



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CAMPO CONTROL

MODELADO Y CONTROL DE CONVERTIDORES CUASI-RESONANTES:  
DESDE UNA PERSPECTIVA HAMILTONIANA.

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
AGUSTÍN SÁNCHEZ CONTRERAS

TUTOR PRINCIPAL  
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, ABRIL, 2023



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Alvarez Icaza Longoria Luis A.

Secretario: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

1 er. Vocal: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

2 do. Vocal: Dr. Cárdenas Galindo Víctor Manuel

3 er. Vocal: Dr. Ponce Silva Mario

La tesis se realizó en el laboratorio de control del Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

---

**FIRMA**

# Agradecimientos

- A mis padres Ofelia y Heriberto, mis hermanos Chris, Oscar, Noe y Eva, mis sobrinos Dalis y Evaristo sus mamás y demás familia, pilar de mi formación humana y científica, su apoyo incondicional y cariño impulsan mi crecimiento día a día.
- Al equipo de convertidores de potencia de Laboratorio de Control de la FI, tutor de tesis Dr. Gerardo Espinosa Pérez, al Dr. Oscar Miguel Rodríguez y Dr. Isaac Ortega, quienes fueron mis mentores y cuya aportación forma parte fundamental de esta tesis, así mismo a los demás miembros del Lab. Fer y Chris. La colaboración e intercambio de ideas genera la mejor formula para la practica científica.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser mi casa de formación a través de estos años. Al programa de Becarios CONACYT por los recursos facilitados para sostener mis estudios de Maestría.

Este trabajo no se pudo haber realizado sin la presencia de muchas personas especiales en mi vida, en particular Michi persona carismática y noble a quien admiro y aprecio, gracias por tu cariño y apoyo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
§1.1 Motivación . . . . .	1
§1.2 Antecedentes . . . . .	4
§1.3 Formulación del problema y objetivos . . . . .	7
§1.4 Hipótesis . . . . .	7
§1.5 Contribuciones . . . . .	8
§1.6 Organización de la tesis . . . . .	9
<b>2 Preliminares</b>	<b>10</b>
§2.1 Convertidores Cuasi-resonantes (QRC) . . . . .	10
§2.2 Sistemas Hamiltonianos . . . . .	17
§2.3 Control basado en Pasividad . . . . .	18
§2.3.1 Interconexión de Sistemas Pasivos . . . . .	19
<b>3 Modelado</b>	<b>21</b>
§3.1 Análisis del modelado GSSA . . . . .	21
§3.2 Topología Hamiltoniana conmutada . . . . .	26
§3.3 Serie de Fourier compleja de la señal de entrada . . . . .	33
§3.4 Aproximación Hamiltoniana de la entrada . . . . .	36
§3.4.1 Oscilador armónico Hamiltoniano complejo . . . . .	37
§3.4.2 Dinámica del error de la aproximación Hamiltoniana de la entrada .	41
§3.5 Modelo continuo y validación numérica . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Control</b>	<b>45</b>
§4.1	Aportaciones preliminares al Control . . . . .	45
§4.1.1	Relaciones del ciclo de trabajo $D$ con la frecuencia de conmutación $f_{sw}$ . . . . .	46
§4.1.2	Balance de energía del convertidor Buck Cuasi-resonante . . . . .	48
§4.2	PI Clásico mejorado . . . . .	50
§4.3	PI Pasivo . . . . .	59
§4.3.1	Interconexión pasiva del Modelo Hamiltoniano. . . . .	59
§4.3.2	Diseño del controlador interno PI pasivo . . . . .	63
§4.3.3	Dinámica admisible para el convertidor . . . . .	66
§4.3.4	Evaluaciones numéricas . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>

## Índice de figuras

1.1	Convertidor DC-DC buck . . . . .	1
1.2	Convertidor Buck Cuasi-resonante DC-DC. La conmutación se realiza cuando la corriente en el inductor $i_{Lr}$ llega a cero por lo que se reduce considerablemente el estrés en el interruptor $S1$ . . . . .	3
1.3	Señal de entrada al convertidor Buck PWM DC-DC . . . . .	5
2.1	Formas de onda de la corriente y voltaje del Buck QR. . . . .	11
2.2	Formas de onda de la corriente y voltaje del Buck QR. . . . .	11
2.3	Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante. . . . .	12
2.4	Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante. . . . .	13
2.5	Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante. . . . .	15
2.6	Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante. . . . .	17
2.7	Interconexión negativa de dos sistemas pasivos. . . . .	19

3.1	Filtro pasa bajos con fuente de voltaje a la entrada como circuito equivalente.	22
3.2	.....	26
3.3	Estados del interruptor: <i>a)</i> abierto, <i>b)</i> cerrado. ....	27
3.4	.....	29
3.5	Diodo como subsistema interconectado .....	30
3.6	Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante. ....	33
3.7	Simulación en Matlab de una señal cuadrada de amplitud unitaria, periodo $T = 0.4e - 4Seg$ y ciclo de trabajo $D = 0.65$ , aproximado a través de la expresión (3.42), hasta el quinto armónico. ....	36
3.9	Comparación de las variables del tanque resonante así como de la señal cuadra con las señales del modelo continuo propuesto. ....	44
4.1	Relación entre ciclo de trabajo y periodo de conmutación .....	47
4.2	Esquema de control para el convertidor Buck QR, PI clásico. ....	50
4.3	Esquema de control para el convertidor Buck QR, PI clásico adicionando el bloque $D(f_{sw})$ . ....	51
4.4	Señales obtenidas al reducir el valor de la carga nominal para el esquema del <i>PI</i> clásico y <i>PI+</i> clásico mejorado: (a) $i_0$ , (b) $v_{out}$ , (c) $D$ , y $f_{sw}$ . ....	52
4.5	Señales obtenidas del <i>PI</i> clásico y del <i>PI+</i> mejorado incrementando la carga nominal: (a) $i_0$ , (b) $v_{out}$ , (c) $D$ , y $f_{sw}$ . ....	53
4.6	Signals of $i_r$ , $v_r$ , $\alpha_1$ in steady-state from the <i>PI</i> controller when: a) $R = 146 \Omega$ , b) $R = 95 \Omega$ , and c) $R = 10 \Omega$ . ....	54
4.7	Signals of $i_r$ , $v_r$ , $\alpha_1$ in steady-state from the <i>PI+</i> controller when: a) $R = 451 \Omega$ , b) $R = 146 \Omega$ , c) $R = 95 \Omega$ , and (d) $R = 10 \Omega$ . ....	55
4.8	S .....	56
4.9	Implementación del controlador al sistema cuasi-resonante .....	56
4.10	Estados del convertidor .....	58
4.11	Conmutación a corriente cero después de la variación de carga. ....	59
4.12	Interconexión de los dos sistemas Hamiltonianos. ....	62
4.13	Regulación de salida para PI pasivo PI clásico .....	68

4.14	Conmutación suave para PI pasivo PI clásico . . . . .	68
4.15	PI pasivo realizando una variación en la carga nominal del convertidor del 10 %, 20 %, 30 %, 40 % y 50 % al tiempo $t = 1mSeg$ . . . . .	69
4.16	Variación de la corriente . . . . .	70

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los convertidores electrónicos de potencia son circuitos de estado sólido basados en el uso extensivo de componentes magnéticos (inductores y transformadores), condensadores y dispositivos semiconductores (interruptores), cuya finalidad es el procesamiento de energía. Por ejemplo y tal como se ilustra en la Figura 1.1, un convertidor reductor de voltaje típico de Corriente Directa (CD) a CD tipo Buck consta de una fuente de alimentación, un circuito de conmutación, un filtro y una resistencia de carga. De forma general la energía

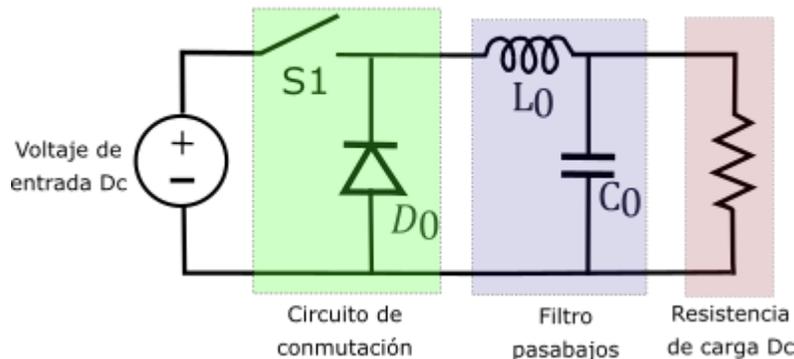


Figura 1.1: Convertidor DC-DC buck

suministrada por una fuente a la entrada de los convertidores se acondiciona y transforma en Corriente Alterna (CA) o CD a la salida dependiendo del tipo de convertidor requerido

CA-CD, CD-CA o CD-CD.

Entre los objetivos que se buscan en estos circuitos de procesamiento de energía están: lograr la conversión de potencia deseada, la regulación del voltaje de salida, el aislamiento y supresión de ruido sin sacrificar la eficiencia. Para lograr una alta eficiencia, es necesario operar en modo de conmutación, es decir, los dispositivos semiconductores están completamente encendidos (estado de saturación) o completamente apagados (estado de corte). Así en el diseño de convertidores, existe una demanda cada vez mayor por aumentar la frecuencia de conmutación para reducir el peso y el tamaño de los componentes magnéticos, de condensadores y mejorar el rendimiento dinámico del circuito. La demanda de alta densidad de potencia y alto rendimiento es especialmente crítico para los convertidores que se utilizan en equipos informáticos y de telecomunicaciones, así como en aplicaciones militares y aeroespaciales. Sin embargo, la creciente demanda de operación en alta frecuencia de conmutación, implica cambiar la carga inductiva a altas frecuencias lo cual impone altas tensiones de conmutación y pérdidas de conmutación en los dispositivos semiconductores, ambos comportamientos representan dos de los problemas principales a considerar en el diseño de convertidores.

Para mejorar el comportamiento de los dispositivos semiconductores en modo de conmutación, surge la propuesta de una familia de convertidores llamados Cuasi-Resonantes (QRC, por sus siglas en inglés). La principal característica de los QRC es que para su operación se basan en la implementación de la técnica de conmutación a corriente cero [1] (ZCS, por sus siglas en inglés). Esto es, como se presenta en la Figura 1.2, al incorporar un circuito resonante  $L_r - C_r$  (tanque resonante), la forma de onda de corriente del dispositivo de conmutación se ve obligada a oscilar de manera casi sinusoidal, lo que permite crear condiciones de corriente cero durante los instantes de encendido y apagado. El atractivo de esta operación es que los interruptores semiconductores se pueden conmutar naturalmente usando las formas de onda de corriente sinusoidal generada por el tanque resonante  $L_r - C_r$ . En la literatura esta técnica es conocida como conmutación suave ya que reduce considerablemente el estrés en los dispositivos interruptores semiconductores y por tanto reduce considerablemente las pérdidas [2].

La propiedad de conmutación de corriente cero, al mejorar en gran medida el compor-

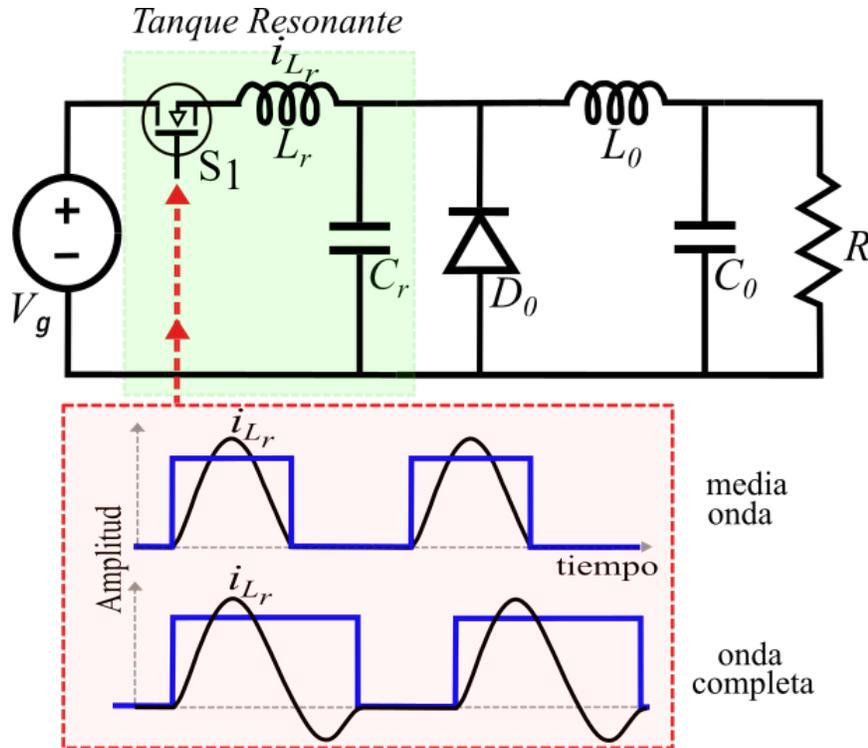


Figura 1.2: Convertidor Buck Cuasi-resonante DC-DC. La conmutación se realiza cuando la corriente en el inductor  $i_{L_r}$  llega a cero por lo que se reduce considerablemente el estrés en el interruptor  $S_1$ .

tamiento de apagado de los interruptores, aumenta la eficiencia y permite incrementar la frecuencia de conmutación, lo que establece uno de los principales motivos de interés por los convertidores Resonantes y QRC. El cambio en la frecuencia se incrementa al rango de los megahercios (MHz)[3], en comparación con los rangos de las topologías comunes por Modulación por Ancho de Pulso (PWM, por sus siglas en inglés) que operan en el rango de 100 a 200 kHz y cuyo rendimiento está muy limitado si la frecuencia de conmutación es muy alta [4] [5], por lo que la conmutación a corriente cero mejora la densidad de potencia y el rendimiento [6]. Otra ventaja, es que la conmutación suave permite que los convertidores resonantes se utilicen en sistemas de alta potencia, sin recurrir a engorrosos circuitos de conmutación externos.

Dadas las características mencionadas de los QRC, estos dispositivos establecen un tema de investigación actual, tanto desde la perspectiva de su modelado como desde el punto de vista de control. Así, esta clase de dispositivos establece el tema principal del

presente trabajo de tesis.

## 1.2. Antecedentes

Los convertidores de potencia son sistemas periódicos variantes en el tiempo, debido a su naturaleza de operación en conmutación variando su estructura y por tanto son no continuos. Debido al interés por aplicar técnicas de diseño de controladores para sistemas continuos, el método de Promediación del Espacio de Estados (SSA, por sus siglas en inglés) es el enfoque más utilizado para modelar convertidores DC-DC de conmutación PWM convencionales como sistemas continuos independientes del tiempo [7]. El fin principal del SSA es realizar un promedio ponderado de las matrices correspondientes a las ecuaciones de espacio de estado para cada etapa de operación individual dentro de un ciclo de conmutación, bajo los supuestos siguientes:

1. La frecuencia de conmutación es mucho mayor que la frecuencia natural propia de los convertidores.
2. La entrada a los convertidores en cada modo de operación conmutado debe ser independiente del tiempo o variar en el tiempo lentamente en comparación con la frecuencia de conmutación.

Estas suposiciones implican que para un sistema no continuo el cambio en las variables de estado es pequeño durante el tiempo de duración en un cambio de estructura, es decir, se desprecian los detalles finos de la variación. Entonces se puede formular el promedio temporal de las variables de estado  $x(t)$  como:

$$\langle x \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

donde  $T$  es el período, asumido constante, de un ciclo de conmutación o de las variaciones de estructura, mientras que la notación  $\langle \cdot \rangle$  significa variable promediada.

El enfoque SSA se aplica para modelar al Convertidor Buck PWM convencional, el cual se

compone por una fuente de voltaje DC constante a la entrada  $V_g$ , un circuito de conmutación dado por un interruptor y un diodo ( $S_1$  y  $D_0$ ) ambos elementos semiconductores, un filtro pasa bajas ( $L_0$  y  $C_0$ ) y una resistencia de carga  $R$  a la salida (Figura 1.1).

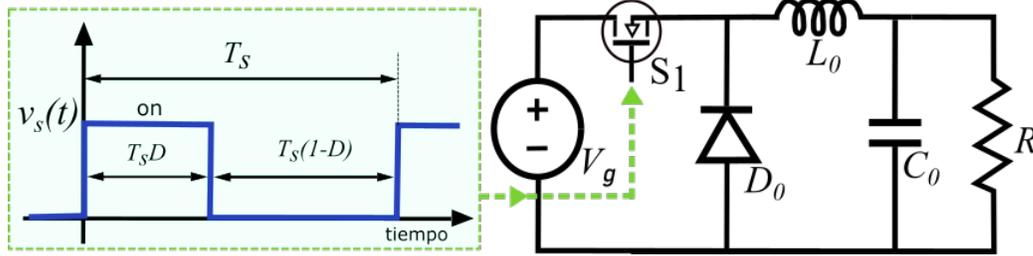


Figura 1.3: Señal de entrada al convertidor Buck PWM DC-DC

Al variar la posición del interruptor a una frecuencia  $f_s$ , se obtiene una onda cuadrada que varía periódicamente,  $v_s(t)$ , y que tiene un período  $T_s = 1/f_s$ . La señal en estado encendido se puede expresar mediante el producto de un ciclo de trabajo  $D$ ,  $0 \leq D \leq 1$ , por el voltaje de la fuente  $V_g$ , donde  $D$  describe la fracción de tiempo en que el interruptor está en la posición de encendido.

Al aplicar la ecuación SSA (1.1), para obtener un voltaje promediado y continuo de salida del Buck, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_s &= \frac{1}{T_{sw}} \int_0^{T_{sw}} v_s(t) dt \\
 &= \frac{1}{T_{sw}} \int_0^{T_{sw}} D V_g dt \\
 &= D V_g \frac{1}{T_{sw}} \int_0^{T_{sw}} dt \\
 &= D V_g
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

De (1.2) se observa que el convertidor Buck PWM produce un voltaje de salida cuya magnitud puede controlarse con  $D$ , por lo tanto, la relación directa entre  $D$  y la conversión de voltaje entrada salida,  $V_{out}$ , se define como:

$$D = V_{out}/V_g \tag{1.3}$$

Este resultado corresponde al área bajo la forma de la onda de la Figura 1.3 o a la componente de DC de la transformada inversa de Fourier de la señal cuadrada.

El problema que se presenta para aplicar la promediación descrita al convertidor Buck QR, es que la frecuencia natural de los tanques cuasi-resonantes es del mismo orden que la frecuencia de conmutación, además que la operación y regulación del voltaje de salida exige un periodo de conmutación variable [8]. Así, se concluye que el enfoque SSA no se puede aplicar directamente al modelado y análisis de tales convertidores como usualmente sucede con las técnicas de PWM.

Para casos donde el periodo de conmutación  $T$  no es pequeño con respecto a la escala de tiempo de los cambios de las variables de estado que se desean tener en cuenta, el enfoque se extiende a las técnicas de aproximación conocidas como Promediación Generalizada del Espacio de Estados (GSSA, por sus siglas en inglés) la cual consiste en separar la dinámica rápida adjudicada a las variables del tanque resonante de la dinámica lenta (respecto al periodo de conmutación) del filtro pasabajas [9]. Bajo estas condiciones, se resuelven las ecuaciones de estado del tanque resonante en estado estacionario considerando las condiciones de frontera respectivas en cada etapa de conmutación de tal forma que estas soluciones son consideradas como funciones de entrada para la dinámica lenta del filtro pasabajas donde se realiza la promediación. Este método reduce el orden del modelo y deja como grado de libertad a la frecuencia de conmutación  $f_s$ , sin embargo el modelo GSSA muestra no linealidades respecto a la frecuencia de conmutación que dificultan el diseño de algoritmos de control y deja de fuera el ciclo de trabajo  $D$ , el cual representa un parámetro de relevante importancia en la implementación, pues indica el tiempo al cual el interruptor debe apagarse para garantizar la conmutación suave. Esta característica resulta en el hecho de que los algoritmos de control basados en el modelo GSSA se ven limitados a considerar  $D$  constante [10], variarlo dentro de un rango limitado de operación [11] o introducir un sensor de corriente externo en el inductor del tanque resonante [12], para así poder implementar un comando de apagado externo al algoritmo de control y no perder la conmutación suave.

### 1.3. Formulación del problema y objetivos

La técnica de conmutación a corriente cero se ha empleado en los convertidores llamados tipo Buck QRC, por tanto el análisis y estudio de esta topología y las demás variantes que se pueden obtener a partir de ella son de gran interés en el área de electrónica de potencia. Al mismo tiempo, para el área de Control el interés radica en poder implementar un lazo de control que permita la regulación de voltaje y que sea robusto a variaciones en la carga, por lo que buscar alternativas que superen las limitaciones del modelado GSSA desde la perspectiva de control es un tema de interés actual. Por ejemplo, considerar la variación del ciclo de trabajo  $D$  en los algoritmos de control para incrementar el rango de frecuencia de conmutación, así como el planteamiento del control basado en modelo que permita interpretar el lazo de control a través de las propiedades física del sistema y el análisis formal de la estabilidad son aspectos que pueden ser abordados a través del modelado y control basado en los conceptos de los llamados sistemas Hamiltonianos, del cual actualmente no se encuentra registros bibliográficos aplicados a los QRC.

El objetivo de esta tesis será tomar como ejemplo de trabajo el convertidor Buck QRC, para modelar el sistema no lineal conmutado (con entrada discreta al interruptor) desde la perspectiva de la interconexión de sistemas Hamiltonianos. A partir de esto proponer un modelo continuo para el Buck QRC y proponer un algoritmo que asegure la conmutación suave y que permita relacionar el ciclo de trabajo y la frecuencia de conmutación con el voltaje de entrada y salida, a través de la operación óptima del sistema (ZCS), lo que permitirá proponer y evaluar numéricamente un lazo de control para el convertidor en estudio que sea robusto a cambios de carga y capaz de realizar regulación de voltaje.

### 1.4. Hipótesis

El trabajo de tesis que se presenta considera las siguientes hipótesis de trabajo:

- Desde la perspectiva de los sistemas Hamiltonianos controlados por puertos se puede descomponer a los QRC como una interconexión de subsistemas que preservan potencia (tanque resonante, filtro pasabajos y diodo(s) de conmutación) obteniendo

un modelo conmutado que considera la dinámica no lineal completa del sistema.

- La señal de conmutación discontinua puede aproximarse de forma continua a través de su expansión en serie de Fourier.
- Cada armónico de la expansión de Serie de Fourier se puede interpretar como una señal de salida de un oscilador armónico complejo con estructura Hamiltoniana, de tal forma que la parte discontinua queda modelada de forma continua aproximada a través de un banco de osciladores Hamiltonianos complejos.
- Bajo las condiciones anteriores, se puede obtener un modelo continuo del sistema completo como una interconexión de subsistemas hamiltonianos, sin reducir el orden del sistema como se ha presentado hasta ahora en la literatura bajo el enfoque GSSA.

Bajo esta perspectiva se puede proponer e interpretar un lazo de control que garantice regulación de voltaje y robustez a cambios de carga, considerando las ventajas de los sistemas Hamiltonianos como lo es el control basado en modelo y el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

## 1.5. Contribuciones

Las contribuciones obtenidas de la realización del trabajo de tesis que se presenta son:

- Describir los QRC como subsistemas Hamiltonianos interconectados.
- Proponer un modelo adecuado para trabajar en un espacio de estados continuos, donde se pueda realizar e interpretar un lazo de control. Proponer un lazo de control capaz de realizar regulación de voltaje y que sea robusto a cambios de carga.
- Interpretar el lazo de control a través de los conceptos de sistemas hamiltonianos (Control basado en modelo) y buscar una prueba de estabilidad para el sistema.

## 1.6. Organización de la tesis

El trabajo de tesis que se presenta está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 2 se presentan los preliminares. En el Capítulo 3 se analiza los resultados y limitaciones del modelado GSSA el más usual en la literatura y se explora el modelado desde la perspectiva de los sistemas Hamiltonianos, donde la aproximación de la señal de entrada a través de su serie de Fourier compleja jugará un rol relevante en la propuesta de una nueva forma de modelar a los QRC. El control se presenta en el Capítulo 4, donde se experimenta primero con nuevos bloques que permiten mejorar la robustez a través del control PI comúnmente utilizado en la literatura y a demás se aprovechan las propiedades de los sistemas Hamiltoniano para aplicar control basado en modelos y buscar pruebas de estabilidad formal para el sistema. Finalmente, se presentan comentarios finales y trabajo futuro en el Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Convertidores Cuasi-resonantes (QRC)

Como se ha mencionado, la propiedad de conmutación ZCS mejora significativamente la eficiencia y reduce las pérdidas por conmutación incrementando el rango de operación de frecuencia de conmutación hasta el orden de los megahercios. Sin embargo, no es la única técnica que aprovecha la llamada propiedad de conmutación suave. Otra técnica empleada en los QRC es la técnica de conmutación a voltaje cero (ZVS, por sus siglas en inglés). Bajo este enfoque, usando de nuevo un tanque resonante  $L_r - C_r$ , la forma de onda de voltaje del dispositivo de conmutación puede ser de forma cuasi sinusoidal. En consecuencia, se crea una condición de voltaje cero para que el interruptor se encienda y apague sin incurrir en ninguna pérdida de conmutación. Ambas técnicas, tanto la de corriente como la de voltaje cero, se pueden aplicar a media onda o a onda completa respecto a la señal que se tome como referencia en el tanque resonante.

La técnica de conmutación a corriente cero se ha empleado en los QRC tipo Buck y la de voltaje cero en los QRC tipo Boost. En esta tesis se toma como ejemplo de trabajo el convertidor QRC tipo Buck con la técnica de conmutación a corriente cero a media onda. No obstante, las técnicas de modelado y control desarrolladas se podrán generalizar a las diferentes topologías de los QRC. Por lo que esta sección se centrará en el análisis y estudio de las características del convertidor QRC tipo Buck (QRCB).

El QRCB, incorpora un arreglo  $L_r - C_r$  (tanque resonante), al convertidor Buck PWM

convencional como se muestra en la Figura 2.1, de tal forma que ahora se tiene un sistema de 4 orden, con dos almacenadores inductores y dos almacenadores capacitores. Aunque la topología del filtro pasabajos y la carga no cambia respecto al Buck PWM convencional, la dinámica y complejidad del QRCB ahora se ve afectada por las variables del tanque resonante.

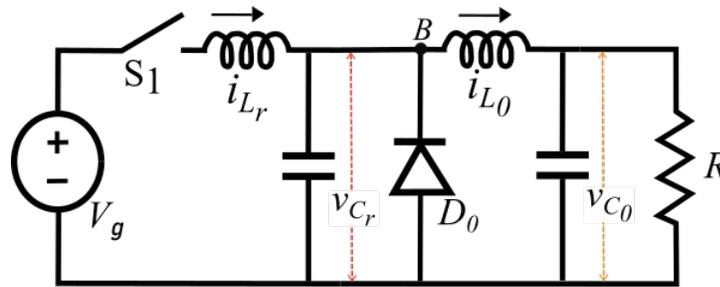


Figura 2.1: Formas de onda de la corriente y voltaje del Buck QR.

Para el convertidor QRCB, un ciclo de conmutación se puede dividir en cuatro etapas, caracterizadas por la operación del diodo  $D_0$  y el interruptor  $S_1$  en conjunción con la dinámica del tanque resonante. Las variables de estado analizadas son la corriente en el inductor  $i_{L_r}$ , así como el voltaje del capacitor  $v_{C_r}$  y su evolución como ya se ha mencionado tiene formas de onda casi sinusoidales, ver Figura 2.2.

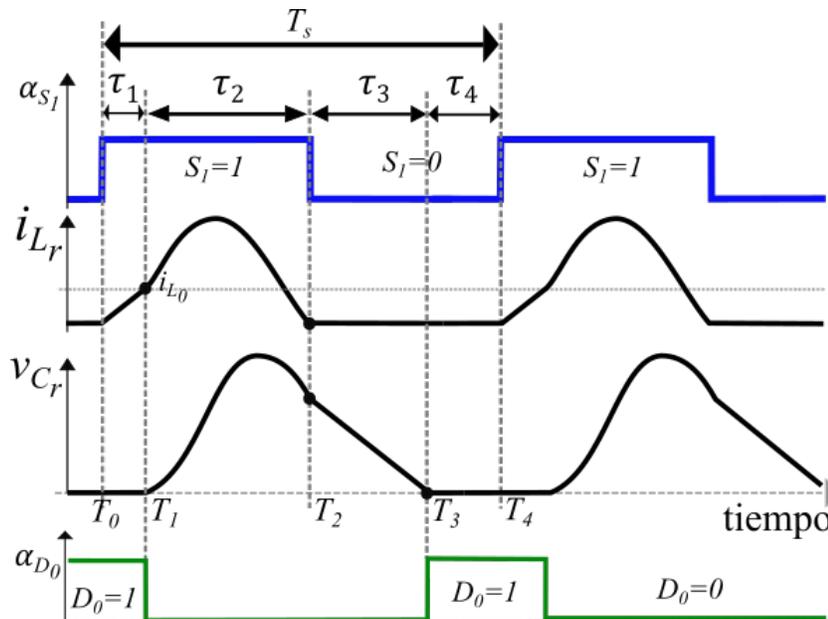


Figura 2.2: Formas de onda de la corriente y voltaje del Buck QR.

En este punto es necesario mencionar que el análisis se realiza en estado estacionario respecto a la salida del tanque, es decir, considerando constante la corriente de salida  $i_{L_0}$ . Para alcanzar el estado estacionario se considera que el convertidor ya ha superado el transitorio, por lo que se obtiene un voltaje de referencia constante en la carga, lo cual implica, que el voltaje en el capacitor  $C_0$  también es constante y por tanto la corriente que circula a través de él es cero, por lo que la corriente  $i_{L_0}$  será constante también. Bajo este enfoque se obtienen las expresiones analíticas de las variables de estado del tanque, lo cual no sólo permite comprender a mayor profundidad el funcionamiento del convertidor sino que al contar con estas soluciones, se puede plantear un modelo de orden reducido promediado a través de la técnica GSSA.

Considerando constante la corriente de salida  $i_{L_0}$ , antes de que  $S_1$  se ponga en estado de encendido, el diodo  $D_0$  transporta la corriente de salida  $i_{L_0}$  y el voltaje del condensador  $v_{C_r}$  se fija en cero. Al instante  $T_0$ ,  $S_1$  se enciende, iniciando un ciclo de conmutación:

### Carga lineal del Inductor $[T_0, T_1]$

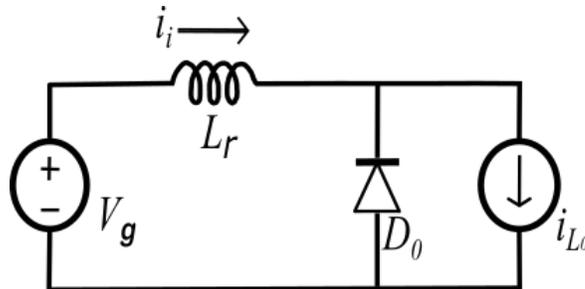


Figura 2.3: Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante.

Al tiempo  $T_0$ , el interruptor  $S_1$  se ha cerrado (estado de conducción), mientras el diodo  $D_0$  permanece en polarización directa dejando en cortocircuito al capacitor  $C_r$ , así la corriente de entrada  $i_i = i_{L_r}$  crece linealmente gobernada por la ecuación de estado:

$$L_r \frac{di_{L_r}}{dt} = V_g \quad (2.1)$$

La duración de esta etapa es  $\tau_1 = T_1 - T_0$ , por lo que es posible resolver al integrar la

ecuación (2.1) sobre el intervalo  $\tau_1$  con condiciones de frontera  $i_{L_r}(T_0) = 0$  y  $i_{L_r}(T_1) = i_{L_0}$ :

$$\begin{aligned}
 L_r \int_{T_0}^{T_1} di_{L_r} &= \int_{T_0}^{T_1} V_g dt \\
 L_r [i_{L_r}(T_1) - i_{L_r}(T_0)] &= V_g [T_1 - T_0] \\
 L_r i_{L_0} &= V_g \tau_1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

por lo tanto

$$\tau_1 = \frac{L_r i_{L_0}}{V_g} \tag{2.3}$$

### Etapa Resonante $[T_1, T_2]$

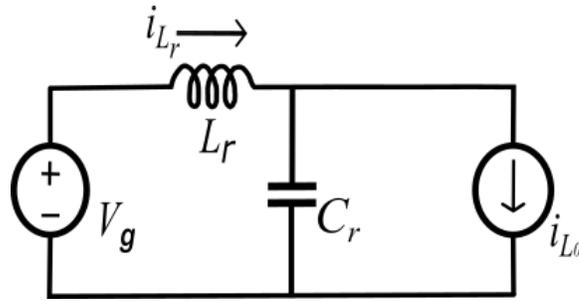


Figura 2.4: Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante.

Al tiempo  $T_1$ , la corriente de entrada al tanque resonante  $i_{L_r}$  ha alcanzado el valor  $i_{L_0}$ , igualando la corriente de referencia que se mantiene a la salida, por lo que el diodo  $D_1$  se polariza en inversa o deja de conducir (pasando de estado 1 a 0), ya que de lo contrario al seguir incrementando la corriente  $i_{L_r}$  implicaría que la corriente fluya en sentido contrario al diodo debido al balance de corrientes en el nodo  $B$  (ver Figura 2.1). Una vez abierto el diodo la diferencia entre la corriente de entrada y la corriente de salida del tanque fluye hacia el capacitor  $C_r$ , así el Voltaje  $v_{C_r}$  y la corriente  $i_{L_r}$  comienzan a comportarse de forma senoidal, gobernados por las ecuaciones de estado:

$$C_r \frac{dv_{C_r}}{dt} = i_{L_r}(t) - i_{L_0} \tag{2.4a}$$

$$L_r \frac{di_{L_r}}{dt} = V_g - v_{C_r}(t) \tag{2.4b}$$

con condiciones iniciales  $v_{C_r}(T_1) = 0$ ; y  $i_{L_r}(T_1) = i_{L_0}$ .

Para obtener las soluciones a estas ecuaciones se despeja  $i_{L_r}$  de (2.4a) y se sustituye en (2.4b), obteniendo la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\begin{aligned} L_r \frac{d}{dt} \left[ C_r \frac{dv_{C_r}}{dt} + i_{L_0} \right] &= V_g - v_{C_r}(t) \\ L_r C_r \frac{d^2 v_{C_r}(t)}{dt^2} + v_{C_r}(t) &= V_g \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $i_{L_0}$  es considerado constante en el estado estacionario.

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$L_r C_r [s^2 \mathcal{L}[v_{C_r}](s) - s v_{C_r}(0) - v'_{C_r}(0)] + \mathcal{L}[v_{C_r}](s) = \frac{V_g}{s} \quad (2.6)$$

entonces

$$\mathcal{L}[v_{C_r}](s) [s^2 L_r C_r + 1] = \frac{V_g}{s} \quad (2.7)$$

De esta expresión, despejando  $\mathcal{L}[v_{C_r}](s)$  y nombrando  $\omega^2 = 1/L_r C_r$ , con  $\omega = 2\pi f_n$  la frecuencia angular propia del tanque resonante:

$$\mathcal{L}[v_{C_r}](s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \left( \frac{V_g}{s} \right) \quad (2.8)$$

Aplicando fracciones parciales a la expresión anterior:

$$\mathcal{L}[v_{C_r}](s) = \frac{A}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{s} \quad (2.9)$$

se obtiene que  $As + Bs^2 = 0$  y  $B\omega^2 = V_g\omega^2$ , por lo que al resolver ambas ecuaciones se obtiene que la expresión (2.8) se reescribe como:

$$\mathcal{L}[v_{C_r}](s) = -\frac{sV_g}{s^2 + \omega^2} + \frac{V_g}{s} = V_g \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (2.10)$$

de donde se obtiene que la forma del voltaje en el intervalo  $[0, \tau_2]$  es:

$$v_{C_r}(t) = V_g(1 - \cos \omega t) \quad (2.11)$$

Para obtener la forma de la corriente  $i_{L_r}$ , se sustituye (2.11) en (2.4a):

$$C_r \frac{d}{dt} [V_g(1 - \cos \omega t)] = i_{L_r}(t) - i_{L_0} \quad (2.12)$$

$$V_g C_r \omega \sin \omega t = i_{L_r}(t) - i_{L_0}$$

donde  $C_r \omega = \sqrt{C_r/L_r} = 1/Z_n$  se conoce como la impedancia característica del tanque resonante, entonces

$$i_{L_r}(t) = i_{L_0} + \left( \frac{V_g}{Z_n} \right) \sin \omega t \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.13), describen el comportamiento de las variables de estado del tanque en la etapa de resonancia, donde se busca que la corriente llegue al valor cero al final de esta etapa, lo cual puede suceder a media onda u onda completa de la corriente  $i_{L_r}$ . En el instante en el que se cumpla esto se busca conmutar el interruptor  $S_1$ , cumpliéndose así la condición de conmutación suave. Para hallar el tiempo de duración de esta etapa se iguala a cero la expresión (2.13) y se despeja el tiempo:

$$\tau_2 = \frac{\theta_i}{\omega} \quad (2.14)$$

donde  $\theta_i = \sin^{-1}(-Z_n i_{L_0}/V_g)$  es el ángulo al cual la corriente del inductor del tanque resonante toma el valor  $i_{L_r} = 0$  (para media onda,  $\pi < \theta_i < 3\pi/2$  y para onda completa  $3\pi/2 < \theta_i < 2\pi$ ).

### Descarga del capacitor $[T_2, T_3]$

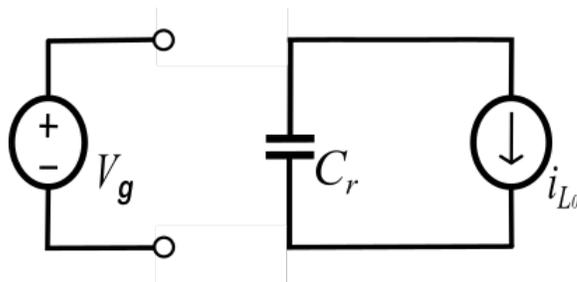


Figura 2.5: Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante.

La condición final de la etapa anterior asegura que al tiempo  $T_2$  la corriente  $i_{L_r=0}$ , por

tanto el interruptor  $S_1$  se abre o deja de conducir en una condición donde no hay estrés en el dispositivo semiconductor. Una vez abierto  $S_1$ , el capacitor  $C_1$  comienza a descargarse y  $V_{C_r}$  decae linealmente al valor cero al final de esta etapa, es decir, al tiempo  $T_3$ . La ecuación de estado que gobierna durante este intervalo es:

$$C_r \frac{dv_{C_r}}{dt} = -i_{L_0} \quad (2.15)$$

Las condiciones de frontera son  $v_{C_r}(T_2) = V_g(1 - \cos \alpha)$  y  $v_{C_r}(T_3) = 0$ , por lo que la forma del voltaje  $v_{C_r}(t)$  en esta etapa corresponde a una recta con pendiente negativa  $-i_{L_0}/C_r$  que llega a cero y que inicia en la condición final del intervalo anterior:

$$v_{C_r}(t) = V_g(1 - \cos \alpha_i) - \frac{i_{L_0}}{C_r}(t - T_2) \quad (2.16)$$

Para obtener el tiempo de duración de esta etapa se integra sobre el intervalo  $[T_2, T_3]$  la ecuación (2.15):

$$\begin{aligned} C_r \int_{T_2}^{T_3} dv_{C_r} &= - \int_{T_2}^{T_3} i_{L_0} dt \\ C_r [v_{C_r}(T_3) - v_{C_r}(T_2)] &= -i_{L_0} [T_3 - T_2] \\ -C_r V_g(1 - \cos \alpha) &= -i_{L_0} \tau_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $\tau_3 = T_3 - T_2$  es el tamaño del intervalo:

$$\tau_3 = C_r v_g (1 - \cos \alpha_i) / i_{L_0} \quad (2.18)$$

Finalmente, para obtener una expresión donde se pueda observar la condición final en la que el voltaje  $v_{C_r}$  llega al valor cero, se traslada (2.16) al intervalo  $[0, \tau_3]$ , obteniendo:

$$v_{C_r}(t) = V_g(1 - \cos \alpha_i) - \frac{i_{L_0}}{C_r}(t) \quad (2.19)$$

### **Etapa libre o Free-Wheeling** $[T_3, T_4]$

Después de  $T_3$ , el capacitor se ha descargado por completo y el interruptor  $S_1$  permanece abierto por lo que el tanque resonante ya no puede entregar potencia a su salida, así la

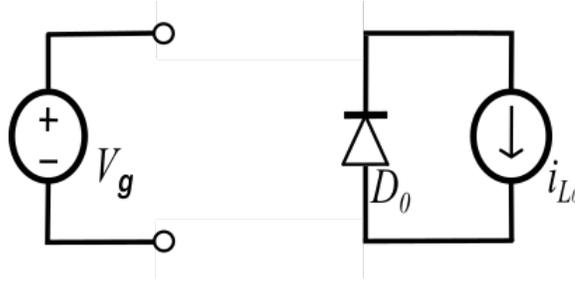


Figura 2.6: Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante.

corriente de del filtro pasa bajas fluye a través del diodo  $D_1$ , polarizándolo directamente. La duración de este intervalo es  $\tau_4 = T_4 - T_3$  y se tiene que

$$\tau_4 = T_s - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 \quad (2.20)$$

donde  $T_s$  es el periodo de conmutación. Este intervalo asegura que las variables regresen de forma completa a las condiciones iniciales de operación para un nuevo ciclo de conmutación.

## 2.2. Sistemas Hamiltonianos

Los Sistemas Hamiltonianos Controlados por puerto (PCHS, por sus siglas en inglés) generalizan el formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica de los sistemas físicos conectados de tal manera que conservan la energía. El objeto matemático central de esta formulación es lo que se conoce como una estructura de Dirac, la cual codifica la información detallada de la red de conexión del sistema. Una característica importante de este formalismo es que la interconexión de los subsistemas hamiltonianos utilizando una estructura de Dirac produce nuevamente un sistema hamiltoniano. Un modelo PCHS codifica de forma detallada la transferencia y almacenamiento de energía en el sistema, y por lo tanto es adecuado para esquemas de control basados en pasividad, los cuales son fácilmente interpretables en términos de la física del sistema. Matemáticamente los PCHS, con disipación se expresan matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)]\nabla H(x) + g(x)u \\ y &= g^T(x)\nabla H(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de variables de estado del sistema,  $J(x) = -J^T(x)$  es la matriz de interconexión del sistema,  $R(x)$  es la matriz de disipación,  $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar que representa la energía total del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  son las entradas de control y  $y \in \mathbb{R}^m$  son las salidas del sistema. Los PCHS son pasivos de forma natural, y existe varios métodos para estabilizarlos en un punto de operación deseado [13]. Por tanto el enfoque PCHS representa un enfoque atractivo para el análisis, modelado y aplicación de técnicas de control de los QRC.

## 2.3. Control basado en Pasividad

Una herramienta para el análisis de sistemas no-lineales y la cual se puede relacionar con la estabilidad en el sentido de Lyapunov, es la pasividad y las propiedades de los sistemas pasivos.

### Definición [Pasividad]

Un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^m$ , es pasivo si existe una función de almacenamiento de energía  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $H(x) > 0$ , que satisface la desigualdad diferencial de disipación

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) \leq u^T(t)y(t) \tag{2.23}$$

a lo largo de todas las trayectorias  $x$  que corresponden a las entradas  $u$ . El sistema es conservativo, es decir sin pérdidas, si (2.23) es una igualdad. Los sistemas pasivos son aquellos sistemas que no pueden almacenar más energía que la que se les suministra y en caso de los sistemas conservativos la energía almacenada equivale a la energía suministrada. De la expresión (2.23) se puede observar que la pasividad se puede relacionar directamente con la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Si la función de energía  $H(x)$  tiene un mínimo en el estado  $x_0$ , entonces de la desigualdad de pasividad (2.23) con  $u = 0$ , garantiza que  $x_0$  es un punto de equilibrio estable de la dinámica del sistema no forzado.

### 2.3.1. Interconexión de Sistemas Pasivos

Uno de los resultados mas relevantes de los sistemas pasivos es que la interconexión de dos Sistemas Pasivos es pasivo como se muestra a continuación.

#### Proposición

Suponga que los sistemas:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : u_1 &\rightarrow y_1 \\ \Sigma_2 : u_2 &\rightarrow y_2\end{aligned}\tag{2.24}$$

son pasivos en los mapeos entrada-salida, respectivamente. Entonces el sistema obtenido a partir de la interconexión de retroalimentación negativa mostrado en la Figura 2.7 es un sistema pasivo desde la entrada  $e = (e_1, e_2)$  hasta la salida  $y = (y_1, y_2)$ .

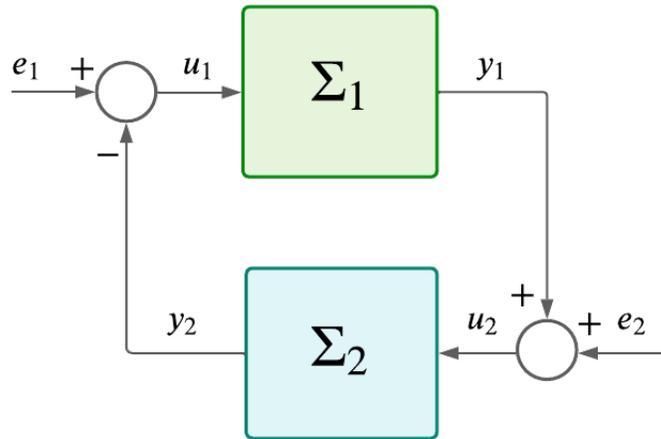


Figura 2.7: Interconexión negativa de dos sistemas pasivos.

#### Demostración:

Si los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son pasivos, entonces, existen funciones  $H_1(x_1)$  y  $H_2(x_2)$  tal que el cambio en la energía almacenada de un tiempo  $T$  es menor o igual al la energía suministrada durante este tiempo. Definiendo  $x := (x_1, x_2)$  y  $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$ , se tiene que  $H(x) > 0$ .

Luego, para la interconexión por retroalimentación negativa se cumple que

$$H(x(T)) - H(x(0)) \leq \int_0^T (u_1^T y_1 + u_2^T y_2) dt\tag{2.25}$$

por lo que sustituyendo  $u_2 = e_2 + y_1$  y  $u_1 = e_1 - y_2$  se obtiene

$$H(x(T)) - H(x(0)) \leq \int_0^T (e_1 y_1 + e_2 y_2) dt = \int_0^T e^T y dt \quad (2.26)$$

probando que la interconexión de retroalimentación negativa de dos sistemas pasivos es pasiva. ■

Como ya se había explicado anteriormente, la interconexión que preserva potencia y una de las cuales permite la obtención de un PCHS es través de la interconexión de retroalimentación negativa subsistemas PCHS. Este tipo de interconexión de sistemas será de gran beneficio más adelante.

# Capítulo 3

## Modelado

En contraste con el convertidor convencional Buck PWM, el QRCB de la Figura 2.1 no puede ser analizado bajo la técnica usual SSA, dado que su operación implica un análisis más preciso de las variables de estado del tanque resonante, en particular de la corriente  $i_{L_r}$ , cuyo comportamiento permite definir la condición de conmutación suave para la técnica ZSC. Por otra parte, como se verá en este capítulo, la frecuencia de conmutación  $f_{sw} = 1/T_{sw}$  del QRCB no es constante, sino que representa un grado de libertad para el control, lo cual no satisface una de las principales características del modelado SSA. Aunque en la literatura especializada la opción de modelado seguida es la aplicación de la técnica GSSA, en este capítulo se analizará las características, limitaciones y desventajas de considerar el modelo GSSA y se optará por considerar un modelado basado en Sistemas Hamiltonianos. Esta alternativa permitirá diversificar las técnicas de modelado para los convertidores Cuasi-resonantes y por otra parte permitirá aplicar las ventajas de trabajar con sistemas Hamiltonianos, tanto para la parte de la interpretación del lazo de control como para realizar análisis de estabilidad.

### 3.1. Análisis del modelado GSSA

La técnica GSSA parte de considerar la dinámica del tanque resonante resuelta en estado estacionario, es decir, considerando la corriente  $i_{L_0}$  constante, para así reducir el orden del modelo de cuarto a segundo orden. Esto se logra analizando sólo la parte del

filtro paso bajas ( $L_0 - C_0$ ) mostrada en la Figura 3.1, cuya dinámica en variables de estado tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_0}}{dt} \\ \frac{di_{L_0}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_0} & \frac{1}{C_0} \\ -\frac{1}{L_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_0} \\ i_{L_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_{Cr}}{L_0} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde la entrada de control es la fuente de voltaje  $v_{Cr(t)}$ , definida para cada etapa de

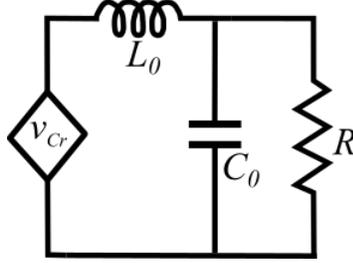


Figura 3.1: Filtro pasa bajos con fuente de voltaje a la entrada como circuito equivalente.

operación del tanque resonante por las soluciones:

$$v_{Cr(t)} = \begin{cases} 0 & , t \in \Delta\tau_1 \\ V_g(1 - \cos\omega t) & , t \in \Delta\tau_2 \\ -i_{L_0}t/C_r + V_g(1 - \cos\theta_i) & , t \in \Delta\tau_3 \\ 0 & , t \in \Delta\tau_4 \end{cases} \quad (3.2)$$

con  $\Delta\tau_i = [0, \tau_i]$  y  $\theta = \sin^{-1}(Z_n i_{L_0}/V_g)$ . Debido a que la topología del filtro  $L_0 - C_0$  no varía en ninguna etapa  $\tau_i$  del tanque resonante, el modelo conmutado del convertidor puede identificarse como:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.3)$$

donde  $k = 4$ ,  $x^T = [v_{C_0}, i_{L_0}]$ ,

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_0} & \frac{1}{C_0} \\ -\frac{1}{L_0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_{Cr}}{L_0} \end{bmatrix}$$

y se considera que a cada etapa se le puede definir una fracción de trabajo u operación respecto al periodo completo de conmutación  $T_{sw}$  de tal forma que  $\tau_i = d_i T_{sw}$ .

Si las funciones de las variables de control de entrada están acotadas de modo tal que  $f_{sw}$  sea mucho más grande que la frecuencia en el filtro de segundo orden  $f_0$ , entonces el modelo conmutado (3.3) se puede promediar utilizando la ecuación GSSA [9]:

$$\dot{x} = \left\{ \sum_{i=1}^k d_i A_i \right\} x + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} B_i(\lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

de donde es posible obtener

$$\dot{x} = \underbrace{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)}_1 Ax + \frac{1}{T} \left[ \int_{T_0}^{T_1} B_1(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} B_2(t) dt + \int_{T_2}^{T_3} B_3(t) dt + \int_{T_3}^{T_4} B_4(t) dt \right] \quad (3.5)$$

Considerando la expresión (3.2) del voltaje de entrada, podemos integrar a tramos sobre los intervalos:

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{T} \left[ \int_0^{\tau_1} B_1(t) dt + \int_0^{\tau_2} B_2(t) dt + \int_0^{\tau_3} B_3(t) dt + \int_0^{\tau_4} B_4(t) dt \right] \quad (3.6)$$

donde se observa del modelo obtenido que  $B_1(t) = B_4(t) = 0_{2 \times 1}$ , por lo que la solución se reduce a resolver la primera y tercera integral.

Resolviendo la primera integral:

$$\int_0^{\tau_2} B_2(t) dt = \int_0^{\tau_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_0} (v_{Cr}) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_g}{L_0} \int_0^{\tau_2} (1 - \cos \omega t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_g \tau_2}{L_0} - \frac{\sin \omega \tau_2}{\omega} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

mientras que para la tercera integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_3} B_3(t) dt &= \int_0^{\tau_3} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_0} (v_{Cr}) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_0} \int_0^{\tau_3} \frac{-iL_0 t}{C_r} dt + \frac{V_g}{L_0} (1 - \cos \theta_i) \int_0^{\tau_3} dt \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{iL_0}{2L_0 C_r} \tau_3^2 + \frac{V_g}{L_0} \tau_3 (1 - \cos \theta_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Así, substituyendo ambos resultados en la ecuación (3.7) se tiene:

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{T_s} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_g}{L_0} \tau_2 - \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau_2 - \frac{i_{L_0}}{2L_0 C_r} \tau_3^2 + \frac{V_g}{L_0} \tau_3 (1 - \cos \theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde, al substituir los valores de  $\tau_2 = \theta_i/\omega$  y  $\tau_3 = C_r V_g (1 - \cos \theta_i)/i_{L_0}$  con  $\sin \theta_i = -Z_n i_{L_0}/V_g$  y  $\omega = 2\pi f_n$ , el término del segundo renglón se puede escribir como:

$$\frac{1}{T_s} \left[ \frac{V_g \theta_i}{L_0 \omega} + \frac{Z_n i_{L_0}}{\omega V_g} - \frac{V_g^2 C_r}{2i_{L_0} L_0} (1 - \cos \theta_i)^2 + \frac{V_g^2 C_r}{i_{L_0} L_0} (1 - \cos \theta_i)^2 \right] \quad (3.10)$$

En esta última expresión es posible desarrollar el binomio cuadrado de tal forma que:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta_i)^2 &= 1 - 2 \cos(\theta_i) + \cos^2(\theta_i) \\ &= 2 - 2 \cos(\theta_i) - \sin^2(\theta_i) \\ &= 2 - 2 \cos(\theta_i) - \left[ \frac{Z_n i_{L_0}}{V_g} \right]^2 \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (3.10) toma la forma:

$$\frac{1}{T_s} \left[ \frac{V_g \theta_i}{L_0 \omega} + \frac{Z_n i_{L_0}}{\omega V_g} + \frac{V_g^2 C_r}{i_{L_0} L_0} (1 - \cos \theta_i) - \frac{V_g^2 C_r}{2i_{L_0} L_0} \left[ \frac{Z_n i_{L_0}}{V_g} \right]^2 \right] \quad (3.11)$$

Más aún, el tercer término de (3.11) se puede escribir como:

$$C_r = C_r \frac{\omega}{\omega} = \frac{C_r}{\omega \sqrt{C_r L_r}} = \frac{\sqrt{C_r C_r}}{\omega \sqrt{C_r L_r}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{C_r}{L_r}} = \frac{1}{\omega Z_n},$$

mientras que el cuarto término satisface:

$$C_r Z_n = C_r \sqrt{\frac{L_r}{C_r}} = \sqrt{C_r L_r} = \frac{1}{\omega},$$

por lo que finalmente se obtiene la expresión equivalente para (3.10) dada por:

$$\frac{f_{sw} V_g}{2\pi f_n L_0} \left[ \theta_i + \frac{Z_n i_{L_0}}{V_g} + \frac{V_g C_r}{Z_n i_{L_0}} (1 - \cos \theta_i) - \frac{Z_n i_{L_0}}{2V_g} \right] \quad (3.12)$$

donde se ha considerado que  $f_{sw} = 1/T_{sw}$  y  $\omega = 2\pi f_n$ .

Con este resultado se obtiene finalmente la ecuación GSSA de (3.3) dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_0}}{dt} \\ \frac{di_{L_0}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_0} & \frac{1}{C_0} \\ -\frac{1}{L_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_0} \\ i_{L_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_g}{L_0} \frac{f_s}{2\pi f_n} H_i(V_g, i_{L_0}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde

$$H_i(V_g, i_{L_0}) = \frac{Z_n i_{L_0}}{2V_g} + \theta_i + \frac{V_g}{Z_n i_{L_0}} (1 - \cos \theta_i) \quad (3.14)$$

Una característica importante de este modelo es que si se considera como voltaje de referencia en la carga  $v_{C_r} = V_0$ , entonces la ganancia en estado estacionario está dada por:

$$M = \frac{V_0}{V_g} = \frac{f_{sw}}{2\pi f_n} H_i(V_g, i_{L_0}) \quad (3.15)$$

Como se puede observar en (3.15) del modelo GSSA se obtiene una relación directa entre la variación de la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$  del interruptor y la relación de conversión del voltaje de entrada-salida del QRCB, de tal forma que  $f_{sw}$  representa un grado de libertad relevante para los algoritmos de control, a diferencia del convertidor Buck convencional donde  $f_{sw}$  se mantiene constante y se varía solo el ciclo de trabajo  $D$  para regular el voltaje a la salida. Sin embargo, en la expresión (3.15) no aparece de forma explícita la forma en que varía  $D$  afectando la conversión de voltaje, lo cual representa un desventaja dado que el ciclo de trabajo  $D$  es el parámetro que define el tiempo al cual debe de conmutar el interruptor asegurando la conmutación suave. De esta forma, los algoritmos de control basados en el modelo GSSA se ven limitados a considerar  $D$  constante [10], variarlo dentro de un rango limitado de operación [11] o introducir un sensor de corriente externo en el inductor del tanque resonante [12], para así poder implementar un comando de apagado externo al algoritmo de control y no perder la condición de conmutación suave.

Por otra parte aunque se trata de un modelo promediado, se observan no linealidades respecto a la variable de estado  $i_{L_0}$ , lo cual incrementa el grado de dificultad en la búsqueda de las técnicas de control para el convertidor QRCB, por lo que, en los siguientes

apartados se busca una opción de modelado alternativo, basado en sistemas Hamiltonianos, que permita dos cosas:

1. Variar el ciclo de trabajo  $D$  de tal forma que un algoritmo de control permita determinar su valor en función de la carga demandada.
2. Aprovechar las propiedades de los sistemas Hamiltonianos para interpretar el lazo de control en función de las propiedades físicas, en particular en la forma en que maneja la energía.

### 3.2. Topología Hamiltoniana conmutada

Para poder optar por futuras herramientas de análisis de energía y estabilidad se considera conveniente expresar el modelo del QRCB en variables Hamiltonianas sin considerar modelos reducidos, como en el caso del modelo GSSA.

Para esto, se parte de considerar que el convertidor QRCB se puede descomponer en los siguientes subsistemas interconectados y que se ilustran en la Figura 3.2:

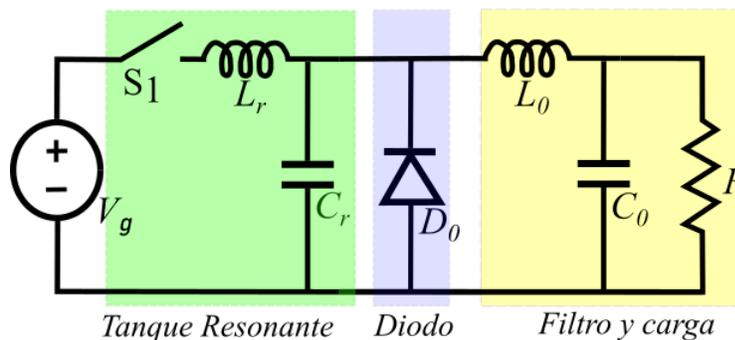


Figura 3.2:

- El sistema resonante formado por el tanque  $L_r - C_r$  y el interruptor  $S_1$ .
- El diodo  $D_0$ .
- El filtro pasabajas  $L_0 - C_0$  junto con la carga  $R$ .

A continuación se obtiene el modelo matemático de cada uno de los subsistemas.

### Modelo del sistema resonante

El sistema resonante se puede analizar en dos etapas, cuando el interruptor  $S1 = 1$  está cerrado y cuando está abierto  $S1 = 0$ , como se muestra en la Figura 3.3.

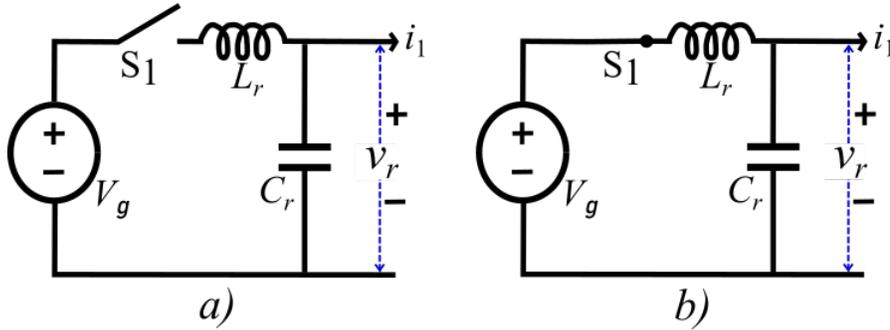


Figura 3.3: Estados del interruptor: a) abierto, b) cerrado.

Aplicando las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff en el sistema resonante cuando el interruptor está abierto se obtiene:

$$\begin{aligned} L_r \dot{i}_r &= 0 \\ C_r \dot{v}_r &= -i_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

mientras que el modelo matemático cuando el interruptor está cerrado es:

$$\begin{aligned} L_r \dot{i}_r + v_r &= V_g \\ C_r \dot{v}_r - i_r &= -i_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es posible escribir a las ecuaciones (3.16) y (3.17) de manera conjunta como:

$$\begin{aligned} L_r \dot{i}_r + \alpha_1 v_r &= \alpha_1 V_g \\ C_r \dot{v}_r - \alpha_1 i_r &= -i_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\alpha_1$  es una señal discreta que sólo puede tomar valores 0 o 1.

Si se define el encadenamiento de flujo  $\lambda_r = L_r i_r$  y la carga del capacitor  $q_r = C_r v_r$ , la

expresión anterior puede ser escrita en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix}}_{\dot{x}_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}}_{J_r(\alpha_1)\nabla H(x_r)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_r}\lambda_r \\ \frac{1}{C_r}q_r \end{bmatrix}}_{G_{r_i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_g \\ 0 \end{bmatrix}}_{G_{r_i}} \alpha_1 - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{r_o}} i_1 \quad (3.19)$$

exhibiendo su naturaleza Hamiltoniana si se considera como función de almacenamiento de energía a  $H(x_r) = \frac{1}{2}x_r^T P_r x_r$  con:

$$P_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_r} \end{bmatrix}$$

Más aún, para este sistema es posible identificar a las salidas:

$$\begin{aligned} y_{r_i} &= G_{r_i}^T \nabla H(x_r) \\ y_{r_o} &= G_{r_o}^T \nabla H(x_r) \end{aligned} \quad (3.20)$$

como las salidas pasivas respecto a las entradas  $\alpha_1$  e  $i_1$ , respectivamente.

Respecto al modelo (3.19) es posible hacer los siguientes comentarios:

- Una característica fundamental del modelo propuesto respecto a los modelos GSSA reportados en la literatura, es el hecho de no es necesario simplificar el orden del mismo. Por el contrario, se incluye la dinámica de todos los estados sin perder la estructura y propiedades físicas del sistema.
- Debe notarse que aunque la estructura del modelo es Hamiltoniana, una de sus entradas es discontinua. Este hecho se toma en cuenta en el desarrollo posterior para obtener un modelo continuo completo del QRCB.
- Es importante considerar que la señal  $\alpha_1$  es la entrada de control para el circuito. En la práctica, se ajusta tanto la frecuencia como el ciclo de trabajo de esta señal para modificar el comportamiento de la señal  $i_1$ .
- Con el fin de evidenciar más claramente la estructura Hamiltoniana del sistema, en el modelo propuesto no se incluyen resistencias de pérdidas. Este fenómeno se puede

incluir sin destruir la naturaleza Hamiltoniana del modelo.

### Modelo del filtro y carga

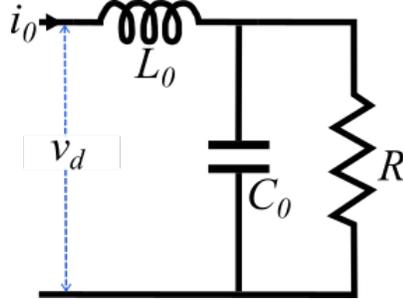


Figura 3.4:

EL modelo matemático del filtro y la carga, mostrado en la Figura 3.4, está dado por:

$$\begin{aligned} L_0 \dot{i}_0 + v_0 &= v_d \\ C_0 \dot{v}_0 - i_0 &= i_l \end{aligned} \quad (3.21)$$

con  $i_l = \frac{1}{r}v_0$  la corriente que circula por la carga.

De manera similar al sistema resonante, es posible definir el encadenamiento de flujo como  $\lambda_0 = L_0 i_0$  y la carga  $q_0 = C_0 v_0$  para que, definiendo el vector de estados del sistema como  $x_0 = [\lambda_0 \ q_0]^T$ , este sistema también pueda ser representado como un sistema Hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{x}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{J_0 \nabla H(x_0)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} \lambda_0 \\ \frac{1}{C_0} q_0 \end{bmatrix}}_{x_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G_{0_i}} v_d + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{0_o}} i_l \quad (3.22)$$

con la correspondiente función de almacenamiento de energía dada por  $H(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$

con:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_0} \end{bmatrix}$$

y salidas pasivas, respecto a las entradas  $v_d$  e  $i_l$  respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} y_{0_i} &= G_{0_i}^T \nabla H(x_0) \\ y_{0_o} &= G_{0_o}^T \nabla H(x_0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

En este punto es importante mencionar que la carga ha sido modelada como un elemento resistivo lineal con fines de simplicidad de la presentación. Como se verá más adelante, esta suposición puede ser modificada para incluir cargas con estructuras más complejas, incluso no lineales, sin que se pierda la estructura Hamiltoniana del modelo. Sin embargo, estas cargas deberán de satisfacer propiedades de pasividad para que el diseño del esquema de control que se presenta en esta tesis siga siendo válido en sus propiedades de estabilidad.

### Modelo del diodo

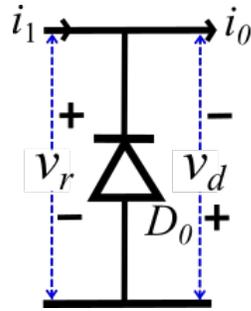


Figura 3.5: Diodo como subsistema interconectado

El tercer elemento que compone la topología del QRFB es el diodo, cuyas variables asociadas se muestran en la Figura 3.5. Con el fin de complementar los modelos del sistema resonante y del filtro de salida, este elemento disipativo se considera como un elemento de interconexión entre estos subsistemas.

Para proponer un modelo del diodo como elemento de interconexión, es necesario considerar tanto su operación en polarización directa como en inversa. Para esto, el compor-

tamiento del diodo se define en función del voltaje  $v_r$ . Así, para  $v_r > 0$  se tiene que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_d \\ i_1 \end{bmatrix}}_{y_d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S_{d_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_0 \\ v_r \end{bmatrix}}_{u_d} \quad (3.24)$$

mientras que para  $v_r \leq 0$  se cumple:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_d \\ i_1 \end{bmatrix}}_{y_d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_{d_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_0 \\ v_r \end{bmatrix}}_{u_d} \quad (3.25)$$

De esta forma, el modelo como elemento de interconexión del diodo está dado por

$$\begin{bmatrix} v_d \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ v_r \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde  $\alpha_2$  es una señal que puede tomar solamente el valor de 0 o 1 dependiendo del valor de  $v_r$ .

Es importante mencionar que para obtener la representación del diodo, la polaridad de  $v_d$  es inversa a la considerada en el modelo (3.22) del filtro de salida, lo cual se considera para obtener el modelo completo del convertidor.

### Modelo Hamiltoniano Conmutado

El modelo completo del QRCB se obtiene de interconectar las representaciones Hamiltonianas del sistema resonante (3.19), del filtro de salida (3.22) y del diodo (3.26). Para esto, se definen las componentes del vector de estados a  $x_1 = \lambda_r$ ,  $x_2 = q_r$ ,  $x_3 = \lambda_0$  y  $x_4 = q_0$ , mientras que la función total de almacenamiento de energía se define como

$$H(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad (3.27)$$

donde  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  y

$$P = \begin{bmatrix} P_r & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

Arreglando las ecuaciones mencionadas, el modelo completo está dado por:

$$\dot{x} = J(\alpha_2)\nabla H(x) + G(x)\alpha_1 + \xi, \quad (3.28)$$

donde

$$J(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mientras que  $G(x) = J_1\nabla H(x) + G_1$  con

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$G_1 = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i_l \end{bmatrix}$$

Respecto al modelo presentado, es importante mencionar que la señal  $\alpha_2$ , al presentarse en la matriz de interconexión, no afecta las propiedades de estabilidad del sistema, mientras que la señal de control  $\alpha_1$  aparece de manera lineal.

En la siguiente sección se analiza la señal de entrada discreta  $\alpha_1$  buscando una forma de aproximarla de manera continua sin perder la información necesaria para realizar el lazo de control.

### 3.3. Serie de Fourier compleja de la señal de entrada

En general se considera una señal discreta periódica cuadrada no simétrica con valores sólo de Encendido-Apagado y no centrada en el origen (Ver Figura 3.6), la cual se puede

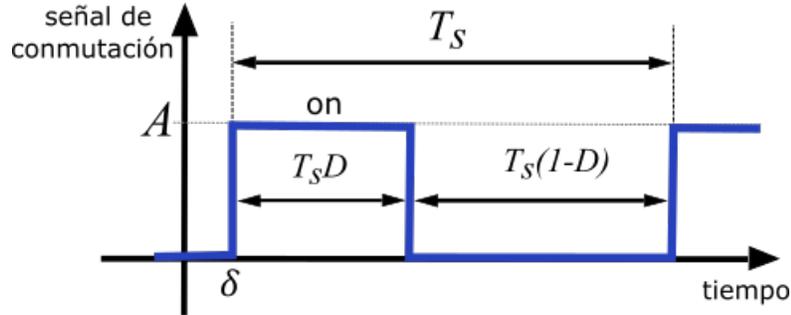


Figura 3.6: Señal discreta de entrada a un convertidor Cuasiresonante.

representar mediante la siguiente función matemática:

$$\alpha_{T_s}(t) = \begin{cases} A & \text{si } \delta \leq t \leq \delta + T_s D \\ 0 & \text{si } \delta + T_s D < t < \delta + T_s \end{cases} \quad (3.29)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\delta \geq 0$  es un retraso temporal de la señal,  $T_s$  es el período de un ciclo de conmutación (Encendido-Apagado) y  $D$  el ciclo de trabajo el cual representa una fracción del periodo en el cual la señal está en estado de encendido. Entonces, aplicando el Teorema de Fourier la señal se puede expresar mediante la serie de Fourier compleja:

$$\alpha_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad (3.30)$$

donde los coeficientes se calculan como:

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{T_s} \alpha_{T_s}(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (3.31)$$

con los límites de integración definidos de  $\delta$  a  $\delta + T_s$  y considerando que la señal es diferente de cero de  $\delta$  a  $\delta + T_s D$ , es decir:

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{\delta}^{\delta+T_s} \alpha_{T_s}(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{A}{T_s} \int_{\delta}^{\delta+T_s D} e^{-jn\omega_s t} dt \quad (3.32)$$

Integrando la función exponencial y considerando que  $T_s\omega_s = 2\pi$  se tiene:

$$c_n = \frac{-A}{T_s j n \omega_s} e^{-jn\omega_s t} \Big|_{\delta}^{\delta+T_s D} = \frac{A}{2j\pi n} (e^{-jn\omega_s \delta} - e^{-jn\omega_s(\delta+T_s D)}) \quad (3.33)$$

entonces:

$$c_n = \frac{A}{2j\pi n} e^{-jn\omega_s \delta} (1 - e^{-jn\omega_s T_s D}) = \frac{A}{2j\pi n} e^{-jn\omega_s \delta} (1 - e^{-2j\pi n D}) \quad (3.34)$$

Aplicando la formula de Euler  $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$ :

$$c_n = \frac{A}{2\pi n} e^{-jn\omega_s \delta} (\sin(2\pi n D) + j(\cos(2\pi n D) - 1)) \quad (3.35)$$

expresión que permite calcular los coeficientes a cualquier orden de la serie (3.30).

Considerando una amplitud unitaria  $A = 1$  y una la señal sin retraso  $\delta = 0$ , el coeficiente a orden cero  $n = 0$  es:

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\sin(2\pi n D))}{2\pi n} \\ c_0 &= D \lim_{2\pi n D \rightarrow 0} \frac{(\sin(2\pi n D))}{2\pi n D} = D \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se puede observar que esta expresión corresponde directamente al ciclo de trabajo  $D$  obtenido usualmente mediante la promediación SSA y aplicada comúnmente en convertidores PWM.

A orden  $n = \pm 1$ , se tiene:

$$c_{+1} = \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi D) + j(\cos(2\pi D) - 1)) \quad (3.37)$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi D) - j(\cos(2\pi D) - 1)) \quad (3.38)$$

por lo que la expansión de la señal de entrada a primer orden  $n = \pm 1$  es:

$$\begin{aligned} \alpha_{T_s}(t) &= c_0 + C_1 e^{j\omega_s t} + C_{-1} e^{-j\omega_s t} \\ &= D + \frac{e^{j\omega_s t}}{2\pi} (\sin(2\pi D) + j(\cos(2\pi D) - 1)) + \frac{e^{-j\omega_s t}}{2\pi} (\sin(2\pi D) - j(\cos(2\pi D) - 1)) \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde se puede observar que el segundo término es el complejo conjugado del tercero, propiedad que se preserva para términos de cualquier orden. Si, por simplicidad, se denota al  $n$ -ésimo término de la serie como

$$c_n e^{jn\omega_s t} = \langle x \rangle_n$$

se tiene entonces que los términos negativos corresponden al complejo conjugado de los coeficientes enteros positivos, es decir,  $\langle x \rangle_{-k} = \overline{\langle x \rangle_k}$ , por lo que, por propiedades de los números complejos, se tiene que

$$\langle x \rangle_k + \langle x \rangle_{-k} = 2 \operatorname{Re} [\langle x \rangle_k] \quad (3.40)$$

Así, la expansión en Serie de Fourier Compleja de la función (3.29) se reduce a

$$\alpha_{T_s}(t) = D + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} [C_n e^{jn\omega_s t}] \quad (3.41)$$

donde de (3.35) se tiene que:

$$\operatorname{Re} [C_n e^{jn\omega_s t}] = \frac{1}{2\pi n} (\cos(n\omega_s t) \sin(2\pi n D) - \sin(n\omega_s t) (\cos(2\pi n D) - 1)) \quad (3.42)$$

En estas expresiones se puede observar la dependencia respecto a la frecuencia de conmutación  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$  y el ciclo de trabajo  $D$ , a diferencia de la técnica SSA donde solo se aprecia la dependencia respecto a  $D$  lo cual resulta suficiente debido a que la frecuencia se mantiene constante en los convertidores PWM usuales.

Por otra parte, cada término de la expansión en serie de Fourier compleja obtenida representa un armónico de la aproximación (ver Figura 3.7), por lo que la aproximación continua de la señal de entrada conmutada se puede interpretar como la suma de  $n$ -armónicos, los cuales se pueden generar de forma independiente a través de la salida de un oscilador armónico.

En la siguiente sección se mostrará que estos osciladores armónicos poseen una estructura Hamiltoniana compleja, lo cual permite aprovechar y explotar las propiedades de los

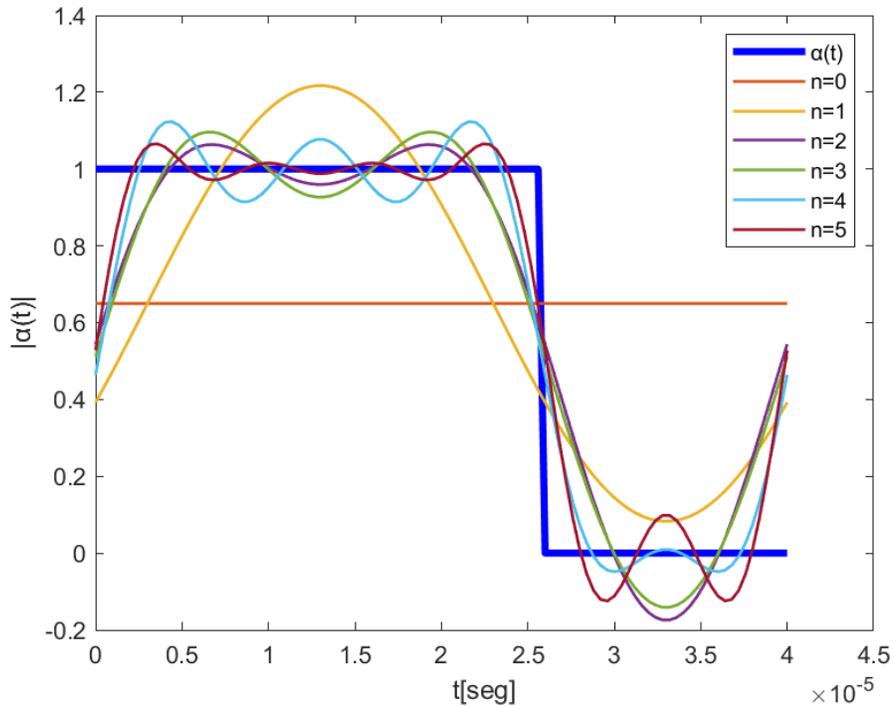


Figura 3.7: Simulación en Matlab de una señal cuadrada de amplitud unitaria, periodo  $T = 0.4e - 4\text{Seg}$  y ciclo de trabajo  $D = 0.65$ , aproximado a través de la expresión (3.42), hasta el quinto armónico.

sistemas Hamiltonianos para aproximar la señal de entrada del control del modelo (3.28).

### 3.4. Aproximación Hamiltoniana de la entrada

Según el resultado expuesto en la sección anterior, para representar de forma adecuada una aproximación continua de la entrada discreta a los convertidores, se puede recurrir a la expansión en serie de Fourier compleja de la entrada. Ahora bien, la señal aproximada se caracteriza como una suma infinita de armónicos, la cual puede ser truncada a un orden lo suficientemente alto para capturar el comportamiento de la señal original discreta. En esta sección se mostrará que cada armónico que constituye la señal continua se puede interpretar como la salida de un oscilador cuya estructura es de forma natural la de un sistema Hamiltoniano complejo, de tal forma que la señal de entrada del modelo Hamiltoniano conmutado (3.28) se reconstruirá como la salida de un banco de osciladores Hamiltonianos complejos cuya entrada es el ciclo de trabajo  $D$  y frecuencia de conmutación  $T_{sw}$ , obtenien-

do como resultado una interconexión de sistemas Hamiltonianos para modelar de forma continua los convertidores QRCB.

La forma usual de representar la dinámica de un oscilador armónico ideal es a través de una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la siguiente forma:

$$\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda = 0 \quad (3.43)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular. Al proponer una solución de la siguiente forma:

$$\lambda = C_r e^{i\omega t} \quad (3.44)$$

y calcular su primera y segunda derivada temporal, se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= i\omega C_r e^{i\omega t} \\ \ddot{\lambda} &= -\omega^2 C_r e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Al sustituir ambas expresiones en la ecuación (3.43) se verifica que

$$-\omega^2 C_r e^{i\omega t} + \omega^2 C_r e^{i\omega t} = 0 \quad (3.46)$$

por lo tanto, la solución propuesta (3.44) es válida.

Se puede observar que la ecuación (3.44) tiene la misma estructura que uno de los términos de la aproximación continua en serie de Fourier (3.30) de la entrada discreta. Sin embargo, el coeficiente  $C_r$  de la solución propuesta es de variable real, pues depende de las condiciones iniciales del oscilador y los coeficientes de (3.30) son complejos. Por lo que a continuación se procede a hallar un modelo del oscilador cuya solución admita coeficientes complejos y al mismo tiempo exhiba una estructura Hamiltoniana.

### 3.4.1. Oscilador armónico Hamiltoniano complejo

A partir de la motivación presentada en la sección anterior, en esta se presenta un conjunto de sistemas dinámicos Hamiltonianos a partir de los cuales se obtienen las señales

armónicas con las que se aproxima la señal de entrada del QRCB.

Considere la estructura matemática de un circuito  $L-C$ , el cual representa un oscilador armónico que se expresa mediante el formalismo Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{J\nabla H(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L}\lambda \\ \frac{1}{C}q \end{bmatrix}}_{G_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G_i} u \quad (3.47)$$

con función de almacenamiento de energía

$$H(\lambda, q) = \frac{1}{2L}\lambda^2 + \frac{1}{2C}q^2 \quad (3.48)$$

entrada  $u$  y frecuencia angular  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Si, por simplicidad, se considera que  $L = C$ , entonces  $\omega = \frac{1}{L}$  y el sistema queda ahora de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{J\nabla H(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega\lambda \\ \omega q \end{bmatrix}}_{G_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{G_i} u \quad (3.49)$$

con la respectiva función de almacenamiento de energía

$$H(\lambda, q) = \frac{\omega}{2} (\lambda^2 + q^2) \quad (3.50)$$

La ventaja de reescribir la dinámica del oscilador como un sistema Hamiltoniano es que se aprecia de mejor forma la estructura y además aparece la función de almacenamiento de energía, la cual es constante. Esto es algo muy importante porque es posible relacionar la amplitud de las señales sinusoidales generadas por el oscilador con su función energía. Para esto, considere las condiciones iniciales  $\lambda(0) = \lambda_0$  y  $q(0) = 0$ , con lo que la función de almacenamiento de energía en  $t = 0$  es  $H = \frac{\omega}{2}\lambda_0^2$ , cantidad que se conserva constante para todo  $t > 0$ .

Adicionalmente, note que la función de almacenamiento de energía (3.50) se puede

reescribir como

$$\frac{2H(\lambda, q)}{\omega} = \lambda^2 + q^2 \quad (3.51)$$

la cual establece una circunferencia con radio  $\|a\| = \sqrt{\frac{2H(\lambda, q)}{\omega}}$  como se muestra en la Figura 3.4.1, en la que se ha utilizado el plano complejo para presentar la gráfica de la función.

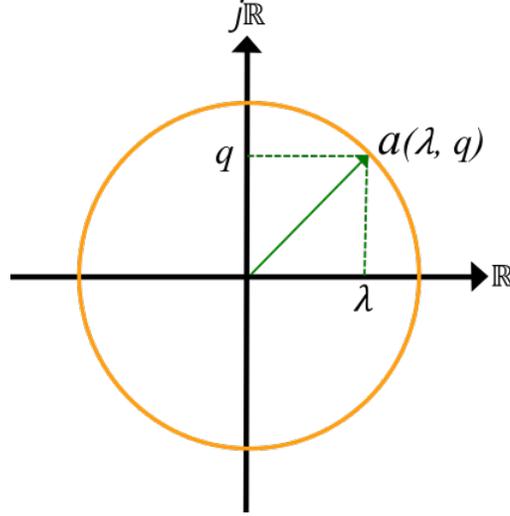


Figura 3.8: Representación compleja de la función de almacenamiento de energía

Dada la definición de la circunferencia en el plano complejo, entonces cualquier punto está dado por:

$$a = \lambda + \mathbf{i}q \quad (3.52a)$$

$$\bar{a} = \lambda - \mathbf{i}q \quad (3.52b)$$

con lo que es posible reescribir la función de almacenamiento de energía como:

$$H(\lambda, q) = H(a, \bar{a}) = \frac{\omega}{2} a \bar{a} \quad (3.53)$$

Ahora que se ha introducido una variable compleja en la función de energía del oscilador, se buscará expresar la dinámica completa del oscilador en función de  $a$  y se procederá a analizar sus soluciones. Entonces despejando  $\lambda$  de (3.52a):

$$\lambda = a - \mathbf{i}q \quad (3.54)$$

además de (3.52b) se tiene que  $\mathbf{i}q = \lambda - \bar{a}$ . Al sustituir esto en (3.54), se llega a:

$$\begin{aligned}\lambda &= a - \mathbf{i}q = a - (\lambda - \bar{a}) \\ &= \frac{1}{2}(a + \bar{a})\end{aligned}\tag{3.55}$$

De forma análoga se obtiene  $q$  en función de la variable compleja  $a$ :

$$\begin{aligned}q &= (\bar{a} - \lambda) \frac{1}{-\mathbf{i}} \\ &= (\bar{a} - a + \mathbf{i}q)\mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} \frac{1}{2}(\bar{a} - a)\end{aligned}\tag{3.56}$$

Calculando la derivada con respecto del tiempo de la variable compleja  $a$  y sustituyendo las derivadas de  $\lambda$  y  $q$  según (3.49) y desarrollando se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \dot{\lambda} + \mathbf{i}\dot{q} \\ &= -\omega q + u + \mathbf{i}\omega\lambda \\ &= -\omega \left( \mathbf{i} \frac{1}{2}(\bar{a} - a) \right) + \mathbf{i}\omega \left( \frac{1}{2}(a + \bar{a}) \right) + u \\ &= \mathbf{i} \frac{\omega}{2}(a + \bar{a} - \bar{a} + a) + u \\ \dot{a} &= \mathbf{i}\omega a + u\end{aligned}\tag{3.57}$$

De tal manera que se ha obtenido una ecuación diferencial de primer grado compleja la cual debe describir la dinámica del oscilador armónico con coeficientes complejos en sus soluciones.

Con el fin de obtener la dinámica completa para obtener los términos armónicos necesarios para conformar la Serie de Fourier compleja, suponga que un oscilador armónico se puede modelar por medio de las siguientes ecuaciones diferenciales complejas:

$$\begin{aligned}\dot{a}^* - \mathbf{i}\omega^* a^* &= 0 \\ \dot{\bar{a}}^* + \mathbf{i}\omega^* \bar{a}^* &= 0,\end{aligned}\tag{3.58}$$

las cuales corresponden a la expresión (3.57) y su complejo conjugado, pero sin entrada  $u$ .

Entonces, se proponen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} a^* &= C_c^* e^{i\omega^* t} \\ \bar{a}^* &= \bar{C}_c^* e^{-i\omega^* t}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde el coeficiente  $C_c$  es complejo y  $\bar{C}_c^*$  su conjugado. Derivando respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{a}^* &= i\omega^* C_c^* e^{i\omega^* t} \\ \dot{\bar{a}}^* &= -i\omega^* \bar{C}_c^* e^{-i\omega^* t} \end{aligned} \quad (3.60)$$

al sustituir la solución propuesta y su derivada en (3.58) se satisface que:

$$\begin{aligned} i\omega^* C_c^* e^{i\omega^* t} - i\omega^* C_c^* e^{i\omega^* t} &= 0 \\ -i\omega^* \bar{C}_c^* e^{-i\omega^* t} + i\omega^* \bar{C}_c^* e^{-i\omega^* t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

por lo tanto la solución propuesta es válida.

La importancia de las soluciones propuestas (3.59) del oscilador Hamiltoniano complejo, es que estas expresiones coinciden con la forma de los términos de la aproximación continua de la entrada discreta (3.30). Por lo tanto, si se considera a la condición inicial como:

$$a^*(0) = i \frac{1}{2\pi} (e^{-i2\pi d} - 1) \quad (3.62)$$

correspondiente al coeficiente  $C_n$  de la expresión (4.42) con  $n=1$  y  $\delta = 0$ , entonces se puede reconstruir la señal aproximada de la entrada a orden 1 como solución del sistema dinámico complejo (3.58), ya que  $C_c^* = C_{n=1}$ .

### 3.4.2. Dinámica del error de la aproximación Hamiltoniana de la entrada

Para asegurar la convergencia a una señal de salida deseada (ármonico) del oscilador Hamiltoniano complejo dado por las ecuaciones (3.58) se define la señal de error

$$\tilde{a} = a - a^* \quad (3.63)$$

y

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega^* \quad (3.64)$$

donde  $a^*$  y  $\omega^*$  corresponden a los valores necesarios para generar un determinado armónico.

Despejando de (3.63), se tiene que  $a = \tilde{a} + a^*$  y sustituyendo en la ecuación (3.57), se obtiene la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} + \dot{a}^* &= \mathbf{i}\omega (\tilde{a} + a^*) + u \\ \dot{\tilde{a}} &= \mathbf{i}\omega\tilde{a} + \mathbf{i}\omega a^* - \dot{a}^* + u \\ \dot{\tilde{a}} &= \mathbf{i}\omega\tilde{a} + \mathbf{i}\omega a^* - \mathbf{i}\omega^* a^* + u \\ \dot{\tilde{a}} &= \mathbf{i}\omega\tilde{a} + \mathbf{i}a^* (\omega - \omega^*) + u \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sustituyendo (3.64) y realizando le procedimiento análogo para el conjugado de  $a$ , se obtiene la dinámica del error del sistema complejo

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}} &= \mathbf{i}\omega\tilde{a} + \mathbf{i}a^*\tilde{\omega} + u \\ \dot{\tilde{a}} &= -\mathbf{i}\omega\tilde{a} - \mathbf{i}\tilde{a}^*\tilde{\omega} + u \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde  $(\tilde{\omega}, \tilde{a}, \tilde{a}) = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio para  $u = 0$ .

Para analizar que las trayectorias converjan al punto de equilibrio se realiza un análisis de estabilidad del sistema proponiendo la siguiente función cuadrática

$$\tilde{H}(\tilde{\omega}, \tilde{a}, \tilde{a}) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}^2\tilde{a}\tilde{a} \quad (3.67)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.66) es:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{H}} &= \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} \tilde{a} \tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 \dot{\tilde{a}} \tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 \tilde{a} \dot{\tilde{a}} \\
&= \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} \tilde{a} \tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (\mathbf{i} \omega \tilde{a} + \mathbf{i} a^* \tilde{\omega} + u) \tilde{a} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 \tilde{a} (-\mathbf{i} \omega \tilde{a} - \mathbf{i} \tilde{a}^* \tilde{\omega} + u) \\
&= \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} \tilde{a} \tilde{a} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (\omega \tilde{a} \tilde{a} + a^* \tilde{\omega} \tilde{a} - \omega \tilde{a} \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^* \tilde{\omega}) + \tilde{a} \frac{\tilde{\omega}^2}{2} u + \tilde{a} \frac{\tilde{\omega}^2}{2} u \\
&= \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} \tilde{a} \tilde{a} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (a^* \tilde{\omega} \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^* \tilde{\omega}) + (\tilde{a} + \tilde{a}) \frac{\tilde{\omega}^2}{2} u \\
&= \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} \tilde{a} \tilde{a} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \tilde{\omega}^3 (a^* \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^*) + (\tilde{a} + \tilde{a}) \frac{\tilde{\omega}^2}{2} u
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Si se define a

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\omega}} &= -\frac{\mathbf{i} \frac{1}{2} \tilde{\omega}^3 (a^* \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^*)}{\tilde{\omega} \tilde{a} \tilde{a}} - k_\omega \tilde{a} \tilde{a} \\
&= -\frac{\mathbf{i} \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 (a^* \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^*)}{\tilde{a} \tilde{a}} - k_\omega \tilde{a} \tilde{a}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde  $k_\omega > 0$ , y

$$u = -k_u (\tilde{a} + \tilde{a}) \tilde{\omega}^2 \tag{3.70}$$

donde  $k_u > 0$ , entonces la derivada de  $\tilde{H}$  queda de la siguiente forma

$$\dot{\tilde{H}}(\tilde{\omega}, \tilde{a}, \tilde{a}) = -k_\omega \tilde{a} \tilde{a} - k_u (\tilde{a} + \tilde{a}) \tilde{\omega}^2 \tag{3.71}$$

la cual es definida negativa y por lo tanto se concluye estabilidad asintótica respecto al punto de equilibrio  $(\tilde{\omega}, \tilde{a}, \tilde{a}) = (0, 0, 0)$  para  $u = 0$ .

### 3.5. Modelo continuo y validación numérica

Una vez que se ha demostrado matemáticamente que el modelo de osciladores Hamiltonianos complejos son capaces de generar los armónicos deseados, entonces se puede aproximar la señal cuadrada de entrada al convertidor como la suma de  $n$  osciladores Hamiltonianos complejos. Esta señal es continua y permite trabajar con las herramientas de análisis que proveen los sistemas Hamiltonianos, como lo son el control basado en modelo y el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov, entre otras.

Para validar numéricamente lo anterior se compara en simulación el modelo Hamil-

toniano Conmutado (3.28) con una versión del mismo alimentado por la aproximación continua, para así garantizar que el comportamiento del modelo continuo obtenido es lo suficientemente capaz de reproducir el comportamiento real del QRCB.

La comparativa obtenida se muestra en la Figura (3.9) en la que se presentan la corriente del inductor  $L_r$  y el volaje del capacitor  $C_r$  del tanque resonante. En color rojo se presenta la respuesta del sistema conmutado ( $x_1 = i_{L_r}$ ,  $x_2 = v_{C_r}$ ) y en color azul su aproximación continua ( $x_{1m} = i_{L_{rm}}$ ,  $x_{2m} = v_{C_{rm}}$ ) para el caso en que  $n = 6$ . En la parte baja de la figura se presenta la señal de entrada  $\alpha_1$  y su correspondiente aproximación continua.

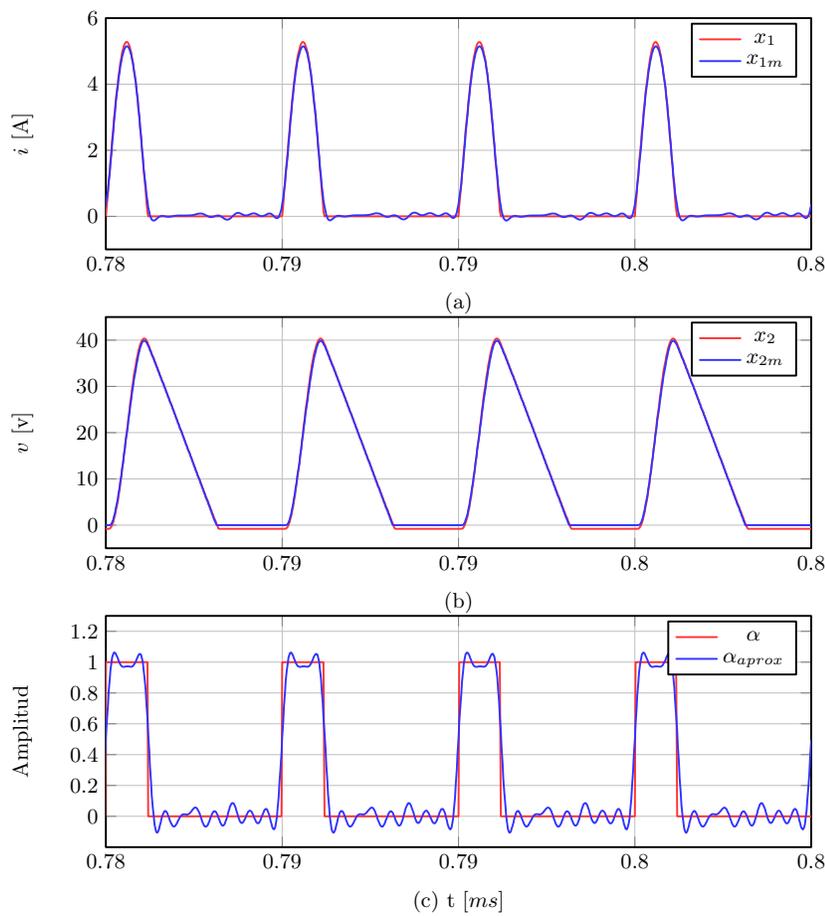


Figura 3.9: Comparación de las variables del tanque resonante así como de la señal cuadrada con las señales del modelo continuo propuesto.

Una vez establecido el modelo completo del QRCB, en el siguiente capítulo se utiliza la aproximación continua obtenida para realizar el diseño de esquemas de control de la misma.

# Capítulo 4

## Control

En este capítulo el proceso de modelado introducido en el capítulo anterior se complementa con el diseño de esquemas de control. Para esto, se presenta un resultado preliminar por medio del cual, a diferencia de los resultados reportados en la literatura, se establece una relación explícita entre el ciclo de trabajo de la señal de entrada y su frecuencia de conmutación. Posteriormente, se utiliza esta relación para implementar un control clásico PI, con el fin de comparar la utilidad del modelo propuesto en el contexto de esquemas usuales de control reportados en la literatura, y finalmente se presenta un control PI pasivo para el cual se establecen formalmente propiedades de estabilidad.

### 4.1. Aportaciones preliminares al Control

Como resultados preliminares el diseño de esquemas de control, se presenta primero uno que estable una relación explícita entre el ciclo de trabajo de la señal de entrada del QRCB y su frecuencia y, posteriormente, el análisis del balance de energía del convertidor para reconocer su comportamiento dinámico en estado estacionario. Este último, útil para determinar las trayectorias admisibles (de referencia) necesarias para la implementación de los esquemas de control.

### 4.1.1. Relaciones del ciclo de trabajo $D$ con la frecuencia de conmutación $f_{sw}$

Del análisis del modelado GSSA, se observó que bajo esta técnica de modelado no se considera al ciclo de trabajo  $D$ , que asegura la conmutación suave, pues es la fracción de tiempo de encendido del interruptor, dentro de la relación de conversión de voltaje entrada salida. Esto tiene como desventaja que los algoritmos de control basados en el modelo GSSA se ven limitados en el rango de operación de la frecuencia de conmutación, pues consideran  $D$  constante o implementan un sensor externo que asegure la conmutación suave.

Para eliminar esta desventaja, se puede mostrar que existe una clara dependencia entre la frecuencia de conmutación y el ciclo de trabajo. Para establecer esto, del modelado del filtro de salida se tiene que:

$$\frac{dv_{C_0}}{dt} = -\frac{v_{C_0}}{RC_0} + \frac{i_{L_0}}{C_0} \quad (4.1)$$

de donde si se considera una operación en estado estacionario,  $v_{C_0} = cte$ , se obtiene que la correspondiente corriente del inductor es igual a la carga está dada por:

$$i_{L_0} \approx i_0 = v_{C_0}/R \quad (4.2)$$

por lo que una variación en el voltaje de salida o de carga, afecta el valor de la corriente  $i_{L_0}$ .

La importancia de esta observación radica en el hecho de que los valores de los intervalos  $\tau_1 = L_r i_{L_0}/V_g$  y  $\tau_2 = \sin^{-1}(Z_n i_{L_0}/V_g)$  dependen del valor de esta corriente y dado que la suma de ambos intervalos define el punto en el cual se alcanza una condición óptima para la conmutación suave, entonces es posible establecer una relación con el ciclo de trabajo.

A continuación se presentan dos expresiones que permiten relacionar el ciclo de trabajo  $D$  y la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$  y que posibilitan mejorar la implementación de los algoritmos de control:

1. En la Figura 4.1 se observa que el tiempo de encendido del interruptor en un periodo de conmutación  $T_s$  es  $T_{on} = \tau_1 + \tau_2 = DT_s$ . Despejado el ciclo de trabajo y recordando

que  $f_s = 1/T_s$  se tiene que  $D = (\tau_1 + \tau_2)f_{sw}$ . Al sustituir los valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  se obtiene una relación del ciclo de trabajo en función de la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$ , es decir:

$$D = \left( \frac{L_r}{V_g} i_0 + \frac{1}{\omega_r} \arcsin \left( \frac{Z_r}{V_g} i_0 \right) \right) f_{sw} \quad (4.3)$$

En esta expresión, el segundo término de (4.3) se puede aproximar mediante su expansión en serie de Taylor a primer orden, por lo tanto la relación del ciclo de trabajo queda de forma lineal de la siguiente forma:

$$D \approx i_0 \left( \frac{L_r}{V_g} + \frac{Z_r}{\omega_r V_g} \right) f_{sw} \quad (4.4)$$

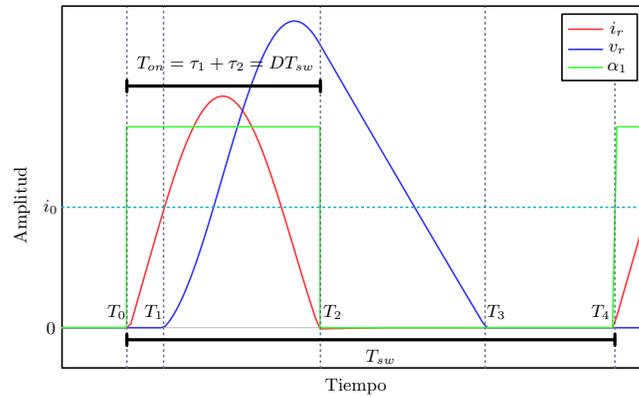


Figura 4.1: Relación entre ciclo de trabajo y periodo de conmutación

2. Por otra parte, aludiendo a la simetría de la curva de la corriente  $i_r$  debido al comportamiento sinusoidal del tanque resonante (Figura 4.1), el tiempo de encendido  $T_{on} = T_s D$ , puede aproximarse considerando que el intervalo  $[0, T_{on}]$  contiene medio periodo de oscilación del tanque resonante ( $T_r = 2\pi\sqrt{L_r C_r}$ ) que corresponde al tiempo requerido para que la señal senoidal generada llegue a realizar media onda. Esta media onda está montada sobre la referencia  $i_0 = i_{L_0}$  cuyo valor se alcanza en el lado izquierdo de la curva por la carga lineal del inductor  $L_r$ , definida por la primer etapa de operación del tanque resonante  $\tau_1 = \frac{L_r}{v_g} i_{L_0}$ . Por tanto se suma a  $T_r/2$  el doble de  $\tau_1$ , considerando que por simetría el lado derecho de la curva se aproxima bien por

este valor también, entonces:

$$T_s D = \frac{T_r}{2} + 2\tau_1 = \pi\sqrt{L_r C_r} + 2\frac{L_r}{v_g} i_{L_0} \quad (4.5)$$

Despejando  $D$ :

$$D = \frac{1}{T_s} \left[ \pi\sqrt{L_r C_r} + 2\frac{L_r}{V_g} i_{L_0} \right] \quad (4.6)$$

$$= f_s \left[ \pi\sqrt{L_r C_r} + 2\frac{L_r}{V_g} i_{L_0} \right] \quad (4.7)$$

Las expresiones (4.4) y (4.6) permiten hallar el valor del ciclo de trabajo correspondiente a una frecuencia de conmutación dada. Estas relaciones se pueden implementar en los algoritmo de control para mejorar el rendimiento pues garantizan que se siga satisfaciendo la conmutación suave y por tanto también amplían el rango de frecuencias de operación para el convertidor QRCB.

#### 4.1.2. Balance de energía del convertidor Buck Cuasi-resonante

Para obtener relaciones útiles que permitan describir la dinámica admisible del sistema se procede a realizar un balance de la energía que se inyecta a la entrada con la que se obtiene a la salida del convertidor. Para esto y si se considera el caso ideal donde no hay pérdidas, se tiene que:

$$E_{in} = E_{out}$$

Analizando la energía de forma integral en un periodo de conmutación  $T_s$ :

$$\int_{T_s} P_{in}(t) dt = \int_{T_s} P_{out}(t) dt \quad (4.8)$$

donde la potencia de entrada  $P_{in}$  está dada por el producto de la corriente en el inductor del tanque resonante  $i_r$  con el voltaje de la fuente  $v_g$ , y la potencia de salida  $P_{out}$  por el producto de la corriente del filtro pasabajas  $i_{L_0}$  con el voltaje del capacitor del filtro  $v_{C_0}$ .

Es decir:

$$\int_{T_s} v_g(t) i_r(t) dt = \int_{T_s} v_{C_0}(t) i_{L_0}(t) dt \quad (4.9)$$

Aplicando el análisis en un punto de operación en estado estacionario, se tiene que la corriente del inductor y el voltaje del capacitor en el filtro pasabajas, son la corriente y el voltaje en la carga respectivamente, ambos valores constantes, por lo que el lado derecho de la expresión (4.9) se simplifica a  $i_0 v_0 T_s$ , mientras que el lado izquierdo se separa en los dos intervalos donde la corriente  $i_r$  es diferente de cero. Estos intervalos están definidos por los modos de operación del tanque resonante, de  $[0, \tau_1]$  (carga lineal de  $L_r$ ) y de  $[0, \tau_2]$  (etapa resonante), y al considerar que el voltaje de la fuente  $v_g$  es constante, se obtiene

$$v_g \left[ \int_0^{\tau_1} i_r(t) dt + \int_0^{\tau_2} i_r(t) dt \right] = i_0 v_0 T_s \quad (4.10)$$

Sustituyendo las expresiones de  $i_r$  para cada intervalo según las expresiones (2.1) y (2.13) se obtiene que:

$$v_g \left[ \int_0^{\tau_1} \frac{v_g}{L_r} t dt + \int_0^{\tau_2} \left( i_0 + \frac{v_g}{Z_n} \sin(\omega t) \right) dt \right] = i_0 v_0 T_s \quad (4.11)$$

$$v_g \left[ \frac{v_g \tau_1^2}{2L_r} + i_0 \tau_2 - \frac{v_g}{Z_n \omega} \cos(\omega t) \tau_2 \right] = i_0 v_0 T_s \quad (4.12)$$

donde considerando el valor de  $\tau_1$  y evaluando la función coseno se llega a:

$$v_g \left[ \frac{i_0 \tau_1}{2} + i_0 \tau_2 + v_g C_r (1 - \cos(\alpha)) \right] = i_0 v_0 T_s \quad (4.13)$$

Por otro lado, se tiene que  $v_g C_r (1 - \cos(\alpha)) = \tau_3 i_0$ , por lo que finalmente se obtiene

$$f_s = \frac{v_0}{v_g} \left( \frac{1}{\frac{\tau_1}{2} + \tau_2 + \tau_3} \right) \quad (4.14)$$

Esta expresión permite obtener el valor de la frecuencia de conmutación en función de un voltaje de referencia en la carga  $v_0^*$ .

## 4.2. PI Clásico mejorado

El esquema convencional de control para el convertidor Buck QR se muestra en la Figura 4.2,

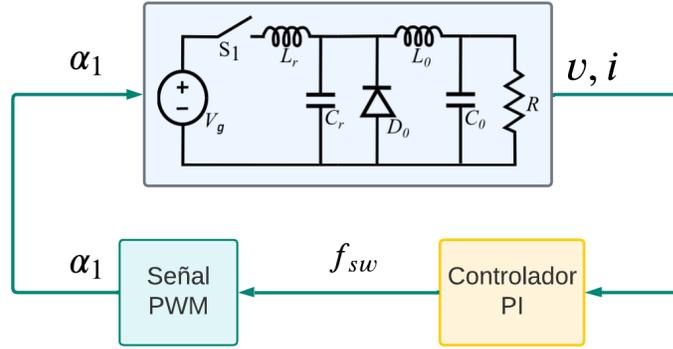


Figura 4.2: Esquema de control para el convertidor Buck QR, PI clásico.

esto se realiza cerrando el lazo de control a través de un control PI, en el cual se toma como señal de salida el voltaje en la carga  $R$  y se compara con un voltaje de referencia para generar así una señal de error. La señal de error se procesa mediante un arreglo Proporcional-Integral para generar la frecuencia de conmutación que caracteriza a la señal de entrada de control. El controlador PI se obtiene al suponer que existe una frecuencia  $f_{sw}^*$  de la señal cuadrada  $\alpha^*$ , que genera una señal de voltaje deseada a la salida  $v_{ref} = v_{C_0}^*$ , esto se justifica a través de la relación de conversión de voltaje (Ecuación 3.15)

$$\frac{v_{C_0}^*}{V_g} = \frac{f_{sw}^*}{2\pi f_n} H_i(V_g, i_{L_0}^*)$$

obtenida en el modelado GSSA. Entonces se define  $\tilde{f}_{sw} = f_{sw} - f_{sw}^*$ , donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{sw} &= k_p(v_{ref} - v_0) \\ f_{sw}^* &= k_i \tilde{f}_{sw}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$k_p$  y  $k_i$  son las ganancias. Sin embargo para terminar de definir la señal cuadrada se necesita también del ciclo del trabajo  $D$ , el cual como se ha mencionado usualmente se deja constante o se determina a través de un sensor externo.

En esta sección se implementa el control PI clásico adicionando el bloque que permite variar el ciclo de trabajo  $D$  en función de la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$ , ver Figura 4.9, lo cual permite definir completamente la señal cuadrada  $\alpha(f_{sw}, D)$ , por lo que ya no se requiere de un sensor externo o de fijar  $D$  como constante.

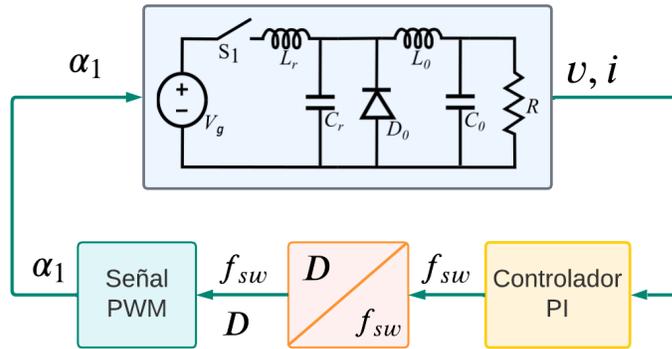


Figura 4.3: Esquema de control para el convertidor Buck QR, PI clásico adicionando el bloque  $D(f_{sw})$ .

Las evaluaciones numéricas se realizan para comparar el comportamiento de la implementación PI clásico con el PI clásico adicionando el bloque  $D(f_s)$ , buscando observar que se regule el voltaje y se mantenga la conmutación suave ante variaciones de carga, las simulaciones se realizaron de la siguiente manera:

1. Se realizan variaciones de carga en el tiempo cada 0.1 *seg* para los esquemas de las Figuras 4.2 y 4.3, comenzando con una carga nominal de  $R = 10 \Omega$ , e incrementando a  $R = 95 \Omega$ ,  $R = 146 \Omega$  y  $R = 451 \Omega$ .
2. Se realizan variaciones de carga en el tiempo cada 0.2 *seg* para los esquemas de las Figuras 4.2 y 4.3, comenzando con una carga nominal de  $R = 10 \Omega$ , y luego reduciendo a  $R = 5.8 \Omega$ ,  $R = 5.3 \Omega$ ,  $R = 3 \Omega$ , and  $R = 0.8 \Omega$ .

las simulaciones se realizaron en Simulink de Matlab con un tiempo de integración de . donde los elementos electrónicos se consideran ideales es decir sin perdidas.

Los análisis de los voltajes y corrientes de salida del convertidor así como la variación de la frecuencia de conmutación y el ciclo de trabajo se muestran en las figuras 4.4 y 4.5, donde se aprecia mayor robustez por parte de PI mejorado ya que sigue garantizando

regulación de voltaje ante todas las variaciones de carga realizadas en comparación del PI convencional donde solo soporta hasta las segundas variaciones en la carga. Como se ha mencionado, la principal característica del PI mejorado que refleja su robustez es la variación del ciclo de trabajo en función de la frecuencia de conmutación la cual no se considera en los algoritmos de control reportados en la literatura.

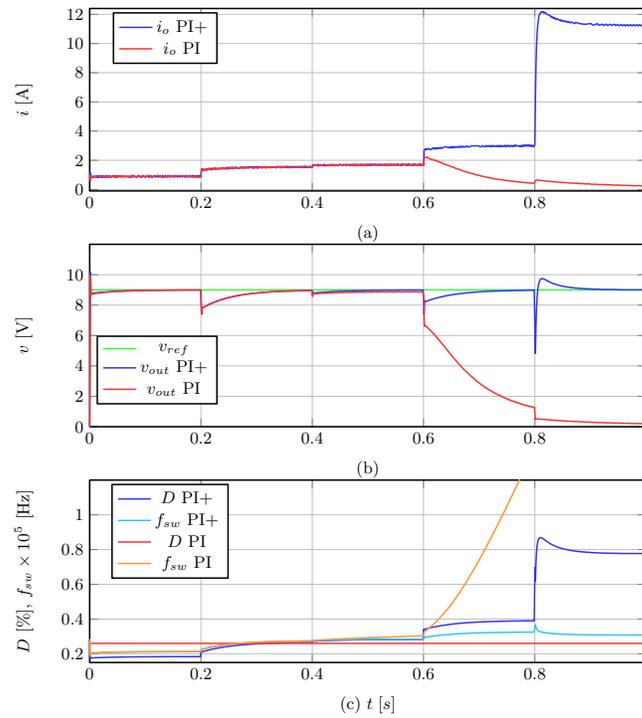


Figura 4.4: Señales obtenidas al reducir el valor de la carga nominal para el esquema del  $PI$  clásico y  $PI+$  clásico mejorado: (a)  $i_o$ , (b)  $v_{out}$ , (c)  $D$ , y  $f_{sw}$ .

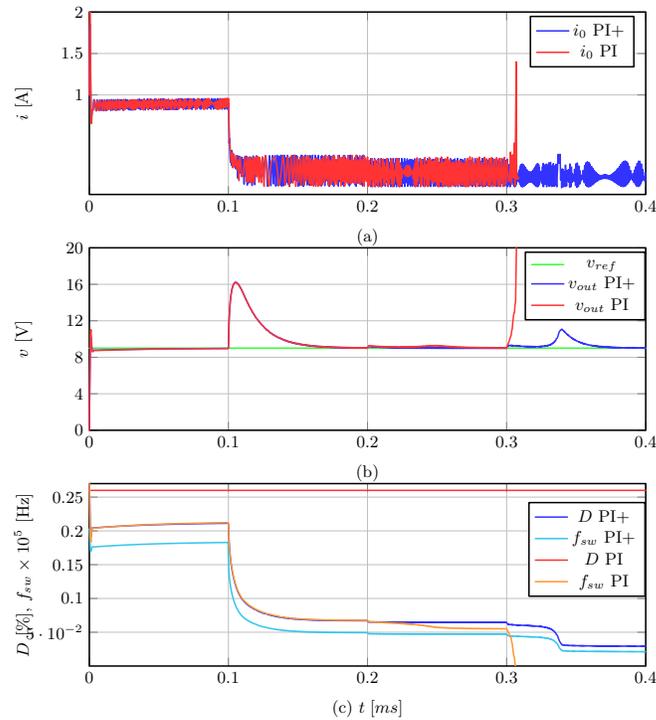


Figura 4.5: Señales obtenidas del  $PI$  clásico y del  $PI+$  mejorado incrementando la carga nominal: (a)  $i_0$ , (b)  $v_{out}$ , (c)  $D$ , y  $f_{sw}$ .

El experimento de mayor interés en la practica es la reducción de la carga ya que esta acción incrementa la corriente de salida ya que se busca que el voltaje permanezca constante, lo cual implica un incremento en la potencia extraída del convertidor y por tanto un incremento en el estrés mayor en los dispositivos del convertidor, en este caso el  $PI$  mejorado permite una reducción mayor que el 80 % de la carga nominal, en comparación con el 42 % del  $PI$  clásico. Para el experimento de incremento de la carga el  $PI$  mejorado continuo garantizando regulación del voltaje incluso con incrementos de mas del 100 % de la carga nominal.

Otra característica importante del control de los convertidores QR es la capacidad de garantizar la conmutación suave, en este caso de la corriente del  $i_r$  correspondiente al inductor del tanque resonante, en las figuras ?? y 4.7 se muestran las señales  $i_r$ ,  $v_r$  y  $\alpha_1$  para el  $PI$  clásico y el  $PI$  mejorado ante incrementos de carga, donde se observa como el  $PI$  mejorado mantiene la forma de la corriente en todas las variaciones de carga a diferencia del  $PI$  clásico donde notable diferencia en la forma de onda de la corriente se

pierde notablemente a partir de la segunda variación de carga.

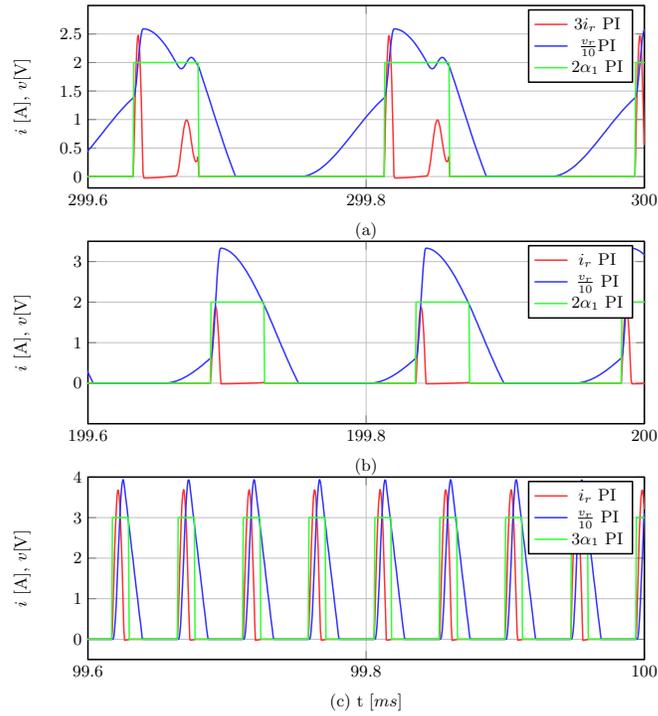


Figura 4.6: Signals of  $i_r$ ,  $v_r$ ,  $\alpha_1$  in steady-state from the  $PI$  controller when: a)  $R = 146 \Omega$ , b)  $R = 95 \Omega$ , and c)  $R = 10 \Omega$ .

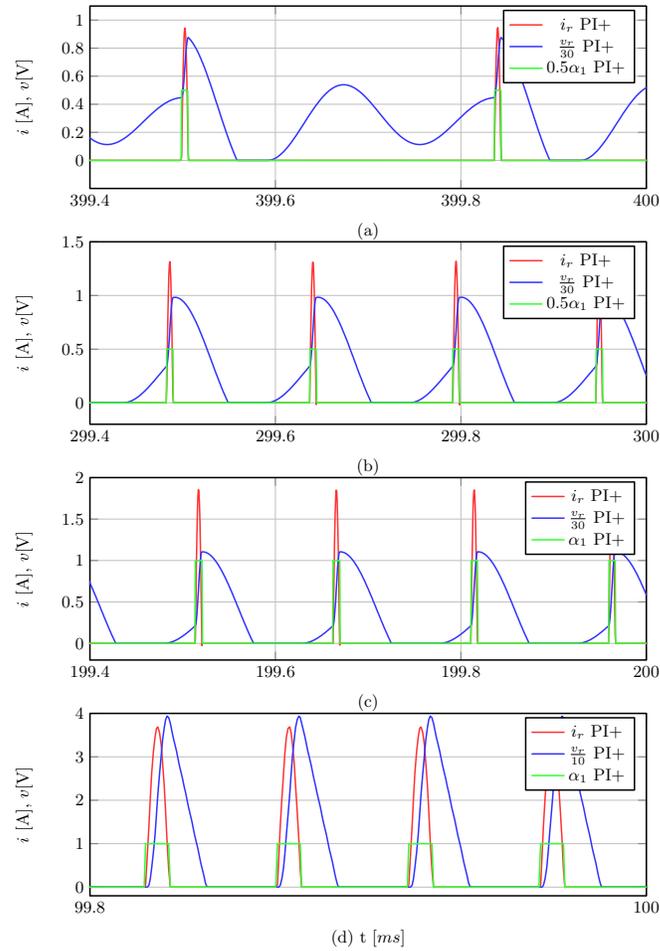


Figura 4.7: Signals of  $i_r$ ,  $v_r$ ,  $\alpha_1$  in steady-state from the  $PI+$  controller when: a)  $R = 451 \Omega$ , b)  $R = 146 \Omega$ , c)  $R = 95 \Omega$ , and (d)  $R = 10 \Omega$ .

Para finalizar el análisis del controlador PI mejorado, se simuló también con el modelo Hamiltoniano continuo, esto para mostrar la consistencia entre la implementación con un modelo continuo y la parte experimental con el circuito eléctrico mostrado anteriormente. El esquema se muestra en la Figura 4.8, donde la señal de entrada  $\alpha$ , es una señal continua que aproxima mediante la serie de Fourier compleja a la señal cuadrada PWM que se implementa en la práctica, esta señal se genera a través del banco de osciladores Hamiltonianos complejos vistos en el capítulo de modelado.

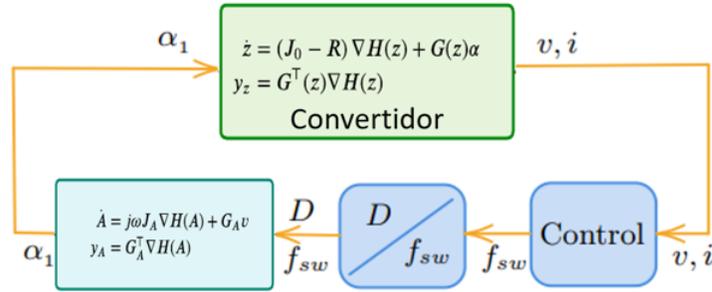


Figura 4.8: S

Para esto, se incluyeron tres componentes armónicas, la de orden 0, orden 1 y orden 2. Las ganancias consideradas del controlador PI son  $k_p = 350$  y  $k_i = 900000$  mientras que la condición inicial de la parte integral es  $C.I = 200000$ .

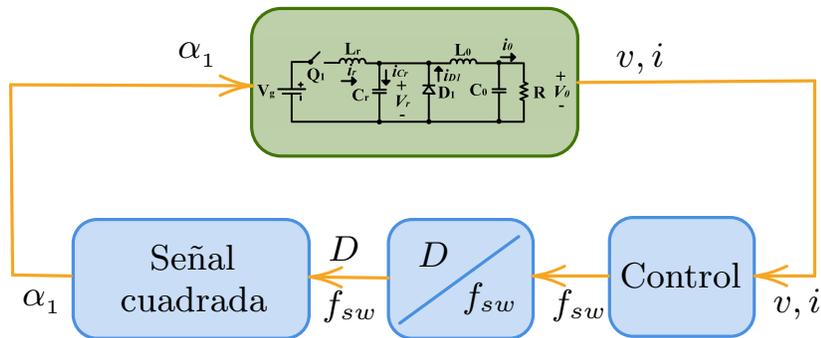


Figura 4.9: Implementación del controlador al sistema cuasi-resonante

La evaluación numérica se realizó en Simulink de MATLAB con un paso de integración fijo  $T_s = 5[ns]$ . Los parámetros del tanque resonante son  $L_r = 1.6\mu H$ ,  $C_r = 64nF$ , que genera una frecuencia de resonancia  $f_r = 0.49736[MHz]$  y los parámetros del filtro son  $L_0 = 0.2mH$  y  $C_0 = 20\mu F$ . Finalmente, la fuente de corriente directa es  $V_g = 20V$ . Los parámetros se recuperaron de [14].

El experimento se realizó en un lapso de 25 milisegundos, en el cual se muestra que ante cambios de carga de hasta el 60% del valor nominal, se sigue teniendo regulación de voltaje salida después de cada cambio de carga y conmutación a corriente cero en el interruptor. Esta capacidad del controlador para compensar cambios de carga de la magnitud mencionada se debe a la inclusión del bloque que relaciona el ciclo de trabajo

con la frecuencia de conmutación.

En la Figura 4.10(a) se observa la corriente  $i_0$ , el valor inicial de la corriente es cero. El transitorio llega a un máximo de  $4.7[A]$  y después llega a un valor promedio de  $3.1[A]$ . En  $t = 5[ms]$  se realiza un cambio de carga de  $r = 4[\Omega]$  a  $r = 7[\Omega]$  y la corriente se estabiliza en  $1.95[A]$ . En  $t = 10[ms]$  se coloca la carga nominal del convertidor  $r = 10[\Omega]$  y la corriente se estabiliza en  $1.4[A]$ . Posteriormente, se introducen dos nuevos incrementos de  $3[\Omega]$  en el valor de la resistencia de carga en  $t = 5[ms]$  y  $t = 5[ms]$  pudiéndose observar que se sigue logrando regulación del voltaje de salida.

En la Figura 4.10(b) se observa el voltaje de referencia  $v_{ref} = 13[v]$  y el voltaje de la carga. El error en estado estacionario es menor del 3% y el error máximo en el transitorio es del 15%.

En la Figura 4.10(c) se observa el ciclo de trabajo y la frecuencia de la señal cuadrada  $\alpha_1$ . Es importante notar que el ciclo de trabajo se modifica en los cambios de carga pero se mantiene entre cero y uno. Con respecto a la frecuencia de conmutación, observe que se mantiene cercana al 50% de la frecuencia de resonancia del tanque.

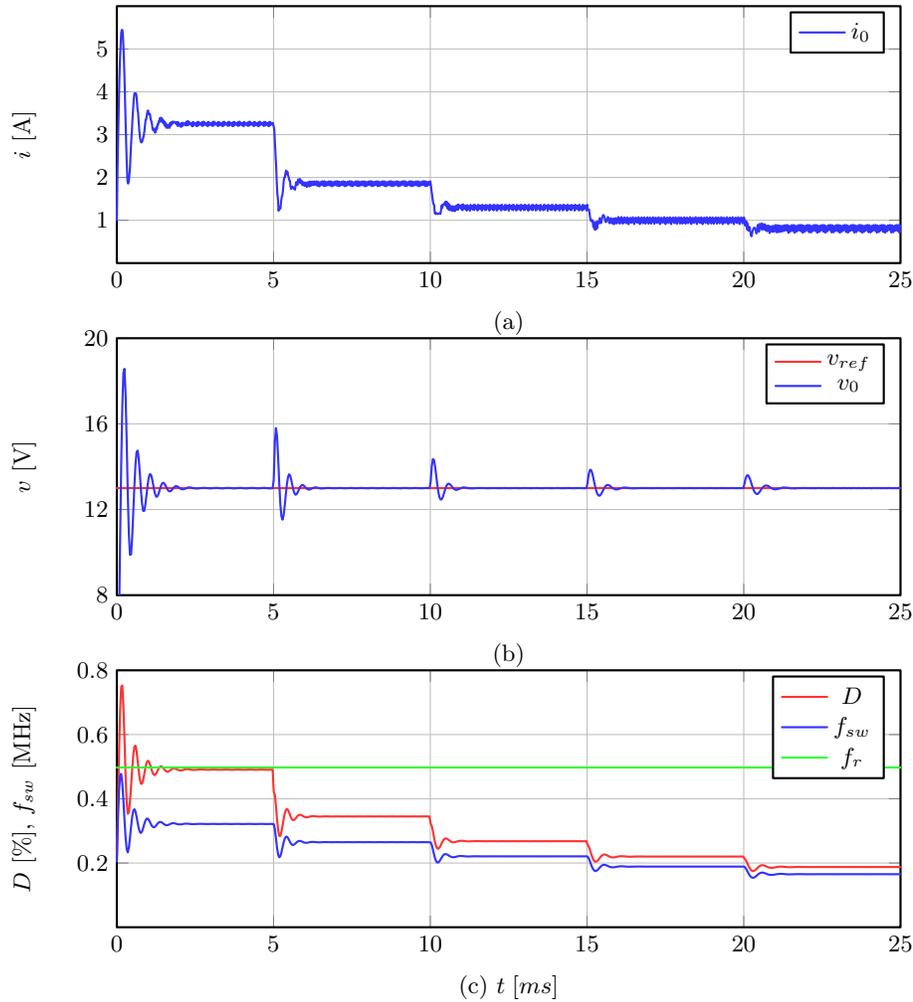


Figura 4.10: Estados del convertidor

En la Figura 4.11 se muestran tres gráficas. En la Figura 4.11(a) se presenta un acercamiento del estado estacionario para una carga de  $r = 4[\Omega]$ , en la Figura 4.11(b) para una carga de  $r = 7[\Omega]$  y en la Figura 4.11(c) para una carga de  $r = 10[\Omega]$ . La importancia de estos comportamientos radica en el hecho de que en las tres gráficas se observa la corriente  $i_r$  y el voltaje  $v_r$ , que son las variables del tanque resonante, y la señal cuadrada  $\alpha_1$ , que es la variable de control. Las figuras muestran que se satisface la condición de conmutación a corriente cero con diferentes condiciones de carga. Además se observan los cuatro modos de operación del QRCB para cada periodo de la señal cuadrada, por lo cual, se puede concluir la robustez del esquema propuesto para garantizar la conmutación cero y satisfacer la regulación de voltaje en la carga.

Otro experimente de interés en la aplicación es la

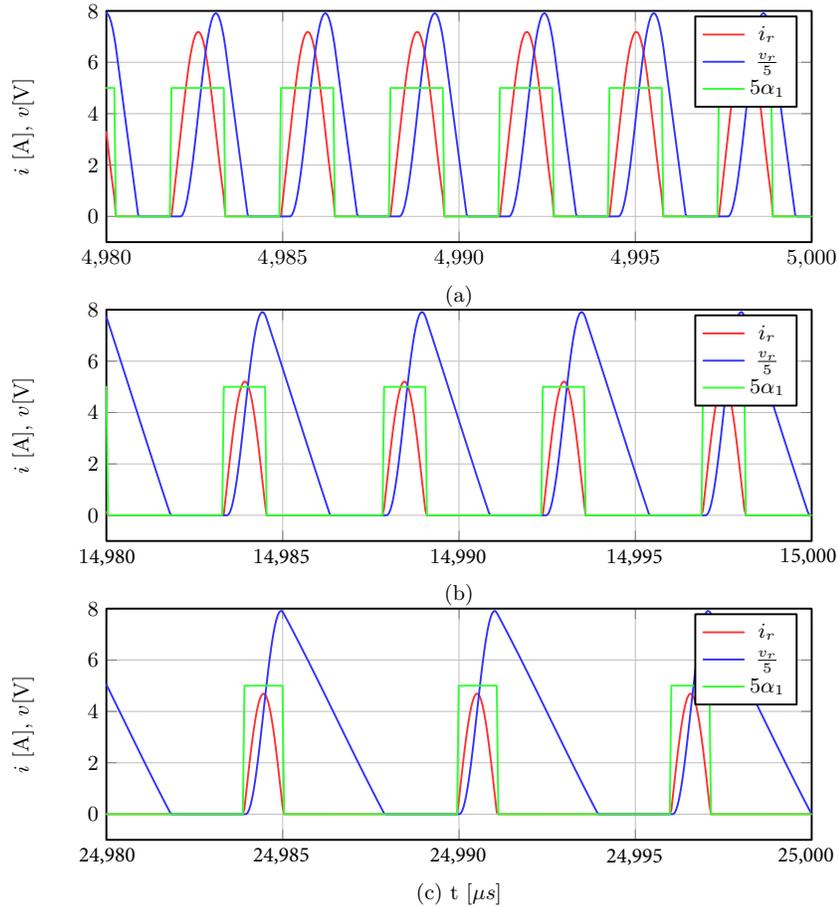


Figura 4.11: Conmutación a corriente cero después de la variación de carga.

## 4.3. PI Pasivo

### 4.3.1. Interconexión pasiva del Modelo Hamiltoniano.

La interconexión del modelo Hamiltoniano conmutado con la salida del banco de osciladores Hamiltonianos complejos, permite obtener un modelo Hamiltoniano continuo del convertidor QRCB donde las entradas de control son el ciclo de trabajo  $D$  y la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$ .

De forma generalizada el procedimiento de modelado de aproximación continua pre-

sentado se puede aplicar a sistemas con estructura Hamiltoniana de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (J_0 - R_0) \nabla H(z) + G(z)\alpha, \\ y_z &= G^\top(z) \nabla H(z)\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde  $J_0 = -J_0^\top$  es la matriz antisimétrica de interconexión,  $R_0 = R_0^\top \geq 0$  la matriz semidefinida positiva de disipación,  $H(z)$  la función escalar de almacenamiento de energía del sistema,  $G(z)$  la matriz de entrada y  $\alpha$  el vector de variables de control.

Para la operación de este sistema se considera que el vector de entrada  $\alpha$ , tiene como componentes señales  $\alpha_l(t)$ , las cuales son periódicas. Más aún, estas señales se pueden aproximar adecuadamente mediante  $\alpha_l = D + y_A$ , donde  $D$  corresponde al ciclo de trabajo (o armónico de orden cero) y  $y_A$  es la salida de un sistema Hamiltoniano complejo dado por:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= j\omega J_A \nabla H(A) + G_A v \\ y_A &= G_A^\top \nabla H(A)\end{aligned}\tag{4.17}$$

con función de almacenamiento:

$$H(A) = \frac{1}{4} A^\top A\tag{4.18}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \bar{a}_1 \\ a_2 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \bar{a}_n \end{bmatrix}, \quad \nabla H(A) = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ a_1 \\ \bar{a}_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \\ a_n \end{bmatrix}, \quad G_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema representa un banco de osciladores Hamiltonianos complejos, con  $A \in \mathcal{C}^{2n}$  el vector de estados del banco de osciladores, el subíndice  $i \in 1, 2, 3 \dots n$  representa el  $i$ -ésimo armónico y corresponde tanto el estado  $a_i$  así como su complejo conjugado,  $v \in \mathcal{R}$ , es la acción de control,  $H_A : \mathcal{C}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}$  es la función de almacenamiento de energía,  $J_A : \mathcal{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ , matriz antisimétrica  $J_A = -J_A^\top$ , es la interconexión natural de los osciladores,  $v, y_A \in \mathcal{R}$ , son las variables conjugadas cuyo producto tiene unidades de potencia y  $G : \mathcal{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}^{2n}$ .

Dada la estructura del sistema (4.17), su salida toma la forma:

$$y_A = \sum_1^n (C_n^* e^{jn\omega_s t} + \bar{C}_n^* e^{-jn\omega_s t}) = 2\text{Re}[C_n^* e^{jn\omega_s t}] \quad (4.19)$$

donde la acción de la entrada  $v$  en cada oscilador Hamiltoniano complejo permite hacer que los coeficientes  $C_n^* = C_n$  sean iguales.

La primera etapa para en diseño del esquema de control consiste en interconectar los sistemas (4.16) y (4.17). Para esto, se considera el operador:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{g_x} \begin{bmatrix} y_z \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ u \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

el cual establece una interconexión que preserva potencia.

De esta forma, el sistema interconectado define un nuevo sistema Hamiltoniano aumen-

tado como se muestra en la Figura 4.12 dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J - R)\nabla H + G_x(x)\mu, \\ y_x &= G^\top(x)\nabla H(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} z \\ A \end{bmatrix}, \quad y_x = \begin{bmatrix} y_z \\ y_A \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} D \\ u \end{bmatrix}$$

mientras que

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_A \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x) = \begin{bmatrix} \nabla H(z) \\ \nabla H(A) \end{bmatrix}$$

La función de almacenamiento de energía del sistema aumentado es:

$$H(x) = H(A) + H(z) \quad (4.22)$$

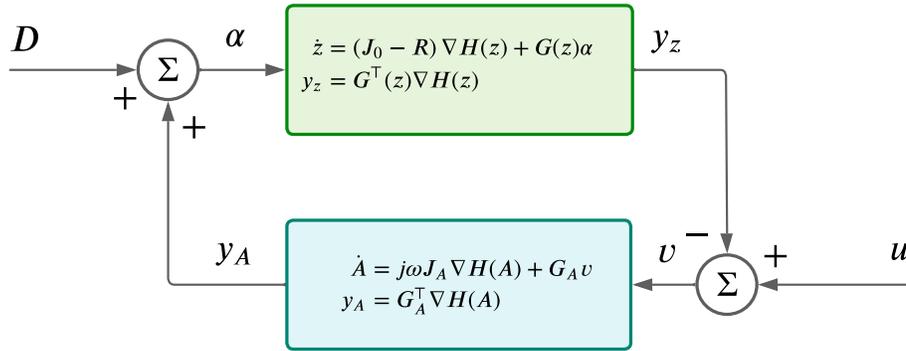


Figura 4.12: Interconexión de los dos sistemas Hamiltonianos.

Una propiedad esperada pero que es conveniente establecer de manera explícita, es la que se refiere a las propiedades de pasividad del sistema aumentado presentado.

**Proposición**

Bajo la interconexión (4.20), de los sistemas Hamiltonianos (4.16) y (4.17), el sistema aumentado (4.21) es pasivo desde la entrada  $\mu$  hasta la salida  $y_z$ .

**Demostración:**

Considerando el mapeo entrada-salida del sistema aumentado se tiene que:

$$\mu^\top y_x = Dy_z + uy_A \quad (4.23)$$

De la interconexión (4.20) despejando  $D = \alpha - y_A$  y  $u = v + y_z$  y sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mu^\top y_x &= (\alpha - y_A)^\top y_z + (v + y_z)^\top y_A \\ &= \alpha^\top y_z + v^\top y_A \end{aligned} \quad (4.24)$$

Se sabe que los sistemas Hamiltonianos (4.16) y (4.17) son pasivos, es decir, satisfacen:

$$\begin{aligned} \dot{H}(A) &\leq v^\top y_A \\ \dot{H}(z) &\leq \alpha^\top y_z \end{aligned} \quad (4.25)$$

entonces:

$$\mu^\top y_x = \alpha y_z + v y_A \geq \dot{H}(A) + \dot{H}(z) \quad (4.26)$$

Por otra parte, calculando la derivada de la función de almacenamiento de energía  $H(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema aumentado, según (4.22),  $\dot{H}(x) = \dot{H}(A) + \dot{H}(z)$  por lo tanto:

$$\dot{H}(x) \leq \mu^\top y_x \quad (4.27)$$

■

**4.3.2. Diseño del controlador interno PI pasivo**

En esta sección se procede a diseñar un control interno para el QRCB aprovechando las propiedades inherentes a los sistemas Hamiltonianos y al control basado en modelo.

Bajo las condiciones anteriores, la formulación del problema de control interno se puede establecer de la siguiente manera:

*Dada una trayectoria deseada acotada  $x^*$*

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= (J - R) \nabla H(x^*) + G_x(x^*) \mu^*, \\ y_x^* &= G^\top(x^*) \nabla H(x^*)\end{aligned}\tag{4.28}$$

*para alguna entrada de control acotada  $\mu^*$  y alguna señal de salida medida, encontrar una ley de control  $\mu = f(x, x^*, \mu^*)$ , tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x - x^* = 0\tag{4.29}$$

*y garantice estabilidad interna, así como regulación al punto de operación deseado del sistema (4.21).*

La solución al problema de control planteado se presenta en la siguiente proposición.

### Proposición 3

Considere el sistema Hamiltoniano (4.21). Suponga que:

**Suposición 3.1** El voltaje de salida  $v_0$  es una función conocida y acotada.

**Suposición 3.2** La trayectoria de referencia  $x^*$  son funciones acotadas con derivada acotada.

**Suposición 3.3** Todos los parámetros del sistema son positivos y conocidos.

Bajo las condiciones anteriores la ley de control dada por:

$$\begin{aligned}\mu &= -K_p y + K_I \zeta + \mu^* \\ \dot{\zeta} &= -y \\ y &= G^\top(x^*) \tilde{x}\end{aligned}\tag{4.30}$$

con la variable de error  $\tilde{x} = x - x^*$ ,  $u^*$  que satisface (4.28), y las matrices de ganancia  $K_p, K_I \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} > 0$ , garantiza el objetivo de control.

**Demostración:**

Primero se obtiene la dinámica de error, despejando la trayectoria deseada

$$x^* = x - \tilde{x} \quad (4.31)$$

de la definición de la variable de error y definiendo  $\tilde{\mu} = \mu - \mu^*$  se obtiene que:

$$\dot{\tilde{x}} = (J - R) \nabla H(\tilde{x}) + G_x(x^*) \tilde{\mu}, \quad (4.32)$$

Esto se obtiene de sustituir 4.31 en la dinámica admisible 4.28 y desarrollando:

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\tilde{x}} &= (J - R) \nabla H(\dot{x} - \dot{\tilde{x}}) + G_x(x^*)(\mu - \tilde{\mu}), \\ \dot{x} - \dot{\tilde{x}} &= (J - R) [\nabla H(\dot{x}) - \nabla H(\dot{\tilde{x}})] + G_x(x^*)\mu - G_x(x^*)\tilde{\mu}, \quad \text{considerando } G_x(x^*) = G_x(x) \\ \dot{x} - \dot{\tilde{x}} &= \underbrace{(J - R) \nabla H(\dot{x}) + G_x(x^*)\mu}_{\dot{x}} - (J - R) \nabla H(\dot{\tilde{x}}) - G_x(x^*)\tilde{\mu}, \\ \dot{\tilde{x}} &= (J - R) \nabla H(\dot{\tilde{x}}) + G_x(x^*)\tilde{\mu} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para probar la estabilidad del punto de equilibrio  $\tilde{x} = 0$ , se evalúa la derivada temporal de la función de energía  $H(\tilde{x}, \zeta) = H(x) + \frac{1}{2} \zeta^\top K_I \zeta$ , a lo largo de las trayectorias del sistema obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{H}(\tilde{x}, \zeta) &= \dot{H}(\tilde{x}) + \frac{1}{2} [\dot{\zeta}^\top K_I \zeta + \zeta^\top K_I \dot{\zeta}], \quad \text{donde } \dot{H}(\tilde{x}) \leq y^\top \tilde{\mu} \text{ y } \dot{\zeta} = -y \\ \dot{H}(\tilde{x}, \zeta) &\leq y^\top \tilde{\mu} - y^\top K_I \zeta \\ \dot{H}(\tilde{x}, \zeta) &\leq y^\top (-K_p y + K_I \zeta) - y^\top K_I \zeta \\ \dot{H}(\tilde{x}, \zeta) &\leq -y^\top K_p y < 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

por lo que se garantiza estabilidad asintótica del punto de equilibrio  $\tilde{x} = 0$  en el sentido de Lyapunov. ■

### 4.3.3. Dinámica admisible para el convertidor

El modelo Hamiltoniano del QRCB, se expresa explícitamente en variables de corrientes y voltajes como:

$$L_r \frac{di_r}{dt} + v_r \alpha_1 = V_g \alpha_1 \quad (4.35a)$$

$$C_r \frac{dv_r}{dt} + i_0(\alpha_2) - i_r \alpha_1 = 0 \quad (4.35b)$$

$$L_0 \frac{di_0}{dt} - v_r(\alpha_2) + v_0 = 0 \quad (4.35c)$$

$$C_0 \frac{dv_0}{dt} + \frac{1}{R} v_0 - i_0 = 0 \quad (4.35d)$$

Definiendo como salida el voltaje en la carga  $v_0$  y tomando un valor de referencia deseada a la salida  $v_0^*$ , al sustituir en la ecuación (4.35d), se obtiene la corriente deseada  $i_0^*$ :

$$i_0^* = \frac{1}{R} v_0^* \quad (4.36)$$

Del balance de energía se puede obtener la frecuencia de conmutación deseada como:

$$f_s^* = f_s(v_0^*, i_0^*) = \frac{v_0^*}{V_g} \left( \frac{1}{\frac{\tau_1(i_0^*)}{2} + \tau_2(i_0^*) + \tau_3(i_0^*)} \right) \quad (4.37)$$

Adicionalmente, se conoce la relación entre el ciclo de trabajo  $D$  y la frecuencia de conmutación, por lo que:

$$D^* = D(f_s^*, i_0^*) \approx i_0^* \left( \frac{L_r}{V_g} + \frac{Z_r}{\omega_r V_g} \right) f_{sw}^* \quad (4.38)$$

Luego, por la forma en que se han definido las señales:

$$\alpha_1^* = \alpha_1(D^*, f_s^*) = D^* + y_A(f_s^*) \quad (4.39)$$

donde  $y_A$  es la salida pasiva del banco de osciladores Hamiltonianos definida como:

$$y_A^* = \sum_{n=1}^2 (a_n^* + \bar{a}_n^*), \quad (4.40)$$

la forma de los armónicos se puede obtener de las expresiones analíticas de los términos de la serie de Fourier compleja:

$$y_A^* = \sum_{n=1}^2 (C_n^* e^{jn\omega_s t} + \bar{C}_n^* e^{-jn\omega_s^* t}) = 2 \sum_{n=1}^2 \text{Re}[C_n^* e^{jn\omega_s^* t}] \quad (4.41)$$

y

$$c_n^* = \frac{\mathbb{A}}{2j\pi n} e^{-jn\omega_s^* \delta} (1 - e^{-2j\pi n D^*}) \quad (4.42)$$

en esta implementación  $\mathbb{A} = 1$  y  $\delta = 0$ . Luego, como se tienen las expresiones analíticas de los armónicos deseados se puede dar de forma directa el vector de estados deseados del banco de osciladores:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ \bar{a}_1^* \\ a_2^* \\ \bar{a}_2^* \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

Finalmente de (4.35c) y (4.35a) se obtienen los estados deseados faltantes del convertidor

$$\frac{dv_r^*}{dt} = \frac{1}{C_r} (-i_0^* + i_r^* \alpha_1^*) \quad (4.44a)$$

$$\frac{di_r^*}{dt} = \frac{1}{L_r} (V_g - v_r^*) \alpha_1^* \quad (4.44b)$$

de tal forma que se ha obtenido la dinámica aumentada deseada  $z^* = [x^* \ A^*]^\top$  con  $x^* = (v_0^*, i_0^*, v_r^*, i_r^*)$ , así como la entrada deseada  $\mu^* = [D^* \ v_0^*]^\top$  y bajo la interconexión, se satisfacen las condiciones necesarias para la implementación del controlador.

#### 4.3.4. Evaluaciones numéricas

En esta sección se muestran las simulaciones numéricas donde se compara el comportamiento del PI pasivo contra el PI mejorado aplicado en la sección anterior con el mismo paso de integración y los mismos parámetros de diseño del QRCB que mantiene el PI pasivo.

En la Figura 4.3.4 se compara el comportamiento para la regulación de voltaje donde se observa un transitorio con menor sobre paso y duración del PI pasivo respecto al PI clásico.

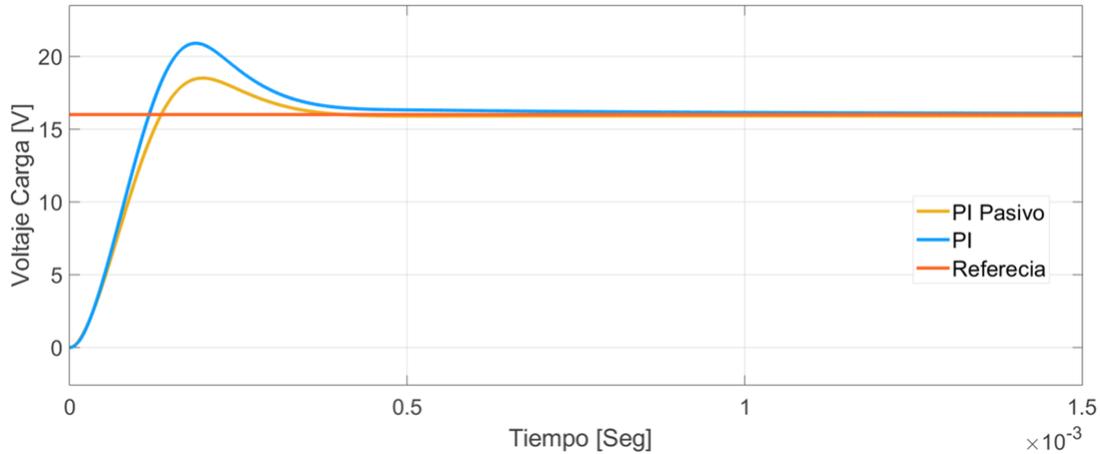


Figura 4.13: Regulación de salida para PI pasivo PI clásico

En la Figura 4.3.4 se observa la forma de onda típicas del funcionamiento del convertidor Buck QR.

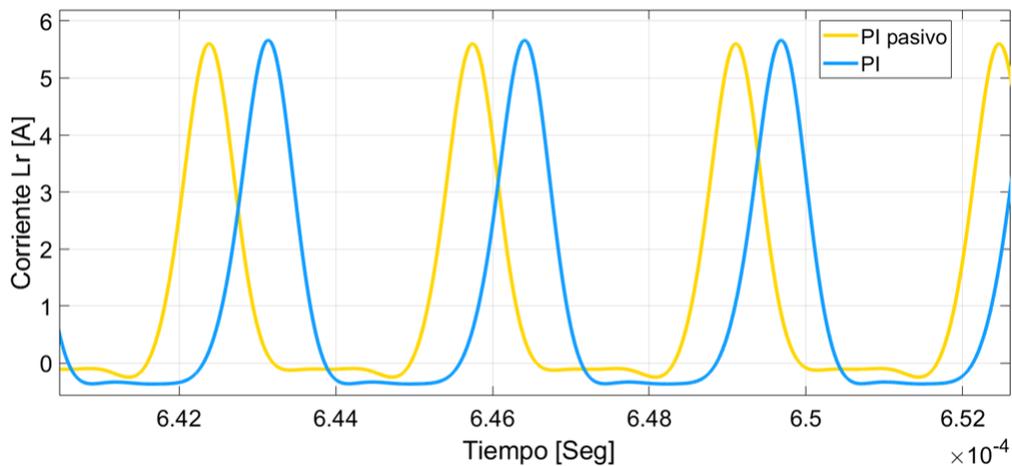


Figura 4.14: Conmutación suave para PI pasivo PI clásico

Sin embargo, a pesar de las ventajas ofrecidas por el PI pasivo, un tema en el que se vio superado por el PI mejorado es el que se refiere a robustez frente a variaciones en la carga. Este hecho se refleja en lo mostrado en la Figura 4.15 en la que se observa el comportamiento del voltaje de salida bajo el efecto del PI pasivo, donde en  $t = 1[ms]$ , se

introduce un cambio de carga disminuyendo el 10 %, 20 %, 30 %, 40 % y 50 % en la carga nominal de  $10\Omega$ . Se observa que bajo estas condiciones se presentan errores en estado estacionario del 3.75 %, 8.125 %, 11.87 %, 16.25 %, y 20.6 % respectivamente. Aunque los errores de voltaje son aceptables para variaciones de carga menores del 10 % y considerando que en la implementación clásica solo se soporta variaciones de hasta el 30 %, existe una notable desventaja frente al PI mejorado presentado en esta tesis.

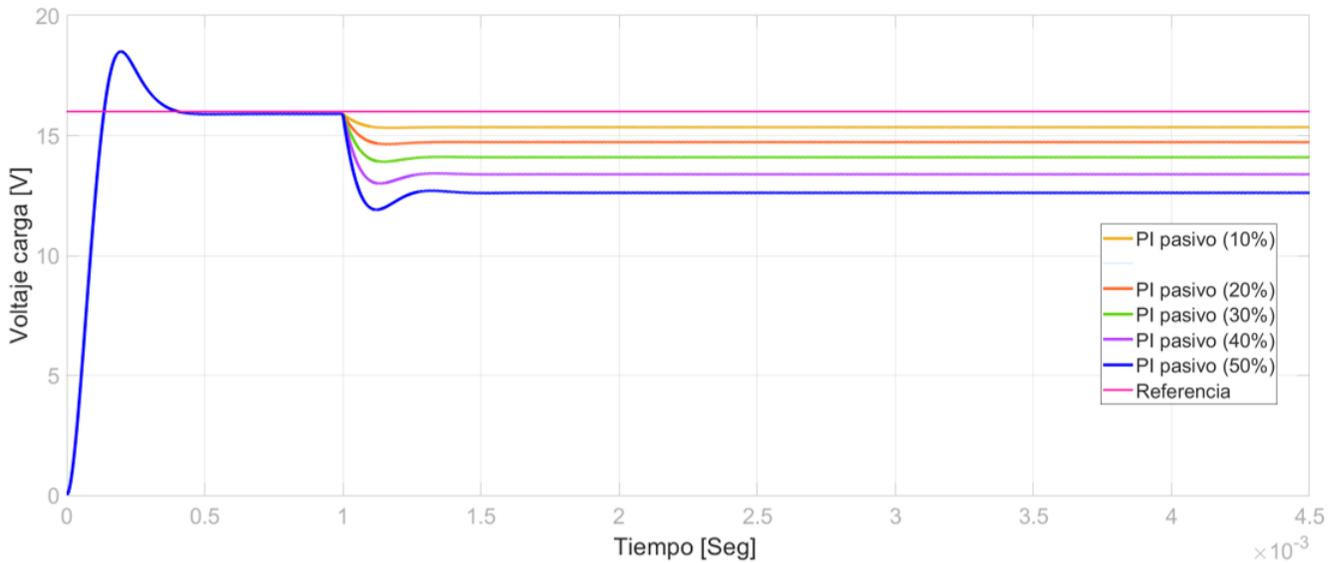


Figura 4.15: PI pasivo realizando una variación en la carga nominal del convertidor del 10 %, 20 %, 30 %, 40 % y 50 % al tiempo  $t = 1\text{mSeg}$

El comportamiento en estado estacionario después de la variación de carga se debe a la naturaleza pasiva del controlador implementado, ya que la salida pasiva del sistema aumentado está relacionada directamente con la potencia del tanque resonante, lo cual cambia el paradigma del algoritmo PI, ya que usualmente este algoritmo toma como salida el voltaje en la carga  $v_0$ , la cual se compara con la referencia constante dada  $v_0^*$ , sin embargo en el PI pasivo la referencia la define tanto un voltaje de referencia así como la corriente definida por la ley de Ohm  $i_0^* = v_0^*/R$ , esta referencia define una potencia constante en el tanque resonante  $i_{rg}$  que se mantiene fija ya que en el algoritmo existe incertidumbre paramétrica, es decir el control no conoce si cambia el valor de la carga  $R$ , por lo que al existir una variación en la carga del convertidor cambia la corriente inevitablemente (como se observa en la Figura 4.16), lo cual cambia la potencia de salida, esto implicaría que el error en

estado estacionario es constante pero no cero ya que la potencia de referencia no cambia, este error se ve reflejado en el error en estado estacionario en el voltaje de salida después de la variación de la carga.

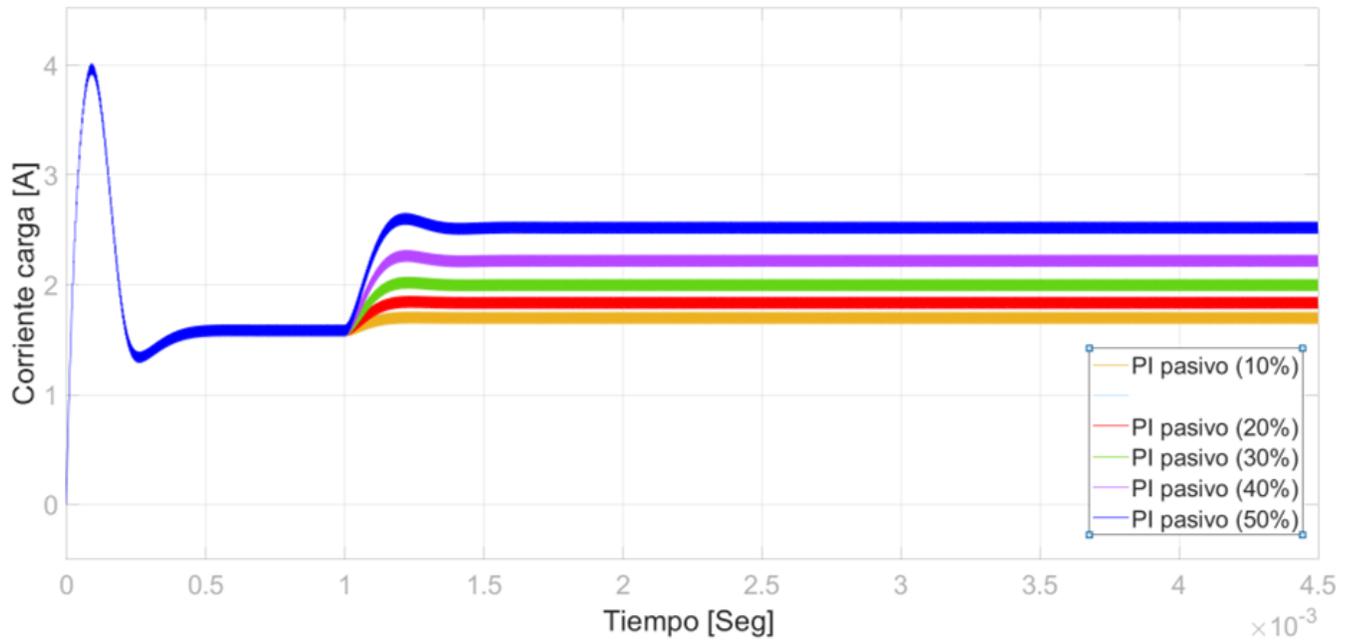


Figura 4.16: Variación de la corriente

# Capítulo 5

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en los diferentes capítulos de la tesis se puede concluir lo siguiente:

1. Los modelos basados en la técnica GGSA reportados hasta ahora para los convertidores Cuasi-resonantes no consideran explícitamente la dependencia del ciclo del trabajo  $D$  con la frecuencia de conmutación  $f_s$  y la conversión de voltaje del convertidor. Se mostró que incorporar esta dependencia en los algoritmos de control mejora el tiempo de respuesta a variaciones de carga, extiende el rango de operación de la frecuencia de conmutación y reduce los costos de implementación al no requerir de algún sensor externo para determinar la condición de conmutación suave.
2. Modelar el convertidor Buck QR a partir sistemas Hamiltonianos, permite aprovechar las propiedades de su estructura e implementar algoritmos de control basado en modelo lo cual provee de una interpretación física y permite además realizar análisis de estabilidad.
3. La aproximación de la señal entrada a partir de la salida de un banco de osciladores hamiltonianos complejos, representa una forma innovadora de trabajar con modelos variantes en el tiempo donde la entrada está dada por una señal discreta. Esto permitio obtener a través de la interconexión de sistemas Hamiltonianos una muy buena representación continua de sistemas de naturaleza discontinua, aproximando bien el comportamiento real del sistema.

4. La implementación del PI clásico incorporando el bloque que relaciona el ciclo de trabajo con la frecuencia de conmutación, mejoró en gran medida la respuesta y la robustez del sistema tolerando variaciones de carga de hasta el 60 %.
5. La metodología desarrollada en la tesis para el modelado y control del convertidor Buck QR con una perspectiva Hamiltoniana, se puede extender a diferentes topologías de estudio de convertidores Cuasi-resonantes y resonantes, como lo es la topología Boost, Boost-Buck cuasi-resonante, y otras variantes del QRCB que sean de interés en el área, lo cual provee una serie de herramientas para trabajos futuros

# Bibliografía

- [1] Kwang-Hwa Liu, Ramesh Oruganti, and Fred C Lee. Resonant switches-topologies and characteristics. In *1985 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 106–116. IEEE, 1985.
- [2] Kwang-Hwa Liu. *HIGH-FREQUENCY QUASI-RESONANT CONVERTER TECHNIQUES (DC-DC CONVERTER, SWITCHING-MODE POWER SUPPLY)*. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1986.
- [3] Maria Teresa Outeiro, Giuseppe Buja, and Dariusz Czarkowski. Resonant power converters: An overview with multiple elements in the resonant tank network. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 10(2):21–45, 2016.
- [4] MZ Hossain, NA Rahim, et al. Recent progress and development on power dc-dc converter topology, control, design and applications: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 81:205–230, 2018.
- [5] Carl Blake and Chris Bull. Igbt or mosfet: choose wisely. *International Rectifier*, pages 1–5, 2001.
- [6] Fred C Lee. High-frequency quasi-resonant converter technologies. *Proceedings of the IEEE*, 76(4):377–390, 1988.
- [7] Richard D Middlebrook and Slobodan Cuk. A general unified approach to modeling switching-converter power stages. In *1976 IEEE power electronics specialists conference*, pages 18–34. IEEE, 1976.

- [8] Khai DT Ngo. Generalization of resonant switches and quasi-resonant dc-dc converters. In *1987 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 395–403. IEEE, 1987.
- [9] Jianping Xu and CQ Lee. A unified averaging technique for the modeling of quasi-resonant converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(3):556–563, 1998.
- [10] Sergey Edward Lyshevski. Resonant converters: Nonlinear analysis and control. *IEEE Transactions on industrial Electronics*, 47(4):751–758, 2000.
- [11] Arash Nejadpak and Farzad Tahami. Stabilizing controller design for quasi-resonant converters described by a class of piecewise linear models. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 61(1):312–323, 2013.
- [12] Abraham Pressman. *Switching power supply design*. McGraw-Hill Education, 2009.
- [13] Carles Batlle, Enric Fossas, Robert Grinó, and Sonia Martínez. Generalized state space averaging for port controlled hamiltonian systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):836–841, 2005.
- [14] A Rameshkumar and S Arumugam. Pi control of quasi-resonant buck converter. In *International Conference on Advances in Information Technology and Mobile Communication*, pages 477–485. Springer, 2012.