



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Colapso Gravitacional de Campos
tipo Proca

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Matemático

P R E S E N T A

Tabaré Merino Sánchez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Miguel Alcubierre Moya



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Merino
Sánchez
Tabaré
7771591426
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
3822437

2. Datos del tutor

Dr
Alcubierre
Moya
Miguel

3. Datos del presidente

Dr
Núñez
Zúñiga
Darío

4. Datos del vocal

Dr
Galaviz
Casas
José de Jesús

5. Datos del suplente

Dr
Degollado
Daza
Juan Carlos

6. Datos del suplente

Dr
Matos

IV

Chassin
Tonatiuh

7. Datos del trabajo escrito

Técnica de Algoritmos Genéticos para Localizar Mínimos de Energía Potencial en
Cúmulos de Au

89 pp

2019

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	3
1. Introducción	4
1.1. Notación y convenciones	4
1.2. Relatividad General	5
2. Formalismo 3+1	9
2.1. Geometría de las foliaciones	9
2.2. Constricciones de Einstein	14
2.3. Ecuaciones Arnowitt-Deser Misner (ADM)	16
2.3.1. Ecuaciones Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura	17
2.3.2. Condiciones de foliación	20
2.4. Coordenadas curvilíneas	21
2.4.1. Simetría esférica	25
2.4.1.1. Ecuaciones BSSN en simetría esférica	25
2.5. Regularización	29
3. Campo de Proca	34
3.1. Teoría Maxwell-Proca	34
3.1.1. Campo de Maxwell	36
3.2. Campo de Proca	39
3.2.1. Campo de Proca como problema de Cauchy	41
3.2.1.1. Descomposición conforme	43
3.2.1.2. Simetría esférica	45

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
4. Evolución del campo	47
4.1. Comportamiento crítico	48
4.1.1. Características generales del colapso crítico tipo II	49
4.1.2. Características generales del colapso crítico tipo I	51
4.1.2.1. Transición entre colapsos críticos tipo I y tipo II	52
4.2. Escalamiento	54
5. Implementación y Resultados	58
5.1. Ollinsphere	58
5.2. Métodos numéricos	59
5.3. Datos iniciales	61
5.4. Simulaciones	62
5.5. Resultados	68
6. Conclusiones	74
7. Apéndice	76

Agradecimientos

A mi asesor, El Dr. Miguel Alcubierre, por haberme tenido paciencia, y haberme enseñado todo lo que necesitaba para completar este trabajo.

AL Iru, no pude haber pedido mejor compañía para esta aventura.

A mi hermana y compañera de clase Adrica, que me dio la (mala) idea que empezó todo esto.

A mis papas, por creer en mi y apoyarme cuando mas lo necesito.

A Nancy, la persona con la que mas risas he compartido.

A Luis, Chuy y Cabos, por guiarme en lo que debía (y no debía) hacer.

A Constanza, por haber hecho de una época complicada, una de las mas divertidas y placenteras en mi vida.

A Juls y a todas las tazas de café que me invitó entre clases.

A Ozz, Armando, Ivan y Connie, por adaptarme en su carrera y generación.

Al Cineclub de la facultad de Ciencias, por siempre darme un lugar donde era bienvenido.

A Tamara, mi amiga por correspondencia.

A Edna, por enseñarme lo bonitas que son las matemáticas.

A Mony, Cucu e Isaac, por todas las pláticas que tuvimos, y compartir conmigo esta experiencia.

A la USARM y todos sus miembros, sin ustedes no sería la persona que soy hoy.

Por último, a cualquier persona que se tome el tiempo de leer mi trabajo.

Resumen

Este trabajo estudiará el colapso gravitacional de un campo de Proca real bajo simetría esférica, usando el formalismo 3+1 de la Relatividad Numérica. Para esto, se harán simulaciones utilizando el programa Ollinsphere-BIB del del grupo de Relatividad Numérica de la UNAM.

Las simulaciones consistirán en separar el espacio-tiempo 4 dimensional, en el cual se encuentra el campo de Proca, en hiper-superficies espacialoides y hacer proyecciones de las ecuaciones de Einstein sobre dichas hiper-superficies. Al hacer dichas proyecciones, las 10 ecuaciones de Einstein se separan en 6 ecuaciones dinámicas y 4 ecuaciones de constricción (la constricción hamiltoniana y 3 constricciones de momentos) que deben satisfacerse en todo el tiempo. Como el trabajo se realizará bajo simetría esférica, es necesario reescribir la ecuación de Proca, constricción de energía-momento, constricción Hamiltoniana y las ecuaciones dinámicas, para que no tengan dependencia angular.

Este trabajo utilizará la evolución dinámica del campo de proca para estudiar la región sub-crítica del colapso tipo II, centrándose en el comportamiento del máximo del escalar de Ricci cercano al comportamiento crítico.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Notación y convenciones

A lo largo de este trabajo, se utilizará la convención de Misner, Thorne y Wheeler (MTW). Los índices griegos ($\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$) se usarán para referirse a los componentes objetos 4-dimensionales en el espacio-tiempo. Dichos índices tomarán valores del 0 al 3, siendo la coordenada asociada al índice 0, la coordenada temporal. Los índices latinos (i, j, k, l, ...) se usarán para denotar los componentes de un objeto puramente espacial, en estos casos los índices tomarán valores del 1 al 3. La signatura de la métrica se tomará de tal manera que la coordenada temporal tenga signo negativo, y las coordenadas espaciales positivo, *i.e.* $(-1, +1, +1, +1)$.

Se utilizará $\partial_\mu T$ para referirse a las derivadas parciales con respecto a x^μ de la cantidad geométrica T , $\nabla_\mu T$ para las derivadas covariantes y $D_i T$ en caso de que se tome la derivada covariante de una cantidad geométrica de 3 dimensiones. Una coma presidiendo un índice inferior $A_{i,j}$ denota una derivada parcial con respecto a ese índice, similarmente, un punto y coma presidiendo un índice inferior $A_{i;j}$ denota una derivada parcial con respecto a ese índice.

Otra convención que se usará en este trabajo es la convención de la suma de Einstein, en la cual se suprime el símbolo Σ cuando nos referimos a una suma con índices inferiores y superiores repetidos, de tal manera que $\sum_{\mu=0}^3 n_\mu n^\mu$ se reescribe como $n_\mu n^\mu$.

Por último, las cantidades serán tomadas en unidades geométricas, en las cuales la velocidad de la luz en el vacío c , y la constante gravitacional de Newton G , tienen valores unitarios, $G=c=1$.

1.2. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General de Einstein presenta al espacio-tiempo (el conjunto de todos los eventos) como una variedad cuatro-dimensional con métrica. A diferencia de la mecánica newtoniana o la Relatividad Especial, éste espacio-tiempo no es plano, ya que presenta una curvatura causada por la presencia de materia y energía. A pesar de que la métrica de este espacio-tiempo no es plana, es posible encontrar para todo evento dentro de la variedad un marco de referencia localmente plano, para el cual, el producto interno se comporta como en el espacio de Minkowski ($d\vec{x} \cdot d\vec{x} = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$). Gracias a esto, la Relatividad General logra explicar el comportamiento de campos gravitacionales intensos y dinámicos, así como objetos que existen dentro de estos campos. El éxito de esta teoría no solo se debe al hecho de haber podido explicar problemas que consternan a los físicos desde hace siglos, cómo el problema de la órbita de Mercurio, sino también la predicción de algunos fenómenos astrofísicos, como lo son los agujeros negros y las ondas gravitacionales, siendo el segundo comprobado hace apenas algunos años.

Al trabajar con la Relatividad General, a diferencia de la Relatividad Especial o Relatividad Restringida, se debe tomar en cuenta cómo se comportan los objetos físicos (partículas, campos, fluidos, etc.) en espacios curvos, y como la presencia de objetos físicos afecta la curvatura del espacio-tiempo. Para esto, se necesita encontrar una expresión relativista equivalente a la ecuación de atracción gravitacional Newtoniana, la cual describe a las fuerzas gravitacionales, $F = ma$, con $F = -m\nabla\phi$, dado un campo gravitacional ϕ , y ϕ determinado por la ley $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$.

Para la primera ecuación, debemos recordar que la aceleración de una partícula cayendo libremente en un campo gravitacional es independiente de su masa. Gracias a esto, podemos asociarle un marco de referencia inercial local a cualquier partícula cayendo libremente en el espacio-tiempo, de manera que, el marco de referencia cae a la par de la partícula. Dado que los objetos cercanos a la partícula sufren la misma aceleración gravitacional que ésta, y por transitividad, también tendrán la misma aceleración que el marco de referencia. Gracias a esto los objetos que caen cercanos a la partícula no tendrán aceleración en el marco de referencia, por lo que siguen líneas rectas (localmente). Dichas líneas rectas locales son, por definición, las geodésicas de la variedad con curvatura. Esto resulta en el Principio de Equivalencia Débil (WEP, por sus siglas en inglés):

Principio de Equivalencia Débil: *Las partículas en caída libre se mueven en geodésicas temporales en el espacio-tiempo [1].*

El Principio de Equivalencia Débil tiene como generalización el Principio de Equivalencia de Einstein, el cual no solo describe el movimiento de partículas, sino que también se refiere a fluidos y otros objetos físicos:

Principio de Equivalencia de Einstein Fuerte: *Todo experimento local, el cual no implica a la gravedad, tendrá el mismo resultado si se realiza en un marco inercial en caída libre, que si fuera realizado en un espacio-tiempo plano [1].*

En este caso, local se refiere a que los experimentos no involucran campos que se extienden mas allá de la región en donde se puede aproximar a la variedad con un marco de referencia inercial. Como sabemos, en el caso Newtoniano, la ecuación para la fuente del campo gravitacional $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ con ρ la densidad de masa, tiene por solución para el caso de la partícula puntual:

$$\phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (1.1)$$

Al escribir el análogo relativista de la ecuación del campo gravitacional, es necesario escoger con cuidado la cantidad que servirá como análogo a la densidad de masa. Tomar la densidad de energía ρ_e como fuente del campo sería una opción, no obstante también conlleva a un problema, ya que ρ_e es la densidad de energía medida en un sistema momentáneamente en reposo. En los demás marcos de referencia los observadores miden la densidad de energía como la componente T^{00} del tensor de energía-momento en sus marcos de referencia respectivos. Dado que el término análogo a la densidad de masa para el caso Newtoniano no debe darle prioridad a ningún marco de referencia, se utiliza el tensor de energía-momento \mathbf{T} completo como la generalización de la densidad Newtoniana. De manera que la generalización de la Ec. (1.1) es:

$$\mathbf{O}(g) = k\mathbf{T}, \quad (1.2)$$

con k una constante y donde \mathbf{O} es un operador diferencial del tensor métrico g . En analogía a la Ec. (1.1), utilizaremos operadores diferenciales de segundo orden que produzcan un tensor de rango $\binom{2}{0}$, al cual denominaremos $O^{\alpha\beta}$. Utilizando la métrica $g^{\alpha\beta}$, el tensor de Ricci definido por :

$$R^{\alpha\beta} = R_{\lambda}^{\alpha\lambda\beta}, \quad (1.3)$$

con $R_{\lambda}^{\alpha\lambda\beta}$ el tensor de Riemman; y la traza traza del tensor de Ricci:

$$R = R_{\mu}^{\mu}. \quad (1.4)$$

Este tensor $O^{\alpha\beta}$ puede ser descrito de la siguiente manera:

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}, \quad (1.5)$$

con μ y Λ constantes. Dado que el Principio de Equivalencia de Einstein obliga a que se cumpla la conservación de energía:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.6)$$

es posible determinar el valor de μ . De la conservación de energía obtenemos:

$$O_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.7)$$

lo cual junto con (1.5) lleva a:

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0. \quad (1.8)$$

Por último, comparando lo anterior con la identidad de Bianchi:

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (1.9)$$

con:

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha}, \quad (1.10)$$

encontramos que $\mu = -\frac{1}{2}$, llegando por fin a las ecuaciones de Einstein:

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}. \quad (1.11)$$

Por simetría, estas 16 ecuaciones presentan un sistema de solo diez ecuaciones de 4 dimensiones, acopladas y no lineales. Estas 10 ecuaciones describen, en palabras de John A. Wheeler, cómo el espacio-tiempo le dice a la materia como moverse, y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse. Dado que este sistema de ecuaciones resulta ser nada trivial, sólo se conocen soluciones exactas con altos grados de simetría, ya sea en el espacio, o en el tiempo.

Este trabajo pretende ser una introducción al estudio del comportamiento de un campo

gravitacional cuya fuente es un campo de Proca real. El campo de Proca es un campo vectorial con masa, el cual resulta muy similar al campo de Maxwell, salvo por unos términos que dependen de la masa. Este campo está descrito por la acción que modela a los bosones masivos Z y W . Esta acción, al igual que el campo que describe, recibe el nombre de acción de Proca, en honor al físico rumano que la describió por primera vez, Alexandru Proca [2].

A pesar de estudiar dicho campo en simetría esférica, no se puede llegar a una solución por métodos analíticos. Por este motivo se hará el análisis utilizando el área de la relatividad llamada Relatividad Numérica. La Relatividad Numérica es un área de la física relativamente joven, que se dedica a resolver las ecuaciones de Einstein en problemas con poca simetría, o con un bajo grado de complejidad en la distribución de energía-momento, esto utilizando métodos numéricos y códigos computacionales.

Capítulo 2

Formalismo 3+1

2.1. Geometría de las foliaciones

La naturaleza totalmente covariante de las ecuaciones de Einstein nos da una manera natural de entender la relación entre el espacio y el tiempo. Pese a esto, esta misma naturaleza covariante representa un problema al intentar analizar la dinámica de evolución del campo gravitacional en el tiempo ya que, al estar escritas de manera covariante, no existe distinción entre el espacio y el tiempo, ergo no hay una manera “natural” de evolucionar en el tiempo al espacio-tiempo.

Dentro de la Relatividad Numérica existen diversos formalismos, los cuales buscan solucionar dicho problema. De entre ellos, uno de los mas usados, y el usado en este trabajo, es el formalismo 3+1. En este formalismo, se busca separar el espacio-tiempo en dos: las tres dimensiones que conforman el espacio tridimensional por un lado, y la dimensión temporal en el otro, de ahí el nombre de formalismo 3+1. Esto permite reescribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy o problema de valores iniciales. Con esto, al tener ecuaciones de evolución de variables de interés, así como valores iniciales para dichas variables, podemos obtener el comportamiento del campo a distintos tiempos.

Este trabajo no busca presentar el desarrollo extensivo del formalismo 3+1, ya que se ha desarrollado con gran completez en referencias como [3]. A pesar de ello, es relevante dar una pequeña introducción a dicho formalismo.

El formalismo 3+1 comienza al suponer que el espacio-tiempo, con métrica $g_{\mu\nu}$ es globalmente hiperbólico; *i.e.* existe una superficie de Cauchy.

Una superficie de Cauchy, es un sub-conjunto S de en un espacio de Lorentz¹ M que corta una sola vez a cada curva temporal inextendible (se cree que todos los espacio-tiempos físicos relevantes son globalmente hiperbólicos, por lo cual el formalismo no pierde generalidad). Dado un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, es posible foliarlo en rebanadas tridimensionales puramente espaciales, parametrizadas por una función de tiempo universal t (véase Figura 2.1), de tal manera que cada rebanada tiene un valor para el tiempo asociado. Cabe recalcar que la función tiempo universal no necesariamente coincide con el tiempo propio de algún observador.

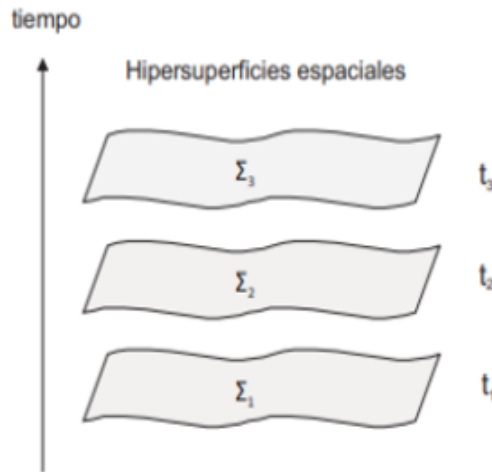


Figura 2.1: Imagen adaptada con permiso de [3]. Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales puramente espacialoides.

La geometría en dos foliaciones adyacentes, Σ_t , y Σ_{t+dt} , separadas por un intervalo temporal infinitesimal dt , se puede describir usando las siguientes cantidades (ver Figura 2.2):

- La métrica 3-dimensional γ_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$, de acuerdo a la convención MTW,

¹Definición: Un espacio de Lorentz denotado $L^{p,q}$ es un espacio de funciones caracterizado por una quasi-norma $\|f\|$ definida como $\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} = p^{\frac{1}{q}} \|t\mu[|f| \geq t]^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(R^+, \frac{dt}{t})}$

para medir la distancia propia de dos eventos dentro de la misma hiper-superficie:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

Posteriormente, en esta sección se definirá más formalmente la métrica espacial utilizando proyecciones de la métrica completa $g_{\mu\nu}$.

- El cambio en el tiempo propio $d\tau$ de un observador que se mueve normal a la hiper-superficie (a este tipo de observador se le denomina observador Euleriano) moviéndose entre las dos hiper-superficies adyacentes:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt, \quad (2.2)$$

Siendo α la función lapso.

- La velocidad relativa β^i , conocida como el vector de corrimiento, entre un observador Euleriano y las líneas con coordenadas espaciales constantes, descrita por:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j) dt. \quad (2.3)$$

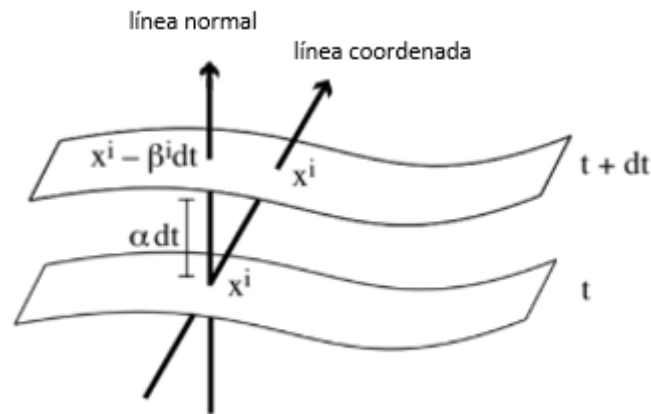


Figura 2.2: Imagen adaptada con permiso de [3]. Representación esquemática de la geometría entre dos foliaciones en la descomposición 3+1: α es la función lapso, la cual mide el tiempo propio entre dos hiper-superficies adyacentes Σ_t y Σ_{t+dt} ; β^i es el vector de corrimiento, el cual describe el desplazamiento de las coordenadas espaciales x^i con respecto a la línea normal.

La llamada línea normal en la figura 2.2 se define como la dirección del 4-vector n^ν

normal a la hiper-superficie Σ_t , mientras que la línea coordenada es aquella donde las coordenadas x^i permanecen constantes.

Dado que, ni la foliación, ni la manera en la cual se propagan las coordenadas de una hiper-superficie a la siguiente son únicas, podemos especificar con gran libertad las funciones (α, β^i) , por lo que se les denomina “funciones norma”.

Usando el lapso α , el vector de corrimiento β^i , y la métrica tridimensional γ_{ij} , podemos recuperar la métrica cuatridimensional:

$$ds^2 = -(\alpha^2 + \beta_i\beta_i)dt^2 + 2\beta_idtdx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.4)$$

Donde se usó la métrica tridimensional γ_{ij} para bajar el índice del vector de corrimiento, $\beta_j = \gamma_{ij}\beta^i$.

En este sistema de coordenadas, el vector unitario normal, que corresponde a la 4-velocidad de un observador Euleriano, tiene componentes:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (2.5)$$

De este modo, la métrica espacial γ_{ij} , se define como la métrica inducida en cada hiper-superficie Σ por la métrica completa $g_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.6)$$

usando la función global de tiempo t asociada a la foliación, podemos definir la función lapso de la siguiente manera:

$$\alpha = (-\nabla t \cdot \nabla t)^{-1/2}, \quad (2.7)$$

la cual nos da una expresión para el vector normal a la hiper-superficie en términos de α y t :

$$n^\mu = -\alpha\nabla^\mu t, \quad (2.8)$$

el signo negativo se utiliza para asegurarnos que \vec{n} apunte hacia el futuro.

A partir de la Ec. (2.3) podemos encontrar una expresión para los componentes espaciales de 4-vector $\vec{\beta}$:

$$\beta^\alpha = \alpha(\vec{n} \cdot \nabla x^\alpha). \quad (2.9)$$

A partir de la definición del vector β^μ se puede ver que éste es ortogonal a \vec{n} , por lo que podemos usar a los vectores $\vec{\beta}$ y \vec{n} para construir un vector tiempo \vec{t} tangente a las líneas donde $x^i = \text{cte}$:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (2.10)$$

A partir de la métrica podemos definir el operador de proyección:

$$P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu, \quad (2.11)$$

el cual se utilizará, como su nombre lo indica, para proyectar tensores sobre la hiper-superficie.

La curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ se define como el cambio en el vector normal bajo transporte paralelo a la hiper-superficie:

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu. \quad (2.12)$$

Aplicando el operador proyección en la definición anterior, obtenemos que la curvatura extrínseca es de la forma: $K_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu n_\nu + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu)$. Cabe observar que, además de ser simétrico; se cumple que $n^\mu K_{\mu\nu} = n^\nu K_{\mu\nu} = 0$, es decir el tensor $K_{\mu\nu}$ es puramente espacial, lo cual es de esperarse pues existe sobre la hiper-superficie. Aplicándole una derivada de Lie con respecto al vector normal \vec{n} a la métrica tridimensional γ_{ij} , podemos encontrar la siguiente expresión para la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} &= n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha \\ &= n^\alpha \nabla_\alpha (n_\mu n_\nu) + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + g_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha \\ &= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha n_\nu + n^\alpha n_\nu \nabla_\alpha n_\mu + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu \\ &= (\gamma_\mu^\alpha - g_\mu^\alpha) \nabla_\alpha n_\nu + (\gamma_\nu^\alpha - g_\nu^\alpha) \nabla_\alpha n_\mu + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu \\ &= \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + \gamma_\nu^\alpha \nabla_\alpha n_\mu \\ &= -2K_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando (2.9) y la linealidad de la derivada de Lie, podemos reescribir el resultado anterior de la siguiente manera:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.14)$$

donde se ha utilizado $\mathcal{L}_t = \partial_t$. El análisis anterior resulta en una ecuación de evolución puramente cinemática para la métrica. Para poder obtener la dinámica de evolución del

sistema, es necesario utilizar las ecuaciones de Einstein.

2.2. Constricciones de Einstein

La dinámica de evolución del campo gravitacional está contenida en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones están escritas de manera covariante. Para poder trabajar con ellas es necesario reescribirlas en lenguaje 3+1; esto se logra con una serie de contracciones con el vector \vec{n} y los operadores de proyección en la hiper-superficie P_ν^μ . Para hacer esto, primero se debe reescribir el tensor de curvatura de Riemman $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ en términos del tensor de Riemman tridimensional intrínseco a la hiper-superficie, ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ y el tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$. La proyección del tensor de Riemman en la hiper-superficie está dada por las ecuaciones de *Gauss-Codazzi*:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}. \quad (2.16)$$

De manera similar, la proyección del tensor de Riemman en la hiper-superficie contraída una vez con el vector normal resulta en las ecuaciones de *Codazzi-Mainardi*:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}, \quad (2.17)$$

donde utilizamos D_μ para referirnos a $P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$. El procedimiento para obtener las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* y *Codazzi-Mainardi* queda fuera de los objetivos de este trabajo y se puede consultar en la referencia [3].

Para la primera restricción, partimos de una doble proyección del tensor de Ricci en la hiper-superficie:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\alpha\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu)R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

utilizando la siguiente implicación de la ecuación de *Gauss-Codazzi*:

$$P^{\alpha\mu}P^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

con $K := K_{\mu}^{\mu}$ la traza de la curvatura extrínseca; podemos asociar esta doble proyección con la curvatura extrínseca de la siguiente manera:

$$2n^{\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein para reescribir la expresión anterior en términos de $T_{\mu\nu}$ y definiendo $\rho := n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu}$ como la densidad de energía local medida por un observador Euleriano, obtenemos la siguiente ecuación, conocida como la constricción de energía o la constricción Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} &= 16\pi\rho \\ \mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 8\pi\rho &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para la segunda constricción, empezamos con la siguiente contracción mixta del tensor de Einstein:

$$P^{\alpha\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu}n^{\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

De manera similar a el caso anterior, usando la ecuación de *Codazzi-Mainardi*, obtenemos:

$$\gamma^{\alpha\mu}n^{\nu}G_{\mu\nu} = D^{\alpha}K - D_{\mu}K^{\alpha\mu}. \quad (2.23)$$

Definiendo $j^{\alpha} := -P^{\alpha\mu}n_{\nu}T_{\mu\nu}$ como la densidad de momento medida por un observador Euleriano, y utilizando las ecuaciones de Einstein obtenemos las constricciones de momento:

$$D_{\mu}(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^{\alpha}. \quad (2.24)$$

Notemos que, a pesar de ser α un índice griego libre, lo cual llevaría a 4 ecuaciones, el caso $\alpha = 0$ resulta trivial, por lo cual solo tenemos tres ecuaciones.

Las ecuaciones (2.21) y (2.24), además de no tener dependencia temporal, también son independientes del lapso y el vector de corrimiento. Esto es de esperarse, puesto que las constricciones son relaciones internas a las hiper-superficies, y no del espacio-tiempo 4-dimensional. Utilizar este nuevo sistema de constricciones permite escoger libremente a

las 12 variables dinámicas $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ como condiciones iniciales.

La siguiente sección tratará de como se pueden escoger escoger datos iniciales tales que satisfagan las constricciones.

2.3. Ecuaciones Arnowitt-Deser Misner (ADM)

Las seis ecuaciones de Einstein que aún no se han utilizado, contienen la dinámica de la métrica y la curvatura del espacio. Para encontrar expresiones a la evolución de γ_{ij} y K_{ij} , es necesario proyectar el tensor de Riemman en las hiper-superficies y contraer dos veces con el vector normal \vec{n} :

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha, \quad (2.25)$$

el cual, junto con las ecuaciones de Gauss-Codazzi, implica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= D_\mu D_\nu \alpha \\ &+ \alpha(-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (2.27)$$

con T, la traza del tensor energía-momento ($T = T^\mu_\mu$), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= D_\mu D_\nu \alpha + \alpha({}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda) \\ &+ 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (2.28)$$

siendo ρ la densidad de momento definida con anterioridad, $S_{\mu\nu} := P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ el tensor de estrés espacial, S la traza de dicho tensor ($S = S^\mu_\mu$). Estas ecuaciones dinámicas, comúnmente llamadas las ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), nos dan la evolución dinámica de las seis componentes independientes de la curvatura extrínseca.

Es importante mencionar que las ecuaciones de ADM aquí descritas, y las que se usarán

en este trabajo, no son las que originalmente escribieron Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner, sino que están escritas como York las reescribió en [4].

A pesar de no ser el sistema de ecuaciones, el sistema descrito por James W. York, y las ecuaciones escritas originalmente por Arnowitt–Deser–Misner, describen el mismo sistema físico. Esto se debe a que las ecuaciones de evolución 3+1 no son únicas, en el sentido de que siempre podemos sumarle múltiplos arbitrarios de las constricciones y éstas continuaran describiendo el mismo sistema físico. Las diferentes ecuaciones, a pesar de coincidir en las soluciones físicas, pueden tener estructuras matemáticas totalmente diferentes. Esto es de gran importancia, ya que las ecuaciones ADM no son ecuaciones bien planteadas en el sentido hiperbólico de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, pero otros sistemas equivalentes sí.

La discusión y el análisis de la hiperbolicidad de estas ecuaciones se encuentran fuera del alcance de este trabajo. En [3] se discute porque ciertos múltiplos de las constricciones resultan en sistemas bien planteados con formulación estable.

Dentro del formalismo 3+1 existen diversos sistemas de ecuaciones que se han mostrado bien planteadas en el sentido hiperbólico y robustas en un aspecto empírico y teórico, de las cuales la que se usará en este trabajo es la formulación de Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura.

2.3.1. Ecuaciones Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura

La formulación Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN), presentadas originalmente en [5] y [6] por Thomas W. Baumgarte, Stuart L. Shapiro, Masaru Shibata y Takashi Nakamura, empieza con la descomposición conforme de la métrica:

$$\hat{\gamma}_{ij} \equiv \psi^{-4} \gamma_{ij}. \quad (2.29)$$

A partir de este punto, al denotar cantidades con el circunflejo $\hat{}$ nos referimos a cantidades conformes, relacionadas con el factor conforme ψ . De ahora en adelante, se adhiere la convención adicional de que los índices de las cantidades conformes se manipulan con la métrica conforme $\hat{\gamma}_{ij}$. En el caso particular de la formulación BSSN, se escoge un factor

conforme ψ tal que la métrica conforme $\hat{\gamma}_{ij}$ tenga determinante unitario, $\hat{\gamma} = 1$:

$$\psi^4 = \gamma^{1/3} \implies \psi = \gamma^{1/12}, \quad (2.30)$$

con γ el determinante de γ_{ij} . Se define la variable dinámica $\phi = \ln \psi = \frac{1}{12} \ln \gamma$ de manera que $\hat{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}$. Esta variable dinámica ϕ tendrá que ser resuelta en cada paso de la evolución de acuerdo a la siguiente ecuación de evolución obtenida a partir de (2.14):

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6}(\alpha K - \partial_i \beta^i) + \beta^i \partial_i \phi. \quad (2.31)$$

La formulación BSSN también introduce una separación entre la curvatura extrínseca y su traza, junto con una re-escalación conforme de la misma:

$$A_{ij} \equiv K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma K \quad (2.32)$$

$$\hat{A}_{ij} \equiv e^{-4\phi} \gamma_{ij} A_{ij} = \hat{K}_{ij} - \frac{1}{3} \hat{\gamma}_{ij} K. \quad (2.33)$$

En adición, se definen tres variables auxiliares, las cuales reciben el nombre de funciones de conexión conformes:

$$\hat{\Gamma}^i := \hat{\gamma}^{jk} \hat{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \hat{\gamma}^{ij}, \quad (2.34)$$

donde $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ son los símbolos de Christoffel de la métrica conforme, y se ha usado el hecho de que $\hat{\gamma} = 1$. Con esto, las ecuaciones BSSN dependen de 17 variables dinámicas (ϕ , K , \hat{A}_{ij} , $\hat{\gamma}_{ij}$ y $\hat{\Gamma}^i$), a diferencia de las 12 variables que se usan en ADM (γ_{ij} y K_{ij}). Las ecuaciones de evolución para K , \hat{A}_{ij} y $\hat{\Gamma}^i$ las podemos obtener de las ecuaciones ADM (2.28):

$$\frac{d}{dt} \hat{\gamma}_{ij} = -2\alpha \hat{A}_{ij}, \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{1}{6} \alpha K, \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_{ij} = e^{-4\phi} (-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}])^{TF}, \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt} K = -D^2 + \alpha + \alpha (\hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2) + 4\pi \alpha (\rho + S), \quad (2.38)$$

donde $d/dt := \partial_t - \mathcal{L}_\beta$, TF denota la parte sin traza de la expresión entre paréntesis, D_i es la derivada covariante de la métrica física γ_{ij} , el tensor de Ricci y el escalar de Ricci son los asociados a la métrica física γ_{ij} , y el laplaciano $D^2 \equiv D_i D^i$ es la traza del operador físico D_i . *i.e.*, $D_i D^i = \gamma^{ij} D_i D_j$. Para la ecuación de K (2.38) se ha utilizado

la constricción Hamiltoniana (2.21) para eliminar el escalar de Ricci. En las expresiones para las ecuaciones de evolución (2.37) y (2.38), se ha utilizado una derivada covariante del lapso con respecto a la métrica física, para lo cual se usó, y se usará a lo largo de este trabajo, la siguiente expresión para los símbolos de conexión conformes:

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - 2(\delta_i^k \partial_j \phi + \delta_j^k \partial_i \phi - \gamma_{ij} \gamma^{kl} \partial_l \phi). \quad (2.39)$$

Para la ecuación de evolución de \hat{A}_{ij} (2.37), se necesita calcular el tensor de Ricci asociado a la métrica física γ_{ij} . Para este cálculo, necesitamos la métrica física, la cual aún no hemos obtenido. Una manera de evadir esto, es a través de la siguiente relación entre el tensor de Ricci físico y el tensor de Ricci conforme:

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} + R_{ij}^\phi, \quad (2.40)$$

con \hat{R}_{ij} el tensor de Ricci de la métrica conforme, el cual puede ser calculado usando la siguiente expresión:

$$\hat{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \hat{\gamma}^{lm} \partial_l \partial_m \hat{\gamma}_{ij} + \hat{\gamma}_k ({}_i \partial_j) \hat{\Gamma}^k + \hat{\Gamma}^k \hat{\Gamma}_{(ij)k} + \hat{\gamma}^{lm} (2 \hat{\Gamma}_l ({}_i \hat{\Gamma}_j)_{km} + \hat{\Gamma}_{im}^k \hat{\Gamma}_{klj}), \quad (2.41)$$

y donde el término R_{ij}^ϕ denota los términos adicionales que dependen del factor conforme ϕ :

$$R_{ij}^\phi = -2 \hat{D}_i \hat{D}_j \phi - 2 \hat{\gamma}_{ij} \hat{D}^k \hat{D}_k \phi + 4 \hat{D}_i \phi \hat{D}_j \phi - k \hat{\gamma}_{ij} \hat{D}^k \phi \hat{D}_k \phi. \quad (2.42)$$

Es importante aclarar que las derivadas de Lie se toman para $\hat{\gamma}_{ij}$ como una densidad de peso 2/3, y para \hat{A}_{ij} como una de -2/3. A partir de la definición $e^\phi = \gamma^{1/12}$, obtenemos que ϕ es una densidad de peso 1/16.

Al considerar a las $\hat{\Gamma}^i$ como variables independientes es necesario tener su ecuación de evolución, la cual se puede obtener directamente de (2.28) y (2.34):

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Gamma}^i &= \hat{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \hat{\Gamma}^i - \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j \\ &+ \frac{2}{3} \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - 2(\alpha \partial_j \hat{A}^i j + \hat{A}^{ij} \partial_j \alpha). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Una observación importante es que la expresión anterior no es la usada en BSSN, pues en la práctica ha demostrado no ser estable. Esto se ha solucionado considerando la

constricción de momento con las nuevas variables:

$$\partial_j \hat{A}^{ij} = -\hat{\Gamma}_{jk}^i \hat{A}^{jk} - 6\hat{A}^{ij} \partial_j \phi + \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j K + 8\pi \hat{j}^i, \quad (2.44)$$

donde $\hat{j}^i := e^{4\phi} j^i$, es la densidad de momento conforme.

Reescribiendo la divergencia de \hat{A}^{ij} en (2.43), obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Gamma}^i &= \hat{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \hat{\Gamma}^i - \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j \\ &+ \frac{2}{3} \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - 2(\hat{\Gamma}_{jk}^i \hat{A}^{jk} - 6\hat{A}^{ij} \partial_j \phi + \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j K + 8\pi \hat{j}^i). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por último, los términos $\beta^j \partial_j \hat{\Gamma}^i - \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j + \frac{2}{3} \hat{\Gamma}^i \partial_j \beta^j$ surgen de una derivada de Lie de densidad de peso $2/3$, y los términos que involucran la segunda derivada del vector desplazamiento aparecen porque $\hat{\Gamma}^i$ son símbolos de Christoffel contraídos, por lo que no forman parte de la densidad vectorial. Con esto se puede simplificar la expresión anterior a:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Gamma}^i &= \hat{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k - 2\hat{A}^{ij} \partial_j \alpha \\ &+ 2\alpha (\hat{\Gamma}_{jk}^i \hat{A}^{jk} - 6\hat{A}^{ij} \partial_j \phi + \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j K + 8\pi \hat{j}^i). \end{aligned} \quad (2.46)$$

La discusión anterior sobre la formulación BSSN y el sistema descrito por (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) y (2.46) fue presentado de manera cercana a la forma presentada en [3].

2.3.2. Condiciones de foliación

Para la elección de la función del lapso, las simulaciones en este trabajo utilizan la condición de foliación 1+log:

$$\frac{d}{dt} \alpha = -2\alpha K - \beta^r \partial_r \alpha \quad (2.47)$$

de la familia de condiciones *Bona-Masso*:

$$\frac{d}{dt} \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (2.48)$$

donde $f(\alpha)$ es una función positiva de α , para el caso de la condición de foliación 1+log, $f(\alpha) = 2/\alpha$. Tomando la derivada temporal de la condición de las familias Bona-Maso

(2.48) obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha = -\alpha^2 f \left[\frac{d}{dt}K - \alpha(2f + \alpha f')K^2 \right], \quad (2.49)$$

con $f' := \frac{df}{d\alpha}$. Utilizando la ecuación de evolución para K en ADM (2.28), encontramos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha - \alpha^2 f D^2\alpha = -\alpha^3 f [K_{ij}K^{ij} - (2f + \alpha f')K^2], \quad (2.50)$$

una ecuación de onda con una fuente cuadrática en términos de K_{ij} , con velocidad en la dirección x^i :

$$v_g = \alpha \sqrt{f \gamma^{ii}}. \quad (2.51)$$

En el caso 1+log, v_g resulta ser mayor a la velocidad de la luz para el límite de Minkowski ($\alpha = \gamma^{ij} = 1$). Esto no resulta ningún problema ya que esta velocidad superlumínica no es la velocidad de ningún objeto, sino que habla de la velocidad con la que se propaga el sistema de coordenadas, el cual puede escogerse libremente.

Una ventaja de utilizar la condición de foliación 1+ log, es que con ella, el valor de α se hace cero en una singularidad [3], lo cual representa una manera rápida de identificar la presencia de una singularidad.

2.4. Coordenadas curvilíneas

Antes de poder escribir las ecuaciones BSSN para el caso de interés de este trabajo (simetría esférica), es necesario adaptar las ecuaciones BSSN a coordenadas curvilíneas utilizando una formulación estrictamente covariante.

Una condición que debe cumplir este nuevo sistema en coordenadas curvilíneas es que, al utilizar coordenadas cartesianas, se recupere el sistema de ecuaciones BSSN como fue planteado en la sección anterior. Dicho análisis ha sido realizado por Brown en [7], y Alcubierre y Méndez en [8]. El trabajo aquí realizado seguirá de manera cercana el análisis realizado en [8].

En coordenadas curvilíneas, el determinante de la métrica conforme generalmente no es 1, como ocurre en simetría esférica, donde $\hat{\gamma}_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, de donde se sigue $\hat{\gamma} = r^4 \sin^2 \theta$.

Esto se puede solucionar pidiéndole al determinante de la métrica conforme que se reduzca a su valor en un espacio plano. A lo largo de esta sección, y la sección consecuente, se utilizará la tilde para denotar cantidades conformes, junto con la variable \mathcal{X} :

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2} \ln(\gamma/\tilde{\gamma}), \quad (2.52)$$

en lugar de ϕ para referirnos al factor conforme. Siguiendo la notación utilizada en [8], esto con el fin de no crear confusiones con la formulación BSSN estándar. La métrica conforme usada entonces será:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\mathcal{X}} \gamma_{ij}, \quad (2.53)$$

a la cual le imponemos la condición inicial $\tilde{\gamma}(t=0) = \mathring{\gamma}$, con $\mathring{\gamma}$ el determinante de la métrica plana de las coordenadas curvilíneas que se esté utilizando. Esto implica que $\tilde{\gamma}$ no es necesariamente un valor constante a lo largo de la evolución del sistema. Siguiendo [7], existen dos opciones para la evolución de $\tilde{\gamma}$:

1. La condición Lagrangiana: $\partial_t \tilde{\gamma} = 0$.
2. La condición Euleriana: $\partial_t \tilde{\gamma} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma} = 0$.

Las cuales, junto con la definición de la derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma} = \beta^m \partial_m \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} \partial_m \beta^m = 2\tilde{\gamma} \tilde{D}_m \beta^m, \quad (2.54)$$

nos dan la siguiente ecuación de evolución para $\tilde{\gamma}$:

$$\partial_t \tilde{\gamma} = s(2\tilde{\gamma} \tilde{D}_m \beta^m), \quad (2.55)$$

con:

$$s = \begin{cases} 0 & \text{En el caso Lagrangiano.} \\ 1 & \text{En el caso Euleriano.} \end{cases} \quad (2.56)$$

El factor conforme \mathcal{X} tiene como ecuación de evolución:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{X} &= \frac{1}{12} \left(\frac{\partial_t \gamma}{\gamma} - \frac{\partial_t \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(-2\alpha K + \frac{\mathcal{L}_\beta \gamma}{\gamma} - s \frac{\mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

utilizando (2.54) y la relación $\mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma} = \mathcal{L}_\beta \gamma / \gamma - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma} / \tilde{\gamma}$ se obtiene:

$$\partial_t \mathcal{X} - \mathcal{L}_\beta \mathcal{X} = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} (1-s) \tilde{D}_m \beta^m. \quad (2.58)$$

A partir de la definición (2.52), tenemos:

$$\mathcal{L}_\beta \mathcal{X} = \beta^m \partial_m \mathcal{X}. \quad (2.59)$$

La ecuación de evolución para $\tilde{\gamma}_{ij}$ la podemos encontrar a partir de la definición (2.53), la ecuación evolución para \mathcal{X} , (2.58) y la ecuación de evolución de la métrica física (2.14):

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}_{ij} = -\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} (1-s) \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m, \quad (2.60)$$

donde \tilde{A}_{ij} está definido por:

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\mathcal{X}} \left(K - K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (2.61)$$

con su respectiva ecuación de evolución:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{A}_{ij} = e^{-4\mathcal{X}} \{ & -D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}] \}^{TF} \\ & + \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right) - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m. \end{aligned} \quad (2.62)$$

La ecuación de evolución de K resulta ser:

$$\partial_t K - \mathcal{L}_\beta K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\mathcal{E} + S). \quad (2.63)$$

Se introducen \tilde{R}_{ij} y $R_{ij}^\mathcal{X}$, el primero siendo el tensor de Ricci asociado a la métrica conforme, y el segundo denota los términos que dependen de derivadas de \mathcal{X} ,

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\mathcal{X}, \quad (2.64)$$

con:

$$R_{ij}^\mathcal{X} = -2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \mathcal{X} - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^k \tilde{D}_k + 4\tilde{D}_i \mathcal{X} \tilde{D}_j \mathcal{X} - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^k \mathcal{X} \tilde{D}_k \mathcal{X}, \quad (2.65)$$

en donde \tilde{D} denota la derivada asociada con la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$. Restando las conexión de la métrica plana, $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, a la conexión en coordenadas curvilíneas $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{jk}^i$, obtenemos el tensor

$\tilde{\Delta}_{jk}^i$:

$$\tilde{\Delta}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i, \quad (2.66)$$

con lo cual podemos definir el vector $\tilde{\Delta}^i$ como:

$$\tilde{\Delta}^i = \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Delta}_{jk}^i - \tilde{\gamma}^{jk} \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i. \quad (2.67)$$

Utilizando estas nuevas variables, podemos escribir la expresión del escalar de Ricci para el caso de coordenadas curvilíneas:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{mn} \overset{\circ}{D}_m \overset{\circ}{D}_n \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_m \left(\overset{\circ}{D}_j \right) \tilde{\Delta}^m + \tilde{\Delta}^m \tilde{\Delta}_{(ij)m} + 2 \tilde{\Delta}^{mn} \left(\overset{\circ}{D}_j \right)_{mn} + \tilde{\Delta}_i^{mn} \tilde{\Delta}_{mnj}, \quad (2.68)$$

en donde se utilizó $\overset{\circ}{D}$ para denotar la derivada covariante con respecto a la métrica plana. Como observación, si tomamos la métrica plana como la cartesiana, $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = 0$, (2.68) se reduce a la expresión para el tensor de Ricci en BSSN, como habíamos pedido que pasara. El análisis cuidadoso para llegar a la expresión para la ecuación de evolución del vector $\tilde{\Delta}^i$ se puede consultar en [8], en donde se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Delta}^i - \mathcal{L}_\beta \tilde{\Delta}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_k \beta^i - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2 \alpha \tilde{A}_{jk} \tilde{\Delta}_{jk}^i \\ &+ \alpha 2 \left(6 \tilde{A}^{ij} \partial \mathcal{X} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8 \pi \tilde{j}^i \right) \\ &+ \frac{(s-1)}{3} \left(\overset{\circ}{D}^i \left(\tilde{D}_m \beta^m \right) + 2 \tilde{\Delta}^i \tilde{D}_m \beta^m \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

El código numérico utilizado para las simulaciones de este trabajo funciona con el caso Lagrangiano, por lo cual tomaremos $s = 0$. Con esto obtenemos un sistema de ecuaciones análogo a BSSN, dependiente de $\tilde{\gamma}_{ij}$, \mathcal{X} , \tilde{A}_{ij} , K , $\tilde{\Delta}^i$:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}_{ij} = -\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m, \quad (2.70)$$

$$\partial_t \mathcal{X} - \mathcal{L}_\beta \mathcal{X} = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \tilde{D}_m \beta^m. \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\mathcal{X}} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{TF} \\ &+ \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \right) - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \tilde{D}_m \beta^m, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\partial_t K - \mathcal{L}_\beta K = -\nabla^2 \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\mathcal{E} + S), \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{\Delta}^i - \mathcal{L}_\beta \tilde{\Delta}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{\nabla}_k \beta^i - 2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2\alpha \tilde{A}_{jk} \tilde{\Delta}_{jk}^i \\
&\quad + 2\alpha \left(6\tilde{A}^{ij} \partial \mathcal{X} - \frac{2}{3} \gamma^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{j}^i \right) + \frac{1}{3} \left(\overset{\circ}{\nabla}^i \left(\tilde{\nabla}_m \beta^m \right) + 2\tilde{\Delta}^i \tilde{\nabla}_m \beta^m \right).
\end{aligned}
\tag{2.74}$$

2.4.1. Simetría esférica

Como se comentó en secciones anteriores, las simulaciones realizadas para este trabajo se realizaron bajo simetría esférica. Esto presenta la ventaja de que a pesar de estar trabajando con un campo tridimensional, las variables dinámicas dependen solo de la coordenada radial, lo cual permite que el código usado sea en una sola dimensión. Otro punto importante de trabajar con simetría esférica es que muchos fenómenos estelares, como las estrellas, agujeros negros y el colapso gravitacional, se pueden aproximar muy bien como cuerpos simétricamente esféricos. El estudio del colapso gravitacional en simetría esférica llevó a Choptuik a descubrir en [9] el fenómeno crítico en el colapso gravitacional, el cual, además de ser una de las primeras grandes contribuciones de la Relatividad Numérica, es un tema central de este trabajo.

La singularidad coordenada en el origen representa un problema al plantear sistemas con simetría esférica, esto a causa de la falta de regularidad en las cantidades geométricas, puesto que muchos términos dependen inversamente del radio. Aunque la regularidad de la métrica garantiza en el caso analítico que dichos términos se cancelan en el origen, los términos que dependen de $(1/r)$ no se cancelan con exactitud en el caso numérico, lo cual lleva a soluciones no convergentes en el origen, las cuales pierden estabilidad en pocos pasos de tiempo. Este problema será tratado más adelante, una vez que se desarrollen las ecuaciones BSSN en el caso particular de la simetría esférica.

2.4.1.1. Ecuaciones BSSN en simetría esférica

Para reescribir las ecuaciones BSSN en simetría esférica, necesitamos partir de la métrica espacial en simetría esférica; la cual escribimos como:

$$dl^2 = e^{4\chi} (a(r, t) dr^2 + r^2 b(r, t) d\Omega^2), \tag{2.75}$$

con a y b funciones métricas positivas, \mathcal{X} el factor conforme discutido en la sección anterior, y $d\Omega^2$ el elemento de ángulo sólido, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. La métrica conforme asociada a este elemento de línea es:

$$\hat{\gamma}_{ab} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & r^2b & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin\theta)^2b \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Los determinantes de la métrica física y conforme son respectivamente:

$$\gamma = ab^2(r^4 e^{12\phi} \sin^2\theta), \quad (2.77)$$

$$\hat{\gamma} = ab^2(r^4 \sin^2\theta), \quad (2.78)$$

y el determinante de la métrica plana en coordenadas esféricas $\hat{\gamma}$, se obtiene tomando $a=b=1$, $\phi = 0$:

$$\hat{\gamma} = r^4 \sin^2\theta. \quad (2.79)$$

La condición inicial $\hat{\gamma}(t = 0) = \hat{\gamma}$ nos obliga a tomar inicialmente ($ab^2 = 1$). En el caso Lagrangiano ($s = 0$) el determinante $\hat{\gamma}$ no evoluciona, lo que nos lleva a que los componentes geométricos a y b no son independientes. En el caso Euleriano ($s = 1$), el determinante sí evoluciona, y la evolución de la cantidad ab^2 es controlada por el vector desplazamiento.

Al trabajar en simetría esférica, el vector desplazamiento β^i solo tiene componente radial, $\beta^i = (\beta^r, 0, 0, 0)$. Aquí es conveniente calcular la divergencia conforme del vector de desplazamiento, pues es usada en el resto de las ecuaciones BSSN:

$$\begin{aligned} \hat{D}_m \beta^m &= \partial_r \beta^r + \beta^r \left(\frac{\partial_r a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) \\ &= \partial_r \beta^r + \beta^r \left(\frac{\partial_r(ab^2)}{2ab^2} + \frac{2}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Al estar trabajando en simetría esférica, el vector $\tilde{\Delta}^i$ solo tiene componente radial $\tilde{\Delta}^r$:

$$\tilde{\Delta}^r = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right]. \quad (2.81)$$

La ecuación de evolución para el factor conforme \mathcal{X} (2.71) en simetría esférica es entonces:

$$\partial_t \mathcal{X} = \beta^r \partial_r \mathcal{X} + \frac{s-1}{6} \tilde{D}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K, \quad (2.82)$$

con $\tilde{D}_m \beta^m$ dado por (2.80). Las ecuaciones de evolución para los componentes de la métrica conforme son:

$$\partial_t a = \beta^r \partial_r a + 2a \partial_r \beta^r - \frac{2}{3} (s-1) a \tilde{D}_m \beta^m - 2\alpha a A_a, \quad (2.83)$$

$$\partial_t b = \beta^r \partial_r b + 2b \frac{\beta^r}{r} - \frac{2}{3} (s-1) b \tilde{D}_m \beta^m - 2\alpha b A_b, \quad (2.84)$$

donde definimos $A_a := \tilde{A}_r^r$ y $A_b := \tilde{A}_\theta^\theta$ siguiendo la notación utilizada en [8]. Las ecuaciones de evolución se simplifican significativamente al usar los componentes mixtos de la curvatura extrínseca sin traza, en particular, al \tilde{A}_{ij} ser un tensor sin traza tenemos:

$$A_a + 2A_b = 0. \quad (2.85)$$

Por otro lado, como $\tilde{A}_r^r = \tilde{\gamma} \tilde{A}_{rr} = \gamma A_{rr} = A_r^r$, y lo mismo para los componentes angulares, los componentes mixtos conforme y físicos, de tensores de segundo grado son los mismos.

Utilizando (2.73) llegamos a la siguiente expresión para la evolución de la traza curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \beta^r \partial_r K - D_m D^m \alpha \left(A_a^2 + 2A_b^2 + \frac{1}{3} K^2 \right) \\ &+ 4\pi \alpha (\mathcal{E} + S_a + 2S_b), \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde igual que con la parte sin traza de la curvatura extrínseca, S_a y S_b representan los componentes mixtos del tensor de esfuerzos:

$$S_a := S_r^r, \quad (2.87)$$

$$S_b := S_\theta^\theta, \quad (2.88)$$

y el laplaciano físico está dado por:

$$D\alpha^2 = D_i D^i \alpha = \frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2\partial_r \mathcal{X} - \frac{2}{r} \right) \right]. \quad (2.89)$$

La condición (2.85) implica que solo es necesario encontrar la ecuación de evolución de una de las dos componentes de la curvatura mixta, en este caso utilizaremos la ecuación de evolución para el componente radial A_a :

$$\begin{aligned} \partial_t A_a &= \beta^r \partial_r A_a - \left(D^r D_r \alpha - \frac{1}{3} D_i D^i \alpha \right) + \alpha \left(R_r^r - \frac{1}{3} R \right) \\ &\quad + \alpha K A_a - 16\pi\alpha(S_a - S_b), \end{aligned} \quad (2.90)$$

con $D^r D_r \alpha$ definida de la siguiente forma:

$$D^r D_r \alpha = \frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r a}{2a} + 2\partial_r \mathcal{X} \right) \right], \quad (2.91)$$

y con el componente radial mixto del tensor de Ricci y su traza:

$$\begin{aligned} R_r^r &= -\frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} - a\partial_r \tilde{\Delta}^r - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^r \partial_r a + \frac{\partial_r a}{rb} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \left(1 - \frac{r\partial_r b}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\partial_r^2 \mathcal{X} - 2\partial_r \mathcal{X} \left(\frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} + \frac{\partial_r^2 b}{b} - a\partial_r \tilde{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 + \frac{2}{rb} \left(3 - \frac{a}{b} \right) \partial_r b \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) + 8(\partial_r^2 \mathcal{X} + (\partial_r \mathcal{X})^2) - 8\partial_r \mathcal{X} \left(\frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} \right) - \frac{2}{r} \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Reescribiendo la ecuación de evolución (2.74) para el caso de simetría esférica obtenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{\Delta}^r &= \beta^r \partial_r \tilde{\Delta}^r - \tilde{\Delta}^r \partial_r \beta^r + \frac{1}{a} \partial_r^2 \beta^r + \frac{2}{b} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \\
&+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} \partial_r (\tilde{\nabla}_m \beta^m) + 2 \tilde{\Delta}^r \tilde{\nabla}_m \beta^m \right) - \frac{2}{a} (A_a \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_a) \\
&+ 2\alpha \left(A_a \tilde{\Delta}^r - \frac{2}{rb} (A_a - A_b) \right) \\
&+ \frac{2\alpha}{a} \left[\partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \mathcal{X} + (A_a - A_b) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_b}{b} \right) - 8\pi j_r \right].
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Donde j_r es el componente radial de la densidad de momento covariante física descrito en la sub-sección de constricciones de Einstein. Finalmente, resulta conveniente reescribir las constricciones Hamiltoniana (2.21) y de momento (2.24) en el caso de simetría esférica:

$$\mathcal{H} = R - (A_a^2 + 2A_b^2) + \frac{2}{3}K - 16\pi\rho, \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
M^r &= \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \mathcal{X} \\
&+ (A_a - A_b) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r b}{b} \right) - 8\pi j_r = 0.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

2.5. Regularización

Es necesario mencionar que en las ecuaciones arriba descritas existen algunos términos que se vuelven singulares al ser evaluados en el origen ($r = 0$). Por este motivo, es necesario imponer condiciones de regularidad para las variables dinámicas. Esto se logra imponiendo las siguientes condiciones para valores de r pequeños ($r \sim 0$):

$$\begin{aligned}
\alpha &\sim \alpha^0 + \mathcal{O}(r^2), & \beta^r &\sim \mathcal{O}(r^2), \\
a &\sim a^0 + \mathcal{O}(r^2), & b &\sim b^0 + \mathcal{O}(r^2), \\
A_a &\sim A_a^0 + \mathcal{O}(r^2), & A_b &\sim A_b^0 + \mathcal{O}(r^2), \\
\tilde{\Delta}^r &\sim \mathcal{O}(r),
\end{aligned}$$

con $\alpha^0, a^0, b^0, A_a^0$ y A_b^0 funciones temporales que no dependen de r . Estas condiciones pueden imponerse fácilmente en la simulación numérica, al tomar una malla (sobre la

cual se llevarán a cabo los pasos temporales de la evolución por métodos numéricos) que no pasa sobre el origen, *i.e.* utilizar una malla que empiece en $r = -\Delta_r/2$, con Δ_r el tamaño del paso radial, y obteniendo datos en un punto ficticio de frontera en $r = -\Delta_r/2$, lo cual permite garantizar que α, a, b, A_a, A_b sean funciones pares en $r = 0$.

Tomar solamente estas condiciones no garantiza el buen comportamiento del sistema de ecuaciones cerca del origen; por ejemplo, la definición para $\tilde{\Delta}^r$ (2.81) depende de $(1 - a/b)/r$. De igual manera, las variables que dependen de $(1 - a/b)/r^2$, como lo son el componente radial del tensor de Ricci (2.92) y su traza (2.93), también presentan este problema. Esto se regula al pedirle al espacio-tiempo que sea localmente plano en el origen; es decir, debemos poder escribir la métrica de la siguiente manera para puntos cerca del origen:

$$dl_{R\sim 0}^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2), \quad (2.97)$$

con R la coordenada radial propia que mide la distancia desde el origen. Tomando la transformación de coordenadas de R a r , la métrica toma la forma:

$$dl_{R\sim 0}^2 = \left(\frac{dR}{dr}\right)_{r=0}^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)], \quad (2.98)$$

lo cual implica:

$$a^0 = b^0, \quad A_a^0 = A_b^0. \quad (2.99)$$

Esto lleva a las las siguientes condiciones para valores pequeños de r :

$$a - b \sim \mathcal{O}(r^2), \quad K_A - K_b \sim \mathcal{O}(r^2). \quad (2.100)$$

El tratar de imponer todas estas condiciones numéricamente no es sencillo. Por un lado, el sistema cuenta con tres condiciones de frontera en $r = 0$: 1) a y b iguales, 2) las derivadas de a y b desaparecen, y 3) A_a igual a A_b , impuestas por las condiciones de regularidad de paridad y las condiciones de planaridad local, mientras que se cuenta con solo dos variables libres, de manera que el sistema está sobre-determinado. Analíticamente, si las condiciones se satisfacen inicialmente, se mantendrán así en todo tiempo. Numéricamente, esto ya no es así, debido a los errores introducidos en las aproximaciones por diferencias finitas de las ecuaciones, por lo que se puede esperar que, a pesar de que inicialmente una condición se satisfaga, los errores crezcan y el código falle conforme la evolución avance.

Para resolver este problema, siguiendo la notación de [8], se introduce una variable

auxiliar λ definida como:

$$\lambda := \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b}\right) \quad (2.101)$$

La condición de regularidad de planitud local, implica que el comportamiento de λ cerca del origen debe ser:

$$\lambda \sim \lambda^0 + \mathcal{O}(r^2). \quad (2.102)$$

Continuando el análisis realizado en [8], introducimos una segunda variable auxiliar A_λ , definida como:

$$A_\lambda := \frac{1}{r^2}(A_a - A_b), \quad (2.103)$$

la cual debe de tener un comportamiento tipo:

$$A_\lambda \sim A_\lambda^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.104)$$

otra vez, por la condición de regularidad de planitud local.

La introducción de λ y A_λ por sí mismas no resuelve que el problema esté mal planteado. Para resolver esto es necesario tomar a λ y A_λ como variables independientes, con sus respectivas ecuaciones de evolución:

$$\partial_t \lambda = \beta^r \partial_r \lambda + \left[\beta^r \lambda - \frac{a}{b} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{a} \right) \right] + \frac{2\alpha a}{b} A_\lambda. \quad (2.105)$$

Esta ecuación se deduce a partir de la definición de λ y las ecuaciones de evolución de a (2.83) y b (2.84).

Para la ecuación de evolución de A_λ , partimos de la relación:

$$A_\lambda = \frac{3A_a}{2r^2}, \quad (2.106)$$

la cual, a su vez, obtenemos a partir de la condición inicial $A_a + 2A_b = 0$. Esta relación, implica que, para que A_λ sea regular, tenemos que pedir $A_a \sim \mathcal{O}(r^2)$ cerca del origen ($A_a^0 = A_b^0 = 0$). Esto, junto con la ecuación de evolución de A_a (2.90), nos lleva a la ecuación de evolución para A_λ . El álgebra de este análisis se tiene que hacer con cuidado, particular para mantener los términos que se comportan mal de manera individual. Este

análisis se puede revisar en [8], en el cual se llega a la siguiente ecuación de evolución:

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\lambda &= \beta^r \partial_r A_\lambda + 2A_\lambda \frac{\beta^r}{r} \\
&\quad - \frac{1}{rae^{4\mathcal{X}}} \left[\partial_r \left(\frac{\partial_r \alpha}{r} \right) - \frac{\partial_r \alpha}{2r} \left(\frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} \right) + 8\partial_r \mathcal{X} \right] \\
&\quad - \frac{\alpha}{rae^{4\mathcal{X}}} \left[2\partial_r \left(\frac{\partial_r \mathcal{X}}{r} \right) - \frac{\partial_r \mathcal{X}}{r} \left(\frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} \right) + 4\partial_r \mathcal{X} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{rae^{4\mathcal{X}}} \left[\frac{b}{2a} \partial_r^2 \lambda + \frac{a}{r} \partial_r \left(\frac{\tilde{D}^r}{r} \right) + \frac{\partial_r \lambda}{r} \left(1 + \frac{2b}{a} - \frac{rb}{2} \tilde{D}^r \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial_r a}{ar^2} \left(\frac{3}{4} \frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} \right) - \frac{\lambda}{r} \left(b\tilde{D}^r + 2\frac{\partial_r b}{b} \right) + \frac{b}{a} \lambda^2 \Big] + \alpha K A_\lambda - 8\pi \alpha S_\lambda,
\end{aligned} \tag{2.107}$$

donde $S_\lambda := (S_a - S_b)/r^2$.

Teniendo expresiones para las evoluciones de λ y A_λ , podemos reescribir las ecuaciones BSSN en términos de λ y A_λ . En particular la expresión para $\tilde{\Delta}^r$ queda:

$$\tilde{\Delta}^r = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2r\lambda \right]. \tag{2.108}$$

Mientras que R_r^r , R y M^r se reescriben como:

$$\begin{aligned}
R_r^r &= -\frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} - a\partial_r \tilde{\Delta}^r - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^r \partial_r a + \frac{\partial_r a}{rb} + 2\lambda \left(1 + \frac{r\partial_r b}{b} \right) \right. \\
&\quad \left. + 4\partial_r^2 \mathcal{X} - \partial_r \mathcal{X} \left(\frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{ae^{4\mathcal{X}}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} + \frac{\partial_r^2 b}{b} - a\partial_r \tilde{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 + \frac{2}{rb} \left(3 - \frac{a}{b} \right) \partial_r b \right. \\
&\quad \left. + 4\lambda + 8 \left(\partial_r^2 \mathcal{X} + (\partial_r \mathcal{X})^2 \right) - 8\partial_r \mathcal{X} \left(\frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} \right) - \frac{2}{r} \right].
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Por último, la constricción de momento toma la forma:

$$\begin{aligned}
M^r &= \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \mathcal{X} \\
&\quad + A_\lambda \left(2r + r^2 \frac{\partial_r b}{b} \right) - 8\pi j_r = 0.
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Al final de cada capítulo, comenzando con éste, se incluirá una tabla listando las variables importantes que se utilizaron, así como su significado; ésto para facilitar el entendimiento físico y no solo matemático de los análisis realizados:

Variables capítulo 2	
g_{ij}	La métrica 4-dimensional
γ_{ij}	La métrica 3-dimensional
τ	El tiempo propio
α	El lapso
β^i	El vector de corrimiento
n^ν	El 4-vector normal a las hiper-superficies
P^μ	El operador proyección
$K_{\mu\nu}$	La curvatura extrínseca
\mathcal{L}_n	La derivada de Lie con respecto a n
$G_{\mu\nu}$	El tensor de curvatura
$R_{\mu\nu}$	El tensor de Ricci
R	El escalar de Ricci
$T_{\mu\nu}$	El tensor de energía-momento
\mathcal{E}	La densidad de energía para un observador euleriano
\mathcal{H}	La constricción Hamiltoniana
M^r	La constricción de momento
j^α	La densidad de momento
δ_{ij}	La métrica de Minkowski
$\hat{\gamma}_{ij}$	La métrica 3-dimensional conforme
ψ	El factor conforme
A^{ij}	la parte sin traza del tensor de curvatura
$\tilde{\gamma}_{ij}$	La métrica conforme en coordenadas curvilíneas
\mathcal{X}	Factor conforme curvilíneo
S_b^a	Tensor de esfuerzos

Capítulo 3

Campo de Proca

3.1. Teoría Maxwell-Proca

Durante la segunda mitad del siglo XIX, la formulación de la ecuación de Lorentz junto con las ecuaciones de Maxwell proporcionaron un modelo para explicar el origen y propagación de los campos eléctricos y magnéticos. A raíz de ello, se llegó a uno de los fundamentos de la física teórica y se entendió a la luz como un fenómeno electromagnético. No es de sorprender entonces, que desde que los fundamentos del electromagnetismo fueron propuestos, se ha buscado generalizar la teoría de Maxwell. Entre los modelos que buscan esto, está el modelo aquí estudiado, el modelo Maxwell-Proca.

En 1936, en su artículo: “Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs” [2], el físico rumano Alexandru Proca propuso una ecuación de onda relativista para un campo vectorial masivo, análoga a la ecuación de Klein-Gordon [10]. En su trabajo subsecuente [11], A. Proca describió que su propuesta se puede interpretar como un modelo para un portador de fuerza con masa y espín-1, *i.e.* un fotón con masa (similar al modelo de Maxwell, el cual describe un campo Abelian¹ vectorial sin masa).

¹Definición de campo Abelian: En teoría de norma de campos, se denomina norma al conjunto de formalismos matemáticos que regulan los grados de libertad redundantes en el Lagrangiano de un sistema físico. Las transformaciones posibles entre normas forman un grupo de Lie, al cual se le llama grupo de simetrías, o grupo de norma. Asociado al grupo de Lie, existe una álgebra de Lie conformada por los generadores del grupo. Este grupo de generadores tiene asociado un campo de norma. A los sistemas físicos cuyo Lagrangiano tiene asociado un grupo de simetrías conmutativo, se dice que son una teoría de norma Abeliana, y el campo asociado al sistema es un campo Abelian.

La hoy denominada ecuación de Proca:

$$\nabla_\mu W^{\mu\nu} = \mu^2 \mathcal{X}^\nu, \quad (3.1)$$

con:

$$W_{\mu\nu} = \nabla_\mu \mathcal{X}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{X}_\mu, \quad (3.2)$$

se utilizan hoy en día para describir a los bosones masivos Z y W del modelo estándar de partículas.

A partir de la publicación original de Proca, múltiples modelos de campos vectoriales relativistas fueron propuestos, entre ellos el modelo de Bopp-Podolsky [12], Born-Infeld [13], y el modelo de Heisenberg-Euler[14], siendo el primero un modelo para campo vectorial Abeliano $\mathbf{U}(1)$ invariante con estructura cinética modificada. El modelo de Born-Infeld trata con la simetría de norma, a diferencia del modelo no-lineal de Heisenberg-Euler, el cual logra resolver los infinitos en la auto-energía del electrón [15].

Estos modelos, junto con intentos más recientes, reciben el nombre de teorías de Proca generalizadas o Galileones vectoriales². Las ecuaciones Proca generalizadas están definidas por una densidad Lagrangiana de un campo Abeliano con espín-1, el cual vive en un espacio de Minkowski. Este Lagrangiano puede ser dividido en:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(0)} + \hat{\mathcal{L}}, \quad (3.3)$$

con $\mathcal{L}_{(0)}$ una función arbitraria suave construida a partir del campo y su intensidad dual. De esta manera, generaliza tanto el modelo original de Proca, como sus variantes no lineales. Por otro lado, $\hat{\mathcal{L}}$ contiene auto-interacciones compuestas de contracciones del campo y sus derivadas.

Para el caso de Maxwell y el caso de Proca, las densidades Lagrangianas toman las siguientes formas:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu} \bar{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mu^2 \mathcal{X}_\mu \bar{\mathcal{X}}^\mu, \quad (3.5)$$

²Los Galileones son campos escalares pertenecientes a la teoría de cuerdas. Las teoría de Proca reciben el nombre de Galileones vectoriales ya que en el límite de desacoplamiento, la dinámica del modo longitudinal coincide con la dinámica del Galileon escalar [16]

respectivamente, en donde $A_{\mu\nu}$ representa la intensidad del campo de Maxwell, $\bar{W}_{\mu\nu}$ la intensidad del campo de Proca, y la constante μ parametriza la masa. Si tomamos $\mu = 0$ en el Lagrangiano de Proca, este se reduce al caso de Maxwell. Gracias a esto, de manera similar al caso de la ecuación de Klein-Gordon, la teoría de Proca se puede ver como la teoría de Maxwell con la adición términos asociados a la masa. Esto resulta ventajoso, ya que, además de ya ser mucho más estudiado en la literatura, resulta mas sencillo puesto que los términos que dependen de la masa en el campo de Proca, no están presentes en el caso de Maxwell. Con esto se puede utilizar al caso de Maxwell como base para adaptar las ecuaciones de campo de Proca a un sistema BSSN con simetría esférica, como se verá más adelante en este capítulo.

3.1.1. Campo de Maxwell

Como se comentó anteriormente, aunque el campo de Maxwell no entra en los temas de interés de este trabajo, resulta muy útil escribir las ecuaciones de Maxwell en 3+1, pues nos sirve como guía para el caso de Proca. Como es de esperarse, las ecuaciones de evolución para el campo electromagnético están formuladas en términos del campo magnético y eléctrico medidos por un observador Euleriano con 4-velocidad n^μ [17]:

$$E^\mu := -n_\nu F^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

$$B^\mu := -n_\nu F^{*\mu\nu}, \quad (3.7)$$

con el tensor de Faraday definido por:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.8)$$

y su dual:

$$F^{*\mu\nu} := -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (3.9)$$

con $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico :

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ es una permutación par de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{si } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ es una permutación non de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Al proyectar la ecuaciones de Maxwell covariantes:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\nu, \quad (3.11)$$

con j^μ la densidad de corriente eléctrica:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (3.12)$$

y el dual:

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (3.13)$$

a la hiper-superficie, y utilizando la descomposición 3+1 [18], obtenemos:

$$F^{\mu\nu} = {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\rho} B_\rho + n^\mu E^\nu - E^\mu n^\nu, \quad (3.14)$$

$$F^{*\mu\nu} = {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\rho} E_\rho + n^\mu E^\nu - E^\mu n^\nu, \quad (3.15)$$

las constricciones para el valor inicial del campo magnético y eléctrico respectivamente:

$$D_i E^i = 4\pi \rho_e, \quad (3.16)$$

$$D_i B^i = 0, \quad (3.17)$$

donde $\rho_e = -n_\mu j^\mu$ es la densidad de carga eléctrica medida por un observador Euleriano. Las ecuaciones de evolución para el campo eléctrico y magnético, las podemos obtener al proyectar las ecuaciones de Maxwell correspondientes en la dirección normal a las hiper-superficies:

$$\frac{d}{dt} E^i = (D \times NB)^i - \alpha K E^i - 4\pi N {}^{(3)}j_e^i, \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} B^i = (D \times NE)^i - NK B^i, \quad (3.19)$$

donde, siguiendo la notación utilizada en [18], ${}^{(3)}j_e^i := \gamma_\mu^i j^\mu$ es la densidad de corriente medida por un observador Euleriano. El rotacional operando en un vector v^i que está definido de la siguiente manera $(D \times v^i) := \epsilon^{imn} D_m v_n$, con $\epsilon^{imn} := n_\mu \epsilon^{\mu imn}$ el tensor de Levi-Civita en la hiper-superficie espacial. El tensor de energía-momento para el campo electromagnético es [17]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{2}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right]. \quad (3.20)$$

Al utilizar la descomposición (3.14), para la expresión anterior, obtenemos:

$$F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} = -(E_{\mu}E_{\nu} + B_{\mu}B_{\nu}) + B^2h_{\mu\nu} + E^2n_{\mu}n_{\nu} + 2E^{\rho}B^{\sigma}{}^{(3)}\epsilon_{\rho\sigma}{}_{(\mu}n_{\nu)}. \quad (3.21)$$

Usando la descomposición 3+1 para un tensor 2-0 arbitrario $H^{a\nu}$:

$$H^{\mu\nu} = {}^{(3)}H^{\mu\nu} + n^{\mu}{}^{(3)}H^{\perp\nu} + {}^{(3)}H^{\mu\perp}n^{\nu} + H^{\perp\perp}n^{\mu}n^{\nu}, \quad (3.22)$$

con:

$${}^{(3)}H^{\mu\nu} := h_{\rho}^{\mu}h_{\sigma}^{\nu}H^{\rho\sigma}, \quad (3.23)$$

$${}^{(3)}H^{\perp\nu} := -n_{\rho}h_{\sigma}^{\nu}H^{\rho\sigma}, \quad (3.24)$$

$${}^{(3)}H^{a\perp} := -n_{\rho}h_{\sigma}^{\mu}H^{\sigma\rho}, \quad (3.25)$$

$$H^{\perp\perp} := n_{\mu}n_{\nu}H^{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

obtenemos:

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{E}n_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}J_{\nu} + J_{\mu}n_{\nu} + S_{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

en donde:

$$\mathcal{E} := n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2), \quad (3.28)$$

$$J_{\mu} := -h_{\mu}^{\rho}n^{\sigma}T_{\sigma\rho} = \frac{1}{4\pi}{}^{(3)}\epsilon_{\mu\rho\sigma}E^{\rho}B^{\sigma}, \quad (3.29)$$

$$S_{\mu\nu} := h_{\mu}^{\rho}h_{\nu}^{\sigma}T_{\rho\sigma} = \frac{1}{8\pi}[h_{\mu\nu}(E^2 + B^2) - 2(E_{\mu}E_{\nu} + B_{\mu}B_{\nu})]. \quad (3.30)$$

Donde podemos identificar \mathcal{E} como la densidad de energía del campo electromagnético, j_a la densidad de momento, ambas medidas por un observador Euclidiano, y $S_{\mu\nu}$ el tensor de estrés. Dado que la traza del tensor de energía-momento T_a^a (3.27) desaparece, encontramos que:

$$S = \mathcal{E}, \quad (3.31)$$

siendo $S = S_{\mu}^{\mu}$ la traza del tensor de estrés.

Con este análisis, podemos obtener las siguientes expresiones para las constricciones Hamiltoniana y de momento:

$${}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\mathcal{E}, \quad (3.32)$$

$$D_jK^{ij} - D^iK = 8\pi j^i. \quad (3.33)$$

Partiendo del tensor de Faraday para un potencial 4-vectorial A^a , podemos definir un escalar potencial 3+1 Φ a través de:

$$\Phi := -n_\mu A^\mu, \quad (3.34)$$

y un potencial 3 vectorial ${}^{(3)}A^a$:

$${}^{(3)}A^\mu := h^\mu_\nu A^\nu, \quad (3.35)$$

de tal manera que:

$${}^{(3)}A^\mu = A^\mu - n^\mu \Phi, \quad {}^{(3)}A_i = A_i. \quad (3.36)$$

Tras proyectar la expresión del tensor de Faraday en términos de la descomposición en la hiper-superficie, obtenemos las siguientes relaciones entre con el potencial 3+1 y los campos eléctrico (E_i) y el magnético (B_i):

$$\frac{d}{dt} {}^{(3)}A_i = \alpha E_i - D_i(\alpha \Phi) \quad (3.37)$$

$$B^i = {}^{(3)}\epsilon^{imn} \partial_m {}^{(3)}A_n = (D \times {}^{(3)}A)^i. \quad (3.38)$$

Por último, notemos que si tomamos como variables independientes a ${}^{(3)}A^i = h^{ij} {}^{(3)}A_j$ y E^i , con ecuaciones de evolución (3.18) y (3.37), y definimos el campo magnético con (3.38), obtenemos un sistema de ecuaciones de evolución de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio con una sola restricción (la eléctrica), pues la restricción magnética (3.17) resulta ahora trivial. Notemos que, a pesar de que el sistema que obtuvimos resulta más sencillo, no nos es posible evolucionar el potencial escalar Φ si no tomamos una condición de norma, como sucede en el caso de Maxwell, que imponemos la norma de Lorenz:

$$\frac{d}{dt} \Phi + \mathcal{L}_\alpha \Phi = -D_m (\alpha {}^{(3)}A^m) + \alpha K \Phi \quad (3.39)$$

3.2. Campo de Proca

El análisis para encontrar las ecuaciones de evolución, restricciones y cantidades conservadas necesarias para realizar las simulaciones fue llevado a cabo en dos partes. En la primera se utilizó el tensor de energía-momento para el campo de Proca para obtener las ecuaciones 3+1 de Proca y, en la segunda, se reescribieron dichas ecuaciones para el caso de simetría esférica.

Este trabajo utiliza como modelo de estudio el campo Abelianos masivo real de espín-1, o campo de Proca real, cuyo Lagrangiano se pueden expresar como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} [W_{\mu\nu}W^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + 2\mu^2 X_\mu\bar{X}^\mu], \quad (3.40)$$

junto con la acción descrita por el Lagrangiano:

$$S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}d^4x, \quad (3.41)$$

A diferencia de como fue propuesta originalmente, en donde se utiliza un valor de $\frac{1}{4}$, aquí se utiliza una constante de parametrización $\frac{1}{8\pi}$. Esto no modifica los resultados y se hace para que el lagrangiano sea compatible con el código numérico que se utilizará para las simulaciones en secciones subsecuentes.

Partiendo de la acción para un campo vectorial X_μ de masa μ :

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{4}W^{\mu\nu}W_{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2}X_\nu X^\nu \right), \quad (3.42)$$

en donde $W_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu - \nabla_\nu X_\mu$, el principio de mínima acción resulta en las ecuaciones de movimiento [19]:

$$\nabla_\nu W^{\mu\nu} + \mu^2 X^\mu = 0, \quad (3.43)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = 2W_{\mu\rho}W_\nu^\rho - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}W^{\rho\sigma}W_{\rho\sigma} + \mu^2(2X_\mu X_\nu - g_{\mu\nu}X^\rho X_\rho) \quad (3.44)$$

A diferencia del caso de Maxwell, en el cual la condición del Lorenz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.45)$$

es impuesta al sistema, de la ecuación (3.43) ahora obtenemos que la condición:

$$\nabla^\mu X_\mu = 0, \quad (3.46)$$

no es una elección y tiene que ser cumplida a lo largo de la evolución.

3.2.1. Campo de Proca como problema de Cauchy

Para poder modelar el campo de Proca necesitamos reescribir las ecuaciones (3.43) y (3.44) como un problema de Cauchy, para lo cual partimos de la métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ y de la métrica 3-dimensional γ_{ij} de las foliaciones, a partir de las cuales podemos definir el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(\alpha^2 - \beta^i\beta_i)dt^2 + \gamma_{ij}\beta^i dt dx^j + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.47)$$

donde α y β^i denotan el lapso y el vector desplazamiento, de acuerdo a lo descrito en el capítulo 2. El campo de Proca es dividido por una descomposición 3+1 en dos partes: la parte escalar \mathcal{X}_ϕ y el potencial 3-vectorial \mathcal{X}_i :

$$\mathcal{X}_\phi = -n^\mu \mathcal{X}_\mu, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{X}_i = \gamma_i^\mu X_\mu. \quad (3.49)$$

De manera análoga al campo de Maxwell, introduciremos un campo eléctrico y uno magnético [19]:

$$E_i = \gamma_i^\mu W_{\mu\nu} n^\nu \quad (3.50)$$

$$B_i = \epsilon^{ijk} D_j \mathcal{X}_k. \quad (3.51)$$

Con $E_\mu n^\mu = B_\mu n^\mu = 0$ por definición. A partir de estas definiciones podemos recuperar el tensor $W_{\mu\nu}$:

$$W_{\mu\nu} = n_\mu E_\nu - E_\nu E_\mu + D_\mu \mathcal{X}_\nu - D_\nu \mathcal{X}_\mu, \quad (3.52)$$

siendo D_μ la derivada covariante con respecto a la 3-métrica.

Como se discutió en el capítulo 2, para poder modelar por completo la dinámica del campo es necesario obtener una ecuación de evolución para la curvatura extrínseca, para lo cual necesitamos sustituir el tensor de energía-momento para el campo de Proca, el cual se encuentra en la parte derecha de las ecuaciones de Einstein (3.44):

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} [2W_{\mu\rho} W_\nu^\rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} W^{\rho\sigma} W_{\rho\sigma} + \mu^2 (2X_\mu X_\nu - g_{\mu\nu} X^\rho X_\rho)], \quad (3.53)$$

en las expresiones para ρ (2.2) y S_{ij} (2.3), y así obtener la expresión de dichas cantidades

en el caso del campo de Proca:

$$\rho = \frac{1}{8\pi}[(E^2 + B^2) + \mu^2(\mathcal{X}_\phi^2 + A^2)], \quad (3.54)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{8\pi}[\gamma_{ij}(E^2 + B^2) - 2(E_i E_j + B_i B_j) + \mu^2(2\mathcal{X}_i \mathcal{X}_j - \gamma_{ij}(\mathcal{X}^2 - \mathcal{X}_\phi^2))]. \quad (3.55)$$

Al substituir (3.54) y (3.55) en (2.28), obtenemos la ecuación de evolución dinámica para la curvatura extrínseca en el caso del campo de Proca:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha(R_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + K K_{ij}) + \mathcal{L}_\beta K_{ij} \\ & + 2\alpha(E_i E_j - \frac{1}{2}\gamma_{ij} E^k E_k + B_i B_j - \frac{1}{2}\gamma_{ij} B^k B_k - \mu^2 \mathcal{X}_i \mathcal{X}_j). \end{aligned} \quad (3.56)$$

La ecuación de evolución para el potencial 3-vectorial \mathcal{X}_i se puede obtener a partir de las las ecuaciones (3.43) y (3.44), con lo cual obtenemos que el potencial 3-vectorial evoluciona de la siguiente manera:

$$\partial_t \mathcal{X}_i = -\alpha(E_i + D_i \mathcal{X}_\phi) - \mathcal{X}_\phi D_i \alpha + \mathcal{L}_\beta \mathcal{X}_i, \quad (3.57)$$

La ecuación de evolución del componente escalar \mathcal{X}_ϕ se obtiene a partir de la condición de Lorenz (3.46):

$$\partial_t \mathcal{X}_\phi = -\mathcal{X}^i D_i \alpha + \alpha(K \mathcal{X}_\phi - D_i \mathcal{X}_i) + \mathcal{L}_\beta \mathcal{X}_\phi, \quad (3.58)$$

Por último, al proyectar el campo Eléctrico E_i en las hiper-superficies, obtenemos sus ecuaciones de evolución :

$$\partial_t E^i = \alpha(K E^i + \mu^2 \mathcal{X}^i) + \epsilon^{ijk} B_j D_k \alpha + \mathcal{L}_\beta E^i. \quad (3.59)$$

La expresión para la constricción Hamiltoniana se obtiene al substituir (3.54) en la expresión general para la constricción Hamiltoniana (2.21):

$$\mathcal{H} \equiv R - K_{ij} K^{ij} + K^2 - 2(E^i E_i + B^i B_i + \mu^2(\mathcal{X}_\phi + \mathcal{X}_i \mathcal{X}^i)) = 0. \quad (3.60)$$

De manera similar, la expresión para la constricción de momento se encuentra al

substituir la densidad de momento para el campo de Proca:

$$j^i = \frac{1}{4\pi}(\epsilon_{jk}^i E^j B^k + \mu^2 \mathcal{X}_\phi \mathcal{X}^i), \quad (3.61)$$

en la ecuación para la constricción de momento (2.24), obteniendo:

$$\mathcal{M}_i \equiv D^j K_{ij} - D_i K - 2(\epsilon_{ijk} E^j B^k + \mu^2 \mathcal{X}_\phi \mathcal{X}_i) = 0. \quad (3.62)$$

La equaccion 3.61 se obtiene al substituir el tensor de energía-momento del campo de Proca (3.53) en la expresion para la densidad de momento (2.2).

Al trabajar con un campo con un componente eléctrico, tenemos que pedirle al sistema que además satisfaga la constricción de Gauss:

$$\mathcal{E} \equiv D_i E^i + \mu^2 \mathcal{X}_\phi = 0. \quad (3.63)$$

Las expresiones anteriores, junto con la ecuación de la métrica 3-dimensional (2.14), nos dan un sistema tipo ADM para el campo de Proca. Como se discutió con anterioridad, el sistema ADM no está bien planteado en el sentido hiperbólico, por lo que es necesario aplicarle una transformación conforme al sistema para llevarlo a un sistema tipo BBSN bien planteado.

3.2.1.1. Descomposición conforme

Para poder llevar el sistema de ecuaciones (2.14), (3.56), (3.57), (3.58), (3.59), (3.60), (3.61) y (3.63) a un sistema bien planteado, usaremos la siguiente descomposición conforme :

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \hat{\gamma}_{ij}, K^{ij} = \psi^{-10} \hat{A}^{ij} + \frac{1}{3} \psi^{-4} \hat{\gamma}_{ij} K, E^i = \psi^{-6} \hat{E}^i, \mathcal{X}_\phi = \psi^{-6} \hat{\mathcal{X}}_\phi \quad (3.64)$$

con lo cual las constricciones se reducen a:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \hat{\nabla} \psi - \frac{\psi}{8} \hat{R} + \frac{1}{8\psi^7} \hat{A}^{ij} \hat{A}_{ij} - \frac{\psi^5}{12} K^2 + \frac{\mu^2}{4\psi^7} (\hat{\mathcal{X}}_\phi^2 + \psi^8 \hat{\gamma}^{ij} \mathcal{X}_i \mathcal{X}_j), \\ & + \frac{1}{4\psi^3} \hat{E}_i \hat{E}^i + \frac{1}{4\psi^3} \hat{D}^j \mathcal{X}^i (\hat{D}_j \mathcal{X}_i - \hat{D}_i \mathcal{X}_j) \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\mathcal{M}_i = \hat{D}^j \hat{A}_{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \hat{D}_i K + 2 \hat{E}^j (\hat{D}_j \mathcal{X}_i - \hat{D}_i \mathcal{X}_j) - 2 \mu^2 \hat{\mathcal{X}}_\phi \mathcal{X}_i, \quad (3.66)$$

$$\mathcal{E} = \hat{D}_i \hat{E}^i - \mu^2 \hat{\mathcal{X}}_\phi = 0. \quad (3.67)$$

Para simplificar el sistema de ecuaciones parciales descrito por (3.65), (3.66) y (3.67), se asumirá que al inicio de la evolución se cumplen las siguientes condiciones:

1) La métrica conforme es plana,

$$\hat{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}, \quad (3.68)$$

2) El espacio-tiempo tiene simetría temporal al inicio:

$$\hat{A}_{ij} = 0, \quad (3.69)$$

3) La traza del tensor de curvatura es nula,

$$K = 0, \quad (3.70)$$

4) El potencial 3-vectorial es inicialmente nulo,

$$\mathcal{X}_i = 0, \quad (3.71)$$

5) Por último:

$$\hat{E}^i = -\delta^{ij} \partial_j V, \quad (3.72)$$

Con V un potencial auxiliar. Utilizando estas suposiciones, el sistema de constricciones se ve reducido a:

$$\mathcal{H} = \hat{\Delta} \psi + \frac{1}{4\psi^3} \delta^{ij} \partial_i V \partial_j V + \frac{\mu_v^2}{4\psi^7} \hat{\mathcal{X}}_\phi^2 = 0, \quad (3.73)$$

para la restricción Hamiltoniana y:

$$\mathcal{E} = \hat{\Delta} V - \mu^2 \hat{\mathcal{X}}_\phi = 0, \quad (3.74)$$

para la restricción de Gauss. Al haber tomado $\hat{A}_{ij} = 0$, la restricción de momento resulta trivial:

$$\mathcal{M}_i = 0. \quad (3.75)$$

3.2.1.2. Simetría esférica

Finalmente, para obtener el sistema de ecuaciones del campo de Proca en simetría esférica, es necesario eliminar la dependencia angular y tomar los términos angulares como nulos. Para esto, es necesario eliminar los componentes angulares del vector $\tilde{\Delta}$ de las constricciones (3.73) y (3.75), obtenemos:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{4\psi^3} (\partial_r V)^2 + \frac{\mu^2}{4\psi^7} \hat{\mathcal{X}}_\phi^2 = 0, \quad (3.76)$$

$$\mathcal{E} = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} - \mu^2 \hat{\mathcal{X}}_\phi = 0. \quad (3.77)$$

Similarmente, al eliminar la dependencia de las ecuaciones de evolución (3.57), (3.58) y (3.59), las componentes angulares de $\partial_t \mathcal{X}_i$ y $\partial_t E^i$ se eliminan, y solo las ecuaciones de evolución para \mathcal{X}_r , E^r y \mathcal{X}_ϕ son no triviales:

$$\partial_t \mathcal{X}_r = -\alpha(a\psi^4 E^r + \partial_r \mathcal{X}_\phi) - \mathcal{X}_\phi \partial_r \alpha + \beta^r \partial_r \mathcal{X}_r + \mathcal{X}_r \partial_r \beta^r, \quad (3.78)$$

$$\partial_t \mathcal{X}_\phi = -\frac{1}{a\psi^4} \mathcal{X}_r \partial_r \alpha + \alpha K \mathcal{X}_\phi - \frac{\alpha}{a\psi^4} [\partial_r \mathcal{X}_r - \mathcal{X}_r \left(\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2\partial_r \phi \right)] + \beta_r \partial_r \mathcal{X}_\phi, \quad (3.79)$$

$$\partial_t E^r = \alpha(K E^r + \mu^2 \frac{1}{a\psi^4} \mathcal{X}_r) + \beta^r \partial_r E^r - E^r \partial_r \beta^r. \quad (3.80)$$

Con esto, la densidad de energía (3.54), densidad de momento (3.61) y tensor de esfuerzos (3.55), quedan descritos solamente por los términos A , E^r , \mathcal{X}_r y \mathcal{X}_ϕ :

$$\rho = \frac{1}{8\pi} (a\psi^4 (E^r)^2 + \mu^2 (\mathcal{X}_\phi^2 + \frac{1}{a\psi^4} (\mathcal{X}_r)^2), \quad (3.81)$$

$$j_r = \frac{1}{4\pi} (\mu^2 \mathcal{X}_\phi \mathcal{X}_r), \quad (3.82)$$

$$S_r^r = \frac{1}{8\pi} [-a\psi^4 (E^r)^2 + \mu^2 (\frac{1}{a\psi^4} (\mathcal{X}_r)^2 + \mathcal{X}_\phi^2)], \quad (3.83)$$

$$S_\phi^\phi = S_\theta^\theta = \frac{1}{8\pi} [a\psi^4 (E^r)^2 - \mu^2 (\frac{1}{a\psi^4} (\mathcal{X}_r)^2 - \mathcal{X}_\phi^2)]. \quad (3.84)$$

Una vez mas, notemos que el único término de la densidad de momento que resulta no-nulo es el componente radial j^r , y sólo 3 de los 9 términos del tensor de esfuerzos

sobreviven en simetría esférica: S_r^r, S_ϕ^ϕ y S_θ^θ , siendo estos dos últimos iguales.

Variables capítulo 3	
$W_{\mu\nu}$	El potencial del campo de Proca
$A_{\mu\nu}$	El potencial del campo de Maxwell
E^μ	El campo eléctrico
B^μ	El campo magnético
$F_{\mu\nu}$	El Tensor de Faraday
j^μ	La densidad de corriente eléctrica
$F^{*\mu\nu}$	Dual del tensor de Faraday
j^i	La densidad de corriente eléctrica medida por un observador euleriano
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento
\mathcal{E}	La densidad de energía del campo electromagnético
j_a	La densidad de momento
$S_{\mu\nu}$	El tensor de estrés
Φ	Un escalar potencia
${}^{(3)}A^a$	El potencial vectorial
X_μ	Campo de Proca
\mathcal{X}_ϕ	La parte escalar del Campo de Proca
\mathcal{X}_i	El potencial 3-vectorial del campo de proca
\mathcal{H}	La constricción Hamiltoniana
\mathcal{M}_i	La constricción de momento
ϕ	El factor conforme
\hat{A}^{ij}	La parte sin traza de la curvatura extrínseca
K^{ij}	la curvatura extrínseca
$\hat{\gamma}_{ij}$	La métrica conforme
δ_{ij}	La métrica plana

Capítulo 4

Evolución del campo

En este capítulo se describirán los dos posibles estados finales de la evolución de un campo auto-gravitante, la dispersión y el colapso gravitacional. El primero ocurre cuando los datos iniciales para las ecuaciones de Einstein son lo suficientemente cercanos a la solución trivial; para que que estos generen un espacio-tiempo que evoluciona asintóticamente a un espacio de Minkowski. Por otro lado, el caso de colapso gravitacional ocurre cuando los datos iniciales generan un campo con la suficiente energía/materia, para que la fuerza gravitacional venza a las fuerzas repulsivas. Con esto, la evolución del campo resulta en la formación de un agujero negro, caracterizado por la presencia de un horizonte de eventos. Existe un tercer posible final para la evolución del campo, el cual consiste en una solución periódica. En este escenario, el campo permanece oscilando por un periodo de tiempo indefinido, impidiéndole a este que se disperse o forme un agujero negro. Este posible tercer final se discutirá brevemente en la sección siguiente.

La demostración matemática de los dos posibles finales a tratar en este trabajo fue realizada por el físico-matemático griego Demetrios Christodoulou en [20] y [21], en donde utiliza la masa de Bondi M_1 como elemento para determinar que tipo de final presentará el campo. Es importante recalcar que los análisis realizados en estos trabajos toman a un campo escalar sin masa como modelo, utilizando el sistema de coordenadas de Bondi, el cual, a diferencia del sistema de coordenadas usadas en este trabajo, permite calcular la masa total del espacio tiempo.

Dada la necesidad de utilizar el sistema de coordenadas de Bondi para realizar las

demostraciones matemáticas del colapso gravitacional y la dispersión, estas quedan fuera del enfoque principal de este trabajo. Por completez, en el apéndice A se podrá encontrar una versión resumida de los análisis realizados por D. Christendolu.

4.1. Comportamiento crítico

En la sección anterior se mencionó la necesidad de cierto nivel de energía/materia para que la evolución de un campo resulte en su colapso a un agujero negro. El físico canadiense Matthew W. Choptuik comenzó a estudiar este fenómeno para el caso del campo escalar sin masa [9],[22], y encontró que, dada una familia de datos iniciales $\mathcal{S}(p)$, para los cuales el parámetro p caracteriza la fuerza de auto-gravitación del campo, existe un parámetro crítico p^* , a partir del cual, los datos iniciales con $p > p^*$, resultan en un sistema cuya evolución colapsa en un agujero negro. Por otro lado, los datos iniciales sub-críticos, aquellos cuya p es menor a p^* , producen un sistema cuya evolución regresa a un espacio-tiempo plano.

Posteriormente, al estudiar el colapso gravitacional para el caso del campo no-Abeliano de Yang-Mills [23], M. Choptuik encontró familias de datos iniciales que presentaban un comportamiento crítico diferente al que se presentaba en el caso del colapso gravitacional para el caso del campo escalar sin masa. El campo de Yang-Mills es un campo utilizado en la teoría de norma para modelar la interacción de las partículas portadoras de la fuerza débil, la fuerza fuerte y la fuerza electromagnética. La descripción detallada del campo de Yang-Mills y sus características queda fuera del tema de este trabajo, ya que para fines del mismo, solo se utilizaran los resultados de la literatura para el colapso gravitacional de Yang-Mills para predecir el comportamiento de nuestras simulaciones.

Al nuevo tipo de comportamiento crítico M. Choptuik lo llamó comportamiento crítico tipo I, y al comportamiento que había encontrado con anterioridad lo llamó comportamiento crítico II, en analogía las transiciones de fase de primer y segundo grado en sistemas en mecánica estadística, respectivamente.

La principal característica que diferencia al comportamiento tipo I, del comportamiento tipo II radica en que, en familias de datos iniciales $\mathcal{S}(p)$ que presentan comportamiento tipo I, existe una masa mínima para los agujeros negros en la transición de fase

no-agujero-negro/agujero-negro, mientras que las familias de soluciones $\mathcal{S}(p)$, que presentan comportamiento tipo II generan agujeros negros de masa infinitesimal conforme $|p * -p| \rightarrow 0$.

Se puede determinar con cierto grado de precisión, el tipo de comportamiento crítico que presentará una familia $\mathcal{S}(p)$. Para esto, es necesario comparar extensión radial λ del campo inicial con la masa μ asociada a la longitud de onda de Compton del campo escalar. Para las familias de datos iniciales en las cuales $\lambda > \mu$, se puede esperar que presenten un comportamiento crítico tipo I, mientras que las familias de datos iniciales con $\lambda < \mu$ presentarán un comportamiento crítico tipo II [24].

En la siguiente sección se tratarán con más detalle el comportamiento del colapso crítico tipo I para el caso del campo escalar con masa y el campo de Yang-Mills, y el tipo II para el caso del campo escalar sin masa y el campo de Yang-Mills. Posteriormente se describirá el comportamiento crítico entre estos dos tipos. A pesar de no ser un campo Abelian como lo es el campo de Proca, el fenómeno de colapso crítico del campo de Yang-Mills es uno de los casos más estudiado en la literatura, además de presentar un comportamiento crítico similar al campo de Proca [25], por lo que servirá como un punto de comparación para nuestro análisis en el siguiente capítulo.

4.1.1. Características generales del colapso crítico tipo II

El comportamiento tipo II, además de caracterizarse por tener una transición de fase sin-agujero-negro/con-agujero-negro continua, presenta una relación de escalamiento con respecto a cantidades invariantes. La relación de escalamiento se refiere a la propiedad, de que, al comparar la gráfica de la evolución de una cantidad invariante por un periodo de tiempo geométrico T_0 con la gráfica de evolución de la misma cantidad, pero con un periodo de tiempo geométrico $T_0 + \delta T_0$, resultarán similares, salvo por un factor de escalamiento e^Δ , con una Δ dependiente del campo. Conforme la solución se acerque a la solución crítica exacta, el número de estos “ecos” aumenta, el siguiente eco será apreciable, al dejar que la evolución avance un periodo T_0/e^Δ adicional, y tomamos nuevamente la escala e^Δ , y así sucesivamente. La solución crítica exacta es imposible de encontrar, puesto que requeriría contar con precisión infinita, pero se puede conjeturar que la solución exacta presenta un número infinito de ecos.

La Figura 4.1, tomada de la referencia [9], muestra este fenómeno en una familia de datos iniciales para el campo escalar sin masa. La gráfica muestra la cantidad $X(r, t) = \sqrt{2\pi} \frac{r}{a} \frac{\partial \phi}{\partial r}$, con ϕ el potencial escalar del campo y a el coeficiente geométrico de la métrica en simetría esférica. La gráfica se muestra en escala logarítmica con coordenadas (ρ, τ) donde:

$$\rho \equiv \ln(rk) \equiv \ln r + k', \quad (4.1)$$

con $k' = \ln k$ una constante que depende de la familia de datos iniciales, utilizada para normalizar la escala, y:

$$\tau \equiv \ln[k(T * _0 - T_0)] \equiv \ln(T * _0 - T_0) + k', \quad (4.2)$$

con $T * _0$ un tiempo central finito arbitrario.

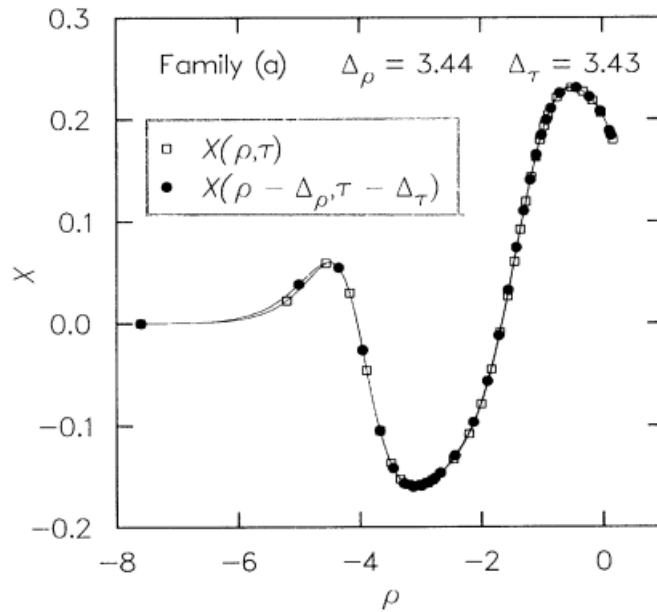


Figura 4.1: Figura tomada de [9], donde se muestra el $X(\rho, \tau)$ tomado para un tiempo central T_0 , marcada con cuadrados. La gráfica marcada con cuadros representa la evolución de la misma variable, pero para un tiempo central $T_0 + e^\Delta$, con una escala de e^Δ , en este caso particular $e^\Delta \approx 30$.

Estudiar familias de datos iniciales $\mathcal{S}(p > p^*)$, para los cuales, por definición, hay formación de agujero negro, para p cercanas a p^* , permite observar que la masa cuenta con un comportamiento de auto-simetría o de auto-simetría periódica, ambos tipos de comportamiento se explicarán mas adelante.

4.1.2. Características generales del colapso crítico tipo I

El comportamiento crítico tipo I se caracteriza por tener una masa mínima en el umbral de formación de agujero negro, o equivalentemente por un “brinco” en la función masa del agujero negro. Trabajos recientes han encontrado que las familias de soluciones que presentan un comportamiento crítico tipo I presentan soluciones estáticas (para el caso del campo de Yang-Mills) [26] o periódicas tipo oscilatorias (para el campo escalar con masa) [27], en la transición entre el régimen sub-crítico y el régimen super-crítico, *i.e.* $\mathcal{S}(p)$ con $p \approx p^*$. Este fenómeno explica la existencia en el brinco de masa, ya que en el momento en el cual la evolución colapsa a un agujero negro, este agujero negro se empieza a formar con la masa de la solución estática/periódica, a diferencia del comportamiento tipo II, en el cual el agujero no tiene una masa inicial a partir de la cual se forma.

Se conjetura que la masa mínima con la que se forma el agujero negro es proporcional al 1% de la masa de la solución estática en el caso de Yang-Mills [23]. Mientras que para el caso del campo escalar con masa, la solución crítica corresponde a solitones en la rama inestable de la curva masa contra el radio de Seidel y Suen [28]. En este caso, se estipula que la masa M_{BH} del agujero negro más pequeño que se puede formar es tal que $0.35 \leq \mu M_{BH} \leq 0.59$, donde μ es la masa del campo. Esta masa obtiene un límite superior de 0.59 ya que esta es la masa máxima que puede tener un solitón [29].

En el caso del campo de Yang-Mills para p cercanas a p^* conforme $|p - p^*| \rightarrow 0$, las soluciones tienden asintóticamente a la solución X_1 de Bartnik y McKinnon [26]. Estas evoluciones mantienen el comportamiento de X_1 por un tiempo central $T \approx -\lambda|p - p^*|$, después del cual el campo colapsa a un agujero negro en el caso de ser una solución súper-crítica, o se dispersa y obtenemos la solución plana en el caso de datos iniciales sub-críticos. La Figura 4.2 muestra la evolución del campo $W(r)$ para una familia de datos sub-crítica, en esta se puede observar como el campo $W(r)$ (línea sólida) inicialmente se aproxima a la solución estática (línea punteada) por un periodo de tiempo, para después dispersarse al infinito.

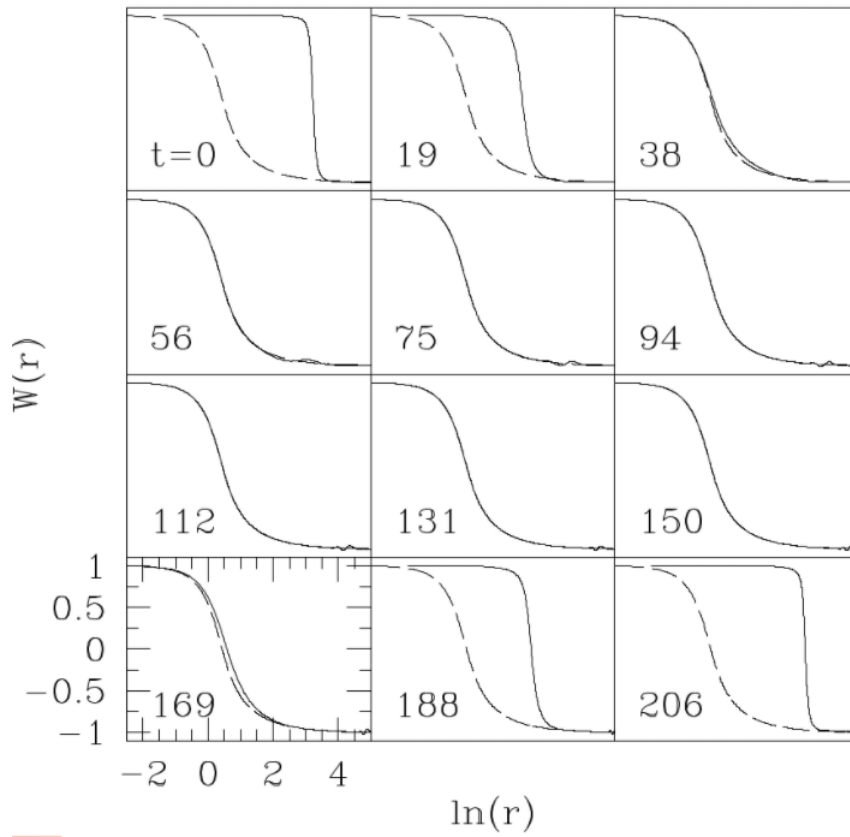


Figura 4.2: Figura tomada de [23], donde se muestra la evolución de datos iniciales sub-críticos para el caso del campo de Yang-Mills, para este caso particular $|p * -p| \approx 10^{-15}$

4.1.2.1. Transición entre colapsos críticos tipo I y tipo II

Posterior al descubrimiento del colapso típico I, M. Choptuik *et.al.* continuaron el estudio del colapso gravitacional del campo Yang-Mills, analizando el umbral de transición entre el colapso tipo I y II en el caso súper-crítico [30].

En la figura 4.3 se muestra el espacio fase de evoluciones para datos iniciales. Este espacio fase está dividido en 4 sectores: uno donde los datos iniciales resultan en una evolución que regresa a la solución plana; la sección A donde una familia de datos iniciales a-a' presenta un colapso típico tipo II; la sección B donde una familia de datos iniciales b-b' presenta un colapso típico tipo I y la sección C, el umbral de transición entre la sección A y B. Esta última sección, la C, será el tema que se discute a continuación.

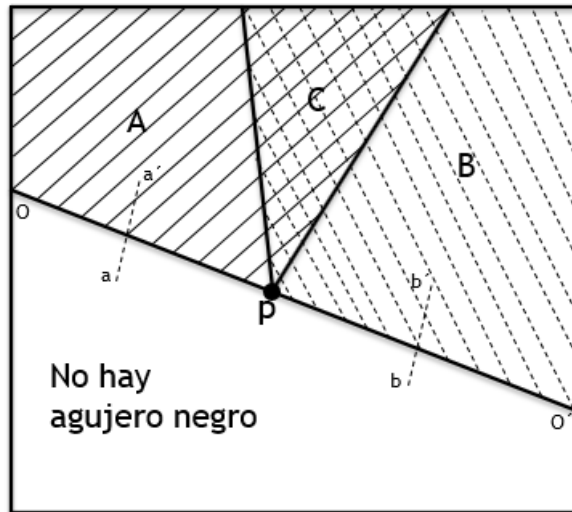


Figura 4.3: Representación esquemática del espacio fase de evoluciones posibles para datos iniciales. La línea crítica OO' marca el umbral de formación de agujeros negros.

En la sección C del mapa, los fenómenos críticos tipo I y tipo II coexisten, y las familias de datos iniciales, cuyos miembros súper-críticos están en esta sección, presentan características de ambos tipos, con un comportamiento que varía dependiendo del lado del umbral en que se encuentran.

De manera similar a las familias con comportamiento crítico tipo I, este nuevo tipo de comportamiento tiende asintóticamente a una solución estática, en este caso un agujero negro colorado $Y_1(4; r_h)$. Conforme se aproxima al valor crítico, esta solución estática se obtiene al resolver las ecuaciones estáticas de un agujero negro con color.

Las familias de soluciones del lado tipo II del umbral, al colapsar en un agujero negro, se forma un agujero negro de masa infinitesimal, con una parte del campo que se escapa formando una solución estática no trivial, la cual posteriormente se dispersa al infinito. Por otro lado, para familias de datos iniciales del lado tipo I del umbral, de igual manera, se forma un agujero negro de masa finita, y una porción de la masa que se escapa tienen una solución estática. Pero en este caso, después de un tiempo, la mayoría de la masa colapsa al agujero negro, y solo una pequeña porción escapa al vacío. La figura 4.4 muestra estos dos tipos de comportamiento en referencia a la solución estática intermedia.

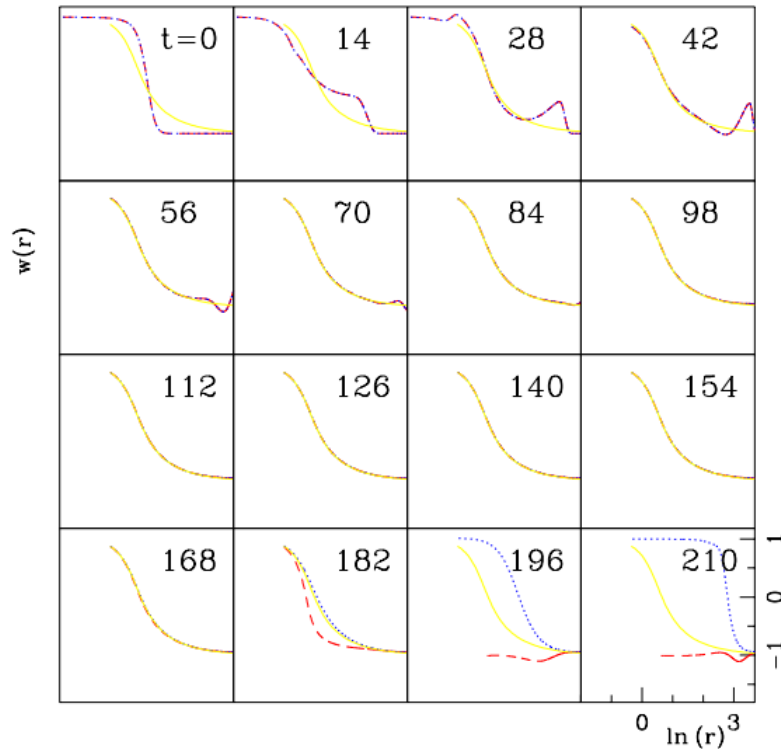


Figura 4.4: Imagen tomada de [30], en la cual se ve como la solución del lado tipo II (línea punteada) actúa de manera similar a la solución estática (línea continua/amarilla) y un periodo de tiempo después el campo restante escapa al vacío. En comparación, la solución del lado tipo I (línea en trazos/roja), una fracción del campo es atraída por el agujero negro.

4.2. Escalamiento

Los fenómenos de auto-escalamiento y auto-escalamiento periódicos descritos a continuación, fueron demostrados analíticamente por Choptuik, Koike, Hara y Adachi [31] y Gundlach [32] y Hold y Piran [33], respectivamente.

Para el caso de la auto-simetría se asume que la solución crítica exacta es auto-similar y tiene exactamente un modo inestable. Auto-similar se refiere a que la solución crítica tiene un vector de Killing homótico, *i.e.* un campo vectorial ξ tal que $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = -2g_{ab}$. Si tomamos coordenadas tales que $\partial/\partial t = \xi$, entonces el factor del modo inestable crece como e^{kt} , para k constante. Con esto se obtiene el comportamiento para la masa del

agujero negro descrito acuerdo a la siguiente ecuación [22]:

$$M_{BH} \sim c_f |\rho - \rho^*|^{\gamma_m}, \quad (4.3)$$

en donde las constantes c_f y γ_m dependen de la familia de datos iniciales. En un principio se pensaba que el exponente γ_m era universal, el cual M. Choptuik aproximó originalmente a $\gamma_m \approx 0.37$. La figura 4.5 muestra los resultados originales de Choptuik [9], en la cual se grafican 3 familias de datos iniciales, cada una de un campo inicial con forma de gaussiana, cuya energía está parametrizada por una de 3 variables, ϕ_0, δ, q . En la gráfica se puede ver como las tres familias $\mathcal{S}(\phi_0), \mathcal{S}(\delta)$ y $\mathcal{S}(q)$ tienen un comportamiento muy similar, todas con una pendiente aproximadamente de 0.37, de donde sigue que el resultado originalmente encontrado por M. Choptuik $\gamma \approx 0.37$. La universalidad de γ fue desmentida en trabajos posteriores, en particular al estudiar el colapso gravitacional para el caso del campo de Yang-Mills, Choptuik encontró, como se puede observar en la figura 4.6, que el valor de γ en este caso se aproxima a 0.20, con lo que quedó claro que el valor de γ varía dependiendo del campo con el que se trabaje.

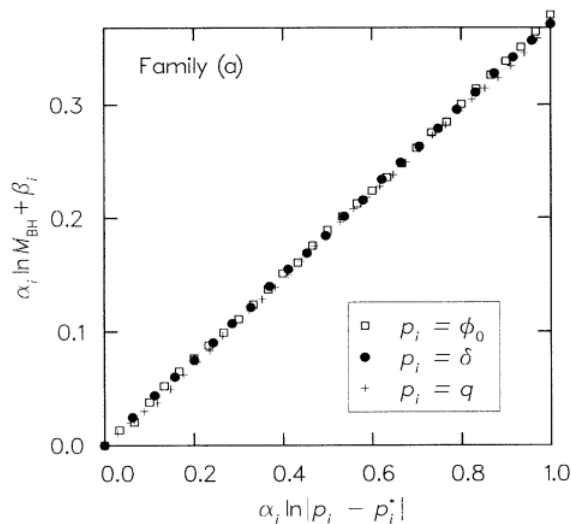


Figura 4.5: Figura tomada de [9], donde se muestra los resultados obtenidos originalmente por M. Choptuik. En su análisis, tomó como dato inicial un un potencial escalar de forma $\phi = \phi_0 r^3 \exp(-[(r - r_0)/\delta]^q)$. En la gráfica se muestra la relación entre la masa del agujero negro y la diferencia con el valor crítico del parámetro en cuestión, para tres familias de datos iniciales $\mathcal{S}(\phi_0), \mathcal{S}(\delta)$ y $\mathcal{S}(q)$ en el régimen súper-crítico. Las constante α_i y β_i son tales que normalizan los datos de la abscisa, y poner los datos del agujero negro de menor masa de cada familia en el origen.

De manera similar, en el caso de auto-simetría periódica, se asume que la solución crítica tiene un modo inestable y que existe un difeomorfismo ζ y un número Δ , tales que $\zeta^*(g_{ab}) = e^{-2\Delta}g_{ab}$. Si se escogen coordenadas tales que ζ sea la transformación $t \rightarrow t + \Delta$, manteniendo las demás coordenadas constantes; el modo inestable crece como $g(t)e^{kt}$, con $g(t)$ una función periódica y k una constante. Con esto se obtiene que, a diferencia de la auto-simetría, la masa no crece de manera lineal; y en su lugar crece de manera lineal (con pendiente $\gamma = 1/k$) más una función periódica de periodo $\Delta/2\gamma$. Hod y Piran [33] proponen que todo colapso gravitacional es en realidad auto-similar periódico, y lo que antes se consideraba auto-similar también tiene un comportamiento lineal más una función $g(t)$, solo que la amplitud de la función lineal es insignificante.

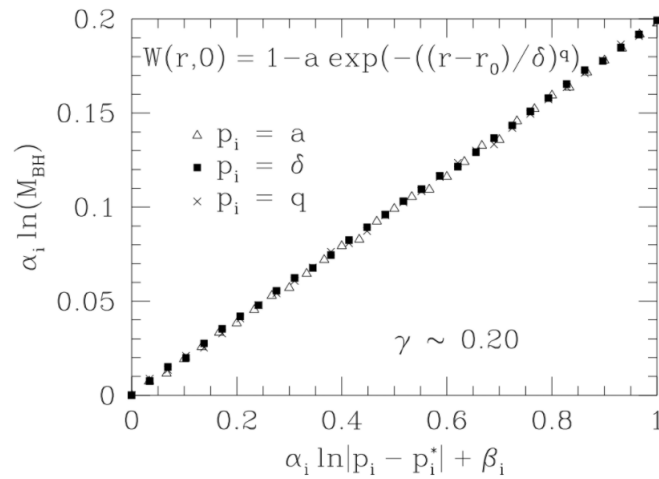


Figura 4.6: Figura tomada de [23], donde se muestran soluciones tipo II con escalamiento de masa. Cada marcador corresponde a una familia diferente de simulaciones súper-críticas. Para cada familia, las constantes α_i y β_i se tomaron para normalizar el rango de x y posicionar el agujero negro mas pequeño (el primer punto) en el origen. La familia con mayor variación de la pendiente tiene una $\gamma = 0.20$.

Dado que la única propiedad de la masa utilizada en las referencias [31], [32] y [33] para el análisis de auto-simetría, es que esta es una propiedad global del espacio tiempo con dimensiones de medida; es de esperarse que existan relaciones de escalamiento para otras cantidades que cumplan estas características, inclusive en casos donde no hay formación de agujero negro [34].

Para los casos sub-críticos, al evolucionar el campo, este comienza a colapsar por un periodo de tiempo, pero al no tener suficiente atracción gravitacional este se dispersa. Para

un observador posicionado en $r = 0$, el escalar de Ricci crece a lo largo de la evolución, llega a un máximo R_{max} y regresa a cero cuando el campo se dispersa. Este valor máximo que toma el escalar de Ricci R_{max} es característica puramente del espacio-tiempo, de dimensiones de medida⁻², por lo cual es de esperar que la curva $\ln R_{max}$ vs $\ln(p * -p)$ tenga una pendiente -2γ [25] (con γ la constante de escalamiento de masa encontrada por Choptuik) y una oscilación periódica $\Delta/(2\gamma)$ [34].

Capítulo 5

Implementación y Resultados

5.1. Ollinsphere

La evolución numérica de las ecuaciones ADM, junto con las ecuaciones de constricción Hamiltoniana, la constricción de Gauss y la de momento, desarrolladas en los capítulos 2 y 3, son realizadas utilizando el código numérico “OLLINSPHERE”. Este fue escrito por el grupo de Relatividad Numérica del instituto de Ciencias nucleares de la UNAM. El código fue desarrollado originalmente por M. Alcubierre y J. A. González (ver [35]).

OLLINSPHERE está escrito en el lenguaje de programación FORTRAN 90 y se divide en una serie de subrutinas las cuales pueden ser modificadas dependiendo del trabajo que se quiera realizar. Por ejemplo, el código cuenta con distintas condiciones de norma (lapso maximal, 1+log, etc.), así como también distintos tipos del vector de corrimiento. La modularidad del código permite escoger distintos tipos de materia como fuente del campo gravitacional, y además permite agregar nuevas subrutinas para evolucionar campos gravitacionales que no fueron considerados originalmente, como fue el caso de este trabajo, en el cual se le agregaron las ecuaciones de evolución desarrolladas en la sección (3.2), de tal manera que el código cuente con la posibilidad de evolucionar un campo de Proca real.

En la siguiente sección describiremos la implementación de la rutina para calcular datos iniciales en el caso del campo de Proca real. El código numérico resuelve las ecuaciones

ADM utilizando diferencias finitas centradas, a cuarto orden, en el espacio. Para la evolución numérica se utiliza el método de Runge-Kuta de orden 4. La regularización de las ecuaciones ADM, así como su hiperbolicidad se realizan según el procedimiento descrito en la sección 5.2.

Las variables principales que utiliza el código son:

1. Parte geométrica: α , β^r , a , b , A_a y A_b , Δ^r , n (número de pasos de tiempo).
2. Parte energía-materia: ϕ , a^r , η^r .

Por otro lado, los parámetros que se utilizan para definir a las familias $\mathcal{S}_*(p)$ son: p , r_o , σ , μ^2 .

Una vez introducidos los datos iniciales para las variables, tanto geométricas como de materia, el código calcula las fuentes de las ecuaciones de evolución, así como los términos de materia, el algoritmo para la obtención de las variables primitivas, etc. Luego avanza en un paso de tiempo, y así para cada paso de tiempo. Al finalizar, para cada variables deseadas, se almacenan los valores obtenidos a lo largo de la evolución. Todas las simulaciones utilizadas para este trabajo fueron llevadas a cabo en el cluster Tochtli, del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM.

5.2. Métodos numéricos

Para poder realizar el análisis descrito en la sección anterior, fue necesario resolver el sistema de ecuaciones (3.76 - 3.84). Para lograr esto, se asumió al potencial escalar conforme inicial, $\hat{\mathcal{X}}_\phi$, como dato inicial, para poder así resolver las demás ecuaciones. En la sección siguiente, se dará una expresión exacta para $\hat{\mathcal{X}}_\phi$, de manera que $\hat{\mathcal{X}}_\phi$ esté parametrizado por una sola variable p , de acuerdo a la disección que se llevó anteriormente.

Una vez que se cuenta con una expresión para $\hat{\mathcal{X}}_\phi$, el programa Ollinsphere, utiliza un método de inversión de matrices para poder resolver la constricción de Gauss (3.77) para la variable auxiliar V :

$$\mathcal{E} = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} - \mu^2 \hat{\mathcal{X}}_\phi = 0.$$

Por simplicidad, se tomó el término de masa μ , como unitario, $\mu = 1$.

Conocer el campo auxiliar V nos permite a su vez conocer el campo eléctrico conforme \hat{E}^i , ya que originalmente se utilizó el campo eléctrico conforme, para definir V en (3.72):

$$\hat{E}^i = -\delta^{ij}\partial_j V.$$

A su vez, conocer el campo auxiliar V permite resolver la constricción Hamiltoniana (3.76) para obtener el factor conforme ψ :

$$\mathcal{H} = \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{4\psi^3} (\partial_r V)^2 + \frac{\mu^2}{4\psi^7} \hat{\mathcal{X}}_\phi^2 = 0.$$

Al no conocer el valor del campo auxiliar V en el origen, no nos es posible utilizar el método de Runge-Kuta, o el método de inversión de matrices, como se hizo para el caso de la ecuación de la constricción de Gauss, por lo cual el código numérico utiliza el método de iteración de Newton-Raphson para resolver estas ecuaciones. Conocer al factor conforme ψ permite que recuperemos el campo eléctrico físico y el potencial escalar físico, a partir de las definiciones:

$$E^i = \psi^{-6} \hat{E}^i, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{X}_\phi = \psi^{-6} \hat{\mathcal{X}}_\phi. \quad (5.2)$$

Adicionalmente, como se tomó una métrica conformemente plana, conocer el factor conforme nos permite a su vez conocer la métrica física:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \hat{\gamma}_{ij} = \psi^4 \delta_{ij}. \quad (5.3)$$

Los valores para la traza del tensor de curvatura extrínseca K , y la parte del tensor de curvatura conforme \hat{A}^{ij} necesarios para resolver la ecuación de evolución del potencial vector \mathcal{X}_r , se obtienen a partir de la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (3.56) y de la descomposición conforme de York-Lichenerowicz, con la cual se definió originalmente a K y a \hat{A}^{ij} . Recordando del capítulo 3 que los valores de K y \hat{A}^{ij} se inician con un valor de cero, ya que se asume que al inicio de la simulación hay simetría temporal.

Con los valores de K y a \hat{A}^{ij} , el programa resuelve la ecuación de evolución del potencial vector \mathcal{X}_r (3.78), él cual es utilizado por el programa para resolver las ecuaciones de evolución para el potencial escalar (3.78) y el campo eléctrico (3.80).

Finalmente, con estos valores, se sustituyen y encuentran los valores para densidad de energía (3.54), densidad de momento (3.61) y tensor de esfuerzos (3.55):

$$\rho = \frac{1}{8\pi}(a\psi^4(E^r) + \mu^2(\mathcal{X}_\phi^2 + \frac{1}{a\psi^4}(\mathcal{X}_r)^2)), \quad (5.4)$$

$$j_r = \frac{1}{4\pi}(\mu^2\mathcal{X}_\phi\mathcal{X}_r), \quad (5.5)$$

$$S_r^r = \frac{1}{8\pi}[-a\psi^4(E^r)^2 + \mu^2(\frac{1}{a\psi^4}(\mathcal{X}_r)^2 + \mathcal{X}_\phi^2)], \quad (5.6)$$

$$S_\phi^\phi = S_\theta^\theta = \frac{1}{8\pi}[a\psi^4(E^r)^2 - \mu^2(\frac{1}{a\psi^4}(\mathcal{X}_r)^2 - \mathcal{X}_\phi^2)]. \quad (5.7)$$

5.3. Datos iniciales

Para todas las simulaciones usadas para este trabajo, se tomó un potencial escalar conforme inicial, $\hat{\mathcal{X}}_\phi$ tipo gaussiana, descrito por:

$$\hat{\mathcal{X}}_\phi = pe^{-\frac{(r-r_o)^2}{\sigma^2}}, \quad (5.8)$$

con p , r_o y σ constantes. Dejar fijas 3 de estas 4 variables nos permite generar familias de datos iniciales, las cuales estarán parametrizados por la variable que se tomo como libre. La variable σ , asociada con el “ancho” de la gaussiana, se utilizó para determinar las 9 familias de datos iniciales que se utilizaron para las simulaciones, estas familias reciben el nombre $\mathcal{S}_\sigma(p)$. Para todas las familias, se tomó que la gaussiana estuviera centrada en el origen, *i.e.* $r_0 = 0$. Esto reduce significativamente el tiempo de corrida de cada simulación. Finalmente, la variable p , asociada con la altitud de la gaussiana, se utilizó para parametrizar cada familia, para poder así encontrar el valor crítico p^* descrito en la sección de comportamiento crítico.

Como se comentó en la sección de comportamiento crítico, es de esperarse que la transición entre familias de datos tipo I y tipo II ocurra cuando la distribución de energía del campo radial λ sea similar a la masa del campo μ . En el caso de las familias de datos iniciales con las que se trabajó, al tener un campo con una distribución de energía inicial tipo gaussiana, y haber tomado una masa $\mu = 1$, la transición ocurrirá para $\sigma \approx 1$.

Por lo anteriormente expuesto, el objetivo inicial de este trabajo consistía en tomar las 9 familias, 4 de ellas $\mathcal{S}_{0.125}(p)$, $\mathcal{S}_{0.25}(p)$, $\mathcal{S}_{0.375}(p)$ y $\mathcal{S}_{0.5}(p)$ presentan un comportamiento crítico tipo II, 4 de ellas $\mathcal{S}_{1.25}(p)$, $\mathcal{S}_{1.5}(p)$, $\mathcal{S}_{1.75}(p)$ y $\mathcal{S}_{2.0}(p)$ presentan un comportamiento crítico tipo I; y la familia \mathcal{S}_1 presente características de transiciones entre el colapso tipo I y tipo II. Como se explicará con detalle más adelante, para obtener la resolución necesaria, fue necesario tomar el tamaño de la malla Δr muy pequeño, lo cual aumenta el número de pasos que tiene que llevar a cabo el programa, alargando el tiempo de cómputo. Adicionalmente, para mejorar la resolución, se utilizó la siguiente transformación para el radio:

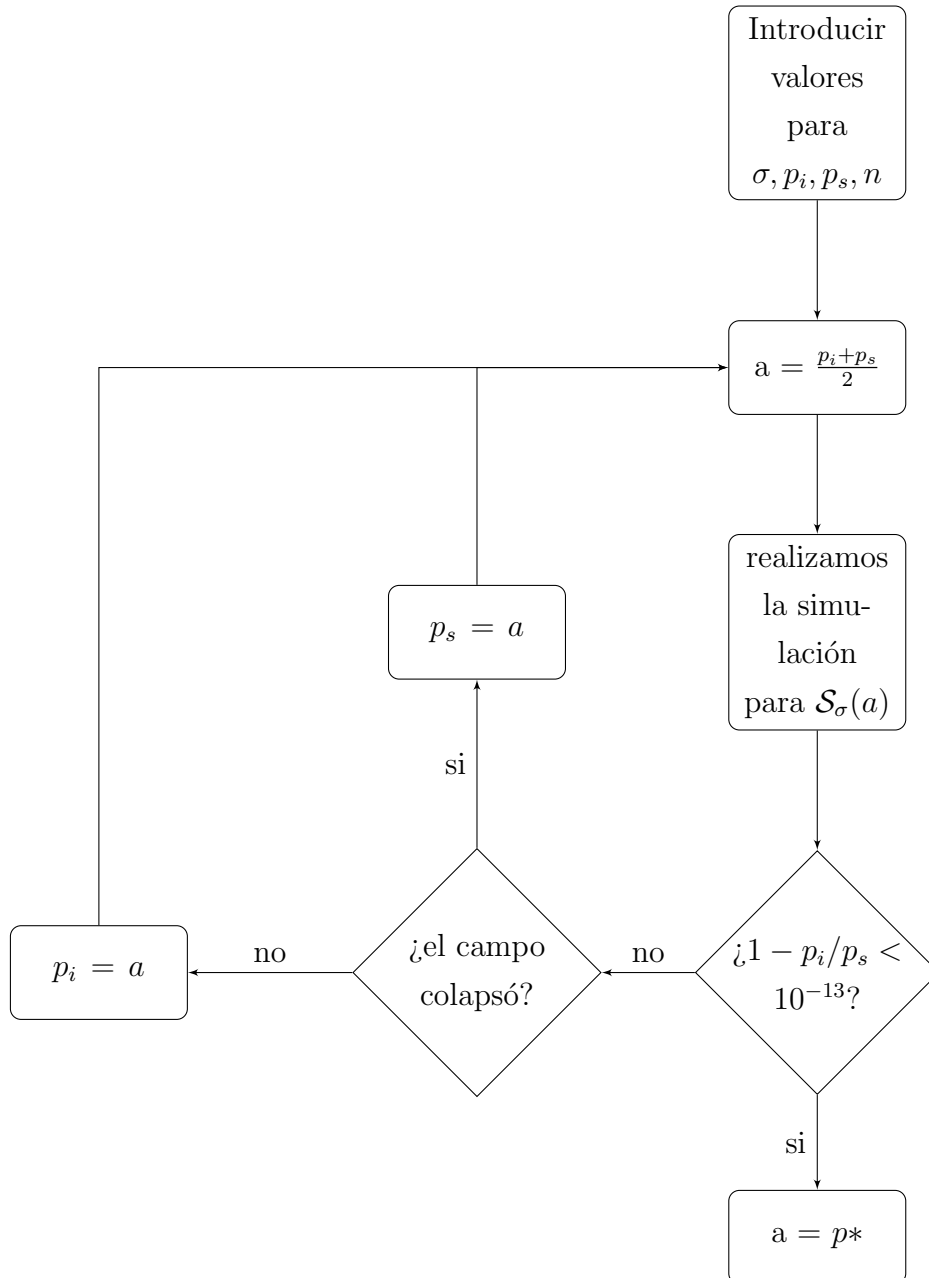
$$\frac{dr_{\tilde{r}}}{dr} = \frac{1}{1 + e^{\beta r^2} + \delta} \quad (5.9)$$

con \tilde{r} la coordenada radial original (con coeficientes métricos $a=b=1$) y r la nueva coordenada radial. La transformación radial toma las variables β y δ ; δ tiene que ser un valor positivo, el cual regula la resolución cerca del origen. β a su vez es un valor negativo, el cual regula que tan rápido la nueva coordenada radial se acerca a la coordenada radial usual. Al usar este radio transformado, el número n de pasos temporales necesarios para la evolución del campo aumenta conforme el ancho de la gaussiana que describe al campo inicial aumenta. Esto, junto con el tamaño tan pequeño de la malla hizo que los objetivos de este trabajo se tuvieran que modificar para solo estudiar el caso del colapso tipo II, a través de las familias $\mathcal{S}_{0.125}(p)$, $\mathcal{S}_{0.25}(p)$, $\mathcal{S}_{0.375}(p)$ y $\mathcal{S}_{0.5}(p)$; ya que el tiempo de cómputo necesario para las simulaciones de las familias con desviación estándar mayores o iguales a 1 resultaron demasiado extensos.

5.4. Simulaciones

Una vez que se escogieron las familias $\mathcal{S}(p)$ que se utilizaron en el trabajo, es necesario encontrar el valor crítico p^* para cada una de ellas. Para lograr esto se utilizó el siguiente algoritmo de búsqueda: Se introducen un valor n de pasos de tiempo que correrá la simulación, un valor p_i , el cual sabemos que garantiza que \mathcal{S}_{p_i} garantiza que se disperse el campo al de su evolución y un valor p_s , el cual sabemos que garantiza que \mathcal{S}_{p_s} se colapsa al final de su evolución. Para todas las familias se tomaron valores $p_s = 100$ y $p_i = 0.00000001$. Una vez que se cuenta con los valores p_s y p_i , se realiza una búsqueda por bipartición hasta encontrar el valor crítico p^* con la precisión deseada; en el caso de este trabajo se buscó el valor crítico con una precisión de trece cifras significativas. A

continuación se muestra un diagrama de flujo del algoritmo de bipartición que se utilizó para encontrar p^* en cada familia:



Para que el algoritmo anterior funcione, es necesario poder determinar si el resultado final de una simulación fue sub-crítica o súper-crítica. En este trabajo se utilizaron dos métodos para comprobar si se formó un agujero negro al final de la evolución. Para ambos métodos se vigila el valor de una de las siguientes variables, ya sea α en el origen de la coordenada geométrica ($r=0$), para el primer método, o el valor de la masa del horizonte

aparente, para el segundo método.

Este segundo método es posible de utilizar gracias a que el programa Ollinsphere cuenta con una subrutina para buscar horizontes aparentes a lo largo de la simulación; además la subrutina utiliza el área de dicho horizonte para encontrar la masa del agujero negro:

$$M_H = \left(\frac{A}{16\pi} \right)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Este método resulta sencillo de implementar, puesto que solo basta saber si al concluir la evolución el valor de la masa del horizonte aparente M_{ah} es distinto a cero. En caso de tener un valor distinto de cero para la masa del horizonte aparente, significa que al final de la simulación hay un horizonte aparente presente, *i.e.*, se formó un agujero negro. En la Figura 5.1 se gráfica el valor de M_{ah} contra el radio; donde se muestra que a partir de $r \approx 2.7$ se encuentra un horizonte aparente, y empieza a haber valores para la masa. Es importante observar, que el valor de M_{ah} no debería continuar aumentando después de haber encontrado un horizonte aparente. Este aumento continuo en la masa se debe a errores numéricos que ocurren en la simulación después de que el campo colapsa a un agujero negro; nos es posible obtener un valor aproximado de M_{ah} , al observar el valor que éste tiene en los pasos cercanos al horizonte aparente. Para observar el comportamiento de M_{ah} descrito por Choptuik ([9]), se requiere obtener M_{ah} con un grado de presión mayor al que actualmente se puede obtener utilizando código numérico Ollinsphere. Pese a esto, como se comentó en la sección (5.4), es posible realizar un análisis equivalente utilizando otras cantidades, como será en nuestro caso que utilizaremos el valor máximo del escalar de Ricci en el origen de coordenadas. El escalar de Ricci en el origen de coordenadas presenta la ventaja de que se puede medir en simulaciones sub-criticas, a diferencia de la masa del horizonte aparente, la cual solo existe después del colapso gravitacional.

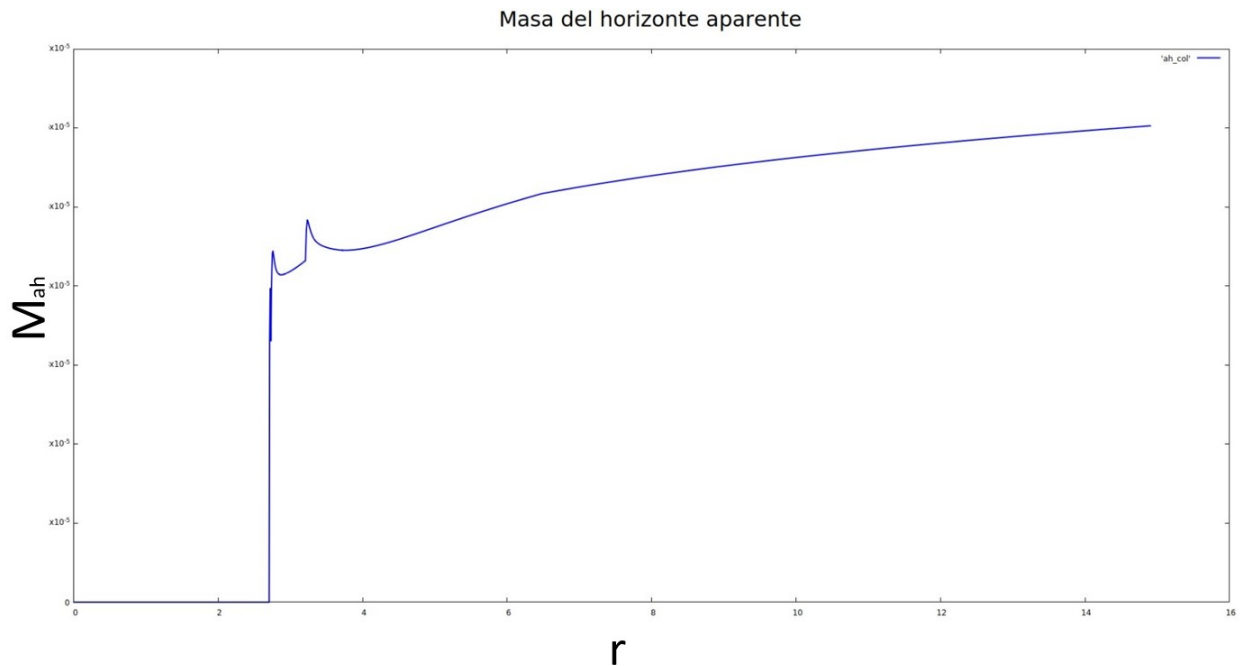


Figura 5.1: Esta figura muestra la gráfica de la masa del horizonte aparente en relación al radio de la simulación realizada para $\mathcal{S}_{0.25}(22.0398213858604)$, en la cual se encontró un horizonte aparente a partir del cual la masa del horizonte aparente comienza a aumentar, con lo que se asume que el campo colapsó y se formó un agujero negro. Es importante mencionar que el valor de la masa M_{ah} no debería continuar aumentando después del valor inicial. En esta imagen el continuo crecimiento del valor de la masa M_{ah} se debe a errores numéricos en la simulación.

Es importante mencionar que implementar solo este método no es suficiente, ya que existe la posibilidad de que el número de pasos de tiempo que se da para que el programa corra no sea el suficiente para que la simulación de un miembro súper-crítico de $\mathcal{S}_i(p^+)$ con $p^+ > p^*$ colapse a un agujero negro, por lo que, al final de la simulación la masa del horizonte aparente sigue siendo cero. Lo que lleva a la incorrecta conclusión de que $\mathcal{S}_i(p^+)$ es sub-crítico.

En el segundo método se evalúa el valor de α al final de la evolución. Existen tres posibles resultados para el valor de α en el origen al finalizar la simulación:

- 1. El valor de α regresa a 1.** En estos casos, como se muestra en la Figura 5.2, el valor de α regresa asintóticamente a 1, lo cual indica que el espacio-tiempo tiende asintóticamente a un espacio-tiempo plano.

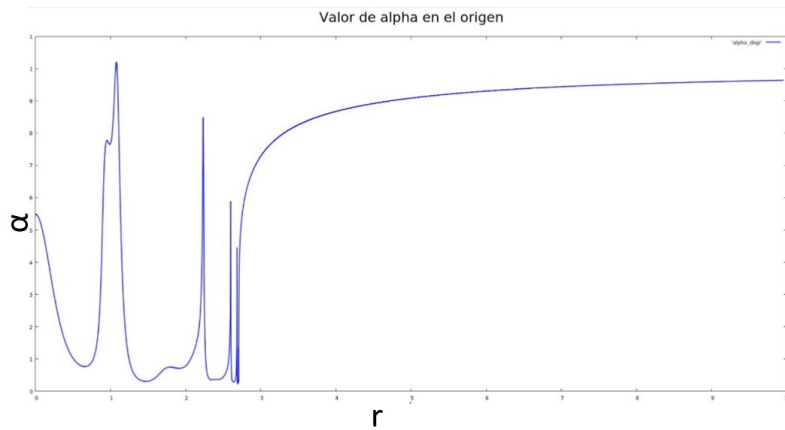


Figura 5.2: Esta figura muestra la gráfica del valor de α en el origen a lo largo de la simulación realizada para $\mathcal{S}_{0.25}(22.03982138464518)$. En esta gráfica se ve que el valor de α al final de la simulación tiene una tendencia asintótica a 1, con lo que se asume que el campo se dispersa y el espacio-tiempo regresa a Minkowski.

2. El valor de α tiende a 0. En estos casos, como se muestra en la Figura 5.3, el valor de α tiende a cero. Como se discutió en el capítulo 2, la norma que se utiliza en este trabajo, un valor de α igual a cero nos permite garantizar que se formó un agujero negro. Es importante mencionar que el valor de α nunca llega a ser exactamente cero, ya que en la zona cercana al horizonte, los gradientes de los valores α y $g_{rr}(A)$ crecen exponencialmente, generando valores no numéricos, por lo cual el programa se detiene.

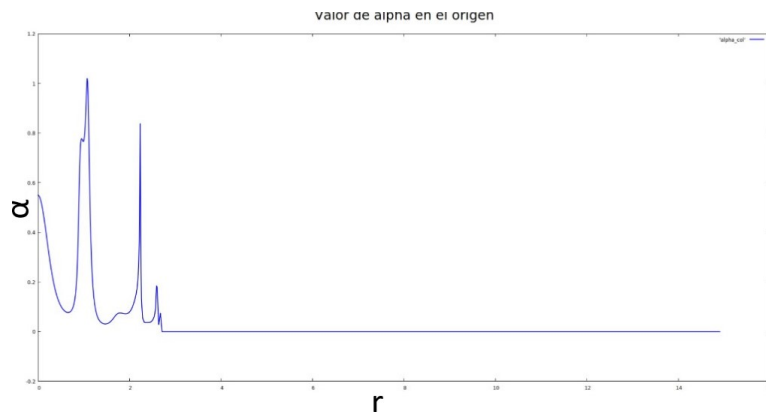


Figura 5.3: Esta figura muestra la gráfica del valor de α en el origen a lo largo de la simulación realizada para $\mathcal{S}_{0.25}(22.0398213858604)$. En esta gráfica se ve que el valor de α al final de la simulación llega a cero y permanece ahí. Con lo que el campo colapsó y se formó un agujero negro.

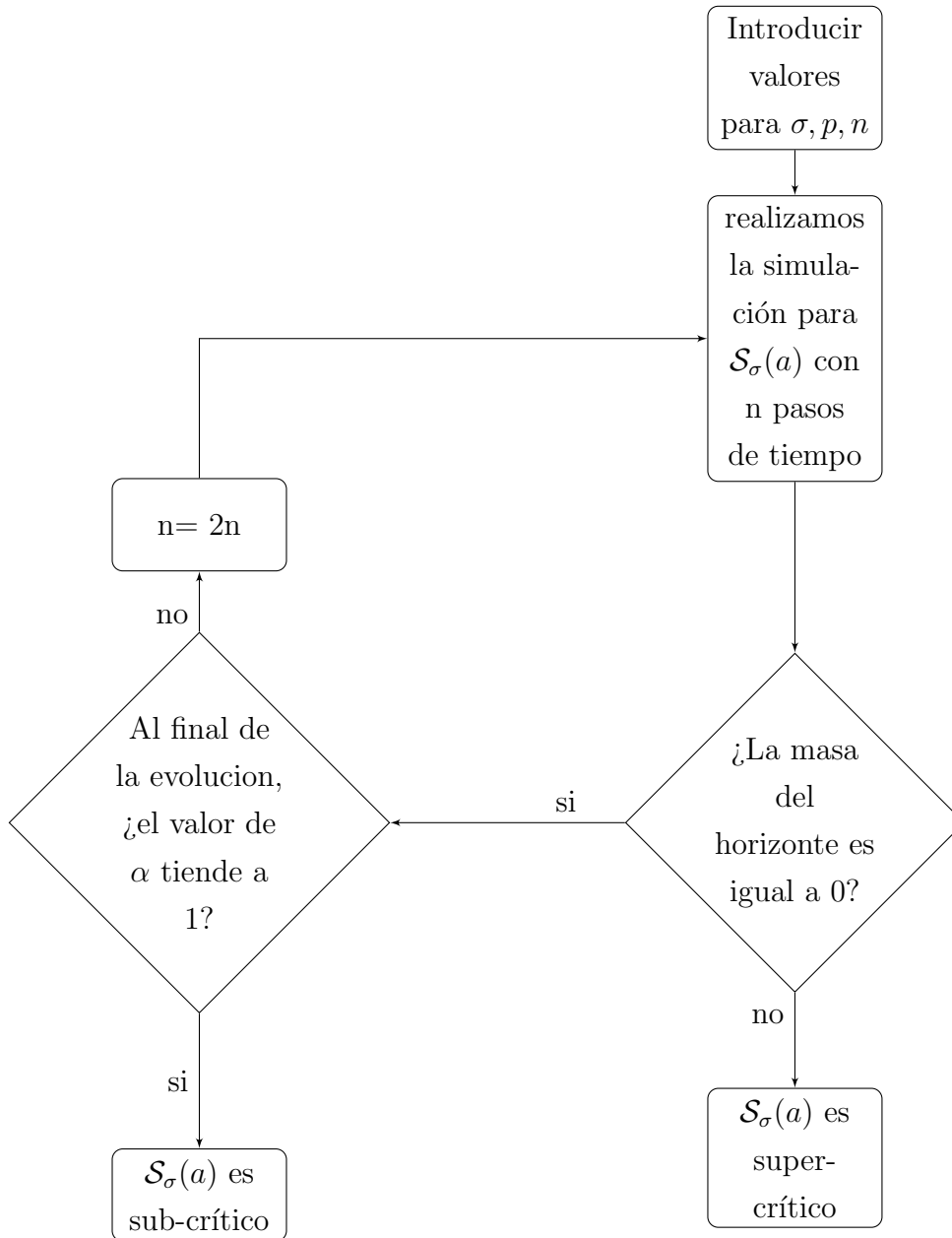
3. El valor de α no tiende a cero ni a uno. Esto ocurre cuando el número de pasos de tiempo que se le da a la simulación no es el suficiente para que esta llegue a dispersarse o colapsarse.

Utilizando este método, de igual manera que con el primer método, resulta un problema si el número de pasos de tiempo n que se le da al programa al iniciar la simulación, no es el suficientemente grande para que la simulación llegue a uno de los dos posibles resultados. Esto se resolvería fácilmente tomando un valor N muy grande. El problema con esto es que al aumentar N , el tiempo de computo aumenta, por lo cual se debe tener cuidado al escoger un valor de N .

Para evitar este problema, se utilizará una combinación de ambos métodos para determinar si un elemento $\mathcal{S}_i(p)$ es super-crítico o sub-crítico:

El script hace la simulación para $\mathcal{S}_\sigma(a)$. Al final de la simulación el script verifica el valor de M_{ah} . Si este es igual a cero, se asume que $\mathcal{S}_\sigma(a)$ es super-crítico. Si el valor de M_{ah} es cero, el script verifica si el valor de α es cercano a 1, en caso de serlo el script asume que $\mathcal{S}_\sigma(a)$ es sub-crítico y se continua la búsqueda del valor crítico. En caso de que α no tenga un valor cercano a 1, el script asume que los pasos de tiempo no fueron suficientes, y repite la simulación aumentando N . En la siguiente página se representará este algoritmo de búsqueda de manera gráfica.

Una vez que tenemos el valor crítico, p^* , realizaremos simulaciones para cada familia \mathcal{S}_σ con los valores $p_i = p^* - \ln(-(5 + i * .5))$ donde $i \in [0, 40]$. Para cada una de estas simulaciones, se obtuvo el valor máximo del escalar de curvatura en el origen R_{max} . Posteriormente se realizó una gráfica para cada familia, donde se compararán los valores de $\ln R_{max}$ vs $\ln(p^* - p)$ y mostramos que la gráfica resultante es una línea de pendiente -2γ más una función sinusoidal de periodo $\Delta/(2\gamma)$.



5.5. Resultados

Se realizó el análisis para cuatro familias: $\mathcal{S}_{0.125}(p)$, $\mathcal{S}_{0.25}(p)$, $\mathcal{S}_{0.375}(p)$ y $\mathcal{S}_{0.5}(p)$, es necesario observar, que el número de pasos temporales, y el tamaño de los pasos espaciales no fueron los mismos en todas las familias, ya que las familias $\mathcal{S}_i(p)$ con valores de i pequeños evolucionan mas rápidamente que las familias con i cercanas a 1, pero requieren

una mejor resolución para obtener los resultados adecuados. Una vez encontrado el valor crítico p^* para cada una de estas familias, se realizaron 61 simulaciones para valores de $p < p^*$, de manera que los miembros $\mathcal{S}_\sigma(p_i)$ de las familias que se tomaron para evolucionar se tomaron con $p_i = p^* - \ln(.25(i))$ con $5 \leq i \leq 20$. Durante cada evolución se registró el comportamiento del escalar de curvatura en el origen, esto permitió encontrar el valor máximo del escalar de curvatura, R_{max} , alcanzado durante las evoluciones. Las figuras (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7) muestran las gráficas $\ln R_{max}$ vs $\ln(p^* - p)$ de cada familia.

Además de mostrar la variación de R_{max} conforme la variable que parametriza a las familias se acerca al valor crítico, se sobrepone un ajuste lineal, suponiendo que la curva está descrita por una función lineal más una perturbación sinusoidal, la cual dependerá de un cinco parámetros (el periodo, la fase, la amplitud, la coordenada al origen y la pendiente). Se tomó a la perturbación periódica como una función sinusoidal ya que esta resultó en el mejor ajuste.

$$f(r) = 2\gamma r + A[\sin((\Delta/(2\gamma)r) + \omega)] + B. \quad (5.11)$$

Posterior a cada figura se muestra una tabla con los valores obtenidos con el ajuste:

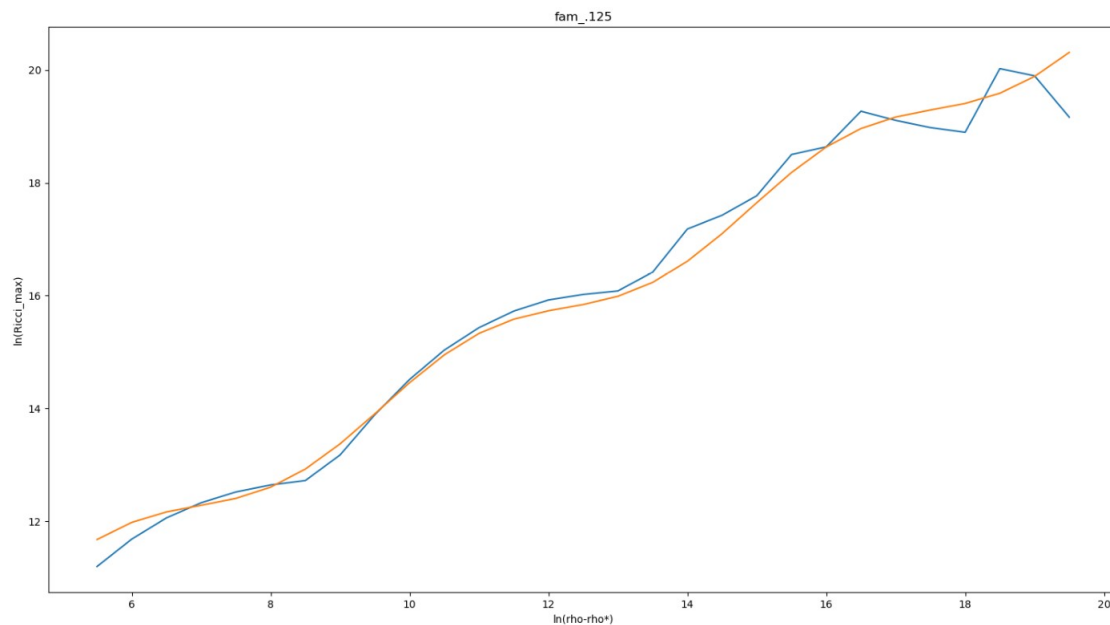


Figura 5.4: Esta figura muestra los resultados del análisis llevado a cabo para la relación de $\ln R_{max}$ vs $\ln(p^* - p)$ de familia de soluciones $\mathcal{S}_{0.125}$. La línea azul muestra en escala logarítmica los resultados obtenidos a través de las simulaciones; la línea naranja muestra el ajuste que se realizó.

$\sigma = 0.125$	
Valor crítico (p^*)	42.95413667280229
Periodo ($\Delta/(2\gamma)$)	4.61867570015800923
Fase (ω)	-1.9846489765346411
Amplitud (A)	-0.3791552858027009
Coordenada en el origen (B)	7.6541884837607
Pendiente (2γ)	0.7486635367212469

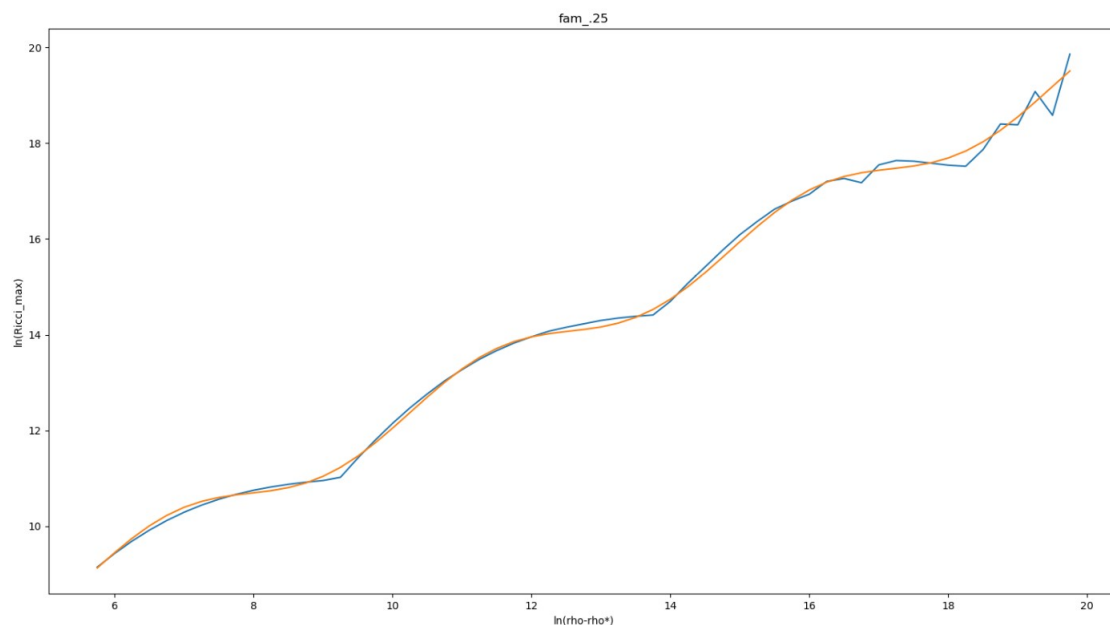


Figura 5.5: Esta figura muestra los resultados del análisis llevado a cabo para la relación de $\ln R_{max}$ vs $\ln(p^* - p)$ de familia de soluciones $\mathcal{S}_{0.25}$. La línea azul muestra en escala logarítmica los resultados obtenidos a través de las simulaciones; la línea naranja muestra el ajuste que se realizó.

$\sigma = 0.25$	
Valor crítico (p^*)	21.94420429307427
Periodo ($\Delta/(2\gamma)$)	4.6462836118621294
Fase (ω)	-4.55632507669213
Amplitud (A)	-0.421387531728554
Coordenada en el origen (B)	4.848407906968281
Pendiente (2γ)	0.74834622622146888

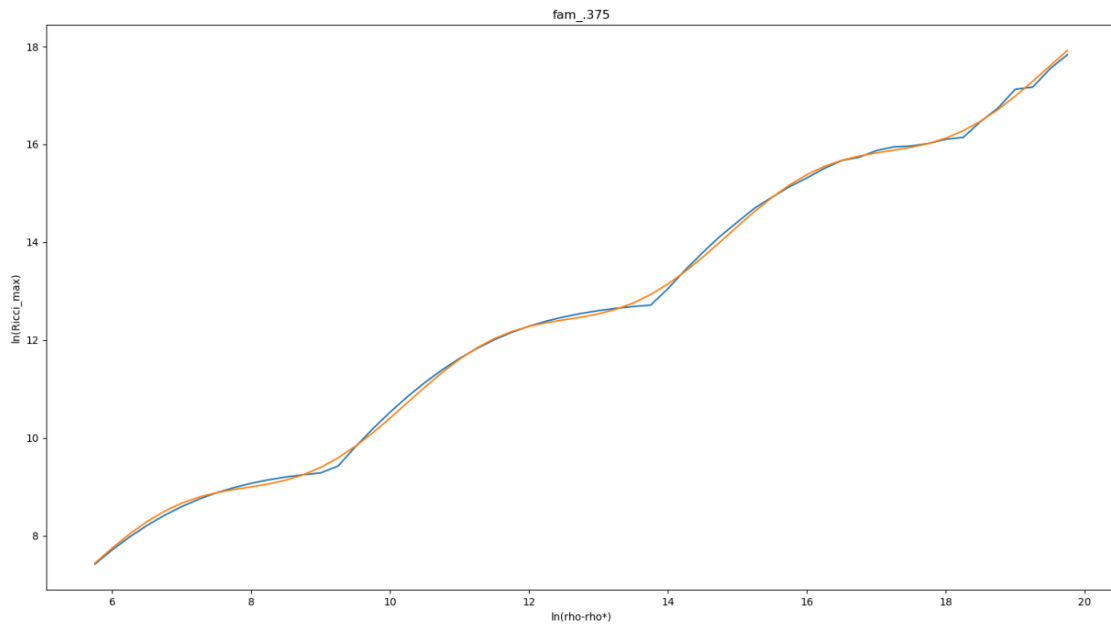


Figura 5.6: Esta figura muestra los resultados del análisis llevado a cabo para la relación de $\ln R_{max}$ vs $\ln(p^* - p)$ de familia de soluciones $\mathcal{S}_{0.375}$. La línea azul muestra en escala logarítmica los resultados obtenidos a través de las simulaciones; la línea naranja muestra el ajuste que se realizó.

$\sigma = 0.375$	
Valor crítico (p^*)	
Periodo ($\Delta/(2\gamma)$)	14.8695858879716490
Fase (ω)	-3.5734276984775297
Amplitud (A)	-0.3896645457332114
Coordenada en el origen (B)	0.7805370875215051
Pendiente (2γ)	0.748220553027268466

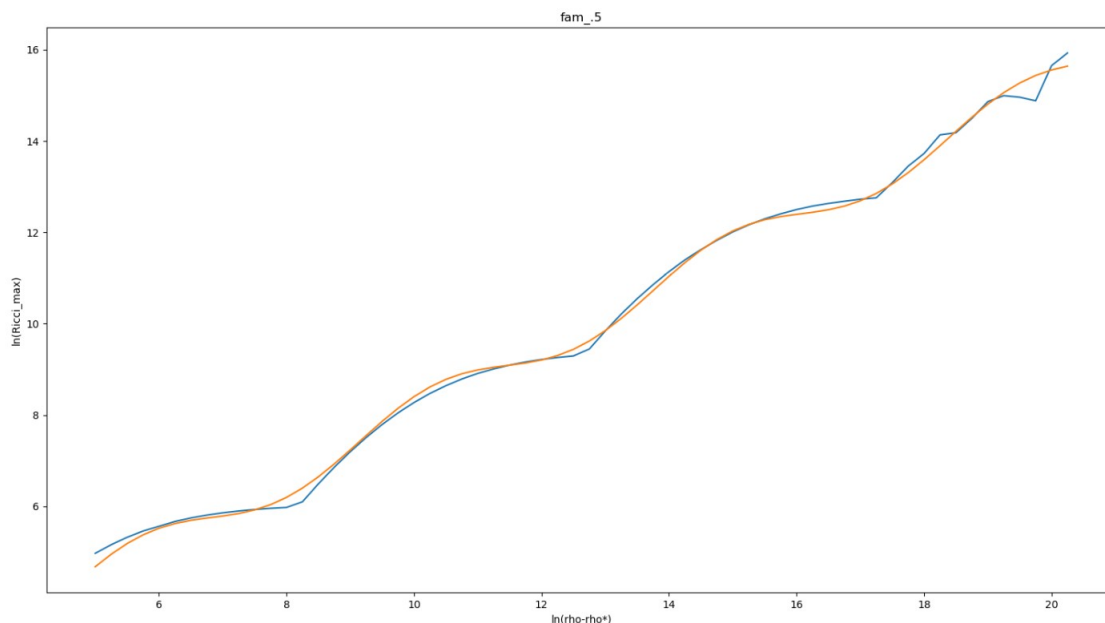


Figura 5.7: Esta figura muestra los resultados del análisis llevado a cabo para la relación de $\ln R_{max}$ vs $\ln(p * -p)$ de familia de soluciones $\mathcal{S}_{0.5}$. La línea azul muestra en escala logarítmica los resultados obtenidos a través de las simulaciones; la línea naranja muestra el ajuste que se realizó.

$\sigma = 0.5$	
Valor crítico (p^*)	11.7294549055600805
Periodo ($\Delta/(2\gamma)$)	4.6458723875722401
Fase (ω)	-4.480243418967103
Amplitud (A)	-0.3896645657332114
Coordenada en el origen (B)	3.086172600338453
Pendiente (2γ)	0.748220783542645

Es importante mencionar que, a pesar de haber obtenido los valores R_{max} para $p_i = p * -\ln(.25(i))$ con $20 \geq i \geq 30$, estos no se mostraron en las figuras (5.5)-(5.8), ya que representaban demasiado ruido, y resultaban en un ajuste que no representaba adecuadamente los datos obtenidos.

De estas gráficas, los datos de mayor interés son la pendiente y el periodo. Al promediar los valores obtenidos para estas cantidades a tres cifras significativas, obtenemos un valor promedio a tres cifras decimales de $0.748 \pm .0004$ para la pendiente y 4.637 ± 0.02 para el periodo, Estos valores nos dan un valor para γ y Δ de 0.374 ± 0.0002 y 3.636 ± 0.014

respectivamente. Los resultados obtenidos son concordes a los valores reportados en [9] y [32] de γ y Δ de 0.374 ± 0.001 y 3.445 ± 0.0054 respectivamente. Sin embargo, el valor de Δ obtenido, a pesar de estar concorde a el resultado esperado, se obtuvo con un grado de error mayor al deseado. De las cuatro familias de datos que se usaron en este trabajo, los resultados de $\mathcal{S}_{0.125}(p)$ presentaron la mayor desviación, resultando en datos poco precisos; si se ignoran los datos obtenidos para $\mathcal{S}_{0.125}(p)$, obtenemos valores para $\gamma = 0.3741 \pm 4 * 10^{-5}$ y $\Delta = 3.446 \pm 0.002$ respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones

Siguiendo los objetivos de este trabajo, se reescribieron las ecuaciones del campo de Proca real como un problema de Chauchy siguiendo el formalismo BSSN en simetría. Con ello se separó al espacio tiempo en foliaciones puramente espaciales, cada una de ellas etiquetadas por un valor de tiempo propio τ . Para este análisis se utilizó el caso del campo de Maxwell como base. Contar con estas ecuaciones permitió definir 4 familias de datos iniciales, parametrizadas por una sola variable p . Estas 4 familias se utilizaron para realizar las simulaciones numéricas necesarias utilizando el código numérico desarrollado por el grupo de Relatividad Numérica de la UNAM, Ollinsphere, con el fin de obtener una idea del comportamiento crítico en el colapso gravitacional de un campo de Proca real.

Siguiendo el análisis realizado por M. Choptuik, se buscó el valor crítico p^* a partir del cual las simulaciones resultaban en un colapso gravitacional. Esto se pudo realizar gracias a que se optó por utilizar la condición de foliación $1+\log$, la cual permite discernir fácilmente si una simulación numérica resultaba en un colapso gravitacional. Una vez que se conoció el valor crítico para cada familia, se realizaron simulaciones sub-críticas para valores cercanos a p^* , esto la finalidad de poder observar el comportamiento del máximo valor del escalar de Ricci en el origen conforme el campo se acerca a un colapso gravitacional.

La cantidad más estudiada en la literatura para este tipo de análisis es la masa del agujero negro. Sin embargo el código numérico que se utilizó para realizar las simulaciones obtiene el valor de la masa del agujero negro con un margen de error de magnitud similar

al fenómeno que se deseaba estudiar, motivo por el cual no se utilizó la masa del agujero negro para este trabajo, y en su lugar se utilizó el valor máximo del escalar de Ricci en el origen. El motivo por el cual se utilizó el valor máximo del escalar de Ricci, es que, a diferencia de la masa del agujero negro, el valor máximo del escalar de Ricci se obtiene a partir de simulaciones sub-críticas, en las cuales no aparece un error numérico. No se encuentra reportado en la literatura si el valor de R_{max} presenta un comportamiento crítico tipo I y tipo II como la masa, pero si cuenta con una relación de auto escalamiento periódico similar al que ocurre con la masa. Los resultados aquí obtenidos al estudiar el comportamiento de R_{max} en las distintas familias de datos iniciales, resultaron no solo compatibles con los reportados originalmente por Choptuik, sino que obtener con un menor margen de variación que el reportado.

Si se desearía estudiar el comportamiento de la masa del agujero negro. Este problema se podría resolver en trabajos posteriores, ya sea actualizando el código para reducir el error numérico que ocurre después del horizonte aparente, o implementando un método que permita definir con mayor precisión el valor de la masa del horizonte aparente antes de que ésta comience a incrementar por el error numérico; esto, junto con un mayor tiempo de cómputo, permitiría observar los comportamientos críticos tipo I y tipo II, y poder estudiar así el comportamiento del campo en la zona del colapso crítico tipo III, el cual no se ha estudiado para el caso particular del campo de Proca real.

Capítulo 7

Apéndice

En análisis que se llevará a continuación sigue el llevado a cabo en [20] y [21], y será llevado a cabo en un sistema coordenado de Bondi o de coordenadas nulas. Esto con el fin de simplificar el procedimiento. En el sistema coordenado de Bondi, el elemento de línea toma la forma:

$$ds^2 = -e^{2\nu} du^2 - 2e^{\nu-\gamma} dudr + r^2 d\Sigma^2, \quad (7.1)$$

donde $d\Sigma^2$ es la métrica canónica para la 2-esfera S^2 . Adicionalmente se introduce los valores n y l :

$$n = e^{-\nu} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (7.2)$$

$$l = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (7.3)$$

las cuales, junto con (ζ_1, ζ_2) marcos de referencia ortonormal a S^2 localmente definidos, formarán una tetrad nula, la cual se utilizará mas adelante.

Al asumir regularidad en el origen, y utilizando los componentes del tensor de curvatura, la curvatura seccional del plano (n,l) , es posible reducir las 16 ecuaciones de Einstein a un sistema equivalente más sencillo; el cual consta de ecuaciones $E(1,1) = 0$, $E(n,l) = 0$, mas la ecuación de onda para ϕ :

$$-2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + e^{nu-\lambda} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = 0. \quad (7.4)$$

Analizar la ecuación $E(l, l) = 0$, lleva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial_\nu}{\partial r} + \frac{\partial_\lambda}{\partial r} = 4\pi \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2, \quad (7.5)$$

esta ecuación tiene como solución a:

$$\nu + \lambda = -4\pi \int_r^\infty r \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (7.6)$$

la cual cumple la condición asintótica, $\nu + \lambda \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow 0$.

Similarmente, a partir de la ecuación $E(n, l) = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial_\nu}{\partial r} - \frac{1}{r}(e^{2\lambda} - 1) = 0, \quad (7.7)$$

cuya única solución, que existe para todo valor de r es:

$$e^{\nu-\lambda} = \frac{1}{r} \int_0^r e^{\nu+\lambda} dr. \quad (7.8)$$

Utilizando (7.6) y (7.8), podemos reescribir la ecuación onda (7.4) para obtener una ecuación diferencial parcial no lineal para ϕ , la cual denominaremos h:

$$h = \frac{\partial}{\partial r}(r\phi), \quad (7.9)$$

con esto:

$$\phi = \bar{h} \quad (7.10)$$

donde la barra ($\bar{\quad}$) sobre la h se utiliza para denotar la media de la función h.

Utilizando el elemento:

$$e^{\nu+\lambda} = g, \quad (7.11)$$

junto con la ecuación (7.6), obtenemos una expresión para el valor para g:

$$g = \exp \left[-4\pi \int_r^\infty (h - \bar{h})^2 \frac{dr}{r} \right]. \quad (7.12)$$

Así mismo, (7.8) se puede reescribir como:

$$e^{\nu-\lambda} = \bar{g}. \quad (7.13)$$

Esta segunda expresión será de utilidad mas adelante en el análisis.

Definiendo el operador D:

$$D = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}\bar{g}\frac{\partial}{\partial r}, \quad (7.14)$$

el cual representa la derivada a lo largo de los rayos de luz parametrizados por u. Utilizando este operador, la ecuación onda (7.4) resulta ser la ecuación de evolución no lineal para h, a lo largo de los rayos de luz entrantes:

$$Dh = \frac{1}{2r}(g - \bar{g})(h - \bar{h}). \quad (7.15)$$

Esta última ecuación resulta útil, ya que es equivalente a las 16 ecuaciones de Einstein al asumir regularidad en el origen. Si h es solución, entonces ϕ , ν y λ definidas por (7.10) (7.11) y (7.13) resuelven las ecuaciones de Einstein.

La ecuación anterior permite derivar las ecuaciones de evolución de cualquier cantidad, para la cual u se pueda expresar en términos de h. En particular, podemos obtener la ecuación de \bar{h} :

$$D(r\bar{h}) = D\left(\int_0^r h dr\right) = \int_0^r \frac{\partial h}{\partial u} dr - \frac{1}{2}g\bar{h} = -\frac{1}{2}\bar{g}\bar{h} - \frac{1}{2}[\bar{g}(h - \bar{h})]_{r=0} + \frac{1}{2}\int_0^r \bar{g}(h - \bar{h})\frac{dr}{r}, \quad (7.16)$$

usando $Dr = -\frac{1}{2}\bar{g}$, podemos reescribir lo anterior como:

$$D\hat{h} = \frac{\xi}{2r}, \quad (7.17)$$

con:

$$\xi = \int_0^r \bar{g}(h - \bar{h})\frac{dr}{r}. \quad (7.18)$$

Introducimos la función $m(u,r)$, la cual representa la masa total para una esfera de radio r en un tiempo retardado u. Esta función m está definida como:

$$m = \frac{r}{2}(1 - \bar{g}/g). \quad (7.19)$$

Al ser g una función monótonamente creciente para r , independiente del valor de u , da la relación $\bar{g} \leq g$ que hace a m una función no negativa, creciente, igual a cero para $r = 0$, $r > 0$ para $m < r/2$. Tenemos:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 2\pi \frac{\bar{g}}{g} (h - \bar{h})^2. \quad (7.20)$$

En términos de m , la ecuación de Einstein $E(n,n) = 0$ implica:

$$Dm = -\frac{4\pi r^2}{g} (D\bar{h}^2) = -\frac{\pi}{g} \xi^2. \quad (7.21)$$

Dado que m es una función monótonamente no decreciente, se puede asumir lo siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(0, r) := M_0, \quad (7.22)$$

existe, y que la masa inicial M_0 , de la misma manera, m es monótonamente no-decreciente con respecto a r , para cada u , y acotada por M_0 :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(u, r) := M_u, \quad (7.23)$$

para toda u . M_u es la masa de Bondi [36], la cuál es la masa total para el tiempo retardado u . La cual cumple el teorema de Bondi, por lo que M_u es una función monótonamente no-creciente de u , $dM/du \leq 0$, que además implica que para cada tiempo u , $r(1-g) \rightarrow 0$, conforme $r \rightarrow \infty$. Esto nos permite expresar a M_u como:

$$M_u = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1-g) dr, \quad (7.24)$$

la cual además, de ser no negativa, nos permite garantizar que el límite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M_u := M_1, \quad (7.25)$$

existe, y M_1 es la masa de Bondi final.

El elemento de tiempo propio a lo largo de la línea $r = r_0$ es:

$$e^{\nu(u, r_0)} du. \quad (7.26)$$

Las ecuaciones (7.11) y (7.13), permiten determinar el valor de $e^{2\nu} = g\bar{g}$, con lo que

obtenemos $\nu \leq 0$ y $e^\nu \geq \bar{g}$.

Para todo tiempo retardado u , $\log \bar{g}(u, r) \rightarrow 0$, para $r \rightarrow \infty$, utilizando la definición para m , obtenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} -\log \bar{g}(u, r_0) &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial r} dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{2m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \\ &\quad \left(1 - \frac{2M(u)}{r}\right)^{-1} dr - \log \left(1 - \frac{2M(u)}{r_0}\right), \end{aligned} \quad (7.27)$$

con lo que obtenemos la desigualdad:

$$e^{\nu(u, r_0)} \geq \bar{g}(u, r_0) \geq 1 - \frac{2M(u)}{r}. \quad (7.28)$$

Si se asume $r_0 > 2M_1$, como $M(u)$ converge a M_1 conforme u crece, existe u_2 , tal que para toda $u \geq u_2$, $M(u) \leq \frac{1}{2}(r_0/2 + M_1)$, lo que implica:

$$1 - \frac{2M(u)}{r_0} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M_1}{r_0}\right). \quad (7.29)$$

Como $m(u, r)$ es una función creciente, $m(u, r) \leq M(u)$, si además $M(u) < r_0/2$:

$$-\log \bar{g}(u, r_0) \leq \int_{r_0}^{\infty} \frac{2M(u)}{r} dr, \quad (7.30)$$

Sea $u_1 > u_2$, combinando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{u_1} e^{\nu(u, r_0)} du &\geq \int_{u_2}^{u_1} e^{\nu(u, r_0)} du \geq \int_0^{u_1} \left(1 - \frac{2M_1}{r_0}\right) du \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M_1}{r_0}\right) (u_1 - u_2) \rightarrow \infty, \text{ para } u_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Con esto, los puntos en la hiper-superficie con $r \geq 2M_1$, son temporaloides infinitos hacia el futuro, con lo que obtenemos que las líneas temporaloides $r = r_0$ son completas hacia el futuro. Para el caso $M_1 = 0$, la desigualdad $r \geq 2M_1$, resulta trivial, y obtenemos que toda línea temporaloide r es completa hacia el futuro, *i.e.* el espacio regresa a Minkowski.

El teorema 2 de [21] trata el caso en el cuál $M_1 \neq 0$:

En el intervalo $[0, 2M_1]$, existe una función continua creciente $u_0(r)$ tal que en la región

$$\{(u, r) \geq u_0(r)\}, r \in [0, 2M_1],$$

se tiene:

$$g(u, r) \geq e^{-(u-u_0(r))/32M_1}.$$

Para cada $r_1 \in [0, 2M_1]$, las líneas temporaloides $r = r_1$ son incompletas, por lo que hay un horizonte de eventos en $2M_1$, *i.e.* el campo colapsa. Sea $G(x), x \geq 0$, definida como:

$$G(x) := \frac{x}{\left(2 + \frac{\pi}{6}x^2\right)} \left[e^{-4\pi/3 x^2} - \frac{\pi}{8}x^2 \left(2 + \frac{\pi}{6}x^2\right) \right]. \quad (7.32)$$

Definimos al número real positivo δ :

$$\delta := \max G(x), x \in \{0, x_1\}, \quad (7.33)$$

para $d < \delta$, existe $x < x_1$, tal que $d \leq G(x)$, el lema 4 presentado y demostrado en [20], garantiza que la secuencia $\{h_n\}$, definida como la secuencia para la cual dada h_n, H_{n+1} cumple:

$$D_n h_{n+1} - \frac{1}{2r}(g_n - \bar{g}_n)h_{n+1} = \frac{1}{2r}(g_n - \bar{g}_n)\bar{h}_n. \quad (7.34)$$

está contenida en una bola de radio r , en el espacio de Banach X' , el cual está definido como el espacio de funciones f definidas en $[0, \infty] \times [0, \infty]$, continuas y con derivadas parciales con respecto a r continuas, las cuales satisfacen:

$$\|f\|_X := \sup_{u \geq 0} \sup_{r \geq 0} \left\{ \left(1 + r + \frac{u}{2}\right)^3 |h(u, r)| \left(1 + r + \frac{u}{2}\right)^4 \left| \frac{\partial h}{\partial r}(u, r) \right| \right\}. \quad (7.35)$$

Adicionalmente por el lema 5 presentado y demostrado en [20], la secuencia h_n se contrae con respecto al espacio de Banach Y , el cual está definido como el espacio de funciones $f \in C^0[0, \infty] \times [0, \infty]$, tales que:

$$\|f\|_X := \sup_{u \geq 0} \sup_{r \geq 0} \left\{ \left(1 + r + \frac{u}{2}\right)^3 |f(u, r)| \right\}. \quad (7.36)$$

posteriormente, se utiliza el lema 3 presentado y demostrado en [20], para concluir que la secuencia $\partial h_n / \partial r$ es equicontinua. El Teorema de Arzelá-Ascoli permite seleccionar una sub-secuencia h_{n_i} tal que h_{n_i} converge a h' y $\partial h_{n_i} / \partial r$ converge a $\partial h'_{n_i} / \partial r$ continuamente para los subconjuntos compactos $[0, u_0] \times [0, r_0]$, para alguna r_0 arbitraria. h' y $\partial h'_{n_i} / \partial r$

son funciones continuas en $[0, u_0] \times [0, \infty)$, que cumplen:

$$\sup_{r \geq 0} (1 + r + \frac{u}{2})^3 |h'(u, r)| \leq x_1,$$

$$\sup_{r \geq 0} (1 + r + \frac{u}{2})^4 \left| \frac{\partial h'}{\partial r}(u, r) \right| \leq x_1,$$

por lo que el límite $h' \in X'$, como $h_n \rightarrow h$ en el espacio Y' , la unicidad del límite nos da $h = h' \in X$. h es, entonces una solución global clásica a 7.4. Sea $h(0, r)$, datos iniciales para los cuales:

$$d_0 < \delta.$$

Existe $a > 0$ tal que:

$$\sup_{r \geq 0} \left\{ \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3 |h(0, r)| \left(1 + \frac{r}{a}\right)^4 \left| \frac{\partial h}{\partial r}(u, r) \right| \right\} < \delta. \quad (7.37)$$

Definimos unos nuevos datos iniciales $h'(0, r) = h(h, ar)$, con esto:

$$\begin{aligned} d' &:= \sup_{r \geq 0} \left\{ (1 + r)^3 |h'(0, r)| (1 + r)^4 \left| \frac{\partial h'}{\partial r}(u, r) \right| \right\} \\ &= \sup_{r \geq 0} \left\{ \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3 |h(0, r)| \left(1 + \frac{r}{a}\right)^4 \left| \frac{\partial h}{\partial r}(u, r) \right| \right\}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

De donde obtenemos $d' < \delta$. Con esto, $h'(u, r)$ pertenece al espacio X' y toma valores iniciales $h'(0, r)$ para $u=0$.

La ecuación (7.15), resulta ser covariante bajo el grupo de escalamiento $(u, r) \rightarrow (u/a, r/a)$, por lo que la función $h(u, r) = h'(u/a, r/a)$ también es una solución global, con valores iniciales $h(0, r)$. Esta solución sigue el comportamiento de decaimiento:

$$|h(u, r)| \leq C(1 + u + r)^{-3}, \quad |\partial h(u, r)| \leq C(1 + u + r)^{-4}, \quad (7.39)$$

Este comportamiento de decaimiento obliga la masa de Bondi:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M_u := M_1 = 0. \quad (7.40)$$

Tomando este valor de M_1 , toda $r_0 > M_1$, lo que, utilizando (7.31), obtenemos que la evolución de $h(u, r)$ genera un espacio-tiempo temporaloide, geodesicamente completo hacia el futuro, es decir el espacio-tiempo regresa a Mikowski. Con lo anterior se demuestra que para la hiper-superficie limitante $u = \infty$ para $r > 2M_1$ el espacio-tiempo regresa a

un espacio de Mikowski. Similarmente, al tomar la hiper-superficie $u = \infty$, con $r < 2M_1$, las líneas temporaloides $r = r_1$, para $r < 2M_1$ resultan tener una longitud propia finita, por lo cual la hiper-superficie representa un evento horizonte futuro.

La demostración de esta afirmación parte de la ecuación de evolución no-lineal de la cantidad $\int_0^\infty rh^2 dr$, obtenida a partir del principio variacional aplicado a la acción $S(g, \bar{g}, \bar{h}, u$ [21]:

$$4\pi \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^\infty rh^2 dr \right) = M - \int_0^\infty g \log(1/g) dr. \quad (7.41)$$

El Corolario 1 de [21] establece que para cada $r \neq 2M_1$:

$$g \rightarrow g_1 := \begin{cases} 1 & \text{para } r > 2M_1 \\ 0 & \text{para } r \leq 2M_1 \end{cases} \quad (7.42)$$

Con esto podemos encontrar una función creciente continua $u_2(r)$ en $[0, 2M_1]$ tal que para cada r en $[0, 2M_1]$, $u \geq u_2(r)$ se tiene:

$$g(u, r) \leq \frac{1}{6}$$

$$(g \log(1/g))(u, r) \leq 1/12$$

A lo largo de las líneas características tenemos:

$$D \left(\int_0^\infty rh^2 dr \right) = \int_r^\infty \frac{\partial}{\partial u} (rh^2) + \frac{1}{2} \bar{g} h^2 = \int_r^\infty \left[D(rh^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial r} \right) \right] dr. \quad (7.43)$$

Bibliografía

- [1] Schutz, B. F. (1985) *A First Course in General Relativity*, Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK.
- [2] Proca, A. (1936) Sur La Théorie Ondulatoire des Électrons positifs et négatifs. *J. Phys. Radium*, **7**(8), 347–353.
- [3] Alcubierre, M. (2008) *Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity*, Oxford University Press, Oxford University.
- [4] York, J. (1971) Gravitational Degrees of Freedom and the Initial-Value Problem. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1656–1658.
- [5] Baumgarte, T. W. and Shapiro, S. L. (1998) Numerical Integration of Einstein’s Field Equations. *Phys. Rev. D*, **59**, 024007.
- [6] Shibata, M. and Nakamura, T. (1995) Evolution of Three-Dimensional Gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, **52**, 5428–5444.
- [7] Brown, D. (2007) BSSN in Spherical Symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, **25**(20), 205004.
- [8] Alcubierre, M. and Mendez, M. (2010) Formulations of the 3+1 Evolution Equations in Curvilinear Coordinates. *General Relativity and Gravitation - GEN RELATIV GRAVIT*, **43**(10), 2769–2806.
- [9] Choptuik, M. W. (1993) Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 9–12.
- [10] Klein, O. (1926) Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, **37**, 895–906.

- [11] Proca, A. (1938) Théorie non Relativiste des Particules à Spin Entier. *J. Phys. Radium*, **9**(2), 61–66.
- [12] Podolsky, B. (1942) A Generalized Electrodynamics Part I-Non-Quantum. *Phys. Rev.*, **62**, 68–71.
- [13] Born, M. (1933) Modified Field Equations With a Finite Radius of the Electron. *Nature*, **132**(3329), 282.1.
- [14] Heisenberg, W. and Euler, H. (1936) Consequences of Dirac's Theory of Positrons. *Z. Phys.*, **98**(11-12), 714–732.
- [15] Bovy, J. (2006) The Self-Energy of the Electron: A Quintessential Problem in the Development of QED. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*,
- [16] Gianmassimo, T. (2014) A Small Cosmological Constant From Abelian Symmetry Breaking. *Class. Quantum Grav.*, **31**(22), 225004.
- [17] Alcubierre, M., Degollado, J., and Salgado, M. (2009) Einstein-Maxwell System in $3 + 1$ Form and Initial Data for Multiple Charged Black Holes. *Phys. Rev. D*, **80**, 104022.
- [18] Torres, J. and Alcubierre, M. (2014) Gravitational Collapse of Charged Scalar Fields. *General Relativity and Gravitation*, **46**(9).
- [19] Zilhão, M., Witek, H., and Cardoso, V. (2015) Nonlinear Interactions Between Black Holes and Proca Fields. *Classical and Quantum Gravity*, **32**(23), 234003.
- [20] Christodoulou, D. (1986) The Problem of a Selfgravitating Scalar Field. *Commun. Math. Phys.*, **105**, 337–361.
- [21] Christodoulou, D. (1987) A Mathematical Theory of Gravitational Collapse. *Communications in Mathematical Physics*, **109**(4), 613–647.
- [22] Choptuik, M. (1999) Critical Behaviour in Gravitational Collapse. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **136**, 353–365.
- [23] M., C., Tadeusz, C., and Bizon, P. (1996) Critical Behavior in Gravitational Collapse of a Yang-Mills Field. *Physical Review Letters*, **77**, 424.
- [24] Brady, P. R., Chambers, C. M., and Goncalves, S. M. C. V. (1997) Phases of Massive Scalar Field Collapse. *Phys. Rev. D*, **56**, R6057–R6061.

- [25] Garfinkle, D., Mann, R. B., and Vuille, C. (2003) Critical Collapse of a Massive Vector Field. *Physical Review D*, **68**, 064015.
- [26] Bartnik, R. and McKinnon, J. (1988) Particlelike Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 141–144.
- [27] Brady, P. R., Chambers, C. M., and Goncalves, S. M. C. V. (1997) Phases of Massive Scalar Field Collapse. *Phys. Rev. D*, **56**, R6057–R6061.
- [28] Seidel, E. and Suen, W. M. (1991) Oscillating Soliton Stars. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1659–1662.
- [29] Brady, P. R., Chambers, C. M., and . Gonçalves, S. M. C. V. (1997) Phases of Massive Scalar Field Collapse. *Phys. Rev. D*, **56**, R6057–R6061.
- [30] Choptuik, M., Hirschmann, E. W., and Marsa, R. (1999) New Critical Behavior in Einstein-Yang-Mills Collapse. *Physical Review D*, **60**, 124011.
- [31] Tatsuhiko, K., Takashi, H., and Satoshi, A. (1995) Critical Behavior in Gravitational Collapse of Radiation Fluid: A Renormalization Group (Linear Perturbation) Analysis. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 5170–5173.
- [32] Gundlach, C. (1997) Understanding Critical Collapse of a Scalar Field. *Phys. Rev. D*, **55**, 695–713.
- [33] Piran, T. and Hod, S. (1997) Fine Structure of Choptuik’s Mass-Scaling Relation. *Phys. Rev. D*, **55**, R440–R442.
- [34] Garfinkle, D. and Duncan, G. C. (1998) Scaling of Curvature in Subcritical Gravitational Collapse. *Phys. Rev. D*, **58**, 064024.
- [35] Alcubierre, M. and J., G. (2005) Regularization of Spherically Symmetric Evolution Codes in Numerical Relativity. *Comput. Phys. Commun.*, **167**, 76–84.
- [36] Bondi, H., Van der Burg, M., and Metzner, A. (1962) Gravitational Waves in General Relativity. VII. Waves from Axi-Symmetric Isolated Systems. *Proceedings of the Royal Society. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **269**(1336).