Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Invarianza cuasi-isométrica de propiedades de finitud

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A:

Diego Leipen Lara

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Ciudad Universitaria, CDMX, 2023.

Introducción

Una de las metas más importantes de las matemáticas es encontrar teoremas de clasificación. Esencialmente, la finalidad de cualquier clasificación matemática es construir un sistema que distingue cualesquiera dos objetos no equivalentes de la colección bajo consideración. Las herramientas principales de estos sistemas son los *invariantes*. Uno de los objetivos principales de la tesis es demostrar que una propiedad de grupos llamada *tipo FP_n* es invariante bajo una equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría*.

La propiedad de grupos llamada *tipo FP_n* está definida a partir de una propiedad de módulos que tiene el mismo nombre. Para entender nuestro interés, supongamos que M es un R-módulo donde R es un anillo asociativo con unidad. En la Proposición 2.1.4 se demuestra que M es finitamente generado (cf. Definición B.1.14) si y sólo si existe una sucesión exacta (cf. Definición 2.1.1) de homomorfismos de R-módulos

$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde F es un R-módulo libre (cf. Definición B.1.14) finitamente generado. Más aún, en la Proposición 2.1.5 se demuestra que M es finitamente presentado (cf. Definición B.2.4) si y sólo si existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde F_0 y F_1 son R-módulos libres finitamente generados. Esto motiva la siguiente definición. Supongamos que M es un R-módulo y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es fijo. Decimos que M es de *tipo FP_n* si existe una sucesión exacta de homomorfismos

$$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde todo F_i es libre y finitamente generado.

Ahora bien, supongamos que G es un grupo. Si $\mathbb{Z}G$ es el anillo de grupos de G (cf. Definición C.2.1) y " $\cdot$ " es la G-acción trivial de G en $\mathbb{Z}$, entonces (por la Observación C.2.2) " $\cdot$ " se puede extender para obtener una operación escalar $\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de manera que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo[1]. Si consideramos a $\mathbb{Z}$ con esta estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo, lo denotamos por $\mathbb{Z}_G$. En la Proposición 2.2.2 se demuestra que G es finitamente generado si y sólo si $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_1. Más aún, en la Proposición 2.2.3 se demuestra que si G es finitamente presentado, entonces $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_2. Sin embargo, durante muchos años se desconoció la veracidad de la implicación conversa. En este periodo, los matemáticos Robert Bieri, Ralph Strebel, y Ulrich Stuhler encontraron condiciones suficientes para que se satisficiera esta implicación (cf. [3] pp. 184, [5] pp. 197). Sin embargo, en el artículo *Morse theory and finiteness properties of groups*, los autores Bestvina y Brady encontraron un grupo de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que no es finitamente presentado. Por lo tanto (a diferencia del caso de módulos) esta implicación no se satisface. De cualquier manera, esto motiva la siguiente definición.

Supongamos que G es un grupo y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es fijo. Decimos que G es de *tipo FP_n* si $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_n. En el Ejemplo 2.2.6 se demuestra que si $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ es fijo, entonces $\mathbb{Z}^m$ *es de tipo FP_n para todo* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En la Proposición 2.2.8 se demuestra que si G es un grupo finito, entonces G es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En el Ejemplo 2.2.7 definimos para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un grupo A_n que es de tipo FP_n pero no es de tipo FP_{n+1}. Cabe recalcar que las demostraciones de que un grupo es (o no es) de tipo FP_n suelen ser muy complicadas y/o requerir herramientas matemáticas que desafortunadamente exceden los objetivos de la presente tesis.

[1] La suma de este $\mathbb{Z}G$-módulo es la suma usual de $\mathbb{Z}$ y la multiplicación escalar es $\left(\sum_{i=0}^{m} n_i g_i\right) \cdot n := \left(\sum_{i=0}^{m} n_i\right) n$.

La equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría* es un caso particular de una equivalencia de espacios métricos que tiene el mismo nombre. Como era de esperar, el concepto de cuasi-isometría es una debilitación del concepto de isometría. Recordemos que intuitivamente, dos espacios métricos son isométricos si y sólo si "se ven iguales" (los ejemplos canónicos de isometrías entre espacios euclidianos son las traslaciones, rotaciones, y reflexiones). En la Proposición 3.2.15 veremos que intuitivamente *dos espacios métricos son cuasi-isométricos si y sólo si "se ven iguales desde lejos"*.

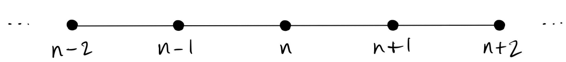
En la Proposición 3.2.18 se demuestra que cualesquiera dos espacios métricos con diámetro finito son cuasi-isométricos. Esto es porque "desde lejos" un espacio métrico con diámetro finito se "ve" como un solo punto y por lo tanto, cualesquiera dos espacios métricos con diámetro finito se "ven iguales desde lejos". En el Ejemplo 3.2.8 se demuestra que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ (con sus métricas usuales) son cuasi-isométricos. Esto es porque "desde lejos", ambos espacios métricos se "ven" como una línea recta. Cabe recalcar que el argumento dado para demostrar esto se puede (I) generalizar para obtener que $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son cuasi-isométricos para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y (II) modificar para obtener que $2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ son cuasi-isométricos.

Ahora bien, supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador finito de G. Denotamos por $\mathrm{Cay}(G, S)$ a la gráfica de Cayley de G con respecto a S (cf. Definición 3.1.5) y denotamos por d_S a la métrica de las palabras inducida por S (cf. Definición 3.1.16). Informalmente, pensamos que el espacio métrico (G, d_S) se "ve" como $\mathrm{Cay}(G, S)$. En el Corolario 3.2.22 veremos el siguiente resultado. *Supongamos que G, G' son grupos y que $S \subset G$, $S' \subset G'$ son subconjuntos generadores finitos. Si G y G' son isomorfos, entonces (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos.* En particular, *G y G' no son isomorfos si existen subconjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $S' \subset G'$ tales que (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ no son cuasi-isométricos.*

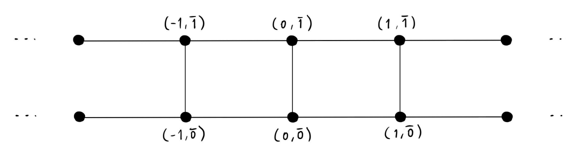
Esta noción de equivalencia es tan importante que le ponemos nombre. Supongamos que G y G' son grupos finitamente generados. Decimos que G y G' son *cuasi-isométricos* y escribimos $G \sim_{\mathrm{QI}} G'$ si existen subconjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $S' \subset G'$ tales que los espacios métricos (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos. Cabe recalcar que en la Proposición 3.2.19 se demuestra si G es un grupo y S_1 y S_2 son subconjuntos generadores finitos, entonces (G, d_{S_1}) y (G, d_{S_2}) son isométricos. Usando esto se puede demostrar que la cuasi-isometría de grupos es una relación de equivalencia.

Aparte de ser invariante bajo isomorfismos de grupos, el concepto de cuasi-isometría de grupos también nos interesa porque nos permite considerar a un grupo finitamente generado como un objeto geométrico; recordemos que informalmente, pensamos que el espacio métrico (G, d_S) se "ve" como $\mathrm{Cay}(G, S)$. Juntando esto con nuestro entendimiento intuitivo de las cuasi-isometrías entre espacios métricos, obtenemos que *G y G' son cuasi-isométricos si y sólo si existen subconjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $S' \subset G'$ tales que $\mathrm{Cay}(G, S)$ y $\mathrm{Cay}(G', S')$ "se ven iguales desde lejos"*.

En el Ejemplo 3.2.23 demostramos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ son cuasi-isométricos; esto es porque "desde lejos", $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ y $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, \overline{0}), (0, \overline{1})\})$ se "ven" como una línea recta.



(a) $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$



(b) $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, \overline{0}), (0, \overline{1})\})$

En el primer párrafo de esta introducción mencionamos que "uno de los objetivos principales de la tesis es demostrar que una propiedad de grupos llamada *tipo FP_n* es invariante bajo una equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría*". Ahora que conocemos los conceptos involucrados, podemos enunciar formalmente esta invarianza.

Teorema Principal. (Invarianza cuasi-isométrica de propiedades de finitud)
Supongamos que G y G' son grupos finitamente generados. Si G y G' son cuasi-isométricos, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

$$G \text{ es de tipo } FP_n \text{ si y solo si } G' \text{ es de tipo } FP_n.$$

Este resultado fue originalmente demostrado por Juan M. Alonso en el artículo *Finiteness conditions on groups and quasi-isometries* (cf. [1]). El objetivo principal de la presente tesis es dar un camino casi auto contenido cuyo destino es este resultado. Para justificar nuestro interés, enunciamos dos aplicaciones.

- Como $\mathbb{Z} \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}$ es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces (por el teorema principal) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ *también es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

- Recordemos que para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe un grupo A_n que es de tipo FP_n pero no es de tipo FP_{n+1}. Entonces (por el teorema principal) A_n *no es cuasi-isométrico a* A_{n+1} y en general, que A_n *no es cuasi-isométrico a A_m si $m \neq n$.*

Una de las características principales de la tesis es que genuinamente es *casi auto contenida*. Hay muy pocas afirmaciones sin demostración y esto es el caso solo cuando presentar el material necesario para la demostración excedería los objetivos de la tesis. De hecho, solo asumimos familiaridad con conceptos básicos de teoría de grupos, acciones, y espacios métricos. Más aún, procuramos que el resto del material necesario tenga una demostración o una referencia. Este tipo de exposición tiene ventajas como el no tener que buscar en algún otro lugar la veracidad de la gran mayoría de las afirmaciones, pero también tiene desventajas como el abuso de hipervínculos (el cual ya se hizo manifiesto en esta misma introducción).

La tesis está organizada en cuatro capítulos y tres apéndices. En el Capítulo 1 estudiaremos las herramientas de topología algebraica necesarias para demostrar del teorema principal (el material de los apéndices A y C.1 es necesario para poder leer este capítulo). En el Capítulo 2 estudiaremos los conceptos de módulo de tipo FP_n y de grupo de tipo FP_n (el material de los apéndices B y C es necesario para poder leer este capítulo). En el Capítulo 3 estudiaremos el concepto de cuasi-isometría. Finalmente, en el Capítulo 4 demostraremos el teorema principal.

Índice general

Capítulo 1

Herramientas de topología algebraica

La demostración del teorema principal hace uso de un resultado conocido como el Criterio de Brown (cf. Teorema 4.2.16). Este da una caracterización de la propiedad de grupos llamada *tipo FP_n* en términos de conceptos de topología algebraica (e.g. complejos simpliciales, realizaciones geométricas, y homología singular). El objetivo principal de este capítulo es definir y estudiar las herramientas de topología algebraica necesarias para enunciar (y ser capaces de usar) el Criterio de Brown.

1.1. Notación de topologías y algunas definiciones básicas

Notación 1.1.1

- Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Si Y es un subconjunto de X, denotamos por $\mathcal{T}_{Y \subset X}$ a la *topología subespacio sobre Y inducida por X* (cf. Definición A.1.6).
- Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Denotamos por $\mathcal{T}_d$ a la *topología métrica sobre X inducida por d* (cf. Definición A.3.3).
- Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Denotamos por $\mathcal{T}_{X \times Y}$ a la *topología caja sobre $X \times Y$* (cf. Definición A.4.1), y denotamos por π_X y π_Y a las *proyecciones canónicas* (cf. Proposición A.4.2).
- Supongamos que X es un conjunto arbitrario y que $\mathfrak{U}$ es una familia de subconjuntos de X. Si tiene sentido, denotamos por $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ a la *topología débil sobre X inducida por $\mathfrak{U}$* (cf. Definición A.5.1).
- Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U}$ es una familia de subespacios de X tales que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ tiene sentido. Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathfrak{U})$, decimos que $\mathcal{T}$ *es coherente con* $\mathfrak{U}$ (cf. Definición A.5.8).

Notación 1.1.2 (Base estándar de $\mathbb{R}^n$)
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ denotamos

$$e_i^n \coloneqq (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{(i+1)\text{-ésimo lugar}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

En palabras, e_i^n es el elemento de $\mathbb{R}^n$ tal que su $(i+1)$-ésima entrada es 1 y todas sus otras entradas son 0. Decimos que $e_0^n, \ldots, e_{n-1}^n$ es la *base estándar de* $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.3 (Conjunto convexo)
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y que S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que S es *convexo* si

$$tx + (1-t)y \in S \text{ para todo } x, y \in S \text{ y para todo } t \in [0, 1].$$

Equivalentemente, S es convexo si

$$\overline{xy} \subset S \text{ para todo } x, y \in S$$

donde $\overline{xy}$ es el segmento de recta en $\mathbb{R}^n$ con extremos x y y.

1.2. Simplejos euclidianos

El objetivo de esta sección es definir y estudiar el concepto de simplejo euclidiano. Intuitivamente, un n-simplejo euclidiano (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) es la figura geométrica de dimensión n más sencilla que tiene lados/caras "planas". Por ejemplo, veremos que

- Un 0-simplejo euclidiano es un punto.
- Un 1-simplejo euclidiano es un segmento de recta.
- Un 2-simplejo euclidiano es un triángulo.
- Un 3-simplejo euclidiano es un tetraedro.

Referencias: Las definiciones en esta sección son originalmente del libro *Convex Optimization* de Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe (cf. [4], pp. 21, 34).

Lema 1.2.1
Supongamos que $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$v_0, v_1, v_2 \text{ son colineales } \iff v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0 \text{ son linealmente dependientes.}$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que v_0, v_1, v_2 son colineales. Entonces v_2 pertenece a la línea que pasa por v_0 y v_1. Equivalentemente,

$$v_2 = v_0 + t(v_1 - v_0) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$-t(v_1 - v_0) + 1(v_2 - v_0) = 0$$

y por lo tanto, $v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0$ son linealmente dependientes.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0$ son linealmente dependientes. Entonces existen $r, s \in \mathbb{R}$ no ambos cero tales que

$$r(v_1 - v_0) + s(v_2 - v_0) = 0$$

Supongamos que $r \neq 0$ (el otro caso es análogo). Entonces

$$v_1 = v_0 - \frac{s}{r}(v_2 - v_0)$$

y en particular v_1 pertenece a la recta que pasa por v_0 y v_2. Por lo tanto, v_0, v_1, v_2 son colineales. □

Observación 1.2.2
Supongamos que $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Como

$$v_0, v_1, v_2 \text{ no son colineales } \iff v_0, v_1, v_2 \text{ son los vértices de un triángulo,}$$

entonces el Lema 1.2.1 implica que

$$v_0, v_1, v_2 \text{ son los vértices de un triángulo } \iff v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0 \text{ son linealmente independientes.} \tag{1.1}$$

Análogamente, para todo $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{gathered} v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ son los vértices de un tetraedro } \iff \\ v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0,\ \ v_3 - v_0 \text{ son linealmente independientes.} \end{gathered} \tag{1.2}$$

En lo que sigue, veremos que el lado derecho de las equivalencias (1.1) y (1.2) es independiente de v_0 (el primer vector de la lista).

Lema 1.2.3
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$. Si $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, entonces para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$

$$v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_0 \text{ son linealmente independientes } \iff$$
$$\big\{v_j - v_i \mid j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}\big\} \text{ es un conjunto linealmente independiente.}$$

Demostración. Por simplicidad, solo veremos que

$$\begin{aligned} v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_0 \text{ son linealmente independientes } &\iff \\ v_0 - v_1,\ \ v_2 - v_1,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_1 \text{ son linealmente independientes.}& \end{aligned} \tag{1.3}$$

La demostración del caso general es completamente análoga. Primero, notemos que

$$\begin{aligned} v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_0 \text{ son linealmente independientes } &\iff \\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Big(\big(\lambda_1(v_1 - v_0) + \lambda_2(v_2 - v_0) + \cdots + \lambda_n(v_n - v_0) = 0\big) \implies \lambda_i = 0 \text{ para todo } i \Big) &\iff \\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Big(\big(-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0\big) \implies \lambda_i = 0 \text{ para todo } i \Big)& \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ahora sí, veamos la demostración de la equivalencia (1.3).
$\implies$) Supongamos que $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$0 = \mu_1(v_0 - v_1) + \mu_2(v_2 - v_1) + \cdots + \mu_n(v_n - v_1).$$

Entonces

$$0 = \mu_1 v_0 - (\mu_1 + \cdots + \mu_n)v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n. \tag{1.5}$$

Por otro lado, si definimos $\lambda_1 = -(\mu_1 + \cdots + \mu_n)$ y $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n &= \\ -\big(-(\mu_1 + \cdots + \mu_n) + \mu_2 + \cdots \mu_n\big)\, v_0 - (\mu_1 + \cdots + \mu_n)v_1 + \cdots + \mu_n v_n &= \\ \mu_1 v_0 - (\mu_1 + \cdots + \mu_n)v_1 + \cdots + \mu_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad es (1.5). Por lo tanto, (1.4) implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Usando esto y la definición de las λ_i obtenemos que $\mu_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto,

$$v_0 - v_1,\ \ v_2 - v_1,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_1 \text{ son linealmente independientes.}$$

$\impliedby$) Es consecuencia inmediata de la implicación "$\implies$": solo hay que invertir los roles de v_0 y v_1. $\square$

Definición 1.2.4 (Vectores afinmente independientes)
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$ y que $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Decimos que $v_0, \ldots, v_n$ son *afinmente independientes* si

$$v_1 - v_0,\ \ v_2 - v_0,\ \ \ldots,\ \ v_n - v_0 \text{ son linealmente independientes.}$$

Por el Lema 1.2.3, la definición anterior no depende del orden de los vectores $v_0, \ldots, v_n$ y podemos reescribir la Observación 1.2.2 de la siguiente manera: Si $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$v_0, v_1, v_2 \text{ son los vértices de un triángulo } \iff v_0, v_1, v_2 \text{ son afinmente independientes.}$$

Análogamente, si $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ son los vértices de un tetraedro } \iff v_0, v_1, v_2, v_3 \text{ son afinmente independientes.}$$

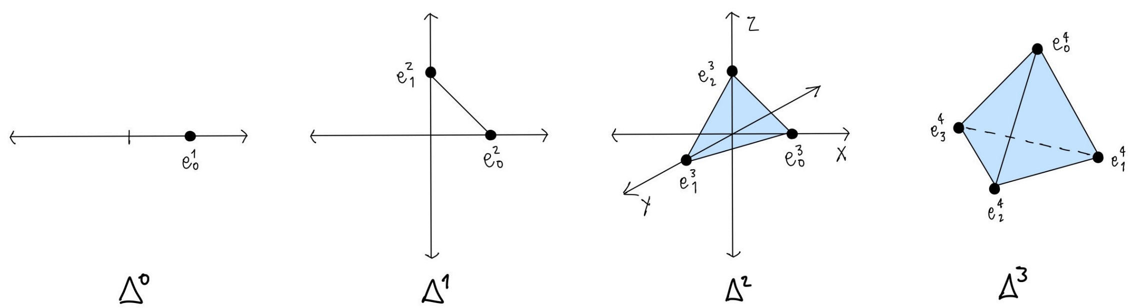
Definición 1.2.5 (El n-simplejo en $\mathbb{R}^m$ determinado por $v_0, \dots, v_n$)
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$ y que $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes. Definimos

$$|v_0, \dots, v_n|^m \coloneqq \bigcap \big\{ S \subset \mathbb{R}^m \mid S \text{ es convexo y } v_0, \dots, v_n \in S \big\}$$

y decimos que $|v_0, \dots, v_n|^m$ es el *n-simplejo en $\mathbb{R}^m$ determinado por* $v_0, \dots, v_n$. Si $e_0^{n+1}, \dots, e_n^{n+1}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$, denotamos

$$\Delta^n \coloneqq |e_0^{n+1}, \dots, e_n^{n+1}|^{n+1}$$

y decimos que Δ^n es el *n-simplejo estándar*. En dimensiones bajas, los simplejos estándar se ven así:



Por otro lado, para todo $|v_0, \dots, v_n|^m$ y todo $i \in \{0, \dots, n\}$ definimos

$$|v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n|^m \coloneqq |v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n|^m$$

y decimos que $|v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n|^m$ es la *i-ésima cara de* $|v_0, \dots, v_n|^m$.

Lema 1.2.6
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$ y que $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes. Si S es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $v_0, \dots, v_n$, entonces

$$t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in S$$

para todo $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $\sum_{i=0}^n t_i = 1$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El paso base $n = 1$ es consecuencia inmediata de que S es convexo. Por eso, supongamos que $n > 1$ y que el resultado se cumple se cumple para $n-1$. Específicamente, supongamos que si $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes y A es un conjunto convexo que contiene a $u_0, \dots, u_{n-1}$, entonces $r_0 u_0 + \dots + r_{n-1} u_{n-1} \in A$ para todo $r_0, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = 1$. Con esto en mente, veamos que el resultado se cumple para n. Supongamos que $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes y que S es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $v_0, \dots, v_n$. Si $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son tales que $t_0 + \dots + t_n = 1$, entonces

$$\frac{t_0}{1 - t_n} + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} = 1. \tag{1.6}$$

Como el resultado se cumple para $n - 1$, lo anterior implica que

$$\frac{t_0}{1 - t_n} v_0 + \frac{t_1}{1 - t_n} v_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} v_{n-1} \in S.$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} t_0 v_0 + \dots + t_n v_n &= t_n v_n + (t_0 v_0 + \dots + t_{n-1} v_{n-1}) \\ &= t_n v_n + (1 - t_n) \left(\frac{t_0}{1 - t_n} v_0 + \frac{t_1}{1 - t_n} v_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} v_{n-1} \right) \in S \end{aligned}$$

donde la pertenencia se cumple por (1.6) y porque S es convexo. $\square$

Proposición 1.2.7
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$. Si $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes, entonces

$$|v_0, \ldots, v_n|^m = \left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}. \tag{1.7}$$

En particular,

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Demostración.
$\subset$) Veamos que $\left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$ es convexo. Supongamos que

$$a_0 v_0 + \cdots + a_n v_n, \ \ b_0 v_0 + \cdots + b_n v_n \in \left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Entonces para todo $r \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} r \left(a_0 v_0 + \cdots + a_n v_n \right) + (1 - r) \left(b_0 v_0 + \cdots + b_n v_n \right) &= \sum_{i=0}^{n} (r a_i + (1 - r) b_i) v_i \\ &\in \left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

donde la pertenencia se cumple porque

$$\sum_{i=0}^{n} (r a_i + (1 - r) b_i) = r \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i}_{1} + (1 - r) \underbrace{\sum_{i=0}^{n} b_i}_{1} = r + (1 - r) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

es convexo. Por otro lado, notemos que (por definición) $|v_0, \ldots, v_n|^m$ está contenido en todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ que contenga a $v_0, \ldots, v_n$. Usando esto y lo anterior obtenemos lo deseado.
$\supset$) El Lema 1.2.6 implica que

$$\left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset S$$

para todo $S \subset \mathbb{R}^m$ convexo que contiene a $v_0, \ldots, v_n$. En particular,

$$\begin{aligned} \left\{ t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \mid \forall i \, (t_i \geq 0) \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} &\subset \bigcap \left\{ S \subset \mathbb{R}^m \mid S \text{ es convexo y } v_0, \ldots, v_n \in S \right\} \\ &= |v_0, \ldots, v_n|^m. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.2.8 (El homeomorfismo natural entre Δ^n y $|v_0, \ldots, v_n|^m$)
Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m > n$ y que $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi[v_0, \ldots, v_n]^m : \Delta^n &\to |v_0, \ldots, v_n|^m \\ (t_0, \ldots, t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n \end{aligned}$$

y decimos que $\varphi[v_0, \ldots, v_n]^m$ es el *homeomorfismo natural entre* Δ^n *y* $|v_0, \ldots, v_n|^m$. Usando solo definiciones se puede demostrar que $\varphi[v_0, \ldots, v_n]^m$ es en efecto un homeomorfismo y que satisface

$$e_i^{n+1} \mapsto v_i \text{ para todo } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Observación 1.2.9
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Veamos que Δ^n es cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos que $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i.$$

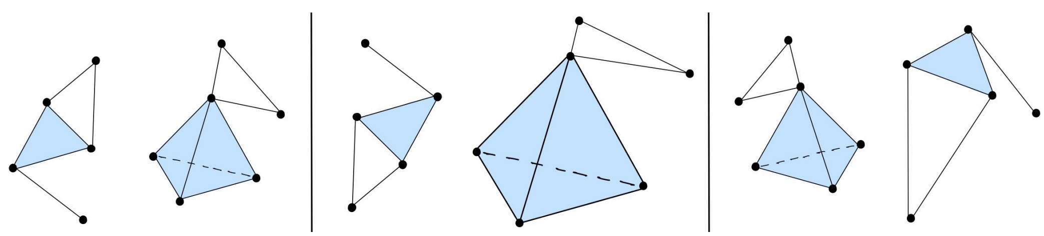
Entonces f es continua y

$$f^{-1}(\{1\}) \cap \left(\mathbb{R}_{\geq 0}\right)^{n+1} = \Delta^n.$$

Como $f^{-1}(\{1\})$ y $\left(\mathbb{R}_{\geq 0}\right)^{n+1}$ son cerrados, la igualdad anterior implica lo deseado.

1.3. Complejos simpliciales

El objetivo de esta sección es definir y estudiar una abstracción de "dibujos compuestos por simplejos euclidianos". Esta abstracción se olvidará de los detalles geométricos del dibujo (e.g. ángulos y distancias) y se concentrará en su "estructura combinatórica". Por ejemplo, desde el punto de vista de esta abstracción, los siguientes tres dibujos serán equivalentes:



Cabe recalcar que los resultados más importantes de esta sección son: la Proposición 1.3.48 y la Proposición 1.3.49. El material de los Apéndices A.4 y A.5 será necesario.

Referencias: El material en esta sección está basado en la Sección 3.1 del libro *Algebraic Topology* de Edwin H. Spanier (cf. [13]).

Definición 1.3.1 (Complejo simplicial)
Decimos que K es un *complejo simplicial* si K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos tal que si $s \in K$ y $s' \subset s$, entonces $s' \in K$. En otras palabras, un complejo simplicial es una familia de subconjuntos finitos no vacíos que es cerrada bajo toma de subconjuntos no vacíos.

Definición 1.3.2 (Subcomplejo, simplejo, vértice)
Supongamos que K es un complejo simplicial. Si L es un subconjunto de K que también es un un complejo simplicial, decimos que L es un *subcomplejo de* K. Si $s \in K$ es tal que $|s| = q + 1$ ($q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), decimos que s es un *q-simplejo* o que s tiene *dimensión q* y escribimos $\dim s = q$. Si $s \in K$ y $s' \subset s$, decimos que s' es una *cara de s*. Definimos

$$V(K) := \bigcup K$$

y decimos que $V(K)$ es el *conjunto de vértices de K*. Cabe recalcar que (por definición) $v \in V(K)$ si y solo si existe $s \in K$ tal que $v \in s$.

Ejemplo 1.3.3
Los siguientes conjuntos son ejemplos de complejos simpliciales:

1. Para cualquier conjunto A, la familia de subconjuntos finitos no vacíos de A es un complejo simplicial. En particular, si A es finito, y $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A, entonces $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ es un complejo simplicial.

2. La unión de dos complejos simpliciales es un complejo simplicial.

3. Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$K^q := \big\{ s \in K \mid s \text{ es un } p\text{-simplejo con } p \leq q \big\}$$

y decimos que K^q es *el q-esqueleto de K*.

4. Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo $s \in K$ definimos

$$\begin{aligned} \overline{s} &:= \{s' \in K \mid s' \subset s\} = \{s' \in K \mid s' \text{ es una cara de } s\} \\ \dot{s} &:= \{s' \in K \mid s' \subsetneqq s\} = \{s' \in K \mid s' \text{ es una cara propia de } s\} \end{aligned}$$

Definición 1.3.4 (Función simplicial)
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que $f : V(K) \to V(K')$ es una función. Decimos que f es una *función simplicial de K a K'* si

$$f(s) \in K' \text{ para todo } s \in K.$$

En otras palabras, una función simplicial de K a K' es una función de $V(K)$ a $V(K')$ que manda simplejos a simplejos. Si no hay ambigüedad respecto a los complejos simpliciales, simplemente decimos que f es *simplicial*. Sin embargo, hay que tener cuidado con esta abreviación porque puede lo siguiente. Supongamos que K, K', K'' son complejos simpliciales. Si $V(K') = V(K'')$, entonces puede suceder que existe una función f de $V(K)$ a $V(K') = V(K'')$ tal que

$$f(s) \in K' \text{ para todo } s \in K$$

pero

$$\exists s_0 \in K \text{ tal que } f(s_0) \notin K''.$$

Es decir, f es una función simplicial de K a K' pero no es una función simplicial de K a K''. Por eso, no *siempre* es buena idea simplemente decir que "f es una función simplicial" sin especificar los complejos simpliciales. En el siguiente ejemplo veremos un caso especifico de esta situación.

Ejemplo 1.3.5

- Supongamos que K, K' son complejos simpliciales. Entonces cualquier función constante de $V(K)$ a $V(K')$ es una función simplicial de K a K'.

- Supongamos que A, A' son conjuntos arbitrarios y que

$$K = \{S \subset A \mid S \text{ es finito no vacío}\} \quad \text{y} \quad K' = \{S' \subset A' \mid S' \text{ es finito no vacío}\}.$$

Entonces cualquier función de $V(K)$ a $V(K')$ es una función simplicial.

- Supongamos que u_0, u_1 y v_0, v_1, v_2 son elementos arbitrarios distintos, que $K = \mathcal{P}(\{u_0, u_1\}) \setminus \varnothing$, y que

$$K' := \big\{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\} \big\} \setminus \{\varnothing\}.$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que K y K' son complejos simpliciales tales que $V(K) = \{u_0, u_1\}$ y $V(K') = \{v_0, v_1, v_2\}$. Supongamos que $f : V(K) \to V(K')$ es tal que $u_0 \mapsto v_0$ y $u_1 \mapsto v_2$. Entonces $f(\{u_0, u_1\}) = \{v_0, v_2\} \notin K'$ pero $\{u_0, u_1\} \in K$, y por lo tanto f no es una función simplicial de K a K'. En contraste, si $K'' = \mathcal{P}\big(\{v_0, v_1, v_2\}\big) \setminus \{\varnothing\}$, entonces (por el inciso anterior) f es una función simplicial de K a K''.

En lo que sigue, veremos que a todo complejo simplicial le podemos asociar un espacio topológico que formaliza y justifica la siguiente afirmación: *el concepto de complejo simplicial es una abstracción de dibujos compuestos por simplejos euclidianos*. Para esto, usaremos la siguiente notación: Supongamos que A es un conjunto arbitrario y que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función. Definimos

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \big\{a \in A \mid f(a) \neq 0\big\}$$

y decimos que $\operatorname{supp}(f)$ es el *soporte de f*.

Definición 1.3.6
Supongamos que K es un complejo simplicial. Definimos

$$|K| \coloneqq \left\{\alpha : V(K) \to [0,1] \mid \operatorname{supp}(\alpha) \in K \ \text{ y } \sum_{v \in V(K)} \alpha(v) = 1\right\}.$$

Cabe recalcar que la suma $\sum_{v \in V(K)} \alpha(v)$ tiene sentido (es decir, es finita) porque $\operatorname{supp}(\alpha) \in K$ implica que $\alpha(v) = 0$ para casi todo $v \in V(K)$.

Notación 1.3.7
Supongamos que K es un complejo simplicial, que $\{v_0, \ldots, v_q\} \in K$ (con los v_i distintos), y que $t_0, \ldots, t_q \in [0,1]$ son tales que $t_0 + \cdots + t_q = 1$. Denotamos por $t_0v_0 + \cdots + t_qv_q$ a la función de $V(K)$ en $[0,1]$ que satisface (I) $v_i \mapsto t_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, q\}$ y (II) $v \mapsto 0$ si $v \in V(K) \setminus s$. Veamos que

$$|K| = \left\{t_0v_0 + \cdots + t_qv_q \mid \{v_0, \ldots, v_q\} \in K,\ \forall i(t_i \geq 0),\ \text{ y } \sum_{i=0}^{q} t_i = 1\right\}. \tag{1.8}$$

$\supset$) Supongamos que $t_0, \ldots, t_q \in [0,1]$ son tales que $t_0 + \cdots + t_q = 1$. Entonces $t_0v_0 + \cdots + t_qv_q$ es una función de $V(K)$ a $[0,1]$ cuyo soporte está contenido en $\{v_0, \ldots, v_q\}$ y por lo tanto tenemos la primera de las siguientes igualdades

$$\sum_{v \in V(K)} \big(t_0v_0 + \cdots + t_qv_q\big)(v) = \sum_{i=0}^{n} \big(t_0v_0 + \cdots + t_qv_q\big)(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Por lo tanto, $t_0 + \cdots + t_q \in |K|$.
$\subset$) Supongamos que $\alpha \in |K|$ y que $\operatorname{supp}(\alpha) = \{v_0, \ldots, v_q\}$ con los v_i distintos. Entonces

$$\alpha = \alpha(v_0)v_0 + \cdots + \alpha(v_q)v_q \quad \text{ y } \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha(v_i) = 1.$$

Usando esto obtenemos lo deseado.

Observación 1.3.8
Supongamos que K es un complejo simplicial y que $v_0 \in V(K)$ es fijo. Si $\alpha : V(K) \to [0,1]$ es tal que $\alpha(v) = 0$ para todo $v \neq v_0$ y $\alpha(v_0) = 1$, entonces $\alpha \in |K|$ y usando la Notación 1.3.7, podemos escribir $\alpha = 1v_0$. Por brevedad, en este caso escribimos $\alpha = 1v_0 = v_0$ y hacemos la siguiente identificación

$$V(K) = \{v \in |K| \mid v \in V(K)\}.$$

Por otro lado, cabe recalcar que a pesar de que estamos ocupando el símbolo "+", *no vamos a definir una suma entre elementos de $|K|$*. Pronto se volverá evidente nuestra motivación para escoger esta notación.

Definición 1.3.9 (Simplejo cerrado)
Supongamos que K es un complejo simplicial y que $s \in K$. Si $s = \{v_0, \ldots, v_q\}$, definimos el *simplejo cerrado generado por s*, denotado por $|s|$, como el conjunto de todos los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0v_0 + \cdots + t_qv_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in [0,1].$$

Sin ocupar la Notación 1.3.7 podemos describir $|s|$ como el conjunto de las funciones de $\alpha : V(K) \to [0,1]$ tales que (I) $\alpha(v) = 0$ para todo $v \in V(K) \setminus s$ y (II) $\sum_{i=0}^{q} \alpha(v_i) = 1$.

Observación 1.3.10
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo $s \in K$

$$|s| = \big\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset s\big\}.$$

Demostración. Denotemos $s = \{v_0, \dots, v_q\}$.
$\subset$) Supongamos que $\alpha \in |s|$. Como $\alpha(v) = 0$ para todo $v \in V(K) \setminus s$, entonces $\operatorname{supp}(\alpha) \subset s$ y como $\alpha \in |K|$ (pues $|s| \subset |K|$), entonces obtenemos lo deseado.
$\supset$) Supongamos que $\alpha \in |K|$ es tal que $\operatorname{supp}(\alpha) \subset s = \{v_0, \dots, v_q\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\operatorname{supp}(\alpha) = \{v_0, \dots, v_p\}$ con $p \leq q$. Entonces $\alpha = \alpha(v_0)v_0 + \cdots + \alpha(v_p)v_p \in |s|$. $\square$

Corolario 1.3.11
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo $s_1, s_2 \in K$

$$|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|.$$

Demostración. Supongamos que $s_1, s_2 \in K$. Entonces para todo $\alpha \in |K|$

$$\begin{aligned}
\alpha \in |s_1 \cap s_2| &\iff \operatorname{supp}(\alpha) \subset s_1 \cap s_2 \\
&\iff \operatorname{supp}(\alpha) \subset s_1 \text{ y } \operatorname{supp}(\alpha) \subset s_2 \\
&\iff \alpha \in |s_1| \text{ y } \alpha \in |s_2| \\
&\iff \alpha \in |s_1| \cap |s_2|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|s_1 \cap s_2| = |s_1| \cap |s_2|$. $\square$

Definición 1.3.12
Supongamos que K es un complejo simplicial. Definimos

$$d_K(\alpha, \beta) := \sqrt{\sum_{v \in V(K)} \big(\alpha(v) - \beta(v)\big)^2} \text{ para todo } \alpha, \beta \in |K|.$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que d_K es una métrica sobre $|K|$.

Observación 1.3.13
Supongamos que K es un complejo simplicial y que $s \in K$ es fijo. Como $\alpha \in |s|$ implica que $\alpha(v) = 0$ para todo $v \in V(K) \setminus s$, entonces

$$d_K(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in s} \big(\alpha(v) - \beta(v)\big)^2} \text{ para todo } \alpha, \beta \in |s|.$$

Más aún, si $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K$, entonces para todo $\sum_{i=0}^q t_i v_i$, $\sum_{i=0}^q t_i' v_i \in |s|$,

$$d_K\left(\sum_{i=0}^q t_i v_i \, , \, \sum_{i=0}^q t_i' v_i\right) = \sqrt{\sum_{i=0}^q (t_i - t_i')^2}. \tag{1.9}$$

En lo que sigue, siempre que consideremos a $|s|$ como un espacio topológico (e.g. Lema 1.3.14, Lema 1.3.15, Lema 1.3.16, Definición 1.3.17), lo consideramos con la topología inducida por la restricción de d_K a $|s| \times |s|$, es decir, lo consideramos con la topología $\mathcal{T}_{d_K \restriction_{|s| \times |s|}}$. De hecho, por brevedad denotamos

$$\mathcal{T}_s := \mathcal{T}_{d_K \restriction_{|s| \times |s|}}.$$

Más aún si denotamos por $\mathcal{T}_{d_K}$ a la topología sobre $|K|$ inducida por d_K, entonces (por la Proposición A.3.7)

$$\mathcal{T}_s = \big(\mathcal{T}_{d_K}\big)_{|s| \subset |K|}. \tag{1.10}$$

En palabras, siempre consideramos a $|s|$ como un subespacio de $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$.

Lema 1.3.14
Supongamos que K es un complejo simplicial. Si $s \in K$ es un q-simplejo, entonces $|s|$ es homeomorfo a Δ^q.

Demostración. Supongamos que $s = \{v_0, \ldots, v_q\}$ y que $e_0, \ldots, e_q$ es la base estándar de $\mathbb{R}^{q+1}$. Definimos $\varphi_s : |s| \to \Delta^q$ por

$$t_0 v_0 + \cdots + t_0 v_q \mapsto t_0 e_0 + \cdots + t_q e_q = (t_0, \ldots, t_q)$$

Usando (1.7) y (1.8) se puede demostrar que φ_s está bien definida y que es biyectiva. Resta probar que φ_s es continua. Para esto, supongamos que $\sum_{i=0}^{q} t_i v_i, \sum_{i=0}^{q} t'_i v_i \in |s|$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left(\varphi_s\left(\sum_{i=0}^{q} t_i v_i\right), \varphi_s\left(\sum_{i=0}^{q} t'_i v_i\right)\right) &= d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((t_0, \ldots, t_q), (t'_0, \ldots, t'_q)\right) \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} (t_i - t'_i)^2} \\ &= d_K\left(\sum_{i=0}^{q} t_i v_i\, , \sum_{i=0}^{q} t'_i v_i\right). \end{aligned}$$

Usando esto y el Criterio $\epsilon - \delta$ obtenemos lo deseado. □

Lema 1.3.15
Supongamos que K es un complejo simplicial. Entonces $|s|$ es cerrado en $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$ para todo $s \in K$. En particular (por la Proposición A.1.7), si $s \in K$ y $s' \subset s$, entonces $|s'|$ es cerrado en $|s|$.

Demostración. Supongamos que $s \in K$ y que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una sucesión en $|s|$ que converge a $\alpha \in |K|$. Por definición,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall n \geq N \left(d_K(\alpha_n, \alpha) < \epsilon\right). \tag{1.11}$$

Por otro lado, para todo $v \in V(K)$

$$d_K(\alpha_n, \alpha) = \sqrt{\sum_{v \in V(K)} (\alpha_n(v) - \alpha(v))^2} \geq \sqrt{(\alpha_n(v) - \alpha(v))^2} = |\alpha_n(v) - \alpha(v)| \tag{1.12}$$

Juntando (1.11) y (1.12) obtenemos que para todo $v \in V(K)$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall n \geq N \left(|\alpha_n(v) - \alpha(v)| < \epsilon\right).$$

Equivalentemente, para todo $v \in V(K)$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n(v) = \alpha(v). \tag{1.13}$$

En lo que sigue, demostraremos que $\mathrm{supp}(\alpha) \subset |s|$. Supongamos que $v \in \mathrm{supp}(\alpha)$. Entonces (por definición), $\alpha(v) \neq 0$. Juntando esto con (1.13) obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n(v) \neq 0.$$

En particular, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha_{n_0}(v) \neq 0$. Es decir,

$$v \in \mathrm{supp}(\alpha_{n_0}) \tag{1.14}$$

Más aún, como $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una sucesión en $|s|$, entonces $\alpha_{n_0} \in |s|$ o equivalentemente,

$$\mathrm{supp}(\alpha_{n_0}) \subset s. \tag{1.15}$$

Juntando (1.14) y (1.15) obtenemos que $v \in s$. Por lo tanto, $\mathrm{supp}(\alpha) \subset |s|$ o equivalentemente, $\alpha \in |s|$.

En resumen, el límite de toda sucesión convergente en $|s|$ es un elemento de $|s|$ y por lo tanto, $|s|$ es cerrado en $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$. □

Lema 1.3.16
Supongamos que K es un complejo simplicial, que $\mathcal{T}_{d_K}$ es la topología sobre $|K|$ inducida por d_K (cf. Definición 1.3.12), y consideremos a la siguiente familia de subespacios de $(|K|, \mathcal{T}_{d_K})$.

$$\mathfrak{U} := \left\{ (|s|, \mathcal{T}_s) \mid s \in K \right\}$$

Entonces $\mathfrak{U}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1 y en particular, (por el Corolario A.5.7) la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ está bien definida en $|K|$. Cabe recalcar que, a pesar de que

$$\left(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\right)_{|s| \subset |K|} = \mathcal{T}_s = \left(\mathcal{T}_{d_K}\right)_{|s| \subset |K|},$$

la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ no necesariamente coincide con la topología métrica $\mathcal{T}_{d_K}$ (cf. Corolario A.5.7)

Demostración. Usando el Corolario 1.3.11 y el Lema 1.3.15, obtenemos que para todo $s_1, s_2 \in K$,

$$|s_1| \cap |s_2| \text{ es cerrado en } |s_1| \text{ y } |s_2|.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{U}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. $\square$

Definición 1.3.17 (La realización geométrica de un complejo simplicial)
Supongamos que K es un complejo simplicial. La *realización geométrica de* K es el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es la topología débil inducida por

$$\mathfrak{U} := \left\{ (|s|, \mathcal{T}_s) \mid s \in K \right\}.$$

Recordemos que por definición

$$U \text{ es abierto (cerrado) en } (|K|, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \iff \forall s \in K \left(U \cap |s| \text{ es abierto (cerrado) en } (|s|, \mathcal{T}_s) \right).$$

En lo que sigue, siempre consideramos a $|K|$ con esta topología[1]. Por eso, a veces decimos que esta es la topología usual de $|K|$ y denotamos

$$\mathcal{T}_K := \mathcal{T}\left(\left\{ |s| \subset |K| \mid s \in K \right\} \right).$$

Recordemos que por definición,

$$\left(\mathcal{T}_K\right)_{|s| \subset |K|} = \mathcal{T}_s. \qquad \text{(cf. Proposición A.5.3)}$$

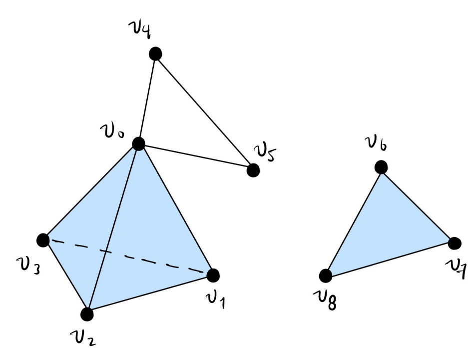
Observación 1.3.18
Si K es un complejo simplicial, entonces $|K|$ satisface las siguientes propiedades.

- Hay un subespacio de $|K|$ que identificamos naturalmente con $V(K)$. Es decir, consideramos a $V(K)$ como un subconjunto de $|K|$ (cf. Observación 1.3.8)
- Para cada n-simplejo $\{v_0, \ldots, v_n\} \in K$ hay un subespacio de $|K|$ homeomorfo a Δ^n y el homeomorfismo satisface $e_i^{n+1} \mapsto v_i$ (cf. Lema 1.3.14).

Por ejemplo, si $v_0, \ldots, v_8$ son 9 elementos arbitrarios y

$$K := \left\{ \mathcal{P}(\{v_0, v_1, v_2, v_3\}), \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_0, v_4\}, \{v_0, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \mathcal{P}(\{v_6, v_7, v_8\}) \right\} \setminus \{\varnothing\},$$

entonces podemos dibujar a $|K|$ de la siguiente manera:



[1] Hay que tener cuidado de no confundir esta topología con $\mathcal{T}_{d_K}$, la topología métrica inducida por d_K.

Corolario 1.3.19
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $v_0, \ldots, v_n$ son elementos arbitrarios distintos. Si $K = \mathcal{P}\left(\{v_0, \ldots, v_n\}\right) \setminus \{\varnothing\}$, entonces $|K|$ es homeomorfo a Δ^n.

Demostración. Consideremos el simplejo cerrado $\left|\{v_0, \ldots, v_n\}\right| \subset |K|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\{v_0, \ldots, v_n\}\right| &= \left\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset \{v_0, \ldots, v_n\}\right\} && \text{(por definición de simplejo cerrado)}\\
&= \left\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset V(K)\right\} && \text{(pues } V(K) = \{v_0, \ldots, v_n\})\\
&= |K|. && \text{(pues } \operatorname{supp}(\alpha) \subset V(K) \text{ para todo } \alpha \in |K|)
\end{aligned}$$

Usando esto y el Lema 1.3.14 obtenemos lo deseado. □

Proposición 1.3.20
Supongamos que K es un complejo simplicial y que X es un espacio topológico. Si $f : |K| \to X$ es una función, entonces

$$f \text{ es continua } \iff f|_{|s|} : \left(|s|, \mathcal{T}_s\right) \to X \text{ es continua para todo } s \in K.$$

Demostración. Este es un caso particular de la Proposición A.5.4. □

Proposición 1.3.21
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que $f : |K| \to |K'|$ es una función. Si para todo $s \in K$ existe $s' \in K'$ tal que $f(|s|) \subset |s'|$, entonces

$$f \text{ es continua } \iff f|_{|s|} : (|s|, \mathcal{T}_s) \to (|s'|, \mathcal{T}_{s'}) \text{ es continua para todo } s \in K.$$

En particular (por el Criterio $\epsilon - \delta$), f es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) < \epsilon\right). \tag{1.16}$$

Demostración. Este es un caso particular de la Proposición A.5.5. □

Observación 1.3.22
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales, que $f : |K| \to |K'|$ es continua, y que para todo $s \in K$ existe $s' \in K'$ tal que $f(|s|) \subset |s'|$. Entonces

$$f(\alpha) \in |s'| \text{ para todo } \alpha \in s$$

o equivalentemente,

$$\operatorname{supp}\left(f(\alpha)\right) \subset s' \text{ para todo } \alpha \in |s|. \tag{1.17}$$

Por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in |s|$

$$\begin{aligned}
d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) &= \sqrt{\sum_{v' \in V(K')} \left(f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right)^2} && \text{(por definición)}\\
&= \sqrt{\sum_{v' \in s'} \left(f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right)^2} && \text{(por (1.17))}
\end{aligned}$$

Por otro lado, como para todo $v' \in s'$

$$\left|f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right| = \sqrt{\left(f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{v' \in s'} \left(f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right)^2},$$

entonces (1.16) implica que para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \beta \in |s| \left(d(\alpha, \beta) < \delta \implies \left|f(\alpha)(v') - f(\beta)(v')\right| < \epsilon \text{ para todo } v' \in s'\right).$$

Esto sera muy útil en la demostración de uno de los resultados más importantes de esta sección.

Definición 1.3.23 (Simplejo abierto)
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo $s \in K$ definimos

$$\langle s \rangle \coloneqq \big\{ \alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) = s \big\}$$

y decimos que $\langle s \rangle$ es el *simplejo abierto generado por s.*

Observación 1.3.24
Supongamos que K es un complejo simplicial y que $s \in K$. De manera análoga a el Lema 1.3.14, se puede demostrar que si s es un q-simplejo, entonces $\langle s \rangle$ es homeomorfo a $\operatorname{int}(\Delta^q)$.

Por otro lado, si $\dot{s} = \{s' \in K \mid s' \subsetneqq s\}$ (cf. Ejemplo 1.3.3), entonces se puede demostrar que $|\dot{s}|$ es homeomorfo a $\partial(\Delta^q)$ y que

$$\langle s \rangle = |s| - |\dot{s}|.$$

Cabe recalcar que podemos describir a $\langle s \rangle$ como el conjunto de las funciones de todos los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in (0, 1].$$

En palabras, ninguno de los coeficientes es 0. En contraste, podemos describir a $|\dot{s}|$ como el como el conjunto de las funciones de todos los elementos de $|K|$ que son de la forma

$$t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \text{ con } t_0, \ldots, t_q \in [0, 1] \text{ y } t_i = 0 \text{ para algún } i \in \{0, \ldots, q\}.$$

Observación 1.3.25
Supongamos que K es un complejo simplicial.

- Por definición, $\alpha \in \big\langle \operatorname{supp}(\alpha) \big\rangle$ para todo $\alpha \in |K|$. Usando esto se puede demostrar que todo elemento de $|K|$ pertenece a un único simplejo abierto en $|K|$. Por lo tanto, *los simplejos abiertos en $|K|$ forman una partición de $|K|$*, es decir, $|K|$ es igual a la unión disjunta de los simplejos abiertos en $|K|$.

- Supongamos que $s \in K$. Como $|\dot{s}|$ es cerrado en $|s|$ (cf. Lema 1.3.15) y $\langle s \rangle = |s| - |\dot{s}|$, entonces $\langle s \rangle$ es abierto en $|s|$.

  En contraste, veamos que $\langle s \rangle$ no necesariamente es abierto en $|K|$. Supongamos que v_0, v_1, v_2 son tres elementos arbitrarios y distintos, que $K = \mathcal{P}\big(\{v_0, v_1, v_2\}\big) \setminus \varnothing$, y que $s = \{v_0, v_1\}$. Veamos que $\langle s \rangle$ no es abierto en $|K|$. Específicamente, veamos que existe $s^* \in K$ tal que $\langle s \rangle \cap |s^*|$ no es abierto en $|s^*|$. Consideremos $s^* \coloneqq \{v_0, v_1, v_2\}$. Entonces,

  $$|s^*| = \big\{ \alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \subset \{v_0, v_1, v_2\} \big\} = |K|$$

  y por lo tanto, $\langle s \rangle \subset |s^*|$ o equivalentemente, $\langle s \rangle \cap |s^*| = \langle s \rangle$. Por eso, en lo que sigue veremos que $\langle s \rangle$ no es abierto en $|s^*|$. Consideremos

  $$\alpha \coloneqq \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} v_1 \in \langle s \rangle.$$

  Veamos que $B_\epsilon^{d_K}(\alpha) \not\subset \langle s \rangle$ para todo $\epsilon \in (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$. Supongamos que $\epsilon \in (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ y denotemos

  $$\beta \coloneqq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right) v_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right) v_1 + \left(2 \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right) \right) v_2 \in |K|.$$

  Como $v_2 \in \operatorname{supp}(\beta)$, entonces $\beta \notin \langle s \rangle$ y usando (1.9) se puede demostrar que

  $$d_K(\alpha, \beta) = \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right)^2} = \sqrt{6 \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{6}} \right)^2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

  Por lo tanto, $B_\epsilon^{d_K}(\alpha) \not\subset \langle s \rangle$ para todo $\epsilon \in (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$. Como $B_r^{d_K}(x) \subset B_s^{d_K}(x)$ si $r < s$, lo anterior implica que $B_\epsilon^{d_K}(\alpha) \not\subset \langle s \rangle$ para todo $\epsilon > 0$ y por lo tanto, $\langle s \rangle$ no es abierto en $|K|$.

El objetivo del material a continuación es demostrar la Proposición 1.3.36. Por eso, algunos de los resultados a continuación podrían parecer desmotivados o fuera de lugar.

Lema 1.3.26
Supongamos que K es un complejo simplicial y que A es un subconjunto de $|K|$. Para todo $s \in K$ tal que $A \cap \langle s \rangle \neq \varnothing$ escojamos una única $\alpha_s \in A \cap \langle s \rangle$. Si

$$\mathfrak{D}(A) \coloneqq \{\alpha_s\}_{A \cap \langle s \rangle \neq \varnothing},$$

entonces $\mathfrak{D}(A)$ es discreto en $|K|$ (cf. Definición A.1.2).

Demostración. Primero, veamos que $\mathfrak{D}(A) \cap |s|$ es finito para todo $s \in K$. Supongamos que $s \in K$. Como $\alpha_s \in \langle s \rangle$, entonces $s = \operatorname{supp}(\alpha_s)$ y por lo tanto, para todo $s, s' \in K$

$$\alpha_s \in |s'| \iff \operatorname{supp}(\alpha_s) \subset s' \iff s \subset s'. \tag{1.18}$$

Como todo $s' \in K$ es finito, (1.18) implica que cualquier simplejo cerrado contiene a lo más una cantidad finita de α_s's. En particular, $\mathfrak{D}(A) \cap |s|$ es finito.

Ahora sí, veamos que $\mathfrak{D}(A)$ es discreto en $|K|$. Específicamente, veamos que todo subconjunto de $\mathfrak{D}(A)$ es cerrado en $|K|$. Supongamos que $B \subset \mathfrak{D}(A)$. Como $\mathfrak{D}(A) \cap |s|$ es finito para todo $s \in K$, entonces $B \cap |s|$ es finito para todo $s \in K$. Además, como (I) $|s|$ es homeomorfo a $\Delta^{\dim s}$ (cf. Lema 1.3.14) y (II) los subconjuntos finitos son cerrados en $\Delta^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ (cf. Corolario A.3.10), entonces lo anterior implica que $B \cap |s|$ es cerrado en $|s|$ para todo $s \in K$ o equivalentemente, que B es cerrado en $|K|$. ☐

Lema 1.3.27
Supongamos que K es un complejo simplicial. Entonces todo subconjunto compacto de $|K|$ está contenido en una unión finita de simplejos abiertos.

Demostración. Supongamos que $C \subset |K|$ es compacto. Como los conjuntos compactos no contienen ningún subconjunto discreto infinito (cf. Proposición A.1.5) entonces el Lema 1.3.26 implica que $\mathfrak{D}(C)$ es finito. Usando esto y la definición de $\mathfrak{D}(C)$ se puede demostrar que solo hay una cantidad finita de simplejos abiertos que intersectan a C. Como los simplejos abiertos forman una partición de $|K|$ (cf. Observación 1.3.25), lo anterior implica lo deseado. ☐

Definición 1.3.28
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo subconjunto A de K definimos

$$|A|_K \coloneqq \big\{\alpha \in |K| \mid \operatorname{supp}(\alpha) \in A\big\}.$$

Si A es un subcomplejo de K, se puede demostrar que $|A|_K$ (con la topología subespacio inducida por $|K|$) es homeomorfo a $|A|$, la realización geométrica de A.

Proposición 1.3.29
Supongamos que K es un complejo simplicial. Si $\big\{L_j\big\}_{j \in J}$ es una familia de subcomplejos de K, entonces

$$\bigcup_{j \in J} |L_j|_K = \left|\bigcup_{j \in J} L_j\right|_K \quad \text{y} \quad \bigcap_{j \in J} |L_j|_K = \left|\bigcap_{j \in J} L_j\right|_K.$$

Demostración. Veamos que $\bigcup_{j \in J} |L_j|_K = |\bigcup_{j \in J} L_j|_K$, la demostración de la otra igualdad es análoga. Si $\alpha \in |K|$, entonces

$$\alpha \in \bigcup_{j \in J} |L_j|_K \iff \exists j \in J\,\big(\alpha \in |L_j|_K\big) \iff \exists j \in J\,\big(\operatorname{supp}(\alpha) \in L_j\big) \iff \operatorname{supp}(\alpha) \in \bigcup_{j \in J} L_j \iff \alpha \in \left|\bigcup_{j \in J} L_j\right|_K.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{j \in J} |L_j|_K = \left|\bigcup_{j \in J} L_j\right|_K$. ☐

Proposición 1.3.30
Supongamos que K es un complejo simplicial. Si L es un subcomplejo de K, entonces $|L|_K$ es un subconjunto cerrado de $|K|$. En particular (por la Proposición A.1.7), si L, L' son subcomplejos de K tales que $L' \subset L$, entonces $|L'|_K$ es cerrado en $|L|_K$.

Demostración. Recordemos que $|L|_K$ es cerrado en $|K|$ si y solo si $|L|_K \cap |s|$ es cerrado en $|s|$ para todo $s \in K$. Por eso, supongamos que $s \in K$ es fijo y que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una sucesión en $|L|_K \cap |s|$ que converge a $\alpha \in |s|$. Entonces

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall n \geq N \ \left(d_K\left(\alpha_n, \alpha\right) < \epsilon\right). \tag{1.19}$$

Por otro lado, para todo $v \in V(K)$

$$d_K\left(\alpha_n, \alpha\right) = \sum_{v \in V(K)} \sqrt{\left(\alpha_n(v) - \alpha(v)\right)^2} \geq \sqrt{\left(\alpha_n(v) - \alpha(v)\right)^2} = |\alpha_n(v) - \alpha(v)| \tag{1.20}$$

Juntando (1.19) y (1.20) obtenemos que para todo $v \in V(K)$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall n \geq N \left(|\alpha_n(v) - \alpha(v)| < \epsilon\right).$$

Equivalentemente, para todo $v \in V(K)$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n(v) = \alpha(v). \tag{1.21}$$

En lo que sigue, veremos que $\mathrm{supp}(\alpha) \in L$. Supongamos que $v \in \mathrm{supp}(\alpha)$. Entonces $\alpha(v) \neq 0$ y por lo tanto, (1.21) implica que existe $N_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha_n(v) \neq 0$ para todo $n \geq N_v$. Equivalentemente,

$$v \in \mathrm{supp}(\alpha_n) \text{ para todo } n \geq N_v. \tag{1.22}$$

Como $\mathrm{supp}(\alpha)$ es finito, entonces el número

$$N_\alpha = \max_{v \in \mathrm{supp}(\alpha)} N_v$$

está bien definido y en particular (por (1.22)), $v \in \mathrm{supp}(\alpha_{N_\alpha})$.

Como v es un elemento arbitrario de $\mathrm{supp}(\alpha)$, acabamos de demostrar que

$$\mathrm{supp}(\alpha) \subset \mathrm{supp}(\alpha_{N_\alpha}) \tag{1.23}$$

Más aún, como $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una sucesión en $|L|_K \cap |s|$, entonces (en particular) $\alpha_{N_\alpha} \in |L|_K$ o equivalentemente, $\mathrm{supp}(\alpha_{N_\alpha}) \in L$. Juntando esto con (1.23) (y el hecho de que L es un subcomplejo) obtenemos que $\mathrm{supp}(\alpha) \in L$ o equivalentemente, que $\alpha \in |L|_K$; y como ya sabíamos que $\alpha \in |s|$ (por hipótesis), entonces $\alpha \in |L|_K \cap |s|$.

En resumen, el límite de toda sucesión convergente en $|L|_K \cap |s|$ pertenece a $|L|_K \cap |s|$ y por lo tanto, $|L|_K \cap |s|$ es cerrado en $|s|$ (cf. Proposición A.3.9). □

Corolario 1.3.31
Supongamos que K es un complejo simplicial, que $\mathcal{T}_K$ es la topología usual sobre $|K|$, y consideremos a la siguiente familia de subespacios de $(|K|, \mathcal{T}_K)$.

$$\mathfrak{U} := \left\{ \left(|L|_K, (\mathcal{T}_K)_{|L|_K \subset |K|}\right) \mid L \text{ es un subcomplejo finito de } K \right\}$$

Entonces $\mathfrak{U}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1 y en particular, (por el Corolario A.5.7) la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ está bien definida en $|K|$.

Demostración. Usando las Proposiciones 1.3.29 y 1.3.30, obtenemos que para cualesquiera L_1, L_2 subcomplejos finitos de K,

$$|L_1|_K \cap |L_2|_K \text{ es cerrado en } |L_1|_K \text{ y } |L_2|_K.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{U}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. □

Lema 1.3.32
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo B subconjunto compacto de $|K|$ existe un L_B subcomplejo finito de K tal que $B \subset |L_B|_K$.

Demostración. Supongamos que B es un subconjunto compacto de $|K|$. Por el Lema 1.3.27, B está contenido en una unión finita de simplejos abiertos. Es decir, existen $s_1, \ldots, s_n \in K$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \langle s_i \rangle$. Definimos $L_B := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{s_i}$ (cf. Ejemplo 1.3.3). Entonces

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \langle s_i \rangle \subset \bigcup_{i=1}^{n} |\overline{s_i}|_K = \left| \bigcup_{i=1}^{n} \overline{s_i} \right|_K = |L_B| \tag{1.24}$$

donde la segunda inclusión se cumple porque $\langle s \rangle \subset |\overline{s}|_K$ para todo $s \in K$ y la primera igualdad se cumple por la Proposición 1.3.29. Como $\overline{s}$ es un subcomplejo finito para todo $s \in K$, entonces L_B es finito y por lo tanto, (1.24) implica lo deseado. ☐

Notación 1.3.33
Denotamos por I al intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ que tiene extremos 0 y 1. Específicamente, $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. En lo que sigue, siempre consideramos a I como subespacio de $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Lema 1.3.34
Supongamos que K es un complejo simplicial. Para todo C subconjunto compacto de $|K| \times I$ existe un subcomplejo finito L de K tal que $C \subset |L|_K \times I$.

Demostración. Supongamos que $C \subset |K| \times I$ es compacto y que $\pi : |K| \times I \to |K|$ es tal que $(\alpha, t) \mapsto \alpha$. Entonces $C \subset \pi(C) \times I$ y $\pi(C)$ es compacto porque es la imagen de un compacto bajo una función continua (cf. Proposición A.4.2). Si usamos la notación del Lema 1.3.32 y definimos $L := L_{\pi(C)}$, entonces por definición de L_B

$$\pi(C) \times I \subset \left| L_{\pi(C)} \right|_K \times I = |L|_K \times I.$$

Juntando esto con la inclusión $C \subset \pi(C) \times I$ obtenemos

$$C \subset |L|_K \times I. \tag{1.25}$$

Como el producto de compactos es compacto (cf. Lema A.4.5), entonces (1.25) implica lo deseado. ☐

Lema 1.3.35
Supongamos que K es un complejo simplicial. Entonces $|K| \times I$ es compactamente generado (cf. Definición A.6.3).

Demostración. Primero veamos que $|K|$ es localmente compacto (cf. Definición A.6.1). Notemos que

$$\alpha \in |\operatorname{supp}(\alpha)| \subset |K| \text{ para todo } \alpha \in |K|. \tag{1.26}$$

Como $|\operatorname{supp}(\alpha)|$ es homeomorfo a $\Delta^{\dim \operatorname{supp}(\alpha)}$ (cf. Lema 1.3.14) y Δ^n es compacto (por el teorema de Heine-Borel), entonces (1.26) implica que todo elemento de $|K|$ pertenece a un compacto en $|K|$, es decir, $|K|$ es localmente compacto. Además, como (I) I es localmente compacto, (II) el producto de dos espacios topológicos localmente compactos es localmente compacto (cf. Lema A.6.2), y (III) localmente compacto implica localmente generado (cf. Lema A.6.4), entonces lo anterior implica lo deseado. ☐

Proposición 1.3.36
Supongamos que K es un complejo simplicial, que $\mathcal{T}_{|K| \times I}$ es la topología caja sobre $|K| \times I$ (estamos considerando a $|K|$ con la topología $\mathcal{T}_K$ y a I con la topología subespacio inducida por $\mathbb{R}$), y consideremos la siguiente familia de subespacios de $\left(|K| \times I, \mathcal{T}_{|K| \times I}\right)$.

$$\mathfrak{V} := \left\{ \left(|L|_K \times I, \left(\mathcal{T}_{|K| \times I}\right)_{|L|_K \times I \subset |K| \times I} \right) \mid L \text{ es un subcomplejo finito de } K \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{V}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1 y en particular, (por el Corolario A.5.7) la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{V})$ está bien definida en $|K| \times I$. Más aún, $\mathcal{T}_{|K|\times I} = \mathcal{T}(\mathfrak{V})$, es decir, $\mathcal{T}_{|K|\times I}$ es coherente con $\mathfrak{V}$.

Demostración. Juntando el Corolario 1.3.31 y la Proposición A.5.11 obtenemos que $\mathfrak{V}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Veamos que $\mathcal{T}_{|K|\times I}$ es coherente con $\mathfrak{V}$. Por la Proposición A.5.10 basta probar que para todo $A \subset |K| \times I$

$$\begin{aligned} A \cap \big(|L|_K \times I\big) \text{ es cerrado en } |L|_K \times I, \text{ para todo } L \text{ subcomplejo finito de } K \\ \implies A \text{ es cerrado en } |K| \times I. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Más aún, como $|K| \times I$ es compactamente generado, (1.27) es equivalente a

$$\begin{aligned} A \cap \big(|L|_K \times I\big) \text{ es cerrado en } |L|_K \times I, \text{ para todo } L \text{ subcomplejo finito de } K \\ \implies A \cap C \text{ es cerrado en } C \text{ para todo } C \text{ compacto en } |K| \times I. \end{aligned}$$

Por eso, supongamos que $A \subset |K| \times I$ es tal que $A \cap \big(|L|_K \times I\big)$ es cerrado en $|L|_K \times I$ para todo L subcomplejo finito de K y supongamos que C es compacto en $|K| \times I$. Queremos ver que $A \cap C$ es cerrado en C. Equivalentemente (como C tiene la topología subespacio inducida por X), queremos encontrar un subconjunto cerrado B de $|K| \times I$ tal que $A \cap C = B \cap C$.

Para esto, recordemos que como C es compacto, entonces (por el Lema 1.3.34) C está contenido en un $|L_C|_K \times I$ para algún L_C subcomplejo finito. Veamos que $B \coloneqq A \cap \big(|L_C|_K \times I\big)$ cumple lo deseado. Por hipótesis $A \cap \big(|L_C|_K \times I\big)$ es cerrado en $|L_C|_K \times I$, y como $|L_C|_K \times I$ es cerrado en $|K| \times I$, entonces $A \cap \big(|L|_K \times I\big)$ también es cerrado en $|K| \times I$ (cf. Proposición A.1.7). Finalmente, notemos que

$$A \cap C = A \cap \Big(\big(|L_C|_K \times I\big) \cap C\Big) = \Big(A \cap \big(|L_C|_K \times I\big)\Big) \cap C = B \cap C.$$

donde la primera igualdad es consecuencia de que $C \subset |L_C|_K \times I$. Por lo tanto, $A \cap C$ es cerrado en C para todo C compacto en $|K| \times I$. ☐

Proposición 1.3.37
Supongamos que K es un complejo simplicial, que $\mathcal{T}_{|K|\times I}$ es la topología caja sobre $|K| \times I$ (estamos considerando a $|K|$ con la topología $\mathcal{T}_K$ y a I con la topología subespacio inducida por $\mathbb{R}$), y consideremos la siguiente familia de subespacios de $\Big(|K| \times I, \mathcal{T}_{|K|\times I}\Big)$.

$$\mathfrak{W} \coloneqq \left\{ \left(|s| \times I, \Big(\mathcal{T}_{|K|\times I}\Big)_{|s|\times I \subset |K| \times I} \right) \mid s \in K \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{W}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1 y en particular, (por el Corolario A.5.7) la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{W})$ está bien definida en $|K| \times I$. Más aún, si denotamos $\mathfrak{V}$ de la misma manera que en la Proposición 1.3.36, entonces $\mathcal{T}(\mathfrak{W}) = \mathcal{T}(\mathfrak{V})$ y por lo tanto, (por la Proposición 1.3.36) $\mathcal{T}_{|K|\times I}$ es coherente con $\mathfrak{W}$.

Demostración. Juntando el Lema 1.3.16 y y la Proposición A.5.11 obtenemos que $\mathfrak{V}$ satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Para demostrar $\mathcal{T}(\mathfrak{W}) = \mathcal{T}(\mathfrak{V})$, veamos que para todo $A \subset |K| \times I$

$$\begin{aligned} A \cap \big(|L|_K \times I\big) \text{ es cerrado en } |L|_K \times I \text{ para todo } L \text{ subcomplejo finito } \iff \\ A \cap \big(|s| \times I\big) \text{ es cerrado en } |s| \times I \text{ para todo } s \in K \end{aligned} \tag{1.28}$$

$\implies$) Supongamos el lado izquierdo de (1.28). Más aún, supongamos que $s \in K$ y consideremos el siguiente subcomplejo finito de K

$$\overline{s} = \{s' \in K \mid s' \subset s\}. \qquad \text{(cf. Ejemplo 1.3.3)}$$

Entonces para todo $\alpha \in |K|$

$$\alpha \in |\overline{s}|_K \iff \operatorname{supp}(\alpha) \in \overline{s} \iff \operatorname{supp}(\alpha) \subset s \iff \alpha \in |s|.$$

Por lo tanto $|\overline{s}|_K = |s|$. Más aún, por la hipótesis, $A \cap \big(|\overline{s}|_K \times I\big)$ es cerrado en $|\overline{s}|_K \times I$. Sustituyendo $|\overline{s}|_K = |s|$ en la oración anterior, obtenemos que $A \cap \big(|s| \times I\big)$ es cerrado en $|s| \times I$.
$\Longleftarrow$) Supongamos el lado derecho de (1.28). Más aún, supongamos que L es un subcomplejo finito de K y denotemos $L = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Veamos que

$$|L|_K = \bigcup_{i=1}^{n} |s_i|. \tag{1.29}$$

$\subset$) Supongamos que $\alpha \in |L|_K$. Entonces $\operatorname{supp}(\alpha) \in L$. En particular, $\operatorname{supp}(\alpha) = s_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto $\alpha \in |s_j|$.
$\supset$) Supongamos que $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} |s_i|$, Entonces $\exists j = 1, \ldots, n$ tal que $\operatorname{supp}(\alpha) \subset s_j \in L$. Como L es subcomplejo, lo anterior implica que $\operatorname{supp}(\alpha) \in L$. Es decir, $\alpha \in |L|_K$. Por lo tanto, $|L|_K = \bigcup_{i=1}^{n} |s_i|$.

Ahora sí, veamos que $A \cap \big(|L|_K \times I\big)$ es cerrado en $|L|_K \times I$. Usando (1.29) obtenemos

$$A \cap \big(|L|_K \times I\big) = A \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} |s_i|\right) \times I\right) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \big(|s_i| \times I\big)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(A \cap \big(|s_i| \times I\big)\Big). \tag{1.30}$$

Por otro lado, supongamos que $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como (por hipótesis) $A \cap \big(|s_i| \times I\big)$ es cerrado en $|s_i| \times I$ y (se puede demostrar)[2] que $|s_i| \times I$ es cerrado en $|L|_K \times I$, entonces $A \cap \big(|s_i| \times I\big)$ es cerrado en $|L|_K \times I$. Usando esto y (1.30) obtenemos que $A \cap \big(|L|_K \times I\big)$ es cerrado en $|L|_K \times I$.

Por lo tanto, acabamos de demostrar (1.28) o equivalentemente, $\mathcal{T}(\mathfrak{W}) = \mathcal{T}(\mathfrak{V})$. □

Corolario 1.3.38
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que $f : |K| \times I \to |K'|$ es una función.

1. Para todo $s \in K$ consideremos la siguiente métrica sobre $|K| \times I$.

$$d_{|s| \times I}\big((\alpha, t), (\beta, r)\big) := d_K(\alpha, \beta) + |t - r| \text{ para todo } (\alpha, t), (\beta, r) \in |s| \times I.$$

   Entonces para todo $s \in K$

$$\Big(\mathcal{T}_{|K| \times I}\Big)_{|s| \times I \subset |K| \times I} = \mathcal{T}_{d_{|s| \times I}}.$$

2. Si para todo $s \in K$ existe $s' \in K$ tal que $f(|s| \times I) \subset |s'|$, entonces

$$f \text{ es continua} \iff f_{|s| \times I} : (|s| \times I, \mathcal{T}_{d_{|s| \times I}}) \to (|s'|, \mathcal{T}_{s'}) \text{ es continua para todo } s \in K.$$

   En particular, por el Criterio $\epsilon - \delta$, f es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $(\alpha, t) \in |s| \times I$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (\beta, r) \in |s| \times I \left(d_{|s| \times I}\big((\alpha, t), (\beta, r)\big) < \delta \implies d_{K'}\big(f(\alpha, t), f(\beta, r)\big) < \epsilon \right).$$

Demostración.

1. Denotemos por $\mathcal{T}_{|s| \times I}$ a la topología caja sobre $|s| \times I$ donde estamos considerando a $|s|$ como subespacio de $|K|$, es decir, con la topología $\mathcal{T}_s$. Es decir, $U \in \mathcal{T}_{|s| \times I}$ si y solo si

$$\forall u \in U \ \exists V_u \in \mathcal{T}_s \ \exists W_u \in \mathcal{T}_I \ (u \in V_u \times W_u \subset U).$$

[2] Usando (I) que $|s|$ es cerrado en $|K|$ para todo $s \in K$, (II) que $|L|_K$ es cerrado en $|K|$ para todo L subcomplejo de K y (III) la Proposición A.1.7.

Entonces, por la Proposición A.4.7

$$\left(\mathcal{T}_{|K|\times I}\right)_{|s|\times I\subset |K|\times I} = \mathcal{T}_{|s|\times I}. \tag{1.31}$$

Por otro lado, como $|s|$ e I son espacios métricos, en la Proposición A.4.6 demostramos que la métrica dada por

$$d_{|s|\times I}\left((\alpha,t),(\beta,r)\right) = d_K(\alpha,\beta) + |t-r| \text{ para todo } (\alpha,t),(\beta,r)\in |s|\times I$$

es tal que

$$\mathcal{T}_{d_{|s|\times I}} = \mathcal{T}_{|s|\times I}. \tag{1.32}$$

Juntando (1.31) y (1.32) obtenemos lo deseado.

2. Como $\mathcal{T}_{|K|\times I}$ es coherente con

$$\left\{\left(|s|\times I, \left(\mathcal{T}_{|K|\times I}\right)_{|s|\times I\subset |K|\times I}\right) \mid s\in K\right\} \qquad \text{(cf. Proposición 1.3.37)}$$

y $\left(\mathcal{T}_{|K|\times I}\right)_{|s|\times I\subset |K|\times I} = \mathcal{T}_{d_{|s|\times I}}$ por el inciso anterior, entonces este es un caso particular de la Proposición A.5.5.

□

Definición 1.3.39 (La realización geométrica de una función simplicial)
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que f es una función simplicial de K a K'. Definimos

$$\begin{aligned}|f| : |K| &\to |K'|\\ \alpha &\mapsto \left(v' \xmapsto{|f|(\alpha)} \sum_{v\in f^{-1}(v')} \alpha(v)\right)\end{aligned}$$

y decimos que $|f|$ es la *realización geométrica de* f. Usando la Notación 1.3.7, también podemos escribir

$$|f|(\alpha) = \sum_{v'\in V(K')} \left(\sum_{v\in f^{-1}(v')} \alpha(v)\right) v'.$$

Observación 1.3.40
Antes de empezar, recordemos que si K es un complejo simplicial, hacemos la identificación

$$V(K) = \{v \in |K| \mid v \in V(K)\}$$

donde $v\in|K|$ es la función de $V(K)$ en $[0,1]$ que manda v al 1 y todo lo demás al 0, es decir,

$$v(v) = 1 \quad \text{y} \quad v(w) = 0 \text{ para todo } w \neq v.$$

Ahora sí, supongamos que K, K' son complejos simpliciales, que $f : V(K)\to V(K')$ es una función simplicial de K a K', y consideremos $|f|$ la realización geométrica de f. Veamos que la restricción de $|f|$ a $V(K)$ es simplemente f, es decir,

$$|f| \restriction_{V(K)} = f.$$

Por definición,

$$\left(|f|(u)\right)(f(u)) = \sum_{v\in f^{-1}(f(u))} u(v) = 1 \tag{1.33}$$

donde la última igualdad se cumple porque $u \in f^{-1}(f(u))$, $u(u) = 1$, y $u(v) = 0$ para todo $v \neq u$. Por otro lado, si $v' \neq f(u)$, entonces

$$\big(|f|(u)\big)\,(v') = \sum_{v \in f^{-1}(v')} u(v) = 0 \tag{1.34}$$

donde la última igualdad se cumple porque $u \notin f^{-1}(v')$ (pues $v' \neq f(u)$) y $u(v) = 0$ para todo $v \neq u$. Juntando (1.33) y (1.34) obtenemos que $|f|(u) = f(u)$ para todo $u \in V(K)$, es decir, $|f| \restriction_{V(K)} = f$.

Ejemplo 1.3.41
Supongamos que K es un complejo simplicial. Entonces

- Por definición,

$$\begin{aligned} |\operatorname{id}_K| : |K| &\to |K| \\ \alpha &\mapsto \left(v' \xmapsto{|\operatorname{id}_K|(\alpha)} \sum_{v \in \operatorname{id}_K^{-1}(v')} \alpha(v) \right). \end{aligned}$$

  Pero como $\operatorname{id}_K^{-1}(v') = \{v'\}$, entonces

$$\sum_{v \in \operatorname{id}_K^{-1}(v')} \alpha(v) = \alpha(v')$$

  y por lo tanto, $|\operatorname{id}_K| = \operatorname{id}_{|K|}$. En otras palabras, *la realización geométrica de la identidad es la identidad de la realización geométrica.*

- Supongamos que $f : V(K) \to V(K')$ es constante y que $f(x) = y_0$ (con y_0 fijo). Por definición,

$$\begin{aligned} |f| : |K| &\to |K'| \\ \alpha &\mapsto \left(v' \xmapsto{|f|(\alpha)} \sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) \right). \end{aligned}$$

  Pero como

$$f^{-1}(v') = \begin{cases} K & \text{si } v' = y_0 \\ \varnothing & \text{si } v' \neq y_0 \end{cases},$$

  entonces

$$\sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) = \begin{cases} \sum_{v \in K} \alpha(v) = 1 & \text{si } v' = y_0 \\ 0 & \text{si } v' \neq y_0 \end{cases},$$

  y por lo tanto, $|f| = y_0 \in |K|$. En otras palabras, *la realización geométrica de una función constante es una función constante.*

- Supongamos que $f : V(K) \to V(K')$ es una función simplicial de K a K' y que $\{v_0, \dots, v_q\} \in K$. Si f es inyectiva, entonces

$$|f|\left(t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q\right) = t_0 f(v_0) + \cdots + t_q f(v_q) \text{ para todo } t_0 v_0 + \cdots + t_q v_q \in |s|.$$

  Si f no es inyectiva, la situación es un poco más complicada. Por ejemplo, supongamos que $f(v_i) = f(v_j)$ con $i \neq j$ pero que el resto de las $f(v_k)$ son distintas. Entonces

$$t_0 f(v_0) + \cdots + t_q f(v_q) = (t_i + t_j) f(v_i) + \sum_{k \neq i,j} t_k f(v_k).$$

Proposición 1.3.42
Supongamos que K, K', K'' son complejos simpliciales. Si f es una función simplicial de K a K' y g es una función simplicial de K' a K'', entonces

$$|g \circ f| = |g| \circ |f|.$$

Demostración. Supongamos que $\alpha \in |K|$ y $v' \in V(K')$. Entonces

$$\begin{aligned} \big(|g| \circ |f|(\alpha)\big)(v'') &= \sum_{v' \in g^{-1}(v'')} |f|(\alpha)(v') \\ &= \sum_{v' \in g^{-1}(v'')} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) \right) \\ &= \sum_{v \in (g \circ f)^{-1}(v'')} \alpha(v) \\ &= \big(|g \circ f|(\alpha)\big)(v''). \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple porque para todo $v \in V(K)$ y $v'' \in V(K'')$

$$v \in (g \circ f)^{-1}(v'') \iff \exists v' \in V(K') \Big(v \in f^{-1}(v') \ \text{ y } \ v' \in g^{-1}(v'') \Big).$$

□

Lema 1.3.43
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que f es una función simplicial de K a K'. Si $\alpha \in |K|$, entonces

$$\operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \subset f(\operatorname{supp}(\alpha)).$$

Demostración. Supongamos que $v' \in V(K')$. Entonces

$$\begin{aligned} v' \in \operatorname{supp}(|f|(\alpha)) &\implies \sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) = |f|(\alpha)(v') \neq 0 \\ &\implies \alpha(v) \neq 0 \text{ para algún } v \in f^{-1}(v') \\ &\implies v \in \operatorname{supp}(\alpha) \text{ para algún } v \in f^{-1}(v') \\ &\implies v' = f(v) \in f\big(\operatorname{supp}(\alpha)\big). \end{aligned}$$

Es decir, $\operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \subset f(\operatorname{supp}(\alpha))$. □

Lema 1.3.44
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que f es una función simplicial de K a K'. Si $s \in K$, entonces

$$|f|(|s|) \subset |f(s)|.$$

Demostración. Supongamos que $\beta \in |f|(|s|)$. Entonces $\beta = |f|(\alpha)$ para algún $\alpha \in |s|$. Queremos ver que $\beta \in |f(s)|$. Equivalentemente, queremos ver que $\operatorname{supp}(\beta) \subset f(s)$. Por eso, supongamos que $v' \in \operatorname{supp}(\beta)$, es decir, $\beta(v') \neq 0$. Como $\beta(v') = |f|(\alpha)(v') = \sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v)$, entonces existe $v \in f^{-1}(v')$ tal que $\alpha(v) \neq 0$. Es decir, v es tal que $f(v) = v' \in \operatorname{supp}(\beta)$ y $\alpha(v) \neq 0$. Sin embargo, $\alpha \in |s|$ por hipótesis, es decir, $\operatorname{supp}(\alpha) \subset s$. Por lo tanto, v es tal que $f(v) = v'$ y $v \in s$. En particular, $v' \in f(s)$. □

Notación 1.3.45
En lo que sigue, denotamos por $\operatorname{card}(A)$ la cardinalidad de un conjunto A. Hacemos esto porque en algunos argumentos consideraremos la cardinalidad de un simplejo, y la notación usual, $|A|$ podría causar confusión con el simplejo cerrado.

Proposición 1.3.46
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales y que f es una función simplicial de K a K'. Entonces la realización geométrica $|f| : |K| \to |K'|$ es continua.

Demostración. Juntando el Lema 1.3.44 y la Proposición 1.3.21 obtenemos que $|f|$ es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\big(|f|(\alpha), |f|(\beta)\big) < \epsilon \right).$$

Por eso, supongamos que $s \in K$, $\alpha \in |s|$, y $\epsilon > 0$ son fijos. Definimos

$$\delta := \frac{\epsilon}{\operatorname{card}(s)}.$$

Si $\beta \in |s|$ es tal que $d_K(\alpha, \beta) < \delta$, entonces se puede demostrar que

$$|\alpha(v) - \beta(v)| < \delta \text{ para todo } v \in V(K).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d_{K'}\big(|f|(\alpha), |f|(\beta)\big) &= \sqrt{\sum_{v' \in V(K')} \big(|f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\big)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{v' \in f(s)} \big(|f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\big)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{v' \in f(s)} \left(\left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \alpha(v) \right) - \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \beta(v) \right) \right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \big(\alpha(v) - \beta(v)\big) \right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| \right)^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| \right) \right)^2} \\
&= \sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v')} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| \right) \\
&= \sum_{v' \in f(s)} \left(\sum_{v \in f^{-1}(v') \cap s} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| \right) \qquad (1.35) \\
&= \sum_{v \in s} \big|\alpha(v) - \beta(v)\big| \qquad (1.36) \\
&< \sum_{v \in s} \delta \\
&= \sum_{v \in s} \frac{\epsilon}{\operatorname{card}(s)} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

(1.35) se cumple porque si $\left|\alpha(v)-\beta(v)\right| \neq 0$, entonces $\alpha(v) \neq 0$ o $\beta(v) \neq 0$, es decir, $v \in \operatorname{supp}(\alpha) \cup \operatorname{supp}(\beta)$, pero como $\alpha, \beta \in |s|$ por hipótesis, entonces $\operatorname{supp}(\alpha) \cup \operatorname{supp}(\beta) \subset s$ y por lo tanto $v \in s$.
(1.36) se cumple porque s es la unión *disjunta* de todos los $f^{-1}(v') \cap s$ con $v' \in f(s)$. En efecto,

$$s = \bigsqcup_{v' \in f(s)} \{v \in s \mid f(v) = v'\} = \bigsqcup_{v' \in f(s)} f^{-1}(v) \cap s.$$

En resumen, acabamos de demostrar que para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \beta \in |s| \left(d_K(\alpha, \beta) < \delta \implies d_{K'}\left(f(\alpha), f(\beta)\right) < \epsilon \right).$$

Por lo tanto, $|f|$ es continua. $\square$

Observación 1.3.47
Supongamos que K, K' son complejos simpliciales, que f es una función simplicial de K a K', y que $s \in K$. Como $|f| : |K| \to |K'|$ es continua y para todo $s \in K$ existe $s' \in K'$ tal que $|f|(|s|) \subset |s'|$ (nos referimos a $s' = f(s)$), entonces la Observación 1.3.22 implica que para todo $s \in K$ y todo $\alpha \in |s|$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \beta \in |s| \left(d(\alpha, \beta) < \delta \implies \left||f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\right| < \epsilon \text{ para todo } v' \in V(f(s)) \right).$$

Proposición 1.3.48
Supongamos que $f, g : V(K) \to V(K')$ son funciones simpliciales de K a K'. Si $f(s) \cup g(s) \in K'$ para todo $s \in K$, entonces $|f|$ y $|g|$ son homotópicas.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} H : |K| \times I &\to |K'| \\ (\alpha, t) &\mapsto (1-t)|f|(\alpha) + t|g|(\alpha) \end{aligned}$$

Es claro que para todo $\alpha \in |K|$, $H(\alpha, 0) = |f|(\alpha)$ y $H(\alpha, 1) = |g|(\alpha)$. Resta probar que H está bien definida y que es continua.

H está bien definida.
Veamos que $H(\alpha, t) \in |K'|$ para todo $t \in [0,1]$ y $\alpha \in |K|$. Es decir, veamos que $\operatorname{supp}(H(\alpha, t)) \in K'$ y que $\sum_{v' \in V(K')} H(\alpha, t)(v) = 1$ para todo $t \in [0,1]$ y $\alpha \in |K|$. Por eso, supongamos que $t \in [0,1]$ y $\alpha \in |K|$.
Para ver que $\operatorname{supp}(H(\alpha, t)) \in K'$, notemos que si $v' \in \operatorname{supp}(H(\alpha, t))$, entonces

$$(1-t)|f|(\alpha)(v') + t|g|(\alpha)(v') \neq 0. \tag{1.37}$$

En particular, $|f|(\alpha)(v') \neq 0$ o $|g|(\alpha)(v') \neq 0$. Es decir, $v' \in \operatorname{supp}\left(|f|(\alpha)\right)$ o $v' \in \operatorname{supp}\left(|g|(\alpha)\right)$. Por lo tanto, acabamos de demostrar que para todo $t \in [0,1]$ y $\alpha \in |K|$

$$\operatorname{supp}(H(\alpha, t)) \subset \operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \cup \operatorname{supp}(|g|(\alpha)). \tag{1.38}$$

Más aún, como

$$\operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \subset f(\operatorname{supp}(\alpha)) \text{ y } \operatorname{supp}(|g|(\alpha)) \subset g(\operatorname{supp}(\alpha)). \qquad \text{(cf. Lema 1.3.43)}$$

entonces

$$\operatorname{supp}(H(\alpha, t)) \subset f(\operatorname{supp}(\alpha)) \cup g(\operatorname{supp}(\alpha)). \tag{1.39}$$

Además, como $\operatorname{supp}(\alpha) \in K$ (por definición de $\alpha \in |K|$) y $f(s) \cup g(s) \in K'$ para todo $s \in K$ (por hipótesis), entonces $f(\operatorname{supp}(\alpha)) \cup g(\operatorname{supp}(\alpha)) \in K'$. Como K' es simplejo, esto y (1.39) implican que $\operatorname{supp}(H(\alpha, t)) \in K'$.

Para ver que $\sum_{v'\in V(K')} H(\alpha,t)(v) = 1$ consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{v'\in V(K')} H(\alpha,t)(v) &= \sum_{v'\in V(K')} \big((1-t)|f|(\alpha) + t|g|(\alpha)\big)(v) \\
&= \sum_{v'\in V(K')} (1-t)|f|(\alpha)(v) + t|g|(\alpha)(v) \\
&= \sum_{v'\in V(K')} \left\{(1-t)\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')} \alpha(v)\right) + t\left(\sum_{v\in g^{-1}(v')} \alpha(v)\right)\right\} \\
&= (1-t)\sum_{v'\in V(K')}\left(\sum_{v\in f^{-1}(v')} \alpha(v)\right) + t\sum_{v'\in V(K')}\left(\sum_{v\in g^{-1}(v')} \alpha(v)\right) \\
&= (1-t)\sum_{v\in V(K)} \alpha(v) + t\sum_{v\in V(K)} \alpha(v) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donde la penúltima igualdad se cumple porque $V(K)$ es la unión *disjunta* de todos los $f^{-1}(v')$ con $v' \in V(K')$. En efecto,

$$V(K) = \bigsqcup_{v'\in V(K')} \left\{v \mid v \in f^{-1}(v')\right\} = \bigsqcup_{v'\in V(K')} f^{-1}(v').$$

Cabe recalcar que esto es consecuencia únicamente de que f es una función de $V(K)$ en $V(K')$.
En resumen, $\mathrm{supp}(H(\alpha,t)) \in K'$ y $\sum_{v'\in V(K')} H(\alpha,t)(v) = 1$ para todo $t \in [0,1]$ y $\alpha \in |K|$. Es decir, H esta bien definida.

H es continua.
Antes de empezar, veamos que para todo $s \in K$

$$H(|s|\times I) \subset |f(s)\cup g(s)|. \tag{1.40}$$

Supongamos que $(\alpha,t) \in |s|\times I$. En particular, $\alpha \in |s|$ o equivalentemente, $\mathrm{supp}(\alpha) \subset s$. Entonces (1.39) implica

$$\mathrm{supp}(H(\alpha,t)) \subset f(s)\cup g(s),$$

o equivalentemente, $H(\alpha,t) \in |f(s)\cup g(s)|$. Ahora sí, veamos que H es continua. Juntando (1.40) con el inciso (2) del Corolario 1.3.38, obtenemos que H es continua si y solo si para todo $s \in K$ y todo $(\alpha,t) \in |s|\times I$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(\beta,r) \in |s|\times I \left(d_{|s|\times I}\big((\alpha,t),(\beta,r)\big) < \delta \implies d_{K'}\big(H(\alpha,t),H(\beta,r)\big) < \epsilon\right)$$

donde

$$d_{|s|\times I}\big((\alpha,t),(\beta,r)\big) = d_K(\alpha,\beta) + |t-r| \text{ para todo } (\alpha,t),(\beta,r) \in |s|\times I.$$

Por eso, supongamos que $(\alpha,t) \in |s|\times I$ es fijo y que $\epsilon > 0$ es arbitrario. Denotamos

$$\mathcal{I}_s \coloneqq f(s)\cup g(s).$$

Por el Observación 1.3.47, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$d(\alpha,\beta) < \delta_1 \implies \big||f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\big| < \frac{\epsilon}{5\sqrt{\mathrm{card}(\mathcal{I}_s)}} \text{ para todo } v' \in f(s). \tag{1.41}$$

Análogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$d(\alpha, \beta) < \delta_2 \implies d\left(|g|(\alpha), |g|(\beta)\right) < \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}} \text{ para todo } v' \in f(s). \tag{1.42}$$

Ahora sí, sea

$$\delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}}\right\}$$

y supongamos que $(\beta, r) \in |s| \times I$ es tal que

$$\underbrace{d_{|s|\times I}\left((\alpha,t),(\beta,r)\right)}_{d(\alpha,\beta)+|t-r|} < \delta.$$

Entonces

$$d(\alpha, \beta) < \delta \quad \text{y} \quad |t - r| < \delta \tag{1.43}$$

y por lo tanto tenemos la siguiente cadena de desigualdades.

$$\begin{aligned}
&\Big(d_{K'}\left(H(\alpha,t), H(\beta,r)\right)\Big)^2 = \\
&\sum_{v' \in V(K')} \left(H(\alpha,t)(v') - H(\beta,r)(v')\right)^2 = \qquad (1.44)\\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \left(H(\alpha,t)(v') - H(\beta,r)(v')\right)^2 = \\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \left((1-t)|f|(\alpha)(v') + t|g|(\alpha)(v') - (1-r)|f|(\beta)(v') - r|g|(\beta)(v')\right)^2 = \\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \left(|f|(\alpha)(v') - t|f|(\alpha)(v') + t|g|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v') + r|f|(\beta)(v') - r|g|(\beta)(v')\right) = \\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \Big(|f|(\alpha)(v') - t|f|(\alpha)(v') + t|g|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v') + r|f|(\beta)(v') - r|g|(\beta)(v') \; + \\
&\qquad \left(r|f|(\alpha)(v') - r|f|(\alpha)(v')\right) + \left(t|g|(\beta)(v') - t|g|(\beta)(v')\right)\Big)^2 = \\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \Big(\left(|f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\right) + |f|(\alpha)(v')(r-t) + \\
&\qquad t\left(|g|(\alpha)(v') - |g|(\beta)(v')\right) + r\left(|f|(\beta)(v') - |f|(\alpha)(v')\right) + |g|(\beta)(v')(t-r)\Big)^2 \leq \qquad (1.45)\\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \Big(\big||f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\big| + \big||f|(\alpha)(v')(r-t)\big| + \\
&\qquad \Big|t\left(|g|(\alpha)(v') - |g|(\beta)(v')\right)\Big| + \Big|r\left(|f|(\beta)(v') - |f|(\alpha)(v')\right)\Big| + \big||g|(\beta)(v')(t-r)\big|\Big)^2 \leq \qquad (1.46)\\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \Big(\big||f|(\alpha)(v') - |f|(\beta)(v')\big| + \big|(r-t)\big| + \\
&\qquad \Big|\left(|g|(\alpha)(v') - |g|(\beta)(v')\right)\Big| + \Big|\left(|f|(\beta)(v') - |f|(\alpha)(v')\right)\Big| + \big|(t-r)\big|\Big)^2 \leq \qquad (1.47)\\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \left(\frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}} + \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}} + \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}} + \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}} + \frac{\epsilon}{5\sqrt{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)}}\right)^2 = \\
&\sum_{v' \in \mathcal{I}_s} \frac{\epsilon^2}{\operatorname{card}(\mathcal{I}_s)} = \\
&\epsilon^2.
\end{aligned}$$

(1.44) se cumple porque $\operatorname{supp}\big(H(\alpha,t)\big), \operatorname{supp}\big(H(\beta,r)\big) \subset f(s)\cup g(s) = \mathcal{I}_s$ (cf. (1.40)).
(1.45) se cumple porque $(a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
(1.46) se cumple porque los números $|f|(\alpha)(v')(r-t)$, $|t|$, $|r|$, y $|g|(\beta)(v')$ son todos menores o iguales que 1.
(1.47) se cumple por (1.41), (1.42), y (1.43).
Tomando la raíz cuadrada de ambos lados de la cadena de desigualdades obtenemos que

$$d_{K'}\big(H(\alpha,t), H(\beta,r)\big) < \epsilon.$$

En resumen, demostramos que para todo $s \in K$ y todo $(\alpha,t) \in |s| \times I$ se satisface la siguiente condición.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (\beta,r) \in |s|\times I\ \Big(d_{|s|\times I}\big((\alpha,t),(\beta,r)\big) < \delta \implies d_{K'}\big(H(\alpha,t),H(\beta,r)\big) < \epsilon\Big)$$

Por lo tanto, H es continua. □

Proposición 1.3.49
Supongamos que X es un conjunto arbitrario y que K es el complejo simplicial que consiste de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Entonces $|K|$ es contraíble.

Demostración. Antes que nada, notemos que el conjunto de vértices de K es precisamente X, es decir, $V(K) = X$. Por lo tanto, una función simplicial de K a K en realidad es una función con dominio y contradominio igual a X. Ahora bien, supongamos que $x_0 \in X$ está fijo y supongamos que $f : X \to X$ es la función constante x_0. Entonces f es una función simplicial de K a K (cf. Ejemplo 1.3.5) y para todo $s \in K$ se puede demostrar que

$$\mathrm{id}_K(s) \cup f(s) = s \cup \{x_0\} \in K. \tag{1.48}$$

donde la pertenencia se cumple porque K es el complejo simplicial que consiste de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Por la Proposición 1.3.48, entonces (1.48) implica que $|\mathrm{id}_K|$ y $|f|$ son homotópicas. Pero por el (1.3.41), $|\mathrm{id}_K| = \mathrm{id}_{|K|}$ y $|f| = x_0$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{|K|}$ es homotópica a una función constante, es decir, $|K|$ es contraíble. □

1.4. Homología singular

El objetivo de esta sección es definir y estudiar los grupos de homología singular de un espacio topológico. Este concepto es un invariante topológico que será una de las herramientas principales de la demostración del teorema principal. El material del Apéndice C.1 será necesario.

Referencias: La Observación 1.4.7 está inspirada en la respuesta de Ercüment Ortaçgil del thread *Intuition behind alternating sum in boundary operator definition?* de Math Stack Exchange (cf. [10]). El resto del material en esta sección está basado en las Lectures 3 y 4 de las notas *Algebraic Topology Lecture Notes Fall 2018* de Gereon Quick (cf. [12]).

Notación 1.4.1
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Para todo $i \in \{0,\dots,n\}$ definimos

$$\begin{aligned} \phi_i^n : \Delta^{n-1} &\to \Delta^n \\ (t_0,\dots,t_{n-1}) &\mapsto (t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_{n-1}) \end{aligned}$$

En palabras, ϕ_i^n es el encaje de Δ^{n-1} en Δ^n que omite el i-ésimo vértice de Δ^n. Si $e_0^n,\dots,e_{n-1}^n \in \mathbb{R}^n$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y $e_0^{n+1},\dots,e_n^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\phi_i^n(e_j^n) := \begin{cases} e_j^{n+1} & \text{si } j < i \\ e_{j+1}^{n+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

y que la imagen de ϕ_i^n es la i-ésima cara de Δ^n, es decir

$$\operatorname{im}\phi_i^n = |e_0^{n+1},\dots,\widehat{e_i^{n+1}},\dots,e_n^{n+1}|^{n+1} \subset \Delta^n.$$

Definición 1.4.2 (n-simplejo singular)
Supongamos que X es un espacio topológico. Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$\mathrm{Sing}_n(X) := \{\sigma : \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ es continua}\}$$

y decimos que un elemento de $\mathrm{Sing}_n(X)$ es un *n-simplejo singular en X*. En el caso $n = 0$, hacemos el siguiente abuso de notación: para todo $x \in X$ denotamos por x al (único) elemento de $\mathrm{Sing}_0(X)$ que satisface $1 \mapsto x$ (recordemos que $\Delta^0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$). En particular,

$$\mathrm{Sing}_0(X) = X.$$

Definición 1.4.3 (La i-ésima cara de un simplejo singular)
Supongamos que X es un espacio topológico y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para todo $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$ y todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, definimos

$$\sigma^{(I)} := \sigma \circ \phi_i^n \in \mathrm{Sing}_n(X)$$

y decimos que $\sigma^{(I)}$ es la *i-ésima cara de σ*.

Ejemplo 1.4.4
Supongamos que X es un espacio topológico y que $\sigma \in \mathrm{Sing}_1(X)$. Si $i \in \{0, 1\}$, entonces $\sigma^{(I)}$ es una función de $\Delta^0 = \{1\}$ en X y

$$\sigma^{(I)}(1) = (\sigma \circ \phi_1^i)(1) = \sigma\left(\phi_1^i(1)\right) = \sigma(e_i)$$

donde e_0, e_1 es la base estándar de $\mathbb{R}^2$. Usando el abuso de notación de la Definición 1.4.2, podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

$$\sigma^{(I)} = \sigma(e_i) \text{ para todo } \sigma \in \mathrm{Sing}_1(X).$$

Definición 1.4.5 (n-cadena singular)
Supongamos que X es un espacio topológico. Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$S_n(X) := \mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_n(X)$$

y decimos que un elemento de $S_n(X)$ es una *n-cadena singular en X*. En palabras, $S_n(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los n-simplejos singulares en X. Recordemos que un elemento de $S_n(X)$ es una suma formal

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sigma_k \text{ donde } a_k \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma_k \in \mathrm{Sing}_n(X).$$

En el caso $n = 0$,

$$S_0(X) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_0(X) = \mathbb{Z}X.$$

Definición 1.4.6 (El n-ésimo operador frontera)
Supongamos que X es un espacio topológico y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $n = 0$, definimos $\partial_0 : S_0(X) \to 0$ como la única función posible. Si $n \geq 1$, definimos

$$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

como el homomorfismo de grupos que satisface[3]

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(I)} \text{ para todo } \sigma \in \mathrm{Sing}_n(X).$$

En palabras, $\partial_n(\sigma)$ es la suma alternante de las caras de σ. Decimos que ∂_n es el *n-ésimo operador frontera* y si hay ambigüedad respecto a X, escribimos ∂_n^X en vez de ∂_n.

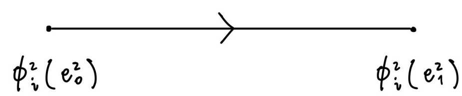
[3] Por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, basta definir ∂_n en $\mathrm{Sing}_n(X)$.

Observación 1.4.7
En lo que sigue explicamos (informalmente) porque alternamos los signos en la definición de ∂_n. Para esto, pensaremos que si $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$, entonces σ y $-\sigma$ tienen orientaciones opuestas[4].

- Consideremos el 2-simplejo $\mathrm{id}_{\Delta^2} \in \mathrm{Sing}_2(\Delta^2)$. Por definición,

$$\partial_2(\mathrm{id}_{\Delta^2}) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \,\mathrm{id}_{\Delta^2}^{(I)} = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \left(\mathrm{id}_{\Delta^2} \circ \phi_i^1\right) = \phi_0^2 - \phi_1^2 + \phi_2^2.$$

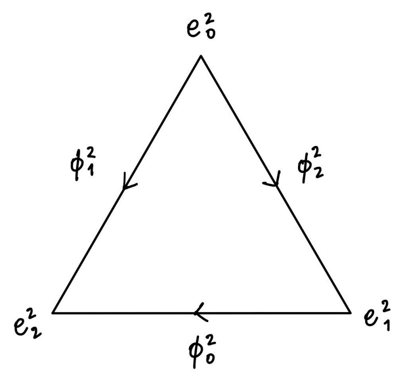
Supongamos que $\mathrm{im}\,\phi_i^2$ está orientado de la siguiente manera:



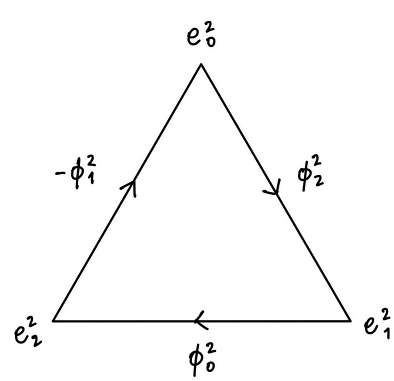
Como

$$\phi_0^2 : \begin{cases} e_0^2 \mapsto e_1^3 \\ e_1^2 \mapsto e_2^3 \end{cases} \qquad \phi_1^2 : \begin{cases} e_0^2 \mapsto e_0^3 \\ e_1^2 \mapsto e_2^3 \end{cases} \qquad \phi_2^2 : \begin{cases} e_0^2 \mapsto e_0^3 \\ e_1^2 \mapsto e_1^3 \end{cases}$$

entonces tenemos el siguiente dibujo de Δ^2:



Invirtiendo la orientación de ϕ_1^2 obtenemos el siguiente dibujo de Δ^2:



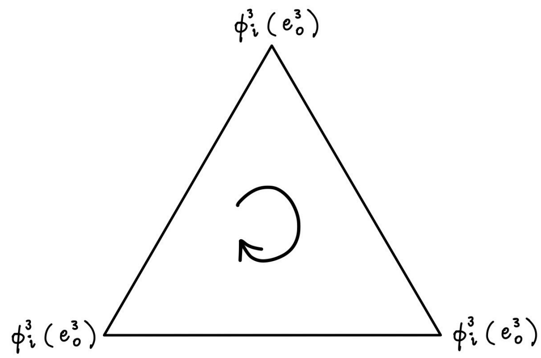
Esto explica porque alternamos los signos en la definición de ∂_2.

[4] Cabe recalcar que esta manera de entender los signos no es matemáticamente precisa pero la razón de esto puede ser algebraicamente remediada (cf. [12] p.50).

- Consideremos el 3-simplejo $\mathrm{id}_{\Delta^3} \in \mathrm{Sing}_3(\Delta^3)$. Por definición,

$$\partial_3(\mathrm{id}_{\Delta^3}) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i \left(\mathrm{id}_{\Delta^3} \circ \phi_i^2\right) = \phi_0^3 - \phi_1^3 + \phi_2^3 - \phi_3^3.$$

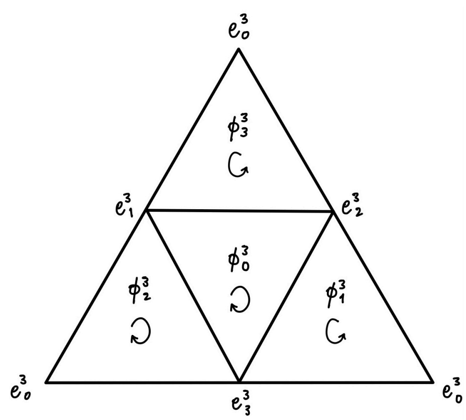
  Supongamos que $\mathrm{im}\,\phi_i^3$ está orientado de la siguiente manera:



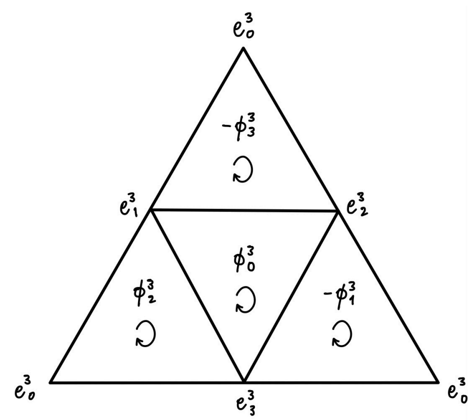
  Como

$$\phi_0^3 : \begin{cases} e_0^3 \mapsto e_1^4 \\ e_1^3 \mapsto e_2^4 \\ e_2^3 \mapsto e_3^4 \end{cases} \qquad \phi_1^3 : \begin{cases} e_0^3 \mapsto e_0^4 \\ e_1^3 \mapsto e_2^4 \\ e_2^3 \mapsto e_3^4 \end{cases} \qquad \phi_2^3 : \begin{cases} e_0^3 \mapsto e_0^4 \\ e_1^3 \mapsto e_1^4 \\ e_2^3 \mapsto e_3^4 \end{cases} \qquad \phi_3^3 : \begin{cases} e_0^3 \mapsto e_0^4 \\ e_1^3 \mapsto e_1^4 \\ e_2^3 \mapsto e_2^4 \end{cases}$$

  entonces tenemos el siguiente dibujo de las caras de Δ^3:



  Invirtiendo las orientaciones de ϕ_1^3 y ϕ_3^3 obtenemos el siguiente dibujo de las caras de Δ^3:



Esto explica porque alternamos los signos en la definición de ∂_3.

En lo que sigue, veremos una de las propiedades más importantes del operador frontera. Para esto, usaremos el siguiente lema técnico.

Lema 1.4.8
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ son tales que $j < i$, entonces

$$\phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n = \phi_j^{n+1} \circ \phi_{i-1}^n \tag{1.49}$$

Demostración. Supongamos que $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n (t_0, \ldots, t_{n-1}) &= \phi_i^{n+1} \big(t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{n-1}\big) \\ &= (t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \ldots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} \circ \phi_{i-1}^n (t_0, \ldots, t_{n-1}) &= \phi_j^{n+1} (t_0, \ldots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \ldots, t_{n-1}) \\ &= (t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos lo deseado. □

Teorema 1.4.9
Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. En particular, $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Demostración. Supongamos que $\sigma \in \mathrm{Sing}_{n+1}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ \phi_i^{n+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n \right) \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n \right) \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n \right) + \sum_{0 \le i \le j \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n \right) && (1.50) \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_j^{n+1} \circ \phi_{i-1}^n \right) + \sum_{0 \le i \le j \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_i^{n+1} \circ \phi_j^n \right) && (1.51) \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_j^{n+1} \circ \phi_{i-1}^n \right) + \sum_{0 \le j' \le i'-1 \le n} (-1)^{j'+i'-1} \left(\sigma \circ \phi_{j'}^{n+1} \circ \phi_{i'-1}^n \right) && (1.52) \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ \phi_j^{n+1} \circ \phi_{i-1}^n \right) + \sum_{0 \le j' < i' \le n+1} (-1)^{j'+i'-1} \left(\sigma \circ \phi_{j'}^{n+1} \circ \phi_{i'-1}^n \right) && (1.53) \\
&= 0 && (1.54)
\end{aligned}$$

Justifiquemos las últimas cinco igualdades.
En (1.50) simplemente ocupamos la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} = \sum_{0 \le j < i \le n+1} + \sum_{0 \le i \le j \le n}$$

En (1.51) aplicamos el Lema 1.4.8 al primer sumando (posible porque en este sumando tenemos $j < i$).
En (1.52) renombramos los indices del segundo sumando (cambiamos $i \to j'$ y $j \to i' - 1$).
En (1.53) ocupamos la siguiente igualdad:

$$\sum_{0 \le j' \le i'-1 \le n} = \sum_{0 \le j' < i' \le n+1}$$

En (1.54) ocupamos que los dos sumandos solo difieren en el nombre de los índices y en que el primero tiene como factor a $(-1)^{i+j}$ y el otro tiene a $(-1)^{j'+i'-1}$.

Por lo tanto, $(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$. Como $S_n(X) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_n(X)$, lo anterior y el Corolario C.1.7 implican lo deseado. □

Ejemplo 1.4.10
Supongamos que X es un espacio topológico y que e_0, e_1 es la base estándar de $\mathbb{R}^2$.

- Si $\sigma \in \mathrm{Sing}_1(X)$, entonces (por definición)

  $$\partial_1(\sigma) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \sigma^{(I)} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i (\sigma \circ \phi_i^1) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i (\sigma(e_i)) = \sigma(e_0) - \sigma(e_1).$$

  Por lo tanto,

  $$\partial_1(\sigma) = 0 \iff \sigma(e_0) = \sigma(e_1).$$

  Esta equivalencia también explica porque alternamos los signos en la definición de ∂_n

- Supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Sing}_1(X)$ son tales que

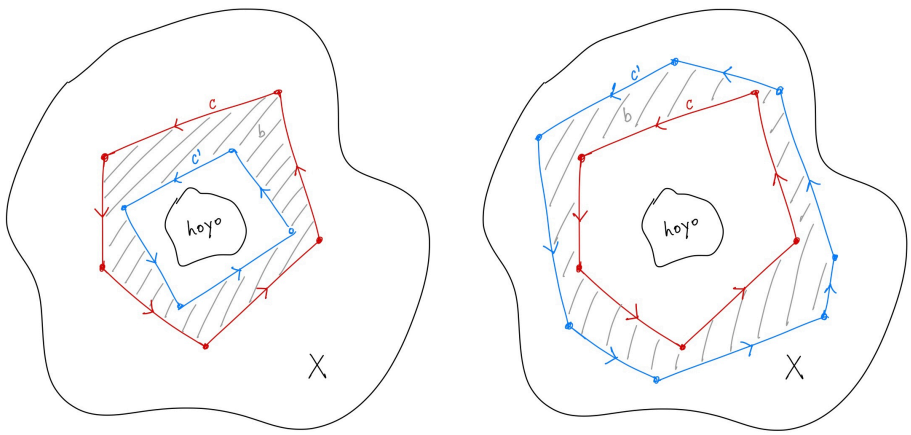
$$\alpha(e_1) = \beta(e_0), \;\; \beta(e_1) = \gamma(e_0), \;\; \gamma(e_1) = \alpha(e_0). \tag{1.55}$$

  Entonces

$$\partial_1(\alpha+\beta+\gamma) = \partial_1(\alpha)+\partial_1(\beta)+\partial_1(\gamma) = \big(\alpha(e_1)-\alpha(e_0)\big)+\big(\beta(e_1)-\beta(e_0)\big)+\big(\gamma(e_1)-\gamma(e_0)\big) = 0$$

  donde la última igualdad se cumple por (1.55).

Observación 1.4.11
Supongamos que X es un espacio topológico que se ve como una “tortilla” con un “hoyo 1-dimensional”. Usando lo visto en el Ejemplo 1.4.10, podemos encontrar un $c \in \ker \partial_1$ que rodee al “hoyo” en X. Los siguientes dibujos nos ayudan a convencernos (intuitivamente) de que no existe $b \in S_2(X)$ tal que $\partial_2(b) = c$.



b debería de ser una 2-cadena que se ve como en el dibujo pero esto implicaría que $\partial_2(b) = \pm\, c \mp c'$.

Por lo tanto, los “hoyos 1-dimensionales” pueden “ser detectados” por 1-cadenas que no tienen frontera y no son frontera de nadie (es decir, elementos de $\ker \partial_1 \setminus \operatorname{im} \partial_2$). Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.12 (n-frontera, n-ciclo, n-ésimo grupo de homología singular)
Supongamos que X es un espacio topológico y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- Definimos

$$B_n(X) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1} = \big\{\partial_{n+1}(\sigma) \in S_n(X) \mid \sigma \in S_{n+1}(X)\big\}$$

  y decimos que un elemento de $B_n(X)$ es una *n-frontera en X*.

- Definimos

$$Z_n(X) \coloneqq \ker \partial_n = \big\{c \in S_n(X) \mid \partial_n(c) = 0\big\}$$

  y decimos que un elemento de $Z_n(X)$ es un *n-ciclo en X*.

- Como $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ (cf. Teorema 1.4.9), entonces $B_n(X) \subset Z_n(X)$ y por lo tanto, la siguiente definición tiene sentido. Definimos

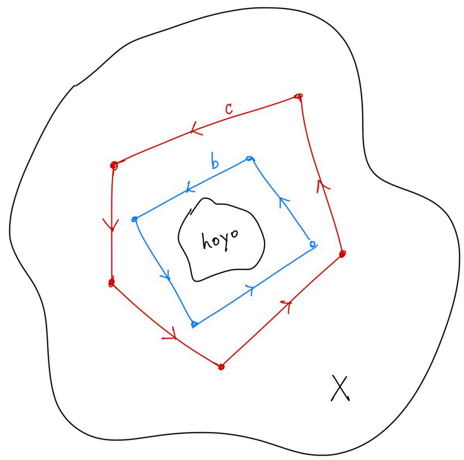
$$H_n(X) \coloneqq Z_n(X)/B_n(X)$$

  y decimos que $H_n(X)$ es el *n-ésimo grupo de homología singular de X*. Si $\pi_n : Z_n(X) \to Z_n(X)/B_n(X)$ es la proyección canónica, entonces para todo $c \in Z_n(X)$ denotamos

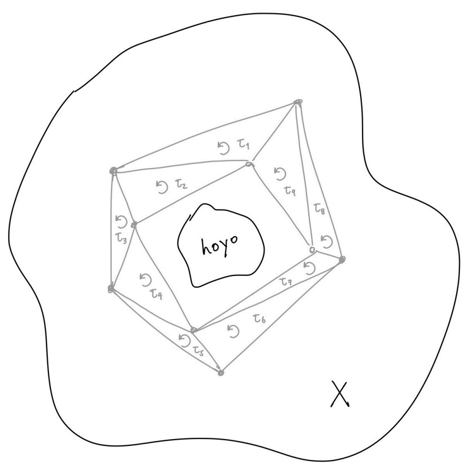
$$[c]_n \coloneqq \pi_n(c) \in Z_n(X)/B_n(X) = H_n(X).$$

  Si hay ambigüedad respecto a X, escribimos $[c]_n^X$ en vez de $[c]_n$.

Observación 1.4.13
Supongamos que X es un espacio topológico que se ve como una "tortilla" con un "hoyo 1-dimensional" y que $b, c \in S_1(X)$ son como en el siguiente dibujo:



Además, supongamos que $\tau_1, \dots, \tau_9 \in \mathrm{Sing}_2(X)$ son como en el siguiente dibujo:



Entonces

$$\partial_2(\tau_1 + \cdots + \tau_9) = b - c$$

y por lo tanto,

$$[b]_1 = [c]_1 \in H_1(X).$$

Ejemplo 1.4.14
Supongamos que $\mathrm{pt} = \{*\}$ es el espacio topológico que consiste de solo un punto. Claramente, para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la función constante $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{pt}$ es el único n-simplejo en pt. Por lo tanto,

$$S_n(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}\{\sigma_n\} = \mathbb{Z} \cdot \sigma_n := \{k \cdot \sigma_n \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i\{0, \dots, n\}$, y $x \in \Delta^n$,

$$\sigma_n^{(I)}(x) = \sigma_n \circ \phi_i^n(x) = * = \phi_{n-1}(x).$$

Por lo tanto,

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n^{(I)} = \sum_{i=0}^{n}\sigma_{n-1} = \begin{cases}\sigma_{n-1} & \text{si n es impar}\\ 0 & \text{si n es par}\end{cases}.$$

Esto implica que

$$B_n(\mathrm{pt}) = \begin{cases}0 & \text{si n es impar}\\ \mathbb{Z}\cdot\sigma_n & \text{si n es par}\end{cases}$$

$$Z_n(\mathrm{pt}) = \begin{cases}\mathbb{Z}\cdot\sigma_n & \text{si n es impar o } n=0\\ 0 & n \text{ es par y } n\neq 0\end{cases}$$

y por lo tanto,

$$H_n(\mathrm{pt}) \cong \begin{cases}\mathbb{Z} & \text{si } n=0\\ 0 & \text{si } n\neq 0\end{cases}.$$

Definición 1.4.15
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f : X \to Y$ es una función continua. Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$$

como el homomorfismo de grupos que satisface

$$\sigma \mapsto f\circ\sigma \text{ para todo } \sigma \in \mathrm{Sing}_n(X).$$

Observación 1.4.16
Si X es un espacio topológico, entonces para todo $\sum_{j=0}^{m} a_j\sigma_j \in S_n(X)$,

$$S_n(\mathrm{id}_X)\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\sigma_j\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j\left(\mathrm{id}_X\circ\sigma_j\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j\sigma_j$$

y por lo tanto, $S_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S_n(X)}$.

Lema 1.4.17
Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "S_n(f)"] \arrow[d, "\partial_n^X"'] & S_n(Y) \arrow[d, "\partial_n^Y"] \\ S_{n-1}(X) \arrow[r, "S_{n-1}(f)"'] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(S_{n-1}(f)\circ\partial_n^X\right)(\sigma) &= S_{n-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ\phi_i^n\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(f\circ\sigma\circ\phi_i^n\right) = \partial_n^Y\left(f\circ\sigma\right) = \left(\partial_n^Y\circ S_n(f)\right)(\sigma).\end{aligned}$$

Como $S_n(X) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_n(X)$, lo anterior y el Corolario C.1.7 implican lo deseado. ☐

Corolario 1.4.18
Si $f : X \to Y$ es continua, entonces

$$S_n(f)\left(Z_n(X)\right) \subset Z_n(Y) \quad \text{y} \quad S_n(f)\left(B_n(X)\right) \subset B_n(Y).$$

Demostración. Supongamos que $c \in Z_n(X)$, entonces

$$\partial_n^Y\left(S_n(f)(c)\right) = S_{n-1}(f)\left(\partial_n^X(c)\right) = S_{n-1}(f)(0).$$

De donde, $S_n(f)(c) \in Z_n(Y)$. Por otro lado, si $b \in B_n(X)$, entonces existe $a \in S_{n+1}(X)$ tal que $b = \partial_{n+1}^X(a)$. Por lo tanto,

$$S_n(f)(b) = S_n(f)\left(\partial_{n+1}^X(a)\right) = \partial_{n+1}^Y\left(S_{n+1}(a)\right).$$

De donde, $S_n(f)(b) \in B_n(Y)$. □

Definición 1.4.19
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f : X \to Y$ es una función continua. Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(X) &\to H_n(Y) \\ [c]_n^X &\mapsto \left[S_n(f)(c)\right]_n^Y. \end{aligned}$$

Veamos que $H_n(f)$ está bien definida. Supongamos que $c, c' \in Z_n(X)$ son tales que $[c]_n^X = [c']_n^X$. Entonces $c - c' \in B_n(X)$ y por lo tanto

$$S_n(f)(c) - S_n(f)(c') = S_n(f)(c - c') \in S_n(f)\left(B_n(X)\right) \subset B_n(Y) \tag{1.56}$$

donde la pertenencia es consecuencia de que $c - c' \in B_n(X)$ y la inclusión se cumple por el Corolario 1.4.18. Por definición, (1.56) implica que

$$\left[S_n(f)(c)\right]_n^Y = \left[S_n(f)(c')\right]_n^Y$$

y por lo tanto, $H_n(f)$ está bien definida.

Observación 1.4.20
Si X es un espacio topológico, entonces $S_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S_n(X)}$ (cf. Observación 1.4.16) y por lo tanto,

$$H_n(\mathrm{id}_X)\left([c]_n^X\right) = \left[S_n(f)(c)\right]_n^X = [c]_n^X.$$

Es decir, $H_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_n(X)}$.

Proposición 1.4.21
Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos y que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas. Entonces

$$S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f) \quad \text{y} \quad H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$

Demostración. Supongamos que $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$. Entonces

$$S_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = S_n(g)\,(f \circ \sigma) = S_n(g)\left(S_n(f)(\sigma)\right) = S_n(g) \circ S_n(f)(\sigma).$$

Como $S_n(X) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_n(X)$, lo anterior y el Corolario C.1.7 implican lo deseado. Por otro lado, supongamos que $c \in Z_n(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} H_n(g \circ f)(c) &= \big[S_n(g \circ f)(c)\big]_n^Z \\ &= \Big[\big(S_n(g) \circ S_n(f)\big)\,(c)\Big]_n^Z \\ &= \Big[S_n(g)\,\big(S_n(f)(c)\big)\Big]_n^Z \\ &= H_n(g)\,\Big(\big[S_n(f)(c)\big]_n^Y\Big) \\ &= H_n(g)\,\big(H_n(f)(c)\big) \\ &= H_n(g) \circ H_n(f)(c). \end{aligned}$$

□

Corolario 1.4.22
Si $f : X \to Y$ es constante, entonces $H_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es constante con $f(x) = y_0$ y consideremos el espacio topológico $\mathrm{pt} = \{*\}$ que consiste de un solo punto. Si definimos $g : \mathrm{pt} \to Y$ por $* \mapsto y_0$ y $h : X \to \mathrm{pt}$ como la única función posible, entonces g, h son continuas y $f = g \circ h$. Por lo tanto,

$$H_n(f) = H_n(g) \circ H_n(h). \tag{1.57}$$

Por otro lado, como $H_n(\mathrm{pt}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ (cf. Ejemplo 1.4.14), entonces $H_n(g) = 0$ y $H_n(h) = 0$. Juntando esto con (1.57) obtenemos lo deseado. □

1.5. Invarianza homotópica de la homología

El objetivo de esta sección es demostrar que funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología (cf. Teorema 1.5.10). La demostración es larga, así que vamos por pasos. Lo primero que haremos es encontrar condiciones suficientes para que dos funciones induzcan funciones iguales en homología. En el resto de la sección nos dedicamos a demostrar que dos funciones homotópicas satisfacen estas condiciones. Cabe recalcar que los resultados más importantes de esta sección son: el Teorema 1.5.10 y la Proposición 1.5.11.

Referencias: El material en esta sección está basado en la Lecture 11 de las notas *Algebraic Topology Lecture Notes Fall 2018* de Gereon Quick (cf. [12]).

Lema 1.5.1
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f, g : X \to Y$ son funciones continuas. Si existen funciones

$$H_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y) \;\text{ y }\; H_{n-1} : S_{n-1}(X) \to S_n(Y)$$

tales que

$$S_n(f) - S_n(g) = H_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ H_n, \tag{1.58}$$

entonces $H_n(f) = H_n(g)$.

Demostración. Supongamos que $c \in Z_n(X)$. Por (1.58),

$$\begin{aligned} S_n(f)(c) - S_n(g)(c) &= H_{n-1} \circ \partial_n^X(c) + \partial_{n+1}^Y \circ H_n(c) \\ &= 0 + \partial_{n+1}^Y \circ H_n(c) \\ &= \partial_{n_1}^Y\,\big(H_n(c)\big) \in B_n(Y). \end{aligned}$$

En particular,

$$S_n(f)(c) - S_n(g)(c) \in B_n(Y) \text{ para todo } c \in Z_n(X). \tag{1.59}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
H_n(f) = H_n(g) &\iff H_n(f)\left([c]_n^X\right) = H_n(g)\left([c]_n^X\right) \text{ para todo } c \in Z_n(X)\\
&\iff \left[S_n(f)(c)\right]_n^Y = \left[S_n(g)(c)\right]_n^Y \text{ para todo } c \in Z_n(X)\\
&\iff S_n(f)(c) - S_n(g)(c) \in B_n(Y) \text{ para todo } c \in Z_n(X)
\end{aligned}$$

Juntando esto con (1.59) obtenemos lo deseado. □

Observación 1.5.2
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f, g : X \to Y$ son funciones continuas. Si f y g son homotópicas, entonces $S_n(f)(\sigma)$ y $S_n(g)(\sigma)$ son homotópicas para todo n-simplejo singular σ.

Demostración. Supongamos que H es una homotopía entre f y g. Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\Delta^n \times [0,1] \xrightarrow{\sigma\times \mathrm{id}} X \times [0,1] \xrightarrow{H} Y$$

es una homotopía entre $S_n(f)(\sigma)$ y $S_n(g)(\sigma)$. □

Lema 1.5.3
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $e_0^{n+1}, \dots, e_n^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si denotamos

$$s_i^{n+1} := \left|(e_0^{n+1}, 0), \dots, (e_{i-1}^{n+1}, 0), (e_i^{n+1}, 0), (e_i^{n+1}, 1), (e_{i+1}^{n+1}, 1), \dots, (e_n^{n+1}, 1)\right|^{n+2},$$

entonces

$$\Delta^n \times [0,1] = \bigcup_{i=0}^{n} s_i^{n+1}. \tag{1.60}$$

Demostración. Antes que nada, supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $i \in \{0, \dots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(e_0^{n+1}, 0) &= (1, 0, \dots, 0)\\
(e_i^{n+1}, 0) &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0)\\
(e_i^{n+1}, 1) &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0, 1)\\
(e_{i+1}^{n+1}, 1) &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{(i+1)\text{-ésimo lugar}}, 0, \dots, 0, 1)\\
(e_n^{n+1}, 1) &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{(n+1)\text{-ésimo lugar}}, 1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a_0(e_0^{n+1}, 0) + \dots + a_i(e_i^{n+1}, 0) + a_{i+1}(e_j^{n+1}, 1) + a_{i+2}(e_{i+1}^{n+1}, 1) + \dots + a_{n+1}(e_n^{n+1}, 1) =\\
(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n+1}, a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{n+1}).
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Ahora sí, veamos (1.60). Supongamos que $(x, t) \in \Delta^n \times [0,1]$. Por definición,

$$(x, t) = (t_0, \dots, t_n, t) \text{ con } i\,(t_i \geq 0) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } t_0 + \dots + t_n = 1.$$

Como $t \in [0,1]$ y la sucesión

$$0,\ \ t_n,\ \ t_{n-1}+t_n,\ \ t_{n-2}+t_{n-1}+t_n,\ \ \ldots,\ \ t_0+\cdots+t_n=1$$

es una partición de $[0,1]$, entonces hay dos casos:

$$0 \le t \le t_n \quad \text{ó} \quad t_{j+1}+\cdots+t_n \le t \le t_j+t_{j+1}+\cdots+t_n \text{ para algún } j \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{1.62}$$

Veamos que el segundo caso implica que

$$(t_0,\ldots,t_n,t) \in s_j^{n+1}.$$

(El primer caso es análogo pero implica que $(t_0,\ldots,t_n,t) \in s_n^{n+1}$.) Definimos

$$\begin{aligned} r_0 &= t_0 \\ &\vdots \\ r_{j-1} &= t_{j-1} \\ r_j &= t_j+t_{j+1}+\cdots+t_n-t \\ r_{j+1} &= t-(t_{j+1}+\cdots+t_n) \\ r_{j+2} &= t_{j+1} \\ &\vdots \\ r_{n+1} &= t_n \end{aligned}$$

(Cabe recalcar que en el caso $0 \le t \le t_n$ hubiéramos definido $r_k = t_k$ para todo $k \in \{0,\ldots,n\}$ y $r_{n+1} = t_n - t$.) Usando (1.62) obtenemos $r_j \ge 0$ y $r_{j+i} \ge 0$. Por lo tanto, $r_k \ge 0$ para todo $k \in \{0,\ldots,n+1\}$. Además, usando solo definiciones podemos concluir que

$$r_j + r_{j+1} = t_j, \tag{1.63}$$

$$r_{j+1}+r_{j+2}+\cdots+r_{n+1} = t, \tag{1.64}$$

$$r_0+\cdots+r_{n+1} = 1. \tag{1.65}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &(t_0,\ldots,t_{j-1},t_j,t_{j+1},\ldots,t_n,t) = \\ &(r_0,\ldots,r_{j-1},r_j+r_{j+1},r_{j+2},\ldots,r_{n+1},r_{j+1}+r_{j+2}+\cdots+r_{n+1}) = \\ &r_0(e_0^{n+1},0)+\cdots+r_j(e_i^{n+1},0)+r_{j+1}(e_j^{n+1},1)+r_{j+2}(e_{j+1}^{n+1},1)+\cdots+r_{n+1}(e_n^{n+1},1) \in s_j^{n+1}. \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (1.63), (1.64), y las definiciones de las r_i; la segunda es consecuencia de (1.61); y la pertenencia es consecuencia de (1.65). $\square$

Notación 1.5.4
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Para todo $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ definimos

$$p_i^n \coloneqq \varphi[(e_0^{n+1},0),\ldots,(e_{i-1}^{n+1},0),(e_i^{n+1},0),(e_i^{n+1},1),(e_{i+1}^{n+1},1),\ldots,(e_n^{n+1},1)]^{n+2}$$

En palabras, p_i^n es el homeomorfismo natural entre Δ^{n+1} y s_i^{n+1} (cf. Definición 1.2.8). Entonces para todo $(t_0,\ldots,t_{n+1}) \in \Delta^{n+1}$

$$\begin{aligned} &p_i^n(t_0,\ldots,t_{n+1}) = \\ &t_0(e_0^{n+1},0)+\cdots+t_{i-1}(e_{i-1}^{n+1},0)+t_i(e_i^{n+1},0)+t_{i+1}(e_i^{n+1},1)+t_{i+2}(e_{i+1}^{n+1},1)+\cdots+t_{n+1}(e_n^{n+1},1) = \\ &(t_0,\ldots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\ldots,t_{n+1},t_{i+1}+\cdots+t_{n+1}) = \\ &\left(t_0,\ldots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\ldots,t_{n+1},\sum_{k=i+1}^{n+1} t_k\right) \end{aligned}$$

(cf. (1.61)) y en particular para todo $k \in \{0, \dots, n+1\}$

$$p_i^n(e_k^{n+2}) = \begin{cases} (e_k^{n+1}, 0) & \text{si } 0 \leq k \leq i \\ (e_{k-1}^{n+1}, 1) & \text{si } k > i \end{cases}$$

Notación 1.5.5
Supongamos que X es un espacio topológico. Para todo $t \in [0,1]$ definimos

$$\begin{aligned} j_t^X : X &\hookrightarrow X \times [0,1] \\ x &\mapsto (x, t). \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ denotamos $j_t^n \coloneqq j_t^{\Delta^n}$.

Lema 1.5.6
Supongamos que X es un espacio topológico, que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y que $t \in [0,1]$. Si $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$, entonces

$$\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ j_t^n = j_t^X \circ \sigma. \tag{1.66}$$

Demostración. Supongamos que $u \in \Delta^n$. Entonces

$$\left(\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ j_t^n\right)(u) = \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right)(u,t) = \left(\sigma(u), t\right) = j_t^X\left(\sigma(u)\right) = \left(j_t^X \circ \sigma\right)(u).$$

□

Lema 1.5.7
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces

$$p_0^n \circ \phi_0^{n+1} = j_1^n \tag{1.67}$$

$$p_n^n \circ \phi_{n+1}^{n+1} = j_0^n \tag{1.68}$$

y

$$p_i^n \circ \phi_i^{n+1} = p_{i-1}^n \circ \phi_i^{n+1} \quad \text{si } 1 \leq i \leq n \tag{1.69}$$

$$p_{j+1}^n \circ \phi_i^{n+1} = (\phi_i^n \times \mathrm{id}) \circ p_j^{n-1} \quad \text{si } j \geq i \tag{1.70}$$

$$p_j^n \circ \phi_{i+1}^{n+1} = (\phi_i^n \times \mathrm{id}) \circ p_j^{n-1} \quad \text{si } j < i \tag{1.71}$$

Demostración. Supongamos que $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

- Veamos que $p_0^n \circ \phi_0^{n+1} = j_1^n$.

$$p_0^n \circ \phi_0^{n+1}(t_0, \dots, t_n) = p_0^n(0, t_0, \dots, t_n) = \left(t_0, \dots, t_n, \sum_{i=0}^n t_i\right) = (t_0, \dots, t_n, 1) = j_1^n(t_0, \dots, t_n)$$

- Veamos que $p_n^n \circ \phi_{n+1}^{n+1} = j_0^n$.

$$p_n^n \circ \phi_{n+1}^{n+1}(t_0, \dots, t_n) = p_n^n(t_0, \dots, t_n, 0) = (t_0, \dots, t_n, 0) = j_0^n(t_0, \dots, t_n)$$

- Veamos que $p_i^n \circ \phi_i^{n+1} = p_{i-1}^n \circ \phi_i^{n+1}$ si $1 \leq i \leq n$.
  Por un lado,

$$\begin{aligned} p_i^n \circ \phi_i^{n+1}(t_0, \dots, t_n) &= p_i^n(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) \\ &= \left(t_0, \dots, t_{i-1}, 0 + t_i, t_{i+1}, \dots, t_n, \sum_{k=i}^n t_k\right) = \left(t_0, \dots, t_n, \sum_{k=i}^n t_k\right) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple porque t_i está en el $(i+1)$-ésimo lugar de $(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
p^n_{i-1}\circ\phi^{n+1}_i(t_0,\ldots,t_n) &= p^n_{i-1}(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)\\
&= \left(t_0,\ldots,t_{i-2},t_{i-1}+0,t_i,\ldots,t_n,\sum_{k=i}^{n}t_k\right) = \left(t_0,\ldots,t_n,\sum_{k=i}t_k\right)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple porque t_i está en el $(i+1)$-ésimo lugar de $(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)$. Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos lo deseado.

- Veamos que $p^n_{j+1}\circ\phi^{n+1}_i = \left(\phi^n_i\times\mathrm{id}\right)\circ p^{n-1}_j$ si $j\geq i$.
Caso 1. $i<j-1$.
Por un lado,

$$\begin{aligned}
p^n_{j+1}\circ\varphi^{n+1}_i(t_0,\ldots,t_n) &= p^n_{j+1}(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)\\
&= \left(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{j-1},t_j,t_{j+1}+t_{j+2},\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple porque t_j está en el $(j+1)$-ésimo lugar de $(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\varphi^n_i\times\mathrm{id})\circ p^{n-1}_j(t_0,\ldots,t_n) &= (\varphi^n_i\times\mathrm{id})\left(t_0,\ldots,t_{j-1},t_j+t_{j+1},t_{j+2},\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right)\\
&= \left(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{j-1},t_j,t_{j+1}+t_{j+2},\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{pues } i<j)
\end{aligned}$$

Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos lo deseado.
Caso 2. $i=j-1$.
Por un lado,

$$\begin{aligned}
p^n_{j+1}\circ\varphi^{n+1}_i(t_0,\ldots,t_n) &= p^n_{j+1}(t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n)\\
&= p^n_{j+1}(t_0,\ldots,t_{j-2},0,t_{j-1},t_j,\ldots,t_n) \qquad (\text{pues } i=j-1)\\
&= \left(t_0,\ldots,t_{j-2},0,t_{j-1},t_j+t_{j+1},t_{j+2}\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right) \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

donde (1.72) se cumple porque t_j está en el $(j+1)$-ésimo lugar de $(t_0,\ldots,t_{j-2},0,t_{j-1},t_j\ldots,t_n)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\varphi^n_i\times\mathrm{id})\circ p^{n-1}_j(t_0,\ldots,t_n) &= (\varphi^n_i\times\mathrm{id})\left(t_0,\ldots,t_{j-1},t_j+t_{j+1},t_{j+2},\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right)\\
&= \left(\varphi^n_{j-1}\times\mathrm{id}\right)\left(t_0,\ldots,t_{j-1},t_j+t_{j+1},t_{j+2},\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{pues } i=j-1)\\
&= \left(t_0,\ldots,t_{j-2},0,t_{j-1},t_j+t_{j+1},t_{j+2}\ldots,t_n,\sum_{k=j+1}^{n}t_k\right).
\end{aligned}$$

Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos lo deseado.
Caso 3. $i = j$.
Usando la igualdad $i = j$, podemos proceder de manera análoga al caso anterior. Específicamente, podemos reescribir $(t_0, \ldots, t_n)$ en términos (únicamente) de i o (únicamente) de j para poder evaluar.

- La demostración de (1.71) es análoga a la demostración de (1.70).

□

Definición 1.5.8 (El n-ésimo operador prisma)
Supongamos que X es un espacio topológico y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ definimos

$$P_i^n : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times [0,1])$$

como el homomorfismo de grupos que satisface

$$\sigma \mapsto (\sigma \times \mathrm{id}) \circ p_i^n \quad \text{para todo } \sigma \in \mathrm{Sing}_n(X).$$

También definimos

$$P^n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P_i^n.$$

y decimos que P^n es el *n-ésimo operador prisma*.

Lema 1.5.9
Supongamos que X es un espacio topológico y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces

$$S_n(j_1^X) - S_n(j_0^X) = P^{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^{X \times [0,1]} \circ P^n. \tag{1.73}$$

Demostración. Supongamos que $\sigma \in \mathrm{Sing}_n(X)$. Vamos a desarrollar (uno por uno) los dos sumandos del lado derecho de (1.73):

$$\begin{aligned}
P^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) &= P^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma \circ \phi_i^n\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j P_j^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma \circ \phi_i^n\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i P_j^{n-1}(\sigma \circ \phi_i^n)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left((\sigma \circ \phi_i^n) \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}\\
&= \sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}+\\
&\qquad \sum_{0\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}\\
&= \sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}+\\
&\qquad \sum_{0\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ \left(\phi_i^n \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^{n-1}\\
&= \sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_{i+1}^{n+1}+ && \text{(cf. (1.71))}\\
&\qquad \sum_{0\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{j+1}^n \circ \phi_i^{n+1} && \text{(cf. (1.70))}
\end{aligned}$$

Antes de desarrollar el otro sumando del lado derecho de (1.73), notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_i^n \circ \phi_i^{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{i-1}^n \circ \phi_i^{n+1} &= && \text{(pues } p_i^n \circ \phi_i^{n+1} = p_{i-1}^n \circ \phi_i^{n+1}\text{)}\\
\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_0^n \circ \phi_0^{n+1} - \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_n^n \circ \phi_{n+1}^{n+1} &= && \text{(cf. (1.67) y (1.68))}\\
\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ j_1^n - \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ j_0^n &= && \text{(cf. (1.66))}\\
j_1^X \circ \sigma - j_0^X \circ \sigma &=\\
S_n(j_1^X)(\sigma) - S_n(j_0^X)(\sigma). & && (1.74)
\end{aligned}$$

Ahora sí, desarrollemos el otro sumando del lado derecho de (1.73):

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P^n(\sigma) &= \partial_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j P_j^n(\sigma)\right) \\
&= \partial_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\partial_{n+1}\left(\left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} \\
&= \sum_{0\le i<j\le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad \sum_{0\le i=j\le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad\qquad \sum_{1\le i=j+1\le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad\qquad\qquad \sum_{1\le j+1<i\le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} \\
&= \sum_{0\le i<j\le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(-1)^{i+i}}_{1} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_i^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{(-1)^{i+(i-1)}}_{-1} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{i-1}^n \circ \phi_i^{n+1} + \\
&\qquad\qquad\qquad \sum_{1\le j+1<i\le n+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_i^{n+1} \\
&= \underbrace{\sum_{0\le i<j'+1\le n}}_{\sum_{0\le i\le j'\le n-1}} (-1)^{i+j'+1} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{j'+1}^n \circ \phi_i^{n+1} + && \text{(donde } j' \coloneqq j-1\text{)} \\
&\qquad S_n(j_1^X)(\sigma) - S_n(j_0^X)(\sigma) + && \text{(cf. (1.74))} \\
&\qquad\qquad \underbrace{\sum_{1\le j+1<i'+1\le n+1}}_{\sum_{0\le j<i'\le n}} (-1)^{(i'+1)+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_{i'+1}^{n+1} && \text{(donde } i' \coloneqq i-1\text{)}
\end{aligned}
$$

En resumen,

$$
P^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) = \sum_{0\le j<i\le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_{i+1}^{n+1} + \sum_{0\le i\le j\le n-1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{j+1}^n \circ \phi_i^{n+1}
$$

y

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P^n(\sigma) = &\sum_{0\leq i\leq j'\leq n-1} (-1)^{i+j'+1} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_{j'+1}^n \circ \phi_i^{n+1} + \\ &S_n(j_1^X)(\sigma) - S_n(j_0^X)(\sigma) + \\ &\sum_{0\leq j< i'\leq n} (-1)^{(i'+1)+j} \left(\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}\right) \circ p_j^n \circ \phi_{i'+1}^{n+1}.\end{aligned}$$

Juntando estas dos ecuaciones obtenemos

$$P^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) + \partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P^n(\sigma) = S_n(j_1^X)(\sigma) - S_n(j_0^X)(\sigma).$$

□

Teorema 1.5.10 (Invarianza homotópica de la homología)
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f, g : X \to Y$ son funciones continuas. Si f y g son homotópicas, entonces $H_n(f) = H_n(g)$.

Demostración. Supongamos que H es una homotopía entre f y g tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in X$. Equivalentemente,

$$H \circ j_0^X = f \quad \text{y} \quad H \circ j_1^X = g. \tag{1.75}$$

Con esto en mente, veamos que $H_n(f) = H_n(g)$. Por el Lema 1.5.1 basta encontrar funciones

$$H_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y) \;\; \text{y} \;\; H_{n-1} : S_{n-1}(X) \to S_n(Y)$$

tales que

$$S_n(f) - S_n(g) = H_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ H_n.$$

Veamos que

$$H_n \coloneqq S_{n+1}(H) \circ P^n \quad \text{y} \quad H_{n-1} \coloneqq S_n(H) \circ P^{n-1}$$

cumplen lo deseado.

$$\begin{aligned}
S_n(f) - S_n(g) &= S_n\left(H \circ j_0^X\right) - S_n\left(H \circ j_1^X\right) && \text{(cf. (1.75))}\\
&= S_n(H) \circ S_n\left(j_0^X\right) - S_n(H) \circ S_n\left(j_1^X\right)\\
&= S_n(H)\left(S_n\left(j_0^X\right) - S_n\left(j_1^X\right)\right)\\
&= S_n(H) \circ \left(P^{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P^n\right) && \text{(cf. Lema 1.5.9)}\\
&= S_n(H) \circ \left(P^{n-1} \circ \partial_n^X\right) + S_n(H) \circ \left(\partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P^n\right)\\
&= \left(S_n(H) \circ P^{n-1}\right) \circ \partial_n^X + \left(S_n(H) \circ \partial_{n+1}^{X\times[0,1]}\right) \circ P^n\\
&= \left(S_n(H) \circ P^{n-1}\right) \circ \partial_n^X + \left(\partial_{n+1}^Y \circ S_{n+1}(H)\right) \circ P^n && \text{(cf. Lema 1.4.17)}\\
&= \left(S_n(H) \circ P^{n-1}\right) \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ \left(S_{n+1}(H) \circ P^n\right)\\
&= H_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ H_n
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.5.11
Supongamos que X es un espacio topológico. Si X es contraíble, entonces $H_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Demostración. Como X es contraíble, entonces id_X es homotópica a una función constante f. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{H_n(X)} &= H_n(\mathrm{id}_X) && \text{(cf. Observación 1.4.20)} \\ &= H_n(f) && \text{(cf. Teorema 1.5.10)} \\ &= 0. && \text{(cf. Corolario 1.4.22)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. □

1.6. Homología singular reducida

El objetivo de esta sección es definir y estudiar el concepto de homología singular reducida. Este concepto se define haciendo una pequeña modificación al concepto de homología singular en el caso $n = 0$. Esta modificación es preferida por muchos expertos porque permite la simplificación de resultados en donde el caso $n = 0$ requiere de un trato distinto a los casos $n > 0$. En el Ejemplo 1.6.3 y el Lema 1.6.9 veremos dos casos particulares de esta situación. Cabe recalcar que los resultados más importantes de esta sección son: el Lema 1.6.6, el Lema 1.6.8, y el Lema 1.6.9.

Referencias: La Definición 1.6.1 es originalmente del libro *Algebraic Topology* de Allen Hatcher (cf. [7], pp. 110).

Definición 1.6.1 (El n-ésimo grupo de homología singular reducida)
Supongamos que X es un espacio topológico. Definimos

$$\begin{aligned} \epsilon_X : S_0(X) &\to \mathbb{Z} \\ \sum_k n_k \sigma_k &\mapsto \sum_k n_k \end{aligned}$$

Notemos que si $\sigma \in \mathrm{Sing}_1(X)$, entonces

$$\epsilon_X \circ \partial_1(\sigma) = \epsilon_X\left(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{im}\partial_1 \subset \ker(\epsilon_X)$ y en particular, el cociente $\ker(\epsilon_X)/\mathrm{im}(\partial_1)$ está bien definido. Con esto en mente, para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(X) &:= \begin{cases} \ker(\epsilon_X)/\mathrm{im}(\partial_1) & \text{si } n = 0 \\ \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1}) & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \ker(\epsilon_X)/\mathrm{im}(\partial_1) & \text{si } n = 0 \\ H_n(X) & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y decimos que $\tilde{H}_n(X)$ es el *n-ésimo grupo de homología singular reducida de X*. Si $\pi : \ker(\epsilon_X) \to \ker(\epsilon_X)/\operatorname{im}(\partial_1)$ es la proyección canónica, entonces para todo $c \in \ker \epsilon_X$ denotamos

$$[c]^X_\sim := \pi(c) \in \ker(\epsilon_X)/\operatorname{im}(\partial_1) = \tilde{H}_n(X).$$

Lema 1.6.2
Supongamos que X es un espacio topológico. Si $c, c' \in \ker \epsilon_X$, entonces

$$[c]_0 = [c']_0 \iff [c]_\sim = [c']_\sim.$$

En palabras, c y c' son iguales en $H_0(X)$ si y solo si c y c' son iguales en $\tilde{H}_0(X)$.

Demostración. Supongamos que $c, c' \in \ker \epsilon_X$. Por definición,

$$[c]_\sim = [c']_\sim \iff c - c' \in \operatorname{im} \partial_1 \iff [c]_0 = [c']_0.$$

Cabe recalcar que la hipótesis $c, c' \in \ker \epsilon_X$ es necesaria para que $[c]_\sim$ y $[c']_\sim$ tengan sentido. $\square$

Ejemplo 1.6.3
Consideremos el espacio topológico que consiste de un solo punto, pt. Para todo $n \geq 0$,

$$\tilde{H}_n(\mathrm{pt}) = 0.$$

Demostración. Como $H_n(\mathrm{pt}) = 0$ para todo $n \geq 1$ y $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ para todo $n \geq 1$ y todo espacio topológico X, entonces el único detalle es el caso $n = 0$. Recordemos que en el Ejemplo 1.4.14 vimos que si σ_n es la única función que existe de Δ^n a pt, entonces $S_n(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z} \cdot \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por lo tanto, $\epsilon_{\mathrm{pt}} : \underbrace{S_0(\mathrm{pt})}_{\mathbb{Z}\cdot\sigma_0} \to \mathbb{Z}$ es tal que

$$k \cdot \sigma_0 \mapsto k.$$

En particular, $\ker(\epsilon_{\mathrm{pt}}) = 0$ y por lo tanto,

$$\tilde{H}_0(\mathrm{pt}) = \ker(\epsilon_{\mathrm{pt}}) / \operatorname{im}(\delta_1) = 0.$$

$\square$

El objetivo del resto de la sección es demostrar que si X es un espacio topológico contraíble, entonces $\tilde{H}_n(X) = 0$ para todo $n \geq 0$. Para esto, tomaremos casi exactamente el mismo camino que tomamos cuando demostramos que si X es contraíble, entonces $H_n(X) = 0$ para todo $n \geq 1$ (cf. Proposición 1.5.11). Veremos que la diferencia crucial es precisamente que $\tilde{H}_n(\mathrm{pt}) = 0$ para todo $n \geq 0$ a diferencia de que $H_n(\mathrm{pt}) = 0$ solo para $n \geq 1$ (recordemos que $H_0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$).

Definición 1.6.4
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f : X \to Y$ es una función continua. Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(f) : \tilde{H}_0(X) &\to \tilde{H}_0(Y) \\ [c]_\sim^X &\mapsto [S_0(f)(c)]_\sim^Y \end{aligned}$$

Veamos que $\tilde{H}_0(f)$ está bien definida. Antes que nada, hay que ver que para todo $c \in \ker(\epsilon_X)$ el valor $[S_0(f)(c)]_\sim^Y$ tiene sentido. Específicamente, hay que ver que $S_0(f)(c) \in \ker(\epsilon_Y)$ para todo $c \in \ker(\epsilon_X)$. Supongamos que $\sum_{j=0}^m a_j \sigma_j = c \in \ker(\epsilon_X)$. Entonces

$$\epsilon_Y\left(S_0(f)(c)\right) = \epsilon_Y\left(S_0(f)\left(\sum_{j=0}^m a_j\sigma_j\right)\right) = \epsilon_Y\left(\sum_{j=0}^m a_j\left(f \circ \sigma_j\right)\right) = \sum_{j=0}^m a_j = \epsilon_X\left(\sum_{j=0}^m a_j\sigma_j\right) = \epsilon_X(c) = 0$$

Por lo tanto, $S_0(f)(c) \in \ker(\epsilon_Y)$ para todo $c \in \ker(\epsilon_X)$. Resta probar que para todo $c, c' \in \ker(\epsilon_X)$

$$[c]_\sim^X = [c']_\sim^X \implies [S_0(f)(c)]_\sim^Y = [S_0(f)(c')]_\sim^Y.$$

Sin embargo, podemos ocupar el argumento que ocupamos cuando vimos que $H_0(f)$ está bien definida (cf. Definición 1.4.19). Naturalmente, para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ también definimos $\tilde{H}_n(f) = H_n(f)$.

Lema 1.6.5
Supongamos que X es un espacio topológico. Entonces

$$\tilde{H}_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\tilde{H}_n(X)}$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como $H_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ para todo $n \geq 0$ (cf. Observación 1.4.20) y $H_n(f) = \tilde{H}_n(f)$ para todo $n \geq 1$ y toda función continua f, entonces el único detalle es cuando $n = 0$. Veamos que el mismo argumento que ocupamos en la Observación 1.4.20 funciona: Para todo $c \in \ker \epsilon_X$,

$$\tilde{H}_0(\mathrm{id}_X)\left([c]_\sim\right) = \left[S_0(\mathrm{id}_X)(c)\right]_\sim = [c]_\sim.$$

Es decir,

$$\tilde{H}_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\tilde{H}_0(X)}.$$

□

Lema 1.6.6
Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces

$$\tilde{H}_n(g \circ f) = \tilde{H}_n(g) \circ \tilde{H}_n(f)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Demostración. Como $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ para todo $n \geq 0$ (cf. Proposición 1.4.21) y $H_n(f) = \tilde{H}_n(f)$ para todo $n \geq 1$ y toda función continua f, entonces el único detalle es cuando $n = 0$. Veamos que el mismo argumento que ocupamos en la Proposición 1.4.21 funciona. Para todo $c \in Z_n(X)$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_0(g \circ f)(c) &= \left[S_n(g \circ f)(c)\right]_\sim^Z \\
&= \left[\left(S_0(g) \circ S_0(f)(c)\right)\right]_\sim^Z \\
&= \left[S_0(g)\left(S_0(f)(c)\right)\right]_\sim^Z \\
&= \tilde{H}_0(g)\left(\left[S_0(f)(c)\right]_\sim^Y\right) \\
&= \tilde{H}_0(g)\left(\tilde{H}_0(f)(c)\right) \\
&= \tilde{H}_0(g) \circ \tilde{H}_0(f)(c).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.6.7
Supongamos que X, Y son espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función constante, entonces $\tilde{H}_n(f) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como (I) $H_n(f) = 0$ para todo $n \geq 1$ (cf. Corolario 1.4.22) y $H_n(f) = \tilde{H}_n(f)$ para todo $n \geq 1$, entonces el único detalle es cuando $n = 0$. Veamos que (gracias al Ejemplo 1.6.3) el mismo argumento que ocupamos en el Corolario 1.4.22 funciona. Supongamos que $f : X \to Y$ es constante con $f(x) = y_0$ y consideremos el espacio topológico que consiste de un solo punto, $\mathrm{pt} = \{*\}$. Si definimos $g : \mathrm{pt} \to Y$ por $* \mapsto y_0$ y $h : X \to \mathrm{pt}$ como la única función posible, entonces g, h son continuas y $f = g \circ h$. Por lo tanto,

$$\tilde{H}_0(f) = \tilde{H}_0(g) \circ \tilde{H}_0(h). \tag{1.76}$$

Por otro lado, como $\tilde{H}_0(\mathrm{pt}) = 0$ (cf. Ejemplo 1.6.3), entonces $\tilde{H}_0(h) = 0$ (la única función que tiene contradominio 0 es la función 0). Juntando esto con (1.76) obtenemos lo deseado. □

Lema 1.6.8
Supongamos que X, Y son espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son homotópicas, entonces $\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(g)$.

Demostración. De nuevo, el único detalle es cuando $n = 0$. Como f y g son homotópicas, el Teorema 1.5.10 implica que $H_0(f) = H_0(g)$. En particular,

$$H_0(f)([c]_0^X) = H_0(g)([c]_0^X) \text{ para todo } c \in \ker \epsilon_X$$

o equivalentemente,

$$[S_0(f)(c)]_0^Y = [S_0(g)(c)]_0^Y \text{ para todo } c \in \ker \epsilon_X.$$

Por el Lema 1.6.2, lo anterior implica

$$[S_0(f)(c)]_\sim^Y = [S_0(g)(c)]_\sim^Y \text{ para todo } c \in \ker \epsilon_X$$

o equivalentemente,

$$\tilde{H}_0(f)([c]_0^X) = \tilde{H}_0(g)([c]_0^X) \text{ para todo } c \in \ker \epsilon_X.$$

Por lo tanto, $\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(g)$. □

Lema 1.6.9
Supongamos que X es un espacio topológico. Si X es contraíble, entonces $\tilde{H}_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Demostración. De nuevo, el único detalle es cuando $n = 0$. Como X es contraíble, entonces id_X es homotópica a una función constante f. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\tilde{H}_0(X)} &= \tilde{H}_0(\mathrm{id}_X) && \text{(cf. Lema 1.6.5)}\\
&= \tilde{H}_0(f) && \text{(cf. Lema 1.6.8)}\\
&= 0 && \text{(cf. Lema 1.6.6)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{H}_0(X) = 0$. □

Capítulo 2

Propiedades de finitud

El teorema principal afirma que una propiedad de grupos llamada *tipo* FP_n es invariante bajo una equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría*. El objetivo principal de este capítulo es definir y estudiar la propiedad de grupos llamada *tipo* FP_n. Esta propiedad está definida a partir de una propiedad de módulos que tiene el mismo nombre. Por eso, empezamos por estudiar la propiedad de módulos.

2.1. Módulos de tipo FP_n

El objetivo de esta sección es definir y estudiar la propiedad de módulos llamada *tipo* FP_n. Veremos (I) que un módulo es finitamente generado si y solo si es de tipo FP_0 y (II) que un módulo es finitamente presentado si y solo si es de tipo FP_1. Por lo tanto, esta propiedad es una generalización de propiedades de finitud de módulos. Cabe recalcar que en esta sección R denota un anillo asociativo con unidad. El material del Apéndice B será necesario.

Referencias: La Proposición 2.1.9 está basada en la Proposición 8.4.3 del libro *Cohomology of Groups* de Kenneth S. Brown (cf. [5]).

Definición 2.1.1 (Sucesión exacta de homomorfismos)
Supongamos que L, M, N son R-módulos y que $f : L \to M$, $g : M \to N$ son homomorfismos de R-módulos. Decimos que la sucesión de homomorfismos de R-módulos

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

es *exacta* si $\operatorname{im} f = \ker g$.

En general, supongamos que $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una familia de R-módulos y que $\{f_k : M_k \to M_{k-1}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ es una familia de homomorfismos de R-módulos. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \quad (2.1)$$

es *exacta en* M_n (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ fijo) si $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$. Si (2.1) es exacta en todo M_k, simplemente decimos que la sucesión es *exacta*.

Ejemplo 2.1.2
Supongamos que M, N son R-módulos. Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos. Usando solo definiciones se puede demostrar que

1. $f : M \to N$ es suprayectivo si y solo si la siguiente sucesión es exacta.

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

2. $f : M \to N$ es inyectivo si y solo si la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

Proposición 2.1.3
Un R-módulo M es finitamente generado (cf. Definición B.1.14) si y solo si existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con L un R-módulo finitamente generado.

Demostración.
$\Longleftarrow$) Supongamos que M es finitamente generado y que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a M. Supongamos que L es el R-módulo libre (cf. Definición B.1.14) de dimensión n con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y que $f : L \to M$ es el homomorfismo de R-módulos que satisface
$$e_i \mapsto v_i.$$
Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a M, entonces f es suprayectivo y por el Ejemplo 2.1.2, esto es equivalente a que la sucesión
$$L \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$
sea exacta.
$\Longrightarrow$) Supongamos que L es un R-módulo finitamente generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y que
$$L \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta de homomorfismos de grupos. Por el Ejemplo 2.1.2, esto es equivalente a que f sea suprayectivo. Usando esto se puede demostrar que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es un subconjunto generador de M y por lo tanto, que M es finitamente generado. □

Proposición 2.1.4
Un R-módulo M es finitamente generado si y solo si existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con F un R-módulo libre finitamente generado.

Demostración.
$\Longrightarrow$) Esto es precisamente lo que vimos en la implicación "$\Longrightarrow$" de la Proposición 2.1.3.
$\Longleftarrow$) Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.3. □

Proposición 2.1.5
Un R-módulo M es finitamente presentado (cf. Definición B.2.4) si y solo si existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con F_0 y F_1 R-módulos libres finitamente generados.

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que M es finitamente presentado, es decir, supongamos que M es isomorfo a un R-módulo de la forma $F/\langle S\rangle$ donde F es un R-módulo libre finitamente generado y S es un subconjunto finito de F. Además, supongamos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de F. Veamos que existe una sucesión exacta
$$F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F/\langle S\rangle \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$
con F_0 y F_1 R-módulos libres finitamente generados.

- Sea $F_0 \coloneqq F$ y $f_0 : F \to F/\langle S\rangle$ la proyección canónica.
- Supongamos que $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$. Sea F_1 el R-módulo libre con base $\{s_1, \ldots, s_m\}$ y $f_1 : F_1 \to F_0$ el homomorfismo de R-módulos que satisface
$$s_i \mapsto s_i.$$

Como $f_0 : F \to F/\langle S\rangle$ es la proyección canónica, entonces f_0 es suprayectivo y por lo tanto, la sucesión (2.2) es exacta en $F/\langle S\rangle$. Resta probar exactitud en F_0, es decir, resta probar que $\operatorname{im} f_1 = \ker f_0$. De nuevo, como $f_0 : F \to F/\langle S\rangle$ es la proyección canónica, entonces

$$\ker f_0 = \langle S\rangle. \tag{2.3}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} f_1 &= \langle f(s_1), \dots, f(s_m)\rangle && \text{(pues } F_1 \text{ es libre)}\\
&= \langle s_1, \dots, s_m\rangle && \text{(pues } f_1 \text{ satisface } e_i \mapsto s_i)\\
&= \langle S\rangle. && (2.4)
\end{aligned}$$

Juntando (2.3) y (2.4) obtenemos lo deseado.
$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una sucesión exacta

$$F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

con F_0 y F_1 libres finitamente generados. Supongamos que $\{e_1, \dots, e_m\}$ es base de F_1. Entonces

$$\begin{aligned}
M &\cong F_0/\ker f_0 && \text{(por el primer teorema de isomorfismos (} f_0 \text{ es suprayectiva))}\\
&= F_0/\operatorname{im} f_1. && \text{(por exactitud de (2.5))}
\end{aligned}$$

Pero $\operatorname{im} f_1 = \langle f_1(e_1), \dots, f_1(e_m)\rangle$ (pues F_1 es libre) y por lo tanto,

$$M \cong F_0/\langle f_1(e_1), \dots, f_1(e_m)\rangle.$$

En particular, M es finitamente presentado. □

Definición 2.1.6 (Módulo de tipo FP_n)
Supongamos que M es un R-módulo y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es fijo. Decimos que M es de *tipo* FP_n si existe una sucesión exacta de homomorfismos

$$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde todo F_i es libre y finitamente generado.

Observación 2.1.7
Por las proposiciones anteriores,

- M es finitamente generado $\iff$ M es de tipo FP_0.
- M es finitamente presentado $\iff$ M es de tipo FP_1.

En lo que sigue, usaremos el concepto de módulo proyectivo (cf. Definición B.3.1) para dar caracterizaciones del concepto de módulo de tipo FP_n.

Proposición 2.1.8
Supongamos que M es un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es de tipo FP_0, es decir, existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos

$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con F un R-módulo libre finitamente generado.

2. Existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos

$$P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con P un R-módulo proyectivo finitamente generado.

Demostración.
$1 \implies 2)$ Es consecuencia inmediata de que todo módulo libre es proyectivo.
$2 \implies 1)$ La hipótesis implica que M es finitamente generado (cf. Proposición 2.1.3) y esto implica la existencia de la sucesión deseada (cf. Proposición 2.1.4) $\square$

Proposición 2.1.9
Supongamos que M es un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es de tipo FP_1, es decir, existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con F_0 y F_1 R-módulos libres finitamente generados.

2. Existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
con P_0 y P_1 R-módulos proyectivos finitamente generados.

3. M es finitamente generado y se satisface la siguiente propiedad:

   Si Q es un módulo proyectivo finitamente generado y
$$Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
   es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q \to M)$ es finitamente generado.

Demostración.
$1 \implies 2)$ Es consecuencia inmediata de que todo módulo libre también es proyectivo.
$2 \implies 3)$ Supongamos que existe una sucesión exacta de homomorfismos de R-módulos
$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2.6}$$
con P_0 y P_1 R-módulos proyectivos finitamente generados. La Proposición 2.1.8 implica que M es finitamente generado. Resta probar que M satisface la siguiente propiedad:

Si Q es un módulo proyectivo finitamente generado y
$$Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q \to M)$ es finitamente generado.

Supongamos que Q es un módulo proyectivo finitamente generado y que
$$Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta. Entonces
$$0 \longrightarrow \ker \epsilon \hookrightarrow Q \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$
es una sucesión exacta. Por otro lado, como (2.6) es exacta, entonces
$$0 \longrightarrow \ker(P_0 \to M) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$
también es exacta. Aplicando el lema de Schnauel (cf. Proposición B.3.5) a (2.7) y (2.8) obtenemos
$$Q \oplus \ker(P_0 \to M) \cong P_0 \oplus \ker \epsilon. \tag{2.9}$$
Como $Q \oplus \ker(P_0 \to M)$ es finitamente generado, entonces (2.9) implica que $P_0 \oplus \ker \epsilon$ también es finitamente generado y esto implica que $\ker \epsilon$ es finitamente generado (cf. Lema B.1.17).
$3 \implies 1)$ Supongamos que M está finitamente generado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y que satisface la siguiente propiedad:

Si Q es un módulo proyectivo finitamente generado y

$$Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q \to M)$ es finitamente generado.

Supongamos que F_0 es el R-módulo libre de rango n y que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de F_0. Definimos $f_0 : F_0 \to M$ como el homomorfismo que satisface $e_i \mapsto v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces f_0 es suprayectivo o equivalentemente, la sucesión

$$F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto (por la propiedad que estamos suponiendo que M satisface), $\ker f_0$ es finitamente generado. Denotemos por $\{w_1, \ldots, w_m\}$ a un subconjunto generador de $\ker f_0$. Ahora bien, supongamos que F_1 el R-módulo libre de rango m y que $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ es una base de F_1. Definimos $f_1 : F_1 \to F_0$ como el homomorfismo que satisface $e'_i \mapsto w_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como F_1 es libre, entonces

$$\operatorname{im} f_1 = \langle f_1(e'_1), \ldots, f_1(e'_m)\rangle = \langle w_1, \ldots, w_m\rangle = \ker f_0$$

y por lo tanto la sucesión

$$F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular M es de tipo FP_1. $\square$

Proposición 2.1.10
Supongamos $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es fijo y que M es un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es de tipo FP_n, es decir, existe una sucesión exacta

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con todo F_i libre y finitamente generado.

2. Existe una sucesión exacta

$$P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   con todo P_i proyectivo y finitamente generado.

3. M es finitamente generado y se satisface la siguiente propiedad:

   Supongamos que $k < n$. Si $Q_0, \ldots, Q_k$ son R-módulos proyectivos finitamente generados y

$$Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

   es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q_k \to Q_{k-1})$ es finitamente generado.

Demostración.
$1 \Longrightarrow 2$) Es consecuencia inmediata de que todo módulo libre también es proyectivo.
$2 \Longrightarrow 3$) Supongamos que existe una sucesión exacta

$$P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con todo P_i proyectivo y finitamente generado. Por las mismas razones que antes, M es finitamente generado y solo resta probar que M satisface la la siguiente propiedad:

Supongamos que $k < n$. Si $Q_0, \ldots, Q_k$ son R-módulos proyectivos finitamente generados y

$$Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q_k \to Q_{k-1})$ es finitamente generado.

Supongamos que $k < n$, que $P_0, \ldots, P_k$ son módulos proyectivos finitamente generados, y que

$$Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Aplicando la generalización del lema de Schnauel a las sucesiones

$$P_{k+1} \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$\ker(Q_k \to Q_{k-1}) \hookrightarrow Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$\ker(Q_k \to Q_{k-1}) \oplus P_k \oplus Q_{k-1} \oplus \cdots \;\cong\; P_{k+1} \oplus Q_k \oplus P_{k-1} \oplus \cdots \tag{2.10}$$

Donde se entiende que los sumandos que no aparecen son de la forma P_i y Q_j. Como los P_i y Q_j son finitamente generados, entonces

$$P_{k+1} \oplus Q_k \oplus P_{k-1} \oplus \cdots$$

es finitamente generado y por lo tanto, (2.10) implica que

$$P_0 \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus \ker(Q_k \to Q_{k-1})$$

también es finitamente generado. En particular, $\ker(Q_k \to Q_{k-1})$ es finitamente generado (cf. Lema B.1.17).
3 $\Longrightarrow$ 1) Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es precisamente la implicación (3) $\Longrightarrow$ (1) de la Proposición 2.1.9. Por eso, supongamos que $n > 1$ y que el resultado se satisface para $n-1$. Específicamente, supongamos que si N es un R-módulo finitamente generado y satisface la siguiente propiedad

> Supongamos que $k < n-1$. Si $P_0, \ldots, P_k$ son R-módulos proyectivos finitamente generados y
>
> $$P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
>
> es una sucesión exacta, entonces $\ker(P_k \to P_{k-1})$ es finitamente generado.

entonces N es de tipo FP_{n-1}. Veamos que el resultado se cumple para n. Supongamos que M es finitamente generado y que se satisface la siguiente propiedad:

> Supongamos que $k < n$. Si $Q_0, \ldots, Q_k$ son R-módulos proyectivos finitamente generados y
>
> $$Q_k \longrightarrow Q_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
>
> es una sucesión exacta, entonces $\ker(Q_k \to Q_{k-1})$ es finitamente generado.

Por hipótesis de inducción, M es de tipo FP_{n-1}, es decir, existe una sucesión exacta

$$F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con todo F_i libre y finitamente generado. Por lo tanto (por la propiedad que estamos suponiendo que M satisface), $\ker(F_{n-1} \to F_{n-2})$ es finitamente generado. Denotemos por $\{w_1, \ldots, w_m\}$ a un subconjunto generador de $\ker(F_{n-1} \to F_{n-2})$. Ahora bien, supongamos que F_n es el R-módulo libre de rango m y que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base de F_n. Definimos $f_n : F_n \to F_{n-1}$ como el homomorfismo que satisface $e_i \mapsto w_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como F_n es libre, entonces

$$\operatorname{im} f_n = \langle f_n(e_1), \ldots, f_n(e_m) \rangle = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle = \ker(F_{n-1} \to F_{n-2})$$

y por lo tanto la sucesión

$$F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, M es de tipo FP_n. □

2.2. Grupos de tipo FP_n

El objetivo de esta sección es definir y estudiar la propiedad de grupos llamada *tipo* FP_n. El material del Apéndice C será necesario.

Referencias: El material en esta sección está basado en el capítulo 8.5 del libro *Cohomology of Groups* de Kenneth S. Brown (cf. [5]).

Definición 2.2.1 (El $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}_G$)
Supongamos que $+$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$, que G es un grupo, y consideremos el anillo $\mathbb{Z}G$. Para todo $\sum_{i=0}^{m} n_i g_i \in \mathbb{Z}G$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\left(\sum_{i=0}^{m} n_i g_i\right) \cdot n := \left(\sum_{i=0}^{m} n_i\right) n.$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo. Si consideramos a $\mathbb{Z}$ con esta estructura, denotamos $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$. Cabe recalcar que $\mathbb{Z}_G$ es el módulo obtenido a partir de linearizar la G-acción trivial en $(\mathbb{Z}, +)$ (cf. Observación C.2.2 y Definición C.2.3).

Proposición 2.2.2
Supongamos que G es un grupo. Entonces

$$G \text{ es finitamente generado } \iff \mathbb{Z}_G \text{ es de tipo } FP_1.$$

Demostración. Supongamos que $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}_G$ es el homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos que satisface

$$\epsilon(g) = 1 \text{ para todo } g \in G.$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que G es finitamente generado. Por la Proposición C.2.7 esto es equivalente a que $\ker \epsilon$ sea finitamente generado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Además, (por la Proposición 2.1.4) esto es equivalente a que exista una sucesión exacta

$$F \xrightarrow{\varphi} \ker \epsilon \longrightarrow 0$$

con F un $\mathbb{Z}G$-módulo libre finitamente generado. Esto implica que la sucesión

$$F \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_G \longrightarrow 0$$

también es exacta. Como F y $\mathbb{Z}G$ son módulos libres finitamente generados, la existencia de la sucesión anterior implica que $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_1.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_1. Por la Proposición 2.1.9, esto es si y solo si $\mathbb{Z}_G$ es finitamente generado y satisface la siguiente propiedad:

> Si P es un módulo proyectivo finitamente generado y $\phi : P \to \mathbb{Z}_G$ es un homomorfismo suprayectivo, entonces $\ker \phi$ es finitamente generado.

Ocupemos esta propiedad: Como $\mathbb{Z}G$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre y en particular proyectivo, podemos poner $P := \mathbb{Z}G$. Además, como ϵ es un homomorfismo suprayectivo, también podemos poner $\phi = \epsilon$. De esta manera, la propiedad implica que $\ker \epsilon$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado o equivalentemente (por la Proposición C.2.7), que G es finitamente generado. $\square$

La demostración de la siguiente proposición ocupa conceptos que no hemos definido pero desafortunadamente, definir estos conceptos excede los objetivos de la tesis. Por eso, solo damos una idea de la demostración.

Proposición 2.2.3
Supongamos que G es un grupo. Si G es finitamente presentado, entones $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_2.

Idea de la demostración. Supongamos que Y es un 2-complejo finito con grupo fundamental G, es decir $\pi_1 Y = G$. Si X es el cubriente universal de Y y $C_*(X)$ es es complejo de cadenas celular de X, entonces se puede demostrar que

$$C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos y que $C_i(X)$ son libres y finitamente generados. $\square$

Definición 2.2.4 (Grupo de tipo FP_n)
Supongamos que G es un grupo. Decimos que G es de *tipo* FP_n si $\mathbb{Z}_G$ es de tipo FP_n.

Observación 2.2.5
Con esta notación, los dos resultados anteriores se pueden escribir de la siguiente manera: Si G es un grupo, entonces

- G es finitamente generado $\iff$ G es de tipo FP_1
- G es finitamente presentado $\implies$ G es de tipo FP_2.

En contraste con el caso de módulos (cf. Observación 2.1.7), en el artículo *Morse theory and finiteness properties of groups* (cf. [2], pp. 460), los autores Bestvina y Brady demostraron que

$$G \text{ es de tipo } FP_2 \;\not\Longrightarrow\; G \text{ es finitamente presentado.}$$

El siguiente ejemplo ocupa conceptos que no hemos definido pero desafortunadamente, definir estos conceptos excede los objetivos de la tesis.

Ejemplo 2.2.6
Supongamos que G es un grupo y que X es un complejo CW. Decimos que X es un G*-complejo celular libre* si existe una acción " $\cdot$ " tal que para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para toda n-célula σ, y para todo $g \in G$

- $g \cdot \sigma \in X$, y
- $g\sigma \neq \sigma$ si $g \neq e_G$.

Se puede demostrar que esto induce una acción libre en el conjunto de n-células de X. Además, podemos extender esta acción a una acción libre en el grupo abeliano libre generado por el conjunto de n-células de X. Así obtenemos el $\mathbb{Z}G$-módulo de permutación del conjunto de n-células de X (cf. Definición C.2.4). Por definición, este módulo es

$$\mathbb{Z}\left[\{\sigma \mid \sigma \text{ es una } n\text{-célula en } X\}\right].$$

Pero (también por definición) la estructura aditiva de este $\mathbb{Z}G$-módulo es el grupo $C_n(X)$ y se puede demostrar que el complejo de cadenas celular aumentado $C_*(X)$ es un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}G$-módulos (solo haría falta verificar que el operador frontera "saca $\mathbb{Z}G$-escalares").

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2.11}$$

Además, como G actúa libremente en $C_n(X)$, la Proposición C.2.5 implica que $C_n(X)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre con base igual a cualquier conjunto de representantes de las G-órbitas en $C_n(X)$. Finalmente, si X es contraible, entonces $\tilde{H}_*(X) = 0$ o equivalentemente, (2.11) es una sucesión exacta. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado: *Supongamos que X es un G-complejo celular libre. Si X es contraible, entonces $C_n(X)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre finitamente generado y la sucesión* (2.11) *es exacta. En particular, G es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.* Por ejemplo, si $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ fijo, se puede demostrar que $\mathbb{R}^m$ es un $\mathbb{Z}^m$-complejo celular libre (con la acción dada por traslación) y como $\mathbb{R}^m$ es contraible, entonces $\mathbb{Z}^m$ *es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Desafortunadamente, las herramientas necesarias para demostrar las afirmaciones en el siguiente ejemplo exceden los objetivos de la tesis.

Ejemplo 2.2.7

- Supongamos que

  $$G := \left\{a, b, c, x, y \mid [x,a], [y,a], [x,b], [y,b], [a^{-1}x, c], [a^{-1}y, c], [b^{-1}a, c]\right\}$$

  donde $[u,v] = uvu^{-1}v^{-1}$. Por definición, G es finitamente presentado y por lo tanto es de tipo FP_2. Sin embargo, en el artículo *A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated* (cf. [14]), el autor John Stallings demostró que no es de tipo FP_3. Por lo tanto,

  $$FP_2 \;\not\Longrightarrow\; FP_3.$$

- Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos D_n como el producto directo de n grupos libres de rango 2. Es decir,

$$D_n \coloneqq \langle x_1, y_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n, y_n \rangle.$$

  En lo que sigue, vamos a definir D_n-acciones en dos diferentes grupos infinitamente generados:

  - Supongamos que F_∞ es el grupo libre generado por $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Es decir, $F_\infty = \langle a_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$. Definimos

$$x_i \cdot a_k = y_i \cdot a_k = a_{k+1} \text{ para todo } i, k.$$

  - Supongamos que $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $\mathbb{Q}_d$ es el grupo aditivo de todos los números racionales q con denominador igual a una potencia de d. Definimos

$$x_i \cdot q = y_i \cdot q = dq \text{ para todo } i, q.$$

  Finalmente, definimos

$$A_n \coloneqq D_n \rtimes F_\infty \quad \text{y} \quad B_n \coloneqq D_n \rtimes \mathbb{Q}_d$$

  donde el símbolo "$\rtimes$" denota el semiproducto directo. En el libro *Homological dimension of discrete groups* (cf. [3], pp. 37-39), el autor Robert Bieri demostró que A_n y B_n son de tipo FP_n pero no de tipo FP_{n+1}. Por lo tanto,

$$FP_n \not\Longrightarrow FP_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Proposición 2.2.8
Supongamos que G es un grupo. Si G es finito, entonces G es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Demostración. Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que S_n es el conjunto de todas las $(n+1)$-adas de elementos de G. Específicamente, denotemos

$$S_n \coloneqq \{(g_0, \ldots, g_n) \mid g_0, \ldots, g_n \in G\}.$$

Además, supongamos que F_n es el grupo abeliano libre generado por S_n. Si para todo $\sigma \in G$ y $(g_0, \ldots, g_n) \in S_n$ definimos

$$\sigma \cdot (g_0, \ldots, g_n) \coloneqq (\sigma g_0, \ldots, \sigma g_n),$$

y extendemos esta operación escalar a todo $\mathbb{Z}G$, es decir, para todo $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$, $\sigma_0, \ldots, \sigma_m \in G$, y $(g_0, \ldots, g_n) \in S_n$ definimos

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \sigma_k \right) \cdot (g_0, \ldots, g_n) \coloneqq \sum_{k=0}^{m} a_k (\sigma_k g_0, \ldots, \sigma_k g_n) \tag{2.12}$$

entonces F_n forma un $\mathbb{Z}G$-módulo con esta operación. En lo que sigue, veremos que F_n es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre finitamente generado y que existe una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2.13}$$

- *F_n es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre finitamente generado*: Veamos que

$$\mathcal{B} \coloneqq \{(e_G, g_1, \ldots, g_n) \mid g_1, \ldots, g_n \in G\}$$

  es una $\mathbb{Z}G$-base de F_n.

- $\mathcal{B}$ *es un* $\mathbb{Z}G$*-subconjunto generador de* F_n: Como (I) todo elemento de F_n es de la forma

$$a_0\left(g_0^0, g_1^0, \ldots, g_n^0\right) + a_1\left(g_0^1, g_1^1, \ldots, g_n^1\right) + \cdots + a_m\left(g_0^m, g_1^m, \ldots, g_n^m\right)$$
$$\text{con } a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z} \text{ y } (g_0^i, g_1^i, \ldots, g_n^i) \in S_n$$

y (II) para todo $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ y $(g_0^i, g_1^i, \ldots, g_n^i) \in S_n$

$$a_0\left(g_0^0, g_1^0, \ldots, g_n^0\right) + a_1\left(g_0^1, g_1^1, \ldots, g_n^1\right) + \cdots + a_m\left(g_0^m, g_1^m, \ldots, g_n^m\right) =$$
$$\underbrace{a_0 g_0^0}_{\in \mathbb{Z}G}\underbrace{\left(e_G, (g_0^0)^{-1}g_1^0, \ldots, (g_0^0)^{-1}g_n^0\right)}_{\in \mathcal{B}} + \underbrace{a_1 g_0^1}_{\in \mathbb{Z}G}\underbrace{\left(e_G, (g_0^1)^{-1}g_1^1, \ldots, (g_0^1)^{-1}g_n^1\right)}_{\in \mathcal{B}} + \cdots + \underbrace{a_m g_0^m}_{\in \mathbb{Z}G}\underbrace{\left(e_G, (g_0^m)^{-1}g_1^m, \ldots, (g_0^m)^{-1}g_n^m\right)}_{\in \mathcal{B}}.$$

entonces $\mathcal{B}$ es un $\mathbb{Z}G$-conjunto generador de F_n.
- $\mathcal{B}$ *es* $\mathbb{Z}G$*-linealmente independiente*:
Antes que nada, veamos la siguiente afirmación:

Afirmación. Si $\xi, \xi' \in \mathcal{B}$ son distintos, entonces $g \cdot \xi \neq g' \cdot \xi'$ para todo $g, g' \in G$.
Demostración. Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que existen $g, g' \in G$ tales que $g \cdot \xi = g' \cdot \xi'$. Si denotamos $\xi = (e_G, g_1, \ldots, g_n)$ y $\xi' = (e_G, g_1', \ldots, g_n')$, entonces

$$(g, gg_1, \ldots, gg_n) = g \cdot \xi = g' \cdot \xi' = (g', g'g_1', \ldots, g'g_n').$$

En particular, $g = g'$ y $gg_i = g'g_i'$ para todo i. Esto implica que $g_i = g_i'$ para todo i o equivalentemente, que $\xi = \xi'$. Contradiciendo la suposición de que ξ y ξ' son distintos.
Fin de la afirmación.

Ahora sí, veamos que $\mathcal{B}$ es $\mathbb{Z}G$-linealmente independiente. Supongamos que $\xi_1, \ldots, \xi_N$ son los distintos elementos de $\mathcal{B}$, es decir, denotemos

$$\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\} \text{ con } \xi_i \neq \xi_j \text{ si } i \neq j,$$

y supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{Z}G$ son tales que

$$\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_N\xi_N = 0.$$

Si denotamos $\lambda_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i \sigma_j^i \in \mathbb{Z}G$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{j=1}^{m_1} a_j^1\sigma_j^1\right)\xi_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m_N} a_j^N\sigma_j^N\right)\xi_N \\ &= \left(a_1^1\sigma_1^1 + \cdots + a_{m_1}^1\sigma_{m_1}^1\right)\xi_1 + \cdots + \left(a_1^N\sigma_1^N + \cdots + a_{m_N}^N\sigma_{m_N}^N\right)\xi_N \\ &= a_1^1\left(\sigma_1^1 \cdot \xi_1\right) + \cdots + a_{m_1}^1\left(\sigma_{m_1}^1 \cdot \xi_1\right) + \cdots + a_1^N\left(\sigma_1^N \cdot \xi_N\right) + \cdots + a_{m_N}^N\left(\sigma_{m_N}^N \cdot \xi_N\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\sigma_j^k\xi_i \neq \sigma_{j'}^{k'}\xi_{i'}$ para todo i, j, k y i', j', k' (por la afirmación), entonces (2.14) es una ecuación de la forma

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \underbrace{\eta_j}_{\in \mathcal{B}} = 0$$

con $a_j \in \mathbb{Z}$ y los $\eta_j \in \mathcal{B} \subset S$ distintos. Por lo tanto, el Corolario C.1.4 implica que $a_j = 0$ para todo j y en nuestro caso (la ecuación (2.14)), implica que $a_j^i = 0$ para todo i, j y por lo tanto, $\lambda_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i\sigma_j^i = 0$.

- *Existe una sucesión exacta de* $\mathbb{Z}G$*-módulos como* (2.13): Empezamos por escribir la notación y los resultados que usaremos para obtener lo deseado.

- Para todo $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, definimos

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] \coloneqq (e_G, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n) \in \mathcal{B}.$$

- Veamos que

$$\mathcal{B} = \left\{[g_1|g_2|\cdots|g_n] \mid g_1, \ldots, g_n \in G\right\}.$$

Solo resta probar la inclusión "$\subset$": Si $(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}$ y definimos

$$\begin{aligned} g_1 &\coloneqq x_1 \\ g_2 &\coloneqq x_1^{-1}x_2 \\ g_3 &\coloneqq x_2^{-1}x_3 \\ &\vdots \\ g_n &\coloneqq x_{n-1}^{-1}x_n \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} [g_1|g_2|\ldots|g_n] &= (e_G, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n) \\ &= \Big(e_G, x_1, (x_1)(x_1^{-1}x_2), \ldots, (x_1)(x_1^{-1}x_2)x_2^{-1}\cdots x_{n-1}(x_{n-1}^{-1}x_n)\Big) \\ &= (e_G, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos lo deseado.

- Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ definimos $d_i^n : F_n \to F_{n-1}$ como el homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos que satisface

$$d_i^n\left([g_1|g_2|\cdots|g_n]\right) = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_n] & \text{si } 0 < i < n \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}] & \text{si } i = n \end{cases}$$

- Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y definamos $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$ el homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos que satisface

$$\partial_n\left([g_1|g_2|\cdots|g_n]\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n\left([g_1|g_2|\cdots|g_n]\right). \tag{2.15}$$

En lo que sigue, veremos que si $\epsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ es el $\mathbb{Z}G$-homomorfismo que satisface $[g_1|\cdots|g_n] \mapsto 1$, entonces

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos. Por la suprayectividad de ϵ tenemos exactitud en $\mathbb{Z}$ y por lo tanto solo resta probar exactitud en los F_n.

- $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subset \ker\partial_n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:
Equivalentemente veremos que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ (cabe recalcar que la demostración que daremos es esencialmente idéntica a la del Teorema 1.4.9). Antes que nada, veamos que

$$d_j^n \circ d_j^{n+1} = d_{i-1}^n \circ d_j^{n+1} \text{ si } j < i.$$

Primero, supongamos que $0 < j < i < n+1$. Entonces para todo $g_1, \dots, g_n \in G$,

$$
\begin{aligned}
&d_j^n \circ d_i^{n+1}([g_1|\cdots|g_{n+1}]) = \\
&d_j^n([g_1|\cdots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) \\
&= \begin{cases}
d_j^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j|g_{j+1}g_{j+2}|g_{j+3}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-1 \\
d_j^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j|g_{j+1}|g_{j+2}g_{j+3}|g_{j+4}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-2 \\
d_j^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j|g_{j+1}|g_{j+2}|g_{j+3}g_{j+4}|g_{j+5}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-3 \\
d_j^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j|g_{j+1}|\cdots|g_{i-1}|g_i|g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j < i-3
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
[g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1} g_{j+2}|g_{j+3}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j = i-1 \\
[g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}g_{j+3}|g_{j+4}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j = i-2 \\
[g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}|g_{j+3}g_{j+4}|g_{j+5}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j = i-3 \\
[g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}|\cdots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j < i-3
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&d_{i-1}^n \circ d_j^{n+1}([g_1|\cdots|g_{n+1}]) = \\
&d_{i-1}^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}|\cdots|g_{n+1}]) \\
&= \begin{cases}
d_{i-1}^n([g_1|\cdots|g_{i-4}|g_{i-3}|g_{i-2}|\underbrace{g_{i-1}g_i}|g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-1 \\
d_{i-1}^n([g_1|\cdots|g_{i-3}|g_{i-2}g_{i-1}|\underbrace{g_i}|g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-2 \\
d_{i-1}^n([g_1|\cdots|g_{i-4}|g_{i-3}g_{i-2}|g_{i-1}|\underbrace{g_i}|g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j = i-3 \\
d_{i-1}^n([g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}|\cdots|g_{i-1}|\underbrace{g_i}|g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}]) & \text{si } j < i-3
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
[g_1|\cdots|g_{i-2}|g_{i-1}g_i g_{i+2}|g_{i+3}|\cdots|g_n] & \text{si } j = i-1 \\
[g_1|\cdots|g_{i-3}|g_{i-2}g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j = i-2 \\
[g_1|\cdots|g_{i-4}|g_{i-3}g_{i-2}|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j = i-3 \\
[g_1|\cdots|g_{j-1}|g_j g_{j+1}|g_{j+2}|\cdots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_{n+1}] & \text{si } j < i-3
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Comparando (2.16) y (2.17) vemos que para todo $g_1, \dots, g_n \in G$,

$$d_j^n \circ d_j^{n+1}\left([g_1|\cdots|g_n]\right) = d_{i-1}^n \circ d_j^{n+1}\left([g_1|\cdots|g_n]\right) \text{ si } 0 < j < i < n+1.$$

Como $\mathcal{B} = \left\{[g_1|g_2|\cdots|g_n] \mid g_1, \dots, g_n \in G\right\}$ es $\mathbb{Z}G$-base de F_n, lo anterior implica que

$$d_j^n \circ d_j^{n+1} = d_{i-1}^n \circ d_j^{n+1}] \text{ si } 0 < j < i < n+1.$$

Los casos $j = 0$ y $i = n+1$ son más sencillos pero se tratan de manera análoga. Por lo tanto,

$$d_j^n \circ d_j^{n+1} = d_{i-1}^n \circ d_j^{n+1} \text{ si } j < i.$$

Ahora sí, veamos que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Supongamos que $g_1, \dots, g_n \in G$ y denotemos $x \coloneqq [g_1|\cdots|g_n]$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \partial_{n+1}(x) &= \partial_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_i^{n+1}(x)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \partial_n\left(d_i^{n+1}(x)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j d_j^n\left(d_i^{n+1}(x)\right)\right\}\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(d_j^n\circ d_i^{n+1}(x)\right)\right\}\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\left(d_j^n\circ d_i^{n+1}\right)(x)\\
&= \sum_{0\le j<i\le n+1}(-1)^{i+j}\left(d_j^n\circ d_i^{n+1}\right)(x) + \sum_{0\le i\le j\le n}(-1)^{i+j}\left(d_j^n\circ d_i^{n+1}\right)(x)\\
&= \sum_{0\le j<i\le n+1}(-1)^{i+j}\left(d_{i-1}^n\circ d_j^{n+1}\right)(x) + \sum_{0\le i\le j\le n}(-1)^{i+j}\left(d_j^n\circ d_i^{n+1}\right)(x)\\
&= \sum_{0\le j<i\le n+1}(-1)^{i+j}\left(d_{i-1}^n\circ d_j^{n+1}\right)(x) + \sum_{0\le j'\le i'-1\le n}(-1)^{j'+i'-1}d_{i'-1}^n\circ d_{j'}^{n+1}(x)\\
&= \sum_{0\le j<i\le n+1}(-1)^{i+j}d_{i-1}^n\circ d_j^{n+1}(x) + \sum_{0\le j'<i'\le n+1}(-1)^{j'+i'-1}d_{i'-1}^n\circ d_{j'}^{n+1}(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B} = \left\{[g_1|g_2|\cdots|g_n] \mid g_1,\ldots,g_n \in G\right\}$ es $\mathbb{Z}G$-base de F_n, lo anterior implica que $\partial\circ\partial_{n+1} = 0$. Equivalentemente, $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subset \ker\partial_n$.

- $\ker\partial_n \subset \operatorname{im}\partial_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$:
  Supongamos que F_n' es el $\mathbb{Z}$-módulo obtenido a partir de restringir la operación escalar del $\mathbb{Z}G$-módulo F_n a $\mathbb{Z}$. En otras palabras, F_n' es el $\mathbb{Z}$-módulo cuya estructura aditiva es $\mathbb{Z}S_n$ (el grupo abeliano generado por S_n) y cuya multiplicación escalar está dada por

$$n\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}a_j(g_0^j,\ldots,g_n^j)\right) = \sum_{j=0}^{m}(n\cdot a_j)(g_0^j,\ldots,g_n^j).$$

  Cabe recalcar que F_n' y F_n solo difieren en la operación escalar. Usando solo definiciones se puede demostrar que S_n es una $\mathbb{Z}$-base de F_n' y por lo tanto todo homomorfismo de F_n' en otro $\mathbb{Z}$-módulo queda completamente determinado por sus valores en S_n. Por eso, para todo $i \in \{0,\ldots,n\}$ podemos definir $\delta_i^n : F_n' \to F_{n-1}'$ como el homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos determinado por

$$(g_0,\ldots,g_n) \mapsto ((g_0,\ldots,g_{i-1},g_{i+1},\ldots,g_n) \text{ para todo } (g_0,\ldots,g_n)\in S_n.$$

  En palabras, $\delta_i^n\left((g_0,\ldots,g_n)\right)$ es el elemento de S^{n-1} obtenido a partir de eliminar la i-ésima entrada de $(g_0,\ldots,g_n)$.
  Usando solo definiciones se puede demostrar (I) que δ_i^n es un homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos (recordemos que lo definimos como un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos)[1], específicamente se puede demostrar que

$$\delta_i^n(r\cdot x) = r\cdot\delta_i^n(x) \text{ para todo } r\in\mathbb{Z}G \text{ y todo } x\in F_n'.$$

[1]Específicamente, lo definimos como un homomorfismo de F_n' a F_{n-1}' y estamos diciendo que se puede demostrar que la regla de correspondencia de δ_i^n también define un $\mathbb{Z}G$-homomorfismo entre F_n y F_{n-1}.

(donde el producto escalar en la ecuación anterior es el definido en (2.12)) y (II) que

$$\delta_i^n([g_1|\cdots|g_n]) = d_i^n([g_1|\cdots|g_n]) \text{ para todo } g_1,\ldots,g_n \in G. \tag{2.18}$$

Como el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{[g_1|\cdots|g_n] \mid g_1,\ldots,g_n \in G\right\}$$

es una $\mathbb{Z}G$-base de F_n, entonces (2.18) implica que $\delta_i^n = d_i^n$ y por lo tanto

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n d_i^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n \delta_i^n.$$

Como δ_i^n es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, lo anterior implica que ∂_n también es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.
Por otro lado, consideremos el homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\begin{aligned} h_n : F_n &\to F_{n+1} \\ (g_0,\ldots,g_n) &\mapsto (e_G, g_0,\ldots,g_n) \end{aligned}$$

Notemos que para todo $g_0,\ldots,g_n \in G$

$$\begin{aligned} (h_{n-1}\circ d_i^n)\,(g_0,\ldots,g_n) &= h_{n-1}(g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_n) \\ &= (e_G, g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_n) \\ &= d_{i+1}^{n+1}(e_G, g_0,\ldots,g_n) \end{aligned} \tag{2.19}$$

En lo que sigue, usaremos (2.19) para ver que

$$\partial_{n+1}\circ h_n + h_{n-1}\circ\partial_n = \mathrm{id}_{F_n}. \tag{2.20}$$

Supongamos que $(g_0,\ldots,g_n) \in S_n$, entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{n+1}\circ h_n + h_{n-1}\circ\partial_n)\big((g_0,\ldots,g_n)\big) &= \\ \partial_{n+1}\big((e_G,g_0,\ldots,g_n)\big) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n(g_0,\ldots,g_n)\right) &= \\ \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j d_j^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n(g_0,\ldots,g_n)\right) &= \\ d_0^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j d_j^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n(g_0,\ldots,g_n)\right) &= \\ (g_0,\ldots,g_n) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1} d_{j+1}^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n(g_0,\ldots,g_n)\right) &= \\ (g_0,\ldots,g_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} d_{i+1}^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i (h_{n-1}\circ d_i^n)(g_0,\ldots,g_n) &= \\ (g_0,\ldots,g_n) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} d_{i+1}^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{i+1}^{n+1}(e_G,g_0,\ldots,g_n)}_{0} &= \\ (g_0,\ldots,g_n) & \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se cumple por (2.19). Como ∂_k y h_k son homomorfismos entre $\mathbb{Z}$-módulos y el conjunto $S_n = \{(g_0, g_1, \ldots, g_n) \mid g_0, g_1, \ldots, g_n \in G\}$ es base de F_n, entonces lo anterior implica (2.20).

Ahora sí, veamos que $\ker \partial_n \subset \operatorname{im} \partial_{n+1}$. Si $x \in \ker \partial_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\big(h_n(x)\big) &= \partial_{n+1} \circ h_n(x) \\
&= \partial_{n+1} \circ h_n(x) + h_{n-1} \circ \cancelto{0}{\partial_n(x)} && (x \in \ker \partial_n) \\
&= (\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n)(x) = x.
\end{aligned}$$

En particular, $x \in \operatorname{im} \partial_{n+1}$.

Por lo tanto, existe una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con todo F_n libre y finitamente generado. En particular, G es de tipo FP_n para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $\square$

Proposición 2.2.9

Supongamos que G es un grupo y que $H \leq G$ un subgrupo de G. Si H tiene índice finito, entonces

$$G \text{ es de tipo } FP_n \iff H \text{ es de tipo } FP_n.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que G es de tipo FP_n. Por definición, existe una sucesión exacta

$$P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 \tag{2.21}$$

con todo P_i proyectivo y finitamente generado. Ahora bien, como todo homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos también es un homomorfismo de $\mathbb{Z}H$-módulos, entonces la sucesión (2.21) induce la siguiente sucesión exacta de $\mathbb{Z}H$-módulos:

$$\operatorname{res}_H^G P_n \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_1 \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_0 \longrightarrow 0$$

Además, como todo P_i es proyectivo y finitamente generado, entonces el Lema C.2.13 implica que todo $\operatorname{res}_H^G P_i$ también es proyectivo y finitamente generado. Por lo tanto, H es de tipo FP_n.

$\Longleftarrow$) Supongamos que H es de tipo FP_n. Veamos que G es de tipo FP_n. Específicamente, veamos que $\mathbb{Z}_G$ satisface el inciso (3) de la Proposición 2.1.10. Como $\mathbb{Z}_G$ obviamente es finitamente generado como $\mathbb{Z}G$-módulo, solo resta probar que $\mathbb{Z}G$ satisface la siguiente propiedad:

> Supongamos que $k < n$. Si
>
> $$P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$
>
> es una sucesión exacta con todo P_i es proyectivo, entonces $\ker(P_k \to P_{k-1})$ es finitamente generado.

Supongamos que $k < n$ y que

$$P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta con todo P_i proyectivo. Por las mismas razones que en la implicación conversa, esto induce una sucesión exacta de $\mathbb{Z}H$-módulos

$$\operatorname{res}_H^G P_k \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_1 \longrightarrow \operatorname{res}_H^G P_0 \longrightarrow 0$$

con todo $\operatorname{res}_H^G P_i$ proyectivo. Como $\mathbb{Z}H$ es de tipo FP_n, entonces el inciso (3) de la Proposición 2.1.10 implica que $\ker(\operatorname{res}_H^G P_k \to \operatorname{res}_H^G P_{k-1})$ es $\mathbb{Z}H$-finitamente generado. Pero

$$\ker(\operatorname{res}_H^G P_k \to \operatorname{res}_H^G P_{k-1}) = \ker(P_k \to P_{k-1})$$

(como conjuntos, no como módulos) pues $\operatorname{res}_H^G P_i = P_i$ (como conjuntos). Por lo tanto, $\ker(P_k \to P_{k-1})$ es $\mathbb{Z}H$-finitamente generado y en particular, también es $\mathbb{Z}G$-finitamente generado. $\square$

Capítulo 3

Nociones de teoría geométrica de grupos

El teorema principal afirma que la propiedad "ser un grupo de tipo FP_n" es invariante bajo una equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría*. El objetivo principal de este capítulo es definir y estudiar la equivalencia de grupos llamada *cuasi-isometría*. Esta equivalencia es un caso particular de una equivalencia de espacios métricos que tiene el mismo nombre. Por eso, estudiamos primero la equivalencia en los espacios métricos. Sin embargo, antes de esto, estudiaremos las herramientas que nos permitirán ver a un grupo finitamente generado como un objeto geométrico.

3.1. Gráficas de Cayley y la métrica de las palabras

El objetivo de esta sección es definir y estudiar la gráfica de Cayley de un grupo respecto a un subconjunto generador finito y la métrica de las palabras de un grupo respecto a un subconjunto generador finito. Estos conceptos nos permitirán ver a un grupo finitamente generado como un objeto geométrico.

Referencias: El material en esta sección está basado en los capítulos 3 y 5.2 del libro *Geometric Group Theory: An introduction* de Clara Löh (cf. [9]).

Definición 3.1.1 (Gráfica)
Una *gráfica* es un par ordenado (V, E) donde V es un conjunto y

$$E \subset \left\{ e \subset V \mid |e| = 2 \right\}.$$

Decimos que un elemento de V es un *vértice* y que un elemento de E es una *arista*. Si $v, w \in V$ son tales que $\{v, w\} \in E$, decimos que v y w son *adyacentes* o *vecinos*. Cabe recalcar que en la literatura este concepto también se conoce como *gráfica simple* o *gráfica simplicial*.

Definición 3.1.2 (Isomorfismo de gráficas)
Supongamos que $X = (V, E)$, $X' = (V', E')$ son gráficas y que $f : V \to V'$ es una función. Decimos que f es un *isomorfismo de gráficas entre X y X'* si f es biyectiva y satisface la equivalencia

$$\{v, w\} \in E \iff \{f(v), f(w)\} \in E'.$$

Si existe un isomorfismo de gráficas entre X y X', decimos que X y X' son *gráficas isomorfas*.

Definición 3.1.3 (Camino de longitud n en una gráfica)
Supongamos que $X = (V, E)$ es una gráfica y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un *camino de longitud n en X* es una sucesión $v_0, \ldots, v_n$ de vértices distintos tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. En este caso, también decimos que $v_0, \ldots, v_n$ es un *camino de v_0 a v_n* y que *v_0 y v_n están conectados*. Si cualesquiera dos vértices están conectados, decimos que X es una *gráfica conexa*.

Notación 3.1.4
Supongamos que G es un grupo. Para todo S subconjunto de G denotamos

$$S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}.$$

Definición 3.1.5 (Gráfica de Cayley)
Supongamos que G es un grupo. Para todo S subconjunto generador de G definimos la gráfica

$$\mathrm{Cay}(G,S) := \left(G, \left\{\{g, g\cdot s\} \mid g \in G,\ s \in (S\cup S^{-1}) \setminus \{e_G\}\right\}\right)$$

y decimos que $\mathrm{Cay}(G,S)$ es la *gráfica de Cayley de G con respecto a S.*

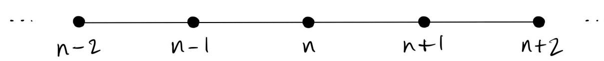
Observación 3.1.6
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Entonces para todo $g, h \in G$ distintos

$$g \text{ y } h \text{ están conectados en } \mathrm{Cay}(G,S) \iff \exists s \in S \cup S^{-1}\,(g\cdot s = h)\,.$$

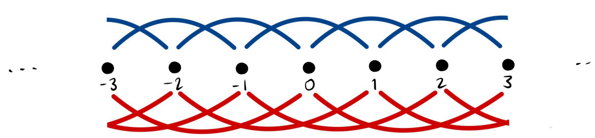
En palabras, g y h están conectados en $\mathrm{Cay}(G,S)$ si y solo si son distintos y existe un elemento de $S\cup S^{-1}$ que puedo multiplicarle a g (por la derecha) para obtener h.

Ejemplo 3.1.7

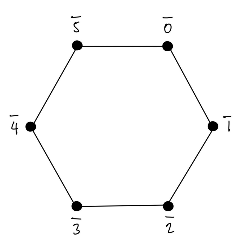
1. Consideremos $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$. Entonces n y m están conectados en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$ si y solo si $m = n\pm 1$. Por eso, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$ se ve así:



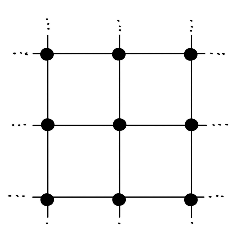
2. Consideremos $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{2,3\}$. Entonces n y m están conectados en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{2,3\})$ si y solo si $m = n\pm 2$ o $m = n \pm 3$. Por eso, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{2,3\})$ se ve así:



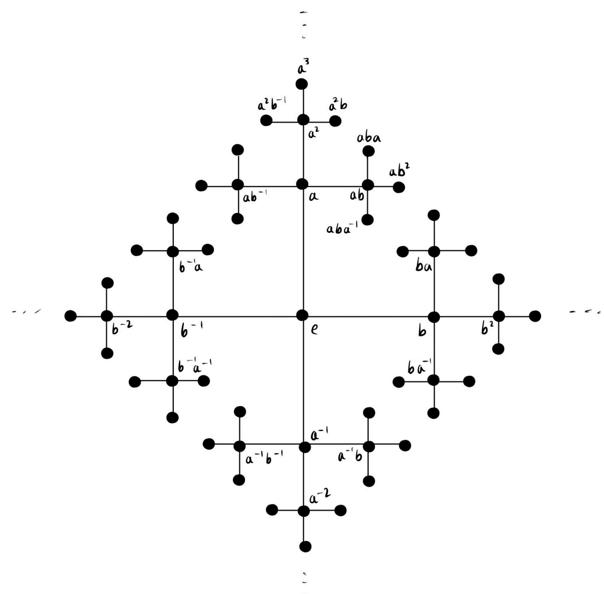
3. Supongamos que $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ y consideremos $G = \mathbb{Z}_k$ y $S = \{\overline{1}\}$. Entonces $\overline{n}$ y $\overline{m}$ están conectados en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_k,\{\overline{1}\})$ si y solo si $\overline{m} = \overline{n} \pm \overline{1} = \overline{n \pm 1}$. Por eso, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_k,\{\overline{1}\})$ se ve así (en el caso $k = 6$):



4. Consideremos $G = \mathbb{Z}^2$ y $S = \{(1,0),(0,1)\}$. Entonces u y v están conectados en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$ si y solo si $v = u \pm (1,0)$. Por eso, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2,\{(1,0),(0,1)\})$ se ve así:



5. Consideremos $G = F\langle a, b\rangle$ y $S = \{a, b\}$. Entonces u y v están conectados en $\mathrm{Cay}(F\langle a, b\rangle, \{a, b\})$ si y solo si $v = u \cdot a^{\pm 1}$ o $v = u \cdot b^{\pm 1}$. Por eso, $\mathrm{Cay}(F\langle a, b\rangle, \{a, b\})$ se ve así:



Proposición 3.1.8
Supongamos que G y G' son grupos isomorfos. Si S es un subconjunto generador de G, entonces existe un subconjunto generador S' de G' tal que (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son isométricos.

Demostración. Supongamos que S es un subconjunto generador de G y que $\varphi : G \to G'$ es un isomorfismo de grupos. Sea $S' \coloneqq \varphi(S)$. Usando la equivalencia

$$g, h \text{ están conectados en } \mathrm{Cay}(G, S) \iff \varphi(g), \varphi(h) \text{ están conectados en } \mathrm{Cay}(G', S')$$

se puede demostrar por inducción sobre n que para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$d_S(g, h) = n \iff d_{S'}(\varphi(g), \varphi(h)) = n.$$

Por lo tanto, $\varphi : (G, d_S) \to (G', d_{S'})$ es una isometría. $\square$

Observación 3.1.9
Supongamos que $X = (V, E)$ es una gráfica. Si

$$K = \big\{\{v\} \mid v \in V\big\} \cup E,$$

entonces se puede demostrar que K satisface las siguientes propiedades:

- K es un complejo simplicial.
- El conjunto de vértices de K es V, es decir, $V(K) = V$.
- La realización geométrica de K se ve como la realización geométrica de X.

Por eso, identificamos a X con K. Esto nos permite decir que *las gráficas son un caso particular de los complejos simpliciales.*

Lema 3.1.10
Supongamos que $X = (V, E)$ es una gráfica y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un *cuasi-camino de longitud n en X* es una sucesión $v_0, \ldots, v_n$ de vértices no necesariamente distintos tales que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. En este caso, también decimos que $v_0, \ldots, v_n$ es un *cuasi-camino de v_0 a v_n* y que v_0 y v_n están *conectados.* Entonces se satisface la siguiente propiedad para todo $u, v \in V$.

Si existe un cuasi-camino de longitud n de u a v, entonces existe un camino de longitud $\leq n$ de u a v.

Demostración. Antes que nada, un poco de notación. Para todo cuasi-camino $u_0, \ldots, u_m$ denotemos

$$N(u_0, \ldots, u_m) = \left| \left\{ i \in \{0, \ldots, m\} \mid \exists j \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{i\} \left(u_j = u_i \right) \right\} \right|.$$

Ahora bien, supongamos que $v_0, \ldots, v_n$ es un cuasi-camino. Veamos por inducción sobre $N(v_0, \ldots, v_n)$ que v_0 y v_n están conectados.
Paso base: Supongamos que $N(v_0, \ldots, v_n) = 2$. Entonces podemos suponer que

$$\{i_1, i_2\} = \left\{ i \in \{0, \ldots, m\} \mid \exists j \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{i\} \left(v_j = v_i \right) \right\}$$

y que $i_1 < i_2$. Entonces $v_{i_1} = v_{i_2}$ y como v_{i_2} y v_{i_2+1} son adyacentes entonces

$$v_0, \ldots, v_{i_1-1}, v_{i_1}, v_{i_2+1}, v_{i_2+2}, \ldots, v_n$$

es un camino (de longitud $\leq n$) y por lo tanto, v_0 y v_n están conectados.
Paso inductivo: Supongamos que $N(v_0, \ldots, v_n) > 2$ y que se satisface la siguiente propiedad:

> Si $u_0, \ldots, u_m$ es un cuasi-camino con $N(u_0, \ldots, u_m) < N(v_0, \ldots, v_n)$, entonces u_0 y u_m están conectados por un camino de longitud $\leq m$.

Usemos esto para ver que v_0 y v_n están conectados. Supongamos que $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, n\}$ son tales que $i_1 \neq i_2$ y $v_{i_1} = v_{i_2}$. Como v_{i_2} y v_{i_2+1} están conectados, entonces

$$v_0, \ldots, v_{i_1-1}, v_{i_1}, v_{i_2+1}, v_{i_2+2}, \ldots, v_n$$

es un cuasi-camino de longitud $\leq n$ tal que

$$N(v_0, \ldots, v_{i_1-1}, v_{i_1}, v_{i_2+1}, v_{i_2+2}, \ldots, v_n) < N(v_0, \ldots, v_n).$$

Por hipótesis de inducción, esto implica que v_0 y v_n están conectados por un camino de longitud $\leq n$. $\square$

Proposición 3.1.11
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Se satisface lo siguiente:

1. $\mathrm{Cay}(G, S)$ es conexa.

2. Todos los vértices tienen la misma cantidad de vecinos: $\left| \left(S \cup S^{-1} \right) \setminus \{e_G\} \right|$.

Demostración.

1. Como S es un subconjunto generador de G, entonces todo elemento de G puede ser escrito como

   $$s_1 \cdots s_n$$

   donde $s_i \in S \cup S^{-1}$. Usando estas expresiones se puede demostrar que existen cuasi-caminos de e_G a cualquier otro elemento en G.

   Ahora bien, supongamos que $u, v \in G$ son distintos. Entonces podemos concatenar el cuasi-camino de u a e_G con el cuasi-camino de e_G a v para obtener un cuasi-camino de u a v. Usando esto y el Lema 3.1.10 obtenemos lo deseado.

2. Supongamos que $g \in G$ es fijo. La función

   $$\begin{aligned} \left(S \cup S^{-1} \right) \setminus \{e_G\} &\to \{\text{vecinos de } g\} = \left\{ gs \mid s \in \left(S \cup S^{-1} \right) \setminus \{e_G\} \right\} \\ s &\mapsto gs \end{aligned}$$

   es biyectiva y por lo tanto todos los vértices tienen la misma cantidad de vecinos.

$\square$

Proposición 3.1.12
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Si $E_{\mathrm{Cay}(G,S)}$ denota el conjunto de aristas de $\mathrm{Cay}(G,S)$, entonces para todo $u, v \in G$

$$\{u,v\} \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)} \iff \{wu, wv\} \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)} \text{ para todo } w \in G.$$

Usando esto se puede demostrar que la operación $G \times \mathrm{Cay}(G,S) \to \mathrm{Cay}(G,S)$ dada por

$$w \cdot \{u,v\} = \{wu, wv\} \text{ para todo } w \in G \text{ y todo } \{u,v\} \in \mathrm{Cay}(G,S)$$

define una acción de G en $\mathrm{Cay}(G,S)$.

Demostración. Para todo $w \in G$,

$$\begin{aligned} \{u,v\} \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)} &\iff \exists s \in S \cup S^{-1}\,(u = vs) \\ &\iff \exists s \in S \cup S^{-1}\big(wu = (wv)s\big) \\ &\iff \{wu, wv\} \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)}. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.1.13 (Gráfica conexa)
Supongamos que $X = (V, E)$ una gráfica conexa. Definimos $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$d(u,v) := \text{mín}\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{existe un camino de longitud } n \text{ entre } u \text{ y } v\}.$$

y decimos que d es la *métrica de las palabras en V inducida por X*. Usando la conexidad de X se puede demostrar que d está bien definida y que efectivamente es una métrica.

Observación 3.1.14
Supongamos que $X = (V, E)$ es una gráfica conexa. Usando solo definiciones se puede demostrar que para todo $u, v \in V$

$$d(u,v) = 1 \iff \{u,v\} \in E.$$

Por otro lado, supongamos que $X' = (V', E')$ es una gráfica conexa. Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo de gráficas, entonces usando solo definiciones se puede demostrar que

$$u_1, \ldots, u_n \text{ es un camino} \iff f(u_1), \ldots, f(u_n) \text{ es un camino.} \tag{3.1}$$

Observación 3.1.15
Supongamos que $X = (V, E)$, $X' = (V', E')$ son gráficas conexas. Si d y d' denotan las respectivas métricas sobre V y V' inducidas por X y X', entonces para toda función $f : V \to V'$,

$$f \text{ es un isomorfismo de gráficas entre } X \text{ y } X' \iff f \text{ es una isometría entre } (V,d) \text{ y } (V',d').$$

En particular,

$$(V,E) \text{ y } (V',E') \text{ son gráficas isomorfas} \iff (V,d) \text{ y } (V',d') \text{ son espacios métricos isométricos.}$$

Demostración.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $f : V \to V'$ es una función.

$$\begin{aligned} f \text{ es una isometría} &\implies \forall u,v \in V\,\big(d(u,v) = d'(f(u),f(v))\big) \\ &\implies \forall u,v \in V\,\big(d(u,v) = 1 \iff d'(f(u),f(v)) = 1\big) \\ &\implies \forall u,v \in V\,\big(\{u,v\} \in E \iff \{f(u),f(v)\} \in E'\big) \\ &\implies f \text{ es un isomorfismo de gráficas.} \end{aligned}$$

Donde la tercera implicación se cumple por la Observación 3.1.14.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $f : V \to V'$ es una función.

$$\begin{aligned}
f \text{ es un isomorfismo de gráficas} &\implies \forall u, v \in V \left(\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'\right) \\
&\implies \left(u_1, \dots, u_n \text{ es un camino} \iff f(u_1), \dots, f(u_n) \text{ es un camino}\right) \\
&\implies \forall u, v \in V \left(d(u, v) = d'(f(u), f(v))\right) \\
&\implies f \text{ es una isometría.}
\end{aligned}$$

La segunda implicación es consecuencia de que f es biyectiva y la tercera implicación es consecuencia de la siguiente observacion:

> Si $u_0, \dots, u_n$ es el camino de longitud más chica entre u_0 y u_n, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ es el camino de longitud más chica entre $f(u_1)$ y $f(u_n)$.

Si suponemos lo contrario se puede demostrar que (3.1) implica una contradicción. □

Definición 3.1.16 (La métrica de las palabras)
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Denotamos por d_S a la la métrica en G inducida por $\mathrm{Cay}(G, S)$ y decimos que d_S es *la métrica de las palabras en G respecto a S*.

Observación 3.1.17
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G, y que $E_{\mathrm{Cay}(G,S)}$ es el conjunto de aristas de $\mathrm{Cay}(G, S)$. Como para todo $u, v \in G$

$$d_S(u, v) = 1 \iff \{u, v\} \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)}, \qquad \text{(cf. Observación 3.1.14)}$$

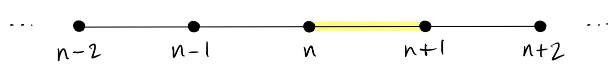
entonces el espacio métrico (G, d_S) se *ve* como $\mathrm{Cay}(G, S)$ (pero sin las aristas - estas solo sirven para determinar la distancia entre los elementos). Además, (por definición de $\mathrm{Cay}(G, S)$) para todo $u, v \in G$ distintos

$$d_S(u, v) = 1 \iff \exists s \in S \cup S^{-1} \left(v = u \cdot s\right).$$

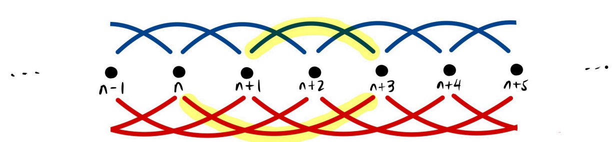
Observación 3.1.18
Supongamos que G, G' son grupos y que S, S' son subconjuntos generadores de G, G' respectivamente. Por la Observación 3.1.15,

$$\begin{aligned}
&f \text{ es un isomorfismo de gráficas entre } \mathrm{Cay}(G, S) \text{ y } \mathrm{Cay}(G', S') \\
&\qquad\iff f \text{ es una isometría entre } (G, d_S) \text{ y } (G', d_{S'}).
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.19
Consideremos $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$. Entonces $d_{\{1\}}(n, n + 1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ porque el camino (subrayado con) amarillo en el siguiente dibujo es el camino más corto entre n y $n + 1$ en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$.



En contraste, si $S = \{2, 3\}$, entonces $d_{\{2,3\}}(n, n + 1) = 2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ porque el camino subrayado con amarillo en el siguiente dibujo tiene longitud mínima.



Cabe recalcar que hay otros caminos entre n y $n + 1$ en $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ como

$$n, n + 2, n + 4, n + 1 \quad \text{o} \quad n, n + 2, n + 4, n + 6, n + 3, n + 1$$

pero no hay ninguno que tenga longitud menor a 2.

Lema 3.1.20
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Si $u, v \in G$ son distintos, entonces

$$d_S(u,v) = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{existe un cuasi-camino de longitud } n \text{ de } u \text{ a } v\}.$$

Demostración. Supongamos que $u, v \in G$ son distintos y denotemos

$$A_{u,v} := \left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{existe un camino de longitud } n \text{ de } u \text{ a } v\right\},$$
$$B_{u,v} := \left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{existe un cuasi-camino de longitud } n \text{ de } u \text{ a } v\right\}.$$

Notemos que $A_{u,v} \subset B_{u,v}$ y por lo tanto,

$$\text{mín}\, A_{u,v} \geq \text{mín}\, B_{u,v}.$$

Por otro lado, recordemos que en el Lema 3.1.10 demostramos que para cualesquiera dos vértices u, v de una gráfica se satisface la siguiente propiedad. *Si existe un cuasi-camino de longitud n de u a v, entonces existe un camino de longitud $\leq n$ de u a v.* En particular, para todo $n \in B_{u,v}$ existe $m \leq n$ tal que $m \in A_{u,v}$. Esto implica que

$$\text{mín}\, A_{u,v} \leq \text{mín}\, B_{u,v}$$

y por lo tanto,

$$d_S(u,v) = \text{mín}\, A_{u,v} = \text{mín}\, B_{u,v} = \text{mín}\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{existe un cuasi-camino de longitud } n \text{ de } u \text{ a } v\right\}$$

donde la primera igualdad es por definición (cf. Definición 3.1.16). □

Proposición 3.1.21
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Si $u, v \in G$ son distintos, entonces

$$d_S(u,v) = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \exists s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1} \text{ tales que } v = u \cdot s_1 \cdots s_n\}.$$

En palabras, $d_S(u,v)$ es el mínimo número de elementos de $S \cup S^{-1}$ que necesito multiplicarle a u (por la derecha) para obtener v.

Demostración. Supongamos que $u, v \in G$ son distintos y denotemos

$$B_{u,v} := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \text{existe un cuasi-camino de longitud } n \text{ de } u \text{ a } v\},$$
$$C_{u,v} := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \exists s_1, \ldots, s_m \in S \cup S^{-1} \text{ tales que } v = u \cdot s_1 \cdots s_m\}.$$

Como $d_S(u,v) = \text{mín}\, B_{u,v}$ (cf. Lema 3.1.20) y queremos $d_S(u,v) = \text{mín}\, C_{u,v}$, entonces basta probar que $B_{u,v} = C_{u,v}$.
$\subset$) Supongamos que $n \in B_{u,v}$. Por definición, existe un cuasi-camino $u = u_0, \ldots, u_n = v$ en $\text{Cay}(G,S)$. En particular,

$$u_i \text{ y } u_{i+1} \text{ son adyacentes para todo } i \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Por definición de $\text{Cay}(G,S)$, esto es si y solo si,

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\ \exists s_{i+1} \in S \cup S^{-1}\, (u_i \cdot s_{i+1} = u_{i+1}).$$

Usando esto obtenemos

$$v = u_n = u_{n-1} \cdot s_n = (u_{n-2} \cdot s_{n-1}) \cdot s_n = \cdots = u_0 \cdot s_1 \cdots s_n = u \cdot s_1 \cdots s_n.$$

y por lo tanto, $n \in C_{u,v}$.
$\supset$) Supongamos que $n \in C_{u,v}$. Por definición, existen $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tales que $v = u \cdot s_1 \cdots s_n$. Entonces la sucesión

$$u, \quad u \cdot s_1, \quad u \cdot s_1 \cdot s_2, \quad \ldots, \quad u \cdot s_1 \cdots s_{n-1}, \quad u \cdot s_1 \cdots s_n = v$$

es un cuasi-camino de longitud n entre u y v. Por lo tanto, $n \in B_{u,v}$. □

Corolario 3.1.22
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Usando la Proposición 3.1.21 se puede demostrar que:

1. Si $u, v \in G$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ entonces

$$d_S(u,v) = n \implies \exists s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}\, (v = u \cdot s_1 \cdots s_n)$$

   y conversamente,

$$\exists s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}\, (v = u \cdot s_1 \cdots s_n) \implies d_S(u,v) \leq n.$$

2. $d_S(u,v) = d_S(wu, wv)$ para todo $u, v, w \in G$.

Proposición 3.1.23
Supongamos que G es un grupo. Si S es un subconjunto generador de G y $B_r^{d_S}(v) = \{u \in G \mid d_S(u,v) < r\}$, entonces

$$S \text{ es finito} \iff B_n^{d_S}(v) \text{ es finito para todo } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ y todo } v \in G.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $v \in G$ y que $u \in B_n^{d_S}(v)$. Entonces $d_S(u,v) < n$ y si denotamos $k = d_S(u,v)$, entonces el Corolario 3.1.22 implica que existen $s_1, \ldots, s_k \in S \cup S^{-1}$ tales que

$$u = v \cdot s_1 \cdots s_k.$$

En particular, como $k < n$,

$$u \in \left\{ v \cdot s_1 \cdots s_m \mid m < n \text{ y } s_1, \ldots, s_m \in S \cup S^{-1} \right\}$$

y por lo tanto,

$$B_n^{d_S}(v) \subset \left\{ v \cdot s_1 \cdots s_m \mid m < n \text{ y } s_1, \ldots, s_m \in S \cup S^{-1} \right\} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ y todo } v \in G. \tag{3.2}$$

Ahora sí, supongamos que S es finito y veamos que $B_n^{d_s}(v)$ es finito para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y todo $v \in G$. Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : (S \cup S^{-1} \cup \{e\})^{n-1} &\to \left\{ v \cdot s_1 \cdots s_m \mid m < n \text{ y } s_1, \ldots, s_m \in S \cup S^{-1} \right\} \\ (s_1, \ldots, s_{n-1}) &\mapsto v \cdot s_1 \cdots s_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}$ es suprayectiva (esto se puede demostrar usando solo definiciones) y $(S \cup S^{-1} \cup \{e\})^{n-1}$ es finito, entonces (3.2) implica que $B_n^{d_S}(v)$ también es finito.
$\Longleftarrow$) Antes que nada, veamos que

$$B_2^{d_S}(e_G) = S \cup S^{-1} \cup \{e_G\}. \tag{3.3}$$

$\subset$) Supongamos que $v \in B_2^{d_S}(e_G)$. Entonces $d_s(e_G, v) < 2$, pero como la métrica de las palabras solo toma valores en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, lo anterior es equivalente a que $v = e_G$ o $d(e_G, v) = 1$. Si $v = e_G$, ya acabamos y por eso supongamos que $d(e_G, v) = 1$. Por el Corolario 3.1.22, lo anterior implica que existe $s_1 \in S \cup S^{-1}$ tal que $v = e_G \cdot s_1$. En particular, $v = s_1 \in S \cup S^{-1}$.
$\supset$) Como $e_G \in B_2^{d_S}(e_G)$, solo resta probar que $S \cup S^{-1} \subset B_2^{d_S}(e_G)$. Supongamos que $s \in S \cup S^{-1}$. Si ponemos $s_1 = s$, entonces $s = e_G \cdot s_1$ y por lo tanto el Corolario 3.1.22 implica que $d_S(e_G, s) \leq 1 < 2$ y en particular $s \in B_2^{d_S}(e_G)$.

Ahora sí, supongamos que $B_n^{d_S}(v)$ es finito para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y todo $v \in G$. En particular, $B_2^{d_S}(e_G)$ es finito. Como $S \subset B_2^{d_S}(e_G)$ (cf. (3.3)), lo anterior implica que S también es finito. $\square$

3.2. Cuasi-isometría

El objetivo de esta sección es definir y estudiar la equivalencia llamada *cuasi-isometría*. Primero la estudiaremos para espacios métricos y luego para grupos.

Referencias: El material en esta sección está basado en el capítulo 5.2 del libro *Geometric Group Theory* de Clara Löh (cf. [9]).

Definición 3.2.1 (Encaje isométrico)
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Decimos que f es un *encaje isométrico* si

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \text{ para todo } x, x' \in X.$$

Si f es un encaje isométrico y además es una función biyectiva, decimos que f es una *isometría*.

Por ejemplo, si X y Y son iguales a $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual, entonces las reflexiones, traslaciones, y rotaciones son ejemplos de isometrías.

Definición 3.2.2 ((b, c)-encaje cuasi-isométrico)
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Si existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que $b \geq 0$, $c \geq 1$, y

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b \text{ para todo } x, x' \in X$$

entonces decimos que f es un (b, c)-*encaje cuasi-isométrico*, o (si no hay necesidad de especificar la b y la c) simplemente decimos que f es un *encaje cuasi-isométrico*.

Observación 3.2.3
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Notemos que f es un $(0, 1)$-encaje cuasi-isométrico si y solo si

$$\frac{1}{1} \cdot d_X(x, x') - 0 \leq d_Y\left(f(x), f(x')\right) \leq 1 \cdot d_X(x, x') + 0 \text{ para todo } x, x' \in X.$$

Esto es si y solo si

$$d_X(x, x') \leq d_Y\left(f(x), f(x')\right) \leq d_X(x, x').$$

y esto es si y solo si

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \text{ para todo } x, x' \in X.$$

Por lo tanto,

$$f \text{ es un (0,1)-encaje cuasi-isométrico} \iff f \text{ es un encaje isométrico.} \tag{3.4}$$

Ahora, consideremos el caso general. Supongamos que $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y que $c \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. En lo que sigue, veremos que la desigualdad de los encajes cuasi-isométricos,

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b, \tag{3.5}$$

es una forma sistemática de permitir un error en la igualdad de los encajes isométricos,

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x'). \tag{3.6}$$

Supongamos que $f : X \to Y$ es un encaje cuasi-isométrico y que $x, x' \in X$ son fijos y arbitrarios. Otra forma de entender (3.5) es como que $d_Y\left(f(x), f(x')\right)$ debe pertenecer al siguiente intervalo

$$\left[\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b, c \cdot d_X(x, x') + b\right].$$

En lo que sigue, nos referimos a este intervalo como el “intervalo de error determinado por b y c”. Ahora bien, como $b \geq 0$ y $c \geq 1$, entonces

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_X(x, x') \leq c \cdot d_X(x, x') + b \tag{3.7}$$

o equivalentemente, $d_X(x, x')$ pertenece al intervalo de error determinado por b y c. Por lo tanto, *si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico, entonces la diferencia entre $d_X(x, x')$ y $d_Y\big(f(x), f(x')\big)$ está acotada por la longitud del intervalo de error determinado por b y c.*

Por otro lado, supongamos que $b' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y que $c' \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Si $b' \leq b$ y $c' \leq c$, entonces se puede demostrar que el intervalo de error determinado por b' y c' está contenido en el intervalo de error determinado por b y c. Por lo tanto, entre más chico sea b y más chico sea c (con $b \geq 0$ y $c \geq 1$), más chico se vuelve el intervalo de error determinado por ellos. En el caso límite, es decir cuando $b = 0$ y $c = 1$, el intervalo de error es el singulete $\{d_X(x, x')\}$ o equivalentemente, f es un encaje isométrico. Por lo tanto, *si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico, entonces entre más cercano sea b al 0 y más cercano sea c al 1 (con $b \geq 0$ y $c \geq 1$), más se va a parecer f a un encaje isométrico.*

Observación 3.2.4
Supongamos que X es un espacio métrico, notemos que la desigualdad (3.7) implica que la identidad id_X es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico para todo $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $c \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.

Lema 3.2.5
Supongamos que X, Y son espacios métricos, que $f : X \to Y$ es una función, y que $b \geq 0$, $c \geq 1$. Usando solo definiciones se puede demostrar que:

1. Si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico, entonces

$$\frac{1}{c} \cdot \Big(-b + d_Y\left(f(x), f(x')\right)\Big) \leq d_X(x, x') \leq c \cdot \Big(d_Y\left(f(x), f(x')\right) + b\Big)$$

   para todo $x, x' \in X$.

2. Si $b_1, b_2 > 0$ y $c_1, c_2 \geq 1$ son tales que

$$-b_1 + \frac{1}{c_1} \cdot d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c_2 \cdot d_X(x, x') + b_2,$$

   entonces f es un $\big(\text{máx}\{b_1, b_2\}, \text{máx}\{c_1, c_2\}\big)$-encaje cuasi-isométrico.

Definición 3.2.6 (Distancia finita entre funciones)
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f, g : X \to Y$ son funciones.

- Decimos que f y g *distan finitamente* o que *la distancia de f a g es finita* si existe $M \geq 0$ tal que

$$d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq M \text{ para todo } x \in X.$$

- Supongamos que $g : Y \to X$ es una función. Decimos que g es *cuasi-inversa* de f o que f y g son *cuasi-inversas* si (I) $g \circ f$ dista finitamente de id_X y (II) $f \circ g$ dista finitamente de id_Y. En otras palabras, f y g son cuasi-inversas si existen $M_1, M_2 \geq 0$ tales que

$$d_X\big((g \circ f)(x), x\big) \leq M_1 \text{ para todo } x \in X \quad \text{ y } \quad d_Y\big((f \circ g)(y), y\big) \leq M_2 \text{ para todo } y \in Y.$$

Definición 3.2.7 (Cuasi-isometría)
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Decimos que f es una *cuasi-isometría* si f es un encaje cuasi-isométrico que tiene una cuasi-inversa que también es un encaje cuasi-isométrico. Si existe una cuasi-isometría de X a Y, decimos que X y Y son *cuasi-isométricos* y escribimos $X \sim_{\mathrm{QI}} Y$.

Usando solo definiciones se puede demostrar que $\sim_{\mathrm{QI}}$ es una relación reflexiva y simétrica (pronto veremos que también es transitiva y por lo tanto de equivalencia).

Ejemplo 3.2.8
Se puede demostrar que:

- La inclusión $2 \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ es cuasi-inversa de la función $\mathbb{Z} \to 2 \cdot \mathbb{Z}$ que manda cada $n \in \mathbb{Z}$ a el mayor número par que es menor o igual que n. Además, ambas son encajes cuasi-isométricos y por lo tanto, $2 \cdot \mathbb{Z} \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{Z}$.
- La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ y la función piso (de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$) son encajes cuasi-isométricos cuasi-inversos y por lo tanto, $\mathbb{Z} \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{R}$. Cabe recalcar que este argumento se puede generalizar para obtener $\mathbb{Z}^n \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Proposición 3.2.9
Supongamos que X, Y son espacios métricos, que $f : X \to Y$ es una función, y que $b \geq 0$, $c \geq 1$. Si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico biyectivo, entonces f^{-1} también es un encaje cuasi-isométrico. En particular, todo encaje cuasi-isométrico biyectivo es una cuasi-isometría.

Demostración. Supongamos que $y, y' \in Y$. Poniendo $x = f^{-1}(y)$ y $x' = f^{-1}(y')$ en el inciso (1) del Lema 3.2.5 obtenemos

$$\frac{1}{c} \cdot \left(-b + d_Y\left(f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(y'))\right)\right) \leq d_X\left(f^{-1}(y), f^{-1}(y')\right) \leq c \cdot \left(d_Y\left(f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(y'))\right) + b\right)$$

o equivalentemente,

$$-\frac{b}{c} + \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y') \leq d_X\left(f^{-1}(y), f^{-1}(y')\right) \leq c \cdot d_Y(y, y') + c \cdot b.$$

Usando el inciso (2) de la del Lema 3.2.5 obtenemos lo deseado. $\square$

Proposición 3.2.10
Supongamos que X, Y, Z son espacios métricos y que $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son funciones.

1. Si f y g son encajes cuasi-isométricos, entonces $g \circ f$ también es un encaje cuasi-isométrico. Además, si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y g es un (b', c')-encaje cuasi-isométrico, entonces $g \circ f$ es un (B, c^2)-encaje cuasi-isométrico donde
$$B := \text{máx}\left\{\frac{c'}{b - b'c'}, c'b + b'\right\}.$$
2. Si f y g son cuasi-isometrías, entonces $g \circ f$ también es una cuasi-isometría. Por lo tanto, $\sim_{\mathrm{QI}}$ es una relación transitiva y por lo mencionado al final de la Definición 3.2.6, $\sim_{\mathrm{QI}}$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

1. Supongamos que $f : X \to Y$ es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y que $g : Y \to Z$ es un (b', c')-encaje cuasi-isométrico. Veamos que $g \circ f$ es un encaje cuasi-isométrico. Supongamos que $x, x' \in X$. Entonces
$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x')) &\geq \frac{1}{c'} \cdot d_Y(f(x), f(x')) - b' \\ &\geq \frac{1}{c'}\left(\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b\right) - b' \\ &= \frac{1}{c \cdot c'} \cdot d_X(x, x') - \frac{b}{c'} - b' \end{aligned} \tag{3.8}$$
y
$$\begin{aligned} d_Z\left((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')\right) &\leq c' \cdot d_Y(f(x), f(x')) + b' \\ &\leq c'(c \cdot d_X(x, x') + b) + b' \\ &= (c' \cdot c) \cdot d_X(x, x') + (c' \cdot b + b'). \end{aligned} \tag{3.9}$$
Juntando (3.8) y (3.9), y usando el inciso (2) del Lema 3.2.5 obtenemos lo deseado.

2. Supongamos que f, g son cuasi-isometrías y que f', g' son sus respectivas cuasi-inversas. Veamos que $f' \circ g'$ es cuasi-inversa de $g \circ f$. Supongamos que

   - f' es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico, que
   - $M_1 \geq 0$ es tal que $d_X\big((f' \circ f)(x), x\big) \leq M_1$, y que
   - $M_2 \geq 0$ es tal que $d_Y\big((g' \circ g)(y), y\big) \leq M_2$.

   Entonces

$$\begin{aligned} d_X\Big(\big((f' \circ g') \circ (g \circ f)\big)(x), x\Big) &\leq d_X\Big(\big((f' \circ g') \circ (g \circ f)\big)(x), (f' \circ f)(x)\Big) + d_X\big((f' \circ f)(x), x\big) \\ &\leq \bigg(c \cdot d_Y\Big((g' \circ g)\big(f(x)\big), f(x)\Big) + b\bigg) + M_1 \\ &\leq c \cdot M_2 + b + M_1. \end{aligned}$$

   Análogamente, usando solo definiciones se puede demostrar que $(g \circ f) \circ (f' \circ g')$ dista finitamente de id_Z. Por lo tanto, $f' \circ g'$ es cuasi-inversa de $g \circ f$. Usando esto y el inciso anterior obtenemos lo deseado.

□

Proposición 3.2.11
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f, g : X \to Y$ son funciones que distan finitamente.

1. Si f es un encaje cuasi-isométrico, entonces g también es un encaje cuasi-isométrico.
2. Si f es una cuasi-isometría, entonces g también es una cuasi-isometría.
3. $f \circ h$ y $g \circ h$ distan finitamente para toda función $h : Z \to X$.
4. $i \circ f$ y $i \circ g$ distan finitamente para todo encaje cuasi-isométrico $i : Y \to Z$.

Demostración. Supongamos que $M \geq 0$ es tal que

$$d_X\big(f(x), g(x)\big) \leq M \text{ para todo } x \in X.$$

1. Supongamos que $x, x' \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} d_Y\big(g(x), g(x')\big) &\leq d_Y\big(g(x), f(x)\big) + d_Y\big(f(x), f(x')\big) + d_Y\big(f(x'), g(x')\big) \\ &\leq M + (c \cdot d_X(x, x') + b) + M \\ &= c \cdot d_X(x, x') + (b + 2M). \end{aligned} \tag{3.10}$$

   Por otro lado,

$$\begin{aligned} d_Y\big(f(x), f(x')\big) &\leq d_Y\big(f(x), g(x)\big) + d_Y\big(g(x), g(x')\big) + d_Y\big(g(x'), f(x')\big) \\ &\leq M + d_Y\big(g(x), g(x')\big) + M \\ &= 2M + d_Y\big(g(x), g(x')\big) \end{aligned}$$

   Esto implica la primera de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} d_Y\big(g(x), g(x')\big) &\geq -2M + d_Y\big(f(x), f(x')\big) \\ &\geq -2M + \left(\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b\right) \\ &= (-2M - b) + \frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') \end{aligned} \tag{3.11}$$

   Juntando (3.10) y (3.11) obtenemos lo deseado.

2. Supongamos que f es una cuasi-isometría. Entonces por definición, existe un (b,c)-encaje cuasi-isométrico $f' : X \to Y$ y existen $M_1, M_2 \geq 0$ fijas tales que

$$d_X\left((f' \circ f)(x), x\right) \leq M_1 \text{ para todo } x \in X \quad \text{ y } \quad d_Y\left((f \circ f')(y), y\right) \leq M_2 \text{ para todo } y \in Y.$$

Veamos que f' es cuasi-inversa de g. Para todo $x \in X$,

$$d_X\left((f' \circ g)(x), x\right) \leq d_X\left((f' \circ g)(x), (f' \circ f)(x)\right) + d_X\left((f' \circ f)(x), x\right) \leq M + M_1$$

y análogamente,

$$d_Y\left((g \circ f')(y), y\right) \leq M + M_2.$$

Por lo tanto, f' es cuasi-inversa de g. Usando esto y el inciso anterior obtenemos lo deseado.

3. Para todo $x \in X$,

$$d_X\left((f \circ h)(x), (g \circ h)(x)\right) = d_X\left(f(h(x)), g(h(x)\right) \leq M.$$

4. Supongamos que $i : Y \to Z$ es un (b,c)-encaje cuasi-isométrico. Entonces para todo $x \in X$,

$$d_Z\left((i \circ f)(x), (i \circ g)(x)\right) \leq c \cdot d_Y(f(x), g(x)) + b \leq c \cdot M + b.$$

□

Proposición 3.2.12
Supongamos que (Y,d) es un espacio métrico y que X es un subconjunto de Y. Si existe $M > 0$ tal que

$$\forall y \in Y \ \exists x_y \in X \left(d\left(x_y, y\right) < M\right), \tag{3.12}$$

entonces $X \sim_{\mathrm{QI}} Y$. Cabe recalcar que (3.12) es equivalente a que Y sea igual a la unión de las bolas abiertas de radio M centradas en elementos de X, es decir,

$$Y = \bigcup_{x \in X} B_M^d(x).$$

Demostración. Usando el axioma de elección, supongamos que $f : Y \to X$ es tal que $f(y) = x_y$. Veamos que f es un $(2M, 1)$-encaje cuasi-isométrico. Para todo $y, y' \in Y$,

$$d\left(f(y), f(y')\right) = d\left(x_y, x_{y'}\right) \leq d\left(x_y, y\right) + d\left(y, y'\right) + d\left(y, x_{y'}\right) < M + d\left(y, y'\right) + M = d\left(y, y'\right) + 2M. \tag{3.13}$$

Por otro lado,

$$d\left(y, y'\right) \leq d\left(y, x_y\right) + d\left(x_y, x_{y'}\right) + d\left(x_{y'}, y'\right) < M + d\left(x_y, x_{y'}\right) + M = d\left(f(y), f(y')\right) + 2M$$

de donde,

$$-2M + d\left(y, y'\right) < d\left(f(y), f(y')\right). \tag{3.14}$$

Juntando (3.13) y (3.14) obtenemos lo deseado. Por otro lado, supongamos que $i : X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de X en Y. Veamos que i y f son cuasi-inversas. Por definición,

$$d\left((i \circ f)(y), y\right) = d\left(x_y, y\right) < M \text{ para todo } y \in Y,$$
$$d\left((f \circ i)(a), a\right) = d\left(x_a, a\right) < M \text{ para todo } a \in X.$$

Por lo tanto, i y f son cuasi-inversas. Como i es un encaje isométrico, lo anterior implica que $X \sim_{\mathrm{QI}} Y$. □

Definición 3.2.13 (Imagen cuasi-densa)
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Decimos que f tiene *imagen cuasi-densa* si existe $M > 0$ tal que

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \left(d_Y \left(f(x), y \right) < M \right). \tag{3.15}$$

Cabe recalcar que (3.15) es equivalente a que Y sea igual a la unión de las bolas abiertas (respecto a d_Y) de radio M centradas en elementos de la forma $f(x)$ (con $x \in X$), es decir,

$$Y = \bigcup_{x \in X} B_M^{d_Y} \left(f(x) \right). \tag{3.16}$$

Observación 3.2.14

1. Toda función suprayectiva tiene imagen cuasi-densa.
2. La inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tiene imagen cuasi-densa: Si para todo $y \in \mathbb{R}$ definimos $x =$ el mayor entero menor que y (es decir $x \coloneqq \lfloor y \rfloor$), entonces
$$d_{\mathbb{R}} \left(i(x), y \right) = d_{\mathbb{R}} \left(\lfloor y \rfloor, y \right) \leq 1.$$
3. La función
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$
no tiene imagen cuasi-densa: Supongamos que $M > 0$ y escojamos $n_M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de manera que
$$(n_M + 1)^2 - n_M^2 > 2M + 1 \tag{3.17}$$
Si denotamos $y \coloneqq n_M^2 + M + 1$, entonces
$$n_M^2 < y < (n_M + 1)^2 \tag{3.18}$$
$$|n_M^2 - y| = M + 1 > M \tag{3.19}$$
$$|(n_M + 1)^2 - y| = n_M^2 + 2n_M + 1 - y = (M + 1) + 2n_M + 1 > M \tag{3.20}$$
Donde (3.18) se sigue de (3.17). Entonces para todo $z \in \mathbb{Z}$
$$|z^2 - y| \geq \text{máx} \left\{ |n_M^2 - y|, \ |(n_M + 1)^2 - y| \right\} > M$$
Donde la primera desigualdad se vale por (3.18) y la segunda por (3.19) y (3.20).

Proposición 3.2.15
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Entonces f es una cuasi-isometría si y solo si f es un encaje cuasi-isométrico que tiene imagen cuasi-densa.

Intuitivamente, este resultado nos dice que dos espacios métricos son cuasi-isométricos si y solo si "se ven igual desde lejos" (cf. (3.16)).

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que f es una cuasi-isometría y que $g : Y \to X$ es su cuasi-inversa. Por definición de cuasi-inversa, existe $N \geq 0$ tal que para todo $y \in Y$

$$d_Y \left((f \circ g)(y), y \right) \leq N.$$

Usando la notación de la Definición 3.2.13, se puede demostrar que $M \coloneqq N + 1$ y $x \coloneqq g(y)$ cumplen lo deseado (notemos que la cota de las cuasi-inversas es mayor o igual a 0, pero la cota de la imagen cuasi-densa es estrictamente mayor que 0, por eso definimos $M \coloneqq N + 1$).
$\Longleftarrow$) Supongamos que f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico que tiene imagen cuasi-densa. Específicamente, supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\forall y \in Y \ \exists x_y \in X \left(d_Y(f(x_y), y) < M \right).$$

Usando el axioma de elección, supongamos que $g : Y \to X$ es tal que $g(y) = x_y$.

- *g es cuasi-inversa de f*: Usando solo definiciones se puede demostrar que $f \circ g$ y id_Y distan finitamente. resta probar que $g \circ f$ y id_X distan finitamente: Para todo $a \in X$,

$$\begin{aligned} d_X\big((g\circ f)(a), a\big) &= d_X(x_{f(a)}, a) \\ &\le c \cdot \Big(d_Y(f(x_{f(a)}), f(a)) + b\Big) && \text{(cf. Lema 3.2.5)} \\ &< c \cdot (M + b). \end{aligned}$$

- *g es encaje cuasi-isométrico*: Para todo $y, y' \in Y$,

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\le c \cdot \big(d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + b\big) && \text{(cf. Lema 3.2.5)} \\ &\le c \cdot \big(d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f(x_{y'}))\big) + c \cdot b \\ &< c \cdot \big(M + d_Y(y, y') + M\big) + c \cdot b \\ &= c \cdot d_Y(y, y') + c \cdot (2M + b) && (3.21) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\ge \frac{1}{c} \cdot \big(d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - b\big) && \text{(cf. Lema 3.2.5)} \\ &= \frac{1}{c} \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - \frac{b}{c} \\ &\ge \frac{1}{c} \cdot \big(d_Y(y, y') - d_Y(f(x_y), y) - d_Y(f(x_{y'}), y')\big) - \frac{b}{c} && (3.22) \\ &> \frac{1}{c} \cdot \big(d_Y(y, y') - M - M\big) - \frac{b}{c} \\ &= \frac{1}{c} \cdot d_Y(y, y') - \frac{2M + b}{c} && (3.23) \end{aligned}$$

donde (3.22) es consecuencia de

$$d_Y(y, y') \le d_Y(y, f(x_y)) + d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + d_Y(f(x_{y'}), y).$$

Juntando (3.21) y (3.23), y usando el inciso (4) del Lema 3.2.5 obtenemos lo deseado.

Por lo tanto, f es una cuasi-isometría. □

Definición 3.2.16 (Diámetro)
Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Para todo subconjunto A de X definimos

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\}$$

y decimos que $\mathrm{diam}(A)$ es el *diámetro de A*. Si $\mathrm{diam}(A)$ es un número real (es decir, $\mathrm{diam}(A) < \infty$), decimos que A tiene *diámetro finito*.

Observación 3.2.17
Supongamos que X, Y son espacios métricos y que $f : X \to Y$ es una función. Si $\mathrm{diam}(Y) < \infty$, entonces f tiene imagen cuasi-densa.

Demostración. Por definición,

$$d_Y\big(f(x), y\big) \le \mathrm{diam}(Y) \text{ para todo } x \in X \text{ y } y \in Y.$$

Como $\mathrm{diam}(Y) < \infty$, la desigualdad anterior implica lo deseado. □

Proposición 3.2.18
Supongamos que X, Y son espacios métricos. Si $\operatorname{diam}(X) < \infty$, entonces

$$\operatorname{diam}(Y) < \infty \iff X \sim_{\mathrm{QI}} Y.$$

En particular, cualquier espacio métrico con diámetro finito es cuasi-isométrico al espacio métrico que consiste de un solo punto y por lo tanto, cualesquiera dos espacios métricos con diámetro finito son cuasi-isométricos.

Demostración.
$\Longrightarrow$) Denotemos $D := \text{máx}\left\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\right\}$ y supongamos que $f : X \to Y$ es cualquier función. Entonces para todo $x, x' \in X$

$$d_X(x, x') - D \leq 0 \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq D \leq D + d_X(x, x')$$

y por lo tanto, $f : X \to Y$ es un $(1, D)$-encaje cuasi-isométrico. Como f tiene imagen cuasi-densa (cf. Observación 3.2.17), entonces la Proposición 3.2.15 implica que f es una cuasi-isometría.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $X \sim_{\mathrm{QI}} Y$. Por la Proposición 3.2.15, existe un (b, c)-encaje cuasi-isométrico $f : X \to Y$ con imagen cuasi-densa. Es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\forall y \in Y \; \exists x_y \in X \left(d\left(f(x_y), y\right) \leq M \right).$$

Entonces para todo $y, y' \in Y$

$$\begin{aligned} d_Y(y, y') &\leq d_Y(y, f(x_y)) + d_Y(f(x_y), f(x_{y'}) + d_Y(f(x_{y'}), y') \\ &\leq M + (c \cdot d_X(x, x') + b) + M \\ &\leq M + (c \cdot \operatorname{diam}(X) + b) + M \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{diam}(Y) < \infty$. □

Proposición 3.2.19
Supongamos que G es un grupo. Si S, S' son subconjuntos generadores finitos de G y $d_S, d_{S'}$ denotan las respectivas métricas de palabras en G, entonces id_G es una cuasi-isometría entre (G, d_S) y $(G, d_{S'})$.

Demostración. Como S es finito, podemos definir

$$c_1 := \underset{s \in S \cup S^{-1}}{\text{máx}} d_{S'}(e, s) < \infty.$$

Ahora bien, supongamos que $g, h \in G$ y denotemos $n = d_S(g, h)$. Por definición, existen $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tales que

$$h = g \cdot s_1 \cdots s_n$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, g \cdot s_1 \cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, g \cdot s_1) + d_{S'}(g \cdot s_1, g \cdot s_1 \cdot s_2) + \cdots + d_{S'}(g \cdot s_1 \cdots s_{n-1}, g \cdot s_1 \cdots s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c_1 + c_1 + \cdots + c_1 = c_1 \cdot n = c_1 \cdot d_S(g, h) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Análogamente, si

$$c_2 := \underset{s' \in S' \cup S'^{-1}}{\text{máx}} d_S(e, s'),$$

entonces se puede demostrar que

$$d_S(g, h) \leq c_2 \cdot d_{S'}(g, h).$$

Además, como $d_S(e, s') \geq 1$ para todo $s' \neq e$, entonces $c_2 \geq 1$ y por lo tanto, podemos dividir por c_2 en la ecuación anterior para obtener

$$\frac{1}{c_2} \cdot d_S(g, h) \leq d_{S'}(g, h). \tag{3.25}$$

Juntando (3.24) y (3.25), y usando el inciso (2) del Lema 3.2.5 obtenemos lo deseado. □

Definición 3.2.20 (Cuasi-isometría de grupos)
Supongamos que G y G' son grupos finitamente generados. Decimos que G y G' son *cuasi-isométricos* y escribimos $G \sim_{\mathrm{QI}} G'$ si existen subconjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $S' \subset G'$ tales que los espacios métricos (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos.

Cabe recalcar (I) que la Proposición 3.2.19 implica que esta definición no depende de los subconjuntos generadores S y S' y (II) que la Proposición 3.2.15 implica que (intuitivamente) G y G' son cuasi-isométricos si y solo si existen subconjuntos generadores finitos $S \subset G$ y $S' \subset G'$ tales que las gráficas de Cayley $\mathrm{Cay}(G, S)$ y $\mathrm{Cay}(G', S')$ “se ven igual desde lejos”.

Observación 3.2.21
Supongamos que

$$G = \mathbb{Z}, \quad S = \mathbb{Z}, \quad S' = \{1\}.$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que S, S' son subconjuntos generadores de G tales que

- el espacio métrico (G, d_S) tiene diámetro finito (pues $d_S(g, g') = 1$ para todo $g, g' \in G$) y que
- el espacio métrico $(G, d_{S'})$ no tiene diámetro finito.

En particular, (G, d_S) y $(G, d_{S'})$ no son cuasi-isométricos (cf. Proposición 3.2.18). Acabamos de demostrar que si S, S' no son finitos, entonces la Proposición 3.2.19 no es cierta. En particular, la Definición 3.2.20 solo tiene sentido para grupos finitamente generados.

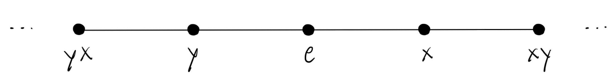
Corolario 3.2.22
Supongamos que G, G' son grupos y que $S \subset G$, $S' \subset G'$ son subconjuntos generadores finitos. Si G y G' son isomorfos, entonces (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos.

Demostración. Supongamos que $S \subset G$ y $S' \subset G'$ son subconjuntos generadores finitos. Como G y G' son isomorfos, la Proposición 3.1.8 implica que existe $S'_0 \subset G$ tal que los espacios métricos (G, d_S) y $(G', d_{S'_0})$ son isomorfos. En particular, $(G, d_S) \sim_{\mathrm{QI}} (G', d_{S'_0})$. Pero por la Proposición 3.2.19 $(G', d_{S'_0}) \sim_{\mathrm{QI}} (G', d_{S'})$ y por lo tanto, (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos. □

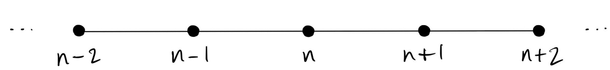
Ejemplo 3.2.23
Consideremos a D_∞, el grupo diédrico infinito. Este tiene presentaciones finitas

$$\langle s, t \mid t^2, tst^{-1} = s^{-1} \rangle \cong D_\infty \cong \langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle.$$

- Se puede demostrar que $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{x, y\})$ se ve así:



Como $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ se ve así:



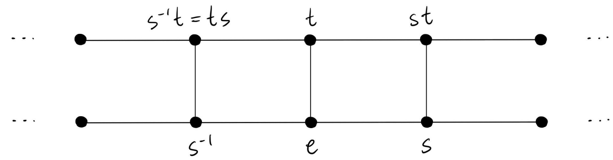
entonces $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{x, y\})$ y $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ son gráficas isomorfas y por la Observación 3.1.18,

$(D_\infty, d_{\{x,y\}})$ y $(\mathbb{Z}, d_{\{1\}})$ son espacios métricos isométricos.

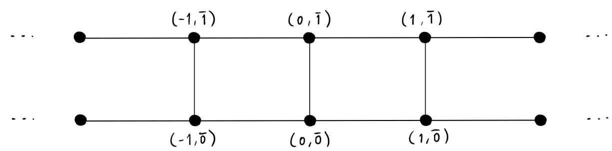
En particular,

$$D_\infty \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{Z}.$$

- Se puede demostrar que $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{s,t\})$ se ve así:



También se puede demostrar que $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1,\overline{0}), (0,\overline{1})\})$ se ve así:



Entonces $\mathrm{Cay}(D_\infty, \{s,t\})$ y $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2, \{(1,\overline{0}), (0,\overline{1})\})$ son gráficas isomorfas y por la Observación 3.1.18,

$$(D_\infty, d_{\{s,t\}}) \text{ y } (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, d_{\{(1,\overline{0}),(0,\overline{1})\}}) \text{ son espacios métricos isométricos.}$$

En particular,

$$D_\infty \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2.$$

- Juntando los incisos anteriores, obtenemos que

$$\mathbb{Z} \sim_{\mathrm{QI}} D_\infty \sim_{\mathrm{QI}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2.$$

Capítulo 4

Invarianza cuasi-isométrica de propiedades de finitud

El objetivo de este capítulo es (por fin) demostrar el teorema principal.

Referencias: El material en este capítulo está basado en el artículo *Finiteness conditions on groups and quasi-isometries* de Juan M. Alonso (cf. [1]).

4.1. El complejo de Rips

El objetivo de esta sección es definir y estudiar para cada espacio métrico, un complejo simplicial llamado *el complejo de Rips*. En la siguiente sección veremos que este juega un papel crucial en la demostración del teorema principal. Específicamente, veremos que el complejo de Rips del espacio métrico (G, d_S) nos permite usar el Criterio de Brown. A pesar de que estamos principalmente interesados en el caso en que el espacio métrico es de la forma (G, d_S), a lo largo de esta sección estudiaremos el complejo de Rips de un espacio métrico arbitrario.

Definición 4.1.1 (El complejo de Rips)
Supongamos que (X, d) un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos el *n-complejo de Rips de X* como el siguiente complejo simplicial

$$P_n(X, d) \coloneqq \left\{ S \subset X \mid S \text{ es finito no vacío y } \operatorname{diam}(S) \leq n \right\}.$$

También definimos *complejo de Rips de X* como el siguiente complejo simplicial

$$P_\infty(X, d) \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} P_n(X, d).$$

Cabe recalcar que los elementos de $P_\infty(X, d)$ son precisamente todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Si no hay ambigüedad respecto a la métrica d, denotamos $P_n(X) = P_n(X, d)$ y $P_\infty(X) = P_\infty(X, d)$.

Ejemplo 4.1.2
Consideremos a $\mathbb{Z}$ con su métrica usual (la inducida por $\mathbb{R}$). Entonces

$$P_2(\mathbb{Z}, d) = \left\{ S \subset \mathbb{Z} \mid S \text{ es finito no vacío y } \operatorname{diam}(S) \leq 2 \right\}.$$

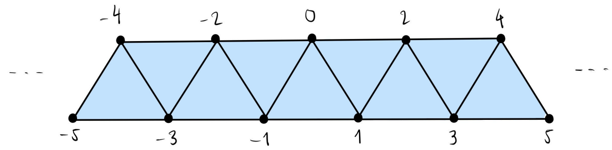
Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$s \in P_2(\mathbb{Z}, d) \iff s \text{ es no vacío y } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } s \subset \{n-1, n, n+1\}.$$

Por lo tanto,

$$P_2(\mathbb{Z}, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}\left(\{n-1, n, n+1\}\right) \setminus \{\varnothing\}.$$

Como la realización geométrica de un complejo simplicial de la forma $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) \setminus \{\varnothing\}$ es un triángulo (relleno) con vértices a, b, c, entonces la realización geométrica de $P_2(\mathbb{Z}, d)$ es



Observación 4.1.3
Supongamos que X es un espacio métrico. Como $\{x\} \in P_n(X)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el conjunto de vértices de $P_n(X)$ es precisamente X. Es decir,

$V(P_n(X)) = X$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Por otro lado, recordemos que si K y K' son complejos simpliciales, entonces una función simplicial de K a K' es una función de $V(K)$ a $V(K')$ que manda los simplejos de K a simplejos de K'. Usando esto y lo anterior obtenemos la siguiente propiedad:

Si X, Y son espacios métricos y $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(Y)$ es una función de X a Y que manda los simplejos de $P_n(X)$ a simplejos de $P_m(Y)$.

Esto motiva la siguiente notación.

Notación 4.1.4
Supongamos que X, Y son espacios métricos, que $f : X \to Y$ es una función, que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y consideremos a los complejos simpliciales $P_n(X)$ y $P_m(Y)$. Por la Observación 4.1.3, $f : X \to Y$ es una función de $V(P_n(X))$ a $V(P_m(Y))$. Cuando pensemos en f de esta manera, la denotamos por $f_{(n,m)}$.
Formalmente, la función

$$f_{(n,m)} : V(P_n(X)) \to V(P_m(Y))$$

es igual a

$$f : X \to Y$$

y por eso, podría parecer que esta notación es redundante. Para entender su utilidad, consideremos la siguiente situación. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función entre espacios métricos y que $n, m, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que

$$\operatorname{diam}(f(s)) \leq m \text{ para todo } s \subset X \text{ finito con } \operatorname{diam}(s) \leq n$$

pero

$$\exists s_0 \subset X \text{ finito con } \operatorname{diam}(s_0) \leq n \text{ tal que } \operatorname{diam}(f(s_0)) > l.$$

Equivalentemente,

$$f(s) \in P_m(Y) \text{ para todo } s \in P_n(X)$$

pero

$$\exists s_0 \in P_n(X) \text{ tal que } f(s_0) \notin P_l(Y).$$

Es decir, f es una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(Y)$ pero no es una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_l(Y)$ (cabe recalcar que ya habíamos visto una situación similar en la discusión que procede a la Definición 1.3.4).
Usando la notación introducida anteriormente, podemos reescribir esto como

$f_{(n,m)}$ es simplicial pero $f_{(n,l)}$ no es simplicial.

En particular, hay que tener cuidado de no decir algo como "$f : X \to Y$ es simplicial". Finalmente, cabe recalcar que $f_{(n,m)}$ es simplicial si y solo si para todo $A \subset X$ finito

$$\operatorname{diam}(A) \leq n \implies \operatorname{diam}(f(A)) \leq m.$$

Lema 4.1.5
Supongamos que X es un espacio métrico y que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $n \leq m$, entonces id_X es una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(X)$. Usando la Notación 4.1.4, podemos reescribir lo anterior de la siguiente manera:

si $n \leq m$, entonces $(\mathrm{id}_X)_{(n,m)}$ es una función simplicial.

Demostración. Supongamos que $n \leq m$ y veamos que id_X es una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(X)$. Como id_X es una función de $V(P_n(X)) = X$ a $V(P_m(X)) = X$, solo resta probar que id_X manda simplejos de $P_n(X)$ a simplejos de $P_m(X)$. Supongamos que $s \in P_n(X)$. Por definición, s es un subconjunto finito de X con $\operatorname{diam}(s) \leq n$. En particular (como $m \leq n$), $\mathrm{id}_X(s) = s$ es un subconjunto finito de X con diámetro $\leq$ a m, o equivalentemente, $\mathrm{id}_X(s) \in P_m(X)$. Por lo tanto, id_X manda simplejos de $P_n(X)$ a simplejos de $P_m(X)$ □

Lema 4.1.6
Supongamos que $f : X \to Y$ es una función entre espacios métricos. Si f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m \geq cn + b$, entonces f es una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(Y)$; es decir, $f_{(n,m)}$ es una función simplicial.

Demostración. Supongamos que f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m \geq cn+b$. Como (I) una función simplicial de $P_n(X)$ a $P_m(Y)$ es simplemente una función de X a Y y (II) f es una función de X a Y, entonces solo resta probar que f manda los simplejos de $P_n(X)$ en simplejos de $P_m(Y)$. Supongamos que $s \in P_n(X)$. Por definición, s es un subconjunto finito de X con $\operatorname{diam}(s) \leq n$. Esto implica que $f(s)$ es un subconjunto finito de Y. Veamos que $\operatorname{diam}(f(s)) \leq m$. Para todo $x, x' \in s$

$$\begin{aligned}
d_Y\left(f(x), f(x')\right) &\leq c \cdot d_X(x, x') + b && (f \text{ es un } (b,c)\text{-encaje}) \\
&\leq c \cdot n + b && (\operatorname{diam}(s) \leq n) \\
&\leq m && (\text{por hipótesis})
\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{diam}(f(s)) \leq m$ y por lo tanto $f(s) \in P_m(Y)$. □

Lema 4.1.7
Supongamos que X, Y son espacios métricos, que $f, g : X \to Y$ son (b, c)-encajes cuasi-isométricos, y que existe $M \geq 0$ tal que

$$d_Y\left(f(x), g(x)\right) \leq M \text{ para todo } x \in X.$$

Si $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m \geq cn + b + M$, entonces $|f_{(n,m)}|$ y $|g_{(n,m)}|$ son homotópicas.

Demostración. Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m \geq cn + b + M$. En particular (como $M \geq 0$), $m \geq cn + b$ y por lo tanto Lema 4.1.5 implica que $f_{(n,m)}$ y $g_{(n,m)}$ son funciones simpliciales. En particular,

$$\operatorname{diam}(f(s)) \leq m \quad \text{y} \quad \operatorname{diam}(g(s)) \leq m \quad \text{para todo } s \in P_n(X). \tag{4.1}$$

Ahora sí, veamos que $|f_{(n,m)}|$ y $|g_{(n,m)}|$ son homotópicas. Por la Proposición 1.3.48, basta probar que $f_{(n,m)}(s) \cup g_{(n,m)}(s) \in P_m(Y)$ para todo $s \in P_n(X)$. Además, como $f_{(n,m)}(s) \cup g_{(n,m)}(s)$ es finito si s es finito, solo resta probar que $\operatorname{diam}(f(s) \cup g(s)) \leq m$ si $\operatorname{diam}(s) \leq n$. Por eso, supongamos que $\operatorname{diam}(s) \leq n$ y que $x, x' \in s$ son distintos. Entonces

$$\begin{aligned}
d_Y\left(f(x), g(x')\right) &\leq d_Y\left(f(x), f(x')\right) + d_Y\left(f(x'), g(x')\right) && (\text{desigualdad del triángulo}) \\
&\leq c d_X(x, x') + b + M && (f \text{ es un } (b,c)\text{-encaje y la def. de } M) \\
&\leq cn + b + M && (\operatorname{diam}(s) \leq n) \\
&\leq m. && (\text{por hipótesis})
\end{aligned}$$

Juntando esto con (4.1) obtenemos lo deseado. □

Lema 4.1.8
Supongamos que X, Y son espacios métricos, que $M \geq 0$ es fijo, que $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son (b, c)-encajes cuasi-isométricos tales que

$$d_X\big((g \circ f)(x), x\big) \leq M \text{ para todo } x \in X,$$

y denotemos $B = \text{máx}\{\frac{c}{b-bc}, cb + b\}$. Si $n, m, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $m \geq cn + b$ y $l \geq c^2 m + B + M$, entonces

1. $(\text{id}_X)_{(n,l)}$, $f_{(n,m)}$, y $g_{(m,l)}$ son funciones simpliciales y
2. $|(\text{id}_X)_{(n,l)}|$ y $|g_{(m,l)} \circ f_{(n,m)}|$ son homotópicas.

Demostración.

1. Primero notemos que

$$\begin{aligned} n &\leq cn + b && (b \geq 0 \text{ y } c \geq 1) \\ &\leq m && (\text{por hipótesis}) \\ &\leq c^2 m + B + M && (B \geq 0,\ c \geq 1, \text{ y } M \geq 0) \\ &\leq l. && (\text{por hipótesis}) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el Lema 4.1.5 implica que $(\text{id}_X)_{(n,l)}$ es simplicial.

   Por otro lado, como f es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y $m \geq cn + b$, entonces el Lema 4.1.6 implica que $f_{(n,m)}$ es simplicial. Análogamente, como g es un (b, c)-encaje cuasi-isométrico y

$$l \geq c^2 m + B + M \geq cm + b$$

   (donde la segunda desigualdad se cumple porque $c^2 \geq c$ (pues $c \geq 1$) y $B \geq b$ (por definición de B)), entonces el Lema 4.1.6 implica que $g_{(m,l)}$ es simplicial.

2. Primero notemos que $m \geq cn + b$ implica que $m \geq n$ y por lo tanto la hipótesis $l \geq c^2 m + B + M$ también implica que $l \geq c^2 n + B + M$.

   Por otro lado, como $g \circ f$ y id_X son (B, c^2)-encajes cuasi-isométricos (cf. Proposición 3.2.10 y Observación 3.2.4 respectivamente) y

$$d_X\big((g \circ f)(x), \text{id}_X(x)\big) \leq M \text{ para todo } x \in X$$

   entonces la desigualdad $l \geq c^2 n + B + M$ y el Lema 4.1.7 implican que $|\,(\text{id}_X)_{(n,l)}\,|$ y $|(g \circ f)_{(n,l)}|$ son homotópicas. Pero recordando el significado de la Notación 4.1.4

$$(g \circ f)_{(n,l)} = g \circ f = g_{(m,l)} \circ f_{(n,m)}$$

   y por lo tanto, $|\,(\text{id}_X)_{(n,l)}\,|$ y $|g_{(m,l)} \circ f_{(n,m)}|$ son homotópicas.

□

4.2. El Criterio de Brown

El objetivo de esta sección es enunciar el Criterio de Brown. Desafortunadamente, la teoría necesaria para demostrarlo excede los objetivos de la tesis y por lo tanto omitiremos su demostración.

Notación 4.2.1
Supongamos que G es un grupo, que X es un conjunto arbitrario, y que “ $\cdot$ ” es una acción de G en X. Consideremos $g \in G$, $x \in X$ y $S \subset X$. Denotamos

$$\begin{aligned} g \cdot S &\coloneqq \{g \cdot s \mid s \in S\}, \\ G \cdot S &\coloneqq \{g \cdot s \mid g \in G \text{ y } s \in S\}, \\ G \cdot x &\coloneqq \{g \cdot x \mid g \in G\}, \\ X/G &\coloneqq \{G \cdot x \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

También decimos que $G\cdot x$ es la *órbita de* x y X/G es *el conjunto de órbitas* (el símbolo "X/G" es leído como "X módulo G"). Más aún, se puede demostrar que X/G es una partición de X que induce una relación de equivalencia tal que para todo $x, x' \in X$

$$x \sim x' \iff \exists g \in G \left(g \cdot x = x'\right) \iff \left(G \cdot x = G \cdot x'\right).$$

Definición 4.2.2 (G-complejo)
Supongamos que G es un grupo y que K es un complejo simplicial. Decimos que K es un *G-complejo* si existe una acción " $\cdot$ " de G en $V(K)$ tal que

$$\forall g \in G \, \forall \{v_0, \ldots, v_q\} \in K \left(\{g \cdot v_0, \ldots, g \cdot v_q\} \in K\right). \tag{4.2}$$

Como $s \in K$ implica $s \subset V(K)$, podemos usar la Notación 4.2.1 para reescribir (4.2) como

$$\forall g \in G \, \forall s \in K \, (g \cdot s \in K). \tag{4.3}$$

Siempre que tengamos un G-complejo arbitrario K, denotamos por " $\cdot$ " a la G-acción en $V(K)$ que satisface (4.3) y cuando nos refiramos a ella, la llamamos simplemente "la G-acción en $V(K)$".

Observación 4.2.3
Supongamos que K es un G-complejo y que $s \in K$. Como la G-acción en $V(K)$ satisface (4.3), entonces la siguiente función está bien definida.

$$\begin{aligned} G \times K &\to K \\ (g, s) &\mapsto g \cdot s \end{aligned}$$

Para evitar ambigüedad, reescribimos esta función sin usar la Notación 4.2.1.

$$\begin{aligned} G \times K &\to K \\ \Big(g, \big\{v_0, \ldots, v_q\big\}\Big) &\mapsto \big\{g \cdot v_0, \ldots, g \cdot v_q\big\} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que esta función define una acción de G en K. Por simplicidad, denotamos a esta acción de la misma manera en la que denotamos a la G-acción en $V(K)$, es decir, la denotamos por " $\cdot$ ", y cuando nos referimos a ella, la llamamos "la G-acción inducida en K".

Ejemplo 4.2.4
Supongamos que $(G, *)$ es un grupo, que S es un subconjunto generador de G, y consideremos a $P_\infty(G, d_S)$. Como $V(P_\infty(G, d_S)) = G$, entonces $*$ (la operación del grupo) es una acción de G en $V(P_\infty(G, d_S))$. Además, si $s \in P_\infty(G, d_S)$ entonces (por definición), s es un subconjunto finito de G y por lo tanto, para todo $g \in G$, el conjunto $g * s$ también es finito, o equivalentemente, $g * s \in P_\infty(G, d_S)$. En resumen,

$$\forall g \in G \, \forall s \in P_\infty(G, d_S) \left(g * s \in P_\infty(G, d_S)\right).$$

y por lo tanto, $P_\infty(G, d_S)$ es un G-complejo.

Ejemplo 4.2.5
Supongamos que G es un grupo, que S es un subconjunto generador de G, y consideremos a $\mathrm{Cay}(G, S)$ como un complejo simplicial (cf. Observación 3.1.9). Como el conjunto de vértices de $\mathrm{Cay}(G, S)$ es G, entonces la operación del grupo es una acción de G en $V\left(\mathrm{Cay}(G, S)\right)$. Además, si $s \in \mathrm{Cay}(G, S)$, entonces

$$s = \{v\} \text{ para algún } v \in V\left(\mathrm{Cay}(G, S)\right) \quad \text{ó} \quad s \in E_{\mathrm{Cay}(G,S)}. \qquad \text{(cf. Observación 3.1.9)}$$

Usando la definición de $\mathrm{Cay}(G, S)$ podemos reescribir lo anterior como

$$s = \{g\} \text{ para algún } g \in G \quad \text{ó} \quad s = \{g, g \cdot s\} \text{ para algunos } g \in G, s \in S \cup S^{-1}.$$

Usando esto se puede demostrar que

$$\forall g \in G \, \forall s \in \mathrm{Cay}(G, S) \left(g \cdot s \in \mathrm{Cay}(G, S)\right)$$

y por lo tanto, $\mathrm{Cay}(G, S)$ es un G-complejo.

Definición 4.2.6 (G-complejo finito módulo G)
Supongamos que G es un grupo y que K es un G-complejo. Decimos que K es *finito módulo* G si hay un número finito de órbitas de la G-acción inducida en K. Específicamente, K es finito módulo G si

$$K/G = \{G \cdot s \mid s \in K\}$$

es finito.

Ejemplo 4.2.7
Consideremos $G = \mathbb{Z}$, $K = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, \overline{0}), (0, \overline{1})\})$, y " $\cdot$ " la $\mathbb{Z}$-acción en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ definida por

$$n \cdot (m, \bar{l}) = (n + m, \bar{l}) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } \bar{l} \in \mathbb{Z}_2.$$

Como todos los simplejos de $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, \overline{0}), (0, \overline{1})\})$ son de la forma

1. (un punto) $\{(m, \bar{l})\}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $\bar{l} = \overline{0}, \overline{1}$; ó
2. (un segmento horizontal) $\{(m, \bar{l}), (m + 1, \bar{l})\}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $\bar{l} = \overline{0}, \overline{1}$; ó
3. (un segmento vertical) $\{(m, \overline{0}), (m, \overline{1})\}$,

(cf. Ejemplo 3.2.23) y las órbitas de la G-acción inducida en K satisfacen

1. $\mathbb{Z} \cdot \{(m, \bar{l})\} = \mathbb{Z} \cdot \{(0, \bar{l})\}$ para $l = \overline{0}, \overline{1}$,
2. $\mathbb{Z} \cdot \{(m, \bar{l}), (m + 1, \bar{l})\} = \mathbb{Z} \cdot \{(0, \bar{l}), (1, \bar{l})\}$ para $l = \overline{0}, \overline{1}$,
3. $\mathbb{Z} \cdot \{(m, \overline{0}), (m, \overline{1})\} = \mathbb{Z} \cdot \{(0, \overline{0}), (0, \overline{1})\}$,

entonces hay un número finito de órbitas de la $\mathbb{Z}$-acción inducida y en particular, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \{(1, \overline{0}), (0, \overline{1})\})$ es finito módulo $\mathbb{Z}$.

Definición 4.2.8 (G-complejo n-bueno)
Supongamos G es un grupo, que K es un G-complejo, y que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ es fijo. Decimos que K es *G-complejo n-bueno* si

- $\tilde{H}_k(|K|) = 0$ para todo $k < n$ y
- para todo $q \in \{0, \dots, n\}$ y todo q-simplejo $s \in K$, el estabilizador (de la G-acción inducida en K)

  $$G_s = \{g \in G \mid g \cdot s = s\}$$

  es de tipo FP_{n-q}.

Ejemplo 4.2.9
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Veamos que $P_\infty(G, d_S)$ es n-bueno para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por brevedad, denotamos $P_\infty(G) = P_\infty(G, d_S)$.
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- $\tilde{H}_k(|P_\infty(G)|) = 0$ *para todo* $k < n$:
  Como $P_\infty(G)$ es el complejo simplicial que consiste de todos los subconjuntos finitos de G, entonces la Proposición 1.3.49 implica que $|P_\infty(G)|$ es contraíble. Por lo tanto, el Lema 1.6.9 implica que $\tilde{H}_k(|P_\infty(G)|) = 0$ para todo k.
- *Para todo* $q \in \{0, \dots, n\}$ *y todo* q*-simplejo* $s \in P_\infty(G)$*, el estabilizador* G_s *es de tipo* F_{n-q}:
  Supongamos que $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in P_\infty(G)$. Veamos que G_s es finito. Supongamos lo contrario y denotemos por $\{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ a un subconjunto infinito de G_s de elementos distintos. Entonces para todo $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

  $$g_i v_0 \in g_i s = s \tag{4.4}$$

donde la pertenencia se cumple porque $v_0 \in s$ y la igualdad se cumple porque $g_i \in G_s$. Más aún, como $\{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ es un conjunto de elementos distintos, entonces

$$g_i v_0 \neq g_j v_0 \text{ si } i \neq j. \tag{4.5}$$

(recordemos que la acción de G en $V(P_\infty(G, d_S))$ es la operación del grupo G). Juntando (4.4) y (4.5) obtenemos que $\{g_0 v_0, g_1 v_0, g_2 v_0, \dots\}$ es un subconjunto infinito de s de elementos distintos, contradiciendo la finitud de s.

Por lo tanto, todo G_s es finito. Por la Proposición 2.2.8, lo anterior implica que es de tipo FP_k para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y en particular tenemos lo deseado.

Definición 4.2.10 (Filtración de un G-complejo)
Supongamos que G es un grupo y que K es un G-complejo. Una *filtración* de K es una familia $\{K_i\}_{i \in I}$ de subcomplejos de K tales que

- $K_i \subset K_j$ si $i \leq j$,
- $K = \bigcup_{i \in I} K_i$,
- $V(K_i) = G \cdot V(K_i)$ para todo $i \in I$.

Ejemplo 4.2.11
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Veamos que $\{P_n(G)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una filtración de $P_\infty(G)$.

- $P_n(G) \subset P_m(G)$ *si* $n \leq m$: es trivial.
- $P_\infty(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} P_n(G)$: es trivial.
- $V(P_n(G)) = G \cdot V(P_n(G))$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: Es consecuencia inmediata de que $V(P_n(G)) = G$.

Definición 4.2.12 (Filtración de n-tipo finito)
Supongamos que G es un grupo, que K es un G-complejo, y que $\{K_i\}_{i \in I}$ es una filtración de K. Decimos que $\{K_i\}_{i \in I}$ es una filtración de *n-tipo finito* si el n-esqueleto de K_i es finito módulo G para todo $i \in I$, es decir, K_i^n / G es finito para todo $i \in I$.

Ejemplo 4.2.13
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Veamos que $\{P_p(G)\}_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es de tipo n-finito para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si S es finito.

Supongamos que $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y denotemos por $P_p^n(G)$ al n-esqueleto de $P_p(G)$. Notemos que $s \in P_p^n(G)$ si y solo si s es un subconjunto de G con diámetro $\leq p$ y cardinalidad $\leq n+1$ (un n-simplejo tiene cardinalidad $n+1$). Queremos ver que $P_p^n(G)$ es finito módulo G para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Equivalentemente, queremos ver si $\theta_s = \{g \cdot s \mid g \in G\}$, entonces el conjunto

$$\Theta = \{\theta_s \mid s \in P_p^n(G)\}$$

es finito. Denotemos por $\mathcal{P}(B_{p+1}^{d_S}(e))$ al conjunto potencia de $B_{p+1}^{d_S}(e)$ y consideremos

$$A \coloneqq P_p^n(G) \cap \mathcal{P}(B_{p+1}^{d_S}(e)) = \left\{ B \mid B \subset B_{p+1}^{d_S}(e),\ \ \mathrm{diam}(B) \leq p,\ \ |B| \leq n+1 \right\}$$

Por otro lado, como S es finito, la Proposición 3.1.23 implica que $B_{p+1}^{d_S}(e)$ es finito. En particular, A también es finito. Veamos que

$$\Theta = \{\theta_a \mid a \in A\}.$$

Como $A \subset P_p^n(G)$, la inclusión "$\supset$" es trivial. Para la inclusión conversa, supongamos que $s \in P_p^n(G)$ y que $s = \{g_0, g_1, \dots, g_k\}$ con $k \leq n$. Queremos ver que existe $a \in A$ tal que $\theta_a = \theta_s$. Veamos que $a \coloneqq g_0^{-1} \cdot s$ cumple lo deseado.

- $a \in A$: Por definición,

$$a = g_0^{-1} \cdot s = g_0^{-1} \cdot \{g_0, g_1, \ldots, g_k\} = \{e, g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_k\}$$

Por lo tanto, $|a| \leq k+1$ y usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\operatorname{diam}\left(\{e, g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_k\}\right) = \operatorname{diam}\left(\{g_0, g_1, \ldots, g_k\}\right) = \operatorname{diam}(s) \leq p$$

Usando esto obtenemos lo deseado.

- $\theta_a = \theta_s$: Por definición,

$$\theta_a = \{g \cdot a \mid g \in G\} = \{g \cdot (g_0^{-1} \cdot s) \mid g \in G\} = \{(gg_0^{-1}) \cdot s \mid g \in G\} = \{g' \cdot s \mid g' \in G\} = \theta_s$$

donde la cuarta igualdad se cumple porque todo elemento de G puede ser escrito de la forma gg_0^{-1} con $g \in G$.

Por lo tanto, $\Theta = \{\theta_a \mid a \in A\}$. Como A es finito, entonces Θ también es finito.

Definición 4.2.14 (Filtración $\tilde{H}_k$-esencialmente trivial)
Supongamos que G es un grupo, que K es un G-complejo, y que $\{K_i\}_{i\in I}$ es una filtración de K. Para todo $i, j \in I$ tales que $i \leq j$ denotemos por

$$\iota_{(i,j)} : V(K_i) \hookrightarrow V(K_j)$$

a la inclusión de $V(K_i)$ en $V(K_j)$ (esto es posible porque recordemos que $K_i \subset K_j$ si $i \leq j$ por definición de filtración).

Ahora bien, supongamos que $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es fijo. Decimos que $\{K_i\}_{i\in I}$ es $\tilde{H}_k$*-esencialmente trivial* si

$$\forall i \in I\ \exists j \geq i \left(\tilde{H}_k\left(|\iota_{(i,j)}|\right) = 0\right).$$

Observación 4.2.15
Supongamos que X es un espacio métrico. En el caso del complejo de Rips $P_\infty(X)$ con la filtración $\{P_p(X)\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, la inclusión $\iota_{(n,m)} : P_n(X) \hookrightarrow P_m(X)$ (con $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $n \leq m$) coincide con la función simplicial $(\mathrm{id}_X)_{(n,m)}$. Por lo tanto,

$$\{P_p(X)\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{ es una filtración } \tilde{H}_k\text{-esencialmente trivial} \iff \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \exists m \geq n\ \left(\tilde{H}_k\left(|(\mathrm{id}_X)_{(n,m)}|\right) = 0\right).$$

Teorema 4.2.16 (Criterio de Brown)
Supongamos que G es un grupo. Si K es un G-complejo n-bueno con una filtración $\{K_i\}_{i\in I}$ de n-tipo finito, entonces

$$G \text{ es de tipo } FP_n \iff \{K_i\}_{i\in I} \text{ es } \tilde{H}_k\text{-esencialmente trivial para todo } k < n.$$

Demostración. cf. [6] p.48, Theorem 2.2. □

Lema 4.2.17
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador de G. Entonces el complejo simplicial $P_\infty(G, d_S)$ es un G-complejo n-bueno para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\{P_p(G, d_S)\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una filtración de $P_\infty(G)$. Además, si S es finito, entonces esta filtración es de n-tipo finito.

Demostración. Esto es precisamente lo que demostramos en los ejemplos 4.2.4, 4.2.9, 4.2.11, y 4.2.13 □

Observación 4.2.18
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto generador finito de G. Si juntamos la Observación 4.2.15, el Criterio de Brown, y el Lema 4.2.17 obtenemos que

$$\begin{aligned} G \text{ es de tipo } FP_n &\iff \forall k < n \left(\{P_p(G, d_S)\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{ es } \tilde{H}_k\text{-esencialmente trivial}\right) \\ &\iff \forall k < n \left(\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \exists q \geq p\ \left(\tilde{H}_k\left(|(\mathrm{id}_G)_{(p,q)}|\right) = 0\right)\right). \end{aligned}$$

4.3. La demostración

Teorema Principal. (Invarianza cuasi-isométrica de propiedades de finitud)
Supongamos que G y G' son grupos finitamente generados. Si G y G' son cuasi-isométricos, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

$$G \text{ es de tipo } FP_n \text{ si y solo si } G' \text{ es de tipo } FP_n.$$

Demostración. Supongamos que (G, d_S) y $(G', d_{S'})$ son cuasi-isométricos, que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ es fijo, y que G es de tipo FP_n. Veremos que G' es de tipo FP_n. Por la Observación 4.2.18 basta ver que

$$\forall k < n \ \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \exists q \geq p \ \left(\tilde{H}_k \left(|(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}| \right) = 0 \right).$$

Por eso, supongamos que $k < n$ es fijo y que $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ también es fijo. En lo que sigue, "construiremos" la q deseada. Primero, notemos que como $G \sim_{\mathrm{QI}} G'$, entonces (en particular) existen $f : G \to G'$, $g : G' \to G$, y $M \geq 0$ tales que f y g son (b,c)-encajes cuasi-isométricos y $d_{S'}\big((f \circ g)(x), x\big) \leq M$ para todo $x \in G'$. Sea $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $r \geq cp + b$. Entonces (por el Lema 4.1.6) $g_{(p,r)}$ es simplicial. Además, como G es de tipo FP_n, la Observación 4.2.18 implica que existe $s \geq r$ tal que

$$\tilde{H}_k \left(|(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}| \right) = 0. \tag{4.6}$$

Como $s \geq r$, el Lema 4.1.5 implica que $(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}$ es simplicial. Por otro lado, denotemos $B = \max\left\{ \frac{c}{b-bc}, cb + b \right\}$ y sea $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $q \geq c^2 s + B + M$. Como

- $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son (b,c)-encajes cuasi-isométricos tales que $d_{S'}\big((f \circ g)(x), x\big) \leq M$ para todo $x \in G'$ y
- $p, s, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son tales que $s \geq cp + b$ y $q \geq c^2 s + B + M$,

entonces el Lema 4.1.8 implica (I) que $(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}$, $f_{(s,q)}$, y $g_{(p,s)}$ son funciones simpliciales y (II) que $|(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}|$ y $|f_{(s,q)} \circ g_{(p,s)}|$ son homotópicas. Notemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_k \left(|(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}| \right) &= \tilde{H}_k \left(|f_{(s,q)} \circ g_{(p,s)}| \right) \\
&= \tilde{H}_k \left(|f_{(s,q)} \circ \left((\mathrm{id}_G)_{(r,s)} \circ g_{(p,r)} \right) | \right) \\
&= \tilde{H}_k \left(|f_{(s,q)}| \circ |(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}| \circ |g_{(p,r)}| \right) \\
&= \tilde{H}_k \left(|f_{(s,q)}| \right) \circ \tilde{H}_k \left(|(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}| \right) \circ \tilde{H}_k \left(|g_{(p,r)}| \right) \\
&= \tilde{H}_k \left(|f_{(s,q)}| \right) \circ 0 \circ \tilde{H}_k \left(|g_{(p,r)}| \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es porque $|(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}|$ y $|f_{(s,q)} \circ g_{(p,s)}|$ son homotópicas y por lo tanto podemos ocupar la invarianza homotópica de la homología (cf. Teorema 1.5.10); la segunda es porque $g_{(p,s)} = g = g_{(p,r)}$ y $(\mathrm{id}_G)_{(r,s)} = \mathrm{id}_G$ (cf. Notación 4.1.4); la tercera es porque las funciones $f_{(s,q)}$, $(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}$, y $g_{(p,r)}$ son simpliciales y por lo tanto, podemos ocupar que $|\cdot|$ abre composiciones (cf. Proposición 1.3.42); la cuarta es porque $|f_{(s,q)}|$, $|(\mathrm{id}_G)_{(r,s)}|$, y $|g_{(p,r)}|$ son continuas (cf. Proposición 1.3.46) y por lo tanto podemos ocupar que $\tilde{H}_k(\,\cdot\,)$ abre composiciones (cf. Proposición 1.4.21); la quinta es por (4.6); y la última es trivial. En resumen, acabamos de demostrar que

$$\forall k < n \ \forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \exists q \geq p \ \left(\tilde{H}_k \left(|(\mathrm{id}_{G'})_{(p,q)}| \right) = 0 \right)$$

y por lo tanto, G' es de tipo FP_n. Finalmente, notemos que si intercambiamos los roles de G y G' en esta demostración, obtenemos la demostración de la implicación conversa. $\square$

Apéndice A

Prerrequisitos de topología general

A.1. Definiciones básicas

Definición A.1.1 (Topología)
Supongamos que X es un conjunto. Una *topología* sobre X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que

1. la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$,
2. a intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$, y
3. $\varnothing$ y X son elementos de $\mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Si decimos que "X es un espacio topológico" (sin especificar la notación para la topología), denotamos por $\mathcal{T}_X$ a la topología de X.

Definición A.1.2 (Conceptos básicos de topología)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que A es un subconjunto de X. Decimos que

1. A es *abierto* en $(X, \mathcal{T})$ si $A \in \mathcal{T}$.
2. A es *cerrado* en $(X, \mathcal{T})$ si $X \setminus A \in \mathcal{T}$.
3. A es *discreto* en $(X, \mathcal{T})$ si todo subconjunto de A es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.
4. A es *compacto* en $(X, \mathcal{T})$ si se satisface la siguiente propiedad:

   > Si $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una familia de subconjuntos de X abiertos en $(X, \mathcal{T})$ tal que $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces existe un subconjunto finito $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ de $\{A_\alpha\}_\alpha$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$.

   Si $\{A_\alpha\}_\alpha$ es una familia de subconjuntos abiertos en $(X, \mathcal{T})$ tal que $A \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$, decimos que $\{A_\alpha\}_\alpha$ es una *cubierta abierta* de A. De esta manera, A es compacto si y solo si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.

Si no hay ambigüedad respecto a la topología, simplemente decimos que A es abierto en X; y si no hay ambigüedad respecto al conjunto X, simplemente decimos que A es abierto. La misma convención aplica para conjuntos cerrados, discretos, y compactos.

Observación A.1.3
Por las leyes de de Morgan, la unión finita de cerrados es cerrada y la intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Proposición A.1.4
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Si $U \subset X$, entonces

$$U \in \mathcal{T} \iff \forall x \in U \; \exists V_x \in \mathcal{T} \; (x \in V_x \subset U) \, .$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Para todo $x \in U$, $V_x := U$ cumple lo deseado.
$\Longleftarrow$) Usando solo definiciones se puede demostrar que la hipótesis es equivalente a que

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x$$

Como todo $V_x \in \mathcal{T}$, lo anterior implica que $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Proposición A.1.5
Supongamos que X es un espacio topológico. Si $C \subset X$ es un subconjunto compacto de X, entonces C no contiene ningún subconjunto discreto e infinito. En otras palabras, si C es compacto y $A \subset C$ es discreto, entonces A es finito.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que C es compacto y que contiene un subconjunto $A \subset C$ que es discreto e infinito. Como A es discreto, $X \setminus A$ es abierto y para todo $a \in A$ el conjunto $X \setminus \big(A \setminus \{a\}\big)$ es abierto. Veamos que

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A\} \cup \Big\{X \setminus \big(A \setminus \{a\}\big) \mid a \in A\Big\} \tag{A.1}$$

es una cubierta abierta de C. Supongamos que $x \in C$. Entonces $x \in C \setminus A$ o $x \in A$. Si $x \in C \setminus A$, entonces $x \in X \setminus A \subset \bigcup \mathcal{C}$. Si $x \in A$, entonces $x \in X \setminus \big(A \setminus \{x\}\big) \subset \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de C.

Usando solo definiciones se puede demostrar que $\mathcal{C}$ no tiene ninguna subcubierta propia y que $\mathcal{C}$ es una cubierta infinita (pues A es infinito). Juntando estas dos observaciones obtenemos que $\mathcal{C}$ no tiene ninguna subcubierta finita y por lo tanto, C no es compacto. $\square$

Definición A.1.6 (La topología subespacio)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Para todo subconjunto Y de X definimos

$$\mathcal{T}_{Y \subset X} := \big\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\big\}$$

y decimos que $\mathcal{T}_{Y \subset X}$ es la *topología subespacio de Y inducida por X*. Usando solo definiciones se puede demostrar que $\mathcal{T}_{Y \subset X}$ es en efecto una topología y que satisface la siguiente propiedad:

$$B \text{ es cerrado en } Y \iff B = F \cap Y \text{ para algún } F \text{ cerrado en } X.$$

Si consideramos a un subconjunto de X con esta topología, decimos que este es un *subespacio de X*.

Por brevedad, omitimos la demostración de la siguiente proposición.

Proposición A.1.7
Supongamos que X es un espacio topológico y que $Y \subset X$ es abierto (cerrado) en X. Si consideramos a Y con la topología subespacio inducida por X, entonces para todo $A \subset Y$

$$A \text{ es abierto (cerrado) en } X \iff A \text{ es abierto (cerrado) en } Y.$$

Proposición A.1.8
Supongamos que X es un espacio topológico y que Y, Z son subconjuntos de X tales que $Z \subset Y \subset X$. Entonces

$$(\mathcal{T}_{Y \subset X})_{Z \subset Y} = \mathcal{T}_{Z \subset X}$$

Demostración.
$\subset$) Supongamos que $A \in (\mathcal{T}_{Y \subset X})_{Z \subset Y}$. Por definición, existe $U \in \mathcal{T}_{Y \subset X}$ tal que $A = U \cap Z$. Pero como $U \in \mathcal{T}_{Y \subset X}$, entonces existe $V \in \mathcal{T}_X$ tal que $U = V \cap Y$. De donde,

$$A = U \cap Z = (V \cap Y) \cap Z = V \cap (Y \cap Z) = V \cap Z$$

Como $V \in \mathcal{T}_X$, lo anterior implica que $A \in \mathcal{T}_{Z \subset X}$.
$\supset$) Supongamos que $A \in \mathcal{T}_{Z \subset X}$. Por definición, existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $A = U \cap Z$. Sea $V := (U \cap Y)$. Entonces

$$A = U \cap Z = U \cap (Y \cap Z) = (U \cap Y) \cap Z = V \cap Z \tag{A.2}$$

Como $U \in \mathcal{T}_X$, entonces $V = U \cap Y \in \mathcal{T}_{Y \subset X}$ y por lo tanto, (A.2) implica $A \in (\mathcal{T}_{Y \subset X})_{Z \subset Y}$. $\square$

A.2. Continuidad

Definición A.2.1 (Continuidad)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ son espacios topológicos y que $f : X \to X'$ es una función. Decimos que f es *continua* si para todo U subconjunto de Y

$$U \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{T}.$$

En palabras, f es continua si la imagen inversa de todo abierto en X' es abierta en X. Si hay ambigüedad respecto a las topologías, decimos "$f : (X, \mathcal{T}) \to \big(X', \mathcal{T}'\big)$ es continua" en vez de "f es continua".

Proposición A.2.2
Supongamos que X, X' son espacios topológicos y que $f : X \to X'$ es una función. Entonces f es continua si y solo si la imagen inversa de todo cerrado en X' es cerrado en X.

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua y que C es cerrado en X'. Por definición, $Y \setminus C \in \mathcal{T}'$. Luego,

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C) \in \mathcal{T}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(C)$ es cerrado en X. Como $C \subset X'$ es cualquier cerrado en X', acabamos de ver que la imagen inversa de todo cerrado en X' es cerrado en X.
$\Longleftarrow$) Supongamos que la imagen inversa de todo cerrado en X' es cerrada en X y que $U \in \mathcal{T}'$. Por definición, $Y \setminus U$ es cerrado en Y. Luego, por hipótesis

$$X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U) \text{ es cerrado en } X$$

Por lo tanto, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Como U es cualquier abierto en X, acabamos de ver que f es continua. □

Ejemplo A.2.3
Supongamos que X es un espacio topológico y que $Y \subset X$. Veamos que la topología subespacio $\mathcal{T}_{Y \subset X}$ es la topología más pequeña para la cual la inclusión $i : Y \to X$ es continua.

- $i : (Y, \mathcal{T}_{Y \subset X}) \to (X, \mathcal{T})$ *es continua.*
  Es consecuencia inmediata de la igualdad $i^{-1}(U) = U \cap Y$.

- $\mathcal{T}_{Y \subset X}$ *es la topología más pequeña para la cual la inclusión es continua.*
  Supongamos que $\mathcal{T}'$ es una topología sobre Y tal que $i : \big(Y, \mathcal{T}'\big) \to (X, \mathcal{T})$ es continua. Entonces

  $$i^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}' \text{ para todo } U \in \mathcal{T} \tag{A.3}$$

  Como $\mathcal{T}_{Y \subset X} = \big\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\big\}$, entonces (A.3) implica que $\mathcal{T}_{Y \subset X} \subset \mathcal{T}'$.

Proposición A.2.4
Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos, entonces

1. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.
2. Si $f : X \to Y$ es continua y $A \subset X$ es considerado con la topología subespacio, entonces la restricción $f|_A : A \to Y$ es continua.
3. Si $f : X \to Y$ es continua y $f(X)$ es considerado con la topología subespacio, entonces $f : X \to f(X)$ es continua.

Demostración.

1. $W \in \mathcal{T}_Z \implies g^{-1}(W) \in \mathcal{T}_Y \implies (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \in \mathcal{T}_X$.
2. Si $i : A \to X$ es la inclusión, entonces $f|_A = f \circ i$. Por lo tanto, podemos aplicar el inciso anterior.

3. Supongamos que $V \in \mathcal{T}_{f(X)\subset Y}$. Entonces existe $W \in \mathcal{T}_Y$ tal que $V = W \cap f(X)$ y por lo tanto

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(W \cap f(X)\right) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}\left(f(W)\right) = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$$

   donde la última pertenencia se cumple porque $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua.

□

Proposición A.2.5
Supongamos que X, Y son espacios topológicos, que $f : X \to Y$ es una función, y que $Z \subset Y$ es tal que $f(X) \subset Z$. Entonces

$$f : X \to Y \text{ es continua} \iff f : X \to (Z, \mathcal{T}_{Z\subset Y}) \text{ es continua.}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_{Z\subset Y}$. Entonces (por definición) $U = V \cap Z$ para algún $V \in \mathcal{T}_Y$. Por lo tanto

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

donde la tercera igualdad se cumple porque $f(X) \subset Z$ y la pertenencia se cumple porque f es continua. $\Longleftarrow$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_Y$. Entonces (por definición de topología subespacio) $U \cap Z \in \mathcal{T}_{Z\subset Y}$. Luego, como $f : X \to Z$ es continua (considerando a Z como subespacio de Y), entonces $f^{-1}(U \cap Z) \in \mathcal{T}_X$. Para concluir, veamos que $f^{-1}(U \cap Z) = f^{-1}(U)$: la inclusión "$\subset$" es clara. Para "$\supset$" notemos que como $Z \supset f(X)$ (por hipótesis), entonces

$$f^{-1}(U \cap Z) \supset f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U)$$

donde la última igualdad es una propiedad de básica de las funciones. □

Proposición A.2.6
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f : X \to Y$ es una función continua. Si $A \subset X$ es compacto en X, entonces $f(A)$ es compacto en Y.

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ es compacto en X y que $\{B_\alpha\}_\alpha$ es una cubierta abierta de $f(A)$. Veamos que $\{f^{-1}(B_\alpha)\}_\alpha$ es una cubierta abierta de A.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies f(x) \in f(A) \subset \bigcup_\alpha B_\alpha \\ &\implies f(x) \in B_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\implies x \in f^{-1}(B_\alpha) \text{ para algún } \alpha \end{aligned}$$

Es decir, $A \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$. Como A es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ índices tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\alpha_i})$. Por lo tanto,

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f\left(f^{-1}(A_{\alpha_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$$

donde la última inclusión es una propiedad básica de la imagen directa de una función. □

Definición A.2.7 (Función abierta, función cerrada)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ y $\left(X', \mathcal{T}'\right)$ son espacios topológicos y $f : X \to X'$ es una función.

- Decimos que f es *abierta* si para todo U subconjunto de X

$$U \in \mathcal{T} \implies f(U) \in \mathcal{T}'.$$

- Decimos que f es *cerrada* si para todo U subconjunto de X

$$X \setminus U \in \mathcal{T} \implies X' \setminus f(X \setminus U) \in \mathcal{T}'.$$

Definición A.2.8 (Homeomorfismo)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$, $\left(X', \mathcal{T}'\right)$ son espacios topológicos, y que $f : X \to X'$ es una función. Decimos que f es un *homeomorfismo* si f es continua, biyectiva, y su inversa es continua. Si existe un homeomorfismo de X en X', decimos que X y X' son *homeomorfos*.

Observación A.2.9
Supongamos que X y X' son espacios topológicos homeomorfos. Si $f : X \to X'$ es un homeomorfismo y $A \subset X$, entonces se puede demostrar que

$$A \in \mathcal{T} \iff f(A) \in \mathcal{T}' \qquad \text{y} \qquad X \setminus A \in \mathcal{T} \iff Y \setminus f(A) \in \mathcal{T}. \tag{A.4}$$

Como la única información que contiene una topología es "cuales conjuntos son abiertos y cerrados", entonces (A.4) nos dice que desde un punto de vista topológico, dos espacios topológicos son iguales si son homeomorfos.

A.3. La topología métrica

Definición A.3.1 (Espacio métrico)
Supongamos que X es un conjunto. Una *métrica* sobre X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d es una métrica sobre X, decimos que (X, d) es un espacio métrico. Si decimos que "X es un espacio métrico" (sin especificar la notación para la métrica), denotamos por d_X a la métrica de X.

Definición A.3.2 (La bola abierta)
Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Para todo $x \in X$ y todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$ definimos

$$B_r^d(x) \coloneqq \{a \in X \mid d(x, a) < r\}$$

y decimos que $B_r^d(x)$ es la *bola abierta de radio r centrada en x*. Si no hay ambigüedad respecto a la métrica d, denotamos $B_r(x) = B_r^d(x)$.

Definición A.3.3 (La topología métrica sobre X inducida por d)
Supongamos que (X, d) un espacio métrico. Definimos

$$\mathcal{T}_d \coloneqq \Big\{U \subset X \mid \forall x \in U \; \exists \epsilon > 0 \left(B_\epsilon(x) \subset U\right)\Big\}$$

y decimos que $\mathcal{T}_d$ es la *topología métrica sobre X inducida por d.*

Definición A.3.4 (La métrica estándar sobre $\mathbb{R}^n$)
Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Definimos

$$d_{\mathbb{R}^n}\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

y decimos $d_{\mathbb{R}^n}$ es la *métrica estándar sobre* $\mathbb{R}^n$ y que $\mathcal{T}_{d_{\mathbb{R}^n}}$ es la *topología estándar sobre* $\mathbb{R}^n$. A menos de que se especifique lo contrario, siempre consideramos a $\mathbb{R}^n$ esta topología.

Proposición A.3.5
Supongamos que (X, d) y $\left(X', d'\right)$ son espacios métricos y que $f : X \to X'$ es una función. Entonces

$$\begin{aligned} f : (X, \mathcal{T}_d) \to \left(X', \mathcal{T}_{d'}\right) \text{ es continua } &\iff \\ \forall x_0 \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \Big(d\left(x, x_0\right) < \delta &\implies d'\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon\Big). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua en el sentido topológico. Sean $\epsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Como $B_\epsilon\left(f(x_0)\right) \in T_{d'}$, entonces como f es continua $f^{-1}\Big(B_\epsilon\left(f(x_0)\right)\Big) \in \mathcal{T}_d$. Por definición, esto significa que

$$\forall x \in f^{-1}\Big(B_\epsilon\left(f(x_0)\right)\Big)\ \exists \delta_x > 0 \left(B_{\delta_x}(x) \subset f^{-1}\Big(B_\epsilon\left(f(x_0)\right)\Big)\right).$$

Usando esto se puede demostrar que $\delta := \delta_{x_0}$ cumple lo deseado.
$\Longleftarrow$) Supongamos que se satisface el lado derecho de (A.5) y que $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Queremos ver que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_d$. Esto es si y solo si

$$\forall x_0 \in f^{-1}(U)\ \exists \delta > 0 \Big(B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U)\Big)$$

Ahora bien, como $U \in \mathcal{T}_{d'}$, entonces

$$\forall y \in U\ \exists \epsilon > 0 \left(B_\epsilon(y) \subset U\right)$$

En particular, para $x_0 \in f^{-1}(U)$ existe ϵ_0 tal que $B_{\epsilon_0}\left(f(x_0)\right) \subset U$ y por lo tanto,

$$f^{-1}\Big(B_{\epsilon_0}\left(f(x_0)\right)\Big) \subset f^{-1}(U) \tag{A.6}$$

Aplicando la hipótesis (de continuidad en el sentido métrico de f) a $\epsilon_0 > 0$ y $x_0 \in f^{-1}(U)$ obtenemos un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in X \Big(d(x, x_0) < \delta \implies d'\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon_0\Big)$$

En otras palabras,

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}\Big(B_{\epsilon_0}\left(f(x_0)\right)\Big)$$

Juntando esto con (A.6) obtenemos lo deseado. □

Teorema A.3.6 (Heine-Borel)
Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Proposición A.3.7
Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y $Y \subset X$. Entonces

$$(\mathcal{T}_d)_{Y \subset X} = \mathcal{T}_{d|_{Y \times Y}}$$

En palabras, la topología subespacio de un espacio con la topología métrica coincide la topología inducida por la restricción de la métrica.

Demostración. Denotemos $d' := d|_{Y\times Y}$.
$\subset$) Supongamos que $A \in (\mathcal{T}_d)_{Y \subset X}$. Por definición, existe $U \in \mathcal{T}_d$ tal que $A = U \cap Y$. Como $A \subset U$ y $U \in \mathcal{T}_d$, entonces para todo $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(x) \subset U$. Esto implica que

$$x \in B^{d'}_\epsilon(x) = B^d_\epsilon(x) \cap Y \subset U \cap Y = A$$

donde la primera igualdad es consecuencia inmediata de que $d' = d|_{Y\times Y}$. Usando esto se puede demostrar que $A \in \mathcal{T}_{d'}$.
$\supset$) Supongamos que $A \in \mathcal{T}_{d'}$. Por definición,

$$\forall x \in A\ \exists \epsilon_x > 0 \Big(B^{d'}_{\epsilon_x}(x) \subset A\Big)$$

En otras palabras,

$$A = \bigcup_{x\in A} B^{d'}_{\epsilon_x}(x). \tag{A.7}$$

Como

$$B^{d'}_{\delta}(y) = B^{d}_{\delta}(y) \cap Y \text{ para todo } y \in Y \text{ y todo } \delta > 0,$$

entonces (A.7) implica que

$$A = \bigcup_{x\in A} \left(B^{d}_{\delta}(y) \cap Y\right) = \underbrace{\left(\bigcup_{x\in A} B^{d}_{\delta}(y)\right)}_{\in \mathcal{T}_d} \cap Y.$$

Por lo tanto, $A \in (\mathcal{T}_d)_{Y\subset X}$. □

Definición A.3.8 (Convergencia)
Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es un subconjunto de X. Si $x \in X$ es tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall n \geq N \left(d(x_n, x) < \epsilon\right)$$

decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *converge a* x o que x es el *límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ y escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Si no queremos especificar la x, simplemente decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es *convergente*.

Proposición A.3.9
Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado respecto a la topología métrica si y solo si para todo subconjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de A se satisface la siguiente implicación:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in A.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $A \subset X$ es cerrado respecto a la topología métrica y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset A$ una sucesión convergente en X. Es decir, existe $x \in X$ tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall n \geq N \left(d(x_n, x) < \epsilon\right). \tag{A.8}$$

Queremos ver que $x \in A$. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $x \in X \setminus A$. Como A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto. Por lo tanto, existe ϵ_0 tal que $B_{\epsilon_0}(x) \subset X \setminus A$. Pero entonces

$$\forall a \in A \left(d(a, x_0) > \epsilon_0\right).$$

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset A$, esto contradice (A.8). Por lo tanto, $x \in A$.
$\Longleftarrow$) Procedemos por contrapuesta. Supongamos que $A \subset X$ no es cerrado. Entonces $X \setminus A$ no es abierto. Esto significa que existe $x \in X \setminus A$ tal que

$$\forall \epsilon > 0 \left(B_\epsilon(x) \not\subset X \setminus A\right).$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \left(B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subset X \setminus A\right).$$

En otras palabras,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \left(x_n \in A\right).$$

Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset A$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$. □

Corolario A.3.10
Todo subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado.

Demostración. Como la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada, basta demostrar que los singuletes son cerrados. Sin embargo, esto es consecuencia inmediata de la Proposición A.3.9. □

A.4. La topología caja

Definición A.4.1 (La topología caja)
Supongamos que X, Y son espacios topológicos. Definimos

$$\mathcal{T}_{X\times Y} := \left\{U \subset X \times Y \mid \forall u \in U\ \exists V_u \in \mathcal{T}_X\ \exists W_u \in \mathcal{T}_Y\ (u \in V_u \times W_u \subset U)\right\}$$

y decimos que $\mathcal{T}_{X\times Y}$ es la *topología caja sobre* $X \times Y$. Usando solo definiciones se puede demostrar que $U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ si y solo si U es una unión arbitraria de conjuntos de la forma $V \times W$ con $V \in \mathcal{T}_X$ y $W = \mathcal{T}_Y$. En otras palabras, los conjuntos abiertos en $X \times Y$ son las uniones arbitrarias de cajas abiertas.

Proposición A.4.2
Supongamos que X, Y son espacios topológicos. Definimos (I) la *proyección canónica de* $X \times Y$ *sobre* X como la función $\pi_X : X \times Y \to X$ dada por $(x, y) \mapsto x$ y (II) la *proyección canónica de* $X \times Y$ *sobre* X como la función $\pi_Y : X \times Y \to Y$ dada por $(x, y) \mapsto y$. Entonces

1. π_X y π_Y son continuas y
2. π_X y π_Y son abiertas.

Demostración. Veamos que π_X es continua y abierta, la demostración de que π_Y es continua y abierta es completamente análoga. Por eso, por el resto de la demostración escribimos $\pi := \pi_X$.

1. Supongamos que $A \in \mathcal{T}_X$. Veamos que $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Específicamente, veamos que

   $$\forall u \in \pi^{-1}(A)\ \exists V_u \in \mathcal{T}_X\ \exists W_u \in \mathcal{T}_Y \left(u \in V_u \times W_u \subset \pi^{-1}(A)\right).$$

   Usando la igualdad $\pi^{-1}(A) = A \times Y$ se puede demostrar que para todo $u \in \pi^{-1}(A)$ los abiertos $V_u := A$ y $W_u := Y$ cumplen lo deseado.

2. Supongamos que $U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Por definición,

   $$\forall u \in U\ \exists V_u \in \mathcal{T}_X\ \exists W_u \in \mathcal{T}_Y\ (u \in V_u \times W_u \subset U).$$

   En particular,

   $$U = \bigcup_{u\in U} V_u \times W_u$$

   Por lo tanto,

   $$\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{u\in U} (V_u \times W_u)\right) = \bigcup_{u\in U} V_u \in \mathcal{T}_X$$

   Donde la última pertenencia se cumple porque la unión arbitraria de abiertos es abierta.

$\square$

Proposición A.4.3
Supongamos que X, Y son espacios topológicos. Si $x_0 \in X$ es fijo y

$$\begin{aligned} f_{x_0} : Y &\to X \times Y \\ y &\mapsto (x_0, y) \end{aligned}$$

entonces f_{x_0} es continua. Análogamente, si $y_0 \in Y$ es fijo y

$$\begin{aligned} g_{y_0} : X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (x, y_0) \end{aligned}$$

entonces g_{y_0} es continua.

Demostración. Solo veremos que f_{x_0} es continua, la demostración para g_{y_0} es análoga. Supongamos que $U \subset X \times Y$ es abierto. Queremos ver que $f_{x_0}^{-1}(U)$ es abierto en Y. Supongamos que $y \in f_{x_0}^{-1}(U)$ y encontremos $V \in \mathcal{T}_Y$ tal que $y \in V \subset f_{x_0}^{-1}(U)$.

Antes que nada, notemos que

$$f_{x_0}^{-1}(U) = \{y \in Y \mid f_{x_0}(y) \in U\} = \{y \in Y \mid (x_0, y) \in U\}$$

Ahora sí, supongamos que $y \in f_{x_0}^{-1}(U)$. Entonces $(x_0, y) \in U$ y como U es abierto en $X \times Y$, existen $U_1 \in \mathcal{T}_X$ y $U_2 \in \mathcal{T}_Y$ tales que $(x_0, y) \in U_1 \times U_2 \subset U$. Usando esto se puede demostrar que $V \coloneqq U_2$ cumple lo deseado. □

Proposición A.4.4
Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos y que $H : X \times Y \to Z$ es una función continua. Si $x_0 \in X$ es fijo y

$$\begin{aligned} H_{x_0} : Y &\to Z \\ y &\mapsto H(x_0, y) \end{aligned}$$

entonces H_{x_0} es continua. Análogamente, si $y_0 \in Y$ es fijo y

$$\begin{aligned} H_{y_0} : X &\to Z \\ x &\mapsto H(x, y_0) \end{aligned}$$

entonces H_{y_0} es continua.

Demostración. Solo veremos que H_{x_0} es continua, la demostración para H_{y_0} es análoga. Supongamos que $f_{x_0} : Y \to X \times Y$ es como en la Proposición A.4.3. Entonces para todo $y \in Y$,

$$(H \circ f_{x_0})(y) = H\left(f_{x_0}(y)\right) = H(x_0, y) = H_{x_0}(y).$$

Como H y f_{x_0} son continuas, lo anterior implica que H_{x_0} también lo es. □

Lema A.4.5
Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Si C_1 es compacto en X y C_2 es compacto en Y, entonces $C_1 \times C_2$ es compacto en $X \times Y$.

Demostración. Supongamos que $\{A_\alpha\}_\alpha \subset X \times Y$ es una cubierta abierta de $C_1 \times C_2$. Entonces

$$C_1 = \pi_X (C_1 \times C_2) = \pi_X \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) = \bigcup_\alpha \pi_X(A_\alpha).$$

Como π_X es abierta, lo anterior implica que $\{\pi_X(A_\alpha)\} \subset X$ es una cubierta abierta de C_1 y por lo tanto, existe un subconjunto finito $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ de $\{A_\alpha\}_\alpha$ tal que

$$C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi_X(A_{\alpha_i}). \tag{A.9}$$

De manera análoga, existe un subconjunto finito $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_m}\}$ de $\{A_\alpha\}_\alpha$ tal que

$$C_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} \pi_Y(A'_{\alpha_j}). \tag{A.10}$$

Usando (A.9) y (A.10) se puede demostrar que

$$C_1 \times C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \cup \bigcup_{j=1}^{m} A'_{\alpha_j}.$$

En otras palabras, $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}, A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_m}\}$ es la subcubierta finita buscada. □

Proposición A.4.6
Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Definimos

$$d\big((x,y),(x',y')\big) = d_X(x,x') + d_Y(y,y') \text{ para todo } (x,y),(x',y') \in X \times Y.$$

Entonces d es una métrica sobre $X \times Y$ tal que

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{X\times Y}$$

Demostración. Omitimos la demostración de que d es en efecto una métrica.
$\subset$) Supongamos que $(x,y) \in X \times Y$ y que $\epsilon > 0$ son fijos. Más aún, supongamos que $(x',y') \in B^d_\epsilon(x,y)$. Veamos que

$$B^{d_X}_\delta(x') \times B^{d_Y}_\delta(y') \subset B^d_\epsilon(x,y) \text{ donde } \delta = \frac{1}{2}\Big(\epsilon - d\big((x,y),(x',y')\big)\Big).$$

Si $(a,b) \in B^{d_X}_\delta(x') \times B^{d_Y}_\delta(y')$, entonces

$$\begin{aligned}
d\big((a,b),(x,y)\big) &= d_X(a,x) + d_Y(b,y)\\
&\le d_X(a,x') + d_X(x',x) + d_Y(b,y') + d_Y(y',y)\\
&< \delta + d_X(x,x') + \delta + d_Y(y,y')\\
&= 2\delta + d_X(x,x') + d_Y(y,y)\\
&= 2\delta + d\big((x,y),(x',y')\big)\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\Big(\epsilon - d\big((x,y),(x',y')\big)\Big)\right) + d\big((x,y),(x',y')\big)\\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto $(a,b) \in B^d_\epsilon(x,y)$. En resumen, acabamos de demostrar que

$$\forall (x,y) \in X \times Y \; \forall \epsilon > 0 \; \forall (x',y') \in B^d_\epsilon(x,y) \; \exists \delta > 0 \Big(B^{d_X}_\delta(x') \times B^{d_Y}_\delta(y') \subset B^d_\epsilon(x,y)\Big). \tag{A.11}$$

Por otro lado, recordemos que $U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ si y solo si

$$\forall x \in U \; \exists V_x \in \mathcal{T}_X \; \exists W_x \in \mathcal{T}_Y \left(x \in V_x \times W_x \subset U\right). \tag{A.12}$$

Juntando (A.11) y (A.12) obtenemos que

$$\forall (x,y) \in X \times Y \; \forall \epsilon > 0 \Big(B^d_\epsilon(x,y) \in \mathcal{T}_{X\times Y}\Big).$$

Como todo elemento de $\mathcal{T}_d$ es una unión arbitraria de bolas abiertas, lo anterior implica que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{X\times Y}$.
$\supset$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Por definición, para todo $u \in U$ existen $V_u \in \mathcal{T}_X$ y $W_u \in \mathcal{T}_Y$ tales que

$$u \in V_u \times W_u \subset U \tag{A.13}$$

En particular, como $V_u \in \mathcal{T}_X$ y $W_u \in \mathcal{T}_Y$, entonces para todo $u \in U$

$$\exists \epsilon^X_u \Big(B_{\epsilon^X_u}\big(\pi_X(u)\big) \subset V_u\Big) \quad \text{y} \quad \exists \epsilon^Y_u \Big(B_{\epsilon^Y_u}\big(\pi_Y(u)\big) \subset V_u\Big).$$

Para todo $u \in U$ denotemos $\epsilon_u \coloneqq \min\{\epsilon^X_u, \epsilon^Y_u\}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(x,y) \in B^d_{\epsilon_u}(u) &\implies d_X\big(x,\pi_X(u)\big) + d_Y\big(y,\pi_Y(u)\big) = d\big((x,y),u\big) < \epsilon_u\\
&\implies d_X\big(x,\pi_X(u)\big) < \epsilon^X_u \;\text{ y }\; d_Y\big(y,\pi_Y(u)\big) < \epsilon^Y_u\\
&\implies x \in B_{\epsilon^X_u}\big(\pi_X(u)\big) \;\text{ y }\; y \in B_{\epsilon^Y_u}\big(\pi_Y(u)\big)\\
&\implies (x,y) \in V_u \times W_u
\end{aligned}$$

Es decir, $B^d_{\epsilon_u}(u) \subset V_u \times W_u$. Juntando esto con (A.13) obtenemos

$$u \in B^d_{\epsilon_u}(u) \subset U$$

para todo $u \in U$. Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_d$. $\square$

Proposición A.4.7
Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ denotamos por $\mathcal{T}_{(A\subset X)\times(B\subset Y)}$ a la topología producto de los subespacios A y B. Es decir, $U \in \mathcal{T}_{(A\subset X)\times(B\subset Y)}$ si y solo si

$$\forall u \in U \; \exists V_u \in \mathcal{T}_{A\subset X} \; \exists W_u \in \mathcal{T}_{B\subset Y} \, (u \in V_u \times W_u \subset U) \, . \tag{A.14}$$

Más aún, denotemos por $\mathcal{T}_{A\times B\subset X\times Y}$ a la topología subespacio de $A\times B$ inducida por $X\times Y$ (con la topología caja $\mathcal{T}_{X\times Y}$). Es decir, $U \in \mathcal{T}_{A\times B\subset X\times Y}$ si y solo si

$$U = U_0 \cap (A \times B) \text{ para algún } U_0 \in \mathcal{T}_{X\times Y}. \tag{A.15}$$

Entonces

$$\mathcal{T}_{A\times B\subset X\times Y} = \mathcal{T}_{(A\subset X)\times(B\subset Y)}.$$

En palabras, el subespacio del espacio producto es el espacio producto de los subespacios.

Demostración.
$\subset$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_{A\times B\subset X\times Y}$. Entonces

$$U = U_0 \cap (A \times B) \text{ para algún } U_0 \in \mathcal{T}_{X\times Y}.$$

Ahora bien, supongamos que $u \in U$. Entonces, en particular, $u \in U_0$ y como $U_0 \in \mathcal{T}_{X\times Y}$, entonces existen $V_u^0 \in \mathcal{T}_X$ y $W_u^0 \in \mathcal{T}_Y$ tales que

$$u \in V_u^0 \times W_u^0 \subset U_0. \tag{A.16}$$

Sean

$$V_u \coloneqq V_u^0 \cap A \quad \text{ y } \quad W_u \coloneqq W_u^0 \cap B.$$

Entonces $V_u \in \mathcal{T}_{A\subset X}$ y $W_u \in \mathcal{T}_{B\subset Y}$ y usando (A.16) se puede demostrar que

$$u \in V_u \times W_u \subset U.$$

Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_{(A\subset X)\times(B\subset Y)}$.
$\supset$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_{(A\subset X)\times(B\subset Y)}$. Usando (A.14) (incluyendo su notación) se puede demostrar que

$$U = \bigcup_{u\in U} V_u \times W_u. \tag{A.17}$$

Más aún, como $V_u \in \mathcal{T}_{A\subset X}$, entonces

$$V_u = V_u^0 \cap A \text{ para algún } V_u^0 \in \mathcal{T}_X$$

Análogamente,

$$W_u = W_u^0 \cap B \text{ para algún } W_u^0 \in \mathcal{T}_Y.$$

Sustituyendo esto en (A.17) obtenemos que

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{u\in U} \left\{ \left(V_u^0 \cap A\right) \times \left(W_u^0 \cap B\right) \right\} \\ &= \bigcup_{u\in U} \left\{ \left(V_u^0 \times W_u^0\right) \cap (A \times B) \right\} \\ &= \left(\bigcup_{u\in U} V_u^0 \times W_u^0 \right) \cap (A \times B). \end{aligned}$$

Como $V_u^0 \times W_u^0 \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ para todo $u \in U$, entonces $\bigcup_{u\in U} V_u^0 \times W_u^0 \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ y por lo tanto, lo anterior implica que $U \in \mathcal{T}_{A\times B\subset X\times Y}$ (cf. (A.15)). $\square$

A.5. La topología débil

Definición A.5.1 (La topología débil)
Supongamos que X es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Las topologías de A_α y A_β coinciden en $A_\alpha \cap A_\beta$. Es decir,
$$(\mathcal{T}_\alpha)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\alpha} = (\mathcal{T}_\beta)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\beta}$$
2. Exactamente uno de los siguientes casos se satisface:
   a) Todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_α y en A_β.
   b) Todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es cerrado en A_α y en A_β.

Definimos
$$\mathcal{T}(\mathfrak{U}) := \big\{U \subset X \mid \forall \alpha \in \mathcal{A}\,(U \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha)\big\}$$
y decimos que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ es la *topología débil* en X inducida por $\mathfrak{U}$. Usando las condiciones (1) y (2) se puede demostrar que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ es en efecto una topología.

Observación A.5.2
Supongamos que X es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que $\mathfrak{U}$ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición A.5.1. Si consideramos a X con la topología débil inducida por $\mathfrak{U}$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Un subconjunto B de X es cerrado si y solo si $B \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α para todo $\alpha \in \mathcal{A}$:
$$\begin{aligned} B \subset X \text{ es cerrado} &\iff X \setminus B \in \mathcal{T}(\mathfrak{U}) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A}\Big(\big(X \setminus B\big) \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\Big) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A}\big(A_\alpha \setminus (B \cap A_\alpha) \in \mathcal{T}_\alpha\big) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A}\,(B \cap A_\alpha \text{ es cerrado en } A_\alpha) \end{aligned}$$
donde la tercera equivalencia se cumple porque
$$\big(X \setminus B\big) \cap A_\alpha = A_\alpha \setminus (B \cap A_\alpha)\,.$$
2. Si estamos en el caso (*a*) (es decir, todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_α y en A_β), entonces todo abierto en A_α es abierto en X: Supongamos que $U \subset A_\alpha$ es abierto en A_α. Veamos que $U \cap A_\beta$ es abierto en A_β para todo β. Notemos que como $U \subset A_\alpha$, entonces $U = U \cap A_\alpha$ y por lo tanto,
$$U \cap A_\beta = (U \cap A_\alpha) \cap A_\beta = U \cap \big(A_\alpha \cap A_\beta\big)$$
De donde,
$$U \cap A_\beta \in (\mathcal{T}_\alpha)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\alpha} = \big(\mathcal{T}_\beta\big)_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\beta} \tag{A.18}$$
Ahora bien, como estamos en el caso (*a*), entonces $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_β. Usando esto, (A.18), y la Proposición A.1.7, obtenemos lo deseado.
3. Si estamos en el caso (*b*) (es decir, todo $A_\alpha \cap A_\beta$ es cerrado en A_α y en A_β), entonces todo cerrado en A_α es cerrado en X: la demostración es completamente análoga al la del inciso anterior.

Proposición A.5.3
Supongamos que X es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que $\mathfrak{U}$ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición A.5.1. Entonces
$$\mathcal{T}_\alpha = \big(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\big)_{A_\alpha \subset X} \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$
En palabras, A_α preserva su topología como subespacio de $(X, \mathcal{T}(\mathfrak{U}))$.

Demostración. Supongamos que estamos en el caso (a) de la condición (2) (el caso (b) es análogo).
$\subset$) Supongamos que $U \in \mathcal{T}_\alpha$. Como estamos en el caso (a), la Observación A.5.2 implica que $U \in \mathcal{T}(\mathfrak{U})$. Por otro lado, como $U \in \mathcal{T}_\alpha$, en particular $U \subset A_\alpha$ y entonces

$$U = \underbrace{U}_{\in \mathcal{T}(\mathfrak{U})} \cap A_\alpha.$$

Por lo tanto, $U \in \big(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\big)_{A_\alpha \subset X}$.
$\supset$) Supongamos que $U \in \big(\mathcal{T}(\mathfrak{U})\big)_{A_\alpha \subset X}$. Entonces existe $V \in \mathcal{T}(\mathfrak{U})$ tal que $U = V \cap A_\alpha$. Como $V \in \mathcal{T}(\mathfrak{U})$, entonces $V \cap A_\beta \in \mathcal{T}_\beta$ para todo β. En particular, para $\beta \coloneqq \alpha$, tenemos $U = V \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$. □

Proposición A.5.4
Supongamos que X es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que $\mathfrak{U}$ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición A.5.1. Además, supongamos que Y es un espacio topológico y que $f : X \to Y$ es una función. Entonces

$$f : (X, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua} \iff f|_{A_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ es continua para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Usando las Proposiciones A.2.4 y A.5.3 obtenemos lo deseado.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y que $U \in \mathcal{T}_Y$. Entonces

$$f^{-1}(U) \cap A_\alpha = \left(f|_{A_\alpha}\right)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}$$

donde la pertenencia se cumple porque $f|_{A_\alpha}$ es continua. Por lo tanto, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathfrak{U})$. □

Proposición A.5.5
Supongamos que X es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia espacios topológicos, que $A_\alpha \subset X$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y que $\mathfrak{U}$ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición A.5.1. Análogamente, supongamos que Y es un conjunto arbitrario, que $\mathfrak{V} = \{(B_\beta, \mathcal{T}_\beta) \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ es una familia espacios topológicos, que $B_\beta \subset Y$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$, y que $\mathfrak{V}$ satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición A.5.1. Si $f : X \to Y$ es una función tal que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\beta_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $f(A_\alpha) \subset B_{\beta_\alpha}$, entonces

$$f : (X, \mathcal{T}(\mathfrak{U})) \to (Y, \mathcal{T}(\mathfrak{V})) \text{ es continua} \iff f|_{A_\alpha} : (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to (B_{\beta_\alpha}, \mathcal{T}_{\beta_\alpha}) \text{ es continua para todo } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Usando las Proposiciones A.5.4, A.5.3, y A.2.5 obtenemos lo deseado. □

Observación A.5.6
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U} = \big\{(A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X}) \mid \alpha \in \mathcal{A}\big\}$ es una familia de subespacios de X. Entonces por la Proposición A.1.8, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$

$$(\mathcal{T}_{A_\alpha \subset X})_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\alpha} = \mathcal{T}_{A_\alpha \cap A_\beta \subset X} = (\mathcal{T}_{A_\beta \subset X})_{A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\beta}.$$

Como $\mathfrak{U}$ es una familia arbitraria de subespacios de X (un espacio topológico arbitrario), entonces acabamos de demostrar que *cualquier familia de subespacios de un espacio topológico satisface la la condición (1) de la Definición A.5.1*

Corolario A.5.7
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Si $\mathfrak{U}$ es una familia de subespacios de X que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1, entonces la topología débil $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ esta bien definida. Cabe recalcar que $\mathcal{T}(\mathfrak{U})$ no necesariamente coincide con $\mathcal{T}$ (cf. Lema 1.3.16).

Demostración. Es consecuencia inmediata del Observación A.5.6. □

Definición A.5.8 (Coherencia)
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U}$ es una familia de subespacios de X que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Decimos que $\mathcal{T}$ es *coherente*[1] con $\mathfrak{U}$ si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathfrak{U})$.

[1]Este concepto solo tiene sentido cuando $\mathfrak{U}$ es una familia de *subespacios* que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1.

Observación A.5.9
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X}) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de subespacios de X que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Usando solo definiciones se puede demostrar que $\mathcal{T}$ es coherente con $\mathfrak{U}$ si y solo si si se satisface la siguiente condición.

$$U \in \mathcal{T} \iff \forall \alpha \in \mathcal{A} \, (U \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X})$$

Cabe recalcar que la implicación "$\Longrightarrow$" se satisface aunque $\mathfrak{U}$ no satisfaga la condición (2) de la Definición A.5.1 o $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}(\mathfrak{U})$. Por eso, si queremos ver que una topología es coherente con una familia de subespacios que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1, basta solo demostrar la implicación "$\Longleftarrow$".

Proposición A.5.10
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X}) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de subespacios de X que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Si

$$B \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{T}) \Longleftarrow B \cap A_\alpha \text{ es cerrado en } (A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X}) \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}, \tag{A.19}$$

entonces $\mathcal{T}$ es coherente con $\mathfrak{U}$.

Demostración. Supongamos (A.19). Entonces para todo $U \subset X$

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T} &\iff X \setminus U \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{T}) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A} \Big(\big(X \setminus U\big) \cap A_\alpha \text{ es cerrado en } (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \Big) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A} \, \big(A_\alpha \setminus (U \cap A_\alpha) \text{ es cerrado en } (A_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\big) \\ &\iff \forall \alpha \in \mathcal{A} \, (U \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha) \\ &\iff U \in \mathcal{T}(\mathfrak{U}) \end{aligned}$$

La implicación "$\Longleftarrow$" de la segunda equivalencia es consecuencia inmediata de (A.19) pero la implicación "$\Longrightarrow$" de la segunda equivalencia siempre se cumple (cf. Observación A.5.9). La tercera equivalencia se cumple porque $\big(X \setminus U\big) \cap A_\alpha = A_\alpha \setminus (U \cap A_\alpha)$. □

Proposición A.5.11
Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y que $\mathfrak{U} = \{(A_\alpha, \mathcal{T}_{A_\alpha \subset X}) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una familia de subespacios de X que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1. Si Y es un espacio topológico, entonces

$$\mathfrak{V} := \{A_\alpha \times Y \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$$

es una familia de subespacios de $X \times Y$ que satisface la condición (2) de la Definición A.5.1.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{U}$ satisface el caso (a) de la condición (2) (el caso (b) es análogo). Veamos que $\mathfrak{V}$ satisface el caso (a) de la condición (2). Para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$

$$(A_\alpha \times Y) \cap (A_\beta \times Y) = (A_\alpha \cap A_\beta) \times Y \tag{A.20}$$

y como $A_\alpha \cap A_\beta$ es abierto en A_α y A_β ($\mathfrak{U}$ satisface el caso (a) de la condición (2)), entonces (A.20) implica que $(A_\alpha \times Y) \cap (A_\beta \times Y)$ es abierto en $A_\alpha \times Y$ y $A_\beta \times Y$. □

A.6. Espacios localmente compactos y compactamente generados

Definición A.6.1 (Espacio localmente compacto)
Supongamos que X es un espacio topológico. Decimos que X es *localmente compacto* si para todo $x \in X$ existe un subconjunto compacto C de X tal que $x \in C$.

Lema A.6.2
Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Si X y Y son localmente compactos, entonces $X \times Y$ es localmente compacto.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema A.4.5. □

Definición A.6.3 (Espacio compactamente generado)
Supongamos que X es un espacio topológico. Decimos que X es *compactamente generado* si su topología es coherente con

$$\{C \subset X \mid C \text{ es compacto en } X\}$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que X es compactamente generado si y solo si se satisface la siguiente condición:

$$A \text{ es abierto en } X \iff A \cap C \text{ es abierto en } C \text{ para todo } C \text{ compacto en X.}$$

Cabe recalcar que la implicación "$\Longrightarrow$" se cumple para cualquier espacio topológico, y que podríamos reemplazar la palabra "abierto" por la palabra "cerrado" en la equivalencia anterior (cf. Proposición A.5.10).

Lema A.6.4
Supongamos que X es un espacio topológico. Si X es localmente compacto, entonces es X es compactamente generado.

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ es tal que

$$A \cap C \text{ es abierto en } C \text{ para todo } C \text{ compacto en } X. \tag{A.21}$$

Por lo mencionado en la Definición A.6.3, basta probar que A es abierto en X. Supongamos que $x \in A$. Como X es localmente compacto, existe C_x compacto en X tal que $x \in C_x$. Por (A.21), $A \cap C_x$ es abierto y claramente

$$x \in A \cap C_x \subset A.$$

Como x es cualquier elemento de A, lo anterior demuestra que A es abierto en X. □

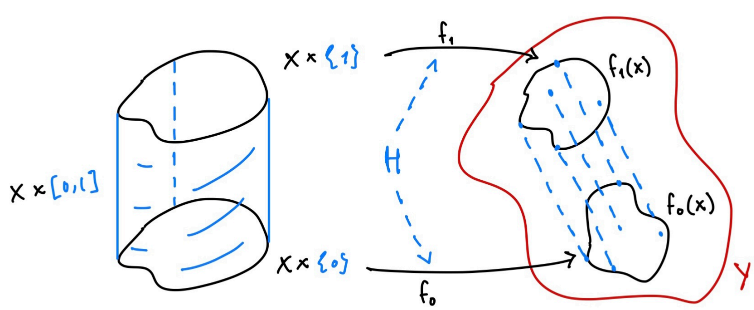
A.7. Homotopía

Definición A.7.1 (Homotopía)
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f_0, f_1 : X \to Y$ son funciones continuas. Decimos que f_0 y f_1 son *homotópicas*, y escribimos $f_0 \simeq f_1$, si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$H(x,0) = f_0(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = f_1(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

En este caso, decimos que H es una *homotopía entre* f_0 *y* f_1.

Observación A.7.2
Supongamos que X, Y son espacios topológicos y que $f_0, f_1 : X \to Y$ son funciones continuas. Intuitivamente, una homotopía entre f_0 y f_1 es un proceso (parametrizado por el intervalo [0,1]) en donde "deformamos y deslizamos continuamente" a $f_0(X)$ para que se "convierta" en $f_1(X)$.



Observación A.7.3
Supongamos que X, Y son espacios topológicos, que $f_0, f_1 : X \to Y$ son funciones continuas, y que H es una homotopía entre f_0 y f_1.

- Supongamos que $x \in X$ es fijo y consideremos

  $$\varphi_x : [0,1] \to Y \text{ dada por } \varphi_x(t) = H(x,t).$$

  La continuidad de H y la Proposición A.4.4 implican la continuidad de φ_x y la imagen de φ_x es el "camino" que toma x en el proceso de deformación que $f(X)$ toma para "convertirse" en $g(X)$.

- Supongamos que $t \in [0,1]$ es fijo y consideremos

  $$\phi_t : X \to Y \text{ dada por } \phi_t(x) = H(x,t)$$

  La continuidad de H y la Proposición A.4.4 implican la continuidad de ϕ_t y la imagen de ϕ_x es la posición de $f(X)$ en el tiempo t del proceso de deformación que $f(X)$ toma para "convertirse" en $g(X)$.

Definición A.7.4 (Espacio contraíble)
Supongamos que X es un espacio topológico. Decimos que X es *contraíble* si id_X es homotópica a una función constante. Intuitivamente, un espacio topológico contraíble no tiene "hoyos" (cf. Proposición 1.5.11); de hecho se puede demostrar que todo espacio topológico contraíble es arco-conexo.

Apéndice B

Prerrequisitos de teoría de módulos

B.1. Definiciones básicas

Notación B.1.1
En esta sección R denota un anillo con unidad.

Definición B.1.2 (R-módulo)
Un *R-módulo*, es una tripleta ordenada $(M, +, \cdot\,)$ donde $(M, +)$ es un grupo abeliano y

$$\cdot : R \times M \to M$$

es una operación tal que para todo $r, s \in R$ y $x, y \in M$

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $(r \cdot s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$.

En este caso, decimos que $\cdot$ es la *operación escalar de* $(M, +, \cdot\,)$.

Ejemplo B.1.3
Supongamos que $(R, +, \times)$ es un anillo con unidad. Si definimos la operación escalar por

$$\cdot = \times$$

es decir,

$$r \cdot m = r \times m \text{ para todo } r \in R \text{ y } m \in R$$

entonces R forma un R-módulo. A menos de que se especifique lo contrario, si consideramos a R como un R-módulo, lo consideramos con esta operación escalar.

Definición B.1.4 (Submódulo)
Supongamos que $(M, +, \cdot\,)$ es un R-módulo y que N es un subconjunto de M. Decimos que N es un *submódulo* de M si todo $r \in R$ y todo $x, y \in M$

$$x + y \in N \quad \text{y} \quad r \cdot x \in N.$$

Equivalentemente, N es un submódulo de M si y solo si

$$(N,\ + \restriction_{N \times N},\ \cdot \restriction_{R \times N})$$

es un R-módulo.

Definición B.1.5 (Homomorfismo de módulos)
Supongamos que $(M, +, \cdot)$, $(M', +', \cdot')$ son R-módulos y que $f : M \to M'$ es una función. Decimos que f es un *homomorfismo de módulos* si

$$f(x + y) = f(x) +' f(y) \quad \text{y} \quad r \cdot' f(x) = f(r \cdot x)$$

para todo $r \in R$ y todo $x, y \in M$. Si f es un homomorfismo de módulos biyectivo, decimos que f es un *isomorfismo de módulos.*

Definición B.1.6 (Producto directo de módulos)
Supongamos que $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos. El *producto directo* de $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es el módulo

$$\left(\prod_{i\in I} M_i, +, \cdot\right)$$

donde

$$(m_i)_{i\in I} + (m_i')_{i\in I} \coloneqq (m_i +_i m_i')_{i\in I} \quad \text{y} \quad r \cdot (m_i) \coloneqq (r \cdot_i m_i)_{i\in I}$$

para todo $r \in R$ y todo $(m_i)_{i\in I}, (m_i')_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$.

Definición B.1.7 (Suma directa de módulos)
Supongamos que $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos. Definimos

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ (m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I \right\}.$$

y decimos que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es la *suma directa* de $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$. Usando solo definiciones se puede demostrar que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$.

Observación B.1.8
Supongamos que $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos y que $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}$ es fijo. Notemos que

$$m_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I \iff \{m_i \mid m_i \neq 0\} \text{ es finito.}$$

Por lo tanto, si I es finito finito tendremos que

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i.$$

Notación B.1.9
Supongamos que M es un R-módulo y que I es un conjunto de índices. Si $M_i \coloneqq M$ para todo $i \in I$, denotamos

$$\prod_{i\in I} M \coloneqq \prod_{i\in I} M_i \quad \text{y} \quad \bigoplus_{i\in I} M \coloneqq \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Notación B.1.10
Supongamos que $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos. Para todo $j \in I$ denotamos

$$\lambda_j : Bj \to \bigoplus_{i\in I} B_i$$

de manera que la j-ésima entrada de $\lambda_j(x)$ es x y todas las otras entradas de $\lambda_j(x)$ son 0.

Proposición B.1.11
Supongamos que $\{(M_i, +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos y que M es un R-módulo. Si

$$\{f_i : M_i \to M\}_{i\in I}$$

es una familia de homomorfismos de R-módulos, entonces existe un único homomorfismo

$$f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$$

tal que para todo $j \in I$, $f \circ \lambda_j = f_j$.

Demostración. Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\begin{aligned} f : \bigoplus_{i\in I} M_i &\to M \\ (m_i)_{i\in I} &\mapsto \sum_{i\in I} f_i(m_i) \end{aligned}$$

cumple lo deseado. □

Definición B.1.12 (Suma directa de submódulos)
Supongamos que M es un R-módulo y que $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de M. Decimos que M es *suma directa* de $\{M_i\}_{i\in I}$ y escribimos $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ si para todo $m \in M \setminus \{0\}$ existen únicas $i_1, \dots, i_n \in I$ y $m_{i_j} \in M_{i_j} \setminus \{0\}$ tales que

$$m = m_{i_1} + \cdots + m_{i_n}.$$

Supongamos que I es finito y denotemos $\{M_i\}_{i\in I} = \{M_1, \dots, M_n\}$. Entonces $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ si y solo si para todo $m \in M$ existen únicas $m_i \in M_i$ tales que

$$m = m_1 + \cdots + m_n.$$

Notación B.1.13
Supongamos que $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos y consideremos la suma directa de $\{M_i\}_{i\in I}$. Para todo $j \in J$ y todo $m_j \in M_j$ hacemos el siguiente abuso de notación:

$$m_j \coloneqq \lambda_j(m_j).$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que para todo $m \in \bigoplus_{i\in I} M_i \setminus \{0\}$ existen únicas $i_1, \dots, i_n \in I$ y $m_{i_j} \in M_{i_j} \setminus \{0\}$ tales que

$$m = m_{i_1} + \cdots + m_{i_n}.$$

Esto explica porque la suma directa de módulos y la suma directa de submódulos tienen la misma notación.

Definición B.1.14 (Conceptos básicos de la teoría de módulos)
Supongamos que M es un R-módulo y que S es un subconjunto de M.

1. Definimos

$$\langle S\rangle \coloneqq \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot s_i \mid r_1, \dots, r_n \in R \text{ y } s_1, \dots, s_n \in S\right\}$$

y decimos que $\langle S\rangle$ es el *submódulo generado por* S. Usando solo definiciones se puede demostrar que $\langle S\rangle$ es en efecto un submódulo de M. Decimos que un elemento de $\langle S\rangle$ es una *combinación lineal de* S *(con coeficientes en* R*)*. Si S es finito y $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, entonces escribimos $\langle S\rangle = \langle s_1, \dots, s_n\rangle$.

2. Decimos que S *genera a* M o que S es *subconjunto generador de* M si $\langle S\rangle = M$. Si M tiene un subconjunto generador finito, decimos que M es *finitamente generado*.

3. Decimos que S es *linealmente independiente* si se satisface la siguiente condición:

   Supongamos que $r_1, \dots, r_n \in R$ y que $s_1, \dots, s_n \in S$. Si

   $$r_1 \cdot s_1 + \dots + r_n \cdot s_n = 0,$$

   entonces $r_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

   En este caso también decimos que los elementos de S son *linealmente independientes*. Si S no es linealmente independiente, decimos que S es *linealmente dependiente*.

4. Decimos que S es una *base* de M si S genera a M y S es linealmente independiente. Si existe una base de M, decimos que M es *libre*.

Notación B.1.15
Si hay ambigüedad respecto a R, precedemos las definiciones anteriores con un "R-". Por ejemplo, decimos que S es un R-subconjunto generador de M en vez de solo decir que S es un subconjunto generador de M.

Observación B.1.16
Supongamos que M es un R-módulo y que S es un subconjunto de M. Usando solo definiciones se puede demostrar que S es linealmente independiente si y solo si todo elemento de $\langle S\rangle$ se puede escribir de manera *única* como combinación lineal de S. En particular, S es una base de M si y solo si todo elemento de M se puede escribir de manera *única* como combinación lineal de S.

Lema B.1.17
Supongamos que M y M' son R-módulos. Si $M \oplus M'$ es finitamente generado, entonces M también es finitamente generado.

Demostración. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a $M \oplus M'$. Como $v_i \in M \oplus M'$, existen únicas $m_i \in M$ y $m_i' \in M'$ tales que

$$v_i = m_i + m_i'.$$

Veamos que $\{m_1, \dots, m_n\}$ genera a M. Supongamos que $m \in M$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a $M \oplus M'$, existen $a_1, \dots, a_n \in R$ tales que

$$\begin{aligned} m &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = a_1(m_1 + m_1') + \dots + a_n(m_n + m_n') \\ &= \underbrace{a_1 m_1 + \dots + a_n m_n}_{\in M} + \underbrace{a_1 m_1' + \dots + a_n m_n'}_{\in M'} \end{aligned}$$

Como $m \in M$, se puede demostrar que la ecuación anterior implica que

$$m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n.$$

Por lo tanto, $\{m_1, \dots, m_n\}$ genera a M. □

Proposición B.1.18
Supongamos que M y N son R-módulos. Si M tiene una base $\{x_i\}_{i\in I}$, entonces para todo subconjunto $\{y_i\}_{i\in I}$ de N, existe un único homomorfismo $f : M \to N$ tal que $f(x_i) = y_i$.

Demostración. Como $\{x_i\}_{i\in I}$ es base de M, podemos definir

$$\begin{gathered} f : M \to N \\ \sum_{i\in I} a_i \cdot x_i \mapsto \sum_{i\in I} a_i \cdot y_i \end{gathered}$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que f cumple lo deseado. □

Corolario B.1.19
Si M es un módulo libre y $f, g : M \to N$ son homomorfismos de módulos que coinciden en la base de M, entonces son iguales.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la unicidad en la Proposición B.1.18. $\square$

Proposición B.1.20
Si dos R-módulos tienen bases con la misma cardinalidad, entonces son isomorfos. En particular, la siguiente definición tiene sentido:

> Supongamos que S es un conjunto arbitrario. Definimos el *R-módulo libre de rank* $|S|$ como *cualquier* R-módulo libre que tenga una base de cardinalidad $|S|$.

Demostración. Supongamos que M y N son R-módulos. Si M tiene una base $\{x_i\}_{i\in I}$ y N tiene una base $\{y_i\}_{i\in I}$, entonces podemos definir

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ \sum_{i\in I} a_i \cdot x_i &\mapsto \sum_{i\in I} a_i \cdot y_i \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : N &\to M \\ \sum_{i\in I} a_i \cdot y_i &\mapsto \sum_{i\in I} a_i \cdot x_i. \end{aligned}$$

Usando solo definiciones se pude demostrar que f y g son homomorfismos inversos y por lo tanto M y N son isomorfos. $\square$

Lema B.1.21
Consideremos el R-módulo $\bigoplus_{i\in I} R$. Supongamos que $\lambda_j : R \to \bigoplus_{i\in I} R$ es el homomorfismo inclusión. Si para todo $j \in I$ definimos $e_j \coloneqq \lambda_j(1)$ (es decir, e_j es el elemento de $\bigoplus_{i\in I} R$ cuya j-ésima entrada es 1 y todas las otras entradas son 0), entonces

$$\mathcal{B} \coloneqq \{e_i\}_{i\in I}$$

es una base de $\bigoplus_{i\in I} R$.

Demostración.

- *$\mathcal{B}$ es linealmente independiente*:
  Supongamos que $e_{i_1}, \dots, e_{i_n} \in \mathcal{B}$ son distintos[1] y que $r_1, \dots, r_n \in R$ son tales que

  $$r_1 e_{i_1} + \cdots + r_n e_{i_n} = 0$$

  Pero

  $$r_1 e_{i_1} + \cdots + r_n e_{i_n} = r_1 \lambda_{i_1}(1) + \cdots + r_n \lambda_{i_n}(1) = \lambda_{i_1}(r_1 \cdot 1) + \cdots + r_n \lambda_{i_n}(r_n \cdot 1)$$

  y por lo tanto,

  $$\lambda_{i_1}(r_1 \cdot 1) + \cdots + r_n \lambda_{i_n}(r_n \cdot 1) = 0$$

  Como los $i_1, \dots, i_n$ son distintos, la ecuación anterior implica que $r_{i_k} \cdot 1 = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. En particular, $r_{i_k} = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

- *$\mathcal{B}$ genera a $\bigoplus_{i\in I} R$*:
  Supongamos que $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in i} M_i$ y que $m_{i_1}, \dots, m_{i_n}$ son todos los m_i distintos de 0 (hay una cantidad finita de ellos por definición de $\bigoplus_{i\in i} M_i$. Entonces

  $$(m_i)_{i\in I} = m_{i_1}\lambda_{i_1}(1) + \cdots + m_{i_n}\lambda_{i_n}(1) = m_{i_1}e_{i_1} + \cdots + m_{i_n}e_{i_n}$$

  y por lo tanto, $\mathcal{B}$ genera a $\bigoplus_{i\in I} R$.

[1] Esta suposición no hace que se pierda generalidad.

$\square$

Proposición B.1.22
Supongamos que M es un R-módulo y que I es un conjunto de índices. Entonces

$$M \text{ es libre de rank } |I| \iff M \cong \bigoplus_{i \in I} R.$$

En particular, si $n < \infty$, entonces

$$M \text{ es libre de rank } n \iff M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R = R^n.$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Es consecuencia inmediata de juntar la Proposición B.1.20 y el Lema B.1.21.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$. Por definición, existe un isomorfismo $\varphi : \bigoplus_{i \in I} R \to M$. Ahora bien, usando solo definiciones se puede demostrar que si $\{e_i\}$ es la base de $\bigoplus_{i \in I} R$, entonces $\{\varphi(e_i)\}_{i \in I}$ es una base de M. Como $\bigoplus_{i \in I} R$ es libre de rank $|I|$, lo anterior implica que M es libre de rank $|I|$. $\square$

Corolario B.1.23
Supongamos que M es un R-módulo. Entonces M es finitamente generado si y solo si existe un homomorfismo suprayectivo

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n} R \to M.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de juntar la Proposición B.1.22 y la Proposición 2.1.4. $\square$

B.2. Módulos finitamente presentados

Definición B.2.1 (Módulo cociente)
Supongamos que $(M, +, \cdot)$ un R-módulo y que N un submódulo de M. Hacemos el siguiente abuso de notación: denotemos por $(M/N, +)$ al grupo cociente[2] de M por N. El *módulo cociente de M por N* es

$$(M/N, +, \cdot)$$

donde hacemos el siguiente abuso de notación:

$$r \cdot (m + N) = (r \cdot m) + N \text{ para todo } r \in R \text{ y } m \in M.$$

Proposición B.2.2
Supongamos que M es un módulo y que N es un submódulo de N. Definimos

$$\begin{aligned} \pi : M &\to M/N \\ x &\mapsto x + N \end{aligned}$$

y decimos que π es la *proyección canónica de M en el cociente M/N*. Entonces π es un homomorfismo de módulos que satisface la siguiente propiedad universal:

> Si M' es módulo y $\varphi : M \to M'$ es un homomorfismo de grupos tal que $N \subset \ker \varphi$, entonces existe un único homomorfismo $\overline{\varphi} : M/N \to M'$ tal que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta.
>
> $$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & M' \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

[2] Está bien definido porque (I) M es abeliano, (II) todo subgrupo de un grupo abeliano es normal, y (III) N es un subgrupo (aditivo) de M.

Demostración. Usando solo definiciones se puede demostrar que la función

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : M/N &\to M \\ x + N &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

está bien definida y cumple lo deseado. □

Corolario B.2.3
Si $\varphi : M \to M'$ es un homomorfismo suprayectivo de módulos, entonces

$$M/\ker\varphi \cong M'$$

Definición B.2.4 (Módulo finitamente presentado)
Supongamos que M es un R-módulo. Decimos que M es *finitamente presentado* si es isomorfo a un R-módulo de la forma $F/\langle S\rangle$ donde F es un R-módulo libre finitamente generado y S es un subconjunto finito de F.

B.3. Módulos proyectivos

Definición B.3.1 (Módulo proyectivo)
Supongamos que M es un R-módulo. Decimos que P es *proyectivo* si existe P' un R-módulo tal que $P \oplus P'$ es un R-módulo libre.

Lema B.3.2
Supongamos que P, M, M' son R-módulos, que $\pi : M \to M'$, $\varphi : F \to M'$ son homomorfismos suprayectivos de R-módulos, y que π es suprayectivo. Si P es proyectivo, entonces existe un homomorfismo $\psi : P \to M$ tal que $\pi \circ \psi = \phi$. En otras palabras, supongamos que tenemos las flechas no punteadas del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ M \arrow[r] & M' \end{tikzcd}$$

Si la flecha horizontal es suprayectiva y P es proyectivo, entonces también tenemos la flecha punteada y esta hace que el diagrama conmute.

Demostración. Como P es proyectivo, existe un R-módulo P' tal que $P \oplus P'$ es libre. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un homomorfismo $\Phi : P \oplus P' \to M$ tal que $\Phi|_P = \phi$.

Por otro lado, supongamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $P \oplus P'$. Como $\Phi(v_i) \in M'$ y $\pi : M \to M'$ es suprayectivo, entonces

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists m_i \in M \left(\pi(m_i) = \Phi(v_i)\right).$$

Con esto en mente, definimos $\Psi : P \oplus P' \to M$ como el homomorfismo que satisface

$$v_i \mapsto m_i.$$

Entonces

$$\pi \circ \Psi(v_i) = \pi(m_i) = \Phi(v_i)$$

para todo v_i. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base, lo anterior implica que $\phi \circ \Psi = \Phi$. Usando lo anterior se puede demostrar que

$$\psi := \Psi|_P$$

cumple lo deseado. □

Definición B.3.3 (Sucesión exacta de homomorfismos)
Supongamos que L, M, N son R-módulos, y que $f : L \to M$, $g : M \to N$ son homomorfismos de R-módulos. Decimos que la sucesión de homomorfismos de R-módulos

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

es *exacta* si $\operatorname{im} f = \ker g$.

En general, supongamos que $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ es una familia de R-módulos y que $\{f_k : M_k \to M_{k-1}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ es una familia de homomorfismos de R-módulos. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \tag{B.1}$$

es *exacta en* M_n (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ fijo) si $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$. Si (B.1) es exacta en todo M_k, simplemente decimos que *la sucesión es exacta.*

Lema B.3.4
Supongamos que la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 \tag{B.2}$$

es exacta. Si P es un R-módulo proyectivo, entonces

$$B \cong A \oplus P.$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama (del cual en este momento solo tenemos las lineas no punteadas):

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Como g es suprayectivo (pues (B.2) es exacta) y P es proyectivo, entonces el (B.3.2) implica que existe $h : P \to B$ tal que $g \circ h = \mathrm{id}$. Veamos que

$$B = f(A) \oplus h(P).$$

Supongamos que $b \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} g\Big(b - h\left((g(b)\right)\Big) &= g(b) - (g \circ h)\left(g(b)\right) \\ &= g(b) - g(b) && \text{(pues } g \circ h = \mathrm{id}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $b - h\left(g(b)\right) \in \ker g =$[3]$\operatorname{im} f$. Es decir, existe una $a \in A$ tal que

$$f(a) = b - h\left(g(b)\right)$$

o equivalentemente

$$b = f(a) + h\left(g(b)\right).$$

Esto implica que $B = f(A) + h(P)$. Para ver que esta suma es directa, supongamos que $x \in f(A) \cap h(P)$. Entonces existen $a \in A$ y $p \in P$ tales que

$$f(a) = x = h(p). \tag{B.3}$$

[3]Pues (B.2) es exacta.

De donde,

$$\begin{aligned} 0 &= g(f(a)) && \text{(pues } \operatorname{im} f \subset \ker g \text{ ((B.2) es exacta))} \\ &= g(h(p)) && \text{(cf. (B.3))} \\ &= (g \circ h)(p) \\ &= p && \text{(pues } g \circ h = \mathrm{id}) \end{aligned}$$

En particular $0 = h(p) = x$ y por lo tanto $f(A) \cap h(P) = 0$. Juntando esto con $B = f(A) + h(P)$ obtenemos

$$B = f(A) \oplus h(P).$$

Como f y h son inyectivas[4], entonces $f(A) \cong A$ y $h(P) \cong P$. Por lo tanto,

$$B \cong A \oplus P.$$

□

Las siguientes dos proposiciones están basadas en los apartados 8.4.2 y 8.4.4 del libro *Cohomology of Groups* de Kenneth S. Brown (cf. [5]).

Proposición B.3.5 (Lema de Schnauel)
Supongamos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{j} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{j'} M \longrightarrow 0$$

son exactas. Si P y P' son proyectivos, entonces $P \oplus K' \cong P' \oplus K$.

Demostración. Supongamos que Q el submódulo de $P \times P'$ que consiste de las parejas (x, x') tales que $j(x) = j'(x')$. Como para todo $k \in K$, $j \circ i(k) = 0$, entonces $(i(k), 0_{K'}) \in Q$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha : K &\to Q \\ k &\mapsto \big(i(k), 0_{K'}\big) \end{aligned}$$

es una función bien definida y se puede demostrar que es un homomorfismo de R-módulos. Por otro lado, supongamos que $\pi' : Q \to P'$ es la restricción de la proyección canónica $P \times P' \to P'$ y veamos que

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\pi'} P' \longrightarrow 0 \tag{B.4}$$

es una sucesión exacta. Como (usando solo definiciones se puede de que α es inyectiva y que π suprayectiva), entonces solo resta probar exactitud en Q.

- $\operatorname{im} \alpha \subset \ker \pi'$:
  Para todo $k \in K$,

  $$(\pi \circ \alpha)(k) = \pi\left(i(k), 0_{K'}\right) = 0_{K'}.$$

- $\operatorname{im} \alpha \supset \ker \pi'$:
  Supongamos que $(x, x') \in \ker \pi'$. Entonces (por definición) $x' = 0_{K'}$ y como $(x, x') \in Q$, entonces

  $$j(x) = j'(x') = j'(0_{K'}) = 0_M$$

  o equivalentemente, $x \in \ker j =$[5]$\operatorname{im} i$. Por lo tanto, existe $k \in K$ tal que $i(k) = x$. Esto implica que

  $$\alpha(k) = \big(i(k), 0_{K'}\big) = (x, x')$$

  y en particular, $(x, x') \in \operatorname{im} \alpha$.

[4] f porque (B.2) es exacta y h porque g es una inversa izquierda de h.

[5] Pues la sucesión $0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{j} M \to 0$ es exacta.

Por lo tanto, (B.4) es una sucesión exacta y como P es proyectivo, el (B.3.4) implica que

$$Q \cong P \oplus K'. \tag{B.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \alpha' : K' &\to Q \\ k' &\mapsto \big(0_K, i'(k')\big) \end{aligned}$$

es un homomorfismo (bien definido pues $j' \circ i' = 0$ y por definición de Q) y denotemos por $\pi : Q \to P$ a la restricción de la proyección canónica $P \times P' \to P$. Entonces (de manera análoga al argumento anterior) vemos que

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\alpha'} Q \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

es exacta y en particular (como P es proyectivo)

$$Q \cong P' \oplus K. \tag{B.6}$$

Juntando (B.5) y (B.6) obtenemos lo deseado. $\square$

Lema B.3.6 (Generalización del lema de Schnauel)
Supongamos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

son exactas. Si P_i y P'_i son proyectivos para todo $i \leq n-1$, entonces

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \cong P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots$$

En particular, si P_i es finitamente generado para $i \leq n-1$, entonces P_n es finitamente generado si y solo si P'_n es finitamente generado.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El paso base es precisamente el lema de Schnauel. Para el paso inductivo, supongamos que la proposición se satisface para todo $k \leq n-1$ y que

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\varphi'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{\varphi'_{n-1}} P'_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_1 \xrightarrow{\varphi'_1} P'_0 \xrightarrow{\varphi'_0} M \longrightarrow 0$$

son sucesiones exactas con P_i y P'_i proyectivo para $i \leq n-1$. En particular, las sucesiones

$$0 \longrightarrow \ker \varphi_{n-2} \hookrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \ker \varphi'_{n-2} \hookrightarrow P'_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

son exactas. Por hipótesis de inducción,

$$\ker \varphi_{n-2} \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots \cong \ker \varphi'_{n-2} \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$$

Por otro lado, denotemos $P = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$ y definamos

$$\begin{aligned} \alpha : P_{n-1} \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots &\to \ker \varphi'_{n-2} \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots \\ \underbrace{x}_{P_{n-1}} + \underbrace{y}_{P} &\mapsto \varphi_{n-1}(x) + y \end{aligned}$$

De manera análoga, denotemos $P' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$ y definamos

$$\begin{aligned}\beta : P'_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots &\to \ker \varphi_{n-2} \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots \\ \underbrace{z}_{P'_{n-1}} + \underbrace{w}_{P'} &\mapsto \varphi'_{n-1}(z) + w\end{aligned}$$

Usando las igualdades $\operatorname{im} \varphi_{n-1} = \ker \varphi_{n-2}$ y $\operatorname{im} \varphi'_{n-1} = \ker \varphi'_{n-2}$ se puede demostrar que las sucesiones

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r, "\varphi_n"] & P_{n-1} \oplus {P'}_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots \arrow[r, "\alpha"] & \ker \varphi_{n-2} \oplus {P'}_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots \arrow[r] \arrow[d, hook, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & {P'}_n \arrow[r, "\varphi'_n"] & {P'}_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus {P'}_{n-3} \oplus \cdots \arrow[r, "\beta"] & \ker \varphi'_{n-2} \oplus P_{n-2} \oplus {P'}_{n-3} \oplus \cdots \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

son exactas. Como $\ker \varphi_{n-2} \oplus {P'}_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$ y $\ker \varphi'_{n-2} \oplus P_{n-2} \oplus {P'}_{n-3} \oplus \cdots$ son proyectivos, podemos aplicar el lema de Schnauel para obtener lo deseado. $\square$

Apéndice C

Los $\mathbb{Z}G$'s

C.1. Grupos abelianos libres

Definición C.1.1 (Soporte de una función $A \to \mathbb{R}$)
Supongamos que A es un conjunto arbitrario y que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función. Definimos

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \big\{a \in A \mid f(a) \neq 0\big\}$$

y decimos que $\operatorname{supp}(f)$ es el *soporte de* f.

Definición C.1.2 (Grupo abeliano libre generado por S)
Supongamos que S es un conjunto. Definimos

$$\mathbb{Z}S \coloneqq \{\varphi : S \to \mathbb{Z} \mid \operatorname{supp}\varphi \text{ es finito}\}.$$

Si $+$ es la suma usual de funciones, decimos que $(\mathbb{Z}S, +)$ es el *grupo abeliano libre generado por* S. Si $x \in S$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $k \cdot x \in \mathbb{Z}S$ a la función de $S \to \mathbb{Z}$ tal que $x \mapsto k$ y $s \mapsto 0$ si $s \neq x$. Específicamente,

$$(k \cdot x)(s) = \begin{cases} k & \text{si } s = x \\ 0 & \text{si } s \neq x \end{cases}$$

Por brevedad, a veces omitimos el punto " $\cdot$ " en $k \cdot x$ y simplemente escribimos kx. Para todo $x \in S$ hacemos el siguiente abuso de notación: denotamos $x = 1 \cdot x \in \mathbb{Z}S$ y por eso podemos considerar la inclusión $S \subset \mathbb{Z}S$.

Proposición C.1.3
Supongamos que S es un conjunto cualquiera. Entonces todo elemento de $\mathbb{Z}S$ puede ser escrito de manera única (salvo el orden de los sumandos) como

$$k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_n \cdot x_n$$

con $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y las $x_1, \ldots, x_n \in S$ distintas.

Demostración. Claramente, para todo $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ y todo $x_1, \ldots, x_n \in S$, la función

$$k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_n \cdot x_n$$

pertenece a $\mathbb{Z}S$. Conversamente, supongamos que $\varphi \in \mathbb{Z}S$ y que $x_1, \ldots, x_n$ son todos los distintos elementos de $\operatorname{supp}\varphi$ (hay una cantidad finita de ellos porque $\varphi \in \mathbb{Z}S$). Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\varphi(x) = \big(\varphi(x_1) \cdot x_1 + \cdots + \varphi(x_n) \cdot x_n\big)\,(x).$$

Para ver la unicidad supongamos que $k'_1, \dots, k'_m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, que $x'_1, \dots, x'_m$ son distintas, y que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} k'_j \cdot x'_j. \tag{C.1}$$

Como las $x'_1, \dots, x'_m$ son distintas, entonces

$$\operatorname{supp}\left(\sum_{j=1}^{m} k'_j \cdot x'_j\right) = \{x'_1, \dots, x'_m\}. \tag{C.2}$$

Juntando (C.1) y (C.2) obtenemos

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{supp}\varphi = \{x'_1, \dots, x'_m\}$$

Pero como las $x_1, \dots, x_n$ también son distintas, entonces después de un reacomodo obtenemos $m = n$ y

$$x_i = x'_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{C.3}$$

En particular, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$

$$k_j = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x_i\right)(x_j) = \varphi(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} k'_i \cdot x'_i\right)(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} k'_i \cdot x_i\right)(x_j) = k'_j. \tag{C.4}$$

Juntando (C.3) y (C.4) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} k'_i \cdot x'_i.$$

□

Corolario C.1.4
Supongamos que S es un conjunto y que $s_1, \dots, s_n \in S$ son distintos. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ son tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k s_k = 0,$$

entonces $a_k = 0$ para todo k.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la unicidad de la Proposición C.1.3. □

Proposición C.1.5
Si A es un grupo abeliano libre generado por $\{e_i\}_{i \in I}$, entonces

$$A \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$$

Demostración. Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$f : A \to \bigoplus_{i \in I} Z_i$$
$$\sum_{i \in I} n_i \cdot e_i \mapsto (n_i)_{i \in I}$$

es un isomorfismo. □

Proposición C.1.6 (Propiedad universal de grupos abelianos libres)
Supongamos que S es un conjunto cualquiera y que A un grupo abeliano. si $f : S \to A$ es una función, entonces existe un único homomorfismo

$$f_* : \mathbb{Z}S \to A$$

que extiende a f. Específicamente, $f_*|_S = f$.

Demostración. Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$\begin{aligned} f_* : \mathbb{Z}S &\to A \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i g(x_i) \end{aligned}$$

cumple lo deseado. □

Corolario C.1.7
Supongamos S un conjunto cualquiera, que A es un grupo abeliano, que $f, g : \mathbb{Z}S \to A$. Si $f(s) = g(s)$ para todo $s \in S$, entonces $f = g$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la unicidad de la propiedad universal de grupos abelianos libres. □

C.2. $\mathbb{Z}G$-módulos

Definición C.2.1 (El anillo de grupos $\mathbb{Z}G$)
Supongamos que G es un grupo y consideremos $(\mathbb{Z}G, +)$ el grupo abeliano libre generado por G. Para todo $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i, \sum_{j=1}^{m} a_i' g_i' \in \mathbb{Z}G$ definimos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{m} a_i' g_i'\right) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i a_i')(g_i g_i').$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que

$$(\mathbb{Z}G, +, \times)$$

es un anillo con unidad $1 \cdot e_G \in \mathbb{Z}G$. Decimos que este anillo es el *anillo de grupos* $\mathbb{Z}G$.

Observación C.2.2
Supongamos que G es un grupo y que $(A, +)$ es un grupo abeliano. Si " $\cdot$ " es una acción de G en A, entonces esta acción se puede extender (de manera única) para obtener una operación escalar $\mathbb{Z}G \times A \to A$. Específicamente, si abusamos de la notación y también denotamos a esta extensión por " $\cdot$ ", entonces para todo $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in \mathbb{Z}G$ y $x \in A$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \cdot x.$$

y $(A, +, \cdot)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo. Conversamente, todo $\mathbb{Z}G$-módulo A induce una G-acción en A. En resumen, *un $\mathbb{Z}G$-módulo es simplemente un grupo abeliano A con una acción de G en A.*

Definición C.2.3 (El $\mathbb{Z}G$-módulo $\mathbb{Z}_G$)
Supongamos que $+$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$, que G es un grupo, y consideremos el anillo $\mathbb{Z}G$. Si " $\cdot$ " es la acción trivial de G en $\mathbb{Z}$, es decir, para todo $g \in G$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$g \cdot k = k.$$

Entonces para todo $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in \mathbb{Z}G$ y todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) \cdot k := \sum_{i=1}^{n} a_i k$$

y $(\mathbb{Z}, +, \cdot\,)$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo. Si consideramos a $\mathbb{Z}$ con esta estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo, denotamos $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$.

Definición C.2.4 (Módulo de permutación)
Supongamos que G es un grupo, que X es un conjunto arbitrario, y consideremos $\mathbb{Z}X$ el grupo abeliano libre generado por X. Si "$\cdot$" es una acción de G en X, entonces podemos extender (de manera única) esta acción a una acción de G en $\mathbb{Z}X$. Específicamente, para todo $g \in G$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathbb{Z}X$

$$g \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i (g \cdot x_i).$$

El $\mathbb{Z}G$-módulo inducido (cf. Observación C.2.2) es llamado el *$\mathbb{Z}G$-módulo de permutación de X*.

Proposición C.2.5
Supongamos que G es un grupo y que X es un conjunto arbitrario. Si "$\cdot$" es una acción libre[1] de G en X y E es un conjunto de representantes de las G-órbitas en X, entonces $\mathbb{Z}X$ (el $\mathbb{Z}G$-módulo de permutación de X) es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre con base E.

Demostración. Usaremos el siguiente lema: *Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de G-conjuntos[2], entonces el $\mathbb{Z}G$-módulo de permutación de la unión disjunta de $\{X_i\}_{i\in I}$ es isomorfo a la suma directa sobre I de los $\mathbb{Z}G$-módulos de permutación de los X_i. Específicamente,*

$$\mathbb{Z}\left[\coprod_{i\in I} X_i\right] \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}X_i.$$

Ahora sí, supongamos que G es un grupo y que X es un G-conjunto y que esta acción es libre. Si E es un conjunto de representantes de las G-órbitas en X, entonces

$$X = \coprod_{x\in E} G \cdot x \cong \coprod_{x\in E} G/G_x$$

donde la igualdad es porque el conjunto de las G-órbitas en X forma una partición de X y el isomorfismo es porque para todo $x \in X$ existe una biyección entre $G \cdot x$ y G/G_x. Por lo tanto, el lema implica que

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}\left[\coprod_{x\in E} G/G_x\right] \cong \bigoplus_{x\in E} \mathbb{Z}[G/G_x]. \tag{C.5}$$

Finalmente, como la acción es libre, entonces $G_x = \{e_G\}$ para todo $x \in E$ y por lo tanto (C.5) implica que

$$\mathbb{Z}X \cong \bigoplus_{x\in E} \mathbb{Z}[G/\{e_G\}] = \bigoplus_{x\in E} \mathbb{Z}G.$$

Es decir, $\mathbb{Z}X$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre con base E. □

Notación C.2.6
Supongamos que G es un grupo. En la siguiente proposición, consideraremos (I) submódulos generados por subconjuntos de $\mathbb{Z}G$ y (II) subgrupos generados por subconjuntos de G. Para que no haya ambigüedad, denotamos

[1] Una acción "$\cdot$" es libre si $G_x = \{e_G\}$ para todo $x \in X$.
[2] X es un G-conjunto si G actúa en X.

1. por $\langle A \rangle$ al submódulo generado por un subconjunto A de $\mathbb{Z}G$ y
2. por $\langle\langle S \rangle\rangle$ al subgrupo de G generado por un subconjunto S de G. Es decir,

$$\langle\langle S \rangle\rangle = \{s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n} \mid s_1, \ldots, s_n \in S \text{ y } \alpha_i = \pm 1\} = \{s_1 \cdots s_n \mid s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}\}$$

donde $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

Proposición C.2.7
Supongamos que G es un grupo y que S es un subconjunto de G. Si $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}_G$ es el homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos que satisface

$$\epsilon(g) = 1 \text{ para todo } g \in G$$

y denotamos $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$, entonces se satisface lo siguiente:

1. $\left\langle \{g - e_G \mid g \in G\} \right\rangle = \ker \epsilon$
2. Si S es un subconjunto de G, entonces

$$\langle\langle S \rangle\rangle = G \iff \left\langle \{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \right\rangle = \ker \epsilon.$$

En particular, G es finitamente generado (como grupo) si y solo si $\ker \epsilon$ es finitamente generado (como submódulo de $\mathbb{Z}G$).

Demostración.

1. $\subset$) Como $\left\langle \{g - e_G \mid g \in G\} \right\rangle$ es el submódulo más chico que contiene a $\{g - e_G \mid g \in G\}$ y $\ker \epsilon$ es un submódulo, entonces basta probar que $\{g - e_G \mid g \in G\} \subset \ker \epsilon$. Notemos que

$$\epsilon(g - e_G) = \epsilon(g) - \epsilon(e_G) = 1 - 1 = 0$$

para todo $g \in G$ y por lo tanto, $\{g - e_G \mid g \in G\} \subset \ker \epsilon$.
$\supset$) Supongamos que $\sum_{i=1}^n a_i g_i \in \ker \epsilon$. Entonces

$$0 = \epsilon\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \underbrace{\epsilon(g_i)}_{1} = \sum_{i=0}^n a_i.$$

De donde,

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i = \left(\sum_{i=0}^n a_i g_i\right) - 0 = \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i\right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)}_{0} e_G = \sum_{i=1}^n a_i (g_i - e_G) \in \left\langle \{g - e_G \mid g \in G\} \right\rangle.$$

Como $\sum_{i=1}^n a_i g_i$ es un elemento arbitrario de $\ker \epsilon$, lo anterior implica que $\ker \epsilon \subset \{g - e_G \mid g \in G\}$.

2. $\Longrightarrow$) Supongamos que $\langle\langle S \rangle\rangle = G$. Queremos ver que $\left\langle \{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \right\rangle = \ker \epsilon$, pero por el inciso anterior basta probar que

$$\left\langle \{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \right\rangle = \left\langle \{g - e_G \mid g \in G\} \right\rangle.$$

$\subset$) Es consecuencia inmediata de que $\{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \subset \{g - e_G \mid g \in G\}$.
$\supset$) Denotemos $J \coloneqq \left\langle \{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \right\rangle$. Como $\left\langle \{g - e_G \mid g \in G\} \right\rangle$ es el submódulo más chico que contiene a $\{g - e_G \mid g \in G\}$ y J es un submódulo, entonces basta probar que $\{g - e_G \mid g \in G\} \subset J$. Para esto, primero consideremos el siguiente truco algebraico:

$$ab - e_G = a(b - e_G) + (a - e_G) \text{ para todo } a, b \in \mathbb{Z}G$$

En particular,

$$s_2 s_1 - e_G = s_2 \underbrace{(s_1 - e_G)}_{\in J} + \underbrace{(s_2 - e_G)}_{\in J} \in J \text{ para todo } s_1, s_2 \in S \cup S^{-1}$$

donde la última pertenencia se cumple porque J es un submódulo. Usando esto obtenemos

$$s_3 s_2 s_1 - e_G = s_3 \underbrace{(s_2 s_1 - e_G)}_{\in J} + \underbrace{(s_3 - e_G)}_{\in J} \in J \text{ para todo } s_1, s_2, s_3 \in S \cup S^{-1}.$$

Siguiendo de esta manera por inducción obtenemos

$$s_n \cdots s_2 s_1 - e_G \in J \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ y } s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}. \tag{C.6}$$

Pero como todo elemento de G puede ser escrito como $s_n \cdots s_2 s_1$ con $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ (supusimos que $\langle\langle S \rangle\rangle$), entonces (C.6) implica que

$$\{g - e_G \mid g \in G\} \subset J.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\left\langle \{s - e_G \mid s \in S \cup S^{-1}\} \right\rangle = \ker \epsilon$. Queremos ver que $\langle\langle S \rangle\rangle = G$. Supongamos que $x \in \ker \epsilon$. Por la hipótesis, existen $\sum_{i=1}^{m_1} a_i^1 g_i^1, \ldots, \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n g_i^n \in \mathbb{Z}G$ y $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tales que

$$\begin{aligned}
x &= \left(\sum_{i=1}^{m_1} a_i^1 g_i^1 \right) (s_1 - e_G) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m_n} a_i^n g_i^n \right) (s_n - e_G) \\
&= \left(a_1^1 g_1^1 + \cdots + a_{m_1}^1 g_{m_1}^1 \right) (s_1 - e_G) + \cdots + \left(a_1^n g_1^n + \cdots + a_{m_n}^n g_{m_n}^n \right) (s_n - e_G) \\
&= \left(a_1^1 g_1^1 (s_1 - e_G) + \cdots + a_{m_1}^1 g_{m_1}^1 (s_1 - e_G) \right) + \cdots + \left(a_1^n g_1^n (s_n - e_G) + \cdots + a_{m_n}^1 g_{m_n}^1 (s_n - e_G) \right)
\end{aligned}$$

Usando esta igualad y la igualdad

$$\begin{aligned}
a_i^j g_i^j (s_j - e_G) &= \underbrace{g_i^j (s_j - e_G) + \cdots + g_i^j (s_j - e_G)}_{a_i^j\text{-veces}} \\
&= \underbrace{(g_i^j s_j - g_i^j) + \cdots + (g_i^j s_j - g_i^j)}_{a_i^j\text{-veces}},
\end{aligned}$$

se puede demostrar que todo elemento de $\ker \epsilon$ es una suma de elementos de la forma $gs - g$ con $g \in G$ y $s \in S \cup S^{-1}$. En particular, como $g - e_G \in \ker \epsilon$ para todo $g \in G$, entonces podemos escribir

$$g - e_G = (g_1 s_1 - g_1) + (g_2 s_2 - g_2) + \cdots + (g_{n-1} s_{n-1} - g_{n-1}) + (g_n s_n - g_n) \tag{C.7}$$

para algunos $g_1, \ldots, g_n \in G$ y $s_1, \ldots, s_n \in S$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $g_i s_i \neq g_i$ para todo i y denotemos

$$\xi \coloneqq (g_1 s_1 - g_1) + (g_2 s_2 - g_2) + \cdots + (g_{n-1} s_{n-1} - g_{n-1}) + (g_n s_n - g_n) \in \mathbb{Z}G$$

Usando solo definiciones se puede demostrar que $\xi \in \mathbb{Z}G$ es una función de G en $\mathbb{Z}$ tal que

$$(\xi)^{-1} \left(\{1\} \right) \subset \{g_1 s_1, g_2 s_2, \ldots, g_n s_n\}. \tag{C.8}$$

Por definición, $g - e_G \in \mathbb{Z}G$ es una función de G en $\mathbb{Z}$ tal que

$$(g - e_G)^{-1}(\{1\}) = \{g\}. \tag{C.9}$$

Juntando (C.7), (C.8), y (C.9), obtenemos

$$\{g\} \subset \{g_1 s_1, g_2 s_2, \ldots, g_n s_n\}.$$

En particular, existe un $i = 1, \ldots, n$ tal que $g = g_i s_i$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1$, es decir supongamos que

$$g = g_1 s_1.$$

Juntando esto con (C.7) obtenemos

$$-e_G = -g_1 + (g_2 s_2 - g_2) + \cdots + (g_{n-1} s_{n-1} - g_{n-1}) + (g_n s_n - g_n)$$

o equivalentemente

$$g_1 - e_G = (g_2 s_2 - g_2) + \cdots + (g_{n-1} s_{n-1} - g_{n-1}) + (g_n s_n - g_n).$$

Con un argumento análogo podemos encontrar $j = 2, \ldots, n$ tal que $g_1 = g_j s_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j = 2$. Entonces

$$g_1 = g_2 s_2.$$

Continuando de esta manera, podemos reacomodar los g_i de manera que

$$g_i = g_{i+1} s_{i+1} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \text{y} \quad g_n = e_G.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g = g_1 s_1 = g_2 s_2 s_1 = g_3 s_3 s_2 s_1 = \cdots &= g_{n-2} s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_3 s_2 s_1 \\ &= g_{n-1} s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_3 s_2 s_1 \\ &= g_n s_n s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_3 s_2 s_1 \\ &= s_n s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_3 s_2 s_1. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$, lo anterior implica que $\langle \langle S \rangle \rangle = G$.

□

Definición C.2.8 ($\operatorname{res}_H^G M$)
Supongamos que G es un grupo y que M es un $\mathbb{Z}G$-módulo. Si H es un subgrupo de G, denotamos por $\operatorname{res}_H^G M$ al $\mathbb{Z}H$-módulo obtenido a partir de restringir a $\mathbb{Z}H$ la operación escalar en M. Cabe recalcar que M y $\operatorname{res}_H^G M$ solo difieren en la operación escalar.

Lema C.2.9
Supongamos que G es un grupo y que $\{M_i\}_i$ es una familia de $\mathbb{Z}G$-módulos. Si H es un subgrupo de G, entonces

$$\operatorname{res}_H^G \left(\bigoplus_i M_i \right) = \bigoplus_i \operatorname{res}_H^G M_i.$$

Demostración. Debería de ser claro que las estructuras aditivas de $\operatorname{res}_H^G \left(\bigoplus_i M_i \right)$ y $\bigoplus_i \operatorname{res}_H^G M_i$ son iguales a el grupo aditivo $\bigoplus_i M_i$. Por lo tanto, solo resta probar que sus multiplicaciones escalares coinciden. Sin embargo, si $(m_i)_i \in \bigoplus_i M_i$ y $\sum_{k=1}^n a_k h_k \in \mathbb{Z}H$, entonces la multiplicación escalar en ambos $\mathbb{Z}H$-módulos está dada por

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k h_k \right) \cdot (m_i)_i = \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k h_k \right) \cdot m_i \right)_i.$$

Lema C.2.10
Si G es un grupo, entonces G es un $\mathbb{Z}H$-subconjunto generador de $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G$.

Demostración. Veamos que todo elemento de $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G$ puede ser escrito como $\sum_{k=0}^{n} b_k g_k$ donde $b_k \in \mathbb{Z}H$ y $g_k \in G$. Como todo elemento de $\mathbb{Z}G$ es de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k g_k$ con $a_k \in \mathbb{Z}, g_k \in G$ y podemos escribir

$$\sum_{k=0}^{n} a_k g_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k \cdot e_G)}_{\in \mathbb{Z}H} g_k,$$

entonces obtenemos lo deseado. □

Lema C.2.11
Supongamos que G es un grupo y que H es un subgrupo de G. Si H tiene índice finito en G, entonces $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G$ es libre y finitamente generado. Además,

$$\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G \cong \bigoplus_{i=1}^{[G:H]} \mathbb{Z}H.$$

Demostración. Supongamos que $x_1, \ldots, x_n \in G$ es un conjunto de representantes de G/H. Es decir, supongamos que $x_1, \ldots, x_n \in G$ son tales que

- $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ son todas las clases laterales de H en G y
- $\overline{x_i} \neq \overline{x_j}$ si $i \neq j$.

Veamos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una $\mathbb{Z}H$-base de $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G$.

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es un $\mathbb{Z}H$-subconjunto generador de* $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G$:
  Como G es un $\mathbb{Z}H$-subconjunto generador de $\operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}_G$, entonces basta probar que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un $\mathbb{Z}H$-subconjunto generador de G. Supongamos que $g \in G$. Como $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ son todas las clases laterales de H en G, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $gx_i^{-1} \in H$. En particular,

  $$g = \underbrace{gx_i^{-1}}_{\in \mathbb{Z}H} x_i$$

  Como el lado derecho es una $\mathbb{Z}H$-combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$ obtenemos lo deseado.

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es $\mathbb{Z}H$-linealmente independiente*:
  Supongamos que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}H$ son tales que

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0. \tag{C.10}$$

  Ahora bien, como $a_i \in \mathbb{Z}H$, entonces existen $h_1^k, \ldots, h_{m_k}^k \in H$ distintas tales que

  $$a_k = \sum_{i=1}^{m_k} b_i^k h_i^k \text{ para algunos } b_i^k \in \mathbb{Z}.$$

  Usando esto, podemos reescribir (C.10) como

  $$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{m_k} b_i^k h_i^k \right) x_k \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m_1} b_i^1 h_i^1 \right) x_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m_n} b_i^n h_i^n \right) x_n \\ &= \left(b_1^1 h_1^1 x_1 + \cdots + b_{m_1}^1 h_{m_1}^1 x_1 \right) + \cdots + \left(b_1^n h_1^n x_n + \cdots + b_{m_n}^n h_{m_n}^n x_n \right) \end{aligned} \tag{C.11}$$

En lo que sigue, veremos que (C.11) es una ecuación de la forma

$$\sum_{j=0}^{m} c_j g_j = 0$$

con $c_j \in \mathbb{Z}$ y los $g_1, \ldots, g_m \in G$ distintos. Como $h_i^k x_i \neq h_i^l x_i$ para todo $k, l \in \{1, \ldots, m_i\}$ (pues pedimos que $h_1^i, \ldots, h_{m_k}^k$ fueran distintas), entonces solo resta probar que no existen i, j, r, s tales que $i \neq j$ y $h_i^r x_i = h_j^s x_j$. De lo contrario, la igualdad $h_i^r x_i = h_j^s x_j$ implicaría

$$x_j x_i^{-1} = (h_j^s)^{-1} h_i^r \in H.$$

Contradiciendo $\overline{x_i} \neq \overline{x_j}$. Por lo tanto, (C.11) es una ecuación de la forma

$$\sum_{j=0}^{m} c_j g_j = 0$$

con $c_j \in \mathbb{Z}$ y los $g_1, \ldots, g_m \in G$ distintos. Por el Corolario C.1.4, lo anterior implica que $c_j = 0$ para todo j y en nuestro caso, implica que $b_i^k = 0$ para todo k, i y por lo tanto, $a_k = \sum_i b_i^k h_i^k = 0$.

□

Lema C.2.12
Supongamos que G es un grupo, que F es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre, y que H es un subgrupo de G. Si H tiene índice finito en G, entonces $\operatorname{res}_H^G F$ es un $\mathbb{Z}H$-módulo libre.

Demostración. Supongamos que F es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre y que $\{e_i\}_{i \in I}$ es una $\mathbb{Z}G$-base de F. Por la Proposición B.1.22, lo anterior implica que (como $\mathbb{Z}G$-módulos)

$$F \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_H^G F &\cong \operatorname{res}_H^G \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G \right) && \text{(C.12)} \\
&= \bigoplus_{i \in I} \operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G && \text{(C.13)} \\
&\cong \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j=1}^{[G:H]} \mathbb{Z}H. && \text{(cf. Lema C.2.11)}
\end{aligned}$$

Usando esto y la Proposición B.1.22 obtenemos lo deseado. □

Lema C.2.13
Supongamos que G es un grupo, que P es un $\mathbb{Z}G$-módulo, y que H es un subgrupo de G con índice finito.

1. Si P es proyectivo, entonces $\operatorname{res}_H^G P$ también.
2. Si P es finitamente generado, entonces $\operatorname{res}_H^G P$ también.

Demostración.

1. Supongamos que P es proyectivo. Entonces (por definición) existe un $\mathbb{Z}G$-módulo Q tal que $P \oplus Q$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo libre. Por el Lema C.2.12, lo anterior implica que $\operatorname{res}_H^G(P \oplus Q)$ es un $\mathbb{Z}H$-módulo libre. Sin embargo, $\operatorname{res}_H^G(P \oplus Q) = \operatorname{res}_H^G P \oplus \operatorname{res}_H^G Q$ y por lo tanto, $\operatorname{res}_H^G P \oplus \operatorname{res}_H^G Q$ es un $\mathbb{Z}H$-módulo libre. En particular, $\operatorname{res}_H^G P$ es proyectivo.

2. Supongamos que P es $\mathbb{Z}G$-finitamente generado. Entonces (por el Corolario B.1.23) existe existe un homomorfismo suprayectivo (entre $\mathbb{Z}G$-módulos)

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G \to M \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Restringiendo la operación escalar a $\mathbb{Z}H$ obtenemos un homomorfismo suprayectivo entre $\mathbb{Z}H$-módulos

$$f : \operatorname{res}_H^G \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G \right) \to \operatorname{res}_H^G M$$

Pero

$$\operatorname{res}_H^G \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G \right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{res}_H^G \mathbb{Z}G \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{[G:H]} \mathbb{Z}H = \bigoplus_{i=1}^{n\cdot[G:H]} \mathbb{Z}H$$

donde el isomorfismo se cumple por el (C.2.11). Por lo tanto,

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n\cdot[G:H]} \mathbb{Z}H \to M.$$

es un homomorfismo suprayectivo entre $\mathbb{Z}H$-módulos. Por el Corolario B.1.23, lo anterior implica que M es $\mathbb{Z}H$-finitamente generado.

□

Bibliografía

[1] Alonso, J. M. Finiteness conditions on groups and quasi-isometries. *Journal of Pure and Applied Algebra 95* (1993), 121–126.

[2] Bestvina, M., and Brady, N. Morse theory and finiteness properties of groups. *Inventiones mathematicae 129* (1997), 445–470.

[3] Bieri, R. *Homological dimension of discrete groups*. Queen Mary College Mathematics Notes. University of London, 1981.

[4] Boyd, S., and Vandenberghe, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[5] Brown, K. S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1982.

[6] Brown, K. S. Finiteness properties of groups. *Journal of Pure and Applied Algebra 44* (1985), 45–49.

[7] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf.

[8] Lang, S. *Algebra*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.

[9] Löh, C. *Geometric group theory: An introduction*. Universitext. Springer, Cham, 2017.

[10] MathStackExchange. *Intuition behind alternating sum in boundary operator definition?* https://math.stackexchange.com/questions/1914799.

[11] Munkres, J. R. *Topology, second edition*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[12] Quick, G. *Algebraic Topology Lecture Notes Fall 2018*. https://folk.ntnu.no/gereonq/MA3403H2018/MA3403_Lecture_Notes.pdf.

[13] Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1966.

[14] Stallings, J. A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated. *American Journal of Mathematics 85, No. 4* (1963), 541–543.