



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PROPIEDADES ERGÓDICAS DEL FLUJO GEODÉSICO  
EN SUPERFICIES DE TRASLACIÓN DE TIPO FINITO E INFINITO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
ERICK DANIEL GORDILLO HERRERÍAS

DIRECTOR DR. CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD DE CUERNAVACA

CIUDAD DE MÉXICO ABRIL 2023.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Me gustaría iniciar agradeciendo a mi asesor, el Doctor Carlos Cabrera. Desde aquel verano de la investigación en 2019 me ayudaste a repensar mucho las matemáticas, a definir mis gustos y mi camino en este campo. Me ayudaste tanto en licenciatura como ahora en maestría a realizar mi tesis, lo cual agradezco infinitamente, también gracias por tus cursos; teoría ergódica hacia la teoría de números y espacios móduli de superficies de Riemann, muchas de las ideas discutidas en ambos se encuentran plasmadas aquí. También muchísimas gracias por tu apoyo en temas de titulación y para encontrar posgrados fuera.

Agradezco enormemente al Doctor Ferrán Valdez, tu curso de Big Mapping Class Groups me motivó mucho para incursionar en el área de superficies planas de tipo infinito. Muchísimas gracias por ponerle tanta atención a la redacción y estructura de esta tesis, definitivamente no hubiera sido lo mismo sin tu ayuda.

Al Doctor Peter Makieko, es la segunda vez que eres mi sinodal, también gracias por tu curso de dinámica holomorfa, quizá el curso mas retador que he llevado.

Al Doctor Quentin Gendron, por haber mostrado tanto interés en la tesis, y por esas discusiones sobre origamis, creo que el tercer capítulo contiene bastante de las ideas que me compartiste.

Al Doctor Aubin Arroyo, muchas gracias por las valiosas aportaciones en términos de motivación y estructura de una tesis, me parece que produjo un cambio positivo.

A mis profesoras y profesores de posgrado, principalmente a Fuensanta Aroca, Luis Saldaña y sobre todo a Carlos Segovia, con quien lleve tres cursos los cuales moldearon bastante mi forma de pensar y resolver problemas.

A mi querido amigo Javier de Loera, a quien tendría el gusto de llamar mi primer colega, todos esos audios y discusiones de diferenciales cuadráticos están reflejados aquí. A Edwin Anzures, por ser mi amigo constante y más cercano en estos dos años, gracias por tu alta comedia y por las grandes pláticas de política y matemáticas, a Karina Espinoza, quizá la mejor roomie que ha existido y a mis queridos amigos Carlos Ochoa, Jesús Cortes y Braulio Morales, por siempre estar ahí.

Por (casi) último me gustaría agradecer a mi familia, que sin su total apoyo jamás hubiera

llegado a este punto.

Agradezco al proyecto PAPIIT **Dinámica y deformaciones infinitesimales de semigrupos de aplicaciones meromorfas** por apoyarme con una beca para escribir esta tesis.

# Introducción

Esta tesis consiste en una recopilación y explicación de conceptos y resultados relacionados con la ergodicidad de los flujos geodésicos definidos en superficies de traslación.

Consideremos un polígono racional  $P$ , es decir, que sus ángulos internos sean múltiplos racionales de  $\pi$ . Sea  $p \in P$ , consideremos una trayectoria que inicialmente sea una recta cuyo punto inicial es  $p$ , la trayectoria es esta recta hasta que:

1. Si esta recta interseca a una arista  $\alpha$  del polígono con ángulo  $\theta$  esta recta se refleja por  $\alpha$  respetando las leyes de la óptica, es decir, el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión.
2. Si la trayectoria eventualmente llega a un vértice del polígono ésta se detiene.

Como se muestra en la Figura 1. Si la trayectoria forma un ángulo  $\theta$  con el eje horizontal, entonces decimos que es una *trayectoria de billar* para  $p$  en dirección  $\theta$ . Esta trayectoria la podemos expresar como una curva  $\gamma : [0, p) \rightarrow P$  ó  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow P$ . Si invertimos la dirección de salida de la trayectoria, obtenemos que podemos extender el dominio de la curva a un intervalo que contenga números negativos. De tal forma que tenemos un flujo en la superficie conocido como *el flujo de billar* en dirección  $\theta$ .

Las superficies de traslación y sus flujos geodésicos resultan de considerar una representación de flujos de billar en un polígono racional  $P$  como comentaremos en la Sección 1 al definir el proceso de *Zemlyakov-Katok*. Por lo tanto, una motivación para estudiar flujos geodésicos en superficies de traslación, subyace en la dinámica de los flujos de billar en polígonos racionales.

---

<sup>1</sup>Si la trayectoria llega a un vértice eventualmente o no respectivamente.

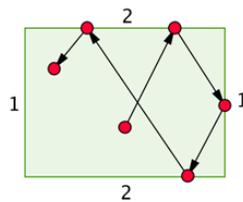


Figura 1: Billar en un rectángulo [26].

El desarrollo de esta tesis se divide en tres capítulos:

Como el título sugiere, este trabajo está en el área de sistemas dinámicos. En el Capítulo 1 vamos a definir los espacios, las dinámicas en dichos espacios y las herramientas que necesitaremos para analizar dichos sistemas dinámicos en los capítulos 2 y 3. De tal forma que vamos a dividir este primer capítulo en cuatro secciones. En la primera definimos las *superficies de traslación* de tipo finito y los flujos geodésicos en las mismas. Para tener un proceso de renormalización de un flujo geodésico definimos los espacios móduli de las superficies de traslación y una acción en este espacio conocido como el *flujo de Teichmüller*. En la segunda sección de este capítulo definimos las transformaciones de intercambio de intervalos, las cuales resultan del mapeo del primer retorno de Poincaré en un intervalo transversal a una superficie de traslación asociada al flujo geodésico en dirección vertical. Construimos un proceso de renormalización para estas transformaciones llamado *inducción de Rauzy-Veech*, demostraremos que este *conmuta* con el flujo de Teichmüller. En la demostración del teorema principal del Capítulo 2, el Teorema 0.0.2, se evidencia la importancia de estas transformaciones para el análisis de los flujos geodésicos en las superficies de traslación.

En la tercera sección enlistaremos conceptos y resultados clásicos de teoría ergódica, con los que debemos estar familiarizados para una lectura adecuada de los Capítulos 2 y 3. La última sección es una primera aventura en la dinámica de las transformaciones de intercambio de intervalos. En el Capítulo 2 vamos a asumir que todas estas transformaciones son *minimales*, de tal forma que el objetivo de esta sección es definir la *condición de Keane* 1.4.1 y demostrar la siguiente condición:

**Teorema 0.0.1.** [32] (Keane, 1975).

*Si  $T$  es un IET con información combinatoria irreducible que satisface la condición de Keane entonces  $T$  es minimal.*

En el Capítulo 2 nos enfocamos en dar una demostración de un teorema clásico de los flujos geodésicos en las superficies de traslación de tipo finito:

**Teorema 0.0.2.** (Kerckhoff-Masur-Smillie) [34]. *Sea  $S$  una superficie de traslación entonces para casi toda  $\theta$  tenemos que el flujo geodésico en dirección  $\theta$  es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue.*

La ergodicidad única en el flujo geodésico es importante pues es un criterio para describir la *equidistribución* del mismo en la superficie [13]. El hecho de que en casi toda dirección el flujo geodésico sea únicamente ergódico ha dado pauta a que en realizando suposiciones lo suficientemente óptimas sobre éstos flujos, investigaciones consecuentes nos hayan permitido entender a mucho mayor detalle cómo son estos sistemas dinámicos, tal como se puede apreciar en [3], [18], [52] ó [33].

Para dicho fin, vamos a seguir las ideas de las notas de V. Delecroix [13], en donde se indica que el Teorema 0.0.2 se puede obtener como consecuencia de otros tres teoremas:

**Teorema 0.0.3.** (*Boshernitzan [8]*).

Sea  $T$  una transformación de intercambio de intervalos de tal forma que  $\nu_n(T)$  no converge a cero, entonces  $T$  es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue.

**Teorema 0.0.4.** (*Identidades de Vorobets [27]*)

Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{S^2(S)}{2} = a(S) = \epsilon(T) = L(T).$$

**Teorema 0.0.5.** (*Masur, Eskin [16]*) Sea  $S$  una superficie de Riemann y  $\mathcal{F}$  una foliación obtenida por un diferencial cuadrático, existe una constante  $c > 0$  tal que si  $V(S, R)$  es la cantidad de conexiones silla de longitud a lo más  $R$  entonces

$$|V(S, R)| \leq cR^2.$$

Por lo tanto, este capítulo se divide en tres secciones, donde en cada una de ellas nos dedicamos a explicar y demostrar cada uno de estos teoremas. Al final del capítulo explicamos cómo los Teoremas 0.0.3, 0.0.4 y 0.0.5 implican el Teorema 0.0.2, y cómo de este teorema se deduce el hecho que casi todas las transformaciones de intercambio de intervalos sean únicamente ergódicas respecto a la medida de Lebesgue, lo cual fue conjeturado por Keane [32] y demostrado por primera vez por W. Veech en 1978 [46].

En el Capítulo 3 vamos a definir las superficies de traslación en *general*, es decir, deshaciéndonos de la compacidad de las del tipo finito como en el Capítulo 1 y 2. A las superficies de traslación que no son de tipo finito las llamaremos superficies de traslación de *tipo infinito*. P. Hubert, B. Weiss y P. Hooper en [25], [24] y [29] trabajaron en una familia particular de superficies de traslación de tipo infinito conocida como  $\mathbb{Z}$ -cubiertas. El objetivo de este capítulo es entender la construcción de estas superficies y explicar la demostración de los siguientes resultados relacionados a los flujos geodésicos definidos en ellas:

**Teorema 0.0.6.** (*Weiss-Hubert 2013 [29]*)

Si  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular y  $\theta$  es una dirección aproximable por cintas infinitas y ergódico en cubiertas intermedias entonces es una dirección ergódica en  $\tilde{S}_\omega$ .

**Teorema 0.0.7.** (*Hubert-Weiss, 2013 [29]*). Si  $p : \tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta cuyo grupo de Veech es una latiz no uniforme y tiene una cinta infinita, entonces el conjunto de direcciones  $\theta$  donde el flujo geodésico  $\tilde{\phi}_t^\theta$  no es ergódico tiene medida cero.

Por último nos dedicaremos a demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 0.0.8.** (*Málaga Sabogal, S. Troubetzkoy-2019 [37]*).

Si  $S$  es una superficie de traslación,  $\tilde{S}_\omega$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta recurrente. Entonces no existen direcciones únicamente ergódicas en la cubierta.

Esto nos dice que, al menos en esta familia de superficies de traslación de tipo infinito, no ocurre lo mismo que en las superficies de traslación de tipo finito.

Para finalizar este trabajo, en la Conclusión [4](#) comentamos brevemente sobre los *diferenciales cuadráticos* y las *involuciones lineales*, los cuales son generalizaciones de diferenciales abelianos y transformaciones de intercambio de intervalos respectivamente, para enlistar preguntas que surgieron de escribir este texto en relación a esas dos generalizaciones.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	I
<b>Introducción</b>	III
<b>1 Ingredientes</b>	<b>1</b>
§1.1 Superficies de traslación . . . . .	1
§1.1.1 Tres definiciones . . . . .	1
§1.1.2 Holonomía . . . . .	5
§1.1.3 Flujo geodésico y foliaciones medibles . . . . .	6
§1.1.4 Espacios móduli . . . . .	10
§1.1.5 Acción de $SL(2, \mathbb{R})$ y flujo de Teichmüller . . . . .	17
§1.2 Transformaciones de intercambio de intervalos . . . . .	19
§1.2.1 Rotaciones y su generalización . . . . .	19
§1.2.2 Inducción de Rauzy-Veech . . . . .	23
§1.2.3 Forma simpléctica . . . . .	32
§1.2.4 De IET a superficies de traslación . . . . .	33
§1.3 Recordatorio de teoría ergódica . . . . .	42
§1.3.1 Ergodicidad . . . . .	42
§1.3.2 Propiedad mezclante . . . . .	44
§1.3.3 Minimalidad y recurrencia. . . . .	45
§1.3.4 Medidas de Haar . . . . .	46
§1.4 Condición de Keane . . . . .	47
<b>2 Única ergodicidad en el caso finito</b>	<b>54</b>
§2.1 Presentación del desarrollo . . . . .	54
§2.2 Criterios de divergencia y única ergodicidad . . . . .	56
§2.2.1 Condición de Boshernitzan . . . . .	56
§2.2.2 Condición de divergencia de Masur . . . . .	59
§2.3 Identidades de Vorobets . . . . .	61
§2.4 Teorema asintótico de Masur y Eskin . . . . .	70
§2.5 Demostración del teorema KMS . . . . .	94
<b>3 Ergodicidad en superficies de tipo infinito</b>	<b>97</b>
§3.1 Superficies de traslación de tipo infinito . . . . .	98
§3.2 $\mathbb{Z}$ -cubrientes y grupos Fuchsianos . . . . .	102
§3.2.1 Grupos de Veech . . . . .	102

§3.2.2 Cubrientes	103
§3.2.3 $\mathbb{Z}$ -Cubrientes	105
§3.2.4 $\mathbb{Z}$ – cubiertas regulares	107
§3.2.5 Horobolas y cúspides	109
§3.3 Ergodicidad	111
§3.4 Ejemplo	123
§3.5 Falta de ergodicidad única	127
<b>4 Conclusión</b>	<b>131</b>
§4.1 Diferenciales cuadráticos e involuciones lineales	131
§4.1.1 Diferenciales cuadráticos	131
§4.1.2 Involuciones lineales	133
§4.1.3 Avances de Lanneau-Boissy	134
§4.1.4 Preguntas	135

## Índice de figuras

1 Billar en un rectángulo [26].	III
1.1 Tenemos singularidades 3,4,5,6- anilladas respectivamente [17].	9
1.2 Descomposición de superficie de género 3, imagen obtenida de [15].	13
3.1 [24].	100
3.2 [43].	101
3.3 Toro doblemente perforado y sus clases homotopía.	105
3.4 El rectángulo rojo representa $R_n$ , el blanco $cR_n$ , el morado $B_0^{(n)}$ , el verde $B_1^{(n)}$ y el amarillo $B_2^{(n)}$ , imagen obtenida en [29].	120
3.5 Doble octágono de Veech, viene marcada la clase de homología que induce la cubierta sobre esta superficie así como el cilindro que genera la cinta infinita [29].	125
3.6 Hooper-Weiss [25].	127

# Capítulo 1

## Ingredientes

Este capítulo tiene los siguientes objetivos:

1. Definir las superficies de traslación y los flujos geodésicos o trayectorias de billar en dichas superficies.
2. Definir el espacio de Teichmüller, el espacio móduli de una superficie de Riemann y el flujo de Teichmüller, el cual es un proceso de renormalización de las trayectorias de billar.
3. Enlistar definiciones y resultados estándares de teoría ergódica que serán ampliamente utilizados a lo largo del texto.
4. Definir las transformaciones de intercambio de intervalos, las cuales están definidas en intervalos transversales a las superficies de traslación y son una herramienta para analizar los flujos de billar.

Se asume un conocimiento de nociones de geometría Riemanniana, análisis complejo y superficies de Riemann.

### 1.1. Superficies de traslación

#### 1.1.1. Tres definiciones

El objetivo de este trabajo está enfocado en estudiar procesos dinámicos. Para definir una dinámica, hay que establecer en qué objetos ocurre dicha dinámica. En esta sección vamos a definir dichos objetos, las *superficies de traslación*. Vamos a presentar las tres definiciones estándares de dichas superficies y demostrar que estas definiciones coinciden. La primer definición, *de polígonos* es de un carácter constructivo, la segunda, *geométrica* viene dada por un atlas cuyos mapeos de transición son traslaciones euclidianas, por último la definición *analítica* está en función de una 1-forma holomorfa.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>También diferencial abeliano.

**Definición 1.1.1.** Sea  $P$  un polígono euclideo en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $p$  un punto en un arista del polígono, una trayectoria de billar para el punto  $p$  en dirección  $\theta$  es la recta que sale de  $p$  cuyo ángulo con dicha arista es  $\theta$ , de tal forma que si esa recta interseca otra arista en un punto  $q$  la trayectoria se detiene si  $q$  es un vértice, de otra forma si el ángulo de incidencia es  $\theta_2$  entonces la trayectoria de billar continúa su camino como una recta que sale de  $q$  con ángulo  $\pi - \theta_2$ .

**Definición 1.1.2.** En un polígono  $P$ , una diagonal generalizada es una trayectoria de billar que une dos vértices.

Considerando el caso de los triángulos podemos preguntarnos:

1. ¿Qué triángulos tienen al menos una trayectoria de billar periódica? Si un triángulo verifica tener una ¿esta lo sigue siendo bajo perturbaciones? ¿Cuántas trayectorias de billar periódicas hay?
2. ¿Es posible encontrar un comportamiento asintótico del número de diagonales generalizadas de longitudes arbitrarias?

Uno podría pensar que el caso del triángulo es sencillo. Lo cierto es que falta mucho recorrido para estar en posibilidad de responder. De hecho, el matemático Anatole Katok propuso un premio de diez mil euros por la solución a dichos problemas [50].

Tenemos que partir de otra clase de polígonos. Observemos que si tenemos un polígono donde para toda arista  $\alpha_1$  existe otra arista  $\alpha_2$ , ambas de misma longitud y paralelas, si identificamos dichas aristas vía traslación lo que obtenemos es una superficie con a lo más una cantidad finita de puntos cónicos y las trayectorias de billar se vuelven geodésicas. Esto nos permite pensar el problema desde otro punto de vista.

**Definición 1.1.3. Definición de polígonos.** Sean  $P_1, \dots, P_n$  polígonos euclideos racionales, es decir cuyos ángulos sean múltiplos racionales de  $\pi$ , y que verifiquen que para toda arista  $\alpha_i \in P_j$  exista otra arista  $\alpha_k \in P_l$  donde podamos identificarlas por traslación. Una superficie de traslación es la superficie que resulta de identificar dichas aristas por traslación.

Por un momento vamos a olvidar la pregunta y desarrollemos una definición desde otra perspectiva.

Pensemos en superficies compactas con una métrica plana, es decir curvatura seccional nula.

**Teorema 1.1.1. Gauss-Bonnet**[21]

Sean  $M$  una superficie cerrada,  $K$  su curvatura seccional y  $\chi(M)$  su característica de Euler. Entonces

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

Por el teorema anterior, la única superficie que verifica la condición deseada es el toro. Sin embargo, podemos tener una métrica lo suficientemente plana para superficies de distinto género. Con esto nos referimos a deformar la métrica en una superficie  $S$  de tal forma

que la curvatura se concentre en un conjunto finito de puntos  $\Sigma$ . Por ejemplo, podemos deformar la esfera hasta obtener una pirámide, donde tendremos que salvo en los cinco vértices, la curvatura es plana. A este tipo de superficies se les conoce como superficies planas.

Resulta natural preguntarse cómo es el comportamiento de las geodésicas en este tipo de superficies. Tratar de resolver este cuestionamiento presenta un inconveniente: considerar geodésicas alrededor de los puntos donde se concentra la curvatura puede resultar bastante complicado. Volvamos al ejemplo de la pirámide. Si tenemos una geodésica alrededor de un vértice entonces considerando el transporte paralelo de un vector por la geodésica obtendremos una diferencia entre el vector inicial y el final, lo que significa que la geodésica llegará al mismo punto de distintas formas. Esto dificulta bastante dicho estudio.

Dicha adversidad podemos evitarla si consideramos la siguiente subclase de superficies planas:

**Definición 1.1.4. Definición analítica.** Una superficie de traslación es una tripleta  $(S, \omega, \Sigma)$  donde  $S$  es una superficie de Riemann compacta,  $\Sigma = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq S$  y  $\omega$  es una 1-forma holomorfa en  $S$  tal que localmente, fuera de  $\Sigma$ , tenemos que  $\omega = dz$  y en  $z_i$  de la forma  $\omega = z^{k_i} dz$ .

Es decir, fuera de  $\Sigma$  tenemos que  $\omega$  es el pullback de la 1-forma holomorfa  $dz$  en  $\mathbb{C}$ , y por lo tanto, induce una curvatura plana y en  $\Sigma$  es el pullback de  $z^k dz$  y por lo tanto una vecindad de alguno de dichos puntos será isométrica a una  $(k + 1)$ - cubierta de una vecindad agujerada del origen.

Observemos que con esta definición podemos describir explícitamente quiénes son las geodésicas para  $S$ . El hecho que existan puntos singulares implica que no todas las geodésicas pueden extender su dominio al infinito. Este es el caso de las geodésicas que unen dos puntos singulares y que en el interior de dicha geodésica no existan otros puntos singulares. Esta clase de geodésicas se les llama **conexiones silla** de la forma  $\omega$  y su uso se extiende con gran importancia a lo largo de este trabajo.

Si consideramos una unión de conexiones silla, tal que sus interiores sean disjuntos, y tal que cada componente del complemento sea un triángulo, decimos que dicha unión es una *triangulación* de la superficie.

**Lema 1.1.1.** [50]. Toda superficie de traslación con la definición analítica tiene una triangulación.

*Demostración.* Podemos construir uniones de conexiones silla con la propiedad que sus interiores sean disjuntos, y por tanto podemos considerar uniones maximales de este tipo de conexiones silla, las cuales son triangulaciones, pues de lo contrario las conexiones silla formarían un rectángulo, contradiciendo la maximalidad.  $\square$

Por último vamos a considerar una clase de 2-variedades diferenciales.

**Definición 1.1.5. Definición geométrica.** Una superficie de traslación es una 2-variedad diferenciable  $X$  de tal forma que el atlas que la realiza como variedad verifica que fuera de un conjunto finito  $\Sigma$  los mapeos de transición son traslaciones en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\Sigma$  son de la forma  $z \rightarrow z^k$  para alguna  $k$ .

Un atlas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  como en la definición se le conoce como atlas de traslación.

Resulta que estas tres definiciones de las superficies de traslación son equivalentes. Es necesario convencernos de que esto es cierto pues durante el texto utilizaremos arbitrariamente las definiciones según más convenga en cada caso.

**Teorema 1.1.2.** [50] Las tres definiciones de superficies de traslación coinciden.

*Demostración.* 1. La definición analítica coincide con la definición geométrica:

Supongamos que  $S$  es una superficie como en la definición analítica. Tenemos que  $\omega$  en coordenadas locales es como  $dz$  o como  $z^k dz$  dependiendo si es o no un cero de la forma holomorfa. Consideremos estas coordenadas locales como el atlas y veamos qué ocurre con los mapeos de transición. El primer caso es donde dos coordenadas son de  $S \setminus \Sigma$ . Sus coordenadas locales son de la forma

$$z_1(q) = \int_{p_1}^q dz, \quad z_2(q) = \int_{p_2}^q dz.$$

Por lo tanto podemos hacer lo siguiente:

$$z_1(q) = \int_{p_1}^{p_2} dz + \int_{p_2}^q dz = C + z_2(q),$$

pues la primera integral es independiente de la elección de  $q$ . Lo que nos dice que esos mapeos de transición son traslaciones en  $\mathbb{C}$  y por lo tanto en  $\mathbb{R}^2$ . El segundo caso es cuando una coordenada local es de un punto no singular y la segunda es de un punto singular. Entonces las coordenadas locales son de la forma

$$z_1(q) = \int_{p_1}^q dz, \quad z_2(q) = \int_{p_2}^q z^k dz,$$

entonces el mapeo de transición es de la forma

$$z_1(q) = \int_{p_1}^{p_2} dz + \int_{p_2}^q z^k dz = C + z_2(q).$$

No es necesario considerar el caso donde los dos puntos son singulares, pues este conjunto no puede tener puntos de acumulación, entonces siempre podemos considerar vecindades donde solo haya a lo más un punto singular.

Si por otro lado tenemos que  $S$  es una superficie con la definición geométrica, entonces tenemos un atlas de traslación, es decir que fuera de un conjunto finito  $\Sigma$  los mapeos de transición son traslaciones en  $\mathbb{C}$ , los cuales son biholomorfismos, entonces

podemos definir a  $\omega$  como el pullback de  $dz$  bajo los mapeos de este atlas. Por otro lado para los puntos singulares podemos considerar cartas que manden estos puntos al origen y tomar el mapeo cubriente  $z^{k+1}/(k+1)$ , el cual es una isometría local en vecindades de  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Entonces para los puntos singulares definimos a  $\omega$  como el pullback de  $dz$  por esta carta, y así obtenemos que  $\omega$  es una 1-forma holomorfa no nula, que tiene un conjunto finito de singularidades.

2. La definición analítica coincide con la definición de polígonos.

Por el lema 1, tenemos que una superficie de traslación con la definición analítica tiene una triangulación, entonces la definición de polígonos resulta al considerar la identificación de estos triángulos por traslación cuando dos triángulos comparten una conexión silla.

Por otro lado, si tenemos una superficie de traslación con la definición de polígonos, entonces a los puntos de la superficie que corresponden al interior del polígono le asociamos la 1-forma holomorfa dada por el pullback de  $dz$  por el mapeo cociente, los puntos correspondientes al interior de las aristas heredan esta estructura, y el único inconveniente posible, son los vértices que se convierten en singularidades. Como el polígono es racional, entonces el ángulo de estos puntos singulares será de  $(k+1)2\pi$ , por lo tanto a ese tipo de puntos, la 1-forma holomorfa se define como el pullback de  $dz$  del mapeo  $z^{k+1}/(k+1)$  del diferencial  $dz$ . Como observación, tenemos que si el ángulo de estos puntos singulares no fuera un múltiplo entero de  $2\pi$  entonces no podríamos tener una asignación consistente en la superficie de una dirección al *norte*, lo cual es esencial en las superficies de traslación.

De estas dos equivalencias concluimos que las tres definiciones coinciden

□

### 1.1.2. Holonomía

Vamos a definir la holonomía y demostrar que en las superficies de traslación la holonomía asociada a curvas cerradas es un múltiplo entero de  $2\pi$ .

Recordemos brevemente que si tenemos una variedad Riemanniana  $M$ , una curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  y su derivada covariante  $\nabla$ , decimos que una sección  $X$  del haz tangente  $E$  de  $M$  es un transporte paralelo para  $e_0 \in T_p M$  con  $p = \gamma(0)$  si

1.  $\nabla_{\gamma'(t)} X = 0$
2.  $X_{\gamma(0)} = e_0$

Este proceso nos otorga un vector final  $X_{\gamma(1)}$ , entonces resulta razonable preguntarse qué tanto varía este vector si consideramos curvas cerradas. Esto nos puede dar mucha información sobre cómo se concentra la curvatura en ciertos puntos de la variedad.

**Definición 1.1.6.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana,  $\gamma$  una curva cerrada y  $X$  un transporte paralelo. La holonomía de  $\gamma$  se define como el ángulo entre  $X_{\gamma(0)}$  y  $X_{\gamma(1)}$ .*

Regresemos en materia. Mencionamos una razón para definir analíticamente a las superficies de traslación con una 1-forma holomorfa que verificara ciertas propiedades para deshacernos en una adversidad al considerar cómo es que las geodésicas se comportan alrededor de puntos críticos. Veamos que en efecto nos deshacemos de esta dificultad.

**Teorema 1.1.3.** *Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación. La holonomía asociada a curvas cerradas es un múltiplo entero de  $2\pi$ .*

*Demostración.* El caso donde las curvas  $\gamma$  estén contenidas en  $S \setminus \Sigma$  se sigue del hecho que la curvatura seccional de la superficie es nula, por lo tanto es localmente isométrico al plano, donde la holonomía asociada a curvas cerradas es nula.

El caso donde la curva encierra un punto de  $\Sigma$ , a saber un punto  $z_0$  que es singularidad de orden  $k$ , se sigue de que dicha curva podemos bajo homotopía suponer que está en una vecindad que es isométrica al cubriente bajo  $z \rightarrow z^{k+1}$  de una vecindad del 0, observamos que en este caso, la curva es isométrica a  $k + 1$  copias de una curva cerrada en el plano, por lo tanto su holonomía será de  $2k\pi$ .  $\square$

Otra definición que se utilizará en dos demostraciones importantes Capítulo 2, es la de periodo de una conexión silla.

**Definición 1.1.7.** *Sea  $\gamma$  una conexión silla en una superficie de traslación  $(S, \omega)$  como se definió anteriormente. Al vector complejo*

$$v = \int_{\gamma} \omega$$

*se le conoce como el **periodo** de dicha conexión. Al conjunto de todos los periodos de la superficie se le denota por  $\text{HOL}(S)$ .*

Elementos característicos de este conjunto serán estudiados en los siguientes capítulos, pues poseen mucha información de la superficie.

### 1.1.3. Flujo geodésico y foliaciones medibles

La pregunta inicial sigue siendo ¿qué podemos decir de los trayectorias de billar? Hasta el momento hemos dado con espacios donde la pregunta tiene sentido y donde hemos justificado que es posible dar respuestas, el concepto que al principio definimos como flujo de billar lo podemos reformular en el caso de la definición geométrica y analítica.

Nos gustaría definir algo llamado *flujo geodésico* en una superficie de traslación  $S$ . Para ello primero hay que observar que el haz tangente es trivial, es decir  $TM$  es isomorfo a  $S \times \mathbb{R}^2$ . Recordemos que para una  $n$ -variedad diferenciable  $M$ , una condición necesaria y suficiente para que su haz tangente sea trivial es que existan campos vectoriales  $X_1, \dots, X_n$  de tal forma que para todo  $p \in M$  el conjunto  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  formen una base para  $T_p M$ .

Consideremos la proyección

$$\pi : TS \rightarrow S$$

$$[p, v] \rightarrow p.$$

Tomemos dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  que sean linealmente independientes, a saber  $v_1, v_2$ . Definamos las secciones

$$X_i(p) = [p, v_i].$$

**Lema 1.1.2.** *Las secciones anteriores son campos vectoriales que verifican que  $\pi \circ X_i = Id_S$  y además  $X_1(p), X_2(p)$  forman una base para  $T_p S$ .*

*Demostración.* La estructura de  $S$  dada por el atlas de traslación nos dice que la elección de los vectores  $X_i(p)$  es consistente con las cartas y por lo tanto son asignaciones diferenciables. Además los vectores siempre serán linealmente independientes para todo  $p$ , esto se puede ver también con transportes paralelos, lo cual se sigue de las observaciones de la Sección [1.1.2](#). La condición de  $\pi \circ X_i(p) = p$  se sigue de la definición de las secciones.  $\square$

Esto nos dice que en efecto el haz tangente es trivial. De este hecho y de que la métrica como variedad Riemanniana de  $S$  la obtuvimos como un pullback de la métrica del plano, podemos concluir que el haz tangente unitario es de la forma

$$T_1 S = \{[x, \theta] \mid g_x([x, v], [x, v]) = 1\} = S \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Consideramos una segunda proyección

$$\pi_2 : T_1 S \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$$[x, \theta] \rightarrow [\theta].$$

A la preimagen bajo  $\pi_2$  de un  $[\theta]$  a la cual denotaremos como  $X_{[\theta]}$  la conocemos como el *campo de vectores constante* en dirección  $[\theta]$  para  $S$ . Por el *teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales*, tenemos que para todo  $p \in S$  existe una curva con intervalo máximo de definición  $I_p$  tal que  $\gamma_p : I_p \rightarrow S$  es una curva integral para el campo  $X_{[\theta]}$  y  $\gamma_p(0) = p$ .

**Definición 1.1.8.** *Sea  $S$  una superficie de traslación y  $[\theta] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Definimos el **flujo geodésico** en dirección  $[\theta]$  como*

$$g_{[\theta]} : \bigcup_{p \in S} \gamma_p : I_p \rightarrow S$$

$$(p, t) = \gamma_p(t).$$

Donde  $\gamma_p$  es la curva integral definida en el párrafo anterior.

## Foliaciones medibles

Vamos a desarrollar las siguientes ideas, cuya discusión con mayor profundidad se encuentra en el libro de Farb y Margalit [\[17\]](#).

Recordemos que para una  $M$  variedad diferenciable de dimensión  $n$ , una foliación de dimensión  $m$  es una partición de  $M$  por subvariedades  $(L_\beta)$  de dimensión  $m$  donde existe

un atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  de tal forma que dichas coordenadas locales en  $U_\alpha \cap L_\beta$  son de la forma  $\phi_\alpha(p) = (x_1, \dots, x_m, c, c \dots c)$ .

En este trabajo nos van a interesar un cierto tipo de foliaciones en las superficies de traslación.

Sea  $L$  una recta en  $\mathbb{R}^2$ . El conjunto de todas las rectas paralelas a  $L$  nos produce un 1-foliación la cual tiene una estructura que la hace especial: si nos fijamos en la función  $\eta$  que asigna a un punto su distancia a  $L$  entonces integrar en arcos que son transversales a la foliación inducida por  $L$  con respecto a la 1-forma  $d\eta$  nos provee de una *medida*.<sup>2</sup>

$$\mu(\alpha) = \int_\alpha d\eta$$

sobre las curvas transversales a la foliación. Esa foliación, esa medida y esa 1-forma son invariantes bajo traslaciones en  $\mathbb{R}^2$  entonces las podemos proyectar al toro  $\mathbb{T}^2$ , de tal forma que tenemos una medida en arcos transversales a las hojas de la foliación y además es invariante bajo isotopías a lo largo de las hojas. A una foliación con una medida que tenga esas propiedades se le conoce como *foliación medible*.

Una observación es que la foliación del párrafo anterior la podemos construir como las curvas integrales del kernel de la 1-forma inducida en el toro por  $d\eta$ .

Siguiendo [17] consideremos una matriz  $A \in \text{SL}(2\mathbb{R})$  que tenga dos eigenvectores  $\lambda, \lambda^{-1} \neq 1$ . Tomemos los eigenespacios correspondientes  $L_1, L_2$ . La acción de  $A$  en uno de ellos va a expandir y en otro de ellos va a contraer. Las dos rectas  $L_1, L_2$  inducen foliaciones en el toro, y la matriz induce un automorfismo  $T_A$  que va a preservar dichas foliaciones y localmente va a expandir y va a contraer en dos direcciones. Cuando tenemos superficies de género mayor no existe una definición muy precisa de qué significa que un automorfismo expanda y contraiga en ciertas direcciones. Lo que haremos será definir cómo expande y contrae a lo largo de una foliación y extender el concepto de foliación medible a superficies de género mayor.

**Definición 1.1.9.** *Sea  $S$  una superficie cerrada. Una foliación singular  $\mathcal{F}$  es una 1-foliación de  $S \setminus \Sigma$  donde  $\Sigma$  es un conjunto finito, donde la foliación tiene las siguientes dos propiedades:*

1. *Si  $p$  es un punto no singular entonces existe una carta  $(U, \phi)$  de  $p$  sin puntos singulares, de tal forma que el homeomorfismo mapea hojas de la foliación en rectas horizontales con mapeos de transición de la forma  $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(y))$  para algunas  $f$  y  $g$ . De esta forma vemos que llevan rectas horizontales en rectas horizontales.*

---

<sup>2</sup>Esta no es una medida en el sentido usual, sin embargo en la teoría de foliaciones medibles se le da ese nombre, mismo que utilizaremos en este texto por estandarización.



Figura 1.1: Tenemos singularidades 3,4,5,6- anilladas respectivamente [17]

2. En vecindades de puntos singulares las hojas de la foliación se mapean a conjuntos de nivel de singularidades  $k$ -anilladas como en la figura 1.1

A dicha foliación la denotaremos como  $(S, \Sigma, \mathcal{F})$ .

Además decimos que dicha foliación es *localmente orientable* si para cada vecindad de la superficie podemos orientar a las hojas de esa vecindad de forma consistente y decimos que es *orientable* si podemos orientar de forma consistente a las hojas de forma global. Como observación, una foliación puede ser localmente orientable si y solamente si todos sus puntos singulares están  $k_i$ -anillados con  $k_i$  par.

El siguiente resultado nos provee de una restricción a la cantidad de puntos singulares que tiene una foliación singular.

**Proposición 1.1.1.** [17] Sea  $(S, \Sigma, \mathcal{F})$  una foliación singular. Si  $n_p$  es la cantidad de anillos que tiene un punto singular  $p$  entonces

$$2\chi(S) = \sum_{p \in \Sigma} (2 - n_p).$$

Lo que significa que si  $S$  tiene característica de Euler menor que 1 entonces no puede tener una foliación singular de ningún tipo, si es de género 1 entonces las únicas foliaciones singulares que admite son aquellas que no tienen puntos singulares, y por último, si su género es mayor que 1 entonces tiene forzosamente que tener al menos un punto singular.

Siguiendo con nuestra discusión, queremos definir una *medida transversal* para este tipo de foliaciones, para ello primero necesitamos definir lo siguiente:

Sea  $(S, \Sigma, \mathcal{F})$  una foliación singular y sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos curvas transversales a la foliación, definimos que una función  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$  es *isotopía que preserva la foliación* si

1.  $H(0, t) = \alpha_1(t)$  y  $H(1, t) = \alpha_2(t)$ .
2. Para  $s$  fijo  $H(s, t)$  es una curva transversal a la foliación.

3. Las curvas  $H(s, 0)$  y  $H(s, 1)$  se quedan contenidas en una hoja de la foliación respectivamente.

Una *medida transversal* a la foliación  $\mathcal{F}$  es una medida para las curvas transversales a la foliación que es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y que es invariante bajo isotopías que preservan la foliación a lo largo de las hojas.

**Definición 1.1.10.** *Para una superficie  $S$  una foliación medible se define como una foliación singular  $(S, \Sigma, \mathcal{F})$  orientable a la cual se le asocia una medida transversal  $\mu$  a la foliación.*

Existen diversas formas de construir foliaciones medibles como se explica en [19], sin embargo para fines de este texto nos interesa la que es a partir de 1-formas holomorfas:

Si tenemos una superficie de traslación  $(S, \omega)$ , podemos construir una foliación medible a  $S$  con  $\Sigma$  el conjunto de singularidades de la 1-forma, las hojas siendo las subvariedades integrales del kernel de  $\Re(\omega)$  y la medida para los arcos transversales viene dada por

$$\mu(\alpha) = \int_{\alpha} \Re(\omega).$$

La cual localmente la podemos expresar como el pullback de la medida  $|dy|$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Por otro lado, si tenemos una foliación medible, por como se definió podemos encontrar un atlas de tal forma que fuera de los puntos singulares los mapeos de transición están dados de la forma  $(x, y) \rightarrow (f(x, y), y + c)$ , es decir, obtenemos una superficie de traslación. Con esta definición, observamos que las foliaciones medibles en superficies se pueden obtener como un cierto flujo geodésico. Con esto ampliamos tanto lo que podemos preguntarnos como las herramientas que disponemos para resolver los problemas planteados.

#### 1.1.4. Espacios móduli

Recordemos cuál es el objeto de estudio de este trabajo: estudiar trayectorias de billares. Para ese fin definimos lo que son las foliaciones medibles y el flujo geodésico en las superficies de traslación, que es una forma geométrica de resolver dicho problema. Si lo pensamos, la cantidad de superficies de traslación que hay en general es inmensa y el número de foliaciones medibles que podemos definir también es enorme. ¿Cómo podemos simplificar un poco nuestra búsqueda? Pensemos en lo siguiente: Si tenemos dos superficies de traslación  $(X_1, \omega_1)$  y  $(X_2, \omega_2)$  con foliaciones medibles  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  respectivamente y un difeomorfismo conforme<sup>3</sup>  $f : X_1 \rightarrow X_2$  de tal forma que  $\omega_1 = f^*\omega_2$  y la foliación medible  $\mathcal{F}_1 = f^*\mathcal{F}_2$  entonces no es difícil observar que las propiedades dinámicas que podamos

<sup>3</sup>En el sentido del análisis complejo; que preserva ángulos.

obtener de la primera superficie las obtendremos en la segunda y viceversa.

Es por eso que recurrimos al problema móduli. Esto significa que debemos preguntarnos ¿de cuántas formas puede existir un objeto matemático bajo ciertos criterios? En este caso nos referimos a superficies de traslación y los criterios estarán dados por conjugación conforme.

## Espacio de Teichmüller

En un párrafo anterior comentamos un criterio bajo el cual dos foliaciones medibles son esencialmente la misma. Podemos definir formalmente esto como sigue.

Fijemos una superficie de Riemann  $S$  de género  $g$ . Vamos a considerar superficies de Riemann de ese género. El espacio que vamos a construir es un cociente en el conjunto de parejas  $(X, f)$  donde  $X$  es una superficie de Riemann de género  $g$  y  $f : S \rightarrow X$  un difeomorfismo:

**Definición 1.1.11.** *Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g$ . Definimos el Espacio de Teichmüller de  $S$  como  $\mathcal{T}(S) = \{(X, f)\} / \sim$ . Donde  $(X, f)$  es equivalente a  $(Y, g)$  si y solo si  $g \circ f^{-1} : X \rightarrow Y$  es isotópico a un difeomorfismo conforme entre las dos superficies.*

Como un ejemplo, podemos dar un sketch de la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.4.** [17]. *Existe una biyección entre  $\mathcal{T}(\mathbb{T}^2)$  y  $\mathbb{H}^2$ .*

*Demostración.* Primero hay que notar que existe una biyección entre ese espacio de Teichmüller y una relación de equivalencia en las latiz en  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que dos latiz son equivalentes si existe una isometría euclideana y/o una homotecia que lleva una en la otra. Después vemos que una latiz viene dada por dos vectores de  $\mathbb{R}^2$ , los cuales podemos identificarlos como un par de números complejos  $(z, w)$ . Podemos rotar y estirar si hace falta para llegar a que la latiz generada por  $(z, w)$  es equivalente a la generada por  $(1, w)$ . Esta elección no es única pues  $(1, w)$  y  $(1, \bar{w})$  generan la misma latiz, entonces podemos solo restringir nuestra atención en  $\mathbb{H}^2$  para obtener la biyección deseada.  $\square$

El grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente en  $\mathbb{H}^2$  y el estabilizador es  $SO(2, \mathbb{R})$  [31], por lo tanto una representación habitual de  $\mathcal{T}(\mathbb{T}^2) = SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$ . [17]

Esto lo que nos dice es que podemos darle una topología métrica a  $\mathcal{T}(\mathbb{T}^2)$ . En general los espacios de Teichmüller son métricos como veremos en un momento.

## Mapeos Cuasiconformes

Los mapeos cuasiconformes han tenido mucho impacto en diversas ramas de las matemáticas, y dichos mapeos tienen distintas formas equivalentes de definirse. En este texto no serán ampliamente utilizados más allá de poder definir el espacio de Teichmüller de una superficie de Riemann, por lo que nos restringiremos a una sola definición sin profundizar

en las propiedades de estos mapeos. Un tratamiento a detalle con demostraciones de los siguientes resultados se encuentra en el libro de Farb y Margalit [17] o las notas de de Christopher Bishop [6].

Consideremos  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Riemann y  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un homeomorfismo que preserva la orientación que verifica que para casi todo punto  $f$  es diferenciable. Sea  $z_0 \in S_1$ , fijémonos en el límite

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{d(z_0, z)=r} \{d(f(z_0), f(z))\}}{\min_{d(z_0, z)=r} \{d(f(z_0), f(z))\}}.$$

Si este existe para casi todo punto en  $S_1$  y además estos límites están esencialmente acotados por un  $K > 0$  decimos que  $f$  es un mapeo  $K$ -cuasiconforme entre estas dos superficies.

Intuitivamente, los mapeos cuasiconformes son aquellos que deforman de forma acotada circunferencias infinitesimales en elipses infinitesimales con excentricidad acotada. Podemos observar que los mapeos 1-cuasiconformes coinciden con los mapeos conformes. Señalamos también que la composición de mapeos cuasiconforme es cuasiconforme y que la inversa de estos también lo es [6].

Para convencernos de que el espacio de Teichmüller es un espacio métrico utilizaremos un teorema de existencia y unicidad, una prueba detallada puede encontrarse en el libro de Gardiner y Lakic [19].

**Teorema 1.1.5. Existencia y unicidad de mapeos de Teichmüller.** [19]

Sean  $X$  y  $Y$  dos superficies de Riemann cerradas de género  $g$  de tal forma que  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo. Entonces

1. Existe un homeomorfismo cuasiconforme  $h : X \rightarrow Y$  homotópico a  $f$ .
2. Si  $K$  es el ínfimo de las constantes de dilatación de los homeomorfismos cuasiconformes entre  $X$  y  $Y$  homotópicos a  $f$  entonces existe  $F : X \rightarrow Y$  que es  $K$ -cuasiconforme.

De momento lo que diferencia a dos superficies de Riemann es un  $K$ -mapeo cuasiconforme y cuando  $K = 1$  tenemos que no hay diferencia entre esas dos superficies. De tal forma que podemos definir una métrica en  $\mathcal{T}(S)$  que dependa de esa constante de dilatación del mapeo de Teichmüller entre dos superficies.

Definimos la métrica del espacio de Teichmüller como

$$d((X, f), (Y, g)) = \inf \frac{1}{2} \log(K). \quad (1.1.1)$$

Donde el ínfimo se toma sobre las constantes de dilatación de mapeos  $K$ -cuasiconformes entre  $X$  y  $Y$ . El logaritmo en la definición se debe a que si existiera un mapeo conforme entre esas dos superficies su distancia tendría que ser nula. El  $1/2$  resulta para que

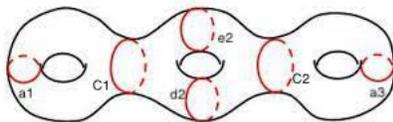


Figura 1.2: Descomposición de superficie de género 3, imagen obtenida de [15].

la desigualdad del triángulo funcione considerando que si  $f$  es  $K$ -cuasiconforme y  $g$  es  $J$ -cuasiconforme entonces  $f \circ g$  es  $JK$ -cuasiconforme [6].

De esta forma obtenemos que  $\mathcal{T}(S)$  es un espacio métrico. Sin embargo podemos encontrar que tiene más estructura.

### Coordenadas de Fenchel-Nielsen

El objetivo de esto es demostrar que  $\mathcal{T}(S)$  tiene la estructura de una  $6g - 6$  variedad diferenciable (cuando  $g > 1$ ). Lo haremos con una construcción que se le conoce como *descomposición en pantalones* de una superficie de Riemann.

En toda la siguiente discusión estaremos suponiendo que las superficies de Riemann en cuestión son de género mayor que uno.

Vamos a construir una partición de una superficie  $S_g$  como sigue guiándonos con la imagen [1.2].

1. Por simplicidad vamos a enumerar a los *agujeros* de la superficie  $H_1, \dots, H_g$ .
2.  $\pi_1(S_g)$  es generado por  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  y  $\beta_1, \dots, \beta_g$ . Las primeras curvas son *horizontales* y segundas son *verticales*. Consideremos para cada  $H_2, \dots, H_{g-1}$  dos elementos  $d_i, e_i \in [\beta_i]$  de tal forma que cada una esté *agarrando el asa de lado distinto*.
3. Para los agujeros  $H_1$  y  $H_g$  consideramos  $a_1 \in [\beta_1]$  y  $a_g \in [\beta_g]$ .
4. Entre cada una de los agujeros vamos a tomar curvas  $C_i$ .
5. Cortamos la superficie  $S_g$  por estas  $3g - 3$  curvas para obtener  $2g - 2$  superficies de Riemann de género 0 con tres componentes de frontera totalmente geodésicas. A cada una de estas superficies obtenidas la llamamos un *pantalón*.

Una razón para considerar esta descomposición es que los pantalones los podemos obtener a través de hexágonos hiperbólicos geodésicos con ángulos rectos.

En el libro de Imayoshi y Taniguchi [30] podemos encontrar el siguiente resultado de geometría hiperbólica:

**Teorema 1.1.6.** *Si consideramos el conjunto de los hexágonos hiperbólicos cuyos lados sean geodésicas y sus ángulos sean rectos, módulo isometría, este conjunto es homeomorfo a  $\mathbb{R}_+^3$ .*

Haciendo uso de este resultado, si tenemos un pantalón  $P$  cuyas longitudes de sus fronteras sean  $l_1, l_2, l_3$  entonces existe un único (salvo isometrías) hexágono geodésico, con ángulos rectos, con longitudes de lados  $l_1/2, l_2/2, l_3/2$  y entonces podemos indentificar este hexágono  $H$  consigo mismo en sus aristas para obtener  $P$ . Esto implica en particular que  $\mathcal{T}(P) \cong \mathbb{R}_+^3$ .

Para finalizar con la construcción de las coordenadas que buscamos, comentaremos sobre la construcción algebraica del espacio de Teichmüller de una superficie de Riemann, siguiendo la construcción y notación de [17].

Recordemos que  $Isom^+(\mathbb{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  y  $Isom(\mathbb{H}^2) = \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Si una superficie tiene género mayor que uno entonces su cubriente universal es isométrica a  $\mathbb{H}^2$  [41], de tal forma que podemos encontrar una representación de  $\pi_1(S_g)$  en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  la cual sea fiel y discreta<sup>4</sup>. De tal forma que podemos representar al espacio de Teichmüller de una superficie de género mayor que uno como el cociente del conjunto de las representaciones fieles y discretas de  $\pi_1(S_g)$  en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  al cual denotaremos como  $DF(\pi_1(S_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  módulo  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ , donde la acción de  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  es por conjugación, de tal forma que

$$\mathcal{T}(S_g) = \frac{DF(\pi_1(S_g), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))}{\text{PGL}(2, \mathbb{R})}.$$

Esto nos funciona para definir la longitud de ciertas curvas en el espacio de Teichmüller. Estamos considerando superficies con métrica hiperbólica, entonces si tenemos una clase  $[\gamma] \in \pi_1(S_g)$  existe un representante geodésico de esa clase [30].

**Definición 1.1.12.** *Sea  $\gamma \in \pi_1(S_g)$  y  $X \in \mathcal{T}(S)$ . Si  $\rho_X(\gamma)$  es una representación de  $\gamma$  y  $Tr$  es la traza de esa representación. Definimos la longitud de esa curva en  $X$  como*

$$\mathcal{L}_X(\gamma) = 2\cosh^{-1}(Tr(\rho_X(\gamma))/2).$$

Esta cantidad nos servirá para definir las coordenadas que buscamos.

Por lo tanto, si tenemos una superficie  $X \in \mathcal{T}(S_g)$ , obtenemos  $P_1, \dots, P_{2g-2}$  pantalones descompuestos por  $3g-3$  curvas cerradas  $a_1, d_2, e_2, \dots, d_{g-1}, e_{g-1}, a_g, C_1, \dots, C_{g-1}$  de tal forma que podemos considerar la siguiente asignación

$$X \rightarrow (\mathcal{L}_X(a_1), \dots, \mathcal{L}_X(C_{g-1})) \in \mathbb{R}_+^{3g-3}.$$

Puede parecer que con esto hemos parametrizado el espacio de Teichmüller. Sin embargo debemos fijarnos en algo más. Consideremos dos componentes de la frontera que se identifican, dichas geodésicas que generan la frontera pueden pegarse de forma no trivial, es

<sup>4</sup>Inyectiva y que su imagen sea un conjunto discreto

decir, pueden *enrollarse* de distintas formas, y dos de estos tipos de pegados no pueden ser homotópicos, entonces a pesar de que la curva tenga una misma longitud, van a estar representando puntos distintos en  $\mathcal{T}(S_g)$ .

Por lo tanto a partir de la definición que hemos dado de la longitud de una curva, podemos definir también este parámetro de **torsión** para toda curva de la frontera, la cual estará dada por  $\theta_X(\gamma) \in \mathbb{R}$ . La razón de que se considere en los reales es que la orientación puede ser negativa. Por lo tanto si consideramos la asignación de  $\mathcal{T}(S_g) \rightarrow \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$  dada por

$$X \rightarrow (\mathcal{L}_X(\alpha_1), \dots, \mathcal{L}_X(C_{g-1}), \theta_X(a_1), \dots, \theta_X(C_{g-1}))$$

es una biyección y dichas coordenadas se les conocen como las coordenadas de **Fenchel-Nielsen**. Esta es una justificación intuitiva, una demostración rigurosa se puede hallar en [17] ó [30].

## Espacio móduli

Hemos visto una clasificación de las superficies de Riemann y hemos discutido al inicio de esta sección por qué es una clasificación efectiva, sin embargo podemos hacer más fina esta clasificación. Por el momento tenemos clases de equivalencia de  $[(X, f)]$  las cuales dependen de una superficie y un difeomorfismo, queremos encontrar una forma de solo considerar a las superficies. Es decir una proyección razonable  $[(X, f)] \rightarrow [X]$ . Al cociente que vamos a conseguir se le conoce como el espacio móduli de las superficies de Riemann.

**Definición 1.1.13.** *Sea  $S_g$  una superficie de Riemann, definimos el Mapping Class Group,  $MCG(S_g)$  como el cociente  $\text{Diff}(S_g)/\text{Diff}_0(S_g)$ . Es decir los difeomorfismos de  $S_g$  cociente el grupo normal de los difeomorfismos que son isotópicos a la identidad.*

Existe una acción natural del  $MCG(S_g)$  en  $\mathcal{T}(S_g)$  dada por

$$h \cdot [(X, f)] \rightarrow [(X, f \circ h^{-1})].$$

Con esta acción podemos definir el cociente deseado.

Entonces podemos definir el *Espacio móduli* de las superficies de Riemann de género  $g$  como el cociente  $\mathcal{T}(S_g)/MCG(S_g) = \mathcal{M}_g$ .

## Móduli de superficies de traslación y estratificaciones

**Notación:** En el resto del texto nos referiremos a una 1-forma holomorfa no idénticamente cero simplemente como 1-forma holomorfa.

Aparentemente nos desviamos de tema y dejamos atrás a las superficies de traslación pero toda la discusión anterior fue para establecer como clasificar dichas superficies.

Recordemos que una superficie de traslación es una pareja  $(X, \omega)$  donde  $X$  es una superficie de Riemann y  $\omega$  una 1-forma holomorfa. Ya hemos llegado a la conclusión de cómo

clasificar a las superficies de Riemann, sin embargo falta considerar a las 1-formas holomorfas.

Sea  $g \geq 1$ . Podemos considerar un haz fibrado  $\pi : \mathcal{H}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  sobre el espacio móduli de las superficies de Riemann donde la fibra de  $[X]$  consiste en las estructuras de traslación (1-formas holomorfas definibles) que se le pueden asociar a  $X$ . De esta forma obtenemos que  $\mathcal{H}$  es el conjunto de todas las superficies de traslación donde  $(X, \omega)$  es equivalente a  $(Y, \gamma)$  si existe un difeomorfismo conforme  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f^*\gamma = \omega$  que es la clasificación a la que queríamos llegar. Sin embargo aún podemos hacer más fina esta clasificación [50].

Existe un teorema en el estudio de las superficies de Riemann conocido como el *teorema de Riemann-Roch* [1], una consecuencia de este teorema es la siguiente:

**Lema 1.1.3.** *Sea  $S_g$  una superficie de Riemann de género  $g$ . Si  $\omega$  es una 1-forma holomorfa en  $S_g$  entonces contando multiplicidad existen  $2g - 2$  ceros de  $\omega$ .*

Una consecuencia de este resultado es que podemos *estratificar* a  $\mathcal{H}_g$ . Una razón para querer hacerlo es que en principio dos superficies de traslación cuyas cardinalidades de sus conjuntos singulares sean distintas no pueden ser equivalentes.

Sea

$$\sum_{i=1}^k d_i = 2g - 2$$

una partición de  $2g - 2$  por enteros positivos, definimos la *estratificación*  $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_k)$  como el conjunto de superficies de traslación  $(X, \omega)$  de tal forma que  $\omega$  tenga  $k$  ceros en  $X$  de orden  $d_i$  o bien cuyos puntos singulares sean puntos cónicos con ángulo  $2\pi(d_i + 1)$ .

Estas estratificaciones no siempre resultan ser variedades diferenciales, pero tienen estructura de Orbifolds [50]. Vamos a definir unas coordenadas locales para estas estratificaciones.

Sea  $(S, \omega, \Sigma)$  una superficie de traslación tal que  $(S, \omega) \in \mathcal{H}(d_1, \dots, d_k)$ . Consideremos una base para el  $\mathbb{Z}$ -módulo  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$  donde  $\Sigma = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Esta base la podemos tomar como las curvas cerradas  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  basadas en  $x_i$  que generan la homología absoluta de  $S$  respecto a  $\mathbb{Z}$  añadiendo los  $n - 1$  arcos  $\alpha_i$  que conectan  $x_1$  con  $x_{1+i}$ . Considerando estas curvas definimos las **coordenadas de periodos** (locales) de  $(S, \omega)$  como

$$(S, \omega) \rightarrow \left( \int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_{2g}} \omega, \int_{\alpha_1} \omega, \dots, \int_{\alpha_{n-1}} \omega \right) \in \mathbb{C}^{2g+n-1}.$$

Las primeras  $2g$  coordenadas se les conoce como *coordenadas absolutas* mientras que las últimas  $n - 1$  como *coordenadas relativas*.

Esta identificación en efecto funciona como coordenadas locales en el siguiente sentido: supongamos que tenemos dos 1-formas holomorfas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en una misma estratificación

de tal forma que tengan las mismas coordenadas de periodos de tal forma que puedan estar asociadas al menos como 1-formas suaves en una misma superficie  $S$  con la misma base para la homología  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Estas formas suaves le dan a  $S$  una estructura euclidea donde podemos hallar representantes geodésicos de esa base. Podemos cortar por esas geodésicas para obtener un par de  $2(2g + n - 1)$ -polígonos euclidianos. Como las coordenadas de periodos de estas dos formas coinciden, entonces estos polígonos son isométricos, de esta forma obtenemos que definen la misma estructura de traslación.

Estas coordenadas nos dicen cuáles son las dimensiones de estas estratificaciones. El que esas asignaciones son homeomorfismos es un resultado complicado, un breve tratamiento está en [50] donde se encuentra en sketch de la demostración que las estratificaciones son *orbifolds*. Consideramos como la estratificación más grande a la que tiene  $2g - 2$  singularidades, cada una de orden 1, esta estratificación tiene dimensión  $4g - 3$ . De la misma forma tomamos como la más pequeña a la que tiene una sola singularidad de orden  $2g - 2$  cuya dimensión es  $2g$ . Uno podría pensar que las estratificaciones están desconectadas la una de la otra sin embargo esto no es así. De hecho podemos observar que las estratificaciones tienen a las estratificaciones menores en sus cerraduras. Para convencernos de este hecho consideremos una sucesión de superficies de traslación en una estratificación  $(X, \omega_n) \subseteq \mathcal{H}(d_1, \dots, d_k)$  de tal forma que  $\int_{c_1} \omega_n \rightarrow 0$ . Esto nos quiere decir que los puntos singulares  $x_1$  y  $x_2$  colapsan y entonces el límite está en la estratificación  $\mathcal{H}(d_1 + d_2, d_3, \dots, d_k)$ .

Habiendo definido por fin clasificaciones óptimas de los espacios a considerar en nuestro problema, podemos concentrarnos en ciertas acciones sobre estos espacios.

### 1.1.5. Acción de $SL(2, \mathbb{R})$ y flujo de Teichmüller

#### Automorfismos afines

Iniciemos esta discusión considerando una clase de automorfismos en una superficie  $S$ .

Decimos que  $f : S \rightarrow S$  es un automorfismo afín si preserva la orientación, actúa en los puntos singulares por permutación y en coordenadas locales es de la forma

$$\phi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}(x, y) = A(x, y) + (v_1, v_2)$$

donde  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ .

Al conjunto de matrices  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  tal que existe un automorfismo afín que preserve la orientación cuya representación en coordenadas locales esté dada por  $A$  se le conoce como el **grupo de Veech** de la superficie. El estudio propio de este grupo ha servido para extender un teorema que se le debe Weyl a superficies de género mayor que uno [38]. Por otro lado también ha dado pie a que se estudie una acción muy *natural* en  $\mathcal{H}_g$  por el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ .

### La acción de $SL(2, \mathbb{R})$

Sea  $X$  una superficie de traslación de género  $g$  con un atlas de traslación  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Definimos la acción de  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $X$  tal que en coordenadas locales sea

$$A \cdot (U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, A \circ \phi_\alpha).$$

La acción se define como la estructura de traslación sobre la superficie  $X$  obtenida por postcomponer las cartas por la transformación lineal  $A$ .

Una buena razón para considerar este grupo es que preserva el área de la superficie y además no cambia el orden de los ceros de la forma  $\omega$ , lo que nos quiere decir es que es una acción que deja invariantes las estratificaciones.

### Flujo de Teichmüller

El flujo de Teichmüller se define para generar un proceso de renormalización del flujo geodésico vertical de una superficie de traslación. Intuitivamente vamos a deformar el flujo geodésico vertical para encontrar una dinámica mas *sencilla*.

**Definición 1.1.14.** Definamos  $\mathcal{H}_g^1$  como el conjunto de las superficies de traslación  $(X, \omega)$  de tal forma que

$$A(\omega) = \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega} = 1.$$

De la misma forma, prestemos atención en las estratificaciones unitarias, es decir,  $\mathcal{H}_g^1 \cap \mathcal{H}(d_1, \dots, d_k) = \mathcal{H}^1(d_1, \dots, d_k)$ . Un resultado de Masur [39] nos dice que estas estratificaciones tienen medida de Lebesgue finita, donde la medida resulta del Pullback de las coordenadas de periodos.

**Definición 1.1.15.** Definimos la acción del **flujo (geodésico) de Teichmüller** como la acción del grupo diagonal

$$\{g_t = \text{diag}(e^t, e^{-t})\} \leq SL(2, \mathbb{R}).$$

En  $\mathcal{H}_g^1$ .

Observemos que por la definición de la acción la diferencia entre una superficie  $S$  y la superficie que resulta de  $g_t \cdot (S, \omega)$  es un mapeo  $K$ -cuasiconforme con  $K = \frac{e^t}{e^{-t}} = e^{2t}$ . Entonces por la definición de la distancia en el espacio de Teichmüller [1.1.1] tendremos que

$$d(S, S_t) = \frac{1}{2} \log(e^{2t}) = t.$$

Por lo tanto las órbitas de esta acción generan geodésicas en  $\mathcal{T}(S)$ .

## 1.2. Transformaciones de intercambio de intervalos

En esta sección vamos a definir las transformaciones de intercambio de intervalos.<sup>5</sup> Explicaremos cómo obtener una de estas transformaciones como el mapeo del primer retorno del flujo geodésico vertical en una superficie de traslación a un intervalo transversal a la superficie, y como obtener una superficie de traslación desde una de estas transformaciones. Definiremos un proceso de renormalización conocido como la inducción de Rauzy-Veech y explicaremos su relación con el flujo de Teichmüller.

### 1.2.1. Rotaciones y su generalización

En [13] V. Delecroix explica que los IET son generalizaciones de las rotaciones en el círculo. En esta parte del texto seguiremos su desarrollo y notación.

Una rotación en el círculo la podemos pensar como una transformación del intervalo en sí mismo tal que

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} x + \alpha & x \in [0, 1 - \alpha) \\ x + \alpha - 1 & x \in (1 - \alpha, 1] \end{cases}$$

con  $x = 1 - \alpha$  una singularidad y  $\alpha \in (0, 1)$ . La ventaja de representar a la rotación de esta forma es que estudiar el comportamiento de sus órbitas puede ser descrito con dinámica simbólica.

Notemos que es  $\alpha$  induce una partición en el intervalo  $[0, 1]$  que la podemos denotar como  $I_A^{top} = [0, 1 - \alpha)$  y  $I_B^{top} = (1 - \alpha, 1]$ . De esta forma la órbita de un punto  $x$  por  $T_\alpha$  queda descrita como

$$0_x = 0_1, 0_2, \dots, 0_n, \dots$$

Donde

$$0_n = \begin{cases} A & T_\alpha^n(x) \in I_A^{top} \\ B & T_\alpha^n(x) \in I_B^{top} \end{cases}.$$

De forma análoga, al ser  $T_\alpha$  biyectiva podemos fijarnos en las órbitas *hacia el pasado*. Considerando una segunda partición del intervalo por  $\alpha$  dada por  $[0, \alpha) = I_A^{bot}$  y  $(\alpha, 1] = I_B^{bot}$ . De esta forma también podemos poner en términos de  $A$  y  $B$  la órbita de  $T_\alpha^{-1}$  de  $x$ .

En principio contamos con un *alfabeto*  $\mathcal{A} = \{A, B\}$  y *palabras* es decir, concatenaciones de elementos del alfabeto, por ejemplo  $A, B, AB, ABAAAB$  etc.

Unos conjuntos importantes en el estudio de la dinámica simbólica son los *cilindros*, es decir, dada una palabra  $W = w_0 w_1 \dots w_n$  con  $w_i \in \mathcal{A}$  el cilindro de  $W$  es el conjunto de  $x \in [0, 1]$  tal que  $0_j(x) = w_j$  para  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Existe una descripción más precisa de este conjunto al cual lo definiremos como  $I_W^{top}$  y estará dado por

$$I_W^{top} = I_{w_0}^{top} \cap T^{-1}(I_{w_1}^{top}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{w_n}^{top}).$$

<sup>5</sup>IET por sus siglas en inglés: Interval Exchange Transformations

De manera análoga definimos el cilindro de  $T^{-1}$  de  $W$  como

$$I_W^{bot} = I_{w_n}^{bot} \cap T(I_{w_{n-1}}^{bot}) \cap \dots \cap T^n(I_{w_0}^{bot}).$$

Por construcción notamos que  $T^n(I_W^{top}) = I_W^{bot}$  y además es por traslación.

La primer forma de generalizar esta transformación es hacer que no dependa de  $\alpha$ . Consideremos dos reales  $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_+$ . Definimos una transformación  $T : [0, \lambda_A + \lambda_B] \rightarrow [0, \lambda_A + \lambda_B]$  dada por

$$T(x) = \begin{cases} x + \lambda_B & x < \lambda_A \\ x - \lambda_B & x > \lambda_A \end{cases}.$$

Esta transformación es  $T_\alpha$  cuando  $\lambda_A = 1 - \alpha$ . Observemos también que la dinámica de  $T$  es invariante bajo escalamientos en la longitud de  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$ . Estos reales positivos inducen dos particiones del intervalo  $[0, \lambda_A + \lambda_B]$ , la primera dada por  $I_A^{top} = [0, \lambda_A)$  y  $I_B^{top} = (\lambda_A, \lambda_A + \lambda_B]$  y la segunda dada por  $I_A^{bot} = (\lambda_B, \lambda_A + \lambda_B]$  y  $I_B^{bot} = [0, \lambda_B)$ . Se codifican las órbitas de  $T$  y se definen los cilindros para las palabras generadas por la partición de una manera análoga que con la rotación.

En sistemas dinámicos es útil considerar subsistemas dinámicos que sean más *simples* de analizar y contengan información significativa en el sistema total. En este caso consideraremos un subsistema que se le conoce como el *mapeo inducido* o el primer retorno de Poincaré como explicaremos en la Sección [1.3](#).

Sea  $Y \subseteq [0, \lambda_A + \lambda_B]$ . Definimos el mapeo inducido de  $T$  en  $Y$  como  $T_Y(x) = T^{r(x)}(x)$  donde  $r(x) = \inf\{n \mid T^n(x) \in Y\}$ .

El subsistema generado por el mapeo inducido será en un subintervalo y consiste en un proceso de renormalización.

Supongamos que  $\lambda_A \neq \lambda_B$ . Si  $\lambda_A > \lambda_B$  entonces consideramos el mapeo inducido en el intervalo  $[0, \lambda_A]$  el cual tiene una descripción definida por

$$T'(x) = \begin{cases} x + \lambda_B & x < \lambda_A - \lambda_B \\ x + \lambda_B - \lambda_A & x > \lambda_A - \lambda_B \end{cases}.$$

Por otro lado si tenemos que  $\lambda_B > \lambda_A$  entonces consideramos el mapeo inducido en el intervalo  $[0, \lambda_B]$  el cual está dado por

$$T'(x) = \begin{cases} x + \lambda_B - \lambda_A & x < \lambda_A \\ x - \lambda_A & x > \lambda_A \end{cases}.$$

Estas nuevas transformaciones inducen particiones en sus respectivos intervalos de definición y por lo tanto de manera similar a como hemos discutido en los párrafos anteriores podemos codificar sus órbitas. Un hecho interesante es que es posible recuperar la órbita del sistema total desde este subsistema, es decir, si tenemos que en el subsistema un punto tiene una órbita codificada por  $W = w_0 \dots w_n \dots$  entonces la órbita de  $x$  en el sistema total

estará codificada por  $O = \sigma(0)\dots\sigma(n)\dots$  [13] donde  $\sigma(n)$  se encuentra dada de la siguiente forma: en el primer caso

$$\sigma(n) = \begin{cases} A & w_n = A \\ AB & w_n = B \end{cases},$$

y en el segundo caso

$$\sigma(n) = \begin{cases} AB & w_n = A \\ B & w_n = B \end{cases}.$$

Si tenemos que  $\lambda_A \neq \lambda_B - \lambda_A$  (respectivamente  $\lambda_B \neq \lambda_A - \lambda_B$ ) podemos volver a realizar este mismo proceso de renormalización para obtener un subsistema más sencillo con información relevante del total.

Con esta intuición podemos definir lo que son las **transformaciones de intercambio de intervalos** (IET).

Existen diversos textos donde podemos encontrar estudios muy completos de estas transformaciones. A lo largo de esta discusión sobre los IET vamos a utilizar la notación y el desarrollo de los primeros capítulos de las notas de M. Viana [49].

**Definición 1.2.1.** *Un IET es una transformación de un intervalo en si mismo que mapea subintervalos en subintervalos por traslación de tal forma que viene dado por una información combinatoria y por una información métrica.*

Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto con  $k \geq 2$  letras y  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  una información combinatoria donde  $\pi_i : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  son biyecciones. La representación de esta información está determinada por

$$\pi = \begin{pmatrix} \kappa_1^0 & \dots & \kappa_k^0 \\ \kappa_1^1 & \dots & \kappa_k^1 \end{pmatrix}.$$

Donde  $\kappa_i^j = \pi_j^{-1}(i)$ .

Entonces dado un alfabeto  $\mathcal{A}$  y una información combinatoria  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  definimos el invariante de monodromía como

$$\mathcal{M} : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

donde  $\mathcal{M}(n) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(n)$ .

Parece que definir la información combinatoria de la manera en la que se hizo es una carga grande de notación y que podría simplificarse presentándose únicamente como este invariante de monodromía, sin embargo la notación establecida es útil para definir operaciones de renormalización como veremos en la sección [1.2.2].

Consideremos un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Tomemos una partición de  $I$  por subintervalos  $I_i$  cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha indexados por  $\mathcal{A}$  cada uno de longitud  $\lambda_i$ .

Consideremos una información combinatoria para el alfabeto  $\mathcal{A}$  dada por  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ . Definamos la operación  $\Omega_\pi : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+^k$  dada por  $\Omega_\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \eta \in \mathbb{R}_+^k$  donde

$$\eta_i = \sum_{\pi_1(j) < \pi_1(i)} \lambda_j - \sum_{\pi_0(j) < \pi_0(i)} \lambda_j.$$

Para un intervalo con una partición  $I_i$  con longitudes  $\lambda_i$  y una información combinatoria  $\pi$  definimos la **transformación de intercambio de intervalos**  $f(\pi, \lambda)$  donde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  como

$$f(\pi, \lambda)(x) = \begin{cases} x + \eta_1 & x \in I_1 \\ x + \eta_2 & x \in I_2 \\ \dots & \\ x + \eta_k & x \in I_k \end{cases} .$$

Definimos a  $\Omega_\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \eta$  como el **vector de traslación** de  $f(\pi, \lambda)$ .

Observemos que esta definición de transformación es equivalente a la de una rotación cuando  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  y  $\mathcal{M}(1) = 2$  y  $\mathcal{M}(2) = 1$  por lo que resulta bastante natural pensar a los IET como *generalizaciones* de rotaciones.

**Ejemplo 1.2.1.** *Construyamos un IET.*

Consideremos el intervalo  $[0, \frac{77}{60}]$  y una partición con subintervalos  $I_1, I_2, I_3, I_4$  cuyas longitudes son  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$  respectivamente ordenados como fueron enumerados. Supongamos que tenemos una transformación del intervalo en sí mismo que cambia el orden a  $I_3, I_1, I_4, I_2$  localmente por traslaciones. La información combinatoria de esta transformación está dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_3 & I_1 & I_4 & I_2 \end{pmatrix} .$$

La información métrica está descrita por el vector  $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ . Entonces el vector de traslación que buscamos está dado por

$$\Omega_\pi(\lambda) = \left( \frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4} \right) .$$

Entonces el IET está descrito por la regla de correspondencia

$$f(\pi, \lambda)(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x + \frac{8}{15} & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ x - \frac{3}{4} & x \in [\frac{3}{4}, \frac{13}{12}) \\ x - \frac{1}{4} & x \in [\frac{13}{12}, \frac{77}{60}) \end{cases} .$$

Notemos que  $\Omega_\pi$  puede ser descrito mediante una matriz de la siguiente forma

$$\Omega_{\pi_{i,j}} = \begin{cases} 1 & \pi_1(i) > \pi_1(j) & \pi_0(i) < \pi_0(j) \\ -1 & \pi_1(i) < \pi_1(j) & \pi_0(i) > \pi_0(j) \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} .$$

Por ejemplo, considerando la información métrica y combinatoria del ejemplo anterior tenemos que

$$\Omega_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos hacer la observación que las matrices  $\Omega_\pi$  son antisimétricas. Una consecuencia de esto es que

**Lema 1.2.1.** [49] Para toda información combinatoria  $\pi$  y para toda información métrica  $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$  tenemos que  $\lambda \cdot \Omega_\pi(\lambda) = 0$ .

*Demostración.* Por definición de  $\Omega_\lambda$  tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Omega_\pi(\lambda) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \left( \sum_{\pi_1(j) < \pi_1(i)} \lambda_j - \sum_{\pi_0(j) < \pi_0(i)} \lambda_j \right) = \\ &= \lambda_{\pi_1^{-1}(k)} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{\pi_1^{-1}(i)} \right) + \lambda_{\pi_1^{-1}(k-1)} \left( \sum_{i=1}^{k-2} \lambda_{\pi_1^{-1}(i)} \right) + \dots + \lambda_{\pi_1^{-1}(1)} \lambda_{\pi_1^{-1}(2)} \\ &- \left( \lambda_{\pi_0^{-1}(k)} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{\pi_0^{-1}(i)} \right) + \lambda_{\pi_0^{-1}(k-1)} \left( \sum_{i=1}^{k-2} \lambda_{\pi_0^{-1}(i)} \right) + \dots + \lambda_{\pi_0^{-1}(1)} \lambda_{\pi_0^{-1}(2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 0. \end{aligned}$$

□

## 1.2.2. Inducción de Rauzy-Veech

Vamos a definir un proceso de renormalización en los IET que se le conoce como *inducción de Rauzy-Veech* el cual consiste en estudiar la dinámica inducida por un IET en un subintervalo. Este proceso es la versión del flujo de Teichmüller. En la sección 1.2.4 nos convenceremos de este último hecho.

Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET de tal forma que  $\lambda_{\pi_1^{-1}(k)} \neq \lambda_{\pi_0^{-1}(k)}$ . Para suavizar la notación denotaremos como  $\tau_1 = \pi_1^{-1}(k)$  y  $\tau_0 = \pi_0^{-1}(k)$ . Si tenemos que  $\lambda_{\tau_1} < \lambda_{\tau_0}$  decimos que  $f(\pi, \lambda)$  es de *tipo 0* y si  $\lambda_{\tau_0} < \lambda_{\tau_1}$  decimos que es de *tipo 1*.

En el primer caso el subintervalo donde vamos a definir la dinámica es  $J = I \setminus f(I_{\tau_1})$  y en el segundo caso  $J = I \setminus I_{\tau_0}$ .

**Proposición 1.2.1.** [49] Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET en  $k$  subintervalos. Si  $J$  es el subintervalo construido en el párrafo anterior entonces para cualquiera de los dos casos la función inducida por  $f$  en  $J$  es un IET con  $k$ -subintervalos.

*Demostración.* 1. **Caso 1.** Si  $f(\pi, \lambda)$  es de tipo 1. Definimos los subintervalos de  $J$  como  $J_{\tau_0} = f^{-1}(I_{\tau_0})$ , a  $J_{\tau_1} = I_{\tau_1} \setminus J_{\tau_0}$  y  $J_i = I_i$  para todas las demás  $i$ s. De esta forma se sigue que para toda  $i \neq \tau_0$  tenemos que la función inducida en  $J_i$  se queda contenida en  $J$  y por lo tanto coincide con  $f$ . Por otro lado tenemos que  $f^2(J_{\tau_0}) = f(I_{\tau_0}) \subseteq J$  por lo tanto la función inducida restringida a  $J_{\tau_0}$  coincide con  $f^2$ .

2. **Caso 2.** Si  $f(\pi, \lambda)$  es de tipo 0. Definimos los subintervalos de  $J$  como  $J_{\tau_0} = I_{\tau_0} \setminus f(I_{\tau_1})$  y como  $J_i = I_i$  para cualquier otra  $i$ . De esta forma la función inducida  $J_i$  con  $i \neq \tau_1$  van a tener su imagen contenida en  $J$  y por lo tanto va coincidir con  $f$ . Por otro lado  $f(J_{\tau_1}) = f(I_{\tau_1}) \subset I_{\tau_0}$  por lo tanto  $f^2(J_{\tau_1}) \subset f(I_{\tau_0}) \subseteq J$ . De esta forma vamos a concluir que la función inducida en este subintervalo coincide con  $f^2$ .

□

El IET inducido por la inducción de Rauzy-Veech sobre  $f$  se le denota como  $\mathcal{R}(f)$ .

**Lema 1.2.2.** [49] *Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET donde se pueda definir la inducción de Rauzy-Veech. La información métrica y combinatoria de  $\mathcal{R}(f)$  la podemos obtener explícitamente desde la información de  $f$ .*

*Demostración.* Podemos suponer primero que  $\lambda_{\tau_0} > \lambda_{\tau_1}$ . Si seguimos el razonamiento del caso dos en la Proposición 1.2.1 observamos que la información combinatoria de  $\pi_0$  es invariante mientras que la segunda es la que cambia. Solo hay que notar que por construcción los intervalos  $J_{\tau_0}$  y  $J_{\tau_1}$  son contiguos, de tal forma que la información combinatoria de  $\pi'$  está dada por

$$\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1^0 & \dots & \kappa_d^0 & \kappa_{d+1}^0 & \dots & \kappa_k^0 \\ \kappa_1^1 & \dots & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \kappa_{k-1}^1 \end{pmatrix}.$$

Mientras que la información métrica queda descrita como  $\lambda'_i = \lambda_i$  para toda  $i \neq \tau_0$  y  $\lambda'_{\tau_0} = \lambda_{\tau_0} - \lambda_{\tau_1}$ .

Ahora supongamos que  $\lambda_{\tau_0} < \lambda_{\tau_1}$ . En este caso tenemos que la información combinatoria de  $\pi_1$  queda invariante bajo la inducción de Rauzy-Veech, la primera es la que cambia: los intervalos  $J_{\tau_1}$  y  $J_{\tau_0}$  son contiguos antes de aplicar la inducción pues se parte en intervalo  $I_{\tau_1}$  en dos nuevos. De esta forma obtenemos que

$$\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1^0 & \dots & \tau_1 & \tau_0 & \dots & \kappa_{k-1}^0 \\ \kappa_1^1 & \dots & \kappa_d^1 & \kappa_{d+1}^1 & \dots & \kappa_k^1 \end{pmatrix}.$$

Su información métrica es  $\lambda'_i = \lambda_i$  para toda  $i \neq \tau_1$  y  $\lambda'_{\tau_1} = \lambda_{\tau_1} - \lambda_{\tau_0}$ .  $\square$

El IET del Ejemplo 1.2.1 es de tipo 1, la información combinatoria de su proceso de Rauzy-Veech viene dada por

$$\pi' = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_4 & J_3 \\ J_3 & J_1 & J_4 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Mientras que su información métrica es  $\lambda' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3})$ .

Podemos encontrar estas relaciones del IET original con su imagen bajo la inducción, así como una expresión precisa para el nuevo IET a partir del vector de traslación obtenido.

Supongamos que  $f(\pi, \lambda)$  es de tipo 0, por construcción podemos observar que  $\eta'_i = \eta_i$  si  $i \neq \tau_1$  mientras que  $\eta'_{\tau_1} = \eta_{\tau_1} + \eta_{\tau_0}$ . De esta forma podemos definir un operador  $\Theta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  de tal forma que

$$\Theta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 1 & i = \tau_1 \quad j = \tau_0 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}.$$

Cuya inversa está dada por

$$\Theta_{i,j}^{-1} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & i = \tau_1 \quad j = \tau_0 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}.$$

De manera análoga veamos que si  $f(\pi, \lambda)$  es de tipo 1 entonces dicho operador está definido por

$$\Theta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 1 & i = \tau_0 \ j = \tau_1 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}.$$

Su inversa es

$$\Theta_{i,j}^{-1} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & i = \tau_0 \ j = \tau_1 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}.$$

Así  $\Theta(\eta) = \eta'$ .

**Observación:** Por cómo definimos las inversas de  $\Theta$ , y como definimos  $\lambda'$ ;  $\lambda'_i = \lambda_i$  para  $i \neq \tau_0$  y  $\lambda'_{\tau_0} = \lambda_{\tau_0} - \lambda_{\tau_1}$  en el caso del tipo 0, se desprende que  $(\Theta^{-1})^*(\lambda) = \lambda'$ . Lo mismo ocurre en el caso del tipo 1. Donde  $(\Theta^{-1})^*$  es el operador transpuesto de  $\Theta^{-1}$ .

En el Ejemplo [1.2.1](#) veamos que

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces  $\eta' = \Theta((\frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4})) = (\frac{1}{3}, \frac{17}{60}, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4})$ .

Vamos a definir una subclase de IET. En la Sección [1.4](#) estudiaremos su relación con el concepto dinámico de *minimalidad*.

**Definición 1.2.2.** Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET donde  $\pi$  es una biyección entre un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\{1, \dots, k\}$ . Si existe  $n \in \{1, \dots, k-1\}$  de tal forma que  $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, n\}) = \{1, \dots, n\}$  decimos que  $f(\pi, \lambda)$  es **reducible**, de otra forma diremos que es **irreducible**.

Por el momento vamos a suponer que los IET son irreducibles y suponer que además la inducción de Rauzy-Veech está siempre definida y de esta forma pensar en la inducción como un sistema dinámico en el espacio de los IET.

**Notación:** Supongamos que  $f(\pi, \lambda)$  es un IET irreducible con  $k$  subintervalos y que la inducción de Rauzy-Veech está definida en una infinidad de pasos. Denotemos por  $(\pi^n, \lambda^n)$  al IET que resulta de aplicar  $n$  veces el proceso de Rauzy-Veech, escrito de otra forma como  $\mathcal{R}^n(f)$ . Utilicemos  $\delta^n$  para referirnos al tipo (0 ó 1) de  $(\pi^n, \lambda^n)$ . Por último diremos que  $G^n$  es el intervalo más grande entre  $\pi_0^{-1}(k)$  y  $\pi_1^{-1}(k)$  y  $L^n$  el intervalo más pequeño.

**Lema 1.2.3.** [\[49\]](#) Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET irreducible donde la inducción de Rauzy-Veech sea siempre definible, entonces  $\delta^n = 0$  una infinidad de veces y  $\delta^n = 1$  una infinidad de veces.

*Demostración.* Supongamos que existe  $k_0 \geq 1$  tal que  $\delta^n$  es constante para toda  $n \geq k_0$ . Entonces tendríamos que  $G^n = (\pi_0^n)^{-1}(k)$  o  $G^n = (\pi_1^n)^{-1}(k)$  para todas esas  $n$ 's. De esta forma, como  $\lambda_{G^{n+1}}^{n+1} = \lambda_{G^n}^n - \lambda_{P^n}^n$  concluimos que  $\lambda_{P^n}^n$  es constante para todas esas  $n$ 's. Por lo tanto

$$\lambda_{G^{k_0+m}}^{k_0+m} = \lambda_{G^{k_0+m-1}}^{k_0+m-1} - \lambda_{G^{k_0+m+1}}^{k_0}.$$

Como  $\lambda_{G^n}^n$  es una sucesión decreciente y  $\lambda_{P^m}^m > 0$  entonces existe una  $m$  donde  $\lambda_{G^{k_0+m}}^{k_0+m} < 0$  lo cual no es posible. Entonces concluimos que  $\delta^n$  es 0 y 1 una infinidad de veces.  $\square$

**Proposición 1.2.2.** [49] *Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET irreducible donde la inducción de Rauzy-Veech sea siempre definible, entonces para toda  $S \in \mathcal{A}$  se tiene que  $G^n = S$  y  $P^n = S$  para una infinidad de  $n$ 's.*

*Demostración.* Vamos a considerar un subconjunto  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  que consista en los elementos tales donde la sucesión  $G^n$  coincide con estos elementos a lo más una cantidad finita de veces y demostraremos que por el criterio de irreducibilidad este conjunto debe ser vacío. Sea  $\mathcal{A}'$  el conjunto descrito en el párrafo anterior. Podemos considerar una subsucesión de  $\mathcal{R}^n(f)$  de tal forma que para todo  $A \in \mathcal{A}'$  tengamos que  $A \neq G^n$  para toda  $n$  en la subsucesión. Notemos que esto implica que para todo  $A \in \mathcal{A}'$  la sucesión  $\Pi^n = A$  a lo más una cantidad finita de veces. La razón es que alguno de estos  $A$ s llegan en algún punto a ser subintervalos extremos, al obtener el nuevo subintervalo por el proceso de Rauzy-Veech y fuera una cantidad no finita de veces el intervalo más corto, entonces obtendríamos que en un punto tendríamos un  $\lambda^n < 0$ . De esta forma podemos obtener una subsucesión de  $\mathcal{R}^n(f)$  de tal forma que  $A \neq P^n$  para todo  $A \in \mathcal{A}'$ . De esta forma como estos subintervalos nunca llegan a ser los intervalos extremos derechos entonces las sucesiones  $\pi_0^n(A)$  y  $\pi_1^n(A)$  son no decrecientes pero tampoco llegan a  $k$ , entonces podemos considerar una subsucesión para suponer que estas sucesiones son constantes.

Demostremos que esto implica que para toda  $A_1 \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$  y para toda  $A_2 \in \mathcal{A}'$  tenemos que  $\pi_0^n(A_2) < \pi_0^n(A_1)$  y  $\pi_1^n(A_2) < \pi_1^n(A_1)$ . Si no fuera así entonces como  $A_1 \notin \mathcal{A}'$  se seguiría que existe una  $k$  donde  $G^k = A_1$ . Por lo tanto si  $G^n = \pi_{\delta^n}^n(A_1)$ ,  $G^n = \pi_{1-\delta^n}^n(s)$  y  $A_2 = \pi_{1-\delta^n}^n(s+d)$  entonces

$$G^n = \pi_{1-\delta^n}^{n+1}(A_1) < P^n = P_{1-\delta^n}^{n+1}(A_1) + 1 < \pi_{-\delta^n}^{n+1}(A_2) = 1 + \pi_{1-\delta^n}^n(A_2).$$

Lo cual contradice el hecho que la sucesión sea constante. Entonces concluimos que

$$\pi_1(\mathcal{A}') = \pi_0(\mathcal{A}') = \{1, \dots, d\}$$

para algún  $d$ . Pero  $f(\pi, \lambda)$  es irreducible, entonces  $\mathcal{A}' = \emptyset$ .  $\square$

**Corolario 1.2.1.** [49] *Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET irreducible donde la inducción de Rauzy-Veech sea siempre definible. Si  $I_n$  es el intervalo donde está definido  $\mathcal{R}^n(f)$  entonces  $\mu(I_n) \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* La longitud de  $I_n$  depende de la longitud de los subintervalos obtenidos en el proceso de Rauzy-Veech, por lo tanto suponer que la longitud de  $I_n$  no converge a 0 es equivalente a suponer que existe un subintervalo  $I_A$  de tal forma que  $\mu(I_{n,A}) \geq r$  para alguna  $r > 0$ .

Por la Proposición 1.2.2 sabemos que en las iteraciones de  $\mathcal{R}(f)$  el subintervalo  $I_A$  va a ser el más corto de los intervalos que están en la derecha una infinidad de veces. Por lo tanto la desigualdad

$$\lambda^{n+1} = \lambda_{G^n} - \mu(I_{n,A}) \leq \lambda_{G^n} - r$$

se verifica en una infinidad de ocasiones. Como el alfabeto  $\mathcal{A}$  es finito entonces existe un subintervalo donde en una infinidad de momentos tendremos que

$$\lambda_\alpha^{n+1} \leq \lambda_\alpha^n - r.$$

Esto implica que eventualmente obtendríamos un intervalo de longitud negativa lo cual no es posible. De esta forma no existe un intervalo  $I_A$  tal que  $\mu(I_{n,A}) \geq r > 0$ . Por lo tanto

$$\mu(I_n) \rightarrow 0.$$

□

## Clases de Rauzy

Vamos a continuar con el estudio de la dinámica inducida en el espacio de los IET por la inducción de Rauzy-Veech definiendo un orden en las clases de Rauzy, las cuales son conjuntos de permutaciones de un mismo alfabeto invariantes bajo dos operaciones que se relacionan con la inducción de Rauzy-Veech.

Decimos que la información combinatoria  $\pi'$  de un alfabeto con  $k$  elementos es *sucesora* de  $\pi$  si existen  $\lambda$  y  $\lambda'$  en  $\mathbb{R}^k$  de tal forma que  $\mathcal{R}(f)(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda')$ . Si esto ocurre decimos que  $\pi$  es *ancestro* de  $\pi'$ . Notemos que  $\pi$  tiene dos sucesores, uno de tipo 0 y otro de tipo 1 [49]. De la misma forma  $\pi'$  tiene dos ancestros. Esto nos dice que tenemos dos operaciones invertibles en las permutaciones de un alfabeto de  $k$  elementos, a saber la que nos lleva siempre a un sucesor de tipo 1, y por tanto ancestro de tipo 1, y la que nos lleva a un sucesor de tipo 0, y por tanto a un sucesor de tipo 0.

**Definición 1.2.3.** Sea  $\pi$  una información combinatoria en un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $k$  elementos. Definimos la clase de Rauzy de  $\pi$ , denotada por  $C(\pi)$  al conjunto de informaciones combinatorias  $\pi'$  de tal forma que son ancestros o sucesores de  $\pi$ .

Podemos observar que  $\pi$  es reducible si y solo si  $\pi'$  es reducible. Solo hay que observar que bajo  $\mathcal{R}$  ocurre lo siguiente si tenemos biyecciones reducibles:

$$\begin{pmatrix} \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_0^{-1}(d+1) & \dots & \pi_0^{-1}(n) & \dots & \pi_0^{-1}(k) \\ \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_1^{-1}(d+1) & \dots & \pi_0^{-1}(k) & \dots & \pi_1^{-1}(k) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_0^{-1}(d+1) & \dots & \pi_0^{-1}(n) & \pi_0^{-1}(n+1) & \dots & \pi_0^{-1}(k) \\ \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_1^{-1}(d+1) & \dots & \pi_0^{-1}(k) & \pi_1^{-1}(k) & \dots & \pi_1^{-1}(k-1) \end{pmatrix}.$$

En el caso que sea de tipo 0. Por otro lado

$$\begin{pmatrix} \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_0^{-1}(d+1) & \dots & \pi_1^{-1}(k) & \dots & \pi_0^{-1}(k) \\ \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_1^{-1}(d+1) & \dots & \pi_1^{-1}(n) & \dots & \pi_1^{-1}(k) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_0^{-1}(d+1) & \dots & \pi_1^{-1}(k) & \pi_0^{-1}(n+1) & \dots & \pi_0^{-1}(k-1) \\ \pi_0^{-1}(1) & \pi_0^{-1}(2) & \dots & \pi_0^{-1}(d) & \pi_1^{-1}(d+1) & \dots & \pi_1^{-1}(n) & \pi_1^{-1}(n+1) & \dots & \pi_1^{-1}(k) \end{pmatrix}.$$

En el caso que sea de tipo 1. De esta forma vemos que  $\pi$  es irreducible si y solamente si  $\pi'$  lo es. Si fijamos una permutación  $\pi \in C(\pi)$  entonces existe un orden parcial en esa clase de Rauzy tal que  $\pi_1 \leq \pi_2$  si y solo si  $\pi_1$  es ancestro de  $\pi_2$ .

Vamos a elegir un representante de estas clases que tenga una característica especial. El siguiente lema sirve para demostrar que en efecto toda clase de Rauzy va a tener ese elemento característico.

**Lema 1.2.4.** [49] *Sea  $\pi$  una información combinatoria en un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $k$  elementos. Para cualquier  $\delta \in \{0, 1\}$  y cualquier  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_\delta(A) \neq 1$  va a existir  $\pi' \in C(\pi)$  de tal forma que  $\pi'_\delta(A) = k$ .*

*Demostración.* Vamos a fijarnos que si  $\pi_\delta^{-1}(1) = A$  entonces para ningún elemento en  $C(\pi)$  se tendría que  $A = \pi'_\delta^{-1}(k)$ . A pesar de que por la proposición anterior tengamos que llega a una posición hasta la derecha una infinidad de veces, esto nunca ocurre en la misma línea. Es por esto que tenemos esa restricción.

Consideraremos el conjunto  $\mathcal{A}'_\delta \subseteq \mathcal{A}$  de elementos  $A$  tales que para toda  $\pi' \in C(\pi)$  se verifique que  $\pi'_\delta(A) < k$ . Denotemos por

$$\alpha_\delta = \text{máx}\{\pi'_\delta(A) \mid A \in \mathcal{A}'_\delta \mid \pi' \in C(\pi)\}.$$

La prueba consiste en demostrar que  $\alpha_\delta = 1$ .

Observemos que como en la demostración de la Proposición 1.2.2 todos los elementos  $B$  tales que  $\pi_\delta(B) < k$  solo pueden moverse a la derecha al aplicarse la inducción de Rauzy-Veech (si es que se mueven). Por lo tanto si  $A_\delta$  es donde se alcanza el máximo, entonces para todo  $\pi' \in C(\pi)$  se verifica que  $\pi'(A_\delta) = \alpha_\delta$ .

Esto también implica que todos los elementos  $A$  tales que  $\pi'_\delta(A) < \alpha_\delta$  se fijan, es decir,

$$(\pi')^{-1}(i) = (\pi)^{-1}(i)$$

para toda  $1 \leq i \leq k$ . De esta forma los elementos que verifiquen eso en la línea  $\delta$  nunca podrán representar los subintervalos de la derecha en  $1 - \delta$ , es decir,  $\pi'_\delta(A) < \alpha_\delta$  implica que  $\pi'_{1-\delta}(A) < k$  y por lo tanto  $\pi'_{1-\delta} \leq \alpha_{1-\delta}$ .

Esto implica que a un  $\pi' \in C(\pi)$  lo podemos representar como

$$\begin{pmatrix} \pi_0'^{-1}(1) & \dots & \pi_0'^{-1}(\alpha_0) & \dots & \dots & \pi_0'^{-1}(k) \\ \pi_1'^{-1}(1) & \dots & \dots & \pi_1'^{-1}(\alpha_1) & \dots & \pi_1'^{-1}(k) \end{pmatrix}.$$

En particular podemos observar que

$$\{\pi_\delta'^{-1}(1), \dots, \pi_\delta'^{-1}(\alpha_\delta - 1)\} \subseteq \{\pi_{1-\delta}'^{-1}(1), \dots, \pi_{1-\delta}'^{-1}(\alpha_{1-\delta})\}.$$

De aquí se desprende que

$$|\alpha_{1-\delta}| \leq |\alpha_\delta - 1|.$$

Tenemos estas posibilidades:

1. Si  $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ . Por la contención anterior observamos que

$$\{(\pi'_0)^{-1}(1), \dots, (\pi'_0)^{-1}(\alpha_1)\} = \{(\pi'_1)^{-1}(1), \dots, (\pi'_1)^{-1}(\alpha_1)\}.$$

Lo cual no es posible debido a que  $\pi'$  es irreducible.

2. Si  $\alpha_0 = \alpha_1 - 1$ . Por la contención tenemos que

$$\{(\pi'_0)^{-1}(1), \dots, (\pi'_0)^{-1}(\alpha_0)\} = \{(\pi'_1)^{-1}(1), \dots, (\pi'_1)^{-1}(\alpha_0)\}.$$

Lo cual de nuevo no es posible por la irreducibilidad de  $\pi'$ .

3. Si  $\alpha_0 = \alpha_1$ . Entonces por la desigualdad tendríamos que

$$\{(\pi'_0)^{-1}(1), \dots, (\pi'_0)^{-1}(\alpha_0 - 1)\} = \{(\pi'_1)^{-1}(1), \dots, (\pi'_1)^{-1}(\alpha_1 - 1)\}.$$

Esto sería una contradicción al hecho que  $\pi'$  es irreducible a menos que  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ .

Entonces el único caso posible es que  $\alpha_1 = \alpha_0 = 1$  que es lo que se quería demostrar.  $\square$

**Definición 1.2.4.** Decimos que  $f(\pi, \lambda)$  es estándar si

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = k \text{ y } \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(k) = 1.$$

Este es precisamente el representante particular que buscamos. Estos IET presentan un comportamiento similar al una rotación en los extremos y además tienen la ventaja de ser bastante visualizables. La siguiente proposición nos dice que estos son representantes que siempre podemos hallar.

**Proposición 1.2.3.** [49] Sea  $\pi$  una información combinatoria de un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $k$  elementos que es irreducible, entonces existe  $\pi' \in C(\pi)$  tal que  $\pi'$  es estándar.

*Demostración.* Sea  $\pi$  irreducible. Esto implica que  $\pi_0^{-1}(1) \neq \pi_1^{-1}(1)$ , entonces aplicando la inducción de Rauzy-Veech de tipo 1 dejando invariante la línea inferior obtenemos  $\pi'$  de tal forma que  $\pi'_0(\pi_1^{-1}(1)) = k$ . Ahora vamos a aplicar la inducción de Rauzy-Veech del tipo 0 para dejar invariante la línea superior y de esta forma encontrar un  $\pi'' \in C(\pi)$  de tal forma que  $\pi''_1(\pi'_0^{-1}(1)) = k$ . Por lo tanto  $\pi''$  es estándar.  $\square$

## Renormalización de Rauzy-Veech

Hemos visto cómo funciona el sistema dinámico generado por la inducción de Rauzy-Veech, en particular observamos cómo altera las longitudes de los intervalos. Por ejemplo si la inducción es de tipo 0 y el intervalo inicial es unitario entonces la longitud del intervalo después de la inducción es de  $1 - \lambda_{\tau_1}$ . Comentamos al inicio de la discusión de los IET [1.2] que su dinámica no cambia cuando se escala la longitud del intervalo, entonces nos gustaría estudiar cómo se comporta la dinámica generada por la inducción de Rauzy-Veech en el intervalo unitario.

**Definición 1.2.5.** Sea  $f(\pi, \lambda)$  un IET definido en un intervalo unitario de tal forma que sea posible aplicarle la inducción de Rauzy-Veech  $\mathcal{R}(f) = (\pi', \lambda')$ . Si el IET es de tipo  $\delta$  entonces definimos la inducción renormalizada de Rauzy-Veech como

$$\tilde{\mathcal{R}}(f) = (\pi', \lambda'')$$

donde

$$\lambda'' = \frac{\lambda'}{1 - \lambda_{\tau_{1-\delta}}}.$$

Es decir el IET que resulta de escalar a  $(\pi', \lambda')$  por  $\frac{1}{1 - \lambda_{\tau_{1-\delta}}}$ .

En el Ejemplo [1.2.1](#), para considerar su renormalización de Rauzy-Veech debemos normalizar la longitud del intervalo donde esté definido, es decir, considerar una partición del intervalo unitario de tal forma que su información combinatoria esté dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{30}{79} & \frac{15}{79} & \frac{20}{79} & \frac{12}{79} \\ \frac{20}{79} & \frac{30}{79} & \frac{12}{79} & \frac{15}{79} \end{pmatrix}.$$

De nuevo es de tipo 1. Por lo tanto su inducción de Rauzy-Veech está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{30}{79} & \frac{3}{79} & \frac{12}{79} & \frac{20}{79} \\ \frac{20}{79} & \frac{30}{79} & \frac{12}{79} & \frac{3}{79} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto  $\lambda'' = \frac{65}{67}$  y reescalar por este  $\lambda''$  es lo que nos da la renormalización de Rauzy-Veech de nuestro ejemplo.

Observemos que si  $(\pi, \lambda)$  es de tipo  $\delta \in \{0, 1\}$  entonces se verifica que

$$\lambda'' = \frac{\Theta^{-1*}(\lambda)}{1 - \lambda_{1-\delta}}. \quad [49]$$

Esto se desprende de las observaciones que hicimos del operador  $\Theta^*$  y de la definición de  $\lambda''$ .

Consideremos estos tres conjuntos:

1.  $\Lambda_k = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^k \mid \sum_i x_i = 1\}$ . El cual es un cono.
2.  $\Lambda_{\pi,0} = \{\bar{x} \in \Lambda_k \mid \lambda_{\tau_0} > \lambda_{\tau_1}\}$ . El cual es la mitad de ese cono.
3.  $\Lambda_{\pi,1} = \{\bar{x} \in \Lambda_k \mid \lambda_{\tau_1} > \lambda_{\tau_0}\}$ . El cual es de nuevo la mitad del primer cono.

Notamos que si  $\pi$  es de tipo  $\delta$  entonces

$$\tilde{\mathcal{R}}(\{\pi\} \times \Lambda_{\pi,\delta}) = \{\pi\} \times \Lambda_d.$$

Más aún, esa comparación de conjuntos vía  $\tilde{\mathcal{R}}$  es una biyección.

## Transformaciones de Zorich

Zorich definió unas transformaciones que son versiones *aceleradas* de las transformaciones de Rauzy-Veech.

En el Corolario [1.2.1](#) comentamos que si todas las iteraciones de las transformaciones de Rauzy-Veech están definidas entonces van a existir una infinidad de instancias donde el IET inducido será de tipo 0 y una infinidad donde será de tipo 1. Las transformaciones de Zorich lo que hacen es únicamente fijarse en esos momentos donde cambia el tipo. Por ejemplo, supongamos que  $(\pi, \lambda)$  es de tipo  $\delta$  y que para  $i = \{1, \dots, n - 1\}$  se cumple que  $(\pi^i, \lambda^i)$  es de tipo  $\delta$  pero  $(\pi^n, \lambda^n)$  es de tipo  $1 - \delta$  entonces la transformación de Zorich se definiría como  $Z(\pi, \lambda) = (\pi^n, \lambda^n)$ .

**Definición 1.2.6.** Sea  $(\pi, \lambda)$ . Definamos a  $\delta_{\pi, \lambda}^d \in \{0, 1\}$  como el tipo de el IET obtenido de  $\mathcal{R}^d(\pi, \lambda)$ . La transformación de Zorich se define como

$$\mathcal{Z}(\pi, \lambda) = \mathcal{R}^n(\pi, \lambda)$$

donde

$$n = \min\{j \mid \delta_{\pi, \lambda}^j \neq \delta_{\pi, \lambda}^0\}. \quad (1.2.1)$$

De forma análoga podemos definir la transformación renormalizada de Zorich como

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\pi, \lambda) = \tilde{\mathcal{R}}^n(\pi, \lambda),$$

donde  $n$  está definido como en [1.2.1](#)

Si nos fijamos en el conjunto definido como

$$\Lambda_{\pi, \delta, n} = \{\bar{x} \in \Lambda_{\pi, \delta} \mid \delta = \delta^1 = \dots = \delta^{n-1} \neq \delta^n\},$$

entonces la transformación de Zorich mapea de forma biyectiva al conjunto  $\{\pi\} \times \Lambda_{\pi, \delta, n}$  en el conjunto  $\{\pi^n\} \times \Lambda_{\pi, 1-\delta}$  [\[49\]](#). En el Ejemplo [1.2.1](#) veamos cómo se comportan las primeras iteraciones de  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{17}{60} \\ \frac{17}{60} & \frac{1}{20} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{5}{60} \\ \frac{5}{60} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la primera y la segunda información combinatoria son de tipo 1 y 0 respectivamente entonces  $\mathcal{Z}(\pi, \lambda) = \mathcal{R}(\pi, \lambda)$ . Por otro lado la tercera y la cuarta son de tipo 0 y 1 respectivamente entonces  $\mathcal{Z}^2(\pi, \lambda) = \mathcal{R}^3(\pi, \lambda)$ .

De hecho  $\mathcal{R}^3(\pi, \lambda)$  es un buen ejemplo de un IET que es *estándar*.

### 1.2.3. Forma simpléctica

Recordemos el operador  $\Omega_\pi$  asociado a una información combinatoria  $\pi$  definido de tal forma que relaciona una información métrica con un vector de traslación. Podemos deducir de la demostración del Lema [1.2.1](#) que  $\Omega_\pi$  es antisimétrico, es decir  $\Omega_\pi^* = -\Omega_\pi$ , lo que implica que el complemento ortogonal de la imagen de  $\Omega_\pi$  coincide con su kernel. Entonces para una información combinatoria  $\pi$  en un alfabeto  $\mathcal{A}$  de  $k$  elementos tenemos que  $\Omega_\pi$  define una forma bilineal  $a_\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$a_\pi(u, v) = u \cdot \Omega_\pi(v) \text{ [\[49\]](#) .}$$

Sin embargo si  $v \in \text{Ker}(\Omega_\pi)$  entonces  $a_\pi(u, v) = 0$  para toda  $u \in \mathbb{R}^k$ , entonces es degenerada.

De cualquier forma, podemos restringirnos a la imagen  $\Omega_\pi(\mathbb{R}^k)$ , la cual se le denota como  $H_\pi$  y proceder a definir  $A_\pi : H_\pi \times H_\pi \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$A_\pi(\Omega_\pi(u), \Omega_\pi(v)) = u \cdot \Omega_\pi(v). \quad (1.2.2)$$

Veamos que verifica ciertas propiedades:

**Proposición 1.2.4.** [\[49\]](#) *La asignación  $A_\pi$  definida en [1.2.2](#) es una forma bilineal alternante y no degenerada, en particular  $H_\pi$  es un espacio simpléctico..*

*Demostración.* Primero hay que demostrar que está bien definida. Supongamos que existen  $u_1, u_2$  de tal forma que  $\Omega_\pi(u_1) = \Omega_\pi(u_2)$ , entonces tenemos que  $u_1 - u_2 \in \text{Ker}(\Omega_\pi) = H_\pi^\perp$ , por lo tanto

$$(u_1 - u_2) \cdot \Omega_\pi(v) = 0$$

para toda  $v \in \mathbb{R}^k$ , de aquí se desprende que

$$A_\pi(\Omega_\pi(u_1), \Omega_\pi(v)) = u_1 \cdot \Omega_\pi(v) = u_2 \cdot \Omega_\pi(v) = A_\pi(\Omega_\pi(u_2), \Omega_\pi(v)).$$

Por lo tanto está bien definido.

El hecho que  $A_\pi$  sea una forma bilineal se sigue inmediatamente de cómo está definida. Para ver que es alternante hay que observar que

$$A_\pi(\Omega_\pi(u), \Omega_\pi(v)) = u \cdot \Omega_\pi(v) = v \cdot \Omega_\pi^*(u) = -v \cdot \Omega_\pi(u) = -A_\pi(\Omega_\pi(v), \Omega_\pi(u)).$$

Por último para demostrar que no es degenerada supongamos que  $A_\pi(\Omega_\pi(u), \Omega_\pi(v)) = 0$  para toda  $\Omega_\pi(v) \in H_\pi$  entonces  $u \cdot \Omega_\pi(v) = 0$  para toda  $\Omega_\pi(v) \in H_\pi$  por lo tanto  $u \in H_\pi^\perp \cap H_\pi = \{0\}$ . Por lo tanto  $H_\pi$  es un espacio simpléctico.  $\square$

**Lema 1.2.5.** [\[49\]](#) *Si  $(\pi, \lambda)$  y  $(\pi', \lambda')$  están en la misma clase de Rauzy entonces  $H_\pi$  y  $H_{\pi'}$  son isomorfos. Más aún, las dimensiones de  $H_\pi'$  y  $H_\pi$  coinciden las cuales son pares.*

*Demostración.* Vamos a asumir que  $\mathcal{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda')$ . Recordemos que  $\Theta^*(\lambda') = \lambda$ . Si  $\eta = \Omega_\pi$  es el vector de traslación de  $(\pi, \lambda)$  y  $\eta' = \Omega_{\pi'}$  es el vector de traslación de  $(\pi', \lambda')$  entonces tenemos que  $\Theta(\eta) = \eta'$ . Por lo tanto tenemos que

$$\Omega_{\pi'}(\lambda') = \Theta \circ \Omega_\pi \circ \Theta^*(\lambda').$$

Como tanto  $\Theta$  como  $\Theta^*$  son invertibles se sigue que  $H_\pi$  y  $H_{\pi'}$  son isomorfos. De hecho el isomorfismo que  $\Theta$  induce es simpléctico pues como  $x \in H_\pi$  si y solo si  $\Theta(x) \in H_{\pi'}$  entonces

$$A_{\pi'}(\Theta \circ \Omega_\pi(u), \Theta \circ \Omega_\pi(v)) = A_{\pi'}(\Omega_{\pi'} \circ \Theta^{-1*}(u), \Theta \circ \Omega_\pi(v)) = \Theta^{-1*}(u) \cdot \Theta \circ \Omega_\pi(v) = v \cdot (\Theta \circ \Omega_\pi)^*(\Theta^{-1*}(u)) = v \cdot \Omega_\pi^* \circ \Theta^* \circ \Theta^{-1*}(u) = v \cdot \Omega_\pi^*(u) = u \cdot \Omega_\pi(v) = A_\pi(\Omega_\pi(u), \Omega_\pi(v)).$$

De la [1.2.4](#) y de esta observación se desprende que las dimensiones de  $H'_\pi$  y  $H_\pi$  coinciden y que son números pares. A esta dimensión le la denotaremos como  $2g$ .  $\square$

### 1.2.4. De IET a superficies de traslación

Continuando con la discusión de M. Viana [\[49\]](#) podemos regresar a nuestro problema inicial relacionando la teoría para entender el funcionamiento de los IET con superficies de traslación. Procederemos a entender cómo construir a partir de un IET una superficie de traslación, cómo desde un flujo vertical en una superficie de traslación podemos construir un IET y entenderemos cómo es que estas transformaciones son de enorme utilidad para estudiar los flujos geodésicos.

Existen dos construcciones canónicas para pasar de IET a flujos geodésicos en superficies de traslación. Primero vamos a notar que si tenemos una superficie de traslación, entonces el mapeo de primer retorno del flujo geodésico vertical induce un IET.

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación, si consideramos un intervalo  $I$  transversal a  $S$  entonces el mapeo del primer retorno del flujo vertical geodésico en el intervalo  $I$  es un IET.*

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie de traslación, vamos a considerar su representación poligonal  $P$ . Vamos a tomar un intervalo  $I$  de tal forma que sus puntos extremos coincidan con dos vértices del polígono y además que la mitad de los vértices estén encima del intervalo y la otra mitad abajo del intervalo. Denotemos los vértices superiores del intervalo por  $v_1, \dots, v_k$ . Consideremos las proyecciones de estos vértices a las cuales las denotaremos por  $\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^k$ . Por otro lado consideramos los vértices inferiores  $v'_1, \dots, v'_k$  y sus proyecciones por  $\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^k$ . Observemos que el subintervalo  $[\alpha_0^n, \alpha_0^m]$  bajo la acción del flujo geodésico vertical es mapeado a la arista cuyos vértices son  $v_n$  y  $v_m$ , los cuales están relacionados con  $v'_{\pi(n)}, v'_{\pi(m)}$  y de esta forma llegan al subintervalo  $[\alpha_1^{\pi(n)}, \alpha_1^{\pi(m)}]$ . Notamos que obtenemos un IET en el intervalo  $I$  cuya información métrica está dada por

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \mid \lambda_m = \sum_{i=1}^m v_i - \sum_{i=1}^{m-1} v_i.$$

Y con información combinatoria

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^k \\ \alpha_1^{\pi(1)} & \alpha_1^{\pi(2)} & \dots & \alpha_1^{\pi(k)} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ahora vamos a ver que es posible construir una superficie de traslación apartir de un IET. Consideremos un IET y supongamos que es irreducible y que su información esté dada por  $(\pi, \lambda)$  en un alfabeto de  $k$  letras. Entonces denotamos por  $T_\pi^+$  al cono convexo de vectores  $v$  de tal forma que

$$\sum_{\pi_0(\alpha) \leq d} v_\alpha > 0 \text{ y } \sum_{\pi_1(\alpha) \leq d} v_\alpha < 0, \quad (1.2.3)$$

para todo  $d \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Vamos a decir que  $v$  es de tipo 0 si  $\sum_\alpha v_\alpha > 0$  y diremos que es de tipo 1 si esa suma es negativa.

Consideremos los vectores  $(\lambda, v_\alpha) = z_\alpha$ . La superficie de traslación que queremos construir viene dada por la concatenación de los vectores

$$z_1, \dots, z_k, -z_1, \dots, -z_k,$$

e identificando vía traslación las aristas opuestas. Observemos que la condición de las sumas que dimos nos dice que los vértices de las primeras  $k$  concatenaciones van a estar en el plano superior mientras que los vértices de las últimas  $k$  concatenaciones se hallarán en el plano inferior.

Notemos que podemos tener una dificultad, la cual es que el polígono obtenido no sea una curva cerrada simple (siempre es curva cerrada). Sin embargo uno puede notar que ocurre en casos excepcionales, los cuales se resumen en dos:

1. Cuando  $v$  es de tipo 0 y  $(\pi, \lambda)$  es de tipo 1.
2. Cuando  $v$  es de tipo 1 y  $(\pi, \lambda)$  es de tipo 0. [\[49\]](#)

Vamos a ver más adelante por qué podemos asumir (vía procesos de renormalización) que el polígono obtenido es una curva cerrada simple. Por el momento a menos que se indique lo contrario vamos a suponer que sí lo es.

Recordemos que en el ejemplo [1.2.1](#) tenemos un IET de tipo 1, si queremos construir una superficie de traslación donde el polígono que la genera no tenga autointersecciones entonces necesitamos unos números reales cuya suma sea negativa y que verifique las condiciones de sumas antes mencionadas, para lo cual podemos considerar al vector  $(1, 2, -2, -2)$  y de esta forma observar que verifica las condiciones deseadas.

**Definición 1.2.7.** Para un IET de tipo  $\delta$ , un vector  $v$  que verifique [1.2.3](#) y sea de tipo  $\delta$  se le conoce como información de suspensión del IET y la superficie subyacente vendrá dada por  $S = S(\pi, \lambda, v)$ .

Una pregunta natural es ¿qué tan buena es la construcción de superficies de traslación que acabamos de dar? Otra forma de plantearlo es preguntarse cómo varía el género y/o las multiplicidades de los puntos singulares al variar la información de suspensión. Veremos que en realidad estas dos dependen únicamente de la información combinatoria.

**Lema 1.2.6.** [49] *La información combinatoria de un IET codifica la cantidad de singularidades de una superficie de traslación y sus respectivos ángulos.*

*Demostración.* Sea  $\pi$  una información combinatoria sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$ . Denotaremos por  $(\alpha, R), (\alpha, L)$  (con  $\alpha \in \mathcal{A}$ ) al punto extremo derecho e izquierdo respectivamente de la arista del polígono que está representada por  $\alpha$ . Podemos definir una relación tal que  $(\alpha, R) \sim (\beta, L)$  cuando

1.  $\pi_0(\alpha) + 1 = \pi_0(\beta)$ .
2.  $\pi_1(\alpha) + 1 = \pi_1(\beta)$ .

También declaramos que  $(\alpha, L) \sim (\beta, L)$  y  $(\alpha, R) \sim (\beta, R)$  cuando

1.  $\pi_0(\alpha) = 1 = \pi_1(\beta)$ .
2.  $\pi_1(\alpha) = d = \pi_1(\beta)$ .

Si extendemos estas relaciones para generar una relación de equivalencia lo que obtenemos es que la cantidad de singularidades es exactamente la cantidad de clases que tiene esta relación.

Vamos a decir que los pares  $(\pi_0^{-1}(1), L), (\pi_0^{-1}(k), R), (\pi_1^{-1}, L)$  y  $(\pi_1^{-1}(k), R)$  son *irregulares*. El resto de los pares les llamaremos *regulares*. Podemos observar que en una clase de equivalencia existen  $2k$  pares regulares, y podemos notar que al hacer las identificaciones para crear la superficie, la identificación de una clase pasa  $2k$  veces por un ángulo vertical, lo que implica que el ángulo de dicha singularidad es de  $2k\pi$ . Esta es una forma de calcular los ángulos de las singularidades.

Vamos a dar una nueva representación útil para estos pares [49]. Tal que  $(\alpha, L) \rightarrow \pi_0(\alpha) - 1$  y  $(\alpha, R) \rightarrow \pi_0(\alpha)$ . Por lo tanto si consideramos el invariante de monodromía de la información combinatoria, las relaciones de equivalencia se pueden expresar de la siguiente forma:  $i \sim j$  si  $\mathcal{M}(j) + 1 = \mathcal{M}(i + 1)$  cuando  $j \notin \{0, \mathcal{M}^{-1}(k)\}$ . En este caso  $0 \sim \mathcal{M}^{-1}(1) - 1$  ó  $k \sim \mathcal{M}^{-1}(k)$ . Lo que sigue es definir una permutación que codifique las relaciones de equivalencia como órbitas. Entonces definimos  $\sigma$  una permutación en  $\{0, \dots, k\}$  dada por

$$\sigma(j) = \begin{cases} \mathcal{M}^{-1}(1) - 1 & \text{si } j = 0 \\ k & \text{si } \mathcal{M}(j) = k \\ \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{M}(j) + 1) - 1. & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Así se sigue que las órbitas de esta permutación están en biyección con las relaciones de equivalencia  $\sim$ . Por lo tanto las singularidades de la superficie subyacente coinciden con las órbitas disjuntas de la permutación. De manera análoga a la relación de equivalencia vamos a decir que un punto es regular cuando no es ni 0 ni  $k$ . De esta forma el ángulo de la singularidad correspondiente a la órbita de un  $\alpha_i$  es  $2d_i\pi$  donde  $2d_i$  son los puntos regulares de la órbita en cuestión.

□

El lema [1.2.6](#) nos dice que tanto la cantidad de singularidades y sus ángulos no dependen de la suspensión ni métrica de la construcción.

Tenemos el siguiente resultado que nos habla sobre la información en el móduli de las superficies subyacentes a IET bajo la acción de la inducción de Rauzy.

**Proposición 1.2.5.** [\[49\]](#) *La cantidad de singularidades, sus ángulos y por tanto el género de una superficie asociada a un IET es invariante en clases de Rauzy.*

*Demostración.* Sea  $(\pi, \lambda)$  un IET. Denotemos por  $(\pi_1, \lambda_1)$  a  $\tilde{\mathcal{R}}(\pi, \lambda)$ . Supongamos primero que  $(\pi, \lambda)$  es de tipo 0. Si  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_1$  son los invariantes de monodromía de cada IET respectivamente y  $\sigma$  y  $\sigma_1$  las permutaciones de [1.2.4](#) entonces tendremos que

$$\mathcal{M}_1(j) = \begin{cases} \mathcal{M}(j) & \text{si } \mathcal{M}(j) \leq \mathcal{M}(k) \\ \mathcal{M}(j) + 1 & \text{si } \mathcal{M}(k) < \mathcal{M}(j) < k \\ \mathcal{M}(k) + 1 & \text{si } \mathcal{M}(j) = k \end{cases}$$

Análogamente tenemos que

$$\mathcal{M}_1^{-1}(j) = \begin{cases} \mathcal{M}^{-1}(j) & \text{si } j \leq \mathcal{M}(j) \\ \mathcal{M}^{-1}(k) & \text{si } j = \mathcal{M} + 1 \\ \mathcal{M}^{-1}(j - 1) & \text{si } \mathcal{M}(k) + 1 < j \leq k \end{cases}$$

Así tenemos que si  $\mathcal{M}(k) \neq k - 1$  entonces  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$  y  $\sigma = \sigma_1$ . De otra forma

$$\sigma_1(j) = \begin{cases} \mathcal{M}^{-1}(k) - 1 & j = k \\ k & \mathcal{M}(j) = k - 1 \\ \sigma(k) & \mathcal{M}(j) = k \\ \sigma(j) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que bajo  $\sigma_1$

$$\mathcal{M}(k - 1) \rightarrow k \rightarrow \mathcal{M}^{-1}(k) - 1 \text{ y } \mathcal{M}^{-1}(k) \rightarrow \sigma(k).$$

Y bajo  $\sigma$

$$\mathcal{M}^{-1}(k - 1) \rightarrow \mathcal{M}^{-1}(k) - 1 \text{ y } \mathcal{M}^{-1}(k) \rightarrow k \rightarrow \sigma(k).$$

Es decir, bajo la inducción de Rauzy  $\sigma$  cambia a  $\sigma_1$  moviendo a  $k$  de su órbita a la órbita de  $\mathcal{M}^{-1}(k - 1)$  y  $\mathcal{M}^{-1}(k) - 1$ , y la órbita de otros puntos no varía, por lo tanto los puntos regulares siguen siendo regulares y los irregulares siguen siendo irregulares, por lo tanto ni la cantidad, ni los ángulos cambian y por lo tanto el género no varía.

Observemos que si  $\pi$  es una información combinatoria y  $\bar{\pi}$  representa su involución canónica, podemos notar que ambas están relacionadas por conjugación vía el invariante de monodromía, por lo tanto ambas informaciones combinatorias generan la misma cantidad de puntos regulares en sus permutaciones inducidas, de tal forma que si  $(\pi, \lambda)$  es de tipo 1 entonces podemos trabajar con  $(\bar{\pi}, \lambda)$  su involución canónica, que es de tipo 0 entonces estamos en el caso anterior.  $\square$

### Rectángulos con cremallera

Ya vimos que en efecto es posible pasar de IET a superficies de traslación sin mayor complicación, hasta ahora tenemos otro problema, la construcción que acabamos de dar para hallar superficies de traslación no nos da una forma única o canónica, de hecho nos dice que existen múltiples formas de obtener una de estas superficies desde un IET. W. Veech tiene un algoritmo conocido como *rectángulos con cremallera*<sup>6</sup> [49].

Consideremos una permutación irreducible  $\pi$  y un IET  $(\pi, \lambda)$ . Consideremos un  $v \in \mathbb{R}^k$ . Definimos  $h \in \mathbb{R}^k$  tal que

$$h_i = \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(i)} v_\beta - \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(i)} v_\beta.$$

Si  $v \in T_\pi^+$ <sup>7</sup> entonces

$$\sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(i)} v_\beta < 0 < \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(i)} v_\beta,$$

para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Se sigue que  $h_i > 0$  para toda  $i$ .

Usaremos la notación para los siguientes conjuntos [49]  $H_\pi = \Omega_\pi(\mathbb{R}^k)$  y  $-\Omega_\pi(T_\pi^+) = H_\pi^+$ . Consideraremos un  $v \in T_\pi^+$ . Para toda  $\alpha \in \mathcal{A}$  vamos a construir los rectángulos para  $\lambda$

$$R_\alpha^0 = \left[ \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta, \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right] \times [0, h_\alpha],$$

$$R_\alpha^1 = \left[ \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta, \sum_{\pi_1(\beta) \leq \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta \right] \times [-h_\alpha, 0].$$

También vamos a considerar los segmentos verticales

$$S_\alpha^0 = \left\{ \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right\} \times [0, \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} v_\beta],$$

$$S_\alpha^1 = \left\{ \sum_{\pi_1(\beta) \leq \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta \right\} \times \left[ \sum_{\pi_1(\beta) \leq \pi_1(\alpha)} v_\beta, 0 \right].$$

Observemos que por construcción  $S_{\pi_0^{-1}(k)}^0 = S_{\pi_1^{-1}(k)}^1$ .

La superficie de traslación que vamos a considerar es la que resulta de identificar al conjunto

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} R_\alpha^\delta \cup S_\alpha^\delta / \sim,$$

donde la identificación es  $R_\alpha^0 \sim R_\alpha^1$ . Notemos que tras la identificación los segmentos  $S_\alpha^\delta$  forman como una cremallera, de ahí el nombre.

<sup>6</sup>zippered rectangles originalmente

<sup>7</sup>1.2.3

Aparentemente esta construcción es más aparatosa pues agregamos una variable, es decir que la superficie subyacente sea  $S = S(\pi, \lambda, v, h)$ . La ventaja de esta construcción es que existe una forma intuitiva de calcular su área, que es por las áreas de los rectángulos.

**Proposición 1.2.6.** [49] Sean  $\delta \in \{0, 1\}$  y  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Se verifican las siguientes dos condiciones:

1.

$$(-1)^\delta \sum_{\pi_\delta(\beta) \leq \pi_\delta} v_\beta < h_\alpha.$$

A menos (quizá) que  $\pi_{1-\delta}(\alpha) = k$ .

2.

$$(-1)^\delta \sum_{\pi_\delta(\beta) \leq \pi_\delta(\alpha)} v_\beta < h_\gamma,$$

siempre que  $\pi_\delta(\gamma) = \pi_\delta(\alpha) + 1$  y  $\pi_\delta(\alpha) < k$ .

*Demostración.* Sea  $\delta = 0$ . Por la construcción de  $h \in \mathbb{R}^k$  y las condiciones que dimos para la suspensión  $v$  tenemos que

$$v_\alpha = \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} v_\beta - \sum_{\pi_1(\beta) \leq \pi_1(\alpha)} v_\beta > 0.$$

A menos que  $\pi_1(\alpha) = k$ , entonces  $\alpha = \pi_1^{-1}(k)$ .

Sea  $\gamma$  tal que  $\pi_0(\gamma) = \pi_0(\alpha) + 1$  entonces

$$h_\gamma = \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} v_\beta - \sum_{\pi_1(\beta) \leq \pi_1(\alpha)} v_\beta > 0.$$

El caso  $\delta = 1$  es análogo utilizando  $< 0$  de la construcción de suspensión.  $\square$

Cuando iniciamos la discusión sobre el espacio  $H_\pi$  comentamos que por las propiedades de  $\Omega_\pi$  el espacio es de dimensión par. Vamos a argumentar que en efecto va a coincidir con  $2g(S)$  donde  $g(S)$  es el género de la superficie subyacente del IET (recordemos que es independiente de la elección de suspensión que utilicemos).

Para los siguientes resultados vamos a suponer que la información combinatoria de los IET está normalizada, es decir que  $\mathcal{M} = \pi_1$  y  $\pi_0 = Id$ .

**Lema 1.2.7.** [49] Si tenemos un IET  $(\pi, \lambda)$  y definimos  $a_j = \sum_{i \leq j} \lambda_i$  con  $a_0 = 0$ , y otras cantidades

$$w_j = \sum_{\pi_1(i) < \pi_1(j)} \lambda_i - \sum_{i < j} \lambda_i.$$

Donde  $w_0 = w_{k+1} = 0$ . Entonces tenemos que para toda  $0 \leq j \leq k$  se verifica que

$$w_{\sigma(j)+1} - w_j = a_j - a_{\sigma(j)}.$$

*Demostración.* Sabemos que  $\sigma(j) = \pi_1^{-1}(\pi_1(j) + 1) - 1$ , entonces

$$w_{\sigma(j)+1} = \sum_{\pi_1(i) < \pi_1(\sigma(j)+1)} \lambda_i - \sum_{i < \sigma(j)+1} \lambda_i = \sum_{\pi_1(i) \leq \pi_1(j)} \lambda_i - \sum_{i \leq \sigma(j)} \lambda_i.$$

Por lo tanto

$$w_{\sigma(j)+1} - w_j = \lambda_j - \sum_{i \leq \sigma(j)} \lambda_i + \sum_{i < j} \lambda_i = \sum_{1 \leq j} \lambda_i + \sum_{i \leq \sigma(j)} \lambda_i = a_j - a_{\sigma(j)}.$$

□

**Lema 1.2.8.** [49] *Un vector  $\lambda \in Ker(\Omega_\pi)$  si y solo si el vector  $(a_0, \dots, a_k)$  es constante bajo las órbitas de  $\sigma$ . Más aún, la dimensión del kernel de  $\Omega_\pi$  es  $\kappa - 1$  donde  $\kappa$  es la cantidad de singularidades.*

*Demostración.* Si tenemos un vector  $w = 0$  con las entradas descritas en el Lema 1.2.7 entonces  $a_j = a_{\sigma(j)}$  y esto nos dice que es constante en las órbitas de  $\sigma$ .

Por otro lado tenemos que si  $(a_0, \dots, a_k)$  es constante en órbitas de  $\sigma$  entonces por el Lema 1.2.7 tenemos que  $a_j = a_{\sigma(j)}$  y por lo tanto  $w_{\pi_1^{-1}(\pi_1(j)+1)} = w_{\sigma(j)+1}$ . Si escribimos  $\pi_1(j) = i$  tenemos que  $w_j = w_{\pi_1^{-1}(i)}$  y en virtud de que  $\sigma(j) + 1 = \pi_1^{-1}(\pi_1(j) + 1)$  entonces

$$w_{\sigma(j)+1} = w_{\pi_1(j)+1} = w_{i+1} = w_{\pi_1^{-1}(i)}.$$

Se sigue que  $w_{\pi_1^{-1}(i)}$  es constante en  $\{0, \dots, k\}$  entonces como  $w_0 = 0$  tenemos que  $w = (w_1, \dots, w_k)$  se anula y este vector es justo la imagen de un  $\lambda$  bajo  $\Omega_\pi$ . Falta demostrar la dimensión del kernel.

Consideremos el isomorfismo de  $\mathbb{R}^k$  dado por  $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ . Sea  $K_\pi$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{k+1}$  de vectores  $(a_0, \dots, a_k)$  que son constantes bajo  $\sigma$ . La dimensión de estos es  $\kappa - 1$  pues el valor de  $a_j$  en la órbita del 0 queda determinado por  $a_0 = 0$  entonces por la discusión anterior tenemos que  $Ker(\Omega_\pi) = \phi^{-1}(K_\pi) = \kappa - 1$ . □

De estos dos lemas podemos concluir que

**Proposición 1.2.7.** [49] *Sea  $(\pi, \lambda)$  un IET, entonces  $Dim(\Omega_\pi(\mathbb{R}^k)) = 2g(S)$  donde  $g(S)$  es el género de la superficie subyacente del IET.*

*Demostración.* Observemos que por Gauss Bonnet 1.1.1 tenemos que

$$2 - 2g(S) = \chi(S) = \kappa + 1 - k.$$

Por lo tanto

$$2g(S) = 1 - \kappa + k.$$

□

Vamos a dar una caracterización del kernel de  $\Omega_\pi$  de la siguiente forma.

Sea un IET  $(\pi, \lambda)$  y sea  $\sigma$  la permutación que induce. Si  $\mathcal{O}$  es una órbita de  $\sigma$  que no contiene al 0 entonces para toda  $1 \leq j \leq k$  definimos

$$\lambda(\mathcal{O})_j = \chi_{\mathcal{O}}(j) - \chi_{\mathcal{O}}(j-1) = \begin{cases} 1 & j \in \mathcal{O}, j-1 \notin \mathcal{O} \\ -1 & j \notin \mathcal{O}, j-1 \in \mathcal{O} \\ 0 & j, j-1 \notin \mathcal{O} \quad j, j-1 \in \mathcal{O} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Recordando el morfismo que definimos unos párrafos arriba, si definimos  $a(\mathcal{O}) = \phi(\lambda(\mathcal{O}))$  entonces podemos obtener el siguiente resultado:

**Lema 1.2.9.** [49] Si tenemos la transformación  $a$  como en 1.2.5 entonces

$$a(\mathcal{O})_j = \begin{cases} 1 & j \in \mathcal{O} \\ 0 & j \notin \mathcal{O} \end{cases}$$

Es decir podemos definir un vector con funciones características desde un morfismo y una transformación que depende de la información combinatoria.

*Demostración.* Si  $j = 1$  entonces  $a(\mathcal{O})_1 = 1$  si  $j \in \mathcal{O}$  (notemos que no existe  $j-1$ ) y 0 de otra forma. Supongamos que  $a(\mathcal{O})_{j-1} = \chi_{\mathcal{O}}(j-1)$ . Veamos que

$$a(\mathcal{O})_j = \chi_{\mathcal{O}}(j-1) + \lambda(\mathcal{O})_j 0 = \chi_{\mathcal{O}}(j-1) + \chi_{\mathcal{O}}(j) - \chi_{\mathcal{O}}(j-1) = \chi_{\mathcal{O}}(j).$$

□

Observemos ahora que si  $\mathcal{O}$  es una órbita que no contiene al cero entonces, las imágenes bajo  $a$  de este tipo de órbitas forman una base para  $K_\pi$ . Esto se debe a que si  $v = (v_1, \dots, v_k) \in K_\pi$  entonces  $(0, v_1, \dots, v_k)$  es constante en permutaciones de  $\sigma$ . Si todas las entradas pertenecen a la órbita del cero entonces este punto corresponde al origen. Si por otro lado existen  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$  órbitas que no contienen al cero entonces el vector es de la forma

$$\sum_{i=1}^k v_i \left( \sum_{j=1}^k (0, \dots, \chi_{\mathcal{O}_j}(i), \dots, 0) \right).$$

Se sigue que en efecto el conjunto mencionado es una base para  $K_\pi$ , por lo tanto el conjunto  $\lambda(\mathcal{O})$  con  $\mathcal{O}$  una órbita que no tiene al cero es una base para  $\text{Ker} \Omega_\pi$ . Más aún, en virtud de la antisimetría de la transformación tenemos que  $\text{Ker} \Omega_\pi = H_\pi^\perp$  entonces  $v \in H_\pi$  si y solo si  $v \cdot \lambda(\mathcal{O}) = 0$  para toda órbita que no tenga al cero.

### Inducción en la suspensión

En esta parte del texto vamos a describir la inducción de Rauzy-Veech para la suspensión de un IET y convencernos de que la inducción de Rauzy-Veech es la *versión unidimensional* del flujo de Teichmüller, para lo cual hay que demostrar que dicho proceso de renormalización conmuta con el flujo de Teichmüller.

Sea  $(\pi, \lambda, v)$  una información combinatoria, métrica y de suspensión asociada al IET  $T = (\pi, \lambda)$ . Para nuestro objetivo vamos a fijarnos en  $(\pi, \lambda)$  al cual podemos aplicarle la inducción de Rauzy-Veech, de tal forma que  $\mathcal{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda')$ , de tal forma que si  $(\pi, \lambda)$  es de tipo  $\epsilon \in \{0, 1\}$  entonces la inducción nos brinda nueva información de suspensión dada por

$$v'_\alpha = \begin{cases} v_{\pi_\epsilon^{-1}(k)} - v_{\pi_{1-\epsilon}^{-1}(k)} & \alpha = \pi_\epsilon^{-1}(k) \\ v_\alpha & \alpha \neq \pi_\epsilon^{-1}(k) \end{cases} \quad (1.2.6)$$

**Definición 1.2.8.** *La inducción de Rauzy-Veech en la suspensión se define como  $\mathcal{R}(\pi, \lambda, v) = (\pi', \lambda', v')$  donde  $(\pi', \lambda')$  es la inducción de Rauzy-Veech usual y  $v'$  es como en la ecuación [1.2.6](#).*

Observemos que dos superficies que difieren por la acción de este proceso de renormalización pueden obtenerse una de otra apartir de recortes y pegados [\[49\]](#), es decir, difieren por la acción de un elemento del MCG, por lo tanto representan el mismo elemento en el Móduli  $\mathcal{M}_g$ .

**Definición 1.2.9.** *Definimos la inducción de Rauzy-Veech en la información de los rectángulos con cremallera, de tal forma que si tenemos  $(\pi, \lambda, v, h)$  entonces  $h'$  estará dado por*

$$h'_\alpha = \begin{cases} h_{\pi_\epsilon^{-1}(k)} - h_{\pi_{1-\epsilon}^{-1}(k)} & \alpha = \pi_\epsilon^{-1}(k) \\ h_\alpha & \alpha \neq \pi_\epsilon^{-1}(k) \end{cases}$$

En en Ejemplo [1.2.1](#) tenemos que

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix}, \quad \lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \\ v &= (1, 2 - 2, -2), \quad h = (2, 4, 3, 2) \text{ y} \\ \pi' &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix}, \quad \lambda' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \\ v' &= (1, 4, -2, -2), \quad h' = (2, 2, 3, 2). \end{aligned}$$

Veamos qué podemos decir de estos procesos de renormalización en relación con el flujo geodésico de las superficies de traslación que inducen.

Recordemos que el flujo geodésico es una acción en el espacio de Teichmüller de una superficie de traslación dada por

$$g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Hemos argumentado cómo es que un IET con información combinatoria y métrica  $(\pi, \lambda)$  induce una dinámica en una superficie de traslación, cuya información queda codificada y clasificada por  $(\pi, \lambda)$ . Una forma de encontrar esta superficie es asociando una información de suspensión de tal forma que  $(\pi, \lambda, \tau)$  representa una superficie de traslación. En términos del flujo de Teichmüller, la acción en esta representación tiene la forma

$$g_t \cdot (\pi, \lambda, \tau) = (\pi, e^t \lambda, e^{-t} \tau). \quad (1.2.7)$$

**Teorema 1.2.2.** [49]

La inducción de Rauzy-Veech en la suspensión conmuta con el flujo de Teichmüller, es decir

$$\mathcal{R}(g_t \cdot (\pi, \lambda, \tau)) = g_t \cdot \mathcal{R}(\pi, \lambda, \tau).$$

*Demostración.* Que se verifique la ecuación del teorema respecto a la información combinatoria es claro pues el flujo no cambia el tipo de permutación que representa. Para convencernos de la información métrica y de suspensión basta con observar la definición 1.2.3, la ecuación 1.2.7 y notar que la inducción de Rauzy-Veech conmuta con el producto escalar.  $\square$

Aunque la conmutatividad de estas dos operaciones es fácil de demostrar, es un hecho muy importante que será utilizado en el capítulo 2.

Existen múltiples textos en los cuales se puede encontrar teoría de los IET. Una excelente referencia, de la cual decidimos seguir hasta cierto punto la estructura y desarrollo son las notas de Marcelo Viana [49].

### 1.3. Recordatorio de teoría ergódica

En esta sección haremos un listado de conceptos y de resultados (sin demostración) de teoría ergódica que utilizaremos en el resto del texto. El libro Jacob Sinai [11] es la referencia utilizada. Asumiremos conocimiento básico de teoría de la medida.

Sea  $(M, \mathcal{S}, \mu)$  un espacio de probabilidad con medida  $\mu$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{S}$  tal que  $\mu(M) = 1$ . Decimos que una transformación medible  $T : M \rightarrow M$  es un automorfismo si es biyectiva y para todo conjunto medible  $A$  tenemos que  $T^{-1}(A), T(A)$  también son medibles. Diremos que la medida  $\mu$  es  $T$ -invariante si  $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(T(A))$ .

**Definición 1.3.1.** Si tenemos una parametrización con  $\mathbb{R}$  de automorfismos  $T_t$  de  $M$  que verifique que  $T_s \circ T_t = T_{s+t}$  para todas  $t, s \in \mathbb{R}$  y que la función  $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  dada por  $(x, t) \rightarrow \phi(x, t) = T_t(x)$  es medible entonces diremos que  $T_t$  es un flujo medible.

Para un automorfismo  $T$  en  $M$ , dado un conjunto medible  $A$  y  $x \in A$  diremos que  $x$  es un punto recurrente respecto a  $T$  y  $A$  si existe un  $n > 0$  tal que  $T^n(x) \in A$ .

**Teorema 1.3.1. (Recurrencia de Poincaré).** [11] Si  $(M, \mathcal{S}, \mu)$  es un espacio de probabilidad y  $T$  es un automorfismo, entonces para todo conjunto medible  $A$  casi todo (respecto a  $\mu$ )  $x \in A$  es punto recurrente.

#### 1.3.1. Ergodicidad

Para ahorrar notación nos referiremos a  $(M, \mathcal{S}, \mu)$  como  $M$ , a  $T$  como un automorfismo y a  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  como un sistema dinámico medible.

Una función medible  $f$  en  $M$  es invariante respecto a  $T$  si para toda  $x \in M$

$$f(x) = f(T(x)) = f(T^{-1}(x)).$$

Es decir, es constante en órbitas de  $T$ . Podemos reescribir las relaciones anteriores para un flujo  $T_t$ .

Diremos que un conjunto  $A$  medible es invariante para  $T$  si la función indicador (o característica)  $\chi_A$  es invariante para  $T$ .

**Definición 1.3.2.** *El sistema dinámico medible  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es ergódico si todo conjunto invariante por  $T$  tiene medida cero o total.*

**Lema 1.3.1.** [11] *Si  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es un sistema dinámico ergódico y  $\mu(A) > 0$  entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n>0} T^{-n}(A)\right) = 1.$$

**Teorema 1.3.2. (Ergodicidad de Birkhoff).** [11] *Si  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es un sistema dinámico ergódico entonces para toda  $f$  función  $\mu$ -integrable se cumple que para casi todo  $x \in M$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^i(T(x)) = \int_M f d\mu.$$

**Proposición 1.3.1.** [11] *(Teorema de Krylov–Bogolyubov).*

*Si  $T : M \rightarrow M$  es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto en si mismo entonces existe  $\mu$  una medida  $T$ -invariante.*

**Proposición 1.3.2.** [11] *Si  $T : M \rightarrow M$  es un homeomorfismo de un compacto  $M$  entonces el conjunto de medidas invariantes es un conjunto convexo cuyos puntos extremos son medidas ergódicas mutuamente distintas.*

Ya vimos que los IET no son transformaciones continuas sin embargo tenemos que tienen a lo más una cantidad finita de medidas ergódicas:

**Lema 1.3.2.** [11] *Sea  $T : I \rightarrow I$  un IET sin puntos periódicos definido en  $k$  subintervalos, entonces  $T$  tiene a lo más  $k$  medidas ergódicas.*

**Definición 1.3.3.** *Decimos que un sistema dinámico  $T : M \rightarrow M$  es únicamente ergódico si existe una única medida  $\mu$  que es ergódica respecto a  $T$ .*

**Lema 1.3.3.** [11] *Si  $T : M \rightarrow M$  es un sistema dinámico entonces son equivalentes:*

1. *El sistema dinámico es únicamente ergódico con medida ergódica  $\mu$ .*
2. *Para toda función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  existe una función constante  $c_f$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = c_f^8.$$

*Donde la convergencia es uniforme.*

---

<sup>8</sup>Para casi toda  $x$

La importancia de la única ergodicidad se obtiene en virtud del siguiente resultado:

**Teorema 1.3.3. (Descomposición ergódica).**

Consideremos un sistema dinámico medible  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$ . Si  $\mu$  es una medida de probabilidad  $T$  invariante entonces existe una única medida de probabilidad en  $\mathcal{P}_T(M)$  el conjunto de las medidas de probabilidad  $T$ -invariantes cuyo soporte está en las medidas ergódicas tal que

$$\mu = \int_{\mathcal{P}_T(M)} \nu d\theta(\nu).$$

Por lo tanto si la transformación  $T$  es únicamente ergódica obtenemos que solo existe una única medida de probabilidad  $T$ -invariante.

### 1.3.2. Propiedad mezclante

**Definición 1.3.4.** Un sistema dinámico  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es mezclante si para todo par de conjuntos medibles  $A, B$  se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A) \mu(B).$$

Si un sistema es mezclante entonces es ergódico [11].

La condición mezclante en términos de funciones se expresa así:

**Lema 1.3.4.** [11] Si  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es mezclante si y solo si para todo par de funciones  $f, g \in L^2$  verifican que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f T^n g d\mu = \int_M f d\mu \int_M g d\mu.$$

En el texto *Ergodic Theory* de Sinai [11] se encuentra una demostración que los IET nunca tienen la condición de ser mezclantes. Por lo tanto otro cuestionamiento es la versión débil de la propiedad mezclante.

Decimos que un sistema dinámico  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  es débilmente mezclante cuando el sistema dinámico  $(M \times M, \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mu \times \mu, T \times T)$  es ergódico. Esta propiedad también implica ergodicidad en el sistema inicial, pero el inverso no es cierto.

Existe una caracterización útil para esta propiedad:

**Proposición 1.3.3.** [11] Sea  $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$  un sistema dinámico. Son equivalentes:

1. El sistema dinámico es débilmente mezclante.
2. Para todo par de funciones  $f, g \in L^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_M f T^k g d\mu - \int_M f d\mu \int_M g d\mu \right| = 0.$$

3. Para todo par de conjuntos medibles  $A, B$  se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Ávila y Leguil [3] demostraron utilizando argumentos probabilísticos y de exclusión que en efecto casi todos los IET (y casi todas las direcciones del flujo geodésico) son débilmente mezclantes, aunque no trataremos ese tema en este texto.

### 1.3.3. Minimalidad y recurrencia.

La minimalidad es una propiedad de sistemas dinámicos topológicos.

**Definición 1.3.5.** Si  $f : X \rightarrow X$  es un sistema dinámico topológico y  $A \subseteq X$  es un conjunto cerrado, no vacío e invariante bajo  $f$  que además es minimal en el sentido que no existe un subconjunto propio de  $A$  con las tres propiedades anteriores entonces decimos que  $A$  es un conjunto minimal.

**Definición 1.3.6.** Si  $f : X \rightarrow X$  es un sistema dinámico topológico de tal forma que  $X$  sea un conjunto minimal para  $f$  entonces decimos que el sistema dinámico es minimal.

Tenemos una condición equivalente para la minimalidad de un sistema dinámico:

**Lema 1.3.5.** [17] Sea  $(X, f)$  un sistema dinámico topológico y  $f$ , son equivalentes:

1.  $(X, f)$  es un sistema dinámico minimal.
2. Todas las órbitas de  $f$  son densas en  $X$ .

Como los únicos conjuntos cerrados invariantes en un sistema dinámico minimal son el total y el vacío, podemos preguntarnos si existe una equivalencia o relación con las transformaciones ergódicas. Oliveira y da Rocha, [42] dan un ejemplo de un difeomorfismo no ergódico pero si minimal.

Si tenemos un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  y  $T : X \rightarrow X$  una transformación ergódica respecto a la medida  $\mu$  entonces podemos construir dos nuevas transformaciones.

**Definición 1.3.7.** El cociclo de  $T$  asociado a una función integrable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$C_f : X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C_f(x, n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -C_f(-n, T^n(x)) & n < 0 \end{cases}$$

También podemos definir la extensión de un producto asimétrico definido por

$$T_f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$$

$$T_f(x, t) = (T(x), t + f(x)).$$

Sus iteraciones vienen dadas en términos del cociclo antes definido

$$T^n(x, t) = (T^n(x), t + C_f(x, n)).$$

Giles Atkinson (1976) [2] demostró que

**Lema 1.3.6.** *Sea  $T : X \rightarrow X$  una transformación ergódica y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces  $T_f$  es recurrente si y solo si*

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Este lema será utilizado para demostrar la recurrencia de una transformación en una superficie de traslación de tipo infinito en el Capítulo 3

### 1.3.4. Medidas de Haar

En el capítulo 3 vamos a estar trabajando con subgrupos de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Este último es un ejemplo típico de *grupos topológicos*. Estos tienen una medida *privilegiada*, conocida como la medida de Haar que es invariante bajo la acción del grupo. Más aún esta medida es única.

**Definición 1.3.8.** *Un grupo topológico es un grupo  $G$  de tal forma que lo dotamos con una topología tal que las funciones*

1.

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

2. Para todo  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} +_g : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow g + h \end{aligned}$$

son continuas.

**Definición 1.3.9.** *Sea  $G$  un grupo topológico localmente compacto. Decimos que  $\mathcal{G}$  es una medida de Haar para  $G$ , si esta es una medida en la  $\sigma$ -álgebra generada por la topología de  $G$  donde además para todo  $g \in G$  y para todo  $B$  en la  $\sigma$ -álgebra se verifica que  $\mathcal{G}(gA) = \mathcal{G}(A)$ . Es decir que la medida sea invariante por traslaciones.*

**Teorema 1.3.4.** [20] *Sea  $G$  un grupo topológico localmente compacto. Existe una medida de Haar  $\mathcal{G}$  para  $G$ , donde además si  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  son medidas de Haar para  $G$  entonces una es múltiplo escalar de la otra.*

## 1.4. Condición de Keane

Continuando con la discusión de M. Viana [49] vamos a definir la siguiente noción en los IET:

**Definición 1.4.1.** *Decimos que  $T = (\pi, \lambda)$  satisface la condición de Keane si para todos  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  tales que  $\pi_0(j) \neq 1$  se verifica que  $T^n(L_i) \neq L_j$  para toda  $n$ . Donde  $L_i$  el punto extremo izquierdo del subintervalo  $I_i$ . Esto lo podemos escribir de la forma*

$$L_i = \sum_{\pi_0(j) < \pi_0(i)} \lambda_j.$$

En la sección [1.2] comentamos que cuando las longitudes de los intervalos  $\pi_0^{-1}(k), \pi_1^{-1}(k)$  coinciden no es posible realizar la inducción de Rauzy-Veech. En esta sección vamos a demostrar que si un IET verifica la condición de Keane entonces este IET es minimal y siempre es realizable la inducción de Rauzy-Veech.

Recordemos que una permutación en un alfabeto de  $k$  letras es reducible si existe  $d \in \{1, \dots, k-1\}$  tal que

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, d\}) = \{1, \dots, d\}.$$

Si consideramos un IET con información combinatoria reducible, entonces para toda información métrica  $\lambda$  obtenemos una partición en dos subintervalos tales que

$$I_1 = \bigcup_{\pi_0(i) \leq d} I_i = \bigcup_{\pi_i(i) \leq d} I_i \quad y \quad I_2 = \bigcup_{\pi(i) > d} I_i = \bigcup_{\pi_1(i) > d} I_i.$$

Ambos son invariantes bajo el IET que  $(\pi, \lambda)$  inducen. De esta forma observamos que obtenemos dos nuevos IET con información combinatoria y métrica más simple. Es por eso que lo consideramos así en secciones anteriores. De ahora en adelante, también supondremos que los IET tienen información combinatoria irreducible.

Recordemos que lo que queremos es hallar una condición necesaria para que el proceso de Rauzy-Veech siempre sea definible. El primer acercamiento es imponiendo restricciones en la información métrica:

**Definición 1.4.2.** *Decimos que un  $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$  es racionalmente independiente si para todo  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^k \setminus \bar{0}$  se verifica que*

$$\sum_{i=1}^k n_i \lambda_i \neq 0.$$

**Teorema 1.4.1.** *Si  $\lambda$  es racionalmente independiente entonces para toda información combinatoria el proceso de Rauzy-Veech es siempre realizable.*

*Demostración.* Notemos que si  $\lambda$  es racionalmente independiente entonces en principio no existen dos subintervalos de la misma longitud, en particular implica que sin importar la información combinatoria, no puede ocurrir que  $\lambda_{\pi_0(k)} = \lambda_{\pi_1(k)}$ , entonces el proceso de

Rauzy-Veech es realizable.

Si  $\lambda$  es la información métrica correspondiente al proceso de Rauzy-Veech entonces  $\lambda$  también es racionalmente independiente. Si  $\lambda$  es racionalmente dependiente, entonces existe  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^k \setminus 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^k n_i \lambda_i = 0.$$

Como los  $\lambda_i$  vienen en términos de combinaciones enteras de los  $\lambda_i$  se seguiría que  $\lambda$  es racionalmente dependiente. De esta forma demostramos que es siempre realizable el proceso de Rauzy-Veech.  $\square$

Keane [32] provee el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.4.1.** *Consideremos  $T$  un IET en un intervalo cuyos subintervalos tienen longitudes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Si  $T$  está dado por*

$$x \rightarrow x + (\lambda_1 - \lambda_3) \bmod(\lambda_2 + \lambda_1).$$

*Se demuestra que para este IET  $\mathcal{R}^n$  siempre está definido si y solo si*

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Este ejemplo implica que pedir que un IET verifique la condición de independencia racional es mucho.

**Proposición 1.4.1.** [49] *Si  $T$  es un IET que satisface la condición de Keane entonces  $\mathcal{R}^n$  siempre está definido.*

*Demostración.* Si esos puntos extremos izquierdos verifican la condición de Keane entonces se sigue que  $I_{\pi_0(k)} \neq I_{\pi_1(k)}$  pues de otra forma esto implicaría que hay una órbita de estos puntos extremos izquierdos que coincide. Se concluye que  $\mathcal{R}$  está definido.

Observando que las órbitas de  $\mathcal{R}(T)$  están contenidas en las órbitas de  $T$  concluimos que la condición de Keane es invariante bajo la inducción de Rauzy-Veech. De esta forma siempre estará definida.  $\square$

El siguiente resultado nos indica que en el conjunto de IET que tienen información combinatoria irreducible, aquellos que satisfacen la condición de Keane tienen medida total.

**Proposición 1.4.2.** [49] *Si  $T = (\pi, \lambda)$  es un IET con información combinatoria irreducible e información métrica racionalmente independiente entonces  $T$  satisface la condición de Keane.*

*Demostración.* Supongamos por el contrario que existen dos índices  $i, j$  tal que  $\pi_0(j) \neq 1$  y existe una  $n$  tal que  $T^n(L_i) = L_j$ . Definamos unas  $\alpha_m$  de tal forma que  $0 \leq m \leq n$  y  $T^m(L_i) \in I_{\alpha_m}$ . Observemos que  $\alpha_0 = i$  y  $\alpha_n = j$ . Expresemos

$$L_i - L_j = \sum_{0 \leq m < n} \omega_{\alpha_m}.$$

Donde  $\omega$  es el vector de traslación asociado al IET.

Prestemos atención a la siguiente cantidad:

$$\sum_{\pi_0(s) < \pi_0(j)} \lambda_s - \sum_{\pi_0(s) < \pi_0(i)} \lambda_s = \sum_{0 \leq m \leq n} \left( \sum_{\pi_1(s) < \pi_1(\alpha_m)} - \sum_{\pi_0(s) < \pi_0(\alpha_m)} \right) = \sum_{s \in \mathcal{A}} \eta_s \lambda_s = 0.$$

Donde

$$\eta_s = |\{0 \leq m < n \mid \pi_1(\alpha_m) > \pi_1(s)\}| - |\{0 < m \leq n \mid \pi_0(\alpha_m) > \pi_0(s)\}|.$$

Sin embargo, por hipótesis  $\lambda$  es racionalmente independiente entonces  $\eta_s = 0$  para toda  $s$ .

Definamos

$$M = \max\{\pi_0(\alpha_m), 0 < m \leq n \text{ y } \pi_1(\alpha_m) \mid 0 \leq m < n\}.$$

En particular  $M > 1$  pues  $M \geq \pi_0(j)$ . En virtud que  $\pi$  es irreducible obtenemos que existe un  $\beta \in \mathcal{A}$  de tal forma que  $\pi_0(\beta) < M \leq \pi_1(\beta)$ . Por lo tanto, por cómo está definida  $M$  se sigue que  $\pi_1(\alpha_m) \leq \pi_1(\beta)$  para toda  $m < n$ . Por irreducibilidad obtenemos que  $\eta_\beta = 0$ , por lo tanto  $\pi_0(\alpha_j) \leq \pi_0(\beta) < M$  para toda  $0 < m \leq n$ . Reconstruyendo este mismo argumento para  $\pi_0$  implica que  $\pi_1(\alpha_m) < M$  para toda  $m$ , lo cual contradice la definición de  $M$ . Concluimos que  $T$  satisface la condición de Keane.  $\square$

El segundo objetivo de esta sección es demostrar que:

**Teorema 1.4.2.** [49] *Si  $T$  es un IET con información combinatoria irreducible que satisface la condición de Keane entonces  $T$  es minimal.*

Para esto veamos los siguientes resultados técnicos.

Sea  $T$  un IET definido en un intervalo  $I$  y sea  $I_\alpha$  algún subintervalo que  $T$  induce en  $I$ .

**Lema 1.4.1.** [49] *Sea  $J = [a, b] \subseteq I_\alpha$ . Existe una partición de  $J$  por subintervalos  $J_j$  con  $1 \leq j \leq m$  con  $m \leq k + 2$  de tal forma que existen enteros mayores que 1:  $n_1, \dots, n_m$  que verifican*

1.  $T(J_j) \cap J = \emptyset$  para toda  $0 < i < n_j$  y  $1 \leq j \leq m$ .
2. Cada  $T^{n_j}$  restringida a  $J_j$  es una traslación.

3. Los intervalos  $T^{n_j}(J_j)$  son disjuntos a pares.

*Demostración.* Definamos un conjunto  $A$  como

$$A = (\{a, b\} \cup (\bigcup_{\gamma \in A} L_\gamma)) \setminus L_k.$$

Observemos que  $|A| \leq k + 1$ . Definamos otro conjunto  $B \subseteq J$  dado por

$$B = \{x \in J \mid \text{existe } l \geq 1 \mid T^i(x) \notin J, 0 < i < l \mid T^l(x) \in A\}.$$

Sea  $f : B \rightarrow A$  de tal forma que  $f(x) = T^l(x)$ . Esta función es inyectiva pues  $T$  es inyectiva, además porque no hay interacciones en  $J$  que precedan a  $l$ . Esto en particular implica que  $|B| \leq |A|$ .

Consideremos una partición de  $J$  delimitada por los puntos de  $B$ , es decir, por subintervalos cuyos puntos frontera sean los puntos de  $B$ . Por las observaciones que hicimos acerca de las cardinalidades se sigue que esta partición tiene a lo más  $k + 2$  elementos.

Sea  $n_j$  el entero mínimo tal que  $T^{n_j}(J_j) \cap J \neq \emptyset$ . Podemos asegurar la existencia de ese entero por el teorema de recurrencia de Poincaré que mencionamos en la sección de teoría ergódica. Por construcción del conjunto  $B$  tenemos que  $T^{n_j}$  restringido a  $J_j$  es una traslación, y el intervalo que es imagen de esta restricción está contenido en  $J$ . Por definición estos intervalos deben ser disjuntos dos a dos.  $\square$

**Corolario 1.4.1.** [49] Sea  $T$  un IET y  $J$  un subintervalo de  $I$  con las condiciones del Lema 1.4.1 entonces tenemos que el conjunto

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(J)$$

es una unión finita de intervalos.

*Demostración.* Por el Lema 1.4.1 tenemos que  $T^{n_j}$  restringido a  $J_j$  es una traslación cuyo intervalo imagen está contenida en  $J$  que además son disjuntos dos a dos, por esta razón

$$\sum_{j=1}^m \int_{T^{n_j}(J_j)} dx = \sum_{j=1}^m \int_{J_j} dx = \int_J dx.$$

Además como  $T^i(J_j) \cap J = \emptyset$  para  $0 < i < n_j$  entonces se sigue que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(J) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^{n_j-1} T^i(J_j).$$

Entonces esa unión es la unión finita de intervalos.  $\square$

Veamos que la condición de Keane nos provee de una propiedad particular en la dinámica del IET.

**Proposición 1.4.3.** [49] *Sea  $T$  un IET que satisface la condición de Keane y además su permutación  $\pi$  es irreducible, entonces  $T$  no tiene puntos periódicos.*

*Demostración.* Si por el contrario suponemos que  $T$  tiene un punto periódico tal que  $T^m(z) = z$  podemos construir unos  $\beta_j \in \mathcal{A}$  de tal forma que  $T^j(z) \in I_{\beta_j}$ . Si  $J$  es el conjunto de puntos en  $I$  tales que  $T^j(x) \in I_{\beta_j}$  entonces por la discusión del principio sobre los cilindros que inducen los IET obtenemos que  $J$  es de hecho un intervalo del IET dado por  $T^m$ , por lo que  $T^m$  restringido a  $J$  es una traslación con un punto fijo ( $T^m(z) = z$ ) entonces  $T^m$  restringido a  $J$  es la identidad. Por construcción se sigue que existe una  $\alpha \in \mathcal{A}$  y  $k \leq m$  de tal forma que  $T^k(L(J)) = L_\alpha$ . De esta forma obtenemos que  $T^{m-k}(L_\alpha) = L_\alpha$ . Si  $\pi_0(\alpha) > 1$  entonces  $T$  no satisface la condición de Keane y tenemos una contradicción. Si  $\pi_0(\alpha) = 1$  entonces por irreducibilidad de  $\pi$  existe una  $\beta \neq \alpha$  tal que  $T(L_\beta) = 0 = L_\alpha$ . Por lo tanto  $T^{m+1}(L_\alpha) = L_\beta$ . Por lo tanto  $T$  no satisface la condición de Keane y obtenemos una contradicción. Se sigue que  $T$  no tiene puntos periódicos.  $\square$

*Demostración.* [1.4.2] Procederemos por contradicción asumiendo que existe un  $z \in I$  de tal forma que su órbita no es densa. Es decir, existe un subintervalo  $J = [a, b)$  tal que la cerradura de la órbita de  $z$  no interseca a  $J$ . Por el Corolario [1.4.1] tenemos que la unión de las iteraciones de  $J$  bajo  $T$  se puede expresar como una unión finita de intervalos. Notemos que además es totalmente invariante bajo  $T$ . Definamos  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  tal que

$$\mathcal{B} = \{\alpha \mid I_\alpha \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(J)\}.$$

Si dicha unión fuera de la forma  $[0, c)$  para alguna  $c$  entonces podemos notar que  $\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, \dots, m\}$  y como además estamos considerando un conjunto irreducible entonces  $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1, \dots, m\}$ . Por lo tanto

$$\pi_1(\pi_0(\{1, \dots, m\})) = \{1, \dots, m\}.$$

Además  $m < k$  pues existe una órbita cuya cerradura no interseca  $J$ . Si  $k > 0$  entonces automáticamente obtenemos una contradicción con la irreducibilidad de  $\pi$ . Entonces  $k = 0$ , lo cual implicaría que esa unión está contenida en  $I_1$ , y como es invariante entonces su imagen está en  $I_1$  lo cual es una contradicción con la irreducibilidad de  $\pi$ . Por lo tanto concluimos que la unión de iteraciones de  $J$  bajo  $T$  no puede ser de la forma  $[0, c)$ .

Consideremos una componente de esa unión que sea de la forma  $[d, c)$  con  $d > 0$ . Si para toda  $n \geq 0$  se verifica que  $T^n(d) \neq L_\alpha$  para toda  $\alpha \in \mathcal{A}$  entonces  $T^n(d)$  está siempre en la frontera de alguna componente de la unión de las iteraciones de  $J$ . Por el Corolario [1.4.1] se sigue que solo hay una cantidad finita de estas componentes, por lo tanto  $d$  es un punto periódico de  $T$ , lo cual es una contradicción a la Proposición [1.4.3]. De forma análoga concluimos que si para toda  $m \leq 0$  y toda  $\beta \in \mathcal{A}$  se verifica que  $T^m(d) \neq T(L_\beta)$  entonces  $d$  sería un punto periódico. Por lo tanto existen  $m \leq 0 \leq n$  y  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tales que

$$T^m(d) = T(L_\beta) \text{ y } T^n(d) = L_\alpha.$$

Si  $L_\alpha > 0$  entonces tomando  $k = n - m + 1$  se cumple que  $T^k(L_\beta) = L_\alpha$  lo cual contradice la condición de Keane [1.4.1]. Por otro lado si  $L_\alpha = 0$  entonces  $n > 0$  pues  $d > 0$ . Por

irreducibilidad de  $\pi$  tenemos que existe un  $\delta \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_1(\delta) > 1$  que además  $T(L_\delta) = L_\alpha$ , en particular  $L_\delta > 0$ . Entonces reemplazando  $n$  con  $n - 1$  y  $\alpha$  con  $\delta$  se verifica que

$$T^{n-m}(L_\beta) = L_\delta.$$

Lo cual es una contradicción con la condición de Keane [1.4.1](#). Por lo tanto  $T$  es minimal.  $\square$

Con este podemos notar que la condición de Keane es necesaria para la minimalidad del IET, sin embargo no es suficiente como podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.4.2.** [\[32\]](#) Consideremos el IET con información combinatoria de la forma

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

Donde  $\lambda_A = \lambda_C$  y  $\lambda_D = \lambda_B$  y

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\lambda_C}{\lambda_D} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Se verifica que  $T$  es minimal pero no verifica la condición de Keane [1.4.1](#).

La mayor importancia de la condición de Keane para el estudio de los IET radica en que es una condición necesaria y suficiente para que la condición de Rauzy-Veech esté bien definida. Por el momento solo hemos probado una dirección de esta equivalencia.

**Proposición 1.4.4.** [\[49\]](#) Sea  $T = (\pi, \lambda)$  un IET irreducible de tal forma que la inducción de Rauzy-Veech esté bien definida, entonces  $T$  satisface la condición de Keane [1.4.1](#).

*Demostración.* Supongamos por el contrario que existen  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  y  $m \geq 1$  de tal forma que

$$T^{m-1}(L_\beta) = L_\alpha.$$

Como  $\pi$  es irreducible entonces  $L_\alpha > 0$ . Además para toda  $n$  donde  $L_{\pi_1(\alpha)}$  y  $L_\beta$  estén en el dominio  $I^n$  de  $\mathcal{R}^n$  se verifica que

$$L_{\pi_1(\alpha)} = L_{\pi_1^n(\alpha)}, \quad y \quad L_\beta = L_\beta^n.$$

Este  $n$  no tiende a infinito, pues hemos demostrado que la longitud del intervalo  $I^n$  tiende a cero siempre y cuando la inducción de Rauzy-Veech sea definible. Entonces consideremos un  $n$  máximo con esa condición.

En virtud que  $\mathcal{R}^n$  es el mapeo de primer retorno de  $T$  en  $I^n$  entonces existe una  $k \leq m - 1$  de tal forma que

$$(\mathcal{R}^n)^k(L_{\pi_1(\alpha)}) = L_\beta.$$

Además por maximalidad de  $n$  se sigue que  $I_\beta$  o  $\mathcal{R}^n(I_\alpha^n)$  representan los últimos intervalos de la partición de  $I^n$  inducida por  $\pi^n$ . Si  $k = 0$  entonces para toda  $l \leq n$  se verifica que

$$\mathcal{R}^l(I_\alpha^l) = I_\beta^l.$$

De tal forma que los últimos intervalos de  $\pi_1^n$  y  $\pi_0^n$  tienen la misma longitud de la forma que  $\mathcal{R}^{n+1}$  no está definida. Lo cual es una contradicción.

Si tenemos que  $L_\beta < L_{\pi_1(\alpha)}$  entonces se verifica que

$$\mathcal{R}^{n+1}(L_\alpha^{n+1}) = (\mathcal{R}^n)^2(L_\alpha^n) = (\mathcal{R}^n)(L_{\pi_1(\alpha)}) \text{ y } L_\beta^{n+1} = L_\beta^n = L_\beta.$$

Como existe una  $k \leq m - 1$  que verifica la condición antes mencionada entonces se sigue que

$$(\mathcal{R}^n)^{k-1}(L_{\pi_1^{n+1}(\alpha)}) = (\mathcal{R}^n)^k(L_\alpha) = L_\beta = L_\beta^{n+1}.$$

Entonces como ambos puntos pertenecen a  $I^{n+1}$  y  $\mathcal{R}^{n+1}$  es el mapeo de primer retorno de  $\mathcal{R}^n$  en  $I^{n+1}$  entonces

$$(\mathcal{R}^{n+1})^{l-1}(L_{\pi_1^{n+1}(\alpha)}) = L_\beta^{n+1}.$$

Iterando este proceso podemos llegar al caso ya mencionado cuando  $k = 0$  donde obtenemos una contradicción con las hipótesis.

Por otro lado si  $L_\beta > L_{\pi_1(\alpha)}$  entonces

$$L_{\pi_1^{n+1}(\alpha)}^{n+1} = L_{\pi_1^n(\alpha)}^n = L_{\pi_1(\alpha)} \text{ y } L_\beta^{n+1} = (\mathcal{R}^n)^{-1}(L_\beta^n) = (\mathcal{R}^n)^{-1}(L_\beta).$$

Por lo tanto

$$(\mathcal{R}^n)^{k-1}(L_{\pi_1^{n+1}(\alpha)}^{n+1}) = (\mathcal{R}^n)^{k-1}(L_{\pi_1(\alpha)}) = (\mathcal{R}^n)^{-1}(L_\beta) = L_\beta^{n+1}.$$

Entonces por definición de  $\mathcal{R}^{n+1}$  aseguramos que existe una  $l \leq k < m$  de tal forma que

$$(\mathcal{R}^{n+1})^{l-1}(L_{\pi_0^{n+1}(\alpha)}) = L_\beta^{n+1}.$$

Iterando este proceso podemos llegar al caso comentado cuando  $k = 0$  con el cual obtenemos una contradicción con la hipótesis. En cualquier caso, vemos que obtenemos una contradicción y esto prueba el resultado deseado.  $\square$

# Capítulo 2

## Única ergodicidad en el caso finito

### 2.1. Presentación del desarrollo

**Teorema 2.1.1.** (Veech, Masur) [46] *Casi todos los IET son únicamente ergódicos respecto a la medida de Lebesgue.*

El teorema 2.1.1 inicialmente se le conocía como la *conjetura de Keane* hasta que fue demostrado independientemente por W. Veech y Masur en los 80's.

Existen distintas maneras de demostrar este teorema, en este texto seguiremos una demostración que expone Delecroix [13] utilizando tres teoremas que permiten apreciar la estrecha relación que existe entre los IET y las superficies de traslación.

En primer lugar vamos a demostrar un teorema que es una extensión del teorema 2.1.1

**Teorema 2.1.2.** (Kerckhoff-Masur-Smillie) [34]. *Sea  $S$  una superficie de traslación entonces para casi toda  $\theta$  tenemos que el flujo geodésico en dirección  $\theta$  es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue.*

Por la discusión que hemos tenido sobre cómo pasar del flujo geodésico a un IET y viceversa notamos que el teorema de Keane es un caso particular de este teorema.

En este capítulo enunciaremos cuatro teoremas de gran utilidad para demostrar el teorema de Kerckhoff-Masur-Smillie. Iniciaremos la discusión de la única ergodicidad en el caso unidimensional con un teorema que se le atribuye a M. Boshernitzan [8]. Definimos una cantidad  $\epsilon_n$  que se relaciona con las conexiones silla de menor longitud y probamos que una condición de no convergencia de estas cantidades implica la única ergodicidad.

**Teorema 2.1.3.** (Boshernitzan [8]).

*Sea  $T$  un IET de tal forma que  $n\epsilon_n(T)$  no converge a cero, entonces  $T$  es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue.*

Seguiremos la demostración que realiza W. Veech [47], pues con su tratamiento, podemos apreciar el hecho que el teorema 2.1.3 es la versión en IET del teorema 2.1.4

En la primer parte del capítulo demostraremos que la condición de Boshernitzan implica ergodicidad respecto a la medida de Lebesgue, posteriormente nos apoyaremos en dos resultados para demostrar la única ergodicidad; el primero de ellos es un teorema de Masur [53] el cual relaciona divergencia en el espacio móduli y la única ergodicidad del flujo geodésico:

**Teorema 2.1.4.** (*Criterio de divergencia de Masur*).

*Si el flujo vertical de una superficie de traslación  $(X, \omega)$  no es únicamente ergódico entonces la proyección de la acción del flujo geodésico en el móduli  $\mathcal{M}_g$  diverge.*

El segundo resultado son las identidades de Vorobets. En su versión original se establece una igualdad entre tres cantidades sujetas a una superficie de traslación  $S$  y su deformación por la acción del flujo geodésico; la primera respecto al área de un rectángulo que una conexión silla genera  $a(S)$ , la segunda respecto a la conexión silla de menor longitud  $S(S)$  y la tercera depende de las cantidades  $\epsilon_n$  definidas para el teorema de Boshernitzan. En el trabajo de P. Hubert [27] se establece una cuarta igualdad con una cantidad  $L(T)$  la cual también depende el IET en cuestión. La única ergodicidad en la condición de Boshernitzan se sigue del teorema de divergencia de Masur y de la igualdad entre  $L(T)$  y  $\epsilon(T)$ .

Las primeras tres igualdades son las que utilizaremos para demostrar el Teorema 2.1.2.

**Teorema 2.1.5.** (*Identidades de Vorobets [27]*)

*Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación. Tenemos las siguientes igualdades:*

$$\frac{S^2(S)}{2} = a(S) = \epsilon(T) = L(T).$$

Por último para demostrar el Teorema 2.1.2 necesitamos un teorema que se le atribuye a Masur y a A. Eskin [16]. Dicho teorema está enunciado para objetos conocidos como diferenciales cuadráticos. Sin pérdida de generalidad podemos seguir el procedimiento de Masur para demostrarlo en el caso de los diferenciales abelianos. Comentaremos en la conclusión de este trabajo un poco sobre cómo es que los diferenciales cuadráticos son generalizaciones de los diferenciales abelianos<sup>1</sup>. Este teorema nos dice que en una superficie de traslación la cantidad de conexiones silla de longitud acotada está uniformemente acotada. Más aún, la cota depende del cuadrado de la longitud máxima de esas conexiones silla.

**Teorema 2.1.6.** (*Masur, Eskin [16]*) *Sea  $S$  una superficie de Riemann y  $\mathcal{F}$  una foliación obtenida por un diferencial cuadrático, existe una constante  $c > 0$  tal que si  $V(S, R)$  es la cantidad de conexiones silla de longitud a lo más  $R$  entonces*

$$|V(S, R)| \leq cR^2.$$

La demostración del teorema 2.1.2 se realiza al demostrar que el conjunto de ángulos  $\theta$  tales que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{Sys}(g_{tr_\theta} S) > 0$$

<sup>1</sup>Un tratamiento profundo entre los diferenciales abelianos y diferenciales cuadráticos se puede encontrar en [17]

es de medida total. Utilizando las identidades de Vorobets concluimos que el conjunto de ángulos donde el flujo geodésico es únicamente ergódico es de medida total [13].

## 2.2. Criterios de divergencia y única ergodicidad

### 2.2.1. Condición de Boshernitzan

En esta sección demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.1.** [47] *Si  $T$  es un IET tal que  $n\varepsilon_n(T)$  no converja a cero entonces es ergódico respecto a la medida de Lebesgue.*

El cual representa el primer paso para demostrar el Teorema 2.1.3. Siguiendo a Veech [47] utilizaremos dos lemas técnicos.

Recordemos de la discusión de la Sección 1.2 que las operaciones definidas en los IET son invariantes bajo escalamientos. En esta parte del texto vamos a asumir que los IET son minimales y además están definidos en el intervalo unitario.

Los IET inducen una partición en el intervalo; en este momento vamos a denotar como  $0 = \alpha_0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} < \alpha_k = 1$ . Definamos el conjunto

$$A_1 = \{\alpha_i \mid 0 < i < k\},$$

y los conjuntos

$$A_n = \bigcup_{j=0}^n T^{-j}(A_1).$$

Estos últimos corresponden a los puntos de singularidad de  $T, \dots, T^n$  sin considerar los extremos de los subintervalos. Vamos a definir la cantidad

$$\varepsilon_n(T) = \min\{|p_i - p_j| \mid p_i, p_j \in A_n\}.$$

El resultado principal nos dice que

**Teorema 2.2.2. (Boshernitzan)** [8].

*Si  $T$  es un IET minimal que no es únicamente ergódico entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \varepsilon_n(T) = 0.$$

Boshernitzan utiliza este teorema para dar una prueba alternativa del teorema de Keane 2.1.1 a la de Veech [47].

Veamos que si definimos  $A_n^* = A_n(T) \cup T^{-1}(A_n)$ , el intervalo de menor longitud que define es exactamente de longitud  $\varepsilon_{2n}$ , y si  $J$  es un intervalo en  $A_n^*$  entonces  $J, T(J), \dots, T^{n-1}(J)$  son intervalos disjuntos.

Recordemos que si  $T$  es una rotación entonces es únicamente ergódica si y solo si el ángulo es irracional. Si  $A_1$  está en una misma órbita entonces tenemos que el IET en cuestión es una rotación, si añadimos la hipótesis de que el IET es minimal entonces automáticamente es irracional la rotación y por lo tanto es únicamente ergódica. Para el siguiente lema vamos a asumir que  $T$  verifica que  $A_1$  no está en una misma órbita de  $T$  [47].

**Lema 2.2.1.** [47] *Si  $J$  es un intervalo cuyos extremos sean puntos de  $A_n$  y  $J_1$  es un subintervalo de  $J$  cuya medida sea al menos  $\varepsilon_{2n}$  entonces existe un subintervalo de  $J_1$ , a saber,  $L$  de tal forma que  $L, T(L), \dots, T^{n-1}(L)$  y  $J_1$  son disjuntos.*

*Demostración.* Si  $J_1$  es un intervalo que verifica las condiciones del enunciado y  $r(x)$  es el mapeo del primer retorno de  $T$  en  $J_1$  y para toda  $x \in J_1$  se cumple que si  $r(x) = T^{n(x)} \in J_1$  es tal que  $n(x) \geq n$  entonces el intervalo en cuestión es  $J_1$  y por la observación realizada precedente al lema y como  $T^j$  es lineal y no llega a alcanzar a  $J_1$  de nuevo entonces los intervalos en cuestión son disjuntos.

Supongamos entonces que existen  $x \in J_1$  tales que  $n(x) < n$ . Hagamos algunas observaciones:  $n(x)$  no puede ser constante en todo  $J_1$ , pues en ese caso  $T$  no podría ser minimal, entonces existe al menos un intervalo propio donde  $n(x) < n$  y esa  $n(x)$  es constante. Este subintervalo debe contener un punto extremo de  $J_1$  por continuidad y por linealidad de  $T^j$ . Por lo tanto pueden ser a lo más dos intervalos. Si solo es un intervalo, a saber  $I_1$  entonces vemos que si  $r(x) = T^j$  entonces  $T^j = Id \pm c$  donde el signo depende en qué parte se encuentre  $I_1$ . Entonces el intervalo en cuestión puede ser  $I_1$  si es que  $|c| < \varepsilon_{2n}$  y la afirmación se cumple por las observaciones de antes del lema, y si tomamos  $L$  como el complemento de  $I_1$  en  $J$  se cumple pues  $T^k$  es lineal y en ese recorrido nunca regresan a  $J_1$ .

Sean  $I_1, I_2$  dos intervalos donde  $n(x)$  es constante. Por minimalidad de  $T$  se sigue que para todo  $z \in A_1$  existe un  $x_z \in J_1$  donde la órbita de  $x_z$  contiene a  $z$ . Como por hipótesis  $A_1$  no está en una misma órbita, al considerar  $z$  que no esté en la órbita del punto extremo izquierdo de  $J_1$  se cumple que  $n(x) \geq n$  por linealidad de  $T^j$ . Esto implica que  $I_1 \cup I_2 \neq J_1$ . Entonces nos podemos fijar que

$$J \cap (T^{j_1}(J) \cup T^{j_2}(J))^c \subseteq J_1 \cap (T^{j_1}(I_1) \cup T^{j_2}(I_2))^c.$$

Donde  $j_i$  es tal que  $n(x) = j_i$  implica que  $x \in I_i$ . Vemos que el primer intervalo tiene longitud de al menos  $\varepsilon_{2n}$  entonces por construcción verifica las condiciones deseadas.  $\square$

En particular si  $J_1$  verifica las condiciones establecidas en el enunciado del lema entonces

$\mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(J_1)) \geq \mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(L)) \geq n\varepsilon_{2n}$ . (2.2.1) Para enunciar el siguiente lema precisamos definir el conjunto

$$S(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon_{2n}(T) > \epsilon\}$$

el cual depende de  $\epsilon > 0$ .

Sea  $A$  un conjunto medible y  $n$  un natural. Si  $\mathcal{N}$  es el conjunto de intervalos  $J$  cuyos extremos estén en  $A_n$  definimos una función

$$E_n : \mathcal{N} \rightarrow \{A, A^c\}$$

a la cual llamaremos elección.

El siguiente lema técnico es de utilidad en la demostración del Teorema 2.2.1 pues nos permitirá probar que un conjunto  $A$  que es  $T$ -invariante, él mismo o su complemento  $A^c$  está formado por la unión de intervalos.

**Lema 2.2.2.** [47] *Sea  $T$  un IET y sea  $A$  un conjunto medible invariante bajo  $T$ . Entonces para toda  $\epsilon > 0$  y toda  $\delta > 0$  existe un natural  $q$  que depende de  $\epsilon, \delta, A$  donde para  $q \leq n \in S(\epsilon)$  existe una elección  $E_n$  tal que si  $J_1$  es un subintervalo de  $J$  que verifica que  $\mu(J_1) \geq \epsilon_{2n}$  entonces*

$$\mu(J_1 \cap E_n(J)) \geq (1 - \delta)\mu(J_1).$$

*Demostración.* Queremos probar el resultado para  $\epsilon$  y  $\delta$  arbitrariamente pequeñas entonces vamos a suponer que  $\delta < 1/2$  y  $\delta < \epsilon$ .

Notemos que tanto  $\mu(J_1 \cap E)$  como  $\mu(J_1)$  dependen y son continuas respecto a los extremos de  $J_1$ , entonces en caso de ser posible encontrar una elección que satisfaga la desigualdad deseada, esta dependerá del intervalo  $J$ .

Veamos que podemos hallar una constante  $C > 0$ , un conjunto medible  $K$  tal que  $\mu(K) > 1 - \delta$  de tal forma que si para  $x \in K$  podemos hallar una elección  $E(x) = A$  ó  $A^c$  de tal forma que satisfaga la desigualdad buscada cuando  $\mu(J_1) < C$  y  $x \in J_1$ . Para ver que esto es cierto tenemos que considerar tres casos, cuando  $\mu(A) = 0$ , entonces la elección es siempre el complemento, cuando  $\mu(A) = 1$  entonces la elección es el mismo  $A$ , y si  $\mu(A) \in (0, 1)$  entonces existen intervalos de las particiones  $A_n$  cuyas intersecciones con  $A$  son de medida positiva e intervalos cuyas intersecciones con  $A^c$  son de medida positiva. Entonces el conjunto buscado  $K$  puede ser la intersección de estos intervalos con  $A$  o con  $A^c$  dependiendo de quién tenga medida mayor y fijándonos que no disminuya de  $1 - \delta$ , y la constante  $C$  es la longitud de los intervalos en cuestión.

Notemos que si para una  $\epsilon > 0$  el conjunto  $S(\epsilon)$  es finito entonces la afirmación del lema se sigue trivialmente, entonces supongamos que es infinito.

Teniendo esa elección puntual en mente y en virtud de que  $T$  es minimal podemos tomar una  $q$  lo suficientemente grande de tal forma que  $\epsilon_n < \gamma$  y  $q \leq n \in S(\epsilon)$ . Si  $J_1$  es un subintervalo de  $J$  tal que  $\mu(J_1) \geq \epsilon_{2n}$  entonces como  $\delta < \epsilon$ , la elección de  $K$  implica que existe un  $j$  tal que  $T^j(J_1) \cap K \neq \emptyset$ . Pues de otra forma tendríamos que

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(J_1)\right) \geq n\epsilon_{2n} > \epsilon > \delta.$$

Por lo tanto  $\mu(K) < 1 - \delta$  lo cual es una contradicción con [2.2.1](#). Entonces vamos a tomar un  $x \in T^j(J_1) \cap K$  y vamos a aplicar la elección de  $E$ . Como  $A$  y  $A^c$  son invariantes bajo  $T$  entonces afirmamos que

$$\mu(E \cap J_1) = \mu(E \cap T^j(J_1)) \geq (1 - \delta)\mu(T^j(J_1)) = (1 - \delta)\mu(J_1).$$

Que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

*Demostración.* Teorema [2.2.1](#). Observemos que una condición equivalente a que  $n\varepsilon_n(T)$  no converja a cero es que para toda  $\epsilon > 0$  el conjunto  $S(\epsilon)$  sea infinito. Entonces vamos a utilizar esta versión para conectar con los lemas y demostrar el teorema.

Sea  $A$  medible y  $T$  invariante. Como  $T$  es minimal entonces para toda  $\alpha_j \in A_1$  existe un natural  $r_j$  de tal forma que  $T^{-r_j}(\alpha_j) \cap D_1 = \emptyset$ . Esto porque no pueden existir órbitas periódicas. Vamos a tomarnos uno de esos elementos de  $\alpha_j$  y construyamos un intervalo

$$J = (T^{-n}(\alpha_j) - \frac{\varepsilon_n}{4}, T^{-n}(\alpha_j) + \frac{\varepsilon_n}{4}).$$

Si  $n$  es lo suficientemente grande y  $n \in S(\epsilon)$  entonces tendremos que los intervalos  $T^j(J)$  con  $0 \leq j < n - r_j$  son disjuntos y además

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-r_j} T^k(J)\right) \geq \frac{\epsilon}{4}.$$

Si consideramos una  $\delta < \frac{\epsilon}{4}$  entonces por el Lema [2.2.2](#) tenemos que existe una elección de  $E$  entre  $A$  y  $A^c$  de tal forma que

$$\mu(T^j(J) \cap E) \geq (1 - \delta)\mu(T^j(J)).$$

Para toda  $0 \leq j < n - r_j$ . Fijemos un  $n - s_j$  y consideremos dos intervalos consecutivos  $I_1$  y  $I_2$  de  $A_n$  de tal forma que su punto extremo derecho e izquierdo respectivamente sea  $T^i T^{-n}(\alpha_j)$ . Observemos que

$$\mu(T^j(J) \cap E) \geq (1 - \delta)\mu(T^j(J)).$$

Entonces para  $I_1 \cup I_2$  la elección es constante, por lo tanto para estos intervalos si hacemos que  $\delta \rightarrow 0$  vemos que  $A$  o  $A^c$  módulo  $\mu$  es la unión de intervalos de  $A_k$  donde  $k = \max\{r_j\}$ . Como  $A$  y  $A^c$  son  $T$ -invariantes,  $T$  es minimal, estos están formados por intervalos entonces se sigue que  $\mu(A) = 0$  ó  $\mu(A) = 1$ , de tal forma que  $T$  es  $\mu$ -ergódico.  $\square$

## 2.2.2. Condición de divergencia de Masur

Vamos a enunciar un resultado importante que sigue la misma filosofía que la condición de Boshernitzan, y que nos permite apreciar la intuición detrás de ella, este resultado es de Masur [\[40\]](#) y se le conoce como su condición de divergencia.

El teorema de Mahler [16] nos dice que  $\mathcal{M}_g$  (con  $g > 1$ ) no es compacto; una forma de ver esto es tomar sucesiones de superficies donde la longitud de unas curvas marcadas tienda a 0, este límite no puede converger a una superficie compacta. Más aún, si tenemos una sucesión de superficies  $X_n$  y esta diverge, es decir, para todo compacto en  $\mathcal{M}_g$  la sucesión eventualmente no está contenida en el compacto entonces existe una sucesión de curvas  $\gamma_n$  cuyas longitudes hiperbólicas tienden a 0.

Otra forma de pensar la falta de compacidad en  $\mathcal{M}_g$  es recordando la discusión de la sección 1.1.4 donde utilizando las coordenadas de Frenkel Nielsen demostramos que  $\mathcal{T}_g$  es homeomorfo a  $\mathbf{R}^{6g-6}$ . En [17] se demuestra que el  $\text{MCG}(S)$  es discreto, por lo tanto  $\mathcal{M}_g$  no puede ser compacto.

Vamos a probar que si el flujo vertical de una superficie de traslación no es únicamente ergódico entonces existe una sucesión de curvas  $\gamma_{t_n}$  tales que en la métrica  $g_{t_n}(X)$  tienden a cero, dicho de otra forma:

*Demostración. (Criterio de divergencia de Masur)*

Sea  $\phi_t$  el flujo vertical. Si este no es únicamente ergódico entonces por el teorema de descomposición ergódica, las medidas de probabilidad de la superficie forman un conjunto convexo de dimensión finita cuyos extremos son medidas mutuamente singulares ergódicas, vamos a asumir que solo hay dos de ellas  $\lambda_1, \lambda_2$ . El argumento puede ser extendido a una cantidad mayor que dos.

Observemos que las  $\lambda_i$  son invariantes bajo el flujo vertical, entonces se pueden descomponer de la forma  $\mu_i \times dy$  donde  $\mu_i$  son medidas ergódicas en un intervalo transversal a la superficie  $I$  mutuamente singulares, lo que quiere decir que las medidas no coinciden en los elementos que generan la  $\sigma$ -álgebra. Además si  $x_1$  y  $x_2$  son puntos genéricos para  $\mu_1$  y  $\mu_2$  respectivamente entonces por el teorema de Birkhoff tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_I(r^n(x_1)) \neq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \chi_I(r^m(x_2)).$$

Donde  $r$  es el mapeo de primer retorno de  $\phi_t$  a un subintervalo  $J \subseteq I$ . Si existe una sucesión de tiempos  $t_n \rightarrow \infty$  de tal forma que  $X_{t_n} = g_{t_n}(X) \rightarrow X_0 \in \mathcal{M}_g$  entonces vamos a considerar unos  $x_i$  genéricos y vamos a fijarnos en su desarrollo bajo el flujo geodésico, es decir, vamos a fijarnos en los puntos  $g_{t_n}(x_i)$  que viven en distintas superficies de Riemann. Como  $X_0$  es compacta y el conjunto de puntos genéricos es de medida total, entonces podemos considerar puntos genéricos  $x_i$  de tal forma que  $g_{t_n}(x_i) \rightarrow y_i$  y además que  $y_1$  y  $y_2$  se encuentren en una misma recta horizontal  $h$  en  $X_0$ . De esta forma podemos considerar dos segmentos de recta verticales que pasen por  $y_1$  y  $y_2$ . A estos segmentos les llamaremos  $V_1$  y  $V_2$ . Si estos son lo suficientemente pequeños entonces el rectángulo euclideo que se forma con estas rectas y  $h$  no contiene ninguna singularidad, entonces podemos concluir que si consideramos una foliación horizontal de  $X_0$  entonces la cantidad de hojas que intersecan a  $V_1$  difiere a lo más de una de las que intersecan a  $V_2$ . Por convergencia podemos considerar rectas verticales  $V_i^n$  en  $g_{t_n}(X)$  de tal forma que  $V_i^n \rightarrow V_i$ . Entonces si denotamos por  $K_{i,n}$

a la cantidad de hojas de la foliación horizontal de  $g_{t_n}(X)$  que intersecan a  $V_i^n$  entonces

$$\frac{K_{1,n}}{K_{2,n}} \rightarrow 1.$$

En particular esto implica que si hacemos pullback por  $g_{t_n}$  entonces  $g_{t_n}^{-1}(V_i^n)$  son rectas de longitud amplia y ambas tienen la misma longitud en  $X$ . Entonces el número de intersecciones de ambas con  $J$  es aproximadamente 1 lo que contradice que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_I(r^n(x_1)) \neq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \chi_I(r^m(x_2)).$$

□

## 2.3. Identidades de Vorobets

En esta sección vamos a demostrar un resultado fascinante [2.1.5](#). Hemos discutido en secciones anteriores que los flujos geodésicos de las superficies de traslación están fuertemente relacionados con los IET. Este resultado hace más evidente esta relación y el entendimiento del enunciado y de su demostración conduce a un profundo entendimiento de esta conexión.

Tenemos ya una condición que asegura la única ergodicidad [2.1.3](#)[2.1.4](#). Para demostrar [2.1.2](#) lo que necesitamos es encontrar que la medida de las direcciones donde el límite del teorema de Boshernitzan [2.1.3](#) no converja a cero es  $2\pi$ . Para este fin necesitamos establecer una relación entre los  $\varepsilon_n$  y las cantidades que describiremos a continuación.

Si tenemos una foliación medible en una superficie de traslación  $S$ , le llamamos *sístola*<sup>2</sup> ( $\text{Sys}(S)$  por cómo se dice en inglés) a la longitud de la conexión silla de menor longitud que genera la foliación vertical. Definimos

$$S(S) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Sys}(g_t(S))}{\sqrt{A(S)}}.$$

Donde  $A(S)$  es el área de la superficie. Observemos que podríamos estar escribiendo  $A(g_t(S))$ , sin embargo hay exceso de notación pues el flujo de Teichmüller está contenido en  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  y por lo tanto preserva el área.

Para la segunda cantidad necesitamos un poco de notación. Recordemos que para toda conexión silla  $\gamma$  podemos asociarle su periodo que es un vector que si le damos una orientación adecuada este puede estar contenido en el plano superior. Este periodo asociado  $v_\gamma$  se descompone en su parte real  $\Re(v_\gamma)$  y  $\Im(v_\gamma)$ . Entonces para una conexión silla le asociamos la cantidad  $A(\gamma) = |\Re(v_\gamma)| |\Im(v_\gamma)|$ , en otras palabras, es el área del rectángulo

---

<sup>2</sup>Systole

euclideano que tiene como diagonal al periodo inducido por la conexión silla. Nos gustaría saber cómo varía esta área bajo el flujo de Teichmüller. Definimos

$$a(S) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\gamma} \frac{A(g_t(\gamma))}{A(S)}.$$

Donde el mínimo se toma sobre todas las conexiones silla de  $S$  y  $g_t(\gamma)$  es la conexión silla en  $g_t(S)$  que viene de  $\gamma$ . Veamos que hay un breve abuso de notación aquí: el flujo de Teichmüller puede estar deformando la longitud del periodo de  $\gamma$ , sin embargo no modifica el área del rectángulo que inducen, por lo tanto basta con considerar el ínfimo de las áreas de las conexiones silla de  $S$ . El siguiente lema nos indica como se relacionan las sístolas bajo el flujo de Teichmüller con las áreas de las conexiones silla de  $S$ .

El siguiente lema establece la primera de las igualdades de las identidades de Vorobets [2.1.5](#).

**Lema 2.3.1.** [\[27\]](#) *Sea  $S$  una superficie de traslación, si consideramos la foliación vertical por una 1-forma holomorfa  $\omega$  entonces*

$$\frac{S^2(S)}{2} = a(S).$$

*Demostración.* Consideremos  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq g_t \cdot \text{HOL}(S)$  de tal forma que  $A(\gamma_n) \rightarrow a(S) \cdot A(S)$ . Recordemos que el flujo de Teichmüller deforma a un vector haciendo más grande su parte horizontal y más pequeña su parte vertical por un factor de  $e^t$  (en caso de considerar el flujo hacia un tiempo positivo, en caso contrario es al revés). Si denotamos por  $L_t(\gamma)$  a la longitud de  $g_t(\gamma)$  en  $g_t \cdot S$  entonces podemos encontrar unos  $t_n$  de tal forma que  $A(\gamma_n) = L_{t_n}^2(\gamma_n)/2$ . Podemos sin pérdida de generalidad suponer que la sucesión  $\gamma_n$  verifica que  $\Re(v_{\gamma_n}) \rightarrow \infty$  de tal forma que estos  $t_n \rightarrow \infty$ . Entonces tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{S^2(S)}{2} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Sys}^2(g_t(S))}{2A(S)} \leq \liminf_{t_n \rightarrow \infty} \frac{\text{Sys}^2(g_{t_n}(S))}{2A(S)} \leq \\ &\liminf_{t_n \rightarrow \infty} \frac{L_{t_n}^2(\gamma_n)}{2A(S)} = \liminf_{t_n \rightarrow \infty} \frac{A(\gamma_n)}{A(S)} = a(S). \end{aligned}$$

La primera igualdad es de la definición de  $S(S)$ , la primera desigualdad es por considerar el límite sobre la sucesión  $t_n$  en lugar de sobre cualquier  $t$ , la segunda desigualdad es porque  $\text{Sys}(g_t(S)) \leq L_t(\gamma)$  para toda  $t$  y toda conexión silla, la segunda igualdad es por construcción y la última igualdad es por construcción de la sucesión  $\gamma_n$ . Por otro lado podemos considerar una sucesión de instantes  $t_n$  de tal forma  $\text{Sys}(g_{t_n}(S)) \rightarrow S(X) \cdot \sqrt{A(S)}$ . De mismo modo podemos encontrar una sucesión de conexiones silla de  $S$  de tal forma que  $\text{Sys}(g_{t_n}(S)) = L_{t_n}(\gamma_n)$ . Como estas  $t_n \rightarrow \infty$  entonces  $\Re(g_{t_n}(\gamma_n)) \rightarrow 0$  entonces podemos encontrar una sucesión de instantes  $\tau_n \rightarrow \infty$  de tal forma que  $A(\gamma_n) = L_{\tau_n}^2(\gamma_n)/2$ . De esta forma obtenemos que

$$\frac{S^2(S)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Sys}^2(g_{t_n}(S))}{2A(S)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{t_n}^2(\gamma_n)}{2A(S)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\tau_n}^2(\gamma_n)}{2A(S)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(\gamma_n)}{A(S)} \geq a(S).$$

Donde la primera igualdad es resultado de la construcción de la sucesión de tiempos  $t_n$ , la segunda igualdad es por la construcción de la sucesión de conexiones silla, la primera desigualdad es por las relaciones que guarda la sucesión  $\tau_n$  respecto a  $t_n$ , la tercera igualdad es por construcción de los tiempos  $\tau_n$  y la última desigualdad es por considerar un límite inferior de una sucesión particular. De esta forma obtenemos la igualdad deseada.  $\square$

Continuemos con la segunda parte de las identidades de Vorobets para dicho fin vamos a seguir la demostración de P. Hubert, L. Marchese y C. Ulcigarai [27]. En ella los autores definen una cantidad conocida como *espectro de Lagrange de un IET* el cual es una generalización del espectro de Lagrange en los reales. Recordemos que por un resultado de aproximación diofantina (Liouville), para todo real  $r$  existen una infinidad de enteros  $n, m$  de tal forma que

$$\left| r - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^2}.$$

**Definición 2.3.1.** *El espectro de Lagrange para un real  $r$  se define como*

$$\sup_{c>0} \left\{ \left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}, \text{ para una infinidad de } p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Recordemos que si tenemos  $T$  un IET con información combinatoria y métrica  $(\pi, \lambda)$  en el alfabeto  $\mathcal{A}$  entonces si dos elementos del alfabeto verifican que  $\pi_0^{-1}(\alpha), \pi_1^{-1}(\beta) > 1$  entonces podemos definir puntos extremos izquierdos de los intervalos  $I_\alpha^{top}$  y  $I_\beta^{bot}$  como

$$u_\alpha^0 = \sum_{\pi_0^{-1}(\gamma) < \pi_0^{-1}(\alpha)} \lambda_\gamma \text{ y } u_\beta^1 = \sum_{\pi_1^{-1}(\gamma) < \pi_1^{-1}(\beta)} \lambda_\gamma.$$

En esos puntos ni  $T$  ni  $T^{-1}$  están bien definidas. Tengamos en mente lo que comentamos anteriormente que  $(\beta, \alpha, n)$  es una *conexión* si  $T^n(u_\beta^1) = u_\alpha^0$  y además  $\pi_1^{-1}(\beta), \pi_0^{-1}(\alpha) > 1$ . Si no es una conexión tenemos un intervalo  $I(\beta, \alpha, n)$  cuyos puntos extremos son  $T^n(u_\beta^1)$  y  $u_\alpha^1$ .

**Definición 2.3.2.** *Decimos que una tripleta es reducida si no es una conexión y además para toda  $m \in \{0, \dots, n\}$  se verifica que  $T^{-m}(I(\beta, \alpha, n))$  no tiene singularidades de  $T$  ó  $T^{-1}$ .*

Este tipo de tripletas, por construcción de la inducción de Rauzy-Veech, son detectadas por la misma. Por el teorema de Veech y Masur [2.1.1] si  $T$  no tiene conexiones entonces la inducción genera una sucesión de IET a partir de  $T$  denotada por  $T^{(k)}$ . Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  entonces los puntos  $u_\alpha^{(m),0}$  y  $u_\beta^{(m),1}$  son las singularidades asociadas a esas letras de  $T^{(-m)}$  y  $T^{(m)}$ .

**Lema 2.3.2.** [28] *Sea  $T$  un IET que verifique las condiciones del teorema de Veech y Masur [2.1.1]. Si  $(\beta, \alpha, n)$  es una tripleta reducida entonces existe una  $m \in \mathbb{N}$  de tal forma que*

$$|T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^1| = |u_\alpha^{m,0} - u_\beta^{m,1}|.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $T^n(u_\beta^1) < u_\alpha^0$ . En caso de ser distinto entonces se realiza la prueba de manera simétrica.

Sea  $m \in \{0, \dots, n\}$  de tal forma que

$$T^{n-m}(u_\beta^1) = \min_j \{T^{n-j}(u_\beta^1)\}.$$

Este punto corresponde al extremo izquierdo de estos puntos. En vista que  $(\beta, \alpha, n)$  es reducida entonces  $T^{-m}(u_\alpha^1) = \min T^j(u_\alpha^1)$  entonces

$$|T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0| = |T^{n-m}(u_\beta^1) - T^{-m}(u_\alpha^0)|.$$

Por lo tanto  $T^{n-m}(u_\beta^1) < T^{-m}(u_\alpha^0)$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  y sea  $I^k$  el intervalo donde está definido el  $k$ -ésimo paso de la inducción de Rauzy. Sea

$$s = \max\{k \mid T^{n-m}(u_\beta^1) \in I^k \text{ y } T^{-m}(u_\alpha^0) \in I^k\}.$$

Como  $T^{n-m}(u_\beta^1) < T^{-m}(u_\alpha^0)$  entonces  $T^{-m}(u_\alpha^0) \notin I^{s+1}$ . Se sigue que  $u_\eta^{s,1} \leq T^{-1}(u_\alpha^1)$  y  $u_\eta^{s,0} \leq T^{-m}(u_\alpha^0)$  para toda  $\eta \in \mathcal{A}$ . De esta forma, si  $T^s$  es el mapeo de primer retorno de  $T$  en el intervalo  $I^s$  entonces no existen enteros no negativos  $l, h$  tales que  $T^{m-n}(u_\beta^1) = (T^s)^l(u_\beta^{s,1})$  y  $T^{-m}(u_\alpha^0) = (T^s)^{-h}(u_\alpha^{s,0})$  entonces estos son ambos cero. De otra forma si  $h > 0$  entonces  $u_\alpha^{s,0} = T^{h_1}(u_\alpha^0)$  para  $0 \leq h_1 < m$ . Como  $T^{-m}(u_\alpha^0)$  es el extremo izquierdo de los puntos  $T^{-i}(u_\alpha^0)$  entonces  $T^{-m}(u_\alpha^0) < u_\alpha^{s,0}$  lo cual no es posible por maximalidad de  $s$ . Por lo tanto  $h = 0$ . Por otro lado si  $l > 0$  entonces  $u_\beta^{s,1} = T^{l_1}(u_\beta^1)$  para algún  $l_1 \leq n - m$ . Por construcción tenemos que  $T^{n-m}(u_\beta^1)$  es el extremo izquierdo de los puntos  $T^{n-i}(u_\beta^1)$ . De esta forma  $T^{n-m}(u_\beta^{s,1}) < u_\beta^{s,1}$ . Como  $u_\alpha^{s,1}$  es el extremo derecho de las singularidades de  $T^s$  entonces  $u_\beta^{s,1} < u_\alpha^{s,1}$  por lo tanto  $T^{n-m}(u_\beta^1) < T^{l_1}(u_\beta^1) < T^{-m}(u_\alpha^0)$ . Lo cual no es posible pues  $(\beta, \alpha, n)$  es una tripleta reducida. Entonces  $l = 0$  y se sigue la afirmación del lema.  $\square$

Recordemos de la sección de la condición de Boshernitzan [2.1.3](#) que

$$\varepsilon_n(T) = \min\{|T^{-i}(u_\alpha^0) - T^{-j}(u_\beta^0)| \mid \pi_0^{-1}(\alpha), \pi_0^{-1}(\beta) > 1\}.$$

**Definición 2.3.3.** *Definimos el espectro de Lagrange para un IET  $T$  al límite*

$$L(T) = \frac{1}{|\lambda|} \liminf_{n \rightarrow \infty} n \cdot \min_{\alpha, \beta} |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0|.$$

Vamos a concentrarnos en demostrar que

$$\varepsilon(T) := \frac{1}{|\lambda|} \liminf n \cdot \varepsilon_n(T) = L(T).$$

En el Corolario [2.3.2](#) vamos a demostrar esta igualdad. Los siguientes lemas técnicos son para llegar a ese fin.

**Proposición 2.3.1.** [\[28\]](#) *Sea  $(\beta, \alpha, n)$  una tripleta que no es reducida entonces existe otra tripleta  $(\beta_1, \alpha_1, m)$  con  $m < n$  de tal forma que es reducida y que*

$$|T^m(u_{\beta_1}^1) - u_{\alpha_1}^0| < |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0|.$$

*Demostración.* Sea  $(\beta, \alpha, n)$  como en el enunciado. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $T^n(u_\beta^1) < u_\alpha^0$ , de otra forma la prueba se realiza simétricamente. De la misma manera podemos asumir que no hay singularidades en  $I(\beta, \alpha, n)$ , de otra forma consideramos un subintervalo donde no las tenga y realizamos el siguiente procedimiento. Como  $(\beta, \alpha, n)$  no es reducida entonces existe una  $1 \leq m \leq n$  de tal forma que  $T^{-m}(I(\beta, \alpha, n))$  tiene una singularidad de  $T$  o de  $T^{-1}$ . Sea  $m$  el mínimo entero con esta propiedad, por minimalidad entonces tenemos que esta singularidad es de  $T$ . Sea  $u_\eta^0$  esa singularidad, entonces  $T^{n-m}(u_\beta^1) < u_\eta^0 < T^{-m}(u_\alpha^0)$ . Entonces  $T^m$  es una isometría en el intervalo  $I(\beta, \alpha, n)$  pues ya nos aseguramos que ahí no haya singularidades para  $T^m$ , entonces  $(\beta, \eta, n - m)$  satisface que

$$|T^{n-m}(u_\beta^1) - u_\eta^0| < ||T^{n-m}(u_\beta^1) - T^{-m}(u_\alpha^0)| = |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0|.$$

Por lo tanto (si no repetimos) podemos asumir que  $[T^{n-m}(u_\beta^1), u_\alpha^0]$  no contiene singularidades. Si nos vemos en la necesidad de repetir entonces notamos que no podemos hacerlo más que una cantidad finita de veces, entonces repetimos hasta hallar la tripleta deseada.  $\square$

**Corolario 2.3.1.** [27] *Sea  $T$  un IET. El espectro de Lagrange de  $T$  puede ser calculado considerando únicamente límite inferior sobre las tripletas reducidas.*

*Demostración.* Consideremos una sucesión  $\{\alpha_n, \beta_n\}$  de tal forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot |T^n(u_{\beta_n}^1) - u_{\alpha_n}^0| = |\lambda|L(T).$$

Por la Proposición 2.3.1 tenemos que podemos hallar tripletas reducidas  $(\beta'_n, \alpha'_n, m_n)$  tales que

$$m_n \cdot |T^{m_n}(u_{\beta'_n}^1) - u_{\alpha'_n}^0| < n|T^n(u_{\beta_n}^1) - u_{\alpha_n}^0| \rightarrow |\lambda|L(T).$$

Por lo tanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n \cdot |T^{m_n}(u_{\beta'_n}^1) - u_{\alpha'_n}^0| \rightarrow |\lambda|L(T).$$

$\square$

**Proposición 2.3.2.** [27] *Sea  $T$  un IET y sea  $n$  un natural que  $\varepsilon_n(T) < \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha$  entonces existe una tripleta reducida  $(\beta, \alpha, m)$  tal que  $m = m(n)$  y  $m < n$  de tal forma que*

$$\varepsilon_n(T) = |T^m(u_\beta^1) - u_\alpha^0|.$$

*Demostración.* Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  y  $i, j$  de tal forma que el mínimo  $\varepsilon_n(T)$  es alcanzado, es decir  $|T^{-i}(u_\beta^0) - T^{-j}(u_\alpha^0)| = \varepsilon_n(T)$ . Sin pérdida de generalidad  $i \leq j$ . De otra forma es simétrico. Por construcción  $T^{j-i}$  es continua en  $[T^i(u_\beta^0), T^{-j}(u_\alpha^0)]$  ya que no pueden haber singularidades entre sus puntos por ser el intervalo más pequeño. Como por hipótesis  $\varepsilon_n(T) < \min_{\alpha} \lambda_\alpha$  entonces  $i \neq j$ . Por lo tanto  $i < j$ . Entonces  $m = j - i - 1$  es el entero que funciona con las  $\alpha$  y  $\beta$  que realizan a  $\varepsilon_n(T)$ .  $\square$

Con estos resultados podemos deducir que:

**Corolario 2.3.2.** [27] *Sea  $T$  un IET entonces las cantidades  $\varepsilon(T)$  y  $L(T)$  coinciden.*

*Demostración.* Sea  $N > 0$  un natural y  $\epsilon > 0$ . Podemos considerar para un natural  $n$  tal que  $n\varepsilon_n(T) < \varepsilon_n(T) + \epsilon$  y otro natural  $m(n)$  dado por la Proposición 2.3.1 tal que  $m > N$ . De esa misma proposición podemos encontrar una tripleta reducida  $(\beta, \alpha, m)$  de tal forma que  $|T^m(u_\beta^1) - u_\alpha^0| = \varepsilon_n(T)$ . Se sigue que

$$m \cdot |T^m(u_\beta^1) - u_\alpha^0| = \frac{m}{n} n\varepsilon_n(T) \leq \varepsilon(T) + \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot |T^m(u_\beta^1) - u_\alpha^0| = L(T) \leq \varepsilon(T).$$

Por otro lado consideramos de nuevo una  $N > 0$  y una  $\epsilon > 0$  junto con una tripleta reducida  $(\beta, \alpha, n)$  de tal forma que  $n > N$  y  $n \cdot |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0| < L(T) + \epsilon$ . Esta tripleta existe en virtud de la Proposición 2.3.2. Como  $(\beta, \alpha, n)$  es reducida entonces  $T^{-n-1}$  es continua en  $I(\beta, \alpha, n)$  pues no hay singularidades para ese mapeo en ese intervalo. Se sigue que

$$\frac{n \cdot \varepsilon_{n+1}}{|\lambda|} \leq \frac{n}{|\lambda|} |u_\beta^0 - T^{-n-1}(u_\alpha^0)| = \frac{1}{|\lambda|} |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0| \leq L(T) + \epsilon.$$

Por lo tanto  $\varepsilon(T) \leq L(T)$  y así se obtiene la igualdad.  $\square$

En este punto ya tenemos dos de las tres igualdades de las identidades de Vorobets 2.1.5. Nos falta demostrar que

$$L(T) = a(S).$$

Lo cual lo demostraremos en el Lema 2.3.3 demostrando que  $a(S) = \varepsilon(T)$ . La notación que vamos a presentar y el siguiente resultado técnico lo utilizamos para demostrar el Lema 2.3.3 y concluir la parte de única ergodicidad del teorema de Boshernitzan 2.1.3. Vamos a decir que si  $T$  es un IET y  $(\pi, \lambda, \tau)$  es la información asociada entonces las siguientes cantidades las denotaremos por:

1.  $\omega_{\alpha, \pi}^0 = \sum_{\pi_0(\sigma) < \pi_0(\alpha)} e_\sigma$ .
2.  $\omega_{\beta, \pi}^1 = \sum_{\pi_1(\sigma) < \pi_1(\beta)} e_\sigma$ .
3.  $\omega_{\beta, \alpha, \pi} = \omega_{\beta, \pi}^1 - \omega_{\alpha, \pi}^0$ .
4.  $\xi^0 = \lambda \cdot \omega_{\alpha, \pi}^0 + i\tau \cdot \omega_{\alpha, \pi}^0$ .
5.  $\xi_\beta^1 = \lambda \cdot \omega_{\beta, \pi}^1 + i\tau \cdot \omega_{\beta, \pi}^1$ .

Donde  $e_\sigma$  son elementos de la base canónica de  $\mathbb{R}^k$ .

**Proposición 2.3.3.** [27] *Sea  $T$  un IET con  $(\pi, \lambda, \tau)$  su información combinatoria, métrica y de suspensión que induce una superficie  $X$ . Se verifican los siguientes incisos:*

- (a) *Para toda  $(\beta, \alpha, n)$  tripleta reducida que cumpla que  $|T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^1| < \min_\sigma \lambda_\sigma$  existe una conexión silla reducida asociada a la tripleta  $\gamma$  de tal forma que si  $v$  es su periodo entonces  $|\Re(v)| = |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^1|$  y además  $n$  es la cardinalidad de la intersección de  $\gamma$  con  $I$ .*

- (b) Si  $\gamma$  es una conexión silla reducida de tal forma que su periodo verifica que  $|\mathfrak{S}(v)| > \max |\mathfrak{S}(\xi_\alpha^0 - \xi_\beta^1)|$  existe una tripleta reducida asociada a la conexión silla  $(\beta, \alpha, n)$  de tal forma que  $|\mathfrak{R}(v)| = |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0|$  donde  $n$  es la cardinalidad de la intersección de  $I$  con  $\gamma$ .
- (c) Si  $(\beta, \alpha, n)$  es una tripleta reducida de tal forma que  $|T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0| < \min \lambda_\sigma$  y  $\gamma$  es la conexión silla reducida de los dos primeros incisos entonces existe una  $r \in \mathbb{N}$  de tal forma que  $\gamma$  es diagonal respecto a la renormalización  $(\pi^r, \lambda^r, \tau^r)$ .

*Demostración.* 1. Consideremos una tripleta  $(\beta, \alpha, n)$  como en el enunciado. Vamos a tomar una recta saliente vertical  $V_A$  cuyo punto de intersección con  $I$  sea  $u_\beta^1$ . Llamemos  $p_A$  al punto de donde sale la recta, de manera análoga consideramos el rayo vertical  $V_D$  cuyo punto de intersección con  $I$  sea  $u_\alpha^0$  y denotemos el punto final por  $p_D$ . Por construcción de la suspensión estos puntos están relacionados con  $\xi_\alpha^0$  y  $\xi_\beta^1$ . Sin pérdida de generalidad vamos a asumir que  $T^n(u_\beta^1) < u_\alpha^0$  (el otro caso es simétrico). Sea  $\delta = u_\alpha^0 - T^n(u_\beta^1)$ . Si la tripleta es como en el enunciado entonces  $\delta < \min \lambda_\sigma$ . De esta forma ambos puntos van a estar en el mismo subintervalo, es decir, si  $\eta \in \mathcal{A}$  es tal que  $\pi_0(\eta) = \pi_0(\alpha) - 1$  entonces  $T^n(u_\beta^1) \in I_\eta^0$ . Entonces  $\lambda \cdot \omega_{\alpha, \pi}^0 + i\tau \cdot \omega_{\beta, \pi}^1 \in \partial R_\beta^1$ .

Recordemos que estos rectángulos los podemos encajar isométricamente en la superficie  $X$  [27]. Entonces podemos tomar el segmento horizontal de  $R_\beta^1$  cuya longitud es  $\delta$  y su punto final es  $\xi_\beta^1$ . Sea  $H$  la imagen de este segmento bajo el encaje isométrico en  $X$ . La longitud sigue siendo  $\delta$  pero el punto final es  $p_A$ . Como tenemos que  $(\beta, \alpha, n)$  es una tripleta reducida entonces  $T^{-j}$  existe y está bien definida para  $I(\beta, \alpha, n)$  para toda  $j \leq n$ . Como el IET es el mapeo del primer retorno del flujo vertical  $\phi_t^\pi$  al intervalo  $I$  entonces existen unos momentos  $t_0, \dots, t_n$  de tal forma que  $\phi_{t(i)}(H) = T^{i-n}(I(\beta, \alpha, n))$  para toda  $0 \leq i \leq n$ . Consideremos una  $\epsilon \in (0, \delta)$ .

Denotemos por  $p_\epsilon$  al punto que dista  $\epsilon$  de  $p_A$ . Como  $(\beta, \alpha, n)$  es una tripleta reducida, tenemos que  $\phi_t^\pi(p_\epsilon)$  no es una singularidad siempre y cuando  $\epsilon \in (0, \delta)$  y  $t \in (0, t_n + h_\eta)$ . Donde  $h_\eta$  viene dada por la construcción de rectángulos con cremallera. Entonces para estos dominios de definición podemos tomar una inmersión isométrica de  $(0, \delta) \times (0, t_n + h_\eta) \rightarrow X$  que no pase por ninguna singularidad dada por  $\mathcal{P}(\epsilon, t) = \phi_t^\pi(p_\epsilon)$ . Además por continuidad  $\mathcal{P}(0, 0) = P_A$ . Así, si  $\mathfrak{S}(\xi_\alpha^0) \leq h_\eta$  podemos tomar  $f = t_n + \mathfrak{S}(\xi_\alpha^0)$  y  $\gamma(t) = \mathcal{P}(t\delta, tf)$ . Esto define una conexión silla pues  $\mathcal{P}(\delta, f) = p_D$  y por construcción no tiene singularidades en su interior. Si por otro lado  $\mathfrak{S}(\xi_\alpha^0) > h_\eta$  entonces  $\pi^1(\alpha) = k$  y  $\sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \tau_\sigma \in (0, h_\omega)$  tal que  $\pi^0(\omega) = k$ . Observemos que la parte superior del rectángulo  $R_\eta^1$  se identifica por traslación con la parte inferior de  $R_\omega^0$ , de esta forma  $\mathcal{P}(\epsilon, t)$  se extiende a  $(0, \delta) \times (0, t_n + h_\eta + h_\omega)$ , entonces obtenemos que  $\mathfrak{S}(\xi_\alpha^0) = \sum_\sigma \tau_\sigma + h_\eta$ . Entonces tomando  $f = t_n + \mathfrak{S}(\xi_\alpha^0)$  y  $\gamma(t) = \mathcal{P}(t\delta, tf)$  tendremos una conexión silla pues  $\mathcal{P}(\delta, f) = p_D$ . En ambos casos al obtener el periodo de la conexión silla vemos que su proyección al eje real coincide con la distancia  $\delta = T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0$ . Por construcción esa  $n$  coincide con la cantidad de puntos de intersección de  $\gamma$  con  $I$ .

2. Sea  $\gamma$  una conexión silla reducida de tal forma que su periodo verifique las condiciones

del enunciado. Si  $\Re(v) > 0$  (el otro caso es análogo) entonces como  $\gamma$  es reducida podemos considerar una inmersión isométrica  $\alpha : (0, \Re(v)) \times (0, \Im(v)) \rightarrow X$  tal que no tiene singularidades en su interior y  $\alpha(tv) = \gamma(t)$ . Como por hipótesis  $\Im(v) > \max \Im(\xi_\alpha^0 - \xi_\beta^1)$  entonces la conexión silla  $\gamma$  cruza al intervalo  $I$ , por lo tanto existen instantes  $t_1 < \dots < t_n < \Im(v)$  de tal forma que  $\alpha((0, \Re(v)) \times \{t_k\}) \subseteq I$  para toda  $k \leq n$ . Los puntos finales derecho e izquierdo corresponden al segmento vertical de trayectorias en  $X$  que van de  $p_A$  a  $p_D$ . Entonces existen  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  de tal forma que para toda  $0 \leq j \leq n$  se cumple que  $\alpha((0, \Re(v)) \times \{t_j\}) = T^j(u_\beta^1) - T^{j-n}(u_\alpha^0)$ . Si  $j = n$  obtenemos que  $|\Re(v)| = |T^n(u_\beta^1) - u_\alpha^0|$  que es lo que queríamos demostrar.

3. Para demostrar este inciso hay que observar que si existen  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tales que

$$|\lambda \cdot \omega_{\pi, \beta, \alpha}| | \tau \cdot \omega_{\pi, \beta, \alpha} |$$

es donde se alcanza el mínimo sobre  $\mathcal{A}$  entonces  $v = \lambda \cdot \omega_{\pi, \beta, \alpha} + i\tau \cdot \omega_{\pi, \beta, \alpha}$  es el periodo de una conexión silla  $\gamma$  de tal forma que es diagonal respecto a la información  $(\pi, \lambda, \tau)$  entonces si una tripleta reducida verifica las condiciones especificadas en el enunciado, por el Lema 2.3.2 existe un  $r$  que cumple las conclusiones deseadas. Utilizando los encajes mencionados en los dos incisos anteriores observamos que en efecto obtenemos una conexión silla diagonal. □

*Demostración.* **Teorema de Boshernitzan** 2.1.3

Vimos que si un IET minimal verifica la condición de Boshernitzan es ergódico respecto a la medida de Lebesgue 2.2.1, utilizando un argumento constructivo como en la demostración del teorema de divergencia de Masur 2.1.4 y utilizando esta relación que existen entre esos intervalos y las conexiones silla 2.3.3 se sigue que si un IET verifica la condición de Boshernitzan entonces es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue. □

Ahora que hemos visto estas relaciones podemos demostrar:

**Lema 2.3.3.** [27] Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación. Si  $T$  es el IET que induce el flujo vertical, entonces  $\varepsilon(T) = a(S)$ .

*Demostración.* Vamos a dividir la demostración en dos casos, el primero es cuando el flujo vertical es únicamente ergódico (por lo tanto  $T$  también lo es). La condición de Boshernitzan 2.1.3 nos dice que  $\varepsilon(T) = 0$ . Si el flujo vertical no es únicamente ergódico entonces se sigue por el criterio de divergencia de Masur 2.1.4 que la proyección de  $g_t(S, \omega)$  al móduli  $\mathcal{M}_g$  es divergente, como es divergente entonces existen conexiones silla cuyas longitudes tienden a cero, es decir  $S(S) = 0$  y por el Lema 2.3.1 tenemos que  $a(S) = 0$ .

Supongamos ahora que el flujo es únicamente ergódico entonces para todo  $p$  en la superficie tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{x \in (0, t) \mid \phi_x^\pi(p) \in I\}}{t} = \frac{\mu(I)}{A(S)}.$$

En particular esto es cierto para las singularidades del flujo. Si consideramos una conexión silla  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  y su periodo sea  $v$ . Vamos a considerar el rectángulo euclideo  $R$

del cual el periodo  $v$  es la diagonal. Existe una inmersión isométrica  $i : R \rightarrow S$  tal que las curvas

$$\sigma(t) = i(0, t\mathfrak{S}(v)) \text{ y } \beta(t) = i(t\mathfrak{R}(v), t\mathfrak{S}(v))$$

intersecan a  $I$  la misma cantidad de veces.

Sea  $\epsilon > 0$ . Si  $\gamma$  es tal que  $\mathfrak{S}(v)$  es lo suficientemente grande (en caso de no ser así se considera la acción por el flujo geodésico en tiempo negativo) entonces

$$\frac{(1 - \epsilon)\mu(I)}{A(S)} < \frac{\text{card}(\gamma \cap I)}{|\mathfrak{S}(v)|} < \frac{(1 + \epsilon)\mu(I)}{A(S)}.$$

Por la condición de ser únicamente ergódico y por la cantidad de intersecciones que acabamos de mencionar.

Sea  $\{\gamma_k\}$  una sucesión de conexiones silla de tal forma que  $A(v_k) \rightarrow a(S)A(S)$ . Donde  $v_k$  son los periodos asociados a esas conexiones silla. Consideremos tripletas reducidas  $(\beta_k, \alpha_k, n_k)$  que verifiquen que  $|\mathfrak{R}(v)| = |T^{n_k}(u_{\beta_k}^1) - u_{\alpha_k}^0|$  donde  $n_k$  es la cardinalidad de la intersección de  $\gamma_k$  con  $I$ . Estas tripletas reducidas existen en virtud de la Proposición 2.3.3 (b) y porque podemos asumir que las  $\gamma_k$  son reducidas pues podemos llegar a  $a(S)$  solo con conexiones silla reducidas 2.3.2.

Obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{A(v_k)}{A(S)} &= \frac{|\mathfrak{R}(v_k)||\mathfrak{S}(v_k)|}{A(S)} \geq \frac{|\mathfrak{R}(v_k)|\text{card}(\gamma_k \cap I)}{\mu(I)(1 + \epsilon)} = \\ &= \frac{n_k|T^{n_k}(u_{\beta_k}^1) - u_{\alpha_k}^0|}{\mu(I)(1 + \epsilon)} \geq \frac{L(T)}{(1 + \epsilon)^2} = \frac{\epsilon(T)}{(1 + \epsilon)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $a(S) \geq \epsilon(T)$ .

Por otro lado sea  $(\beta, \alpha, n)$  una tripleta reducida tal que

$$n|T^n(u_{\beta}^1) - u_{\alpha}^0| \leq (1 + \epsilon)L(T).$$

Sea  $\gamma$  la conexión silla reducida que obtenemos por la Proposición 2.3.3 en el apartado 1, es decir que  $|\mathfrak{R}(v)| = |T^n(u_{\beta}^1) - u_{\alpha}^0|$  donde  $n = \text{card}(\gamma \cap I)$  entonces

$$\frac{n|T^n(u_{\beta}^1) - u_{\alpha}^0|}{\mu(I)} = \frac{\text{card}(\gamma \cap I)|\mathfrak{R}(v)|}{\mu(I)} \geq \frac{(1 - \epsilon)|\mathfrak{S}(v)||\mathfrak{R}(v)|}{A(S)} \geq (1 - \epsilon)^2 a(S).$$

Por lo tanto  $\epsilon(T) = L(T) \geq a(S)$ . □

**Corolario 2.3.3. Identidades de Vorobets.** Sea  $(S, \omega)$  una superficie de traslación entonces

$$\frac{S^2(S)}{2} = a(S) = \epsilon(T).$$

*Demostración.* Se sigue de los resultados del Lema 2.3.1 y Lema 2.3.3. □

## 2.4. Teorema asintótico de Masur y Eskin

En esta sección demostraremos el Teorema [2.1.6](#)

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $S$  una superficie de Riemann y  $\mathcal{F}$  una foliación obtenida por un diferencial cuadrático, existe una constante  $c > 0$  tal que si  $V(S, R)$  es la cantidad de conexiones silla de longitud a lo más  $R$  entonces*

$$|V(S, R)| \leq cR^2.$$

Es la sección más técnica de este trabajo. La idea de la demostración es la siguiente:

*Demostración. (Sketch):*

1. Demostramos que para una superficie de traslación  $S$  y  $R > 0$

$$|V(S, 2R)| - |V(S, R)| \leq C_1 R^2 \int_0^{2\pi} |V(g_t r_\theta S)| d\theta.$$

2. Acotamos superiormente la integral del inciso 1 por otra integral.
3. Probamos que la integral que acota superiormente a la integral del inciso 1 está acotada uniformemente.
4. Concluimos que

$$|V(S, 2R)| - |V(S, R)| \leq C_1 R^2.$$

5. Iteramos este proceso para concluir que

$$|V(S, 2R)| \leq CR^2.$$

□

En esta sección expondremos la demostración que mencionamos siguiendo las ideas, pasos y notación que utilizan Masur y Eskin [\[16\]](#). Para dicho fin es necesario contar con herramientas de análisis.

### Primeros lemas

**Notación:** Denotemos como  $C_0^\infty(X)$  al conjunto de funciones suaves de soporte compacto de  $X$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+^2$  al semiplano superior,  $g_t$  la matriz asociada al flujo de Teichmüller.

Recordemos que el espacio móduli de los diferenciales abelianos sobre una superficie  $S$  se estratifica. Consideremos una componente del móduli  $\mathcal{H}(d)$ . Queremos demostrar que  $\text{HOL}(S)$  es un conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$  asociado a cada  $S \in \mathcal{H}(d)$  que verifica las siguientes dos propiedades:

1. Para todo  $h \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  y todo  $S \in \mathcal{H}(d)$  se cumple que  $\text{HOL}(h(S)) = h(\text{HOL}(S))$ .
2. Para toda  $S \in \mathcal{H}(d)$  existe una constante  $c = c(S) > 0$  donde

$$|\text{HOL}(S) \cap B(0, R)| \leq cR^2.$$

Además donde esta constante puede ser elegida de tal forma que varíe de forma uniforme en conjuntos compactos de  $\mathcal{H}(d)$ .

Esta sección consiste en demostrar que verifica la segunda condición.

**Lema 2.4.1.** [16] Sea  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ . Definiendo

$$P_f(y) = \frac{1}{2\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

entonces para toda  $\epsilon > 0$  existe una  $T_\epsilon > 0$  de tal forma que para toda  $t$  que verifique que  $e^t > T_\epsilon$  y para toda  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  de tal forma que  $\|\bar{x}\| > T_\epsilon$  se cumple que

$$\left| \frac{e^t}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_t r_\theta \bar{x}) d\theta - P_f(\|\bar{x}\| e^{-t}) \right| < \epsilon.$$

*Demostración.* Podemos observar que la dependencia sobre  $\bar{x}$  recae únicamente en  $\|\bar{x}\|$ , de tal forma que por facilidad podemos tomar  $\bar{x} = (0, \|\bar{x}\|)$  entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_t r_\theta \bar{x}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^t \|\bar{x}\| \text{sen}\theta, e^{-t} \|\bar{x}\| \text{cos}\theta) d\theta.$$

En virtud de que  $f$  es de soporte compacto, para que la integral no se anule, y como el lema nos habla de  $\|\bar{x}\|$  y  $t$  arbitrariamente grandes, tenemos que el argumento no puede ser arbitrariamente grande y esto ocurre cuando  $\theta$  está lo suficientemente cercano a 0 o a  $\pi$ , pero  $f$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R}_+^2$  entonces es arbitrariamente cercano a 0. Por el mismo argumento del soporte compacto de  $f$  debe existir  $\delta > 0$  tal que  $\|\bar{x}\| e^{-t} \in [\delta^{-1}, \delta]$  y  $\theta = O(e^{-2t})$ . Definamos

$$\gamma_x(s) = \sup\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \mid |y_1 - y_2| < s\}.$$

Dado que  $f$  es de soporte compacto entonces es uniformemente continua entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma_x(s) = 0$$

para toda  $x$ . Si hacemos el cambio de variable  $u = e^t \|\bar{x}\| \text{sen}\theta$  entonces  $du = e^y \|\bar{x}\| \text{cos}\theta$ , por lo tanto

$$d\theta = \frac{du}{e^t \|\bar{x}\| \text{cos}\theta},$$

$$\text{cos}\theta = \sqrt{1 - \frac{u^2}{e^{2t} \|\bar{x}\|^2}},$$

y entonces por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^t|\bar{x}|\operatorname{sen}\theta, e^{-t}|\bar{x}|\operatorname{cos}\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, e^{-t}|\bar{x}| \sqrt{1 - \frac{u^2}{e^{2t}|\bar{x}|^2}}) d\theta = \\ \frac{e^{-t}}{2\pi|\bar{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, e^{-t}|\bar{x}| \sqrt{1 - \frac{u^2}{e^{2t}|\bar{x}|^2}}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{|\bar{x}|^2}}} du &= \frac{e^{-t}}{2\pi|\bar{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, e^{-t}|\bar{x}|) du + E \end{aligned}$$

donde  $E$  es el factor error el cual podemos ver que puede ser acotado por

$$\|E\| = O\left(\frac{e^{-t}}{|\bar{x}|} \gamma_u\left(\frac{e^{-2t}}{|\bar{x}|^2}\right)\right) + O\left(\frac{e^{-2t}}{|\bar{x}|^2}\right) \|f\|_{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{|\bar{x}|}\right) = O(e^{-2t} \gamma_u(\delta^2 e^{-4t})) \rightarrow 0.$$

Además

$$\frac{1}{e^t|\bar{x}|2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, e^{-t}|\bar{x}|) du = e^{-2t} P_f(e^{-t}|\bar{x}|).$$

Por lo tanto multiplicando tanto la integral en cuestión como  $e^{-2t} P_f(e^{-t}|\bar{x}|)$  por  $e^{2t}$  se sigue el resultado deseado.  $\square$

Denotemos por  $|V(R, S)|$  a  $|\operatorname{HOL}(S) \cap B(0, R)|$ . Sea  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^2)$  entonces definimos

$$\hat{f}(S) = \sum_{v \in \operatorname{HOL}(S)} f(v).$$

**Lema 2.4.2.** [16] *Sea  $\operatorname{HOL}(S)$  para una  $S \in \mathcal{H}(d)$  que verifique que para todo compacto se cumpla que  $|K \cap \operatorname{HOL}(S)| < \infty$ . Entonces existe  $\alpha < \infty$  de tal forma que para toda  $R > 0$  y toda  $S \in \mathcal{H}(d)$*

$$|V(2R, S)| - |V(R, S)| \leq \alpha R^2 \int_0^{2\pi} |V(4, g_t r_{\theta} S)| d\theta.$$

*Demostración.* Si  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$  entonces existe  $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^2)$  tal que  $f(y) = P_g(y)$ .

Prestando atención en  $\chi$  la función característica del intervalo  $[1, 2]$  y tomando una  $\epsilon > 0$ , vemos que existe una función  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^2)$  que verifique que  $P_f \geq (1 + \epsilon)\chi$  y además su soporte esté contenido en el rectángulo  $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [0, \frac{5}{2}]$ . Para dicho  $\epsilon$  consideremos el  $T_{\epsilon}$  que nos brinda el Lema 2.4.1. Notemos que si  $e^t \leq |\bar{x}| \leq e^{2t}$  entonces

$$\frac{e^{2t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_t r_{\theta} \bar{x}) d\theta < P_f(|\bar{x}| e^{-t}),$$

entonces por el Lema 2.4.1

$$1 \leq P_f(e^{-t}|\bar{x}|) - \epsilon \leq \frac{e^{2t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_t r_{\theta} |\bar{x}|) d\theta,$$

por lo tanto

$$|V(e^{2t}, S)| - |V(e^t, S)| \leq \frac{e^{2t}}{2\pi} \sum_{v \in V(S)} \int_0^{2\pi} f(g_t r_\theta \bar{x}) d\theta = \frac{e^{2t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(g_t r_\theta S) d\theta.$$

Si  $c = \sup(f)$ ,  $g$  es la función característica del rectángulo  $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [0, \frac{5}{2}]$  y  $h$  es la función característica del disco  $D(0, 4)$  entonces tenemos que  $f \leq cg \leq ch$  por lo tanto  $\hat{f} \leq \hat{c}\hat{h}$ , pero  $\hat{h}(S) = |V(4, S)|$ , por lo tanto

$$\frac{e^{2t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(g_t r_\theta S) d\theta \leq \frac{ce^{2t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V(4, g_t r_\theta S)| d\theta.$$

Entonces si  $\alpha = \frac{ce^{2t}}{2\pi}$  y  $R = e^t$  se sigue el lema. □

### Configuración combinatoria de conexiones silla

Los siguientes lemas técnicos se utilizan para realizar las demostraciones necesarias para acotar superiormente la integral del Lema [2.4.2](#) y para demostrar el lema inductivo en la Sección [2.4](#).

Como una primera aproximación al resultado de las cotas de Masur [\[16\]](#) obtendremos una cota para una clase particular de conexiones silla. Decimos que dos conexiones silla de una superficie de Riemann  $S$  asociadas a un diferencial abeliano  $q$  son disjuntas si su intersección es o bien vacía u ocurre solo en los extremos de las mismas. Un conjunto de conexiones disjuntas  $\mathcal{V}$  se le conoce como un *sistema* y denotamos por  $|\mathcal{V}|$  a la longitud máxima de las conexiones silla que conforman al sistema. Consituaremos con la notación y desarrollo de [\[16\]](#).

**Definición 2.4.1.** *Un complejo  $K$  es un conjunto cerrado de  $S$  donde  $\partial K$  es un sistema.*

**Proposición 2.4.1.** [\[16\]](#) *Existe una cota superior a la cantidad de conexiones silla disjuntas que solo depende del género  $g$  de la superficie.*

*Demostración.* Dado cualquier sistema  $\mathcal{V}$  siempre es posible añadir conexiones silla disjuntas de tal forma que obtengamos un sistema maximal y el sistema sea una triangulación de la superficie. La ecuación de la característica de Euler nos dice que  $\chi = z - a + t$  donde  $z$  son los ceros del diferencial abeliano,  $a$  las conexiones silla y  $t$  los triángulos que genera el sistema. Observemos que para cada conexión silla hay dos triángulos y cada triángulo tiene tres conexiones silla, por lo tanto  $2a = 3t$ , esto implica que  $t = 3(z - \chi)$ . Como  $\chi = 2 - 2g$  y  $z \leq 2g - 2$  entonces  $t \leq 3(4g - 4)$ . □

**Definición 2.4.2.** *Decimos que  $U \subseteq S$  es un dominio si  $U$  es un conjunto abierto cuya frontera sea un sistema.*

Recordemos que a cada conexión silla le podemos asociar un vector de holonomía, entonces podemos pensar a las conexiones silla como vectores y definir una operación entre ellas denotada como *producto cruz* el cual nos indica el área del paralelogramo que generan dos conexiones sillas:

**Definición 2.4.3.** Sea  $\gamma$  una conexión silla, podemos descomponerla en su componente horizontal  $\gamma_h$  y vertical  $\gamma_v$  de tal forma que definimos el producto cruz de dos conexiones silla  $\gamma$  y  $\beta$  como

$$|\gamma \times \beta| = |\gamma_h \beta_v - \gamma_v \beta_h|.$$

Esta operación nos permite encontrar las siguientes cotas las cuales son una suerte de desigualdad del triángulo para las conexiones sillas.

**Proposición 2.4.2.** [16]

1. Sean  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  conexiones silla, entonces

$$|\gamma_1 \times \gamma_2| \leq \frac{|\gamma_1 \times \gamma_3| |\gamma_2|}{|\gamma_3|} + \frac{|\gamma_2 \times \gamma_3| |\gamma_1|}{|\gamma_3|}.$$

2. Si  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  son tres lados de un triángulo formado por conexiones silla y  $\tilde{\gamma}$  es otra conexión silla entonces

$$|\tilde{\gamma} \times \gamma_3| \leq \sum_{i=1}^2 |\tilde{\gamma} \times \gamma_i|.$$

*Demostración.* 1. Para probar la primera desigualdad podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\gamma_3$  es vertical de tal forma que

$$\frac{|\gamma_i \times \gamma_3|}{|\gamma_3|} = \frac{|\gamma_{i,v} \gamma_{3,h} - \gamma_{i,h} \gamma_{3,v}|}{|\gamma_3|} = \frac{|\gamma_{i,h} \gamma_{3,v}|}{|\gamma_{3,v}|} = |\gamma_{i,h}|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\gamma_1 \times \gamma_2| &= |\gamma_{1,v} \gamma_{2,h} - \gamma_{1,h} \gamma_{2,v}| \leq |\gamma_{1,v} \gamma_{2,h}| + |\gamma_{1,h} \gamma_{2,v}| = \\ &= \frac{|\gamma_{1,v}| |\gamma_2 \times \gamma_3|}{|\gamma_3|} + \frac{|\gamma_{2,v}| |\gamma_1 \times \gamma_3|}{|\gamma_3|} \leq \frac{|\gamma_1| |\gamma_2 \times \gamma_3|}{|\gamma_3|} + \frac{|\gamma_2| |\gamma_1 \times \gamma_3|}{|\gamma_3|}. \end{aligned}$$

2. Como en el inciso anterior podemos suponer que  $\tilde{\gamma}$  es vertical de tal forma que

$$\frac{|\gamma_i \times \tilde{\gamma}|}{|\tilde{\gamma}|} = |\gamma_{i,h}|.$$

Además por la desigualdad del triángulo tenemos que  $|\gamma_{3,h}| \leq |\gamma_{1,h}| + |\gamma_{2,h}|$ . Por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} |\gamma_3 \times \tilde{\gamma}| &= |\gamma_{3,h}| |\tilde{\gamma}| \leq |\tilde{\gamma}| (|\gamma_{1,h}| + |\gamma_{2,h}|) = |\tilde{\gamma}| \left( \frac{|\gamma_1 \times \tilde{\gamma}|}{|\tilde{\gamma}|} + \frac{|\gamma_2 \times \tilde{\gamma}|}{|\tilde{\gamma}|} \right) = \\ &= |\gamma_1 \times \tilde{\gamma}| + |\gamma_2 \times \tilde{\gamma}|. \end{aligned}$$

□

**Definición 2.4.4.** Definimos la complejidad de un complejo  $K$  como el número necesario de conexiones silla que hay que aumentar (sin considerar la frontera) para que el complejo sea triangulado.

Si  $K$  es un complejo denotamos por  $\|K\|$  al área del mismo.

**Proposición 2.4.3.** [16] Sea  $K_1$  un complejo de complejidad  $c_1$  tal que  $\partial K_1 \neq \emptyset$  y sea  $\gamma$  una conexión silla tal que  $\gamma \cap K_1 = \emptyset$  ó  $\gamma \cap \partial K_1 \neq \emptyset$  entonces existe un complejo  $K_2 \supseteq K_1$  con complejidad  $c_2 > c_1$  de tal forma que

1.  $|\partial K_2| \leq |\partial K_1| + \max(|\partial K_1|, |\gamma|)$ .
2.  $\|K_2\| \leq \|K_1\| + |\partial K_1| \max(|\gamma|, |\partial K_1|)$ .
3. Para todo  $\tilde{\gamma} \in K_2 \setminus K_1$  y para todo  $\beta$  se verifica que

$$|\tilde{\gamma} \times \beta| \leq \max_{\omega \in \partial K_1} (|\omega \times \beta| + \max(|\omega \times \beta|, |\gamma \times \beta|)).$$

4. Si  $\beta$  es tal que  $K_1 \cap \beta = \emptyset = \beta \cap \gamma$  entonces  $\beta \cap K_2 = \emptyset$  o  $\beta \cap K_2 = \beta$ .

*Demostración.* El primer caso es cuando  $\gamma$  no interseca la frontera de  $K_1$ . En cuyo caso solo consideramos a  $K_2$  como la unión de  $K_1$  con  $\gamma$ . Los primeros dos incisos son inmediatos de la desigualdad del triángulo y del hecho que el área considerable de los complejos está a lo más concentrada en  $K_1$ . El tercer inciso resulta del hecho que si  $\tilde{\gamma} \in K_2 \setminus K_1$  entonces  $\tilde{\gamma} = \gamma$ . El cuarto inciso se demuestra observando que si  $\beta$  es disjunto de  $K_1$  entonces está contenido en  $\gamma$  (y por lo tanto coinciden) o también es disjunto a este. Por lo tanto podemos considerar el caso cuando  $\gamma$  interseca a  $\partial K_1$ .

Supongamos que la intersección de  $\gamma$  con  $\partial K_1$  se da en la conexión silla  $\omega$  en un punto  $A$ . Supongamos que las singularidades que encasillan a  $\gamma$  son  $P$  y  $Q$  y la singularidad de  $\gamma$  en el exterior de  $K_1$  es  $B$ . Consideramos la composición del segmento  $PA$  con  $\gamma_1$  donde  $\gamma_1$  es el subsegmento de  $\gamma$  en el exterior de  $K_1$ . Sea  $g$  la geodésica que une a  $P$  con  $B$  y entonces consideramos a  $K_2$  como la unión de  $K_1$  con  $\gamma$  y las conexiones silla contenidas en  $g$ . Por construcción  $c_2 \geq c_1 + 1$ . Además los primeros dos incisos se verifican en virtud de la desigualdad del triángulo y de donde se concentra el área. Para demostrar el tercer inciso hay que observar que  $|g| \leq |\omega| + |\gamma|$  por lo tanto, si  $\tilde{\gamma}$  está contenida en  $g$  por la Proposición 2.4.2 tenemos que

$$|\tilde{\gamma} \times \beta| \leq |\gamma_1 \times \beta| + |\beta \times \omega| \leq |\gamma \times \beta| + \max_{\omega \in \partial K_1} |\omega \times \beta|.$$

El cuarto inciso se debe a que por construcción, el dominio rodeado por  $g$ ,  $\gamma_1$  y  $PA$  es simplemente conexo y no tiene singularidades, por lo tanto si  $\beta$  es una conexión silla disjunta de  $K_1$  y de  $\gamma$  entonces es un segmento geodésico de  $g$  o bien es disjunto de  $K_2$ .

Ahora bien, este análisis es válido cuando no todas las conexiones silla que conforman a  $g$  están contenidas en  $K_1$ . De no ser el caso podemos considerar la geodésica  $h$  que une

a  $Q$  con  $B$ , y si no todos los segmentos que conforman esta geodésica  $h$  están contenidos en  $K_1$ , añadiéndolos para construir  $K_2$  con un análisis como en el párrafo anterior nos arroja el resultado. Si por el contrario tanto todas las conexiones silla de  $h$  están en  $K_1$  entonces no puede ser que el dominio acotado por  $g, h$  y  $\omega$  sea un triángulo pues sería una contradicción con la hipótesis de  $\gamma$ . Por lo tanto vamos a partir del hecho que este dominio  $Y$  no es un triángulo.

Por estas restricciones vemos que el único caso no considerado es que  $\gamma$  interseca a  $\partial K_1$  en la conexión silla  $\omega_1$  en un punto no singular  $A_1$  cuyos extremos son los puntos singulares  $x$  y  $y$ . Observemos que no estamos descartando la posibilidad de que  $x = P$  ó  $y = Q$ . Supongamos que  $\gamma_2$  es el segmento de  $\gamma$  que une a  $A$  con  $A_1$ , en cuyo caso  $\gamma_2$  puede ser no homotópicamente trivial relativo a  $\partial K_1$  o si serlo. En el primer caso podemos trasladar paralelamente a  $\gamma_2$  de tal forma que su punto extremo en  $\omega$  sea  $P$  y su punto extremo en  $\omega_1$  sea  $x$ . Podemos hacer este movimiento de tal forma que la longitud de dicho segmento no incremente hasta llegar a un punto singular  $z$ . En ese momento el segmento trasladado se divide en dos segmentos, uno de ellos  $\gamma_3$  que une a  $\omega$  con  $z$  no está contenido en  $\partial K_1$  en virtud que  $\gamma_2$  no es homotópicamente trivial relativo a  $\partial K_1$ . Entonces si  $\beta$  es una conexión silla tal que no interseca ni a  $\gamma$ , ni a  $\omega$  ni a  $\omega_1$  entonces tampoco interseca a  $\omega_3$ , por lo tanto uniendo a  $K_1$  la conexión silla que une a  $x$  con  $z$  tenemos que con un razonamiento análogo al del párrafo anterior los cuatro incisos se satisfacen.

Si por el contrario  $\gamma_2$  es homotópicamente trivial relativo a  $\partial K_1$  entonces la unión de  $\gamma_2$  con  $\omega$ ,  $\omega_1$  y quizá algunos segmentos de  $\partial K_1$ , a saber  $\beta_1, \dots, \beta_p$ , rodea un dominio  $Y \subseteq K_1^c$  el cual es simplemente conexo, por lo tanto existe  $\delta \subseteq K_1^c$  una geodésica cuyos extremos son extremos de  $\omega$  y  $\omega_1$  que además verifica que el dominio rodeado por  $\delta \cup \omega, \omega_1, \beta_1 \cup \dots \cup \beta_p$  es simplemente conexo y contenido en  $K_1^c$ . Por lo tanto

$$K_2 = K_1 \cup \delta \cup \gamma$$

es un complejo que verifica los cuatro incisos de la proposición.  $\square$

**Corolario 2.4.1.** [16] *Existen dos constantes  $k_1, k_2$  de tal forma que para toda  $R > 0$  existe un complejo  $K$  que contiene a todas las conexiones silla de longitud menor o igual a  $R$  y además verifica que  $|\partial K| \leq k_2 R$  y  $\|K\| \leq k_1 R^2$ .*

*Demostración.* Sea  $R > 0$ . Consideremos todas las conexiones silla de longitud menor o igual a  $R$ . Consideremos complejos desde estas conexiones silla y tomemos a un maximal de ellos respecto a la contención. Si triangulamos este complejo el área de cada uno de estos triángulos estará acotada por  $R^2/2$ , de tal forma que si el complejo maximal que obtuvimos tiene todas las conexiones silla entonces las constantes vienen dadas por la cantidad de triángulos que conforman esta triangulación que por la Proposición 2.4.1 está acotada uniformemente. Si existen conexiones silla que no estén en ese complejo maximal podemos construir inductivamente nuevos complejos, supongamos que partimos del complejo  $K_j$  tal que  $|\partial K_j| \leq k_{2,j} R$  y  $\|K_j\| \leq k_{1,j} R^2$  de tal forma que si una conexión silla de longitud menor o igual a  $R$  es disjunto a ese complejo o  $K_j$  por la proposición anterior podemos encontrar un complejo  $K_{j+1} \supseteq K_j$  de tal forma que por la Proposición 2.4.3

$$|\partial K_{j+1}| \leq 2k_{2,j} R + R = (2k_{2,j} + 1)R = K_{2,j+1} R$$

y

$$\|K_{j+1}\| \leq k_{1,j}R^2 + k_{2,j}R^2 + k_{2,j}^2R^2 = (k_{1,j} + k_{2,j} + k_{2,j}^2)R^2 = k_{1,j+1}R^2.$$

Por la Proposición [2.4.1](#) tenemos que existe una cota superior a estas triangulaciones, entonces existe un complejo maximal de esta construcción y todas las conexiones silla de longitud a lo más  $R$  estarán en su frontera o bien contenidas en él.  $\square$

El siguiente corolario es una forma más de construir nuevos complejos desde uno dado.

**Corolario 2.4.2.** [\[16\]](#) *Se verifican los siguientes incisos:*

1. *Sea  $K_1$  un complejo y  $\mathcal{A}$  un conjunto de conexiones silla contenido en  $K_1$ , entonces existe un complejo  $K_2$  contenido en  $K_1$  que a su vez contiene a todas las conexiones silla de  $\mathcal{A}$ .*
2. *Si  $K_1$  y  $K_2$  son complejos entonces existe un complejo  $K_3$  contenido en  $K_1 \cap K_2$  tal que tiene todas las conexiones silla que hay en esa intersección.*

*Demostración.* La demostración del primer inciso es constructiva e inductiva. Sea  $K_j$  un complejo contenido en  $K_1$  y sea  $\gamma \in \mathcal{A}$  que sea disjunto a  $K_j$  o interseque a  $\partial K_j$ . Tenemos que  $\gamma \in \partial K_1$  o bien toda conexión silla en  $\partial K_1$  está contenida en  $K_j$  o es disjunta de  $K_j$  y de  $\gamma$ . En el primer caso el nuevo complejo que otorga la Proposición [2.4.3](#) no interseca el exterior de  $K_1$  y por otro lado, por el cuarto inciso de esa misma proposición, todos los elementos de  $\partial K_1$  o están contenidos en  $K_{j+1}$  o son disjuntos a él, por lo tanto tampoco interseca el exterior de  $K_1$ , entonces este proceso está bien definido y en un punto alcanza a tener a todas las conexiones silla de  $\mathcal{A}$ .

Para probar el segundo inciso solo hay que aplicar el primer inciso al complejo  $K_1 \cap K_2$  y a  $\mathcal{A}$  las conexiones silla que están en esa intersección.  $\square$

**Definición 2.4.5.** *Sean  $K_1$  y  $K_2$  complejos de tal forma que  $K_2$  no esté contenido en  $\partial K_1$ , llamamos el llenado de  $K_2$  en  $K_1$ , denotado por  $K_2^f$  a la unión de  $K_2$  con las componentes de  $K_1 \setminus K_2$  que no intersecan a  $\partial K_1$ .*

Intuitivamente es similar a los conjuntos llenos de Julia en dinámica holomorfa.

Decimos que dos conexiones silla están separadas por un sistema  $\Sigma$  si todo arco que una a estas dos conexiones silla interseque al sistema. Es válido el caso que el sistema contenga a las conexiones silla en cuestión.

**Definición 2.4.6.** *Si  $\Delta$  es un dominio y  $\gamma$  es una conexión silla en  $\partial\Delta$  y  $\beta$  es una conexión silla en  $\Delta$  decimos que  $\beta$  es  $r_1$ -accesible para  $\gamma$  (con  $r_1 > 1$ ) si todo sistema  $\Sigma$  que separe a ambas conexiones silla verifica que*

$$|\Sigma| > \frac{|\gamma|}{r_1}.$$

*Sean  $r_1 > 1$  y  $r_2 > 0$ , decimos que  $\beta$  es  $(r_1, r_2)$  débilmente accesible para  $\gamma$  si  $\beta$  es  $r_1$  accesible para  $\gamma$  o para alguna conexión silla  $\alpha \in \Sigma$  se verifica que*

$$|\alpha \times \gamma| > r_2 \|\Delta\|.$$

**Observaciones:** En virtud que permitimos que las conexiones silla a separar puedan formar parte del sistema que separa implica que si tenemos accesibilidad entonces  $|\beta| > \frac{|\gamma|}{r_1}$ . En particular  $r_1$  accesibilidad implica  $(r_1, r_2)$  accesibilidad para todo  $r_2 > 0$ , pero si pedimos que  $r_2 \geq 2$ ,  $|\Delta| = 1$  y  $|\gamma| \leq 1$  entonces ambas condiciones son equivalentes [16]. Para los siguientes dos resultados utilizaremos que  $r_1, r_2$  son lo suficientemente mayores que 1. También supondremos que  $t_0$  es la cota que nos da la Proposición 2.4.1

**Lema 2.4.3.** [16] *Existe una sucesión de constantes positivas  $C_i$  de tal forma que si  $\Delta$  es un dominio de complejidad  $i$  de área 1 y si  $\beta \subset \Delta$  y  $\gamma \in \partial\Delta$  son dos conexiones silla tal que  $\beta$  es  $(t_0, C_i)$  débilmente accesible para  $\gamma$  entonces va a existir una sucesión de conexiones silla  $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n = \gamma$  que cumplen que:*

1.  $\beta_k$  es disjunta de  $\beta_{k+1}$ .
2.  $|\beta_k \times \beta_{k+1}| \leq C_i$
3.  $\beta_k$  es  $(t_0, C_i)$  débilmente accesible para  $\beta_{k+1}$ .

*Demostración.* Veamos que si tenemos un dominio  $\Delta$  y dos conexiones silla  $\beta$  y  $\gamma$  como en el enunciado del lema, consideramos  $r > 0$  y definimos para todo  $t > 2$  el conjunto de las conexiones silla  $\alpha \subseteq \bar{\Delta}$  que verifiquen que  $|\alpha \times \gamma| \leq t$  que además sean disjuntas de  $\beta$  y lo denotamos como  $\Sigma_t$  entonces una de las siguientes cuatro condiciones se verifica [16]:

- (a) Existe  $\sigma \subseteq \Delta$  tal que  $|\Delta| \leq \frac{|\gamma|}{t_0}$  y  $|\sigma \times \gamma| \leq t$ .
- (b) Existe  $\sigma \in \Sigma_t$  tal que  $\beta$  es  $(t_0, r)$  débilmente accesible para  $\sigma$ .
- (c) Si  $c(t)$  es la cardinalidad del sistema maximal de conexiones silla disjuntas contenido en  $\Sigma_t$  entonces para  $\bar{t} = t_0 r + t(2 + \frac{1}{t_0})$  se verifica que  $c(\bar{t}) > c(t)$ .
- (d)  $|\beta \times \gamma| < t_2$ .

Para demostrar que esta afirmación es correcta observemos que en primer lugar  $\Sigma_t \neq \emptyset$ . Esto se debe a que para  $\gamma$  existe una conexión silla  $\lambda$  de tal forma que  $\lambda$  y  $\gamma$  generan un triángulo contenido en  $\Delta$  entonces el área del paralelogramo generado por estas dos tiene área menor que 2, en particular  $|\gamma \times \lambda| \leq 2 < t$ , como podemos asumir que  $\lambda \in \partial\Delta$  entonces es disjunta de  $\beta$ .

Ahora bien, supongamos que los incisos (a) y (b) no se cumplen. Elijamos un sistema maximal  $\Sigma \subseteq \Sigma_t$  y consideremos el complejo  $K$  generado por este sistema. Sea  $\Delta_\beta$  la componente que contiene a  $\beta$  de  $\Delta \setminus \Sigma$ . Por construcción podemos notar que existe un  $\alpha \in K \cap \partial\Delta_\beta$  de tal forma que  $|\alpha \times \gamma| \leq t$ . Como resultado que (a) no es cierto tenemos que  $|\alpha| > \frac{|\gamma|}{t_0}$ . Como (b) no se cumple entonces existe un sistema  $\Sigma_t$  que separa a  $\gamma$  y  $\beta$  de tal forma que los dos primeros incisos no se satisfacen para ese sistema. Por construcción de  $K$  y  $\Sigma_t$  existe un  $\omega \in \Sigma_t \setminus K$  de tal forma que (1) y (2) son falsos entonces  $|\alpha| \geq t_0|\omega|$  y  $|\omega \times \alpha| \leq r$ .

Por el primer inciso de la Proposición [2.4.1](#) se sigue que para  $\omega, \alpha, \gamma$  se verifica que

$$|\omega \times \gamma| \leq |\gamma \times \alpha| \frac{|\gamma|}{\alpha} + |\alpha \times \gamma| \frac{|\omega|}{\alpha} \leq rt_0 + \frac{t}{t_0}.$$

Aplicando la Proposición [2.4.2](#) a  $k$  y a  $\omega$  obtenemos la existencia de un complejo  $K_1 \supseteq K$  de tal forma que para todo  $\lambda \in K_1 \setminus K$  por el tercer inciso

$$|\lambda \times \gamma| \leq |\omega \times \gamma| + 2 \max_{\sigma \in K} |\sigma \times \gamma| \leq t_0 r + \frac{t}{t_0} + 2t = t_2.$$

Por el cuarto inciso de la misma proposición [2.4.2](#) obtenemos que  $\lambda = \beta$  ó  $\lambda$  es disjunto de  $\beta$ . En el primer caso en virtud de la última desigualdad se cumple (d), en el segundo caso observamos que  $\Sigma \cup \lambda \subseteq \Sigma_{t_2}$  por lo tanto  $\Sigma_{t_2}$  requiere más conexiones silla que  $\Sigma$  para ser triangulado, por lo tanto se verifica (c).

Retomando la demostración del lema. Lo vamos a hacer por inducción sobre la cantidad de conexiones silla que se requiere para triangular a  $\Delta$  (recordemos que es una cantidad que no toma en consideración las conexiones silla de la frontera). El caso cuando dicha cantidad es cero se sigue del hecho que  $\Delta$  está compuesto de a lo más una cantidad finita de triángulos, en cuyo caso la conclusión del lema se verifica pues podemos asumir que está formado por un solo triángulo (el caso que tiene más de uno es análogo). La cadena de conexiones silla solo es  $\beta$  y  $\gamma$ . Por construcción son disjuntas y para una  $D_1 > 1$  lo suficientemente grande, por un argumento de compacidad aplicado al triángulo tenemos que  $|\beta \times \gamma| < 1 = \|\Delta\| < D_1$  además para ese  $D_1$  lo suficientemente grande se verifica la segunda condición para que  $\beta$  sea  $(t_0, D_1)$  débilmente accesible para  $\gamma$ . Entonces podemos asumir que hemos encontrado las constantes requeridas para los dominios que necesiten menos de  $n$  conexiones silla para ser triangulados. Sea  $\Delta$  un dominio con las condiciones del enunciado que además requiera de  $n$  conexiones silla para ser triangulado. Sean  $C_k$  las constantes encontradas por hipótesis de inducción. Sea  $t = C_{n-1}$  y definimos una función  $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(r) = t_0 t + \left(\frac{1}{t_0} + 2\right)r.$$

Veremos que la constante que buscamos es  $C_n = F^{(t_0+1)}(t)$ . Si para alguna  $r < C_n$  verifica la condición (a) entonces solo basta hacer la observación que si  $\beta$  no es  $(t_0, C_{n-1})$  débilmente accesible para  $\gamma$  en  $\Delta \setminus \sigma$  entonces no sería  $(t_0, C_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$  en  $\Delta$ . Esto resulta del hecho que si a un sistema  $\Sigma$  que separa a  $\beta$  de  $\gamma$  en  $\Delta \setminus \sigma$  entonces  $\Sigma_2 = \Sigma \cup \sigma$  es un sistema que separa a  $\beta$  de  $\gamma$  en  $\Delta$  y además (1) y (2) no serían ciertos. Como la cantidad de conexiones silla necesarias para triangular  $\Delta$  es  $n$  entonces la cantidad necesaria de conexiones silla para triangular  $\Delta \setminus \sigma$  es  $n - 1$  entonces por la hipótesis de inducción encontramos la sucesión de conexiones silla que verifican la conclusión, entonces si a esa sucesión se le añade  $\sigma$ , por el inciso (a) se sigue la conclusión para  $n$ . De esta forma hay que suponer que (a) no se verifica para toda  $C_{n-1} \leq t \leq C_n$ . Apliquemos la afirmación de los incisos (a) – (d) a las siguientes constantes:

$$C_{n-1}, F(C_{n-1}), \dots, F(t_0 + 1)(C_{n-1}).$$

Si para alguna de esas constantes se cumple (a) ya vimos qué ocurre y como se soluciona. Supongamos que para ninguna de esas constantes se verifica (a). No se puede satisfacer para todas (c) pues esta puede ser a lo más aplicado  $t_0$  veces. Entonces fijémonos en ese caso en el que no se cumplen (a) ni (c). Como alguna de las cuatro tiene que ser cierta entonces o bien puede ser que (b) sea cierto en cuyo caso consideramos  $\alpha = \beta_{m-1}$  y por construcción de  $\alpha$  y por la hipótesis de inducción tenemos la cadena deseada. Por otro lado si (d) es quien se satisface entonces la cadena de conexiones silla solo consiste de  $\gamma$  y  $\beta$  y verifica los incisos deseados. En cualquier caso obtenemos la cadena de conexiones silla deseada.  $\square$

### Desigualdades integrales

Recordemos que una *sístola* para una una foliación medible en superficie de traslación  $(S, \omega)$  es la conexión silla de menor longitud. Siguiendo esa filosofía vamos a definir dos objetos.

**Definición 2.4.7.** *Sea  $\Delta$  un dominio, definimos*

$$\mathcal{L}(\Delta) = \min\{|\gamma| \mid \gamma \text{ es conexión silla } \gamma \subset \Delta\}.$$

Recordando la discusión sobre la accesibilidad de las conexiones silla [2.4.6](#), consideremos el mismo dominio  $\Delta$ .

**Definición 2.4.8.** *Fijemos una conexión silla en su frontera, a saber  $\gamma$ . Sea  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Una conexión silla  $\beta \subset g_t \circ r_\theta(\Delta)$  es accesible si  $r_\theta^{-1} \circ g_t^{-1}\beta \subset \Delta$  es  $t_0$ -accesible de  $\gamma$ . La constante  $t_0$  es cota superior de las conexiones silla disjuntas ya mencionada. Consideramos*

$$\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta(\Delta)) = \min\{|\beta| \mid \beta \subset g_t r_\theta(\Delta) \mid \text{es } t_0\text{-accesible para } \gamma\}.$$

**Definición 2.4.9.** *Análogo al caso de las conexiones silla, fijando un  $\gamma \subseteq \partial\Delta$ , para algún  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $t \in \mathbb{R}$  decimos que un complejo  $K \subseteq g_t r_\theta(\Delta)$  de complejidad  $n$  es admisible si*

- (a)  $\|K\| \leq 2^n k_1^2$ , donde  $k_1$  es la constante relativa al área del Corolario [2.4.1](#).
- (b) Todo sistema  $\Sigma \subseteq \Delta$  de conexiones silla que separa a  $r_\theta^{-1} g_t^{-1}(K) \subseteq \Delta$  de  $\gamma$  cumple que  $|\Sigma| > \frac{|\gamma|}{t_0}$ .

Observemos que en particular si  $K$  es admisible entonces  $|\partial(r_\theta^{-1} g_t^{-1}(K))| > |\gamma|/t_0$  [16](#).

En los siguientes párrafos vamos a construir una sucesión de funciones  $f_n$  y unos operadores promedio:

**Definición 2.4.10.** *Sea  $\epsilon > 0$  y  $\Delta$  un dominio tal que  $\|\Delta\| = 1$ . Definimos*

$$f_n(g_t r_\theta \Delta) = \max \left( \sup_{K_n} \frac{1}{|\partial K_n|^{1+\epsilon}}, 1 \right).$$

Donde el supremo se considera sobre todos los complejos  $K_n$  contenidos en  $g_t r_\theta \Delta$  de complejidad  $n$ .

**Definición 2.4.11.** Para una  $r > 0$  definimos un operador  $P_f$  sobre las funciones integrales definidas en la órbita de  $SL(2, \mathbb{R})$  de una superficie  $S$ , dada por

$$P_r(f)(S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_r r_\theta S) d\theta.$$

Es decir, es el promedio de  $f$  en el círculo de radio  $r$  centrado en  $S$  ( $r_\theta$  es la rotación por ángulo  $\theta$ ).

**Proposición 2.4.4.** [16] Sea  $\epsilon \in (0, 1)$ . Existe una constante  $K(\epsilon)$  de tal forma que para toda  $r > 0$  y para todo  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$  se verifica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\|g_r r_\theta v\|^{1+\epsilon}} \leq \frac{K(\epsilon)e^{-r(1-\epsilon)}}{\|v\|^{1+\epsilon}}.$$

*Demostración.* Utilizando un argumento de rotación y escalamiento [16] podemos suponer que  $v = (0, 1)$ . La demostración consiste en observar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\|g_r r_\theta v\|^{1+\epsilon}} = O(e^{-r(1-\epsilon)}).$$

Si  $v = (0, 1)$  entonces  $g_r r_\theta v = e^r \text{sen}(\theta) + e^{-r} \text{cos} \theta$  así

$$\|g_r r_\theta v\|^{1+\epsilon} = (e^{2r} \text{sen}^2(\theta) + e^{-2r} \text{cos}^2(\theta))^{(1+\epsilon)/2}.$$

Vamos a dividir al intervalo  $[0, 2\pi]$  en los conjuntos

$$A = \{\theta \mid 2^{2r} \text{sen}^2 \theta \leq e^{-2r} \text{cos}^2 \theta\}$$

y

$$B = \{\theta \mid e^{-2r} \text{cos}^2 \theta < e^{2r} \text{sen}^2 \theta\}.$$

Los elementos que conforman al conjunto  $A$  son los que verifican que

$$e^{2r} \text{sen}^2 \theta - e^{-2r} (1 - \text{sen}^2 \theta) \leq 0.$$

Lo cual es equivalente a que

$$\text{sen}^2 \theta \leq \frac{e^{-2r}}{e^{-2r} + e^{2r}}.$$

Entonces existen unas constantes uniformes  $A_1$  y  $A_2$  de tal forma que

$$A_1 e^{-2r} \leq \mu(A) \leq A_2 e^{-2r}.$$

Donde  $\mu$  es a medida de Lebesgue. Por otro lado observemos que en el conjunto  $A$  el integrando está acotado por  $(2e^{-2r} \text{cos}^2 \theta)^{\frac{-1-\epsilon}{2}} = O(e^{r(1+\epsilon)})$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_A (e^{2r} \text{sen}^2 \theta + e^{-2r} \text{cos}^2 \theta)^{\frac{-1-\epsilon}{2}} d\theta = O(e^{-r(1-\epsilon)}).$$

Además por las cotas que realizamos de  $\mu(A)$  tenemos que

$$\int_B (e^{2r} \operatorname{sen}^2 \theta + e^{-2r} \operatorname{cos}^2 \theta)^{\frac{-1-\epsilon}{2}} d\theta \leq \int_B (2e^{-2r} \operatorname{cos}^2 \theta)^{\frac{-1-\epsilon}{2}} = e^{r(\epsilon+1)} \int_B |\operatorname{sen} \theta|^{-1-\epsilon} d\theta = O(e^{-r(1-\epsilon)}).$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\|g_r r_\theta v\|^{1+\epsilon}} = O(e^{-r(1-\epsilon)}) = \frac{K(\epsilon)}{e^{r(1-\epsilon)}}.$$

□

**Proposición 2.4.5.** [16] Sea  $\epsilon \in (0, 1)$ . Para toda  $r > 0$  existen dos constantes  $p = p(\epsilon, r)$  y  $q = q(\epsilon, r)$  de tal forma que para toda  $n$  y para toda  $S = g_t r_\theta X$  se verifica que

$$P_r(f_n)(S) \leq K(\epsilon) e^{-1(1-\epsilon)r} g_n(S) + q + p \left( \sum_{m>n} f_m(S) \right).$$

Donde  $K(\epsilon)$  es la constante de la Proposición 2.4.4.

*Demostración.* Vamos a suponer que en  $S$  la cantidad  $|\partial K_n|$  tiene longitud de a lo más  $e^{-2r} k_1$ , donde  $K_n$  es el complejo que verifica ser el supremo asociado a  $f_n$ . De otra forma se sigue el resultado deseado pues en el círculo de radio  $r$  centrado en  $S$  se tiene que  $f_n$  es uniformemente acotada, entonces podemos deshacernos de la constante  $q$ .

Con dicha suposición tenemos que  $P_f(f_n)$  es el promedio de

$$\min_{v \in \partial K_n} \frac{1}{\|g_r r_\theta v\|^{1+\epsilon}},$$

el cual es menor que el mínimo de los promedios. Por lo tanto por la existencia de la cota es consecuencia de la Proposición 2.4.4.

Si para algún  $\psi \in [0, 2\pi]$  existe otro complejo  $K_n^\psi \subseteq S$  de tal forma que tiene la misma complejidad que  $K_n$  y además

$$|\partial(g_r r_\psi K_n^\psi)| \leq |\partial(g_r r_\psi K_n)|.$$

Como ambas longitudes máximas pueden diferir por a lo más un factor de  $e^r$  se sigue que

$$|\partial K_n^\psi| \leq e^r |\partial(g_t r_\psi K_n^\psi)|.$$

Si  $\partial K_n^\psi \cap \partial K_n \neq \emptyset$ , consideremos  $\sigma \in \partial K_n^\psi \setminus \partial K_n$ . Por la Proposición 2.4.2 existe un complejo  $K_m^\psi$  con complejidad  $m > n$  que además verifica que  $K_n \subseteq K_m^\psi$ . Este nuevo complejo es admisible para un  $\gamma$  fijo, de no ser admisible entonces existiría un sistema  $\Sigma$  que separaría a  $r_\theta^{-1} g_t^{-1}(K_n)$  de  $\gamma$  y por lo tanto  $K_n$  no sería admisible. Así se satisface el segundo requerimiento de la definición de admisibilidad. En virtud que las longitudes de

$\partial K_n$  y de  $\partial K_n^\psi$  son de a lo más  $k_1$  entonces  $\|K_n\| \leq 2^n k_1^2$  y por la proposición **2.4.2** se sigue que también la primera condición de admisibilidad se verifica. Por lo tanto

$$|\partial K_m^\psi| \leq |\partial K_n| + \max(|\partial K_n|, |\partial K_n^\psi|) \leq 2|\partial K_n|.$$

De este hecho se desprende que

$$f_n(g_t r_\theta S) = \frac{1}{|\partial(g_t r_\theta K_n^\psi)|^{1+\epsilon}} \leq \frac{p}{|\partial K_m^\psi|^{1+\epsilon}} \leq p f_m(S).$$

Donde  $p = (2e^r)^{1+\epsilon}$ .

Si  $\partial K_n \cap \partial K_n^\psi = \emptyset$  podemos definir  $K_m^\psi = K_n^\psi \cup K_n$  y entonces para todo sistema  $\Sigma$  que separe a  $r_\theta^{-1} g_r^{-1}(K_m^\psi)$  de  $\gamma$  lo hace para  $r_\theta^{-1} g_r^{-1}(K_n)$ , lo cual no debería ocurrir, y así tenemos que la segunda condición de admisibilidad se cumple. Por lo tanto como

$$\|K_m^\psi\| \leq \|K_n\| + \|K_n^\psi\| \leq 2^{n+1} k_1^2 \leq 2^m k_1^2$$

se sigue que  $K_m^\psi$  es admisible. Entonces  $|\partial K_m^\psi| \leq 2|\partial K_n|$  y de esta forma

$$f_n(g_t r_\theta S) \leq p f_m(S)$$

que es lo que necesitábamos demostrar.  $\square$

Si  $\gamma$  es una conexión silla en una superficie  $S$  entonces existe un ángulo  $\theta$  tal que  $\gamma$  induce un vector vertical en  $r_\theta(S)$ . A este ángulo se le conoce como ángulo vertical de  $\gamma$ . Vamos a fijar una conexión  $\gamma$  y suponer que tiene ángulo vertical nulo como una constante  $\rho > 0$ . Para toda  $t > 0$  definamos un subintervalo de  $[-\pi, \pi]$  dado por  $I(t) = [-\frac{\rho e^{-t}}{|\gamma|}, \frac{\rho e^{-t}}{|\gamma|}]$ . Estos intervalos tienen la característica que  $I(t+s) \subset I(t)$ .

Para hacer uso de la intuición y de las herramientas geométricas, vamos a identificar a  $SO(2)/SL(2, \mathbb{R})$  con el disco  $D^2$  dotado de la métrica hiperbólica [\[4\]](#). Los puntos en este conjunto vienen dados por  $z_0 = g_t r_\theta$ , es decir puntos sobre el círculo de radio  $t$  y ángulo  $\theta$ . Para un  $z_0 \in D^2$  vamos a considerar los puntos que tienen la forma  $g_s r_\phi g_t r_\theta$ . Es decir, los puntos que están en la circunferencia de radio  $s$  centrados en el punto  $z_0$ . Estos a su vez tienen una representación polar dada por  $g_p r_{\theta+\psi}$  donde  $p = p(t, s, \phi)$  y  $\psi = \psi(t, s, \phi)$ .

**Definición 2.4.12.** Sea  $\delta > 0$ . Para  $\theta \in I(t+s) \subset I(t)$  vamos a definir

$$O_\theta(\delta, t, s) = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid p(t, s, z) \geq t + s - \delta \text{ y } \theta + \psi(t, s, z) \in I(t+s)\}.$$

Es decir los puntos de la forma  $g_s r_z g_t r_\theta$  de tal suerte que se encuentren fuera del círculo de radio  $t + s - \delta$  y su proyección radial al círculo de radio  $t + s$  esté contenida en  $I(t+s)$ . El siguiente resultado es una cota para la medida de estos conjuntos y una propiedad que más adelante nos permitirá hacer uso del teorema de cambio de variable, el cual nos servirá para acotar la integral del lema [2.4.2](#)

**Lema 2.4.4.** [16] Existe  $\kappa > 0$  de tal forma que para toda  $\delta > 0$  existen  $s, \rho > 0$  donde para toda  $\theta \in I(t+s)$  se verifica que  $\mu(O_\theta) \geq \kappa\mu(\mathbb{S}^1)$ <sup>3</sup>. Además el mapeo  $\Psi : O_\theta \rightarrow \mathbb{S}^1$  que viene dado por  $\Psi(\phi) = \psi(t, s, \phi)$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Más aún:

$$2\pi\kappa \leq \mu(O_\theta) = \int_{O_\theta} d\phi = \int_{\Psi(O_\theta)} \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right| d\psi.$$

*Demostración.* Definamos  $M(t)$  como el arco en el círculo de radio  $t$  cuyos ángulos estén en el intervalo  $I(t)$ . Para  $\delta > 0$ , considerando un  $s > 0$  lo suficientemente grande, el hecho de que  $g_s r_z g_r r_\theta$  está fuera del círculo hiperbólico de radio  $t + s - \delta$  para casi todos los ángulos  $z \in \mathbb{S}^1$  es evidente si  $s$  es lo suficientemente grande. Podemos construir una  $\rho$  para la definición de  $I(t+s)$  de tal forma que para toda  $t > 0$  el arco  $M(t)$  tenga longitud de al menos  $2s + 2\delta$ . Esta  $\rho$  puede ser realizada de tal forma que solo dependa de  $\delta$  y del módulo de  $\gamma$ . Por esta construcción tenemos que para todo  $\theta \in I(t+s)$  existe un conjunto  $A$  tal que  $\mu(A) \geq \mu(I(t+s)/2)$  y para todo  $\psi \in A$  se tenga que  $\theta + \psi \in I(t+s)$ . Entonces por estas condiciones podemos concluir que en efecto  $\Psi$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Las desigualdades con la medida de Lebesgue y las integrales son solo la definición de la medida y resultado del teorema de cambio de variable.  $\square$

Utilizando esta estimación podemos encontrar relaciones entre las integrales de los operadores  $P_r$  sobre este tipo de intervalos de ángulos:

**Proposición 2.4.6.** [16] Para toda  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  que verifique que para toda  $\epsilon > 1$  exista una  $\delta > 0$  tal que para toda  $z \in D^2$  y  $d_h(\bar{0}, z) \leq \delta$  y para toda  $h \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  es cierto que

$$\frac{f(h)}{\epsilon} \leq f(zh) \leq \epsilon f(h),$$

y que además si se consideran las constantes  $s, \rho$  del Lema 2.4.4, entonces se cumple que

$$\int_{I(t+s)} f(g_{t+s} r_\theta) d\theta \leq k' \epsilon \int_{I(t)} P_s(f)(g_t r_\theta) d\theta.$$

Más aún, la constante no depende de  $s$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar esta cadena de desigualdades

$$P_s(f)(g_t r_\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g_s r_\phi g_t r_\theta) d\phi \geq \frac{1}{2\pi} \int_{O_\theta} f(g_s r_\phi g_t r_\theta) d\theta \geq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Psi(O_\theta)} f(g_{t+s} r_{\theta+\psi}) \left| \frac{d\phi}{d\Psi} \right| d\Psi.$$

La primera igualdad se sigue de la definición del operador. La primera desigualdad se debe a que  $O_\theta \subseteq \mathbb{S}^1$  ??y la tercera se sigue de la conclusión del Lema 2.4.4 considerando  $\epsilon > 0$  y las propiedades  $f$  descritas en el enunciado del lema. Esta cadena la vamos a integrar respecto a  $\theta$  en el intervalo  $I(s+t)$  para obtener

$$\int_{I(s+t)} P_s(f)(g_t r_\theta) d\theta \geq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Psi(O_\theta)} f(g_{t+s} r_{\theta+\psi}) \left| \frac{d\phi}{d\Psi} \right| d\Psi d\theta.$$

---

<sup>3</sup> $\mu$  es la medida de Lebesgue.

Por el teorema de Fubini y considerando  $\eta = \theta + \psi$  como cambio de variable tenemos que la segunda integral coincide con

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{I(t+s)} f(g_{t+s}r_\eta) \left( \int_{-\Psi(O_\eta)} \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right| d\psi \right) d\eta \geq \frac{1}{k'\epsilon} \int_{I(t+s)} f(g_{t+s}r_\eta) d\theta.$$

Donde la desigualdad se verifica, pues en el Lema [2.4.4](#) vimos que existe  $\kappa$  tal que

$$2\pi\kappa \leq \int_{\Psi(O_\theta)} \left| \frac{d\phi}{d\psi} \right| d\psi.$$

Ahora bien, notemos que en el dominio de integración aparece  $-\Psi(O_\eta)$ . El signo lo justificamos de la siguiente manera siguiendo [\[16\]](#):

Sea  $x \in S^{(t)} \cap \mathbb{R}$ , consideremos  $S^{(s)}(x)$  como el círculo de radio  $s$  centrado en  $x$ . Fijémonos en los puntos

$$\{a, b\} = S^{(s)} \cap S^{t+s-\delta}.$$

Considerando la simetría respecto al origen denotemos por  $\theta_a$  y  $\theta_b$  los ángulos respecto al origen correspondientes a cada punto. Fijémonos en el intervalo  $I = [\theta_a, \theta_b]$ .

El dominio de integración antes de aplicar el teorema de cambio de variable es

$$\Psi(O_\theta) = \{(\theta, \psi) \mid \theta \in I(t+s), \psi \in I \cap I(t+s) - \theta\}.$$

Al aplicar el teorema de cambio de variable el dominio de integración pasa a ser el conjunto

$$C = \{(\eta, \psi) \mid \eta \in I(t+s), \psi \in I \cap (-I(t+s) + \eta)\} = -\Psi(O_\eta).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{k'\epsilon} \int_{I(t+s)} f(g_{t+s}r_\eta) d\eta \leq \int_{I(t+s)} P_s(f)(g_t r_\theta) d\theta.$$

Además por la observación que  $I(t+s) \subset I(t)$  se sigue que

$$\frac{1}{k'\epsilon} \int_{I(t+s)} f(g_{t+s}r_\eta) d\eta \leq \int_{I(t)} P_s(f)(g_t r_\theta) d\theta.$$

□

El siguiente lema nos va a funcionar para demostrar la finitud de la integral que acota superiormente a la integral del Lema [2.4.1](#) como comentamos en el sketch de la demostración del Teorema [2.1.6](#)

**Lema 2.4.5.** [\[16\]](#) Sean  $\Delta$  un dominio y  $\gamma \subset \partial\Delta$  donde  $|\gamma| \leq 1$ . Para toda  $\sigma \in (0, 1/2)$  existe una  $\rho$  y una constante  $\bar{K}$  donde para toda  $t > 0$

$$\int_{I(t)} \frac{d\theta}{\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta \Delta)} \leq \frac{\bar{K} e^{-(1-2\sigma)t}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

*Demostración.* Vamos a escribir que las funciones  $f_n = 1$  para toda  $n > t_0$ , donde  $t_0$  es la cota de las conexiones silla. Fijémosnos en  $\epsilon > 1$ . Consideremos un  $\sigma > 0$  de tal forma que satisfaga la hipótesis de la Proposición 2.4.6 y sea  $s > 0$  lo suficientemente grande de tal forma que podamos aplicar la Proposición 2.4.6 y la Proposición 2.4.5. En virtud de las cuales

$$\begin{aligned} \int_{I(t+s)} f_n(g_{s+t}r_\theta\Delta)d\theta &\leq k'\epsilon \int_{I(t)} P_s(f_n)(g_t r_\theta\Delta)d\theta \leq \\ k'\epsilon \int_{I(t)} k\epsilon e^{-(1-\sigma)s} f_n(g_t r_\theta\Delta)d\theta &+ k'\epsilon \int_{I(t)} qd\theta + k'\epsilon \sum_{m>n} \int_{I(t)} f_m(g_t r_\theta\Delta)d\theta = \\ k k'\epsilon e^{1-\sigma)s} \int_{I(t)} f_n(g_t r_\theta\Delta)d\theta &+ \frac{2k'q\rho e^{-t}}{|\gamma|} + k'\epsilon p \sum_{m>n} \int_{I(t)} f_m(g_t r_\theta\Delta)d\theta. \end{aligned}$$

Nos gustaría encontrar que

$$\int_{I(t)} f_i(g_t r_\theta\Delta)d\theta \leq \frac{K_i e^{t(2\sigma-1)}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

Si esto fuera cierto, notando que  $f_1(\Delta) = \frac{1}{\mathcal{L}_\gamma(\Delta)}$  se seguiría que

$$\begin{aligned} \int_{I(t)} \frac{d\theta}{\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta\Delta)} &\leq \int_{I(t)} \frac{K_1 e^{t(2\sigma-1)}}{|\gamma|^{2\sigma+1}} = \frac{2K_1 e^{t(2\sigma-1)} e^{-t} \rho}{|\gamma|^{2\sigma+2}} = \\ &\frac{\bar{K} e^{-t(1-2\sigma)}}{|\gamma|^{2\sigma+1}}, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{K} = \frac{2K_1 e^{-t} \rho}{|\gamma|}.$$

Observemos que por cómo escribimos a las  $f_i$  tenemos que

$$\int_{I(t)} d\theta = \frac{2\rho e^{-t}}{|\gamma|} \leq \frac{K_i e^{t(2\sigma-1)}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

Donde

$$K_1 \geq 2|\gamma|^{2\sigma} \rho e^{-2\sigma t}.$$

Entonces vamos a suponer que hemos demostrado la desigualdad deseada para toda  $m > n$ . Observemos que basta con demostrar la desigualdad para  $t = js$  para toda  $j$ , pues para una  $t$  fija siempre podemos hallar alguna  $j$  donde  $js \leq t$  entonces por las propiedades de los intervalos  $I(t)$  tendríamos la desigualdad deseada para integrales. Consideremos

$$a_j = \int_{I(js)} f_n(g_{js}r_\theta\Delta)d\theta.$$

Entonces tenemos que

$$a_{j+1} = \int_{t+s} f_n(g_{t+s}r_\theta\Delta)d\theta \leq k k'\epsilon^{-s(1-\sigma)} \int_{I(t)} f_n(g_t r_\theta\Delta)d\theta + \frac{2k'\epsilon q\rho e^{-t}}{|\gamma|} + k'\epsilon p \sum_{m=n+1}^{t_0} \int_{I(t)} f_m(g_t r_\theta\Delta)d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 & kk'\epsilon e^{-(1-\sigma)s} a_j + \frac{2k'\epsilon q \rho e^{-t}}{|\gamma|} + k'\epsilon p \sum_{m=n+1}^{t_0} \int_{I(t)} f_m(g_{js} r_\theta \Delta) d\theta \leq \\
 & kk'\epsilon e^{-(1-\sigma)s} a_j + \frac{2k'\epsilon q \rho e^{-t}}{|\gamma|} + k'\epsilon p (t_0 - n) \max\{K_m\} e^{t(\sigma-1)} \frac{1}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto existen constantes  $p'_1, p'_2$  que dependen de  $p, q, K_m, k', \epsilon$  de tal forma que

$$\frac{2k'\epsilon q \rho e^{-t}}{|\gamma|} \leq \frac{p'_1 e^{-js} e^{2\sigma js}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}$$

y

$$(t_0 - n) \max\{K_m\} k'\epsilon p e^{t(2\sigma-1)} \leq p'_2 (e^{-js} e^{2\sigma js}).$$

Por lo tanto existe una  $p'$  tal que  $p'_1 + p'_2 \leq p'$  y nos dice que

$$a_{j+1} \leq kk'\epsilon e^{-1(1-\sigma)s} a_j + \frac{p' e^{-js} e^{2js\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

Con esta observación, iterando esta desigualdad, podemos encontrar una cota para  $a_j$  en términos de  $a_0$  tal que

$$\begin{aligned}
 a_j & \leq kk'\epsilon e^{-(1-\sigma)s} a_{j-1} + \frac{p' e^{s(j-1)\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}} \leq \\
 & kk'\epsilon e^{-(1-\sigma)s} (kk'\epsilon e^{-(1-\sigma)s} a_{j-2} + \frac{p' e^{s(j-2)\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}) + \frac{p' e^{s(j-1)} e^{2(j-1)\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}} \leq \dots \leq \\
 & e^{js} ((kk'\epsilon)^j e^{js\sigma} a_0 + \frac{p''}{|\gamma|^{1+2\delta}} \sum_{l=1}^{j-1} (kk'\epsilon e^{s\sigma})^l e^{(j-l)s\sigma}).
 \end{aligned}$$

Observemos que por la definición de admisibilidad [2.4.9](#) se sigue que

$$a_0 \leq \frac{(t_0)^{1+\sigma}}{|\gamma|^{1+\sigma}}.$$

Si tomamos  $s > 0$  lo suficientemente grande entonces podemos asumir que  $(kk'\epsilon e^{-s\sigma}) < 1/2$  entonces tenemos que

$$a_j \leq e^{js} ((kk'\epsilon)^j e^{js\sigma} (t_0)^{1+\sigma} \frac{1}{|\gamma|^{1+\sigma}} + \frac{p''(n-1)(kk'\epsilon e^{s\sigma}) e^{2js\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}) \leq \frac{\bar{P} e^{js} e^{2js\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

Por lo tanto se verifica la desigualdad para toda  $j \in \mathbb{N}$ . De esta forma se sigue que

$$\int_{I(t)} f_n(g_t r_\theta \Delta) d\theta \leq \frac{K_n e^{-t} e^{2t\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

Entonces por la definición de  $f_1$  se sigue que

$$\int_{I(t)} \frac{d\theta}{\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta \Delta)} \leq \frac{K_1 e^{-t} e^{2t\sigma}}{|\gamma|^{1+2\sigma}}.$$

□

Haciendo uso del lema anterior ya podemos probar la finitud de la integral que comentamos en el sketch de la demostración del Teorema [2.1.6](#)

**Corolario 2.4.3.** [\[16\]](#) Sea  $S$  una superficie en  $\mathcal{H}(d)$ . Tenemos que para toda  $t$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{L}(g_t r_\theta S)} < \infty.$$

Además podemos encontrar cotas uniformes en conjuntos compactos de  $\mathcal{H}(d)$ .

*Demostración.* Podemos considerar particiones de la superficie por complejos de tal forma que estos complejos  $\Delta_\alpha$  verifican que  $|\Delta_\alpha| = 1$ . También podemos elegir unos  $\gamma_\alpha \subset \partial\Delta_\alpha$  de tal forma que  $|\gamma_\alpha| \leq 1$ . Todas las conexiones silla en esos  $\Delta_\alpha$  admisibles verifican la conclusión del Lema [2.4.5](#). En vista que la  $\rho$  que funciona para construir los intervalos de integración puede ser arbitrariamente grande, podemos asumir que  $I(t) = [0, 2\pi]$ . Entonces tenemos una cota para esa partición de la superficie, entonces lo que hacemos es considerar colecciones de cubiertas con las condiciones descritas, de tal forma que todas las conexiones silla arbitrariamente pequeñas estén consideradas en algún caso y de esta forma obtenemos el resultado. Por construcción tenemos que las cotas pueden ser localmente elegidas de forma uniforme.  $\square$

### Lema inductivo y demostración del teorema

En esta sección vamos a enunciar y demostrar una modificación del Lema [2.4.2](#) cuya demostración la comentaremos sin mucho detalle pues en espíritu es similar a la de dicho lema. Posteriormente vamos a enunciar y demostrar el *lema inductivo*, el cual es la herramienta clave para demostrar el Teorema [2.1.6](#). Seguiremos el procedimiento de los autores [\[16\]](#).

**Definición 2.4.13.** Para dos constantes  $0 < R_1 < R_2$  y para un  $\phi > 0$  definimos el conjunto  $A(R_1, R_2, \phi)$  como los vectores en  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$  que  $R_1 \leq \|v\| \leq R_2$  y cuyo ángulo vertical es de a lo más  $\phi$ .

Recordemos que  $|V(\Delta, R)| = |V(\Delta) \cap B(R, 0)|$ .

**Proposición 2.4.7.** [\[16\]](#) Sean  $\Delta$  un dominio,  $\phi > 0$  y dos constantes  $0 < R_1 < R_2$ . Sea  $V^4$  un conjunto de vectores asociado a  $\Delta$  de tal forma que para toda  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  se cumple que  $g(V(\Delta)) = V(g(\Delta))$ . Para toda  $1 > \epsilon > 0$  existe una constante  $c$  de tal forma que para toda  $R > 1$  y toda  $\phi > 1/R$  es verdadero que

$$|A(\epsilon R/4, \epsilon R/2, \phi) \cap V(\Delta)| \leq cR^2 \int_{-2\phi}^{2\phi} |V(\epsilon, g_t r_\theta \Delta)| d\theta.$$

Donde  $t = \log(R)$ .

---

<sup>4</sup>La proposición está enunciada en general, sin embargo vamos a considerar que  $V = \text{HOL}$ .

*Demostración.* Podemos construir una  $f(x, y)$  tal que  $f(x, y) = \frac{16\pi}{\epsilon^2} \chi$  donde  $\chi$  es la función característica del rectángulo  $[-\epsilon/4, \epsilon/4] \times [\epsilon/8, 3\epsilon/4]$ . Entonces siguiendo el mismo argumento del Lema 2.4.2 tenemos que para toda  $t > 0$  para  $\phi > e^{-t}$  y todo  $v \in A(\epsilon e^t, \epsilon e^t/2, \phi)$  se sigue que

$$e^{2t} \int_{-2\phi}^{2\phi} f(g_t r_\theta v) d\theta \geq 1.$$

Repetiendo los pasos de la demostración del Lema 2.4.2 y notando qué elementos forman la intersección mencionada en el enunciado se sigue el resultado deseado.  $\square$

Para enunciar el siguiente lema vamos a definir unas cantidades asociadas a un dominio  $\Delta$  de complejidad a lo más  $n$ , de área a lo más 1 y a una conexión silla  $\gamma \subset \partial\Delta$ .

- Definición 2.4.14.**
1. Sea  $R > 0$ . Recordemos las constantes  $C_n$  del Lema 2.4.3. Definimos  $N(\gamma, R)$  a la cantidad de conexiones silla  $\beta$  de tal forma que  $|\beta| \leq R$ ,  $\beta$  es  $(t_0, C_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$  y además  $|\beta \times \gamma| \leq C_n |\Delta|$ .
  2. Definimos  $M(\gamma, R)$  al número de conexiones silla de tal forma que  $|\beta| < R$  y que son  $(t_0, C_n)$  débilmente accesibles para  $\gamma$  2.4.8.
  3. Sea  $K$  un complejo, posiblemente vacío, que no contiene a  $\partial\Delta$ . Definimos como  $\Delta_K$  al complemento de  $K_f$ . Definimos  $O(\Delta, K, R)$  el número de conexiones silla  $\beta$  donde  $|\beta| \leq R$  y  $\beta \cap \Delta_K \neq \emptyset$ .

**Nota:** La demostración del lema inductivo que utilizaremos siguiendo [16] se realiza demostrando por inducción tres enunciados  $a, b, c$ . Nos referiremos a  $a_n, b_n, c_n$  al paso  $n$  de la inducción aplicado a  $a, b, c$  respectivamente.

**Lema 2.4.6. Lema inductivo [16]** Sea un dominio  $\Delta$  y sea una conexión silla  $\gamma$  en la frontera cuya longitud es a lo más 1. Si  $\Delta$  tiene complejidad a lo más  $n$  entonces para toda  $\delta > 0$  existen constantes  $C_n^1, C_n^2, C_n^3$  de tal forma que

$$(a_n) \quad N(\gamma, R) \leq C_n^1 \left(\frac{R}{|\gamma|}\right)^{1+\delta}.$$

$$(b_n) \quad M(\gamma, R) \leq C_n^2 \left(\frac{R}{|\gamma|}\right)^{1+\delta}.$$

$$(c_n) \quad O(\Delta, K, R) \leq C_n^3 \left(\frac{R}{\mathcal{L}(\Delta, K)}\right)^{1+\delta} \text{ donde } \mathcal{L}(\Delta, K) \text{ es la longitud mínima de las conexiones silla de } \Delta \text{ de tal forma que } \Delta_K \cap \gamma \neq \emptyset.$$

*Demostración.* La demostración se realiza por inducción sobre  $n$ , la máxima complejidad de los complejos  $\Delta$ .

Observemos que para  $n = 1$  las tres desigualdades se verifican pues si  $\Delta$  tiene a lo más complejidad 1 entonces solo se puede añadir a lo más una conexión silla y entonces las constantes buscadas resultan haciendo el análisis para esa conexión silla.

Vamos a suponer que hemos demostrado para  $n - 1$ . Lo cual lo escribiremos como que hemos demostrado  $(a_{n-1}), ((b_{n-1}), (c_{n-1}))$ .

( $a_n$ ) Veamos que ( $c_{n-1}$ ) y el Lema 2.4.5 implican ( $a_n$ ).

Sea  $\beta$  una conexión silla que verifica las condiciones del enunciado. Se sigue que

$$\frac{|\beta|}{|\gamma|} \geq \frac{1}{t_0}.$$

De otra forma, en vista que  $\beta$  se separa a sí misma de  $\gamma$  entonces esta no sería  $(t_0, C_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\|\Delta\| = 1$ . Si  $\gamma \leq 1$  entonces  $\beta$  es  $t_0$  accesible para  $\gamma$  si y solo si es  $(t_0, D_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$ . Por el Corolario 2.4.1 existen dos constantes  $k_1, k_2$  de tal forma que para toda  $R > 0$  y para todo complejo  $K$  cuyas conexiones silla tienen longitud a lo más  $R$  se verifica que  $|\partial K| \leq k_2 R$  y  $\|K\| \leq k_2 R^2$ . Con esta información vamos a construir un complejo  $K_0$  generado por todas las conexiones silla que tengan longitud menor o igual a  $\frac{|\gamma|}{t_0 k_2}$ . En ese caso  $|\partial K_0| \leq \frac{|\gamma|}{t_0}$ . Por lo tanto toda conexión silla contenida en este complejo no es  $t_0$  accesible para  $\gamma$ . También esto ocurre para  $(K_0)_f$ .

Sea  $S = g_{tr_\theta} \Delta$  y sea  $V(S)$  el conjunto de conexiones silla que verifican que  $\beta \subset S$  y no están contenidas en  $g_{tr_\theta} K_0$ . Observemos que para todo  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  se cumple que  $V(g(S)) = g(V(S))$ .

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que  $\gamma$  tiene ángulo vertical nulo. Si  $\beta \subset \Delta$  es tal que pertenece a las conexiones sillas contabilizadas por  $(\gamma, R)$  pero no por  $N(\gamma, R/2)$ , es decir  $R/2 < |\beta| \leq R$  y  $|\beta \times \gamma| \leq C_n$ , entonces como el vector inducido por  $\gamma$  es vertical, verifica que  $|\beta_h| |\gamma| = |\beta \times \gamma| \leq C_n$  entonces  $|\beta_h| \leq C_n / |\gamma|$ . Sea  $\theta$  el ángulo menor que  $\pi/2$  que forman los vectores inducidos por  $\beta$  y  $\gamma$ . Como  $|\beta| \in (R/2, R]$  entonces

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|\beta_h|}{|\beta|} \leq \frac{2C_n}{|\gamma|R}.$$

Sea  $\epsilon > 0$  relacionada con las constantes  $k_1, k_2$ . Vamos a considerar una  $R' = 2R/\epsilon$ , de tal forma que para toda conexión silla  $\lambda$  tal que  $R/2 \leq |\lambda| \leq R$  tengan longitud acotada por  $\epsilon R'/4$  y  $R'\epsilon/2$ . Conectando con lo anterior, denotemos  $R' = e^t$ . Sea

$$\phi = \text{sen}^{-1}\left(\min\left(1, \frac{2C_n}{|\gamma|R}\right)\right).$$

Observemos que por construcción y por la Proposición 2.4.7 si  $|\theta| \leq \phi$  entonces

$$N(\gamma, R) - N(\gamma, R_2) \leq |A(\epsilon R'/4, \epsilon R'/2, \phi) \cap V(\Delta)| \leq c(R')^2 \int_{-2\phi}^{2\phi} |V(\epsilon, g_{tr_\theta} \Delta)| d\theta.$$

Por construcción se sigue que

$$\phi \leq \frac{4C_n}{|\gamma|R} = \frac{8C_n e^{-t}}{\epsilon |\gamma|}.$$

Sea  $\theta \in [-2\phi, 2\phi]$ . Vamos a aproximar a  $|V(\epsilon, g_{tr_\theta} \Delta)|$ .

Podemos construir un complejo  $K_1$  de complejidad  $n - 1$  y que esté generado por las

conexiones silla de longitud a lo más  $\epsilon$ . Por el segundo resultado del Corolario [2.4.2](#) podemos construir un subcomplejo  $K'_1 \subseteq K_1 \cap K_0$  de tal forma que tenga todas las conexiones silla de esa intersección. Por cómo definimos al complejo  $K_0$  se sigue que si  $\lambda \subset K_1$  entonces esta conexión silla no está contenida en  $(K'_1)_f$  (llenado respecto a  $K_1$ ). Supongamos que además  $K'_1$  no contiene a todas las conexiones silla de  $\partial K_1$  (de otra forma el conteo que haremos sería trivial pues  $K_1 \subset K_0$ ). Entonces por  $(c_{n-1})$  existe una constante  $C_{n-1}^3$  de tal forma que

$$|V(\epsilon, g_t r_\theta \Delta)| \leq O(K_1, (K'_1)_f, \epsilon) \leq \frac{C_{n-1}^3}{(\mathcal{L}(K_1, (K'_1)_f))^{1+\delta/2}} =$$

$$\frac{C_{n-1}^3}{\mathcal{L}(g_t r_\theta \Delta, g_t r_\theta K_0)^{1+\delta/2}} = \frac{C_{n-1}^3}{\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta \Delta)^{1+\delta/2}}.$$

La segunda desigualdad es resultado de la hipótesis inductiva del tercer enunciado. La primer igualdad es la definición de la construcción previa que hicimos y la última desigualdad es la definición de  $\mathcal{L}_\gamma$ . Por lo tanto tenemos que

$$N(\gamma, R) - N(\gamma, R/2) \leq |A(\frac{\epsilon R'}{4}, \frac{\epsilon R'}{2}, \phi) \cap V(\Delta)| \leq c(R')^2 \int_{-2\phi}^{2\phi} |V(\epsilon, g_t r_\theta \Delta)| d\theta \leq$$

$$\left( \int_{-2\phi}^{2\phi} \frac{C_{n-1}^3 d\theta}{\mathcal{L}_\gamma(g_t r_\theta \Delta)} \right)^{1+\delta/2}.$$

Por la Proposición [2.4.7](#), para un  $\rho$  lo suficientemente grande, de tal forma que el dominio de integración esté contenido en  $I(t)$  se sigue que existen dos constantes  $c''$  y  $C'_1$ , donde ambas dependen de  $C_n, \delta$  y  $\epsilon$  de tal forma que

$$N(\gamma, R) - N(\gamma, R/2) \leq c'' e^{2t} \frac{e^{-t(1-\delta)}}{|\gamma|^{1+\delta}} =$$

$$c'' \left( \frac{e^t}{|\gamma|} \right)^{1+\delta} = C'_1 \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$N(\gamma, R) \leq C'_1 \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta} + C'_1 \left( \frac{1}{2} \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n+n\delta} \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta} + \dots + \dots \leq C_n^1 \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta}.$$

Lo cual implica la prueba para el primer caso donde  $|\gamma| \leq 1$  y  $R' \geq 1$ .

Ahora supongamos que  $|\gamma| \leq 1$  y que  $R' < 1$ . Si este es el caso entonces  $R \leq \epsilon$  entonces como estamos considerando conexiones silla que  $R/2 < |\gamma| \leq R$  obtenemos que  $N(\gamma, R) \leq |V(R, \Delta)|$ . Con la única diferencia de que  $K_1$  es ahora un complejo generado por conexiones silla cuya longitud es menor o igual a  $\epsilon$  en todo  $\Delta$ . Siguiendo un mismo procedimiento, generamos a  $(K'_1) \subseteq K_1 \cap K_0$ , el cual tiene todas las conexiones de la intersección. Por la hipótesis de inducción  $(c_{n-1})$  obtenemos que

$$|V(R, \Delta)| \leq O(K_1, (K'_1)_f, R) \leq C_{n-1}^3 \left( \frac{R}{\mathcal{L}(\Delta, kK_0)} \right)^{1+\delta} \leq C_n^1 \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta}.$$

Por último vamos a considerar el caso cuando  $|\gamma| > 1$ . Podemos rotar a  $\gamma$  de tal forma que su ángulo vertical es nulo. Entonces existe un  $t > 0$  de tal forma que  $|g_t(\gamma)| = 1$ . Para diferenciar cuál es la longitud de las conexiones silla antes y después de esta modificación por una rotación y por  $g_t$  denotamos  $|\cdot|'$  la longitud correspondiente al aplicar la rotación. Observemos que por construcción

$$\frac{R}{|\gamma|} \leq |\beta'| \leq \frac{2R}{|\gamma|} + C_n \leq C \frac{R}{|\gamma|}.$$

Pues  $|\beta'| \geq |\beta|/|\gamma| \geq R/|\gamma|$ . Repitiendo las mismas estimaciones obtenemos el caso  $|\gamma| < 1$ .

- ( $b_n$ ) Decimos que una conexión silla tiene tamaño  $\kappa$  si  $e^{\kappa-1} < |\beta| \leq e^\kappa$ . Observemos que existen aproximadamente  $\log(\frac{R}{|\gamma|})$  tamaños entre  $|\gamma|$  y  $R$ .

Notemos que toda conexión silla que es contabilizada por  $M(\gamma, R)$  es  $(t_0, C_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$ . Teniendo esto en mente por el Lema 2.4.3 podemos hallar una cadena de conexiones silla  $\beta = \beta_1, \dots, \beta_k = \gamma$  de tal forma que  $|\beta_i \times \beta_{i+1}| \leq C_n \|\Delta\|$  y  $\beta_i$  es  $(t_0, C_i)$  débilmente accesible para  $\beta_{i+1}$ . En particular tenemos que  $|\beta_i|/|\beta_{i+1}| \geq 1/t_0$ . Por lo tanto el tamaño de  $\beta_i$  está acotado entre el tamaño de  $\gamma$  y el de  $\beta$ . Haciendo uso de ( $a_n$ ) tenemos que el número de tales conexiones silla está acotado. Se sigue que

$$M(\gamma, R) \leq \left(\frac{|\beta_1|}{|\beta_2|}\right)^{1+\delta/2} \times \dots \left(\frac{|\beta_{k-1}|}{|\beta_k|}\right)^{1+\delta/2} = C_n^1 \left(\frac{|\beta|}{|\gamma|}\right)^{1+\delta/2}.$$

Debemos hacer el conteo sobre todos los posibles tamaños de  $\beta_i$ . lo cuál es un factor de  $(\log(\frac{R}{|\gamma|}))^{t_0}$ . De esta forma

$$M(\gamma, R) \leq C_n^2 \left(\frac{R}{|\gamma|}\right)^{1+\delta}.$$

- ( $c_n$ ) Vamos a considerar a  $\omega$  la conexión silla de menor longitud en  $\Delta$  que interseca a  $\Delta_K$ . Si  $K_1$  es el complejo que se genera con todas las conexiones silla de longitud a lo más  $|\omega|/k_1$  tal que  $k_1$  es una de las constantes del Corolario 2.4.1. Por construcción  $K_1 \subset K_f$  y por lo tanto  $(K_1)_f \subseteq K_f$ . Hay que notar que basta demostrar la existencia de la constante en cuestión para las conexiones silla que intersecan a  $\Delta_{K_1}$ .

Sea  $\gamma$  la conexión silla de mayor longitud en  $\partial K \setminus K$ . Entonces concluimos que  $|\omega| \leq |\gamma|$ . Sea  $K'$  el subcomplejo generado por todas las conexiones silla de longitud a lo más  $|\gamma|/k_1$  entonces  $K_1 \subseteq K'$  y por lo tanto  $(K_1)_f \subseteq (K')_f$ . En vista de que  $\gamma$  no está contenida en  $(K')_f$  tenemos que este es un complejo propio del dominio  $\Delta$ , por lo tanto tiene complejidad de a lo más  $n - 1$  y así podemos usar la hipótesis inductiva en este complejo.

Supongamos que existen conexiones silla en  $(K')_f \setminus (K_1)_f$ . Entonces por la condición  $(c_n)$  tenemos que

$$O((K')_f, (K_1)_f, R) \leq C_{n-1}^3 \left( \frac{R}{\mathcal{L}((K')_f, (K_1)_f)} \right)^{1+\delta} \leq K_3 \left( \frac{R}{|\omega|} \right)^{1+\delta}.$$

Ahora vamos a considerar las conexiones silla que intersecan a  $\Delta_{K_1}$  que no están contenidas en  $(K')_f$ .

Si  $\beta$  verifica lo anterior, entonces  $\beta$  es  $t_0$  accesible para  $\gamma$  y por lo tanto en particular  $(t_0, D_n)$  débilmente accesible para  $\gamma$ . Entonces por el resultado  $(b_n)$  se sigue que

$$M(\gamma, R) \leq C_n^2 \left( \frac{R}{|\gamma|} \right)^{1+\delta} \leq C_n^2 \left( \frac{R}{|\omega|} \right)^{1+\delta}$$

Por lo tanto uniendo estos dos casos tenemos que

$$O(\Delta, K, R) \leq (K_3 + C_n^2) \left( \frac{R}{|\omega|} \right)^{1+\delta} = C_n^2 \left( \frac{R}{\mathcal{L}(\Delta, K)} \right)^{1+\delta}.$$

Con esto concluimos los pasos inductivos y finalizamos la demostración.  $\square$

**Corolario 2.4.4.** [16] *Sea  $(S, \omega)$  una superficie en  $\mathcal{H}(d)$ . Si  $\text{HOL}(S)$  es el conjunto de conexiones sillas asociadas a ese diferencial abeliano entonces existe un  $\kappa > 0$  de tal forma que para toda  $\delta > 0$  y toda  $R \in (0, \kappa)$  se verifica que*

1. *Existe una constante  $C$  de tal forma que*

$$|V(S) \cap B(R, 0)| \leq C \left( \frac{R}{\mathcal{L}(S)} \right)^{1+\delta}.$$

2. *La desigualdad anterior puede ser lograda para toda  $R < \infty$  si la constante depende de  $P$  el conjunto de puntos singulares.*

*Demostración.* Sea  $\kappa > 0$  y la constante del Corolario 2.4.1. Sea  $S \in \mathcal{H}(d)$  y sea  $\Delta$  el complejo que tenga todas las conexiones silla de longitud menor o igual a  $\kappa$ . Este complejo tiene frontera y además la conexión silla de longitud más corta está en  $\Delta$ . Si hacemos que  $K$  sea un complejo vacío se sigue que  $\mathcal{L}(\Delta, K) = \mathcal{L}(S)$  y utilizando las condiciones dadas por  $(c_n)$  en el lema inductivo 2.4.6 se sigue el resultado.

para demostrar la segunda afirmación consideramos la constante que surge de la primera parte de este corolario, entonces si  $R \geq \kappa$  entonces existe un natural  $m$  el cuál depende únicamente de  $R$  de tal forma que existen  $g_1, \dots, g_m \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  de tal forma que

$$B(R, 0) \subseteq \bigcup_{j=1}^m g_j(B(\kappa, 0)).$$

Por lo tanto para toda  $S \in \mathcal{H}(g, P)$  se verifica que

$$|\text{HOL}(S) \cap B(R, 0)| \leq \sum_{j=1}^m |\text{HOL}(S) \cap g_j(B(\kappa, 0))| = \sum_{j=1}^m |\text{HOL}(g_j^{-1}(S)) \cap B(\kappa, 0)|.$$

Se sigue que para toda  $j$

$$|\text{HOL}(g_j^{-1}(S)) \cap B(\kappa, 0)| \leq C(\delta) \left( \frac{\kappa}{\mathcal{L}(g_j^{-1}(S))} \right)^{1+\delta}.$$

Lo cual implica la afirmación.  $\square$

Con esto concluimos el desarrollo de las herramientas necesarias para demostrar el teorema principal de esta parte del texto.

Recordemos que lo que queremos demostrar es:

**Teorema 2.4.2.** [16] *Sea  $S$  una superficie de Riemann y  $\mathcal{F}$  la foliación vertical obtenida por un diferencial abeliano  $\omega$ , existe una constante  $c > 0$  tal que si  $|V(S, R)|$  es la cantidad de conexiones silla de longitud a lo más  $R$  entonces*

$$|V(S, R)| \leq cR^2.$$

*Demostración.* Utilizando las condiciones necesarias para aplicar los Lemas 2.4.1 y 2.4.2 los Corolarios 2.4.3 y 2.4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} |V(S, 2R)| - |V(S, R)| &\leq C_1 R^2 \int_0^{2\pi} |V(g_t r_\theta S)| d\theta \leq \\ &4^{1+\delta} c_1 c_2 R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\mathcal{L}(g_t r_\theta S))^{1+\delta}} \leq 4^{1+\delta} c_1 c_2 c_3 R^2 = C_1 R^2. \end{aligned}$$

Entonces iterando este proceso y considerando a  $|V(S, 2R)|$  Obtenemos que

$$|V(S, 2R)| \leq CR^2.$$

Que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

## 2.5. Demostración del teorema KMS

Vamos a demostrar el Teorema 2.1.2

**Teorema 2.5.1.** [13] *Sea  $S$  una superficie de traslación entonces para casi toda  $\theta$  tenemos que el flujo geodésico en dirección  $\theta$  es únicamente ergódico respecto a la medida de Lebesgue.*

Utilizaremos los tres resultados principales: la condición de Boshernitzan 2.1.3, las identidades de Vorobets 2.1.5 y el teorema asintótico de Masur Eskin 2.1.6

*Demostración.* **Teorema de Kerckhoff-Masur-Smilie.**

Recordemos que queremos demostrar que si  $S$  es una superficie de traslación entonces en casi toda dirección, el flujo  $\phi_t^\theta$  es únicamente ergódico.

Por el teorema asintótico de Masur [2.1.6](#) tenemos que existe una constante  $K$  tal que

$$|V(S, T)| \leq KT^2,$$

para toda superficie  $S$  y para toda  $T > 0$ , lo cual implica que

$$\sum_{v \in V(S, T)} \frac{1}{\|v\|} \leq \frac{KT^2}{\text{Sys}(S)} = K_1 T^2.$$

Definamos un conjunto

$$A(\epsilon) = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{Sys}(g_t r_\theta S) < \epsilon\}.$$

Queremos demostrar que existe una constante  $C$  tal que  $\mu(A(\epsilon)) \leq C\epsilon^3$ . Pues de esta forma, el conjunto de las direcciones  $\theta$  tales que el límite superior de la longitud de la sístola asociada a  $g_t r_\theta(S)$  esté acotado inferiormente por  $\epsilon$  es de medida  $2\pi - C\epsilon^3$ . Si esto fuera cierto, entonces haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtendríamos que el conjunto de direcciones  $\theta$  donde el límite superior de las longitudes de las sístolas asociadas a  $g_t r_\theta(S)$  fuera positivo sería de medida total. Recordando que por las identidades de Vorobets [2.1.5](#)

$$\frac{S^2(r_\theta(S))}{2} = \varepsilon(T_\theta)$$

donde  $T_\theta$  es el IET obtenido de la foliación vertical en la superficie  $r_\theta(S)$ , obtendríamos que el conjunto de las direcciones  $\theta$  donde  $\varepsilon(T_\theta) > 0$  es  $2\pi$ . De tal forma que por la condición de Boshernitzan [2.1.3](#) se sigue que el conjunto de direcciones  $\theta$  tales que  $T_\theta$  es únicamente ergódico es  $2\pi$ , y por lo tanto el conjunto de direcciones  $\theta$  donde la foliación vertical asociada a  $r_\theta(S)$ , que es lo mismo que considerar el conjunto de direcciones  $\theta$  donde el flujo  $\phi^\theta$  es únicamente ergódico es  $2\pi$ .

Realicemos entonces una aproximación a la medida del conjunto  $A(\epsilon)$ .

Observemos que fijarnos en la sístola de una superficie puede ser tomado considerando un conjunto un poco más grande, es decir, conexiones sillas que sean de una longitud acotada, entonces veamos que si  $v$  es tal que

$$|g_t r_\theta v| < \epsilon,$$

entonces esto depende únicamente de  $\|v\|$ , lo cual implica que podemos (haciendo una rotación si hace falta) asumir que  $v = (0, \|v\|)$ , de esta forma

$$g_t r_\theta v = \|v\|(-\text{sen}(\theta)e^t, \text{cos}(\theta)e^{-t}).$$

Si  $|g_t r_\theta v| < \epsilon$  entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\|v\| |\text{sen}(\theta)| e^t < \epsilon \quad t \quad \|v\| |\text{cos}(\theta)| e^{-t} < \epsilon.$$

Si hacemos a  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño tal que  $\epsilon/Sys/S < 1/2$  podemos encontrar que

$$\|v\| < 2\epsilon e^t \text{ y } |\theta| \leq 2|\text{sen}(\theta)| < \frac{\epsilon e^{-t}}{\|v\|} < \frac{\epsilon}{\|v\|}.$$

En particular se verifica si  $\|v\| < 2\epsilon$  Se sigue que

$$\mu(A) \leq \sum_{v \in V(S, 2\epsilon)} \frac{4\epsilon}{\|v\|} \leq \epsilon 4\epsilon K_1 2\epsilon^2 = 16K_1\epsilon^3 = C\epsilon^3.$$

Por lo tanto

$$\mu(\{\theta \in [0, 2\pi] \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} Sys(g_t r_\theta S) \geq \epsilon\}) > 2\pi - C\epsilon^3.$$

Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  se sigue el resultado del teorema.  $\square$

**Corolario 2.5.1.** *Teorema de Masur, Veech [2.1.1][46]. Casi todos los IET son únicamente ergódicos respecto a la medida de Lebesgue.*

Por el teorema KMS [2.1.2] tenemos que para una superficie de traslación  $S$ , las direcciones donde el flujo  $\phi^\theta$  es únicamente ergódico es  $2\pi$ . Recordando que un IET se obtiene como el mapeo del primer retorno del flujo vertical en una superficie de traslación, se sigue que si el flujo es únicamente ergódico entonces el IET debe ser únicamente ergódico.

# Capítulo 3

## Ergodicidad en superficies de tipo infinito

En este capítulo vamos a definir las superficies de traslación de *tipo infinito*. Vamos a considerar una familia de estas superficies, las superficies  $\mathbb{Z}$ -cubiertas, las cuales fueron definidas por P. Hubert, B. Weiss y P. Hooper [25], [24] y [29]. Estas superficies se obtienen con copias de una superficie de traslación de tipo finito pegándolas de manera periódica, de tal forma que son cubrientes ramificadas de superficies de tipo finito cuyo grupo de transformaciones de cubierta es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Los autores estudiaron el flujo geodésico en esas superficies y encontraron criterios para encontrar ergodicidad:

**Teorema 3.0.1.** (*Weiss-Hubert 2013* [29])

*Si  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular,  $\theta$  es una dirección aproximable por cintas infinitas y  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es ergódico en cubiertas intermedias entonces es una dirección ergódica en  $\tilde{S}_\omega$ .*

También trabajaron en encontrar condiciones para hallar ergodicidad en casi todas las direcciones:

**Teorema 3.0.2.** (*Hubert-Weiss, 2013* [29]). *Si  $p : \tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta cuyo grupo de Veech es una latiz no uniforme y tiene una cinta infinita, entonces el conjunto de direcciones  $\theta$  donde el flujo geodésico  $\tilde{\phi}_t^\theta$  no es ergódico tiene medida cero.*

Esta familia de superficies fue de los primeros ejemplos en donde se han encontrado criterios sobre las direcciones para obtener ergodicidad del flujo geodésico, sin embargo como demostraron Málaga y Troubetzkoy [37] estas no pueden ser únicamente ergódicas pues siempre es posible definir medidas de *Maharam*, para convencernos de esto, al final de este capítulo vamos a demostrar que:

**Teorema 3.0.3.** (*Málaga Sabogal, S. Troubetzkoy-2019*) [37].

*Si  $S$  es una superficie de traslación y  $\tilde{S}_\omega$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta recurrente, entonces no existen direcciones únicamente ergódicas en la cubierta.*

En este capítulo vamos a exponer las demostraciones de los tres teoremas presentados. Es recomendable contar con conocimiento de grupos Fuchsianos, para dicho fin referimos al libro de S. Katok [31]. De misma forma se recomienda tener conocimiento sólido sobre espacios cubrientes y conocimiento elemental de grupos de homología, para lo cual referimos al libro de Hatcher [22].

### 3.1. Superficies de traslación de tipo infinito

Recordemos la sección [1.1.1](#) donde comentamos tres definiciones de las superficies de traslación. En dichas definiciones podíamos encontrar palabras como *compacidad* y *finitud*. Vamos a dar tres definiciones de superficies de traslación *en general*. Dicha definición abarca las superficies de traslación con las que trabajamos en el capítulo [2](#) y en el capítulo [3](#), cuando no es el caso obtendremos las superficies de traslación de *tipo infinito*.

Sea  $\mathcal{P}$  una familia de polígonos euclidianos a lo más numerable. Denotemos por  $V(\mathcal{P})$  a los vértices de los polígonos. Para cada  $v \in V(\mathcal{P})$ , denotemos por  $n_v$  al vector normal a  $v$  que apunta hacia el interior del polígono.

**Definición 3.1.1.** *Sea  $V(\mathcal{P})$  una familia de polígonos a lo más numerable. Si existe una  $f : V(\mathcal{P}) \rightarrow V(\mathcal{P})$  una involución sin puntos fijos, a esta función la conoceremos como emparejamiento.*

**Definición 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{P}$  una familia de polígonos euclidianos a lo más numerable y sea  $f$  un emparejamiento como en la Definición [3.1.1](#). Si  $\mathcal{S}$  y  $f$  son tales que para todo  $v \in V(\mathcal{P})$ , los vértices  $v$  y  $v_2 = f(v)$  difieren por una traslación y además  $n_{v_2} = -n_v$  entonces definimos una relación de equivalencia en la unión disjunta de los polígonos, de tal forma que para todo  $v \in \mathcal{S}$  decimos que  $v \sim f(v)$  donde  $f$  es el emparejamiento de la Definición [3.1.1](#) por una traslación.*

Observemos que de la construcción de la relación de equivalencia de la Definición [3.1.2](#) tenemos que los puntos interiores de las aristas de cada polígono se identifican por traslación con puntos en los interiores de las aristas de los polígonos, y también los puntos en el interior de los polígonos se identifican consigo mismos.

De esta forma tenemos un mapeo cociente

$$\pi : \coprod_{P \in \mathcal{P}} P \rightarrow \coprod_{P \in \mathcal{P}} P / \sim .$$

De tal forma que es inyectivo en el interior de los polígonos y *dos a uno* (2-1) en los puntos interiores de las aristas. Sin embargo, como podremos apreciar en el Ejemplo [3.1.1](#) podemos obtener que para un vértice  $v$ , el conjunto  $\pi^{-1}(\pi(v))$  sea infinito. De tal forma que vamos a definir:

**Definición 3.1.3.** *Sea  $\pi$  es el mapeo cociente que induce la relación de equivalencia en una familia a lo más numerable de polígonos  $\mathcal{S}$  de la Definición [3.1.2](#). Decimos que un vértice  $v$  es de grado infinito si  $\pi^{-1}(\pi(v))$  es un conjunto infinito, y diremos que es de grado finito en caso contrario.*

**Definición 3.1.4.** *Sea  $\mathcal{P}$  una familia a lo más numerable de polígonos y  $f$  un emparejamiento como en la Definición [3.1.1](#). Sea  $S$  el espacio que obtenemos al remover los vértices de grado infinito al cociente  $\coprod_{P \in \mathcal{P}} P / \sim$ . Si  $S$  es conexo entonces decimos que  $S$  es una superficie de traslación.*

Observemos que la diferencia entre esta definición y la que mencionamos en [1.1.1](#) recae en que en esta pedimos numerabilidad mientras que en la primera pedimos finitud.

**Definición 3.1.5.** *Sea  $S$  una superficie de Riemann. Sea  $\Sigma \subseteq S$  discreto. Si  $S \setminus \Sigma$  tiene un atlas maximal  $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  donde los mapeos de transición sean traslaciones y donde las vecindades de los puntos en  $\Sigma$  sean isomorfas a una cubriente finita ramificada de una vecindad del origen entonces decimos que  $S$  junto con ese atlas maximal forman una superficie de traslación.*

La diferencia entre esta definición y la que encontramos en [1.1.1](#) se encuentra en que en esta no requerimos compacidad de  $S$  y requerimos un conjunto de singularidades discreto en lugar de finito.

**Definición 3.1.6.** *Sea  $S$  una superficie de Riemann y  $\Sigma \subseteq S$  un conjunto discreto. Si  $\omega$  es un diferencial abeliano no idénticamente cero donde  $\omega = dz$  en  $S \setminus \Sigma$  y para todo  $x \in \Sigma$  tenemos que  $\omega = z^{k_x} dz$  entonces a la pareja  $(S, \omega)$  la conocemos como superficie de traslación.*

La diferencia con la definición de [1.1.1](#) es la misma que la de [3.1.5](#).

La demostración del siguiente teorema en espíritu es la misma que la que se encuentra en el Teorema [1.1.2](#). Sin embargo para una demostración detallada referimos a [\[45\]](#).

**Teorema 3.1.1.** [\[45\]](#) *Las definiciones [3.1.4](#), [3.1.5](#) y [3.1.6](#) de superficies de traslación coinciden.*

Vamos a agregar un paso que nos servirá para diferenciar a las superficies de los primeros dos capítulos con las que trabajaremos en este.

De la definición [3.1.5](#) o [3.1.6](#) remarcamos que en  $S \setminus \Sigma$  el atlas de traslación (o el diferencial abeliano) generan una métrica plana<sup>1</sup>. Con respecto a esta métrica plana podemos considerar la completación métrica, la cual la denotaremos por  $\bar{S}$ .

**Definición 3.1.7.** *Sea  $S$  una superficie de traslación y  $\bar{S}$  su completación métrica. Sea  $z \in \bar{S} \setminus S$ . Si existe una vecindad de  $z$  que sea isomorfa a un disco en el plano complejo entonces decimos que  $z$  es un punto regular. De otra forma decimos que  $z$  es una singularidad. Al conjunto de singularidades de la superficie  $S$  lo denotamos por  $\text{Sing}(S)$ .*

Las singularidades pueden ser de tres tipos [\[45\]](#).

1. **Cónicas.** Cuando las vecindades son isomorfas a cubrientes finitas ramificadas de una vecindad del origen.
2. **Cónicas infinitas**<sup>2</sup> Cuando las vecindades son isomorfas a cubrientes infinitas ramificadas de una vecindad del origen.

---

<sup>1</sup>Curvatura seccional nula.

<sup>2</sup>Infinitas en breve.

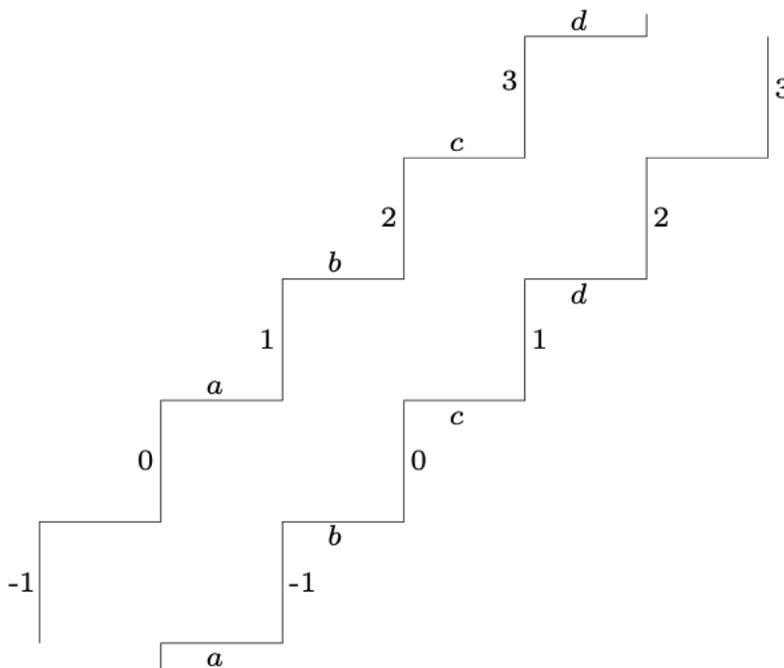


Figura 3.1: [24]

3. **Salvajes**<sup>3</sup> Cuando no es ninguna de las anteriores.

Habiendo comentado cómo pueden ser las singularidades, podemos definir:

**Definición 3.1.8.** *Sea  $S$  una superficie de translación. Decimos que es una superficie de translación de tipo finito cuando esta tiene área euclidea finita y además su completación métrica es homeomorfa a una superficie de Riemann compacta. Si no es de tipo finito, decimos que  $S$  es una superficie de translación de tipo infinito.*

Notemos que las superficies con las que trabajamos en los dos primeros capítulos son de tipo finito. Una consecuencia de la definición de superficie de translación de tipo finito es que si un punto  $z \in \bar{S} \setminus S$  es una singularidad cónica infinita o salvaje entonces  $S$  es de tipo infinito, Para el caso de las singularidades cónicas infinitas se sigue de la definición de las mismas, en el caso de las singularidades salvajes referimos a [43].

Veamos este par de ejemplos donde surgen singularidades de cónicas de tipo infinito y singularidades salvajes.

**Ejemplo 3.1.1.** [25]. *Consideremos una cantidad numerable de copias del rectángulo  $R = [0, 2] \times [0, 1]$  e indexémoslas con los enteros tal que  $R_p = [p, p + 2] \times [p, p + 1]$ . Tiene la forma de una escalera infinita como se muestra en la Figura 3.1*

<sup>3</sup>Wild singularities [43].

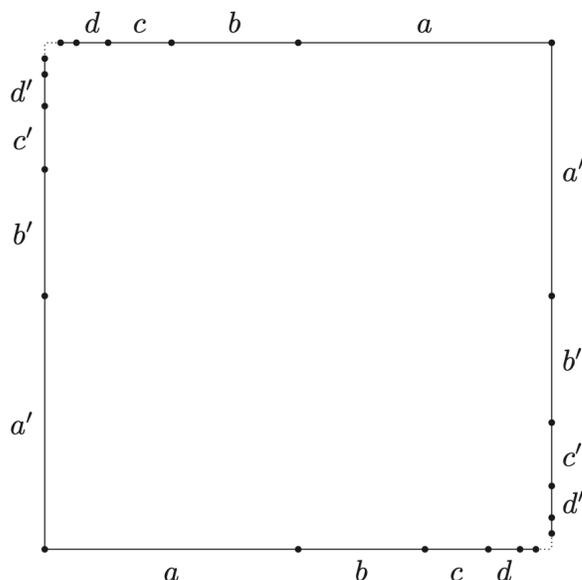


Figura 3.2: [43]

Si consideramos la identificación por lados horizontales opuestos, es decir  $(x, p) \sim (x + 2, p)$ , la parte inferior derecha de  $R_p$  con la superior izquierda  $R_{p+1}$ , entonces obtenemos una superficie  $M$  de género infinito y con cuatro puntos singulares de tipo infinito:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$ .

**Ejemplo 3.1.2.** [43]

Como ejemplo del tercer tipo podemos considerar la superficie que se obtiene por el mapeo del panadero<sup>4</sup>, también conocida como superficie de Chamanara. Esta se construye considerando un cuadrado sin sus vértices. Vamos a tomar puntos de la forma  $(1 - (1/2)^n, 0)$ ,  $((1/2)^n, 1)$ ,  $(1, (1/2)^n)$  y  $(0, 1 - (1/2)^n)$  para  $n > 0$ . Identificamos la arista horizontal superior con la inferior, además  $(1 - (1/2)^m, 0) \sim (1, (1/2)^m)$  y  $(0, 1 - (1/2)^n) \sim ((1/2)^n, 1)$  como se muestra en la Figura 3.2.

Podemos notar que los puntos marcados y los vértices del cuadrado se identifican en una misma singularidad, en [43] A. Randecker explica que la singularidad tenga ese amontonamiento implica que no es posible encontrar una vecindad agujerada que sea isométrica a la cubriente de una vecindad agujerada del origen, ni de tipo finito ni infinito, por lo tanto es un ejemplo de una singularidad salvaje.

**Definición 3.1.9.** Si una superficie de traslación tiene puntos de singularidad de tipo cónico o infinito entonces decimos que es dócil<sup>5</sup> y decimos que es salvaje si tiene puntos singulares salvajes.

Las superficies que se construyen como la del ejemplo 3.1.1 se les conoce como superficie del tipo *escalera infinita*<sup>6</sup>.

<sup>4</sup>Baker's mapping

<sup>5</sup>Tame

<sup>6</sup>Infinite staircase

Siguiendo el interés del texto, queremos definir un sistema dinámico en estas superficies. Utilizando la definición 3.1.5 podemos demostrar que una superficie de traslación  $S$  es paralelizable. De tal forma que en particular el haz tangente unitario  $T^1S$  lo podemos identificar con  $S \times [0, 2\pi)$ . De esta forma la proyección

$$S \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$$

nos induce para cada  $\theta \in [0, 2\pi)$  un campo vectorial de tal forma que para todo punto no singular  $p$  existe una curva con dominio maximal  $\gamma_p^\theta$  en  $S$  de tal forma que es solución al campo generado por  $\theta$ .

**Definición 3.1.10.** *Sea  $S$  una superficie de traslación y  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Al conjunto de curvas  $\gamma_p^\theta$ , donde  $\gamma_p^\theta$  es solución al campo vectorial inducido por  $\theta$  se le conoce como el flujo geodésico en dirección  $\theta$ .*

**Observación:** Formalmente este no es un flujo, pues el dominio de definición de algunas curvas  $\gamma_p^\theta$  puede estar acotado, este es el caso cuando la curva tropieza con una singularidad.

**Definición 3.1.11.** *Si una curva  $\gamma_p^\theta$  como en la Definición 3.1.10 tropieza con dos singularidades, decimos que es una conexión silla.*

Análogo al caso finito, nos interesan las propiedades dinámicas del flujo geodésico.

## 3.2. $\mathbb{Z}$ -cubrientes y grupos Fuchsianos

### 3.2.1. Grupos de Veech

Vamos a definir los automorfismos afines de una superficie de traslación y su grupo de Veech.

Consideremos dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  y sus conjuntos de puntos singulares  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Supongamos que tenemos un homeomorfismo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  de tal forma que  $f(\Sigma_1) \subseteq \Sigma_2$ . Decimos que  $f$  es un mapeo afín, si en cartas<sup>8</sup> en  $S_1 \setminus \Sigma_1$  el mapeo es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Donde la matriz esté en  $GL(2, \mathbb{R})$ . Es decir, que en coordenadas locales sea una transformación afín.

**Definición 3.2.1.** *Sea  $S$  una superficie de traslación y  $\Sigma$  su conjunto de singularidades. Al grupo de los automorfismos afines, es decir que verifique (3.2.1) se le denota por  $\text{Aff}(S)$ .*

<sup>7</sup>Los elementos del haz tangente de norma unitaria

<sup>8</sup>Con el atlas de traslación

Este automorfismo se extiende a un homeomorfismo en todo  $S$ .

El hecho que los mapeos de transición sean traslaciones, implica que la matriz sea constante en todo  $S \setminus \Sigma$ . De esta forma, el morfismo

$$D : \text{Aff}(S) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$

Donde  $D(f)$  es la derivada, está bien definido.

Vamos a considerar el subgrupo de  $\text{Aff}(S)$  formado por los automorfismos afines de  $S$  que preservan la orientación<sup>9</sup> y lo denotaremos por  $\text{Aff}_+(S)$ .

**Definición 3.2.2.** *Sea  $S$  una superficie de traslación y  $\text{Aff}(S)$  y  $\text{Aff}_+(S)$  el grupo de automorfismos afines y el grupo de automorfismos afines que preservan la orientación respectivamente. Definimos el grupo de Veech de  $S$  como  $D(\text{Aff}_+(S)) := \Gamma(S)$  y el grupo de Veech extendido como  $D(\text{Aff}(S)) := \Gamma_2(S)$  respectivamente.*

### 3.2.2. Cubrientes

Como comentamos vamos a construir una familia de superficies que son cubrientes de superficies de traslación de tipo finito. Para ello necesitamos la siguiente notación. Seguiremos el trabajo de [25] con su notación. **Notación:** Utilizaremos  $S^* = S \setminus \Sigma$ .

Recordemos de la teoría de espacios cubrientes que si consideramos un subgrupo  $N \trianglelefteq \pi_1(S^*)$  entonces podemos encontrar un espacio cubriente

$$\pi : \tilde{S} \rightarrow S^*,$$

tal que  $G = \pi_1(S^*)/N$  actúa por automorfismos en  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}/G \cong S^*$ .

Denotemos por  $f_*$  al morfismo inducido por  $f \in \text{Aff}_+(S^*)$  en  $\pi_1(S^*)$ .

**Proposición 3.2.1.** [25] *Sea  $S$  una superficie de traslación y sean  $S^*$  y  $\tilde{S}$  como en la notación, entonces se verifica:*

1.  $f \in \text{Aff}(S^*)$  se puede levantar a un mapeo  $\tilde{f} \in \text{Aff}(\tilde{S})$  si y solo si  $f_*(N) = N$  y
2.  $\tilde{f} \in \text{Aff}(\tilde{S})$  desciende a un mapeo  $f \in \text{Aff}(S^*)$  si y solo si  $\tilde{f}G\tilde{f}^{-1} = G$ .

*Demostración.* Las condiciones necesarias para que un automorfismo se levante a la cubierta o descienda son resultados de teoría de cubrientes, se puede revisar en [5]. Solo falta demostrar que si un automorfismo afín se levanta a la cubierta entonces es un automorfismo afín en la cubierta. Esto se sigue del hecho que las cubiertas localmente son copias del espacio base. Análogo al caso de los automorfismos que descienden.  $\square$

En el enunciado del Teorema 3.0.2 se encuentra el concepto *grupo de Veech asociado la cubierta*, este se encuentra fuertemente relacionado con el grupo de Veech original.

<sup>9</sup>Donde el determinante es positivo.

**Definición 3.2.3.** [25] A las parejas  $(\tilde{f}, f) \in \text{Aff}(\tilde{S}) \times \text{Aff}(S^*)$  tales que  $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$  se les denota por  $\text{Aff}(\tilde{S}, S^*)$ .

Si  $(\tilde{f}, f) \in \text{Aff}(\tilde{S}, S^*)$  entonces por cómo actúa el grupo de deck en la cubierta se sigue que  $D\tilde{f} = Df$  (en los puntos de las fibras). Por lo tanto el morfismo derivada

$$D : \text{Aff}(\tilde{S}, S^*) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R}),$$

definido de forma natural está bien definido.

**Definición 3.2.4.** [25] A la imagen  $D(\text{Aff}(\tilde{S}, S^*))$  la conoceremos como el grupo de Veech asociado a la cubierta  $\Gamma(\tilde{S})$ .

Notemos que si consideramos al grupo

$$G_N = \{f \in \text{Aff}(S^*) \mid f_*(N) = N\},$$

podemos obtener que [25]:

$$\text{Aff}(\tilde{S}, S^*) \cong G \rtimes G_N.$$

Recordemos brevemente:

**Definición 3.2.5.** Decimos que  $\Gamma \subseteq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es un grupo Fuchsiano si este es discreto y actúa propia y discontinuamente en  $\mathbb{H}^2$ .

Para un tratamiento profundo de los grupos Fuchsianos se recomienda [31].

**Proposición 3.2.2.** [25] Si  $S^*$  no es el toro perforado entonces existe un subgrupo de  $\text{Aff}(\tilde{S})$  de índice finito que desciende a  $\text{Aff}(S^*)$ . Además el grupo de Veech asociado a la cubierta es Fuchsiano.

*Demostración.* El subgrupo que vamos a considerar es  $\text{Ker}(D)$ , el kernel del morfismo derivada, en otras palabras el grupo de las transformaciones afines cuya derivada es la identidad, es decir, el grupo de las transformaciones por traslación. Siguiendo a los autores, vamos a probar que

1. Actúa propia y discontinuamente en  $\tilde{S}$  y
2. Es finitamente generado.

Para la primera afirmación fijémonos que como por hipótesis, al no ser el toro perforado, el conjunto de puntos donde se ramifica la cubierta no es vacío y por tanto existe una triangulación por geodésicas subordinada a estos puntos de ramificación. Son las triangulaciones que trabajamos en el capítulo 2, en la Sección 2.4. Como las geodésicas que inducen esta triangulación dependen de los puntos de ramificación, si realizamos un levantamiento de esta triangulación, lo que obtendremos es una triangulación geodésica cuyos vértices están dados por los puntos  $p^{-1}(q)$  donde  $q \in \Sigma$ . Por esta razón, el grupo  $\Omega$  actúa por permutación en los elementos de la triangulación, en particular actúa propia y discontinuamente en  $\tilde{S}$ .

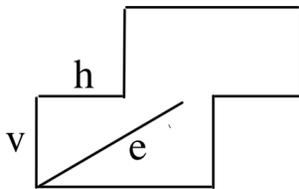


Figura 3.3: Toro doblemente perforado y sus clases homotopía.

Para la segunda afirmación hay que notar que tiene índice finito en  $\text{Aff}(\tilde{S})$ . El grupo  $G$  del enunciado de la Proposición [3.2.1](#) es de índice finito en  $\text{Ker}(D)$  en virtud de que por la definición de  $G$  tenemos que  $A(S/G) = A(S^*) < \infty$ , donde esta segunda área es finita pues  $S^*$  es una superficie de tipo finito. Además es finitamente generado pues es cociente de  $\pi_1(S^*)$  el cual es finitamente generado por la misma razón. De esta forma  $\Omega$  es finitamente generado pues este tiene un subgrupo de índice finito que es finitamente generado.

Observamos que existe una acción de  $\text{Aff}(S^*)$  en  $\text{Ker}(D)$  por conjugación, de tal forma que deja invariante el índice de los subgrupos de  $\text{Ker}(D)$  [\[25\]](#). Como es finitamente generado entonces existen una cantidad finita de subgrupos de  $\Omega$  tales que su índice es igual a  $[\text{Ker}(D) : G]$ , por lo tanto, si  $H$  es un subgrupo tal que normaliza a  $G$  entonces tiene que ser de índice finito. Por definición, la proyección de  $\text{Aff}(\tilde{S}, S^*)$  en  $\text{Aff}(\tilde{S})$  normaliza a  $G$ , entonces dicha proyección debe de ser de índice finito. También por lo tanto tenemos que esa proyección desciende a  $\text{Aff}(S^*)$ . De tal forma que existe un subgrupo de índice finito en  $\Gamma(\tilde{S})$  que desciende a  $\Gamma(S^*)$ .

Para demostrar que el grupo de Veech de la cubriente es Fuchsiano, solo hay que notar que tenemos que los grupos de Veech de las superficies de tipo finito son discretos y actúan propia y discontinuamente en el semiplano superior, este es un teorema clásico de grupos de Veech de superficies compactas, una demostración se puede hallar en [\[38\]](#). En vista de la primera parte de esta proposición, el grupo de Veech de la cubriente tiene que verificar las dos condiciones de ser Fuchsiano de la definición [3.2.5](#).  $\square$

### 3.2.3. $\mathbb{Z}$ -Cubrientes

Volvamos al ejemplo [3.1.1](#). Existen diversas formas de construir dicha superficie; una de ellas consiste en considerar a la escalera infinita como una cubierta del toro doblemente perforado. Su grupo fundamental es el grupo libre de tres generadores,  $h, v, e$ . Una forma de representarlo es en la Figura [3.3](#), donde  $h$  corresponde a la dirección horizontal,  $v$  a la vertical y  $e$  a *subir un escalón*. Observemos que en este caso las curvas cerradas en el toro doblemente perforado que se levantan a la cubierta como *líneas infinitas* son aquellas las correspondientes al grupo generado por  $e$ . Podemos definir una forma bilineal antisimétrica

$$i : H_1(S, \{p_1, p_2\}, \mathbb{Z}) \times H_1(S \setminus \{p_1, p_2\}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

donde  $p_1, p_2$  son las perforaciones. Dicha forma conocida como la *forma de intersección*, la cual en el toro doblemente perforado verifica que

$$i(ph + qv + re, mh + nv + oe) = (pn - qm) + (po - rm) + (qo - rn).$$

De tal forma que si consideramos la clase  $[\omega] = -h - v + e$ , el kernel del morfismo

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(S \setminus \{p_1, p_2\}) \\ \gamma \rightarrow i([\omega], [\gamma]) \end{aligned}$$

corresponde el grupo generado por  $e$ . Por lo tanto considerando este kernel podemos construir la escalera infinita y al identificar por lados opuestos como se construyó anteriormente, se vuelve a obtener la superficie de género infinito y con cuatro singularidades de tipo infinito.

Este ejemplo sirve para motivar la construcción de [24]. Consideremos una superficie  $S$  de tipo finito con un conjunto de puntos  $\Sigma$ , vamos a construir una cubierta de  $S^*$  ramificada en  $\Sigma$  tal que si

$$i : H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(S^*, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (3.2.2)$$

es la forma de intersección descrita en el párrafo anterior, para un  $0 \neq [\omega] \in H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$  fijo definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \phi_\omega : \pi_1(S^*) \rightarrow \mathbb{Z} \\ \gamma \rightarrow i([\omega], [\gamma]), \end{aligned}$$

donde  $[\gamma]$  es la clase de  $\gamma$  en  $H_1(S^*, \mathbb{Z})$ .

**Definición 3.2.6.** *Sea  $S$  una superficie de traslación de tipo finito. Definimos a  $\tilde{S}_\omega$  como la cubriente generada por el kernel de  $\phi_\omega$  (3.2.2).*

Lo que nos dice la definición es que construimos una superficie desde una superficie compacta realizando unos cortes, tomando una cantidad numerable de copias y pegándolas de forma periódica, es decir que el grupo de transformaciones de transformaciones de cubierta sea isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . El soporte en la homología nos dice cómo son los cortes mientras que sus coeficientes en la homología nos indica como pegar esos cortes. Más aún, tenemos que si tenemos una superficie  $\tilde{S}$  construida desde un elemento  $[\omega]$  en la homología, si otra curva  $\gamma$  interseca a  $\omega$  en  $S$  entonces el levantamiento de la curva es una curva infinita que no se cierra mientras que si no es una curva cerrada y de aquí viene que la acción del grupo de transformaciones de cubierta de  $\tilde{S}$  sea una  $\mathbb{Z}$ -acción. Por la forma en la que se construyen, a este tipo de superficies también se les conoce como *superficies de tipo infinito periódicas*.

Observemos en el ejemplo anterior que si nos fijamos en una vecindad de la singularidad (en el caso del toro es removible), la intersección de la curva que es frontera de esa vecindad con  $\omega$  es 4. Si levantamos múltiplos de la curva tenemos que nunca podremos cerrarla, lo que nos dice que en efecto tenemos en  $\tilde{S}$  singularidades de tipo infinito. Esto se generaliza

(solo lo comentaremos puesto que no se utiliza en el texto) al hecho que la cubriente ramificada se extiende a una cubriente en toda la superficie si y solo si para todo  $\sigma \in \Sigma$  las curvas que generan vecindades de esos puntos singulares tienen intersección nula  $\omega$ . Más aún,  $|p^{-1}(\sigma)| = |i([\omega], [\gamma_\sigma])|$  [25], lo que nos dice que para este tipo de superficies de tipo infinito solo existe una cantidad finita de singularidades de tipo infinito.

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $S$  una superficie de traslación de tipo finito, entonces existe una correspondencia entre las  $\mathbb{Z}$ -cubiertas de  $S^*$  y la proyectivización de  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$ , es decir con  $\mathbb{P}(H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}))$ .*

*Demostración.* Sean  $[\omega_1], [\omega_2]$  dos clases en  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$ . Si existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  tales que  $m_1[\omega_1] = m_2[\omega_2]$  entonces afirmamos que las cubiertas  $\tilde{S}_{\omega_1}$  y  $\tilde{S}_{\omega_2}$  son equivalentes. Esto es resultado que la forma de intersección  $i$  definida en [3.2.2] es bilineal y no degenerada notando que si  $[\gamma]$  es tal que  $i([\omega_1], [\gamma]) = 0$  entonces

$$\begin{aligned} m_2 i([\omega_2], [\gamma]) &= i([m_2 \omega_2], [\gamma]) = i([m_1 \omega_1], [\gamma]) = \\ &= m_1 i([\omega_1], [\gamma]) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\text{Ker}(\phi_{\omega_1}) \subseteq \text{Ker}(\phi_{\omega_2})$ . Análogamente se demuestra que  $\text{Ker}(\phi_{\omega_2}) \subseteq \text{Ker}(\phi_{\omega_1})$ .  $\square$

**Corolario 3.2.1.** *Sea  $S$  una superficie de traslación de tipo finito. Entonces  $f \in \text{Aff}_+(S^*)$  se levanta a  $\tilde{f} \in \tilde{S}_\omega$  si y solo si el morfismo inducido por  $f$  en  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$  es tal que  $f_+(\omega) = \pm\omega$*

*Demostración.* Se sigue del primer resultado de la Proposición [3.2.1] y de la Proposición [3.2.3].  $\square$

### 3.2.4. $\mathbb{Z}$ – cubiertas regulares

Recordemos que queremos encontrar superficies donde el flujo geodésico pueda ser ergódico. En la clase de superficies de traslación que definimos, podemos agregar una condición para asegurar la *regularidad* de éstas, es decir, la densidad de las órbitas, la cual está íntimamente relacionado con la holonomía de la clase  $[\omega]$ .

**Definición 3.2.7.** *Sea  $S$  una superficie de tipo finito y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta, decimos que es una cubierta regular si y solo si  $\text{hol}(\omega) = 0$ .*

Estas cubiertas son construibles por el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.4.** [25] *Sea  $S$  una superficie de tipo finito y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$  – cubierta. Si  $\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  es un grupo Fuchsiano no elemental entonces es una cubierta regular.*

*Demostración.* Recordemos que un grupo Fuchsiano es elemental si es abeliano o tiene un subgrupo abeliano de índice finito [31].

Procederemos con la demostración suponiendo que  $hol(\omega) \neq 0$ . De tal forma que para todo par  $(\tilde{f}, f) \in \text{Aff}(\tilde{S}_\omega)$  se verifica que

$$D(\tilde{f})(hol(\omega)) = D(f)(hol(\omega)) = hol(f_*(\omega)) = \pm hol(\omega) \neq 0.$$

De esta forma concluimos que

$$\Gamma(\tilde{S}_\omega) \subset \{A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid A(hol(\omega)) = \pm hol(\omega)\} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \text{ [25]}.$$

Por lo tanto haciendo análisis en el último grupo, concluimos que  $\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  es abeliano o tiene un subgrupo abeliano de índice 2, es decir, es elemental.  $\square$

Notemos que no todas las foliaciones medibles y orientables en la cubierta  $\tilde{S}_\omega$  descienden a foliaciones en la superficie base, sin embargo, todas las foliaciones medibles y orientables en la superficie base se levantan a foliaciones que son periódicas en la cubierta. Solo descienden las que son periódicas respecto al grupo de transformaciones de cubierta de la cubierta. Pero notemos que por la construcción el levantamiento del flujo geodésico  $\phi_t^\theta$  en dirección  $\theta$  se levanta al flujo geodésico en dirección  $\theta$  en la cubierta, al cual lo denotaremos como  $\tilde{\phi}_t^\theta$ . Ahora bien, recordemos que un flujo es recurrente en el sentido de la medida si para todo conjunto de medida positiva  $A$  se cumple que para casi todo  $x \in X$  existe una sucesión creciente  $t_n$  tal que  $\phi_{t_n}^\theta(x) \in A$ . Veamos la justificación del nombre del tipo de cubiertas que hemos definido.

**Proposición 3.2.5.** [25] *Sea  $S$  una superficie de tipo finito y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular. Si  $\theta$  es una dirección ergódica en  $\phi_t^\theta$  para  $S$  entonces  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es una dirección recurrente para  $\tilde{S}_\omega$ .*

*Demostración.* Para esta demostración hay que recordar el Lema 1.3.6. Si  $(X, \mu)$  es un espacio topológico con medida finita y  $T : X \rightarrow X$  es una transformación ergódica respecto a  $\mu$ , entonces para una función  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f \in L^1(X, \mu)$  definimos

$$\begin{aligned} T_f : X \times \mathbb{Z} &\rightarrow X \times \mathbb{Z} \\ (x, d) &\rightarrow (T(x), d + f(x)). \end{aligned}$$

Entonces  $T_f$  es recurrente si y solo si  $\int_X f d\mu = 0$  [1.3.6].

Sea  $S$  una superficie como en el enunciado. Consideremos un intervalo  $I$  transversal a la superficie que esté en dirección  $\theta$ <sup>10</sup>. Consideremos  $\tilde{I}$  su levantamiento en la cubierta. Consideremos en ambos casos los flujos geodésicos en dirección  $\theta$  y los mapeos de primer retorno, en  $S$  este induce un IET  $T : S \rightarrow S$ . La ergodicidad de  $T$  es equivalente a la ergodicidad de  $\phi_t^\theta$  mientras que la recurrencia en  $\tilde{T}$  es equivalente a la recurrencia de  $\tilde{\phi}_t^\theta$ . Observemos que existe una biyección que preserva la medida entre  $\tilde{S}$  y  $S \times \mathbb{Z}$  por ser esta una  $\mathbb{Z}$ -cubierta de  $S$ . De tal forma que  $\tilde{T}$  es conjugado (en medida) a la transformación

$$T_f : I \times \mathbb{Z} \rightarrow I \times \mathbb{Z}.$$

<sup>10</sup>La dirección perpendicular a  $\theta$ .

Donde  $f : I \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $f(x) = i([\omega], [\alpha_x])$ . Donde  $\omega$  es la curva que induce la cubierta y  $\alpha_x$  es la curva cerrada que inicia en  $x$ , sigue el recorrido del flujo geodésico para llegar a  $T(x)$  y cerrarse con el segmento en  $I$  que une a estos dos puntos [25]. Notemos que por construcción de  $\alpha_x$ , tenemos que  $f$  toma un valor fijo en cada subintervalo de continuidad del IET, de esta forma  $f$  solo toma una cantidad finita de valores en  $\mathbb{Z}$ . Si  $\mu$  es la medida de Lebesgue en el intervalo entonces  $f \in L^1(I, \mu)$ . De esta forma si  $\int_I f d\mu = 0$  entonces  $T_f$  y por tanto  $\tilde{T}$  son recurrentes cuando  $T$  es ergódico.

Observemos que en los intervalos de continuidad de  $T$  a los cuales nombraremos  $I_1, \dots, I_m$  tenemos que por construcción, los representantes de las curvas  $\alpha_x$  en  $H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z})$  con  $x \in I_k$  son invariantes pues estos dependen de la información combinatoria que el IET induce. Esto en particular implica que podemos asociarle un  $\alpha_j$  a cada intervalo de continuidad del IET. Si  $\gamma$  es una curva que representa un elemento en  $H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z})$  entonces una intersección positiva con  $\alpha_j$  implica que  $\gamma$  pasó por el rectángulo de la parte superior de  $I_j$  [11] y por tanto ese cruce suma  $\mu(I_j)$  a la proyección ortogonal de la holonomía de  $\gamma$  en dirección  $\theta'$  a quien denotaremos como  $(hol(\gamma))_{\theta'}$ , [12]. De esta forma tenemos que

$$\int_I f d\mu = \sum_k \mu(I_k) i([\gamma], [\alpha_k]) = (hol(\omega))_{\theta'} [25].$$

Concluimos que si  $hol(\omega) = 0$  entonces  $(hol(\omega))_{\theta'} = 0$  entonces  $T_f$  es recurrente y por tanto  $\tilde{T}$  es recurrente, lo que implica que  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es recurrente. Por otro lado si  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es recurrente entonces  $T_f$  es recurrente y  $\int_I f d\mu = 0$  y por tanto  $(hol(\omega))_{\theta'} = 0$  lo cual implica que  $hol(\omega) = 0$ , esta equivalencia siempre que  $\theta$  sea una dirección ergódica en  $S$ .  $\square$

**Corolario 3.2.2.** [25] *Sea  $S$  una superficie de tipo finito y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular, entonces para casi toda dirección, el flujo geodésico  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es recurrente en  $\tilde{S}_\omega$ .*

*Demostración.* Por el teorema de Kerckhoff-Masur-Smillie [2.1.2] tenemos que en una superficie de tipo finito casi toda dirección es únicamente ergódica, en particular ergódica, entonces si la cubierta es regular todas estas direcciones ergódicas son recurrentes en la cubierta, entonces casi todas las direcciones son recurrentes en la cubierta.  $\square$

### 3.2.5. Horobolas y cúspides

En esta sección vamos a definir quienes son los *horociclos*, las *horobolas*, las *cúspides* y vamos a definir un criterio de aproximación que será presentado en la demostración de los Teoremas [3.0.1] y [3.0.2].

Recordemos que el grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  por transformaciones de Möbius. Siguiendo a S. Katok [31] podemos identificar a  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  con el haz tangente unitario a  $\mathbb{H}^2$  tal que  $(z, \eta)$  la identificamos con la única transformación  $g$  tal que  $g(i) = z$  y  $\eta = dg(z)(\bar{i})$  donde  $\bar{i}$  es el vector unitario en  $i$  que apunta hacia el eje imaginario de forma positiva. De

<sup>11</sup>Puede visualizarse mejor en la construcción por rectángulos con cremallera de Veech de la sección [1.2.4].

<sup>12</sup>lo cual viene de *proyectar* a  $I$ .

esta forma, el flujo geodésico en el haz tangente unitario de  $\mathbb{H}^2$  el cual deforma vectores tangentes unitarios definidos en una geodésica de velocidad unitaria puede ser identificado con la acción derecha

$$\phi^t(z, \eta) = g \circ g_t.$$

La cual se proyecta a una geodésica sobre  $g(i)$ . Si  $\Gamma$  es un grupo Fuchsiano entonces podemos identificar a  $\Gamma/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  con el haz tangente unitario de la superficie  $M$  donde  $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$  [31]. Si  $\Gamma$  no tiene puntos fijos elípticos, ni parabólicos (cúspides) entonces la identificación es un homeomorfismo, de lo contrario la estructura de haz fibrado se preserva salvo en esos puntos. De cualquier forma el flujo geodésico definido en el haz tangente unitario a  $\mathbb{H}^2$  induce de manera natural el flujo geodésico en el haz tangente unitario a  $M$ . Recordemos que el criterio de Masur 2.1.4 nos dice que si el flujo geodésico en dirección  $\theta$  no diverge en el móduli entonces es únicamente ergódico, lo cual implica que si el flujo geodésico en dirección  $\pi/2 - \theta$  no diverge en el móduli entonces el flujo geodésico en dirección  $\theta$  es únicamente ergódico. Tomando en consideración que el grupo de Veech es el subgrupo de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  cuya acción deja invariante a una superficie en el móduli [38] se sigue que si la acción del flujo geodésico con una dirección  $\pi/2 - \theta$  no diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el grupo de Veech, entonces en la dirección  $\theta$  el flujo es únicamente ergódico en la superficie [24].

*Notación:* utilizaremos que  $\theta' = \pi/2 - \theta$ .

**Definición 3.2.8.** *Consideremos los conjuntos*

$$\mathbb{H}_c^2 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Im(z) > c, \mid c \in \mathbb{R}_+\}.$$

*Las imágenes isométricas de estos conjuntos se les conoce como horobolas y a sus fronteras como horociclos.*

Por ejemplo, si  $g$  es un elemento parabólico entonces existe  $h$  tal que  $h \circ g \circ h^{-1}$  es una traslación, entonces los horociclos asociados son círculos tangentes a  $\mathbb{R}$  en el punto parabólico y las horobolas sus respectivos interiores [31].

Si consideramos una horobola  $B_c$  y un grupo Fuchsiano  $\Gamma$ , donde el estabilizador de  $B_c$  en  $\Gamma$  no es trivial, entonces este es un grupo  $G_B$  generado por un elemento parabólico y maximal respecto a la inclusión. Para un grupo Fuchsiano fijo consideremos la transformación

$$B_c/G_B \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma.$$

**Definición 3.2.9.** *Una cúspide (en adelante nos referiremos a una cúspide como el punto fijo con la vecindad mencionada) en  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  se define como la imagen de un  $B_c/G_B$  bajo la transformación mencionada donde el estabilizador  $G_B$  no es trivial y  $B_c$  es maximal en el sentido que la transformación es inyectiva. A esta la conoceremos como  $\mathcal{C}_c$*

Para una cúspide  $\mathcal{C}_c$  que es la imagen de un  $\mathbb{H}_c^2$  vamos a considerar los conjuntos  $\mathcal{C}_d$  como las imágenes de  $\mathbb{H}_d^2$  con  $d > c$ . Diremos que una órbita del flujo geodésico  $g_t(x)$  toca infinitamente a  $\mathcal{C}_d$  si existe una sucesión creciente de momentos  $t_n$  tales que  $g_{t_n}(x) \in \mathcal{C}_d$  [24].

**Definición 3.2.10.** *Un grupo Fuchsiano  $\Gamma$  es una latiz no uniforme si  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  no es compacto pero tiene medida finita.*

En este caso  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  tiene una cantidad finita (pero no nula) de cúspides  $\mathcal{C}_{c_n}$  tales que su complemento es un conjunto compacto en  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ . Una discusión detallada de cúspides se puede encontrar en S. Katok [31].

Consideremos un grupo Fuchsiano  $\Gamma$  que sea una latiz no uniforme, para un  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{0} = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$  su órbita bajo  $\Gamma$  es discreta si y solamente si su estabilizador tiene un elemento parabólico en cuyo caso la proyección de esta órbita en  $\mathbb{S}^1$  es densa [29]. Una forma de describir esto de forma óptima es la siguiente:

**Definición 3.2.11.** [24]

*Para un grupo Fuchsiano  $\Gamma$  y un  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  decimos que una dirección  $\theta$  en  $\mathbb{S}^1$  es  $r$ -aproximable (con  $r > 0$ ) si existen una infinidad de elementos  $\gamma \in \Gamma$  tales que*

$$||\gamma(z)|| |\gamma(z) \wedge e_\theta| < r.$$

Donde  $|a \wedge b| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot |\sin(\beta)|$  tal que  $\beta$  es el ángulo entre  $a$  y  $b$  y donde  $e_\theta$  es el punto en  $\mathbb{S}^1$  con dirección  $\theta$ .

Observemos que si  $\Gamma(z)$  forma un conjunto discreto y  $\theta$  es una dirección  $r$ -aproximable, como la órbita no se puede acumular en  $\bar{0}$ , la desigualdad de la Definición 3.2.11 nos indica que existe una infinidad de elementos  $\gamma \in \Gamma$  donde la proyección de  $\gamma(z)$  a  $\mathbb{S}^1$  se encuentra lo suficientemente próximo a  $e_\theta$ , es decir que hay direcciones que se acumulan en una vecindad de la dirección  $\theta$ .

### 3.3. Ergodicidad

En esta sección vamos a demostrar los teoremas 3.0.1 y 3.0.2

Un elemento fundamental para el criterio de ergodicidad que vamos a presentar, es la aproximación a una dirección por *cintas infinitas*.

**Definición 3.3.1.** *Una cinta infinita, la cual denotaremos por  $\mathcal{D}$ , es una imagen isométrica de una cinta infinita en  $\mathbb{R}^2$ . Es decir, un conjunto de la forma  $\mathbb{R} \times (-r, r)$  en la superficie.*

Si una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular  $\tilde{S}_\omega$  admite una cinta infinita entonces su proyección en  $S^*$  es un cilindro, es decir, una colección maximal de geodésicas cerradas homotópicas [38]. Para alguna de esas geodésicas, a saber,  $\delta$  su levantamiento  $\tilde{\delta}$  es isométrico a una recta infinita periódica con periodo  $k \neq 0$ , esto quiere decir que  $i([\omega], [\delta]) = k \neq 0$ .

**Observación:** Tanto  $v(\mathcal{D}) := \mathrm{hol}(\delta)$  como el área del cilindro que genera  $A(C)$  dependen únicamente de  $\mathcal{D}$ .

**Definición 3.3.2.** [24] Sea  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta. Decimos que  $\theta$  dirección es aproximable por cintas infinitas si existe  $\epsilon > 0$  una  $k \neq 0$  y una infinidad de cintas infinitas  $\mathcal{D}_n$  tales que

$$|e_\theta \wedge v(\mathcal{D}_n)| \leq (1 - \epsilon) \frac{A(C_n)}{2|v(\mathcal{D}_n)|}.$$

Donde además para toda  $n$  tenemos que si  $\gamma_n$  es una de las curvas de las proyecciones de las cintas, entonces  $i([\omega], [\gamma_n]) = k$ .

Por último, para que tenga sentido el enunciado del primer teorema principal de este capítulo necesitamos la siguiente definición:

**Definición 3.3.3.** Si  $\tilde{S} \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta, decimos que  $\theta$  es una dirección ergódica intermedia si para toda cubierta intermedia finita  $\tilde{S}' \rightarrow S' \rightarrow S$  tenemos que  $\theta$  es ergódico en  $S'$ .

El primer resultado que vamos a trabajar es:

**Teorema 3.3.1.** (Weiss-Hubert 2013 [29])

Si  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular y  $\theta$  es una dirección aproximable por cintas infinitas y ergódico en cubiertas intermedias entonces es una dirección ergódica en  $\tilde{S}_\omega$ .

La demostración se divide en dos partes, para la primera tenemos los siguientes resultados técnicos.

Vamos a considerar una acción de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que actúe por transformaciones lineales.

**Proposición 3.3.1.** [29] Sea  $\Gamma$  un grupo Fuchsiano tal que no es una latiz uniforme y sea  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$  de tal suerte que  $\Gamma(z)$  forme un conjunto discreto. Consideremos la cúspide  $\mathcal{C}$  asociada al estabilizador de  $z$ . Para toda  $c > 0$  existe una  $r > 0$  tal que si la dirección  $\theta$  es  $r$ -aproximable entonces existe una órbita de la geodésica  $g_t r_\theta$  que toca infinitamente a  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Queremos demostrar que para una  $c > 0$ , bajo ciertas condiciones obtenemos que

$$\Im((g_{t_n} r'_\theta \gamma_n)^{-1}(z)) > c$$

en una infinidad de momentos.

Observemos que para todo  $g \in \mathrm{PLS}(2, \mathbb{R})$  tenemos que  $\Im(g^{-1}(i)) = \frac{1}{a^2 + c^2}$ . De esta forma podemos hacer una aproximación directa si  $z = i$ . Consideremos  $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tal que  $f(z) = (1, 0)$ . Conjugemos a  $\Gamma$  por este elemento de tal forma que sin pérdida de generalidad  $z = (1, 0)$ . Se sigue que la cúspide asociada al estabilizador de  $z$  es la proyección en  $\mathbb{H}/\Gamma$  de  $\mathbb{H}_{c_0}^2$  para algún  $c_0$ . Supongamos que  $c > c_0$  y siguiendo [24] definamos  $r = \frac{1}{2c}$ . Sea  $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$  tal que

$$|e_\theta \wedge \gamma_n(z)| |\gamma_n(z)| < r.$$

Denotemos por  $L_n$  y  $\theta_n$  la longitud y dirección respectivamente tales que  $\gamma_n(z) = L_n e_{\theta_n}$ <sup>13</sup>. Consideremos que

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

De esta forma  $\gamma_n(z) = (a_n, c_n) = L_n e_{\theta_n}$  por elección de  $z$ . Se sigue que la condición de ser  $r$ -aproximable se convierte en

$$L_n^2 |\text{sen}(\theta - \theta_n)| < r.$$

Definamos los momentos <sup>[29]</sup>

$$t_n = \log(L_n) - \log(\sqrt{r}).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión  $\gamma_n$  es tal que  $L_n$  y por tanto  $t_n$  es creciente. Si tenemos que

$$g_{t_n} r_{\theta'} \gamma_n = \begin{pmatrix} \overline{a_n} & \overline{b_n} \\ \overline{c_n} & \overline{d_n} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{a_n} \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} &= g_{t_n} r_{\theta'} L_n e_{\theta_n} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\log(L_n) - \log(\sqrt{r})} & 0 \\ 0 & e^{\log(\sqrt{r}) - \log(L_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\text{sen}(\theta') \\ \text{sen}(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} L_n e_{\theta_n} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{L_n^2 \text{sen}(\theta - \theta_n)}{\sqrt{r}} \\ \sqrt{r} \cos(\theta - \theta_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $L_n^2 |\text{sen}(\theta - \theta_n)| < r$  entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}((g_{t_n} r_{\theta'} \gamma_n)^{-1}(i)) &= \frac{1}{\overline{a_n}^2 + \overline{c_n}^2} = \frac{r}{L_n^4 \text{sen}^2(\theta - \theta_n) + r^2 \cos^2(\theta - \theta_n)} > \\ &= \frac{r}{r^2(1 + \cos^2(\theta - \theta_n))} = \frac{1}{r(1 + \cos^2(\theta - \theta_n))} \geq \frac{1}{2r} = c. \end{aligned}$$

Lo cual implica que para toda  $n$  se cumple que la órbita de  $i$  bajo  $g_{t_n} r_{\theta'} \gamma_n$  está contenida en  $\mathbb{H}_c^2$ . Lo cual implica que el flujo geodésico en dirección  $\theta'$  toca infinitamente a  $\mathcal{C}_c$ .  $\square$

**Proposición 3.3.2.** <sup>[29]</sup> *Sea  $\Gamma$  una latiz no uniforme. Para toda  $r > 0$  y para toda  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$  tal que  $\Gamma(z)$  forme un conjunto discreto tenemos que la medida de Lebesgue del conjunto*

$$\Theta_r = \{\theta \in \mathbb{S}^1 \mid \theta \text{ no es } r\text{-aproximable}\}$$

es cero.

---

<sup>13</sup> $e_{\theta}$  es el vector en  $\mathbb{S}^1$  con ángulo  $\theta$ .

*Demostración.* Afirmamos que el conjunto:

$$\Omega_c = \{[x] \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma \mid g_t[x] \text{ no toca infinitamente } \mathcal{C}_c\}$$

tiene medida cero respecto a  $\lambda$ , la medida inducida por la medida de Haar [1.3.9](#)[1.3.4](#) en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Para justificar brevemente este hecho referimos al Teorema 5.5 del apéndice [10](#), donde Brin demuestra que para una superficie que se pueda obtener como  $\mathbb{H}/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , el flujo geodésico definido en el haz tangente unitario, el cual lo podemos indentificar con  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  es ergódico respecto a la medida de Haar que induce  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Por lo que tenemos que el flujo geodésico en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  respecto a la medida  $\lambda$  que induce la medida de Haar en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es ergódica. Por construcción las cúspides tienen medida positiva, entonces se sigue por ergodicidad del flujo el conjunto  $\Omega_c$  tiene medida cero.

Por la Proposición [3.3.1](#) existe una  $c > 0$  y una cúspide  $\mathcal{C}_c$  de tal forma que  $\{[\theta'] \mid \theta \in \Theta_r\} \subseteq \Omega_c$ . Considerando la transformación

$$h_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$g_t \circ h_s \circ g_{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ se^{-2t} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Id.$$

Se sigue que si  $[x] \in \Omega_c$  entonces existe  $z'$  y una infinidad de momentos  $t_n$  tales que  $g_{t_n}[x](z') \in \mathcal{C}_c$ , entonces por la convergencia anterior tenemos que  $g_t[h_s x](z') \in \mathcal{C}_c$ , lo cual implica que  $h_s x \in \Omega_{c'}$  para toda  $c' > c$ .

Observemos que toda matriz en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  se puede descomponer en un producto  $g_t h_s r_\theta$  de tal forma que la asignación  $(s, t, \theta) \rightarrow (g_t h_s r_\theta)$  es un homeomorfismo local [29](#), lo cual implica que el conjunto

$$\{[g_t h_s r_\theta] \mid \theta \in \Theta_r\},$$

el cual está contenido en  $\Omega_{c'}$  y tiene medida positiva en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  siempre que  $\mu(\Theta_r) > 0$ . Pero la medida de  $\Omega_{c'}$  es nula como lo notamos al principio de la demostración, entonces  $\mu(\Theta_r) = 0$ .  $\square$

**Corolario 3.3.1.** [29](#) Si  $\Gamma$  es una latiz no uniforme entonces el conjunto de direcciones  $\theta$  para las cuales el flujo geodésico  $g_t[r_\theta]$  en  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  diverge es de medida cero.

*Demostración.* Se sigue de la observación realizada sobre el conjunto  $\Omega_c$  en la Proposición [3.3.2](#).  $\square$

El siguiente lema nos da la primera parte de la hipótesis del Teorema [3.0.2](#) y se utiliza también en la demostración del Teorema [3.0.1](#).

**Lema 3.3.1.** [29] *Sea  $S$  una superficie de traslación de tipo infinito y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta. Si el flujo geodésico  $g_t[r_{\theta'}]$  en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  no es divergente entonces para toda cubierta intermedia*

$$\tilde{S}_\omega \rightarrow S' \rightarrow S,$$

*se verifica que el flujo geodésico  $g_t[r_{\theta'}]$  en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(S')$  no es divergente.*

*Demostración.* En la Proposición 3.2.2 demostramos que existe un subgrupo de índice finito del grupo de Veech de la cubierta que desciende al grupo de Veech de  $S$ . Esto quiere decir que ese mismo subgrupo desciende a todo grupo de Veech de toda cubierta intermedia finita  $S'$ . Si el flujo geodésico  $g_t[\theta]$  no diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(\tilde{S})$  entonces no diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/G$  donde  $G$  es el subgrupo de índice finito en cuestión, entonces se sigue que no diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Sigma(S')$  para toda cubierta intermedia finita.  $\square$

**Corolario 3.3.2.** [29] *Sea  $S$  una superficie de traslación compacta y  $\tilde{S}_\omega$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta. Si  $\theta$  es una dirección tal que el flujo geodésico  $g_t[r_{\theta'}]$  no diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  entonces  $\theta$  es una dirección ergódica para las cubiertas intermedias finitas  $S'$ . Más aún, si  $\tilde{S}_\omega$  es una superficie cuyo grupo de Veech es una latiz no uniforme entonces el conjunto de las direcciones  $\theta$  que no son ergódicas en todas las cubiertas intermedias finitas es de medida cero.*

*Demostración.* Si se verifican las condiciones del enunciado entonces por el Lema 3.3.1 tenemos que en todas las cubiertas intermedias finitas el flujo geodésico en  $\theta'$  no es divergente, por la condición de Masur 2.1.4 [38] tenemos que  $\theta$  es únicamente ergódica, en particular es ergódica. Más aún, si estamos trabajando con una superficie cuyo grupo de Veech es una latiz no uniforme entonces por el Corolario 3.3.1 se sigue que el conjunto de las direcciones  $\theta$  tales que  $g_t[r_{\theta'}]$  diverge en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  es de medida cero. Juntando esto con la primer parte de esta demostración y la condición de Masur, obtenemos el resultado deseado.  $\square$

La importancia del siguiente resultado radica en que nos da una equivalencia respecto a la existencia de una cinta infinita en la cubierta  $\tilde{S}$ .

**Proposición 3.3.3.** [29] *Sea  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta. Existe una cinta infinita en  $\tilde{S}_\omega$  si y solo si existe un cilindro  $C$  en  $S$  de tal forma que la curva  $\delta$  en su interior verifique que  $i([\omega], [\delta]) \neq 0$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  un cilindro en  $S$ . Como este está compuesto por curvas geodésicas, por la construcción de las  $\mathbb{Z}$ -cubiertas se sigue que las componentes conexas de su levantamiento a la cubierta  $\tilde{S}_\omega$  son cilindros o son cintas infinitas. Si el levantamiento es un cilindro entonces tenemos que el levantamiento correspondiente de  $\delta$  a esa componente conexas es una curva cerrada, esto ocurre si y solo si  $i([\omega], [\delta]) = 0$ .

Por otro lado si  $\mathcal{D}$  es una cinta infinita en la cubierta entonces al considerar  $L$  una recta infinita en su interior tenemos que por cómo se construyen las  $\mathbb{Z}$ -cubiertas tenemos que  $i([\omega], [\delta]) \neq 0$ . Más aún, la proyección de  $\mathcal{D}$  es el cilindro  $C$  cuya curva interior es  $\delta$ .  $\square$

### Valores esenciales en cociclos

En el Corolario [3.3.2](#) encontramos una condición para que una dirección  $\theta$  sea ergódica en las cubiertas intermedias  $S$ . En esta sección vamos a demostrar que si una dirección es aproximable por cintas infinitas, entonces existe un  $k \in \mathbb{Z}$  que llamaremos *valor esencial*. Estos valores esenciales resultan de interés, pues como veremos en la Proposición [3.3.4](#), si  $k$  es un valor esencial, la ergodicidad en la  $k$ -cubierta intermedia implica ergodicidad en la cubierta total.

Recordemos que si  $F_t : X \rightarrow X$  es un flujo medible que preserve la medida  $\mu$  sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  entonces un cociclo es una función medible  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x, t + s) = f(F_t(x), s) + f(x, t)$ . De tal forma que podemos asociarle al flujo  $F_t$  junto con el cociclo  $f$  un flujo medible que preserve la medida  $F_{f,t} : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X \times \mathbb{Z}$  tal que  $F_{f,t}(x, m) = (F_t(x), m + f(x, t))$ . A este flujo medible se le conoce como  $\mathbb{Z}$ -valuado producto anti simétrico [\[35\]](#).

Notemos que la  $\mathbb{Z}$  acción sobre  $X \times \mathbb{Z}$  que actúa como la suma en el segundo factor conmuta con el flujo, de tal forma que para todo subgrupo  $n\mathbb{Z}$  tenemos que el flujo desciende a ser un flujo  $\overline{F}_{f,t}$  en  $X \times \mathbb{Z}_n$ . Notemos que si el flujo  $F_{f,t}$  es ergódico en  $X \times \mathbb{Z}$  entonces el flujo  $\overline{F}_{f,t}$  en  $X \times \mathbb{Z}_n$  es ergódico. Vamos a definir una condición para que la ergodicidad pueda ir en la dirección contraria.

**Definición 3.3.4.** *Consideremos el flujo  $F_{f,t}$  para el cociclo  $f$ . Diremos que  $k$  es un valor esencial para el flujo, si para todo conjunto  $A$  de medida positiva tenemos que*

$$\mu(F_t^{-1}(A) \cap \{x \in A \mid f(x, t) = k\}) > 0.$$

El concepto y desarrollo del mismo de estos valores es un poco más general y lo podemos encontrar en las notas de Klaus Schmidt [\[44\]](#). Pero para este tipo de transformaciones particular esta definición basta.

**Proposición 3.3.4.** [\[44\]](#) *Si  $k$  es un valor esencial para  $F_{f,t}$  y  $\overline{F}_{f,t}$  es ergódico en  $X \times \mathbb{Z}_k$  entonces  $F_{f,t}$  es ergódico en  $X \times \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un conjunto  $A \times M$  invariante bajo el flujo  $F_{f,t}$ . Si no tiene medida positiva entonces consideremos su complemento que también tiene que ser invariante. Si  $k$  es un valor esencial entonces existe un subconjunto de  $A$  de medida positiva que es invariante bajo el flujo y que además  $f(x, t) = k$ . Lo que nos quiere decir que en ese conjunto  $F_{f,t}(x, n) = (F_t(x), n + k)$ . Por lo tanto podemos observar que  $n \in M$  si y solo si  $n + mk \in M$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Si nos fijamos en la proyección de estos conjuntos en  $X \times \mathbb{Z}_k$  podemos notar que es de medida positiva e invariante bajo  $\overline{F}_{f,t}$ . Como este es ergódico entonces esta proyección tiene medida total, lo que quiere decir que ese subconjunto de  $A$ , a saber  $A_2$  verifica que  $\mu(A_2) = \mu(X)$  y que la proyección de  $M$  es todo  $\mathbb{Z}_k$ , lo que implica que  $M$  tiene representantes de todas las clases, por la condición de  $M$  que mencionamos al principio vemos que  $M$  es de medida total, entonces  $F_{f,t}$  es ergódico.  $\square$

En el resto de esta sección vamos a demostrar que si una dirección es aproximable por cintas infinitas entonces existe un valor esencial para el flujo geodésico. Recordemos de la Definición 3.3.2 que si una dirección  $\theta$  es aproximable por cintas, entonces existen una infinidad de cintas  $\mathcal{D}_n$ , y por tanto una infinidad de cilindros  $C_n$ , donde si  $\gamma_n$  son las curvas interiores de los cilindros entonces existe una  $k \neq 0$  tal que  $i([\omega], [\gamma_n]) = k$  para toda  $n$ . Vamos a demostrar que esa  $k$  es un valor esencial para el flujo  $F_{f,t}$ .

**Notación:** Si  $\gamma$  es una curva en  $S$  tal que  $i([\omega], [\gamma]) = k \neq 0$  entonces la curva tiene un levantamiento a  $\tilde{S}_\omega$  como una recta infinita. Si el punto inicial de  $\gamma$  es  $x$ , denotaremos a su punto extremo en el levantamiento a esa curva como  $g_k(x)$ .

Decir que un elemento es un valor esencial del flujo geodésico es un abuso de notación. Para justificar su uso recordemos que de la demostración de la Proposición 3.2.5 tenemos que  $\tilde{S}_\omega$  es equivalente (en medida) a  $S \times \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.3.5.** [29]

*Definamos*

$$F_t^\theta : S \times \mathbb{Z} \rightarrow S \times \mathbb{Z}$$

$$(x, n) \rightarrow (\phi_t^\theta(x), n + i([\omega], [\delta])).$$

Donde  $\delta$  es la curva que se obtiene al tomar un punto fijo  $x_0$ , una curva que una  $x_0$  con  $x$  concatenado con la curva del flujo  $\phi_t^\theta$  que une  $x$  con  $\phi_t^\theta(x)$ , y por último una curva que une  $\phi_t^\theta(x)$  con  $x_0$ .

Notemos que para la construcción de  $\delta$ , la elección de  $x_0$  es indiferente [29]. Además la forma de intersección con  $\omega$  y esa  $\delta$  (la cual solo depende de  $x$ ) es un cociclo medible, por lo tanto decir que queremos demostrar que  $k$  es un valor esencial es una simplificación para decir que  $k$  es valor esencial de este cociclo.

**Definición 3.3.6.** Sea  $r > 0$  y  $R$  un rectángulo euclideo, denotaremos por  $rR$  al rectángulo concéntrico a  $R$  dilatado por  $r$ . Cuando decimos que  $\tilde{S}_\omega$  admite un rectángulo significa que existe un encaje isométrico de un rectángulo  $R$  en  $\tilde{S}_\omega$ .

**Definición 3.3.7.** Decimos que  $x \in \tilde{S}_\omega$  admite un rectángulo en el paso  $n$  si  $p^{-1}(C_n)$  admite un  $rR$  donde el rectángulo  $R$  viene dado por dos vértices opuestos  $x$  y  $g_k(x)$  y  $r = \frac{1-\epsilon/2}{1-\epsilon} > 1$  y donde  $C_n$  son los cilindros correspondientes a las cintas  $\mathcal{D}_n$ .

**Lema 3.3.2.** [29] Sea  $p : \tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular y sea  $\theta$  una dirección aproximable por cintas infinitas. Si denotamos por  $\tilde{V}$  el conjunto de  $x \in \tilde{S}_\omega$  que admiten rectángulos para una infinidad de pasos. Entonces  $\mu(S \setminus p(\tilde{V})) = 0$ .

*Demostración.* La idea de la demostración es encontrar un conjunto invariante bajo el flujo en la dirección  $\theta$  que es aproximable por cintas infinitas, cuya medida sea positiva y que esté contenido en  $p(\tilde{V})$ . Por ergodicidad del flujo en esa dirección tendremos que su complemento en  $S$  es de medida cero.

Observemos que si  $v_n$  representa un vector de holonomía de una curva interior del cilindro  $C_n$ <sup>14</sup> entonces  $\|v_n\| \rightarrow \infty$ , pues en una superficie compacta solo existe una cantidad

<sup>14</sup>Cilindro que es proyección de  $\mathcal{D}_n$ .

finita de cilindros cuyas curvas interiores tienen longitud acotada, lo cual no es posible pues tenemos que las cintas infinitas y por tanto los cilindros forman un conjunto infinito. Como

$$|e_\theta \wedge v_n| \leq (1 - \epsilon) \frac{A(C_n)}{2\|v_n\|}$$

y  $\|v_n\| \rightarrow \infty$ , se sigue que el seno del ángulo que se produce entre  $e_\theta$  y  $v_n$  converge a cero, esto ocurre solo si el ángulo de  $v_n$  converge a  $\theta$ .

Para cada cilindro  $C_n$  consideremos una curva interior  $\delta_n$  que sea equidistante a las fronteras del cilindro, y sea  $\tilde{\delta}_n$  el levantamiento de cada una de esas curvas. Entonces vamos a considerar los conjuntos  $\mathcal{D}_n^*$ , el conjunto de puntos en  $p^{-1}(C_n)$  tales que su distancia con  $\tilde{\delta}_n$  sea de a lo más

$$\frac{\epsilon^2}{8\|v_n\|}.$$

[29] Observemos que  $v_n$  es la diagonal de un rectángulo  $R$  cuyos vértices opuestos son  $x$  y  $g_k(x)$ , además  $\|v_n\|$  es la circunferencia del cilindro  $C_n$  por construcción. Por como elegimos  $\delta_n$  tenemos que equidista de las fronteras de  $C_n$  de una distancia de  $\frac{A(C_n)}{2\|v_n\|} \geq \frac{\epsilon}{2\|v_n\|}$  (asumiendo que el área es mayor que  $\epsilon$ , lo cual lo podemos asumir). Entonces  $\tilde{\delta}_n$  también está a esa distancia de las fronteras de  $p^{-1}(C_n)$ . Observemos que de esta forma  $x$  admite un rectángulo pues su arista en dirección perpendicular a  $\theta$  es de a lo más

$$\frac{(1 - \epsilon/2)A(C_n)}{2\|v_n\|}.$$

En particular cualquier punto que esté a distancia a lo más  $\frac{\epsilon^2}{4\|v_n\|}$  de  $\tilde{\delta}_n$  admite un rectángulo en paso  $n$ . Entonces todo elemento en  $\mathcal{D}_n^*$  admite un rectángulo en paso  $n$ . Consideramos el conjunto  $C_n^* = p(\mathcal{D}_n^*)$ . Como  $\mathcal{D}_n^*$  por construcción es invariante bajo transformaciones de cubierta tenemos que  $p^{-1}(C_n^*) = \mathcal{D}_n^*$ . Si consideramos  $\Delta$  como el conjunto límite superior de los  $\mathcal{D}_n^*$ , es decir, el conjunto de puntos en  $\tilde{S}_\omega$  tales que  $x \in \mathcal{D}_n^*$  para una infinidad de  $n$ 's. Este conjunto existe pues las direcciones de los  $v_n$  convergen a la dirección  $\theta$  entonces esos conjuntos convergen a una vecindad tubular de una curva en dirección  $\theta$ . Ahora veamos que si  $C$  es el límite superior de los  $C_n^*$  entonces  $p^{-1}(C) = \Delta$ . Además como cada  $C_n^*$  tiene medida de al menos  $\epsilon^2/4$  entonces  $C$  tiene medida positiva. Por cómo construimos  $C$  y definimos a  $\tilde{V}$  se sigue que  $C \subseteq p(\tilde{V})$ . Procederemos a demostrar que  $\bigcup_t \phi_t^\theta(C) \subseteq p(\tilde{V})$ . Si logramos esto tendremos que un conjunto invariante de medida positiva está en  $p(\tilde{V})$  y por lo tanto este último tendrá medida total.

Sea  $x \in C$  y  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos que como las direcciones de  $v_n$  convergen a  $\theta$ , entonces al mover a  $x$  en la dirección de  $\theta$  entonces existen una infinidad de  $n$ 's tales que  $\phi_t^\theta(x)$  está a una distancia menor de  $\frac{\epsilon^2}{4\|v_n\|}$ , por una observación del inicio de esta demostración concluimos que  $\phi_t^\theta(x) \in p(\tilde{V})$ . Entonces  $p(\tilde{V})$  contiene un conjunto invariante de medida positiva en una dirección ergódica, lo que quiere decir que en particular su complemento es de medida cero.

□

Con el siguiente lema tendremos la segunda parte del Teorema [3.0.1](#)

**Lema 3.3.3.** [\[29\]](#) Si  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta regular de  $S$  y sea  $\theta$  una dirección aproximable por cintas infinitas, entonces  $k$  es un valor esencial, donde  $k \in \mathbb{Z}$  es el entero de la Definición [3.3.2](#) correspondiente a las cintas infinitas.

*Demostración.* Queremos demostrar que si  $A \subseteq S$  es un conjunto de medida positiva entonces existe un  $A_2 \subseteq A$  de medida positiva donde

$$\mu(\{x \mid \phi_t^{-1}(x) \in A_2, i([\omega], [\delta]) = k\}) > 0.$$

Hemos probado que  $p(\tilde{V})$  es de medida total entonces existe un  $x_0 \in A \cap P(\tilde{V})$  punto de densidad [\[15\]](#). Sea  $x \in p^{-1}(x_0)$ , tenemos que  $x \in \tilde{V}$ , lo que quiere decir que existe una sucesión  $\{R_n\}$  de rectángulos euclidianos cuyos vértices son  $x$  y  $g_k(x)$  de tal forma que  $cR_n$  está encajado en  $p^{-1}(C_n)$ , es decir, en particular no contiene singularidades en su interior. Como notamos en el lema anterior  $\|v_n\| \rightarrow \infty$ , esto quiere decir que la longitud de las aristas correspondientes a la dirección  $\theta$  en  $R_n$  tiende a infinito mientras que la arista de la dirección perpendicular tiende a cero. A estas aristas denotémoslas por  $a_n$  y  $b_n$  respectivamente.

Consideremos un dominio fundamental de la cubierta  $\tilde{S}_\omega$ , a saber,  $\bar{S}$  que es mediblemente equivalente a  $S$  donde  $x$  pertenece al nivel cero y  $g_k(x)$  al nivel  $k$ . Sin pérdida de generalidad diremos que  $A \subseteq \bar{S}$ .

Definamos  $A_k = A \times \{k\}$  y  $A_t = \bar{\phi}_t^\theta(A_0)$ . Vamos a demostrar que el conjunto  $A_k \cap A_t$  tiene medida positiva para todo  $t \in I$  y de esta forma habremos demostrado que en efecto  $k$  es un valor esencial. Siguiendo la demostración de [\[29\]](#) vamos a considerar los siguientes conjuntos para aproximar la medida de  $A_k \cap A_t$ :

1.  $B_{(n)}$  es el cuadrado centrado en  $x$  cuyas aristas tienen longitud  $b_n$ .
2.  $B_1^{(n)} = g_k(B_0^{(n)})$ .
3.  $B_2^{(n)}(t) = \phi_t^\theta(B_0^{(n)})$ .

Como  $b_n \rightarrow 0$  entonces existe una  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces el rectángulo contenido en  $B_0^{(n)}$  que corresponde a la mitad derecha de  $B_0^{(n)}$  al cual denotaremos por  $\bar{R}_0^{(n)} \subseteq cR_n$ . Obtenemos que en ese rectángulo no hay singularidades pues va a estar isométricamente encajado en  $p^{-1}(C_n)$  y de esta forma si  $t < t_n := ca_n - (c - b_n)$  entonces la restricción a ese rectángulo de  $\tilde{\phi}_t^\theta$  es continua y por lo tanto la mitad derecha de  $B_2^{(n)}(t)$  la cual denotaremos por  $\bar{R}_2^{(n)}(t)$  también está contenida en  $cR_n$ . Por un mismo razonamiento la mitad izquierda de  $B_1^{(n)}$  denotada por  $\bar{R}_1^{(n)}$  está contenida en  $cR_n$ .

Observemos que para esas  $n$ 's tenemos que

$$\mu(\bar{R}_0^{(n)}) = \mu(\bar{R}_1^{(n)}) = \mu(\bar{R}_2^{(n)}(t)).$$

---

<sup>15</sup>Donde  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x_0) \cap p(\tilde{V}) \cap A)}{\mu(p(\tilde{V}) \cap A)} = 1$ .

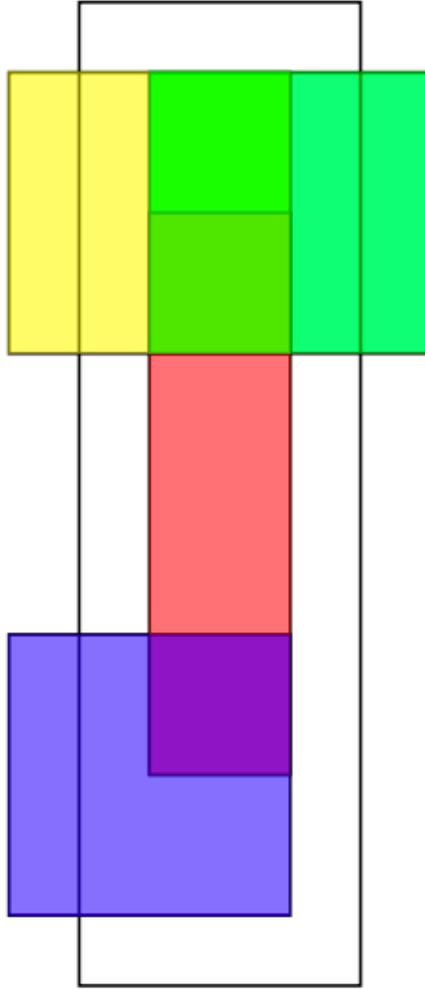


Figura 3.4: El rectángulo rojo representa  $R_n$ , el blanco  $cR_n$ , el morado  $B_0^{(n)}$ , el verde  $B_1^{(n)}$  y el amarillo  $B_2^{(n)}$ , imagen obtenida en [29].

Además si  $t = a_n$  entonces

$$\mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)) = \mu(\overline{R}_0^{(n)}).$$

La Figura 3.4 ilustra lo anterior.

Por la elección de  $x_0$  entonces para todo cuadrado lo suficientemente pequeño centrado en  $x_0$  se sigue que

$$\frac{\mu(K \cap A)}{\mu(K)} \geq \frac{15}{16} [29].$$

Lo cual es cierto en particular para  $B_0^{(n)}$  con  $n$  lo suficientemente grande. También para una  $n$  lo suficientemente grande tenemos que  $a_n < t_n$  pues  $c > 1$  y  $b_n \rightarrow 0$ , de esta forma obtenemos que existe un intervalo  $I$  centrado en  $a_n$  de tal forma que para todo  $t \in I$

$$\frac{1}{2} < \frac{\mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t))}{\mu(\overline{R}_0^{(n)})} \leq 1.$$

Al cociente anterior denotémoslo por  $\gamma$ .

Observemos que siguiendo las cuentas de P. Hooper y B. Weiss tendremos que:

$$\begin{aligned} \mu(\overline{R}_2^{(n)}(t) \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) + \mu((\overline{R}_1^{(n)})^c \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) = \\ \mu(\overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) = \mu(\overline{R}_0^{(n)} \cap A_0) \geq \frac{15}{16} \mu(\overline{R}_0^{(n)}). \end{aligned}$$

Veamos que

$$\mu((\overline{R}_1^{(n)})^c \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) \leq \mu((\overline{R}_1^{(n)})^c \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)) \leq (1 - \gamma) \mu(\overline{R}_0^{(n)}).$$

Por como como definimos  $\gamma$ . Luego

$$\begin{aligned} \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) \geq \frac{15}{16} \mu(\overline{R}_0^{(n)}) - \mu((\overline{R}_1^{(n)})^c \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) \geq \\ \frac{15}{16} \mu(\overline{R}_0^{(n)}) - (1 - \gamma) \mu(\overline{R}_0^{(n)}) = (\gamma - \frac{1}{16}) \mu(\overline{R}_0^{(n)}) = \frac{1}{\gamma} (\gamma - \frac{1}{16}) \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_k) \geq \frac{1}{\gamma} \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)) (\gamma - \frac{1}{16}).$$

Si fuera el caso que  $\mu(A_k \cap A_t) = 0$  para algún  $t \in I$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma} (\gamma - \frac{1}{16}) \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)) \leq \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) + \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_k) \leq \\ \mu((\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_t) \cup (\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t) \cap A_k)) \leq \mu(\overline{R}_1^{(n)} \cap \overline{R}_2^{(n)}(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{2}{\gamma} (\gamma - \frac{1}{16}) \leq 1.$$

Pero por otro lado tenemos que  $\gamma \in (1/2, 1]$  entonces

$$\frac{2}{\gamma} (\gamma - \frac{1}{16}) = 2 - \frac{2}{8\gamma} \geq \frac{15}{8} > 1.$$

Lo cual es una contradicción, entonces  $\mu(A_k \cap A_t) > 0$  para toda  $t \in I$  entonces  $k$  es un valor esencial del flujo  $\tilde{\phi}_t^\theta$ .  $\square$

Teniendo este resultado en mente ya podemos demostrar el Teorema [3.0.1](#).

*Demostración.* ( **Teorema [3.0.1](#)** ).

Si  $p : \tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta que verifica las condiciones del teorema entonces la dirección  $\theta$  es aproximable por cintas infinitas y además es ergódica en cubiertas intermedias finitas. En particular es ergódica en la cubierta  $\tilde{S} \rightarrow \overline{S} \rightarrow S$  donde  $\overline{S}$  es mediblemente equivalente a  $S \times \mathbb{Z}_k$ , y como  $k$  es un valor esencial del flujo entonces por la Proposición [3.3.4](#)  $\theta$  es una dirección ergódica para el flujo geodésico en  $\tilde{S}_\omega$ .  $\square$

De las observaciones de W. Veech de la Proposición 2.7 en [48] podemos obtener este resultado:

**Lema 3.3.4.** [48] *Si  $\Gamma(S)$  es una latiz no uniforme, entonces dos descomposiciones en cilindros generan la misma cúspide en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(S)$  si y solo si existen  $\gamma_1, \gamma_2$  elementos parabólicos en  $\Gamma$ , tales que sean conjugados y donde  $\gamma_1$  preserve la primera descomposición de cilindros y  $\gamma_2$  la segunda.*

Siguiendo la observación de Veech del lema 3.3.4, podemos definir lo siguiente para el caso de cintas infinitas en  $\mathbb{Z}$ -cubiertas.

**Definición 3.3.8.** [29] *Sea  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  una  $\mathbb{Z}$ -cubierta, decimos que  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  son equivalentes si y solo si existe  $f \in \mathrm{Aff}(\tilde{S}_\omega)$  tal que  $f(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ .*

**Lema 3.3.5.** *Si  $\tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta y  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  son dos cintas infinitas equivalentes como en 3.3.8, entonces  $k(\mathcal{D}_1) = k(\mathcal{D}_2)$ , además existe un elemento parabólico  $\gamma \in \Sigma(\tilde{S}_\omega)$  que preserva el vector  $v(\mathcal{D}_1)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  son los cilindros correspondientes que resultan de la proyección de  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  respectivamente,  $\gamma_1, \gamma_2$  curvas interiores de los cilindros y  $v_1, v_2$  los vectores de holonomía, entonces como  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  son equivalentes entonces existe  $f$  afín tal que  $f(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ , en particular podemos asumir que  $Df(v_1) = v_2$ . Como  $Df \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ <sup>[16]</sup> vemos que si  $f_*$  es el morfismo inducido por la proyección de  $f$  a  $S$  en  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$  entonces se verifica que

$$i([\omega], [\gamma_2]) = i([\omega], f_*[\gamma_1]) = i([\omega], [\gamma_1]).$$

Podemos suponer por la Proposición 3.2.2 que el grupo de Veech asociado a la cubierta es el mismo que el grupo de Veech de  $S$ , de tal forma que la segunda parte de este lema es consecuencia de la observación de Veech [48] en el Lema 3.3.4.  $\square$

Por último y para poder aplicar la maquinaria de los lemas de las últimas secciones requeriremos este resultado técnico de grupos Fuchsianos.

**Lema 3.3.6.** *Si  $\Gamma$  es un grupo Fuchsiano tal que es una latiz no uniforme, la órbita de un punto fijo parabólico  $z$  bajo acción lineal de  $\Gamma$  es discreta.*

*Demostración.* Si  $z$  es un punto fijo parabólico entonces  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . De tal forma que si la órbita bajo la acción lineal tiene un punto de acumulación, entonces la órbita bajo la acción usual también lo cual no es posible.  $\square$

**Teorema 3.3.2.** (Hubert-Weiss, 2013 [29]). *Si  $p : \tilde{S}_\omega \rightarrow S$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta cuyo grupo de Veech es una latiz no uniforme y tiene una cinta infinita, entonces el conjunto de direcciones  $\theta$  donde el flujo geodésico  $\tilde{\phi}_t^\theta$  no es ergódico tiene medida cero.*

<sup>16</sup>Por definición del grupo de Veech asociado a la cubierta, tenemos que  $f$  desciende a un automorfismo afín de  $S$  y además las derivadas coinciden, como  $S$  es compacta entonces  $Df \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .

*Demostración. (Bosquejo):*

Si existe una cinta infinita entonces nos podemos fijar en una curva interior de esta. Proyectando esta curva en la superficie inicial  $S$  obtenemos una curva  $\gamma$ , a la cual le podemos asociar un vector de holonomía, al cual denotaremos por  $v$ . Como  $\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  es no uniforme, este  $v$  lo fija un elemento parabólico, entonces por el Lema 3.3.6 la órbita bajo la acción lineal  $\Gamma(\tilde{S}_\omega)(v)$  es discreto.

Si el grupo de Veech  $\Sigma(\tilde{S}_\omega)$  es una latiz no uniforme, entonces considerando  $v$  como en el párrafo anterior, por la Proposición 3.3.2 se sigue que el conjunto de direcciones  $\theta$  que no son  $r$ -aproximables por  $\Gamma(\tilde{S}_\omega)$  es de medida total, en particular por la Proposición 3.3.1 el conjunto de direcciones  $\theta$  que son aproximables por cintas es de medida total. Por otro lado, por el Corolario 3.3.2 se sigue que el conjunto de direcciones  $\theta$  tales que son ergódicas en todas las cubiertas intermedias finitas forma un conjunto de medida total. Considerando la intersección de estos conjuntos de medida total, por el Teorema 3.0.1 se sigue que para cada una de las direcciones  $\theta$  que son ergódicas en cubiertas intermedias finitas, existe una  $k(\theta)$  tal que  $k(\theta)$  es un valor esencial para dicha dirección, y por lo tanto  $\theta$  es una dirección ergódica en  $\tilde{S}$ . Por lo tanto el conjunto de direcciones que son ergódicas en  $\tilde{S}$  es de medida total.

□

### 3.4. Ejemplo

En esta sección vamos a discutir tres ejemplos; los primeros dos verifican las condiciones del Teorema 3.0.2 y por lo tanto casi toda dirección es ergódica. El último es un ejemplo de una  $\mathbb{Z}$ -cubierta cuyo grupo de Veech es una latiz, sin embargo no cuenta con una cinta infinita, de tal forma que no es aplicable dicho teorema.

**Ejemplo 3.4.1.** *Siguiendo con el ejemplo de motivación 3.1.1 vamos a considerar el caso de la escalera infinita. Si observamos la superficie, podemos cubrirla con copias del toro, el cual es una superficie de Veech [28] y casi todas sus direcciones son ergódicas (únicamente ergódicas). La intuición nos dice que ocurre lo mismo en la cubierta.*

En [29], los autores tratan el caso particular de esta superficie. Siguiendo su razonamiento podemos notar que que las partes lineales de los automorfismos afines de la escalera infinita pueden ser solo rotaciones por un múltiplo entero de  $\pi/2$  o una transformación de la forma

$$(x, y) \rightarrow (x + 2y \text{ mod } (1), y).$$

Por lo tanto el grupo de Veech de la escalera infinita es la proyectivización del grupo [29]

$$\left\langle \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) \right\rangle.$$

El cual es un subgrupo de índice finito en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Este último el ejemplo prototípico de una latiz [28]. De esta forma tenemos que el grupo de Veech de la escalera infinita es una latiz. Esta superficie tiene una cinta infinita pues si nos fijamos en el cilindro del toro doblemente perforado y consideramos curvas que tiene dirección  $\pi/4$  entonces estas curvas tienen intersección  $-1$  con la curva que genera esa cubierta [3.1.1], vemos que el levantamiento del cilindro corresponde a una cinta infinita en la cubierta. Entonces por el Teorema [3.0.2] casi todas sus direcciones son ergódicas.

Veamos un ejemplo un poco menos sencillo. En [29] los autores prueban que estos métodos pueden utilizarse para el doble octágono de Veech, como en la Figura [3.5]. Vamos a seguir su idea y argumentar lo más posible el por qué aplican estas herramientas al doble octágono de Veech.

Para esto vale la pena comentar tener en mente los siguientes conceptos [17]:

**Definición 3.4.1.** Consideremos en una superficie  $S$  una partición por cilindros en dirección  $\theta$ . Supongamos que los cilindros son  $C_1, \dots, C_n$  y con módulos  $m_1, \dots, m_n$ . Decimos que son conmensurables si para cualesquiera dos de esos cilindros  $m_i/m_j \in \mathbb{Q}$ .

Denotaremos por  $M$  al mínimo de los reales que es múltiplo entero de  $m_i^{-1}$  para toda  $i$ . Al natural  $n_i = M/m_i$  le diremos número de giro de Dehn.

**Definición 3.4.2.** Si  $A \subseteq S$  es un subconjunto homeomorfo a un cilindro,  $f : S \rightarrow S$  es un homeomorfismo que en  $A$  es de la forma  $f(s, t) = (se^{2i\pi t}, t)$ , decimos que  $f$  es un giro de Dehn. Si  $f : S \rightarrow S$  es una homeomorfismo afín tal que preserva una descomposición por cilindros, su derivada es un elemento parabólico y tiene eigenvalor 1, diremos que esta función es una multi-giro de Dehn.

La definición anterior se debe a que en cada cilindro de la descomposición se comporta como un giro de Dehn. La acción de estos elementos en la homología relativa es particular, pues depende de su representante en la homología en cada cilindro. Al intersecar a los representantes de las curvas interiores de cada cilindro y su número de giro de Dehn. Entonces tenemos que [25]

$$f_* : H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$$

$$[\delta] \rightarrow [\delta] + \sum_{i=1}^n i([\delta], [\gamma_j^0]) n_j \gamma_j.$$

Donde  $[\gamma_j^0]$  es la curva interior del cilindro  $C_j$  en  $H_1(S \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ ,  $[\gamma_j]$  el representante en  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z})$  y  $n_j$  el número de giro de Dehn. Las derivadas de las multi-giros de Dehn pueden ser explícitamente calculadas; si  $S$  admite una descomposición por cilindros en dirección  $\theta$  y  $f$  es una multi-giro de Dehn asociado a esa descomposición entonces

$$Df = r_\theta \circ h_M \circ r_\theta^{-1},$$

<sup>17</sup>Unas buenas referencias son [28] y [25].

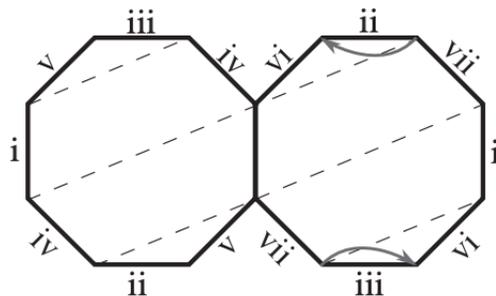


Figura 3.5: Doble octágono de Veech, viene marcada la clase de homología que induce la cubierta sobre esta superficie así como el cilindro que genera la cinta infinita [29].

donde [25]

$$h_M = \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.4.2.** [29] Consideremos dos copias de un  $2n$ -polígono<sup>18</sup> y peguémoslas por una arista, tal que la copia esté reflejada y rotada por  $\pi$  como se muestra en la Figura 3.5 que ejemplifica el caso  $n = 4$  en la Figura 3.5.

Identificando lados opuestos, marcados en la Figura 3.5 obtenemos una superficie que denotaremos por  $P_n$ . Procederemos a demostrar cual es su grupo de Veech, que sus generadores se levantan a automorfismos afines en una cubierta regular específica y que para esa cubierta existe un cilindro cuyo levantamiento corresponde a una cinta infinita.

**Definición 3.4.3.** Para tres enteros  $p, q, r$  mayores que 1 definimos el grupo  $\Delta(p, q, r)$  el grupo de isometrías euclidianas generado por las reflexiones de un triángulo cuyos ángulos son  $\pi/q, \pi/p, \pi/r$  (estas reflexiones pueden ser en el caso esférico, hiperbólico o euclideo según sean los enteros), también podemos extender esta noción cuando  $p$  ó  $q$  son  $\infty$  implicando que el triángulo tiene ángulo 0. Denotaremos por  $\Delta^+(p, q, r)$  al subgrupo de índice dos que preserva la orientación (su proyectivización).

**Lema 3.4.1.** [51] El grupo de Veech  $\Gamma_n$  de un  $2n$ -polígono regular es isomorfo a  $\Delta^+(n, \infty, \infty)$ .

*Demostración. (Bosquejo):*

La demostración que se realiza en [51] viene dada siguiendo los siguientes pasos:

1. Dada una descomposición por cilindros de la superficie se demuestra que todos los cilindros tienen módulo  $\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})$  o uno tiene módulo  $\tan(\frac{\pi}{2n})$  y el resto  $\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})$ .
2. Si hacemos  $m = 2n$  entonces el elemento  $r_{\pi/m}^{-1} \circ a_m \circ r_{\pi/m}$  está en el grupo de Veech de  $P_n$ . Donde

$$a_m = \begin{pmatrix} 1 & 2\cot(\pi/m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. El grupo  $T_m = \langle r_{2\pi/n}, a_m, r_{\pi/m}^{-1} a_m r_{\pi/m} \rangle$  es isomorfo a  $\Delta^+(n, \infty, \infty)$ .

---

<sup>18</sup> $n \geq 4$

4.  $T_m$  tiene dos representantes parabólicos, uno es  $a_m$  y otro es  $r_{\pi/m}^{-1} \circ a_m \circ r_{\pi/m}$ .
5.  $SL(2, \mathbb{R})/T_m$  tiene género 0, dos cúspides y una singularidad cónica de ángulo  $2\pi/m$  entonces por Gauss-Bonnet esta superficie tiene área  $\frac{(2m-2)\pi}{m}$ . Por otro lado  $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma_m$  tiene género cero y como tiene dos clases parabólicas, entonces debe tener una singularidad cónica de ángulo al menos  $2\pi/m$ . Entonces el área de esta superficie debe ser al menos  $\frac{(2m-2)\pi}{m}$  entonces  $\Gamma_m = T_m$ .

□

En la Sección 5 de [9] se prueba que el grupo  $\Delta(n, \infty, \infty)$  es una latiz, por lo que  $\Gamma_m$  es una latiz y entonces el  $2n$  polígono regular es una superficie de Veech.

Vemos por como se contruyó la superficie  $P_n$  su grupo de Veech también es  $T_m$ . Además podemos notar que este también es generado por

$$\langle a_m, r_{\pi/m} \circ a_m r_{\pi/m}^{-1}, r_{\pi/n} \circ a_m \circ r_{\pi/n} \rangle .$$

Para el caso  $n = 4$  estos elementos corresponden a las derivadas de las multi-giros de Dehn asociadas a los ángulos  $0, \pi/8, \pi/4$ .

Si consideramos las clases en homología dadas por (iii) – (ii) como se muestra en la Figura 3.5 obtenemos una  $\mathbb{Z}$  – cubierta regular (esta clase tiene homología nula), además las intersecciones de las curvas interiores de los cilindros en las direcciones mencionadas o bien son nulas o se cancelan a pares, de tal forma que los tres generadores del grupo de Veech de  $P_4$  dejan invariante la clase de homología de (iii) – (ii) entonces se levantan a elementos del grupo de Veech de la cubierta  $\Gamma(\tilde{P}_4)$ , entonces el grupo de Veech de  $P_4$  se encaja en este último, el cual hemos demostrado que tiene índice finito en el grupo de Veech de  $\tilde{P}_4$ , entonces  $\Gamma(\tilde{P}_4)$  es una latiz y como el cilindro con ángulo  $\pi/4$  tiene intersección nula con la clase de homología que induce la cubierta, la cubierta tiene una cinta infinita en esa dirección, por lo tanto por el Teorema 3.0.2 casi toda dirección en  $\tilde{P}_4$  es ergódica.

El siguiente ejemplo nos indica que no podemos deshacernos de la hipótesis de la existencia de una cinta infinita en el Teorema 3.0.2. Es decir, pedir que el grupo de Veech sea una latiz no es suficiente.

**Ejemplo 3.4.3.** [29] La superficie que vamos a comentar se le conoce como la **Eierlegende Wollmilchsau**, que podría traducirse como **mil usos** la cual fue estudiada por Herrlich y Schmithüsen [23]. La cual se puede apreciar en la Figura 3.6. La forma de obtenerla es identificando las aristas horizontales con las etiquetas de la imagen y las aristas verticales opuestas por traslación. En [23] Se demuestra que es una cubierta normal del toro, y que su grupo de Veech también es  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Lo cual implica que el grupo de Veech de la superficie  $\mathcal{W}$  es una latiz. Ahora bien, consideremos el representante en homología de la curva que está representada por (i) + (iii) correspondiente a la Figura 3.6. Uno puede convencerse de que con esta elección de clase de homología, el levantamiento de cualquier cilindro a la  $\mathbb{Z}$ -cubierta asociada a esta curva es una unión de cilindros pues las curvas interiores de todo cilindro o bien evitan esa curva o la forma de intersección se anula

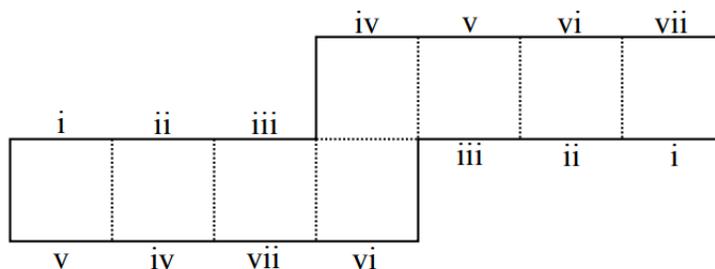


Figura 3.6: Hooper-Weiss [25].

entonces no admite una cinta infinita, sin embargo, podemos notar que el multi-giro de Dehn asociado a la dirección horizontal, cuya derivada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

está en el grupo de Veech de la cubierta, más aún, todo multi-giro de Dehn  $f_\alpha$  de la superficie tiene derivada de la forma  $Df_\alpha \circ A \circ Df_\alpha^{-1}$ . Como las curvas asociadas a cada cilindro de cada multi giro tiene forma de intersección nula con  $(i) + (iii)$  entonces tienen un levantamiento al grupo de Veech de la cubriente [25], además esas derivadas generan el grupo de congruencia 4 en  $PLS(2, \mathbb{R})$ , es decir

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d = 1 \pmod{4} \quad b, c = 0 \pmod{4} \right\}$$

El cual es un subgrupo normal de índice finito en  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , lo cual implica que la superficie  $\tilde{\mathcal{W}}_\omega$ <sup>19</sup> tiene como grupo de Veech a una latiz pero no acepta cilindros infinitos. Entonces los resultados de Weiss y Hubert [29] no se aplican para investigar la ergodicidad en las direcciones de esta cubierta.

### 3.5. Falta de ergodicidad única

En esta sección vamos a demostrar el Teorema 3.5.1, es decir, que no es posible que en una  $\mathbb{Z}$ -cubierta obtengamos direcciones que son únicamente ergódicas. Para la demostración vamos a suponer que la dirección en la superficie  $S$  es únicamente ergódica, pues de otra forma no tiene esperanza de ser únicamente ergódica en la cubierta. Vamos a demostrar que en caso de ser únicamente ergódica en  $S$  entonces podemos asociarle a la cubierta  $\tilde{S}_\omega$  medidas invariantes y localmente finitas. Posteriormente vamos a demostrar que podemos contruir una por cada real no nulo y que además a pares no pueden ser múltiplos una de la otra, de esta forma obtendremos tantas medidas invariantes localmente finitas en la superficie que por el teorema de descomposición ergódica tendremos que no es posible que el flujo sea únicamente ergódico en la cubierta.

<sup>19</sup>Aquí  $\omega$  es la clase de homología  $(i) + (iii)$  en la Figura 3.6.

Recordemos la demostración de la Proposición 3.2.5 sobre las direcciones recurrentes en la  $\mathbb{Z}$ -cubierta. Si  $f : I \rightarrow I$  es un IET, el cual lo podemos asumir como únicamente ergódico en virtud del Teorema 2.1.2, si  $\alpha$  es el cociclo medible que construimos en la demostración de la Proposición 3.2.5 recordemos que podemos construir la función

$$T_f : I \times \mathbb{Z} \rightarrow I \times \mathbb{Z}$$

$$T(x, z) = (f(x), z + \alpha(x)).$$

**Definición 3.5.1.** Para una función medible  $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  vamos a decir que una medida de probabilidad  $\lambda$  en el intervalo  $I$  es una medida  $(g, f)$  conforme si  $\lambda \circ f$  es absolutamente continua respecto a  $\lambda$  y si  $g$  verifica la conclusión del teorema de Radon-Nykodym, es decir que para todo conjunto medible  $A$

$$\lambda \circ f(A) = \int_A g d\lambda.$$

Lo cual se puede expresar como que la derivada de Radon-Nykodym

$$\frac{d(\lambda \circ f)}{d\lambda}(x) = g(x)$$

para a.e  $x \in I$ .

**Definición 3.5.2.** Para cada entero  $m$  podemos definir la transformación  $h_m : I \rightarrow I \times \mathbb{Z}$  dada por  $h_m(x) = (x, m)$ .

Si consideramos  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  un morfismo, una medida  $\lambda_\gamma$  tal que es  $(e^{\alpha \circ \gamma}, f)$  conforme. Si existe una medida  $\mu_\gamma$  asociada a  $\lambda_\gamma, \gamma$  y  $f$  que satisfaga que

$$\mu_\gamma \circ h_m = \frac{\lambda_\gamma}{e^{\gamma(m)}},$$

decimos que  $\mu_\gamma$  es una medida de Maharam.

Utilizaremos el siguiente teorema que se encuentra en [14], el capítulo lo escribió Schmidt pero el resultado se le atribuye a H. Furstenberg.

**Lema 3.5.1.** [14] Si  $X$  es un espacio métrico y compacto,  $T$  un automorfismo de  $X$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y además  $T$  es únicamente ergódico entonces el conjunto de todas las medidas de probabilidad  $\delta$  de  $X$  que son absolutamente continuas respecto a la medida ergódica  $\mu$  en  $X$  y que satisfacen

$$\frac{d\delta T}{d\delta}(x) = e^f(x)$$

para  $\delta$ -casi todo  $x \in X$  es no vacío si y solo si

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Como un resultado podemos ver que es posible construir medidas de Maharan en las  $\mathbb{Z}$ -cubiertas recurrentes asociadas a una dirección únicamente ergódica en la superficie inicial.

**Corolario 3.5.1.** [37] *Si  $S$  es una superficie de traslación,  $\tilde{S}_\omega$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta recurrente de tal forma que el IET asociado al flujo geodésico  $\phi_t^\theta$  en  $S$  es únicamente ergódico, entonces  $\tilde{S}_\omega$  admite una medida de Maharan que es localmente finita.*

*Demostración.* Haciendo uso del Lema 3.5.1 podemos hacer que  $X$  sea un conjunto de Cantor en el intervalo de tal forma que el cociclo  $\alpha$ , de la demostración de la Proposición 3.2.5, verifique que  $\alpha \circ \gamma : C \rightarrow \mathbb{R}$  sea una función continua. Como supusimos que el IET asociado en la superficie es únicamente ergódico, también lo es en el Cantor y como éste tiene medida cero, por el lema anterior existe una medida que es  $(e^{\alpha \circ \gamma}, f)$  conforme y entonces el pullback de esta medida a todo el intervalo  $\lambda_\gamma$  también es  $(e^{\alpha \circ \gamma}, f)$  conforme y entonces la medida de Maharan  $\mu_\gamma$  asociada a  $\lambda_\gamma, \gamma$  y  $f$  está dada por

$$d(\mu_\gamma)(x, m) = \frac{d(\lambda_\gamma)(x)}{e^{\gamma(m)}}.$$

Esto automáticamente implica que es localmente finita pues

$$\mu_\gamma(I \times \{m\}) = \frac{\lambda_\gamma(I)}{e^{\gamma(m)}} < \infty.$$

Además por construcción podemos notar que es invariante respecto a  $T_f$ .  $\square$

**Definición 3.5.3.** *Para cada  $r \in \mathbb{R}$  definimos un morfismo  $\gamma_r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\gamma_r(n) = rn$ .*

**Lema 3.5.2.** [37] *Si  $s \neq t$  entonces las medidas de Maharam asociadas a  $\gamma_r$  y a  $\gamma_s$  no son múltiplos escalares una de la otra.*

*Demostración.* Sean  $r, s$  como en el enunciado. Consideremos conjuntos de la forma  $I \times \{m\} = A_m$ . Observemos que por el Corolario 3.5.1

$$\mu_s(A_m) = \frac{1}{e^{\gamma_s(m)}} = \frac{1}{e^{sm}} \quad \mu_r(A_m) = \frac{1}{e^{rm}}.$$

Si suponemos que  $\mu_s$  es múltiplo de  $\mu_r$  entonces el múltiplo es  $d = e^{m(s-r)}$ . Pero por otro lado si para  $n \neq m$

$$\mu_s(A_n) = \frac{1}{e^{sn}} \quad \mu_r(A_n) = \frac{1}{e^{rn}},$$

Entonces  $d\mu_s(A_n) = \mu_r(A_n)$  implica que  $n = m$ . Lo cual es una contradicción, entonces no son múltiplos escalares.  $\square$

**Teorema 3.5.1.** (Málaga Sabogal, S. Troubetzkoy-2019) [37].

*Si  $S$  es una superficie de traslación,  $\tilde{S}_\omega$  es una  $\mathbb{Z}$ -cubierta recurrente. Entonces no existen direcciones únicamente ergódicas en la cubierta.*

*Demostración.* Si el IET asociado a la dirección en cuestión no es únicamente ergódica, entonces existen  $m_1$  y  $m_2$  medidas distintas y ergódicas en  $I$ , entonces considerando la medida de Haar  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{Z}$  entonces las medidas  $m_1 \times \mathcal{M}$  y  $m_2 \times \mathcal{M}$  son ergódicas y distintas entonces no es una dirección únicamente ergódica en la cubierta.

Si es únicamente ergódico procedemos distinto. Si la dirección es únicamente ergódica en la cubierta entonces todas las medidas invariantes son la misma, virtud del teorema de descomposición ergódica, entonces como comentamos al final de la demostración del Corolario 3.5.1 las medidas de Maharam son invariantes, siempre existen en la cubierta, y son localmente finitas entonces son múltiplos escalares unas de otras, lo cual es una contradicción con el Lema 3.5.2. Entonces no puede ser únicamente ergódico y la descomposición ergódica de estas medidas nos brinda más de una medida ergódica localmente finita.  $\square$

# Capítulo 4

## Conclusión

A manera de conclusión de este trabajo, nos gustaría comentar algunos problemas que pueden surgir desde los temas desarrollados para realizar proyectos de investigación. Los dividimos en dos partes, el caso finito cuyo interés yace en los diferenciales cuadráticos y el caso infinito, en el cual se conoce aún muy poco sobre la ergodicidad en casos generales.

Vamos a comentar brevemente acerca de los diferenciales cuadráticos, las foliaciones que inducen en una superficies y la dinámica unidimensional que estas inducen.

### 4.1. Diferenciales cuadráticos e involuciones lineales

#### 4.1.1. Diferenciales cuadráticos

Sea  $S$  una superficie de Riemann con un atlas  $\{z_\alpha, U_\alpha\}$ . Un diferencial cuadrático  $q$  es una colección de expresiones  $\{\phi_\alpha(z_\alpha)dz_\alpha^2\}$  que verifican estas dos condiciones:

1. Los mapeos  $\phi_\alpha : z_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$  son holomorfos y tienen a lo más una cantidad finita de ceros.
2. Para cualesquiera dos cartas  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  se verifica que

$$\phi_\alpha(z_\alpha)\left(\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}\right)^2 = \phi_\beta(z_\beta).$$

Una manera de interpretar la segunda condición es que si dos cartas  $z_\alpha$  y  $z_\beta$  tienen un dominio que se interseca y  $\gamma$  es el mapeo de transición correspondiente entonces

$$\phi_\alpha(z_\alpha)(d\gamma)^2 = \phi_\beta(z_\beta).$$

Lo cual implica que está bien definida en toda la superficie y es independiente de la elección de cartas. Podemos suponer que localmente fuera de los ceros el diferencial cuadrático es de la forma  $dz^2$  por lo tanto induce una métrica plana dada por  $|dz^2|$  en  $S$  y sus mapeos de transición están dados por  $z \rightarrow z \pm c$ . Las podemos pensar como una generalización de las 1-formas holomorfas en el sentido que dada una forma holomorfa podemos obtener un

diferencial cuadrático tal que si la 1-forma holomorfa es  $f(z)dz$  entonces  $f^2(z)dz^2$  es un diferencial cuadrático.

En el libro de Farb y Margalit [17] se comenta a mayor profundidad las diferencias entre las foliaciones obtenidas por diferenciales cuadráticos y por 1-formas holomorfas.

Por Gauss Bonnet los diferenciales cuadráticos, la cantidad de ceros de un diferencial cuadrático en una superficie  $S$  de género  $g$  es de  $4g - 4$ , por lo tanto como con las 1-formas holomorfas podemos estratificar el espacio móduli de los diferenciales cuadráticos de las superficies de Riemann de género  $g$  como  $QD(g, \alpha, \delta)$  donde  $g$  es el género,  $\alpha$  es una partición de  $4g - 4$  y  $\delta = \pm$  dependiendo de si se obtiene como un cuadrado de un diferencial abeliano o si no se puede obtener de esa forma. Un resultado de E. Laneeau [36] nos dice que estas estratificaciones no son conexas pero tienen siempre una cantidad finita de componentes, por lo tanto podemos considerar un móduli  $QD(P) = QD(g, \alpha, \delta, l)$  donde  $l$  es una componente conexa.

Así como en el caso de las formas holomorfas, podemos obtener ciertas foliaciones de los diferenciales cuadráticos. Dada una superficie  $S$  y un diferencial cuadrático  $q$  definimos la *foliación vertical* como la unión de ceros del diferencial cuadrático y las curvas suaves cuyos vectores tangentes, al ser evaluados en el diferencial cuadrático resultan en reales negativos. Notemos que si  $f(z)dz$  es una 1-forma holomorfa y nos fijamos en la foliación geodésica vertical entonces la foliación vertical que resulta del diferencial cuadrático inducido por  $f(z)dz$  coinciden. La diferencia fundamental entre las 1-formas holomorfas es que las foliaciones que inducen las primeras son siempre orientables mientras que no siempre ocurre en las segundas.

Las definiciones de conexiones silla, vectores de holonomía y de la acción de  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $QD(P)$  son análogas a la que dimos de 1-formas holomorfas.

En el Teorema 2.1.2 comentamos que dicho teorema originalmente estaba planteado en términos de diferenciales cuadráticos. El tipo de foliaciones que estas generan son medibles pero no necesariamente orientables [17]. Otra forma de pensar en esta generalización es desde una información analítica en las superficies de definición; si  $S$  es una superficie de Riemann cerrada y  $q$  es un diferencial cuadrático asociado a ella, entonces obtenemos una métrica plana, de tal forma que sus cartas son de la forma  $z \rightarrow z \pm c$  en casi todo punto, salvo en una cantidad finita de puntos, a los cuales también les diremos puntos cónicos (por tener vecindades isomorfas a vecindades agujeradas de del origen). Podemos notar que su holonomía es  $\mathbb{Z}_2$  lineal [28]. A estas superficies les decimos *superficies planas* o *de pseudo traslación* [1]. Estas pueden ser clasificadas por género de tal forma que dos superficies planas  $(S_1, q_1) \sim (S_2, q_2)$  si y solo si existe un isomorfismo analítico  $f$

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

$$f^* q_2 = q_1.$$

---

<sup>1</sup>half translation surfaces.

Análogamente al caso de las superficies de traslación, podemos estratificar los móduli de las superficies planas por las multiplicidades de los ceros de su diferencial cuadrático como  $\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n)$ . Utilizando esta última idea y un resultado conocido como *el encaje de Bers* [19] podemos demostrar que para una superficie de Riemann fija  $S$  el espacio de los diferenciales cuadráticos que se le pueden asociar a  $S$  es isomorfo al haz cotangente de la superficie [17], lo cual nos permite utilizar técnicas de dinámica en espacios móduli análogo al caso de los diferenciales abelianos.

#### 4.1.2. Involuciones lineales

En este trabajo expusimos resultados relacionados con el estudio de la dinámica del flujo geodésico y la utilidad de pensar en estos problemas con IET. Los hallazgos en esta área que son producto de estas relaciones van mucho más allá de los presentados.

Con el fin de continuar con la filosofía de estudiar la inducción en clases de Rauzy-Veech para obtener avances en la teoría de 1-formas holomorfas, Danthony y Nogueira [12] en los 90's desarrollaron un concepto llamado *involuciones lineales* y *permutaciones generalizadas*, que como su nombre indica son generalizaciones de los IET y codifican información de los diferenciales cuadráticos y sus foliaciones.

Empecemos considerando una superficie de Riemann cerrada y un diferencial cuadrático  $q$ . Estaríamos tentados a representar la dinámica del flujo vertical como en el caso de las 1-formas holomorfas. Consideremos un intervalo  $I$  horizontal y transversal a la superficie (horizontal respecto a la elección de una dirección vertical). Consideramos el mapeo de primer retorno  $T : I \rightarrow I$  a este intervalo, está definido salvo en una cantidad finita de puntos  $\Sigma$ , los cuales llegan a puntos singulares en la superficie en el flujo, entonces esto induce una partición en subintervalos  $I_j$  del intervalo principal. Si se define de esta forma, vemos que  $T(x) = \pm x + c_j$  donde las constantes dependen del subintervalo en el que se encuentra  $x$ . Esto presenta un problema: si  $T(x) = -x + c_j$  entonces  $T^2(x) = x$  pero podemos notar que esta órbita no representa de forma correcta el flujo de un punto por el flujo vertical; siguiendo a [7] los arreglamos considerando la transformación  $T_1 : I \rightarrow I$  tal que si  $T(x) = -x + c_j$  entonces  $T_1$  lo definimos como el mapeo de primer retorno en dirección negativa.

**Definición 4.1.1.** *Si consideramos dos copias del intervalo  $I$  y una transformación*

$$T : I \times \{0, 1\} \rightarrow I \times \{0, 1\}.$$

$$T = f \circ \bar{T}.$$

Donde

1.  $\bar{T}$  es una involución suave en un sentido ordinario, definida en  $I \setminus \Sigma$  y sin puntos fijos.
2. Si  $(x, \delta) \in X \times \{\delta\}$  y  $T(x, \delta) \in I \times \{\delta\}$  entonces la derivada de  $\bar{T}$  en  $(x, \delta)$  es  $-1$ , mientras que si  $T(x, \delta) \in I \times \{1 - \delta\}$  entonces su derivada es  $1$ .

3.  $f$  es la involución  $(x, \delta) \rightarrow (x, 1 - \delta)$ .

A una transformación  $T$  que verifique las condiciones anteriores se le conoce como una involución lineal asociada a  $(S, q)$ .

Recordemos que mencionamos que una 1-forma holomorfa induce un diferencial cuadrático. Esta idea la recuperamos aquí de la siguiente forma: si tenemos una foliación obtenida por la dirección vertical de una 1-forma holomorfa en una superficie  $S$  y tenemos un intervalo  $I$  transversal a la superficie entonces consideramos dos copias de ese intervalo y definimos la involución lineal dada por el mapeo de primer retorno, en el intervalo superior como el primer retorno de las geodésicas con dirección negativa y en el intervalo inferior como las geodésicas con dirección positiva.

Para darle una relación directa con los IET vamos a realizar la siguiente construcción siguiendo [7]:

**Definición 4.1.2.** Consideremos un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $k$  letras, dos naturales  $n, m$  tales que  $n + m = 2k$  y una función dos a uno  $\pi : \{1, \dots, 2k\} \rightarrow \mathcal{A}$ , estos tres ingredientes definen una permutación generalizada. Siguiendo la filosofía de los IET, esta función queda representada como

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \dots & \pi(n) \\ \pi(m+1) & \dots & \pi(n+m) \end{pmatrix}.$$

Contrario a lo que podría parecer, no necesariamente pasa que  $n = m = k$ . Este caso particular de permutaciones generalizadas se les conoce como *permutaciones verdaderas*. Una permutación generalizada induce una involución  $\sigma$  cuyas órbitas están dadas por

$$\pi^{-1}(\pi(i)) = \{i, \sigma(i)\}.$$

Observemos que una permutación induce de forma natural una permutación generalizada. Además si tenemos una involución lineal, podemos construir una permutación generalizada, pues  $\bar{T}$  induce una partición de subintervalos  $I_1, \dots, I_m, I_{m+1}, \dots, I_{m+n}$ , donde los primeros  $m$  están en  $I \times \{0\}$  y los últimos  $n$  en  $I \times \{1\}$ . Como  $\bar{T}$  es una involución suave sin puntos fijos entonces cada subintervalo  $I_i$  es mapeado en otro  $I_j$  con  $i \neq j$ . De esta forma obtenemos una involución  $\sigma$  inducida por la pareja  $\{I_i, I_j\}$ . Si a cada una de estas parejas le asociamos un  $\beta_i$  entonces obtenemos una función dos a uno de  $\{1, \dots, n + m\}$  en  $\{1, \dots, \frac{m+n}{2}\}$ .

Definamos la longitud de cada uno de los intervalos de una involución lineal como

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_{\pi(i)} = \sum_{i=m+1}^n \lambda_{\pi(i)}.$$

### 4.1.3. Avances de Laneeau-Boissy

De manera análoga a los IET nos gustaría poder definir la inducción de Rauzy-Veech en las involuciones lineales. Sin embargo no es suficiente pedir que  $\lambda_{\pi(m)} \neq \lambda_{\pi(n+m)}$  para

que podamos definir la renormalización deseada, pues los conjuntos

$$\{(\pi, \lambda) \mid \lambda_{\pi(m)} < \lambda_{\pi(m+n)}\}$$

y

$$\{(\pi, \lambda) \mid \lambda_{\pi(m)} > \lambda_{\pi(n+m)}\},$$

pueden ser vacíos por otras razones [7] como ciertas relaciones lineales en la permutación generalizada.

C.Boissy y E. Lanneau [7] han trabajado en importantes avances para hacer del estudio de los diferenciales cuadráticos desde el punto de las involuciones lineales, consistente con las ideas nacidas de los IET. Algunos de esos resultados son:

1. Definieron procesos de renormalización de las involuciones lineales, análogo a la inducción de Rauzy-Veech.
2. Encontraron un análogo en involuciones lineales al concepto de irreducibilidad en IET.
3. Encontraron un análogo en involuciones lineales a la condición de Keane en IET.
4. Definieron una caracterización combinatoria de las permutaciones generalizadas que son irreducibles.
5. Encontraron condiciones que deben cumplir una permutación generalizada  $\pi$  y un parámetro  $\lambda$  de tal forma que la involución lineal  $T = (\pi, \lambda)$  satisfaga la condición de Keane y por tanto minimales.
6. Demostraron que si  $T$  verifica la condición de Keane entonces existe una  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces la permutación generalizada  $\pi^{(n)}$  es irreducible.
7. Hallaron una relación biyectiva entre conjuntos minimales e invariantes bajo la inducción de Rauzy-Veech de permutaciones generalizadas irreducibles y componentes conexas de las estratificaciones de el espacio móduli de los diferenciales cuadráticos.

#### 4.1.4. Preguntas

Las siguientes preguntas se relacionan con las superficies de tipo infinito.

**Pregunta 1.** *Si le asociamos un diferencial cuadrático a una superficie de tipo infinito, es decir, una superficie de semi traslación de tipo infinito ¿Qué podemos decir de las foliaciones que estas inducen? ¿El argumento de Weiss y Hubert [29] funciona para este tipo de superficies que se obtengan como  $\mathbb{Z}$ -cubiertas de superficies de semi-traslación de tipo finito?*

**Pregunta 2.** *¿Qué podemos decir de la propiedad débilmente mezclante en las superficies que son  $\mathbb{Z}$ -cubiertas?*

En vista de la utilidad de discretización<sup>2</sup> para estudiar propiedades dinámicas podemos preguntarnos:

**Pregunta 3.** *¿Podemos encontrar una discretización óptima de los flujos geodésicos y las foliaciones inducidas por diferenciales cuadráticos en las superficies de tipo infinito que capturen su dinámica?*

En el caso de las superficies de tipo finito, hay múltiples resultados que son fruto del estudio de los IET, uno de los más recientes es sobre la propiedad débilmente mezclante en el flujo geodésico. ¿Qué podemos decir de esa propiedad en el caso no medible?

**Pregunta 4.** *El trabajo de Avila [3] para demostrar que casi todas las direcciones en del flujo geodésico en una superficie de traslación de tipo finito verifican ser débilmente mezclantes hace uso de un argumento probabilístico, un argumento de exclusión de ciertos espacios, y un criterio conocido como criterio de Veech ¿podemos generalizar estos argumentos a involuciones lineales de tal forma que siguiendo sus ideas podamos demostrar esa propiedad para foliaciones inducidas por diferenciales cuadráticos?*

---

<sup>2</sup>IET o involuciones lineales.

# Bibliografía

- [1] ATIYAH, M. F., AND HIRZEBRUCH, F. Riemann-roch theorems for differentiable manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society* 65, 4 (1959), 276–281.
- [2] ATKINSON, G. Recurrence of co-cycles and random walks. *Journal of the London Mathematical Society* 2, 3 (1976), 486–488.
- [3] AVILA, A., AND DELECROIX, V. Weak mixing directions in non-arithmetic veech surfaces. *Journal of the American Mathematical Society* 29, 4 (2016), 1167–1208.
- [4] BENEDETTI, R., AND PETRONIO, C. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [5] BHATNAGAR, T. Covering spaces.
- [6] BISHOP, C. Quasiconformal mappings, 2000.
- [7] BOISSY, C., AND LANNEAU, E. Dynamics and geometry of the rauzy–veech induction for quadratic differentials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 29, 3 (2009), 767–816.
- [8] BOSHERNITZAN, M. A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic. *Duke Mathematical Journal* 52, 3 (1985), 723–752.
- [9] BOUW, I. I., AND MÖLLER, M. Teichmüller curves, triangle groups, and lyapunov exponents. *Annals of Mathematics* (2010), 139–185.
- [10] BRIN, M., AND STUCK, G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [11] CORNFELD, I. P., FOMIN, S. V., AND SINAI, Y. G. *Ergodic theory*, vol. 245. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] DANTHONY, C., AND NOGUEIRA, A. Measured foliations on nonorientable surfaces. In *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* (1990), vol. 23, pp. 469–494.
- [13] DELECROIX, V. Interval exchange transformations. *Lecture notes from the CIMPA research school “Dynamics on Cantor Sets* (2015).
- [14] DENKER, M., AND JACOBS, K. *Ergodic Theory: Proceedings, Oberwolfach, Germany, June, 11-17, 1978*, vol. 729. Springer, 2006.

- [15] DENNE, E. Visions in math pairs of pants, 2016.
- [16] ESKIN, A., AND MASUR, H. Asymptotic formulas on flat surfaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 21, 2 (2001), 443–478.
- [17] FARB, B., AND MARGALIT, D. *A primer on mapping class groups (pms-49)*. Princeton university press, 2011.
- [18] FORNI, G., AND MATHEUS, C. Introduction to teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards. *arXiv preprint arXiv:1311.2758* (2013).
- [19] GARDINER, F. P., AND LAKIC, N. *Quasiconformal teichmüller theory*. No. 76. American Mathematical Soc., 2000.
- [20] GLEASON, J. Existence and uniqueness of haar measure. *preprint* (2010).
- [21] HALPER, A. A proof of the gauss-bonnet theorem, 2008.
- [22] HATCHER, A. *Algebraic topology.* , 2005.
- [23] HERRLICH, F., AND SCHMITHÜSEN, G. An extraordinary origami curve. *Mathematische Nachrichten* 281, 2 (2008), 219–237.
- [24] HOOPER, W. P., HUBERT, P., AND WEISS, B. Dynamics on the infinite staircase. *Discrete & Continuous Dynamical Systems* 33, 9 (2013), 4341.
- [25] HOOPER, W. P., AND WEISS, B. Generalized staircases: recurrence and symmetry. In *Annales de l'institut Fourier* (2012), vol. 62, pp. 1581–1600.
- [26] HORDIJK, W. How a game of billiards solved a queueing problem, 2016.
- [27] HUBERT, P., MARCHESE, L., AND ULCIGRAI, C. Lagrange spectra in teichmüller dynamics via renormalization. *Geometric and Functional Analysis* 25, 1 (2015), 180–255.
- [28] HUBERT, P., AND SCHMIDT, T. A. An introduction to veech surfaces, 2006.
- [29] HUBERT, P., AND WEISS, B. Ergodicity for infinite periodic translation surfaces. *Compositio Mathematica* 149, 8 (2013), 1364–1380.
- [30] IMAYOSHI, Y., AND TANIGUCHI, M. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] KATOK, S. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [32] KEANE, M. Interval exchange transformations. *Mathematische Zeitschrift* 141, 1 (1975), 25–31.
- [33] KENYON, R., AND SMILLIE, J. Billiards on rational-angled triangles. *Commentarii Mathematici Helvetici* 75, 1 (2000), 65–108.

- [34] KERCKHOFF, S., MASUR, H., AND SMILLIE, J. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Annals of Mathematics* 124, 2 (1986), 293–311.
- [35] KIN, E. Skew products of dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society* 166 (1972), 27–43.
- [36] LANNEAU, E. Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (2008), vol. 41, pp. 1–56.
- [37] MÁLAGA SABOGAL, A., AND TROUBETZKOY, S. Unique ergodicity for infinite area translation surfaces. *arXiv e-prints* (2019), arXiv–1908.
- [38] MASSART, D. A short introduction to translation surfaces, veech surfaces, and teichmüller dynamics. In *Surveys in Geometry I*. Springer, 2022, pp. 343–388.
- [39] MASUR, H. Interval exchange transformations and measured foliations. *Annals of Mathematics* 115, 1 (1982), 169–200.
- [40] MASUR, H. Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. *Duke Mathematical Journal* 66, 3 (1992), 387–442.
- [41] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable. (AM-160):(AM-160)-*, vol. 160. Princeton University Press, 2011.
- [42] OLIVEIRA, F., AND DA ROCHA, L. F. C. Minimal non-ergodic  $c^1$ -diffeomorphisms of the circle. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 21, 6 (2001), 1843–1854.
- [43] RANDECKER, A. Wild translation surfaces and infinite genus. *Algebraic & Geometric Topology* 18, 5 (2018), 2661–2699.
- [44] SCHMIDT, K. Recurrence of cocycles and stationary random walks. *Lecture Notes-Monograph Series* (2006), 78–84.
- [45] VALDEZ, F., DELECROIX, V., AND HUBERT, P. *Infinite Translation Surfaces in the Wild*, vol. Volume 1: Geometry and Symmetries. 2022.
- [46] VEECH, W. A. Interval exchange transformations. *Journal d'Analyse Mathématique* 33, 1 (1978), 222–272.
- [47] VEECH, W. A. Boshernitzan's criterion for unique ergodicity of an interval exchange transformation. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 7, 1 (1987), 149–153.
- [48] VEECH, W. A. Teichmüller curves in moduli space, eisenstein series and an application to triangular billiards. *Inventiones mathematicae* 97 (1989), 553–583.
- [49] VIANA, M. Ergodic theory of interval exchange maps. *Revista matemática complutense* 19, 1 (2006), 7–100.

- [50] WRIGHT, A. Translation surfaces and their orbit closures: an introduction for a broad audience. *EMS Surveys in Mathematical Sciences* 2, 1 (2015), 63–108.
- [51] ZHANG, C. Veech group of regular n-gon, 2020.
- [52] ZORICH, A. Deviation for interval exchange transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17, 6 (1997), 1477–1499.
- [53] ZORICH, A. Flat surfaces. *arXiv preprint math/0609392* (2006).