Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

FUNCIONES PROPIAS DE STEKLOV PARA OPERADORES ELÍPTICOS DE SEGUNDO ORDEN EN REGIONES ACOTADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JEAN MAURICE ABDEL MASSIH CRUZ

DRA. MARÍA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2023

Facultad de Ciencias
UNAM

1. Datos del alumno
Abdel Massih
Cruz
Jean Maurice
55 7302 6843
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311068395

2. Datos del tutor
Dra
María de la Luz Jimena
de Teresa
de Oteyza

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ramón Gabriel
Plaza
Villegas

4. Datos del sinodal 2
Dr
Felipe
Angeles
García

5. Datos del sinodal 3
Dr
Carlos
García
Azpeitia

6. Datos del sinodal 4
Dr
Enrique
Álvarez del Castillo
de Pina

7. Datos del trabajo escrito
Funciones propias de Steklov para operadores elípticos de segundo
orden en regiones acotadas
Funciones propias de Steklov para el operador de Schrödinger
51 p
2023

Dedicatoria y agradecimientos

Dedicatoria
En memoria y para honrar de mí difunta madre una mujer ejemplar.

Agredecimientos
A mí hermano y a mí amiga Luz María por todo su apoyo incondicional.
A la Dra. María De La Luz Jimena De Teresa De Oteyza, no tengo palabras para expresar todo mi agradcecimiento.
Al proyecto IN102116 de DGAPA, UNAM y al Instituto de Matemáticas por la beca que me permitió finalizar el presente trabajo.
Finalmente a mi universidad que me educó.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo se construirá una base $\mathcal{C}$ para el espacio $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ donde Ω es una región acotada de frontera de clase C^1. Tal base será construida a partir de la resolución del problema de funciones propias de Steklov que consiste en poner el parámetro espectral λ sobre la frontera de Ω para el operador lineal eléptico de segundo orden de tipo Schrödinger

$$L\mu := -\Delta\mu + c\mu = 0 \tag{1}$$

sujeta a

$$\nabla\mu(x) \cdot \nu = \lambda\rho(x)\mu(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{2}$$

A partir de tal base obtendremos una representación espectral del operador traza y soluciones débiles al problema de Neuman, Robin y Dirichlet. Con el fin de de mostrar el contenido de este trabajo de una manera clara y amena se dividirá en tres capítulos.

En el primer capítulo empezaremos definiendo el espacio clásico de operadores lineales continuos $\mathcal{L}(X, Y)$ y algunas de sus propiedades para espacios normados. Continuaremos nuestro estudio con el espacio de operadores compactos que es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$. En la siguiente sección gracias a un colorario del teorema de Hahn-Banach se podrá dar la primera caracterización del mapeo dualidad que será fundamental en la prueba de las propiedades de la función indicadora. Después definiremos que es una seminorma y cuando son continuas. En las dos últimas secciones se desasollarán los conceptos de subdiferencial y de derivada en espacios de dimensión infinita y a partir de ellos se darán las principales propiedades de la función indicadora que es la base en las pruebas de los principales resultados que nos permitan desarrollar el problema de funciones propias de Steklov. Este primer capitulo se basa en los libros [1], [2], [6], [7], [8] y [13].

En el siguiente capítulo comenzaremos con las definiciones y resultados clásicos en espacios de Hilbert. A partir del teorema 2.1.2 y de adelante consideraremos solo espacios de Hilbert separables pues es conocido que tales espacios tienen bases de Hilbert numerable. El principal resultado de la primera sección será una caracterización de cuando un operador lineal acotados es compacto en términos de bases y de sucesiones contenidas en $\mathbb{R}$. La siguiente parte del capítulo es la principal de casí todo nuestro estudio en él se desarrollará con ayuda de la derivada de Fréchet, subdiferencial y las propiedades de la función indicadora los principales resultados usados en el desarrollo del problema de funciones propias de Steklov. Hacemos notar que estos resultados son generalizaciones de los multiplicadores de Lagrange. Continuaremos enunciando el teorema de representación de Riesz que a partir de él obtendremos el teorema de Stampacchia con el más adelante la usaremos para garantizar unicidad y caracterización de soluciones débiles del operador L y como caso particular se puede deducir el lema de Lax-Milgram. Además en esta parte daremos una demostración usando subdiferencial del Principio de Dirichlet. Luego en la siguiente sección se dará una caracterización de cuando un espacio de Hilbert es reflexivo el cual se usará cuando tengamos sucesiones acotadas las cuales bajo operadores compactos se convierten en sucesiones fuertemente convergentes. La última parte de esté capitulo se dará los principales resultados en espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el cual nosotros solo usaremos los casos cuando $m = 1, 2$ pues para nuestro interés se enunciaran y demostraran los teoremas de la traza compacta el cual se demostrará como aplicación de la construcción de $\mathcal{C}$, el teorema de encajes de Sobolev, el teorema de Rellich-Kondrachov y la desigualdad generalizada de Poincaré la cual se usara en las demostraciones realizadas de nuestro articulo principal [14]. Esté capítulo se baso en las siguientes literaturas [1], [2], [3], [4], [5], [9], [10], [11], [12] y [13].

En el último capítulo que es el tema del presente trabajo se comenzara definiendo el problema de Steklov en el caso general para un operador eléptico de segundo orden en forma de divergencia. Hacemos el comentario que con lo desarrollado anteriormente se puede seguir el articulo [16] el cual desarrolla esté caso. Continuaremos definiendo el caso a estudiar y las condiciones que daremos a las funciones c y ρ tales condiciones nos permitirán difinir las normas $\|\cdot\|_c$ y $\|\cdot\|_\rho$ las cuales serán normas equivalentes en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ respectivamente. De los problemas variacionales que se describirán se encontrará una sucesión de valores propios de Steklov λ_n asociados a las funciones propias de Steklov μ_n las cuales conformaran una base de Hilbert para el subespacio $ker(L)$ el cual es c-ortogonal a $H_0^1(\Omega)$ y los valores propios de Steklov cumplirán que $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. A partir de está base como cada elemento en $ker(L)$ tiene una representación en serie de Fourier y utilizando que el espacio nulo del operador traza es $H_0^1(\Omega)$ su linealidad y continuidad se obtendrá la base $\mathcal{C}$ y de la convergencia a $+\infty$ de λ_n se tendrá una representación espectral del operador traza con la cual se demostrará que es un operador compacto y de rango denso. Finalmente como última aplicación se describirán soluciones débiles de L sujeto a $(1-\tau)\dfrac{\partial\mu}{\partial\nu}(x) + \tau\rho(x)\mu(x) = g(x)$ sobre $\partial\Omega$ con $g \in L^2(\partial\Omega)$ y $\tau \in [0, 1)$ el cual, cuando $\tau = 0$ es el problema de Neuman, $\tau \in (0, 1)$ es el problema de Robin y cuando se hace tender τ a 1 es el problema de Dirichlet. Este capitulo estará basado en los articulos de Auchmuty [14], [15] y [16].

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

1.1. Operadores lineales

Sean $X = (X, \|\cdot\|_X)$ y $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados sobre $\mathbb{R}$ y $T : X \to Y$ un operador lineal, es decir,

$$T(\alpha x + \mu y) = \alpha T(x) + \mu T(y) \quad \forall\ x,\ y \in X \quad \text{y} \quad \forall\ \alpha,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado nos proporciona caracterizaciones de continuidad para un operador lineal.

Teorema 1.1.1. *Sea T un operador lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) T es continua.

(b) T es continua en 0.

(c) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ para toda $x \in X$.

(d) T es L-continua, es decir, existe $\kappa > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq \kappa\|x - y\|_X \quad \forall\ x,\ y \in X.$$

.

Prueba. Ver, por ejemplo, [2], proposicion 9.1.

■

Definición 1.1.1. Se define $\mathcal{L}(X, Y)$ como el espacio de operadores lineales y continuos de X en Y dotado con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Se sabe que si Y es un espacio de Banach. Entonces, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach. En particular cuando $Y = \mathbb{R}$ se define el espacio dual de X como el espacio de Banach $X' := (X', \|\cdot\|_{X'})$ donde $\|\mu\|_{X'} = \|\mu\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})}$. El mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle F, x \rangle = F(x),$$

se llama producto de dualidad entre X' y X. Sean A y B subconjuntos de X y X' respectivamente. Se definen los anuladores en X' y X por

$$A^{\perp} = \{F \in X' : \langle F, x \rangle = 0\ \forall\ x \in A\}.$$

y

$$^{\perp}B = \{x \in X : \langle F, x\rangle = 0 \ \forall \ F \in B\},$$

los cuales son subespacios cerrados.

Definición 1.1.2 (Convergencia en $\mathcal{L}(X, Y)$)**.** Sean X y Y espacios normados. Supongamos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $\mathcal{L}(X, Y)$, entonces la sucesión converge:

1. Uniformemente si existe $T : X \to Y$ tal que $T_n \to T$ en la norma de $\mathcal{L}(X, Y)$, esto es,

$$\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

2. Puntualmente o fuertemente si existe $T : X \to Y$ tal que $T_n(x) \to T(x)$ cuando $n \to \infty$ para toda $x \in X$ en la norma de Y, esto es,

$$\|T(x) - T_n(x)\|_Y \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty. \quad \forall \ x \in X$$

3. Cuando $Y = \mathbb{R}$ y existe $T \in X'$ tal que para toda $x \in X$ se cumple

$$|\langle T - T_n, x\rangle| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

   diremos que la sucesión converge débilmente* y se denota por $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$.

De la definiciones se sigue que convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia puntual $\Rightarrow$ convergencia débil*. Se definen el kernel y el rango de un operador lineal T por:

$$ker(T) = \{x \in X : \ T(x) = 0\},$$
$$Ran(T) = T(X) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \text{ tal que } T(x) = y\},$$

los cuales son subespacios. Si además T es continuo, es decir, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se tiene que el kernel es un subespacio cerrado.

1.1.1. Operadores lineales compactos

Definición 1.1.3. Sean X y Y espacios de Banach reales. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal diremos que T es un operador compacto si $Dom(T) = X$ y para cualquier conjunto acotado $A \subset Dom(T)$ se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto, es decir, si $\overline{T(A)}$ es compacto. Denotemos al conjunto de todos los operadores compactos de X en Y por $K(X, Y)$.

Un resultado en topología de espacios métricos establece que un conjunto relativamente compacto se puede caracterizar por sucesiones, esto es, un conjunto A en un espacio métrico es relativamente compacto si y solo si cada sucesión contenida en A tiene una subsucesión convergente en A (ver, por ejemplo, [7], 3.17.7). Con esto en cuenta tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 1.1.2. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es compacto.*

2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en X, existe una subsucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.*

Una caracterización útil para verificar si un conjunto es relativamente compacto en algún espacio métrico completo es:

$$\text{Un conjunto } A \text{ es relativamente compacto.} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es totalmente acotado.}$$

La afirmación anterior se puede consultar, por ejemplo en [7], 3.17.5. El siguiente resultado nos dice que todo operador compacto es continuo.

Proposición 1.1.1. *$K(X, Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [7], sección XI. 2.

■

Definición 1.1.4. Un operador $T : X \to Y$ es de rango finito si $\dim(T(X)) = m < +\infty$. En tal caso T se puede expresar por

$$T(x) = \sum_{n=1}^{m} F_n(x)y_n.$$

Con $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \subset X'$ y $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subset Y$ tal que si se cumple

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m = 0$$

con $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$ implique que $\alpha_n = 0$ para toda $1 \leq n \leq m$.

Lema 1.1.1. *Sean X, Y y Z tres espacios de Banach:*

1. *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y es de rango finito. Entonces, $T \in K(X, Y)$.*

2. *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $S \in K(Y, Z)$. Entonces, $ST \in K(X, Y)$.*

3. *Si $S \in K(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Entonces, $TS \in K(X, Y)$.*

Prueba. Sea A un subconjunto acotado de X

1. Como T es lineal y continuo existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ para toda $x \in X$. En particular para toda $x \in A$ se tiene que $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \leq M'$ pues A es acotado. Por hipótesis y linealidad $T(A)$ es un subespacio de dimensión finita. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass $T(A)$ es relativamente compacto.

2. Como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y A es acotado se tiene que $T(A)$ es acotado, entonces $S(T(A))$ es relativamente compacto por hipótesis.

3. Puesto que $S(A)$ es relativamente compacto la continuidad del operador T se tiene que $T(S(A))$ es relativamente compacto.

■

El siguiente teorema establece que el espacio $K(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$ siempre que Y sea un espacio de Banach.

Teorema 1.1.3. *Sea X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores en $K(X, Y)$ que converge a T en $\mathcal{L}(X, Y)$. Entonces, T es compacto.*

Prueba. Sea A un subconjunto acotado en X tenemos que demostrar que $\overline{T(A)}$ es compacto o equivalentemente probemos que $T(A)$ es totalmente acotado pues Y es completo.
Como A es acotado existe un real $r > 0$ tal $A \subset \overline{B}(0,r)$,esto es,

$$\|x\|_X \leq r \quad \forall\, x \in A.$$

Como $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia T entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se cumple $\|T - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2r}$. Puesto que T es lineal y continuo tenemos que para cada $x \in A$ y $n \geq n_0$.

$$\|T(x) - T_n(x)\|_Y \leq \|(T - T_n)(x)\|_Y \leq \|T - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2r}\|x\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien fijemos $n \leq n_0$, como T_n es compacto, $T_n(A)$ es totalmente acotado con lo que existe un número finito de vectores y_i, $1 \leq i \leq m$ en Y tales que

$$T_n(A) \subseteq B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup ... \cup B\left(y_m, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

entonces para cada $x \in A$ existe una j tal que $\|T_n(x) - y_j\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}$ así

$$\|T(x) - y_j\|_Y \leq \|T(x) - T_n(x)\|_Y + \|T_n(x) - y_j\|_Y \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto $T(A) \subseteq B(y_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(y_m, \varepsilon)$, es decir, $T(A)$ es totalmente acotado.

■

El "recíproco" del teorema anterior sólo es válido si Y es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.1.4. *Sean X un espacio normado, Y un espacio de Hilbert. Si $T \in K(X,Y)$. Entonces, existe una sucesión $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X,H)$ de operadores de rango finito tal que $\|T_n - T\| \to 0$ si $n \to \infty$.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 5.6.

■

1.2. Teorema de Hahn-Banach

Teorema 1.2.1 (Teorema de Hahn-Banach para espacios normados). *Sea X un espacio normado y $f \in V'$, donde V es un subespacio de X. Entonces, existe $F \in X'$ tal que*

$$\langle F, x\rangle = \langle f, x\rangle \quad \forall\, x \in V \quad y \quad \|F\|_{X'} = \|f\|_{V'}.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 2.6.

■

Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach tenemos.

Corolario 1.2.1. *Sean V un subespacio de un espacio normado X y $x_0 \in X$ tal que $d := dist(x_0, V) := \inf_{x\in V} \|x - x_0\|_X > 0$. Entonces, existe $F \in X'$ tal que*

$$1.\ \|F\|_{X'} = 1. \qquad 2.\ \langle F, x_0\rangle = d. \qquad 3.\ \langle F, x\rangle = 0\ \forall\, x \in V.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 2.8.

■

Si $V = \{0\}$ y $x \neq 0$ se tiene que $dist(x, V) = \|x\|_X > 0$ entonces por el corolario 1.2.1 existe $F \in X'$ tal que $\|F\|_{X'} = 1$ y $\langle F, x\rangle = \|x\|_X$. A tal funcional F se llama soporte de x y lo denotaremos por F_x.

Definición 1.2.1. Al operador $\mathcal{F} : X \to X'$ dado por

$$\mathcal{F}(x) = \{F \in X' : \|F\|_{X'} = 1 \ \text{ y } \ \|x\|_X = \langle F, x\rangle\} \tag{1.1}$$

se llama operador dualidad normalizado y siempre es convexo.

Terminaremos esta sección con el siguiente corolario del teorema de Hahn-Banach el cual nos ayudará cuando definamos el espacio X''.

Corolario 1.2.2. *Sea X un espacio normado. Entonces, para toda $x \in X$*

$$\|x\|_X = \max_{0\neq F\in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|_{X'}} = \sup_{0\neq F\in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|_{X'}} = \|F\|_{X'}.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], lema 2.4.

■

Del corolario anterior se sigue que si $F \in \mathcal{F}(x)$ entonces $1 = \|F\|_{X'} = \|x\|_X$. Por lo tanto el operador dualidad normalizado se puede expresar como

$$\mathcal{F}(x) = \left\{F \in X' : \|F\|_{X'} = \|x\|_X \ \text{ y } \ \langle F, x\rangle = \|x\|_X^2\right\} \tag{1.2}$$

1.3. Seminormas

Sea X un espacio vectorial. Una función $p : X \to \mathbb{R}$ que satisface

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, \ y \in X$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $\forall$ $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

se llama seminorma. Usando 1. se obtiene que $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ y poniendo en esta desigualdad $y = 0$ se obtiene que una seminorma es siempre positiva y de 2. se tiene que $p(0) = 0$.

Recordemos que en espacios normados la continuidad de una función $F : X \to Y$ queda caracterizada por medio de sucesiones, es decir, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en X tal que

$$\|x - x_n\|_X \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|F(x) - F(x_n)\|_Y \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Proposición 1.3.1. *Si una seminorma p es continua en 0. Entonces, p es continua.*

Prueba. Sean p una seminorma continua en cero y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ entonces $x - x_n \to 0$. Por continuidad de p en cero obtenemos que

$$0 \leq |p(x) - p(x_n)| \leq p(x - x_n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por lo tanto $p(x_n) \to p(x)$.

■

1.4. Subdiferencial

Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa se sabe que F es localmente Lipschitz continua en $\mathbb{R}^n$, esto es,

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| \quad \forall\ x,\ y \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces, por el teorema de Rademacher $F : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable c.d. en U. En general, en un espacio de Banach una función convexa no es diferenciable con lo que la noción de subdiferencial sirve como un sustituto de la derivada.

Definición 1.4.1. Sea $F : X \to \mathbb{R}$ una función convexa no trivial en un espacio normado X. Diremos que el conjunto definido por

$$\partial F(x) = \{P \in X' :\ \langle P, y - x\rangle \leq F(y) - F(x) \quad \forall\ y \in Dom(F)\},$$

se llama subdiferencial de F en x y a los elementos de $\partial F(x)$ se conocen como subgradientes.

Veamos que (1.2) es realmente la subdiferencial del funcional $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$.
Sea $P \in \partial F(x)$ entonces se cumple para toda $y \in X$

$$\langle P, y - x\rangle \leq \frac{1}{2}\left(\|y\|_X^2 - \|x\|_X^2\right)$$

en particular tomando $y = x + th$ con $t > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle P, th\rangle &\leq \frac{1}{2}\left(\|x + th\|_X^2 - \|x\|_X^2\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left([\|x\|_X + \|th\|_X]^2 - \|x\|_X^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x\|_X^2 + 2\|x\|_X\|th\|_X + \|th\|_X^2 - \|x\|_X^2\right)\\
&= \|x\|_X\|th\|_X + \frac{t^2}{2}\|h\|_X^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle P, h\rangle \leq \|x\|_X\|h\|_X + \frac{t}{2}\|h\|_X^2$ y haciendo tender t a cero tenemos

$$\langle P, h\rangle \leq \|x\|_X\|h\|_X \quad \Rightarrow \quad \|P\|_{X'} \leq \|x\|_X. \tag{1.3}$$

Para la desigualdad inversa, es decir,

$$\|x\|_X \leq \|P\|_{X'} \quad \forall\ P \in \partial F,$$

tomemos $y = \lambda x$ con $\lambda \in (0, 1)$ entonces

$$(\lambda - 1)\langle P, x\rangle = \langle P, y - x\rangle \leq \frac{1}{2}\left(\|y\|^2 - \|x\|^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right)\|x\|_X^2 = \frac{(\lambda + 1)(\lambda - 1)}{2}\|x\|_X^2.$$

Por lo tanto $\langle P, x\rangle \geq \frac{\lambda+1}{2}\|x\|_X^2$ y haciendo tender λ a 1 tenemos

$$\|x\|_X^2 \leq \langle F, x\rangle \leq \|F\|_{X'}\|x\|_X \quad \Rightarrow \quad \|x\|_X \leq \|F\|_{X'}. \tag{1.4}$$

Finalmente observe que (1.3) y (1.4) implican que $\langle F, x\rangle \leq \|F\|_{X'}\|x\|_X = \|x\|_X^2$ y $\langle F, x\rangle \geq \|x\|_X^2$. Por lo tanto

$$\|F\|_{X'} = \|x\|_X \quad \text{y} \quad \langle F, x\rangle = \|x\|_X^2.$$

Ahora si $F \in \mathcal{F}(x)$ entonces

$$\begin{aligned}\langle F, y-x\rangle &= \langle F, y\rangle - \|x\|_X^2 \\ &\leq \|F\|_{X'}\|y\|_X - \|x\|_X^2 \\ &= \|x\|_X\|y\|_X - \|x\|_X^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\|y\|_X - \|x\|_X\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\|y\|_X^2 - \|x\|_X^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|y\|_X^2 - \|x\|_X^2\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\partial F(x) = \left\{P \in X' : \|P\|_{X'} = \|x\|_X \ \text{ y } \ \langle P, x\rangle = \|x\|_X^2\right\}. \tag{1.5}$$

Para un subconjunto convexo K de X se define la función indicadora y el soporte de K por

$$I_K : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \qquad \sigma_K : X' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\begin{aligned} I_K(x) &:= 0 \text{ si } x \in K \qquad \sigma_K(P) := \sup_{y\in K}\langle P, y\rangle. \\ I_K(x) &:= \infty \text{ si } x \notin K \end{aligned}$$

Si $0 \in K$ se tiene que $\sigma_K \geq 0$ pues $0 = \langle P, 0\rangle \leq \sup_{y\in K}\langle P, y\rangle$. Ahora si $K = B$ es la bola unitaria con centro en el origen 0 entonces $\sigma_B(P) = \|P\|_{X'}$.

La siguiente proposición resume las propiedades que usaremos de la subdiferencial de la función indicadora.

Proposición 1.4.1. *Sea K un subconjunto convexo en X. Entonces, la función indicadora I_K tiene las siguientes propiedades:*

a) $\partial I_K(x) = \{P \in X^* : \langle P, x\rangle = \sigma_K(P)\}$.

b) *Si* $m > 0$ *, entonces* $\partial I_K(mx) = m\partial I_K(x)$.

c) *Si* $x \in Int(K)$ *entonces* $\partial I_K(x) = \{0\}$.

d) *Si* $K = B$ *es la bola unitaria. Entonces, para* $\|x\| = 1$ *se tiene que* $\partial I_K(x) = \{\lambda Lx\}_{\lambda\geq 0}$ *donde* $Lx \in \mathcal{F}(x)$.

Prueba.

a): Sea $G \in \partial I_K(x)$ entonces $\langle G, y-x\rangle \leq I_K(y) - I_K(x)$ entonces $\langle G, y-x\rangle \leq 0$ entonces $\sup_{y\in K}[\langle G, y\rangle - \langle G, x\rangle] \leq 0$, por lo tanto, $\sup_{y\in K}\langle G, y\rangle \leq \langle G, x\rangle$, es decir, $\sigma_K(P) \leq \langle G, x\rangle$.
Por otro lado tomando $G \in \{P \in X^* : \langle P, x\rangle = \sigma_K(P)\}$ entonces $\langle G, x\rangle = \sup_{y\in K}\langle G, y\rangle$, por lo que, $\langle G, y-x\rangle \leq 0$, así, $G \in \partial I_K(x)$.

b): Si $m > 0$ entonces

$$\begin{aligned}\partial I_K(mx) &= \{P \in X' : \langle P, y - mx\rangle \leq 0 \ \forall\ y \in X\} \\ &= \{P \in X' : \langle mP, \frac{1}{m}y - x\rangle \leq 0 \ \forall\ y \in X\} \\ &= \{P \in X' : \langle mP, z - x\rangle \leq 0 \ \forall\ z \in X\} \\ &= m\partial I_K(x).\end{aligned}$$

c): Si $x \in Int(K)$ entonces $K - x$ contiene una vecindad del origen entonces

$$0 = \sigma_{K-x}(P) = \|P\|_{X'} \quad \Rightarrow \quad P = 0.$$

d): Si $P \in \partial I_B(x)$ entonces

$$\langle P, x\rangle = \sigma_B(P) = \|P\|_{X'}.$$

Como $x \neq 0$ pues $\|x\| = 1$ entonces existe $Lx \in \mathcal{F}(x)$ así

$$\begin{aligned}\langle P, x\rangle &= \|P\|_{X'}\|x\|_X^2\\ &= \|P\|_{X'}\langle Lx, x\rangle\\ &= \langle \|P\|_{X'}Lx, x\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto $P = \lambda Lx$ con $\lambda = \|P\|_{X'}$. Para la otra contención si $Lx \in \mathcal{F}(x)$ entonces para toda $y \in B$ y $\lambda \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle \lambda Lx, y - x\rangle &= \lambda\left(\langle Lx, y\rangle - \langle Lx, x\rangle\right)\\ &\leq \lambda\left(\|Lx\|_{X'}\|y\|_X - \|x\|_X^2\right)\\ &\leq \lambda\left(\|x\|_X\|y\|_X - \|x\|_X^2\right)\\ &\leq \lambda\left(\|y\| - 1\right)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda Lx \in \partial I_B(x)$.

Definición 1.4.2. A $\partial I_K(x)$ cuando K es un subconjunto convexo y $x \in K$ se llama norma cono y se denota por $N_K(x)$.

1.5. Cálculo diferencial en espacio de Banach

Consideremos $X := (X, \|\cdot\|_X)$, $Y := (Y, \|\cdot\|_Y)$ y $Z := (Z, \|\cdot\|_Z)$ tres espacios de Banach. Sea $\Omega \subset X$ y $\chi \subset Y$ subconjuntos abierto.

Definición 1.5.1. Diremos que la función $F : \Omega \to Y$ tiene derivada de Fréchet o es F-diferenciable en $x_0 \in \Omega$, si existe $DF \in L(X, Y)$ tal que

$$\|F(x) - F(x_0) - DF(x - x_0)\|_Y = o(\|x - x_0)\|_X).$$

En el caso en que para todo punto $x \in \Omega$ existe la derivada de Fréchet y la aplicación

$$DF : \Omega \to L(X, Y), \quad x \mapsto DF(x),$$

es continua diremos que F es continuamente diferenciable en Ω.

Cuando $Y = \mathbb{R}$ y F es Fréchet diferenciable en x. Entonces, por el producto de dualidad tenemos que

$$DF(x)y = \langle DF(x), y\rangle \quad \forall\ y \in X.$$

Enunciaremos algunas propiedades de la derivada de Fréchet las cuales se pueden consultan en [2] y [6].

Proposición 1.5.1.

1. *Si F tiene derivada de Fréchet en x_0. Entonces, $DF(x_0)$ es ínico.*

2. *Si F tiene derivada de Fréchet en x_0. Entonces, F es continua en x_0.*

3. *Sean $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ y $F, G : \Omega \to Y$ con derivada de Fréchet en x_0. Entonces*

$$D[\lambda F + \mu G](x_0) = \lambda DF(x_0) + \mu DG(x_0).$$

4. *Sean $F : \Omega \to \chi$ y $G : \chi \to Z$ con derivada de Fréchet en x_0 y $F(x_0)$ respectivamente. Entonces,*

$$D(G(F(x_0))) = DG(F(x_0)) \cdot DF(x_0).$$

Definición 1.5.2. Diremos que la función $F : \Omega \to Y$ tiene derivada de Gâteaux o es G-diferenciable en $x_0 \in \Omega$, si existe $dF(x_0, h) \in Y$ tal que para todo $h \in X$ y $x_0 + th \in \Omega$ se cumple

$$\|F(x_0 + th) - F(x_0) - tdF(x_0, h)\|_Y = o(t).$$

Igualmente si para todo punto $x \in \Omega$ existe la derivada de Gâteaux diremos que F es G-diferenciable en Ω y en tal caso

$$dF(x, h) = \frac{d}{dt} F(x + th) \mid_{t=0} \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Proposición 1.5.2.

1. *Si F tiene derivada de Gâteaux en x_0. Entonces, $dF(x_0, h)$ es ínico.*

2. *Para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple $dF(x_0, \lambda h) = \lambda dF(x_0, h)$.*

3. *Si F tiene derivada de Gâteaux en x_0. Entonces, para toda $h \in X$ y $G \in Y'$ la función*

$$\varphi(t) = \langle G, F(x_0 + th)\rangle \quad \textit{es diferenciable en } t = 0 \quad y \quad \varphi'(t) = \langle G, dF(x_0, h)\rangle.$$

4. *Si F tiene derivada de Gâteaux en Ω y el segmento $\{x + th :\ t \in [0, 1]\} \subset \Omega$. Entonces,*

$$\|F(x + h) - F(x)\|_Y \leq \sup_{0<t<1} \|dF(x + th, h)\|_Y.$$

5. *Si F tiene derivada de Fréchet en x_0. Entonces, F tiene derivada de Gâteaux en x_0 dada por*

$$dF(x_0, h) = DF(x_0)h \quad \forall\ h \in X.$$

Los dos proposiciones anteriores nos dicen las diferencias de la F-derivada y G-derivada.

1. La derivada de Fréchet es una función. En cambio, la derivada de Gâteaux es un vector.

2. La derivada de Fréchet es lineal y continua. En cambio, la derivada de Gâteaux no necesariamente.

Teorema 1.5.1. *Supongamos que F tiene derivada de Gâteaux en Ω. Si existe $\mathcal{A} \in L(X, Y)$ tal que*

$$\frac{d}{dt} F(x + th) \mid_{t=0} = \mathcal{A}(x)h \quad \forall\ h \in X \quad y \quad x \mapsto \mathcal{A}(x) \quad \textit{es continua en } x_0.$$

Entonces, F tiene derivada de Fréchet en x_0 con $DF(x_0) = \mathcal{A}(x_0)$.

Prueba. Ver, por ejemplo, [6] teorema 1.1.3.

Recordemos que una función $F : X \to \mathbb{R}$ es convexa si su dominio es convexo y

$$\forall\ x, y \in X \quad \Rightarrow \quad F(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda F(y) + (1-\lambda)F(x) \quad \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Lema 1.5.1. *Sea $F : X \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable en $x,\ y \in \Omega$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) *F es convexa.*

b) $\langle DF(x), y-x\rangle + F(x) \leq F(y)$.

c) $\langle DF(y) - DF(x), y-x\rangle \geq 0$.

Prueba.

$a) \Rightarrow b)$: Si F es convexa se cumple para toda $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(x+\lambda(y-x)) &= F(\lambda y + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda F(y) + (1-\lambda)F(x) \\ &= \lambda[F(y) - F(x)] + F(x), \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{F(x+\lambda(y-x)) - F(x)}{\lambda} \leq F(y) - F(x) \quad \Rightarrow \quad \langle DF(x), y-x\rangle \leq F(y) - F(x) \text{ cuando } \lambda \to 0.$$

$b) \Rightarrow a)$: Como F es Fréchet diferenciable en $x,\ y \in \Omega$ entonces también lo es en $z_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$ para $\lambda \in [0,1]$ con lo que

$$\langle DF(z_\lambda), y - z_\lambda\rangle \leq F(y) - F(z_\lambda) \quad \text{y} \quad \langle DF(z_\lambda), x - z_\lambda\rangle \leq F(x) - F(z_\lambda),$$

entonces

$$(1-\lambda)\langle DF(z_\lambda), y - z_\lambda\rangle \leq (1-\lambda)\left(F(y) - F(z_\lambda)\right) \quad \text{y} \quad \lambda\langle DF(z_\lambda), x - z_\lambda\rangle \leq \lambda\left(F(x) - F(z_\lambda)\right),$$

sumando ambas tenemos el resultado. En efecto,

$$0 = \langle DF(z_\lambda), \lambda x + (1-\lambda)y - z_\lambda\rangle \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(z_\lambda).$$

$b) \Rightarrow c)$: Si se cumple la desigualdad entonces

$$\langle DF(x), y-x\rangle \leq F(y) - F(x) \quad \text{y} \quad \langle DF(y), x-y\rangle \leq F(x) - F(y).$$

Por lo tanto

$$\langle DF(x), y-x\rangle \leq F(y) - F(x) \leq \langle DF(y), y-x\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle DF(y) - DF(x), y-x\rangle \geq 0.$$

$c) \Rightarrow b)$: Consideremos la función auxiliar $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(\lambda) = \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(y + \lambda(x-y)),$$

Como ϕ es diferenciable con

$$\phi'(\lambda) = F(x) - F(y) - \langle DF(y + \lambda(x-y)), x-y\rangle,$$

evaluando en $\lambda = 1$

$$\phi'(1) = F(x) - F(y) - \langle \nabla F(x), x - y \rangle,$$

y restando estas igualdades obtenemos que

$$\begin{aligned}
\phi'(\lambda) - \phi'(1) &= \langle DF(x) - DF(y + \lambda(x-y)), x - y \rangle \\
&= \langle DF(x) - DF(y + \lambda(x-y)), x - y - \lambda(x-y) + \lambda(x-y) \rangle \\
&= \langle DF(x) - DF(y + \lambda(x-y)), x - y - \lambda(x-y) \rangle + \\
&\quad \langle DF(x) - DF(y + \lambda(x-y)), \lambda(x-y) \rangle \\
&\geq \lambda \langle DF(x) - DF(y + \lambda(x-y)), x - y \rangle \\
&= \lambda \left(\phi'(\lambda) - \phi'(1) \right),
\end{aligned}$$

integrando y observando que $\phi(0) = 0$ tenemos

$$\phi'(1) \leq \phi'(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \int_0^\lambda \phi'(1)\, ds \leq \int_0^\lambda \phi'(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \lambda\phi'(1) \leq \phi(\lambda).$$

Evaluamos en $\lambda = 1$ tenemos $\phi'(1) \leq \phi(1) = 0$. Por lo tanto

$$\phi'(1) = F(x) - F(y) - \langle \nabla F(x), x - y \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla F(x), y - x \rangle \leq F(y) - F(x).$$

$\blacksquare$

Teorema 1.5.2. *Sea $F : U \to \mathbb{R}$ una función convexa y Fréchet diferenciable en x_0. Entonces $\partial F(x_0) = \{DF(x_0)\}$.*

Prueba. Como F es convexa se tiene que $\langle DF(x_0), y - x_0 \rangle \leq F(y) - F(x_0)$ así $DF(x_0) \in \partial F(x)$. Sea $P \in \partial F(x_0)$ por definición se tiene

$$\langle P, y - x_0 \rangle \leq F(y) - F(x_0) \quad \forall\ y \in Dom(F),$$

en particular se cumple si $y = x_0 + th$ para toda $h \in X$ y $t > 0$

$$\langle P, x_0 + th - x_0 \rangle \leq F(x_0 + th) - F(x_0) \quad \Rightarrow \quad \langle P, h \rangle \leq \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t},$$

entonces

$$\langle DF(x_0) - P, h \rangle \geq 0 \text{ cuando } t \to 0.$$

Por otro lado como $DF(x_0),\ P \in \partial F(x_0)$ entonces para toda $h \in X$ se cumple

$$\langle DF(x_0), h \rangle \leq F(x_0 + th) - F(x_0) \quad \text{y} \quad \langle P, h \rangle \leq F(x_0 + th) - F(x_0),$$

restando la primera con la segunda se tiene que

$$\langle DF(x_0) - P, h \rangle \leq 0,$$

por lo tanto $DF(x_0) = P$.

$\blacksquare$

Teorema 1.5.3. *Sean K un subconjunto convexo de X y $F : X \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable.*

a) Si x_0 maximiza a F sobre K. Entonces, es una solución de $DF(x) \in \partial I_K(x)$.

b) Si x_0 minimiza a F sobre K. Entonces, $0 \in DF(x_0) + \partial I_K(x_0)$.

Prueba.

a): Supongamos que x_0 maximiza a F sobre K entonces para toda $y \in K$ se cumple $F(y) \leq F(x_0)$. Puesto que K es convexo se tiene que $z_\lambda \in K$ con $z_\lambda := \lambda y + (1-\lambda)x_0 = x_0 + \lambda(y - x_0)$ y $\lambda \in [0,1]$ así

$$\begin{aligned} F(z_\lambda) \leq F(x_0) &\Rightarrow \frac{F(x_0 + \lambda(y - x_0)) - F(x_0)}{\lambda} \leq 0 \\ &\Rightarrow \langle DF(x_0), y - x_0 \rangle \leq 0 \text{ cuando } \lambda \to 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $DF(x_0) \in \partial I_K(x_0)$.

b): Similarmente si x_0 minimiza a F sobre K se tiene que $\langle DF(x_0), y - x_0 \rangle \geq 0$ esto implica $-DF(x_0) \in \partial I_K(x_0)$. Por lo tanto $0 = DF(x_0) + (-DF(x_0)) \in DF(x_0) + \partial I_K(x_0)$.

■

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x en un espacio de normado X si para toda $F \in X'$ se cumple

$$|\langle F, x - x_n \rangle| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

y se denota por $x_n \rightharpoonup x$.

Definición 1.5.3. Diremos que una función $F : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente (s.c.i.), si para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel

$$F_\lambda = \{x \in X : \; F(x) \leq \lambda\}$$

es cerrado. Y F es (débilmente) secuencialmente semicontinua inferiormente ((d.) s.s.c.i) en x_0 si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$ ($x_n \rightharpoonup x_0$) se cumple

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) := \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} F(x_k) \geq F(x_0).$$

Proposición 1.5.3. *Sea $F : U \to \mathbb{R}$ una función convexa y Fréchet diferenciable en Ω. Entonces, F es d.s.c.i. en U.*

Prueba. Como F es Fréchet diferenciable se tiene que $DF(x) \in U'$ con lo que para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a x se cumple

$$\langle DF(x), x_n \rangle \to \langle DF(x), x \rangle \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto por la convexidad de F tenemos

$$\liminf_{n\to\infty} (F(x_n) - F(x)) \geq \liminf_{n\to\infty} \langle DF(x), x_n - x \rangle = 0.$$

■

Capítulo 2

Espacios de Hilbert

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Sea V un espacio vectorial. Se dice que $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno real si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y para toda $x, y, z \in V$ se cumple

1. $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0$ sii $x = 0$.
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
3. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$.
4. $(x, y) = (y, x)$.

Las principales propiedades del producto interno se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Sea V un epacio con producto interno real. Entonces,*

1. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz* $|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}}$.
2. $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ *define una norma sobre V.*
3. *Identidad del paralelogramo* $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
4. *Identidad de polarización* $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.
5. *Para $y \in V$ fijo entonces las aplicaciones $x \to (x, y)$ y $x \to (y, x)$ son L-continuas.*

Un espacio con producto interno real V en el cual toda sucesión fundamental es convergente bajo la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

se llama espacio de Hilbert y lo denotaremos por H.

Lema 2.1.1. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado y distinto del vacío de un espacio de Hilbert H. Entonces, existe un único elemento $z \in K$ que minimiza el funcional $F(y) = \|x - y\|$ sobre K, esto es,*

$$F(z) = \|x - z\| = \min_{y \in K} \|x - y\| \quad \forall\ x \in H,$$

tal mínimo se caracteriza por la propiedad

$$z \in K \quad y \quad (x - z, y - z) \leq 0 \quad \forall\ y \in K.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 4.5.

■

Dado un subconjunto M de un espacio de Hilbert H se define el espacio ortogonal a M como
$$M^{\perp} = \{y \in H : (x, y) = 0 \ \forall \ x \in M\}.$$

Teorema 2.1.1 (Teorema de proyección). *Sea V un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces*
$$H = V \oplus V^{\perp}.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 2.3.

■

Si H se descompone como en el teorema anterior entonces para toda $x \in H$ se tiene que $x = y + z$ con $y \in V$ y $z \in V^{\perp}$ por lo tanto usando el lema 2.1.1 se tiene que y es el punto de V más cercano a x, esto es,

$$\|x - y\| = \inf_{w \in V} \|x - w\|. \tag{2.1}$$

Al elemento y de (2.1) se le conoce como la proyección ortogonal de H sobre V.

Definición 2.1.2. Se dice que $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal de vectores en H si

$$(x_n, x_m) = 0 \quad \forall \ x_n, \ x_m \in A, \quad n \neq m \quad \text{y} \quad \|x_n\| = 1 \quad \forall \ x_n \in A.$$

Si A es un conjunto ortonormal en H entonces se cumple para toda $x \in H$ la siguiente desigualdad conocida como la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x_n, x)|^2 \leq \|x\|. \tag{2.2}$$

Si A además satisface que $\overline{A} = H$ entonces A es una base ortonormal, es decir, es una base de Hilbert. Diremos que $B = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\perp} = \{0\}$, esto es, si $x \in H$ y $(x, z_n) = 0$ para toda n entonces $x = 0$.

Recordemos que un espacio normado X es separable si posee un subconjunto denso numerable. Si H es un espacio de Hilbert se sabe que es separable si H posee una base de Hilbert numerable (Ver, por ejemplo, [4], Lema 9.11). De adelante supondremos que H es separable.

Teorema 2.1.2 (Caracterización de bases). *Sea $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base ortonormal para H.*

b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un conjunto completo.*

c) *Para cada $x \in H$ se tiene el desarrolla en serie de Fourier*
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, x_n) x_n.$$

d) *Para toda $x, y \in H$ se cumple*
$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, x_n)(y, x_n).$$

e) *Para toda $x \in H$ se cumple la identidad de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, x_n)^2.$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [5], capítulo I, proposición 40.

■

Sea $V \subset H$ un subespacio cerrado con base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, para $x \in H$ definimos la suma

$$P_V(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n, x)x_n, \tag{2.3}$$

que es la proyección ortogonal de H sobre V. De la desigualdad (2.2) se sigue que $P_V \in \mathcal{L}(H, V)$.

Corolario 2.1.1. *Sean H un espacio de Hilbert separable, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, el operador lineal definido por*

$$T(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (x, e_n)e_n,$$

es compacto.

Prueba. Puesto que $(\lambda_n)_n$ es convergente se sabe que:

1. existe $M > 0$ tal que $|\lambda_n| \leq M$.
2. para toda $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$ se tiene que $|\lambda_n - 0| \leq \varepsilon$.

Como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal se cumple la identidad de Parseval

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x, e_n)|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = M^2 \|x\|^2.$$

Por lo tanto $T \in \mathcal{L}(H)$. Finalmente considerando la sucesión $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de operadores de rango finito definidos por

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (x, e_n)e_n.$$

Entonces por 2. y la identidad de Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(x) - T_m(x)\|^2 &= \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x, e_n)|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, e_n)|^2 \\ &= \varepsilon^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T - T_m\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$ si $m \to \infty$ así $T \in K(H)$.

■

Terminamos esta sección demostrando una caracterización de densidad en H. Para esto, denotaremos por $gen\{M\}$ al espacio generado por el subconjunto M de H.

Teorema 2.1.3. *Sean H un espacio de Hilbert y M es un subconjunto no vació de H. Entonces los siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $M^{\perp} = \{0\}$.

b) $H = \overline{gen\{M\}}$.

Prueba.

a) $\Rightarrow$ *b)* : Como $M \subset gen\{M\}$ entonces si $x \in gen\{M\}^{\perp}$ se tiene que $(x, a) = 0$ para $a \in M$ pues $M \subset gen\{M\}$ en consecuencia $gen\{M\}^{\perp} \subset M^{\perp} = \{0\}$ y por el teorema de la proyección se tiene que

$$\begin{aligned} H &= gen\{M\}^{\perp} \oplus gen\{M\}^{\perp\perp} \\ &= gen\{M\}^{\perp} \oplus \overline{gen\{M\}} \\ &= \overline{gen\{M\}}. \end{aligned}$$

b) $\Rightarrow$ *a)* : Sea $x \in M^{\perp}$ entonces por densidad existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $gen\{M\}$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y por la continuidad del producto interno se tiene que

$$\|x\|^2 = (x, x) = \lim_{n\to\infty} (x, x_n) = 0.$$

Por lo tanto $x = 0$.

■

2.2. Formas bilineales

Definición 2.2.1. Sea H un espacio Hilbert real se dice que la función $B : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal si para todo $x, y, z \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisface:

1. $B(x + \lambda y, z) = B(x, z) + \lambda B(y, z)$,
2. $B(x, y + \lambda z) = B(x, y) + \lambda B(x, z)$.

Teorema 2.2.1. *Para una forma bilineal B las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *B es continua.*

b) *Existe $M > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x,\ y \in H$.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [7], 5.5.1.

■

Teorema 2.2.2. *Sea B una forma bilineal continua. Entonces, $F(x) = B(x, x)$ es Fréchet diferenciable con*

$$\langle DF(x), v\rangle = B(x, v) + B(v, x) \quad \forall\ v \in H.$$

Prueba. Para toda $v \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} F(x + v) - F(x) &= B(x + v, x + v) - B(x, x) \\ &= B(x, v) + B(v, x) + B(v, v). \end{aligned}$$

Por continuidad de B existe $M > 0$ tal que $|B(v,v)| \leq M\|v\|^2$ esto implica que

$$0 \leq \frac{|B(v,v)|}{\|v\|} \leq M\|v\| \to 0 \quad \text{cuando } v \to 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{v\to 0} \frac{|F(x+v) - F(x) - (B(x,v) + B(v,x))|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} \frac{|B(v,v)|}{\|v\|} = 0.$$

Por unicidad de la derivada de Fréchet se deduce que $\langle DF(x), v\rangle = B(x,v) + B(v,x)$.

■

Teorema 2.2.3. *Sea B una forma bilineal continua, positiva y simétrica. Entonces, $F(x) = B(x,x)$ es convexa.*

Prueba. Por el teorema anterior se tiene que

$$\langle DF(x), v\rangle = B(x,v) + B(v,x) = 2B(x,v) \quad \forall\, v \in H.$$

Así

$$\langle DF(x), y - x\rangle + F(x) - F(y) = \langle DF(x), y\rangle - \langle DF(x), x\rangle + F(x) - F(y)$$

Sustituyendo la expresión se tiene que

$$2B(x,y) - 2B(x,x) + B(x,x) - B(y,y) = -[B(x,x) - B(x,y) - B(x,y) + B(y,y)]$$

Por lo que

$$-[B(x,x) - B(x,y) - B(x,y) + B(y,y)] = -[B(x,x-y) - B(y,x-y)] = -B(x-y,x-y) \leq 0$$

Por lo tanto

$$\langle DF(x), y - x\rangle + F(x) - F(y) \leq 0$$

es decir, F es convexa por el lema 1.5.1

■

Definición 2.2.2. Una forma bilineal $B : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice que

1. Es simétrica si para todo $x, y \in H$ se cumple que $B(x,y) = B(y,x)$.
2. $x,\ y \in H$ son B-ortogonales si $B(x,y) = 0$.
3. Si V es un subespacio cerrado en H diremos que H se descompone como $V \bigoplus_B V^\perp$ si dado $x \in H$ entonces

   $$x = y + z \quad y \in V \quad z \in V^\perp \quad , \quad V \cap V^\perp = \{0\} \quad y \quad y,\ z \text{ son } B\text{-ortogonales.}$$

4. Es coerciva en H o H-coerciva si existe $m > 0$ tal que para todo $x \in H$ se satisface

   $$B(x,x) \geq m\|x\|^2.$$

5. Si B define un producto interno en H y existen contantes $m > 0$ y $M > 0$ tales que

   $$mB(x,y) \leq (x,y) \leq MB(x,y),$$

   entonces B es equivalente al producto interno usual en H.

El siguiente teorema nos dice que toda forma bilineal B simétrica, continua y H-coerciva es un producto interno real y equivalentes al producto interno usual en H.

Teorema 2.2.4. *Sean H un espacio de Hilbert real y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, continua y H-coerciva. Entonces, B es un producto interno que es equivalente al producto interno usual.*

Prueba. Para demostrar que B es un producto interno es suficiente probar $B(x,x) = 0$ implica $x = 0$. Como B es H-coerciva entonces existe una constante $m > 0$ tale que

$$m\|x\|^2 \leq B(x,x) \quad \forall\, x \in H,$$

entonces $\|x\| = 0$ si $B(x,x) = 0$ de donde se sigue el resultado. Para $x, y \in H$ por la identidad de polarización se tiene

$$\begin{aligned} 4m(x,y) &= m\|x+y\|^2 - m\|x-y\|^2 \\ &\leq B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) \\ &= 4B(2x, 2y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{m}{4}(x,y) \leq B(x,y)$.
Veamos la otra desigualdad, como B es continua con constante de continuidad $M \geq 0$ y es un producto interno entonces por la identidad de polarización se tiene que

$$\begin{aligned} 4B(2x, 2y) &= B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) \\ &\leq M\|x+y\|^2 - M\|x-y\|^2 \\ &= M4(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B(x,y) \leq \dfrac{M}{4}(x,y)$.

■

Observe que si B es un producto interno equivalente al producto interno usual en H y tomando $y = x$ se tiene que

$$mB(x,x) \leq \|x\| \leq MB(x,x) \quad \forall\, x \in H,$$

entonces diremos que $(B(x,x))^{1/2}$ es una norma equivalente a la norma usual en H.

Proposición 2.2.1. *Sean H de Hilbert real y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, continua y H-coerciva. Entonces,*

a) *$F(x) = B(x,x)$ es una función convexa.*

b) *$Ker(F)$ es un subespacio cerrado.*

Prueba.

a) Para toda $x, y \in H$ se cumple $2B(x,y) \leq F(x) + F(y)$ y además

$$\begin{aligned} B(x,x) - 2B(x,y) + B(y,y) &= B(x,x) - B(x,y) - B(x,y) + B(y,y) \\ &= B(x, x-y) - B(x-y, y) \\ &= B(x, x-y) - B(y, x-y) \\ &= B(x-y, x-y) \geq 0, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} F(x)+\langle DF(x), y-x\rangle &= F(x)+2B(x,y-x) \\ &= 2B(x,y)-F(x) \\ &\leq F(x)+F(y)-F(x) \\ &= F(y). \end{aligned}$$

Por el lema 1.5.1 se sigue que F es convexa.

b) Sean $x, y \in Ker(F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$0 \leq F(x+\lambda y) = F(x)+2\lambda B(x,y)+\lambda^2 F(y) \leq F(x)+\lambda F(x)+\lambda F(y)+\lambda^2 F(y) = 0.$$

Por lo tanto $(x+\lambda y) \in Ker(F)$ y en consecuencia $Ker(F)$ es un subespacio. Para ver que es cerrado tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $Ker(F)$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Por continuidad de F se tiene que $0 = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Por lo tanto $x \in Ker(F)$.

■

Recordemos que la subdiferencial del funcional $F(x,x) = \frac{1}{2}(x,x)$ esta daba por

$$\partial F(x) = \{F \in H' : \|F\|_{H'} = \|x\|_H \;\; \text{y} \;\; \langle F, x\rangle = (x,x)\} \tag{2.4}$$

Si $B : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simítrica, continua y H-coerciva se sabe que es un producto interno equivalente al usual por lo que si $F(x) = B(x,x)$ la relación anterior se escribirá como

$$\partial F(x) = \left\{F \in H' : \|F\|_{H'} = \sqrt{B(x,x)} \;\; \text{y} \;\; \langle F, x\rangle = B(x,x)\right\} \tag{2.5}$$

Por lo que si $B(x,x) = 1$ con $x \in B'$ la bola unitaria entonces la subdiferencial de la función indicadora está dado por $\partial I_{B'}(x) = \{\lambda B(x,\cdot)\}$

Teorema 2.2.5. *Sean H es un espacio de Hilbert real, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simítrica, continua y H-coerciva y V un subespacio cerrado en H. Si $H = V \bigoplus_B V^\perp$, B' es la bola unitaria en V , $x \in B'$ y $G \in \partial I_{B'}(x)$. Entonces, para toda $z \in V$ se satisface*

a) Si $B(x,x) < 1$ entonces $\langle G, z\rangle = B(y,z)$ con $y \in V^\perp$.

b) Si $B(x,x) = 1$ entonces $\langle G, z\rangle = B(y,z) + \lambda B(x,z)$ con $(y,\lambda) \in V^\perp \times [0,\infty)$.

Prueba.

a) : Si $B(x,x) < 1$ entonces $x \in Int(B')$. Por la proposición 1.4.1 inciso c) se tiene que

$$\partial I_{B'}(x) = \{0\}.$$

Por lo que $\langle G, x\rangle = 0$ así para toda $z \in V$ se tiene que $\langle G, x\rangle = B(y,z)$ con $y \in V^\perp$. Ahora definamos

$$z_1 = \frac{z}{2\sqrt{B(z,z)}} \text{ con } z \in V$$

entonces

$$B(z_1, z_1) = \frac{1}{4B(z,z)} B(z,z) < 1$$

Por lo que

$$\langle G, z_1\rangle = B(y,z) \text{ con } y \in V^\perp$$

es decir

$$\langle G, z\rangle = B(y,z) \text{ con } y \in V^\perp$$

b) : Si $B(x,x)=1$ entonces por la proposición 1.4.1 incisos d) se tiene que,

$$\partial I_{B'}(x)=\{\lambda B(x,\cdot):\lambda\geq 0\}.$$

Por lo que si $G\in\partial I_{B'(x)}$ entonces

$$\langle G,x\rangle=\lambda B(x,z)\ \Rightarrow\ \langle G,x\rangle-\lambda B(x,z)=0\ \Rightarrow\ \langle G,x\rangle-\lambda B(x,z)=B(y,z).$$

Por lo tanto

$$\langle G,x\rangle=\lambda B(x,z)+B(y,z)\text{ donde }(y,\lambda)\in V^{\perp}\times[0,\infty)$$

. Ahora definamos

$$z_1=\frac{z}{\sqrt{B(z,z)}}\text{ con }z\in V$$

entonces

$$B(z_1,z_1)=\frac{1}{B(z,z)}B(z,z)=1$$

Por lo que

$$\langle G,z_1\rangle=\lambda B(z_1,z)+B(y,z)\text{ donde }(y,\lambda)\in V^{\perp}\times[0,\infty)$$

es decir

$$\langle G,z\rangle=\lambda B(z_1,z)+B(y,z)\text{ donde }(y,\lambda)\in V^{\perp}\times[0,\infty)$$

■

Sea K la bola unitaria como en el teorema anterior. Si $x\in K$ maximiza a $F(x)=B(x,x)$ en K se tiene por el teorema 1.5.3 que $DF(x)\in\partial I_K(x)$ por lo que si W es una forma bilineal continua, simítrica y H-coersiva tal que $W(x,x)=1$ entonces por el teorema anterior se tiene que

$$2B(x,z)=\langle G,z\rangle\quad\text{para alguna}\quad G\in\partial I_K(x)$$

Por lo que

$$2B(x,z)=\lambda W(x,z)+W(y,z)\tag{2.6}$$

Esta relación y el siguiente teorema sobre bases serán fundamentales en nuestro desarrollo.

Teorema 2.2.6. *Sean $V=(V,(\cdot,\cdot)_V)$ y $H=(H,(\cdot,\cdot)_H)$ espacios de Hilbert separables tal que $\overline{V}=H$ y V está compactamente encajado en H, $B:V\times V\to\mathbb{R}$ una forma bilineal continua simétrica y V-coerciva. Supongamos que $\Lambda=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de V tal que*

1. *$B(e_k,e_l)=\delta_{kl}$*
2. *$B(e_k,v)=\lambda_k(e_k,v)_H$ para todo $v\in V$ con $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq...\leq\lambda_n\leq...$*

Entonces, $\mathcal{C}=\{\tilde{e}_n=\sqrt{\lambda_n}e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H.

Prueba. Puesto que

$$(\tilde{e}_k,\tilde{e}_l)_H=\begin{cases}\lambda_k(e_k,e_k)_H=B(e_k,e_k)=1 & \text{si } k=l\\[2ex] \sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}(e_k,e_l)_H=\dfrac{\sqrt{\lambda_l}}{\sqrt{\lambda_k}}B(e_k,e_l)=0 & \text{si } k\neq l.\end{cases}$$

Entonces, $\mathcal{C}$ es un conjunto H-ortonormal de H. Finalmente demostremos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto maximal de H.
Sea $h \in H$ entonces por densidad de V existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $h = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ y puesto que Λ es base de V se tiene que $v_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (v_n, e_k)_V e_k$ y por continuidad del encaje tenemos

$$h = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} (v_n, e_k)_V e_k.$$

Luego si $(h, \tilde{e}_m)_H = 0$ para toda $m \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 = \left(h, \sqrt{\lambda_k}\tilde{e}_m\right)_H &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} (v_n, e_k)_V e_k \ , \ \sqrt{\lambda_k}\tilde{e}_m\right)_H \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} (v_n, e_k)_V (\tilde{e}_k, \tilde{e}_m)_H \\ &= \lim_{n\to\infty} (v_n, e_m)_V \end{aligned}$$

así $(\lim\limits_{n\to\infty} v_n, e_n)_V = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ por lo tanto $h = 0$.

■

2.3. Consecuencias del teorema de representación de Riesz

Teorema 2.3.1 (Teorema de representación de Riesz). *Sean H un espacio de Hilbert y $F \in H'$. Entonces, existe un único elemento $\mu \in H$ tal que*

$$\begin{aligned} &\langle F, v\rangle = (\mu, v) \quad \forall\ v \in H, \\ &\|F\|_{H'} = \|\mu\|. \end{aligned}$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 2.4.

■

A partir del teorema de representación de Riesz y el lema 2.1.1 se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Stampacchia). *Sean H un espacio de Hilbert real y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y H-coerciva. Si S es un subconjunto cerrado y convexo de H. Entonces, para cada $F \in H'$ existe un único $s \in S$ tal que*

$$B(s, v - s) \geq \langle F, v - s\rangle \quad \forall\ v \in S.$$

Más aún si B es simétrica, entonces s queda caracterizado por el mínimo del funcional $J : S \to \mathbb{R}$ dado por $J(v) := B(v, v) - 2\langle F, v\rangle$, es decir,

$$s \in S \quad y \quad J(s) = \min_{v\in S} J(v).$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 4.6.

■

Poniendo $S = H$ en el teorema de Stampacchia se deduce que existe un único $\mu \in H$ tal que

$$B(\mu, w - \mu) \geq \langle F, w - \mu \rangle \quad \forall\ w \in H.$$

Como H es un espacio vectorial se tiene que $v \in H$ con $v := w - \mu$ entonces

$$B(\mu, v) \geq \langle F, v \rangle \quad \forall\ v \in H.$$

En particular para $-v \in H$ se cumple

$$B(\mu, -v) \geq \langle F, -v \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle F, v \rangle \leq B(\mu, v),$$

por lo tanto existe un único elemento $\mu \in H$ tal que $B(\mu, v) = \langle F, v \rangle$ para toda $v \in H$, así hemos obtenido el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1 (Lema de Lax-Milgram). *Sean H un espacio de Hilbert real y $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua tal que*

$$B(\mu, \mu) \geq \alpha \|\mu\|^2 \quad \forall\ \mu \in H.$$

Entonces, para cada $F \in H'$ existe un único $\mu \in H$ tal que

$$B(\mu, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall\ v \in H \quad \text{ y } \quad \|\mu\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Más aún si B es simétrica, entonces μ queda caracterizado por el mínimo del funcional

$$J : H \to \mathbb{R} \text{ dado por } J(v) := B(v, v) - 2\langle F, v \rangle. \tag{2.7}$$

Poniendo $2v = x$ en (2.7) obtenemos

$$J(x) = \frac{1}{2}B(x, x) - \langle F, x \rangle.$$

el cual es Fréchet diferenciable con

$$\langle DJ(x), v \rangle = B(x, v) - \langle F, v \rangle \quad \forall\ v \in H,$$

y convexo pues

$$\begin{aligned}
\langle DJ(x), v - x \rangle + J(x) &= B(x, v - x) - \langle F, v - x \rangle + \frac{1}{2}B(x, x) - \langle F, x \rangle \\
&= B(x, v) - \frac{1}{2}B(x, x) - \langle F, v \rangle \\
&\leq \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{2}B(v, v) - \frac{1}{2}B(x, x) - \langle F, v \rangle \\
&= J(v).
\end{aligned}$$

Si B es el producto usual en H entonces

$$\langle DJ(x), v \rangle = (x, v) - \langle F, v \rangle \quad \forall\ v \in H.$$

Proposición 2.3.1 (Principio de Dirichlet). *Sea H un espacio de Hilbert y dado $F \in H'$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\mu \in H$ satisface $(\mu, v) = \langle F, v \rangle$ para toda $v \in H$.*

2. *El elemento μ es un mínimo del funcional $J : H \to \mathbb{R}$ dado por $J(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle F, x\rangle$.*

Prueba.

$a) \Rightarrow b)$ Si se cumple $(\mu, v) = \langle F, v\rangle$ para toda $v \in H$ entonces por un simple cálculo se tiene que

$$J(\mu) - J(v) \leq 0 \quad \forall\ v \in H,$$

de donde se sigue el resultado.

$b) \Rightarrow a)$ Como μ es un mínimo de J entonces para toda $v \in H$ se cumple

$$J(\mu) \leq J(v) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq J(v) - J(\mu) \quad \Rightarrow \quad 0 \in \partial J(\mu).$$

Por Teorema 1.5.2 se tiene que $\partial J(\mu) = \{DJ(\mu)\}$ esto implica que $DJ(\mu) = 0$. Por lo tanto

$$(\mu, v) - \langle F, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mu, v) = \langle F, v\rangle \quad \forall\ v \in H.$$

■

Definición 2.3.1. El espacio dual del espacio de Banach X' se define por

$$X'' = \{F : X' \to \mathbb{R} : F \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Del funcional lineal y continuo $J_x : X \to \mathbb{R}$ definido por $J_x(F) = \langle F, x\rangle$ se define el operador lineal y continuo $\mathcal{J} : X \to X''$ dado por $\mathcal{J}(x) = J_x$ que se le conoce como encaje canónico de X en X''

Por el corolario 1.2.2 se tiene que

$$\|x\|_X = \sup_{0 \neq F \in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|_{X'}} = \sup_{0 \neq F \in X'} \frac{|J_x(F)|}{\|F\|_{X'}} = \|\mathcal{J}(x)\|_{X'}$$

Por lo tanto $\mathcal{J}$ es una isometría lineal. Además $\mathcal{J}$ es inyectiva pues

$$x \in ker(\mathcal{J}) \quad \Rightarrow \quad \|x\|_X = \|\mathcal{J}(x)\|_{X'} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Definición 2.3.2. Un espacio de Banach X se dice reflexivo si el operador $\mathcal{J}$ satisface que para todo $\mathfrak{F} \in X''$ existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{F}(F) = \langle F, x\rangle$ para todo $F \in X'$, es decir, $\mathcal{J}$ es sobreyectivo.

Por el teorema de representación de Riesz para todo $F \in H'$ existe un único elemento $y \in H$ tal que

$$\langle F, x\rangle = (y, x) \quad \forall\ x \in H,$$

entonces $\mathfrak{F} = x$ esto implica que $\mathcal{J}$ es sobreyectivo y que $H = H''$. Por lo tanto todo espacio de Hilbert es un espacio reflexivo.

2.4. Topología débil

Definición 2.4.1. Se dice que una secesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en un espacio de Hilbert H convergen débilmente a $x \in H$ si para toda $y \in H$ se cumple que

$$|(y, x - x_n)| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

la cual se denota por $x_n \rightharpoonup x$.

Si una sucesión converge entonces también converge débilmente.

Proposición 2.4.1 (Propiedades de convergencia débil). *Sean* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones de elementos en* X *tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *y* $y_n \rightharpoonup y$ *y* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

1. *El límite es único.*
2. *Toda subsucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente.*
3. $\lambda x_n + \mu y_n \rightharpoonup \lambda x + \mu y$.
4. *La sucesión está acatada.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [2] y [5].

■

Se sabe que un espacio normado X es reflexivo si y solo si cada sucesión acatada en X posee una subsucesión débilmente convergente (ver por ejemplo [11], Corolario 2.8.9). Entonces para un espacio de Hilbert se tiene que:

$$\text{Si} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H \quad \text{tal que} \quad \|x_n\| \leq M \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in H \quad \text{para la cual} \quad x_n \rightharpoonup x.$$

Definición 2.4.2. Sea A un subconjunto de H se dice que

1. A es débilmente acotado si para toda $y \in H$ se cumple
$$\sup_{z\in A} |(y, z)| < \infty.$$
2. A es débilmente cerrado si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A tal que $x_n \rightharpoonup x$ en H entonces $x \in A$.

La proposición siguiente caracteriza los subconjuntos débilmente acotados y cerrados.

Proposición 2.4.2. *Sea* A *un subconjunto de* H. *Entonces,*

1. A *es débilmente acotado si y solo si* A *es acotado.*
2. *Si* A *es convexo, Entonces,* A *débilmente cerrado si y solo si* A *es cerrado.*
3. A *es débilmente compacto si y solo si* A *es débilmente cerrado y acotado.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [5], V.3.

■

Proposición 2.4.3. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un conjunto ortogonal de* H. *Entonces, su sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a cero.*

Prueba. El conjunto $A = \left\{ e_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal entonces por la desigualdad de Bessel se cumple para toda $x \in H$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2,$$

por lo que la serie es convergente lo cual implica que $(x, e_n) \to 0$ para toda $x \in H$, esto es, $e_n \rightharpoonup 0$. Por lo tanto $\|x_n\| e_n = x_n \rightharpoonup 0$.

■

El siguiente teorema nos dice que todo operador compacto manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes.

Teorema 2.4.1. *Sean X y Y espacios de Hilbert. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en X tal que $x_n \rightharpoonup x$ si $n \to \infty$. Entonces, para todo operador compacto $K : X \to Y$*

$$\|K(x) - K(x_n)\|_Y \to 0 \quad si \quad n \to \infty.$$

Prueba. Sea $F \in Y'$ entonces $F \circ K \in X'$. Como $x_n \rightharpoonup 0$ se cumple

$$|\langle G, x - x_n\rangle| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty \quad \forall G \in X'.$$

En particular se cumple para $F \circ K$ entonces la sucesión $(K(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $K(x)$ en Y. Por otro lado como $x_n \rightharpoonup x$ entonces la sucesión es acotada y por compacidad del mapeo K tenemos que

$$\exists \text{ una subsucesión } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } K(x_k) \to y.$$

Como la convergencia fuerte implica la convergencia débil tenemos que $K(x_k) \rightharpoonup y$. De las propiedades de convergencia débil se deduce que $y = K(x)$. Por lo tanto $(K(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a $K(x)$. Hasta el momento hemos demostrado que existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que bajo K es una sucesión fuertemente convergente a $K(x)$. Supongamos que $(K(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge fuertemente a $K(x)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|K(x) - K(x_n^1)\| \geq \varepsilon$$

lo cual es una contradicción pues cualquier subsucesión de una sucesión que converge fuertemente también converge fuertemente.

■

En la demostración del teorema anterior se demostró.

Teorema 2.4.2. *Sean X y Y espacios de Hilbert. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en X tal que $x_n \rightharpoonup x$ si $n \to \infty$. Entonces, para todo operador lineal acotado $T : X \to Y$ se cumple que $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ si $n \to \infty$.*

2.5. Espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\omega \subset \Omega$ abierto. Se denotará por $\partial\Omega$ la frontera de Ω. Diremos que ω está compactamente contenido en Ω si $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$ se denota por $\omega \subset\subset \Omega$. Se define los espacios de Hilbert

$$L^2_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \int_\omega |f|^2 \, dx < +\infty \quad \forall\, \omega \subset\subset \Omega\},$$

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \int_\Omega |f|^2 \, dx < +\infty\}$$

y

$$L^2(\partial\Omega, d\sigma) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \int_{\partial\Omega} |f|^2 \, d\sigma < +\infty\}.$$

donde las funciones son medibles y la integral es la integral de Lebesgue, dx es la medida de Lebesgue y $d\sigma$ es la medida n-dimencional de Hausdorff (ver, por ejemplo [12], capítulo 2) dotados con los producto interno usual

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\ dx \quad \forall\ f,\ g \in L^2(\Omega),$$

y

$$(f, g)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)\ d\sigma \quad \forall\ f,\ g \in L^2(\partial\Omega, d\sigma).$$

Definimos el espacios de funciones test por

$$\mathfrak{D}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) : sop(f) \text{ es acotado y } sop(f) \subset \Omega\}$$

donde

$$sop(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 2.5.1 (Teorema de localización). *Sea $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. Si*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Entonces, $f = 0$ c.d. en Ω.

Prueba. Ver por ejemplo, [2], proposición 14.49.

A continuación vamos a definir el espacio donde trabajaremos

Definición 2.5.1 (Espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se define el espacio de Sobolev de orden m como el espacio de todas las funciones $\mu \in L^2(\Omega)$ tal que para toda $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ con $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para cada $k = 1, 2, ..., n$ y $|\alpha| := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leq m$ existe v_α en $L^2(\Omega)$ satisfaciendo

$$\langle \mu, D^\alpha \varphi \rangle := \int_\Omega \mu D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi\ dx \quad \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

donde

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{\alpha_1}x_1 \partial^{\alpha_2}x_2 \cdots \partial^{\alpha_n}x_n},$$

$$H^m(\Omega) := \{\mu \in L^2(\Omega) : D^\alpha \mu \in L^2(\Omega)\ \forall\ \alpha\ |\alpha| \leq m\}.$$

Cuando $m = 1$ se define el gradiente de μ como el vector

$$\nabla \mu = (D^1\mu, ..., D^n\mu) \quad \text{donde } D^k\mu = v_k \quad \forall\ 1 \leq k \leq n.$$

y cuando $m = 2$ se define el Laplaciano por $\Delta = \nabla^2 := \nabla \cdot \nabla$.

Las propiedades más relevante de $H^m(\Omega)$ son:

1. $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(\mu, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha \mu, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

2. $H^m(\Omega)$ es un espacio reflexivo por ser espacio de Hilbert.

3. $H^m(\Omega)$ es un espacio separable (Ver por ejemplo [1], teorema 9.2).

Diremos que un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ es una **región** si Ω es abierto y conexo.

Definición 2.5.2. Una región Ω de $\mathbb{R}^n$ se dice que es de clase C^1 si existe un mapeo F_{x_0} de $B^{n-1}(0,1) \times (-1,1)$ en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ para cada $x_0 \in \Omega$ con las siguientes propiedades

1. F_{x_0} es continuamente diferenciable.
2. F_{x_0} es biyectiva.
3. $F_{x_0}^{-1}$ es continuamente diferenciable.
4. $F_{x_0}(0,0) = x_0$.
5. $F_{x_0}(B^{n-1}(0,1) \times (0,1)) = \Omega \cap U$.
6. $F_{x_0}(B^{n-1}(0,1) \times \{0\} = \partial\Omega \cap U$.

Teorema 2.5.2. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, existe un operador lineal y acotado*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, d\sigma) \quad \textit{dado por } \gamma(\mu) = \mu_{|\partial\Omega} \quad \forall\ \mu \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [10], teorema 4.6.

■

A γ se le conoce como operador traza y al espacio dado por $H^{1/2}(\partial\Omega) := \gamma\left(H^1(\Omega)\right)$ se llama espacio traza sobre la frontera el cual es un subespacio de $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$.

Teorema 2.5.3. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, el operador traza es un operador compacto y $H^{1/2}(\partial\Omega)$ es denso en $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$.*

Teorema 2.5.4 (Teorema de Rellich-Kondrashov). *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1 y $m \in \mathbb{N}$. Entonces la inyección canónica $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ es compacta.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], teorema 9.12.

■

En particular si $m = 1$ se tiene que la inyección canónica $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta.

Teorema 2.5.5 (Primera identidad de Green). *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Si $\mu \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$. Entonces, se satisface*

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta\mu\ dx = -\int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla\mu\ dx + \int\limits_{\partial\Omega} \gamma(v)\ \gamma(\nabla\mu)\cdot\nu\ d\sigma$$

donde ν es el vector normal y $\gamma(\nabla\mu)\cdot\nu$ es la derivada normal de μ.

Prueba. Ver, por ejemplo, [1], corolario 4.2.

■

Observación. A la derivada normal $\gamma(\nabla\mu)\cdot\nu$ tambien se le denota por $\dfrac{\partial\mu}{\partial\nu}$

Se define $H_0^1(\Omega)$ como el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ definido por

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\Big(\mathfrak{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\Big)}.$$

Corolario 2.5.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces,*

$$\mu \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \mu \in Ker(\gamma).$$

Prueba. Ver, por ejemplo, [9], corolario 1.5.1.6.

■

Teorema 2.5.6 (**Teorema de encajes de Sobolev**, Bressan)**.** *Sean $n > 2$ y Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $H^1(\Omega)$ está continuamente encajado en $L^p(\Omega)$ con $1 \le p \le \dfrac{2n}{n-2}$.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [3], teorema 8.35.

■

Teorema 2.5.7. *Sea Ω una región acotada $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $H^1(\Omega)$ está compactamente encajado en $L^2(\Omega)$.*

Prueba. Ver, por ejemplo, [3], teorema 8.39.

■

Terminaremos esta sección con una generalización de la desigualdad de Poincaré el cual resulta muy util en aplicaciones para lo cual consideremos a $\mathbb{P}_m(\Omega)$ como el espacio de polinomios de grado menor o igual a m.

Teorema 2.5.8 (**Desigualdad generalizada de Poincaré**)**.** *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Consideremos a $\mathcal{F} = \{F\}$ con F un funcional en $H^1(\Omega)'$ tal que $\mathbb{P}_0(\Omega) \cap {}^{\perp}\mathcal{F} = \{0\}$. Entonces,*

$$\|\mu\| := \Big(\|\nabla\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + F(\mu)^2\Big)^{1/2}$$

es una norma equivalente en $H^1(\Omega)$.

Prueba. Para ver que $\|\cdot\|$ es norma es suficiente probar que $\|\mu\| = 0$ entonces $\mu = 0$. Si

$$\|\mu\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\nabla\mu\|_{L^2(\Omega)} = 0 \;\; \text{y} \;\; F(\mu) = 0$$

entonces

$$0 \le \left|\int_\Omega \mu\nabla\phi\right| = \left|\int_\Omega \nabla\mu\phi\right| \le \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\mu\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall\, \phi \in D(\Omega)$$

se concluye que $\nabla\mu = 0$ c.d. en Ω. Puesto que Ω es conexo se tiene que μ es contante c.d. en Ω, esto es, $\mu \in \mathbb{P}_0(\Omega)$ y como $F(\mu) = 0$ entonces por hipótesis se tiene que $\mu = 0$.
Sean $H_1 := (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ y $H_2 := (H^1(\Omega), \|\cdot\|)$ y veamos que el mapeo lineal $I : H_1 \to H_2$ es continuo. Sea $(\mu_n)_n$ una sucesión de elementos en $H^1(\Omega)$ tal que $\mu_n \underset{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}{\longrightarrow} 0$ si $n \to \infty$ entonces

$$\|I(\mu_n)\|^2 \le \|\mu_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + F(\mu_n) \;\to\; 0 \text{ si } n \to \infty$$

por lo tanto I es continua en cero con lo que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\mu\| \le M\|\mu\|_{H^1(\Omega)}$$

Finalmente para demostrar que $\|\cdot\|$ es una norma equivalente en $H^1(\Omega)$ nos falta verificar que existe una constante $m > 0$ tal que $m\|\mu\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\mu\|$. Supongamos que no existe tal constante entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\mu_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|\mu_k\|_{H^1(\Omega)} > k\|\mu_k\|$. Definamos

$$v_k = \frac{\mu_k}{\|\mu_k\|_{H^1(\Omega)}} \quad \Rightarrow \quad \|v_k\| < \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{k} \;\text{ y }\; F(v_k) < \frac{1}{k}$$

Puesto que la sucesión $(v_k)_k$ esta acotada en $H^1(\Omega)$ entonces existe una subsucesión $(v_k^{(1)})$ que converge débilmente a v en $H^1(\Omega)$ y como $H^1(\Omega)$ esta compactamente encajado en $L^2(\Omega)$ entonces $(v_k^{(1)}) \to v$ en $L^2(\Omega)$ con lo que se puede escoger una subsucesión que denotaremos igual por $(v_k^{(1)})$ tal que $(v_k^{(1)}) \to v$ c.d. en Ω entonces por el teorema de convergencia de Lebesgue se tiene que

$$\left|\int_\Omega v\nabla\phi\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega v_k^{(1)}\nabla\phi\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega \nabla v_k^{(1)}\phi\right| \leq \lim_{k\to\infty}\frac{c}{k} = 0 \quad \forall\, \phi \in D(\Omega)$$

con lo que v es constante c.d. en Ω y note también que $0 = \lim\limits_{k\to\infty} F(v_k^{(1)}) = F(v)$ entonces por hipótesis se concluye que $v = 0$ por lo tanto

$$1 = \lim_{k\to\infty}\|v_k^{(1)}\|^2_{H^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty}\left(\|v_k^{(1)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_k^{(1)}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) < \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0.$$

■

Corolario 2.5.2. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Consideremos a $\mathcal{F} = \{F_k : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} :\ F_k$ es continua para cada $1 \leq k \leq n\}$ tal que $\mathbb{P}_0(\Omega)\ \cap\ {}^\perp\mathcal{F} = \{0\}$. Entonces,*

$$\|\mu\|_{\mathcal{F}} := \left(\|\nabla\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n}|F_k(\mu)|^2\right)^{1/2}$$

es una norma equivalente en $H^1(\Omega)$.

Ejemplo 2.5.1.

Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1 y $G : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el operador lineal dada por

$$\langle G, \mu\rangle = \frac{1}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} g\gamma(\mu)\ d\sigma.$$

De la continuidad de γ y si $g \in L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle G, \mu\rangle| &\leq \frac{1}{1-\tau}\int_{\partial\Omega}|g\gamma(\mu)|\ d\sigma \\
&\leq \frac{1}{1-\tau}\|g\|_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)}\|\gamma(\mu)\|_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)} \\
&\leq \frac{M\|g\|_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)}}{1-\tau}\|\mu\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $G \in H^1(\Omega)'$. Definamos a

$$H^1_g(\Omega) = \left\{\mu \in H^1(\Omega) : \gamma(\mu) = 0\right\}$$

Sea $\nu \in \mathbb{P}_0(\Omega) \ \cap \ ^{\perp}\mathcal{F}$ entonces

$$\nu = x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \int\limits_{\partial\Omega} g\gamma(\nu)\ d\sigma = 0$$

$$\nu = x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x\int\limits_{\partial\Omega} g\ d\sigma = 0$$

entonces $\nu = 0$ por lo que usando 2.5.8 se tiene que

$$\|\mu\|_g^2 = \int_\Omega \nabla\mu^2\ dx + \langle G, \mu\rangle^2$$

es una norma equivalete en $H^1(\Omega)$. Finalmente si $\mu \in H_g^1(\Omega)$ se tiene que

$$\|\mu\|^2 = \int_\Omega \nabla\mu^2 + \mu^2\ dx \quad \text{y} \quad |\mu|_{1,\Omega}2 = \int_\Omega \nabla\mu^2\ dx$$

son normas equivalentes en $H_g^1(\Omega)$.

Capítulo 3

Problema de valores propios de Steklov

3.1. Planteamiento del problema

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos a $\mathbf{A}x = (a_{ij}(x))$ una matriz, $b_i(x)$ y $c(x)$ de Ω en $\mathbb{R}$ medibles. El operador diferencial general elíptico de segundo orden en forma de divergencia se define por

$$L\mu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\mu_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i\mu)_{x_i} + c\mu.$$

En adelante por propósitos del trabajo se considerará $n \geq 2$, Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Consideremos bajo las hipótesis anteriores el siguiente problema de condiciones de frontera

$$\begin{aligned} L\mu = -\text{ div } (\mathbf{A}\nabla\mu) + c\mu = 0 \qquad & \text{en} \quad \Omega \\ ((\mathbf{A}(x))\nabla\mu(x)) \cdot \nu \ + \ e(x)\mu(x) = \lambda\rho(x)\mu(x) \quad & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{A}$, e y ρ satisfacen

1. $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica, con entradas acotadas y tal que para cada $x \in \Omega$

   $$|\varepsilon|_{\mathbf{A}} := (A(x)\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

   sea norma en $\mathbb{R}^n$.

2. $c \geq 0$ c.d sobre Ω y $c \in L^p(\Omega)$ para $n \leq 2p$ si $n \geq 3$ ($p > 1$ si $n = 2$).

3. $e \in L^\infty(\partial\Omega, d\sigma)$ tal que $e \geq 0$ c.d. sobre $\partial\Omega$ y

   $$\int_\Omega c \; dx + \int_{\partial\Omega} e \; d\sigma > 0.$$

4. $\rho(x) \in L^q(\partial\Omega, d\sigma)$ para $n - 1 < q$ y existe $s > 0$ tal que $\rho \geq s$ c.d. sobre $\partial\Omega$.

Recordemos que una solución clásica de (3.1) es una función $\mu \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que cumple (3.1) puntualmente. Supongamos que μ es solución clásica de (3.1). Multiplicando por $\phi \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e integrando en Ω obtenemos

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a_{ij}\mu_{x_i})_{x_j}\phi \; dx + \int_\Omega c\mu\phi \; dx = 0,$$

como μ es solución clásica entonces integrando por partes tenemos que

$$\int_\Omega (\mathbf{A}\nabla\mu)\cdot\nabla\phi\ dx - \int_{\partial\Omega}(\mathbf{A}\nabla\mu)\cdot\nu\ \phi\ d\sigma + \int_\Omega c\mu\phi\ dx =$$
$$\int_\Omega (\mathbf{A}\nabla\mu)\cdot\nabla\phi\ dx + \int_{\partial\Omega}(e\mu-\lambda\rho\mu)\,\phi\ d\sigma + \int_\Omega c\mu\phi\ dx = 0,$$

puesto que $H^1(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$ se deduce que

$$\int_\Omega \left[\ (\mathbf{A}\nabla\mu)\cdot\nabla v + c\mu v\ \right]\ dx\ +\ \int_{\partial\Omega} e\gamma(\mu)\gamma(v)\ d\sigma - \lambda\int_{\partial\Omega}\rho\gamma(\mu)\gamma(v)\ d\sigma = 0\quad \forall\ v\ \in H^1(\Omega) \tag{3.2}$$

donde γ es el operador traza que mapea el espacio $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$.

3.2. Funciones propias de Steklov

Definición 3.2.1. Se dice que $\mu\in H^1(\Omega)$ es solución débil de (3.1) si μ satisface (3.2). En tal caso diremos que μ es una función propia de Steklov para (L,ρ) y λ es un valor propio de Steklov.

Nuestro objetivo es estudiar el problema de valores propios de Steklov $(L.\rho)$ para el caso en que $\mathbf{A}$ es la matriz identidad, $e(x)=0$ y $\rho\in L^\infty(\partial\Omega, d\sigma)$ es tal que

$$\int_{\partial\Omega}\rho\ d\sigma = 1.$$

Formalmente estudiaremos el problema de valores propios de Steklov para el operador de tipo Schrödinger $L\mu = -\Delta\mu + c\mu = 0$, esto es, buscaremos soluciones no triviales $(\mu,\lambda)\in H^1(\Omega)\times\mathbb{R}$ de

$$\int_\Omega \nabla\mu\cdot\nabla v\ dx + \int_\Omega c\mu v\ dx = \lambda\int_{\partial\Omega}\rho\gamma(\mu)\gamma(v)\ d\sigma. \tag{3.3}$$

Notemos que si en (3.3) ponemos $\mu = v$ entonces

$$\lambda = \frac{\int_\Omega|\nabla\mu|^2\ dx + \int_\Omega c\mu^2\ dx}{\int_{\partial\Omega}\rho\gamma(\mu)^2\ d\sigma}$$

Como cada integrando es positivo debe de haber un valor propio λ positivo.

Consideremos las formas bilineales simétricas

$$\begin{aligned} &A: H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R} && M: H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}\\ &A(\mu,\nu)=\int_\Omega[\nabla\mu\cdot\nabla\nu + c\mu\nu] && M(\mu,\nu)=\int_{\partial\Omega}\rho\gamma(\mu)\gamma(\nu).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sea $K = \{\mu\in H^1(\Omega)\ :\ A(\mu,\mu)\le 1\}$. Consideremos el principio variacional $(\mathcal{P}_1)$ de maximizar $B(\mu) := M(\mu,\mu)$ sobre K y definamos a

$$\beta_1 := sup_{\mu\in K}B(\mu).$$

Para estudiar $(\mathcal{P}_1)$ nuestro primer objetivo es demostrar que K es débilmente compacto y que si ρ satisface A_2) entonces B es débilmente continua.

Teorema 3.2.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $A(\mu,\mu)$ es continua.*

Prueba. Por hipotesis de Ω podemos aplicar el teorema teorema de Sovolev por lo que se tiene que existe $\kappa > 0$ tal que
$$\|\mu^2\|_{L^q(\Omega)} \leq \kappa \|\mu\|_{H^1(\Omega)}.$$
Para $1 \leq q \leq \dfrac{n}{n-2}$ y con conjugado $n \leq 2p$ aplicamos la desigualdad de Hölder.

$$\begin{aligned}
|A(\mu - v, \mu - v)| &= \int_\Omega \nabla\mu^2 - \nabla v^2 + \int_\Omega c(\mu^2 - v^2) \\
&\leq \|\mu - v\|_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega c(\mu^2 - v^2) \\
&\leq \|\mu - v\|_{H^1(\Omega)} + \|c\|_{L^p(\Omega)} \|\mu^2 - v^2\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|\mu - v\|_{H^1(\Omega)} + \kappa \|c\|_{L^p(\Omega)} \|\mu - v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \eta \|\mu - v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Por lo que A es continua.

$\blacksquare$

Veamos ahorra que $A(\mu, \mu)$ es una norma equivalente en $H^1(\Omega)$.

Teorema 3.2.2. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $A(\mu, \mu)$ es una norma equivalnte en $H^1(\Omega)$.*

Prueba. Sea
$$\mathcal{S} = \{\mu \in H^1(\Omega) : \|\mu\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$$
Consideremos el problema de minimizar $A(\mu, \mu)$ sobre $\mathcal{S}$. Puesto que $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto pues Ω es acotado se tiene que

$$\|\mu\|_{L^2(\Omega)} \leq \kappa \|\mu\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\ \mu \in H^1(\Omega)$$

en particular para $\mu \in \mathcal{S}$ por lo que $\mathcal{S}$ es acotado y existe una sucesión $\{\mu_m\}$ minimizante para nuestro problema
$$\alpha = \inf_{\mu \in \mathcal{S}} A(\mu, \mu)$$
Tomando m suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mu_m\|_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla\mu_m^2 + \int_\Omega \mu_m^2 \\
&\leq \int_\Omega \nabla\mu_m^2 + \int_\Omega c\mu_m^2 + \int_\Omega \mu_m^2 \\
&= A(\mu_m, \mu_m) + + \int_\Omega \mu_m^2 \\
&< \alpha + 2
\end{aligned}$$

Entonces por el teorema de Rellich-Kondrashov la subsucesión $\{\mu_n\}$ que converge debilmente a $\mu^* \in H^1(\Omega)$ converge fuertemente a $\mu^* \in L^2(\Omega)$ por lo que $A(\mu^*, \mu^*) = \alpha$ es un funcional que es debilmente l.s.c
$$A(\mu, \mu) \geq \alpha$$
Ahora bien si $\alpha = 0$ esto implicaria que $\nabla\mu^* = 0$ por hipotesis de Ω, por lo que μ^* seria una constante k así se tendría que

$$0 = \int_\Omega \nabla\mu^{*2} + \int_\Omega c\mu^{*2} = 0 + k^2 \int_\Omega c$$

Pero esto contradecería la hipotesis de que $c > 0$ por lo que $\alpha > 0$.
Ahora bien definiendo $v = \dfrac{\mu}{\|\mu\|_{L^2(\Omega)}}$ se tiene que $v \in \mathcal{S}$ por lo que

$$A(v,v) \geq \alpha \Rightarrow A(\mu,\mu) \geq \alpha \|\mu\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\ \mu \in H^1(\Omega)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mu\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla\mu^2 + \mu^2 \\ &\leq \int_\Omega \nabla\mu^2 + \int_\Omega c\mu^2 + \int_\Omega \mu^2 \\ &\leq \qquad A(\mu,\mu) \qquad + \ \alpha^{-1} A(\mu,\mu) \\ &= \Big(\alpha^{-1} + 1\Big) A(\mu,\mu) \end{aligned}$$

Por continuidad de A se tiene que existen $m > 0$ y $M > 0$ tales que

$$m\|\mu\|^2_{H^1(\Omega)} \leq A(\mu,\mu) \leq M\|\mu\|^2_{H^1(\Omega)}$$

■

Definimos la norma

$$\|\mu\|_c := A(\mu,\mu)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Puesto que A satisface la identidad del paralelogramo obtenemos que $A(x,y)$ es un producto interno equivalente al producto interno usual en $H^1(\Omega)$, esto es, existen constantes $m > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\frac{m}{4}(x,y)_{H^1(\Omega)} \leq A(x,y) \leq \frac{M}{4}(x,y)_{H^1(\Omega)}. \tag{3.6}$$

por la identidad de polarización.

Corolario 3.2.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $A(\mu,\mu)$ es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ y convexa.*

Prueba. Por el teorema 2.2.2 $A(\mu,\mu)$ es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ y esta dada por

$$\langle DA(\mu,\mu), v\rangle = A(\mu,v) + A(v,\mu) = 2A(\mu,v) = 2\int_\Omega [\nabla\mu\cdot\nabla v + c\mu v] \quad \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A(\mu,\mu) - 2A(\mu,v) + A(v,v) &= A(\mu,\mu - v) - A(\mu - v, v) \\ &= A(\mu,\mu - v) - A(v,\mu - v) \\ &= A(\mu - v,\mu - v) \geq 0 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} A(\mu,\mu) + \langle DA(\mu,\mu), v - \mu\rangle &= A(\mu,\mu) + 2A(\mu, v - \mu) \\ &= 2A(\mu,v) - A(\mu,\mu) \\ &\leq A(\mu,\mu) + A(v,v) - A(\mu,\mu) \\ &= A(v,v) \end{aligned}$$

Y por el teorema 2.2.3 se tiene que $A(\mu,\mu)$ es convexa.

■

Notemos que K es convexo por la convexidad de A y puesto todo espacio de Hilber es secuencialmente completo débil y por la continuidad de $A(\mu,\mu)$ tenemos que K es cerrado débilmente cerrado. Ahorra bien como existe $m>0$ tal que para toda $\mu\in K$

$$m\|\mu\|_{H^1(\Omega)}\le A(\mu,\mu)\le 1.$$

entonces K es acotado en $H^1(\Omega)$ así acabamos de demostrar.

Proposición 3.2.1. *El conjunto K es débilmente compacto en $H^1(\Omega)$.*

Ahora vemos que B es un funcional débilmente continuo en $H^1(\Omega)$.

Teorema 3.2.3. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $B(x)$ es continuo y además es débilmente continuo en $H^1(\Omega)$ y $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$-coerciva.*

Prueba. Por el teorema de la traza existe $\kappa>0$ tal que

$$\begin{aligned}|B(\mu)| &\le \int\limits_{\partial\Omega}\rho|\gamma(\mu)|^2\\ &\le \|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)}\|\gamma(\mu)^2\|_{L^1(\partial\Omega,d\sigma)}\\ &= \|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)}\|\gamma(\mu)\|^2_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)}\\ &\le \kappa\|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)}\|\mu\|^2_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Un argumento similar al que se ocupó en el teorema 3.2.1 se concluye que $B(\mu)$ es continuo. Veamos que $B(\mu)$ es débilmente continua. Sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $H^1(\Omega)$ tal que converge débilmente a μ en $H^1(\Omega)$. Por el teorema de la traza compacta se tiene que $(\gamma(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge fuertemente a $\gamma(\mu)$ en $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$. Luego por la desigualdad (3.7) se deduce que $B(\mu)$ es débilmente continua. Finalmente como existe $s>0$ tal que $\rho\ge s$ se tiene que

$$\|\mu\|^2_{L^2(\partial\Omega,,d\sigma)}=\int_{\partial\Omega}\gamma(\mu)^2=\int_{\partial\Omega}\frac{\gamma(\mu)^2\rho}{\rho}\le\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)}B(\mu).$$

Por lo que B es $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$-coerciva.

■

Definamos

$$\|\mu\|_\rho:=B(\mu)^{\frac{1}{2}}.\tag{3.8}$$

Por el teorema anterior se tiene que 3.8 es una norma equivalente en $L^2(\partial\Omega,d\sigma)$, esto es, existen constante $m'>0$ y $M'>0$ tal que

$$m'\|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)}\le B(\mu)\le M'\|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Similarmente al corolario 3.2.1 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $B(\mu)$ es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ con*

$$\langle DB(\mu),v\rangle=2\int\limits_{\partial\Omega}\rho\gamma(\mu)\gamma(v)\ d\sigma\quad\forall\ v\in H^1(\Omega)$$

y convexa.

El siguiente teorema es de existencia para el problema variacional $\mathcal{P}_1$ y nos dice que $\beta_1=\lambda_1^{-1}$ donde λ_1 es el valor propio más pequeño de (3.3).

Teorema 3.2.4. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, $\beta_1 < \infty$ y existen maximizantes $\pm\mu_1$ de $B(\mu)$ sobre K tales que $\|\mu_1\|_c = 1$ y (3.3).*

Prueba. Puesto que K es débilmente compacto en $H^1(\Omega)$ y $B(\mu)$ es débilmente continuo se tiene que $B(\mu)$ alcanza su supremo en un punto μ_1 de K por lo que

$$0 \leq \beta_1 < \infty. \tag{3.9}$$

Si $\|\mu_1\|_c < 1$ entonces existe un $r > 1$ tal que $\|\mu_1\|_c \leq \dfrac{1}{r} < 1$ entonces $\|r\mu_1\|_c \leq 1$ por lo tanto $r\mu_1 \in K$ y como $B(\mu)$ es homogénea de grado dos se tiene que

$$B(r\mu_1) > r^2 B(\mu_1) > B(\mu_1) = sup_{\mu\in K} B(\mu),$$

que es una contradicción. Por lo tanto $\|\mu_1\|_c = 1$ y puesto que $B(\mu_1) = B(-\mu_1)$ entonces B alcanza su supremo también en $-\mu_1 \in K$.
Por el teorema 1.5.3 un máximo μ_1 de B sobre K satisface que

$$DB(\mu_1) \in \partial I_K(\mu_1)$$

Por lo tanto existe un funcional $F \in \partial I_K(\mu_1)$ tal que

$$2(\mu_1, v)_\rho = 2\int_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu_1)\gamma(v) = F(v)$$

Puesto que $\|\mu\|_c = 1$ y $F \in \partial I_K(\mu_1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} F(v) &= \langle F, v\rangle \\ &= \eta\langle L\mu_1, v\rangle \\ &= \eta(\mu_1, v)_c \text{ con } \eta \in [0,\infty) \text{ y } \forall\ v \end{aligned}$$

esto es,

$$F(v) = (\eta\mu_1, v)_c \text{ con } \eta \in [0,\infty) \text{ y } \forall\ v$$

Por lo tanto

$$(\mu_1, v)_\rho = (\eta\mu_1, v)_c$$

Si $\eta > 0$ entonces se cumple (3.3) con $\lambda = \eta^{-1}$. Si $\eta = 0$, poniendo $v = \mu_1$. Luego por coercividad de B se tiene que

$$B(\mu_1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0,$$

y tal función no serán máximo. Por lo tanto se cumple (3.3) con $\eta > 0$ en el máximo.
Poniendo $v = \mu_1$ encontramos que el correspondiente valor propio λ_1 en (3.3) satisface

$$\beta_1 = \sup_{\mu\in K} B(\mu) = B(\mu_1) = \lambda_1^{-1}\|\mu_1\|_c = \lambda_1^{-1} > 0.$$

Si λ_1 no es el valor propio más pequeño de (3.3) entonces podríamos encontrar $\overline{\mu} \in H^1(\Omega)$ no idénticamente cero que cumpla con (3.3) con $\overline{\lambda} < \lambda_1$ entonces normalizando en la norma $\|\cdot\|_c$ tenemos que

$$1 = \|\overline{\mu}\|_c^2 = \overline{\lambda}B(\overline{\mu}).$$

Entonces, $\beta_1 = \lambda_1^{-1} < \overline{\lambda}^{-1} = B(\overline{\mu})$ lo cual es imposible. Por lo tanto λ_1 es el valor propio más pequeño de (3.3).

■

Corolario 3.2.3. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces,*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\mu|^2 + \int\limits_{\Omega} c|\mu|^2 \geq \lambda_1 \int\limits_{\partial\Omega} \rho|\gamma(\mu)|^2 \quad \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

donde λ_1 es valor propio del teorema anterior.

Prueba. Sea $\mu \in H^1(\Omega)$ tal que $\mu \neq 0$ entonces definiendo $\nu = \dfrac{\mu}{\|\mu\|_c}$ se tiene que $\nu \in K$ y por homogéneidad de grado dos de B tenemos que

$$B(\nu) \leq \beta_1 \quad \Rightarrow \quad B(\mu) \leq \beta_1 \|\mu\|_c^2. \quad \forall\ \mu \in H^1(\Omega)$$

Si $\mu = 0$ trivialmente se cumple la desigualdad.

■

Definición 3.2.2. La desigualdad

$$\int_{\Omega} |\nabla\mu|^2 + \int_{\Omega} c|\mu|^2 \geq \lambda_1 \int_{\partial\Omega} |\gamma(\mu)|^2\rho \qquad \forall\ \mu \in H^1(\Omega),$$

se conoce como la desigualdad de traza en $H^1(\Omega)$ para el operador L.

Supongamos ahora que encontramos las primeras funciones propias de Steklov $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{j-1}\}$ que son c-ortonormales asociadas a sus correspondientes valores propios $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{j-1}$ entonces para toda $1 \leq n \leq j-1$ se cumple

$$(\mu_n,\ v)_c - \lambda_n(\gamma(\mu_n), \gamma(v))_\rho = 0 \quad \forall\ v \in H^1(\Omega),$$

poniendo $v = \mu_m$ se tiene que

$$(\gamma(\mu_n), \gamma(\mu_m))_\rho = \lambda_n^{-1}(\mu_n, \mu_m)_c = \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \neq m \\ \lambda_n^{-1} & \text{si } n = m. \end{array} \tag{3.10}$$

Con lo que necesitamos buscar la siguiente función propia de Steklov en la bola unitaria

$$K_j = \{\mu \in K :\ (\gamma(\mu), \gamma(\mu_k))_\rho = 0 \ \ \forall \ \ k \in \{1, 2, ..., j-1\}\},$$

del subespacio cerrado

$$V = \{\mu \in H^1(\Omega) : \qquad (\mu, \mu_k)_c \ = 0 \ \ \forall \ \ k \in \{1, 2, ..., j-1\}\},$$

con complemento c-ortogonal

$$W = gen\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{j-1}\}.$$

Es decir, estudiemos el principio variacional $\mathcal{P}_j$ de maximizar B sobre K_j. Definamos

$$\beta_j = \sup_{\mu \in K_j} B(\mu).$$

Teorema 3.2.5. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces,*

a) K_j es débilmente compacto en $H^1(\Omega)$.

b) Existen maximizadores $\pm\mu_j$ de B sobre K que satisfacen $\|\mu_j\| = 1$ y β_j es finito.

c) μ_j es una función propia de Steklov correspondiente al valor propio de Steklov $\beta_j^{-1} = \lambda_j$ y es el valor propio más pequeño de 3.3 tal que $\lambda_{j-1} \leq \lambda_j$.

d) $(\mu_j, \mu_k)_c = (\mu_j, \mu_k)_\rho = 0 \quad \forall\ 1 \leq k \leq j-1.$

Prueba. a) Consideremos la familia de funcionales lineales $F_k : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por $F_k(\mu) = \int_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu)\gamma(\mu_k)$ con $1 \leq k \leq j-1$. Por la continuidad del operador traza obtenemos la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
|F_k(\mu)| &\leq \int_{\partial\Omega} |\rho\gamma(\mu)\gamma(\mu_k)| \\
&\leq \|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)} \int_{\partial\Omega} |\gamma(\mu)\gamma(\mu_k)| \\
&\leq \|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)} \|\gamma(\mu_k)\|_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)} \|\gamma(\mu)\|_{L^2(\partial\Omega,d\sigma)} \\
&\leq \kappa\|\rho\|_{L^\infty(\partial\Omega,d\sigma)} \|\mu_k\|_{H^1(\Omega)} \|\mu\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto los funcionales F_k son continuos. De las propiedades del producto interno se deduce que K_j es convexo y cerrado y como K es acotado se tiene que K_j también lo es.

b) Se sigue de un argumento similar como en la prueba del teorema 3.2.4 pues K_j es débilmente compacto en $H^1(\Omega)$.

c) Puesto que V_{j-1} es un subespacio cerrado en $H^1(\Omega)$, K_j es la bola unitaria en V_{J-1} y los maximizadores μ_j de B sobre K_j satisfacen $\|\mu_j\|_c = 1$ se tiene que $\forall\ v \in V_{j-1}$

$$\langle DB(\mu_j),\ v\rangle = (\eta\ \mu_j + w,\ v)_c \quad \text{con } w \in V_{j-1}^\perp = W_{j-1} \quad \text{y } \eta \geq 0.$$

Esto es

$$2(\gamma(\mu_j), \gamma(v))_\rho = \eta(\mu_j, v)_c + (w, v)_c \text{ Ver teorema 2.2.5.}$$

Notemos que si tomamos $v = w$ y puesto que $\mu_j \in V_{j-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|w\|_c^2 &= \sum_{k=1}^{j-1} 2a_k(\gamma(\mu_j), \gamma(\mu_k))_\rho - \sum_{k=1}^{j-1} \eta a_k(\mu_j, \mu_k)_c \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} 2\lambda_k a_k(\mu_j, \mu_k)_c - \sum_{k=1}^{j-1} \eta a_k(\mu_j, \mu_k)_c \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} (2\lambda_k - \eta) a_k(\mu_j, \mu_k)_c = 0
\end{aligned}$$

Por lo que $w = 0$, así μ_j y se satisface

$$(\gamma(\mu_j), \gamma(v))_\rho \quad = \eta(\mu_j, v)_c \quad \forall\ v \in H^1(\Omega),$$

es decir, μ_j es función propia de Steklov correspondiente al valor propio $\eta = \lambda_j$. Finalmente poniendo $v = \mu_j$ obtenemos

$$\beta_j = \sup_{\mu \in K_j} B(\mu) = B(\mu_j) = \lambda_j^{-1}(\mu_j, \mu_j)_c = \lambda_j^{-1}.$$

d) Se sigue de que $\mu_j \in K_j$ pues

$$(\gamma(\mu_j), \gamma(\mu_n))_\rho = \lambda_j(\mu_j, \mu_n)_c = 0 \quad \forall\ 1 \leq n \leq j-1.$$

■

Continuando con este proceso obtenemos una sucesión infinita de funciones propios de Steklov c-ortonormales en $H^1(\Omega)$

$$\Lambda = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

correspondientes a los valores propios

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ... \quad \text{o bien} \quad 0 < ... \leq \beta_n \leq ... \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Teorema 3.2.6. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces,* $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Prueba. Como Λ es un conjunto c-ortonormal en $H^1(\Omega)$ usando la desigualdad de Bessel y la equivalencia de normas se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, \mu_n)_c|^2 \leq \|x\|_c^2$$

por lo que la sucesión β_n converge débilmente a cero. Puesto que B es débilmente continuo se tiene que $B(\mu_n) = \beta_n$ converege a cero.

■

Finalizamos está sección observando que a partir de (3.10) se deduce que

$$\mathcal{C} = \left\{ \hat{s}_n := \sqrt{\lambda_n}\gamma(\mu_n) \right\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{3.11}$$

es un conjunto ρ-ortonormal en $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$.

3.3. Bases

Nuestro objetivo de esta sección es demostrar que (3.11) es realmente una base ρ-ortonormal en $L^2(\partial\Omega)$. Para esto si consideremos a W al subespacio de $H^1(\Omega)$ que es $c-$ortogonal a $H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c W. \tag{3.12}$$

El siguiente lema nos permitirá tener una descomposición de $H^1(\Omega)$ de la forma

$$H^1(\Omega) = Ker(B) \oplus_c Ker(L). \tag{3.13}$$

Lema 3.3.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces*

1. $Ker(B) = H_0^1(\Omega)$.

2. $\mu \in ker\ (L) \Leftrightarrow (\mu, \varphi)_c = 0$ *para toda* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Prueba.

1. Como B es una norma equivalente en $L^2(\partial\Omega, d\gamma)$ entonces

$$\mu \in Ker(B) \quad \Leftrightarrow \quad B(\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\gamma(\mu)\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in Ker(\gamma).$$

Por lo tanto del corolario 2.5.1 se tiene que

$$\mu \in Ker(B) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in Ker(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in H_0^1(\Omega).$$

2. Si $\mu \in ker\ (L)$ entonces $-\Delta\mu + c\mu = 0$ entonces multiplicando por $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e integrando en Ω se tiene que

$$\int_\Omega [-\Delta\mu\varphi + c\mu\varphi]\ dx = 0.$$

Luego por la primera identidad de Green para espacios de Sobolev obtenemos que

$$(\mu, \varphi)_c = \int_\Omega [\nabla\mu \cdot \nabla\varphi + c\mu\varphi]\ dx = 0.$$

Inversamente si $(\mu, \varphi)_c = 0$ para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ entonces aplicando de nuevo la primera identidad de Green para espacios de Sobolev obtenemos que

$$\int_{\Omega} [-\Delta\mu\varphi + c\mu\varphi] \, dx = 0 \quad \forall \, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Así por el teorema 2.5.1 se tiene que $L\mu = c\mu - \Delta\mu = 0$. Por lo tanto $\mu \in ker \ (L)$.

■

Si μ_n es una función propia de Steklov se satisface

$$(\mu_n, \phi)_c = \lambda_n(\gamma(\mu_n), \gamma(\phi))_\rho = 0 \quad \forall \, \phi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Por lo tanto $\Lambda \subset ker(L)$

Lema 3.3.2. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces Λ es una base c-ortonormal de $Ker \ (L)$.*

Prueba. La demostremos se hará por contradicción:
Supongamos que Λ no es base c-ortonormal de $ker(L)$ entonces por el teorema 2.1.2 inciso $b)$ existe un $v \in ker \ (L)$ tal que $v \neq 0$ y $(\mu_n, v)_c = 0$. Definiendo $w = \dfrac{v}{\|v\|_c}$ entonces $w \in K_j$, esto es,

$$\|w\|_c = 1 \quad \text{y} \quad (\mu_n, w)_c = 0. \tag{3.14}$$

Si $B(w) = 0$ entonces $w \in ker(B)$ pero como también $w \in ker(L)$ y $H^1(\Omega) = ker(B) \oplus_c ker(L)$ se sigue que $w = 0$ entonces $0 = \|w\|_c = 1$ que es una contradicción.
Si $B(w) > 0$ entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{m+1} < B(w)$, es decir, $B(\mu_{m+1}) < B(w)$ esto es una contradicción pues μ_{m+1} no seria máximo pues $w \in K_m$.

■

Sea $\mu \in ker(L)$ se tiene que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu, \mu_n)_c \mu_n$ y usando (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu, \mu_n)_c \gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\gamma(\mu), \gamma(\mu_n))_\rho \gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\gamma(\mu), \sqrt{\lambda_n}\gamma(\mu_n)\right)_\rho \sqrt{\lambda_n}\gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\gamma(\mu), \hat{s}_n)_\rho \hat{s}_n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como $H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma\left(H^1(\Omega)\right)$ y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Ker(L) implica que $\{\hat{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ en consecuencia es también base de $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ pues

$$\overline{\mathcal{C}} = \overline{\overline{\mathcal{C}}} = \overline{H^{1/2}(\Omega)} = L^2(\partial\Omega, d\sigma).$$

Así hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces $\mathcal{C}$ es una base ρ-ortonormal de $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$.*

3.4. Una representación espectral del operador traza

Dada $\mu \in H^1(\Omega)$ el operador dado por

$$P(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu, \mu_n)_c \ \mu_n,$$

es la proyección ortogonal sobre $ker(L)$. Puesto que

$$\mu = \phi + \nu \quad \text{con } \phi \in H_0^1(\Omega) \quad \text{y } \nu \in ker(L) \quad \Rightarrow \quad P(\mu) = P(\phi+\nu) = P(\nu) = \nu.$$

Usando que $ker(\gamma) = H_0^1(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) &= \gamma(P(\mu)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\gamma(\mu), \hat{s}_n)_\rho \hat{s}_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (\gamma(\mu), \gamma(\mu_n))_\rho \gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu, \mu_n)_c \gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{-1/2} (\mu, \mu_n)_c \hat{s}_n. \end{aligned}$$

Considerando las sumas parciales $\gamma_j(\mu) = \sum_{n=1}^{j} (\lambda_n)^{-1/2} (\mu, \mu_n)_c \hat{s}_n$, la convergencia de λ_n^{-1} a 0 (para toda $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$ se cumple $|\lambda_n^{-1}| \leq \varepsilon$) y la identidad de Parseval tenemos

$$\begin{aligned} \|\gamma(\mu) - \gamma_j(\mu)\|^2_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^{-1} |(\mu, \mu_n)_c|^2 \\ &\leq \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} |(\mu, \mu_n)_c|^2 \\ &= \varepsilon \|P\mu\|_c^2 \\ &\leq \varepsilon M^2 \|\mu\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma \in K(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma))$ pues γ_j son operadores de rango finito y $\gamma \in L(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma))$. Por otro lado si $v \in Ran(\gamma)^\perp$ entonces para toda $y \in Ran(\gamma)$ se cumple $(v, y)_{L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma)} = 0$ en particular tomando $y = \gamma(\mu_m) = \lambda_j^{-1/2} \hat{s}_m$ tenemos

$$0 = (v, \gamma(\mu_m))_{L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma)} = \lambda_j^{-1/2} (v, \hat{s}_m)_{L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma)} \quad \Rightarrow \quad v = 0,$$

pues $\mathcal{C}$ es base ρ-ortonormal para $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$. Por lo tanto $Ran(\gamma)^\perp = \{0\}$ lo cual implica que $\overline{Ran(\gamma)} = \overline{H^{1/2}(\partial\Omega)} = L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ En resumen se demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1. Entonces, el operador traza $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma)$ es un operador compacto y de rango denso con representación espectral dado por*

$$\gamma(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{-1/2} (\mu, \mu_n)_c \hat{s}_n.$$

3.5. Representación de soluciones del operador L

Consideremos el siguiente problema de condiciones de frontera para el operador L

$$-\Delta\mu + c\mu = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega$$

$$(1-\tau)\frac{\partial \mu}{\partial \nu}(x) + \tau\rho(x)\mu(x) = g(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$

Con $g \in L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ y $0 \leq \tau < 1$ y formulación débil

$$\int_\Omega (\nabla\mu\nabla v + c\mu v)\ dx \ + \ (1-\tau)^{-1}\int_{\partial\Omega} (\tau\rho\gamma(\mu) - g)\,\gamma(v)\ d\sigma = 0 \quad \forall\ v \in H(\Omega). \tag{3.16}$$

Sea el funcional $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \times [0,1) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}(\mu,\tau) := \mathcal{T}(\mu,\rho) - 2\langle G, \mu\rangle$$

Donde

$$\mathcal{T}(\mu,\rho) := A(\mu,\mu) + \frac{\tau}{1-\tau}\mathcal{B}(\mu)$$

$$A(\mu,\mu) = \textstyle\int_\Omega \nabla\mu^2 + c\mu^2\ dx \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(\mu) = \textstyle\int_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu)^2\ d\sigma$$

y

$$\langle G, \mu\rangle = \frac{1}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} g\gamma(\mu)\ d\sigma$$

Se tiene que $\mathcal{T}$ y $\langle G, \mu\rangle$ son contunias, convexas y Fréchet diferenciable pues A, y $\mathcal{B}$ lo son y G por 2.5.1.
Como A es $H - coersiva$ se tiene que exite $m > 0$ tal que

$$\begin{aligned} m\|\mu\|^2 &\leq A(\mu,\mu) \\ &\leq A(\mu,\mu) + \frac{\tau}{1-\tau}\mathcal{B}(\mu) \\ &= \mathcal{T}(\mu,\tau) \end{aligned}$$

Por lo tanto la forma bilineal, acotada y simetrica $\mathcal{T}$ es $H - coersiva$ y por el teorema de Lions-Stampacchia 2.3.2 se tiene que $\mathcal{F}$ tiene un único mímimizante μ^* en $H^1(\Omega)$. Ahora bien como $\mathcal{F}$ es Fréchet diferenciable con derivada de Fréchet dada por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\mu), v\rangle &= 2A(\mu,v) + \frac{2\tau}{1-\tau}M(\mu,v) - 2\langle G, v\rangle \\ &= 2\int_\Omega (\nabla\mu\nabla v + c\mu v)\ dx \ + \ \frac{2\tau}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu)\gamma(v)\ d\sigma - \frac{2}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} g\gamma(v)\ d\sigma \end{aligned}$$

y se satisface 3.16 en el mínimo μ^*

$$\int_\Omega (\nabla\mu^*\nabla v + c\mu^* v)\ dx \ + \ \frac{\tau}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu^*)\gamma(v)\ d\sigma - \frac{1}{1-\tau}\int_{\partial\Omega} g\gamma(v)\ d\sigma = 0$$

Tomando $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ obtenemos que $\mu^* \in ker(L)$ así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1. *Sean Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1, $g \in L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ y $0 \leq \tau < 1$. Entonces, existe un único minimizante μ^* de $\mathcal{F}$ en $H^1(\Omega)$ que es solución de* (3.16) *y pertenece a $ker(L)$.*

Como $\mu^* \in ker(L)$ entonces μ^* tiene una representación de funciones Steklov dada por

$$\mu^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \mu_n(x) \quad \text{con } c_n = (\varphi, \mu_n)_c.$$

Poniendo $v = \mu_m$ en (3.16) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\tau}\left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} &= (\mu^*, \mu_m)_c + \frac{\tau}{1-\tau}(\gamma(\mu^*), \gamma(\mu_m))_\rho \\
&= c_m + \frac{\tau}{1-\tau}\frac{1}{\lambda_m}c_m \\
&= \left(1 + \frac{\tau}{1-\tau}\frac{1}{\lambda_m}\right)c_m \\
&= \left(\frac{\lambda_m(1-\tau)+\tau}{\lambda_m(1-\tau)}\right)c_m.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$c_m = \frac{\lambda_m(1-\tau)}{(1-\tau)[\lambda_m(1-\tau)+\tau]}\left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = \frac{\lambda_m\left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}}{\lambda_m(1-\tau)+\tau} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Luego la solución de (3.16) viene dada por

$$\mu^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_m\left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}}{\lambda_m(1-\tau)+\tau}\mu_n(x) \quad \text{para } 0 \leq \tau < 1. \tag{3.17}$$

Por lo tanto

Solución al problema de Robin ($0 < \tau < 1$)	Solución al problema de Neuman ($\tau = 0$)
$\mu^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_m\left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}}{\lambda_m(1-\tau)+\tau}\mu_n(x)$	$\mu^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}\mu_n(x)$

Terminamos con la solución al problema de Dirichlet.

Teorema 3.5.2. *Sean Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1 y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Entonces, son equivalentes:*

a) *Si $\varphi \in H^1(\Omega)$ es solución para el problema de Dirichlet*

$$\int_\Omega \left[\nabla\mu\nabla\varphi + c\mu\varphi\right]\, dx.$$

sujeto a $\gamma(\varphi) = g$ sobre $\partial\Omega$.

b) *La serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |(g, \gamma(\mu_n))_\rho|^2 \tag{3.18}$$

es convergente. En este caso, la solución se puede representar en la forma

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (g, \gamma(\mu_n))_\rho\, \mu_n(x). \tag{3.19}$$

Prueba.

$a) \Rightarrow b)$: Supongamos que $\varphi \in H^1(\Omega)$ es solución del problema de Dirichlet entonces $\varphi \in ker(L)$ así φ tiene una representación de funciones de Steklov dada por

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\varphi, \mu_n)_c \mu_n,$$

entonces

$$\begin{aligned}\gamma(\varphi) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\varphi, \mu_n)_c \gamma(\mu_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (g, \hat{s}_n)_\rho \hat{s}_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (g, \gamma(\mu_n))_\rho \gamma(\mu_n) \\ &= g,\end{aligned}$$

por la ortogonalidad de $\mathcal{C}$ se deduce que $(\varphi, \mu_n)_c = \lambda_n (g, \gamma(\mu_n))_\rho$. Por lo tanto

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (g, \gamma(\mu_n))_\rho \ \mu_n(x).$$

Finalmente por la identidad de Parseval se tiene que

$$\|\varphi\|_c^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |(g, \gamma(\mu_n))_\rho|^2.$$

$b) \Rightarrow a)$: Si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |(g, \gamma(\mu_n))_\rho|^2.$$

converge. Entonces, puesto que $\mathcal{C}$ es base se tiene que

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (g, \gamma(\mu_n))_\rho \ \mu_n(x) = \lim_{\tau\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_m \left(g, \gamma(\mu_m)\right)_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}}{\lambda_m(1-\tau)+\tau} \mu_n(x)$$

■

3.6. Concluciones

Se vio que a partir del principio variacional de maximizar

$$B(\mu) = \int_{\partial\Omega} \rho\mu^2 d\sigma$$

sobre

$$K_j = \{\mu \in K : \ (\gamma(\mu), \gamma(\mu_k))_\rho = 0 \ \ \forall \ \ k \in \{1, 2, ..., j-1\}\}$$

con

$$K = \{\mu \in H^1(\Omega) : \ \int_\Omega \nabla\mu^2 + c\mu^2 \ dx \leq 1\}$$

los máximos μ_j de este problema son las funciones propias de Steklov de

$$\int\limits_\Omega \nabla\mu\nabla v + c\mu v \ dx \ = \ \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \rho\gamma(\mu)\gamma(v) \ d\sigma \ \ \forall \ v \ \in H^1(\Omega)$$

que es la formulación débil del problema

$$\begin{array}{rcccc} L(\mu) := -\Delta\mu + c\mu & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial\nu} & = & \lambda \ \rho \ \mu & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array}$$

Se obtuvo que tales funciones propias de Steklov forman una base c-ortogonal del $Ker(L)$ y se tiene la siguinete descompacisión c-ortogonal

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= H_0^1(\Omega) \quad \oplus_c \quad W \\ &= Ker(B) \oplus_c Ker(L). \end{aligned}$$

Los valores propios de Steklov satisfacen que

$$\lambda_j = (sup_{\mu \in K_j} B(\mu))^{-1}$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \ \to \infty$$

Ahora bien como $Ker(L)$ se identifica con el espacio de Hilbert $H^{1/2}(\partial\Omega)$ se puede ver que los valores propios de Steklov son los valores propios del mapeo de Dirichlet-Neumann el cual esta definido por:

$$T_c : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega) \qquad T_c(f) := \frac{\partial\mu}{\partial\nu}$$

Donde $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ es el dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, es decir, dado $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ su evaluación en un elemento $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ esta dado por $\langle\phi, \varphi\rangle = \phi(\varphi)$ y μ es la extención c-armónica de f en Ω. Esto es, μ resuelve el problema de Direchlet

$$\begin{array}{rcccc} -\Delta\mu + c\mu & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ \mu & = & f & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array}$$

Consideremos que f y f^* son dos elementos en $H^{1/2}(\partial\Omega)$ entonces por definicion de T_c existen $\mu, \mu^* \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ que resuelven

$$\begin{array}{rcccc} -\Delta\mu + c\mu & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ \mu & = & f & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} -\Delta\mu^* + c\mu^* & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ \mu^* & = & f^* & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array}$$

respectivamente. Definiedo $v = \mu - \mu^*$ se tiene que v resuelve el problema homageneo

$$\begin{array}{rcccc} -\Delta v + cv & = & 0 & \text{en} & \Omega \\ v & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array}$$

Si $L(v) = \lambda v$ entonces la forma débil de este problema esta dada por

$$\int_\Omega \nabla\mu\nabla v + c\mu v \; dx \;=\; \lambda \int_\Omega \rho\mu v \; dx \;\; \forall \; v \; \in H_0^1(\Omega)$$

Tomando $v = \mu$ se obtine que $\lambda > 0$ en consecuencia la única solución de $L(v) = 0$ es $v = 0$ por lo que $\mu = \mu^*$ y $T_c(f) = T_c(f^*)$ así que el problema esta bien definido y la extención c-armónica es única.

Bibliografía

[1] Gabriel N. Gatica, *Introducción al Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Reverté, 2014.

[2] Mónica Clapp, *Análisis Matemático*, Papirhos, IMATE UNAM, 2015.

[3] Alberto Bressan, *Lecture Notes on Functional Analysis: With Applications to Linear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2012.

[4] Martin Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Second Edition, American Mathematical Society, 2001.

[5] José Canavati, *Introducción al Análisis Funcional*, Fondo de Cultura Económica, 1998.

[6] Chang Kung-Ching, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[7] Jean Dieudonné, *Fundamentos de Análisis Moderno*, Reverté, 2003.

[8] Jean-Pierre Aubin, *Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[9] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

[10] Lawrence C. Evans y Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.

[11] Robert E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag New York, 1998.

[12] Emmanuele DiBenedetto, *Real Analysis*, Birkhäuser Basel, 2002.

[13] Juan Peypouquet, *Convex Optimization in Normed Spaces: Theory, Methods and Examples*, Springer International Publishing, 2015.

[14] Giles Auchmuty, *Steklov Eigenproblems and the Representation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization **25** (2005) 321–348.

[15] Giles Auchmuty, *Spectral Characterization of the Trace Spaces $H^s(\partial\Omega)$*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **38** (2006) 894–905.

[16] Giles Auchmuty, *Bases and comparison results for linear elliptic eigenproblems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **390** (2012) 394–406.