



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDA DE LA SIMILITUD ENTRE
PROCESOS DE TRANSPORTE DIFUSIVO EN
REDES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

FRANCISCO HERNÁNDEZ PADILLA



TUTOR:

DR. ALEJANDRO PÉREZ RIASCOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ENERO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En este trabajo, se propone un formalismo para comparar la evolución de los estados de dos procesos difusivos en redes. Exploramos una medida de similitud definida en términos de los valores y vectores propios de la matriz Laplaciana normalizada que define a cada proceso. Este formalismo se implementa para examinar las diferencias en la dinámica descrita por las matrices circulantes, el efecto de introducir nuevas conexiones o su reorganización en redes, así como para evaluar las diferencias producidas al comparar procesos de transporte en caminantes aleatorios con sesgo en el grado. Nuestros resultados proporcionan una herramienta general para comparar procesos dinámicos en redes considerando la evolución de los estados y capturando la complejidad de estas estructuras.

Índice general

Introducción	5
1. Caminantes aleatorios en redes	7
1.1. Redes	7
1.2. Modelos de redes aleatorias	8
1.3. Caminantes aleatorios	10
1.3.1. Caminante aleatorio estándar	11
1.3.2. Caminante aleatorio con sesgo preferencial	11
2. Similitud entre dos procesos difusivos	12
2.1. Similitud entre procesos: Teoría general	12
2.1.1. Una medida de disimilitud	14
2.2. Procesos definidos por matrices circulantes	17
2.2.1. Redes circulantes	17
2.2.2. Ejemplo 1: Caminante local con líneas con pesos	19
2.2.3. Ejemplo 2: Caminantes con sesgo en redes circulantes	23
3. Comparación de procesos con alteraciones en la red	26
3.1. Anillo más una línea	26

3.2. Redes de Watts-Strogatz	32
4. Comparación de diferentes tipos de caminante aleatorio	36
4.1. Caminantes aleatorios con sesgo	36
Conclusiones y trabajo futuro	40
Anexos	42

Introducción

El flujo de la información se encuentra restringido por la estructura de una red, esto es el tipo de conexión entre los nodos, pues cada red puede presentar una manera diferente en que la información fluye y se propaga por toda esta estructura. La teoría de redes es una herramienta que cada vez más disciplinas comienzan a usar y a adaptar para observar y analizar sus objetos de estudio, la computación, la física, la química, entre otras, las han usado para representar múltiples situaciones. A cada elemento de un sistema se le puede asociar con un nodo de una red y por medio de un enlace se puede representar su conexión, en el ámbito de la física uno de los usos más comunes es para representar sistemas complejos, es por eso que es necesario seguir investigando esta área, pues hoy en día casi todo se puede modelar como uno de estos sistemas. En este trabajo se hablará sobre las redes, la difusión de la información a través de caminantes aleatorios y posteriormente se pasará a definir una distancia entre dos procesos de transporte que servirá para comparar el transporte en redes debido a modificaciones en la red o a cambios en la estrategia que define al caminante aleatorio.

En el Capítulo 1 se introducen algunos conceptos básicos sobre redes y caminantes aleatorios. En el Capítulo 2 se introduce una medida de similitud general que se explora analíticamente para las redes circulantes en las que se definirá una red de tipo anillo, a esta red se le pueden hacer 2 alteraciones, cambiando el caminante aleatorio o cambiar la red agregando enlaces. En este caso vamos primero a agregar enlaces a la red de modo que cada nodo se conecte al siguiente vecino más cercano pero saltándose un nodo, y se usará la medida de similitud para comparar ambas redes, la red alterada con la red original. Después se realizará otro cambio sobre la red de anillo original, esta vez se variarán los pesos de cada enlace de modo que el caminante aleatorio se vea más atraído hacia uno de esos enlaces que al otro.

En el Capítulo 3, partiendo de la misma red de anillo original, se realizará una alteración a la red original de modo que solo se agregue un enlace a toda la red y comparándola

también con qué pasaría si se varía la conexión de largo alcance que genera ese nuevo enlace. A continuación se comparará el efecto de reorganizar varios grupos de líneas en redes de Watts-Strogatz, comparando una red regular cíclica con su red reordenada. Para terminar, en el Capítulo 4, se compararon redes de tipo Barabási-Albert, para las redes de este tipo vamos a alterar el caminante aleatorio mediante un parámetro de sesgo para que tienda a seguir con mayor probabilidad nodos más o menos conectados. En este caso, evaluamos nuestras medidas de similitud para comparar la dinámica sin sesgo con el caminante aleatorio con sesgo. Finalmente, se presentan las conclusiones.

Objetivos

Para la realización de la investigación se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar una medida para la distancia entre dos procesos de transporte difusivo en redes y ver como una alteración de un proceso con respecto a uno de referencia cambia esta distancia.

Objetivos específicos

- Explorar la similitud del coseno para determinar una medida de la distancia adecuada para las redes circulantes y compararlas cambiando el peso de las conexiones y agregando conexiones en cada nodo.
- Estudiar los efectos de la distancia entre procesos difusivos en redes con una sola conexión extra y redes del tipo Watts-Strogatz reordenadas aleatoriamente.
- Emplear la medida de distancia para observar el comportamiento de las redes de Barabási-Albert, cambiando la estrategia del caminante aleatorio.

Capítulo 1

Caminantes aleatorios en redes

En este capítulo se hablará en términos generales de la terminología que se utilizará a lo largo de este trabajo y la teoría de la que se hablará a fondo más adelante a medida que se vayan presentando los resultados. Este capítulo es una breve introducción a los conceptos básicos de las redes y los grafos para permitir un mayor entendimiento del trabajo a continuación.

1.1. Redes

La teoría de redes comenzó cuando Euler comenzó a preguntarse en 1736, si había una forma de atravesar todos los 7 puentes de la ciudad de Königsberg sin atravesar 2 veces por el mismo [1]. En general, una red es un sistema que admite una representación gráfica que se conforme a base de nodos y enlaces entre esos nodos [2]. Estos nodos, también llamados vértices, representan un elemento del sistema que se desea presentar y los enlaces serían la relación que existe entre ellos [2]. Debido al creciente interés por el estudio de este tema, las redes y los grafos, a ser definidos más adelante, se han ido agregando en el estudio de la física, la biología y otras áreas, tanto que cada área le ha dado su propia nomenclatura y se han definido nuevas y distintas métricas así como procesos que ocurren en estas estructuras.

Un grafo es la representación gráfica de una red, que se encuentra definida por 2 conjuntos $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ en donde \mathcal{V} representa al conjunto de nodos en la red y \mathcal{E} denota a las aristas. Estas aristas o enlaces se representan con los nodos que conectan, de modo que la arista (i, j) nos muestra que el nodo i y el nodo j están conectados directamente, de estos nodos

se dice que son los vecinos más cercanos. En una gráfica sin dirección significa que tanto i está conectado con j como j con i .

Desde el punto de vista matemático se puede representar a una red con una matriz de adyacencia \mathbf{A} con elementos A_{ij} definida tal que [3]

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{si } (i, j) \notin \mathcal{E}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ahora, debido a la definición anterior, es fácil ver que la matriz adyacente de una red sin dirección es simétrica. Una de las formas más importantes para caracterizar a un vértice es a través de su grado de conectividad, este grado $k_i = \sum_{l=1}^N A_{il}$ se define como el número de conexiones incidentes que tiene ese nodo en toda la red.

Por otra parte, muchas redes en la naturaleza presentan una heterogeneidad en la capacidad e intensidad de la conexión que tienen hacia otros nodos, en este trabajo se le conocerá como el peso. Usualmente se describe también mediante una matriz en la que se presentan todos los pesos de los enlaces entre nodos junto con la matriz de adyacencia, de modo que el peso sería 0 para nodos no conectados. Esta es una forma de darle más importancia a un enlace que a otro, al darle más peso, pues estos enlaces tendrían un papel mayor en la comunicación de la red que los otros con menor peso.

1.2. Modelos de redes aleatorias

Hablaremos entonces de los tipos de redes aleatorias más básicas y las principales que se analizarán en este trabajo. Estas son 3, la red de Erdős-Rényi, Watts-Strogatz y Barabási-Albert.

- **Red de Erdős-Rényi:** El modelo de Erdős-Rényi es el más simple de todos con una regla muy sencilla para la creación de enlaces entre los nodos. A partir de un número de nodos N , al construir la red se decide si se conecta o no cada par de vértices, situaciones que aparecen con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente [4]. En la Figura 1.1 se presenta una red de Erdős-Rényi.
- **Red de Watts-Strogatz:** El siguiente modelo es el de Watts-Strogatz, este modelo consiste en una red de tipo anillo, redes de las cuales se hablará más adelante, con

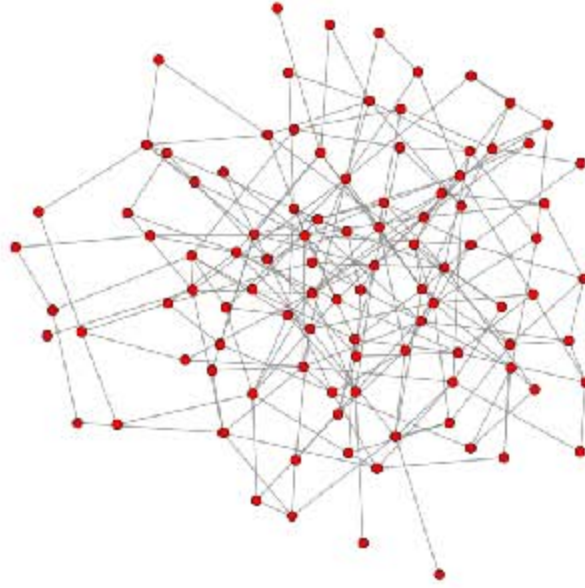


Figura 1.1: Ejemplo de una red de Erdős-Rényi con $N = 100$ y generada con $p = 0.046$.

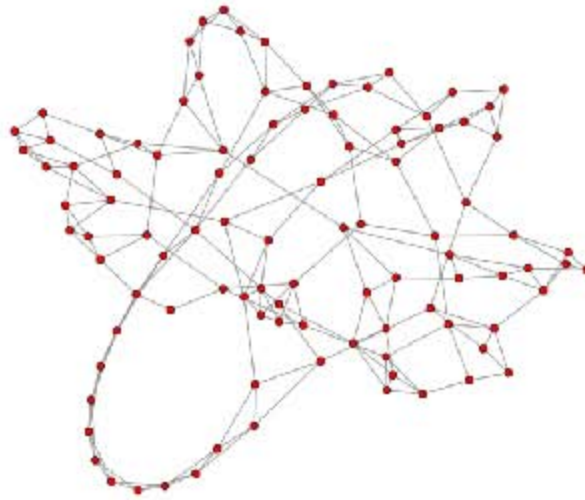


Figura 1.2: Ejemplo de una red de Watts-Strogatz con $N = 100$ y una probabilidad de recableado de $p = 0.1$.

N nodos, cada uno de estos nodos está conectado simétricamente con los siguientes nodos más cercanos según el grado de cada nodo. Después se lleva a cabo un proceso de reorganización de la conexiones en la red (recableado) de modo que cada enlace se desconecte con una probabilidad p y permanezca conectado a ese nodo con una probabilidad $1 - p$ [5]. En la Figura 1.2 se presenta una red de Watts-Strogatz.

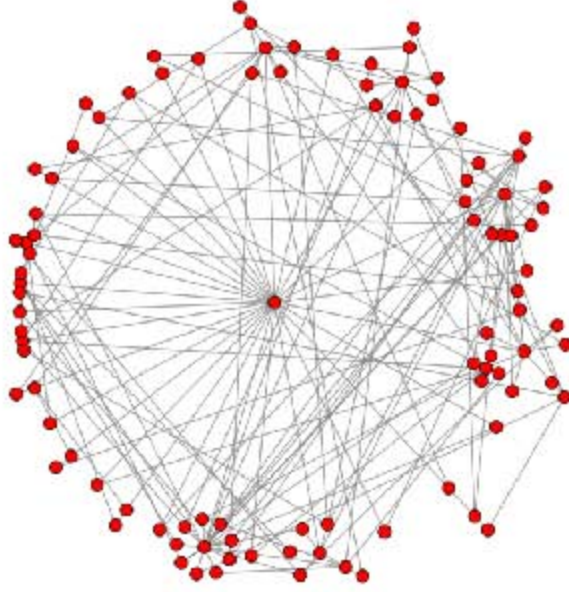


Figura 1.3: Ejemplo de una red de Barabási-Albert con $N = 100$ y $m = 2$.

- Red de Barabási-Albert:** El último caso es el de la red de tipo Barabási-Albert, este tipo de red está enfocada en el crecimiento con agregación preferente, muchas redes en la naturaleza son de este tipo. Este modelo se define por las siguientes 2 reglas. Crecimiento: La red comienza con un número dado de nodos y cada vez se agregan m nodos a los enlaces existentes. Enlace preferencial: cada nuevo enlace se conecta al anterior nodo con una probabilidad proporcional al grado del nodo. Con las reglas anteriores es fácil notar como los elementos con más enlaces tienden con mayor probabilidad a recibir más enlaces y por lo tanto estar conectados a un número mayor de elementos [6]. En la Figura 1.3 se presenta una red de Barabási-Albert.

1.3. Caminantes aleatorios

Una vez se haya definido una red de múltiples nodos, podemos atravesar esta red a través de una secuencia de nodos que se recorren dando lugar a un proceso dinámico dentro de la red. Para estudiar y modelar estos procesos se usa la llamada ecuación maestra [7, 8]

$$P_{ij}(t+1) = \sum_{l=1}^N \omega_{l \rightarrow j} P_{il}(t) \quad (1.2)$$

que describe la probabilidad $P_{ij}(t)$ que hay de que si nuestro caminante comenzó en el nodo i , encontrar a nuestro caminante en el vértice j al tiempo t y $\omega_{l \rightarrow j}$ es la probabilidad del caminante de pasar del nodo l al nodo j . Podemos ver en la ecuación que esta probabilidad sólo depende de la posición en el paso inmediatamente anterior; es decir, el caminante aleatorio no tiene memoria de los sitios visitados. A esto se le conoce también como un proceso Markoviano. Por otra parte, en todo el trabajo consideramos procesos en los que el caminante puede alcanzar en un tiempo finito cualquiera de los nodos de la red independiente de la condición inicial, a este tipo de dinámicas se les denominan proceso ergódicos.

1.3.1. Caminante aleatorio estándar

En este caso específico el caminante no discrimina entre todos los enlaces que tiene conectados y solamente se le asigna el mismo peso a cada uno de este modo llegando a uno de sus vecinos con la probabilidad [9]

$$\omega_{i \rightarrow j} = \frac{A_{ij}}{k_i}. \quad (1.3)$$

1.3.2. Caminante aleatorio con sesgo preferencial

Que un caminante tenga preferencia por uno o más de sus enlaces significa que estos enlaces que él prefiere tienen un peso mayor y la probabilidad de que el caminante tome uno de estos enlaces estaría dada por [8, 10]

$$\omega_{i \rightarrow j} = \frac{A_{ij} k_j^\beta}{\sum_{l=1}^N A_{il} k_l^\beta}, \quad (1.4)$$

donde β es un parámetro real que define el proceso. Para $\beta = 0$ se recupera al caminante aleatorio sin sesgo dado por la ecuación (1.3), cuando $\beta > 0$ se da preferencia a pasar a vértices con mayores conexiones y para $\beta < 0$ se tiende a pasar a vértices con menor grado.

Capítulo 2

Similitud entre dos procesos difusivos

En este capítulo observaremos cómo la estructura de una red y el caminante aleatorio pueden afectar al flujo de información dentro de una red, pues las conexiones y su tipo pueden alterar este proceso facilitándolo o haciéndolo más lento para que llegue a toda la red. Comenzaremos usando una red de tipo anillo y la alteraremos de 2 formas, una de ellas agregando enlaces entre nodos pero manteniendo a la red como un anillo, y la otra alteración que presentaremos será afectando a los pesos de los enlaces para favorecer que el caminante aleatorio siga más un camino que el otro. Analizaremos los cambios en la difusión en estas redes comparandolas con la red original.

2.1. Similitud entre procesos: Teoría general

Consideramos redes conectadas con N nodos $i = 1, \dots, N$ descritas por la matriz de adyacencia \mathbf{A} con elementos $A_{ij} = 1$ si existe un vínculo entre los nodos i, j y $A_{ij} = 0$ en caso contrario; también $A_{ii} = 0$ para evitar bucles en la red. El grado del nodo i está dado por $k_i = \sum_{l=1}^N A_{il}$.

Además, tenemos un caminante aleatorio Markoviano en la red donde en cada vez que $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ el caminante aleatorio hace un salto del nodo i al nodo j con una probabilidad de transición $w_{i \rightarrow j}$ en un proceso sin memoria de los sitios visitados. Todos los elementos $w_{i \rightarrow j}$ definen la dinámica en la red a través de una matriz de transición \mathbf{W} [7, 9], en general, esta es una matriz estocástica debido a la condición $\sum_{j=1}^N w_{i \rightarrow j} = 1$.

La probabilidad $p_{ij}(t)$ de empezar al tiempo $t = 0$ en el nodo i y alcanzar el nodo j en el tiempo t satisface la ecuación maestra [7, 9, 11]

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{l=1}^N p_{il}(t) w_{l \rightarrow j}. \quad (2.1)$$

Para Δt pequeña es válida la aproximación

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}(t)}{dt} &\approx -\frac{1}{\Delta t} \left[1 - \sum_{l=1}^N p_{il}(t) w_{l \rightarrow j} \right] \\ &= -\frac{1}{\Delta t} \sum_{l=1}^N p_{il}(t) [\delta_{lj} - w_{l \rightarrow j}], \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. De esta manera, para el tiempo continuo, la dinámica del caminante aleatorio se define en términos de la matriz Laplaciana normalizada $\hat{\mathcal{L}}$ con elementos $\mathcal{L}_{ij} = \delta_{ij} - w_{i \rightarrow j}$. En consecuencia, tenemos la ecuación maestra [12]:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -\sum_{l=1}^N p_{il}(t) \mathcal{L}_{lj}, \quad (2.3)$$

donde expresamos el tiempo t en unidades Δt . Integrando la Eq. (2.3), toda la evolución temporal de $p_{ij}(t)$ está determinada por el operador $\hat{U}(t) = \exp[-\hat{\mathcal{L}} t]$.

En la siguiente parte del trabajo, se utilizará la notación de Dirac para la representación de vectores. Esto es de utilidad debido a que nos permite simplificar mucha de la notación necesaria para trabajar con eigenvectores de diferentes matrices. De esta manera, la probabilidad $p_{ij}(t)$ está dada por

$$p_{ij}(t) = \langle i | \exp[-\hat{\mathcal{L}} t] | j \rangle. \quad (2.4)$$

Aquí $|i\rangle$ denota el vector con todas sus componentes iguales a 0 excepto la i -ésima, que es igual a 1, $\langle i | = |i\rangle^T$ donde T denota la transposición de vectores.

Ahora se define el estado $\langle \bar{\psi}_i(t) |$ que evoluciona con $\hat{U}(t)$ y está dado por

$$\langle \bar{\psi}_i(t) | \equiv \langle i | \exp[-\hat{\mathcal{L}} t]. \quad (2.5)$$

De manera similar, tenemos un segundo proceso que ocurre en una red con N nodos. El proceso está descrito por la matriz $\hat{\mathcal{L}}'$. Las diferencias entre $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$ pueden deberse a alteraciones de la red como, por ejemplo, la adición de uno o varias conexiones en la red o

modificaciones en la estrategia que sigue cada caminante aleatorio. La evolución temporal del segundo proceso viene dada por

$$\langle \bar{\psi}'_i(t) | \equiv \langle i | \exp[-\hat{\mathcal{L}}' t]. \quad (2.6)$$

Los vectores de estado $\langle \bar{\psi}_i(t) |$ y $\langle \bar{\psi}'_i(t) |$ tienen la contraparte como vectores columna

$$| \psi_i(t) \rangle \equiv \exp[-\hat{\mathcal{L}} t] | i \rangle, \quad | \psi'_i(t) \rangle \equiv \exp[-\hat{\mathcal{L}}' t] | i \rangle. \quad (2.7)$$

2.1.1. Una medida de disimilitud

Para establecer una “disimilaridad” $\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t)$ entre los dos procesos dinámicos definidos por $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$, aplicamos la ecuación de la disimilitud del coseno (llamada así por la analogía con el producto punto de vectores y su relación con el coseno del ángulo que estos forman) para comparar los estados de los sistemas generados para cada operador. De esta manera, se define

$$\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t) \equiv 1 - \frac{\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi'_i(t) \rangle}{\sqrt{|\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi_i(t) \rangle| |\langle \bar{\psi}'_i(t) | \psi'_i(t) \rangle|}}. \quad (2.8)$$

Para evaluar la ecuación (2.8), necesitamos la descomposición espectral de las matrices $\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'$. Para caminantes aleatorios ergódicos, la matriz de transición \mathbf{W} puede ser diagonalizada. Para los vectores propios derechos de \mathbf{W} tenemos $\mathbf{W} | \phi_i \rangle = \lambda_i | \phi_i \rangle$ para $i = 1, \dots, N$, donde el conjunto de valores propios se ordena en la forma $\lambda_1 = 1$ y $1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq -1$. Por otro lado, a partir de los vectores propios derechos definimos una matriz \mathbf{Z} con elementos $Z_{ij} = \langle i | \phi_j \rangle$. La matriz \mathbf{Z} es invertible, y se obtiene un nuevo conjunto de vectores $\langle \bar{\phi}_i |$ mediante $(\mathbf{Z}^{-1})_{ij} = \langle \bar{\phi}_i | j \rangle$, entonces [8]

$$\delta_{ij} = (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z})_{ij} = \sum_{l=1}^N \langle \bar{\phi}_i | l \rangle \langle l | \phi_j \rangle = \langle \bar{\phi}_i | \phi_j \rangle \quad (2.9)$$

y

$$\mathbb{I} = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^{-1} = \sum_{l=1}^N | \phi_l \rangle \langle \bar{\phi}_l |, \quad (2.10)$$

donde \mathbb{I} es la matriz de identidad. El conjunto de vectores propios izquierdos y derechos de \mathbf{W} es el mismo del Laplaciano modificado $\hat{\mathcal{L}}$. Los respectivos valores propios ξ_l de $\hat{\mathcal{L}}$ están dados por $\xi_l = 1 - \lambda_l$. De forma similar, podemos deducir los valores propios ξ'_l y los vectores propios $| \phi'_i \rangle, \langle \bar{\phi}'_l |$ de $\hat{\mathcal{L}}'$, satisfaciendo las condiciones de las ecuaciones (2.9)

y (2.10).

En términos de valores y vectores propios de $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{L}}'$, tenemos

$$\exp[-\hat{\mathcal{L}} t] = \sum_{l=1}^N \exp[-\xi_l t] |\phi_l\rangle \langle \bar{\phi}_l|, \quad (2.11)$$

$$\exp[-\hat{\mathcal{L}}' t] = \sum_{l=1}^N \exp[-\xi'_l t] |\phi'_l\rangle \langle \bar{\phi}'_l|. \quad (2.12)$$

Entonces, utilizando las definiciones de las Ecs. (2.5)-(2.7), obtenemos

$$\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi'_i(t) \rangle = \sum_{l,m=1}^N e^{-(\xi_l + \xi'_m)t} \langle i | \phi_l \rangle \langle \bar{\phi}_l | \phi'_m \rangle \langle \bar{\phi}'_m | i \rangle, \quad (2.13)$$

$$\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi_i(t) \rangle = \sum_{l=1}^N e^{-2\xi_l t} \langle i | \phi_l \rangle \langle \bar{\phi}_l | i \rangle, \quad (2.14)$$

$$\langle \bar{\psi}'_i(t) | \psi'_i(t) \rangle = \sum_{l=1}^N e^{-2\xi'_l t} \langle i | \phi'_l \rangle \langle \bar{\phi}'_l | i \rangle. \quad (2.15)$$

De esta manera, la introducción de las Ecs. (2.13)-(2.15) en la ecuación (2.8) permite el cálculo de la similitud del coseno $\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t)$ considerando el nodo inicial i . Además, es conveniente calcular el valor global

$$\bar{\mathcal{D}}(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t)| \quad (2.16)$$

y la distancia máxima global dada por

$$|\bar{\mathcal{D}}|_{\max} \equiv \max\{\bar{\mathcal{D}}(t) \forall t \geq 0\}. \quad (2.17)$$

Finalmente, vale la pena mencionar que la evolución temporal dada por la ecuación (2.3) para caminatas aleatorias definidas de tal manera que el caminante puede llegar a cualquier nodo desde cualquier condición inicial, el valor propio $\xi_1 = 0$ y $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N > 0$. El vector propio asociado a $\xi_1 = 0$ define la distribución estacionaria $p_j^\infty(\hat{\mathcal{L}})$ que describe la probabilidad para $t \rightarrow \infty$ y toma la forma de

$$p_j^\infty(\hat{\mathcal{L}}) = \langle i | \phi_1 \rangle \langle \bar{\phi}_1 | j \rangle. \quad (2.18)$$

Sin embargo, $\langle i | \phi_1 \rangle$ es constante y, como consecuencia, $p_j^\infty(\hat{\mathcal{L}})$ es independiente de la

condición inicial. Un resultado similar es válido para la dinámica con $\hat{\mathcal{L}}'$

$$p_j^\infty(\hat{\mathcal{L}}') = \langle i|\phi'_1\rangle \langle \bar{\phi}'_1|j\rangle. \quad (2.19)$$

En consecuencia, considerando el límite $t \rightarrow \infty$ para $\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t)$ en la ecuación (2.8), tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{\psi}_i(t) | \psi_i(t) \rangle = \langle i | \phi_1 \rangle \langle \bar{\phi}_1 | i \rangle = p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}), \quad (2.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{\psi}'_i(t) | \psi'_i(t) \rangle = \langle i | \phi'_1 \rangle \langle \bar{\phi}'_1 | i \rangle = p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}') \quad (2.21)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{\psi}_i(t) | \psi'_i(t) \rangle &= \langle i | \phi_1 \rangle \langle \bar{\phi}_1 | \phi'_1 \rangle \langle \bar{\phi}'_1 | i \rangle \\ &= \sum_{l=1}^N \langle i | \phi_1 \rangle \langle \bar{\phi}_1 | l \rangle \langle l | \phi'_1 \rangle \langle \bar{\phi}'_1 | j \rangle = \sum_{l=1}^N p_l^\infty(\hat{\mathcal{L}}) p_l^\infty(\hat{\mathcal{L}}'), \\ &= p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}'). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para obtener

$$\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t \rightarrow \infty) = 1 - \frac{p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}')}{\sqrt{p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}) p_i^\infty(\hat{\mathcal{L}}')}}. \quad (2.23)$$

De esta manera, vemos que $\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t \rightarrow \infty)$ es una comparación de distribuciones de probabilidad estacionarias asociadas a los procesos definidos por $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$. En particular, si las distribuciones estacionarias de estos procesos coinciden, tenemos $\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t \rightarrow \infty) = 0$.

2.2. Procesos definidos por matrices circulantes

2.2.1. Redes circulantes

Las redes circulantes son fácilmente identificables con una matriz asociada circulante \mathbf{C} . Una matriz circulante \mathbf{C} es una matriz $N \times N$ definida por [13]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

con entradas denotadas por C_{ij} . De esta manera, cada columna tiene elementos reales c_0, c_1, \dots, c_{N-1} ordenados de tal manera que c_0 describe los elementos diagonales y $C_{ij} = c_{(i-j) \bmod N}$. Además, se define la matriz elemental circulante \mathbf{E} , con todos sus elementos nulos excepto $c_1 = 1$. A partir de \mathbf{E} , las potencias enteras \mathbf{E}^l para $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$ son también matrices circulantes con elementos nulos excepto $c_l = 1$. Por lo tanto, la ecuación (2.24) puede expresarse como [13]

$$\mathbf{C} = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \mathbf{E}^m, \quad (2.25)$$

donde $\mathbb{I} = \mathbf{E}^0$. Además, la relación $\mathbf{E}^N = \mathbb{I}$ requiere que los valores propios ν de \mathbf{E} satisfagan $\nu^N = 1$; por tanto, esos valores propios vienen dados por [13]

$$\nu_l = e^{i \frac{2\pi(l-1)}{N}} \quad \text{for} \quad l = 1, \dots, N, \quad (2.26)$$

con $i \equiv \sqrt{-1}$. Los respectivos vectores propios $|\Psi_m\rangle_{m=1}^N$ tienen las componentes $\langle l | \Psi_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i \frac{2\pi}{N} (l-1)(m-1)}$ y $\langle \Psi_l | m \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} (l-1)(m-1)}$ [13]. Ahora, considerando la ecuación (2.25), los vectores propios $|\Psi_l\rangle$ satisfacen $\mathbf{C}|\Psi_l\rangle = \eta_l |\Psi_l\rangle$, donde los valores propios η_l vienen dados por (ver Ref. [13] para más detalles):

$$\eta_l = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{i \frac{2\pi}{N} (l-1)m} \quad (2.27)$$

para $l = 1, 2, \dots, N$. De esta manera, vemos que todos los vectores propios de las matrices circulantes son iguales, mientras que los respectivos valores propios incluyen los valores de los coeficientes c_0, c_1, \dots, c_{N-1} . Entonces, si las matrices $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$ son circulantes, en las expresiones de las Ecs. (2.13)-(2.15), tenemos $\langle \bar{\phi}_l | \phi'_m \rangle = \delta_{lm}$, $\langle i | \phi_l \rangle \langle \bar{\phi}_l | i \rangle = \langle i | \phi'_l \rangle \langle \bar{\phi}_l | i \rangle = 1/N$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}' &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \xi_l \xi'_m |\phi_l\rangle \langle \bar{\phi}_l | \phi'_m \rangle \langle \bar{\phi}'_m | = \sum_{l=1}^N \xi_l \xi'_l |\phi_l\rangle \langle \bar{\phi}_l | = \sum_{l=1}^N \xi_l \xi'_l |\phi_l\rangle \langle \bar{\phi}'_l | \\
 &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \xi_l \xi'_m |\phi'_l\rangle \langle \bar{\phi}'_l | \phi_m \rangle \langle \bar{\phi}_m | = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \xi_m \xi'_l |\phi'_l\rangle \langle \bar{\phi}'_l | \phi_m \rangle \langle \bar{\phi}_m | \\
 &= \sum_{l=1}^N \xi'_l |\phi'_l\rangle \langle \bar{\phi}'_l | \sum_{m=1}^N \xi_m |\phi_m\rangle \langle \bar{\phi}_m | = \hat{\mathcal{L}}'\hat{\mathcal{L}}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta los eigenvectores de las matrices circulantes, se obtiene

$$\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi'_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-(\xi_l + \xi'_l)t} \tag{2.29}$$

$$\langle \bar{\psi}_i(t) | \psi_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-2\xi_l t} \tag{2.30}$$

$$\langle \bar{\psi}'_i(t) | \psi'_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{-2\xi'_l t}. \tag{2.31}$$

En consecuencia, la ecuación (2.8) toma la forma

$$\mathcal{D}(t) = 1 - \frac{\sum_{l=1}^N e^{-(\xi_l + \xi'_l)t}}{\sqrt{\left| \sum_{l=1}^N e^{-2\xi_l t} \right| \left| \sum_{m=1}^N e^{-2\xi'_m t} \right|}} \tag{2.32}$$

donde los valores propios ξ_l, ξ'_l vienen dados por la ecuación (2.27) considerando las entradas respectivas que definen $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$. A diferencia de la definición general de la ecuación (2.8), en (2.32) vemos que $\mathcal{D}(t)$ es independiente del nodo inicial i . Esto se debe a que cuando $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$ son matrices circulantes, la simetría de la dinámica permite ver cada nodo como equivalente. Este es el caso, por ejemplo, cuando definimos un caminante aleatorio estándar en una red regular. Como límites particulares de $\mathcal{D}(t)$, tenemos $\mathcal{D}(0) = 0$ y

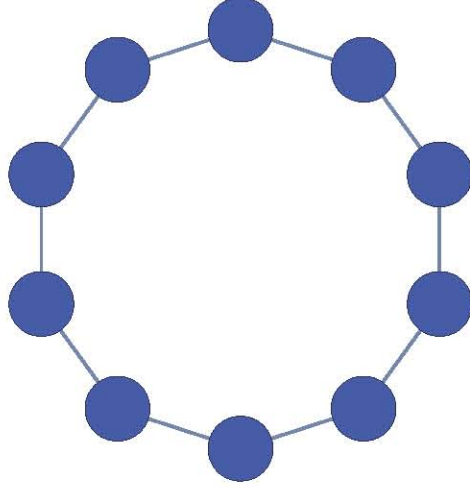


Figura 2.1: Representación gráfica de una red circulante de 10 nodos formando una estructura de anillo.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}(t) = 0$; de esta manera, es conveniente definir una distancia máxima dada por

$$|\mathcal{D}|_{\max} \equiv \max\{|\mathcal{D}(t)| \forall t \geq 0\}. \quad (2.33)$$

2.2.2. Ejemplo 1: Caminante local con líneas con pesos

Para esta parte tomamos la red circulante básica que define el anillo como el de la Figura 2.1 con un caminante aleatorio estándar definido por $w_{i \rightarrow j} = A_{ij}/k_i$ de modo que la probabilidad del caminante aleatorio de ir de un nodo a otro vecino sea siempre la misma. Tomando esto podemos deducir la matriz Laplaciana $\hat{\mathcal{L}}$ como una matriz de tipo circulante definida por $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$ y $c_{N-1} = -1/2$ lo que permitió calcular sus eigenvalores

$$\xi_l = 1 - \cos \left[\frac{2\pi}{N}(l-1) \right]. \quad (2.34)$$

Y esa red la alteramos de modo que quede otra matriz circulante, esta vez, agregando enlaces con un peso ϵ como en la Figura 2.2. Un caminante aleatorio en esta red con pesos es definido por el Laplaciano modificado $\hat{\mathcal{L}}'$ con elementos $c_0 = 1$, $c_1 = -1/(2+2\epsilon)$, $c_{N-1} = -1/(2+2\epsilon)$, $c_2 = -\epsilon/(2+2\epsilon)$ y $c_{N-2} = -\epsilon/(2+2\epsilon)$ lo que nos permite calcular los eigenvalores

$$\xi'_l = 1 - \frac{1}{1+\epsilon} \cos \left[\frac{2\pi}{N}(l-1) \right] - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cos \left[\frac{4\pi}{N}(l-1) \right]. \quad (2.35)$$

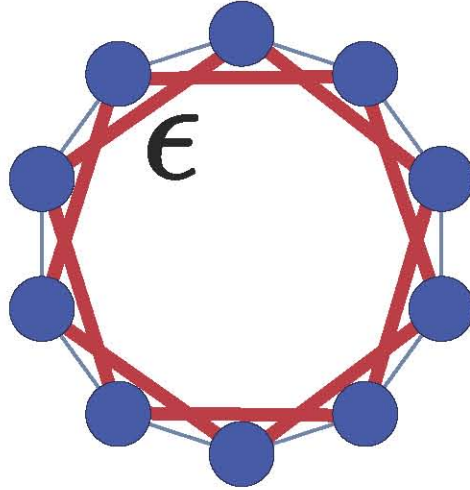


Figura 2.2: Red utilizada en el ejemplo 1 en la que vemos como a los nodos de un anillo, se agregan conexiones circulares que tienen un peso ϵ .

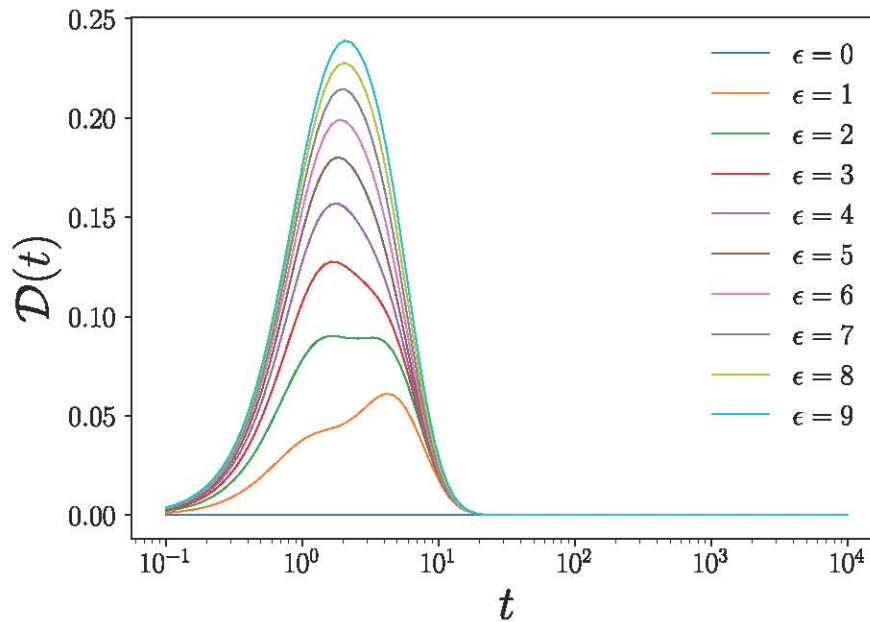


Figura 2.3: Esta gráfica nos presenta el valor $\mathcal{D}(t)$ que se encuentra entre la red de anillo y la red a la que se le han agregado los enlaces ϵ , en este caso se ha realizado para los pesos de ϵ desde 0 al 9 tomando una red de 10 nodos usando los eigenvalores de (2.34) y (2.35).

Del resultado anterior podemos ver como cuando ϵ tiende a 0, encontramos los eigenvalores para la red no modificada. De modo que ahora tomando los eigenvalores de la (2.34) y (2.35) y usando la ecuación (2.32) podemos encontrar los siguientes resultados para redes con 10, 100 y 200 nodos.

En un primer análisis, en la Figura 2.3 para redes de 10 nodos, lo primero que notamos

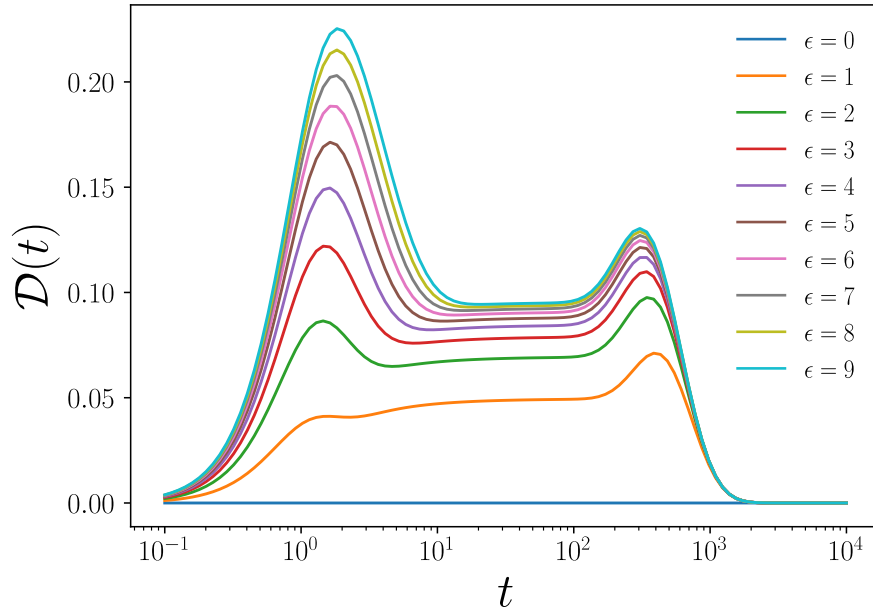


Figura 2.4: Esta gráfica nos presenta el valor $\mathcal{D}(t)$ que se encuentran entre la red de anillo y la red a la que se le han agregado los enlaces ϵ , en este caso se ha realizado para los pesos de ϵ desde 0 al 9 tomando una red de 100 nodos usando los eigenvalores de (2.34) y (2.35).

es cómo a medida que el peso ϵ va creciendo, también lo hace el máximo absoluto de la función; sin embargo para el caso a en la Figura 2.4 con $N = 100$, hay 2 máximos relativos en la función $\mathcal{D}(t)$ para $\epsilon > 0$, el primero de estos máximos se da a tiempos muy pequeños y se da gracias a la modificación local de la red debido al efecto de los pesos de los enlaces ϵ . Vemos cómo aparece un segundo máximo, este segundo máximo se debe a la modificación global para redes con N mayores, es por esto que eventualmente estos máximos se sobrelapan en 1 solo.

En el caso de la Figura 2.5 para redes de 200 nodos, vemos como con mayor número de nodos podemos ver 2 máximos, los valores $\mathcal{D}(t)$ entre los dos procesos incrementan con t en un primer máximo, disminuye y vuelve a crecer en un segundo máximo.

De la ecuación (2.32) encontramos que tanto para tiempos muy pequeños $t \rightarrow 0$ como para tiempos muy altos $t \rightarrow \infty$, $\mathcal{D}(t) \rightarrow 0$. Esto nos indica que la separación entre ambas redes, una red de anillo común y una con sesgo, eventualmente no importará y después de un tiempo se podrá llegar a un nodo de manera equiprobable, algo respaldado también por nuestras gráficas de las Figuras 2.3-2.5 ya que ambos procesos tienen la misma probabilidad estacionaria.

En la Figura 2.6 podemos ver como los máximos alcanzados por nuestras funciones $|\mathcal{D}|_{max}$

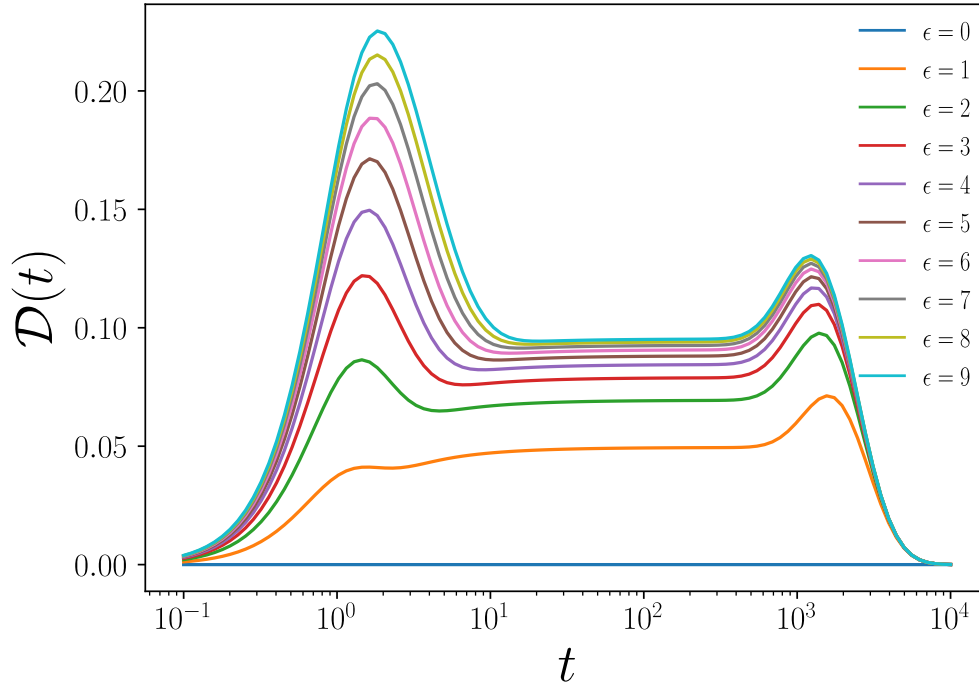


Figura 2.5: Esta gráfica nos presenta el valor $\mathcal{D}(t)$ que se encuentra entre la red de anillo y la red a la que se le han agregado los enlaces ϵ , en este caso se ha realizado para los pesos de ϵ desde 0 al 9 tomando una red de 200 nodos usando los eigenvalores de (2.34) y (2.35).

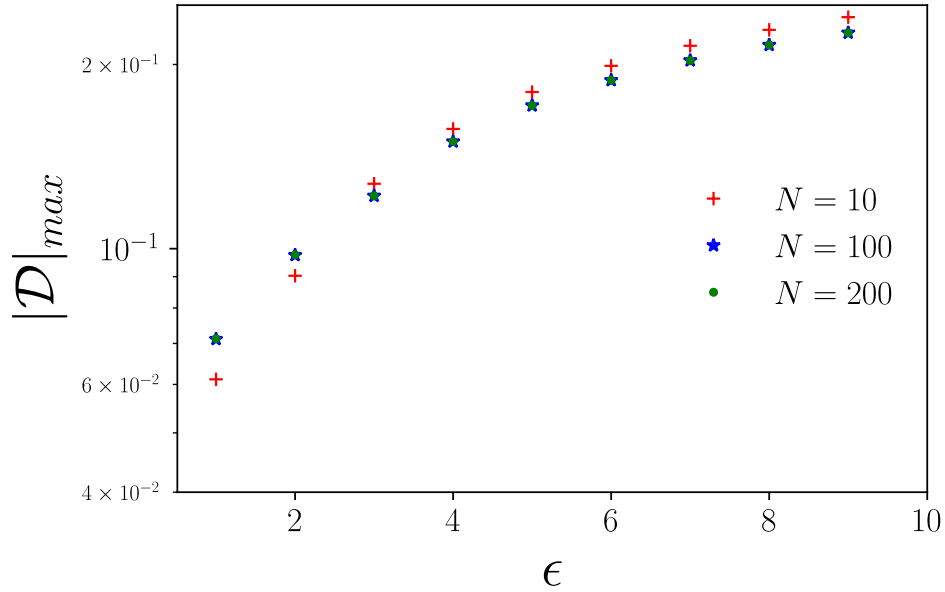


Figura 2.6: Para distintos valores de ϵ , se nos muestra la máxima distancia que se alcanza entre una red de anillo común y la perturbada con epsilon para redes de $N = 10, 100, 200$.

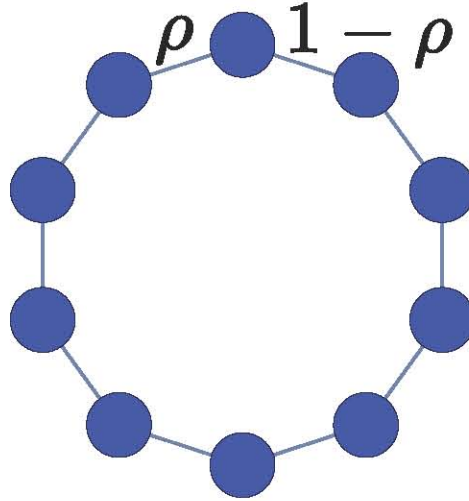


Figura 2.7: Esta es la representación gráfica de la red circulante en el cuál se da un peso $0 \leq \rho \leq 1$, por lo cual la probabilidad de que el caminante aleatorio se dirija a un nodo u otro de sus vecinos será distinta y ponderada por el ρ o $1 - \rho$.

en función de los pesos utilizados ϵ se vuelven mayores mientras menos nodos tengan, mientras que la máxima distancia entre las redes será más similar entre redes con mayor número de nodos y también será menor. Además vemos como $|\mathcal{D}|_{max}$ aumenta monotonamente. En la Figura ?? se observa como las gráficas de máximos crecen tendiendo a una función límite. El cálculo analítico de los valores máximos y su relación con la topología de la red es un tema de interés; sin embargo, este resultado analítico va más allá de los objetivos de este proyecto.

2.2.3. Ejemplo 2: Caminantes con sesgo en redes circulantes

En esta sección vemos la comparación entre 2 redes circulantes simples con un solo cambio en su caminante aleatorio y como afecta esto en la distancia. Esta comparación se hace entre las redes mostradas en las Figuras 2.1 y 2.7. De modo que podemos tomar la misma $\hat{\mathcal{L}}$ definida para un anillo con los eigenvalores dados por (2.34) y la matriz Laplaciana modificada $\hat{\mathcal{L}}'$ definida como $c_0 = 1$, $c_1 = -\rho$ y $c_{n-1} = -(1 - \rho)$ donde ρ al ser una probabilidad se encuentra entre 0 y 1. Los eigenvalores para esta matriz son

$$\xi'_l = 1 - (1 - \rho) \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} (l - 1) \right] - \rho \exp \left[i \frac{2\pi}{N} (l - 1) \right]. \quad (2.36)$$

Del resultado anterior podemos notar como al mantener el caminante aleatorio igual a $\rho = 1/2$ se recuperan los eigenvalores en (2.34).

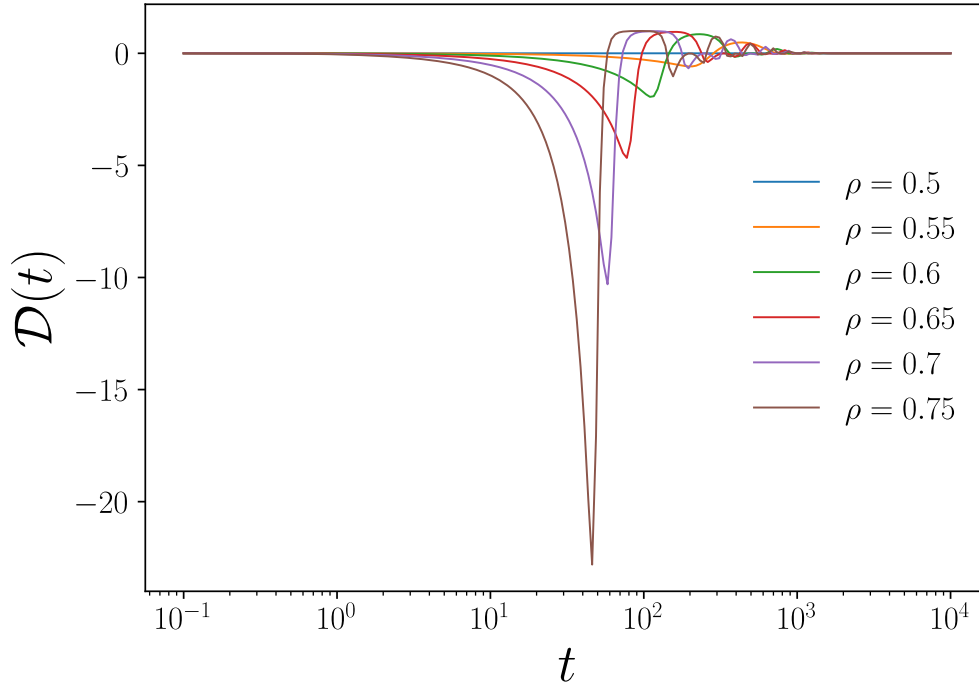


Figura 2.8: Se muestra la comparación entre una red de tipo anillo con $N = 100$ y una red con una variación en el peso en un enlace en cada nodo, con pesos que van de $\rho = 0.5$ a $\rho = 0.7$ con pasos de 0.5, donde el máximo representa cuánto se aleja una de la otra.

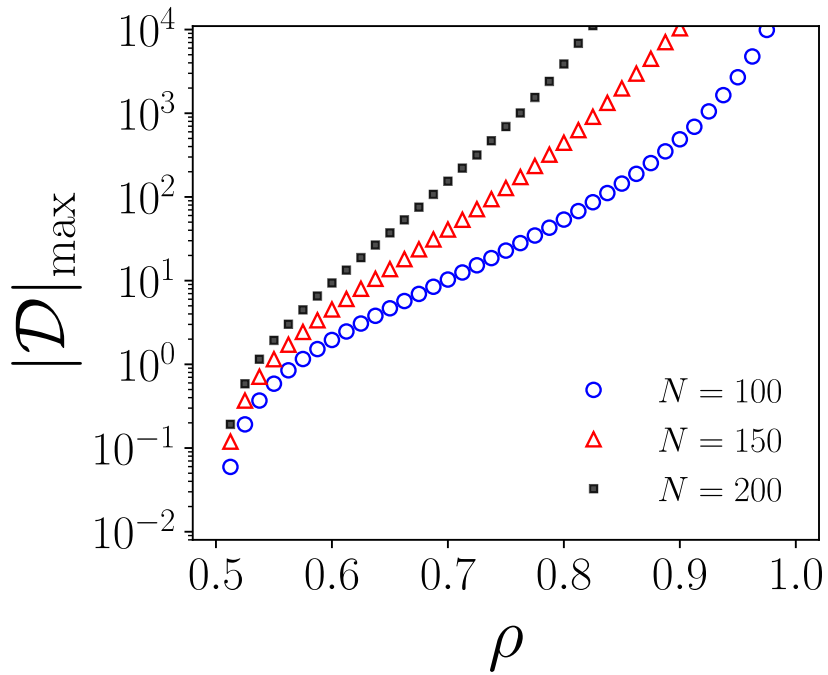


Figura 2.9: $|D|_{max}$ en función de ρ para redes con nodos de $N = 100, 150, 200$.

Aquí notamos que el resultado, dado por (2.32) es que eventualmente, las funciones tienden a 0. Esta propiedad se encuentra debido a estar realizando el modelo con una red de tipo anillo con una matriz circulante asociada. En la Figura 2.8 encontramos un comportamiento oscilatorio en donde se grafican la $\mathcal{D}(t)$ como función de la probabilidad $\rho = 0.5, \dots, 0.75$. En esta figura también podemos ver cómo se recupera el resultado dado por la ecuación (2.32) en que para $\rho = 1/2$ la red se compara consigo misma dándonos $\mathcal{D}(t) = 0$. En este caso, debido a la naturaleza del caminante aleatorio que definimos, a medida que aumentamos la probabilidad de ir de un nodo a otro, la separación se hace mayor, aunque crece hacia el lado negativo. No se calculó $\mathcal{D}(t)$ para valores de $\rho > 0.75$ debido a que los máximos se vuelven muy grandes. Por otra parte, para las probabilidades $\rho < 0.5$, es claro ver que, debido a la simetría de la red, los resultados son los mismos ya que la dinámica es equivalente a haber cambiado la dirección de los caminantes en la red, así, la disimilitud permanece igual a lo observado para $\rho > 0.5$.

En la Figura 2.9, graficamos el máximo del valor absoluto alcanzado por la función $|\mathcal{D}|_{max}$ en función de ρ para redes con nodos de $N = 100, 150, 200$ y vemos como mientras el número de nodos aumenta también aumenta el máximo de distancia alcanzado entre ambas redes.

Capítulo 3

Comparación de procesos con alteraciones en la red

En los casos mencionados para matrices circulantes en el Capítulo 2, en el segundo proceso definido por $\hat{\mathcal{L}}'$, todos los nodos sufrieron las mismas modificaciones. De esta manera, $\mathcal{D}(t)$ en la ecuación (2.32) captura las diferencias entre los dos procesos dinámicos analizados. Sin embargo, otras modificaciones del Laplaciano $\hat{\mathcal{L}}'$ pueden deberse a alteraciones heterogéneas en los nodos. En esta sección exploramos dos casos en los que comparamos el efecto de introducir una conexión adicional en un anillo y las diferencias generadas por la reorganización de las conexiones en una red regular.

3.1. Anillo más una línea

En este caso, comparamos la dinámica generada por $\hat{\mathcal{L}}$ para un caminante aleatorio estándar en un anillo con N nodos como se define en el Capítulo 2. El segundo proceso generado por $\hat{\mathcal{L}}'$ describe la misma dinámica pero en una red diferente definida por un anillo y una línea adicional que conecta dos nodos a una distancia $\ell = 2, 3, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ en el anillo original. En la literatura de teoría de grafos, este tipo de conexión se denomina “cuerda” [14].

A continuación, exploramos el efecto de ℓ para comparar la dinámica difusiva en el anillo y el anillo con una cuerda. Aquí vale la pena mencionar que en todos los casos las matrices $\hat{\mathcal{L}}$

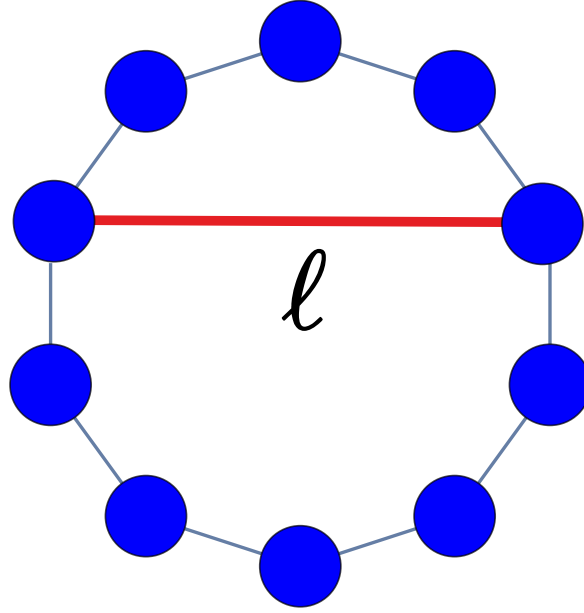


Figura 3.1: Representación gráfica de una red circular de 10 nodos con una cuerda de longitud ℓ , para el caso particular de la figura $\ell = 4$.

y $\hat{\mathcal{L}}'$ difieren en entradas particulares. Con el fin de comparar los elementos de las matrices $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$, definimos la cantidad:

$$\mathcal{S} \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathcal{L}_{ij} - \mathcal{L}'_{ij}|. \quad (3.1)$$

Ahora, considerando la definición de las matrices $\hat{\mathcal{L}} = \mathbb{I} - \mathbf{W}$ y $\hat{\mathcal{L}}' = \mathbb{I} - \mathbf{W}'$, donde \mathbf{W} y \mathbf{W}' son las respectivas matrices de transición, se obtiene:

$$\mathcal{S} \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\omega_{i \rightarrow j} - \omega'_{i \rightarrow j}|. \quad (3.2)$$

Los elementos $\omega_{i \rightarrow j}$ y $\omega'_{i \rightarrow j}$ corresponden a las probabilidades de transición en el anillo original y el anillo más una cuerda. De esta manera, al denotar como a, b a los extremos de la cuerda, a_1, a_2 a los vecinos de a en el anillo original así como b_1, b_2 a los vecinos de b , tenemos que los únicos elementos de \mathbf{W}' que cambian con la introducción de la nueva línea son:

$$\omega'_{a \rightarrow a_1} = \omega'_{a \rightarrow a_2} = \omega'_{a \rightarrow b} = \frac{1}{3}, \quad (3.3)$$

$$\omega'_{b \rightarrow b_1} = \omega'_{b \rightarrow b_2} = \omega'_{b \rightarrow a} = \frac{1}{3}. \quad (3.4)$$

Estos elementos, originalmente tienen los valores

$$\omega_{a \rightarrow a_1} = \omega_{a \rightarrow a_2} = \frac{1}{2} \quad \omega_{a \rightarrow b} = 0, \quad (3.5)$$

$$\omega_{b \rightarrow b_1} = \omega_{b \rightarrow b_2} = \frac{1}{2} \quad \omega_{b \rightarrow a} = 0. \quad (3.6)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{m=1}^N |\omega_{a \rightarrow m} - \omega'_{a \rightarrow m}| + \sum_{m=1}^N |\omega_{b \rightarrow m} - \omega'_{b \rightarrow m}| \\ &= |\omega_{a \rightarrow a_1} - \omega'_{a \rightarrow a_1}| + |\omega_{a \rightarrow a_2} - \omega'_{a \rightarrow a_2}| + |\omega_{a \rightarrow b} - \omega'_{a \rightarrow b}| \\ &\quad + |\omega_{b \rightarrow b_1} - \omega'_{b \rightarrow b_1}| + |\omega_{b \rightarrow b_2} - \omega'_{b \rightarrow b_2}| + |\omega_{b \rightarrow a} - \omega'_{b \rightarrow a}| \\ &= |1/2 - 1/3| + |1/2 - 1/3| + |0 - 1/3| + |1/2 - 1/3| + |1/2 - 1/3| + |0 - 1/3| \\ &= 1/6 + 1/6 + 1/3 + 1/6 + 1/6 + 1/3 = 4/3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De esta manera, a partir de la definición (3.1), para cualquier ℓ tenemos $\sum_{i,j} |\mathcal{L}_{ij} - \mathcal{L}'_{ij}| = 4/3$, mostrando que la comparación directa de los elementos matriciales no captura las diferencias entre las dinámicas por $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$.

Por lo tanto, para una comparación de $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{L}}'$ en el contexto del transporte difusivo, usamos el valor promedio $\bar{\mathcal{D}}(t)$ en la ecuación (2.16) y su valor máximo $|\bar{\mathcal{D}}|_{\max}$ en la ecuación (2.17). Los resultados numéricos para una red con $N = 50$ se muestran en la Figura 3.2. En la Figura 3.2 representamos a $\bar{\mathcal{D}}(t)$ como una función de t , los resultados se presentan como diferentes curvas generadas para $\ell = 2, 4, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$. Los valores numéricos de $\bar{\mathcal{D}}(t)$ muestran que $\bar{\mathcal{D}}(t) \approx 0$ para t pequeño, entonces $\bar{\mathcal{D}}(t)$ aumenta gradualmente; en particular, para ℓ más cercano a 2, los incrementos son monótonos hasta llegar a una meseta. Para $\ell \gg 2$ observamos un pico que sube con ℓ . En estos casos, el valor t que maximiza $\bar{\mathcal{D}}(t)$ cambia con el tamaño de la red. Los resultados están en buen acuerdo con el hecho de que al introducir una cuerda con ℓ pequeño, el promedio de $|\mathcal{D}_i(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{L}}'; t)|$ sobre todos los nodos i será pequeño ya que la cuerda solo produce pequeñas variaciones que afectan la dinámica global, estas diferencias se reducen cuando aumentamos el tamaño de la red N . Además, un ℓ grande crea una mayor conectividad que cambia de forma significativa la dinámica con respecto al anillo original. Distinguir el efecto producido por la cuerda toma poco tiempo t en la medida $\bar{\mathcal{D}}(t)$ mientras que detectar la modificación y su efecto global toma más tiempo t en redes más grandes.

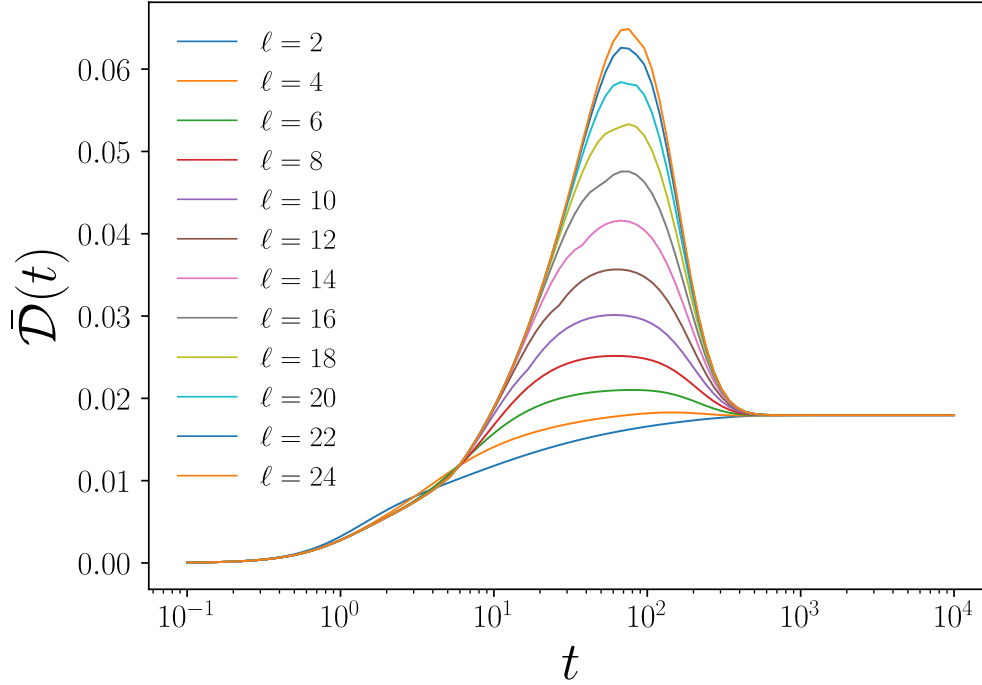


Figura 3.2: Gráfico comparativo de la distancia $\bar{D}(t)$ entre una red de anillo con una red de anillo más una cuerda que corta al anillo de 50 nodos.

Por otro lado, en el límite $t \rightarrow \infty$, $\bar{D}(t)$ muestra una comparación entre las dos distribuciones estacionarias de la dinámica de caminata aleatoria generada con $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{L}}'$. De esta manera, usando la ecuación (2.23)

$$\begin{aligned}
 \bar{D}(\infty) &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{D}(t) \\
 &= \frac{(N-2)}{N} \left| 1 - \sqrt{\frac{N}{N+1}} \right| + \frac{2}{N} \left| 1 - \sqrt{\frac{3N}{2(N+1)}} \right| \\
 &= 1 - \frac{4}{N} - \sqrt{\frac{N}{N+1}} + \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{N(N+1)}}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Del resultado anterior podemos calcular el valor alcanzado por las redes perturbadas con un enlace adicional, en el caso de la red de $N = 50$ tenemos un valor de $\bar{D}(\infty) = 0.01797$ que concuerda con el valor obtenido numéricamente en la Figura 3.2.

Ahora nos fijamos como $\bar{D}(\infty)$ decrece poco a poco a medida que la se aumenta el número de nodos N . En el caso de la Figura 3.3 para $N = 100$ se observa que $\bar{D}(\infty) = 0.009237$. Por otra parte, aumentando el número de nodos a $N = 200$, $\bar{D}(\infty)$ decrece más en

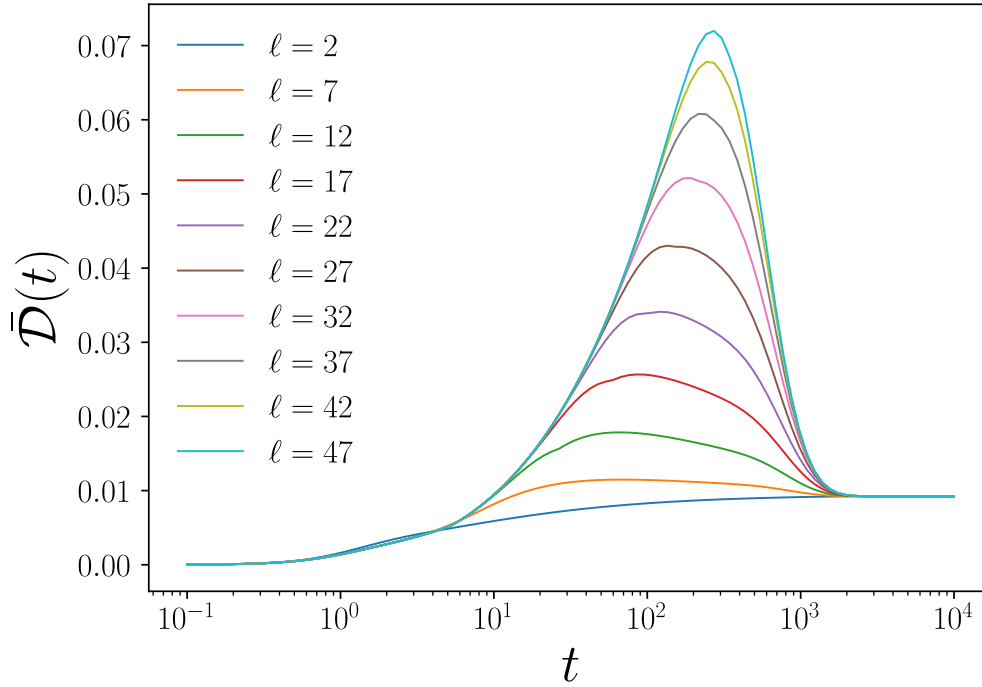


Figura 3.3: Distancia $\bar{D}(t)$ alcanzada entre una red de anillo y una red de anillo más una línea para redes de 100 nodos.

comparación con las redes anteriores. En la Figura 3.4 vemos que $\bar{D}(\infty) = 0.004683$. Todos estos valores coinciden con la evaluación numérica de la ecuación (3.8).

Por otro lado, en la Figura 3.5, se presentan los valores de la máxima disimilitud $|\bar{D}|_{\max}$ dada por la expresión (2.17) en términos del valor ℓ/N . Los resultados nos permiten comparar la dinámica sobre el anillo y el efecto de la cuerda. Para los diferentes tamaños de las redes, vemos que $|\bar{D}|_{\max}$ aumenta monótonamente con ℓ . Es también claro que como la red no discrimina la dirección, si continuamos haciendo crecer la longitud de nuestra cuerda más allá de la mitad de los nodos, el máximo será menor, pues sería la misma longitud anterior. Además, vemos como hay un cruce entre las líneas, esto se debe a que, para distancias pequeñas en la red, mientras haya más nodos el efecto es mínimo, y si la longitud es mayor, entonces podemos encontrar que su efecto es más notorio, en especial para redes de mayor tamaño.

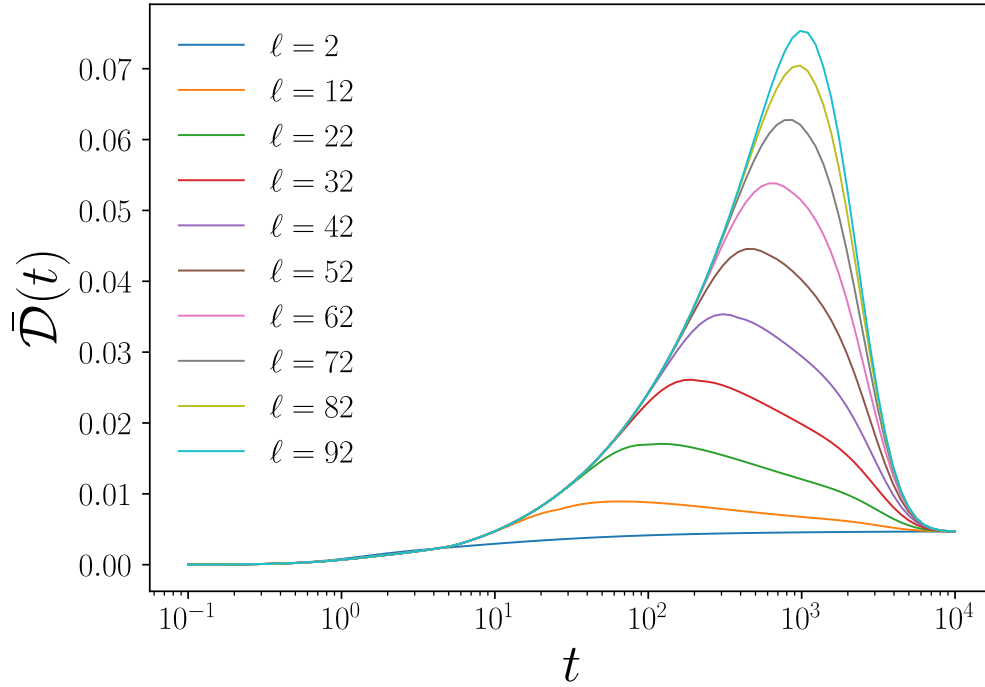


Figura 3.4: Distancia $\bar{D}(t)$ alcanzada entre una red de anillo y una red de anillo más una línea para redes de 200 nodos.

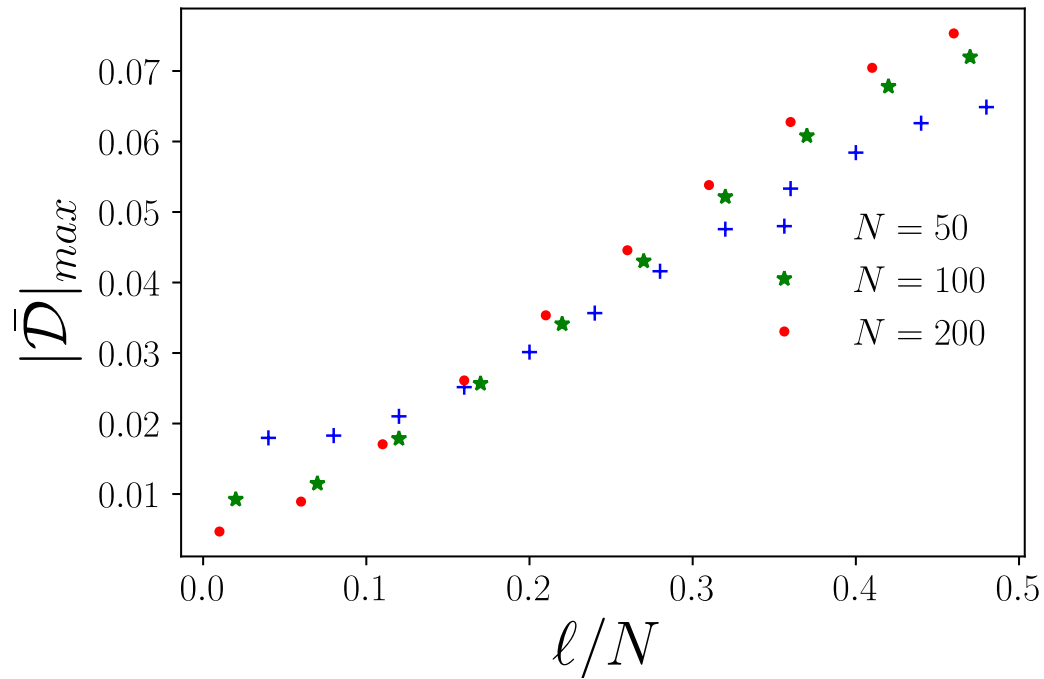


Figura 3.5: Distancia máxima $|\bar{D}|_{\max}$ que se alcanza comparando los anillos más una línea para redes de 50, 100 y 200 nodos.

3.2. Redes de Watts-Strogatz

Consideremos ahora el efecto de la reorganización aleatoria de las conexiones en las redes. Con este fin, definimos $\hat{\mathcal{L}}$ que describe la caminata aleatoria estándar en una red regular y $\hat{\mathcal{L}}'$ para la misma dinámica en una nueva estructura generada con la reorganización al azar de múltiples enlaces. Las redes se obtienen con el modelo de Watts-Strogatz [5]. En este caso, se genera una red aleatoria de la siguiente manera: un anillo está conectado al mismo número J de vecinos más cercanos en cada lado, $2J$ es el grado de cada nodo similar a la red de la Figura 2.2, con la diferencia de que en este caso, todos los enlaces tienen un mismo peso. Esta red se asemeja a una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas. Entonces, se crea una red Watts-Strogatz reorganizando cada línea con una probabilidad uniforme e independiente p y conectándola para producir un línea entre un par de nodos que se eligen uniformemente al azar [5].

Analizamos el efecto de la reorganización aleatoria de las conexiones para redes descritas por $J = 2$ y la probabilidad p comparando un caminante aleatorio en la estructura obtenida para $p = 0$ y la dinámica con $0 \leq p \leq 1$. Para $p = 0$, la red es regular y $\hat{\mathcal{L}}$ es una matriz circulante definida por elementos no nulos $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_{N-1} = c_{N-2} = -1/4$. El segundo proceso definido por $\hat{\mathcal{L}}'$ tiene lugar en la red modificada generada con recableado p y probabilidades de transición $w_{i \rightarrow j} = \frac{A_{ij}}{k_i}$.

En la Figura 3.6 podemos ver la distancia $\bar{\mathcal{D}}(t)$ en función de t para una red de 100 nodos y apreciamos como a medida que aumentamos la probabilidad de reordenamiento p , aumentará cada vez más la distancia de disimilitud entre las redes, vemos también cómo a medida que aumentamos p la red se separa cada vez más de la red original cada vez más rápido con un máximo global. También se observa que el valor final alcanzado es diferente de 0 y cada vez mayor para cada p .

En la Figura 3.7 encontramos la disimilitud $\bar{\mathcal{D}}(t)$ para una red de 50 nodos y cambiamos la probabilidad de reordenamiento p . Vemos como según aumentamos esta probabilidad también se separan cada vez más la difusión en estas redes. Si la p es menor, se tardará más en alcanzar su máximo de separación global.

En las Figuras 3.7-3.8, exploramos $\bar{\mathcal{D}}$, esto nos permite obtener la Figura 3.9 en la que vemos los resultados para $|\bar{\mathcal{D}}|_{\max}$ obtenidos numéricamente para redes con $N = 50, 100, 200$ y diferentes valores de p . Dado que, para cada p , el recableado produce una red diferente, evaluamos los resultados para 50 realizaciones; de esta manera, presentamos el conjunto promedio $\langle |\bar{\mathcal{D}}|_{\max} \rangle$ sobre las realizaciones y las barras de error muestran la desviación

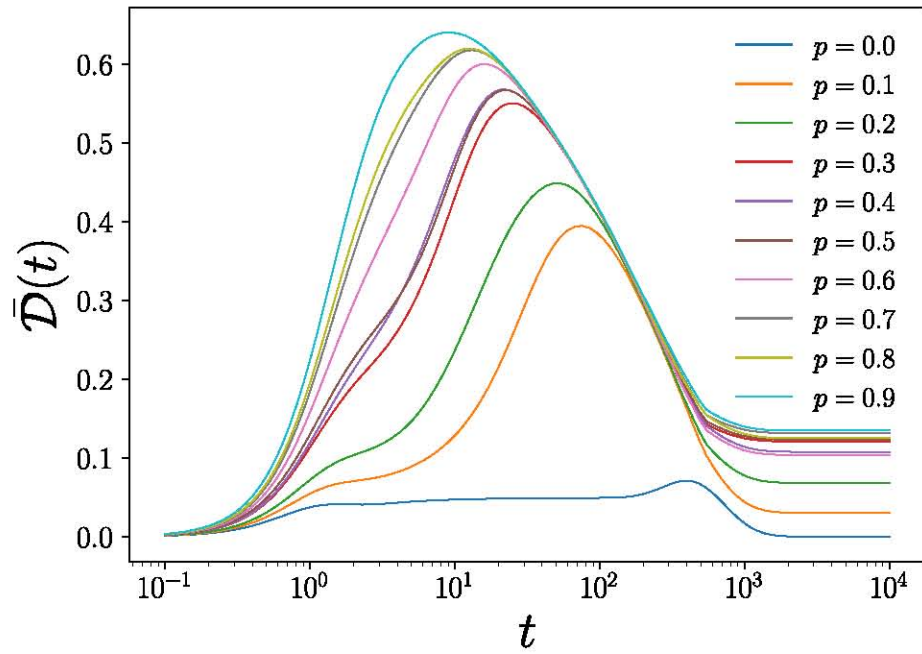


Figura 3.6: Distancia alcanzada $\bar{D}(t)$ entre una red de Watts-Strogatz de grado 4 y comparada con su red reordenada aleatoriamente con redes de 100 nodos para probabilidades de reordenamiento $p = 0, \dots, 0.9$.

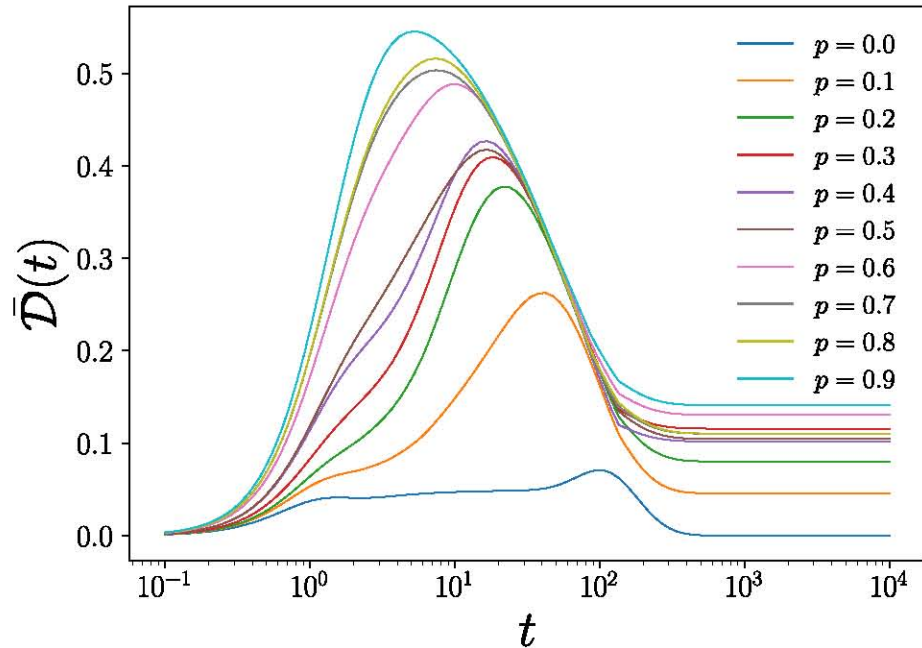


Figura 3.7: Distancia alcanzada $\bar{D}(t)$ entre una red de Watts-Strogatz de grado 4 y comparada con su red reordenada aleatoriamente para un red de 50 nodos con probabilidades de reordenamiento de $p = 0, \dots, 0.9$

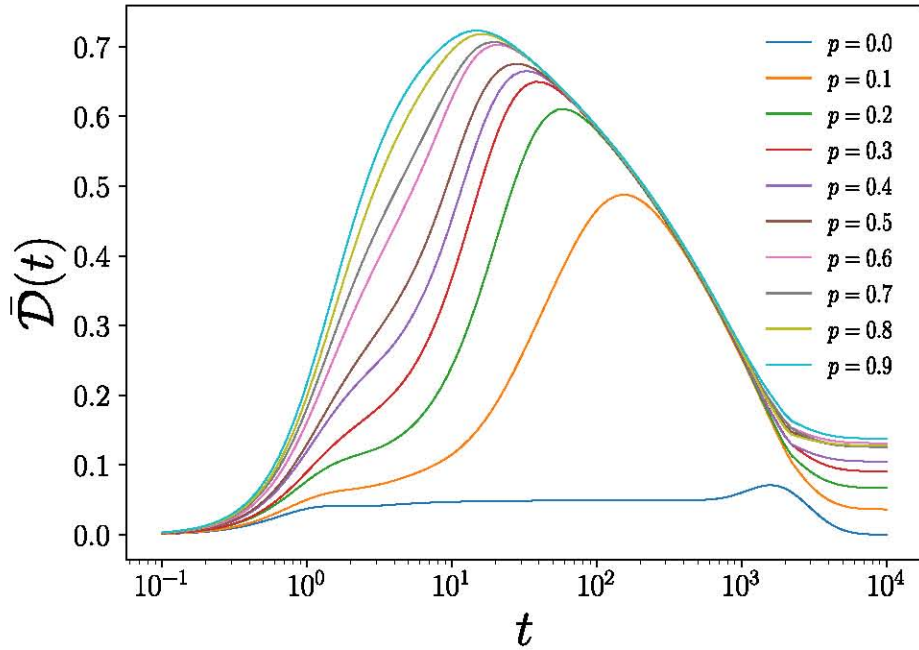


Figura 3.8: Distancia alcanzada $\bar{D}(t)$ entre una red de Watts-Strogatz de grado 4 y comparada con su red reordenada aleatoriamente para una red de 200 nodos con probabilidades de reordenamiento de $p = 0, \dots, 0.9$

estándar respectiva. Los resultados muestran que para un p fijo, $\langle |\bar{D}|_{\max} \rangle$ aumenta con el tamaño N , esta relación es razonable ya que aunque p es igual, el número de enlaces recableados aumenta con N produciendo mayores diferencias con el transporte en la red regular para la dinámica con $\hat{\mathcal{L}}$. Por otro lado, para redes con el mismo tamaño, los valores de $\langle |\bar{D}|_{\max} \rangle$ aumentan monótonamente con p . Sin embargo, la tasa de incremento es mayor en el intervalo $0 < p < 0.2$ mostrando que una pequeña fracción de recableado produce cambios significativos en el transporte difusivo. Esto es una consecuencia del surgimiento de la bien conocida propiedad del mundo pequeño en el modelo de Watts-Strogatz [5].

Además vemos en la Figura 3.10 el valor final $\bar{D}(\infty)$ que alcanzan las gráficas varía, los resultados para $\bar{D}(\infty)$ obtenidos numéricamente para redes con $N = 50, 100, 200$ y diferentes valores de p . De nuevo, evaluamos los resultados para 50 realizaciones debido a la naturaleza de reordenamiento con probabilidades p ; de esta manera, presentamos el conjunto promedio $\langle \bar{D}(\infty) \rangle$ sobre las realizaciones y las barras de error muestran la desviación estándar respectiva. Los resultados muestran que para un p fijo, $\bar{D}(\infty)$ no presenta una variación significativa con N .

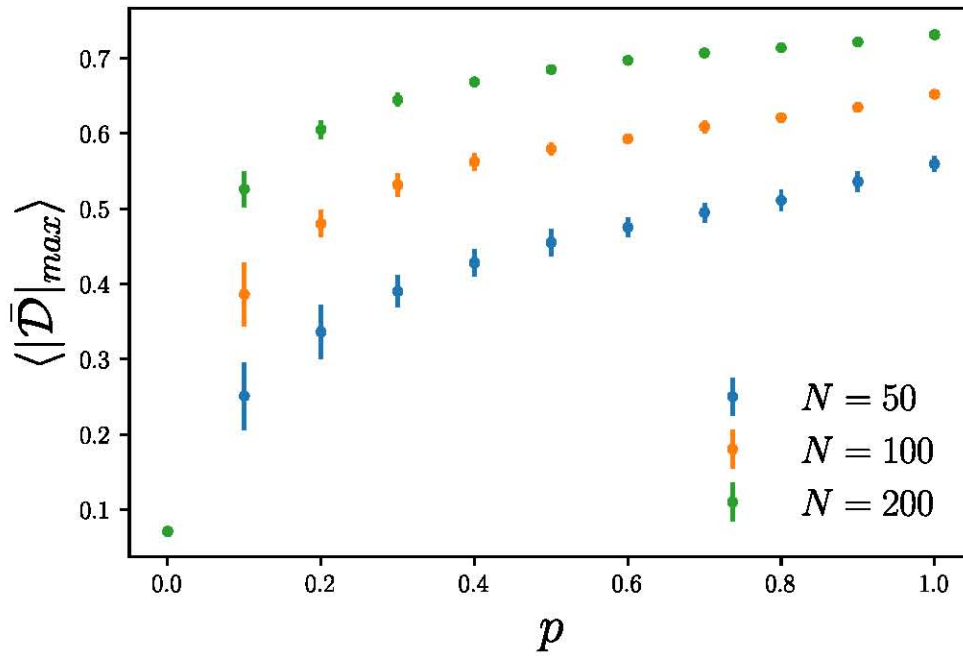


Figura 3.9: Distancia máxima $|\bar{D}|_{max}$ que se alcanza entre las redes de Watts-Strogatz reordenada una red de anillo. Se reporta el promedio de ensamble $\langle |\bar{D}|_{max} \rangle$ obtenido a partir de 50 realizaciones de la red, las barras de error indican la desviación estándar de los resultados.

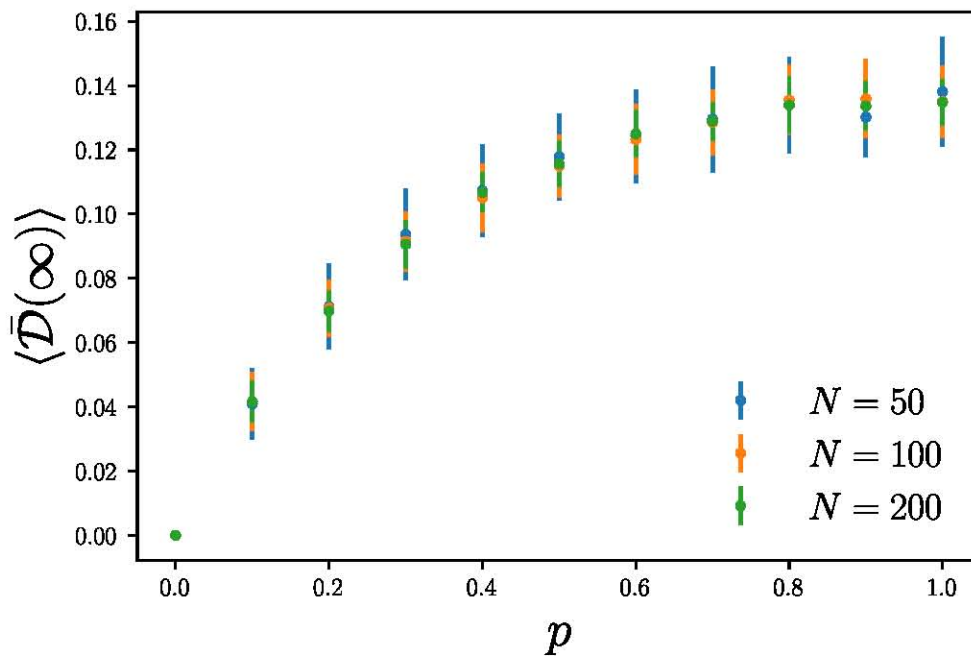


Figura 3.10: Valor final $\langle \bar{D}(\infty) \rangle$ que se alcanza a tener para una red reordenada aleatoriamente con $N = 50, 100, 200$ nodos en función de la probabilidad de reordenamiento p .

Capítulo 4

Comparación de diferentes tipos de caminante aleatorio

En las aplicaciones descritas en los Capítulos 2 y 3, comparamos la dinámica de los caminantes aleatorios para ver el efecto de las modificaciones incorporadas en la red a través de la introducción de nuevas conexiones, cambios en los pesos y reorganización de las líneas. En este capítulo, se describe un caso donde la red es la misma pero la estrategia de caminata aleatoria se modifica con un parámetro particular.

4.1. Caminantes aleatorios con sesgo

En esta sección, analizamos los paseos aleatorios con sesgo de grado. Para este caso, el caminante aleatorio salta con probabilidades de transición $w_{i \rightarrow j}$ dependiendo de los grados de los vecinos del nodo i . Los paseos aleatorios con sesgo de grado se definen mediante una matriz de transición $\mathbf{W}(\beta)$ con elementos [10]

$$w_{i \rightarrow j}(\beta) = \frac{A_{ij}k_j^\beta}{\sum_{l=1}^N A_{il}k_l^\beta}, \quad (4.1)$$

donde β es un parámetro real. En la ecuación (4.1), $\beta > 0$ describe el sesgo para saltar a los nodos vecinos con un grado más alto, mientras que para $\beta < 0$ este comportamiento se invierte y el caminante tiende a saltar a los nodos menos conectados. Cuando $\beta = 0$, se recupera el camino aleatorio normal con $w_{i \rightarrow j} = A_{ij}/k_i$.

La caminata aleatoria en la ecuación (4.1) también se define en términos de una matriz simétrica de pesos $\mathbf{\Omega}$ con elementos $\Omega_{ij} = A_{ij}(k_i k_j)^\beta$ con probabilidades de transición [8]

$$w_{i \rightarrow j} = \frac{\Omega_{ij}}{\sum_{l=1}^N \Omega_{il}} = \frac{\Omega_{ij}}{S_i}.$$

Aquí $S_i = \sum_{l=1}^N \Omega_{il}$ y representa el peso total del nodo i (ver Ref. [8] para una revisión de diferentes paseos aleatorios definidos usando un simétrico matriz de pesos). En términos de este formalismo, en redes no dirigidas conectadas, los paseos aleatorios sesgados en grados son ergódicos para β finitos y la distribución estacionaria está dada por [8]

$$p_i^\infty = \frac{S_i}{\sum_{l=1}^N S_l} = \frac{\sum_{l=1}^N (k_i k_l)^\beta A_{il}}{\sum_{l,m=1}^N (k_l k_m)^\beta A_{lm}}. \quad (4.2)$$

Los paseos aleatorios con sesgo de grado se han estudiado ampliamente en la literatura en diferentes contextos tan variados como procesos de enrutamiento [15], reacciones químicas [16], eventos extremos [17, 18], paseos aleatorios múltiples en redes [19, 20], entre otros [10, 21, 22]. Recientemente, los paseos aleatorios con sesgo de grado se han generalizado para incluir múltiples sesgos [23], en paseos aleatorios impulsados por potencial [24], para estudiar la influencia del daño y el envejecimiento en sistemas complejos [25, 26] y, incorporar un sesgo particular en cada nodo [27].

Una vez definida la matriz de transición para paseos aleatorios sesgados en grados, podemos utilizar esta información en la definición de una matriz Laplaciana normalizada asociada a la dinámica de tiempo continuo

$$\hat{\mathcal{L}}(\beta) = \mathbb{I} - \mathbf{W}(\beta). \quad (4.3)$$

Aquí β es un valor dado del parámetro de sesgo que sirve como referencia para compararlo con un segundo proceso

$$\hat{\mathcal{L}}'(\beta') = \mathbb{I} - \mathbf{W}(\beta'). \quad (4.4)$$

De esta manera, podemos comparar la dinámica con el parámetro de sesgo β' con una referencia particular dada por β .

En la Figura 4.1, calculamos numéricamente $\bar{\mathcal{D}}(t)$ en la ecuación (2.16) como una función de β' considerando el valor $\beta = 0$ como referencia. Podemos ver como con $\beta < 0$ las funciones $\bar{\mathcal{D}}(t)$ llegan más rápido a un estado estacionario en comparación a lo observado con $\beta > 0$. Para los casos con $\beta < 0$ también observamos que después de alcanzar un primer máximo relativo, la función decrece estableciendo un mínimo relativo, esta

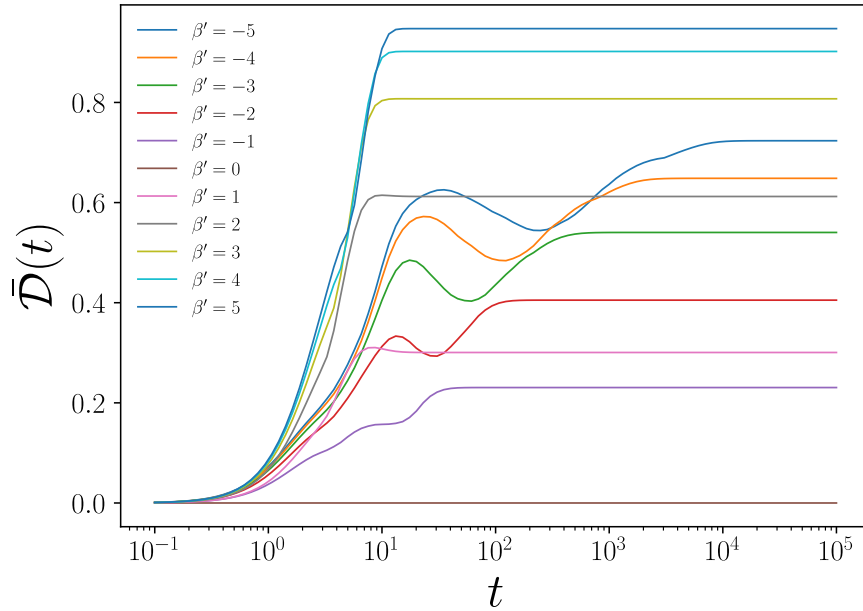


Figura 4.1: Disimilitud $|\bar{D}(t)|$ para un sesgo de grado en caminatas aleatorias en la ecuación (4.1) definida por β' usando como referencia la dinámica con $\beta = 0$ en una red compleja de tipo Barabási-Albert con $N = 100$ nodos.

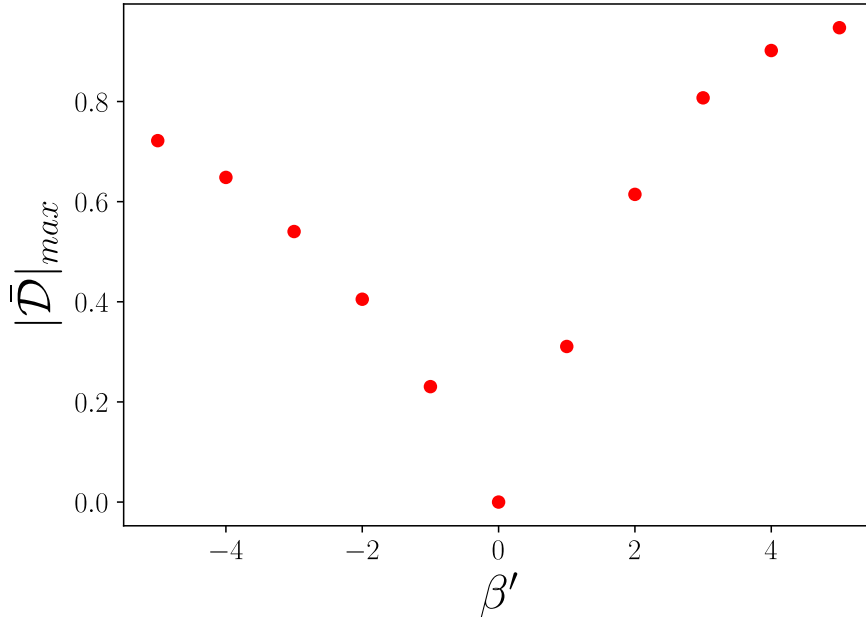


Figura 4.2: Máxima disimilitud $|\bar{D}|_{max}$ para un sesgo de grado en caminatas aleatorias en la ecuación (4.1) definida por β' usando como referencia la dinámica con $\beta = 0$ en una red compleja de tipo Barabási-Albert con $N = 100$ nodos.

reducción muestra que hay ciertos momentos en los que la estrategia para moverse a lo largo de la red es más similar a la estrategia del caminante de referencia, esto se puede dar cuando el caminante alcanza los nodos con menos conexiones en donde el efecto del sesgo es menor que cuando se trata de nodos con vecinos altamente conectados.

Por otra parte, en la Figura 4.2, calculamos numéricamente $|\bar{\mathcal{D}}|_{\max}$ en la ecuación (2.17) como una función de β' considerando como valor de referencia $\beta = 0$ para caminantes aleatorios con sesgo en el grado en una red Barabási-Albert [6]. Como resultado, en esta red los grados presentan diferentes valores con la existencia de algunos nodos con grados altos y una alta cantidad de nodos con pocos vecinos. Debido a esta heterogeneidad, el grado de sesgo de la estrategia de caminata aleatoria difiere del caso no sesgado. En este análisis, en la Figura 4.1 comparamos el caso no sesgado con $\beta = 0$ con la dinámica con $-5 \leq \beta' \leq 5$, en particular $|\bar{\mathcal{D}}|_{\max} = 0$ cuando $\beta' = 0$, cosa que se muestra más claramente en la Figura 4.2. En general, los resultados de la figura nos muestran que las medidas de disimilitud introducidas en esta investigación, logran detectar cambios en el transporte difusivo al comparar dos caminantes diferentes en una red.

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, se exploró una medida para la similitud entre redes y se puso a prueba para poder comparar las distancias que pueden alcanzar diferentes caminantes aleatorios para diferentes configuraciones de las redes entre una y otra. Se estudió su valor máximo y los valores estacionarios a tiempos grandes.

Los resultados para las redes circulantes nos muestran que las alteraciones a grandes tiempos no tienen gran importancia debido a que eventualmente la probabilidad de encontrar a nuestro caminante aleatorio será la misma que en la red original. Por lo que, aunque al principio se pueden llegar a separar mucho, para tiempos grandes nuestra medida es una comparación de las probabilidades estacionarias del caminante aleatorio que en este caso son iguales por tratarse de dinámicas en redes regulares.

Después se analizaron redes que sufrieron un proceso que afecta la organización de la red, primero agregando solo una línea a la red que conectara diferentes redes y después a una red reorganizada aleatoriamente, en estos casos notamos que al principio se pueden llegar a separar mucho de la red original, para tiempos grandes llegan a un punto distinto comparadas con la red original.

En el último caso se cambió el caminante aleatorio de una red de Barabási-Albert y vimos cómo se separaron los procesos generados por el caminante aleatorio con sesgo al ser comparados con el caminante aleatorio sin sesgo. Este es un ejemplo en el que se pueden detectar cambios en la difusión asociados a modificaciones en la estrategia del caminante aleatorio.

Todos los resultados de nuestra investigación muestran que las cantidades introducidas logran cuantificar diferencias entre procesos de transporte en redes.

Trabajo futuro

Pese al alcance de este trabajo, aún queda mucho por hacer, pues el estudio de las redes es un campo que está en crecimiento y sus aplicaciones muy variadas. Se puede continuar con la exploración analítica de diferentes cantidades estudiando más a fondo las funciones generadas por los máximos de cada proceso así como otras medidas diferentes a la similitud del coseno. Por otra parte, todos los resultados no son exclusivos de los procesos de difusión y todo el formalismo introducido en este trabajo puede adaptarse para explorar transporte cuántico, sincronización entre otros procesos dinámicos en redes.

Anexos

En este anexo se presentan las funciones implementadas en Python para la deducción numérica de las medidas de disimilitud entre procesos difusivos.

```
def distances_numerical(matL,matLp):
    Nv=len(matL)
    Eigvals,Q=np.linalg.eig(matL)
    Qinvs=np.linalg.inv(Q)
    Eigvalsp,Qp=np.linalg.eig(matLp)
    Qpinvs=np.linalg.inv(Qp)
    AverageDistance=[]
    Times=[]
    for time in 10**np.linspace(-1,10,1000):
        matLambda=np.diag(np.exp(-2*Eigvals*time))
        matLambdap=np.diag(np.exp(-2*Eigvalsp*time))
        NormMatrix=np.matmul(np.matmul(Q,matLambda),Qinvs)
        NormMatrixp=np.matmul(np.matmul(Qp,matLambdap),Qpinvs)
        Evol1=np.matmul(np.matmul(Q,np.diag(np.exp(-Eigvals*time))),Qinvs)
        Evol2=np.matmul(np.matmul(Qp,np.diag(np.exp(-Eigvalsp*time))),Qpinvs)
        CrossMatrix=np.matmul(Evol1,Evol2)
        val1=np.diagonal(CrossMatrix)
        val2=np.abs(np.sqrt(np.diagonal(NormMatrix)*np.diagonal(NormMatrixp)))
        Distances=1-val1/val2
        AverageDistance.append(np.mean(np.abs(Distances)))
        Times.append(time)
    return Times,AverageDistance

def ModLaplacian(filename):
    G=nx.read_gml(filename)
    matA=np.array(nx.adjacency_matrix(G).todense())
    Nv=len(matA)
    matLnorm=np.zeros([Nv,Nv])
    for i in range(Nv):
```

```

deg=sum(matA[i])
for j in range(Nv):
    if i==j:
        matLnorm[i][j]=1
    else:
        matLnorm[i][j]=-matA[i][j]/deg
return matLnorm

```

```

def ModLaplacian_Biased(filename, beta):
    G=nx.read_gml(filename)
    matA = np.array(nx.adjacency_matrix(G).todense())
    Nv=len(matA)
    Degrees=[]
    for i in range(Nv):
        Degrees.append(1.0*sum(matA[i]))
    matOmega=np.zeros([Nv,Nv])
    matLnorm=np.zeros([Nv,Nv])
    for i in range(Nv):
        for j in range(Nv):
            matOmega[i][j]=matA[i][j]*(Degrees[i]*Degrees[j])**beta
    matW=np.zeros([Nv,Nv])
    for i in range(Nv):
        deg=sum(matOmega[i])
        for j in range(Nv):
            if i==j:
                matLnorm[i][j]=1
            else:
                matLnorm[i][j]=-matOmega[i][j]/deg
    return matLnorm

```

Bibliografía

- [1] Leonhard Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140, 1736.
- [2] Albert-László Barabási and Márton Pósfai. *Network science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [3] Mark E. J. Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [4] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs, I. *Publ. Math. (Debrecen)*, 6:290–297, 1959.
- [5] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature (London)*, 393:440–442, 1998.
- [6] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [7] Barry D. Hughes. *Random Walks and Random Environments: Vol. 1: Random Walks*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [8] A. P. Riascos and José L. Mateos. Random walks on weighted networks: A survey of local and non-local dynamics. *J. Complex Netw.*, 9:cnab032, 2021.
- [9] Jae Dong Noh and Heiko Rieger. Random walks on complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 92:118701, Mar 2004.
- [10] Agata Fronczak and Piotr Fronczak. Biased random walks in complex networks: The role of local navigation rules. *Phys. Rev. E*, 80:016107, Jul 2009.
- [11] T M Michelitsch, A P Riascos, B A Collet, A F Nowakowski, and F C G A Nicolleau. *Fractional Dynamics on Networks and Lattices*. ISTE/Wiley, London, 2019.

-
- [12] Alain Barrat, Marc Barthélemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [13] Piet Van Mieghem. *Graph Spectra for Complex Networks*. Cambridge University Press, New York, 2011.
- [14] D.B. West. *Introduction to Graph Theory*. Featured Titles for Graph Theory. Prentice Hall, 2001.
- [15] Wen-Xu Wang, Bing-Hong Wang, Chuan-Yang Yin, Yan-Bo Xie, and Tao Zhou. Traffic dynamics based on local routing protocol on a scale-free network. *Phys. Rev. E*, 73:026111, Feb 2006.
- [16] Sungchul Kwon, Woosik Choi, and Yup Kim. Bimolecular chemical reactions on weighted complex networks. *Phys. Rev. E*, 82:021108, Aug 2010.
- [17] Vimal Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar. Extreme events and event size fluctuations in biased random walks on networks. *Phys. Rev. E*, 85:056120, May 2012.
- [18] Xiang Ling, Mao-Bin Hu, Jian-Xun Ding, Qing Shi, and Rui Jiang. Effects of target routing model on the occurrence of extreme events in complex networks. *Eur. Phys. J. B*, 86(4), 2013.
- [19] Tongfeng Weng, Jie Zhang, Michael Small, and Pan Hui. Multiple random walks on complex networks: A harmonic law predicts search time. *Phys. Rev. E*, 95:052103, May 2017.
- [20] Alejandro P. Riascos and David P. Sanders. Mean encounter times for multiple random walkers on networks. *Phys. Rev. E*, 103:042312, Apr 2021.
- [21] R. Lambiotte, R. Sinatra, J.-C. Delvenne, T. S. Evans, M. Barahona, and V. Latora. Flow graphs: Interweaving dynamics and structure. *Phys. Rev. E*, 84:017102, Jul 2011.
- [22] Federico Battiston, Vincenzo Nicosia, and Vito Latora. Efficient exploration of multiplex networks. *New J. Phys.*, 18(4):043035, 2016.
- [23] Yan Wang, Xinxin Cao, Tongfeng Weng, Huijie Yang, and Changgui Gu. A convex principle of search time for a multi-biased random walk on complex networks. *Chaos Solitons Fractals*, 147:110990, 2021.

- [24] Barbara Benigni, Riccardo Gallotti, and Manlio De Domenico. Potential-driven random walks on interconnected systems. *Phys. Rev. E*, 104:024120, Aug 2021.
- [25] A. P. Riascos, J. Wang-Michelitsch, and T. M. Michelitsch. Aging in transport processes on networks with stochastic cumulative damage. *Phys. Rev. E*, 100:022312, Aug 2019.
- [26] L K Eraso-Hernandez, A P Riascos, T M Michelitsch, and J Wang-Michelitsch. Random walks on networks with preferential cumulative damage: generation of bias and aging. *J. Stat. Mech.: Theory Exp*, 2021(6):063401, jun 2021.
- [27] Christopher Sebastian Hidalgo Calva and Alejandro P. Riascos. Optimal exploration of random walks with local bias on networks. *Phys. Rev. E*, 105:044318, Apr 2022.