nuestro análisis requiere solamente de probabilidad combinatoria básica.

La primera suposición que hacemos es que nuestras observaciones $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ son variables aleatorias mutuamente independientes. Tengamos en cuenta que no afirmamos que todos los pares de variables aleatorias Y_s, Y_t para $s, t \in [0, T]$ sean independientes. Solo afirmamos que esto es válido para todos los $s, t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

La segunda suposición que hacemos es que las funciones de tasa f_i sean constantes a lo largo del intervalo $[0, T]$. En este caso, existen constantes $p_1, p_2, \dots, p_r \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ y $f_i(t) = p_i$ para todo $t \in [0, T]$ y todo $i \in [r]$. Llamamos al caso especial de nuestro modelo donde ambas suposiciones se cumplen el *caso estacionario* y todos los demás casos como *no estacionarios*. La figura 2.1 ilustra ejemplos de un caso estacionario, 2.1(a), y un caso no estacionario, 2.1(b). También nos referiremos al *caso uniforme*, que es la situación extraespecial donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$. Observe que la figura 2.1(a) es estacionaria pero no uniforme.

Por supuesto, el caso estacionario es menos realista y aplicable en muchas situaciones. Por ejemplo, no es descabellado suponer que la presencia de una paloma a las 10 en punto influya en la presencia de otra a las 10 : 01, o que la presencia de palomas fluctúe según la estación y la hora del día. Sin embargo, el caso estacionario continúa siendo rico en contenido y, lo que es más importante, simplifica las cosas para que este análisis solo requiera herramientas de nivel básico de probabilidad y combinatoria. Además, como analizaremos a continuación, el caso estacionario tiene una fuerte conexión con el famoso problema del coleccionista de cupones y es de interés como un método novedoso para generar gráficas de intervalos aleatorias.

Los supuestos del caso estacionario conducen directamente a dos consecuencias importantes que simplifican enormemente nuestro análisis. La primera, es que ahora las variables aleatorias Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) tal que $\mathbb{P}(Y_{t_k} = i) = p_i > 0$. Tengamos en cuenta que esto es cierto para cualquier conjunto de tiempos de observación distintos $\mathcal{P} = \{t_1, \dots, t_n\}$. La segunda

consecuencia simplifica aún más las cosas: aunque los puntos \mathcal{P} correspondientes a nuestros tiempos de muestreo hasta ahora han sido tratados como arbitrarios, uno puede asumir sin pérdida de generalidad que $\mathcal{P} = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$, pues todos los conjuntos de n puntos en \mathbb{R} son *combinatoriamente equivalentes*, como probamos en el siguiente lema.

Lema 2.3. Sea $Y = \{Y_t : t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico y sean $\mathcal{P}' = \{t'_1, \dots, t'_n\}$ y $\mathcal{P}'' = \{t''_1, \dots, t''_n\}$ dos conjuntos de n puntos de muestra distintos en $[0, T]$ con $t'_1 < \dots < t'_n$ y $t''_1 < \dots < t''_n$. Sean $Y_{\mathcal{P}'} = (Y'_1, \dots, Y'_n)$ y $Y_{\mathcal{P}''} = (Y''_1, \dots, Y''_n)$ vectores aleatorios cuyas componentes son variables aleatorias i.i.d. que toman valores en $[r]$ con $\mathbb{P}(Y'_j = i) = p_i > 0$ y $\mathbb{P}(Y''_j = i) = p_i > 0$. Entonces para cualquier complejo simplicial abstracto \mathcal{K} tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{N}_n(\mathcal{P}', Y') = \mathcal{K}) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_n(\mathcal{P}'', Y'') = \mathcal{K})$.

Prueba: Sea c_1, c_2, \dots, c_n una secuencia arbitraria de etiquetas, entonces $c_i \in [r]$ para cada i . Como $Y_{\mathcal{P}'}, Y_{\mathcal{P}''}$ son i.i.d. tenemos que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{Y'_i = c_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{Y'_i = c_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{Y''_i = c_i\}) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{Y''_i = c_i\})$. Por lo tanto, si ambas secuencias de colores $Y'_i = Y''_i = c_i$ tienen el mismo orden para todo $i = 1, \dots, n$, entonces es suficiente demostrar que los dos nervios empíricos son iguales. Considere dos soportes empíricos $I'_n(j)$ y $I''_n(k)$ de etiquetas j, k , y observe que si se intersectan (no se intersectan) en Y'_i , entonces los dos soportes empíricos $I''_n(j)$ y $I''_n(k)$ con etiquetas j, k se intersectan (no se intersectan), entonces los dos nervios empíricos correspondientes contienen (o no) la arista $\{j, k\}$. Esto implica que los dos nervios tienen el mismo conjunto de aristas. Más aún, como observamos anteriormente, debido al teorema de Helly en la línea, el nervio empírico está completamente determinado por su 1-esqueleto. Entonces, ambos nervios empíricos son iguales. \square

De esta manera el nervio empírico $\mathcal{N}_n(\mathcal{P}, Y)$ no depende realmente de la elección del conjunto de puntos \mathcal{P} , por lo que a partir de ahora lo denotaremos simplemente como $\mathcal{N}_n(Y)$ para simplificar notación.

Ahora resumiremos los supuestos clave de nuestro modelo en el caso estacionario.

Supuestos clave para nuestro análisis.

En todos los resultados que siguen sea $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vector aleatorio cuyas componentes son variables aleatorias i.i.d. tales que $\mathbb{P}(Y_j = i) = p_i > 0$ para todo $i \in [r]$. Como consecuencia, las funciones soporte del proceso estocástico subyacente son constantes y cada una tiene soporte en todo el dominio. Denotamos por $\mathcal{N}_n =$

$\mathcal{N}_n([n], Y)$ el nervio empírico de la coloración aleatoria inducida por Y . También denotamos a la gráfica o 1-esqueleto de \mathcal{N}_n con el mismo símbolo. Cuando nos referimos al caso uniforme esto significa la situación especial cuando $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i = 1, \dots, r$.

2.3. Gráficas de intervalos aleatorios y comportamiento esperado

Ahora, exploraremos qué tipo de nervios podrían esperarse dado un número fijo de observaciones n cuando la probabilidad de observar cada etiqueta i es una constante $p_i > 0$.

Proposición 2.4. Bajo los supuestos clave de la página 18, la probabilidad de que la gráfica aleatoria \mathcal{N}_n sea la gráfica vacía con $0 \leq k \leq r$ vértices pero sin aristas, K_k^c , viene dada por

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = K_k^c) \geq p_*^n k! \binom{r}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

donde $p_* = \min\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Además, si $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, entonces

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = K_k^c) = \frac{k!}{r^n} \binom{r}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Prueba: Tenga en cuenta que para que \mathcal{N}_n genere una colección disconexa de k puntos, los intervalos inducidos por la coloración también deben ser disconexos. Esto ocurre si y solo si todos los puntos del mismo color se agrupan. Dados k colores fijos, es bien sabido que las agrupaciones disjuntas se cuentan por el número de configuraciones de n en k partes, $\binom{n-1}{k-1}$. Cada configuración ocurre con una probabilidad de al menos p_*^n . Finalmente, considerando las $\binom{r}{k}$ diferentes formas de elegir estos k colores y como hay exactamente $k!$ formas de ordenarlos, tenemos,

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = K_k^c) \geq p_*^n k! \binom{r}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

El resultado para la versión uniforme sigue la misma idea, pero aquí cada k -coloración de los n puntos ocurre con probabilidad $\frac{1}{r} = p_*$. □

A continuación, acotaremos la probabilidad de que una arista particular esté presente en la gráfica de intervalos aleatoria.

Teorema 2.5. Bajo los supuestos clave de la página 18 y para cualquier par $\{i, j\}$, $1 \leq i < j \leq r$, la probabilidad del evento $A_{ij} = \{\{i, j\} \in \mathcal{N}_n\}$, es decir, que la arista $\{i, j\}$ esté presente en la gráfica \mathcal{N}_n es igual a

$$\mathbb{P}(A_{ij}) = 1 - q_{ij}^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left[\left(2 \sum_{r=1}^{k-1} p_i^r p_j^{k-r} \right) + p_i^k + p_j^k \right] q_{ij}^{n-k},$$

donde $q_{ij} := 1 - (p_i + p_j)$.

Cuando $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, se tiene que $\mathbb{P}(A_{ij}) = 1 - \frac{2n(r-1)^{n-1} + (r-2)^n}{r^n}$.

Prueba: Encontraremos la probabilidad del complemento, A_{ij}^c , que es el evento donde los dos soportes empíricos no se intersectan, es decir, $A_{ij}^c = \{I_n(i) \cap I_n(j)\} = \emptyset$. Sea $C_i = \{\ell : Y_\ell = i, 1 \leq \ell \leq n\}$ y definamos C_j análogamente. Tenga en cuenta que A_{ij}^c se puede expresar como la unión disjunta de tres eventos:

1. $\{C_i \text{ y } C_j \text{ ambos son vacíos}\}$,
2. $\{\text{Exactamente uno de } C_i \text{ o } C_j \text{ es vacío}\}$,
3. $\{C_i \text{ y } C_j \text{ no son vacíos pero } I_n(i) \text{ y } I_n(j) \text{ no se intersectan}\}$.

La probabilidad del primer evento es simplemente q_{ij}^n . Para el segundo evento, suponga por ahora que C_i es el conjunto no vacío y sea $k \in [n]$ el tamaño deseado de C_i . Hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir las ubicaciones de los k puntos en C_i . Una vez elegidos estos puntos, la probabilidad de que estos puntos reciban la etiqueta i y ningún otro reciba la etiqueta i o la etiqueta j es exactamente $p_i^k q_{ij}^{n-k}$. Sumando todos los valores de k y notando que el argumento donde C_j no está vacío es análogo, obtenemos que la probabilidad del segundo evento es exactamente $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (p_i^k + p_j^k) q_{ij}^{n-k}$.

Ahora, observe que el tercer evento solo ocurre si todos los puntos en C_i están a la izquierda de todos los puntos en C_j o viceversa; por ahora suponga que C_i está a la izquierda. Sea $k \in [n]$ el tamaño deseado de $C_i \cup C_j$ y sea $r \in [k-1]$ el tamaño deseado de C_i . Como anteriormente, hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir las ubicaciones de los k puntos en $C_i \cup C_j$. Una vez fijados estos puntos, sabemos que C_i tiene los primeros r puntos, C_j tiene que tener los $k-r$ puntos restantes y todos los demás puntos no pueden tener etiqueta i o etiqueta j . Esto ocurre con probabilidad $p_i^r p_j^{k-r} q_{ij}^{n-k}$. Finalmente, sumando todos los valores de k y r y agregando un factor de 2 para

dar vuelta a C_i y C_j , obtenemos que el tercer evento ocurre con una probabilidad de $2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sum_{r=1}^{k-1} p_i^r p_j^{k-r} q_{ij}^{n-k}$.

Dado que A_{ij}^c es la unión disjunta de estos tres eventos, $\mathbb{P}(A_{ij}^c)$ es igual a la suma de estas tres probabilidades, lo que da el resultado deseado. Para el caso uniforme, simplemente consideramos $p_i = p_j = 1/r$ en la fórmula general y observemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{ij}) &= 1 - \left(\frac{r-2}{r}\right)^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left[\left(2 \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r^k}\right) + \frac{2}{r^k} \right] \left(\frac{r-2}{r}\right)^{nk} \\ &= 1 - \left(\frac{r-2}{r}\right)^n - \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2k(r-2)^{nk} \\ &= 1 - \frac{2n(r-1)^{n-1} + (r-2)^n}{r^n}. \end{aligned}$$

□

A partir de esto, podemos calcular el número esperado de aristas en la gráfica de intervalos aleatoria. La prueba se sigue inmediatamente de lo anterior por la linealidad de la esperanza.

Corolario 2.6. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de aristas en \mathcal{N}_n , la gráfica de intervalos aleatoria. Bajo los supuestos clave de la página 18,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{1 \leq i < j \leq r} 1 - q_{ij}^n - \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} \left(2 \sum_{r=1}^{k-1} p_i^r p_j^{k-r} \right) + p_i^k + p_j^k \right] q_{ij}^{nk},$$

donde $q_{ij} := 1 - (p_i + p_j)$. En el caso uniforme donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, la esperanza es igual a

$$\binom{r}{2} \left(1 - \frac{2n(r-1)^{n-1} + (r-2)^n}{r^n} \right).$$

2.4. Grado, clanes y comportamiento asintótico

En esta sección analizaremos la conectividad del nervio empírico. Primero estudiamos el grado máximo y el número de clan de \mathcal{N}_n . Luego mostraremos que a medida que el número de muestras n tiende a infinito, se tiene que \mathcal{N}_n es con alta probabilidad el $(r-1)$ -simplejo.

El siguiente resultado es un límite inferior de la probabilidad de encontrar un intervalo que se intersecte con todos los demás, es decir, la probabilidad de que el grado máximo $\Delta(\mathcal{N}_n)$ de \mathcal{N}_n sea $r - 1$. En nuestra historia del observador de aves, esto puede interpretarse como la probabilidad de encontrar una especie que coincida en el tiempo con todas las demás.

En el siguiente teorema, denotamos como $\mathcal{X}_{r,k}^n$ al conjunto de composiciones débiles de n con una longitud de r que contiene exactamente k partes distintas de cero [Sta11, pág. 25]. Formalmente, $\mathcal{X}_{r,k}^n = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r : \sum_{i=1}^r x_i = n, |\{x_i : x_i \neq 0\}| = k\}$.

También sea $M(x) = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_r)!}{x_1!x_2!\dots x_r!} \prod_{i=1}^r p_i^{x_i}$ la distribución multinomial aplicada al vector $x \in \mathcal{X}_{r,k}^n$ considerando las probabilidades asociadas p_1, p_2, \dots, p_r . Finalmente, denotemos como S_n^k a los *números de Stirling del segundo tipo* [Sta11, p. 81].

Teorema 2.7. Bajo los supuestos clave de la página 18, el grado máximo de \mathcal{N}_n satisface

$$\mathbb{P}(\Delta(\mathcal{N}_n) = r - 1) \geq$$

$$\max_m \left\{ \left[1 - \sum_{k=1}^{r-1} (r-k)^m p_*^m \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x) \right] \left[\sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r}^{n-2m}} M(x) + \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r-1}^{n-2m}} M(x) \right] \right\}.$$

Además, en el caso uniforme donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, tenemos que

$$\mathbb{P}(\Delta(\mathcal{N}_n) = r - 1) \geq$$

$$\max_m \left\{ \left[1 - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(r-k)^m}{(rk)^m} k! S_m^k \right] \left[\frac{r!}{r^{n-2m}} S_{n-2m}^r + \frac{(r-1)!}{(r-1)^{n-2m}} S_{n-2m}^{r-1} \right] \right\}.$$

Prueba: Fijemos algún $1 \leq m \leq \frac{n-r}{2}$ y consideremos los conjuntos $L_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $C_m = \{m+1, m+2, \dots, n-m\}$ y $R_m = \{n-m+1, n-m+2, \dots, n\}$. Si se cumplen los siguientes eventos, podemos garantizar que $\Delta(\mathcal{N}_n) = r - 1$.

$A_m = \{\text{Existe una clase cromática con puntos en } L_m \text{ y } R_m\}$.

$B_m = \{\text{Existe al menos un punto con cada uno de los } r-1 \text{ colores restantes en } C_m\}$.

Para calcular la probabilidad del evento A_m , calcularemos la probabilidad de su complemento A_m^c , es decir, el evento donde todas las clases cromáticas con puntos en L_m y R_m son disjuntas.

Primero, la probabilidad de que L_m haya sido coloreado exactamente con k colores con $1 \leq k \leq r - 1$ está dada por

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x).$$

Para que ocurra A_m^c , necesitamos que R_m se coloree con solo los $(r - k)$ colores restantes. Tengamos en cuenta que este evento es independiente de la coloración de L_m , ya que los dos conjuntos son disjuntos. Hay $(r - k)^m$ diferentes formas de colorear R_m y cada una ocurre con probabilidad a lo más p_*^m , donde $p_* = \max\{p_i : 1 \leq i \leq r\}$. Así, para un k fijo tenemos que la probabilidad de que no aparezca ningún color tanto en L_m como en R_m es a lo más

$$(r - k)^m p_*^m \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x).$$

Entonces

$$\mathbb{P}(A_m^c) \leq \sum_{k=1}^{r-1} (r - k)^m p_*^m \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x).$$

Esto implica

$$\mathbb{P}(A_m) \geq 1 - \sum_{k=1}^{r-1} (r - k)^m p_*^m \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x).$$

Para calcular $\mathbb{P}(B_m)$, consideremos que la probabilidad de colorear C_m con r o $r - 1$ colores es exactamente

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r}^{n-2m}} M(x) + \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r-1}^{n-2m}} M(x).$$

Finalmente, como A_m y B_m son eventos independientes, tenemos $\mathbb{P}(\Delta(\mathcal{N}_n) = r - 1)$ es mayor que

$$\left[1 - \sum_{k=1}^{r-1} (r - k)^m p_*^m \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^m} M(x)\right] \left[\sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r}^{n-2m}} M(x) + \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,r-1}^{n-2m}} M(x)\right].$$

Si maximizamos m tenemos el resultado deseado.

Finalmente, observamos que para el caso $p_i = \frac{1}{r}$, simplemente aplicamos $p_* = 1/r$ y usamos la desigualdad anterior junto con el hecho de que $k!/k^n S_n^k = \sum_{x \in \mathcal{X}_{r,k}^n} M(x)$.

□

2.4.1. Clanes.

El número de clan esperado en \mathcal{N}_n es de especial interés para nosotros. En nuestra historia del observador de aves, esto corresponde al subconjunto máximo de aves cuyos intervalos de tiempo se cruzan. Si bien, no calculamos exactamente el número de clan esperado, el siguiente teorema proporciona un límite inferior que funciona muy bien en las simulaciones.

Lema 2.8. Bajo los supuestos clave de la página 18 la probabilidad de que un punto arbitrario $x \in [n]$ se encuentre dentro del intervalo de color i , $I_n(i)$, es exactamente $1 - q_i^x - q_i^{n-x+1} + q_i^n$ donde $q_i := 1 - p_i$.

Prueba: Fijamos un $x \in [n]$ arbitrario y definimos el evento $A = \{x \in I_n(i)\}$. Tenga en cuenta que para que A ocurra, x debe estar entre dos puntos con la etiqueta i o x en sí mismo está etiquetado con i . Ahora considere el evento de probabilidad complementario, $A^c = \{x \notin I_n(i)\}$. A continuación, definimos los eventos L, R donde $L = \{\text{ninguno de los puntos menor o igual a } x \text{ tiene la etiqueta } i\}$ y $R = \{\text{ninguno de los puntos mayor o igual que } x \text{ tienen la etiqueta } i\}$. Nota $A^c = L \cup R$ y $\mathbb{P}(L) = q_i^x$, $\mathbb{P}(R) = q_i^{n-x+1}$ y $\mathbb{P}(L \cap R) = q_i^n$. Por lo tanto, por el principio de inclusión-exclusión tenemos,

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(L \cap R) = q_i^x + q_i^{n-x+1} - q_i^n,$$

luego $\mathbb{P}(A) = 1 - q_i^x - q_i^{n-x+1} + q_i^n$. \square

Teorema 2.9. Sea ω la variable aleatoria igual al número de clan de \mathcal{N}_n , es decir, el tamaño del clan más grande en el 1-esqueleto de \mathcal{N}_n . Bajo los supuestos clave de la página 18 tenemos

$$\mathbb{E}[\omega] \geq \sum_{i=1}^r (1 - q_i^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - q_i^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + q_i^n)$$

donde $q_i := 1 - p_i$. Además, en el caso uniforme donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, tenemos que

$$\mathbb{E}[\omega] \geq r - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$$

Prueba: Por el lema anterior sabemos que la probabilidad de que $x \in I_n(i)$ para algún $x \in [n]$ es exactamente $1 - q_i^x - q_i^{n-x+1} + q_i^n$. Para maximizar esta cantidad

sobre $x \in [n]$, primero minimizaremos $f(x) = q_i^x + q_i^{n-x+1} - q_i^n$ sobre todos los x . Tenga en cuenta que f es convexo, por lo que un ejercicio de cálculo muestra que f se minimiza en $x^* = \frac{n+1}{2}$. Esto también se puede ver directamente por el hecho de que f es convexa y simétrica con respecto a $\frac{n+1}{2}$.

Cuando n es impar, el mínimo x^* es un número entero y se encuentra en $[n]$. Para el caso cuando n es par, tenga en cuenta que f es simétrico con respecto a x^* . Por lo tanto, cuando n es par, f se minimiza sobre $[n]$ en los enteros más cercanos a x^* , que son $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$. Entonces, f se minimiza sobre $[n]$ en el punto $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, cuando n es par o impar.

Ahora, para $i = 1, \dots, r$ sea X_i la variable aleatoria indicadora que es igual a 1 si $\lceil \frac{n}{2} \rceil \in I_n(i)$ y es 0 en otro caso y sea $X = \sum_{i=1}^r X_i$, es decir, X cuenta el número de intervalos que contienen el punto $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Note que el número de clan $\omega \geq X$, por lo que

$$\mathbb{E}[\omega] \geq \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^r \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(X_i = 1) = \sum_{i=1}^r (1 - q_i^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - q_i^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + q_i^n).$$

El resultado para el caso uniforme se sigue directamente al hacer $p_i = \frac{1}{r}$ para cada i . □

2.4.2. Comportamiento del nervio a medida que el número de muestras tiende a infinito

Notemos que a medida que aumenta el número de muestras n , el teorema 2.9 implica que el número de clan esperado $\mathbb{E}[\omega] \rightarrow r$. Dado que ω solo toma valores en $\{1, \dots, r\}$, se deduce que el número clan también converge a r . De este modo, conforme n tiende a infinito, la probabilidad de que el nervio sea el $(r-1)$ -simplejo denotado por Δ_{r-1} , es decir, una gráfica completa K_r , tiende a uno. En nuestra analogía del observador de aves, esto implica que con suficientes observaciones es casi seguro encontrar un intervalo de tiempo común en el que se puedan observar todas las r especies. El siguiente teorema proporciona un límite inferior para esta convergencia.

Teorema 2.10. Bajo los supuestos clave de la página 18, la probabilidad de que \mathcal{N}_n sea un $(r-1)$ -simplejo Δ_{r-1} es igual

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}) \geq \left(\sum_{x \in \mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} M(x) \right)^2$$

donde $\mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{N}^r : \sum_{i=1}^r x_i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$

Prueba: Para cada vector $x \in \mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ la multinomial $M(x)$ calcula la probabilidad de que existan exactamente x_i puntos con color i para cada $1 \leq i \leq r$. Por lo tanto, la suma de todos los vectores de $\mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ nos da la probabilidad de tener al menos un punto de cada color en los primeros (o últimos) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puntos.

Ahora, consideramos los eventos $L := \{\text{los primeros } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ puntos están coloreados con exactamente } r \text{ colores}\}$ y $R := \{\text{los últimos } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ puntos están coloreados con exactamente } r \text{ colores}\}$. Tenemos

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(R) = \sum_{x \in \mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} M(x).$$

Entonces $\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}) \geq \mathbb{P}(L \cap R)$ y como L y R son eventos independientes, concluimos

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}) \geq \mathbb{P}(L \cap R) = \mathbb{P}(L)\mathbb{P}(R) = \left(\sum_{x \in \mathcal{X}_r^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} M(x) \right)^2.$$

□

En el caso uniforme donde $p_i = \frac{1}{r}$ para cada $i \in [r]$ podemos obtener la probabilidad exacta.

Teorema 2.11. En el caso uniforme, bajo los supuestos clave de la página 18, la probabilidad de que \mathcal{N}_n sea un $(r-1)$ -simplejo (o, de manera equivalente, la gráfica sea una gráfica completa K_r) es

$$\frac{1}{r^n} \left(r!^2 \sum_{x \in \mathcal{X}} \prod_{i=1}^r i^{x_i} \prod_{i=r+1}^{2r-1} (2r-i)^{x_i} + r(r-1)!^2 \sum_{y \in \mathcal{Y}} \prod_{i=1}^{r-1} i^{y_i} \prod_{i=r}^{2r-2} (2r-1-i)^{y_i} \right)$$

Prueba: Contaremos las coloraciones de Tverberg. En una coloración de Tverberg hay al menos un punto de cada uno de los r colores. De hecho, a lo más una clase cromática puede tener solo un representante. Contaremos primero las coloraciones de Tverberg con al menos dos puntos en cada parte.

Sean a_i y b_i , $1 \leq i \leq r$ los primeros y últimos puntos de color i . Es claro que primero aparecen los a_i 's y después los b_i 's. Hay $r!$ permutaciones posibles para los a_i 's y $r!$ para los b_i 's, luego hay $r!^2$ configuraciones posibles para acomodar estos puntos. Consideremos los intervalos $I_1, I_2, \dots, I_{2r-1}$ definidos por dos puntos consecutivos de $\{a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r\}$. Los $n - 2r$ puntos restantes caen en estos intervalos y hay una biyección entre las cantidades de estos puntos en cada intervalo y el conjunto $\mathcal{X} = \{x \in (\mathbf{Z}^+ \cup \{0\})^{2r-1} : \sum x_i = n - 2r\}$. Notemos que los puntos que caen en I_1 o I_{2r-1} pueden estar contenidos en solo una parte, los puntos que caen en I_2 o I_{2r-2} pueden estar en dos posibles partes y así sucesivamente. Luego los puntos relacionados con $x \in \mathcal{X}$ pueden ser acomodados de $\prod_{i=1}^r i^{x_i} \prod_{i=r+1}^{2r-1} (2r-i)^{x_i}$ maneras. Así, el número de coloraciones de Tverberg con al menos dos puntos de en cada parte es

$$r!^2 \sum_{x \in \mathcal{X}} \prod_{i=1}^r i^{x_i} \prod_{i=r+1}^{2r-1} (2r-i)^{x_i} \quad (2.1)$$

Ahora contaremos las coloraciones de Tverberg en las que un color, digamos el color i' tiene solo un punto.

Sea $c_{i'}$ este punto y sean a_i y b_i , $1 \leq i \leq r-1$ los primeros y últimos puntos de color i para los colores restantes. Los a_i 's aparecen antes que el punto $c_{i'}$ y este antes que los b_i 's en \mathbb{R} . Hay $(r-1)!$ permutaciones posibles para los a_i 's y b_i 's, además hay r maneras de elegir la parte $P_{i'}$ luego hay $r(r-1)!$ maneras de ordenar estos puntos. Consideremos los intervalos $I_1, I_2, \dots, I_{2r-2}$ definidos por dos puntos consecutivos de $\{a_i\} \cup \{b_i\} \cup \{c_{i'}\}$. Los $n - 2r + 1$ puntos restantes caen en estos intervalos, y hay una biyección entre las cantidades de estos puntos en cada intervalo y el conjunto $\mathcal{Y} = \{y \in (\mathbf{Z}^+ \cup \{0\})^{2r-2} : \sum y_i = n - 2r + 1\}$. Notemos que los puntos que caen en I_1 o I_{2r-2} pueden pertenecer solo a una clase cromática, los puntos que caen en I_2 o I_{2r-3} pueden pertenecer a dos posibles clases cromáticas y así sucesivamente. Luego los puntos relacionados con $y \in \mathcal{Y}$ pueden ser acomodados de $\prod_{i=1}^{r-1} i^{y_i} \prod_{i=r}^{2r-2} (2r-1-i)^{y_i}$ maneras. Así, el número de coloraciones de Tverberg con una clase cromática con un solo elemento es

$$r(r-1)!^2 \sum_{y \in \mathcal{Y}} \prod_{i=1}^{r-1} i^{y_i} \prod_{i=r}^{2r-2} (2r-1-i)^{y_i} \quad (2.2)$$

Sumando 2.1 y 2.2 y dividiendo entre las coloraciones posibles obtenemos el resultado deseado. \square

Los teoremas 2.10 y 2.11 nos dicen qué tan probable es que el nervio empírico de n

muestras forme el $(r - 1)$ -simplejo para n fijo. Una pregunta relacionada es ¿cuál es la *primera* observación n para la que esto ocurre?, es decir, si tenemos una secuencia de observaciones Y_1, Y_2, \dots , ¿cuál es la menor n tal que $\mathcal{N}_n((Y_1, \dots, Y_n)) = \Delta_{r-1}$? Llamamos a esta cantidad el *tiempo de espera* para formar el $(r - 1)$ -simplejo y a continuación proporcionamos un límite inferior para su esperanza.

Teorema 2.12. Sea X la variable aleatoria para el tiempo de espera hasta que $\mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}$, explícitamente $X = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}\}$. Entonces, bajo los supuestos clave de la página 18, tenemos. $\mathbb{E}[X] \leq 2 \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^r (1 - e^{-p_i x})\right) dx$. Además, en el caso uniforme, donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, tenemos que $\mathbb{E}[X] \leq 2r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}$.

Prueba: Los resultados se derivan directamente de la esperanza del tiempo de espera del problema clásico del coleccionista de cupones. Sea Z el tiempo de espera hasta que hayamos observado todas las etiquetas, es decir, Z es el tiempo de espera hasta que hayamos completado una colección de cupones si cada cupón es una variable aleatoria i.i.d. que toma valor i con probabilidad p_i . Se sabe que $\mathbb{E}[Z] = 2 \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^r (1 - e^{-p_i x})\right) dx$, y en el caso uniforme donde $p_i = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$, $\mathbb{E}[Z] = 2r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}$ (ver [FS14] para varias pruebas detalladas). Ahora, tengamos en cuenta que $\mathcal{N}_n = \Delta_{r-1}$ si completamos una colección, luego completamos una segunda colección, separada de la primera. Sea Z_1 el tiempo de espera para completar la primera colección y sea Z_2 el tiempo de espera adicional para completar una segunda colección. Entonces $X \leq Z_1 + Z_2$ y Z_1, Z_2 tienen la misma distribución que Z , entonces $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Z_1 + Z_2] = 2\mathbb{E}[Z]$. \square

2.5. Distribuciones uniformes y la probabilidad de obtener un árbol como nervio

Ahora exploramos la probabilidad de que los complejos nerviosos sean árboles. Como mencionamos antes, la probabilidad de obtener el $(r - 1)$ -simplejo como nervio tiende a uno cuando fijamos el número de colores r , y hacemos crecer el número de puntos n . Luego, la probabilidad de obtener cualquier otro tipo de complejo simplicial como nervio tiende a cero. Esto pasa particularmente con los árboles, sin embargo, en esta sección calcularemos esta probabilidad con precisión para el caso particular en el que la partición de los puntos está dada mediante una distribución uniforme, es decir,

$$p_1 = \dots = p_r = \frac{1}{r}.$$

Una *gráfica oruga* es un árbol en el que la eliminación de todas las hojas da como resultado un camino P_s con s vértices, llamado *camino central*. Los vértices que conectan las hojas con el camino central se denominan *vértices soporte*. Un árbol oruga con camino central $P_s = \{v_1 v_2 \dots v_s\}$ se puede definir de forma única con el siguiente código $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$, con $k_1, k_s \neq 0$, que se obtiene uniendo k_i nuevos vértices hoja al vértice soporte v_i , para cada $i = 1, 2, \dots, s$ (ver [HS73]). Observemos que el número de vértices v de una oruga dada $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$ viene dado por $v = \sum_{i=1}^s k_i + s$. Tengamos en cuenta que no todos los árboles son gráficas de intervalos. Esto lo sabemos por el siguiente lema.

Lema 2.13 (J. Eckhoff, 1993). Los árboles oruga son precisamente los árboles que también son gráficas de intervalos.

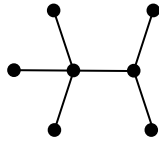


Figura 2.3: $cat(3, 2)$

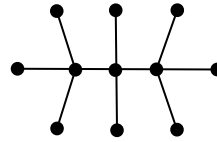


Figura 2.4: $cat(3, 2, 3)$

En [Han82] Hanlon hizo el trabajo fascinante de enumerar todas las gráficas de intervalos (salvo isomorfismos) junto con varios otros tipos de gráficas de intervalos especiales. Esta enumeración hace uso de una descomposición estructural de las gráficas de intervalos que conduce a una caracterización de aquellas gráficas de intervalos que tienen una representación de intervalo única. Pero en realidad, cuando generamos intervalos aleatorios sobre la recta, no todas las gráficas aparecen con la misma frecuencia. Al predecir la probabilidad de los árboles, tenemos que contar de manera diferente. Los siguientes teoremas nos dan la probabilidad de que el nervio empírico sea isomorfo a cualquier oruga (y, por lo tanto, a cualquier otro árbol).

Teorema 2.14. Bajo los supuestos clave de la página 18, la probabilidad de que \mathcal{N}_n sea isomorfo a un árbol oruga específico $cat(k_1, k_2, \dots, k_r)$ diferente a las gráficas completas K_1 y K_2 está dada por

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = cat(k_1, k_2, \dots, k_r)) = \binom{r}{v} \frac{v!}{r^n} \sum_{x \in \mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s}} 2^{x_1+x_2+\dots+x_{m-1}}$$

donde $\mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{v+s+1}) : \sum_{i=0}^{v+s+1} x_i = n - (v + s)\}$ y $v = \sum_{i=1}^s k_i + s$.

Prueba:

Supongamos que $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$ es inducido por una r -coloración de $[n]$. Denotemos por C_i al conjunto de puntos con color i , es decir, $C_i = \{\ell : Y_\ell = i, 1 \leq \ell \leq n\}$. En particular, supongamos que C_1, C_2, \dots, C_s son las clases cromáticas que inducen a los vértices del camino central P_s , y que $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik_i}$ son las clases cromáticas que inducen las hojas adyacentes del vértice soporte inducido por C_i con $1 \leq i \leq s$.

Considere los soportes empíricos $I_n(i) = [a_i, b_i]$ del color C_i y $I_n(ij) = [a_{ij}, b_{ij}]$ del color C_{ij} respectivamente con $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq j \leq k_i$. Observamos lo siguiente:

- (i) $I_n(i) \cap I_n(j) = \emptyset$, a menos que $|i - j| = 1$ por cada $i, j \in [s]$,
- (ii) $I_n(i) \cap I_n(jk) = \emptyset$ a menos que $i = j$,
- (iii) $I_n(il) \cap I_n(jk) = \emptyset$ a menos que $i = j$ y $k = l$.

Estas restricciones implican que los extremos de cada $I_n(i)$, y de cada $I_n(ij)$ con $ij \neq sk_s$, y el punto a_{sk_s} aparecerán exactamente en el siguiente orden:

$$a_1, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k_1}, a_2, b_1, b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k_2}, a_3, b_2, \\ \dots, a_s, b_{s-1}, b_{s1}, b_{s2}, \dots, b_{sk_s-1}, a_{sk_s}, b_s.$$

Estos puntos en \mathbb{R} generan $v + s + 1$ intervalos abiertos que deben contener a los restantes $n - (v - s)$ puntos de $[n]$. Observe que cada uno de estos puntos que cae en los s intervalos $(-\infty, a_1), (b_{1k_1}, a_2), (b_{2k_2}, a_3), \dots, (b_{s-1k_{s-1}}, a_s), (a_{sk_s}, b_s), (b_s, \infty)$ se puede colorear con un solo color, mientras que los puntos que se encuentran en los $v - 1$ intervalos restantes se pueden colorear con a lo más dos posibles colores. Por lo tanto, el número de formas posibles de colocar y colorear los $n - (v + s)$ puntos restantes en los $v + s + 1$ intervalos es

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s}} 2^{x_1+x_2+\dots+x_{v-1}} 1^{x_v, \dots, x_{v+s+1}} = \sum_{x \in \mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s}}$$

donde $\mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{v+s+1}) : \sum_{i=1}^{v+s+1} x_i = n - (v + s)\}$.

Ahora, considerando todas las permutaciones posibles de los v colores utilizados y las $\binom{r}{v}$ maneras de elegirlos de entre r colores, tenemos que el número de configuraciones posibles es:

$$\binom{r}{v} v! \sum_{x \in \mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s}} 2^{x_1+x_2+\dots+x_{v-1}}.$$

Finalmente, dividiendo por el número total de coloraciones obtenemos la probabilidad deseada. \square

Observemos que el conteo anterior solo considera la estructura específica $cat(k_1, \dots, k_s)$. Si queremos contar sobre toda oruga isomorfa a $cat(k_1, \dots, k_s)$, también debemos considerar $cat(k_s, \dots, k_1)$ cuando $(k_1, \dots, k_s) \neq (k_s, \dots, k_1)$. Esto se traduce simplemente en duplicar nuestro conteo.

El siguiente corolario nos da la probabilidad de obtener $K_{1,m}$ la *gráfica estrella* que consta de un vértice unido con m hojas.

Corolario 2.15. Sea $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vector aleatorio cuyas componentes son variables aleatorias i.i.d. tales que $\mathbb{P}(Y_j = i) = \frac{1}{r}$ para todo $i \in [r]$. Sea $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n([n], Y)$ el nervio empírico de la coloración aleatoria inducida por Y .

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_n = K_{1,m}) = \begin{cases} r^{1-n} & \text{if } m = 0 \\ \binom{r}{2} \frac{2^n - 2(n-1)}{r^n} & \text{if } m = 1 \\ \binom{r}{m+1} \frac{(m+1)!}{r^n} \sum_{x \in \mathcal{X}_{m+3}^{n-m-2}} 2^{x_1+x_2+\dots+x_m} & \text{if } m \geq 2 \end{cases}$$

donde $\mathcal{X}_{m+3}^{n-m-2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+3}) : \sum_{i=1}^{m+3} x_i = n - (m+2)\}$ y $v = \sum_{i=1}^s k_i + s$ como antes.

Prueba: Si $m = 0$, \mathcal{N}_n consta de un solo vértice, es decir, los n puntos son del mismo color. Esto sucede con probabilidad $\frac{r}{r^n} = r^{1-n}$.

Si $m = 1$, entonces \mathcal{N}_n es una arista. Luego, hay $\binom{r}{2}$ parejas de colores que pueden generarla. Hay exactamente $2^n - 2(n-1)$ formas de colorear n puntos con dos colores de manera que sus envolventes convexas se intersecten. Entonces, la probabilidad de que \mathcal{N}_n sea una arista es $\binom{r}{2} \frac{2^n - 2(n-1)}{r^n}$.

Finalmente, si $m \geq 2$, podemos escribir $K_{1,m}$ como $cat(m)$, luego aplicando el teorema 2.14 tenemos el resultado deseado. \square

Teorema 2.16. Bajo los supuestos clave de la página 18, la probabilidad de que el nervio \mathcal{N}_n sea un árbol es igual a

$$\frac{1}{r^n} \left[r + \binom{r}{2} (2^n - 2n) + \sum_{v=3}^r \sum_{s=1}^{v-2} \binom{v-3}{s-1} \binom{r}{v} v! \sum_{x \in \mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s}} 2^{x_1+x_2+\dots+x_{v-1}} \right],$$

donde $v = \sum_{i=1}^s k_i + s$, y $\mathcal{X}_{v+s+1}^{n-v-s} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{v+s+1}) : \sum_{i=0}^{v+s+1} x_i = n - (v+s)\}$.

Prueba: Por el teorema 2.14, la siguiente función cuenta todos las posibles r -colores del conjunto $[n]$ que inducen una oruga específica $cat(k_1, k_2, \dots, k_s)$

$$f(n, r, v, s) = \binom{r}{v} v! \sum_{x \in X} 2^{x_1+x_2+\dots+x_{v-1}},$$

donde $v = \sum_{i=1}^s k_i + s \geq 3$, y

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_{v+s+1}) : \sum_{i=0}^{v+s+1} x_i = n - (v+s)\}.$$

Como existen $\binom{v-3}{s-1}$ diferentes formas de asignar los valores de k_i para que k_1 y k_s no sean cero, la ecuación.

$$\binom{v-3}{s-1} f(n, r, v, s)$$

cuenta todas las r -coloraciones que inducen orugas cuya longitud de camino central es s y con $v-s$ hojas. Ahora, para calcular casi todas las orugas posibles (excepto las orugas K_1 y K_2) necesitamos considerar la suma de todos los valores posibles de v y todos los valores posibles de s . Así, tenemos la ecuación

$$\sum_{v=3}^r \sum_{s=1}^{v-2} \binom{v-3}{s-1} f(n, r, v, s)$$

Hay r diferentes r -coloraciones que inducen K_1 como un nervio, y $\binom{r}{2} (2^n - 2n)$ diferentes r -coloraciones que inducen K_2 .

Finalmente, si sumamos estas cantidades a la ecuación anterior y dividiendo entre todas las r -coloraciones posibles, tenemos el resultado deseado. \square

La historia que presentamos en este capítulo trata sobre muestras de datos indexadas por un solo parámetro, por ejemplo: el tiempo. Pero, ¿qué sucede cuando se consideran las coordenadas geográficas, la temperatura, la humedad u otros parámetros para modelar la distribución de las aves? Extender el modelo a dimensiones superiores genera nuevos desafíos. Por ejemplo, las gráficas de intervalos aleatorios ya no son suficientes para capturar toda la información. En cambio, uno necesita investigar complejos simpliciales aleatorios (ver [DLH20]) debido a que perdemos el orden natural que tienen los puntos sobre la línea. Esto implica que un resultado equivalente del lema 2.3 ya no es posible. Por ejemplo, continuando con la analogía de nuestro observador de aves, suponga que los puntos coloreados en la figura 2.5 representan las coordenadas geográficas de tres tipos diferentes de aves que se han estudiado. Si nuestro observador de aves está tratando de determinar el hábitat habitual y las interacciones territoriales entre ellos, se enfrentará al problema de que dos conjuntos de datos muy similares inducirán diferentes complejos simpliciales. Este problema será tratado en los capítulos subsecuentes.

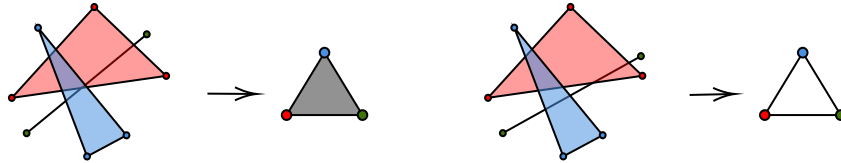


Figura 2.5: Dos conjuntos de datos de 3 especies de aves diferentes con el mismo tipo de orden que inducen diferentes complejos simpliciales.

Capítulo 3

Gráficas bipartitas como nervios

Las palabras correctas siempre parecían llegar demasiado tarde.

(Haruki Murakami)

3.1. Palabras y gráficas

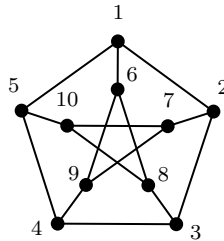
En este capítulo discutiremos algunos interesantes resultados obtenidos, referentes a una familia ampliamente estudiada de complejos simpliciales: las gráficas bipartitas. Pero aún más importante, propondremos un nuevo enfoque del problema utilizando técnicas recientes en el área de la teoría de gráficas, la noción de gráficas palabra-representables. Este tipo de gráficas es una generalización común de varias familias de gráficas bien estudiadas, como las gráficas circulares, las gráficas de comparabilidad, las gráficas 3-coloreables y las gráficas con grado a lo más 3 (también conocidas como gráficas subcúbicas). Las gráficas d -palabra-representables generales (un concepto que generaliza a las gráficas palabra-representables) serán también de gran importancia para este trabajo debido a una interesante conexión entre este concepto y algunos resultados geométricos de tipo Ramsey-Tverberg, donde mostraremos que ciertos nervios surgen una vez que tenemos suficientes puntos.

3.1.1. Gráficas palabra y k -palabra representables

Una *palabra* w en un alfabeto $A(w)$ es simplemente una secuencia finita de letras $a_1a_2 \dots a_r$ con $a_i \in A(w)$. Una *subpalabra* w' de w es una subsecuencia de w , y una palabra \bar{w} es un *factor* de w si $w = w_1\bar{w}w_2$ para palabras posiblemente vacías w_1 y w_2 . Denotamos la letra de w en la posición i por $w(i)$ para $1 \leq i \leq |w|$. En 2005 Sergey Kitaev introdujo los conceptos de gráficas palabra-representables y gráficas k -palabra-representables en [KMS05] y se definen de la siguiente manera.

Definición 3.1. Una gráfica $G = (V, E)$ es *palabra-representable* si existe una palabra w sobre el alfabeto V tal que dos letras x y y se alternan en w si y solo si $\{x, y\} \in E$. En este caso decimos que w es una palabra que representa a G .

Definición 3.2. Una gráfica G es *k -palabra-representable* si existe una palabra w , tal que w es una palabra que representa a G , y cada letra aparece en w exactamente k veces. El mínimo entero positivo k que satisface estas condiciones se llama el número de representación de la gráfica y se denota por $\mathcal{R}(G)$.



$$w=1387296(10)7493541283(10)7685(10)194562.$$

Figura 3.1: La gráfica de Petersen es 3-palabra-representable.

Hay muchos resultados y contribuciones interesantes en gráficas palabra-representables y k -palabra-representables (ver [KL15] para un excelente trato de la teoría). A continuación, enumeramos dos de ellos, mismos que utilizaremos en este trabajo.

Lema 3.3 ([KP08]). Una gráfica G es palabra-representable si y solo si es k -palabra-representable para algún k .

Lema 3.4 ([KP08]). Una gráfica k -palabra-representable G es también $(k + 1)$ -palabra-representable.

3.1.2. Gráficas d -palabra-representables generales

Ahora, daremos un concepto muy similar que permite una generalización de las gráficas k -palabras-representables y que como mencionamos anteriormente está motivado por propiedades geométricas, mismas que veremos a detalle en la sección 3.2.

Definición 3.5. Dada una palabra w con alfabeto $A(w)$ y con $|A(w)| \geq 2$, decimos que dos letras $a, b \in A(w)$ son d -intersectantes para $d \geq 1$ si existe una subpalabra alternante de esas letras en w con longitud al menos $d + 2$.

Definición 3.6. Diremos que una gráfica $G = (V, E)$ es d -palabra-representable general si existe una palabra w con alfabeto V tal que dos letras x y y son d -intersectantes en w si y solo si $\{x, y\} \in E$. En este caso decimos que w d -representa de manera general a la gráfica G y el mínimo entero d tal que una gráfica es d -palabra-representable general se denomina número de d -representación general de la gráfica, y se denota por $\mathcal{GR}(G)$.

Claramente, la última definición es más general, en el sentido de que cada gráfica G palabra-representable es también d -palabra-representable general para algún d . Considere, por ejemplo, la gráfica 5 rueda W_5 (ver figura 3.2). Se sabe por [KP08] que esta gráfica no es k -palabra-representable para ningún número k ; sin embargo, la palabra $w = 156216326436546$ 2-representa de manera general a esta gráfica. Observemos, por ejemplo, que la subpalabra 1616666 no es una secuencia alternante como tal, pero contiene una secuencia alternante de longitud 4 (es decir, 1616). De hecho, la siguiente proposición muestra que para toda gráfica G existe una palabra que la d -representa de manera general.

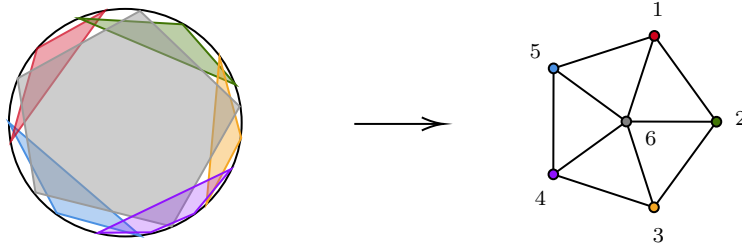


Figura 3.2: W_5 y un arreglo de polígonos que la induce como gráfica polígono-circular.

Proposición 3.7. Toda gráfica $G = (V, E)$ es d -palabra-representable general para $d \geq m - 1$ donde $m = |E(G)|$.

Prueba: Suponga que las aristas de G están dadas por $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, con $e_i = \{x_i, y_i\}$, sea $w = w_1 w_2 \dots w_m$ la palabra donde cada factor w_i es una secuencia alternante con alfabeto $e_i = \{x_i, y_i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y longitud $d + 2 \geq m + 1$. Mostraremos que w d -representa de manera general a G .

Note que cada arista de G es inducida por w . Ahora, supongamos que w induce una arista $e^* = \{x, y\} \notin E$. Por lo tanto, debe existir una subsecuencia alternante $s \subset w$ con letras en $\{x, y\}$ y longitud al menos $d + 2$. Sin embargo, por construcción, ni xy ni yx son subpalabras de ningún factor w_i , entonces, la longitud de s es a lo más m lo que nos lleva a una contradicción. \square

Incluso dada una gráfica G , encontrar el mínimo entero $\mathcal{GR}(G)$ parece un problema interesante por sí mismo.

Usando exactamente la misma prueba que dieron Kitaev y Pyatkin para el lema 3.4 en [KP08], se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.8. Toda gráfica d -palabra-representable general G es también $(d + 1)$ -palabra-representable general.

3.1.3. Gráficas 2-palabra-representables y polígono-circulares

Una gráfica G es una gráfica *polígono-circular* si es la gráfica de intersección de polígonos convexos inscritos en un círculo. La gráfica W_5 (5-rueda), por ejemplo, pertenece a esta familia de gráficas (ver figura 3.2). En [EK19] Enright y Kitaev demostraron que las dos clases de gráficas las polígono-circulares y las palabra-representables no se contienen entre sí. Pero en el caso de gráficas d -palabra-representables generales tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.9. Una gráfica $G = (V, E)$ es una gráfica polígono-circular si y solo si G es 2-palabra-representable general.

Prueba: Sea G una gráfica 2-palabra-representable general, y suponga que w es una palabra, digamos con longitud n y alfabeto V , que 2-representa de manera general a G . Considere un conjunto de n puntos en un círculo y coloréelos con las etiquetas de las letras de w en sentido horario. Claramente, las envolventes convexas de las clases cromáticas son un arreglo de polígonos que induce a G como gráfica polígono-circular. Recíprocamente, si G es una gráfica polígono-circular, y D un arreglo de polígonos en el círculo que la inducen, entonces podemos etiquetar los vértices de

cada polígono con un color diferente. Esta coloración de la secuencia en el sentido horario comenzando en cualquier vértice, genera una palabra w que 2-representa de manera general a la gráfica G . \square

Observación 3.10. Las gráficas circulares (gráficas de intersección de un conjunto de cuerdas con vértices en un círculo) son gráficas 2-palabra-representables de manera general.

Observación 3.11. Si una palabra w d -representa de manera general a una gráfica G , y d es par, entonces cada palabra generada por una permutación cíclica de w también d -representa de manera general a G . Esto claramente no es válido para d impar. Considere la palabra $w = 12121$; esta palabra 3-representa de manera general a K_2 , pero su permutación cíclica $w' = 11212$ 3-representa de manera general dos vértices disjuntos.

Una pregunta natural es entonces, ¿qué tipo de gráficas no son 2-palabra-representable de manera general? Utilizando una base de datos de [Com], verificamos computacionalmente todas las gráficas planas con a lo más ocho vértices y un máximo de nueve aristas, encontrando las siguientes tres gráficas planas que no son 2-palabra-representables de manera general. Observemos que la gráfica de la derecha en la figura 3.3 es además bipartita.

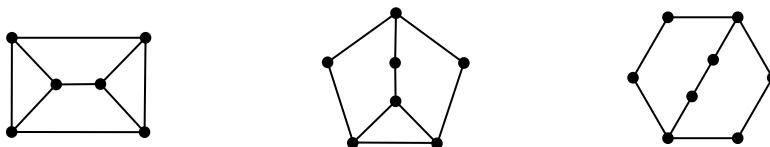


Figura 3.3: Todas las gráficas planas, conexas de hasta 9 aristas y menos de 9 vértices que no son 2-palabra-representables de manera general.

3.2. Nervios sobre el politopo cíclico y su relación con las palabras

Recordemos, que la curva *momento* M_d es la curva en \mathbb{R}^d definida por $\{x(t) = (t, t^2, \dots, t^d) : t \in \mathbb{R}\}$. Consideremos un conjunto $T = \{t_1, \dots, t_r\} \subset \mathbb{R}$ con $r > d + 1$ y sea $x(T) = \{x(t_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$. Entonces $\text{conv}(x(T))$ se conoce como

politopo d -cíclico. Como todos los conjuntos de r puntos en la curva de momento son combinatoriamente equivalentes [GKKZ03], nos referiremos a cualquiera de ellos como $x(r, d)$ y denotaremos su envolvente convexa como $C(r, d)$.

Los siguientes teoremas clásicos, proveen a los politopos cíclicos de una importante estructura combinatoria.

Teorema 3.12 (Condición de paridad de Gale [Gal63]). Sea $T = \{t_1, \dots, t_r\} \subset \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ y $T_d \subset T$ un subconjunto con d puntos. Entonces $C(x(T_d))$ es una faceta de $C(x(T))$ si y solo si los elementos de $T \setminus T_d$ están separados por un número par de elementos de T_d en la secuencia (t_1, \dots, t_r) .

Definición 3.13. Si S es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d , A, B es una *partición de Radón* para S si y solo si $S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, y $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$. Decimos que la partición de Radón A, B *extiende* la partición de Radón A', B' de $S' \subset S$, si y solo si $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$. Finalmente, A, B se llama *partición primitiva* en S , si es una partición de Radón en S y A, B extiende a la partición de Radón A', B' si y solo si $A' = A$ y $B' = B$.

En [Bre73] M. Breen prueba que A, B es una partición primitiva de Radón en el politopo cíclico $C(r, d)$ si se cumple la siguiente condición.

Teorema 3.14 (Teorema de Breen [Bre73]). Sean A y B dos conjuntos de puntos en $x(|A \cup B|, d)$. Entonces A, B es una partición primitiva de Radón si y solo si existe una secuencia alternante de longitud $d + 2$ a lo largo de la curva de momento.

Como veremos a continuación, el teorema de Breen es la clave que relaciona los nervios de particiones de conjuntos de puntos en posición convexa con las gráficas d -palabra-representables generales. En particular, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.15. Toda gráfica libre de triángulos $G = (V, E)$ es inducida por una partición de cualquier conjunto suficientemente grande de puntos en posición convexa para cada entero $d \geq d_0$ y algún $d_0 \geq 1$.

Prueba: Por la proposición 3.8, tenemos que para cada $d \geq d_0 = \mathcal{GR}(G)$ existe una palabra w con alfabeto V tal que w d -representa de manera general a G . Sea $m = |w|$ y sea S cualquier conjunto de m puntos en posición convexa en dimensión d . Más aún, sea el conjunto S_1 un conjunto de m puntos; $S_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subset M_d$ en la curva momento. Coloréelos con $\mathcal{C}: S_1 \mapsto V$ definido por $\mathcal{C}(s_i) = w(i)$ y sea

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ el conjunto donde P_i es la envolvente convexa de la clase cromática v_i . Por el teorema 3.14, dos conjuntos P_i y P_j se intersectan si y solo si los colores v_i y v_j son d -intersectantes en w . Esto implica que G se conserva como el 1-esqueleto de $\mathcal{N}(P)$. Además, dado que G no tiene triángulos, no hay intersecciones de tres o más conjuntos de P ; por lo tanto, no hay caras con dimensión mayor que 1, por lo que concluimos que $\mathcal{N}(P) = G$. Finalmente, sabemos que dos conjuntos cualesquiera en posición convexa tienen el mismo tipo de orden, por lo que existe una biyección σ que preserva la orientación entre S_1 y S . Por el lema 2 de [DLHOY21], la partición $\mathcal{P} = P_1, P_2, \dots, P_m$ de S_1 y la partición correspondiente de S mediante σ , denotada $\sigma\mathcal{P} = \sigma(P_1), \sigma(P_2), \dots, \sigma(P_m)$, tienen la misma gráfica de intersección G . □

Observe que dado que las gráficas k -palabra-representables también son gráficas d -palabra-representables generales, usando el teorema 3.15 y los lemas 3.3 y 3.4 los siguientes resultados son verdaderos.

Teorema 3.16. Toda gráfica bipartita $G = (U \cup V, E)$ donde U y V son los conjuntos partitos, es inducida por una partición para un conjunto de puntos $S \subset M_d$ para algún entero positivo d .

Teorema 3.17. Toda gráfica circular (gráfica de intersección de un conjunto de cuerdas con vértices en un círculo) $G = (V, E)$ es inducida por una partición para un conjunto de puntos $S \subset M_d$ con $d \geq 2$.

3.3. Extensiones y teoremas tipo Tverberg

De manera similar a [DLHOY21], extenderemos las particiones de conjuntos de puntos específicos a configuraciones más generales. Definamos formalmente el concepto de extensión.

Definición 3.18. Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^d y sea $P = S_1, S_2, \dots, S_r$ una r -partición de S . Podemos pensar a P como una coloración $\mathcal{C}: S \mapsto \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ tal que $\mathcal{C}(S_i) = c_i$, para $1 \leq i \leq r$. Decimos que esta coloración \mathcal{C} es *extendible* si para cada conjunto de puntos \bar{S} que contiene a S , hay una partición $\bar{P} = \bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_r$ y una coloración $\bar{\mathcal{C}}: \bar{S} \mapsto \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ tal que $\bar{\mathcal{C}}|_S = \mathcal{C}$ y $\mathcal{N}(\bar{P})$ es isomorfo a $\mathcal{N}(P)$.

Diremos que un nervio $\mathcal{N}(P)$ en un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ es extendible si po-

demos extender la coloración de P . En esta sección mostraremos que todo complejo simplicial \mathcal{K} que es inducido por una partición en un conjunto de puntos S en posición convexa en el plano es extendible; por lo tanto, es 2-Tverberg. Esto mediante la extensión de la coloración de la partición. Sin embargo, resulta que para $d \geq 3$, no toda partición es extendible (ver figura 3.4); sin embargo, mostraremos que algunas subfamilias de gráficas lo son.

3.3.1. Extensiones en \mathbb{R}^2

El siguiente resultado muestra que para garantizar que una gráfica $G = (V, E)$ libre de triángulos es 2-Tverberg basta probar que para conjuntos suficientemente grandes de puntos en posición convexa existe siempre una partición que la induce como nervio.

Teorema 3.19. Toda gráfica $G = (V, E)$ libre de triángulos que es inducida como nervio por una partición de cualquier conjunto de n puntos en posición convexa es 2-Tverberg.

Prueba: Supongamos que una gráfica G libre de triángulos es inducida por una partición en un conjunto de n puntos en posición convexa en el plano. Para mostrar que G es 2-Tverberg, necesitamos probar que es inducida por una partición de cualquier conjunto de puntos suficientemente grande. Por el teorema de Erdős-Szekeres [ES35], cada conjunto de puntos \bar{S} suficientemente grande contiene un subconjunto S de n puntos en posición convexa. Por hipótesis, hay una partición P de S en clases cromáticas S_1, S_2, \dots, S_r obtenida mediante una coloración $\mathcal{C}: S \mapsto \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ tal que $\mathcal{N}(P) = G$. Queda por demostrar que podemos extender \mathcal{C} al conjunto \bar{S} con una nueva coloración $\bar{\mathcal{C}}$ como en la definición 3.18.

Procedamos por inducción sobre el número r de clases cromáticas de \mathcal{C} . Si solo hay dos colores diferentes, digamos c_1 y c_2 , entonces pueden ocurrir dos escenarios posibles: $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) = \emptyset$ o $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$. Si ocurre el primer caso, es claro que existe una línea soporte h que toca a una arista del polígono $\text{conv}(S_1)$ y que deja $\text{conv}(S_1)$ en un lado de h , digamos H^+ , y $\text{conv}(S_2)$ en el otro, H^- . A continuación, coloreamos los puntos en $\bar{S} \subset H^+$ con el color c_1 y los puntos en $\bar{S} \subset H^-$ con el color c_2 . Si $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$, entonces podemos colorear cada punto en $\bar{S} \setminus S_1$ con el color c_2 .

Sea $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ un color, entonces $\text{conv}(S_i)$ es un k -ágono convexo para algún entero k con aristas $\{1, 2, \dots, k\}$, sea h_{ij} con $1 \leq j \leq k$ la línea soporte sobre la arista j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Denotemos como H_{ij}^+ al semiplano determinado por h_{ij} que contiene S_i (si S_i consiste en un intervalo, tome cualquier lado) y denotemos por $\mathcal{C}_{ij}^c = \{c_{ij_1}, c_{ij_2}, \dots, c_{ij_{n_{ij}}}\}$, con $0 < n_{ij} \leq r$, al conjunto de colores tal que los conjuntos correspondientes S_{ij_k} están contenidos en H_{ij}^+ y $\text{conv}(S_i) \cap \text{conv}(S_{ij_k}) = \emptyset$ para $k = 1, \dots, n_{ij}$.

Observemos que si $|\mathcal{C}_{ij}^c| = 0$ para algún i y algún j , entonces podemos ignorar los puntos de S con color c_i , y por la hipótesis de inducción existe una $(r-1)$ -coloración en los puntos de $\bar{S} \setminus \{s \in S : \mathcal{C}(s) = c_i\}$ que induce a la gráfica $G \setminus \{v_{S_i}\}$ (la gráfica que resulta de eliminar de G el vértice inducido por la parte S_i) como nervio. Ahora podemos volver a colorear todos los puntos en $\bar{S} \setminus S$ que se encuentran en H_{ij}^+ con el color c_i , note que si las envolventes convexas de dos clases cromáticas no se intersectaban antes de recolorar, no lo harán después. Así esta nueva coloración induce a G como nervio.

Supongamos ahora que para cada color c_i , la línea soporte h_{ij} cumple que $|\mathcal{C}_{ij}^c| \neq 0$. Supongamos que c_1 es el color y h_{11} la línea soporte de $\text{conv}(S_1)$ tal que $|\mathcal{C}_{11}^c|$ es mínimo para todos los $i = 1, \dots, r$. Ahora observamos que hay un color, digamos $c_m \in \mathcal{C}_{11}^c$, y, por lo tanto, está en H_{11}^+ y una línea soporte h_{ms} , tal que $|\mathcal{C}_{ms}^c| \leq |\mathcal{C}_{11}^c|$, contradiciendo la minimalidad de $|\mathcal{C}_1^c|$. \square

Posiblemente sea cierto que todas las gráficas 2-palabra-representables de manera general son 2-Tverberg. Sin embargo como se señaló al final del capítulo anterior, tratar con complejos simpliciales que contienen triángulos es difícil, simplemente porque herramientas como el tipo de orden no considera la diferencia entre un 2-simplejo y un triángulo vacío. No obstante obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema 3.20. Toda gráfica $G = (V, E)$ libre de triángulos que es 2-palabra-representable de manera general es 2-Tverberg.

Prueba: Por la proposición 3.9, sabemos que para cada gráfica 2-palabra-representable general $G = (V, E)$, $|V(G)| = r$, existe un arreglo de polígonos Q_1, Q_2, \dots, Q_r en una circunferencia que induce G como un gráfica de intersección. Además, el 1-esqueleto de cada gráfica sin triángulos satisface que es igual a la gráfica de intersección de su arreglo poligonal. Entonces el teorema 3.19 produce el teorema 3.20. Por lo tanto, toda gráfica G que es 2-representable de manera general y libre de triángulos es

2-Tverberg. □

Esto implica, en particular, que las gráficas de familias tales como los árboles y los ciclos con tamaño mayor a 3 [Sac85, pp. 207-210] son 2-Tverberg.

3.3.2. Extensiones en \mathbb{R}^d

Como observamos en la subsección anterior, el teorema 3.19 nos permite extender cualquier partición de un conjunto de puntos S en posición convexa en el plano a un conjunto arbitrario de puntos \bar{S} , siempre que este contenga a S , de manera que se preserve el nervio. Este teorema utiliza fuertemente el hecho de que siempre existen un color c y una línea h que separa el plano en dos semiplanos, de manera que en uno de ellos solo hay puntos de color c o puntos pertenecientes a clases cromáticas cuyas envolventes convexas intersectan a la envolvente convexa del color c .

Desafortunadamente, este no es siempre el caso en dimensiones más altas. Considere, por ejemplo, un conjunto $S = \{x(t_i) : 1 \leq i \leq 9 \text{ con } t_1 < t_2 < \dots < t_9\}$ y $\mathcal{C} : S \mapsto \{r, b, g\}$ tal que $\mathcal{C}\{x(t_1), x(t_2), x(t_6)\} = b$, $\mathcal{C}\{x(t_3), x(t_5), x(t_7)\} = r$ y $\mathcal{C}\{x(t_4), x(t_8), x(t_9)\} = g$ (ver figura 3.4). Observe que las envolventes convexas de las clases cromáticas r, b y g son ajenas, pero no es posible separar una de ellas de las otras dos mediante un plano.

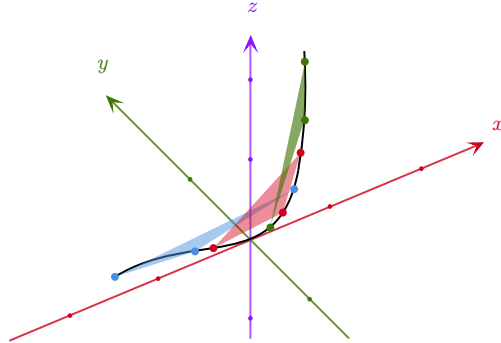


Figura 3.4: Envolventes convexas de las clases cromáticas de S .

3.3.3. Bipartitas como gráficas d -palabra-representables generales

Sabemos que las gráficas bipartitas son k -palabra-representables [KL15], sin embargo, no existe una descripción específica de como construir estas palabras. En esta

sección, daremos explícitamente las palabras que d -representan de manera general a las gráficas bipartitas con la ventaja de que la partición generada por la palabra correspondiente w en un conjunto de puntos S en la curva momento M_d es extendible. Hecho que nos permitirá probar el teorema 3.24.

Teorema 3.21. Sea $G = (U \cup V, E)$ una gráfica bipartita con $m = |U| \geq |V| = n$. Entonces, para todo entero $d \geq n$ existe una palabra w que d -representa de manera general a G .

Prueba: Comencemos etiquetando los vértices de G como $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ con $n \leq m$. Luego, para cada par de vértices $v_i \in V$ y $u_j \in U$, $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$ definimos la palabra $F_i(u_j)$ como una secuencia alternante de longitud $d+2$ con $d \geq n$ y alfabeto $\{v_i, u_j\}$ si $\{v_i, u_j\} \in E$, o como palabra vacía si $\{v_i, u_j\} \notin E$. A continuación, definimos la palabra w_i concatenando las F_i 's de la siguiente manera:

$$w_i = \begin{cases} F_i(u_1)F_i(u_2) \dots F_i(u_m) & \text{cuando } i \text{ es impar} \\ F_i(u_m)F_i(u_{m-1}) \dots F_i(u_1) & \text{cuando } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Afirmamos que $w = w_1 w_2 \dots w_n$ d -representa de manera general a G .

Por construcción, está claro que para cada arista $e \in E$ hay una secuencia alternante de longitud $d+2$ en w con alfabeto en e , por lo que cada arista de G es inducida por w . Ahora, probaremos que w no induce más aristas. Considere dos vértices diferentes $v_p, v_q \in V$ tales que $\{v_p, v_q\} \notin E$. Como v_p solo aparece en w_p y v_q solo aparece en w_q , entonces cada secuencia alternante en w con letras en $\{v_p, v_q\}$ tiene longitud máxima igual a 2. Así, w no induce la arista $\{v_p, v_q\}$.

Para $\{u_p, u_q\} \notin E$ con $u_p, u_q \in U$, por construcción cada w_i contribuye como máximo con una copia de u_p y una de u_q a cada secuencia alternante con letras $\{u_p, u_q\}$. Además, estos elementos están ordenados en orden inverso en cualesquiera dos factores consecutivos w_i 's, por lo que cada secuencia alternante tiene una longitud máxima de $n+1$. Luego, w no induce a la arista $\{u_p, u_q\}$.

Finalmente, si $\{v_p, u_q\} \notin E(G)$ con $v_p \in V$ y $u_q \in U$, por construcción existe un factor $w^* \supseteq w_p$ en w que contiene todas las copias de v_p y solo otras letras para las que hay subsecuencias alternantes de tamaño $d+2$ con v_p . Entonces, $u_q \notin w^*$, y la longitud máxima de una secuencia alternante con estas dos letras en w tiene un tamaño máximo de 3. Concluimos que w d -representa de manera general a G . \square

3.3.4. Las gráficas bipartitas son d -Tverberg

Comenzamos con el siguiente lema que se deriva directamente de la condición de paridad de Gale (teorema 3.12). Implica en particular, que si tenemos un hiperplano generado por d puntos en la curva de momento M_d , siempre es posible predecir en qué lado del hiperplano se encuentra un punto de M_d .

Lema 3.22. Todo hiperplano H generado por d puntos sobre la curva momento M_d , $H = \langle \{p_i\} \rangle := \langle \{p_i = x(l_i) \in M_d : l_i \in \mathbb{R} \text{ tal que } l_1 < l_2 < \dots < l_d\} \rangle$ divide \mathbb{R}^d en dos semi-hiperespacios, con uno de ellos, digamos H^+ , que contiene todos los puntos que se encuentran en R_i para i par y el otro, H^- , que contiene todos los puntos que se encuentran en R_i para i impar, donde $R_1 = \{x(l) : l < l_1\}$, $R_i = \{x(l) : l_{i-1} < l < l_i\}$ con $1 < i \leq d$ y $R_{d+1} = \{x(l) : l > l_d\}$.

Sea $G = (U \cup V, E)$ una gráfica bipartita con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ con $n \leq m$. Sea $w = w_1 w_2 \dots w_n$ la palabra que d -representa generalmente a G construida como se describe en el teorema 3.21 con $n \leq d$. Considere un conjunto $S = \{s_i = x(t_i) : t_1 < t_2 < \dots < t_{|w|} \in \mathbb{R}\}$ de $|w|$ puntos en la curva de momento M_d . Entonces, por el teorema 3.15, la coloración $\mathcal{C}_G : S \mapsto V$ dada por $\mathcal{C}_G(s_i) = w(i)$ induce una partición P_G tal que $\mathcal{N}(P_G) = G$.

Lema 3.23. Dado cualquier conjunto de puntos \bar{S} tal que $S \subset \bar{S} \subset \mathbb{R}^d$, \mathcal{C}_G es extendible de manera que $\mathcal{N}(\bar{P}_G) = G$.

Prueba: Comencemos mirando de cerca la palabra $w = w_1 w_2 \dots w_d$ descrita en el teorema 3.21.

$$w = \underbrace{F_1(u_1)F_1(u_2) \dots F_1(u_m)}_{w_1} \underbrace{F_2(u_m)F_2(u_{m-1}) \dots F_2(u_1)}_{w_2} \dots \underbrace{F_d(u_1)F_d(u_2) \dots F_d(u_m)}_{w_d}$$

si d es impar, o

$$w = \underbrace{F_1(u_1)F_1(u_2) \dots F_1(u_m)}_{w_1} \underbrace{F_2(u_m)F_2(u_{m-1}) \dots F_2(u_1)}_{w_2} \dots \underbrace{F_d(u_m) \dots F_d(u_2)F_d(u_1)}_{w_d}$$

si d es par.

Algunos de los factores $F_i(u_1)$ pueden estar vacíos para ciertos i 's. Comenzamos observando que los factores que contienen la letra u_1 pueden ser agrupados en a

lo más $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ subpalabras de longitud uno o dos. Esta observación nos permitirá insertar d "separadores" $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ que aíslan estas $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ subpalabras que contienen la letra u_1 , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = & \underbrace{F_1(u_1)\mathbf{p}_1 F_1(u_2) \dots F_1(u_m)}_{w_1} \underbrace{F_2(u_m)F_2(u_{m-1}) \dots \mathbf{p}_2 F_2(u_1)}_{w_2} F_3(u_1)\mathbf{p}_3 \dots \\ & \dots \quad \mathbf{p}_{d-1} F_{d-1}(u_1) \underbrace{F_d(u_1)\mathbf{p}_d F_d(u_2) \dots F_d(u_m)}_{w_d} \text{ si } d \text{ es impar, o} \\ \tilde{w} = & \underbrace{F_1(u_1)\mathbf{p}_1 F_1(u_2) \dots F_1(u_m)}_{W_1} \underbrace{F_2(u_m)F_2(u_{m-1}) \dots \mathbf{p}_2 F_2(u_1)}_{W_2} F_3(u_1)\mathbf{p}_3 \dots \\ & \dots \quad \underbrace{F_d(u_m) \dots F_d(u_2)\mathbf{p}_d F_d(u_1)}_{w_d} \text{ si } d \text{ es par.} \end{aligned}$$

Observe que estos separadores no son parte de S y, por lo tanto, no estarán coloreados por \mathcal{C}_G . Su propósito es solo elegir un punto en $M_d \setminus S$ en el intervalo correspondiente entre los dos puntos originales en S . Es decir, si $w = \dots w(k)\mathbf{p}_r w(k+1) \dots$, entonces podemos elegir cualquier t tal que $t_k < t < t_{k+1}$ y $p_r := x(t)$ para $1 \leq r \leq d$. Esto nos permitirá elegir d puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ en la curva de momento M_d . Por el lema 3.22, existe un hiperplano $H_1 = \langle p_1 \rangle$ que no contiene puntos de \bar{S} y que divide \mathbb{R}^d en dos semi-hiperespacios H_1^+ y H_1^- . Esto se hace para que los puntos de S que están relacionados con un factor no vacío de la forma $F_i(u_1)$ coloreados con los colores u_1 o v_i se encuentren en uno de los semiplanos, digamos H_1^+ , y cualquier otro punto en S se encuentre en H_1^- . De manera similar, para el color u_2 podemos definir un nuevo hiperplano H_2 y una región convexa $R_2 = (\mathbb{R}^d \setminus H_1^+) \cap H_2^+$ tal que todo punto relacionado con los factores de la forma $F_i(u_2)$ se encuentran en el interior de esta región convexa R_2 . Recursivamente, para $3 \leq j \leq m-1$ podemos definir hiperplanos H_j y regiones convexas $R_j = (\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k=1}^j R_{k-1}) \cap H_j^+$ tal que todo punto relacionado con los factores de la forma $F_i(u_j)$ se encuentra en el interior de estas regiones convexas. Finalmente, definimos la región $R_m = \mathbb{R}^d \setminus R_{m-1}^+$.

Observe que para cada punto $s \in S$ que se encuentra en el interior de la región R_j , tenemos uno de dos casos: $\mathcal{C}(s) = u_i$ o la envolvente convexa de los puntos con color $\mathcal{C}(s)$ intersecta la envolvente convexa de los puntos con color u_j . Por construcción de las regiones R_j , cada par de puntos adyacentes de S con color $v \in V$ se encuentran en la misma región o en regiones adyacentes. Entonces, si $v \notin R_j$ para algún j , la envolvente convexa de los puntos de color v no intersecta a la envolvente convexa de

los puntos de color u_j . Colorear los puntos de $(\bar{S} \setminus S) \cap R_j$ con el color u_j produce que la extensión de color resultante preserve a G como nervio. \square

Teorema 3.24. Toda gráfica bipartita $G = (U \cup V, E)$ es d -Tverberg para algún entero $d \geq |V|$.

Prueba: Considere una gráfica bipartita $G = (U \cup V, E)$ y sea w sea una palabra de longitud $|w|$ que la d -representa de manera general para algún entero $d \geq |V|$ descrita en el teorema 3.21. Por la versión multidimensional del teorema de Erdős-Szekeres (debido a Grünbaum [GKPS67] y Cordovil y Duchet [CD00]), sabemos que todo conjunto suficientemente grande de puntos en $\bar{S} \subset \mathbb{R}^d$ contiene un conjunto de $|w|$ puntos S de alguna curva γ que es combinatoriamente equivalente a un conjunto S_1 en la curva de momento M_d . De modo que por el lema 2 de [DLHOY21] existe una biyección σ de S_1 a S que conserva la orientación de cualquier tupla $(d + 1)$ en S . Entonces cualquier partición $\mathcal{P} = P_1, P_2, \dots, P_n$ de S_1 y la partición correspondiente de S a través de σ , denotada $\sigma\mathcal{P} = \{\sigma(P_1), \sigma(P_2), \dots, \sigma(P_n)\}$, deben tener la misma gráfica de intersección $\mathcal{N}^1(\mathcal{P})$. Dado que las gráficas bipartitas son complejos simpliciales sin triángulos, sus nervios son iguales a su 1-esqueleto. Esto implica que la partición inducida por la palabra w en el teorema 3.15 también es partición inducida en S . Por lo tanto, por el lema 3.23 G es d -Tverberg. \square

Aunque en teorema 3.24 prueba que las gráficas bipartitas son d -Tverberg, la dimensión que nos provee, en algunos casos resulta ser lejana a la óptima. Pero como veremos a continuación podemos mejorar la dimensión requerida en el caso de algunas familias de gráficas bipartitas con un poco más de estructura como por ejemplo: los hipercubos. Además probaremos que los prismas $GP(n)$ con $n > 3$ par son 4-Tverberg.

3.3.5. El hipercubo Q_n

El *hipercubo* de orden n , denotado Q_n , es la gráfica que tiene 2^n vértices representando las 2^n cadenas binarias de longitud n , de modo que dos vértices son adyacentes si y solo si, las cadenas binarias que ellos representan difieren en exactamente una posición.

Considere los vértices de Q_n como las n cadenas de ceros y unos y sean L_0, L_1, \dots, L_n conjuntos de vértices tales que L_i para $0 \leq i \leq n$ contiene a los vértices cuya suma de sus entradas es i . Llamaremos a estos conjuntos los *niveles de Hasse*. Reetique-

taremos a los vértices de los niveles pares de la siguiente manera $\{v_1, \dots, v_{2^{n-1}}\}$ con los primeros $\binom{n}{0}$ vértices en el nivel 0, los siguientes $\binom{n}{2}$ vértices en el nivel 2 etc. Mientras que a los vértices de los niveles impares los reetiquetaremos como $\{u_1, \dots, u_{2^{n-1}}\}$ con los primeros $\binom{n}{1}$ vértices en el nivel 1, los siguientes $\binom{n}{3}$ vértices en el nivel 3 etc (ver figura 3.5).

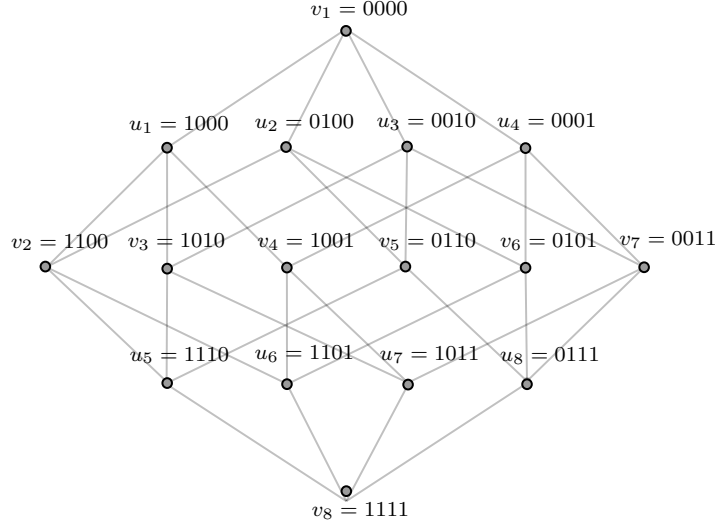


Figura 3.5: Diagrama de Hasse de Q_4 .

Ahora, denotemos como $w(\{v_i, u_j\})$ a la palabra alternante de longitud $d+2 \geq 2n+1$ con letras v_i y u_j , i.e., $w(\{v_i, u_j\}) = v_i u_j v_j \dots u_j v_i$. Definimos las siguientes palabras

$$w_i = w(\{v_i, u_{i_1}\})w(\{v_i, u_{i_2}\}) \dots w(\{v_i, u_{i_n}\})$$

donde $N(v_i) = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}\}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Proposición 3.25. La palabra $w = w_1 w_2 \dots w_{2^{n-1}}$ d -representa de manera general a Q_n .

Prueba: Por construcción es claro que toda arista de Q_n es inducida por P por lo que será suficiente probar que no se generan aristas nuevas.

Sea $\{v_x, v_y\} \notin E$ para algunos $x \neq y \in [2^{n-1}]$. Como cada vértice v_i tiene letras solo en el bloque w_i y este bloque no contiene letras v_j para $i \neq j$, la sucesión alternante de longitud máxima con alfabeto $\{v_x, v_y\}$ tiene 2 elementos, luego $\{v_x, v_y\}$ no es

inducida por w .

Sea $\{u_x, u_y\} \notin E$ con $x \neq y \in [2^{n-1}]$. Si u_x y u_y están en niveles diferentes L_i, L_j con $|i - j| > 2$, por la construcción de la palabra w , todas las copias de uno de ellos preceden a las copias del otro, luego la secuencia alternante de longitud máxima tiene solo dos elementos. Por otro lado si $|i - j| \leq 2$ cada una de las letras de $\{u_x, u_y\}$ aparece en exactamente n bloques. Así, toda sucesión alternante tiene a lo más $2n$ elementos, luego la arista $\{v_x, v_y\}$ no es inducida por w .

Sea $\{v_x, u_y\} \notin E$ para algunos $x, y \in [2^{n-1}]$. Tenemos que u_y no aparece en el bloque w_x , luego la secuencia alternante de longitud máxima en w y alfabeto en $\{v_x, u_y\}$ tiene a lo más 3 elementos, así $\{v_x, u_y\}$ no es inducida por w . \square

Proposición 3.26. Los hipercubos Q_n son d -Tverberg para $d \geq 2n - 1$.

Prueba: Consideremos la palabra $w = w_1 w_2 \dots w_{2^{n-1}}$ que d -representa de manera general al hipercubo Q_n para $d + 2 \geq 2n + 1$ construida como se explicó en la demostración de la proposición 3.25. La versión multidimensional del teorema de Erdős-Szekeres (ver [GKPS67] y [CD00]) nos garantiza que todo conjunto suficientemente grande S' de puntos en \mathbb{R}^d contiene un subconjunto S de $|w|$ puntos en posición cíclica. Etiquetemos estos puntos como $\{s_1, \dots, s_{|w|}\}$ siguiendo el orden en el que aparecen sobre la curva cíclica.

Consideremos la coloración $\mathcal{C} : V(Q_n) \rightarrow S$ tal que $\mathcal{C}(S_i) = w(i)$. Por el teorema de Breen (enunciado aquí como teorema 3.14) esta coloración particiona a S , de manera que el nervio de esta coloración es justamente Q_n .

Procedamos ahora a extender la coloración a los demás puntos de S' . Observemos que por la construcción de w y la definición de \mathcal{C} , existen $2^{n-1} - 1$ hiperplanos paralelos que no intersectan puntos de P y que separan a \mathbb{R}^d en 2^{n-1} regiones $R_1, \dots, R_{2^{n-1}}$ tal que todos los puntos de S con color v_i están contenidos en la región R_i para $1 \leq i \leq 2^{n-1}$. Luego coloreando los puntos de $S' \setminus S \subset R_i$ con color v_i tenemos que esta nueva coloración preserva las intersecciones entre las envolventes convexas de las partes. Luego preserva a Q_n como nervio. \square

3.3.6. Los prismas con un número par de vértices en sus bases

Una *prisma* $GP(n)$ es aquella gráfica correspondiente al 1-esqueleto de un prisma con n lados en sus bases. Podemos definir a esta gráfica $GP(n) = (V, E)$ como

aquella donde el conjunto de vértices es $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$, mientras que el conjunto de aristas es $E = \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}, \{a_n, a_1\}\} \cup \{\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3\}, \dots, \{b_{n-1}, b_n\}, \{b_n, b_1\}\} \cup \{\{a_i, b_i\} : 1 \leq i \leq n\}$ (ver figura 4.1).



Figura 3.6: Prismas $GP(6)$ y $GP(8)$.

En el caso en el que n es un número par entonces los prismas son también gráficas bipartitas. Con ideas similares a las anteriores probaremos que todo prisma $GP(n)$ con n par es 4-Tverberg.

Para cada pareja de vértices $u, v \in V$ sea $w(u, v)$ la palabra alternante de longitud seis con letras u y v , es decir, $w(u, v) = uvuvuv$. Considere el conjunto de vértices $a_1, b_2, a_3, \dots, a_{n-1}, b_n$. Para todo $i \in [n]$ definamos las palabras $w_{a_i} = w(a_i, a_{(i+n-1) \bmod n})w(a_i, b_i)w(a_i, a_{(i+1) \bmod n})$ y $w_{b_i} = w(b_i, b_{(i+n-1) \bmod n})w(b_i, a_i)w(b_i, b_{(i+1) \bmod n})$.

Proposición 3.27. La palabra $w = w_{a_1}w_{b_2}w_{a_3} \dots w_{a_{n-1}}w_{b_n}$ 4-representa generalmente a $GP(n)$.

Prueba: Por construcción, está claro que cada arista de $GP(n)$ es inducida por w , por lo que bastará con demostrar que no se generan nuevas aristas.

Dada una pareja de vertices a_i y a_j con $i < j$ y $2 < i - j \neq n - 1$ por construcción las letras a_i 's aparecen antes que las letras a_j 's en w , así la palabra alternante de longitud máxima con esas letras tiene longitud dos por lo que w no induce a la arista $\{a_i, a_j\}$. Análogamente para una pareja b_i y b_j con $i < j$ y $2 < i - j \neq n - 1$. Por otro lado, dada una pareja a_i, b_j con $i \neq j \in [n]$ por construcción de w la palabra alternante de longitud máxima tiene a lo más longitud cinco, por lo cual, tampoco las aristas de la forma $\{a_i, b_j\}$ con $i \neq j \in [n]$ son inducidas por w . \square

Proposición 3.28. Todo prisma $GP(n)$ con n par es 4-Tverberg.

Prueba: Consideremos la palabra $w = w_{a_1}w_{b_2}w_{a_3} \dots w_{a_{n-1}}w_{b_n}$ que 4-palabra-representa de manera general al prisma $GP(n)$ construida como se explicó en la demostración de la proposición 3.27. La versión multidimensional del teorema de Erdős-Szekeres (ver [GKPS67] y [CD00]) nos garantiza que todo conjunto suficientemente grande S' de puntos en \mathbb{R}^4 contiene un subconjunto S de $|w|$ puntos en posición cíclica. Etiquetemos estos puntos como $\{s_1, \dots, s_{|w|}\}$ siguiendo el orden en el que aparecen sobre curva cíclica.

Consideremos la coloración $\mathcal{C} : V(GP(n)) \rightarrow S$ tal que $\mathcal{C}(S_i) = w(i)$. Por el teorema de Breen 3.14 esta coloración particiona a S de manera que el nervio de esta coloración es justamente $GP(n)$.

Procedamos ahora a extender la coloración a los demás puntos de S' . Observemos que por la construcción de w y la definición de \mathcal{C} , existen $n - 1$ hiperplanos paralelos que no intersectan puntos de P y que separan a \mathbb{R}^4 en $n - 1$ regiones R_1, \dots, R_{n-1} de manera que todos los puntos de S con color a_i están contenidos en la región R_i para $1 \leq i \leq n - 1$ impar y los puntos de S con color b_i están contenidos en la región R_i para $1 \leq i \leq n - 1$ par. Luego coloreando los puntos de $S' \setminus S \subset R_i$ con color a_i si i es impar o b_i si i es par tenemos que esta nueva coloración preserva las intersecciones entre las envolventes convexas de las partes. Luego preserva a $GP(n)$ como nervio. \square

Capítulo 4

Gráficas de particiones de Tverberg

La entropía es el precio de la estructura.

(Ilya Prigogine)

4.1. Gráficas de complejos simpliciales

En los capítulos anteriores vimos que dada una pareja (S, P) , donde S es un conjunto de puntos en un espacio euclidiano y P es una r -partición de S , podemos asignarle un complejo simplicial llamado nervio. Vimos, entre otras cosas, que cuando la cardinalidad del conjunto S crece, la proporción de las particiones que inducen al $(r - 1)$ -simplejo como nervio tiende a uno, por lo que la proporción de las particiones que inducen cualquier otro complejo simplicial tiende a cero. Hecho que resulta interesante si consideramos que al aumentar la cantidad de puntos de S , para un entero positivo r fijo, el número de r -particiones posibles crece de manera exponencia.

En este capítulo analizaremos las relaciones entre las posibles particiones de Tverberg de un conjunto de puntos S , así como su comportamiento asintótico. Para ello definiremos un tipo especial de gráficas de complejos simpliciales. Estas gráficas viven dentro de una gráfica muy estructurada; la gráfica de r -particiones. Hasta donde sabemos estas gráficas no han sido estudiadas con anterioridad, sin embargo algunas

de sus propiedades han sido analizadas en otros contextos.

4.2. Gráficas de r -particiones

Dadas dos particiones P y P' de un conjunto S , definimos la *distancia entre particiones* de P a P' como el mínimo número de elementos que necesitamos mover de una parte a otra en P evitando partes vacías para obtener P' . Denotaremos a esta distancia como $D(P, P')$. Esta distancia resulta ser equivalente al mínimo número de elementos de S que requerimos eliminar de S , de manera que las particiones P y P' restringidas a los puntos restantes sean iguales. Esta definición de distancia entre particiones fue establecida por primera vez en 1965 por S. Régnier [Rég83].

La distancia entre particiones ha sido un tema ampliamente estudiado en los últimos años, generando resultados en áreas como la bioinformática [AF99],[KLB05] y la minería de datos [Gus02]. En este capítulo trabajaremos únicamente con r -particiones.

Definición 4.1. Dado un conjunto finito S y un entero positivo r , la *gráfica de r -particiones* $G = (V, E)$ es aquella cuyo conjunto de vértices V son las r -particiones de S y donde existe una arista $\{P, P'\}$ está en E si y solo si P y P' difieren exactamente en un elemento, i.e., $D(P, P') = 1$.

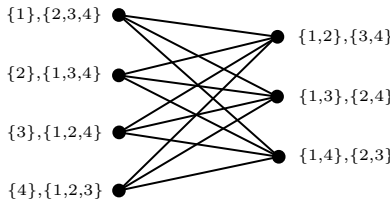


Figura 4.1: Gráfica de 2-particiones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

En siguiente resultado mostramos que la gráfica de r -particiones G es una gráfica con bastante estructura.

Proposición 4.2. Sea S un conjunto con n elementos y sea G su gráfica de r -particiones para algún entero positivo $r \leq n/2$. Entonces;

1. G es conexa.
2. $|V(G)| = S_n^r$, donde S_n^* denota los números de Stirling del segundo tipo.

3. Para el grado mínimo de G tenemos que $\delta(G) = (n - r + 1)(r - 1)$ mientras que para el grado máximo $\Delta(G) = n(r - 1)$.
4. $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} S_2(n - k, r - k)(n - k)(r - 1)$, donde $S_2(x, y)$ denota los números de *Stirling 2-asociados del segundo tipo*.

Prueba: Dadas dos particiones arbitrarias P y P' de S moviendo exactamente $D(P, P')$ elementos de P obtenemos P' por lo que G es conexa. La gráfica G tiene exactamente S_n^r vértices, pues este número cuenta las maneras posibles de partir n elementos en r partes no vacías.

Dada una r -partición P de S si un elemento se encuentra en una parte con cardinalidad mayor que uno, podemos mover dicho elemento a través de las otras partes obteniendo en cada paso nuevas particiones adyacentes a P . Así, el grado de P en G es igual a $\sum_{|P_i| \neq 1} |P_i|(r - 1)$. Luego, $\delta(G) = (n - r + 1)(r - 1)$ y se alcanza en aquellas particiones donde hay $r - 1$ partes con solo un elemento y una única parte con los $n - r + 1$ elementos restantes. Mientras que $\Delta(G) = n(r - 1)$ y se alcanza en las particiones donde cada parte tiene más de un elemento.

Sea P una r -partición de S con exactamente $0 \leq k \leq r - 1$ partes de cardinalidad uno. Tenemos que $deg(P) = (n - k)(r - 1)$ pues cada uno de los $n - k$ elementos que están en las partes con cardinalidad mayor a uno se puede mover a cualquiera de las $r - 1$ partes restantes. Para un k fijo hay exactamente $\binom{n}{k} S_2(n - k, r - k)$ particiones distintas. Entonces, la suma de los grados de todos los vértices es:

$$\sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} S_2(n - k, r - k)(n - k)(r - 1).$$

Finalmente, como $E(G) = \frac{1}{2} \sum_{P \in V} deg(P)$ tenemos que

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} S_2(n - k, r - k)(n - k)(r - 1).$$

□

Con motivo de ejemplificar la enorme magnitud de estas gráficas, las siguientes tablas muestran el número de vértices y aristas respectivamente en las gráficas con hasta cinco particiones en conjuntos de hasta doce puntos.

Número de vértices para la gráfica de r -particiones de un conjunto con n elementos								
$r \backslash n$	5	6	7	8	9	10	11	12
2	15	31	63	127	255	511	1023	2047
3	25	90	301	966	3025	9330	28501	86526
4	10	65	350	1701	7770	34105	145750	611501
5	1	15	140	1050	6951	42525	246730	1379400

Número de aristas para la gráfica de r -particiones de un conjunto con n elementos								
$r \backslash n$	5	6	7	8	9	10	11	12
2	35	90	217	504	1143	2550	5621	12276
3	90	450	1890	7224	26082	90750	307890	1026036
4	30	360	2730	16800	91854	466200	2250930	10494000
5	0	60	1050	11200	94500	695100	4677750	29607600

Observemos que en la gráfica de r -particiones G de un conjunto S , dadas dos r -particiones P y P' la distancia entre ellas $D(P, P')$ es justamente la mínima longitud sobre todos los caminos posibles que unen a P con P' en G . Entonces, el *diámetro* de G , denotado como $diam(G)$ puede interpretarse como la máxima de las distancias posible sobre todas las r -particiones de S . En [CDGH06] los autores encontraron la distancia máxima entre dos particiones dadas con posiblemente un número diferente de partes. De esta manera, interpretando este resultado para las gráficas de r -particiones obtenemos la siguiente igualdad:

$$diam(G) = \begin{cases} 2n - 2r & \text{if } n \leq 2r - 2 \\ n - \lceil \frac{n}{r} \rceil & \text{if } n \geq 2r - 1 \end{cases}$$

A continuación analizaremos el número de clan de una gráfica de r -particiones G .

Proposición 4.3. Sea S un conjunto con n elementos, $r < n$ un número entero positivo y G la gráfica de r -particiones de S . Entonces, el número de clan $\omega(G)$ es exactamente r .

Prueba: Dado que $n > r$ existe una parte con más de un elemento, digamos P_1 . Moviendo uno de los elementos de P_1 , digamos x a través de las otras partes, las

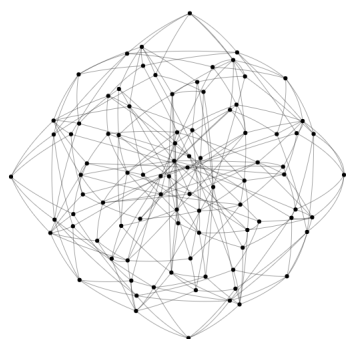
particiones resultantes son adyacentes entre si pues difieren solo en x , luego, estas particiones inducen una subgráfica completa de G con exactamente r vértices. Así, $\omega(G) \geq r$.

Por otro lado, si Q es un clan de la gráfica G , probaremos que todos los vértices de Q difieren exactamente en un elemento específico. Si Q consiste en solo una arista hemos terminado. Supongamos entonces, que Q tiene $k \geq 3$ vértices, digamos P_1, \dots, P_k . Como P_1 es adyacente a P_2 existe un elemento x en S tal que si lo borramos tenemos que $P_1 = P_2$ (restringido a $S \setminus \{x\}$). Análogamente, existe un elemento y en S tal que al eliminarlo obtenemos que $P_2 = P_3$. Si estos dos elementos son diferentes entonces $D(P_1, P_2) > 1$ pero esto es una contradicción, luego $x = y$. Inductivamente obtenemos que todos los vértices de Q difieren únicamente en el elemento x . Así, $\omega(G) \leq r$. □

4.3. Gráficas de r -particiones de Tverberg

Recordemos que una partición de Tverberg de un conjunto de puntos S es aquella en la que la intersección de las envolventes convexas de las partes es no vacía.

Definición 4.4. Dado un conjunto de puntos S en \mathbb{R}^d y un entero positivo r , la *gráfica de r -particiones de Tverberg* G , es aquella cuyo conjunto de vértices son las r -particiones de Tverberg de S y donde hay una arista entre dos particiones P y P' si y solo si $D(P, P') = 1$.



$|V(G)| = 90$
 $|E(G)| = 272$
 $\Omega(G) = 3$
 Diametro = 5

Grado	N° vértices
5	48
6	16
8	26

Figura 4.2: Gráfica de 3-particiones de Tverberg de los vértices de un octágono regular.

Aunque los teoremas tipo Tverberg han sido muy estudiados en la literatura, los resultados publicados se enfocan principalmente en probar la existencia de las particiones de Tverberg y no tanto en estudiar la estructura subyacente de las mismas. Esta es la razón principal para estudiar las gráficas de r -particiones de Tverberg, ya que incluso preguntarnos sobre el número de vértices que tendrán para un conjunto S de $(d+1)(r-1)+1$ puntos, resulta ser un problema abierto. Esto es exactamente lo que intenta responder la conjetura de Sierksma. Esta conjetura afirma que si $|S| = (d+1)(r-1)+1$, siempre existen al menos $(r-1)!^d$ particiones de Tverberg de S . En esta sección trataremos el caso en que $|S| > Tv(d, r)$. Estudiaremos los parámetros estructurales de esta gráfica como el máximo y mínimo grado, el diámetro, el número de clan, y la conectividad.

Para establecer nuestros primeros resultados, utilizaremos el siguiente teorema de Atilla Pór [AP], que generaliza el teorema de Kirchberger.

Teorema 4.5 (Atilla Pór [AP] 1997). Sean P_1, P_2, \dots, P_r conjuntos disjuntos en \mathbb{R}^d . Entonces $\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(P_i) \neq \emptyset$ si y solo si existen $P'_i \subset P_i$ tales que $\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(P'_i) \neq \emptyset$ y $|\bigcup_{i=1}^r P'_i| \leq (d+1)(r-1)+1$.

4.3.1. Conectividad

Proposición 4.6. Sean r y d enteros positivos y sea $S \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto con al menos $3Tv(d, r)$ puntos. Entonces la gráfica de r -particiones de Tverberg de S es conexa.

Prueba: Considere dos r -particiones de Tverberg $P = P_1, \dots, P_r$ y $Q = Q_1, \dots, Q_r$ de S . Construiremos una secuencia de r -particiones de S de manera que obtengamos un camino entre P y Q en G .

Por el teorema 4.5 existen subconjuntos $S_P, S_Q \subset S$ con a lo más $Tv(d, r)$ elementos cada uno, y tales que P'_1, \dots, P'_r es una partición de Tverberg de S_P con $P'_i \subset P_i$ y Q'_1, \dots, Q'_r es una partición de Tverberg de S_Q con $Q'_i \subset Q_i$ para $i \in [r]$.

Si $S_P \cap S_Q = \emptyset$ consideremos los puntos $S \setminus S_P = \{p_1, \dots, p_{|S \setminus S_P|}\}$. El punto p_1 está en alguna parte Q_i en Q para algún i , movamos pues p_1 a la parte P_i de P . Note que la partición resultante, llamémosla T_1 también es de Tverberg ya que los puntos de P'_1, \dots, P'_r no se movieron. Observemos que T_1 difiere en exactamente un elemento de P . Procediendo de la misma manera con los puntos restantes de $S \setminus S_P$ obtenemos

una secuencia de particiones de Tverberg $T_1, T_2, \dots, T_{|S \setminus S_P|}$ donde $D(T_i, T_{i+1}) = 1$ para $i \in [|S \setminus S_P|]$. Observe que en la partición $T_{|S \setminus S_P|}$ cada punto que originalmente pertenecía a Q_i ahora pertenece a P_i . Ahora movemos los puntos de S_P uno a uno de manera que si $p \in S_P$ y p está en Q_i en Q moveremos p a la parte P_i . Al final de estos procesos obtenemos que cada parte P_i se convierte en la parte Q_i logrando la secuencia de particiones deseada que va de P a Q .

Si $S_P \cap S_Q \neq \emptyset$, como $|S_P \cup S_Q| \leq 2Tv(d, n)$ podemos elegir un subconjunto $S' \subset S \setminus (S_P \cup S_Q)$ con exactamente $Tv(d, n)$ puntos. Por el teorema de Tverberg hay una r -partición T' de S' que se puede extender a una partición de Tverberg T del conjunto completo S simplemente asignando los puntos de $S \setminus S'$ a cualquiera de las r partes de T' . Entonces, usando el razonamiento anterior, hay un camino de P a T y otro de T a Q en la gráfica de particiones de Tverberg. Concluimos que hay un camino de P a Q . \square

Creemos sin embargo que el número $3Tv(d, r)$ está lejos de ser cota óptima. Computacionalmente pudimos explorar el comportamiento de las gráficas de r -particiones de Tverberg en una base de datos que usa al menos un representante de cada tipo de orden con hasta 10 puntos en el plano. Posteriormente muestreamos aleatoria e uniformemente sobre tipos de orden con hasta 14 puntos notando que la gráfica de r -particiones de Tverberg se vuelve conexa tan pronto tenemos $Tv(d, r) + 1$ puntos. Además, en la sección 4.4 mostramos que para el caso de $r = 2$, la gráfica de particiones de Radón correspondiente siempre es conexa. Por estas razones conjeturamos lo siguiente:

Conjetura 4.7. La gráfica de particiones de Tverberg de un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ es conexa si $|S| \geq Tv(d, r) + k$ para alguna constante k .

4.3.2. Máximo y mínimo grado

A continuación, analizaremos el grado máximo y mínimo de las gráficas de particiones de Tverberg.

Teorema 4.8. Sea S un conjunto de $n \geq Tv(d, r)$ puntos en \mathbb{R}^d y G la gráfica de r -particiones de Tverberg asociada a S . Entonces, para cada vértice v en $V(G)$ tenemos

$$(n + 1 - Tv(d, r))(r - 1) \leq \deg(v) \leq n(r - 1).$$

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el conjunto de puntos S es algebraicamente independiente. Sea $P = P_1, P_2, \dots, P_r$ una r -partición de Tverberg de S . Por los teoremas 4.5 y 1.4, existe un subconjunto $S' \subset S$ con a lo más $Tv(d, r)$ puntos tal que los conjuntos $P'_i = P_i \cap S'$ con $i = 1, \dots, r$ forman una r -partición de Tverberg. Tenga en cuenta que podemos cambiar la parte a la que pertenece cualquier punto en $S \setminus S'$ de manera que la r -partición resultante sigue siendo de Tverberg. Esto nos da $|S \setminus S'| \cdot (r - 1) = (n - Tv(d, r))(r - 1)$ vecinos en G para P . Necesitamos $r - 1$ vecinos más para terminar la prueba.

Afirmamos que existe $x \in S'$ tal que la partición P restringida al conjunto $S \setminus \{x\}$ es una partición de Tverberg. Si esto sucede, significa que podemos cambiar la parte en la que está x a cualquiera de las $r - 1$ opciones restantes obteniendo nuevas particiones de Tverberg. Como los puntos de S son algebraicamente independientes, sabemos que $\bigcap_{j=1}^r \text{conv}(P'_j)$ consta de un único punto p y que este punto está en el interior relativo de cada $\text{conv}(P'_j)$. También sabemos que $|P'_j| \leq d + 1$ para cada $j = 1, \dots, r$.

Sea $y \in S \setminus S'$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $y \in P_1$. Hay dos casos.

Primero, podemos tener $|P'_1| = d + 1$. Si este es el caso, podemos usar la versión coloreada del teorema de Carathéodory (ver sección 6.6) con d copias de P'_1 y una copia de $\{y\}$. Dado que las d copias contienen a p en su envolvente convexa, existe la posibilidad de elegir a lo más d puntos de P'_1 y y de modo que la envolvente convexa de dichos puntos contenga a p . En otras palabras, existe un punto $x \in P'_1$ tal que $p \in \text{conv}((P'_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\})$, como queríamos.

De lo contrario, tenemos $|P'_1| \leq d$, por lo que la dimensión de $\text{conv}(P'_1)$ es a lo más $d - 1$. Por lo tanto, $\dim(\text{conv}((P'_1 \cup \{y\}))) = 1 + \dim(\text{conv}(P'_1))$. Esto significa que

$$\dim \left(\text{conv}(P'_1 \cup \{y\}) \cap \text{conv}(P'_2) \cap \dots \cap \text{conv}(P'_r) \right) = 1.$$

Sea $\ell = \text{conv}(P'_1 \cup \{y\}) \cap \text{conv}(P'_2) \cap \dots \cap \text{conv}(P'_r)$. Por los argumentos anteriores, ℓ es un segmento, con un extremo p . Sea q el otro extremo. Dado que q es un extremo, significa que q está en la frontera de un conjunto de la forma $\text{conv}(P'_j)$ con $j > 1$ o en la frontera de $\text{conv}(P'_1 \cup \{y\})$. En el primer caso, existe $x \in P'_j$ tal que $q \in \text{conv}(P'_j \setminus \{x\})$. En el segundo caso, dado que $q \neq p$, existe $x \in P'_j$ tal que $q \in \text{conv}(P'_1 \setminus \{x\} \cup \{y\})$. En cualquier caso, sabemos que $x \in S'$ y si quitamos x todavía tenemos una partición de Tverberg, como queríamos.

El lado derecho de la igualdad se obtiene simplemente contando el número máximo de particiones m que difieren exactamente en un elemento de v . \square

A continuación, analizaremos el grado máximo de la gráfica de particiones de Tverberg G usando el concepto del teorema de Tverberg con tolerancia. Este resultado introduce un nuevo parámetro t llamado *tolerancia*, y afirma que existe un número mínimo $N = N(d, t, r)$ tal que cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ con al menos N puntos se puede dividir en r conjuntos disjuntos S_1, \dots, S_r tales que $\bigcap_{j=1}^r \text{conv}(S_j \setminus Q) = \emptyset$ para cualquier $Q \subset S$ con a lo más t puntos. Observemos que si una partición tiene tolerancia $t \geq 1$, podemos intercambiar cualquier elemento a otra parte de manera que la partición resultante sigue siendo de Tverberg (ya que incluso eliminando el punto obtenemos una partición de Tverberg). Esto implica que al menos el vértice correspondiente a esta partición en G alcanza el grado máximo. La mejor cota asintótica actualmente para $N(d, t, r)$ es $N(d, t, r) = rt + \tilde{O}(r^2\sqrt{td} + r^3d)$, donde \tilde{O} esconde factores polilogarítmicos en r, t, d [Sob18]. Para valores pequeños de t, d, r , tenemos el límite $N(d, t, r) \leq (t + 1)(r - 1)(d + 1) + 1$ en general, y la cota $N(d, t, r) \leq 2^{d-1}(r(t + 2) - 1)$, que es mejor para dimensiones bajas [SS12, MS14].

Esto significa que mientras $|S| \geq \min\{2(r - 1)(d + 1) + 1, 2^{d-1}(3t - 1)\}$, la gráfica de Tverberg para S tendrá al menos un punto de grado máximo.

El siguiente resultado muestra que a medida que aumenta el número de puntos del conjunto S , casi todos los vértices de la gráfica de r -particiones de Tverberg alcanzan un grado máximo rápidamente, ya que la parte exponencial se reduce mucho más rápido que $n^{(r-1)(d+1)}$. Esto implica que asintóticamente la gráfica de particiones de Tverberg y la gráfica de particiones son extremadamente similares.

Teorema 4.9. Sea G la gráfica de r -particiones de Tverberg G de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ de n puntos. Si elegimos una r -partición al azar, la probabilidad de que sea una r -partición de Tverberg con grado $(n - 1)(r - 1)$ en G es al menos

$$1 - r^{(r-1)(d+1)} n^{(r-1)(d+1)} \exp\left(\frac{-2(n-r)^2}{nr^2}\right).$$

Prueba: Para probar este resultado, primero usamos la transformación de Sarkaria [Sar92]. Esta es una técnica estándar para reducir problemas tipo Tverberg a variaciones del teorema de Carathéodory. La versión que usamos es una simplificación de Bárány y Onn [BO95].

Introducimos r vectores v_1, v_2, \dots, v_r que son los vértices de un simplejo regular en

\mathbb{R}^{r-1} centrado en el origen. Entonces, para cada $a \in \mathbb{R}^d$, consideramos el conjunto

$$X_a = \{(a, 1) \otimes v_j \in \mathbb{R}^{(d+1)(r-1)} : j = 1, \dots, r\},$$

donde \otimes representa el producto tensorial. Dado un conjunto a_1, \dots, a_n de puntos en \mathbb{R}^d , elegir un representante de cada conjunto X_{a_1}, \dots, X_{a_n} es equivalente a hacer una partición de a_1, \dots, a_n en r partes. Además, esta partición es una partición de Tverberg si y solo si la envolvente convexa de la elección realizada en $\mathbb{R}^{(r-1)(d+1)}$ contiene al origen (ver, por ejemplo, [BS18]).

Dados a_1, \dots, a_n puntos en \mathbb{R}^d , elegimos un punto al azar de cada X_{a_1}, \dots, X_{a_n} , de manera uniforme e independiente. Sea N el conjunto resultante. Sea H un semiespacio en $\mathbb{R}^{(r-1)(d+1)}$ cuyo hiperplano límite contiene el origen. Acotemos la probabilidad de que $|H \cap N| \leq 1$.

Sea y_i nuestra elección de X_{a_i} . Como $\text{conv}(X_{a_i})$ contiene al origen en $\mathbb{R}^{(r-1)(d+1)}$, tenemos $H \cap X_{a_i} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathbb{P}(y_i \in H) \geq 1/r$. Usando la linealidad de la esperanza,

$$\mathbb{E}[|H \cap N|] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(y_i \in H) \geq n/r.$$

Como esta esperanza es una suma de n variables aleatorias independientes que toman valores en $[0, 1]$, podemos aplicar la desigualdad de Hoeffding para obtener que por cada $0 \leq \lambda \leq n/r$, tenemos

$$\mathbb{P}(|H \cap N| \leq n/r - \lambda) \leq \mathbb{P}(|H \cap N| \leq \mathbb{E}[|H \cap N|] - \lambda) \leq \exp(-2\lambda^2/n).$$

Elijamos $\lambda = (n/r) - 1$, entonces tenemos

$$\mathbb{P}(|H \cap N| \leq 1) \leq \exp(-2(n-r)^2/r^2n).$$

Ahora, consideremos el conjunto de puntos $X = \bigcup\{X_{a_i} : i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^{(r-1)(d+1)}$. Para cada punto $x \in X$, consideremos el hiperplano $x = \{y : \langle x, y \rangle = 0\}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto estándar. Este arreglo de hiperplanos tiene a lo más $|X|^{(r-1)(d+1)}$ celdas, lo que significa (nuevamente por dualidad) que hay a lo más $|X|^{(r-1)(d+1)}$ posibles subconjuntos de X que puede contener un semiespacio H como el anterior. Por lo tanto, una cota de la unión muestra que la probabilidad de que exista un semiespacio H para el cual $|H \cap N| \leq 1$ está acotado superiormente por

$$|X|^{(r-1)(d+1)} \exp\left(\frac{-2(n-r)^2}{nr^2}\right).$$

Alternativamente, si $|H \cap N| \geq 2$ para cada posible H , eliminando cualquier punto de N aún obtenemos un conjunto que contiene al origen. Esto significa que eliminar cualquiera de los puntos a_1, \dots, a_n del conjunto original en \mathbb{R}^d seguimos teniendo una partición de Tverberg. Terminamos la demostración observando que $|X| = nr$. \square

4.3.3. Clanes

Veremos a continuación que como en el caso de la proposición 4.3 de las gráficas de particiones, el número de clan de las gráficas de particiones de Tverberg se comporta de una manera muy similar.

Proposición 4.10. Sea G la gráfica de r -particiones de Tverberg de un conjunto S con $n > Tv(d, r)$ puntos en \mathbb{R}^d . Entonces, su número de clan $\omega(G)$ es r .

Prueba: Como la gráfica de r -particiones de Tverberg está contenida en la gráfica de r -particiones tenemos que $\omega(G) \leq r$.

Ahora, sea $P = P_1, P_2, \dots, P_r$ una partición de Tverberg de S . Por el teorema 4.5, existe un subconjunto $S' \subset S$ con a lo más $Tv(d, r)$ puntos tal que los conjuntos $P'_i = P_i \cap S'$ para $i = 1, \dots, r$ forman una partición de Tverberg de S' . Considere un punto $x \in S \setminus S'$, sin pérdida de generalidad suponga que $x \in P_1$. Podemos mover x a cada parte P_i para $2 \leq i \leq r$ y las particiones resultantes T_2, \dots, T_r siguen siendo de Tverberg. Además cada pareja de particiones T_1, \dots, T_r están a distancia uno en G , por lo que inducen una subgráfica completa de orden r . Entonces, $\omega(G) \geq r$. \square

4.4. Gráficas de particiones de Radón

Recordemos que el teorema de Tverberg es la generalización del teorema de Radón, luego cuando $r = 2$ una 2-partición de Tverberg suele llamarse también partición de Radón. En esta sección estamos interesados en obtener mejores cotas para algunas de las propiedades estructurales que estudiamos en la sección anterior en el caso particular de las gráficas de Radón.

La proposición 4.6, garantiza que la gráfica de particiones de Radón G de cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ con al menos 12 puntos en posición general es conexa. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que sin importar la cardinalidad del conjunto S , G

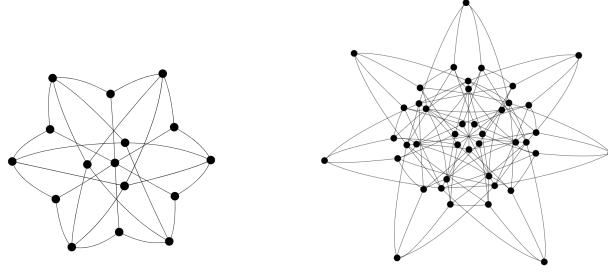


Figura 4.3: Gráficas de particiones de Radon inducidas por los vértices de un hexágono (izquierda) y de un heptágono (derecha) regulares.

siempre es conexa.

Proposición 4.11. La gráfica de particiones de Radón de cualquier conjunto S de puntos en posición general en \mathbb{R}^2 es conexa.

Prueba: Si $|S| \leq 4$, entonces G es la gráfica nula o consiste en un único vértice, en cualquier caso G es conexa. Supongamos entonces que $|S| > 4$.

Si $|S| = 5$ entonces hay exactamente $2^4 - 1 = 15$ particiones de S de las cuales $\binom{5}{2} = 10$ no son de Radón, luego hay exactamente 5 particiones de Radón. Esto implica que $|V(G)| = 5$ y por el teorema 4.8 $\delta(G) \geq 2$, por lo tanto G es conexa.

Si $|S| > 5$, consideremos $P = P_1, P_2$ y $Q = Q_1, Q_2$ dos diferentes particiones de Radon de S . Por el teorema 4.5 existen subconjuntos $S_p = \{p_1, \dots, p_4\}$ y $S_q = \{q_1, \dots, q_4\}$ de S y particiones de Radón $P' = P'_1, P'_2$ de S_p y $Q' = Q'_1, Q'_2$ de S_q tales que $P'_i \subset P_i$ y $Q'_i \subset Q_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

Si $S_p = S_q$, cambiando uno a uno los demás elementos de la partición P a la parte que les corresponde en Q , obtenemos una secuencia de particiones Radón de S , donde dos particiones consecutivas difieren en un solo elemento. Esto implica que hay una trayectoria entre los vertices correspondientes a P y Q en G .

Por otro lado, si $S_p \neq S_q$, existen puntos s_q^* en $S_q \setminus S_p$ y s_p^* en $S_p \setminus S_q$. Como la gráfica de particiones de radón inducida por los puntos $S_p \cup \{s_q^*\}$ es conexa, existe una trayectoria que va de P' a la única partición de Radón R de los puntos $(S_p \setminus \{s_p^*\}) \cup \{s_q^*\}$. Considerando los cambios que induce esta trayectoria en los puntos $S_p \cup S_q$ y manteniendo los puntos de $S \setminus (S_p \cup S_q)$ en la parte a la que pertenecen en P obtenemos una trayectoria que comienza en P y termina en una partición de

Radón que contiene a R . En caso de que S_p y S_q difieran en más de un elemento repetimos este proceso hasta eventualmente obter una trayectoria de particiones de Radón donde la primera es P y la última contiene a Q' . Finalmente cambiando uno a uno los demás elementos de $S \setminus S_q$ a la parte que le corresponde en Q , obtenemos una la trayectoria deseada. \square

Las siguiente proposición muestra que para cualquier conjunto de puntos S en posición general en \mathbb{R}^d el grado mínimo de su gráfica de particiones de Radón es exactamente la cota inferior del teorema 4.8.

Proposición 4.12. Dado cualquier conjunto S con $n > d + 2$ puntos en posición general en \mathbb{R}^d , existe una partición de Radón P y por lo tanto un vértice $v \in V(G)$ de la gráfica de particiones de Radón G tal que $\deg(v) = n - (d + 1)$.

Prueba: Sea S un conjunto con $n > d + 2$ puntos en posición general en el plano. Nos gustaría generar una partición Radon, es decir, una partición de S en dos conjuntos P_1 y P_2 , tal que la intersección de las envolventes convexas de P_1 y P_2 no sea vacía, con lo siguiente propiedad: Exactamente $d + 1$ de los puntos son esenciales, es decir, el cambio de partición de cualquiera de estos $d + 1$ puntos dará como resultado la pérdida de la partición Radon mientras que el resto se puede cambiar a la otra partición sin alterar la partición de Radon, por lo tanto $\deg(v_P) = n - (d + 1)$.

Observemos que dado que S es un conjunto de puntos en posición general, los vértices de la envolvente convexa $\text{conv}(S)$, generan un politopo convexo de dimensión d , además para cada vértice w en $\text{conv}(S)$ existe un $(d - 1)$ -hiperplano H generado por exactamente d vértices en $\text{conv}(S)$, digamos $H = \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$ que separa a w del resto de vértices de $\text{conv}(S)$.

Si todos los puntos de S están en posición convexa, es decir, si $\text{conv}(w, v_1, v_2, \dots, v_d)$ no tiene puntos de S en su interior, podemos establecer v_1, v_2, \dots, v_d en la parte P_1 y los puntos restantes de S incluyendo w en P_2 , tenga en cuenta que w, v_1, v_2, \dots, v_d son esenciales.

Ahora, supongamos que no todos los puntos están en posición convexa y que la envolvente convexa de $\{w, v_1, v_2, \dots, v_d\}$ contiene puntos en su interior.

Luego, con centro en v_1, v_2, \dots, v_{d-1} rotamos H hacia w hasta encontrar el primer vértice $s_{d,1}$ de S en el interior de $\text{conv}(S)$. Luego, con centro en v_2, \dots, v_d , giramos H hacia w y comenzando a etiquetar los puntos en el interior de $\text{conv}(S)$ uno por uno como $s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,r}$, $0 \leq r$ donde el último $s_{1,r}$ satisface que el $(d - 1)$ -hiperplano

\bar{H} que contiene a $v_2, \dots, v_d, s_{1,r}$ es el más cercano a $s_{d,1}$ pero deja a $s_{d,1}$ y w en un lado y el resto de los puntos $v_1, s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,r-1}$ en el otro lado.

Particionemos S de la siguiente manera. $s_{1,r}, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}$ y todos los puntos del mismo lado de w con respecto a \bar{H} excepto $s_{d,1}$ en la partición P_1 y $s_{d,1}$ y todos los demás puntos en la partición P_2 . Observemos que $s_1, s_{v_2,r}, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}$ y $d+1$ puntos son esenciales. \square

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

La conclusión final es que sabemos muy poco y, sin embargo, es asombroso lo mucho que conocemos.

(Bertrand Russell)

A lo largo de esta tesis trabajamos en diferentes problemas, todos ellos girando en torno al concepto de nervios de particiones de conjuntos de puntos en espacios euclidianos.

En el capítulo 2 vimos que en conjuntos de puntos en la línea, los nervios están completamente determinados por su 1-esqueleto. Así, en algún sentido, podemos pensar a los nervios simplemente como gráficas. Propusimos un nuevo modelo para gráficas aleatorias de intervalos y estudiamos el caso particular en el que la partición del conjunto se sigue de un proceso estocástico estacionario. Bajo estos supuestos, obtuvimos algunas cotas y resultados. Como trabajo a futuro nos gustaría abordar el caso no estacionario, es decir, un modelo de gráficas de intervalos aleatorias similar al definido en 2.2 pero con la excepción de que Y sea un proceso estocástico no estacionario. Algunas de las preguntas a resolver en este caso son las siguientes.

- *¿Cuántos vértices y aristas se espera aparezcan en la gráfica?*
- *¿Cuáles son las cotas para el grado mínimo/máximo?*
- *¿Cuál es el número de clan, el número cromático u otros parámetros comunes*

en la teoría de gráficas?

- *¿Cuál es la probabilidad de obtener una gráfica completa, o más aún una gráfica específica?*
- *¿Qué modelos y posibles aplicaciones podrían encontrarse en dimensiones mayores o iguales a dos?*

En el capítulo 3 estudiamos los nervios de particiones de puntos en dimensión mayor que uno. Vimos que su análisis aquí resulta más complejo que en la línea, esto es debido no solo a la gran cantidad de tipos de orden posibles para un conjunto de puntos sino también al hecho de que dos conjuntos de puntos con en mismo tipo de orden, o siendo iguales salvo una ligera perturbación pueden tener nervios completamente diferentes (ver figura 2.5). En este capítulo uno de los objetivos fue mostrar que familias específicas de gráficas son d -Tverberg. Logramos esta meta probando que muchas familias de gráficas son 2-Tverberg, entre ellas las gráficas libres de triángulos, gráficas circulares (que contienen a los ciclos y a los árboles). También, usando resultados clásicos como la generalización del teorema de Erdős-Szekeres, la condición de paridad de Gale y el teorema de Breen, respondimos afirmativamente a la pregunta propuesta por los autores en [DLHOY21] respecto a si las gráficas bipartitas son d -Tverberg. Dimos cotas para la dimensión necesaria para un bipartita en general y mejoramos estas cotas para familias de bipartitas con más estructura como los hipercubos y los prismas. Sin embargo nuestras cotas tanto en la dimensión como en el número de puntos distan mucho de ser precisas. Nuestra principal aportación, fue sin lugar a dudas la propuesta de un nuevo enfoque del problema utilizando técnicas recientes en el área de la teoría de gráficas, la noción de gráficas palabra- representables. Este concepto fue retomado por F. Frick y R. Amzi [FJ22] quienes lo generalizaron a los complejos d -colorfull-representables. Sin embargo, aún quedan muchas preguntas interesantes por investigar. Por ejemplo:

- *¿Cuáles son las condiciones necesarias para que familias de complejos simpliciales aparezcan como nervios? ¿será posible caracterizarlos?*
- *Dado un complejo simplicial específico, ¿cuál es la probabilidad de que este aparezca como nervio en una partición aleatoria de los puntos?*

- *¿Qué significa esto cuando los conjuntos de puntos provienen de conjuntos de datos? (posibles aplicaciones).*
- *¿Cómo lidiar con complejos simpliciales con triángulos?*

En el capítulo 4 estudiamos el comportamiento de las gráficas cuyos vértices son las r -particiones de un conjunto de puntos S en un espacio euclidiano, que inducen un complejo simplicial \mathcal{K} como nervio y donde existe una arista entre dos particiones si estas distan en uno. En este capítulo nos enfocamos particularmente en las gráficas donde el complejo simplicial \mathcal{K} es el $(r - 1)$ -simplejo. Dimos cotas para el grado mínimo y máximo, analizamos el comportamiento asintótico del grado, calculamos su número de clan y mostramos que estas gráficas son conexas cuando $|S| \geq 3Tv(d, r)$. Sin embargo tenemos evidencias computacionales que nos aseguran que la conexidad se alcanza cuando $|S| = Tv(d, r) + k$. Además queda por estudiar el caso en el que \mathcal{K} no es el $(r - 1)$ -simplejo. Algunas preguntas que podríamos abordar en un futuro son las siguientes:

- *¿Será cierto que la conexidad en la gráfica de particiones de Tverberg se obtiene cuando $|S| \geq Tv(d, r) + k$ para alguna constante k .*
- *¿Qué podemos decir acerca de la conexidad de la gráfica de particiones nulas así como de otros nervios?*
- *Probar que para todo conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ en posición general siempre existe una r -partición P de Tverberg que está a distancia uno de exactamente $(n - Tv(2, r) + 1)(r - 1)$ otras r -particiones de Tverberg.*
- *Dado un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ en posición general y complejo simplicial \mathcal{K} ¿bajo que condiciones será conexas la gráfica de r -particiones de \mathcal{K} ?*

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Capítulo 6

Apéndice: Definiciones y conceptos básicos

Largo es el camino de la enseñanza por medio de teorías; breve y eficaz por medio de ejemplos.

(Seneca)

6.1. Gráficas

Una *gráfica* $G = (V, E)$ es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices junto con un conjunto (posiblemente vacío) de pares desordenados de vértices distintos de G llamados aristas. El conjunto de vértices de G se denota por $V(G)$, mientras que el conjunto de aristas se denota por $E(G)$. Decimos que dos vértices u y v son *adyacentes* si $\{u, v\}$ es una arista de la gráfica. Un *camino* P en una gráfica G es una sucesión de vértices de G , tal que cada vértice es adyacente con los vértices que le siguen y le preceden en la secuencia. La gráfica G es *conexa* si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices u y v existe al menos un camino posible desde u hacia v . Decimos que G es una *gráfica simple* si no contiene aristas múltiples o aristas de la forma $\{v, v\}$ con $v \in V$ llamadas *lazos*.

El *grado de un vértice* v en una gráfica G es el número de aristas diferentes de G que contienen v , y se denota por $deg_G(v)$ o simplemente por $deg(v)$ si la gráfica G es

clara por contexto. El *grado mínimo* de G es el grado mínimo entre los vértices de G y se denota por $\delta(G)$. El *grado máximo* se define de manera similar y se denota por $\Delta(G)$.

Un *clan*, C , en una gráfica G es un subconjunto de los vértices, $C \subseteq V$, tal que cada pareja de vértices distintos son adyacentes. El término también puede referirse directamente a la subgráfica inducida por estos vértices. Un *clan maximal* es un clan que no se puede extender agregando un vértice adyacente más, es decir, un clan cuyos vértices no están contenidos dentro del conjunto de vértices de un clan más grande. Un *clan máximo* de una gráfica, G , es un clan, tal que no existe un clan con más vértices. Además, el *número de clan* $\omega(G)$ de una gráfica G es el número de vértices en un clan máximo en G .

La *distancia* entre dos vértices u y v en una gráfica G , denotada como $D(u, v)$, es el número de aristas en un camino mínimo. Si u y v pertenecen a distintas componentes conexas entonces $D(u, v) = \infty$. El *diámetro* de G , denotado por $diam(G)$, es la distancia máxima entre todas las posibles parejas de vértices.

Sea \mathcal{F} una familia finita de conjuntos no vacíos no necesariamente distintos. La *gráfica de intersección* de \mathcal{F} se obtiene representando cada conjunto en \mathcal{F} por un vértice y luego agregando una arista entre dos vértices cuyos conjuntos correspondientes tienen una intersección no vacía. Una gráfica G se llama gráfica de intersección, si es la gráfica de intersección de alguna familia \mathcal{F} .

Dada una colección finita de m intervalos en la línea real, su *gráfica de intersección de intervalos* correspondiente, $G(V, E)$, es la gráfica simple con m vértices, cada uno asociado a un intervalo, tal que una arista $\{i, j\}$ está en E si y solo si los intervalos asociados tienen intersección no vacía, es decir, se superponen.

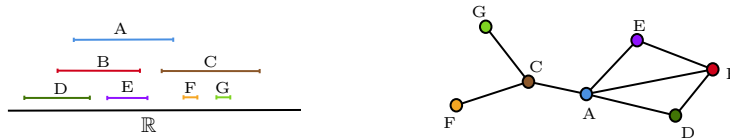


Figura 6.1: Siete intervalos sobre la línea real y su correspondiente gráfica de intersección.

En esta tesis trabajamos particularmente con las siguientes familias de gráficas:

- Decimos que una gráfica $C_n = (V, E)$ es un *ciclo* de n vértices si $V =$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} | i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_n, v_1\}$.

- Una gráfica $T = (V, E)$ es un *árbol* si es conexa y no contiene ciclos como subgráficas inducidas.
- Decimos que una gráfica $G = (V, E)$ es *bipartita* si sus vértices se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos e independientes V_1 y V_2 , de manera que cada arista conecta a un vértice en V_1 con uno en V_2 . Los conjuntos de vértices V_1 y V_2 generalmente son llamados *conjuntos partitos*.
- Una gráfica $W_n = (V, E)$ es una *n-rueda* si consiste en un n -ciclo y un vértice adyacente a todos los vértices del ciclo.
- Una gráfica $G = (V, E)$ es *polígono-circular* si es la gráfica de intersección de un conjunto de polígonos convexos con vértices en una circunferencia.

6.2. Complejos simpliciales y nervios

Un *complejo simplicial* \mathcal{K} consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto $S_{\mathcal{K}}$ cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de $V_{\mathcal{K}}$ llamados *simplejos* con las siguientes propiedades:

1. Todo vértice de \mathcal{K} es un simplejo (es decir, S contiene todos los subconjuntos de un elemento de V).
2. Todo subconjunto no vacío de un simplejo es un simplejo (es decir, si $s \in S$ y $s' \subset s$ es no vacío, entonces $s' \in S$).

Si $s \in S$ tiene $n + 1$ elementos, decimos que s es un n -simplejo o, equivalentemente, que $\dim s = n$. Por lo tanto los vértices son los 0-simplejos de \mathcal{K} . Una *faceta* de un complejo simplicial es un simplejo maximal, es decir un simplejo que no es cara de otro simplejo del complejo. Si una faceta tiene $n + 1$ elementos diremos que es una n -faceta. Consideraremos que V es finito, por lo que \mathcal{K} también lo es.

A cada complejo simplicial \mathcal{K} se le asocia un espacio topológico, que llamamos la realización geométrica de \mathcal{K} (ver figura 6.2), que se construye pegando convexos determinados por los simplejos.

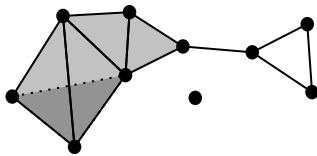


Figura 6.2: Complejo simplicial \mathcal{K} consistente en 10 puntos (0-simplejos), 14 aristas (1-simplejos), 6 triángulos (2-simplejos) y 1 tetraedro (3-simplejo).

El n -esqueleto de un complejo simplicial \mathcal{K} es el complejo simplicial \mathcal{K}^n que consiste en todos los simplejos de \mathcal{K} de dimensión menor o igual a n . Por ejemplo, el 0-esqueleto es el conjunto de vértices de \mathcal{K} . Note que el 1-esqueleto de un complejo simplicial es equivalente a una gráfica.

Un tipo de complejos simpliciales ampliamente estudiados en la literatura, e introducidos originalmente por el matemático Paul Alexandroff [Ale28], son los nervios. Definidos de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . El *nervio* $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ es el complejo simplicial cuyos k -simplejos son los $(k + 1)$ -subconjuntos $I \subset [m]$ tales que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ (ver [Mat13],[Tan13] para más detalles).

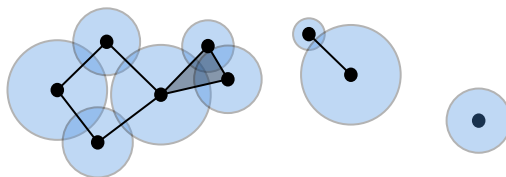


Figura 6.3: Familia de discos y el nervio que inducen.

6.3. Tipos de orden

Muchos problemas en la geometría combinatoria tienen que ver con conjuntos de puntos en \mathbb{R}^d . Es claro que al haber una infinidad de ellos estudiarlos a todos de manera exhaustiva resulta una tarea imposible. Razón por la que resulta razonable preguntarse por clases de equivalencia de manera que al estudiar un representante los demás conjuntos de la clase se comporten exactamente igual.

En 1983, Gritzmann y Pollack [GP83] definieron el *tipo de orden* de un conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de puntos en posición general en el plano como un mapeo que asigna a cada tripleta ordenada i, j, k en $[n]$ la orientación (en sentido horario o anti-horario) de la tripleta de puntos p_i, p_j, p_k . Dos conjuntos de puntos S_1 y S_2 son combinatoriamente equivalentes si tienen el mismo tipo de orden. Esto es, si existe una biyección entre S_1 y S_2 tal que cualquier tripleta en S_1 preserva la misma orientación que la tripleta correspondiente en S_2 .

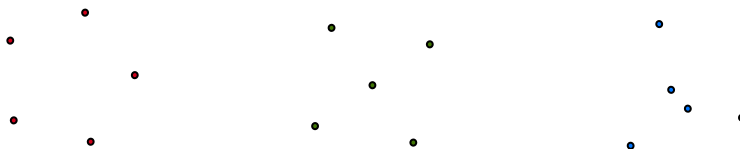


Figura 6.4: Representantes de los 3 tipos de orden de conjuntos con 5 puntos en el plano.

En el plano por ejemplo, existe solo una manera combinatoriamente diferente para colocar 3 puntos, dos maneras para colocar conjuntos con 4 puntos y tres maneras para 5. Esto cambia súbitamente conforme el número de puntos del conjunto se incrementa, de manera que para colocar 11 puntos en el plano existen 2 334 512 907 formas combinatoriamente distintas. La siguiente tabla tomada de [AAK01] muestra la cantidad de tipos de ordenes diferentes en conjuntos con hasta 10 puntos en el plano.

Número de puntos	Número de tipos de orden
3	1
4	2
5	3
6	16
7	135
8	3315
9	158817
10	14309547
11	2334512907

6.4. El teorema de Erdős-Szekeres

El problema del final feliz es un problema planteado por la matemática Ester Klein en 1933. Este es un problema geométrico sobre la cantidad de puntos en posición general necesarios para construir un polígono convexo de un tamaño particular. Klein primero consideró el caso especial de construir cuadriláteros, pero luego generalizó el problema a más vértices. Ella sugirió esta versión generalizada a sus compañeros de trabajo Paul Erdős y George Szekeres, quienes en 1935 publicarían el primer artículo [ES35] sobre este tema. En este artículo, ellos probaron el siguiente resultado.

Teorema 6.1 (Erdős-Szekeres 1935). Para todo entero $n \geq 3$, existe un mínimo entero $ES(n)$, tal que cualquier conjunto de $ES(n)$ puntos en posición general en el plano contiene un subconjunto de n puntos en posición convexa.

Este teorema es conocido hoy en día como el teorema de Erdős-Szekeres. Ellos dieron dos pruebas de la existencia de dicho número, usando para la primer prueba una versión cuantitativa del teorema de Ramsey, la cual genera una cota superior muy pobre para $ES(n)$. La segunda prueba fue más geométrica y mostró que $ES(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$. Más tarde, demostraron que $ES(n) \geq 2^{n-2} + 1$ [ES60] y conjeturaron que esta cota es justa. Si bien la cota superior ha sido mejorada en varias ocasiones, la mejor hasta ahora, es publicada en el año 2017 por Andrew Suk en el artículo [Suk17]. En este artículo el autor prueba que $ES(n) \leq 2^{n+6n^{2/3}\log(n)}$ haciendo que por primera vez la cota superior y la inferior sean del mismo orden.

Este problema fue bautizado como el problema del final feliz por el mismo Paul Erdős, por razones que poco tenían que ver con las matemáticas, ya que Esther Klein y George Szekeres se enamoraron y se casaron el 13 de junio de 1937.

6.5. El teorema de Helly

El teorema de Helly es un resultado clásico en geometría discreta referente a la intersección de conjuntos convexos.

Teorema 6.2 (Helly 1923). Sea F una familia finita de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d tales que cualesquiera $d + 1$ miembros de F tienen intersección no vacía. Entonces la intersección de todos los miembros de F es no vacía.

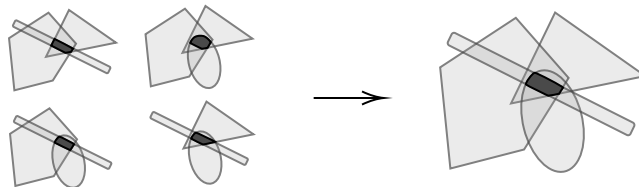


Figura 6.5: Teorema de Helly en el plano

Este teorema fue descubierto por el matemático austriaco Eduard Helly en 1913. Pero no fue publicado en ese momento, pues durante la Primera Guerra Mundial, Helly era soldado en el ejército austriaco y fue hecho prisionero en Rusia en 1914. En cautiverio, explicó su teorema a otro matemático austriaco que también era prisionero. El teorema vivió en el folclore matemático desde la época de entonces hasta 1921, cuando el matemático austriaco Johann Karl August Radón publicó la primera demostración del teorema de Helly (con una referencia a Helly). En 1923, Helly publicó su propia demostración [Hel23].

6.6. Carathéodory y Carathéodory coloreado

Otra gema dentro de la geometría combinatoria referente a propiedades de conjuntos de puntos es el teorema de Carathéodory. Este teorema tiene un gran número de extensiones y generalizaciones (para una introducción ver [Mat13])

Teorema 6.3 (Carathéodory 1911). Sea $S \subseteq \mathbb{R}^d$ no vacío y $p \in \text{conv}(S)$. Entonces existe un subconjunto S' de S con a lo más $d + 1$ puntos tal que $p \in \text{conv}(S')$.

Una de las generalizaciones de este teorema fue publicada en 1982 por Imre Bárány [Bár82]. Esta versión es conocida como el teorema de Carathéodory coloreado.

Teorema 6.4 (Carathéodory coloreado). Sean S_1, S_2, \dots, S_{d+1} conjuntos en \mathbb{R}^d . Supongamos que $p \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \text{conv}(S_i)$. Existen puntos $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2, \dots, p_{d+1} \in S_{d+1}$ tal que $p \in \text{conv}(\{p_1, p_2, \dots, p_{d+1}\})$.

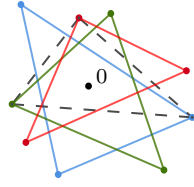


Figura 6.6: Teorema de Carathéodory coloreado en el plano

6.7. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos son un concepto fundamental de la teoría de la probabilidad que desempeña un papel crucial en muchos campos, como las finanzas, la física y la biología.

Sea I un conjunto y sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Supongamos que para cada $\alpha \in I$, existe una variable aleatoria $Y_\alpha : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}$ definida en (Ω, \mathcal{F}, P) . Entonces la función $Y : I \times \Omega \rightarrow S$ definida por $Y(\alpha, \omega) = Y_\alpha(\omega)$ se llama *proceso estocástico* con *conjunto de índices* I y *espacio de estados* S , y se escribe como $Y = \{Y_\alpha : \alpha \in I\}$.

Así pues, podemos pensar a un proceso estocástico como una colección o familia de variables aleatorias $\{Y_\alpha, \text{ con } \alpha \in I\}$, ordenadas según el subíndice α . Note que el conjunto I puede ser de tipo discreto o continuo. En los procesos de tiempo discreto, el sistema evoluciona en pasos de tiempo, mientras que en los procesos de tiempo continuo, el sistema evoluciona continuamente a lo largo del tiempo.

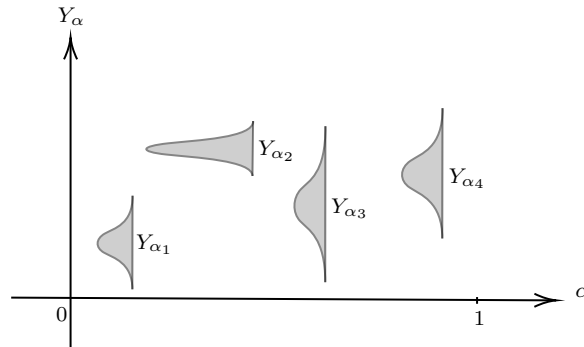


Figura 6.7: Proceso estocástico con Y_α 's normales donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \in I \in [0, 1]$.

Existen varios tipos de procesos estocásticos, cada uno con sus características y aplicaciones únicas. Algunos de los tipos más comunes de procesos estocásticos incluyen:

- Movimiento browniano: Proceso en tiempo continuo que modela el movimiento aleatorio de partículas en un fluido o gas.
- Proceso de Poisson: Proceso en tiempo discreto o continuo que modela la aparición de sucesos poco frecuentes.
- Cadena de Markov: Proceso en tiempo discreto que modela un sistema con un número finito de estados y que tiene la propiedad de Markov.
- Proceso de Wiener: Proceso en tiempo continuo que modela la evolución de un sistema con un componente aleatorio continuo.
- Proceso de Lévy: Proceso de tiempo continuo que modela el comportamiento de un sistema con distribuciones de cola pesada.

Bibliografía

- [AAK01] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, and Hannes Krasser. Enumerating order types for small sets with applications. In *Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry*, pages 11–18, 2001.
- [AF99] Anthony Almudevar and Chris Field. Estimation of single-generation sibling relationships based on dna markers. *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics*, pages 136–165, 1999.
- [Ale28] Paul Alexandroff. Über den allgemeinen dimensionsbegriff und seine beziehungen zur elementaren geometrischen anschauung. *Mathematische Annalen*, (1):617–635, 1928.
- [AP] Budapest 1998 Attila Por, Eötvös University. Diploma thesis.
- [Bár82] Imre Bárány. A generalization of carathéodory’s theorem. *Discrete Mathematics*, 40(2-3):141–152, 1982.
- [Bar02] A. Barvinok. *A Course in Convexity*, volume 54. American Mathematical Society, 2002.
- [BO95] Imre Bárány and Shmuel Onn. Carathéodory’s theorem, colourful and applicable. *Intuitive Geometry*, 6:11–21, 1995.
- [Bre73] Marilyn Breen. Primitive radon partitions for cyclic polytopes. *Israel Journal of Mathematics*, 15(2):156–157, 1973.
- [BS18] Imre Bárány and Pablo Soberón. Tverberg’s theorem is 50 years old: A survey. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(4):459–492, 2018.

BIBLIOGRAFÍA

- [CD00] R. Cordovil and P. Duchet. Cyclic polytopes and oriented matroids. *European Journal of Combinatorics*, 21(1):49 – 64, 2000.
- [CDGH06] Irene Charon, Lucile Denoeud, Alain Guenoche, and Olivier Hudry. Maximum transfer distance between partitions. *Journal of Classification*, 23(1):103–121, 2006.
- [Com] COS++ The Combinatorial Object Server (2021). <http://combos.org>.
- [DLH20] J.A. De Loera and T. Hogan. Stochastic Tverberg theorems with applications in multiclass logistic regression, separability, and centerpoints of data. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 2:1151–1166, 2020.
- [DLHOY21] Jesús A De Loera, Thomas A Hogan, Deborah Oliveros, and Dominic Yang. Tverberg-type theorems with altered intersection patterns (nerves). *Discrete & Computational Geometry*, 65:916–937, 2021.
- [EK19] Jessica Enright and Sergey Kitaev. Polygon-circle and word-representable graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 71:3–8, 2019. TCDM 2018 – 2nd IMA Conference on Theoretical and Computational Discrete Mathematics, University of Derby.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [ES60] P ERD& and G Szekeres. On some extremum problems in elementary geometry. In *Annales Univ. Sci. Budapest*, pages 3–4. Citeseer, 1960.
- [FJ22] Florian Frick and R Amzi Jeffs. Colorful words and d-tverberg complexes. *arXiv preprint arXiv:2205.04776*, 2022.
- [FS14] M. Ferrante and M. Saltalamacchia. The coupon collector’s problem. *MATerials MATematics*, 2014(2):35, 2014.
- [Gal63] David Gale. Neighborly and cyclic polytopes. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 7, pages 225–232, 1963.
- [GKKZ03] Branko Grünbaum, Volker Kaibel, Victor Klee, and Günter M. Ziegler. *Convex polytopes*. Springer, New York, 2003.

-
- [GKPS67] Branko Grünbaum, Victor Klee, Micha A Perles, and Geoffrey Colin Shephard. *Convex polytopes*, volume 16. Springer, 1967.
- [GP83] Jacob E Goodman and Richard Pollack. Multidimensional sorting. *SIAM Journal on Computing*, 12(3):484–507, 1983.
- [Gus02] Dan Gusfield. Partition-distance: A problem and class of perfect graphs arising in clustering. *Information Processing Letters*, 82(3):159–164, 2002.
- [Han82] P. Hanlon. Counting interval graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 272(2):383–426, 1982.
- [Hel23] E. Helly. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jahresberichte der Deutschen Math.-Verein.*, 32:175–176, 1923.
- [HS73] F. Harary and A.J. Schwenk. The number of caterpillars. *Discrete Mathematics*, 6(4):359–365, 1973.
- [JSW90] Joyce Justicz, Edward R Scheinerman, and Peter M Winkler. Random intervals. *The American mathematical monthly*, 97(10):881–889, 1990.
- [KL15] Sergey Kitaev and Vadim Lozin. *Words and graphs*. Springer, 2015.
- [KLB05] Dmitry A Konovalov, Bruce Litow, and Nigel Bajema. Partition-distance via the assignment problem. *Bioinformatics*, 21(10):2463–2468, 2005.
- [KMS05] Sergey Kitaev, Toufik Mansour, and Patrice Séébold. Generating the peano curve and counting occurrences of some patterns. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 9:439–, 01 2005.
- [KP08] Sergey Kitaev and Artem Pyatkin. On representable graphs. *Journal of automata, languages and combinatorics*, 13(1):45–54, 2008.
- [LJROT23] Jesús A. De Loera, Edgar Jaramillo-Rodríguez, Deborah Oliveros, and Antonio J. Torres. A model for birdwatching and other chronological sampling activities. *The American Mathematical Monthly*, 0(0):1–20, 2023.
- [Mat13] Jiri Matousek. *Lectures on discrete geometry*, volume 212. Springer Science & Business Media, 2013.

BIBLIOGRAFÍA

- [MS14] Wolfgang Mulzer and Yannik Stein. Algorithms for tolerant tverberg partitions. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 24(04):261–273, 2014.
- [OT21] Deborah Oliveros and Antonio Torres. From word-representable graphs to altered tverberg-type theorems. *arXiv preprint arXiv:2111.10038*, 2021.
- [Rad21] Johann Radon. Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83(1):113–115, 1921.
- [Rég83] Simon Régnier. Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique. *Mathématiques et Sciences humaines*, 82:13–29, 1983.
- [Ros96] S.M. Ross. *Stochastic processes*. Wiley, 5 edition, 1996.
- [Sac85] Horst Sachs. *Graphs Hypergraphs and Applications*. BG Teubner Verlagsgesellschaft, 1985.
- [Sar92] K. S. Sarkaria. Tverberg’s theorem via number fields. *Israel J. Math.*, 79(2):317–320, 1992.
- [Sch88] E. R. Scheinerman. Random interval graphs. *Combinatorica*, 8:357, 1988.
- [Sob18] Pablo Soberón. Robust Tverberg and Colourful Carathéodory Results via Random Choice. *Combin. Probab. Comput.*, 27(3):427–440, 2018.
- [SS12] Pablo Soberón and Ricardo Strausz. A Generalisation of Tverberg’s Theorem. *Discrete & Computational Geometry*, 47(3):455–460, 2012.
- [Sta11] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2011.
- [Suk17] Andrew Suk. On the erdős-szekeres convex polygon problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 30(4):1047–1053, 2017.
- [Tan13] Martin Tancer. Intersection patterns of convex sets via simplicial complexes: a survey. In *Thirty essays on geometric graph theory*, pages 521–540. Springer, 2013.

- [Tve66] Helge Tverberg. A generalization of radon's theorem. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):123–128, 1966.