



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

OSCILACIONES COLECTIVAS EN REDES DE  
OSCILADORES LINEALES ACOPLADAS A UN  
OSCILADOR NO LINEAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

RODRIGO MIQUEO

TUTOR:

DR. FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2023





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de Datos del Jurado

## 1. Datos del alumno

Miqueo  
Rodrigo  
55 2264 6327  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
31562442-3

## 2. Datos del tutor

Dr.  
Francisco Javier  
Sevilla  
Pérez

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Pedro Eduardo  
Miramontes  
Vidal

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Denis  
Pierre  
Boyer

## 5. Datos del sinodal 3 Dr.

Carlos  
Ramírez  
Ramos

## 6. Datos del sinodal 4 Dr.

Juan Claudio  
Toledo  
Roy

## 7. Datos del trabajo escrito

Oscilaciones colectivas en redes de osciladores lineales acopladas a un  
oscilador no lineal  
102p  
2023

*A mi familia por siempre apoyarme*



# Resumen

En la presente tesis se estudian las oscilaciones colectivas de un sistema de osciladores armónicos cuando el acoplamiento de corto alcance entre estos difiere del determinado por las redes regulares que dan origen, por ejemplo, a las vibraciones colectivas de sólidos cristalinos. Para ello se hace un análisis comparativo, en el que se usa como sistema modelo al sistema de osciladores armónicos dispuestos en una cadena lineal con conexiones a primeros vecinos y condición de frontera periódica. El espectro de frecuencias de este sistema simple es bien conocido y es presentado en los libros de texto básicos de estado sólido. Se analiza el espectro de frecuencias colectivas de cadenas lineales bajo tres situaciones distintas y se comparan con la cadena lineal periódica de osciladores armónicos. En primer lugar, se cambia la topología de la red reemplazando con cierta probabilidad algunas conexiones a primeros vecinos por otras a vecinos más lejanos, para esto se utilizan redes de Watts-Strogatz (WS). En segundo lugar, en la cadena lineal periódica se cambia un solo oscilador armónico por un oscilador no lineal. Se utilizan tres tipos distintos de osciladores no lineales, los cuales son de Duffing, Rayleigh y Van der Pol. Se observan las diferencias de las frecuencias normales de estos casos con la cadena lineal de osciladores armónicos. Finalmente, habiendo estudiado las reconexiones de la red y la no linealidad por separado, se crean redes WS en donde un enlace de oscilador armónico se intercambia por uno de los osciladores no lineales antes mencionados. En el primer caso, se observó que para la nueva topología de WS la velocidad de grupo aumenta para mayores frecuencias comparando con la red regular. Para la cadena periódica con un oscilador no lineal aparecen frecuencias nuevas en las oscilaciones y la dinámica del sistema es controlado por el ciclo límite del oscilador no lineal. En el último caso, el sistema también es controlado por los ciclos límites, pero en los espacios fases aparecen trayectorias que no se observaban en los casos anteriores.

# Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN110120. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida

## Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1 Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2 Marco teórico</b>	<b>3</b>
§2.1 Fenómenos colectivos . . . . .	3
§2.2 Redes de Watts-Strogatz . . . . .	4
§2.3 Transformada rápida de Fourier . . . . .	8
§2.4 Frecuencias normales . . . . .	11
§2.4.1 Cadena lineal . . . . .	12
§2.4.2 Solución por el método de diagonalización de la matriz Laplaciana . . . . .	16
§2.4.3 Velocidad de fase y de grupo . . . . .	21

§2.5	Osciladores no lineales . . . . .	24
§2.6	Ciclos límites . . . . .	25
§2.6.1	Oscilador lineal . . . . .	26
§2.6.2	Oscilador de Duffing . . . . .	28
§2.6.3	Oscilador de Van der Pol . . . . .	31
§2.6.4	Oscilador de Rayleigh . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Resultados y análisis</b>	<b>37</b>
§3.1	Espectro de frecuencias de sistemas osciladores armónicos acoplados .	38
§3.1.1	Métodos de la transformada rápida de Fourier para encontrar picos de intensidad . . . . .	39
§3.1.2	Comparación de métodos para calcular frecuencias colectivas .	43
§3.1.3	Comparación con el método de matriz Laplaciana y los errores relativos . . . . .	47
§3.2	Dinámica de una cadena periódica de osciladores armónicos acoplados y controlados por un oscilador no lineal . . . . .	50
§3.2.1	Cadena lineal periódica de $N = [2, 5, 12]$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 0.1$ . . . . .	52
§3.2.2	Cadena lineal periódica de $N = 100$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 0.1$ . . . . .	64
§3.2.3	Cadena lineal periódica de $N = [2, 5, 12]$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 1$ . . . . .	70
§3.2.4	Cadena lineal periódica de $N = 100$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 1$ . . . . .	80
§3.3	Dinámica de una red Watts-Strogatz de osciladores armónicos aco- plados controlados por un oscilador no lineal . . . . .	86
§3.3.1	Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.1$ . . . . .	87
§3.3.2	Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.5$ . . . . .	90

§3.3.3 Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.9$ . . . . .	93
<b>4 Conclusiones</b>	<b>96</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

## Índice de figuras

2.1 El grafo de la izquierda es dirigido, ya que hay una dirección que se muestra por las flechas. Además, $E$ es reflexivo, ya que $(4, 4) \in E$ y hay un duplicado de arista del nodo 4 hacia el 2. En el grafo de la derecha se observa que es simple, ya que no hay dirección (es simétrico), no hay duplicados y es anti-reflexivo. . . . .	5
2.2 Se muestran tres redes obtenidas del algoritmo de Watts-Strogatz, con $n = 20$ y $k = 4$ , de izquierda a derecha con probabilidades $P = 0$ , $P = 0.1$ y $P = 1$ , donde la red de la izquierda es una red regular, la del medio una red de mundo pequeño y la de la derecha una red aleatoria. . . . .	6
2.3 Se muestran los cocientes del coeficiente de agrupamiento $C(P)$ y la longitud promedio de camino $L(P)$ entre los respectivos valores de una red regular $C(0)$ y $L(0)$ , respectivamente. Los valores de $P$ se hallan en el eje horizontal. [1] . . . . .	7
2.4 Una cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas donde los nodos corresponden a las masas y las aristas a un resorte. . . . .	12
2.5 Curva de dispersión de la cadena lineal, donde $\sqrt{4\frac{K}{M}} = 2\omega_0$ . . . . .	15
2.6 Curva de dispersión de la cadena lineal, donde $V_f$ es la velocidad de fase y $V_g$ es la velocidad de grupo. . . . .	23
2.7 Velocidad de grupo de la cadena lineal. . . . .	24

2.8 De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias del oscilador lineal con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. . . . . 28

2.9 De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias cerradas del oscilador de Duffing al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ . . . . . 30

2.10 De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias cerradas del oscilador de Duffing al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ . . . . . 31

2.11 De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Van der Pol al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ . . . . . 32

2.12 De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Van der Pol al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ . . . . . 34

2.13 De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Rayleigh al considerar dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ . 35

2.14 De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Rayleigh al considerar dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ . 36

3.1 Gráfica de intensidades contra frecuencias de una cadena lineal con 10 nodos conectados por osciladores lineales. . . . . 40

3.2 Máximo local de error numérico en la frecuencia  $\omega \approx 0.535\omega_0$  de un nodo de la cadena lineal con condiciones de frontera periódicas. . . . 41

3.3 Gráfica de la derivada de las intensidades contra frecuencias de una cadena lineal con 10 nodos de la Figura 3.1. . . . . 42

3.4 Derivada igual a cero del error numérico en la frecuencia  $\omega \approx 0.535\omega_0$  del mismo nodo de la Figura 3.2. . . . . 43

3.5 Comparación de distintos métodos para encontrar las frecuencias en la cadena lineal con condiciones periódicas a la frontera. . . . . 44

3.6	Curvas de dispersión para redes de Watts-Strogatz de probabilidad de reconexión $P = 0.1, 0.5, 0.9$ donde se hace un promedio sobre 50 redes. Se comparan los distintos métodos para encontrar las frecuencias. . .	46
3.7	Gráficas de frecuencias obtenidas por la transformada de Fourier rápida contra las frecuencias de la matriz Laplaciana con $P = [0.1, 0.5, 0.9]$ . 48	
3.8	Errores relativos en porcentaje de los dos métodos para encontrar las frecuencias en la cadena lineal con condiciones periódicas con probabilidades de reconexión $P = [0.1, 0.5, 0.9]$ con escala logarítmica en el eje Y. . . . .	49
3.9	Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de $N = 2$ y con parámetro $\epsilon = 0.1$ para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales. . . . .	53
3.10	Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de $N = 5$ y con parámetro $\epsilon = 0.1$ para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales. . . . .	53
3.11	Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de $N = 12$ y con parámetro $\epsilon = 0.1$ para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales. . . . .	54
3.12	Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con $N = 2$ y $\epsilon = 0.1$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal. . .	55
3.13	Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con $N = 2$ y $\epsilon = 0.1$ , se observa una nueva frecuencia para los dos nodos.	56
3.14	Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con $N = 2$ y $\epsilon = 0.1$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal. . . . .	57
3.15	Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con $N = 5$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal. . . . .	58
3.16	Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con $N = 5$ , se observa una nueva frecuencia que no presenta el caso lineal.	58

3.17 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 5$ . Se observa una nueva frecuencia que no presenta el caso lineal y desaparece la primera frecuencia del caso lineal. . . . . 59

3.18 En la gráfica de arriba se muestran los picos de intensidad que marcan las frecuencias de oscilación de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 12$ , no se observa ninguna diferencia sobre las frecuencias del caso de la cadena lineal periódica con osciladores armónicos. En la gráfica de abajo se muestran las frecuencias con posiciones iniciales del orden  $x_0 \approx 1$ . . . . . 60

3.19 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 12$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal. . . . . 61

3.20 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 12$  con  $\epsilon = 0.1$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal y desaparecen algunas frecuencias del caso lineal o su intensidad es muy baja para ser identificadas. . . . . 62

3.21 Se muestra el espacio fase de los 12 nodos de la cadena lineal con un oscilador de Van der Pol entre el nodo 0 y 1 con  $\epsilon = 0.1$ . . . . . 63

3.22 Se muestra el espacio fase de los 12 nodos de la cadena lineal con un oscilador de Rayleigh entre el nodo 0 y 1 con  $\epsilon = 0.1$ . . . . . 63

3.23 Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 100$  y con una constante no lineal de  $\epsilon = 0.1$ . . . . . 65

3.24 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 100$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal. . . . . 66

3.25 Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$  con un potencial tipo Rayleigh. 67

3.26 Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la red  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$  con un potencial tipo Van der Pol. . . . 68

3.27 Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con un oscilador de Van der Pol entre los nodos 0 y 1 con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 69



3.28 Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con un oscilador de Rayleigh en el nodo 0 con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 69

3.29 Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 2$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ . . 71

3.30 Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 5$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ . . 71

3.31 Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 12$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ . . 72

3.32 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observa la misma frecuencia que con el caso lineal. 73

3.33 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observa que no hay picos máximos. . . . . 73

3.34 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, además de la frecuencia del caso lineal. . . . . 74

3.35 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan las mismas dos frecuencias del caso lineal. 75

3.36 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, además de las dos frecuencias del caso lineal. . . . . 75

3.37 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan cinco nuevas frecuencias, pero solo aparece una del caso lineal en donde está el pico más grande de intensidad. . . . . 76

3.38 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan las mismas 6 frecuencias del caso lineal y nuevos picos de baja intensidad. . . . . 77

3.39 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, pero desaparece una de las frecuencias del caso lineal y hay una fuerte dependencia en una frecuencia para algunos nodos. . . . . 78

3.40 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan cinco nuevas frecuencias, pero solo aparece una del caso lineal. . . . . 78

3.41 De izquierda a derecha y de arriba a abajo: 1) Caso Rayleigh con  $N = 5$ , se observa que el nodo 0 tiene la forma del espacio fase de Rayleigh mientras que los otros nodos no. 2) Caso Rayleigh con  $N = 12$ , se observa que los nodos tienen trayectorias que no se cierran. 3) Caso Van der Pol con  $N = 5$ , donde el nodo 0 y 1 tienen la trayectoria parecida al oscilador de Van der Pol y los otros a trayectorias de oscilador armónico con distintas amplitudes. 4) Caso Van der Pol con  $N = 5$ , donde el nodo 0 y 1 tienen la trayectoria parecida al oscilador de Van der Pol y los otros de oscilador armónico con distintas amplitudes. . . . . 79

3.42 Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 100$  y con una constante no lineal de  $\epsilon = 1$  para los distintos osciladores no lineales y el caso lineal. . . . . 80

3.43 Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 100$ , después de la última frecuencia de la cadena se observan pequeñas frecuencias para nodos 0 y 1. . . . . 81

3.44 Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$  con un potencial tipo Rayleigh. . . . . 82

3.45 Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$  con un potencial tipo Van der Pol. . . . . 83

3.46 Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ . Hay una conexión no lineal de Van der Pol entre los nodos 0 y 1, donde justo siguen una trayectoria de oscilador Van der Pol en el espacio fase. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 84

3.47 Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ . El nodo 0 tiene el término lineal de Rayleigh, donde justo sigue una trayectoria de oscilador Rayleigh en el espacio fase. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 84

3.48 Red Watts-Strogatz con  $P = 0.1$  y 12 nodos. . . . . 87

3.49 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con oscilador Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.1$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria parecidas al oscilador de Van der Pol. . . . . 88

3.50 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con oscilador Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.1$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria parecidas al oscilador de Van der Pol. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 88

3.51 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh y  $P = 0.1$ . . . . . 89

3.52 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh y  $P = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 89

3.53 Red Watts-Strogatz con  $P = 0.5$  y 12 nodos. . . . . 90

3.54 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.5$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria de oscilador de Van der Pol. . . . . 91

3.55 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh entre un par de nodos y  $P = 0.5$ , donde el nodo 0 muestra una trayectoria de oscilador de Rayleigh. . . . . 92

3.56 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh un un nodo y  $P = 0.5$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad. . . . . 92

3.57 Red Watts-Strogatz con  $P = 0.9$  y 12 nodos. . . . . 93

3.58 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con Van der Pol y  $P = 0.9$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria de la forma del oscilador de Van der Pol. . . . . 94

3.59 Los 12 espacios fases de los nodos de la red con Rayleigh y  $P = 0.9$ , donde el nodo 0 muestra una trayectoria de la forma del oscilador de Rayleigh. . . . . 94

# Capítulo 1

## Motivación

Se han utilizado redes para describir fenómenos colectivos que ocurren por la estructura de la red [2] y por las funciones de acoplamiento entre los nodos [3]. Además, las redes complejas han sido de interés para estudiar sistemas físicos, biológicos, químicos o sociales a partir de la interacción no lineal de los agentes. Tales sistemas, por ejemplo, son redes de átomos [4], redes neuronales [5], osciladores electroquímicos [6], oscilación glucolítica [6], propagación de una enfermedad [7], entre varios otros.

Además de redes complejas, se han utilizado interacciones no lineales entre los agentes o nodos de la red. El utilizar redes complejas con interacciones no lineales ha llevado a fenómenos de emergencia, tales como sincronización [8], criticalidad [9], transiciones de fase [10] y auto-organización [11].

La presente tesis tiene como objetivo principal analizar los efectos de oscilaciones no lineales sobre las frecuencias de vibración colectivas de una red de osciladores armónicos. En [4], se estudian las frecuencias de redes de Watts-Strogatz (WS) con distintas probabilidades de reconexión. Se utilizan redes de Watts-Strogatz [1], esto se hace por sus propiedades de mundo pequeño y de redes aleatorias. Se analizan las redes de WS con distintas probabilidades de reconexión, ya que se ha visto que la sincronización depende de la topología de la red [12].

Se extiende el análisis a una conexión no lineal entre dos nodos, las cuales corresponden a tres osciladores no lineales: de Duffing, Rayleigh y Van der Pol, que son acoplados a las redes de WS de osciladores armónicos. Es de interés analizar qué tipos de fenómenos colectivos emergen en este tipo de sistemas, si es que los hay.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Fenómenos colectivos

En física de sistemas complejos ocurre que la interacción entre los elementos fundamentales no da como resultado al sistema total, esto proviene de la gran cantidad de partes constituyentes y sus complicadas interacciones [13]. Las interacciones de las partes, o de los agentes, son no lineales, además, se tiene una cantidad considerable de agentes, lo que da origen a fenómenos colectivos [14]. Por lo que no se puede estudiar el fenómeno a partir de cada individuo y el tipo de interacción, sino que se debe estudiar la interacción de todos los agentes para entenderlo. Algunos resultados de esta cooperación colectiva son transiciones de fase, auto-organización o sincronización; donde cada una viene dada por una dinámica no lineal subyacente [15].

En la presente tesis se utiliza una red para modelar las conexiones entre los nodos (los agentes), los cuales están conectados por aristas (osciladores). Se han hecho simulaciones de grafos con distintos tipos de topología e interacciones para observar si ocurren fenómenos colectivos ([16], [17], [18]), con el propósito de observar si un solo oscilador no lineal es suficiente para que la dinámica del sistema cambie y si, además, cambiar la topología del sistema afecta los resultados.

## 2.2. Redes de Watts-Strogatz

Un aspecto central en este trabajo es la influencia de las redes en sistemas que dan lugar a dinámicas colectivas, por lo que primero se debe definir qué es una red, los tipos de redes y cuáles se utilizarán en este trabajo [19].

Una red se puede pensar como una colección de elementos (vértices o nodos) y cómo estos se conectan por medio de aristas. Matemáticamente, una red  $G$  está constituida por dos conjuntos, uno es  $V$ , que corresponde a un conjunto finito de vértices, o nodos, y el otro  $E$  que corresponde a las aristas que une a un par de nodos,  $E \subseteq V \otimes V$ . El conjunto  $E$  está compuesto por elementos de la forma  $(n, m) \in E$ , que denota el enlace entre el nodo  $n$  y el nodo  $m$ , ambos en  $V$ . Entonces se dice que  $G$  es una red de par  $(V, E)$ .

El conjunto de aristas,  $E$ , puede tener distintas propiedades. Se dice que  $E$  es reflexivo si  $(v, v) \in E$ , es decir, el nodo  $v \in V$  está conectado consigo mismo, y anti-reflexivo si  $(v, v) \notin E$ , para toda  $v \in V$ . Además,  $E$  es simétrico si  $(v_1, v_2) \in E \iff (v_2, v_1) \in E$ . Ahora, en los tipos de redes se tiene que  $G$  es una red dirigida o digrafo, si  $E$  no es simétrico o no dirigida, si  $E$  es simétrico. El tipo de redes que se usan en este trabajo son las redes simples. Se define a  $G$  como red simple si  $E$  es anti-reflexivo, simétrico y no hay duplicados de aristas. En la Figura 2.1 se muestran dos ejemplos, el que interesa para este trabajo es la red de la derecha.



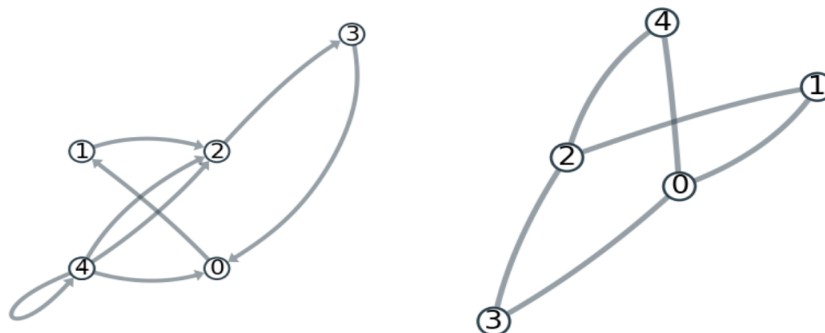


Figura 2.1: El grafo de la izquierda es dirigido, ya que hay una dirección que se muestra por las flechas. Además,  $E$  es reflexivo, ya que  $(4, 4) \in E$  y hay un duplicado de arista del nodo 4 hacia el 2. En el grafo de la derecha se observa que es simple, ya que no hay dirección (es simétrico), no hay duplicados y es anti-reflexivo.

Hay varias formas de crear redes con distintas topologías, dando distintas propiedades. Una de ellas es la red de Watts-Strogatz, llamada así por el algoritmo con el que se crea [1]. La red de Watts-Strogatz consiste en una red simple donde los nodos se posicionan en un círculo, Figura 2.2. Luego, se conecta cada nodo con  $k$  vecinos<sup>1</sup>,  $k/2$  hacia cada lado. Se puede pensar que se enumeran los nodos de 0 a  $n - 1$ , y se conectan de forma que el nodo  $i$  está conectado con los nodos  $(i - k/2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, i + k/2)$ . Al final de la red se conecta  $n - 1$  con el 0. Se empieza con el nodo 0 de la red y la arista que lo conecta con el nodo 1, y con probabilidad  $p$  se reconecta a otro nodo. Este nuevo nodo se escoge con la misma probabilidad que cualquier nodo de la red, en caso de que el nuevo nodo y el nodo 0 ya estén conectados, la arista se mantiene con el nodo 1.

Este proceso se repite eligiendo el siguiente nodo  $i$  y la arista que lo conecta con el siguiente nodo  $(i, i + 1)$ . Así considerando cada nodo hasta que se complete una vuelta a la cadena periódica. En la segunda vuelta se considera la arista que conecta con el segundo vecino más cercano, dando otra vuelta al igual que antes. Se hacen tantas vueltas como sean necesarias hasta que se haya considerado cada arista inicial una vez [1].

<sup>1</sup>También se dice que  $k$  es el grado del nodo, esto es el número de vecinos al que está conectado.

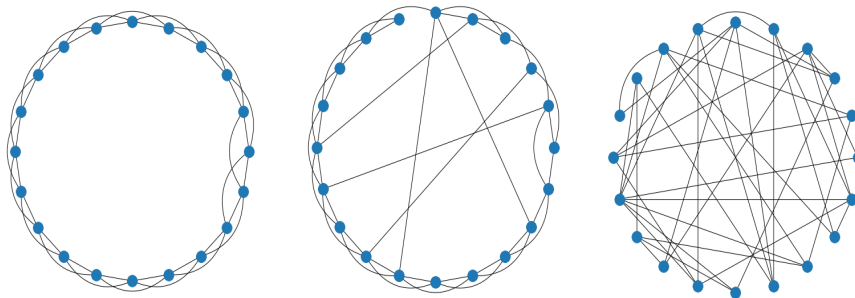


Figura 2.2: Se muestran tres redes obtenidas del algoritmo de Watts-Strogatz, con  $n = 20$  y  $k = 4$ , de izquierda a derecha con probabilidades  $P = 0$ ,  $P = 0.1$  y  $P = 1$ , donde la red de la izquierda es una red regular, la del medio una red de mundo pequeño y la de la derecha una red aleatoria.

La razón por la que se usa el algoritmo de Watts-Strogatz en este trabajo es porque se pueden ver las diferencias entre una red regular, una red aleatoria y las redes que se encuentran en medio ( $0 < P < 1$ ). Para cuantificar las propiedades de estas redes hay que definir lo que es la longitud promedio de camino y el coeficiente de agrupamiento.

La longitud promedio de camino  $L(P)$  es el promedio de la distancia mínima entre todos los posibles pares de nodos de la red, es decir, el número de pasos promedio que se deben de tomar para llegar a cualquier otro nodo desde cualquier posición. Por otra parte, el coeficiente de agrupamiento mide qué tan agrupado está un nodo con sus vecinos. La longitud promedio del camino mide una propiedad global, mientras que el coeficiente de agrupamiento es una medida local.

El coeficiente de agrupamiento  $C_i(P)$  definido como lo hicieron Duncan J. Watts y Steven H. Strogatz es la razón del número de conexiones existentes entre los vecinos de un nodo  $i$ , al número total de posibles conexiones entre los vecinos de  $i$ , este último es  $k_i(k_i - 1)/2$ , donde  $k_i$  es el grado del nodo  $i$ . Mientras más cercano sea a uno, más agrupados están ese nodo y sus vecinos. Se puede calcular el coeficiente de agrupamiento para cada nodo de la red y dar un coeficiente promedio  $C(P)$ .

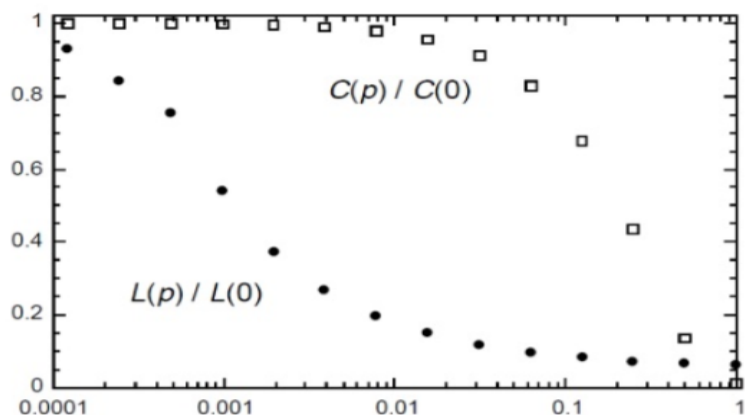


Figura 2.3: Se muestran los cocientes del coeficiente de agrupamiento  $C(P)$  y la longitud promedio de camino  $L(P)$  entre los respectivos valores de una red regular  $C(0)$  y  $L(0)$ , respectivamente. Los valores de  $P$  se hallan en el eje horizontal. [1]

En la Figura 2.3, se observan los valores de longitud promedio de camino  $L$  y el coeficiente de agrupamiento  $C$  para probabilidades de reconexión entre  $0.0001 \leq P \leq 1$ . Se puede observar que entre  $P \approx 0.01$  y  $P \approx 0.1$  el valor  $C(P)/C(0)$  tiene un valor cercano a 1 y empieza a declinar, mientras que  $L(P)/L(0)$  tiene un valor cercano a 0, donde  $C(0)$  y  $L(0)$  son los valores para una red regular, es decir,  $P = 0$ . A partir de estas dos propiedades, una red de mundo pequeño está formada por nodos altamente agrupados con sus vecinos y, además, se puede llegar rápidamente a otros nodos de la red gracias a la pequeña longitud promedio de camino.

Ya se explicó cómo se conectan los nodos entre sí en una red de Watts-Strogatz, se debe observar que esta red es una red simple, ya que no importa la dirección de conexión, no hay varias conexiones entre un par de nodos y un nodo no se conecta consigo mismo. En este trabajo la conexión entre un par de nodos cualquiera es identificada con la fuerza entre dichos nodos inducida por un potencial de interacción. Lo que es de especial interés es el potencial armónico, para dar paso a estudiar casos más generales como osciladores no lineales. En la Figura 2.2, los nodos de la red que estén conectados por aristas con otro nodo tendrán asociado un potencial armónico entre ellos. Hasta ahora los nodos pertenecen a conjunto abstracto  $V$ , por lo que después se identificará a cada nodo con una masa que puede desplazarse debido a la

interacción con las masas vecinas.

### 2.3. Transformada rápida de Fourier

Será de utilidad el análisis de series de tiempo de las trayectorias de los nodos acoplados por osciladores armónicos [20]. Es de interés en este trabajo el cálculo de los llamados modos normales de vibración (sección [2.4]), el cual se puede obtener de un análisis de Fourier de las trayectorias mencionadas [21].

La transformada de Fourier convierte una señal que está en el dominio del tiempo a una función en el dominio de las frecuencias

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt. \quad (2.1)$$

En el caso discreto se utiliza la transformada de Fourier discreta para analizar la señal discretizada  $x_n = x(t_n)$  con  $n = 0, \dots, N - 1$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi}{N} kn}, \quad (2.2)$$

donde  $x_n$  corresponde a una serie discreta obtenida de la señal  $x(t)$  y  $k = 0, \dots, N - 1$ . Así,  $X_k$ , se halla en el dominio de las frecuencias. Por simplificación se asume que  $N$  es potencia de 2. Al observar (2.2), se nota que se requieren hacer  $N$  multiplicaciones y  $N$  sumas para calcular  $X_k$  para un solo valor de  $k$ , por lo que para considerar todos los valores de  $k$  se deben hacer  $N^2$  multiplicaciones y sumas. Esto no resulta eficiente en el tiempo de cómputo si  $N$  es grande, por lo que se recurre a la transformada rápida de Fourier (FFT) [22].

La transformada rápida de Fourier es una familia de distintos algoritmos en donde se consigue reducir el número de operaciones de  $N^2$  a  $N \log_2 N$ . Uno utilizado ampliamente es el algoritmo de Cooley–Tukey [23]. Lo primero que se hace es separar la DFT en pares e impares

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi}{N}kn} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N}k(2n)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N}k(2n+1)} \quad (2.4)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn} + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn}. \quad (2.5)$$

Haciendo

$$E_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn}$$

$$O_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn},$$

se tiene

$$X_k = E_k + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} O_k. \quad (2.6)$$

Entonces las nuevas sumas se calculan usando  $N/2$  términos de 0 a  $N/2-1$ , mientras que la  $k$  va de 0 a  $N$ . Hasta ahora solamente se reescribió la suma original y sigue habiendo el mismo número de operaciones. Para ver cómo se reduce el número de operaciones se calcula  $X_{k+N/2}$

$$X_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}(k+N/2)n} + e^{-\frac{i2\pi}{N}(k+N/2)} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}(k+N/2)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn} e^{-i2\pi n} + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} e^{-i\pi} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn} e^{-i2\pi n}.$$

Recordando que  $e^{-i2\pi n} = 1$  con  $n$  entero y  $e^{-i\pi} = -1$ , se tiene

$$\begin{aligned} X_{k+N/2} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn} - e^{-\frac{i2\pi}{N}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{-\frac{i2\pi}{N/2}kn}. \\ &= E_k - e^{-\frac{i2\pi}{N}k} O_k. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_k &= E_k + e^{-\frac{i2\pi}{N}k} O_k \\ X_{k+N/2} &= E_k - e^{-\frac{i2\pi}{N}k} O_k \end{aligned}$$

Ahora sí se puede apreciar cómo se ahorran cálculos en la DFT. Al escribir el programa se hace correr  $k$  de 0 a  $N/2 - 1$ , de esta forma la otra mitad que falta solamente se calcula usando los valores  $E_k$  y  $e^{-\frac{i2\pi}{N}k} O_k$  de la primera mitad. Por lo que se deben hacer  $N$  sumas y  $N$  multiplicaciones para un valor de  $k$  de la primera mitad, mientras que para la segunda mitad son 2 operaciones, una multiplicación y una suma para un solo valor de  $k$ . Para aprovechar más este cálculo se debe observar que  $E_k$  y  $O_k$  son otras DFT, por lo que se puede repetir el mismo algoritmo.

Se debe observar que en este trabajo  $x_n$  corresponde a la discretización de la posición (unidad de longitud) en el tiempo  $t_n$ , y  $X_k$  es una cantidad compleja en donde cada entrada sigue teniendo unidad de longitud, porque solamente se multiplica  $x_n$  por un número complejo  $e^{ix}$ . Esto se puede observar desde la inversa de la transformada discreta de Fourier

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi}{N}kn}, \quad (2.7)$$

donde se requiere que  $X_k$  tenga unidades de longitud para que  $x_n$  también las tenga. A partir de (2.7), se puede calcular la discretización de la velocidad. Esta velocidad tendrá las mismas frecuencias que la posición, ya que la función  $x_n$  tiene como argumento a las frecuencias y estas se mantienen igual al derivar. Por lo que hacer un análisis de Fourier de las posiciones es lo mismo que hacer de las velocidades.

## 2.4. Frecuencias normales

A partir de las series de tiempo de las trayectorias de las masas acopladas por potenciales armónicos se calculan las frecuencias del sistema (frecuencias de vibración colectiva) realizando un análisis de Fourier sobre la trayectoria de cada masa. Estas frecuencias son las frecuencias normales de vibración que en física de estado sólido están relacionadas al estudio de redes cristalinas [24].

Antes de entender las frecuencias normales de un sistema de nodos acoplados por muelles, empezaremos con el análisis de la frecuencia natural de oscilación de una masa acoplada al extremo de un resorte. La masa oscila al rededor de un punto de equilibrio gracias a una fuerza restitutoria de la forma  $F(x) = -Kx$ , donde  $K$  es la constante de restitución del resorte. Resolviendo la ecuación de la fuerza restitutoria  $F(x)$  se tiene que la posición de la masa en el tiempo es  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ , donde  $A$  es la amplitud,  $\phi$  la fase y  $\omega_0 = \sqrt{K/M}$  es la frecuencia natural del sistema. Ahora, este sistema se puede complicar al agregar más masas conectadas por muelles, es decir, un sistema de osciladores acoplados.

Este sistema presenta varias frecuencias naturales o, lo que es lo mismo, normales. En el caso general, un sistema con  $n$  grados de libertad que está oscilando alrededor de un punto de equilibrio estable posee a lo más  $n$  frecuencias normales [25]. En función de las frecuencias normales del sistema, existe siempre un caso especial de movimiento en donde todos los nodos oscilan con la misma frecuencia, este patrón de movimiento se llama modo normal de vibración. Estos modos normales se superponen para describir cualquier movimiento del sistema.

En el caso de este trabajo, las frecuencias normales se determinarán a partir de un análisis de Fourier de las series de tiempo de las posiciones de  $n$  nodos. Esto quiere decir que las posiciones se pueden descomponer en  $n$  movimientos sinusoida-

les independientes que se superponen.

Sabiendo que existen los modos normales, se puede hacer un cambio de coordenadas en donde cada nueva coordenada oscila con solamente una frecuencia. Estas nuevas coordenadas son independiente de sí mismas y se les llama coordenadas normales. Esto está conectado con la existencia del caso especial de movimiento donde todos los nodos oscilan con la misma frecuencia.

### 2.4.1. Cadena lineal

El sistema del que parte este trabajo es de una cadena lineal con condiciones a la frontera periódica de  $N$  masas conectadas con sus primeros vecinos por un resorte que sigue la Ley de Hooke. A partir de los movimientos de los nodos acoplados se obtienen las frecuencias normales de vibración, en este caso se pueden obtener analíticamente [24].

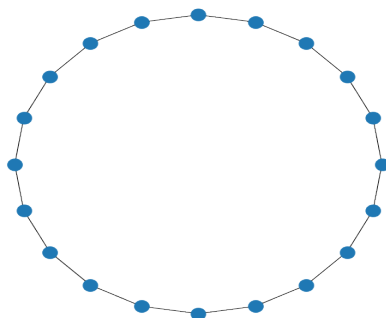


Figura 2.4: Una cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas donde los nodos corresponden a las masas y las aristas a un resorte.

Se empieza suponiendo que cada masa  $M$  está distribuida en un arreglo lineal a una distancia  $d = a$  de sus vecinos, donde las posiciones de los nodos están en  $a, 2a, \dots, Na$ . Sea  $u(ma, t)$  la distancia de la  $m$ -ésima masa hacia su punto de equilibrio que está en la posición  $ma$ , con  $m = 1, \dots, N$ . Se tiene que cada masa interactúa solamente con sus dos vecinos más cercanos, la energía potencial del sistema



es

$$U = \frac{K}{2} \sum_{m=1}^N [u(ma, t) - u((m+1)a, t)]^2 \quad (2.8)$$

$$= \frac{K}{2} [\dots + [u((m-1)a, t) - u(ma, t)]^2 + [u(ma, t) - u((m+1)a, t)]^2 + \dots], \quad (2.9)$$

donde  $K$  es la constante de los resortes, haciendo que todos los resortes sean iguales. Utilizando la relación entre energía potencial y fuerza conservativa, como lo es la Ley de Hooke, se obtienen las ecuaciones de movimiento para cada función de posición

$$M\ddot{u}(ma, t) = -\frac{\partial U}{\partial u(ma, t)}. \quad (2.10)$$

Usando la ecuación (2.9) en (2.10)

$$M\ddot{u}(ma, t) = -\frac{\partial}{\partial u(ma, t)} \left[ \frac{K}{2} \sum_{m=1}^N [u(ma, t) - u((m+1)a, t)]^2 \right] \quad (2.11)$$

$$= -\frac{K}{2} [2[u((m-1)a, t) - u(ma, t)] + 2[u(ma, t) - u((m+1)a, t)]] \quad (2.12)$$

$$= -K [2u(ma, t) - u((m-1)a, t) - u((m+1)a, t)]. \quad (2.13)$$

Por condiciones a la frontera se tiene que  $u([N+1]a, t) = u(a, t)$ , es decir, la masa  $N$  estaría en la posición  $u(Na, t) = u(0, t)$ . Sea la solución de la forma

$$u(ma, t) \propto Ae^{i(kma - \omega t)} \quad (2.14)$$

con  $A \neq 0$ .<sup>2</sup> Entonces por las condiciones a la frontera se tiene

$$\Rightarrow u(Na, t) = u(0, t) \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow Ae^{i(kNa-\omega t)} = Ae^{-i\omega t} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow e^{ikNa} = 1. \quad (2.17)$$

Por lo que  $k$  (el número de onda) debe tener la forma  $k = \frac{2\pi n}{aN}$  con  $n$  entero. Ahora, se introduce la solución a la ecuación (2.13), con  $\dot{u}(ma, t) = -i\omega u(ma, t)$  y  $\ddot{u}(ma, t) = -\omega^2 u(ma, t)$ , se tiene

$$-M\omega^2 u(ma, t) = -K [2u(ma, t) - u((m-1)a, t) - u((m+1)a, t)] \quad (2.18)$$

$$-M\omega^2 Ae^{i(kma-\omega t)} = -K [2Ae^{i(kma-\omega t)} - Ae^{i(k(m-1)a-\omega t)} - Ae^{i(k(m+1)a-\omega t)}] \quad (2.19)$$

$$-M\omega^2 e^{i(kma-\omega t)} = -Ke^{i(kma-\omega t)} [2 - e^{-ika} - e^{ika}] \quad (2.20)$$

$$-M\omega^2 = -2K \left[ 1 - \frac{e^{-ika} + e^{ika}}{2} \right] \quad (2.21)$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} \left[ 1 - \frac{e^{-ika} + e^{ika}}{2} \right], \quad (2.22)$$

usando  $\cos(ka) = \frac{e^{-ika} + e^{ika}}{2}$  y  $2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = 1 - \cos(ka)$ , entonces  $\omega$  queda

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}} |\sin(ka/2)|. \quad (2.23)$$

Sustituyendo  $k = \frac{2\pi n}{aN}$  y viendo que la única variable es  $n$ , se llega a

$$\omega(n) = 2\sqrt{\frac{K}{M}} |\sin(\pi n/N)|, \quad (2.24)$$

donde  $\omega$  corresponde a las frecuencias normales de vibración. Recordando el caso de un único oscilador que cumple la ley de Hooke, su frecuencia natural corresponde a  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ . En este trabajo se harán simulaciones y se graficarán frecuencias, la

---

<sup>2</sup>La solución general de la ecuación diferencial (2.13) es una suma de soluciones linealmente independientes, estas soluciones independientes corresponden a ondas planas con su propia amplitud  $A$ , frecuencia angular  $\omega$  y número de onda angular  $k$ .

escala natural usada será la frecuencia natural, por lo que

$$\frac{\omega(n)}{\omega_0} = 2|\sin(\pi n/N)|. \quad (2.25)$$

Se observa que  $0 \leq |\sin(\pi n/N)| \leq 1$ , entonces  $0 \leq \omega(n) \leq 2\omega_0$ .

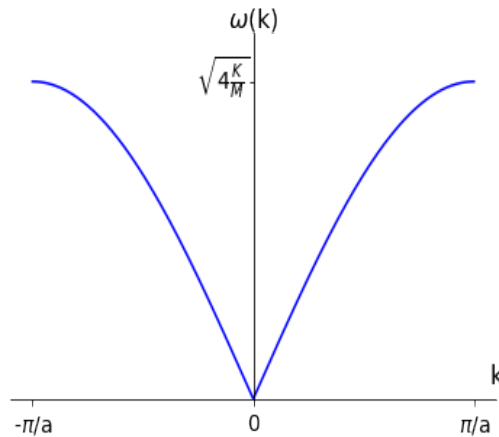


Figura 2.5: Curva de dispersión de la cadena lineal, donde  $\sqrt{4\frac{K}{M}} = 2\omega_0$ .

En la Figura 2.5, se muestran valores de  $k$  entre  $-\pi/a$  a  $\pi/a$ , esto se debe a que la ecuación (2.17) permite valores de  $k$  que van de  $-\infty$  a  $\infty$ , por lo que se escoge la región  $k \in [-\pi/a, \pi/a]$ , esta selección se debe a que es la primera zona de Brillouin (pág. 432 [24]). La primera zona de Brillouin es suficiente para explicar todos los valores de las frecuencias por la periodicidad de la cadena.

Si se tomaran todos los valores de  $k$ , esto generaría una ambigüedad, ya que no se tendría una única longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$  para una frecuencia dada  $\omega$ . Además, tomando este intervalo se tiene que la longitud de onda tiene un rango  $\infty \geq \lambda \geq 2a$  (pág. 7 [26]).

### 2.4.2. Solución por el método de diagonalización de la matriz Laplaciana

Como se dijo en la sección [2.2], en este trabajo se parte de una cadena lineal de osciladores acoplados a primeros vecinos, donde se utilizan redes simples para explicar las conexiones entre los nodos. Un concepto relacionado al de redes simples es el de la matriz Laplaciana. Sin embargo, antes es necesario definir qué es la matriz de adyacencia. A una red simple  $G(V, E)$  con  $V = \{1, \dots, N\}$  se le asocia la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$  de  $N \times N$  cuyos elementos son

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & (i, j) \notin E \end{cases}, \quad (2.26)$$

con  $1 \leq i, j \leq N$ . Nótese que como  $G$  es una red simple, la diagonal de  $\mathbf{A}$  tiene solamente ceros, ya que un nodo no se conecta consigo mismo. La matriz Laplaciana  $\mathbf{L}(G)$  se puede construir a partir de la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$  de la red y la matriz diagonal  $\mathbf{B}$ , cuyos elementos son el grado  $k$  de cada nodo. Entonces, la matriz Laplaciana se define

$$\mathbf{L} = \mathbf{B} - \mathbf{A}. \quad (2.27)$$

El nombre recuerda al operador diferencial  $\Delta = \nabla^2$ . En el presente análisis se utiliza la matriz Laplaciana, el cual es el análogo en el caso discreto y matricial del operador diferencial [19]. En el caso continuo, un ejemplo del operador Laplaciano es cuando se tiene una membrana elástica plana, donde se quieren estudiar las vibraciones de la membrana. Suponiendo que un punto de la membrana se mueve solamente verticalmente, es decir,  $z = z(x, y, t)$ , su movimiento vertical queda definido por la ecuación de onda [27]

$$\nabla^2 z = \frac{1}{v^2} \partial_t^2 z, \quad (2.28)$$

donde  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  es el operador Laplaciano y  $\partial_t$  es la derivada parcial respectivo al tiempo. Para discretizar el problema, en vez de pensar en la membrana como una superficie continua, se construye una red regular en donde la distancia entre los vértices es  $h$ . Por lo que en vez de tomar las derivadas para calcular el laplaciano,

se toman las aproximaciones por diferencias finitas. De esta manera, al calcular el operador laplaciano para un punto  $z = z(x, y)$  (omitiendo el tiempo), se hacen aproximaciones tomando un vértice  $x_n, y_n$  conectado con los vértices a distancia  $h$ , es decir,  $(x \pm h, y \pm h)$ <sup>3</sup>.

Para construir la matriz Laplaciana para una cuadrícula primero se deben enumerar los vértices de izquierda a derecha y de arriba a abajo, entonces una cuadrícula rectangular de  $m \times n$  tiene la matriz Laplaciana  $(m \times n) \times (m \times n)$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} D_1 & -I & \dots & 0 & 0 \\ -I & D_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & D_2 & -I \\ 0 & 0 & \dots & -I & D_1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

donde  $D_1$  es una matriz  $n \times n$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$D_2$  es una matriz  $n \times n$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

e  $I$  es la matriz identidad [28]. Por lo tanto, la matriz Laplaciana representa la

---

<sup>3</sup>Los cuatro vecinos que tiene un vértice en una red regular dos dimensional son  $(x - h, y - h)$ ,  $(x - h, y + h)$ ,  $(x + h, y - h)$ ,  $(x + h, y + h)$ .

conexión que tiene un nodo con sus primeros vecinos, o con los que está conectado.

Se pueden deducir algunos resultados importantes a partir de la definición de  $\mathbf{L}$ . Primero, se observa que como se define a partir de una red simple, entonces  $\mathbf{L}$  es simétrica y, por lo tanto, sus valores propios son reales. Además, con el teorema de Gershgorin<sup>4</sup> se obtiene que los valores propios se encuentran en el rango  $[0, 2k_{max}]$ <sup>5</sup>, donde  $k_{max}$  es el grado máximo que tiene un nodo de la red. Encima, ordenando los valores propios de forma  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N = 0$ , se puede demostrar que  $G$  es conexo<sup>6</sup> si y solo si  $\lambda_{N-1} > 0$  [19].

En la ecuación (2.13), se tiene la ecuación de movimiento para un solo nodo de la red con masa  $M$  que se conecta con sus dos vecinos cercanos a través de resortes con constante  $K$ . Recordando que se está trabajando en escala de frecuencia natural, la ecuación se puede reescribir como

$$\ddot{u}(ma, t) = -[2u(ma, t) - u((m-1)a, t) - u((m+1)a, t)], \quad (2.32)$$

con  $m = 1, \dots, N$ . Esta ecuación se puede escribir de forma matricial para tomar en cuenta a todos los nodos de la red. El vector de posiciones  $\mathbf{u}(t)$  se construye con la función de posición de cada nodo  $u(ma, t)$ , de forma que  $\mathbf{u}(t) = [u(a, t), u(2a, t), \dots, u(Na, t)]$ . Y análogamente el vector de aceleraciones  $\ddot{\mathbf{u}}(t) = [\ddot{u}(a, t), \ddot{u}(2a, t), \dots, \ddot{u}(Na, t)]$ . Como se vio anteriormente, la matriz Laplaciana representa en la diagonal el número de conexiones de cada nodo y afuera de la diagonal cómo están conectados estos. Por lo que la ecuación queda

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{L}\mathbf{u}. \quad (2.33)$$

---

<sup>4</sup>El teorema da una aproximación sobre dónde están los valores propios de una matriz compleja, esta aproximación se hace con discos en el espacio complejo. El teorema dice que si  $A$  es una matriz  $N \times N$  con entradas complejas y se tiene que  $X^{-1}AX = D + F$  donde  $D$  es diagonal y  $F$  tiene 0 en su diagonal, entonces los valores propios  $\lambda_i$  de  $A$  están en la unión de los discos con origen en  $d_i$  y radio  $\sum_{j=1}^N |f_{ij}|$  con  $i \in \{1, \dots, N\}$  [pág. 60 [19]]. En el caso que no tengan una unión, el disco que esté solo tendrá solamente un valor propio.

<sup>5</sup>Se puede observar la similitud con  $0 \leq \omega(n) \leq 2\omega_0$ .

<sup>6</sup>Se dice que una red es conexas si existe un camino que conecta a cualesquiera dos nodos que pertenecen a la red.

Lo que se busca ahora es la base coordenada en donde la ecuación (2.33) quede descrita por una matriz diagonal  $\mathbf{D}$ , tal que  $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}\mathbf{x}$ . Para esto se requiere hacer un cambio de base de coordenadas en donde las ecuaciones diferenciales estén desacopladas y, de esta manera, sean más fáciles de resolver. Esto corresponde a encontrar las coordenadas normales del sistema (sección [2.4]), en donde cada coordenada tiene asociada una sola frecuencia normal y, por lo tanto, cada entrada consiste en un modo normal de vibración.

Recordando que la matriz Laplaciana es real y simétrica, entonces se tiene que es diagonalizable. Por tanto, existe una matriz  $\mathbf{P}$  invertible y una matriz  $\mathbf{D}$  diagonal, cuyos elementos son los valores propios de  $\mathbf{L}$ , tal que:  $\mathbf{L}=\mathbf{PDP}^{-1}$ . Sustituyendo en (2.33), se tiene

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{PDP}^{-1}\mathbf{u}, \quad (2.34)$$

luego multiplicando por  $\mathbf{P}^{-1}$  por la izquierda

$$\mathbf{P}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PDP}^{-1}\mathbf{u}, \quad (2.35)$$

con  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{1}$

$$\mathbf{P}^{-1}\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}. \quad (2.36)$$

Se define el nuevo vector en el cambio de base  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}(t)$ . Como  $\mathbf{P}$  es una matriz que no depende del tiempo, se llega a  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , por lo tanto

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}\mathbf{x}. \quad (2.37)$$

Esta ecuación matricial da las ecuaciones de la forma

$$\ddot{x}_n = -\lambda_n x_n \quad (2.38)$$

para  $n \in \{1, \dots, N\}$ , por lo que quedan desacopladas en la nueva base de coordenadas. Aquí se puede ver que en las nuevas coordenadas, cada función de posición oscila con una sola frecuencia  $\lambda_n$ , las cuales están asociadas a las frecuencias norma-

les  $\omega(n)/\omega_0$ . Esto quiere decir que para obtener las frecuencias normales, solamente se debe diagonalizar la matriz Laplaciana. Por lo que estas nuevas coordenadas son las coordenadas normales.

Para la cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas, la matriz Laplaciana es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Se debe notar que la matriz es una matriz circulante, cuyos valores propios son (pág. 82 [19])

$$\lambda_n = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right), \quad (2.40)$$

donde  $n \in \{1, \dots, N\}$ <sup>7</sup>. Tomando  $\lambda_n = \omega^2(n)/\omega_0^2$ , se llega a

$$\frac{\omega(n)}{\omega_0} = 2|\sin(\pi n/N)|. \quad (2.41)$$

La razón por la que se divide por la frecuencia natural  $\omega_0$  es para tener valores propios adimensionales. Se puede observar que es la misma función que la curva de dispersión en (2.25).

Los vectores propios de  $\mathbf{L}$  son los de una matriz circulante, los cuales son (pág. 67 [19])

$$\mathbf{v}_n = [1, w^n, \dots, w^{(N-1)n}], \quad (2.42)$$

donde  $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$  es la  $n$ -ésima raíz unitaria.

---

<sup>7</sup>La matriz Laplaciana es una matriz de  $N \times N$ , por lo que tiene  $N$  valores propios. Aquí se escriben los valores propios con el índice  $n$  que están relacionados con el número de onda  $k$  de la sección anterior. No se debe confundir con el número entero  $m$ , este corresponde a la  $m$ -ésima posición de una masa en la cadena lineal. El número  $m$  representa una entrada en el vector  $\mathbf{u}$ , mientras que  $n$  representa la  $n$ -ésima coordenada normal con frecuencia  $\lambda_n$ .



### 2.4.3. Velocidad de fase y de grupo

En las secciones anteriores se obtuvo la curva de dispersión (frecuencia normal contra número de onda) de una cadena lineal con condiciones periódicas a la frontera y nodos acoplados por potenciales armónicos. Además, se pudo calcular analíticamente la función  $\omega(k)$  usando la matriz Laplaciana de la red. A partir de la ecuación  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$  se puede ver que los desplazamientos al rededor de las posiciones de equilibrio (las entradas del vector  $\mathbf{u}$ ) se componen por una superposición de las coordenadas normales (vector  $\mathbf{x}$ ). Las entradas de las coordenadas normales se pueden conocer gracias a la ecuación (2.38), donde  $\lambda_n = \omega^2(n)/\omega_0^2$ , sabiendo que  $\omega(n)$  es la frecuencia de la entrada  $n$  del vector  $\mathbf{x}$ . Las soluciones de (2.38) son de la forma  $e^{-i\lambda_n t}$ , que son onda planas. Esto quiere decir que por la cadena lineal se mueven ondas que se superponen. Estas ondas que viajan por la cadena lineal tienen una velocidad asociada.

Antes de mencionar las velocidades que se derivan de la descripción de una onda, se deben recordar algunas características de esta. Las propiedades que se asocian a una onda son su longitud de onda  $\lambda$  y su período temporal  $T$ . A partir de estas dos propiedades se pueden definir otras. Conociendo  $T$  se define la frecuencia angular  $\omega$  que es el tiempo que tarda en trasladarse un radián,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Y conociendo  $\lambda$ , se define el número de onda angular  $k$  que es la frecuencia espacial que cuenta cuántos radianes hay por unidad de longitud  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Se utilizan los radianes para no tener que escribir  $2\pi$  en las ecuaciones, ya que también se puede hablar de ciclos por unidad de tiempo  $f = \frac{1}{T}$  y ciclos por unidad de longitud  $\nu = \frac{1}{\lambda}$ . Con las frecuencias espaciales y temporales se puede conocer la velocidad con la que se propaga la onda  $v_f = \omega/k$ , donde  $v_f$  es la velocidad de la onda también conocida como velocidad de fase. La ecuación de una onda armónica tiene la forma [29]

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t), \quad (2.43)$$

donde  $A_0$  es la amplitud de la onda en  $x = 0$ . El signo  $-$  corresponde a que la onda se mueve hacia la derecha en el eje  $x$ . Si se pone un signo menos extra para el tiempo

$(-t)$ , esta se mueve hacia la izquierda de  $x$ .

La velocidad de fase no es la única velocidad que se puede asociar a las ondas. Sea una superposición de dos ondas que se propagan en la misma dirección de la forma

$$A(x, t) = \cos [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t] + \cos [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]. \quad (2.44)$$

Por identidades trigonométricas se obtiene

$$A(x, t) = 2 \cos (\Delta k x - \Delta\omega t) \cos (kx - \omega t). \quad (2.45)$$

Se puede tomar la amplitud de la nueva onda como  $A_0(x, t) = 2 \cos (\Delta k x - \Delta\omega t)$ , la cual también se conoce como la modulación de la onda, ya que modifica la amplitud de la onda principal  $\cos (kx - \omega t)$ . Se puede pensar en esta modulación como una onda aparte y que tiene su propia velocidad  $v_g = \Delta\omega/\Delta k$ , que es la llamada velocidad de grupo. La idea de grupo o paquete de onda se refiere a que justamente se produce por una superposición de distintas ondas. Tomando el límite cuando  $\Delta k, \Delta\omega \rightarrow 0$ , se obtiene  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .<sup>8</sup>

Recordando la curva de dispersión de la cadena lineal periódica, se pueden obtener ambas velocidades. La velocidad de fase es la pendiente desde el origen hasta el punto  $(k, \omega(k))$  y la velocidad de grupo es la tangente a este punto [30].

---

<sup>8</sup>En algunos casos no queda bien definida la velocidad de grupo por una deformación de la onda principal, pero en este trabajo, al menos en la parte lineal, las ondas no se deforman porque la energía se conserva (pág. 5 [30]). La deformación se debe por la absorción de la onda al moverse por un medio.

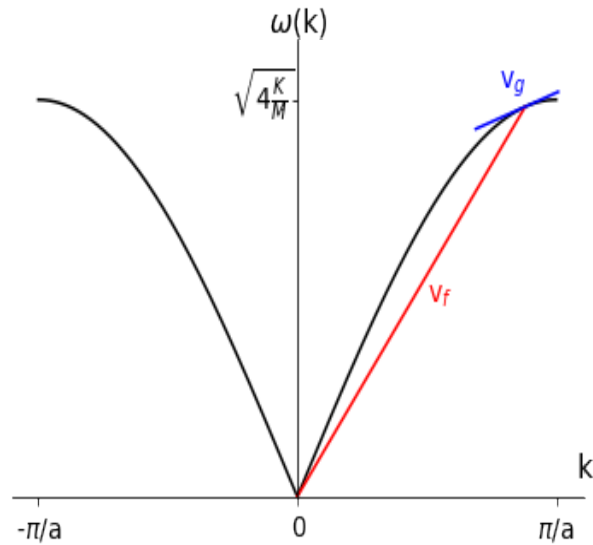


Figura 2.6: Curva de dispersión de la cadena lineal, donde  $V_f$  es la velocidad de fase y  $V_g$  es la velocidad de grupo.

La velocidad de fase es

$$\frac{V_f}{\omega_0} = \frac{2|\sin(ka/2)|}{k}. \quad (2.46)$$

La velocidad de grupo de la curva de dispersión (2.25) queda

$$\frac{V_g}{\omega_0} = \frac{\omega'(k)}{\omega_0} = \frac{a \sin(ak)}{2|\sin(\frac{ak}{2})|}. \quad (2.47)$$

En la Figura 2.7, se muestra la derivada de la curva de dispersión, la cual es la velocidad de grupo para la cadena lineal periódica. Se debe recordar que se usa  $\omega_0$  como escala natural. Se observa que para  $k = \pm\pi/a$  las velocidades de grupo son cero, es decir, el modo colectivo corresponde a ondas estacionarias.

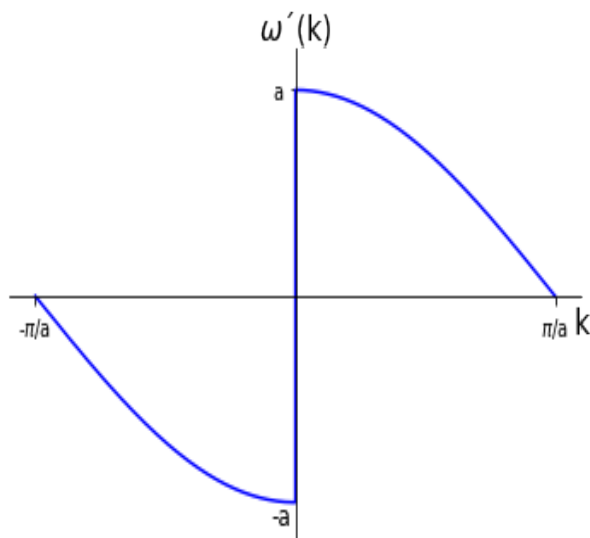


Figura 2.7: Velocidad de grupo de la cadena lineal.

## 2.5. Osciladores no lineales

Dado que uno de los objetivos de esta tesis es analizar los efectos sobre las frecuencias de oscilación colectivas de redes de osciladores armónicos que se acoplan a un par de masas que oscilan de manera no lineal, en esta sección se introduce brevemente algunos aspectos de las oscilaciones no lineales.

Para considerar oscilaciones no lineales modeladas por ecuaciones diferenciales, se deben tener expresiones que relacionan la dinámica de las variables que describe el sistema, que vayan más allá de simples sumas, por ejemplo, pueden ser multiplicaciones, potencias, funciones trigonométricas, y se pueden complicar tanto como uno quiera. Ahora, para que se considere un oscilador, este tiende a regresar hacia un punto de equilibrio cuanto mayor sea la distancia a este último. Los sistemas de Liénard tienen esta propiedad, los cuales son descritos por la ecuación diferencial que lleva su nombre [31]

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (2.48)$$

donde  $f(x)\dot{x}$ <sup>9</sup> es la fuerza de atenuación no lineal (en caso de  $f(x) > 0$ ), que se pue-

<sup>9</sup>Para la ecuación del oscilador de Rayleigh se tiene la forma  $f(\dot{x}) = -\epsilon(1 - \dot{x}^2)$ , por lo que co-

de considerar como una fuerza externa *dissipativa*<sup>10</sup> al oscilador lineal. Y  $g(x)$  es la fuerza de *restitución* que funciona como un resorte que busca regresar a la partícula al punto de equilibrio, la forma que suele usarse para el caso lineal es  $g(x) = \mu x$  con  $\mu > 0$ .

Se deben asumir algunas cosas sobre  $f(x)$  para que la dinámica sea una oscilación auto-sostenida, algunas de estas son que sea negativa para  $|x|$  pequeños y positivo para  $|x|$  grandes<sup>11</sup> (págs. 210-211 [31]). De esta forma, se consigue que  $f(x)$  provee energía a las oscilaciones pequeñas y amortigüe las oscilaciones grandes, haciendo que el sistema entre en una dinámica donde la oscilación es auto-sustentable, es decir, si se perturba al sistema para salir de la oscilación, el sistema regresa en un tiempo  $t < \infty$ . A estas dinámicas se les conocen como ciclos límites.

## 2.6. Ciclos límites

En esta sección se presenta una breve revisión del concepto de ciclo límite el cual será relevante en los capítulos posteriores. Hasta ahora se ha abordado el análisis de un sistema de osciladores armónicos acoplados, el cual puede describirse en términos de coordenadas normales. Se extenderá dicho análisis al caso cuando el acoplamiento entre un solo par de nodos del sistema corresponde a un oscilador no lineal.

Las ecuaciones diferenciales no lineales no suelen tener soluciones explícitas y, aunque las tengan, suelen ser complicadas para entender qué ocurre en el sistema y cuáles son sus características principales. Por eso, el espacio fase se puede usar para dar una idea de lo que está pasando en el sistema.

El espacio fase está conformado por todos los puntos  $(x, v)$  que representan los

---

responde a una ecuación Liénard–Levinson–Smith. Esta es una generalización de la ec. de Liénard, que también produce un ciclo límite bajo la condición  $f(0) < 0$  [32].

<sup>10</sup>La noción de fuerza disipativa no lineal radica en la dependencia de  $\dot{x}$ , en el caso en que  $f(x)$  es una constante positiva, el movimiento es estrictamente atenuado.

<sup>11</sup>En el caso de  $f(x) > 0$ , el sistema produce oscilaciones amortiguadas.

estados del sistema, donde cada punto puede ser considerado como un estado inicial a partir del cual se resuelven las ecuaciones de movimiento. Resolviendo las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen las trayectorias que seguiría una partícula con tales condiciones iniciales [33]. Una trayectoria es una curva parametrizada por  $x = x(t)$  y  $v = v(t)$  en el espacio fase.

Ocurre en algunos sistemas que algunas trayectorias son cerradas. Esto quiere decir que la trayectoria pasa por punto  $P$  para luego pasar por un punto  $O$ , y luego de pasar por  $O$ , regresa a  $P$  (Figura 2.8). Si una trayectoria es cerrada y además es la única curva cerrada en una vecindad al rededor de ella, se dice que es una curva cerrada aislada, otro nombre que recibe es el de ciclo límite. Están los ciclos límites estables, en donde las trayectorias que inician fuera del ciclo límite, se acercan a este en un tiempo  $t < \infty$  (Figuras 2.11 y 2.13). En los ciclos límites inestables ocurre lo contrario, es decir, si una trayectoria empieza en una vecindad del ciclo límite, esta se aleja y no se vuelve a acercarse.

Recordando la ecuación de Liénard (ecuación (2.48)), un oscilador armónico sujeto a un término de disipación no lineal  $f(x)$  le ocurre que cuando en su evolución temporal rebasa cierto umbral de energía, dicho término entonces disipa energía y cuando se halla por debajo del mismo umbral entonces “absorbe” energía. De esta manera el sistema mismo controla la energía, creando una dinámica osciladora (págs. 25-26 [33]).

### 2.6.1. Oscilador lineal

Una masa  $M$  conectada al extremo de un resorte que se rige por la Ley de Hooke,  $F(x) = -Kx$ , oscila al rededor de un punto de equilibrio y se dice que sus oscilaciones son de tipo armónicas simples. La ecuación del sistema con  $g(x) = \frac{K}{M}x$  y  $f(x) = 0$  es

$$\ddot{x}(t) + \frac{K}{M}x(t) = 0. \quad (2.49)$$

La solución general

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2.50)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\phi$  la fase y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$  es la frecuencia natural. Su velocidad es

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (2.51)$$

A partir de estas dos ecuaciones se pueden obtener las órbitas en el plano fase. En la Figura 2.8, se pueden observar la órbita en el plano fase (panel 1), el flujo de trayectoria (panel 2), la conservación de energía del sistema (panel 3) y la frecuencia que presenta la red (panel 4). Se utiliza la amplitud  $A$  como la unidad de longitud y el inverso de la frecuencia angular  $1/\omega_0$  como unidad de tiempo, es por esto que la frecuencia  $\omega_0 = 1$  en el panel 4) de la Figura 2.8 tiene un pico de intensidad<sup>12</sup>. La posición tiene unidades  $A$  y la velocidad tiene unidades  $A\omega_0$ . La energía potencial del sistema es  $U_{\text{potencial}} = K \frac{x^2}{2}$ , que proviene de  $F(x) = -\frac{dU}{dx}$  y por tanto la energía total se conserva. La energía total del sistema es

$$E_{\text{total}} = K_{\text{cinética}} + U_{\text{potencial}} \quad (2.52)$$

$$= M \frac{v^2}{2} + K \frac{x^2}{2}. \quad (2.53)$$

---

<sup>12</sup>De acuerdo a la transformada de Fourier de la trayectoria, este pico correspondería a una delta de Dirac, pero se utilizó la FFT de la trayectoria del panel 1) para encontrar este pico de intensidad, por esta razón la base tiene un ancho.

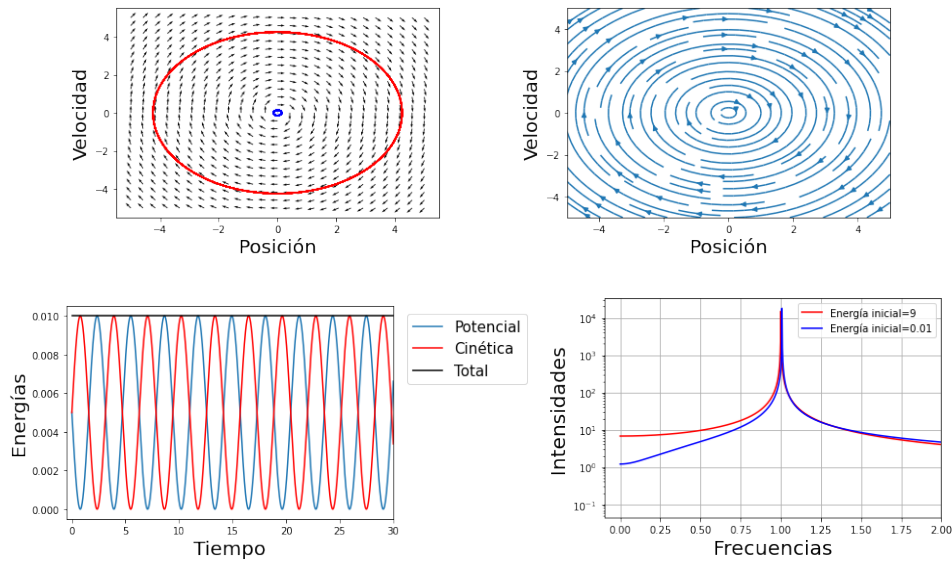


Figura 2.8: De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias del oscilador lineal con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y.

En la Figura 2.8, se observan dos espacios fases en donde se muestran las trayectorias cerradas y sus distintas condiciones iniciales. En el espacio fase del panel 1), se muestran las trayectorias de dos estados iniciales distintos, mientras que en el panel 2) se ven las líneas de flujo de cómo se movería una partícula si se encontrara sobre una de las líneas. En el panel 3), se grafican las energías cinética, potencial y total del sistema. En este caso, la energía se conserva en todo momento. En el panel 4), se observa la intensidad de la frecuencia del sistema con un pico de intensidad en  $\omega = 1\omega_0$  con dos energías iniciales distintas.

### 2.6.2. Oscilador de Duffing

El oscilador de Duffing es un sistema no lineal conservativo que se describe mediante los términos  $f(x) = 0$  y  $g(x) = \frac{K}{M}x + \frac{\epsilon}{M}x^3$ . Por lo que la ecuación queda de la forma

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}x + \frac{\epsilon}{M}x^3 = 0, \tag{2.54}$$



con  $\epsilon > 0$ , la cual tiene unidades  $\left[\frac{M\omega_0^2}{A^2}\right]$ , donde  $M$  es la unidad de masa,  $1/\omega_0$  la unidad de tiempo y  $A$  la unidad de longitud. Este movimiento viene generado por un masa conectada a un resorte con un término no lineal que no cumple la Ley de Hooke.

En la Figura 2.9, se pueden observar el plano fase (panel 1), el flujo de trayectorias (panel 2), la energía que presenta el sistema (panel 3) y las frecuencias del sistema (panel 4). Se puede notar que por el nuevo término cúbico las órbitas en el espacio fase no tienen forma elíptica como en el caso del oscilador lineal. Además, se nota que aparecen nuevos picos de intensidad en las frecuencias que no aparecieron en el oscilador lineal. Para calcular la energía potencial en el oscilador de Duffing se toma en cuenta que la fuerza que siente el oscilador es  $F(x) = -Kx - \epsilon x^3$ . Se hace la observación que esta fuerza proviene del potencial  $V(x) = K\frac{x^2}{2} + \epsilon\frac{x^4}{4}$ <sup>13</sup>. Esto se comprueba calculando

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (2.55)$$

$$= -\frac{d}{dx} \left[ K\frac{x^2}{2} + \epsilon\frac{x^4}{4} \right] \quad (2.56)$$

$$= -Kx - \epsilon x^3. \quad (2.57)$$

De esta manera, se sabe que la energía total del sistema se conserva, tal como se muestra en la Figura 2.9. La energía total está dada por

$$E = K_{\text{cinética}} + U_{\text{potencial}} \quad (2.58)$$

$$= M\frac{v^2}{2} + K\frac{x^2}{2} + \epsilon\frac{x^4}{4}. \quad (2.59)$$

---

<sup>13</sup>En este trabajo se utiliza  $K > 0$ , pero para un análisis futuro se puede usar  $K < 0$ . De este modo,  $x = 0$  es inestable y aparecen dos mínimos simétricos en  $V(x)$ .

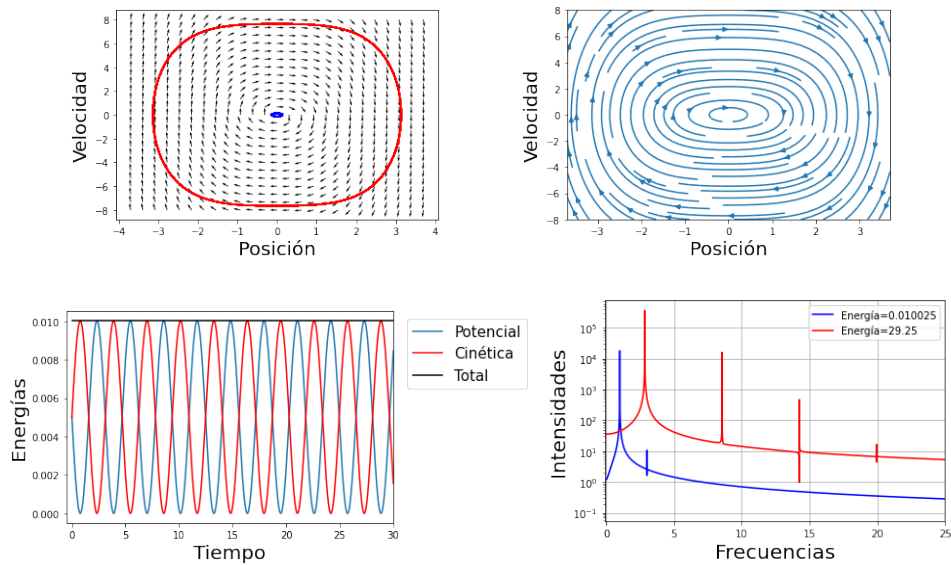


Figura 2.9: De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias cerradas del oscilador de Duffing al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ .

En el panel 4), se observan las intensidades de las frecuencias del sistema con dos energías iniciales distintas, estas se obtienen por el método FFT de las trayectorias del panel 1). Se nota que para una mayor energía, es decir, mayor amplitud, la oscilación depende de un mayor número de frecuencias.

En la Figura 2.10, se observan las mismas gráficas que la Figura 2.9 con la diferencia de que se tomó  $\epsilon = 0.1$ . En el panel 4), se observa la misma cantidad de frecuencias que el panel 4) de la Figura 2.9, pero en este caso las frecuencias tienen una menor distancia entre ellas.

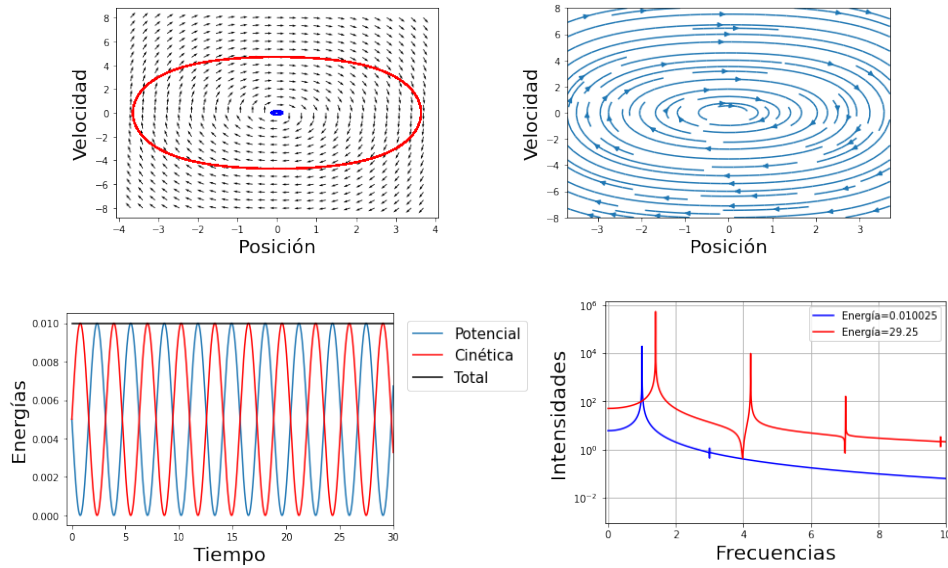


Figura 2.10: De izquierda a derecha: 1) Se muestran las trayectorias cerradas del oscilador de Duffing al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ .

### 2.6.3. Oscilador de Van der Pol

Balthasar Van der Pol, físico e ingeniero holandés, hizo varias contribuciones a la Teoría de Circuitos, donde una de sus más importantes aportaciones fue un circuito que presentaba oscilaciones estables, es decir, ciclos límites [34]. Tal circuito es descrito por la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}x - \frac{\epsilon}{M}(1 - x^2)\dot{x} = 0, \quad (2.60)$$

con  $\epsilon > 0$ <sup>14</sup> que tiene unidades  $[M\omega_0]$ ,  $g(x) = \frac{K}{M}x$  y  $f(x) = -\frac{\epsilon}{M}(1 - x^2)$ . El oscilador de Van der Pol está sujeto a disipación no lineal y tiene un ciclo límite asintóticamente estable, el cual atrae todas las soluciones fuera del origen para todo  $\epsilon > 0$  [34]. Este se puede observar en la Figura 2.11, tanto en el espacio fase, como en la energía total del oscilador. Se advierte que la dinámica entra en un estado oscilatorio, donde oscilan tanto la posición como la energía total, es decir, el oscilador absorbe y disipa energía.

<sup>14</sup>En el caso  $\epsilon < 0$ , no hay ciclos límites, por lo que en  $\epsilon = 0$  hay una bifurcación de Hopf[31].

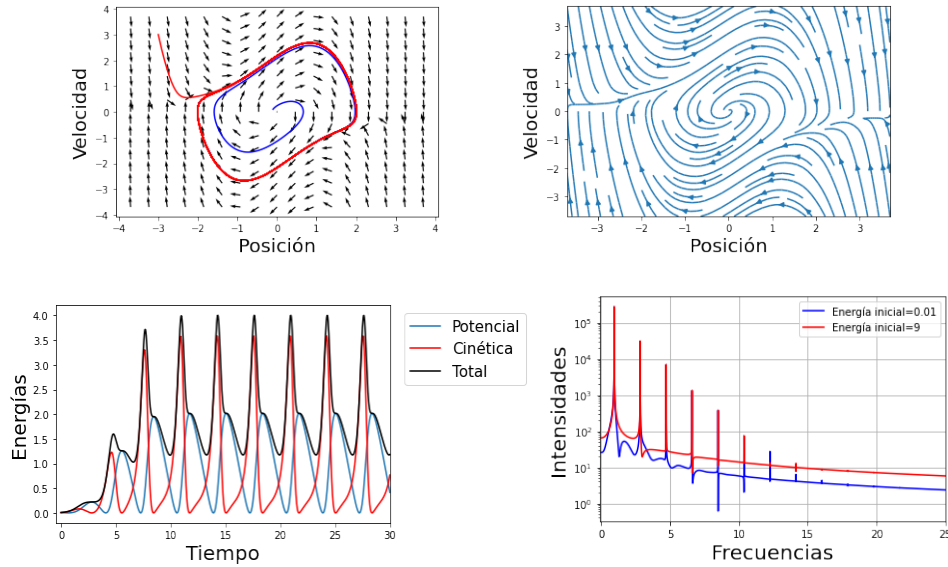


Figura 2.11: De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Van der Pol al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ .

En este caso se tiene una fuerza no conservativa  $F_{nc}$  de la forma  $F_{nc}(x) = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$ . Para calcular la energía mecánica del sistema se sigue utilizando la energía cinética y la energía potencial que se obtiene de la integral de camino sobre la fuerza conservativa  $F(x) = -Kx$ , esto es igual al caso del oscilador lineal. Se observa el cambio de energía del sistema a partir del teorema de energía cinética y trabajo  $\Delta K_{cinética} = W$ , donde  $W$  es el trabajo aplicado a un sistema. El trabajo total aplicado a un sistema es la suma del trabajo de una fuerza conservativa y de una fuerza no conservativa. En este caso se tiene que el trabajo total realizado es  $W_{Total} = W_{armónico} + W_{NL}$ , donde  $W_{armónico}$  es el trabajo del oscilador lineal (fuerza conservativa) y  $W_{NL}$  es del oscilador no lineal (fuerza no conservativa). Como el trabajo del oscilador armónico  $W_{armónico}$  es conservativo, entonces se puede determinar a partir de la energía potencial, o sea  $W_{armónico} = -\Delta U_{armónico}$ . Entonces del teorema

de energía cinética y trabajo se sigue

$$\begin{aligned}\Delta K_{\text{cinética}} &= W_{\text{Total}} \\ \Delta K_{\text{cinética}} &= W_{\text{armónico}} + W_{\text{NL}} \\ \Delta K_{\text{cinética}} &= -\Delta U_{\text{armónico}} + W_{\text{NL}} \\ \Delta K_{\text{cinética}} + \Delta U_{\text{armónico}} &= W_{\text{NL}} \\ \Delta (K_{\text{cinética}} + U_{\text{armónico}}) &= W_{\text{NL}},\end{aligned}$$

donde  $E = K_{\text{cinética}} + U_{\text{armónico}}$  es la energía mecánica. Por lo que se tiene

$$\Delta E = W_{\text{NL}}. \quad (2.61)$$

Esto se muestra en el panel 3) de la Figura 2.11, donde la energía mecánica oscila por el trabajo del oscilador no lineal aplicado al sistema. Este oscilador no lineal absorbe o disipa energía para acercarse al ciclo límite y, una vez en el ciclo límite, absorbe y disipa energía para mantenerse ahí. En el panel 4), se observan las intensidades de las frecuencias del sistema con dos energías iniciales distintas, estas se calcularon con la FFT de las trayectorias del panel 1) una vez en el ciclo límite. Se observa que sin importar las energías iniciales, se conservan las mismas frecuencias, a diferencia del oscilador de Duffing, donde la energía inicial afecta a las frecuencias del sistema. Esto se debe a que el sistema ya se encuentra en el ciclo límite.

En la Figura 2.12, se observan las mismas gráficas que la Figura 2.11 con la diferencia de que se tomó  $\epsilon = 0.1$ . En el panel 4), se observa una cantidad menor de frecuencias que el panel 4) de la Figura 2.11, pero, al igual que en ese caso, los picos de intensidad aparecen aproximadamente en las mismas frecuencias.

Se observa que la forma del ciclo límite en el espacio fase depende del valor de  $\epsilon$  y no de la energía inicial, haciendo que cambie la geometría del ciclo límite para distintas  $\epsilon$ . Entre mayor sea  $\epsilon$ , más frecuencias aparecen y se deforma más la órbita.

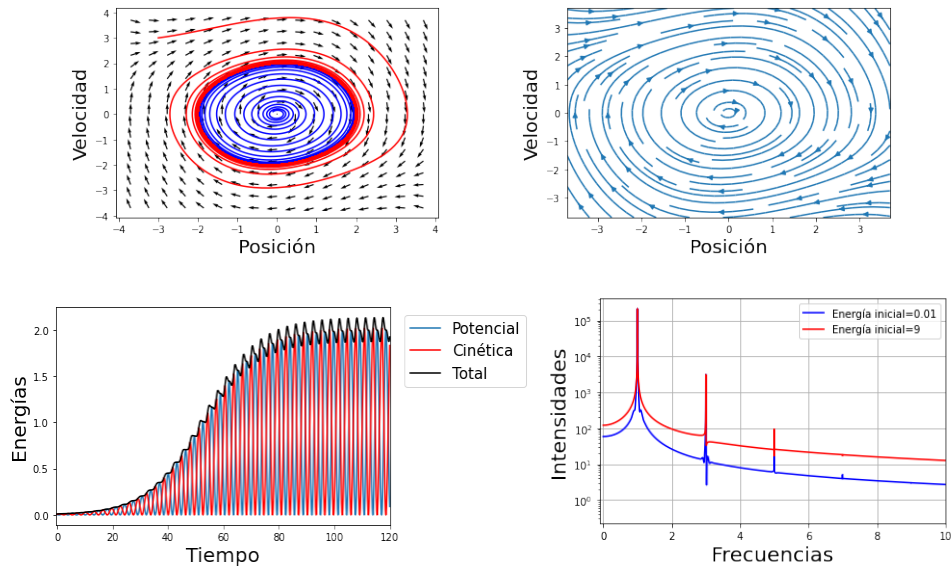


Figura 2.12: De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Van der Pol al simular con dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) Las frecuencias que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ .

#### 2.6.4. Oscilador de Rayleigh

El matemático y físico John William Strutt, Baron Rayleigh, fue un científico que explicó varios fenómenos no lineales y utilizó métodos perturbativos para estos. En su libro *“The theory of sound”*, utiliza perturbaciones para describir las ondas de sonido y analiza cómo las vibraciones auto-sustentables de las cañas del clarinete quedan descritas por  $g(x) = \frac{K}{M}x$  y  $f(\dot{x}) = -\frac{\epsilon}{M}(1 - \dot{x}^2)$  [32], entonces [35]

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}x - \frac{\epsilon}{M}(1 - \dot{x}^2)\dot{x} = 0, \quad (2.62)$$

con  $\epsilon > 0$ <sup>15</sup> que tiene unidades  $[M\omega_0]$ . Como se puede observar esta ecuación tiene la misma forma que el oscilador de Van der Pol [2.60], con la diferencia que ahora el término cuadrático corresponde a la velocidad del oscilador.

<sup>15</sup>En el caso  $\epsilon < 0$ , no hay ciclos límites, por lo que en  $\epsilon = 0$  hay una bifurcación de Hopf[31].

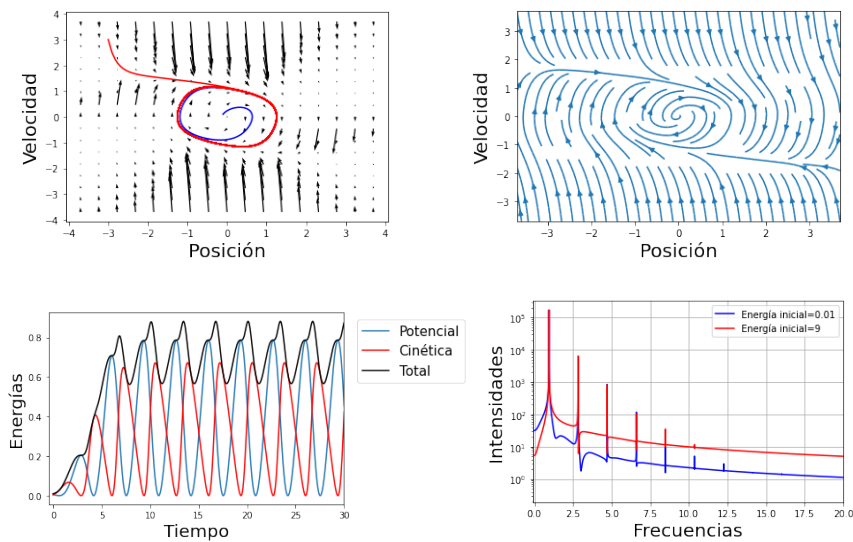


Figura 2.13: De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Rayleigh al considerar dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 1$ .

Al igual que la Figura 2.11, en la Figura 2.13 se muestran los dos espacios fases y la gráfica de las energías con una regulación de la frecuencia gracias a la existencia del ciclo límite con  $\epsilon = 1$ . Este ciclo límite es el que crea las vibraciones auto-sustentables. En este caso, la fuerza no conservativa  $F_{nc}$  es de la forma  $F_{nc}(x) = \epsilon(1 - x^2)x$ . En el panel 4), se observan las intensidades de las frecuencias del sistema con dos energías iniciales distintas, las cuales se calcularon por la FFT de las trayectorias del panel 1) una vez en el ciclo límite. Se observa que al igual que en el oscilador de Van der Pol, las frecuencias no dependen de la energía inicial, esto sucede porque ya están en el ciclo límite.

En la Figura 2.14, se observan las mismas gráficas que la Figura 2.13 con la diferencia de que se tomó  $\epsilon = 0.1$ . En el panel 4), se observa una cantidad menor de frecuencias que el panel 4) de la Figura 2.13 y las frecuencias que aparecen no coinciden con las del caso anterior.

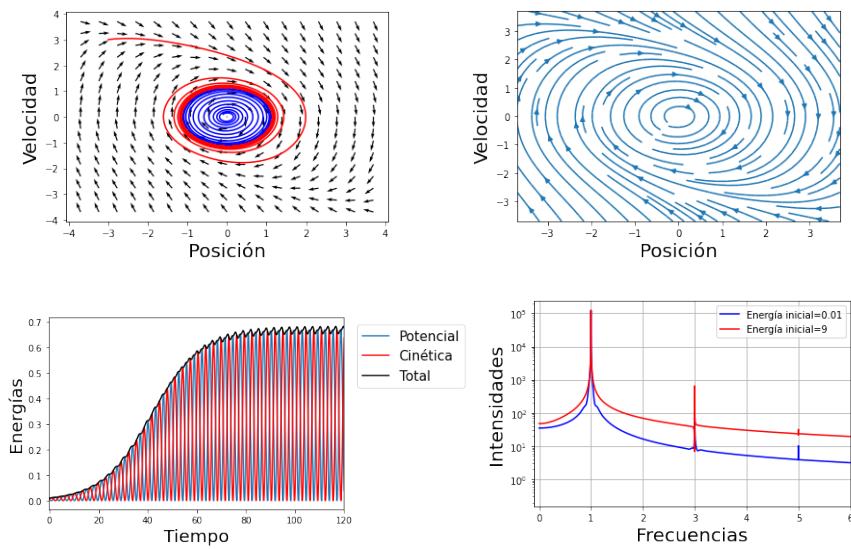


Figura 2.14: De izquierda a derecha: 1) Se muestra el ciclo límite del oscilador de Rayleigh al considerar dos estados iniciales distintos,  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul). 2) Flujo de trayectorias. 3) Energía total, cinética y potencial, con estado inicial  $[-0.1, 0.1]$ . 4) La frecuencia que presenta el sistema con condiciones iniciales  $[-3, 3]$  (roja) y  $[-0.1, 0.1]$  (azul), escala logarítmica en el eje Y. En las cuatro Figuras se utilizó  $\epsilon = 0.1$ .



# Capítulo 3

## Resultados y análisis

En este capítulo se analizan los efectos de acoplar un oscilador no lineal a una red de Watts-Strogatz.

Antes de llegar a ese punto, se estudian las frecuencias de redes de Watts-Strogatz con distintas probabilidades de reconexión (sección [3.1]) con osciladores armónicos, de ahora en adelante llamados osciladores lineales, o simplemente se mencionarán como el caso lineal para evitar repeticiones.

Luego, se utilizan tres osciladores no lineales: el de Duffing, el de Van der Pol y el de Rayleigh, acoplados a una cadena lineal periódica (sección [3.2]) analizando las frecuencias normales y los espacios fases.

Finalmente, se introducen las no linealidades en redes de Watts-Strogatz con distintas probabilidades de reconexión (sección [3.3]) y se observan las similitudes y diferencias con los dos casos antes estudiados.

### 3.1. Espectro de frecuencias de sistemas osciladores armónicos acoplados

En esta primera sección se retoma el estudio de las frecuencias de vibración colectivas de nodos conectados por osciladores lineales, pero ahora la topología de las redes bajo estudio son redes de Watts-Strogatz con distintas probabilidades de reconexión. El objetivo de este análisis es validar dos métodos numéricos para determinar las frecuencias normales a partir de las trayectorias obtenidas de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento para cada nodo. Una vez determinadas cada una de las frecuencias, se grafican las curvas de dispersión para cada red. Se utilizan distintos métodos para encontrar las frecuencias del sistema y se comparan entre ellos para ver si se pueden usar en las secciones posteriores donde sistemas de osciladores lineales acoplados se ponen en interacción con un par de nodos que exhiben oscilaciones no lineales.

En el Marco Teórico (sección [2]) se introdujeron dos conceptos para calcular las frecuencias de los modos normales de vibración de una red.

El primer método utilizado para encontrar las frecuencias normales es usar la transformada rápida de Fourier. En este, se deben resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales acopladas de los nodos y calcular la transformada de Fourier de la trayectoria de cada uno. Se grafican las intensidades, es decir,  $X_k(\omega)$ , contra las frecuencias ( $\omega$ ) y se observan los picos de mayor intensidad, los cuales corresponden a las frecuencias del sistema.

El segundo método descrito fue diagonalizar la matriz Laplaciana asociada al sistema para encontrar los valores propios que corresponden a las frecuencias de las coordenadas normales y los vectores propios que constituyen la base de estas.

Primero se explica cómo se procede con los métodos de la transformada rápida de Fourier y, luego, se construyen redes de Watts-Strogatz de  $N = 100$  nodos

con distintas probabilidades de reconexión, las cuales son  $P = [0.1, 0.5, 0.9]$ , que corresponden a una red de mundo pequeño ( $P = 0.1$ ), una red aleatoria ( $P = 0.9$ ) y una red entre las dos anteriores ( $P = 0.5$ ). De cada una de estas redes, se calculan las frecuencias con los métodos mencionados. Calculadas las frecuencias de la transformada rápida de Fourier, se comparan contra las frecuencias encontradas por la matriz Laplaciana, tomando este último método como la solución analítica, y se grafican los errores relativos. En el caso de  $P = 0$ , se comparan las frecuencias encontradas por la matriz Laplaciana y por la transformada de Fourier con la curva de dispersión de la cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas.

### 3.1.1. Métodos de la transformada rápida de Fourier para encontrar picos de intensidad

Ahora, para el primer método de la transformada rápida de Fourier se utilizan dos formas para encontrar los máximos de intensidad. El primero es hacer un programa que tome un máximo local cuando

$$|\hat{f}(\omega)| \geq |\hat{f}(\omega - \Delta\omega)| + \delta \quad (3.1)$$

$$|\hat{f}(\omega)| \geq |\hat{f}(\omega + \Delta\omega)| + \delta, \quad (3.2)$$

donde  $\hat{f}(\omega)$  es la transformada de Fourier y  $\Delta\omega$  es la resolución de la frecuencia, la cual depende del intervalo de resolución temporal de la discretización de las trayectorias. La razón por la que se suma  $\delta$  (unidad de longitud) se debe a que numéricamente aparecen puntos en la frecuencia que cumplen con máximo local, pero en realidad ocurren por error numérico y no por un pico de intensidad correspondiente a una frecuencia del sistema.

En la Figura 3.1, se observa la gráfica de intensidades contra frecuencias de una cadena lineal con condiciones a la frontera periódica de 10 nodos conectados por os-

ciladores lineales. En esta primera simulación<sup>1</sup> se utilizó la transformada rápida de Fourier de la sección [2.3]. Recordando que  $X_k$  es un número complejo, ver ecuación (2.2), al graficar las intensidades de la serie de Fourier se toma la norma de  $X_k$ , utilizado en todas las gráficas de aquí en adelante.

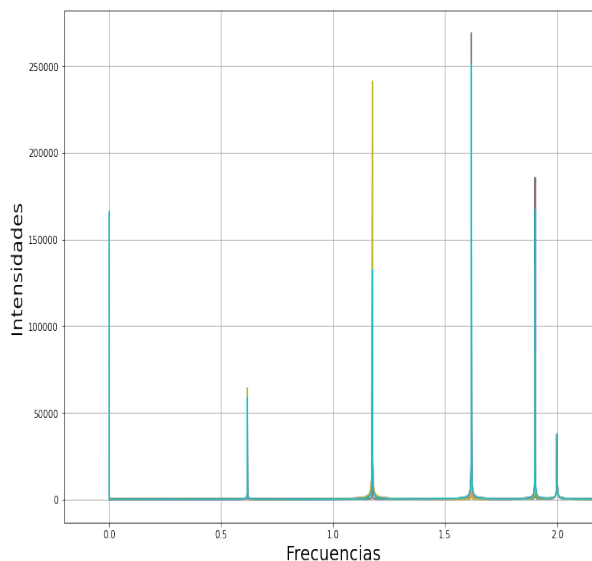


Figura 3.1: Gráfica de intensidades contra frecuencias de una cadena lineal con 10 nodos conectados por osciladores lineales.

La Figura 3.2 es un acercamiento de la Figura 3.1 de las intensidades de un solo nodo, donde se muestra un máximo local en  $\omega \approx 0.535\omega_0$  que no corresponde a un pico máximo de una frecuencia normal del sistema y un pico de intensidad en  $\omega \approx 0.618\omega_0$  que sí corresponde. La razón por la que se sabe que el máximo local no es una frecuencia normal del sistema es porque en la Figura 3.5 se comparan las frecuencias obtenidas por los dos métodos: el de Fourier y el de la diagonalización contra la curva de dispersión teórica en una cadena lineal periódica de  $N = 100$  nodos. En la Figura 3.5, se observa que se sobreponen, por lo que este tipo de máximos corresponden a errores numéricos.

<sup>1</sup>Las simulaciones se hicieron con el paquete de Python "`scipy.integrate.odeint`", el cual utiliza el método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y tiene un error absoluto y relativo menor a  $1.0e-8$ .

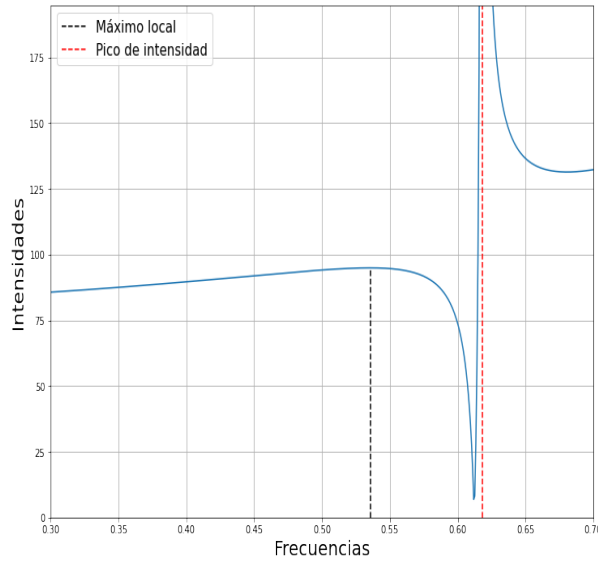


Figura 3.2: Máximo local de error numérico en la frecuencia  $\omega \approx 0.535\omega_0$  de un nodo de la cadena lineal con condiciones de frontera periódicas.

La otra forma de encontrar los máximos locales es derivando la transformada de Fourier y utilizando como criterio las siguientes condiciones:

$$\hat{f}'(\omega) \geq 0 \quad (3.3)$$

$$\hat{f}'(\omega + \Delta\omega) \leq 0 \quad (3.4)$$

$$\hat{f}'(\omega) - \hat{f}'(\omega + \Delta\omega) \geq \gamma. \quad (3.5)$$

En donde los dos primeros criterios son para encontrar el máximo local observando el signo de la derivada, y el tercer criterio es para no tomar en cuenta los errores numéricos. La razón por la que se suma  $\gamma$  (unidades de longitud entre tiempo) es la misma que la de  $\delta$ , ya que aparecen errores numéricos que se deben tomar en cuenta para no tomar frecuencias que no presenta el sistema.

En la Figura 3.3, se observan las derivadas de cada curva de intensidad de los nodos de la Figura 3.1.

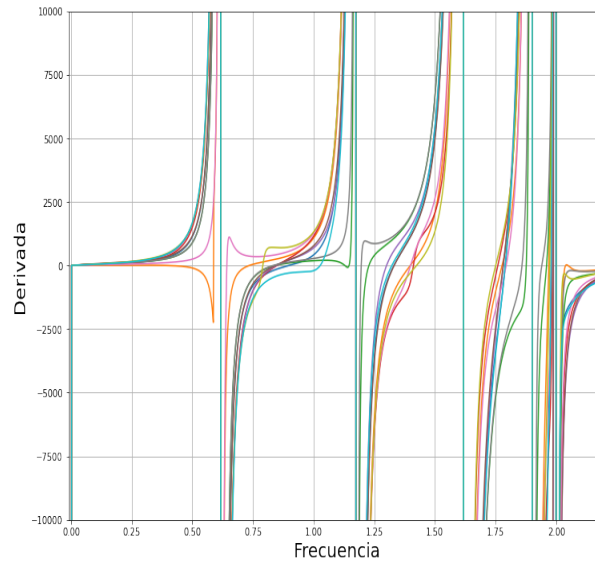


Figura 3.3: Gráfica de la derivada de las intensidades contra frecuencias de una cadena lineal con 10 nodos de la Figura 3.1.

Al calcular las derivadas de las curvas de la Figura 3.1, se encontrarán puntos que cruzan por el cero y que las derivadas pasan de los positivos a los negativos. Esto corresponde a un máximo local. En la Figura 3.4, se muestra que la misma frecuencia  $\omega \approx 0.535\omega_0$  cumple con los criterios anteriores de la derivada, menos con el tercero<sup>2</sup>. Por lo que se considera como un error numérico.

---

<sup>2</sup>Considerando una  $\gamma$  suficientemente grande para no dejar pasar estos errores, pero lo suficientemente chica para encontrar las frecuencias del sistema.

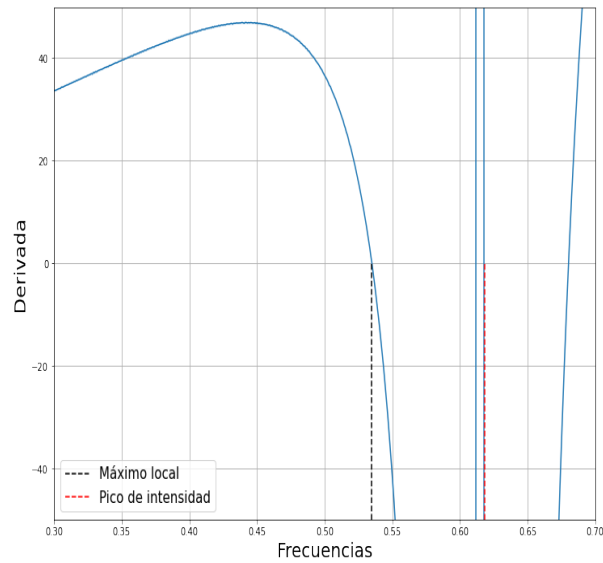


Figura 3.4: Derivada igual a cero del error numérico en la frecuencia  $\omega \approx 0.535\omega_0$  del mismo nodo de la Figura 3.2.

### 3.1.2. Comparación de métodos para calcular frecuencias colectivas

Una vez definidos los métodos y las distintas formas para encontrar las frecuencias normales de la red, se comparan las frecuencias de estos métodos con la ecuación (2.24). Se simula una cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas con  $N = 100$  nodos. En la Figura 3.5, se muestra la curva de dispersión de la cadena lineal periódica obtenida por cada método, se puede notar que estas se superponen sobre la teórica. Además, esto no depende de las condiciones iniciales del sistema, es decir, el sistema exhibe estas frecuencias sin importar estados iniciales o energía inicial, esto surge de la ecuación (2.24).

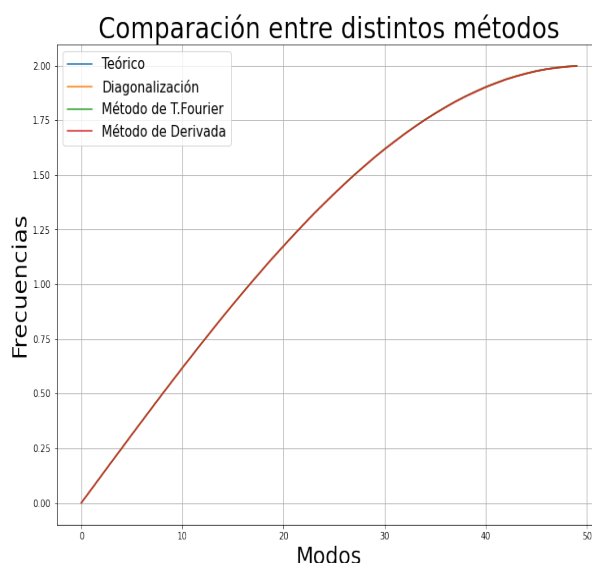


Figura 3.5: Comparación de distintos métodos para encontrar las frecuencias en la cadena lineal con condiciones periódicas a la frontera.

Una vez que se han validado los métodos numéricos en el caso de la cadena lineal, lo siguiente es considerar redes de osciladores armónicos de Watts-Strogatz con distintas probabilidades de reconexión. En este caso, el método de la diagonalización de la matriz Laplaciana sigue dando las frecuencias de oscilación colectiva del sistema de manera exacta, ya que la interacción entre los nodos es lineal. Se tomarán las frecuencias de la diagonalización de la matriz Laplaciana como guía para ver si los métodos numéricos de la transformada rápida de Fourier y su derivada recuperan las mismas frecuencias. Las frecuencias de la diagonalización corresponden a la curva *Diagonalización* en la Figura 3.6.

Primero, se debe notar que el proceso de generar una red de Watts-Strogatz es aleatorio debido a que la reconexión entre pares de nodos es aleatorio. Por lo que se hará un promedio de las frecuencias para hacer las curvas de dispersión para cada probabilidad. Es importante recordar que hay  $N$  frecuencias para  $N$  osciladores acoplados linealmente a primeros vecinos, entonces solamente se tomarán conjuntos de  $N$  frecuencias, las frecuencias se ordenarán de menor a mayor creando un arreglo de  $N$  entradas. Para calcular el promedio entre las redes de misma probabilidad de reconexión, se suman las frecuencias de la misma entrada de los arreglos, ya que ambos



tienen  $N$  frecuencias hay una correspondencia uno a uno. Es decir, sean dos redes con probabilidad de reconexión  $P_0$ , entonces sus frecuencias son  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]$  y  $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N]$ . Por lo que el promedio se calcula  $(\omega_i + \nu_i)/2$  con  $i = 1, \dots, N$ . Se procede de la misma forma para cuando se tengan más redes de la misma probabilidad.

En la Figura 3.6, se tienen las curvas de dispersión con  $P = 0.1$ ,  $P = 0.5$  y  $P = 0.9$  con redes de  $N = 100$  nodos. Para estas gráficas se tomaron 50 redes caracterizadas con la misma probabilidad de reconexión  $P$  y se calcularon las frecuencias con los métodos mencionados anteriormente. Luego, se calculó el promedio entre las redes de misma probabilidad  $P$ . Además, se pone como referencia la curva teórica de la cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas (ec. (2.24)) para observar las diferencias con las redes de WS<sup>3</sup>, la cual es la *Curva teórica* de la Figura 3.6.

En la Figura 3.6, se grafica frecuencias contra modos. Se toma la primera frecuencia y se le asigna el primer modo y así sucesivamente. Teniendo  $P > 0$ , el número de onda  $k = \frac{2\pi n}{N}$  ya no toma estos valores, porque el sistema pierde la periodicidad, por lo que se recurre al cuasi-número de onda  $q \equiv \frac{2\pi n}{N}$  ([4]).

---

<sup>3</sup>Se debe notar que para una cadena lineal periódica de 100 nodos las frecuencias de la curva teórica llegarían hasta 50 modos, esto es porque se repiten la mitad de los valores propios por la periodicidad de la cadena. En la Figura 3.6, se grafican hasta 100 para poder comparar con los otros métodos cómo se modifica la curva al cambiar la topología de la red.

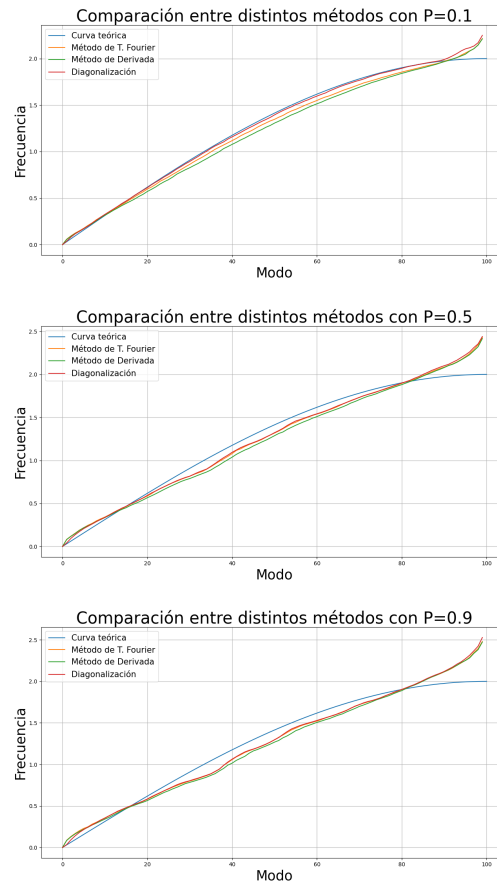


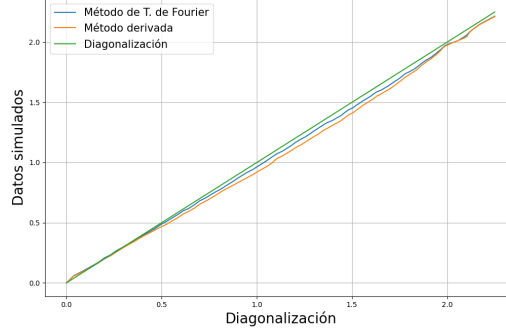
Figura 3.6: Curvas de dispersión para redes de Watts-Strogatz de probabilidad de reconexión  $P = 0.1, 0.5, 0.9$  donde se hace un promedio sobre 50 redes. Se comparan los distintos métodos para encontrar las frecuencias.

Al aumentar la probabilidad de reconexión, se observa que la frecuencia crítica aumenta. La frecuencia crítica es la frecuencia más alta en donde se dejan de propagar ondas por la cadena [26]. Esto significa que la velocidad de fase para frecuencias mayores aumenta. Además, se observa que las frecuencias del intervalo que va de 20 a 80 tienen una forma a una pendiente constante, mientras que en las últimas frecuencias la curva sube abruptamente. Esto último da a entender que la velocidad de grupo aumenta, recordando que es la derivada de la curva de dispersión. Tomando la velocidad de fase y de grupo dependiente del cuasi-número de onda  $q$ . Cosa totalmente contraria a la curva teórica de la cadena lineal a primeros vecinos, donde la velocidad de grupo va a cero en las últimas frecuencias.

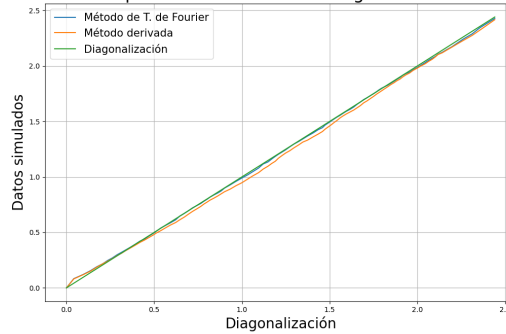
### 3.1.3. Comparación con el método de matriz Laplaciana y los errores relativos

Luego de obtener las curvas de dispersión para las tres distintas probabilidades, se puede observar que los métodos de pico de intensidad máximo y su derivada están bastante cercanos a la diagonalización, pero no se superponen completamente sobre esta. En la Figura 3.7, se muestran las frecuencias de los distintos métodos con probabilidades  $P = 0.1$ ,  $P = 0.5$  y  $P = 0.9$  contra las frecuencias de diagonalización, para así ver qué tanto se diferencian. La curva de diagonalización es la identidad, mientras que las otras dos se mantienen cercana a esta.

Curva de comparación con datos de diagonalización con P=0.1



Curva de comparación con datos de diagonalización con P=0.5



Curva de comparación con datos de diagonalización con P=0.9

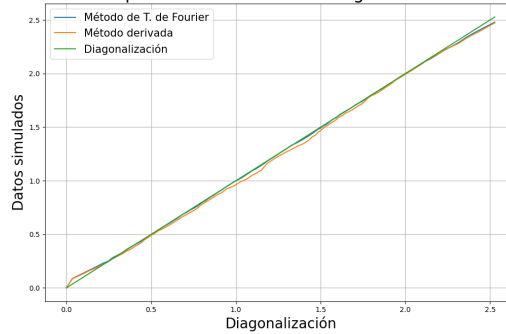


Figura 3.7: Gráficas de frecuencias obtenidas por la transformada de Fourier rápida contra las frecuencias de la matriz Laplaciana con  $P = [0.1, 0.5, 0.9]$ .

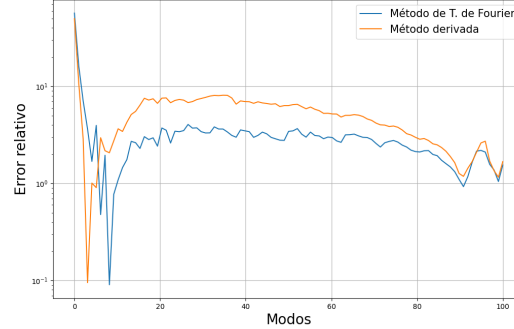
A partir de la última Figura, se pueden obtener los errores relativos entre la diagonalización y los otro dos métodos. El error relativo es

$$\mathcal{E} = \left| \frac{F - D}{D} \right| \times 100\%, \quad (3.6)$$

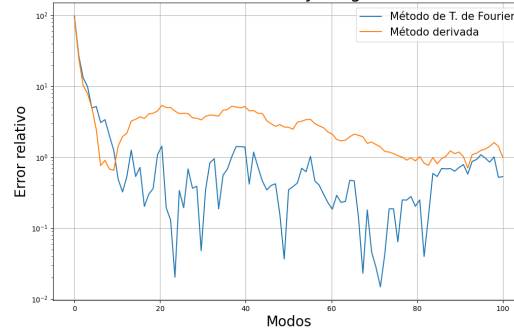
donde  $D$  es un valor de la diagonalización y  $F$  un valor de los métodos numéricos. En la Figura 3.8, se muestran los errores relativos de las frecuencias de la Figura anterior con las probabilidades  $P = 0.1$ ,  $P = 0.5$  y  $P = 0.9$ . El eje Y se grafica con escala logarítmica para apreciar el rango de valores de los errores relativos entre las

frecuencias.

Errores relativos entre métodos y Diagonalización con  $P=0.1$



Errores relativos entre métodos y Diagonalización con  $P=0.5$



Errores relativos entre métodos y Diagonalización con  $P=0.9$

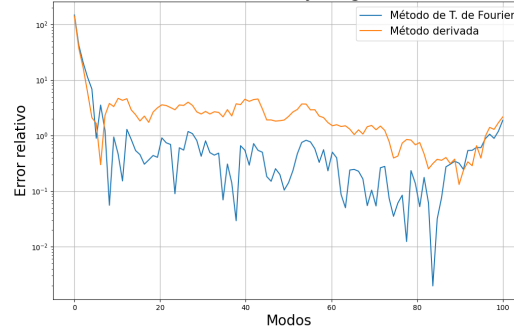


Figura 3.8: Errores relativos en porcentaje de los dos métodos para encontrar las frecuencias en la cadena lineal con condiciones periódicas con probabilidades de reconexión  $P = [0.1, 0.5, 0.9]$  con escala logarítmica en el eje Y.

A partir de estas gráficas de errores relativos, se aprecia que la obtención de frecuencias por los picos máximos de la transformada de Fourier tiene errores relativos más bajos que la derivada de la transformada de Fourier. Esto se debe a que calcular una derivada a partir de diferencias finitas produce un error extra.

## 3.2. Dinámica de una cadena periódica de osciladores armónicos acoplados y controlados por un oscilador no lineal

Una vez estudiados los efectos de las redes de Watts-Strogatz sobre las frecuencias normales de vibración en masas acopladas por potenciales armónicos, se procederá a estudiar los efectos de oscilaciones no lineales acopladas a una cadena lineal periódica.

En esta sección se trabajará la cadena lineal con condiciones a la frontera periódicas con la diferencia de que la dinámica entre un par de nodos dado corresponde a oscilaciones no lineales, los cuales corresponderán a los que dan lugar a los osciladores de Duffing, Rayleigh y Van der Pol. Se utilizarán dos valores distintos para el parámetro que cuantifica la intensidad de la no linealidad  $\epsilon = [0.1, 1]$ , al igual que distintos números de nodos ( $N = [2, 5, 12, 100]$ ) para entender cómo se ven afectadas las frecuencias y la dinámica de cada sistema.

Primero se analizan los casos que corresponden a un parámetro de no linealidad  $\epsilon = 0.1$  para los distintos osciladores no lineales y se consideran las cadenas lineales periódicas con  $N = 5$ ,  $N = 12$  y, finalmente,  $N = 100$  nodos (por completez se incluye el caso de  $N = 2$  nodos, el cual refleja las características intrínsecas de las oscilaciones no lineales consideradas). De esta forma, el análisis permitirá observar las diferencias en las oscilaciones colectivas, con las correspondientes oscilaciones de la cadena lineal periódica, la cual se grafica junto a las otras en cada caso. Luego, se repite el análisis con  $\epsilon = 1$ .

En las secciones [2.6.3] y [2.6.4] se observó la aparición de ciclos límites en los osciladores de Van der Pol y de Rayleigh, respectivamente. En la actual sección se observará si un solo oscilador no lineal acoplado a la cadena lineal periódica será suficiente para conservar el ciclo límite, o dicho en otras palabras, si el oscilador no

lineal es capaz de controlar la cadena lineal para llevarlo a un ciclo límite y, además, sus efectos en las oscilaciones colectivas.

En los casos de los osciladores no lineales se debe exponer cómo se acoplan los nodos. Sean los nodos  $j$  y  $k$  en las posiciones  $u_j$  y  $u_k$ , respectivamente, los cuales están conectados por un oscilador no lineal. Ya se vio anteriormente que la matriz Laplaciana describe las conexiones entre los nodos por potenciales armónicos (ecuación (2.33)). Ahora, se agrega la función vectorial no lineal  $\mathbf{f}(u_j, u_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k)$ , por lo que queda

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{f}(u_j, u_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k). \quad (3.7)$$

Primero se define al vector  $\boldsymbol{\delta}_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]$  que es cero en todas las entradas excepto en la entrada  $i$  donde vale 1. Entonces  $\mathbf{f}(u_j, u_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k)$  toma las siguientes formas particulares:

- $\mathbf{f}(u_j, u_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k) = -\epsilon(u_j - u_k)^3(\boldsymbol{\delta}_j - \boldsymbol{\delta}_k)$
- $\mathbf{f}(u_j, u_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k) = \epsilon[1 - (u_j - u_k)^2](\dot{u}_j\boldsymbol{\delta}_j + \dot{u}_k\boldsymbol{\delta}_k)$
- $\mathbf{f}(\dot{u}_j, \dot{u}_k, \dot{u}_j, \dot{u}_k) = \epsilon(1 - \dot{u}_j^2)\dot{u}_j\boldsymbol{\delta}_j$

El primer caso introduce las oscilaciones no lineales del oscilador de Duffing (ecuación (2.54)), el segundo caso las del oscilador de Van der Pol (ecuación (2.60)) y el tercero las de Rayleigh<sup>4</sup> (ecuación (2.62)).

En las simulaciones se crean cadenas lineales con condiciones a la frontera periódicas de  $N$  nodos. Los nodos se enumeran de 0 a  $N - 1$  con conexiones a primeros vecinos y por ser periódica se tiene que el nodo  $N$  es el nodo 0. En los casos del oscilador de Van der Pol y del oscilador de Duffing, los nodos 0 y 1 están conectados por las funciones no lineales respectivas del caso, mientras que en el caso de Rayleigh, el nodo 0 es el que tiene la función no lineal correspondiente, esto será importante para las gráficas mostradas más adelante. En cada una de las siguientes Figuras se

---

<sup>4</sup>En el caso de Rayleigh, no se toma en cuenta la interacción con la velocidad del nodo  $\dot{u}_k$ , porque la interacción que se busca es con la diferencia de posiciones y no de velocidades.

analiza a la misma red y mismas condiciones iniciales, pero con los distintos osciladores: lineal, Duffing, Rayleigh y Van der Pol.

### 3.2.1. Cadena lineal periódica de $N = [2, 5, 12]$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 0.1$

Ahora bien, en las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11, se muestran los desplazamientos del nodo 0 de la cadena lineal con parámetro  $\epsilon = 0.1$  y  $N = [2, 5, 12]$ , respectivamente. A partir de estas tres Figuras, se puede observar que los ciclos límites se conservan para Rayleigh y Van der Pol. Tardan un cierto tiempo en alcanzar el ciclo límite y oscilan al rededor de este. En el caso del oscilador de Duffing, el nodo 0 tiene un desplazamiento parecido al nodo 0 del caso del oscilador lineal, pero no se sobrepone por completo. La razón de esto se puede observar en sus respectivas órbitas del espacio fase (Figuras 2.8 y 2.9), ya que la órbita de Duffing tiene una amplitud mayor para la velocidad que la del oscilador armónico, pero las amplitudes de la posición son las mismas, al igual que sus energías. Además, mientras mayor sea  $N$ , más tarda el sistema en alcanzar el ciclo límite en los casos de Rayleigh y Van der Pol, y se nota en estos dos casos que los ciclos límites no oscilan necesariamente al rededor de la posición  $x = 0$ .



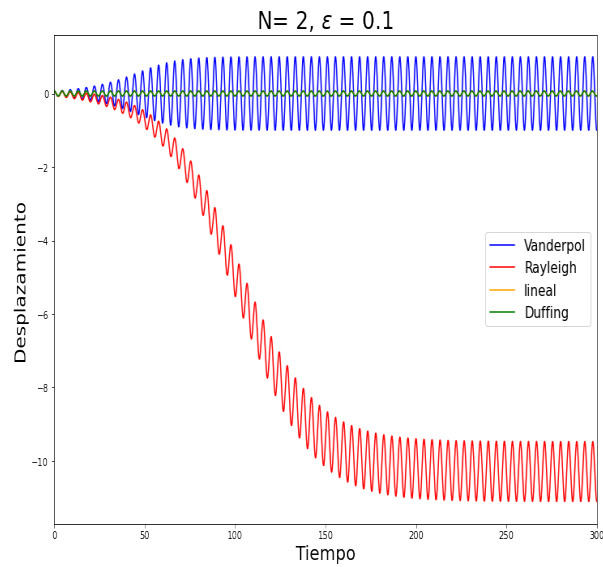


Figura 3.9: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 2$  y con parámetro  $\epsilon = 0.1$  para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales.

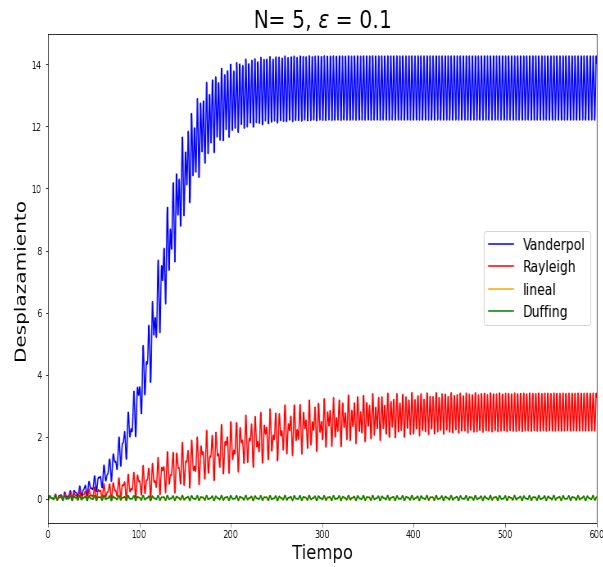


Figura 3.10: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 5$  y con parámetro  $\epsilon = 0.1$  para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales.

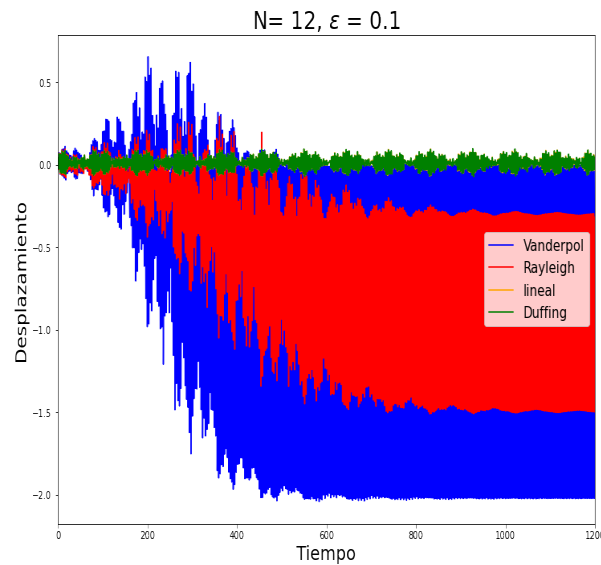


Figura 3.11: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 12$  y con parámetro  $\epsilon = 0.1$  para el caso lineal y los distintos osciladores no lineales.

Una vez visto el desplazamiento del nodo con oscilador no lineal, se calculan las frecuencias intrínsecas de oscilación con la transformada rápida de Fourier después de que los sistemas alcancen el ciclo límite (Van der Pol y Rayleigh). De esta manera, se evita considerar en el análisis el periodo transitorio que le toma al sistema acercarse hacia el ciclo límite. Se considera que el sistema llega al ciclo límite cuando la serie de tiempo se vuelve estacionaria. Las frecuencias calculadas se sobreponen sobre las frecuencias de un nodo de la cadena lineal periódica con osciladores armónicos para poder comparar los efectos de la no linealidad.

En las Figuras 3.12, 3.13 y 3.14, se observan las frecuencias de los dos nodos que tiene la cadena lineal de  $N = 2$  con los potenciales Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente. En el caso de Duffing, Figura 3.12, no hay ningún cambio observable comparando con el caso lineal.

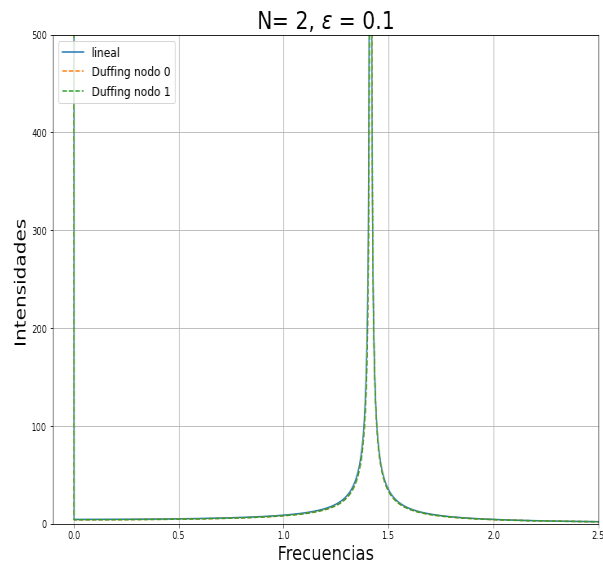


Figura 3.12: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 2$  y  $\epsilon = 0.1$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal.

En el caso de Rayleigh, Figura 3.13, se observa un nuevo pico de intensidad. Ambos nodos lo presentan, solo que en el nodo 1 no se aprecia tanto. Esto se debe a que en el caso de Rayleigh solo el nodo 0 tiene el término no lineal. Esto hace ver que este término afecta al otro nodo, aunque solo estén conectados por un potencial armónico. Además, el primer pico tiene una intensidad mayor que el pico del nodo de la cadena de osciladores armónicos.

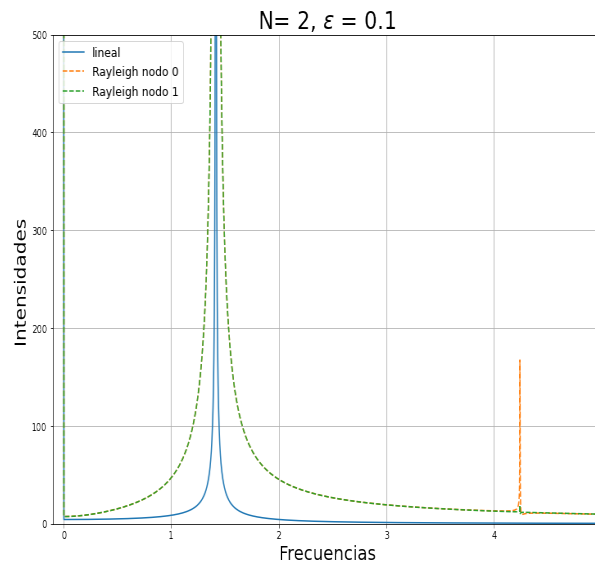


Figura 3.13: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 2$  y  $\epsilon = 0.1$ , se observa una nueva frecuencia para los dos nodos.

En el caso de Van der Pol, Figura 3.14, se observan dos nuevos picos de intensidad. El pico de los nodos con el término de Van der Pol que se superpone al caso lineal tiene un ancho mayor, por lo que la intensidad es mayor. Se debe notar que las tres frecuencias de la Figura 3.14 no son las mismas que las de la Figura 2.12. Esto quiere decir que el oscilador lineal influye en el oscilador no lineal de Van der Pol.

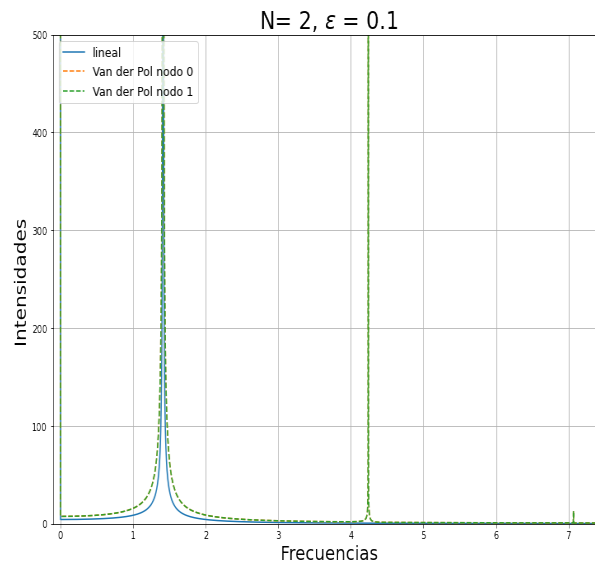


Figura 3.14: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 2$  y  $\epsilon = 0.1$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal.

Se nota que para pocos nodos no hay diferencia para el caso de Duffing, pero sí hay una diferencia en Rayleigh y Van der Pol. Además de que aparecen nuevos picos de intensidad, se observa que la base del primer pico es más ancha que la del caso lineal, dando a entender que la intensidad del pico es mayor y que la oscilación de los nodos depende más de esta frecuencia. En estos primeros casos, se pudo observar que se conservan las frecuencias del caso lineal.

En las Figuras 3.15, 3.16 y 3.17, se observan las frecuencias de los cinco nodos que presenta la cadena lineal periódica de  $N = 5$  a partir de que el sistema alcance el ciclo límite para los distintos casos de no linealidad: Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente.

En el caso de Duffing (Figura 3.15) aparecen las mismas frecuencias que en el caso lineal.

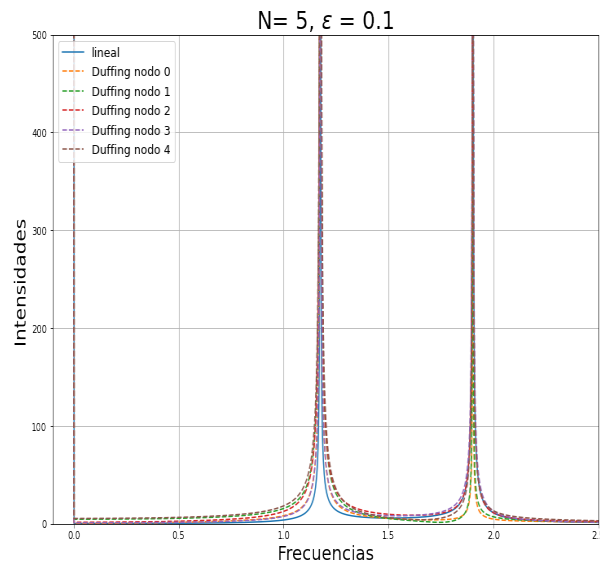


Figura 3.15: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 5$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal.

En el caso de Rayleigh (Figura 3.16) aparece una nueva frecuencia. Se nota que la segunda frecuencia tiene un pico mucho más intenso, dando a entender que esa frecuencia tiene un mayor peso en la dinámica del sistema al rededor del ciclo límite.

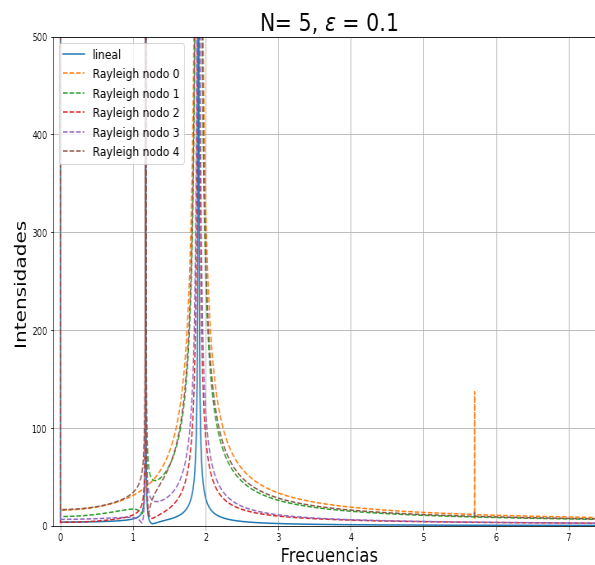


Figura 3.16: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 5$ , se observa una nueva frecuencia que no presenta el caso lineal.

En el caso de Van der Pol (Figura 3.17) aparece una nueva frecuencia por

$\omega \approx 5.8\omega_0$  y no aparece la primera frecuencia del caso lineal. En este caso, la frecuencia que está cerca de  $\omega \approx 2\omega_0$  tiene una intensidad mayor que en el caso lineal.

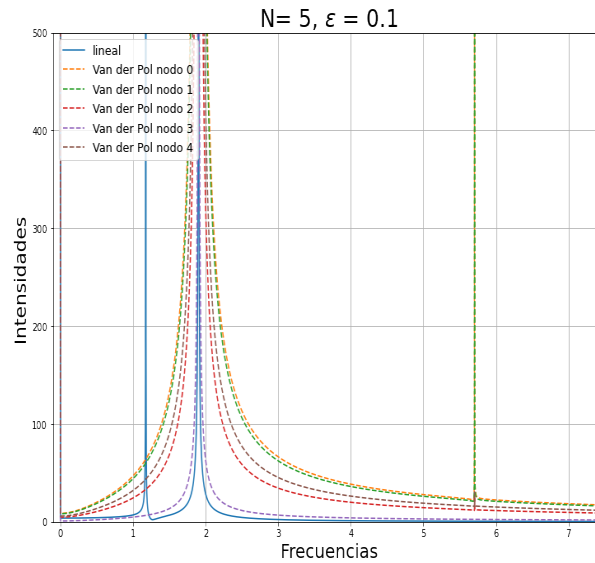


Figura 3.17: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 5$ . Se observa una nueva frecuencia que no presenta el caso lineal y desaparece la primera frecuencia del caso lineal.

En las Figuras 3.18, 3.19 y 3.20, se observan las frecuencias de los 12 nodos que presenta la cadena lineal a partir de que las oscilaciones no lineales alcancen el ciclo límite para los distintos casos de no linealidad: Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente.

En el caso de Duffing (primera gráfica de la Figura 3.18) las frecuencias se superponen a las del caso lineal tal como ocurrió en el caso de  $N = 5$ , esto ocurre porque el sistema es débilmente perturbado por el valor de  $\epsilon = 0.1$ . En el panel 4) de la Figura 2.9, se observa que las frecuencias del oscilador de Duffing dependen de la energía del sistema. En las simulaciones se utilizan valores iniciales para la posición del orden de  $x_0 \approx 0.1$  y al elevarlo a la cuarta se tienen valores de  $x_0^4 \approx 0.0001$ . Observando la ecuación (2.59) y utilizando los valores iniciales antes mencionados, se nota que la energía del sistema depende más de la energía del oscilador lineal que del término del potencial de Duffing ( $\epsilon x^4/4$ ). En la segunda gráfica de la Figura

3.18, se observan las frecuencias para condiciones iniciales de la posición del orden de  $x_0 \approx 1^5$ .

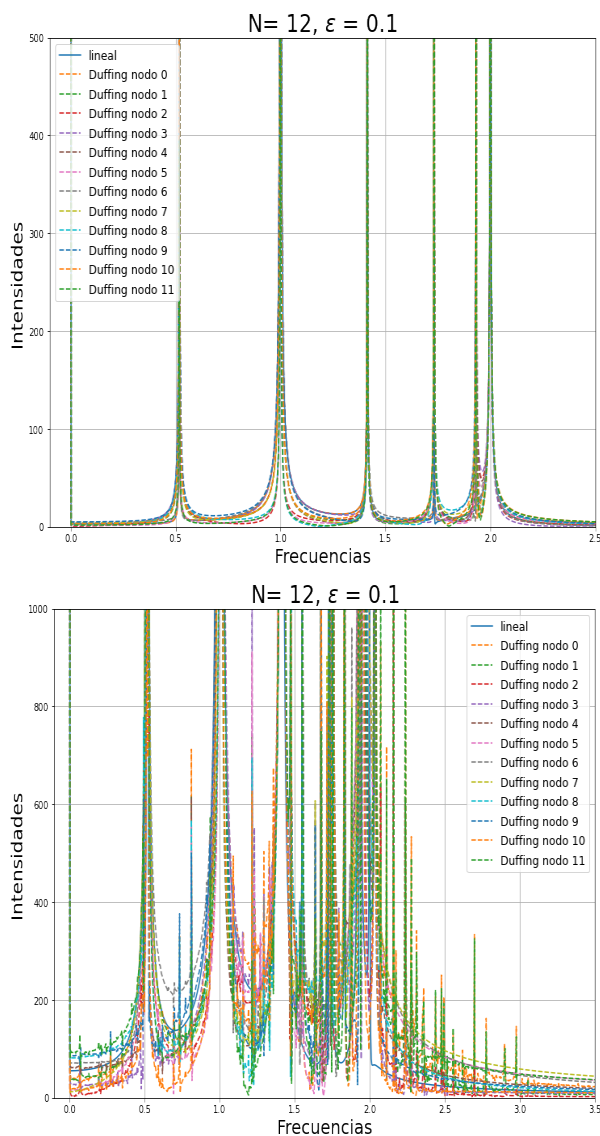


Figura 3.18: En la gráfica de arriba se muestran los picos de intensidad que marcan las frecuencias de oscilación de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 12$ , no se observa ninguna diferencia sobre las frecuencias del caso de la cadena lineal periódica con osciladores armónicos. En la gráfica de abajo se muestran las frecuencias con posiciones iniciales del orden  $x_0 \approx 1$ .

En el caso de Rayleigh (Figura 3.19) aparecen todas las frecuencias que en el caso lineal, pero hay una frecuencia con una base ancha. Además, hay dos nuevas

<sup>5</sup>En las simulaciones hechas en todo este trabajo se utilizan las condiciones iniciales del orden  $x_0 \approx 0.1$  para ver que, aunque la energía inicial del sistema sea bajo, la no linealidad puede afectar al sistema, tal como en los casos de Rayleigh y Van der Pol.



frecuencias, donde una se encuentra en  $\omega \approx 6\omega_0$  y la otra tiene una intensidad baja en  $\omega \approx 10\omega_0$ . Estas dos frecuencias nuevas no corresponden a las frecuencias del oscilador de Rayleigh de la Figura 2.13, es decir, así como el oscilador de Rayleigh afecta a las oscilaciones lineales llevándolas a un ciclo límite, las oscilaciones lineales afectan al oscilador no lineal haciendo que la dinámica ya no dependa de esas frecuencias y, además, que son menos frecuencias.

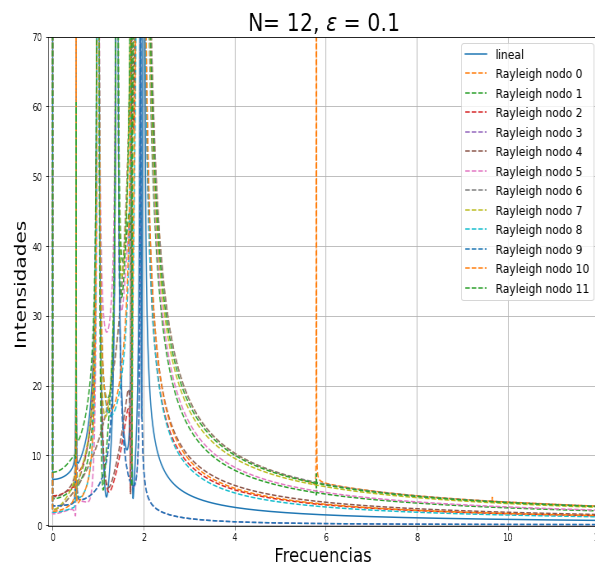


Figura 3.19: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 12$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal.

En el caso de Van der Pol (Figura 3.20) aparecen menos frecuencias, algunas no se notan porque la intensidad es baja y quedan solapadas por el pico de  $\omega \approx 1.8\omega_0$ . Además, hay dos nuevas frecuencias, donde una se encuentra en  $\omega \approx 6\omega_0$  y la otra tiene una intensidad baja en  $\omega \approx 10\omega_0$ , que parecen ser más o menos las mismas que en el caso de Rayleigh con  $N = 12$ .

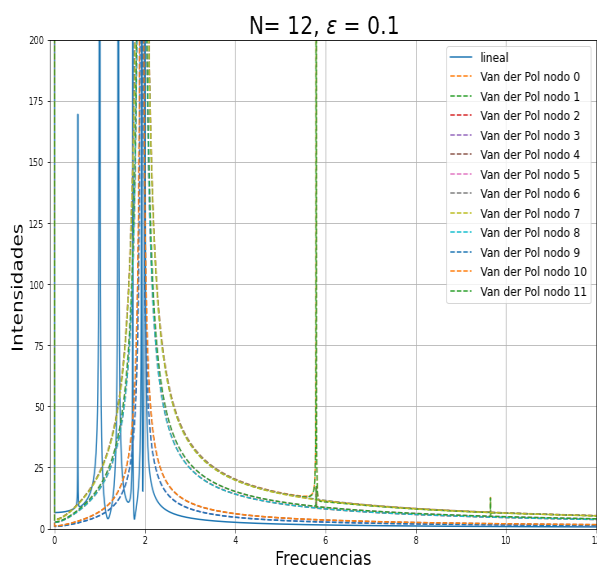


Figura 3.20: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 12$  con  $\epsilon = 0.1$ , se observan dos nuevas frecuencias que no presenta el caso lineal y desaparecen algunas frecuencias del caso lineal o su intensidad es muy baja para ser identificadas.

En los casos estudiados con parámetro de no linealidad  $\epsilon = 0.1$  de los distintos osciladores no lineales y con las cadenas lineales periódicas de distintas cantidades de nodos, se observó que cuando la cadena es perturbada por la dinámica del oscilador de Duffing, las frecuencias de oscilación colectiva no presentaron una diferencia significativa que el caso únicamente lineal.

En los casos de Rayleigh y Van der Pol, las oscilaciones no lineales alcanzaron un ciclo límite en todos los casos. En los casos de Rayleigh permanecieron las mismas frecuencias colectivas que con los potenciales armónicos. Mientras que con el oscilador de Van der Pol algunas de las frecuencias de los potenciales armónicos desaparecieron. En ambos casos aparecieron nuevas frecuencias que estaban más allá de  $\omega = 2\omega_0$ .

En el caso de las cadenas lineales con un oscilador de Rayleigh y uno de Van der Pol, se grafican los espacios fases de todos los nodos una vez que las oscilaciones no lineales hayan alcanzado el ciclo límite. En las Figuras 3.21 y 3.22, se pueden ver los ciclos límites de la cadena lineal con un oscilador no lineal de Van der Pol y

Rayleigh, respectivamente.

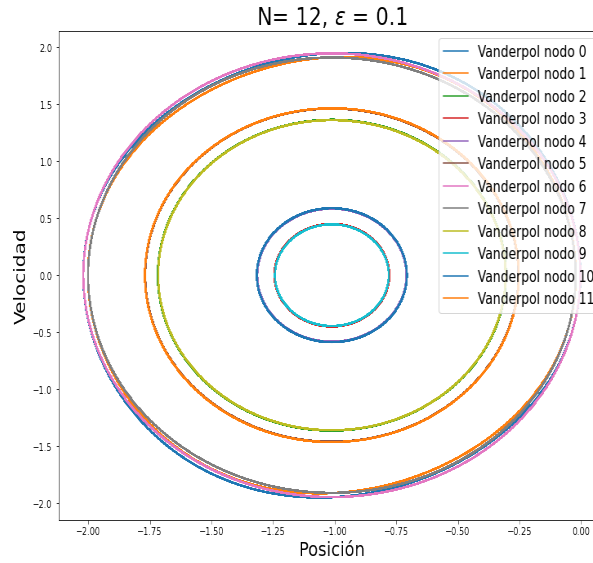


Figura 3.21: Se muestra el espacio fase de los 12 nodos de la cadena lineal con un oscilador de Van der Pol entre el nodo 0 y 1 con  $\epsilon = 0.1$ .

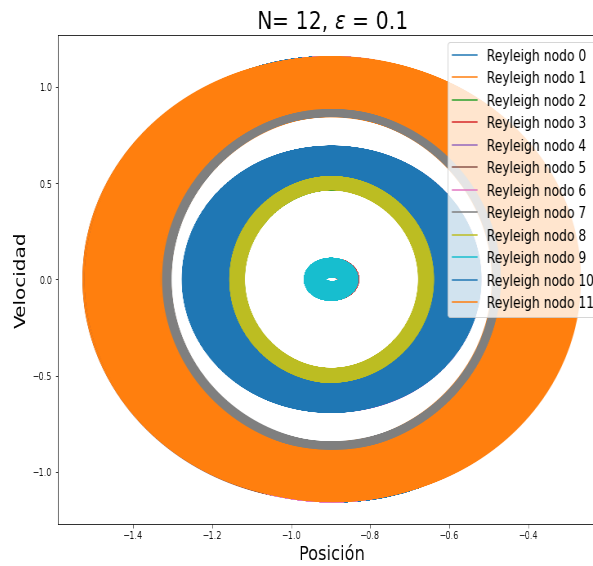


Figura 3.22: Se muestra el espacio fase de los 12 nodos de la cadena lineal con un oscilador de Rayleigh entre el nodo 0 y 1 con  $\epsilon = 0.1$ .

Se puede observar que para el caso de Van der Pol, Figura 3.21, hay aproximadamente tres niveles de energía (amplitudes) distintos para los 12 nodos. Los nodos 0 y 1 tienen una trayectoria ligeramente distinta a las demás, esto se debe que los

dos nodos están acoplados por el oscilador no lineal.

En el caso de Rayleigh, Figura 3.22, se puede observar que los nodos también tienen una cierta energía asociada. Las trayectorias para el caso de Van der Pol son cerradas y se parecen a la curva cerrada del oscilador lineal, mientras que para las de Rayleigh no convergen a una trayectoria, pero sí se mantienen dentro de un rango bien acotado.

Este ancho viene explicado por la cuasi-periodicidad del sistema ([36]). Una órbita bien delimitada es cuasi-periódica cuando no es asintóticamente periódica y no es sensible a condiciones iniciales (pág. 112 [37]). Se puede observar en algunas órbitas de la Figura 3.22 que dentro de un rango definido rellenan todo el espacio, es decir, no tienden a un ciclo límite, ni tampoco divergen.

### **3.2.2. Cadena lineal periódica de $N = 100$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 0.1$**

Ahora, se hace lo mismo pero para una cadena de  $N = 100$  nodos y  $\epsilon = 0.1$ . En la Figura 3.23, se ve el desplazamiento del nodo 0 con el caso lineal y con los distintos casos de no linealidad. En el caso de Rayleigh se tuvo que tomar una mayor cantidad de tiempo para encontrar el ciclo límite y se tomó el último intervalo simulado para mostrar en la gráfica. Se consideró solamente el desplazamiento del nodo 0 para determinar cuándo los sistemas alcanzan el ciclo límite.

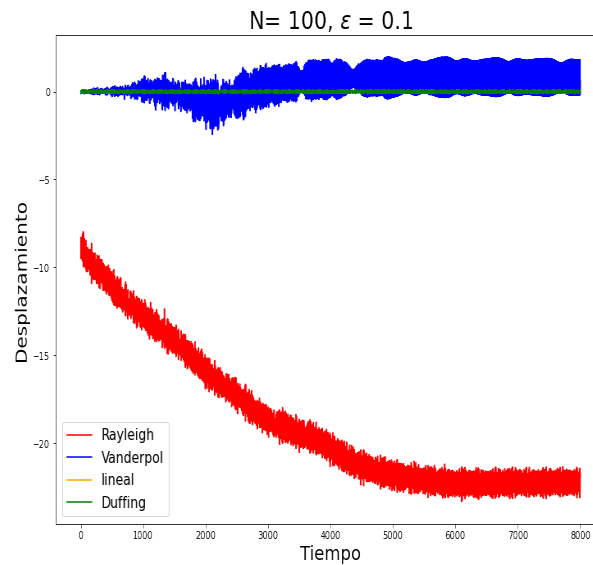


Figura 3.23: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 100$  y con una constante no lineal de  $\epsilon = 0.1$ .

En las Figuras 3.24, 3.25 y 3.26, se observan los picos de intensidad (que indican las frecuencias de oscilación colectiva) de los nodos 0, 1, 25, 50, 75 y 99 que presenta la cadena una vez que las oscilaciones alcanzan el ciclo límite<sup>6</sup> para los distintos casos de no linealidad: Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente.

En el caso de Duffing (Figura 3.24), las frecuencias se superponen sobre el caso lineal al igual que en los casos mencionados anteriormente y no aparecen nuevas frecuencias más allá de  $\omega = 2\omega_0$ .

<sup>6</sup>Se sabe que llegó al ciclo límite cuando el desplazamiento del nodo oscila al rededor de una posición específica y no se aleja de esta posición.

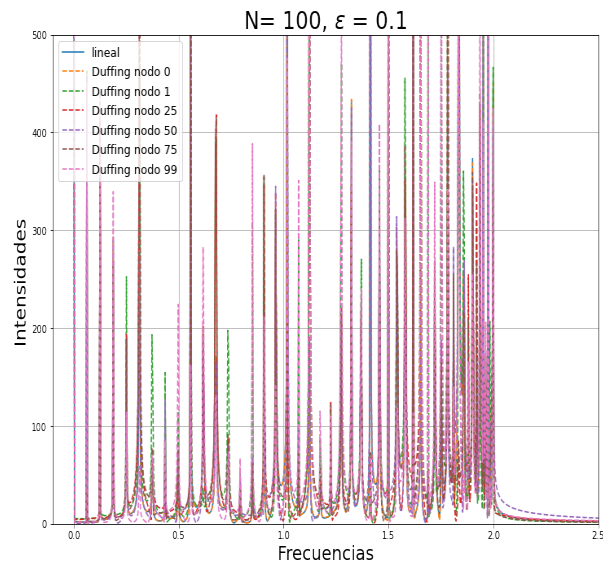


Figura 3.24: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 100$ , no se observa ninguna diferencia sobre la lineal.

En el caso de Rayleigh (Figura 3.25) se puede notar que las frecuencias del caso lineal quedan cubiertas por las no lineales, pero se nota un pico de mayor intensidad acercándose a  $\omega = 2\omega_0$  al igual que en los otros casos. Además, se notan varios grupos de frecuencias en intervalos que están más allá del caso lineal.

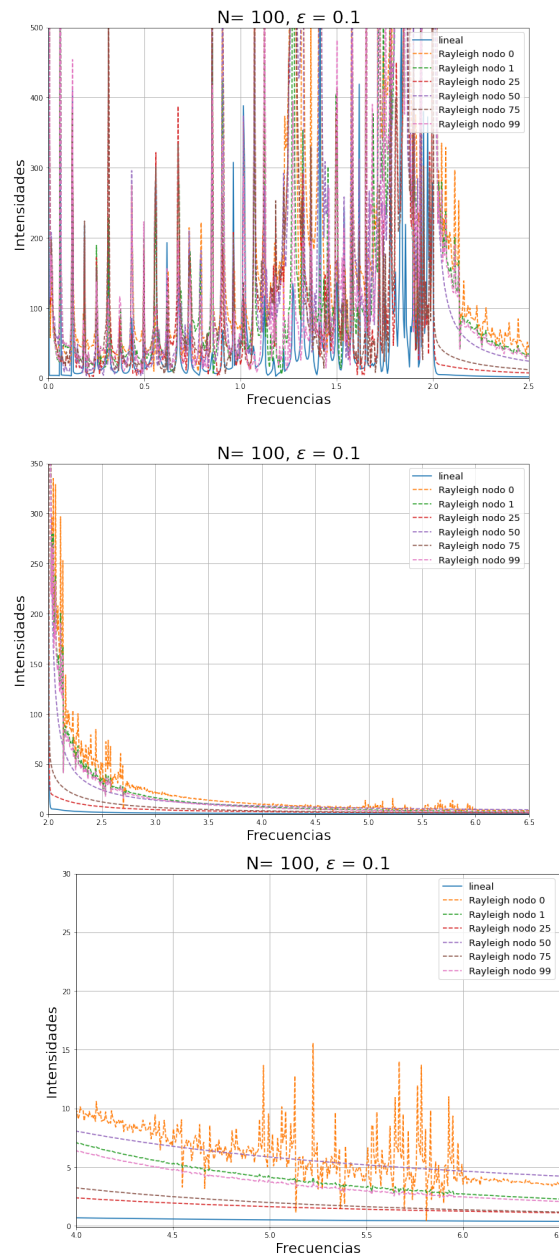


Figura 3.25: Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$  con un potencial tipo Rayleigh.

En el caso de Van der Pol (Figura 3.26) las frecuencias lineales se sobrepone por las frecuencias del oscilador no lineal, pero con una intensidad más baja. También aparece una frecuencia por  $\omega \approx 2\omega_0$  con una intensidad grande comparada con las demás. Para frecuencias más grandes de  $\omega = 2\omega_0$  aparece un pico intenso por  $\omega \approx 6\omega_0$ .

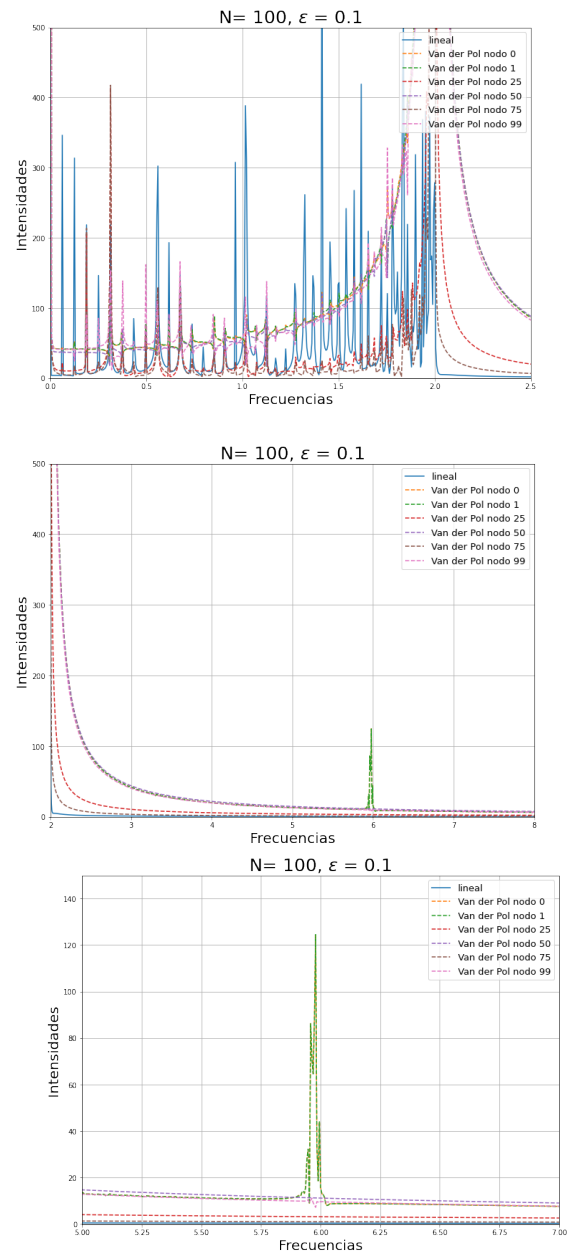


Figura 3.26: Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la red  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$  con un potencial tipo Van der Pol.

En los casos de las cadenas de  $N = 100$  con un oscilador de Rayleigh y uno de Van der Pol se grafican los espacios fases de algunos nodos una vez que están en el ciclo límite. En las Figuras 3.27 y 3.28, se pueden ver los ciclos límites de la cadena lineal con un oscilador no lineal de Van der Pol y Rayleigh, respectivamente.

En los espacios fases en el caso de Van der Pol, Figura 3.27, se observa que hay



dos casos. Uno es cuando las trayectorias tienen un hoyo en el centro donde  $|v| > 1$ . El otro es cuando las trayectorias rellenan todo el intervalo de velocidades y posiciones. En ambos casos se observa que los límites de las trayectorias están bien definidos.

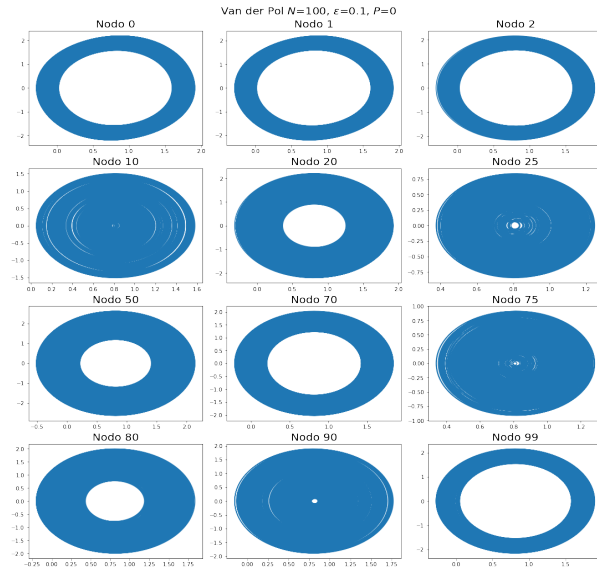


Figura 3.27: Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con un oscilador de Van der Pol entre los nodos 0 y 1 con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

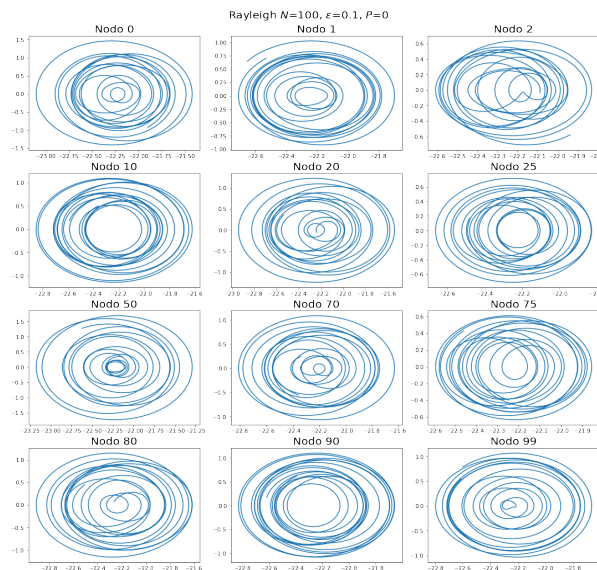


Figura 3.28: Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con un oscilador de Rayleigh en el nodo 0 con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

Entonces, en el caso de  $\epsilon = 0.1$  se vio que la dinámica no lineal tipo Duffing no es suficiente para marcar una diferencia observable de la lineal, mientras que en los casos de Rayleigh y Van der Pol luego de un tiempo la dinámica llega a un ciclo límite. Además, en los casos de Duffing y Rayleigh se recuperan todas las frecuencias del caso lineal, mientras que para Van der Pol en algunos casos no se recupera y en otras las intensidades son bajas comparadas con las frecuencias del caso lineal.

### 3.2.3. Cadena lineal periódica de $N = [2, 5, 12]$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 1$

Ahora, se utiliza  $\epsilon = 1$  y se hacen los mismos casos que con  $\epsilon = 0.1$  buscando diferencias y similitudes para entender los efectos de los osciladores no lineales.

En las Figuras 3.29, 3.30 y 3.31, se muestran los desplazamientos del nodo 0 con cadenas lineales con condiciones a la frontera periódicas de  $N = 2, 5$  y  $12$ , respectivamente. Se toman en cuenta las distintas no linealidades: Duffing, Rayleigh y Van der Pol, y la lineal para comparar, en donde en cada simulación se empieza con las mismas condiciones iniciales.

En la Figura 3.29, se observa que el caso lineal y el de Duffing se sobreponen. En el caso de Van der Pol, entra en el ciclo límite y oscila de manera similar a un oscilador lineal. En última, el caso de Rayleigh crece rápidamente y no se observa que llegue a un ciclo límite con el tiempo simulado.

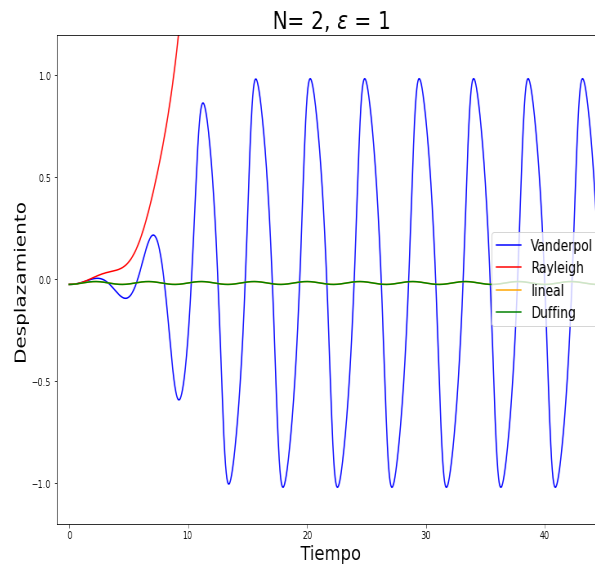


Figura 3.29: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 2$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ .

En las Figuras 3.30 y 3.31, se observa que los casos lineales y de Duffing se superponen. En los casos de Van der Pol y de Rayleigh, entran en el ciclo límite y oscilan similarmente a un oscilador lineal.

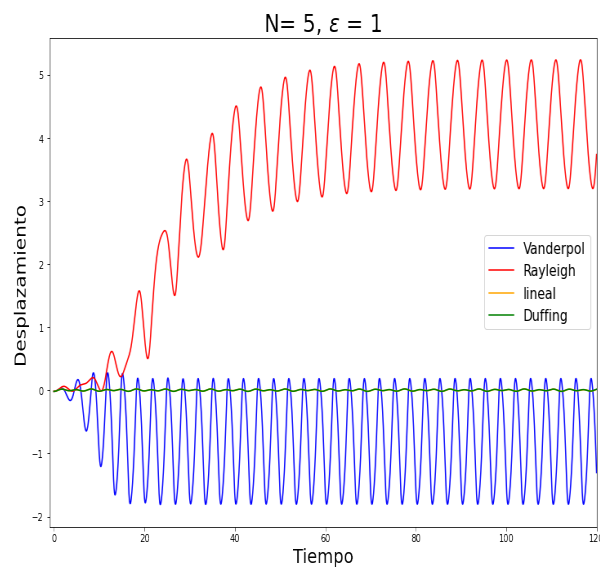


Figura 3.30: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 5$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ .

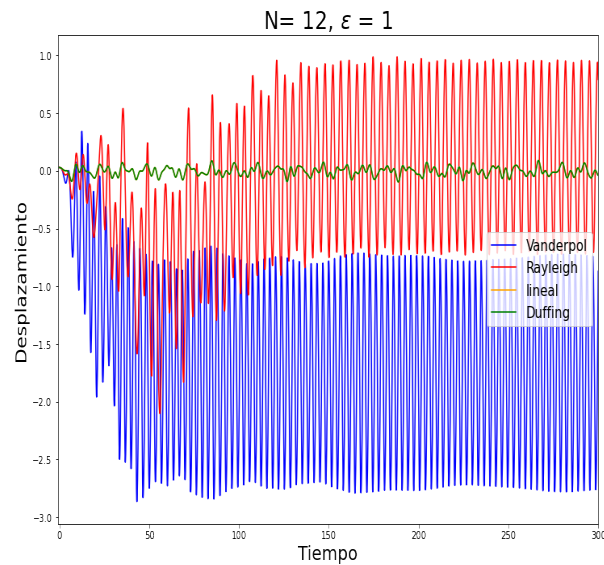


Figura 3.31: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 con  $N = 12$  para los casos de osciladores no lineales y el caso del oscilador armónico con  $\epsilon = 1$ .

En las Figuras 3.32, 3.33 y 3.34, se muestran las frecuencias de los nodos de la cadena lineal con  $N = 2$  para los casos de Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente, donde en cada gráfica se compara con un nodo de la cadena con potenciales armónicos.

En la Figura 3.32, se observa la misma frecuencia para los dos nodos del caso lineal y del de Duffing. En la Figura 3.33, no se observa ninguna frecuencia, justo porque el sistema no entra en un estado de oscilación y sigue creciendo.

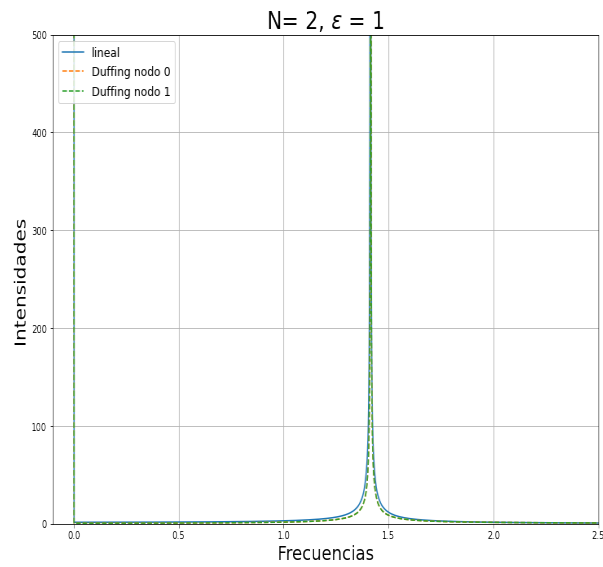


Figura 3.32: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observa la misma frecuencia que con el caso lineal.

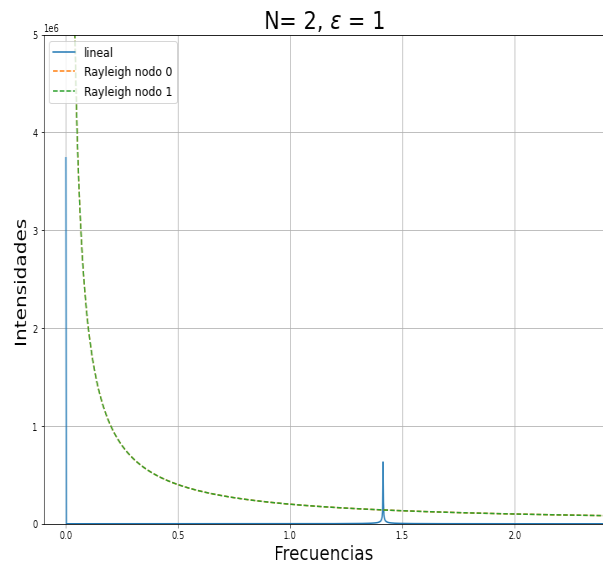


Figura 3.33: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observa que no hay picos máximos.

En el caso de Van der Pol, Figura 3.34, se observan 5 frecuencias nuevas que están más allá de  $\omega = 2\omega_0$  y llegan hasta  $\omega \approx 15\omega_0$ , donde cada frecuencia nueva baja de intensidad. La frecuencia del caso lineal también aparece, siendo la de mayor intensidad.

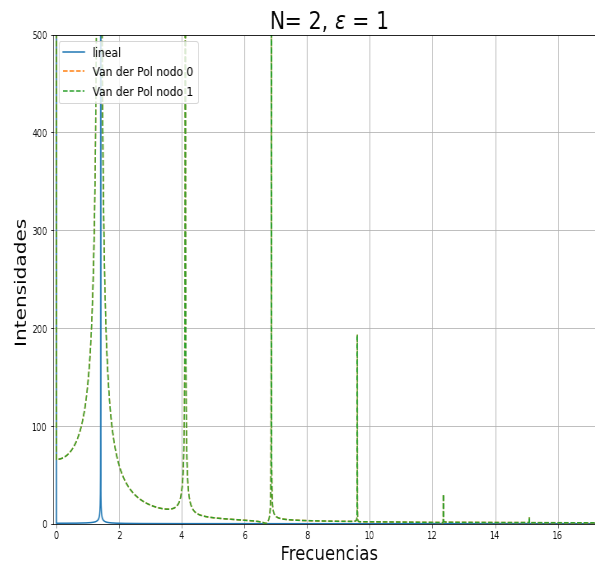


Figura 3.34: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 2$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, además de la frecuencia del caso lineal.

En las Figuras 3.35, 3.36 y 3.37, se muestran las frecuencias de los nodos de la cadena lineal con  $N = 5$  para los casos de Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente, donde en cada gráfica se compara con el nodo 0 de la cadena lineal.

En la Figura 3.35, donde se tiene el oscilador de Duffing, se observan las mismas frecuencias para los cinco nodos. En el caso de Rayleigh, Figura 3.36, se observan 5 frecuencias nuevas que llegan hasta  $\omega \approx 13\omega_0$  y aparecen las dos frecuencias del caso lineal.

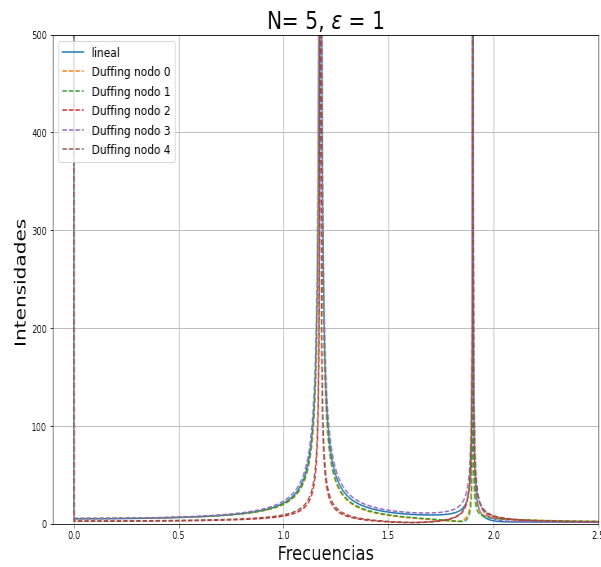


Figura 3.35: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan las mismas dos frecuencias del caso lineal.

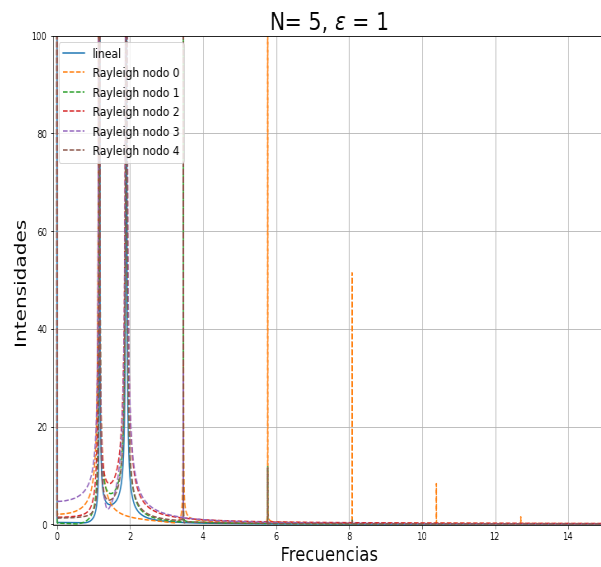


Figura 3.36: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, además de las dos frecuencias del caso lineal.

En el caso de 3.37, se observan 5 frecuencias nuevas que pasan  $\omega = 2\omega_0$  y llegan hasta  $\omega \approx 21\omega_0$ , donde cada frecuencia nueva baja de intensidad. En el caso de las dos frecuencias lineales, solamente aparece la segunda con un pico de gran intensidad.

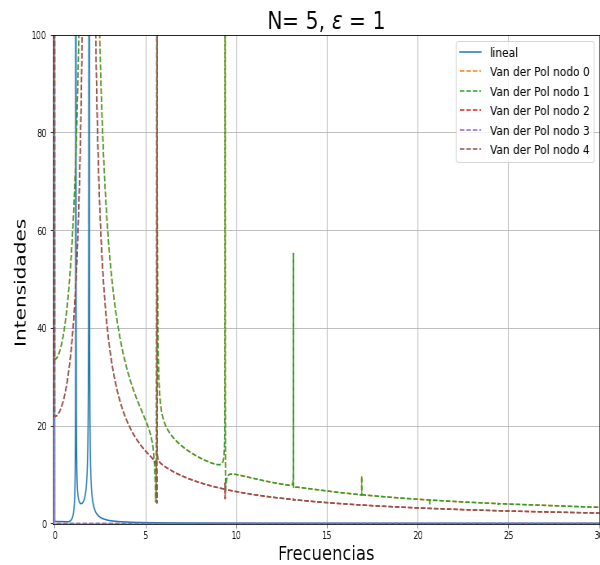


Figura 3.37: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 5$  con  $\epsilon = 1$ , se observan cinco nuevas frecuencias, pero solo aparece una del caso lineal en donde está el pico más grande de intensidad.

En las Figuras 3.38, 3.39 y 3.40, se muestran las frecuencias de los nodos de la cadena lineal con  $N = 12$  para los casos de Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente, donde en cada gráfica se compara con el nodo 0 de la cadena lineal.

En la Figura 3.38, se tiene el caso de Duffing y se observan las mismas frecuencias para los cinco nodos, además en este caso aparecen pequeños picos entre los más grandes.



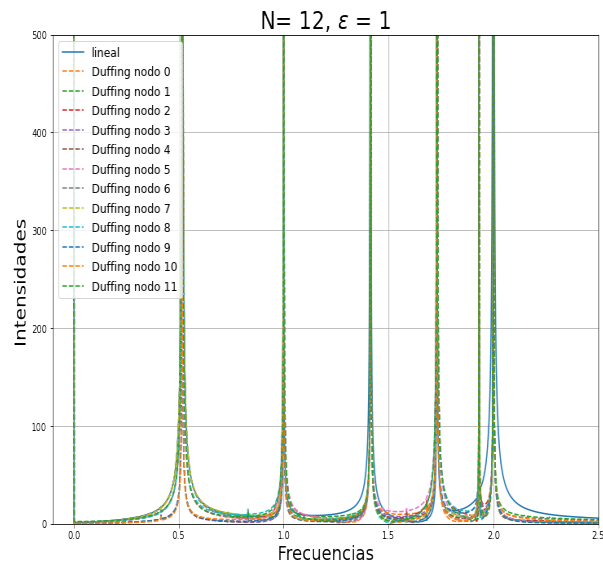


Figura 3.38: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan las mismas 6 frecuencias del caso lineal y nuevos picos de baja intensidad.

En 3.39, se tiene el caso de Rayleigh y se observan 4 frecuencias nuevas que llegan hasta  $\omega \approx 13\omega_0$  y aparecen las frecuencias de los casos lineales menos la última en  $\omega = 2\omega_0$ . Además, hay algunos nodos que tienen una fuerte dependencia en una sola frecuencia, que corresponde a una de las frecuencias del caso lineal.

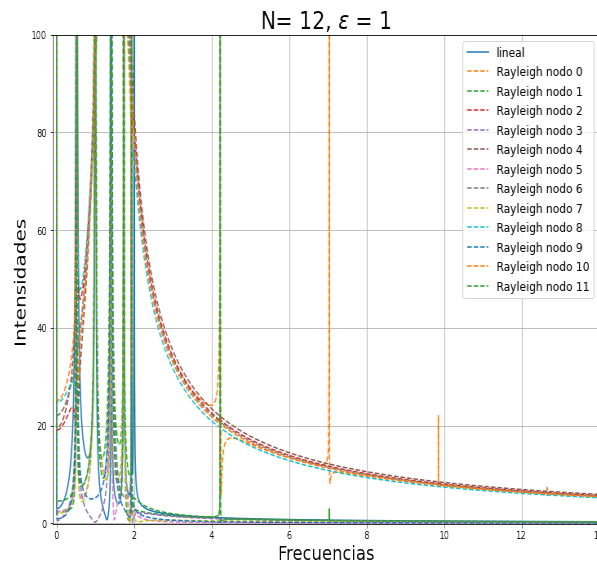


Figura 3.39: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Rayleigh con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan nuevas frecuencias, pero desaparece una de las frecuencias del caso lineal y hay una fuerte dependencia en una frecuencia para algunos nodos.

En el caso de Van der Pol, Figura 3.40, se observan 5 frecuencias nuevas que pasan  $\omega = 2\omega_0$  y llegan hasta  $\omega \approx 21\omega_0$ , donde cada frecuencia nueva baja de intensidad. En el caso de las frecuencias lineales, solamente aparece la última con  $\omega = 2\omega_0$ .

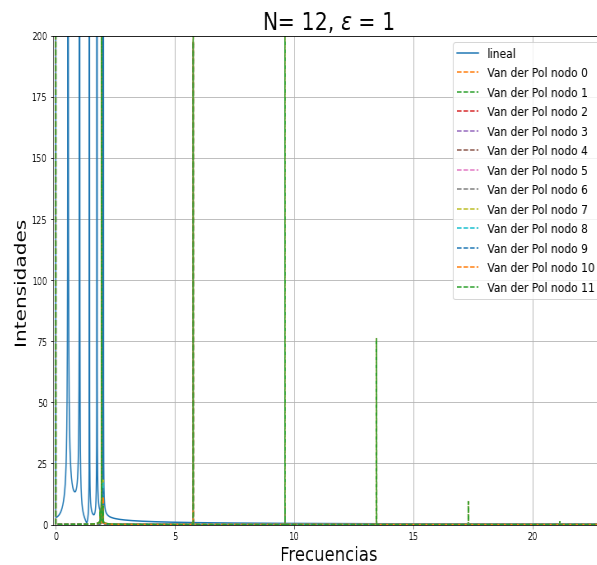


Figura 3.40: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Van der Pol con  $N = 12$  con  $\epsilon = 1$ , se observan cinco nuevas frecuencias, pero solo aparece una del caso lineal.

Para las frecuencias en los casos de la constante no lineal  $\epsilon = 1$ , se observó que para el caso de Rayleigh y Van der Pol ocurre lo mismo que con  $\epsilon = 0.1$ . Es decir, aparecen nuevas frecuencias más allá de  $\omega = 2\omega_0$  y en Van der Pol desaparecen frecuencias del caso lineal, mientras que para Rayleigh se recuperan.

En la Figura 3.41, se observan los espacios fases para Van der Pol y Rayleigh con  $\epsilon = 1$  y redes de  $N = 5$  y  $N = 12$ . En el caso de Rayleigh con  $N = 5$  se puede observar que el nodo 0 sigue de forma parecida la trayectoria del espacio fase de Rayleigh de la Figura 2.13, mientras que los otros nodos tienen una trayectoria que no se cierra, pero que tiene los límites bien definidos. Para  $N = 12$  de Rayleigh se nota lo mismo que para  $N = 5$ , la única diferencia es que no se observa la trayectoria del nodo 0.

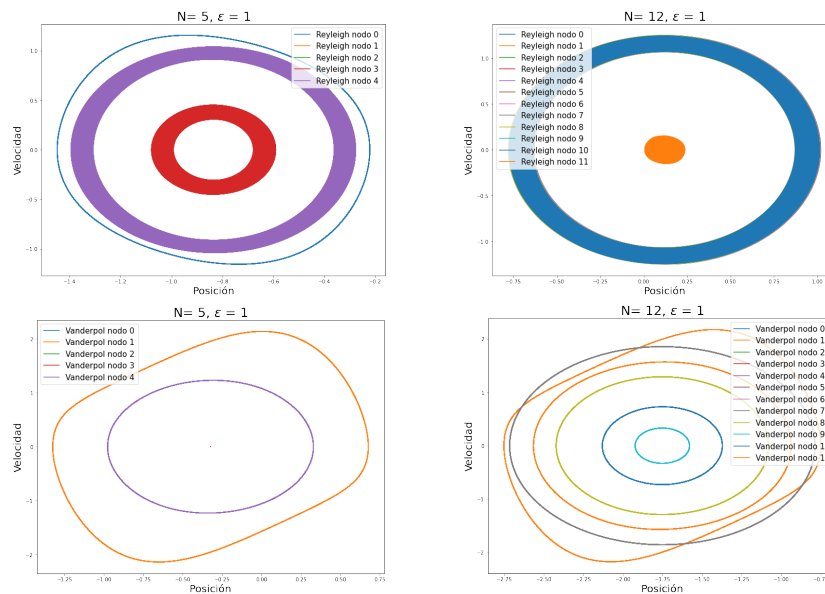


Figura 3.41: De izquierda a derecha y de arriba a abajo: 1) Caso Rayleigh con  $N = 5$ , se observa que el nodo 0 tiene la forma del espacio fase de Rayleigh mientras que los otros nodos no. 2) Caso Rayleigh con  $N = 12$ , se observa que los nodos tienen trayectorias que no se cierran. 3) Caso Van der Pol con  $N = 5$ , donde el nodo 0 y 1 tienen la trayectoria parecida al oscilador de Van der Pol y los otros a trayectorias de oscilador armónico con distintas amplitudes. 4) Caso Van der Pol con  $N = 12$ , donde el nodo 0 y 1 tienen la trayectoria parecida al oscilador de Van der Pol y los otros de oscilador armónico con distintas amplitudes.

En los casos de Van der Pol  $N = 5$  y  $N = 12$ , se puede ver que los nodos 0 y 1

siguen trayectorias parecidas al oscilador de Van der Pol, Figura 2.11. Mientras que los otros nodos siguen trayectorias de oscilador armónico. Para el nodo 3 con  $N = 5$  el punto rojo del centro es su trayectoria, donde pierde casi toda su energía.

### 3.2.4. Cadena lineal periódica de $N = 100$ nodos y parámetro no lineal $\epsilon = 1$

Ahora, se hace lo mismo pero para una cadena de  $N = 100$  nodos y  $\epsilon = 1$ . En la Figura 3.42, se ve el desplazamiento del nodo 0. En el caso de Rayleigh se tuvo que tomar una mayor cantidad de tiempo para encontrar el ciclo límite y se graficó solamente la parte del ciclo límite para que apareciera en el mismo intervalo de tiempo.

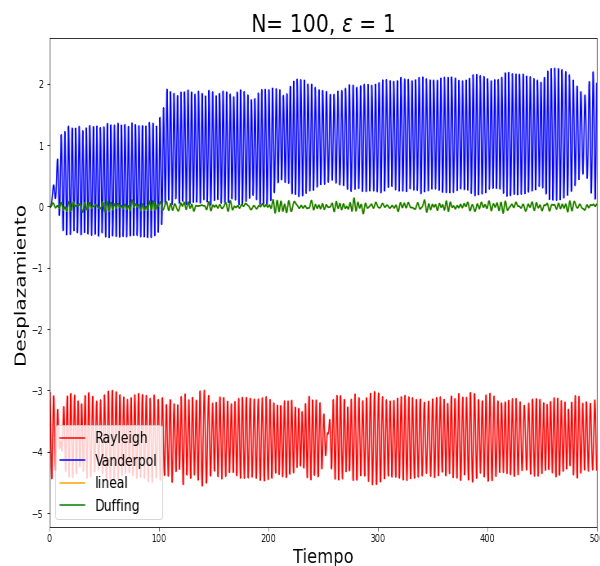


Figura 3.42: Se muestran los desplazamientos del nodo 0 en una cadena lineal de  $N = 100$  y con una constante no lineal de  $\epsilon = 1$  para los distintos osciladores no lineales y el caso lineal.

En las Figuras 3.43, 3.44 y 3.45, se observan las frecuencias de los nodos 0, 1, 25, 50, 75 y 99 que presenta la cadena lineal a partir de que el sistema alcance el ciclo límite para los distintos casos de no linealidad: Duffing, Rayleigh y Van der Pol, respectivamente.

En el caso de Duffing (Figura 3.43) queda sobre el caso lineal al igual que en los casos mencionados anteriormente. Las frecuencias más grandes de  $\omega = 2\omega_0$  para los nodos 0 y 1, se observa una especie de ruido que no se presentó en los otros casos de Duffing.

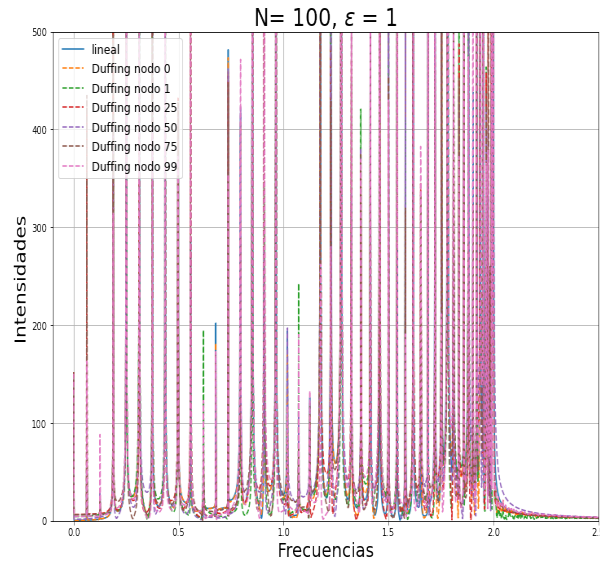


Figura 3.43: Se muestran las frecuencias de los nodos en el caso de Duffing con  $N = 100$ , después de la última frecuencia de la cadena se observan pequeñas frecuencias para nodos 0 y 1.

En el caso de Rayleigh (Figura 3.44) se puede notar que las frecuencias del caso lineal quedan cubiertas por las no lineales, pero se nota un pico de mayor intensidad acercándose a  $\omega = 2\omega_0$  al igual que en los otros casos. Además, se notan varios grupos de frecuencias en intervalos que están más allá del caso lineal.

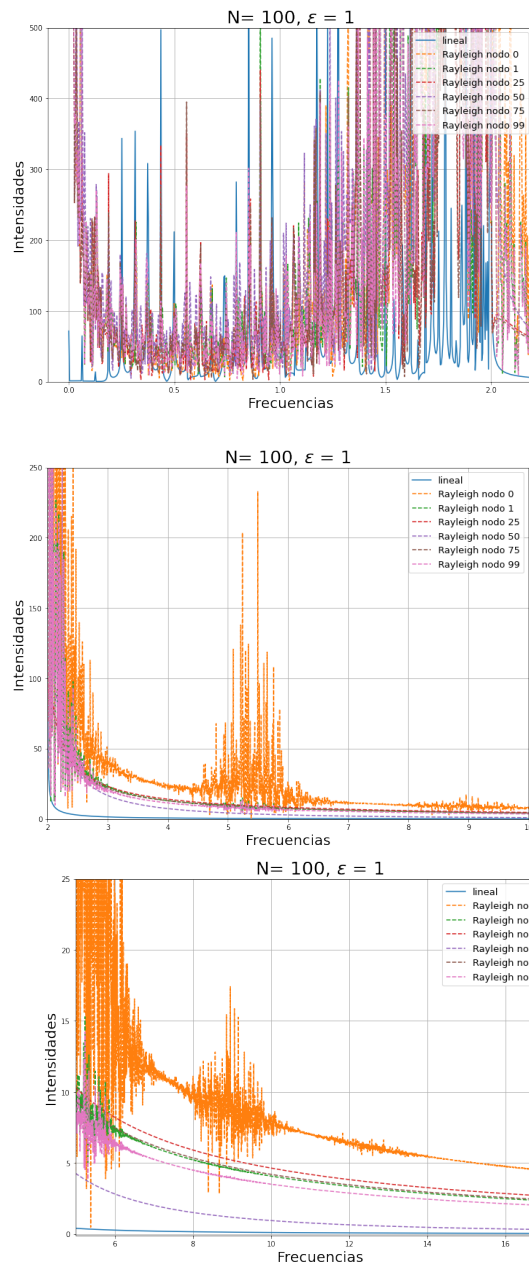


Figura 3.44: Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$  con un potencial tipo Rayleigh.

En el caso de Van der Pol (Figura 3.45) se observa que ya no aparecen varias de las frecuencias del caso lineal y que hay un pico de gran intensidad acercándose a  $\omega = 2\omega_0$ . Al igual que en el caso de Van der Pol con  $\epsilon = 0.1$  y en los casos de Rayleigh, hay grupos de frecuencias en intervalos más allá de  $\omega = 2\omega_0$ .

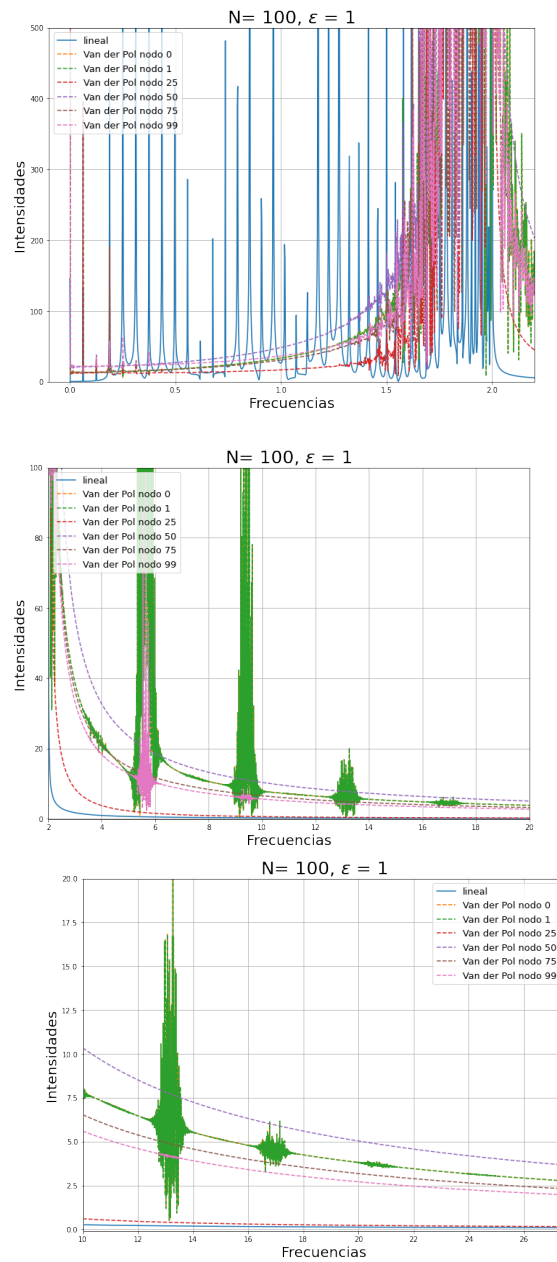


Figura 3.45: Se grafican las intensidades contra las frecuencias de algunos nodos de la cadena lineal  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$  con un potencial tipo Van der Pol.

En el caso de las cadenas lineales de  $N = 100$  con un oscilador de Rayleigh y uno de Van der Pol, se puede volver a graficar el espacio fase de algunos nodos una vez que están en el ciclo límite. En las Figuras 3.46 y 3.47, se pueden ver los ciclos límites de la cadena lineal con un oscilador no lineal de Van der Pol y Rayleigh, respectivamente.

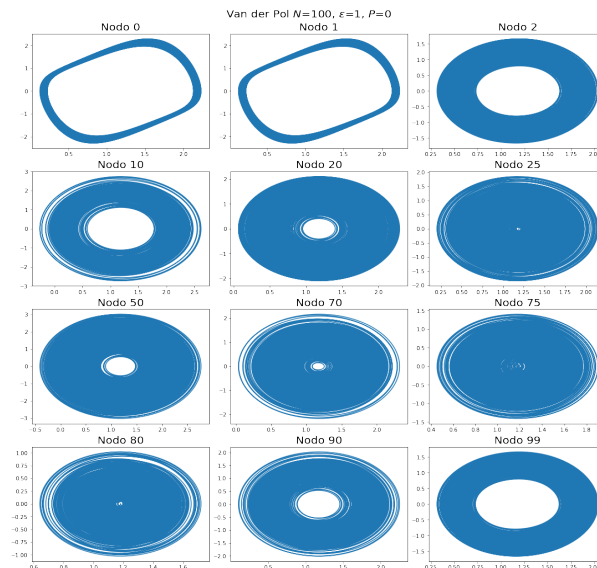


Figura 3.46: Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ . Hay una conexión no lineal de Van der Pol entre los nodos 0 y 1, donde justo siguen una trayectoria de oscilador Van der Pol en el espacio fase. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

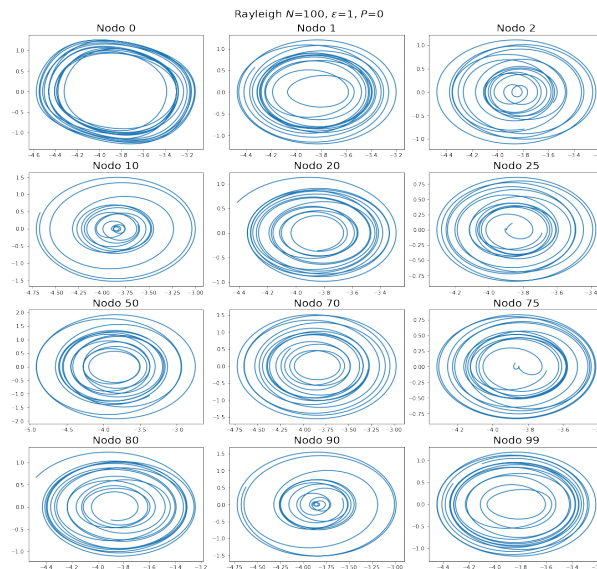


Figura 3.47: Se muestran los espacios fases de algunos nodos de la cadena lineal con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ . El nodo 0 tiene el término lineal de Rayleigh, donde justo sigue una trayectoria de oscilador Rayleigh en el espacio fase. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

Para el caso de Rayleigh se observa que para el nodo 0 el espacio fase tiene forma del oscilador de Rayleigh, mientras que para Van der Pol los nodos 0 y 1 siguen



trayectorias parecidas a las del oscilador de Van der Pol.

Entonces, en el caso de  $\epsilon = 1$  se vio que la dinámica no lineal tipo Duffing no es suficiente para marcar una diferencia observable del caso lineal, mientras que en los casos de Rayleigh y Van der Pol luego de un tiempo la dinámica llega a un ciclo límite. En estos últimos dos casos, los nodos con los términos no lineales presentan trayectorias en los espacios formas parecidos a sus osciladores respectivos. Mientras que los otros nodos de la cadena tienen trayectorias dentro de un intervalo bien definido.

En la sección [3.1], se discutieron dos formas de encontrar las frecuencias a partir de la transformada rápida de Fourier, en ese caso se trabajaron con osciladores lineales y se buscaron  $N = 100$  frecuencias normales.

En esta sección se trabajaron con osciladores no lineales en la cadena lineal periódica y esta no linealidad produjo más frecuencias, desconociendo cuántas más. Viendo las gráficas de frecuencias con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ , aparecen varios picos de intensidad que no se puede distinguir si son ruido por el error numérico o son picos de frecuencias normales, por lo que en esta sección no se pudo graficar la curva de dispersión para los distintos casos de osciladores no lineales.

En los casos de Duffing con  $N = 100$  nodos y  $\epsilon = 0.1, 1$ , las frecuencias son las mismas que el caso lineal, por lo que la curva de dispersión sería la misma. En los casos de Rayleigh con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1, 1$ , se presentan las mismas frecuencias que el caso lineal. Pasando  $\omega = 2\omega_0$  aparecen nuevas frecuencias, en el intervalo de  $5\omega_0$  a  $6\omega_0$  aparecen varias frecuencias y luego en el caso  $\epsilon = 1$  aparecen otros dos intervalos de  $8\omega_0$  a  $10\omega_0$  y de  $12\omega_0$  a  $13\omega_0$ .

En el caso de Van der Pol con  $N = 100$  y  $\epsilon = 0.1$ , aparecen las mismas frecuencias que el caso lineal y una frecuencia en  $\omega \approx 6\omega_0$ . En el caso de  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ , las frecuencias del caso lineal no aparecen todas y, al igual que en Rayleigh,

aparecen más frecuencias más allá de  $\omega = 2\omega_0$  en intervalos. Estos están al rededor de  $\omega \approx 6\omega_0, 9\omega_0, 13\omega_0, 17\omega_0$ .

En los espacios fases de la cadena lineal periódica con un oscilador de Van der Pol y Rayleigh, cuando se tuvieron cadenas de  $N = 5$  y  $N = 12$ , las trayectorias eran más definidas. Mientras que los casos de  $N = 100$  nodos, ya no tanto, si bien tienen un intervalo definido. En los casos de  $\epsilon = 1$  y  $N = 100$ , se puede observar que en los nodos que están acoplados a los osciladores no lineales aparecen las trayectorias de los osciladores respectivos, mientras que los otros nodos tienen trayectorias con un rango acotado.

Además, en el caso de Van der Pol con  $N = 12$  y  $\epsilon = 1$ , se puede ver que los nodos tienen trayectorias cerradas con amplitudes constantes para los que no tienen el oscilador de Van der Pol. Si se observan las frecuencias para estos nodos, Figura 3.40, se puede notar que ya no aparecen las del caso lineal. Esto quiere decir que no depender en las frecuencias de una cadena lineal hace que las trayectorias estén bien definidas y sean cerradas. Ya que en el mismo caso de  $N = 12$  y  $\epsilon = 1$  con el oscilador de Rayleigh, Figura 3.39, los nodos sí tienen como dependencia las frecuencias de la cadena lineal con osciladores armónicos y sus trayectorias no son tan definidas como en el caso de Van der Pol.

### 3.3. Dinámica de una red Watts-Strogatz de osciladores armónicos acoplados controlados por un oscilador no lineal

En esta sección se retoman las redes WS con las probabilidades de reconexión  $P = 0.1, 0.5$  y  $0.9$ , donde ahora se añade la no linealidad de Rayleigh en el nodo 0 y la de Van der Pol entre los nodos 0 y 1 con  $\epsilon = 1$  y con redes de  $N = 12$  nodos. En cada red se simula con las mismas condiciones iniciales, pero con las dos distintas no

linealidades. No se toma en cuenta la no linealidad de Duffing, porque no apareció distinción al caso lineal. Esto se puede observar en las gráficas de la Figura 3.18, ya que las energías iniciales de las simulaciones no son considerables para marcar un cambio con los casos de osciladores lineales.

En las Figuras 3.48, 3.53 y 3.57, se muestran las redes con  $P = 0.1$ , 0.5 y 0.9, respectivamente. Siempre tomando en cuenta que los nodos 0 y 1 estén conectados para el caso de Van der Pol y que las redes sean conexas.

### 3.3.1. Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.1$

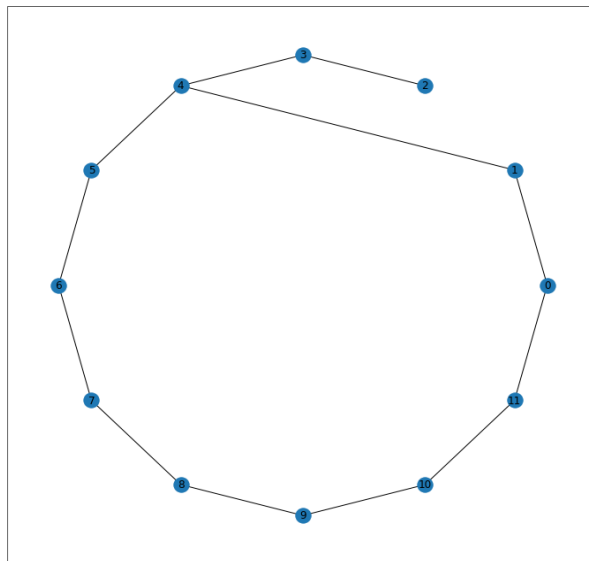


Figura 3.48: Red Watts-Strogatz con  $P = 0.1$  y 12 nodos.

En las Figuras 3.49 y 3.50, están los espacios fases de los 12 nodos con el oscilador Van der Pol. Para los nodo 0 y 1 se observa que las trayectorias siguen la misma que del oscilador de Van der Pol, mientras que los otros nodos siguen órbitas parecidas al caso del oscilador lineal. El nodo 4 tiene una trayectoria con amplitud menor a las demás, por lo que, observando la Figura 3.50, se ve que sigue una trayectoria

distinta a las demás.

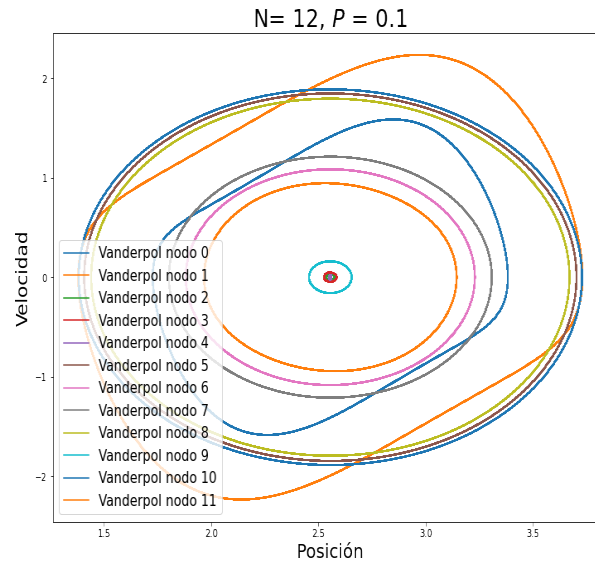


Figura 3.49: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con oscilador Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.1$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria parecidas al oscilador de Van der Pol.

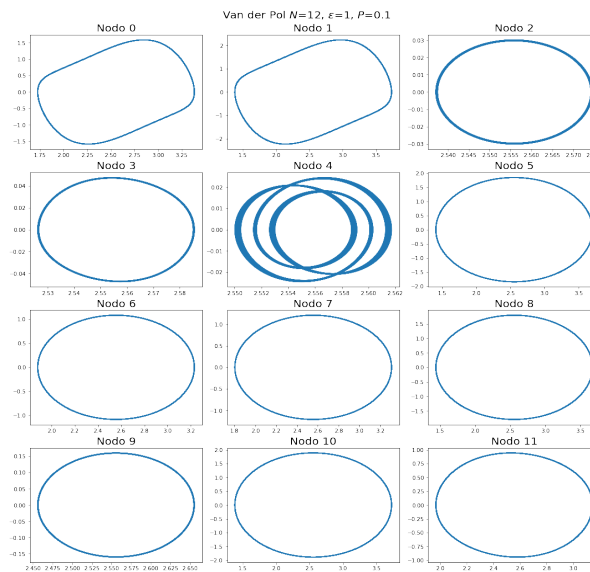


Figura 3.50: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con oscilador Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.1$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria parecidas al oscilador de Van der Pol. El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

En las Figuras 3.51 y 3.52, están los espacios fases de los 12 nodos con un oscila-

de Rayleigh. Se observan nuevas trayectorias para algunos nodos, mientras que otros nodos tienen trayectorias ya vistas anteriormente.

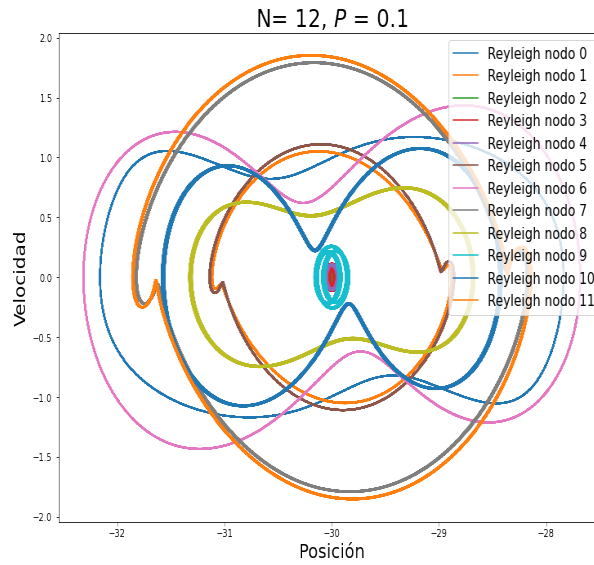


Figura 3.51: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh y  $P = 0.1$ .

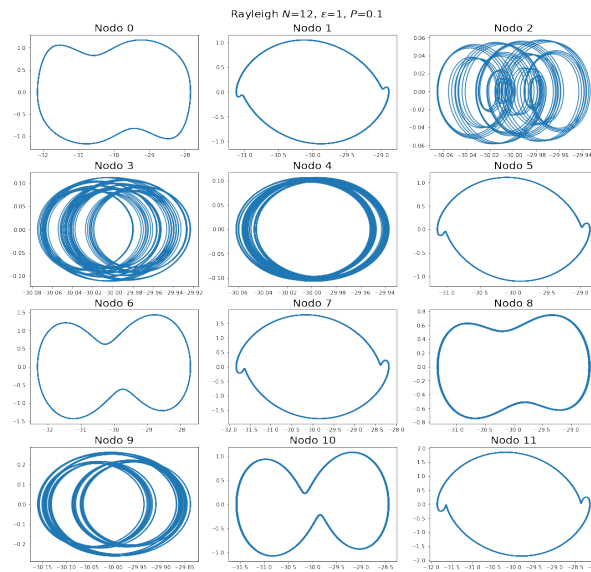


Figura 3.52: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh y  $P = 0.1$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.

### 3.3.2. Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.5$

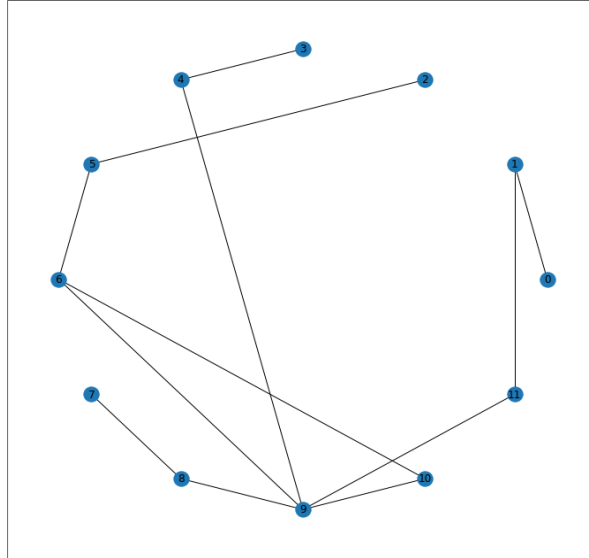


Figura 3.53: Red Watts-Strogatz con  $P = 0.5$  y 12 nodos.

En las Figuras 3.54 y 3.55, se muestran los espacios fases para las redes con oscilador no lineal Van der Pol y Rayleigh, respectivamente, con probabilidad de reconexión  $P = 0.5$ .

En el caso de oscilador de Van der Pol en la red de  $P = 0.5$ , Figura 3.54, se observa que los nodos siguen trayectorias parecidas al caso de la cadena lineal con un oscilador de Van der Pol con  $N = 12$  y  $\epsilon = 1$  de la sección anterior. Se observa que las trayectorias de los nodos 0 y 1 son las trayectorias del oscilador de Van der Pol.

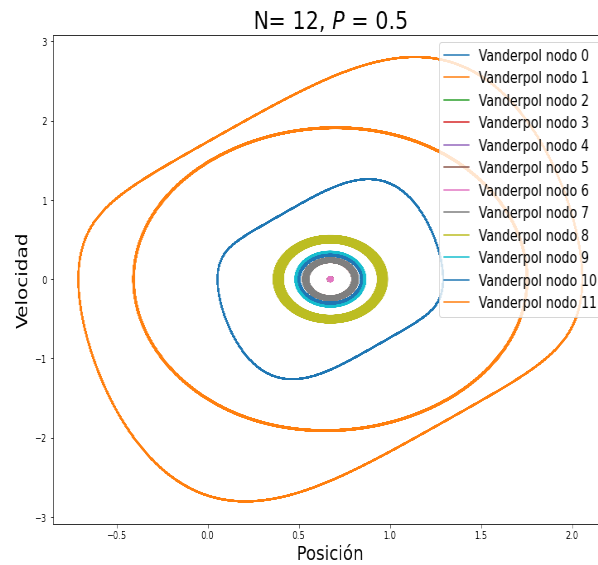


Figura 3.54: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Van der Pol entre un par de nodos y  $P = 0.5$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria de oscilador de Van der Pol.

En el caso del oscilador de Rayleigh, se observa que algunas trayectorias son distintas a los casos antes estudiados, mientras que otras son iguales a otros casos. Por ejemplo, la trayectoria del nodo 10 de este caso se parece a las de los nodos 1, 3 y 10 del caso de Rayleigh con  $P = 0.1$ .

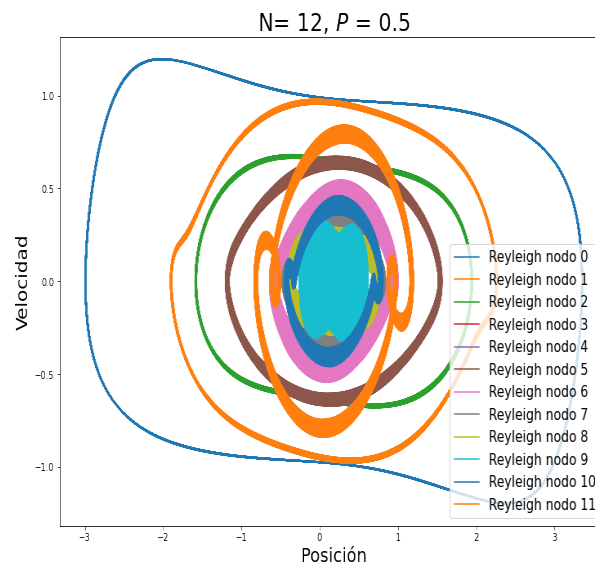


Figura 3.55: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh entre un par de nodos y  $P = 0.5$ , donde el nodo 0 muestra una trayectoria de oscilador de Rayleigh.

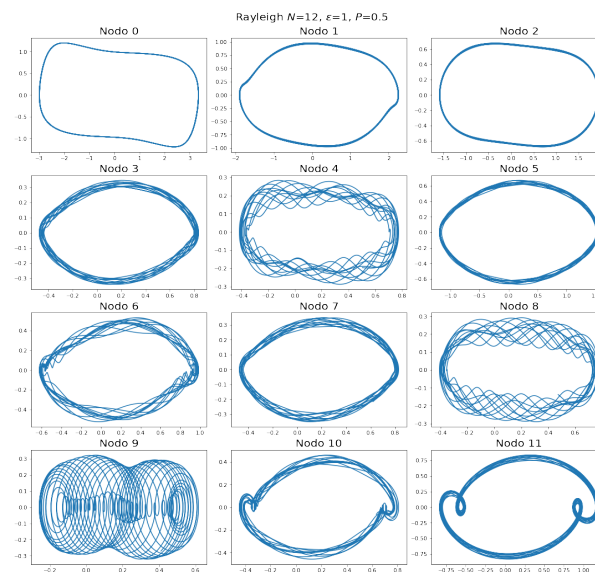


Figura 3.56: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con un oscilador de Rayleigh un un nodo y  $P = 0.5$ . El eje X es la posición y el eje Y la velocidad.



### 3.3.3. Red de Watts-Strogatz de $N = 12$ nodos, parámetro no lineal $\epsilon = 1$ y probabilidad de reconexión $P = 0.9$

En el último caso se tiene  $P = 0.9$  y se puede observar que ocurre lo mismo que en el caso de cadena lineal periódica con oscilador de Van der Pol con  $\epsilon = 1$  y con  $N = 12$  nodos. Es decir, las trayectorias son cerradas y bien definidas. Además, los nodos tienen distintas amplitudes.

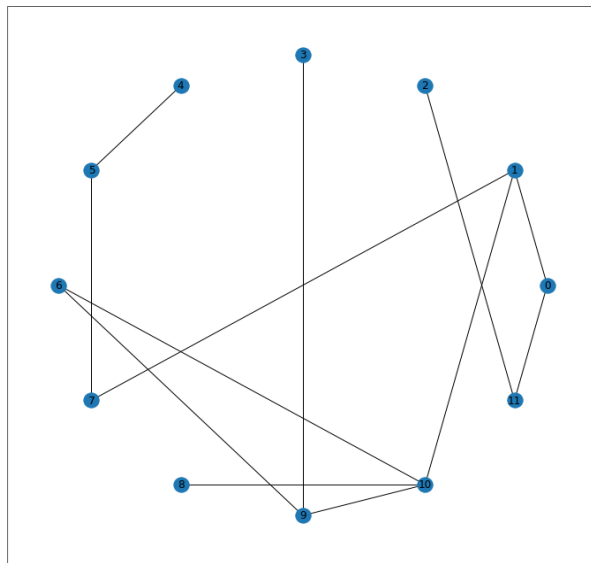


Figura 3.57: Red Watts-Strogatz con  $P = 0.9$  y 12 nodos.

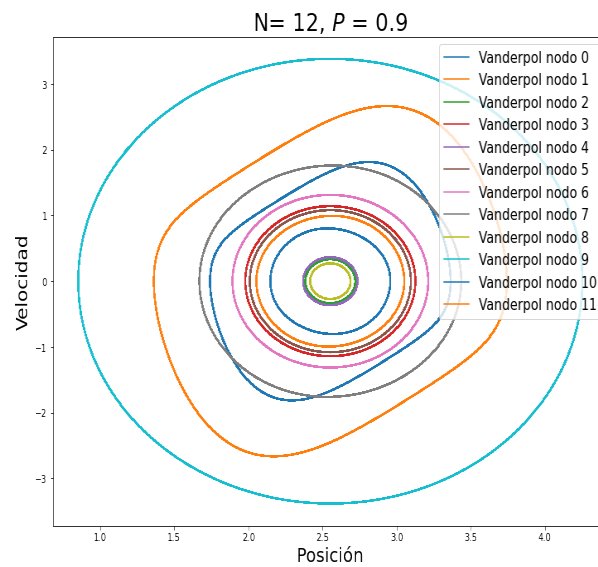


Figura 3.58: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con Van der Pol y  $P = 0.9$ , donde los nodos 0 y 1 muestran una trayectoria de la forma del oscilador de Van der Pol.

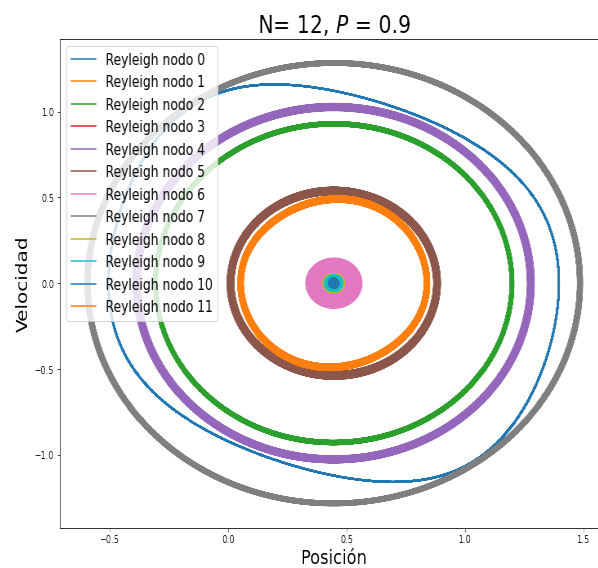


Figura 3.59: Los 12 espacios fases de los nodos de la red con Rayleigh y  $P = 0.9$ , donde el nodo 0 muestra una trayectoria de la forma del oscilador de Rayleigh.

En esta sección, se observó que los osciladores no lineales de Van der Pol y Rayleigh en redes de Watts-Strogatz con distintas probabilidades de reconexión controlan la dinámica de los nodos, haciendo que los nodos sigan trayectorias distintas a las que seguirían en una cadena lineal periódica con solamente potenciales armónicos.

Se notó que algunos nodos tuvieron amplitudes constantes, por lo que el oscilador no lineal, no solo absorbe o disipa energía para mantenerse en su ciclo límite, sino que también hace que los otros nodos mantengan una energía constante. En otros casos, los otros nodos que no están acoplados a los osciladores no lineales no tienen amplitudes constantes, pero sí siguen trayectorias cerradas, las cuales también se generan por el oscilador no lineal de la red.

# Capítulo 4

## Conclusiones

En la presente tesis se abordó el análisis de los fenómenos colectivos (oscilaciones colectivas) en redes regulares y de Watts-Strogatz que emergen de la interacción lineal entre sus nodos, es decir, los nodos están conectados por osciladores armónicos. De particular interés fue el análisis de los efectos de oscilaciones no lineales sobre las frecuencias de oscilación colectiva, cuando una red de osciladores lineales está acoplada a dichas oscilaciones no lineales.

Se consideraron tres casos de oscilaciones no lineales, donde cada uno es definido por un oscilador no lineal paradigmático: el de Duffing, el de Van der Pol y el de Rayleigh.

En [4], se estudian las frecuencias de una red de Watts-Strogatz donde los nodos están conectados por osciladores lineales. Se tomó como base este sistema para luego añadir los osciladores no lineales mencionados anteriormente y estudiar las frecuencias de los sistemas, al igual que las trayectorias en los espacios fases.

El análisis se realizó por medio de simulaciones numéricas, resolviendo las ecuaciones de movimiento para las posiciones y velocidades de los nodos. Con las trayectorias de los nodos se calcularon las frecuencias de oscilación colectiva por medio de un análisis de Fourier, a decir, con la transformada rápida de Fourier. Las frecuencias resultantes en el caso en los que las redes son acopladas a las oscilaciones

no lineales se compararon con las frecuencias de oscilación colectiva de las redes en ausencia del control no lineal considerado.

En los casos de una cadena lineal periódica (red regular), con  $N = 100$  nodos y parámetro no lineal  $\epsilon = 1$  con los osciladores no lineales tipo Duffing y Rayleigh, se notó que en sus espectros de frecuencias se encuentran las frecuencias de la cadena lineal armónica periódica. Además, en el caso de Rayleigh se tienen otras frecuencias nuevas que no son de la cadena lineal armónica ni del oscilador de Rayleigh.

Para la red del oscilador de Van der Pol con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ , no se obtuvieron todas las frecuencias de la cadena lineal periódica armónica, pero sí nuevas frecuencias que tampoco estaban en el caso del oscilador de Van der Pol.

Graficando los espacios fases de los nodos con conexión no lineal de las cadenas lineales periódicas con  $N = 100$  y  $\epsilon = 1$ , se observa que siguen trayectorias parecidas a los osciladores respectivos. Esto da a entender que el oscilador no lineal preserva sus características intrínsecas, es decir, su ciclo límite y, de manera cualitativa, la trayectoria en el espacio fase. Además, los nodos oscilan al rededor de una posición común que emerge del acoplamiento de la cadena con el oscilador no lineal.

Una vez añadiendo las probabilidades de reconexión a las redes con  $N = 12$  nodos y constante no lineal  $\epsilon = 1$ , se observa que los osciladores no lineales tipo Rayleigh y Van der Pol tienen un control sobre el sistema, ya que los demás nodos siguen trayectorias cerradas, en algunos casos de amplitud constante, mientras que los nodos con oscilador no lineal siguen teniendo trayectorias de sus respectivos osciladores, disipando o absorbiendo energía. También se encontró que algunos sistemas exhiben movimiento cuasi-periódico por su rango bien acotado en el espacio fase.

Se trató de encontrar las curvas de dispersión para los diferentes casos de redes creadas con algoritmo de Watts-Strogatz y con las distintas no linealidades, pero, al tener tantos nodos y tantas conexiones, los métodos empleados para contar los

picos máximos en el espectro de frecuencia falla al contarlos todos. Aún así, se puede observar por los espectros de frecuencias cómo es que la frecuencia de corte es mayor para los casos de redes con oscilador de Van der Pol y de Rayleigh que en los casos de cadena lineal periódica con osciladores armónicos entre los nodos.

En las gráficas de frecuencias con la presencia de un oscilador no lineal, se observan nuevas frecuencias de las que no se puede decir si es ruido o una frecuencia del sistema. Es por esta razón que no se pudieron realizar las curvas de dispersión de cada sistema. A futuro se pueden usar métodos como “*Singular spectrum analysis*” para diferenciar entre ruido y frecuencias del sistema en las series de tiempo ([38], [39]).

Además, en los casos donde la dinámica de los nodos es llevada a un ciclo límite, casos de Rayleigh y Van der Pol, se observó que las oscilaciones de los nodos son oscilaciones de osciladores armónicos, esto quiere decir que tienen una fase  $\phi$  asociada y puede calcularse la sincronización entre los nodos ([17], [18], [8]).

# Bibliografía

- [1] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [2] Vincenzo Nicosia, Per Sebastian Skardal, Alex Arenas, and Vito Latora. Collective phenomena emerging from the interactions between dynamical processes in multiplex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 118:138302, Mar 2017.
- [3] Tomislav Stankovski, Tiago Pereira, Peter V. E. McClintock, and Aneta Stefanovska. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev. Mod. Phys.*, 89:045001, Nov 2017.
- [4] Beom Jun Kim, H Hong, and MY Choi. Netons: vibrations of complex networks. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(23):6329, 2003.
- [5] Changsong Zhou, Lucia Zemanová, Gorka Zamora, Claus C. Hilgetag, and Jürgen Kurths. Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks. *Phys. Rev. Lett.*, 97:238103, Dec 2006.
- [6] Susanna C Manrubia, Alexander S Mikhailov, and Damian Zanette. *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*, volume 2. World Scientific, 2004.
- [7] Marcelo Kuperman and Guillermo Abramson. Small world effect in an epidemiological model. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2909–2912, Mar 2001.
- [8] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jürgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics reports*, 469(3):93–153, 2008.

- [9] Alexander I Nesterov and Pablo Héctor Mata Villafuerte. Critical phenomena in complex networks: from scale-free to random networks. *arXiv preprint arXiv:2008.02319*, 2020.
- [10] Carlos P Herrero. Ising model in scale-free networks: A monte carlo simulation. *Physical Review E*, 69(6):067109, 2004.
- [11] Meng Zhan, Shuai Liu, and Zhiwei He. Matching rules for collective behaviors on complex networks: Optimal configurations for vibration frequencies of networked harmonic oscillators. *PLOS ONE*, 8(12):1–5, 12 2013.
- [12] Ana P Millán, Joaquín J Torres, and Ginestra Bianconi. Synchronization in network geometries with finite spectral dimension. *Physical Review E*, 99(2):022307, 2019.
- [13] Philip W Anderson. More is different: broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science. *Science*, 177(4047):393–396, 1972.
- [14] Federico Vazquez, Juan Carlos González-Avella, Víctor M Eguíluz, and Maxi San Miguel. Collective phenomena in complex social networks. In *Applications of Nonlinear Dynamics*, pages 189–199. Springer, 2009.
- [15] Hermann Haken. Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. *Reviews of modern physics*, 47(1):67, 1975.
- [16] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002.
- [17] Jingyi Wang, Chen Xu, Jianwen Feng, and Yi Zhao. Synchronization of networked harmonic oscillators subject to markovian jumping coupling strengths. *Nonlinear Dynamics*, 91(4):2607–2619, 2018.
- [18] Géza Ódor and Jeffrey Kelling. Critical synchronization dynamics of the kuramoto model on connectome and small world graphs. *Scientific reports*, 9(1):1–10, 2019.



- [19] Ernesto Estrada and Philip A Knight. *A first course in network theory*. Oxford University Press, USA, 2015.
- [20] Alvaro Montenegro. Análisis de series de tiempo. *Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana*, 2010.
- [21] Camilo José Carrillo González and Escola Técnica Superior de Enxeñeiros Industriais. *Fundamentos del análisis de Fourier*. GAMESAL, 2003.
- [22] C Sidney Burrus. *Fast fourier transforms*. Lulu. com, 2012.
- [23] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301, 1965.
- [24] Neil W Ashcroft and N David Mermin. *Solid State Physics*. HarCourt College Publishers, 1976.
- [25] J.R. Taylor and J.I. Días. *Mecánica clásica*. Reverté, 2013.
- [26] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. McGraw-Hill Book Company, 1946.
- [27] Russell Merris. Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications*, 197:143–176, 1994.
- [28] Timothy Banham. The discrete laplacian and the hotspot conjecture, 2006.
- [29] Kevin Brown. Phase, group, and signal velocity. <https://www.mathpages.com/home/kmath210/kmath210.htm>. Accessed: 2023-02-01.
- [30] Léon Brillouin. *Wave propagation and group velocity*. Academic press, 1960.
- [31] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books, 1994.
- [32] Sandip Saha, Gautam Gangopadhyay, and Deb Shankar Ray. Reduction of kinetic equations to liénard–levinson–smith form: Counting limit cycles. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5:1–11, 2019.

- [33] Dominic Jordan and Peter Smith. *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*. OUP Oxford, 2007.
- [34] Casaico Suarez, Charalla Mesahuanca, Flores Hernandez, and Walter Felipe Tolentino. El oscilador de van der pol. 10 2020.
- [35] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 1. Macmillan & Company, 1877.
- [36] AP Kuznetsov, SP Kuznetsov, NA Shchegoleva, and NV Stankevich. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 398:1–12, 2019.
- [37] Kathleen T Alligood, Tim D Sauer, James A Yorke, and David Chillingworth. Chaos: an introduction to dynamical systems. *SIAM Review*, 40(3):732–732, 1998.
- [38] James B Elsner and Anastasios A Tsonis. *Singular spectrum analysis: a new tool in time series analysis*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [39] Nina Golyandina, Vladimir Nekrutkin, and Anatoly A Zhigljavsky. *Analysis of time series structure: SSA and related techniques*. CRC press, 2001.