



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**EFFECTO DEL GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL EN EL FACTOR DE
FRICCIÓN DE LÍQUIDOS VISCOELÁSTICOS FLUYENDO EN GEOMETRÍAS
CILÍNDRICAS**

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:
JOSE LUIS TRIFUNDIO ROQUE

DIRECTOR DE TESIS
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES
DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

DR. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 7 DE FEBRERO DEL 2023





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que el alumno Jose Luis Trifundio Roque con número de cuenta (314160780) de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de febrero de 2023 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M.C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “EFECTO DEL GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL EN EL FACTOR DE FRICCIÓN DE LÍQUIDOS VISCOELÁSTICOS FLUYENDO EN GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS”

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado matemático y simulación computacional de fluidos complejos con aplicación a bioingeniería>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación en reología y fenómenos de transporte de la UMIEZ por las presentaciones de este proyecto de investigación a nivel de licenciatura.
- A la línea de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415)
- A la línea de investigación: Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

DEDICATORIAS

A mis amados y queridos padres Irene Roque Techachal y Víctor Trifundio Tepetlixpa quienes son mi todo y mayor ejemplo de sacrificio para poder llegar a cumplir mi sueño, el cual han estado conmigo incondicionalmente brindándome todo su amor, cariño, comprensión y dedicación durante toda mi vida. Gracias por confiar en mí. ¡Los amo tanto!

A mi querido y gran hermano Felipe Trifundio Roque por su afectuosa compañía y siempre apoyarme con sus buenas palabras desde la infancia para cumplir mis objetivos.

A mi amor, mi solecito de miel Nadya Adela Estrada Lugo por estar conmigo durante toda la carrera, ser mi luz en la vida pues con su sonrisa bastaba para alegrar mis días, por siempre apoyarme incondicionalmente y amarme ante mis logros y fracasos.

A mi mejor y querida amiga Lenna por ser una fiel y leal compañía en mis días más duros, y por estar en toda mi trayectoria universitaria.

A mis abuelos Petra Techachal y Juan Roque por haberme brindado todo su amor y cariño en la vida, además de grandes valores.

A mis abuelos Rosa Tepetlixpa y Jaime Trifundio por siempre brindarme su cariño, amor y aprecio ante toda circunstancia

A mi asesor de tesis el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por la oportunidad de ser su tesista y compartirme sus conocimientos y apoyo durante todo este camino, por sus consejos, paciencia y dedicación que tuvo hacia mí.

A dios quien siempre me lleva de la mano junto a mi familia, por darme la oportunidad de cumplir mi sueño y poder compartirlo con mis seres amados.

A mis amistades quienes hicieron de mi estancia universitaria un cálido lugar

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	ii
DEDICATORIAS.....	iii
NOMENCLATURA.....	1
GLOSARIO	3
RESUMEN.....	6
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	8
1.1 Preliminares.....	9
1.1.1 Factor de fricción.....	9
1.1.2 Definición de factor de fricción.....	9
1.1.3 Factor de fricción para un fluido viscoelástico lineal	12
1.1.4 Mecánica de fluidos	12
1.1.5 Viscosidad	12
1.1.6 Fluidos newtonianos	13
1.1.7 Fluidos no newtonianos.....	13
1.1.8 Fluidos Viscoelásticos	14
1.2 Antecedentes	16
1.3 Hipótesis:.....	18
1.4 Objetivos de la investigación:	18
1.4.1 General.....	19
1.5 Distribución del material	19
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO.....	21
2.1 Factor de fricción de fluidos newtonianos	22
2.1.1 Deducción del factor de fricción en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$ deformado continua e irreversiblemente deformado por un gradiente de presión constante.	22
2.1.2 Razonamiento matemático.....	23
2.1.3 Ecuaciones teóricas.....	23
a) Ecuación de continuidad.....	23
b) Ecuación de Movimiento	24
c) Perfil de velocidades.....	25
d) Flujo Volumétrico.....	27
2.1.4 Factor de fricción de Darcy	29
2.2. Fluido Newtoniano en una corona circular	29

2.2.1 Modelado matemático	30
2.2.2 Razonamiento matemático.....	30
2.2.3 Flujo Volumétrico.....	32
2.2.4 La velocidad promedio.....	35
2.2.5 Factor de fricción de Darcy en una corona circular	35
CAPÍTULO III MODELADO MATEMÁTICO	36
3.1 Factor de fricción de un fluido viscoelástico de Jeffreys en una geometría capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$	37
3.1.1 Flujo volumétrico.	44
3.1.2 Velocidad promedio.....	46
3.2 Fluido viscoelástico en una corona circular.....	47
3.2.1 Modelado matemático	47
3.2.2 Flujo volumétrico	49
3.2.3 Factor de Fricción de una corona circular	52
CAPÍTULO IV SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	53
4.1 Variables y grupos adimensionales	54
4.2 Variables características	54
4.3 Variables adimensionales.....	54
4.4 Grupos adimensionales	54
4.5 Variables adimensionales.....	55
4.6 Grupos adimensionales	55
4.6.1 Número de Deborah.	55
4.6.2 Número de Jeffreys.....	55
4.7 Funciones adimensionales (capilar)	56
4.8 Funciones adimensionales (corona circular)	56
4.9 Primera configuración: corona circular	60
4.9.1 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte real).....	61
4.9.2 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte iamginaria)	62
4.9.3 Efecto del solvente en el factor de fricción (norma)	63
4.9.4 Efecto de la geometría en el factor de fricción (parte real).....	64
4.9.6 Efecto de la geometría en el factor de fricción (norma)	66
4.9.7 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte real).....	67
4.9.8 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte imaginaria)	69
4.9.9 Efecto de Deborah en el factor de fricción (norma)	70

4.10 Segunda configuración: capilar	71
4.10.1 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte real)	72
4.10.2 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte imaginaria)	73
4.10.3 Efecto de Deborah en el factor de fricción (norma)	74
4.10.4 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte real)	75
4.10.5 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte imaginaria)	76
4.10.6 Efecto del solvente en el factor de fricción (norma)	77
4.11 Efecto de un fluido newtoniano en el factor de fricción	78
CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	80
5.1 Conclusiones.	81
5.2 Trabajo futuro.	82
Apéndice A. Deducción del factor de fricción en un capilar	84
Apéndice B. Deducción del factor de fricción en una corona circular	87
Apéndice C. Deducción del factor de fricción en una rendija	91
BIBLIOGRAFÍA	95

NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzo viscoelástico [Pa]
V	Vector de velocidad [m/s]
G	Vector de aceleración de la gravedad [m/s ²]

Variables dimensionales

a	Radio del capilar [m]
L	Longitud del capilar [m]
Q	Flujo volumétrico [m ³]
C	Constante de integración [1]
V_z	Velocidad axial [m s ⁻¹]
t	Tiempo [s]
(r, ϕ, z)	Coordenadas cilíndricas [m, 1, m]
r	Coordenada radial [m]
$Q(t)$	Velocidad del flujo volumétrico [m ³ s ⁻¹]
ρ	Densidad [Kg/m ³]
$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformación [1/s]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
λ_j	Tiempo de Jeffreys [s]
η_s	Viscosidad del solvente [Pa· s]
η_p	Viscosidad del polímero [Pa · s]
η_0	Viscosidad Total [Pa · s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]

Números adimensionales

Re Reynolds [1]

De Deborah [1]

λ_J Jeffreys [1]

Variables adimensionales

β Parámetro beta [1]

$T(i\omega)$ Función de transferencia compleja [1]

\dot{O}_η^J Operador viscosidad de Jeffreys [1]

$\dot{\omega}$ Frecuencia adimensional con un tiempo [1]

$\dot{O}_\eta^J(i\omega)$ Operador viscosidad de Jeffreys [1]

f_f Factor de fricción de Darcy [1]

GLOSARIO

Deformación:	Es el cambio de la posición de una coordenada de un sistema con respecto a otra coordenada.
Esfuerzo:	Es la fuerza tangencial aplicada por una determinada área
Esfuerzo en la pared:	Es el esfuerzo cortante evaluado en la frontera del sistema (pared)
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (rapidez de deformación y esfuerzo).
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio contino.
Ecuación de Hagen y Poiseuille:	Es la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel sistema físico que al aplicársele un esfuerzo cortante este se deforma continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante, independiente de la posición y del tiempo.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación
Fluido no-newtoniano:	Fluido que su viscosidad depende de la rapidez con la que es deformado.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo
Flujo oscilatorio:	Es el flujo que se origina cuando una fuerza periódica los deforma continua e irreversiblemente

Flujo cortante:	Flujo en el cual una fuerza tangencial deforma continua e irreversiblemente.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Función de transferencia:	Función que relaciona la variable de entrada y la variable de salida en un sistema dinámico
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Gradiente:	Operador matemática espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.
Modelo de Jeffreys:	Ecuación reológica viscoelástica lineal que acopla en paralelo la contribución del esfuerzo del solvente y el esfuerzo del polímero.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidezces de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico conformado por un solvente el cual es el plasma y un polímero que es el hematocrito.
Número de Reynolds:	Número adimensional que relaciona los mecanismos inerciales entre los mecanismos viscosos y describe las transiciones de flujo laminar a turbulento en un sistema físico.
Perfil de velocidad:	La distribución de las velocidades dentro de un sistema en función de la coordenada radial.
Rapidez de deformación:	Es la derivada temporal de la deformación de un fluido
Reología:	Ciencia que estudia la deformación y el flujo de materia cuando es sometida a un esfuerzo.
Tensor de esfuerzos:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo de deformación

Tiempo de retardo:	Es el tiempo que le lleva a un sistema para alcanzar un estado de equilibrio y que depende de la razón entre la viscosidad del solvente y viscosidad total del sistema (polímero-solvente).
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promedio a través del área de sección transversal de flujo.
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elasticidad.
Viscoelasticidad no lineal:	Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta respuestas viscosas y elásticas.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un material.

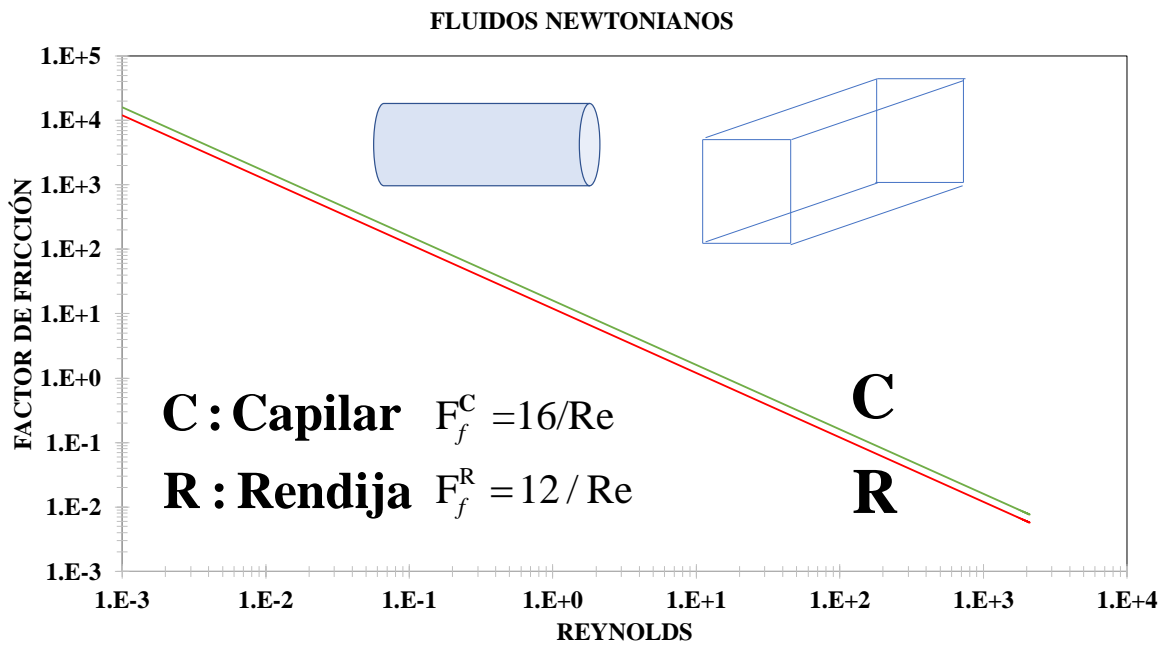
RESUMEN

En este proyecto, se analiza el factor de fricción de fluidos viscoelásticos fluyendo en geometrías cilíndricas (capilar y corona circular). Asumiendo estado no estacionario, fluido incompresible, proceso isotérmico y mecanismos gravitaciones despreciables se obtuvieron expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, esfuerzo en la pared y factor de fricción de Darcy. Para este efecto, se utilizó la transformada de Fourier con el fin de simplificar el problema y llevar la variable temporal t al espacio de las frecuencias. La ecuación de la física matemática resultante es una ecuación diferencial de Bessel no homogénea. El modelo se resuelve con las técnicas matemáticas correspondientes y se obtiene una expresión para el perfil de velocidad general. Asumiendo que la velocidad es cero en la frontera o paredes del sistema y que en el centro del capilar la velocidad es finita, se obtuvo una expresión analítica para un capilar de radio $r=a$ y Longitud $z=L$. De la misma manera, en el caso de la corona circular a velocidad fue evaluada en $r=R_1$ y $r=R_2$ en donde, la velocidad axial es cero. A partir de la integración de los dos sistemas en el área de sección transversal correspondiente se obtuvieron expresiones analíticas para el flujo volumétrico en función de las propiedades materiales, geométricas y la fuerza motriz correspondiente. De esta manera, se obtuvo expresiones cerradas para la función de transferencia en los dos sistemas las cuales, dependen de la reología a través del operador fluidez seleccionado para caracterizar el flujo y la transferencia de momento en el sistema. En particular, el modelo reológico que fue seleccionado es el de Jeffrey el cual es un modelo mecánico en paralelo que combina un modelo de Maxwell y un modelo de Newton. Esta ecuación contiene tres propiedades materiales asociados a la viscosidad total, tiempo de relajación del polímero y un tiempo de retardo del material. Escalando las ecuaciones con variables características se obtuvieron dos grupos adimensionales que describen los mecanismos macroscópicos en el sistema. El primero de ellos es el número de Deborah el cual relaciona los mecanismos inerciales y viscoelásticos del material y el segundo el de Jeffrey que relaciona el tiempo de retardo y el tiempo de relajación del material. Este número, es simplemente un cociente entre la viscosidad del solvente y la viscosidad total. La aportación de este trabajo es una expresión analítica que relaciona el factor de fricción no-newtoniano con el cuadrado del inverso de la función de transferencia la cual, describe la interacción entre el gradiente de

presión y flujo volumétrico. Los resultados demuestran que la viscoelasticidad juega un papel secundario en el factor de fricción el cual es dominado, por los mecanismos disipativos por otra parte, el solvente no contribuye en el aumento del factor de fricción. Finalmente, se analizó un fluido modelo viscoelástico mediante las técnicas empleadas en este trabajo de investigación a nivel de licenciatura. Las aportaciones de este trabajo se centran en una metodología general que puede ser expandida para encontrar el factor de fricción de fluidos viscoelásticos lineales a través de ajustar el operador fluidez a cualquier ecuación reológica lineal o fraccionada en el régimen de bajas deformaciones.

Palabras claves: Factor de fricción de Darcy, líquido viscoelástico, ecuación constitutiva de Jeffrey, transformada integral de Fourier, función de transferencia compleja y fluido modelo

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN



Factor de fricción de fluidos newtonianos en geometría simple rendija y capilar

1.1 Preliminares

1.1.1 Factor de fricción

El factor de fricción en mecánica de fluidos se define como un cociente de dos mecanismos, asociados con los mecanismos viscosos y cinéticos (**Bird et al. 2002**).

Es el coeficiente de la pérdida de cantidad de movimiento del fluido y la disminución de cantidad de movimiento debido a los vórtices de la capa límite y de la pared del tubo. (**Aguilar-Barrios 2013**).

El flujo de fluidos es una parte sumamente importante para llevar a cabo operaciones en el sector industrial. En la dinámica de éstos, siempre se presenta fricción en la tubería y en diferentes accesorios, dando como resultado pérdidas de presión en el flujo a lo largo de su trayectoria en el proceso. (**Anaya-Durand et al. 2014**).

1.1.2 Definición de factor de fricción

El factor de fricción en mecánica de fluidos se define como un cociente de dos mecanismos, asociados con los mecanismos viscosos y cinéticos.

$$f = \frac{-\sigma_{rz}|_{r=a}}{\frac{1}{2}\rho(V)^2} = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\rho(V)^2} \quad (1)$$

La Ec. (1) se puede expresar en términos del número de Reynolds y de la viscosidad aparente, i.e. la viscosidad del fluido.

$$f = \frac{-\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho(V)^2} = \frac{16}{\rho(V)D} \cdot \frac{\sigma_w}{\frac{8(V)}{D}} = \frac{16}{\rho(V)D} \cdot \frac{\sigma_w}{\gamma_{app}} = \frac{16}{\rho(V)D} \cdot \frac{\sigma_w}{\gamma_{app}} \quad (2)$$

El cociente definido entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación aparente nos lleva a una viscosidad aparente η_{app} la cual, se define como:

$$\eta_{app} = \frac{\sigma_w}{\gamma_{app}} \quad (3)$$

Una de las variables claves para calcular el factor de fricción es la rapidez de deformación en la pared. En este punto, se utilizará el formalismo Rabinovitch-Weissenberg con el fin de deducir una expresión analítica **(Bird et al. 1997, 2002)**.

Con el fin de obtener factores de fricción de fluidos con viscosidades reales, se debe de sustituir la rapidez de deformación aparente por la rapidez de deformación real. Para este efecto se emplea el formalismo de Rabinovitch-Weissenberg para obtener la rapidez de deformación en la pared **(Bird et al. 1978, 2002)**.

$$\gamma_{app} = \gamma_{app} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_w}{Q} \frac{\sigma_w}{d\sigma_w} \right] \quad (4)$$

La rapidez de deformación toma la forma:

$$\gamma_{app} = \frac{\gamma_{app}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_w}{Q} \frac{\sigma_w}{d\sigma_w}} \quad (5)$$

Al combinar las expresiones para el factor de fricción, función viscosidad y rapidez de deformación en la pared, se obtiene el factor de fricción modificado por la función viscosidad real.

$$f = \frac{16}{\rho \langle V \rangle D} \cdot \frac{\sigma_w}{\gamma_{app}} = \frac{16}{\rho \langle V \rangle D} \cdot \frac{\sigma_w}{\gamma_w} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_w}{Q} \frac{\sigma_w}{d\sigma_w} \right) = \frac{16}{\rho \langle V \rangle D} \eta_w \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_w}{Q} \frac{\sigma_w}{d\sigma_w} \right) \quad (6)$$

Definiendo la viscosidad en la pared como

$$\eta_w = \frac{\sigma_w}{\gamma_w} \quad (7)$$

Finalmente se tiene lo siguiente:

$$f = \frac{16}{\rho \langle V \rangle D} \eta_{real} \quad (8)$$

En la Ec. (8) la viscosidad real calculada por un reómetro puede expresarse como:

$$\eta_{real} = \eta_w \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sigma_w}{Q} \frac{\sigma_w}{d\sigma_w} \right) \quad (9)$$

La Ec. (9) puede ser expresada en término del número de Reynolds el cual cuantifica los mecanismos de tipo inercial entre los viscosos. Para eso, se escala la función con una viscosidad característica, por lo que se tiene lo siguiente:

$$f = \frac{16}{\frac{\rho \langle V \rangle D}{\eta_{car}}} \cdot \frac{\eta_w}{\eta_{car}} = \frac{16}{Re} \cdot \eta_{real} = \frac{16}{Re \varphi_{real}} = \frac{16}{Re_{NN}} \quad (10)$$

En la Ec. (10) se ha definido el siguiente Reynolds no newtoniano generalizado:

$$Re_{NN} = Re\phi_{real} \quad (11)$$

La Ec. (11) describe que el Reynolds generalizado puede ser descrito como el producto del Reynolds Newtoniano multiplicado por la fluidez no newtoniana. Si dividimos el Reynolds no newtoniano por el Newtoniano, se obtiene el Reynolds reducido el cual es igual a la fluidez del sistema:

$$Re_r = \frac{Re_{NN}}{Re} = \phi_{real} \quad (12)$$

El factor de fricción en fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos se define como el cociente de la viscosidad entre el movimiento.

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

La Ec. (13) representa el gradiente de presión oscilatorio en función del tiempo, ω es la frecuencia angular, t es el tiempo del sistema. La meta es observar cual es el efecto del gradiente de presión pulsátil de la Ec. (13) en el flujo volumétrico.

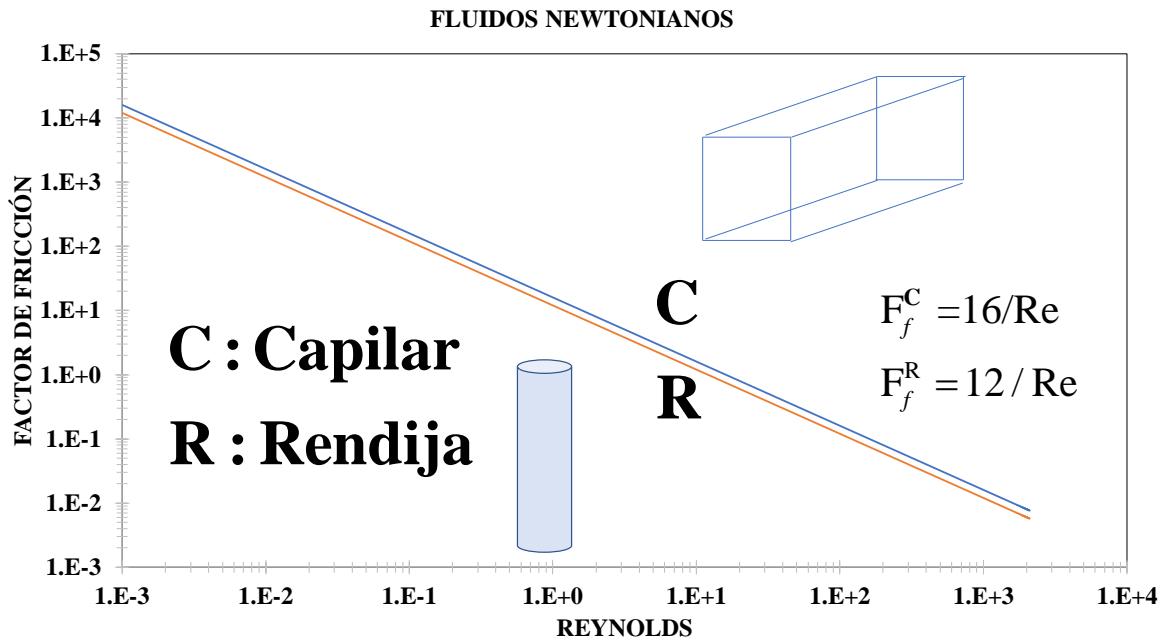


Figura 1. Factor de fricción de un fluido newtoniano en geometrías simples (capilar y rendija).

1.1.3 Factor de fricción para un fluido viscoelástico lineal

El factor de fricción, para este sistema, se puede calcular a través de la permeabilidad dinámica o función de transferencia compleja, por lo que se tiene la siguiente expresión analítica para el sistema de estudio.

$$\frac{f_J}{f_N} = T^{-2}(\omega) \quad (14)$$

En donde f_J es el factor de fricción del fluido de Jeffreys y f_N es el factor de fricción del modelo Newtoniano. Es importante notar que, el factor de fricción, es un efecto de segundo orden en la función de transferencia compleja.

1.1.4 Mecánica de fluidos

La dinámica de fluidos se rige por las ecuaciones de Navier-Stokes, que contienen una serie de ecuaciones diferenciales parciales para las variables características del fluido y se obtienen tratándolo como un continuo (**Gutiérrez-Varela 2019**).

1.1.5 Viscosidad

Una propiedad de un líquido es que tiende a resistir el flujo cuando se le aplica una fuerza. Los líquidos con alta viscosidad tienen cierta resistencia al flujo; los líquidos de baja viscosidad fluyen fácilmente. La fuerza con la que una capa de fluido en movimiento atrae a una capa de fluido adyacente determina su viscosidad (**Díaz del Castillo-Rodríguez 2013**).

La viscosidad de un fluido es aquella propiedad que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas cortantes, se debe a las interacciones entre las moléculas del fluido (**Aguilar-Barrios 2013**).

1.1.6 Fluidos newtonianos

Los fluidos en los que el esfuerzo cortante es proporcional a la velocidad de deformación se denominan fluidos newtonianos (Aguilar-Barrios 2013).

Un fluido newtoniano donde la relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación es lineal. Así, en un fluido newtoniano, la viscosidad dinámica μ es una constante que no depende de los valores del esfuerzo cortante τ y de la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$. Solo depende del material, la temperatura y la presión. Para este tipo de fluido, si la tensión se representa mediante un gráfico de la velocidad de deformación (el llamado reograma) (Crespí-Llorens 2015).

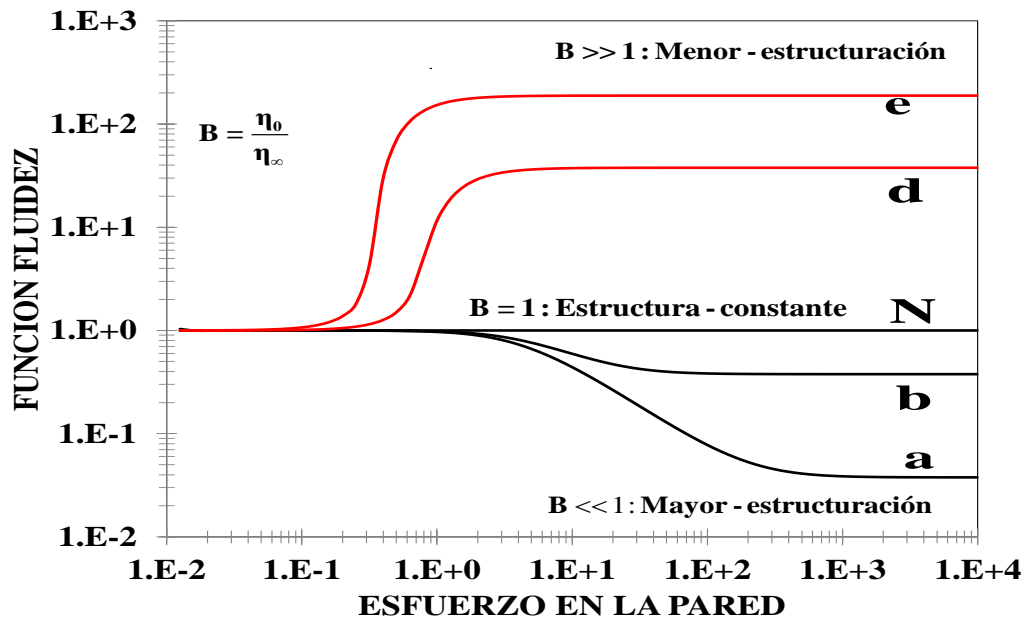


Figura 2. Ilustra el reograma básico en reología de la fluidez en función del esfuerzo en la pared en un capilar $r=a$ y $z=L$. El factor de fricción para un fluido no newtoniano varía como el inverso de fluidez elevado a la segunda potencia por lo que este reograma nos permite tener una representación cualitativa del factor de fricción.

1.1.7 Fluidos no newtonianos.

La definición de líquido se basa en la diferencia entre su estado de agregación. Un sólido tiene una forma definida que varía solo cuando cambian las condiciones externas, mientras que un líquido no tiene forma definida para las mismas

condiciones externas. La principal diferencia entre sólidos y líquidos es su respuesta al estrés. Cuando se aplica una fuerza a un sólido, su forma cambia, es decir, se deforma permanentemente, y la fuerza es pequeña y el cambio es pequeño.

Se buscan soluciones para el flujo de tubería no newtoniano, por ejemplo, en el diseño de procesos donde los fluidos se manipulan en forma más concentrada para disminuir la energía requerida para el transporte o en su caso la separación de solventes (**Tozzi E y Hartt W 2022**).

Los fluidos se pueden clasificar como newtonianos o no newtonianos según su respuesta al esfuerzo cortante. La relación entre los esfuerzos cortantes y la velocidad de deformación se puede expresar de la siguiente manera (**Crispí-Llorens 2015**).

$$\tau = \mu\gamma \quad (15)$$

Para algunos fluidos el esfuerzo cortante no puede ser directamente proporcional a la rapidez de deformación. Estos fluidos se clasifican como no newtonianos, por ejemplo, la sangre, ciertos plásticos y mezcla de barro y agua (**Aguilar-Barrios 2013**).

1.1.8 Fluidos Viscoelásticos

Los fluidos no newtonianos que obedecen tanto la ley de Hooke como la ley de viscosidad de Newton se denominan fluidos viscoelásticos; una propiedad importante de tales fluidos es que pueden recuperar una parte de la deformación al ser retirado el esfuerzo aplicado cuando se presentan deformaciones durante el flujo (**Cárdenas et al. 2011**).

Los materiales poliméricos proporcionan una doble respuesta elástica y viscosa. Por un lado, producen una deformación instantánea provocada por las cargas sobre ellos y una deformación dependiente del tiempo como respuesta a la aplicación de una carga constante en el tiempo (**Fombuena et al. 2017**).

Modelo Mecánico de Maxwell

Elemento en serie

$$\gamma_T = \gamma_s + \gamma_p$$

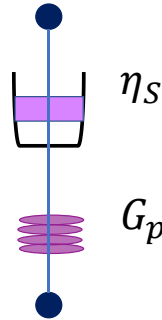


Figura 3. Representación esquemática del modelo viscoelástico de Maxwell con acoplamiento en serie de elemento elástico y elemento viscoso. El elemento elástico está asociado a la energía de recuperación (almacenada) mientras que, el embolo y el pistón relacionan la parte disipativa (fricción)

El modelo de Maxwell establece que el comportamiento de un polímero viscoelástico está determinado por una combinación de un elemento elástico y viscoso acoplados en serie (Fombuena et al. 2017). Sin embargo, el modelo de Maxwell es un modelo lineal para fluidos viscoelásticos y es apropiado solo bajo la condición de que los efectos no lineales sean despreciables, como tensión y estrés muy bajos. El modelo también conduce a un módulo de relajación de tensión exponencial; para materiales reales, sin embargo, la relajación de la tensión obedece a un decaimiento algebraico (Youbing y Ke-Qin 2006).

Los modelos viscoelásticos lineales más simples son el modelo de Maxwell y el modelo de Jeffrey. Este último modela una solución formada por un sistema macromolecular, descrito por el modelo de Maxwell, y un solvente Newtoniano (Bird et al. 2002).

Estos fluidos tienen una parte elástica que obedece a la ley de Hooke (modelo de resorte) y una parte viscosa que obedece a la ley de Newton (efecto amortiguador). Cuando los fluidos de este tipo se someten a una carga que luego se retira, la deformación que se produce se recupera únicamente en la parte elástica del fluido; la parte viscosa del líquido quedará parcialmente deformada, por lo que la recuperación seguramente no será completa (Cárdenas et al. 2011).

1.2 Antecedentes

El factor de fricción está relacionado con la disipación viscosas y se ha analizado con diferentes ecuaciones constitutivas Llamadas: (i) Newtonianos y (ii) No-Newtonianos **(Pinho y Whitelaw 1990; Sochi 2015; Tozzi y Hartt 2022)**. (Pimenta y Campos 1990 Estudiaron las pérdidas de fricción en fluidos newtonianos y no newtonianos en sistemas con configuraciones helicoidales). El factor de fricción es una herramienta que se ha desarrollado en términos en el sistema ha alcanzado estado estacionario. Sin embargo, la mayoría de los procesos toman en cuenta la dependencia del tiempo y la viscoelasticidad del material. En este caso se necesita calcular factores de fricción en función del tiempo. En este contexto, se necesitará emplear una nueva herramienta de trabajo llamada permeabilidad **(Torres-Herrera y Corvera-Poiré 2018; Torres- Herrera 2021)**.

La permeabilidad dinámica es una herramienta muy útil que permite caracterizar la respuesta dinámica lineal de sistemas de interés en ciencia e ingeniería química **(Del Rio et al. 1998)**. Una de las aplicaciones más importantes es los medios porosos en donde, se ha utilizado la teoría del poro promedio **(Lopez de Haro et al. 1996)**.

Esta se ha aplicado en la descripción de sangre, bio-reología, biología, células ciliadas externas del oído interno y sistemas electromagnéticos **(Cuevas y del Rio 2001; De la Guerra y Corvera-Poiré 2022; Flores et al. 2010; Hernández Machado y Corvera Poiré 2008)**.

La descripción del flujo sanguíneo en el sistema cardiovascular es un problema de dinámica de fluidos complejo y solo parcialmente comprendido **(Castrejón-Pita et al. 2003)**

Los estudios tradicionales han considerado el flujo pulsátil de fluidos newtonianos a través de redes vasculares, en donde la elasticidad que tienen los vasos se toma como un punto fundamental para su descripción **(Flores et al. 2010)**.

Este tipo de fluidos a menudo se tratan como fluidos viscoelásticos. Debido a la dificultad de sugerir un solo modelo que exhiba todos y ecuaciones constitutivas **(Colleparido-Guevara y Corvea-Poiré 2007)**.

El flujo se produce por un gradiente de presión de período en una tubería recta infinita **(Yin y Zhu 2006)**.

La oclusión de bio-capilares en el cuerpo humano representa un problema importante en muchas enfermedades (**Colleparado-Guevara y Corvea-Poiré 2007; Herrera-Valencia et al. 2022**).

Por ejemplo, durante la oclusión de las arterias, la sangre disminuye su velocidad y, en casos críticos, es incapaz de fluir a través de las arterias restantes. Tal falta de movimiento impide el riego y, en muchos casos, resulta en la eventual muerte de los tejidos (**Colleparado-Guevara y Corvera-Poiré 2007**).

Permeabilidad en la sangre

La permeabilidad dinámica es una herramienta que se ha utilizado para caracterizar la sangre como un fluido de Maxwell en gematría sencillas (capilar, corona circular y rendija) (**López de Haro et al. 1996; Castrejon-Pita et al. 2003; Del Rio et al. 1998; Hernández-Machado y Corvera-Poiré 2008; Colleparado-Guevara y Corvera-Piré 2007**). Este tipo de investigación es de particular interés ya que la sangre en las venas es forzada por un gradiente de presión periódico (**Youbing y Ke-Qin 2006**).

La permeabilidad se ha usado para el estudio de la sangre en colusiones periféricas y centrales (**Colleparado-Guevara y Corvera-Poiré 2007**).

Por otra parte, la permeabilidad dinámica ha permitido estudiar la frecuencia cardiaca en mamíferos y una posible explicación del gasto cardíaco y su relación con el flujo pulsátil sanguíneo (**Flores et al 2010; Hernández-Manchado y Corvera-Poiré 2008**).

Flores et al. (2016), estudiaron que el flujo sanguíneo pulsátil es generado por la contracción del ventrículo izquierdo. La onda del pulso generada se propaga en la arteria y se encarga de contraer los vasos sanguíneos y producir cambios en la presión y el flujo sanguíneo en el tiempo y el espacio. Estos cambios, están determinados por las propiedades físicas del sistema cardiovascular, algunas de ellas están alteradas por enfermedades; por ejemplo, contracción del corazón, rigidez arterial y resistencia vascular periférica.

Por otra parte, el flujo pulsátil a mayoría de los fluidos biológicos son viscoelásticos. También se puede encontrar en sistemas fisiológicos, como el sistema respiratorio, donde una capa de mucosidad viscoelástica recubre el interior de las vías respiratorias y el

aire pulsante fluye hacia ellas a una frecuencia determinada por la respiración o la tos (**de la Guerra y Corvera-Poiré 2022**).

Se estudia el flujo oscilante unidireccional de un fluido viscoelástico con el modelo fraccionado de Maxwell. El flujo se produce por un gradiente de presión periódico en una tubería recta infinita. Las soluciones exactas se obtienen en los dominios de tiempo y frecuencia (**Youbing y Ke-Qin 2006**).

Por otra parte, la mayoría de los procesos en la industria ocupan bombas de desplazamiento positivo las cuales generan gradientes de presión oscilatorios en el tiempo y modifican las propiedades reológicas y de transferencia de momento. Sin embargo, existen pocos trabajos en donde el factor de fricción se ha estudiado en fluidos viscoelásticos transitorios y por lo tanto se necesitan herramientas que nos permitan describir las interacciones entre la energía cinética (movimiento) y los mecanismos viscoelásticos (esfuerzo en la pared). En este punto, se tiene dos grandes premisas que tiene que ser aclaradas:

- A) Deducir una expresión analítica para el factor de fricción en estado no estacionario (transitorio)
- B) Obtener una expresión analítica para el factor de fricción de un fluido viscoelástico en el régimen de bajas deformaciones y que tome en cuenta las contribuciones del solvente y del polímero.

De esta manera nuestra hipótesis primaria es la siguiente:

1.3 Hipótesis:

Si incorporamos un gradiente de presión transitorio en el flujo de un líquido viscoelástico entonces el factor de fricción dependerá de la función de transferencia y de los mecanismos intrínsecos del proceso: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) viscoelásticos, (iv) dispersivos y de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión oscilatorio o pulsátil

Para debatir esta hipótesis, se plantean los siguientes objetivos, los cuales son mencionados a continuación:

1.4 Objetivos de la investigación:

1.4.1 General

Obtener una expresión analítica para el factor de fricción transitorio utilizando la función de transferencia del flujo y la del esfuerzo en la pared.

1.4.2 Particular

P.1. Obtener el factor de fricción de un fluido newtoniano en geometrías de capilar y cilindros concéntricos.

P.2. Proponer una metodología general en términos de la función de transferencia compleja para cualquier fluido viscoelástico lineal.

P.3. Obtener el factor de fricción de un fluido viscoelástico lineal que acopla dos mecanismos: (i) Solvente y (ii) Polimérico (Jeffreys)

P.4. Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

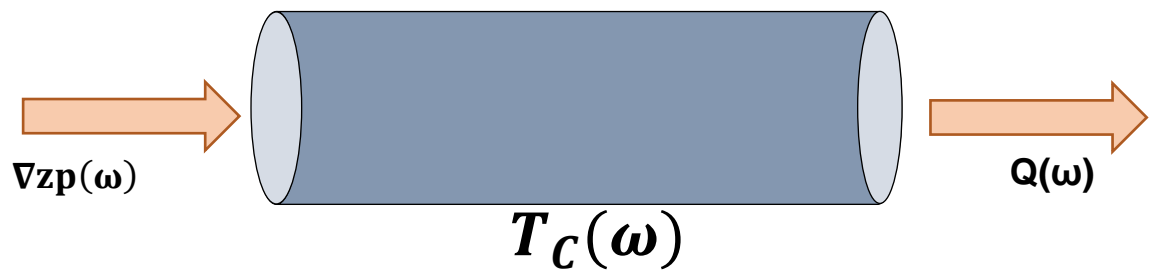
P.5. Utilizar datos reométricos de un fluido modelo con el fin de predecir y comprobar las ecuaciones teóricas

1.5 Distribución del material

En el capítulo I se analizó los elementos mínimos que permiten al lector introducirse a los conceptos de reología y flujo pulsátil. En el capítulo II se presenta el marco teórico referente a la deducción de la ecuación del Hagen y Poiseuille en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$. La siguiente geometría es una corona circular, la cual se puede describir como dos cilindros concéntricos de radio $r=R_1$, $r=R_2$ y longitud $z=L$. En este capítulo se presenta la ecuación constitutiva de Jeffrey la cual se puede modelar como la suma en paralelo de un elemento viscoso Newton y un elemento viscoelástico Maxwell. En el capítulo III se presenta el sistema físico y las ecuaciones generales: continuidad, momento y reológica. Se analizan

además las condiciones de frontera y se presentan las ecuaciones para el flujo volumétrico y el factor de fricción. Se presenta el modelado matemático del flujo transitorios en los dos sistemas antes descritos con la incorporación del fluido viscoelástico de Jeffrey. En el capítulo IV variables, grupos y simulaciones en esta sección se presentan las variables, grupos y ecuaciones que son punto de partida de las simulaciones numéricas. Las variables importantes de escalamiento son la frecuencia, el parámetro beta, la función de transferencia compleja y el operador viscosidad o fluidez y se presentan las simulaciones de los resultados teóricos obtenidos. Se analiza la parte real, imaginaria y la norma de la función de transferencia compleja que es el resultado más importante en el presente análisis. Para hacer las simulaciones se analizan los dos grupos adimensionales: i) número de Deborah, ii) tiempo de retardo. El tiempo de retardo es la contribución del solvente y relaciona la contribución newtoniana de la viscosidad con respecto a la viscosidad total. En el último capítulo se analizan los resultados principales, las conclusiones y el trabajo a futuro. En la última sección se colocan los apéndices que describen algún paso matemático intermedio en la tesis.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO



Descripción gráfica de la función de transferencia compleja.

En este capítulo se describirán las ecuaciones de flujo básicas para entender el factor de fricción de fluidos newtonianos en capilar y corona circular. En la sección 2.1 se deducirá el factor de fricción newtoniano para un capilar de radio $r=a$ y $z=L$ y que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante (Bird et al. 1997,2002).

En la sección 2.2 se deducirá el factor de fricción de un fluido newtoniano en una geometría de corona circular. La cual, consiste en dos cilindros concéntricos. En la sección 2.3 se deducirá el modelo constitutivo de Jeffrey a través de la configuración mecánica de un elemento de Maxwell en paralelo con un elemento de Newton (Bird et al. 2002). En la sección 2.4 se darán las conclusiones y los elementos más importantes de este capítulo.

2.1 Factor de fricción de fluidos newtonianos

2.1.1 Deducción del factor de fricción en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$ deformado continua e irreversiblemente deformado por un gradiente de presión constante

En esta sección se presenta el desarrollo para el cálculo del flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de un capilar, con un radio $r=a$. La longitud axial del capilar se representa con L . Se presenta el esquema del estudio.

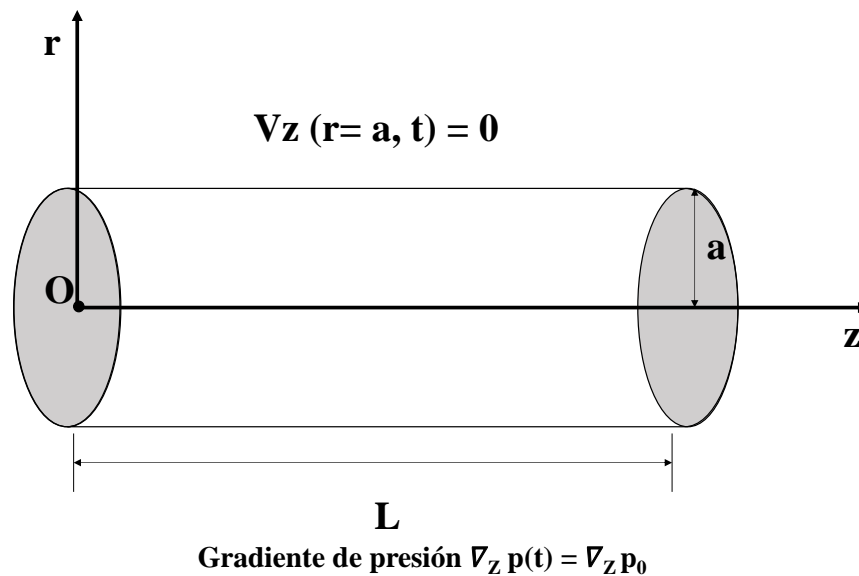


Figura 4. Esquema de un flujo newtoniano, isotérmico e incompresible, en un capilar de radio(a) y Longitud (L)

2.1.2 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, en primer lugar, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo de la ecuación de continuidad y aplicando el modelado matemático, llegamos a la conclusión de que la velocidad en el eje axial z y está en función del eje radial r . Una vez concluido lo anterior utilizando la ecuación de movimiento lagrangiana y al aplicarle el tensor de esfuerzos (ley de Newton generalizada) podemos llegar a las ecuaciones de Navier Stokes, para los diferentes componentes de las coordenadas cilíndricas, que expresan la rapidez de incremento de momentum de una partícula de flujo ($\rho DV Dt$) igualadas a las fuerzas que actúan sobre el fluido, donde actúan la fuerza superficial dada por el gradiente de presiones, la viscosidad, la tensión superficial y las fuerzas volumétricas causadas por la gravedad. Aplicando la conclusión anterior $V_z(r)$, obtenemos una versión simplificada de la ecuación de Navier Stokes que solo está en función de r , al resolver la ecuación diferencial obtenemos el perfil de velocidades que describe el comportamiento de la velocidad en nuestro sistema de estudio. Una vez obtenido el perfil de velocidades se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolver la doble integral, obtenemos una expresión conocida como la ecuación de Hagen- Poiseuille (**Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2022**).

2.1.3 Ecuaciones teóricas

a) Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es un balance de materia sin reacción química la cual, se puede expresar en termino de operadores vectoriales de la siguiente manera (**Bird et al. 2002**).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (16)$$

En la Ec. (16), \mathbf{V} es la velocidad del sistema. Desarrollando la divergencia del producto del campo escalar y vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V + \rho(\nabla \cdot V) = 0 \quad (17)$$

Puesto que hablamos de un flujo incompresible.

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (18)$$

La ecuación adquiere la siguiente forma.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho = 0 \quad (19)$$

En coordenadas cilíndricas tiene la siguiente forma **(Bird et al. 2002)**.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V z) = 0 \quad (20)$$

El vector velocidad para este sistema está dada por la siguiente expresión

$$V = (V_r, V_\theta, V_z) = (V_z(r, \theta, z, t)) \quad (21)$$

Aplicando la expresión para el vector velocidad en la Ec. (18)

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0 \quad (22)$$

La Ec. (22) significa que el campo de velocidades en z es invariante.

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow V_z \neq V_z(z) \quad (23)$$

Con base en la Ec. (21), podemos razonar que la velocidad (V_z) no dependen del eje axial z y en base a la simetría cilíndrica del sistema, la velocidad no depende de θ , también físicamente los perfiles de velocidad ya se encuentran desarrollados, no dependiendo del tiempo. Por ende, podemos concluir que la V_z solo depende del eje radial r **(Bird et al. 2002)**.

$$V_z = V_z(r, \theta, z, t) = V_z(r, \theta, t) \quad (24)$$

Y por lo tanto, la velocidad es función de la coordenada radial r debido a que estamos en estado estacionario y existe simetría cilíndrica.

$$V_z(r, \theta, t) \Rightarrow V_z \text{ es función de } r \quad (25)$$

b) Ecuación de Movimiento

A partir de la ecuación de movimiento lagrangiana, obtenida por medio de un balance de movimiento de la ecuación Cauchy. La ecuación de movimiento Lagrangiana queda de la siguiente manera **(Bird et al. 2002; Macosko 1994)**.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad (26)$$

La ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos puede ser escrita de la siguiente manera, también conocida como la ley de newton generalizada (**Bird et al 2002**).

$$\sigma = 2\mu = \mu[\nabla V + (\nabla V)^T] \quad (27)$$

Sustituyendo la Ec. (27) en la Ec. (26)

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu[\nabla V + (\nabla V)^T]) + \rho g \quad (28)$$

Aplicando el modelado matemático de densidad y viscosidad constantes (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu[\nabla^2 V + \nabla(\nabla \cdot V)] + \rho g \quad (29)$$

Al descomponer la Ec. (29) en las tres coordenadas.

Para el componente en r.

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (30)$$

Para el componente en θ .

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (31)$$

Para el componente en z.

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (32)$$

c) Perfil de velocidades

Aplicando el modelado matemático en las Ecs. (30-32) con un flujo que se deforma de manera continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la dirección axial.

La Ec. (15) queda de la siguiente manera.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p \neq p(r) \quad (33)$$

La Ec. (31) adquiere la siguiente forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p \neq p(\theta) \quad (34)$$

La ecuación del componente en z toma la siguiente forma. Puesto que el gradiente de presión solo depende de z.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] \quad (35)$$

Puesto que se tiene derivada de presión en función de z y la derivada de Vz en función de r. La Ec. (35) se iguala una constante para desacoplar las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] = \lambda \quad (36)$$

Resolviendo la ecuación diferencial por variables separables (**Bird et al. 2002**).

$$\begin{aligned} \int_{P_L}^{P_0} dp &= \int_0^L \lambda dz \\ P_{P_0} &= \lambda z_0^L \\ (p_0 - p_L) &= \lambda (L - 0) \\ \frac{(p_0 - p_L)}{L} &= \lambda \\ \frac{\Delta p}{L} &= \lambda \end{aligned} \quad (37)$$

Entonces nuestra Ec. (36) queda planteada de la siguiente manera.

$$\frac{\Delta p}{L} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] \quad (38)$$

Resolviendo la ecuación diferencial a partir del método de variables separables.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{L\mu} &= \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z}{dr} \right) \\ \int \frac{\Delta p r}{L\mu} dr &= \int d \left(r \frac{dV_z}{dr} \right) \\ \frac{\Delta p r^2}{2L\mu} + C_1 &= r \frac{dV_z}{dr} \\ \frac{\Delta p r^2}{2L\mu r} + \frac{C_1}{r} &= \frac{dV_z}{dr} \\ \int \frac{\Delta p r}{2L\mu} dr + \int \frac{C_1}{r} dr &= \int dV_z \\ \frac{\Delta p r^2}{4L\mu r} + C_1 \ln(r) + C_2 &= V_z \end{aligned} \quad (39)$$

La Ec. (39) describe el perfil de velocidades para un fluido newtoniano que se deforma en consecuencia de un gradiente de presiones (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**). Para encontrar las constantes, 1 y 2, establecimos las siguientes condiciones de frontera. La velocidad en los límites del pailar es cero (C.F.1) y la velocidad en el centro es la Vmax.

$$\text{C.F.1 } V_z (r=R) = 0 \quad (40a)$$

$$\text{C.F.2 } V_z (r=0) = V_{\max} \quad (40b)$$

Aplicando las condiciones de frontera a la Ec. (39) se tiene lo siguiente.

$$\frac{\Delta p(0)^2}{4L\mu r} + (0) \ln(R) + C_2 = V_{\max} \quad (41)$$

Puesto que en la Ec. (41) tenemos un $\ln(0) = -\infty$, significando esto que la V en el centro del tubo es infinita. Esto no tiene un sentido físico puesto que la velocidad en el centro la velocidad máxima y es finita. Siendo este el caso la única solución para este problema es igualar la C_1 a cero. Obteniendo una ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + (0)\ln(R) + C_2 &= 0 \\ \frac{\Delta p R^2}{4L\mu} + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Siendo nuestra C_2 igual a.

$$-\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} = C_2 \quad (43)$$

Para obtener la velocidad máxima es de la siguiente manera cuando $r=0$.

$$V_{\max} = C_2 = -\frac{\Delta p R^2}{4L\mu} \quad (44)$$

Sustituyendo las constantes en la Ec. (39).

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p R^2}{4L\mu} &= V_z \\ V_z &= \frac{\Delta p}{4L\mu} (-R^2 + r^2) \\ V_z &= -\frac{\Delta p a^2}{4L\mu} (1 - r^2/a^2) \end{aligned} \quad (45)$$

La Ec. (45) ya es nuestro perfil de velocidades para un capilar, con fluido newtoniano impulsado por un gradiente de presiones (**Bird et al. 2007, 2002**).

d) Flujo Volumétrico.

Para obtener el flujo volumétrico en un capilar partiremos de la siguiente ecuación escrita para coordenadas cilíndricas (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z (r) r dr d\theta \quad (46)$$

Sustituir el perfil de velocidades de la Ec. (45) en la Ec. (46).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} (1 - \frac{r^2}{a^2}) \right) r dr d\theta \quad (47)$$

Comenzaremos resolviendo la primera integral definida con respecto a r y sacando las constantes de la integral.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2} \right) dr d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{4L\mu} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right)_0^a d\theta \quad (48)$$

Evaluando la integral con los límites de integración y simplificando la expresión.

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left(a^2 - \frac{a^4}{2a^2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left(1 - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left(\frac{1}{2} \right) d\theta \quad (49)$$

Después procedemos a resolver la integral definida con respecto a θ y simplificamos la expresión.

$$Q = \frac{-\Delta p a^2}{8L\mu} \left(\frac{1}{2} \right) \theta_0^{2\pi} \quad (50)$$

Evaluando y simplificando la expresión nos queda de la siguiente forma.

$$Q = \frac{-\Delta p a^4}{8L\mu} \left(\frac{1}{2} \right) 2\pi$$

$$Q = \frac{-\pi \Delta p a^4}{8L\mu}$$

$$Q = \frac{-\pi(p_0 - p_L) a^4}{8L\mu} \quad (51)$$

La Ec. (51) ya es la ecuación para calcular el flujo volumétrico de un fluido newtoniano en un capilar impulsado por una diferencia de presiones. Esta ecuación también es conocida como la ecuación de Hagen- Poiseuille, que describe la relación del flujo volumétrico y un gradiente de presiones (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera-Valencia 2022**).

La velocidad promedio se obtiene dividiendo el flujo entre el área de sección transversal:

$$\langle V_z(r) \rangle = \frac{-R^2(p_L - p_0)}{8L\mu} = \frac{R(p_L - p_0)}{8L\mu} > 0 \quad (52)$$

2.1.4 Factor de fricción de Darcy

En esta sección se deduce el factor de fricción para fluidos Newtonianos (Cap. 1, Ec. (1)).

$$f = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2}\rho\langle V_z \rangle^2} = \frac{2\sigma_w}{\rho\langle V_z \rangle} \frac{1}{\langle V_z \rangle} = \frac{2\sigma_w}{\rho\langle V_z \rangle} \frac{1}{R\frac{\varphi_\mu}{4}\sigma_w} = \frac{8}{\rho\langle V_z \rangle} \frac{1}{R\varphi_\mu} = \frac{8}{\rho\langle V_z \rangle} \frac{1}{\frac{D}{2}\varphi_\mu} \quad (53)$$

Simplificando, se obtiene el factor de Fricción Newtoniano:

$$\therefore f = \frac{16}{\text{Re}} \quad (54)$$

En donde el número de Reynolds se ha definido como:

$$\text{Re} = \rho\langle V_z \rangle D\varphi_\mu \quad (55)$$

Las Ecs. (54) y (55) son las expresiones que define el factor de fricción de un fluido Newtoniano y está determinado exclusivamente por el número de Reynolds.

2.2. Fluido Newtoniano en una corona circular

En esta sección se analizará y obtendrá el flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través de una corona circular debido a la influencia de un gradiente de presión. La corona tiene un radio mayor (R_1) y un radio menor (R_2), con una longitud característica axial (L).

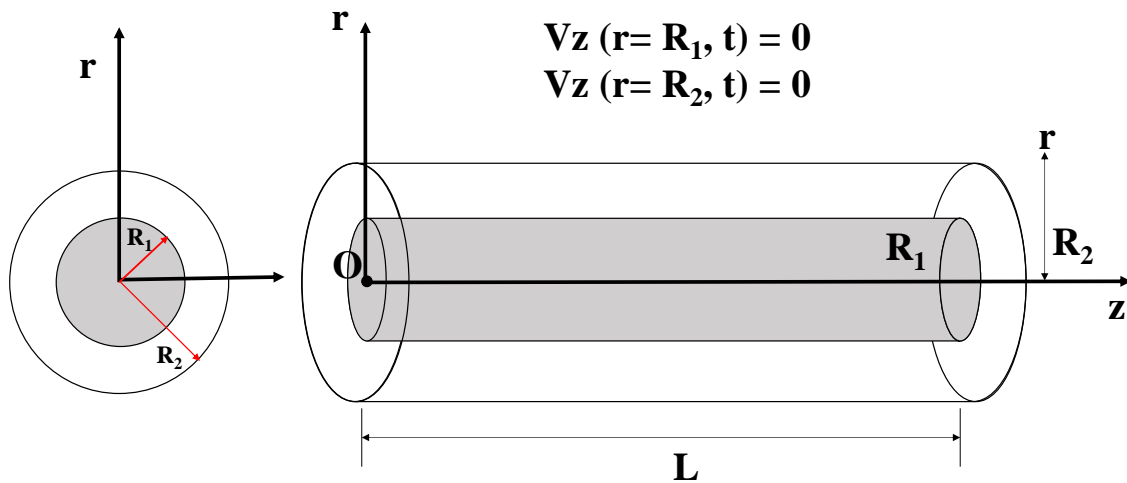


Figura 5. Esquema de un flujo newtoniano, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor(R_1), radio mayor (R_2) y Longitud (L).

2.2.1 Modelado matemático

- Flujo newtoniano.
- Estado estacionario.
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección z y por ende está en función de la coordenada radial r.
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial z.

2.2.2 Razonamiento matemático

Para el razonamiento de este problema, se planteó un modelado matemático al cual está sometido nuestro sistema. Partiendo del perfil de velocidades general del capilar ya que el fluido es el mismo, así como también el modelado matemático al que se somete nuestro sistema, causando que la velocidad se comporte de igual manera que la de un capilar solo que en esta ocasión se le aplicaran al perfil de velocidades general diferentes condiciones de frontera puesto que el fluido newtoniano, fluirá en el anulo formado por los cilindros concéntricos. Una vez obtenido el perfil de velocidades particular se procede a sacar el flujo volumétrico con una ecuación de flujo transformada por medio de una transformada jacobiana que dejara la expresión en coordenadas cilíndricas, al sustituir el perfil de velocidades en la expresión de flujo volumétrico para coordenadas cilíndricas y resolviendo la doble integral con diferentes límites de integración, Obtenemos de igual manera una expresión que describe el flujo volumétrico de una corona circular.

Puesto que el flujo de un fluido newtoniano en una corona circular se comporta de la misma manera que en el capilar, podemos partir de la siguiente ecuación (**Herrera-Valencia et al 2022**).

$$V_z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (56)$$

Se calcularán las constantes de la Ec. (56) con las siguientes condiciones de frontera. Cuando hablamos de la velocidad en el radio menor (R_1) hablamos de que es igual a cero puesto que es la pared, este mismo hecho aplica para el radio mayor (R_2).

$$\text{C. F. 1 } V_z(r=R_1) = 0 \quad (57)$$

$$\text{C. F. 2 } V_z(r=R_2) = 0 \quad (58)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en la Ec. (56) se obtiene lo siguiente.

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) + C_2 \quad (59)$$

$$0 = \frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_2) + C_2 \quad (60)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones restando la Ec. (59) menos la Ec. (60).

$$0 = -\frac{\Delta p R_2^2}{4L\mu} + \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + C_1 \ln(R_1) - C_1 \ln(R_2)$$

$$0 = \frac{\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) + C_1 (\ln(R_1) - \ln(R_2))$$

$$\frac{\Delta p}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) = C_1 \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)$$

$$C_1 = \frac{\Delta p (R_1^2 - R_2^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \quad (61)$$

Para obtener la C_2 sustituimos la C_1 en la Ec. (59) y despejamos C_2 .

$$0 = \frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} + \left(\frac{\Delta p (R_1^2 - R_2^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(R_1) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p R_1^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left(\frac{\ln((R_1)(R_2^2 - R_1^2))}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right)$$

$$C_2 = -\frac{\Delta p}{4L\mu} \left(\frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} + R_1^2 \right) \quad (62)$$

Sustituir ambas constantes en la Ec. (56) para encontrar el perfil de velocidades.

$$V_z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} + \left(\frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left(\frac{\ln((R_1)(R_2^2 - R_1^2))}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2 \right)$$

$$V_z = \frac{\Delta p r^2}{4L\mu} - \frac{\Delta p}{4L\mu} R_1^2 + \left(\frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \ln(r) - \frac{\Delta p}{4L\mu} \left(\frac{\ln((R_1)(R_2^2 - R_1^2))}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right)$$

$$V_z = \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) + \left(\frac{\Delta p (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) (\ln(r) - \ln(R_1))$$

$$\begin{aligned}
V_Z &= \frac{\Delta p}{4L\mu} (r^2 - R_1^2) \left(\frac{\Delta p(R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \\
V_Z &= \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left((R_1^2 - r^2) - \left(\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right) \\
V_Z &= \frac{-\Delta p}{4L\mu} \left((R_1^2 - r^2) + \left(\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right) \\
V_Z &= \frac{-\Delta p R R_1^2}{4L\mu} \left(\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right) \right) \quad (63)
\end{aligned}$$

La Ec. (63) es el perfil de velocidades para una corona circular con un fluido newtoniano impulsado por un gradiente de presiones (**Herrera-Valencia et al 2022**).

2.2.3 Flujo Volumétrico.

Para encontrar el flujo volumétrico en el anulo de la corona circular, se utiliza la siguiente integral de superficie, se utiliza la transformada jacobiana para transformar en coordenadas cilíndricas (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R V_Z(r) r dr d\theta \quad (64)$$

Puesto que sabemos que el perfil de velocidades no está en función del ángulo podemos sacarlo como constante de la siguiente manera.

$$Q = \int_0^R V_Z(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (65)$$

Al integrar con respecto al ángulo obtenemos lo siguiente.

$$Q = \int_0^R V_Z(r) r dr (\theta_0^{2\pi}) \quad (66)$$

Al evaluar los límites de integración con respecto al ángulo nos queda de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \int_0^R V_Z(r) r dr \quad (67)$$

Ahora sustituimos el perfil de velocidades en la Ec. (67)

$$.Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\Delta p R_1^2}{4L\mu} \left(\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (68)$$

Simplificando la expresión y sacando las constantes de la integral, obtenemos.

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^2}{4L\mu} \int_{R_1}^{R_2} \left(\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) r dr \quad (69)$$

Para escalar la ecuación diferencial y simplificar con números adimensionales, se divide los límites de integración entre R1, la expresión del perfil de velocidades y la diferencial con respecto r.

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^2}{4L\mu} \int_{\frac{R_1}{R_1}}^{\frac{R_2}{R_1}} \left(\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \left(\frac{r}{R_1}\right) \left(\frac{dr}{R_1}\right) \quad (70)$$

Para no alterar la igualdad en la ecuación se multiplicará todo por R1²

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^{\frac{R_2}{R_1}} \left(\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right)} \right) \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) \right) \left(\frac{r}{R_1}\right) \left(\frac{dr}{R_1}\right) \quad (71)$$

De la Ec. (71) podemos obtener los siguientes cambios de variable.

$$R = \frac{R_2}{R_1} \quad (72a)$$

$$u = \frac{r}{R_1} \quad (72b)$$

Al aplicar los anteriores cambios de variable a la Ec. (71) queda de la siguiente forma

$$Q = \frac{2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left((1 - u^2) + \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(u)) \right) u du$$

$$Q = \frac{2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left((1 - u^2) + \left(\frac{(1 - (R^2))}{\left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right)} \right) (\ln(u)) \right) u du \quad (73)$$

Multiplicando la ecuación por (-1/-1) para invertir ln(1/R).

$$Q = \frac{2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left((1 - u^2) + \frac{-1}{-1} \left(\frac{(1-R^2)}{\ln\left(\frac{1}{R}\right)} \right) (\ln(u)) \right) du$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left((1 - u^2) + \left(\frac{(1-R^2)}{\ln\left(\frac{1}{R}\right)} \right) (\ln(u)) \right) u du$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \int_1^R \left((1 - u^2) + \left(\frac{(1-R^2)}{\ln(R)} \right) (\ln(u)) \right) u du \quad (74)$$

Una vez integrada la ecuación se obtiene el siguiente resultado

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left\{ \left(u - \frac{u^4}{4} \right) \Big|_1^R + \left(\frac{1-R^2}{\ln(R)} \right) \int_1^R u \ln u du \right\} \quad (75)$$

Aplicando los límites de integración y factorizando la expresión

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left\{ \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) \Big|_1^R + \left(\frac{1-R^2}{\ln(R)} \right) \left(\frac{1}{2} u^2 \ln u - \frac{1}{4} u^2 \right) \Big|_1^R \right\}$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left\{ \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) \right] \left\{ \frac{1}{2} R^2 \ln R - \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2} 1^2 \ln 1 + \frac{1}{4} 1 \right\} \right\}$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{4L\mu} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{R^4}{4} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} \left\{ \frac{1}{2} R^2 \ln R - \frac{1}{4} R^2 - 0 + \frac{1}{4} 1 \right\} \right]$$

$$Q = \frac{-2\pi\Delta p R_1^4}{16L\mu} \left(\frac{1}{4} (R^2 - R^4 - 1 - 2R^2 \ln(R) + R^2 - 1) \right) \quad (76)$$

Para simplificar más la expresión se procede a realizar el siguiente cambio de variable

Donde:

$$I = \frac{1}{4} (R^2 - R^4 - 1 - 2R^2 \ln(R) + R^2 - 1) \quad (77)$$

Entonces con el cambio de variable I, toma la siguiente forma

$$Q = \frac{\pi\Delta p R_2^4}{8L\mu} I \quad (78)$$

La Ec. (78) es la ecuación de flujo volumétrico de un fluido newtoniano que fluye a través del área del anulo en una corona circular, que fluye a causa del gradiente de presiones (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera-Valencia et al. 2022**).

A partir de la Ec. (78) se calcula la velocidad promedio. Para esto, se necesita calcular el área de sección transversal

$$A_T = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi R_2^2 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) = \pi R_2^2 (1 - R^2); R = \frac{R_1}{R_2} \quad (79)$$

2.2.4 La velocidad promedio

$$\langle V_z \rangle A = Q = \frac{\pi R_2^4 P_0 - P_L}{8\mu L} \times I \quad (80)$$

Reordenando, se tiene lo siguiente:

$$\langle V_z \rangle \pi R_2^2 (1 - R^2) = \frac{\pi R_2^3}{4\mu} \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} R_2 \right) I \quad (81)$$

Simplificando, se tiene los siguiente:

$$\langle V_z \rangle = \frac{R_2}{1 - R^2} \frac{1}{4\mu} \sigma_{w2} I \quad (82)$$

En donde, el esfuerzo se define como:

$$\sigma_{w2} = \frac{P_0 - P_L}{2L} R_2 \quad (83)$$

2.2.5 Factor de fricción de Darcy en una corona circular

En esta sección se deduce el factor de fricción para fluidos Newtonianos (Cap. 1, Ec. (2)).

$$f = \frac{\sigma_w}{\frac{1}{2} \rho \langle V_z \rangle^2} = \frac{2\sigma_w}{\rho \langle V_z \rangle} \frac{1}{\langle V_z \rangle} = \frac{2\sigma_w}{\rho \langle V_z \rangle} \frac{1}{R \frac{\varphi_\mu}{4} \sigma_w} = \frac{8}{\rho \langle V_z \rangle} \frac{1}{R \varphi_\mu} = \frac{8}{\rho \langle V_z \rangle} \frac{1}{\frac{D}{2} \varphi_\mu} \quad (84)$$

Simplificando, se obtiene el factor de Fricción Newtoniano:

$$\therefore f = \frac{16}{\text{Re}} \quad (85)$$

En donde el número de Reynolds se ha definido como:

$$\text{Re} = \rho \langle V_z \rangle D \varphi_\mu \quad (86)$$

Las Ecs. (83) y (84) son las expresiones que define el factor de fricción de un fluido Newtoniano y está determinado exclusivamente por el número de Reynolds.

CAPÍTULO III MODELADO MATEMÁTICO

Modelo mecánico de Jeffreys

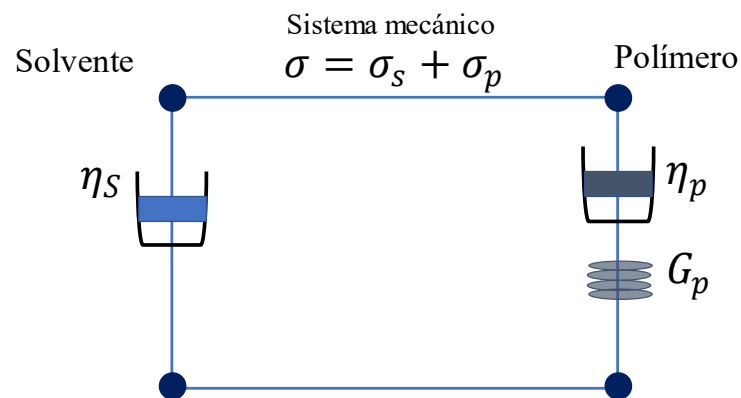


Ilustración del modelo mecánico de Jeffreys polímero-solvente.

3.1 Factor de fricción de un fluido viscoelástico de Jeffreys en una geometría capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.

En esta sección se realizará el desarrollo pertinente para la obtención de la función transferencia de masa en un capilar, por el que fluirá un fluido viscoelástico (Jeffreys) que se deforma de manera continua e irreversiblemente en la dirección axial, causado por la fuerza motriz suministrada de un gradiente de presiones, obteniendo una ecuación que describa el flujo volumétrico de dicho sistema (Bird et al 2002; Herrera-Valencia et al. 2022).

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Jeffreys).
- Líquido incompresible (volumen constante).
- El proceso se lleva a cabo en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil).
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial.
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ($a \ll L$) se encuentra en posición horizontal.
- Existe simetría angular (cilíndrica).

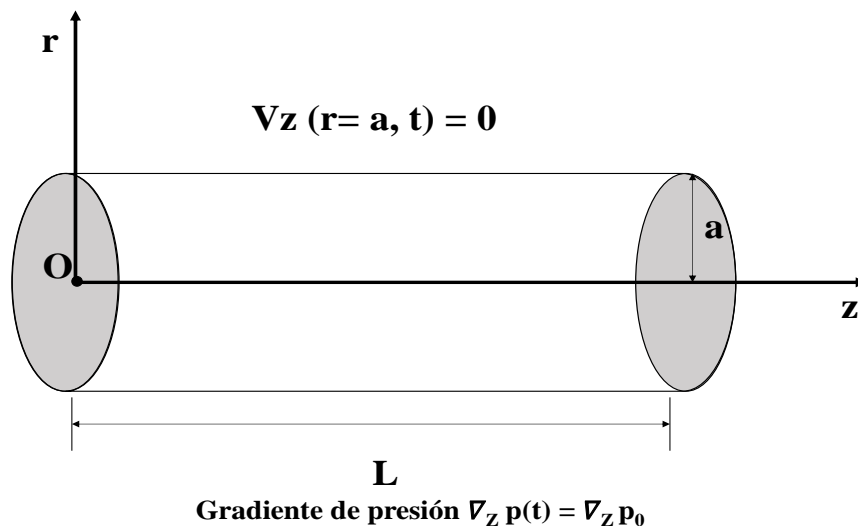


Figura 6. Esquema de un fluido viscoelástico (Jeffreys), isotérmico e incompresible, en un capilar de radio(R) y Longitud (L).

Partiendo de la ecuación de movimiento (**Bird et al. 2002; Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho g \quad (87)$$

Como es un tubo horizontal, las fuerzas gravitacionales se desprecian.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \sigma + \rho \underline{g} \quad (88)$$

Resultando la siguiente expresión analítica.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma \quad (89)$$

Ecuación constitutiva de Jeffreys

La ecuación constitutiva de Jeffreys se puede considerar como la suma de dos contribuciones asociadas al solvente y al polímero (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**). Esta suma se puede expresar de la siguiente manera.

$$\sigma_T = \sigma_S + \sigma_P \quad (90)$$

El solvente se modela como un fluido Newtoniano, es decir, satisface la siguiente ecuación analítica.

$$\sigma_S = \eta_S \dot{\gamma} \quad (91)$$

La contribución del polímero es caracterizada con la ecuación constitutiva de Maxwell. La cual, se expresa de la siguiente manera (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**):

$$\sigma_P + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t} \sigma_P = \eta_P \dot{\gamma} \quad (92)$$

De la Ec. (92) se factoriza el esfuerzo del polímero σ_P y se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\left(1 + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_P = \eta_P \dot{\gamma} \quad (93)$$

Por lo que,

$$\sigma_P = \frac{\eta_P \dot{\gamma}}{1 + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t}} \quad (94)$$

Sustituyendo las Ecs. (91) y (94) en la Ec. (90) se llega a la siguiente expresión matemática.

$$\sigma_T = \eta_S \dot{\gamma} + \frac{\eta_P \dot{\gamma}}{1 + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t}} \quad (95)$$

Multiplicando la Ec. (9) por el común denominador.

$$\left(1 + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \sigma_T = \eta_S \dot{\gamma} + \frac{\eta_P \dot{\gamma}}{1 + \lambda_P \frac{\partial}{\partial t}} \right\} \quad (96)$$

Distribuyendo

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} + \eta_p \dot{\gamma} \quad (97)$$

Agrupando y distribuyendo el operador en la rapidez de deformación nos queda:

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + \eta_p \dot{\gamma} \quad (98)$$

Simplificando:

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = \eta_s \dot{\gamma} + \eta_p \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (99)$$

Factorizando la rapidez de deformación:

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = (\eta_s + \eta_p) \dot{\gamma} + \eta_s \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (100)$$

Factorizando la viscosidad total:

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_T = (\eta_s + \eta_p) \left(\dot{\gamma} + \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \lambda p \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (101)$$

Definiendo las siguientes variables físicas:

$$\lambda_J = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \lambda p \quad (102a)$$

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p \quad (102b)$$

$$\lambda p = \lambda_0 \quad (102c)$$

$$\sigma_T = \sigma \quad (102d)$$

La Ec. (102a) representa el tiempo de retardo del material y depende de las viscosidades del solvente, polímero y del tiempo de relajación de Maxwell (**Macosko 1994**). La viscosidad total Ec. (102b) es la suma de las viscosidades del solvente y polímero (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**). El tiempo de relajación del modelo de Jeffreys es el tiempo del polímero (**Macosko 1994**). Finalmente, el esfuerzo total es el del sistema. Combinando las Ecs. (101) y (102) se tiene la ecuación constitutiva reológica de Jeffreys (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$\left(1 + \lambda p \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = (\eta_0) \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \quad (103)$$

La Ec. (103) contiene como casos particulares los modelos de Maxwell y de Newton (**Macosko 1994**).

$$\lambda_J = 0 \rightarrow \text{Maxwell} \quad (104a)$$

$$\lambda_0 = \lambda_J = 0 \rightarrow \text{Newton} \quad (104b)$$

Finalmente, el operador viscosidad de Jeffreys se define como (**Bird et al. 2002**).

$$O_{\eta}^J = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{1+\lambda_J \frac{\partial}{\partial t}}{1+\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (105)$$

La expresión general para esfuerzo total está dada por la siguiente expresión (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$\sigma = 2O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) D \quad (106)$$

Combinando la Ec. (106) con la ecuación de movimiento o segunda forma de Cauchy (Ec. (89)) (**Bird et al. 2002**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot 2O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) D \quad (107)$$

La Ec (107) es la ecuación fundamental de este trabajo y será punto de partida para los cálculos posteriores. Esta se puede expresar como una expresión modificada de Navier Stokes (**Bird et al. 2002; Macosko 1994; Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 V \quad (108)$$

De acuerdo con las condiciones de proceso, el flujo es unidireccional, por lo tanto, el vector velocidad solo tiene una componente en la dirección axial. Y por continuidad, éste depende de la coordenada radial(r) y de la variable temporal (t). Entonces, la Ec. (108) adquiere la siguiente forma cerrada.

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\nabla_z p + O_{\eta}^J \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (109)$$

Para resolver la Ec. (109) se aplica la transformada de Fourier, para simplificar la ecuación diferencial parcial ya que, esta depende de las coordenadas radial y temporal.

Aplicando el operador de Fourier a cada uno de los términos, queda de la siguiente manera (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\rho i\omega V_z(\omega r) = -\nabla_z p(\omega) + \frac{O_{\eta}^J(i\omega)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (110)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \frac{\rho i\omega}{O_{\eta}^J(i\omega)} V_z(\omega, r) = \nabla_z p(\omega) \quad (111)$$

Despejamos el gradiente de presión y proponiendo el siguiente cambio de variable $\beta^2 =$

$$\frac{\rho i\omega}{O_{\eta}^J(i\omega)} \quad (112)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_z(\omega, r) = \frac{1}{O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_z p(\omega)$$

Se hace la derivada del producto de la Ec (112).

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + (1) \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = \frac{1}{o_{J_n}(\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \quad (113)$$

Para resolver la Ec. (113) habrá una solución homogénea (V_{Hz}) más una solución particular (V_{Pz}) que adquiera la siguiente forma (**Macosko 1994**).

$$V_Z(\omega r) = V_{Hz} + V_{Pz} \quad (114)$$

Como primer paso encontraremos la solución homogénea (V_{Hz}) igualando a una constante (0) teniendo la expresión como:

$$\left\{ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \right\} \quad (115)$$

La Ec. (115) se multiplicará por r^2 para obtener la ecuación de Bessel, quedando de la siguiente manera:

$$r^2 \left\{ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \right\} \quad (116)$$

Resolviendo y obteniendo la ecuación de Bessel modificada.

$$\left(r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - r^2 \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (117)$$

Formando la ecuación de Bessel modificada.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (118)$$

Y su solución es de la siguiente forma (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (119)$$

Donde:

J_n = Es una función de Bessel de primera especie de orden n.

Y_n = Es una función de Bessel de segunda especie de orden n.

Para que la Ec. (117) adquiera la forma de Bessel procedemos a realizar los siguientes pasos.

(**Bird et al. 2002**).

Primer paso $-1 = i^2$

$$\left(r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} \right) - i^2 r^2 \beta^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (120)$$

Agrupando:

$$r^2 \frac{\partial^2 V_Z(\omega, r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(\omega, r)}{\partial r} + (ir\beta)^2 V_Z(\omega, r) = 0 \quad (121)$$

Posterior al primer sumando y segundo se les multiplica por un 1 particular quedando la ecuación de la siguiente manera.

$$\frac{(ir\beta)^2}{(ir\beta)^2} r^2 \frac{\partial^2 Vz(\omega, r)}{\partial r^2} + \frac{(i\beta)}{(i\beta)} r \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r} + (ir\beta)^2 Vz(\omega, r) = 0 \quad (122)$$

Se ordena la ecuación de tal manera que quede de la siguiente manera.

$$(i\beta r)^2 \frac{\partial^2 Vz(\omega, r)}{\partial r^2 (i\beta r)^2} + (i\beta r) \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r (i\beta r)} + (ir\beta)^2 Vz(\omega, r) = 0 \quad (123)$$

Se procede a realizar un cambio de variable. $i\beta r = x$ (**Macosko 1994**).

Aplicando en cambio de variable, obtenemos la siguiente ecuación.

$$(x)^2 \frac{\partial^2 Vz(\omega, r)}{\partial r^2 (x)^2} + (x) \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r (x)} + (x)^2 Vz(\omega, r) = 0 \quad (124)$$

Queremos obtener una semejanza con la ecuación de Bessel.

$$(x)^2 \frac{\partial^2 Vz(\omega, r)}{\partial r^2 (x)^2} + (x) \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r (x)} + (x^2 - 0^2) Vz(\omega, r) = 0 \quad (125)$$

La solución homogénea es igual a la expresión siguiente, que es la solución de la ecuación de Bessel (**Bird et al. 2002**).

$$Vz(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (126)$$

La solución de la ecuación de Bessel Ec. (126) puede ser expresada como la solución de Bessel modificada y tiene la siguiente expresión. (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$Vz(\omega, r) = C_1 J_0(i\beta r) + C_2 Y_0(i\beta r) \quad (127)$$

Donde se define como:

I_0 = Es la función de Bessel modificada de primera especie de orden 0

K_0 = Es la función de Bessel modificada de segunda especie de orden 0

En consecutiva, se buscará la solución particular (p).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Vz(\omega, r)}{\partial r} p \right) - i^2 \beta^2 Vz(\omega, r) p = \frac{1}{\sigma_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (128)$$

Definimos los parámetros Ec. (129) y sustituyendo en la Ec. (128).

$$Vp = A ; A = Vz \quad (129)$$

Tenemos la expresión:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + i^2 \beta^2 A = \frac{1}{\sigma_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (130)$$

Al derivar una constante, esta es igual a 0 y recordando que $-1=i^2$ (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$i^2 \beta^2 A = \frac{1}{\sigma_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (131)$$

Despejando A en la Ec. (131) para obtener la solución particular, queda de la siguiente forma.

$$A = \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (132)$$

La solución general es la solución homogénea más la particular, que hemos obtenido previamente las sustituimos para obtener la solución general (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$V_z(\omega, r) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \quad (133)$$

Encontráremos las C_1 y C_2 estableciendo las siguientes condiciones de frontera, cuando nos ubicamos en las paredes del tubo de la velocidad en z es igual a cero y cuando nos encontramos en el centro del tubo la velocidad en z es la máxima o finita.

$$\text{C. F. 1 } r = a \quad V_z = 0$$

$$\text{C. F. 2 } r = 0 \quad V_z = V_{z_{max}} = \textit{Finita}$$

Evaluando las condiciones de frontera obtenemos las siguientes ecuaciones (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$C_1 I_0(\beta a) + C_2 K_0(\beta a) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (134)$$

$$C_1 I_0(\beta 0) + C_2 K_0(\beta 0) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (135)$$

En la Ec. (135) tenemos $K_0(0) = -\infty$ sabemos que la ecuación es finita igualaremos $C_2=0$ para que se cumplan las condiciones de frontera.

$$C_1 I_0(\beta a) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) = 0 \quad (136)$$

Y en la Ec. (134) podemos despejar C_1

$$C_1 = - \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \frac{\nabla z p(\omega)}{I_0(\beta a)} \quad (137)$$

Teniendo en valor de la C_2 de la siguiente forma:

$$C_2 = 0 \quad (138)$$

Sustituyendo el valor de C_1 en la Ec (133) que previamente habíamos calculado, tenemos la siguiente expresión:

$$V_z(\omega, r) = \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) - \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla z p(\omega) \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \quad (139)$$

Obtenemos el perfil de velocidades con inercia para un fluido viscoelástico que fluye por un gradiente de presiones en la dirección z , en sistema cilíndrico horizontal (**Macosko 1994**).

$$V_z(\omega, r) = \frac{1}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left(1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right) \quad (140)$$

3.1.1 Flujo volumétrico.

Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales. La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie, como ya se mencionó (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**). El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta \quad (141)$$

Se observa que $V_z(r)$ no depende del ángulo (θ) entonces sale de la integral como constante e integramos.

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V_z(r) r dr \quad (142)$$

Aplicando los límites de integración nos queda de la siguiente manera;

$$Q = \theta \Big|_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr \quad (143)$$

Teniendo como el resultado de la integral de la forma (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = 2\pi \int_0^a V_z(r) r dr \quad (144)$$

Obteniendo la Ec. (144), se sustituye el perfil de velocidades en la ecuación para el flujo volumétrico y sacamos de la integral lo que es constante.

$V_z(r, \omega)$ en $Q(\omega)$

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{1}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \int_0^a \left(1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right) r dr \quad (145)$$

Evaluando los límites de integración nos queda la expresión:

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{1}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left\{ \frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} r dr \right\} \quad (146)$$

Obteniendo el resultado de la integral (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a)} \int_0^a I_0(\beta r) r dr \right) \quad (147)$$

En la Ec. (147) se aplica un cambio de variable $\beta r = x$ (**Macosko 1994**).

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{\beta a} I_0\left(\frac{\beta r}{\beta}\right) \beta r dr \right) \quad (148)$$

Se aplica otro cambio de variable teniendo como $\beta r = x$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{a\beta} I_0(x) x dx \right) \quad (149)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones de Bessel (**Macosko 1994**).

$$\frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] = I_0(x) \cdot x \quad (150)$$

Aplicando la propiedad de la función de Bessel en la Ec. (149) (**Macosko 1994**).

$$- \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} \int_0^{a\beta} \frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] dx \quad (151)$$

Resolviendo los límites de integración.

$$- \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} [I_1(x) \cdot x] \Big|_0^{a\beta} \quad (152)$$

Obtenemos la siguiente ecuación (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{\beta^2 I_0(\beta a)} I_1(a\beta) \cdot a\beta \right] \quad (153)$$

De la Ec. (153) se va a factorizar la expresión $\frac{a^2}{2}$

$$Q = \frac{2\pi}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_{zp}(\omega) \frac{a^2}{2} \left[1 - \frac{2I_1(a\beta) \cdot a\beta}{a^2 \beta^2 I_0(\beta a)} \right] \quad (154)$$

Simplificando la Ec. (154).

$$Q = \frac{\pi \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1(a\beta)}{a\beta I_0(\beta a)} \right] \quad (155)$$

Para formar $a\beta$ (parámetro adimensional).

$$Q = \frac{\pi a^2 \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 a^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1(a\beta)}{a\beta I_0(\beta a)} \right] \quad (156)$$

Agrupamos términos de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi a^4 \nabla_{zp}(\omega) a^2}{i^2 (a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1\left(\frac{a\beta}{\beta a}\right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (157)$$

Multiplicando y dividiendo por 8 para formar el fluido newtoniano.

$$Q = \frac{\pi a^4 8 \nabla_{zp}(\omega) a^2}{8 i^2 (a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1\left(\frac{a\beta}{\beta a}\right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (158)$$

Multiplicando por η_0 . Obtenemos la siguiente ecuación, función de transferencia que depende de (ω) .

$$Q = \frac{\pi a^4}{8 \eta_0} \left[\frac{8 \eta_0}{(a\beta)^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1\left(\frac{a\beta}{\beta a}\right)}{I_0(\beta a)} \right] \right] \nabla_{zp}(\omega) \quad (159)$$

Donde podemos definir que **(Herrera-Valencia et al 2022)**.

$$T(\omega) = \frac{8\eta_0}{(a\beta)^2 O'_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{2I_1\left(\frac{a\beta}{\beta a}\right)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (160a)$$

Teniendo que $\beta a = \alpha$. Obteniendo como resultado el modelo particular **(Herrera-Valencia et al)**.

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} T(\omega) \nabla z p(\omega) \quad (161)$$

Así obtenemos la ecuación que describe el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico donde podemos observar que $T(\omega)$ es la función transferencia de un fluido viscoelástico y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido newtoniano **(Herrera-Valencia et al. 2022)**.

3.1.2 Velocidad promedio

La velocidad se calcula mediante el cociente entre el flujo volumétrico y el área de sección transversal **(Bird et al. 2002)**.

$$\langle Vz(\omega) \rangle = \frac{a}{4\eta_0} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \nabla z p(\omega) a \right) = \frac{a}{4\eta_0} T(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (162)$$

De la misma manera, el esfuerzo:

$$\sigma(\omega) = 2 \frac{I_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{I_0(\beta(\omega))} \sigma_w(\omega) = T_\sigma(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (163)$$

El factor de fricción queda definido como:

$$\langle Vz(\omega) \rangle = \frac{a}{4\eta_0} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \nabla z p(\omega) a \right) = \frac{a}{4\eta_0} T(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (164)$$

Recordando que el factor de fricción se define como las fuerzas viscosas o viscoelásticas entre la energía cinética del sistema de la siguiente manera.

$$f_f = \frac{-\sigma_{rz}|_{r=a}}{\frac{1}{2}(Vz)^2} \quad (165)$$

De la Ec. Finalmente obtenemos el factor de fricción para fluidos viscoelásticos.

$$f_f = f_N \cdot \frac{T_\sigma(\omega)}{T_F^2(\omega)} \quad (166)$$

Para los pasos matemáticos del factor de fricción en un capilar (Ecs. 162-166) consultar el apéndice A.

3.2 Fluido viscoelástico en una corona circular.

En esta sección vamos a analizar y obtener el flujo volumétrico, de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular debido a la fuerza motriz causada por el gradiente presión. La corona tiene un radio mayor (R_2) y un radio menor (R_1), con una longitud característica axial (L).

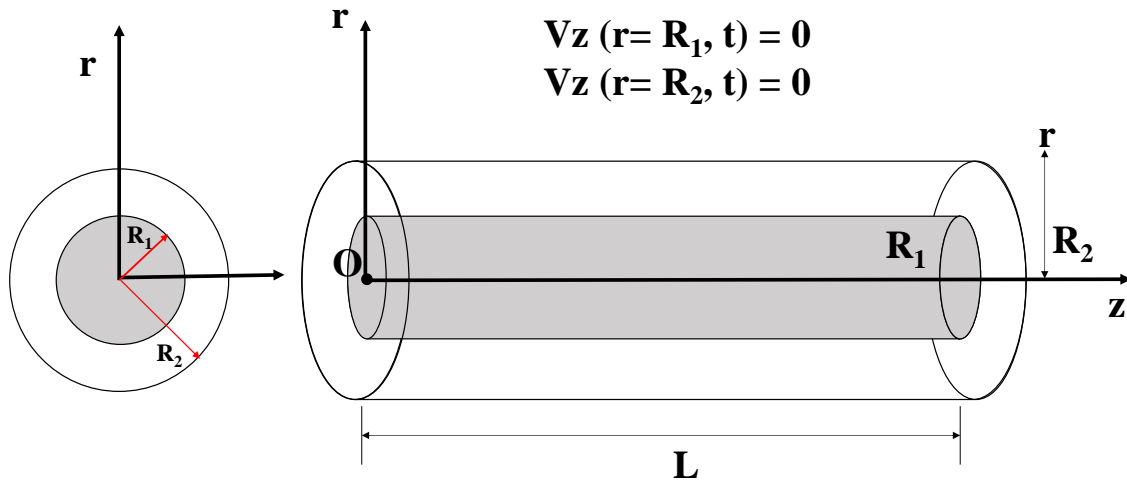


Figura 7. Esquema de un fluido viscoelástico, isotérmico e incompresible, en una corona circular de radio menor (R_1), radio mayor (R_2) y Longitud (L).

3.2.1 Modelado matemático

- Fluido no newtoniano, fluido viscoelástico.
- Estado no estacionario, la velocidad y la presión dependen del tiempo (flujo pulsátil).
- Incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- La velocidad va en dirección z y por ende está en función de la coordenada radial r .
- El fluido se deforma a causa de un gradiente de presiones, en la dirección axial z .
- Los mecanismos gravitacionales son despreciables puesto que el capilar se encuentra en horizontal y su radio es muy pequeño.

Iniciando en el perfil de velocidades general obtenido para el fluido viscoelástico en un capilar obtenido anteriormente (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$V_z(\omega, r) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{1}{i^2 \beta^2 O_{\eta}^J(i\omega)} \nabla_z p(\omega) \quad (167)$$

Establecemos las condiciones de frontera para el sistema a realizar, las cuales son las siguientes.

Cuando nos encontramos en la pared del radio menor (R_1) la velocidad es igual a cero lo mismo aplica cuando nos encontramos en la pared del radio mayor.

$$\text{C.F.1 } V_z(r=R_1) = 0$$

$$\text{C.F.2 } V_z(r=R_2) = 0$$

Aplicando las condiciones de frontera en la Ec. (167) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A \quad (168)$$

Restando la Ec. (168) obtenemos:

$$-(0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A) \quad (169)$$

Combinamos las Ecs. (168) y (169) para formar una nueva ecuación.

$$(C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + A)(-C_1 I_0(\beta R_2) - C_2 K_0(\beta R_2) - A) \quad (170)$$

Agrupamos

$$0 = C_1 (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)) + C_2 (K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)) \quad (171)$$

Despejando C_2 de la ecuación, obtenemos:

$$C_2 = \frac{C_1 (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1))}{K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)} \quad (172)$$

Sustituyendo C_2 (Ec. (172)) en la Ec. (168) resultando:

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + \frac{C_1 (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1))}{K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)} K_0(\beta R_1) + A \quad (173)$$

En la Ec. (173) se factoriza C_1

$$0 = C_1 \left(\frac{I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2) + K_0(\beta R_1) (I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2))}{K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)} \right) + A \quad (174)$$

De la Ec. (174) eliminaremos términos

$$0 = C_1 \left[\frac{I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2)}{K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)} \right] + A \quad (175)$$

Se despeja A y nos queda la siguiente expresión matemática

$$-A = C_1 \left[\frac{I_0(\beta R_2) (K_0(\beta R_1)) - I_0(\beta R_1) (K_0(\beta R_2))}{(K_0(\beta R_1)) - (K_0(\beta R_2))} \right] \quad (176)$$

Ahora, despejando C_1 de la Ec. (176) obtenemos:

$$C_1 = \left[\frac{(K_0(\beta R_1)) - (K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \right] (-A) \quad (177)$$

(A) tiene la información del gradiente de presión (fuerza motriz) que de forma continua e inconsecuentemente el fluido (**Herrera-Valencia et al. 2020**).

En esta parte de las deducciones, encontraremos C_2 y para ello sustituiremos C_1 en la Ec. (172).

$$C_2 = \left[\frac{(K_0(\beta R_1)) - (K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \right] \frac{I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)}{(K_0(\beta R_1)) - (K_0(\beta R_2))} \quad (178)$$

Simplificando la Ec. (178)

$$C_2 = \frac{(I_0(\beta R_2) - C_1 I_0(\beta R_1))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} (-A) \quad (179)$$

Para simplificar la ecuación, haremos un cambio de variable.

$$C_1 = C_3 (-A) \quad (180)$$

Donde C_3

$$C_3 = \frac{(K_0(\beta R_1)) - (K_0(\beta R_2))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \quad (181)$$

Podemos expresar la Ec. (181) como:

$$C_3 = -AC_4 \quad (182)$$

Donde:

$$C_4 = \left[\frac{(I_0(\beta R_2) - C_1 I_0(\beta R_1))}{I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)} \right] \quad (183)$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en Ec. (167) $V_z(\omega, r)$ para encontrar el perfil de velocidades de un fluido viscoelástico que fluye a través de una corona circular, impulsada por el gradiente de presiones (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$V_z(\omega, r) = C_3 I_0(\beta r) (-A) + C_4 K_0(\beta r) (-A) - (-A) \quad (184)$$

3.2.2 Flujo volumétrico

Se procede a encontrar una expresión que describa el flujo volumétrico del sistema, iniciando por la siguiente integral superficial (**Bird et al. 2002**).

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta \quad (185)$$

Como se puede observar $Vz(r)$ no depende del ángulo θ , entonces, sale de la integral como constante e integramos.

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} Vz(r) r dr \quad (186)$$

Evaluando los límites de la integral.

$$Q = \theta \Big|_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} Vz(r) r dr \quad (187)$$

Dando como resultado la siguiente ecuación (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} Vz(r) r dr \quad (188)$$

Sustituimos el perfil de velocidades en la Ec. (188).

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} C_3 I_0(\beta r)(-A) + C_4 K_0(\beta r)(-A) - (-A) r dr \quad (189)$$

Integrando la ecuación

$$Q = 2\pi \left[\int_{R_1}^{R_2} C_3 I_0(\beta r)(-A) r dr + \int_{R_1}^{R_2} C_4 K_0(\beta r)(-A) - (-A) r dr \right] \quad (190)$$

Se factoriza y sacamos de la integral lo que sea constante

$$Q = 2\pi \left[C_3(-A) \int_{R_1}^{R_2} I_0(\beta r) r dr + C_4(-A) \int_{R_1}^{R_2} K_0(\beta r) r dr - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (191)$$

Escalamos las integrales multiplicando por $\frac{\beta^2}{\beta^2} = 1$, lo que hicimos en la integral, de igual forma escalamos los límites de integración, y queda de la siguiente manera.

$$Q = 2\pi \left[\frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(\beta r) r \beta dr \beta + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(\beta r) r \beta dr \beta - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (192)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable $\beta r = x$ y despejando nuestra ecuación queda de la siguiente manera:

$$Q = 2\pi \frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} I_0(x) x dx + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} K_0(x) x dx - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \quad (193)$$

Aplicamos las propiedades de las funciones de Bessel (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

$$\frac{d}{dx} (I_1(x)x) = I_0(x)x \quad (194)$$

$$\frac{d}{dx} (K_1(x)x) = K_0(x)x \quad (195)$$

Sustituimos las propiedades en la ecuación de flujo en la Ec (193) quedando la expresión:

$$Q = 2\pi \frac{C_3(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} I_1(x) \cdot x + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} K_1(x) \cdot x - (-A) \int_{R_1}^{R_2} r dr \quad (196)$$

Resolviendo las integrales, quedan de la siguiente forma (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = 2\pi \left[\frac{C_3(-A)}{\beta^2} (I_1(x) \cdot x)_{R_1\beta}^{R_2\beta} + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} (K_1(x) \cdot x)_{R_1\beta}^{R_2\beta} - (-A) \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} \right] \quad (197)$$

Evaluando los límites de integración

$$Q = 2\pi \left[\frac{C_3(-A)}{\beta^2} [I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \frac{C_4(-A)}{\beta^2} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] - (-A) \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \right] \quad (198)$$

Simplificando la Ec. (198)

$$Q = 2\pi(-A) \left[\frac{C_3}{\beta^2} [I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \frac{C_4}{\beta^2} [K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta - K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta] + \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \right] \quad (199)$$

Factorizamos R_2^2 en la Ec. (199) dando resultado:

$$Q = 2\pi \frac{-\nabla z p(\omega) R_2^2}{i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left[\frac{2C_3}{\beta} \left[I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \frac{2C_4}{\beta} \left[K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right] + \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right] \quad (200)$$

Se debe hacer similar a la ecuación de Hagen-Poiseuille vamos a multiplicar por $\frac{R_2^2}{R_2^2} = 1$, por $\frac{8}{8} = 1$ y por ultimo se multiplicará por $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$. Expresando la ecuación de la siguiente manera.

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \left\{ \frac{16\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left[\frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + C_4 \left[\frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{8\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} (-\nabla z p(\omega)) \quad (201)$$

Los términos dentro del corchete los definimos como $T_C(\omega)$.

$$T_C(\omega) = \frac{16\eta_0 C_3}{R_2^2 i^2 \beta^2 O_\eta^J(i\omega)} \left\{ C_3 \left[\frac{I_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + C_4 \left[\frac{K_1(R_2\beta) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2}}{\beta} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} \quad (202)$$

Escribiendo la ecuación, el flujo volumétrico de la siguiente manera (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} T_C(\omega) (-\nabla z p(\omega)) \quad (203)$$

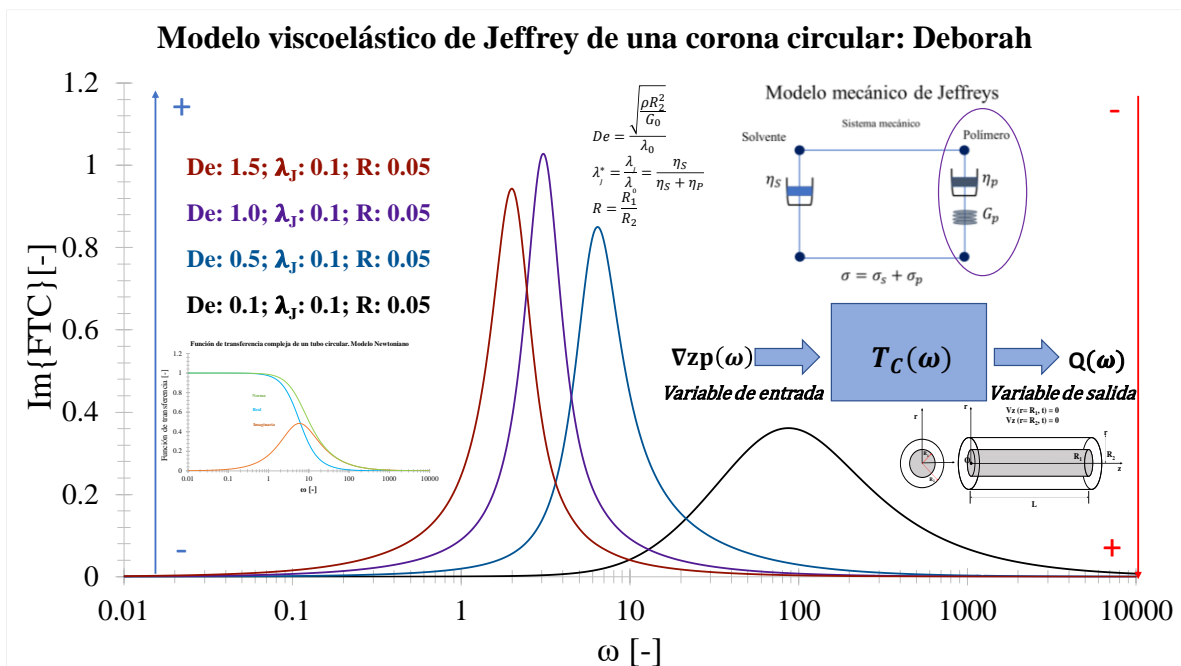
Donde $T_C(\omega)$ es la función de transferencia del fluido viscoelástico que fluye por la corona circular, y toda la demás expresión es la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido newtoniano (**Bird et al. 2002; Macosko 1994**).

3.2.3 Factor de Fricción de una corona circular

Procediendo como en los casos anteriores, el factor de fricción del sistema para una corona circular puede ser expresado en términos de un cociente entre la función de transferencia del esfuerzo y la función de transferencia del esfuerzo (Apéndice B)

$$\therefore R_{cc}(\omega) = \frac{T_{\sigma}^{cc}}{(T_Q^{cc}(\omega))^2}$$

CAPÍTULO IV SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



Comportamiento del factor de fricción en la parte imaginaria de un modelo viscoelástico de Jeffreys

En este capítulo se presentan las simulaciones principales de esta investigación a nivel licenciatura. Se estudia el efecto de los mecanismos: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) viscoelásticos y (iv) del solvente en la respuesta dinámica del sistema lineal. En esta sección se presentan las variables, grupos y ecuaciones que son punto de partida de las simulaciones numéricas. Las variables importantes de escalamiento son la frecuencia, el parámetro beta, la función de transferencia compleja y el operador viscosidad o fluidez.

4.1 Variables y grupos dimensionales

Para escalarlas, se escogerá un conjunto de variables características que nos permitirán simplificar y acotar el espacio de estudio. Por otra parte, este escalamiento permitirá obtener grupos adimensionales los cuales, describirán los procesos macroscópicos del sistema.

4.2 Variables características

Las variables características del sistema son: (i) Viscosidad (η_0), (ii) Longitud radial ($r = a$), (iii) Tiempo característico inercial ($t_i = \sqrt{\rho a^2 / G_0}$) y (iv) Tiempo característico viscoelástico de Maxwell (λ_0).

4.3 Variables adimensionales

Las variables adimensionales son: (i) Función de transferencia compleja $T(i\omega)$, frecuencia $T(\omega)$, (ii) Operador viscosidad o fluidez $O\eta(i\omega)$ o $1/O\eta(i\omega)$ y (iii) parámetro beta (ω).

4.4 Grupos adimensionales

Los grupos adimensionales que obtendremos serán: (i) El número de Deborah (De) y (ii) un cociente de tiempos característicos asociados al retardo y al tiempo de relajación de Maxwell (λ_j).

4.5 Variables adimensionales.

En esta sección se presentarán las variables adimensionales que permitirán simplificar el proceso y permitirán introducir grupos adimensionales en el sistema.

A) Operador viscosidad de Jeffreys adimensional (**Bird et al. 2002**)

$$O_{\eta}^J = \frac{o_{\eta}^J}{\eta_0} \quad (1)$$

B) La frecuencia se hará adimensional con un tiempo (**Macosko 1994**).

$$\dot{\omega} = \lambda_0 \cdot \omega \quad (2)$$

C) Operador viscosidad adimensional de Jeffreys en el espacio de las frecuencias (**Bird et al. 2002**)

$$\dot{O}_{\eta}^J = \frac{1 + \frac{\lambda_0^J}{\lambda_0} (i\dot{\omega})}{1 + (i\dot{\omega})} \quad (3)$$

4.6 Grupos adimensionales

Al combinar las variables características en las ecuaciones fundamentales obtenemos los correspondientes grupos adimensionales:

4.6.1 Número de Deborah.

Este número relaciona las propiedades viscoelásticas del material y se define como (**Bird et al. 1987; Bird et al 2022; Macosko 1994**).

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} = \frac{\text{Inercia}}{\text{Visco-elástica}} \quad (4)$$

4.6.2 Número de Jeffreys

El segundo número adimensional relaciona, un cociente de tiempos característicos del material. Físicamente, estos tiempos están asociados a los mecanismos de retardo (solvente) y viscoelásticos del sistema (**Bird et al. 1987; Macosko 1994**).

$$\lambda_J = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \lambda_0 = \frac{\text{Solvente}}{\text{Solvente} + \text{Visco-elástica}} \quad (5)$$

4.7 Funciones adimensionales (capilar)

1.- Función de transferencia adimensional

La función de transferencia compleja será escalada con una fluidez característica la cual será la fluidez a baja rapidez de deformación (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\dot{T}(\omega) = \frac{8i^2}{(\dot{\beta})^2 \sigma_\eta^*(i\omega)} \left[1 - 2 \frac{I_1(\dot{\beta})}{I_0(\dot{\beta})} \right] \quad (6)$$

2.- Parámetro Beta

El parámetro beta será escalado con una longitud característica. Esta longitud característica será el radio del capilar (**Herrera-Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

$$\dot{\beta} = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{De^2 \dot{\omega}}{\dot{\sigma}_\eta^*(i\omega)}} = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{De^2 \dot{\omega} \dot{\sigma}_\eta^*(i\omega)} \quad (7)$$

3.- Función fluidez

La función fluidez será escalado con una fluidez característica del sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

$$\dot{\sigma}_\eta^J = \frac{1 + (i\omega)}{1 + \frac{\lambda_J}{\lambda_0} (i\omega)} \quad (8)$$

4.8 Funciones adimensionales (corona circular)

1.- Función de transferencia adimensional

La función de transferencia compleja será escalada con una fluidez característica la cual será la fluidez a baja rapidez de deformación (**Herrera-Valencia et al. 2022**).

$$\dot{T}_C(\omega) = T_C(\omega) \frac{8i^2}{\dot{\beta}^2 \dot{\sigma}_\eta^*(i\omega)} \left\{ 2C3 \left[\frac{I_1(\dot{\beta}) - I_1(R_1 \dot{\beta}) \cdot \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \right] + 2C4 \left[\frac{K_1(\dot{\beta}) \cdot \frac{1}{R_2} - K_1(R \dot{\beta}) \cdot \dot{\beta}}{\dot{\beta}} \right] + \frac{1}{2} (R^2 - 1) \right\} \quad (9)$$

2.- Parámetro Beta

El parámetro beta será escalado con una longitud característica (**Herrera-Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

$$\dot{\beta} = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{De^2 \dot{\omega}}{\dot{O}_{\eta}^J(i\dot{\omega})}} = i^{\frac{3}{2}} \sqrt{De^2 \dot{\omega} \dot{O}_{\phi}^J(i\dot{\omega})} \quad (10)$$

3.- Función fluidez

La función fluidez será escalado con una fluidez característica del sistema (**Herrera-Valencia et al. 2022; Macosko 1994**).

$$\dot{O}_{\eta}^J = \frac{1+(i\dot{\omega})}{1+\frac{\lambda_J}{\lambda_0}(i\dot{\omega})} \quad (11)$$

En la siguiente sección se presentarán las simulaciones del sistema para la función de transferencia compleja del capilar y de la corona para el factor de fricción.

En la siguiente sección se analizará el efecto de la frecuencia sobre el factor de fricción en un fluido viscoelástico en dos configuraciones diferentes denominadas: (i) capilar y (ii) corona circular. Mediante el escalamiento anterior y las ecuaciones adimensionales las ecuaciones adimensionales descritas en la sección anterior, se analizará los mecanismos viscosos, viscoelásticos, inerciales y del solvente en la respuesta dinámica del factor de fricción. Es claro, que esta respuesta dinámica se encuentra en el régimen de estado no estacionario por lo que, su análisis es centrado en tiempos cortos moderados y corresponde a problemas asociados a inicio de flujo (**Bird et al 2002. Capítulo 4**). El factor de fricción depende de dos mecanismos principales asociados a los mecanismos disipativos y a los de movimiento relacionados con la energía cinética del fluido. Para fluidos newtonianos en estado estacionario, depende solamente al número adimensional de Reynolds mientras que, para fluidos viscoelásticos dependientes del tiempo depende, de las fuerzas asociadas a la resistencia que presenta el medio para cambiar su estado (inercia), la resistencia que presenta al ser deformado continua e irreversiblemente (fluir) y la energía de almacenamiento relacionada con la elasticidad del medio. Es claro, que las expresiones deducidas en este trabajo son función de las propiedades matemáticas de las funciones especiales de la física matemática conocidas como funciones de Bessel de primera y segunda especie, de ordenes cero y primero. Estas funciones de Bessel proveen un tipo de resonancia debido a las oscilaciones que presentan por lo que, son relaciones matemáticas que presentarán una resonancia dominante relacionado con las propiedades matemáticas del medio (viscosidad

del solvente, viscosidad del polímero, módulo de corte elástico, inercia, longitud característica radial).

La función de transferencia para un capilar depende de el cociente de dos funciones de transferencia características asociadas a la interacción pared fluido y la interacción que presenta el gradiente de presión transitorio y el flujo volumétrico. Este cociente se puede definir de la siguiente manera analítica.

$$f_f(\omega) = f_N(\omega) \cdot \frac{T_\sigma(\omega)}{T_F^2(\omega)}$$

Esta relación describe el propósito de este trabajo y físicamente significa que el factor de fricción de un fluido viscoelástico en estado no estacionario es el producto de un factor de fricción no newtoniano y una función de transferencia $R(\omega)$.

$$f_f(\omega) = f_N(\omega) \cdot R(\omega)$$

En donde $R(\omega)$ representa la respuesta dinámica del sistema. Es claro que, a frecuencias bajas, tiempos largos el sistema tiende al estado estacionario, es decir:

$$f_f = f_N \cdot R$$

En donde R puede representar la contribución geométrica en la configuración del capilar. Nuestras hipótesis que será contrastadas con las simulaciones numéricas en Mathematica 12.3 (Licencia UNAM), se presenta a continuación:

- a) **Los mecanismos inerciales** juegan un papel transcendental en la activación de la resonancia. Si estos son cero, el sistema no muestra picos dominantes y por lo tanto el factor de fricción es constante.
- b) **Los mecanismos inerciales** diferentes de cero y el flujo caracterizado por un fluido newtoniano no presentan resonancia por lo que el factor de fricción no es contante y dependerá de los mecanismos acoplado entre la inercia y la viscosidad.
- c) **Los mecanismos viscoelásticos** que combinan la disipación y la elasticidad aumentan la respuesta dinámica del sistema, es decir, la función transferencia alcanzo su pico máximo y esta es función del número de Reynolds, esta induce un decremento en el número de Deborah. Nuestra hipótesis es que la elasticidad juega un papel secundario en la respuesta del factor de fricción.
- d) **Los mecanismos del solvente** inducen a que la resonancia de la función de transferencia decrezca por efecto de aumentar los mecanismos viscosos, por lo que

el factor de fricción debe aumentar, debido a la contribución del solvente y la del polímero a la viscosidad.

En la siguiente sección se mostrarán los resultados más importantes de este trabajo en las dos configuraciones de estudio:

A) CORONA CIRCULAR

B) CAPILAR

Estas dos configuraciones permitirán analizar el efecto de estos mecanismos combinados en el factor de fricción de un fluido viscoelástico en estado estacionario. Este trabajo aporta información importante en sistemas que son descritos con una ecuación constitutiva más robusta que el modelo de Maxwell.

4.9 Primera configuración: corona circular

4.9.1 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte real)

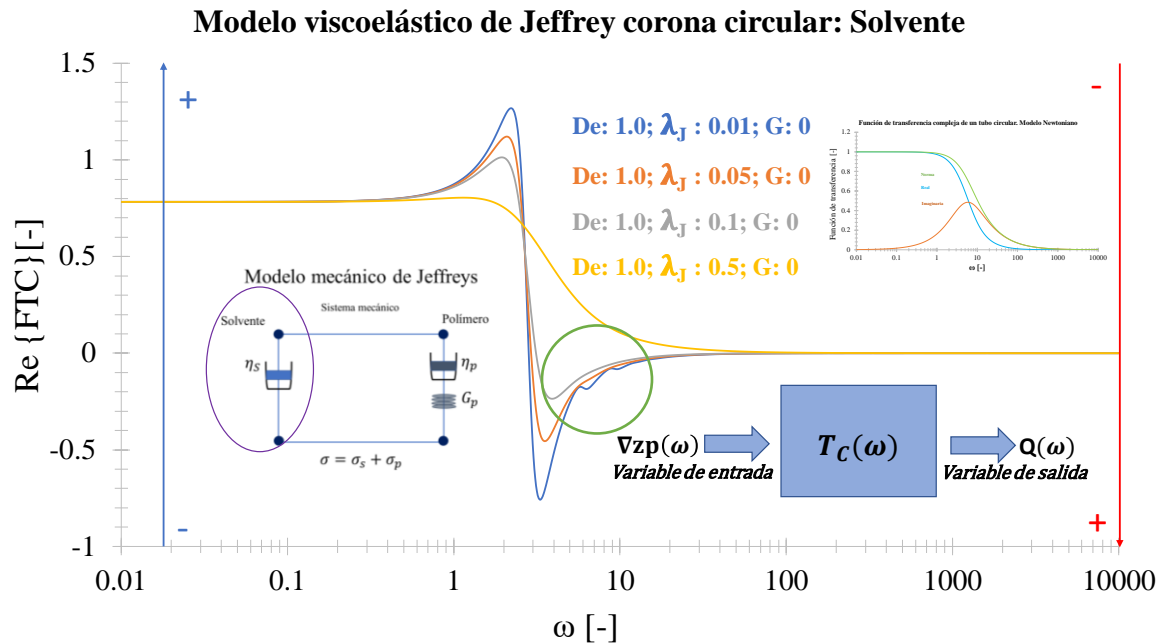


Figura 8. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia en un modelo viscoelástico de Jeffreys de una corona circular dando diferentes valores al solvente (λ_J).

En la Fig. 8 se **analiza el factor de fricción** en el espacio de Fourier a través de la parte real de la función de transferencia compleja. En esta simulación, se analiza el efecto del solvente y se deja constante la viscoelasticidad del material a través del número de Deborah. A frecuencias bajas (0.01-0.1) el sistema es constante e independiente de la frecuencia. Es claro, que a una frecuencia crítica el sistema (R-FTC) muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscosas, elásticas, solvente, inercia y dispersivas. Para un valor crítico en la frecuencia, se observa una transición del máximo al mínimo resonante, seguido de un comportamiento monótono creciente y con un tren de valores máximos y mínimos hasta un valor asintótico, en el cual, se observa que la función de transferencia tiene un valor constante y es independiente de la frecuencia, es decir, ya no existe una respuesta dinámica del sistema con la frecuencia.

Nótese que, el número de Jeffreys controla las propiedades del máximo y del mínimo en la FTC, donde a mayor fluidez y viscoelasticidad presentará la máxima resonancia este

comportamiento está señalado mediante la flecha azul, caso contrario a la flecha roja la cual indica que en la anti-resonancia el efecto de la fluidez y viscoelasticidad son casi nulas, sin embargo, la viscosidad y el factor de fricción se encuentran en su máximo valor.

4.9.2 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte iamginaria)

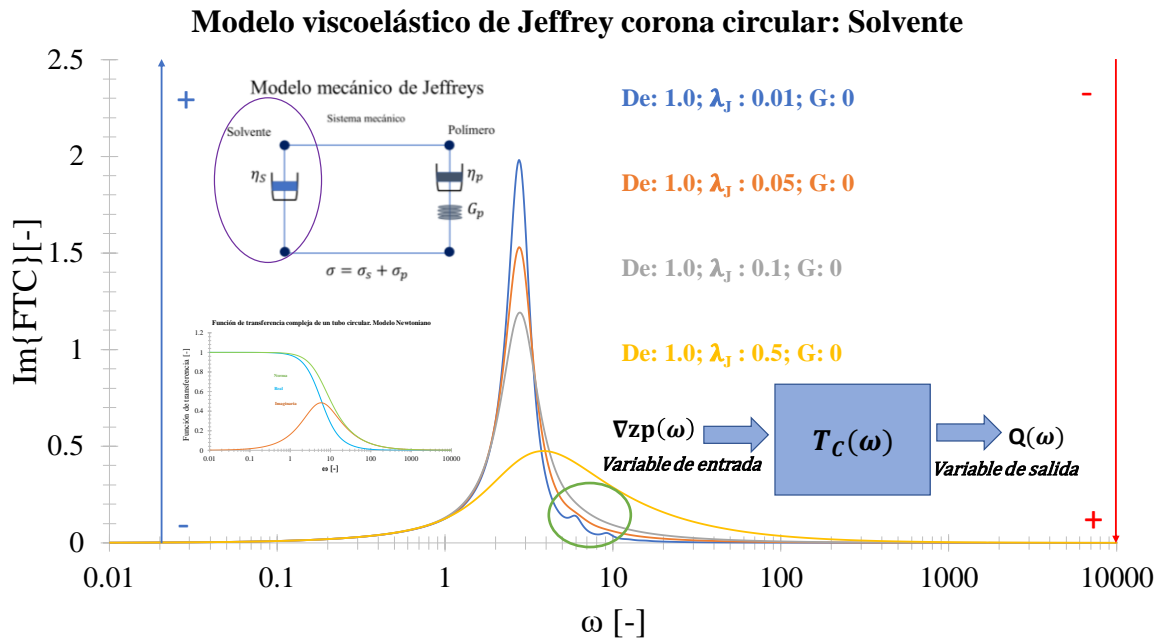


Figura 9. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia en un modelo viscoelástico de Jeffreys fluyendo en una corona circular, para diferentes valores del tiempo de retardo (λ_J).

En la Fig. 9 se **analiza el factor de fricción** en el espacio de Fourier a través de la parte imaginaria de la función de transferencia compleja. En esta simulación, se analiza el efecto del solvente y se deja constante la viscoelasticidad del material a través del número de Deborah. La configuración analizada es la de una corona circular. Se observa que a bajas frecuencias la parte imaginaria de la función de transferencia se comporta de manera constante independiente de la frecuencia. En particular, a una frecuencia dada, se observa un comportamiento monótonamente creciente hasta un valor máximo a una frecuencia resonante, lo cual refleja la deficiencia del factor de fricción al igual que la viscosidad indicada con la flecha roja. Este valor de pico de resonancia es una combinación de todos

los mecanismos descritos en este estudio, como solvente, viscosidad, viscoelasticidad, inercia y dispersión. Por otro lado, se observa que existe una transición inducida por la frecuencia de una resonancia más alta a una más baja. Cuando el solvente es bajo, existe un efecto negativo en la resonancia lo cual indica que la fluidez y viscoelasticidad son mínimas, sin embargo, la viscosidad y factor de fricción se encontrarán en su máximo valor esto se muestra en frecuencias específicas, que muestran un cambio acompañado de un tren de frecuencias resonantes, seguida de un comportamiento asintótico.

Es importante resaltar que las gráficas Fig. 8 y Fig.9 presentan un tren de picos secundarios muy parecidos los cuales han sido resaltados en un círculo.

4.9.3 Efecto del solvente en el factor de fricción (norma)

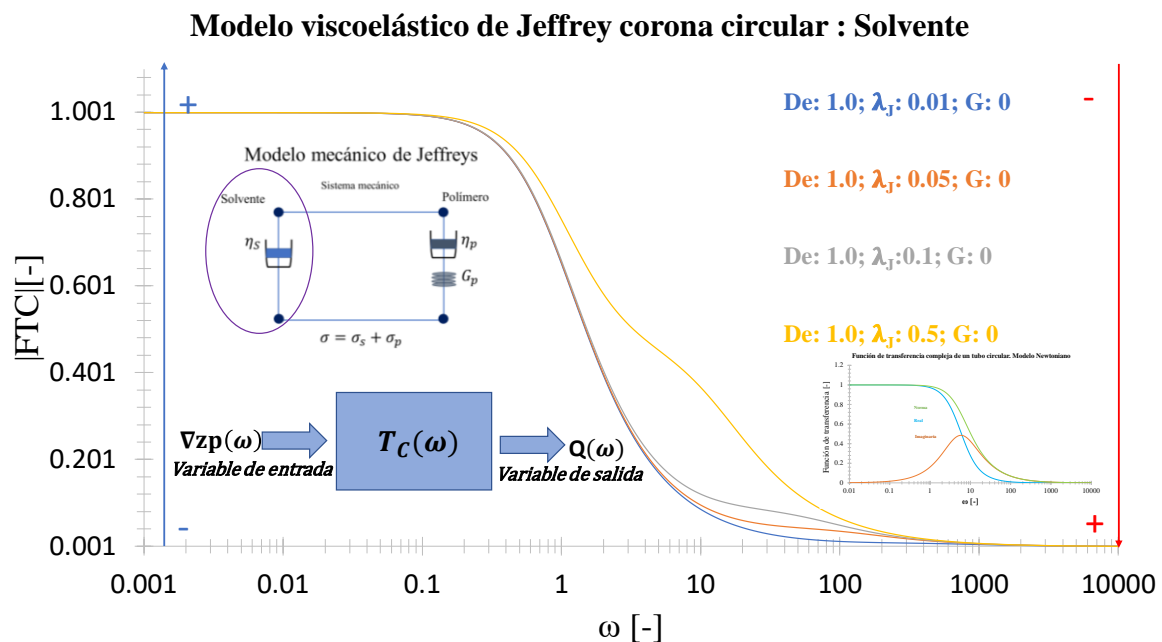


Figura 10. Ilustra la norma de función de transferencia compleja vs la frecuencia para diferentes valores del tiempo de retardo λ_j . Los otros valores utilizados en la simulación son: (i) $De = 0.1$ y (ii) $G = 0$

En la Fig. 10 se analiza el **factor de fricción** en el espacio de Fourier a través de la norma de la función de transferencia compleja. En esta simulación, se analiza el efecto del solvente (λ_j), y se deja constante la viscoelasticidad del material a través del número de Deborah. A frecuencias bajas la FTC no depende de la frecuencia angular o en un valor

especifico de esta. Cabe destacar que en una segunda frecuencia característica el sistema tiende asintóticamente a valores muy cercanos a cero. Nótese que en el máximo valor del número de Jeffreys (0.5) línea amarilla, el sistema relajo con variaciones en la pendiente los cuales están relacionados a los mecanismos elásticos, inerciales, viscoelásticos, dispersivos y de un solvente.

4.9.4 Efecto de la geometría en el factor de fricción (parte real)

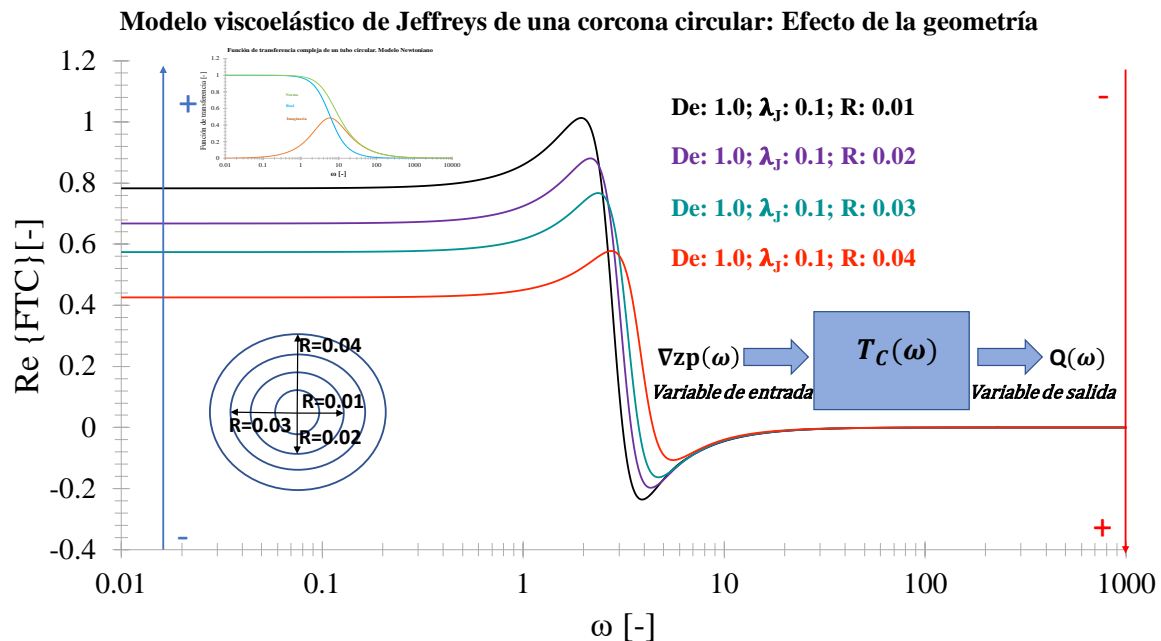


Figura 11. Se ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función de la razón geométrica R. Los valores del número de Deborah y Jeffreys están dados por: $De = 1.0$ y $\lambda_j = 0.1$.

En la Fig. 11 se analiza el factor de fricción en el espacio de Fourier a través de la parte real de la función de transferencia compleja. En esta simulación, se analiza el efecto de la geometría a través del radio reducido R. En este experimento computacional, el número de Deborah es $De = 1.0$ y un tiempo de retardo $\lambda_j = 0.1$.

En este caso en particular se analiza el efecto de la geometría, donde a bajas frecuencias se observa un comportamiento de la función de transferencia constante. A frecuencias específicas se observa un comportamiento monótono creciente hasta llegar a la máxima resonancia donde se puede apreciar que hay mayor fluidez y viscoelasticidad en el

sistema, este comportamiento se puede apreciar en la simulación mediante la flecha azul. Seguido de esto, en determinadas frecuencias se observa un comportamiento discontinuo para pasar a un comportamiento anti resonante, en donde el factor de fricción y la viscosidad se ven favorecidas. Sin embargo, la viscoelasticidad y la fluidez se ven afectadas de forma negativa.

4.9.5 Efecto de la geometría en el factor de fricción (parte imaginaria)

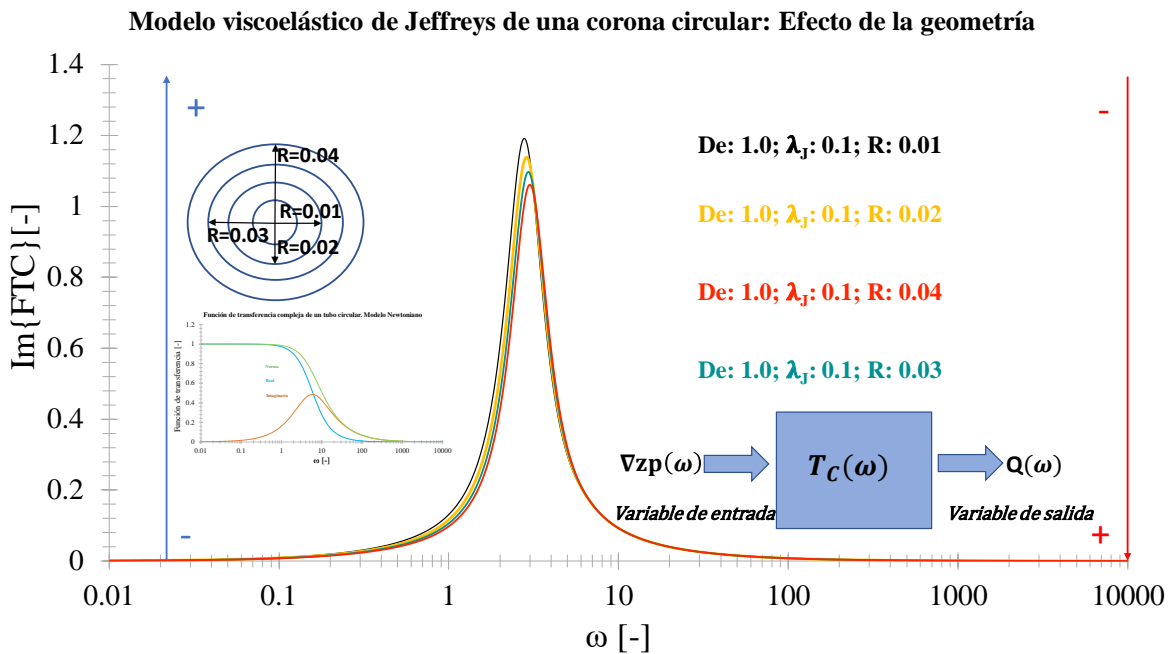


Figura 12. Se ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia vs frecuencia del modelo viscoelástico de Jeffrey para una corona circular con efecto de la geometría donde tienen diferentes valores en R.

En la Fig. 12 se analiza el **factor de fricción** en el espacio de Fourier a través de la parte imaginaria de la función de transferencia compleja. En esta simulación se analiza el efecto de la geometría a través de la razón geométrica R. Los valores del número de Deborah utilizados en esta simulación son: (i) $De = 0.1$ y (ii) $\lambda_J = 0.1$.

A bajas frecuencias su comportamiento es casi constante a una frecuencia particular la frecuencia crítica la función de transferencia despliega un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo donde se tiene una frecuencia resonante. A una frecuencia

mayor a la resonante la fluidez y viscoelasticidad se verán favorecidas, posterior a esto el sistema muestra un comportamiento decreciente, que en relación con la viscosidad y factor de fricción dicho comportamiento se verá favorecido como se puede apreciar en la flecha roja. En un segundo valor de frecuencia crítica la función de transferencia muestra un comportamiento asintótico. Nótese el que el efecto de la razón geométrica el efecto es disminuir la curva resonante.

Es importante resaltar que la parte imaginaria siempre despliega estos factores resonantes porque están relacionados a la máxima disipación en los sistemas. Cabe destacar que no se observa cascadas resonantes.

4.9.6 Efecto de la geometría en el factor de fricción (norma)

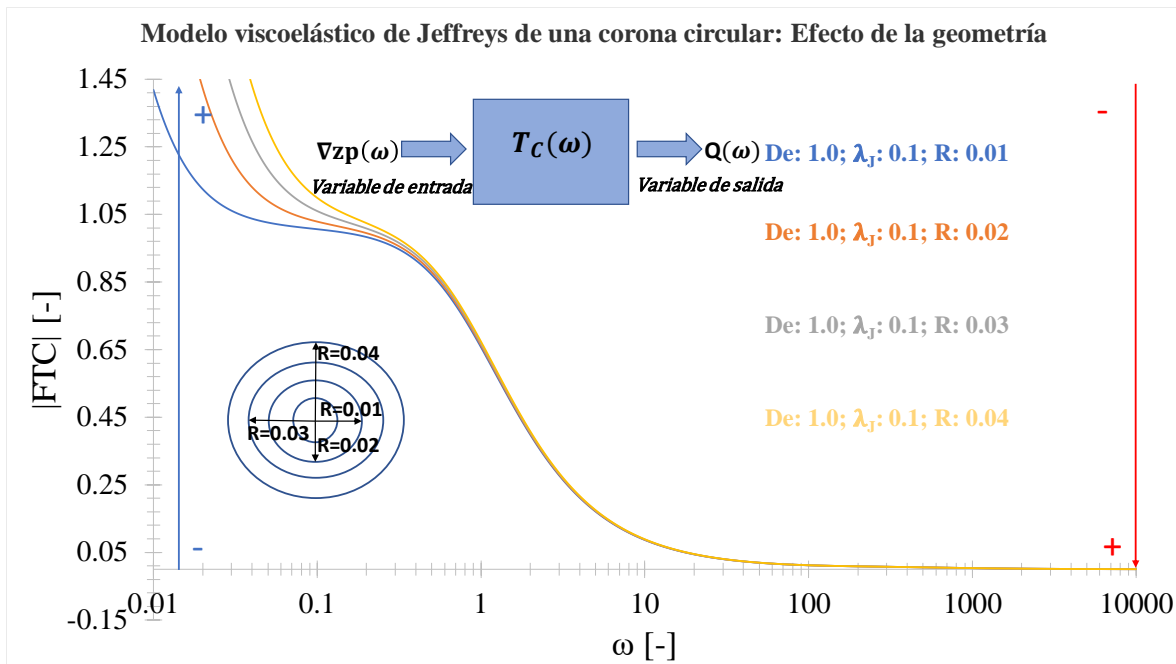


Figura 13. Ilustra la norma de la función de transferencia de un modelo viscoelástico de Jeffreys en la geometría de corona circular, en función de la razón geométrica R.

En la Fig. 13 se analiza el factor de fricción en el espacio de Fourier a través de la norma de la función de transferencia compleja. En esta simulación, se analiza el efecto de la geometría R, en función de los números de Deborah y de Jeffreys. Los valores utilizados para los números de Deborah y de Jeffreys son los mismos que en las simulaciones

anteriores. Se observa la norma de la FTC vs frecuencia de una geometría de corona circular R para un modelo viscoelástico de Jeffreys. Cabe resaltar que cuando en la R está cerca de cero el sistema tiende a una geometría capilar de radio R_2 y longitud $z=L$. Por otro lado, cuando R se aproxima a uno, el sistema está totalmente restringido y el área anular se reduce hasta llegar a cero. En esta simulación, se utilizó el valor de Deborah 1.0, lo que significa que existe competencia entre los mecanismos inerciales y los mecanismos viscoelásticos. El valor del número de Jeffreys es 0,1, lo que significa que la viscosidad del polímero es mucho mayor que la del solvente. Cabe destaca que la geometría produce curvas de relajación en todos los casos, y cuando el área de la sección transversal es mayor, el sistema se relaja a frecuencias más altas. Si el sistema en el que se encuentra tiene un área más grande en la sección transversal, este se relaja a menos frecuencias del proceso.

4.9.7 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte real)

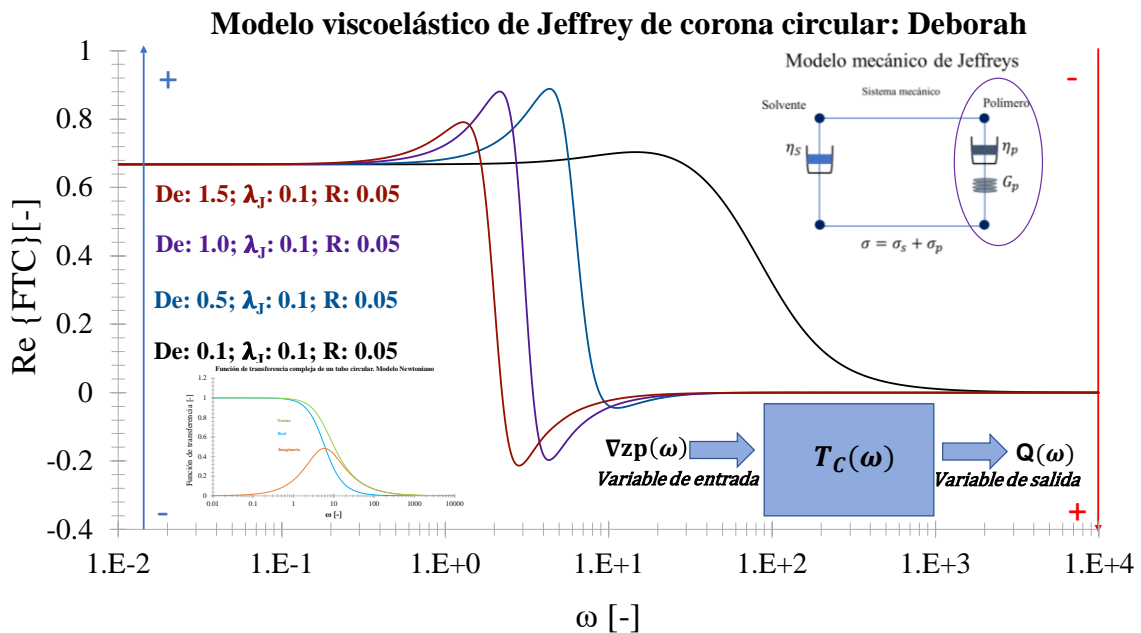


Figura 14. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función de la viscoelasticidad a través del número adimensional de Deborah.

En la Fig. 14 se analiza el factor de fricción en el espacio de Fourier a través de la parte real de la función de transferencia compleja. En esta simulación se analiza el efecto de

la viscoelasticidad a través del número de Deborah. Este número es un cociente entre dos tiempos característicos asociados a la inercia y a la viscoelasticidad del material. Los otros números adimensionales que se mantuvieron constante en esta simulación son: (i) el número de Jeffreys y la razón geométrica.

Se observa que la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función del número de Deborah asociado a la parte viscoelástica del sistema. A frecuencias bajas, la respuesta de la función de transferencia compleja es constante y a una frecuencia crítica, el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente que llega a un valor máximo resonante para una frecuencia resonante, en este punto el factor de fricción y la viscosidad se ven afectadas de forma negativa. Para una frecuencia mayor a la resonante el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo, cabe destacar que para este caso el factor de fricción y la viscosidad aumenta considerablemente. Sin embargo, la viscoelasticidad y fluidez disminuirán notablemente como lo marca en la flecha azul. Es importante resaltar que hay una transición de mayor a menor resonancia por efecto de la frecuencia. Para una frecuencia mayor a la frecuencia mínima resonante, el sistema tiende asintóticamente a cero. Finalmente, a valores de frecuencia altos la respuesta es independiente de la frecuencia de proceso.

4.9.8 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte imaginaria)

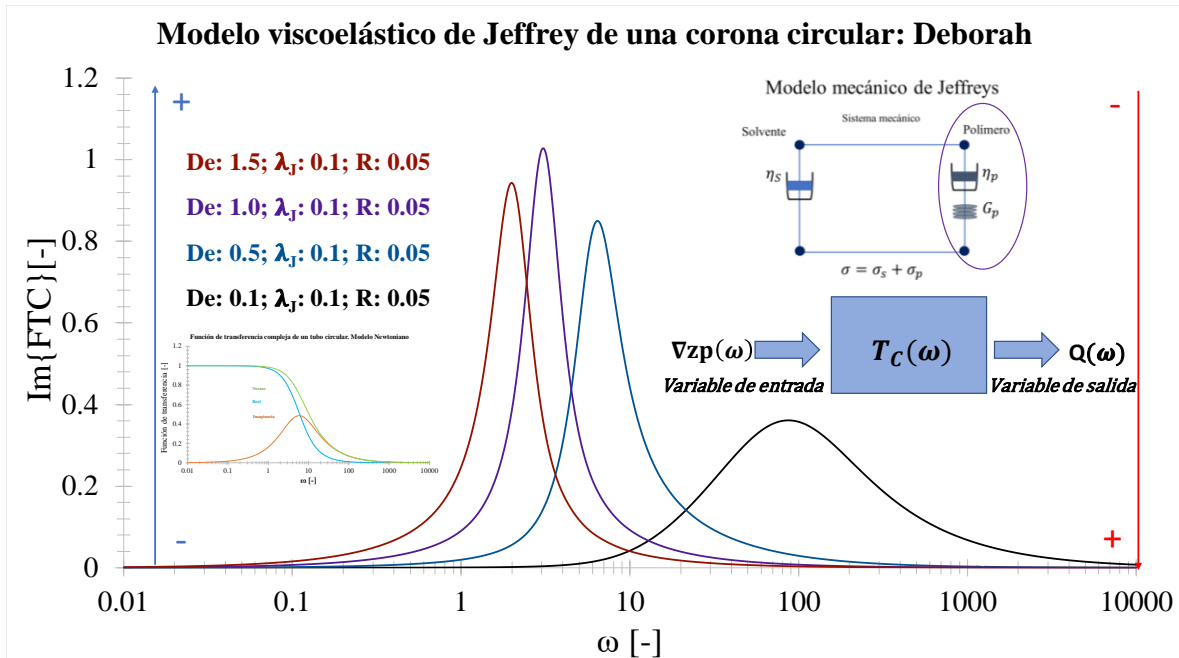


Figura 15. Ilustra el modelo viscoelástico del sistema en una corona circular variando la viscoelasticidad, fijando la geometría (R) y el solvente (λ_J).

En la Fig.15 se analiza los efectos viscoelásticos del número de Deborah en el factor de fricción complejo, a través de la parte real de la función de transferencia compleja. Los números adimensionales que se mantuvieron constantes son: (i) $\lambda_J = 0.1$, (ii) $R = 0.05$. A mínimas frecuencias su comportamiento es constante y a frecuencias críticas se observa un comportamiento resonante hasta un valor máximo formando una campana tipo Gaussiana, en donde la viscoelasticidad y fluidez alcanza su mayor valor. Finalmente se observa un comportamiento monótono decreciente, lo cual quiere decir que el factor de fricción y la viscosidad aumentarán notablemente en frecuencias más altas dejando atrás el efecto de la viscoelasticidad y la fluidez del sistema.

4.9.9 Efecto de Deborah en el factor de fricción (norma)

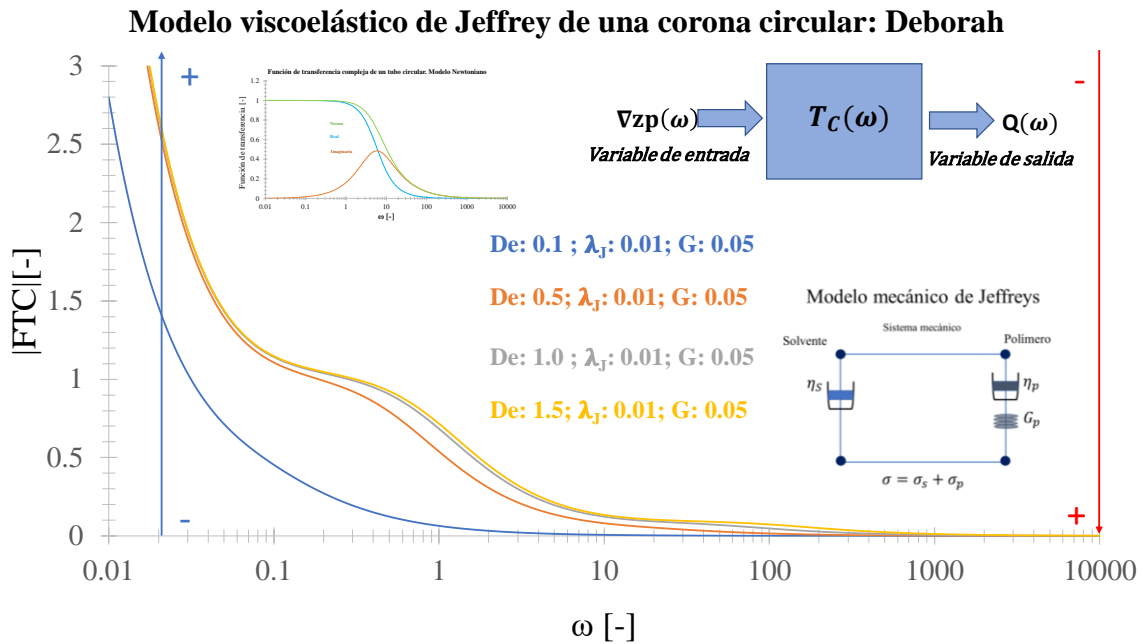


Figura 16. Ilustra la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah.

La Fig. 16 se analiza los mecanismos viscoelásticos a través del número de Deborah en la norma del factor de fricción complejo. La configuración analizada es la de una corona circular. Los valores de los números adimensionales utilizados en las simulaciones son: (i) $De = 0.1$, (ii) $\lambda_J = 0.01$.

El comportamiento que presenta esta gráfica muestra que a frecuencias bajas existe un comportamiento decreciente hasta aproximarse a un valor de 0.1 de dicha frecuencia. Es claro que en esta simulación la parte viscoelástica del material no tiene el efecto suficiente en el mismo para presentar resonancia en el comportamiento del material analizado. Sin embargo, se observa que el comportamiento dominante de esta simulación está asociado a los mecanismos de relajación.

4.10 Segunda configuración: capilar

4.10.1 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte real)

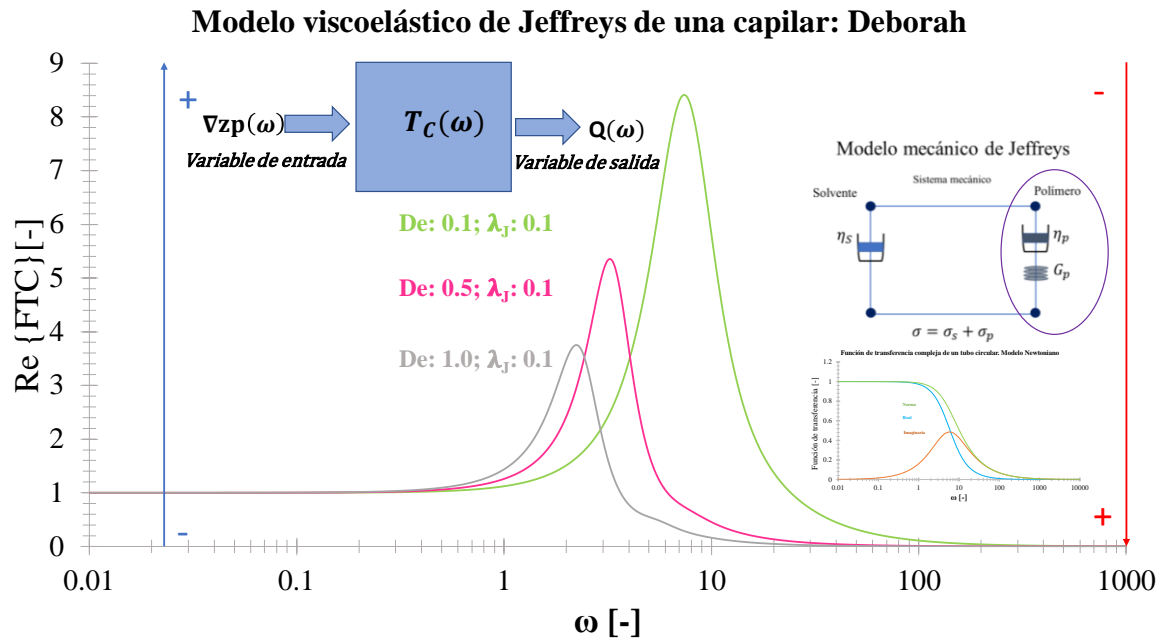


Figura 17. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. En esta simulación en particular, el valor de $J = 0.1$.

En la Fig. 17 se analiza el factor de fricción en el espacio de Fourier a través de la parte real de la función de transferencia compleja. En esta simulación se analiza el efecto de la viscoelasticidad a través del número de Deborah (De) y del tiempo de retardo reducido o número de Jeffreys.

Se observa que a frecuencias críticas ya que muestra un comportamiento monótono creciente reflejado mediante la máxima resonancia del sistema. En el punto máximo resonante el efecto de la fluidez y la viscoelasticidad llegan a su mayor valor dicho comportamiento se encuentra señalado mediante la flecha azul dentro de la Fig. 17. Finalmente, el sistema muestra un comportamiento monótono decreciente para frecuencias mayores a la resonante, aproximando su valor a 0. Es importante señalar que a altas frecuencias el efecto del número adimensional de Deborah será en disminuir la curva resonante, sin embargo, los mecanismos de viscosidad y factor de fricción se verán favorecidos en su máximo valor.

4.10.2 Efecto de Deborah en el factor de fricción (parte imaginaria)

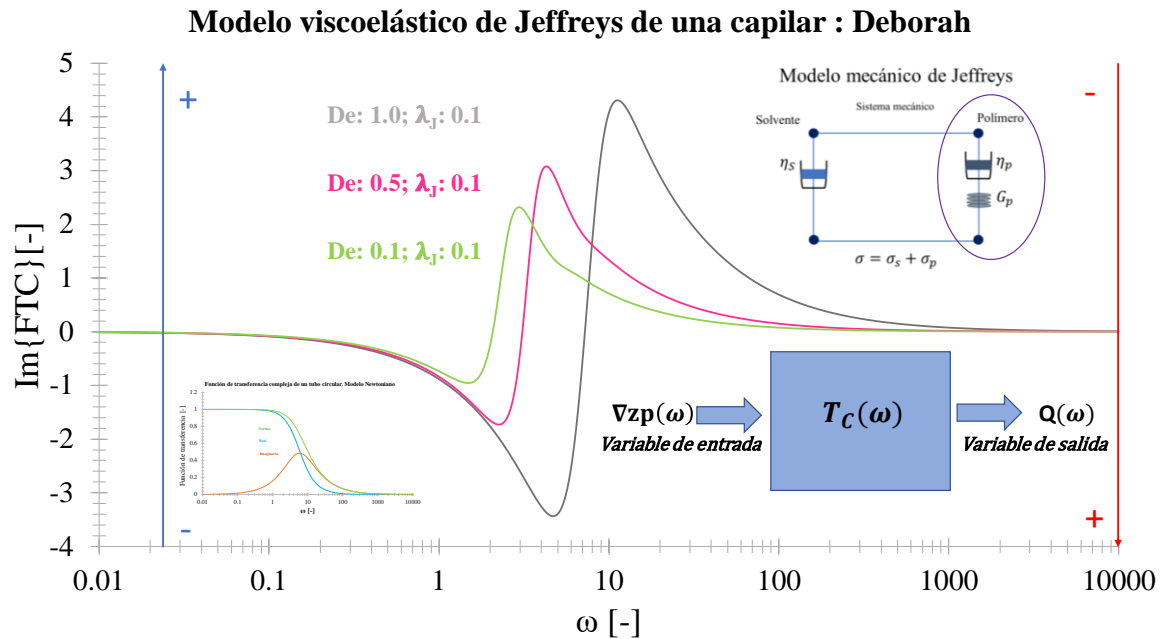


Figura 18. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número de Deborah. En esta simulación en particular, el valor de $J = 0.1$.

En la Fig. 18 se analiza los mecanismos viscoelásticos en la parte imaginaria del factor de fricción complejo, a través de la transformada integral de Fourier. Para facilitar sus análisis, el número de Jeffreys se deja constante, e igual a 0.1. Nótese, que la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia con relación a la variación del comportamiento de la parte viscosa del fluido mediante el número adimensional de Deborah de una geometría capilar. A frecuencias bajas se observa un comportamiento constante el cual se aproxima a 0 respecto a la frecuencia, para posteriormente presentar un comportamiento monótono decreciente hasta un valor máximo anti resonante en donde el factor de fricción y la viscosidad tienen su punto más alto, esto lo podemos apreciar con la flecha de color rojo. Cabe destacar que dicha curva presenta un comportamiento discontinuo. A frecuencia mayores se observa un comportamiento monótono creciente llegando así a su máxima resonancia en donde el factor de fricción y la viscosidad serán afectadas de forma negativa, sin embargo, la viscosidad y la fluidez aumentarán considerablemente presentando su valor más alto. Es importante señalar que en el punto máximo resonante el factor de

fricción y la viscosidad tienen un valor significativamente menor. Finalmente, la curva resonante relaja aproximando la frecuencia asintóticamente a cero disminuyendo con ello la viscoelasticidad y la fluidez.

4.10.3 Efecto de Deborah en el factor de fricción (norma)

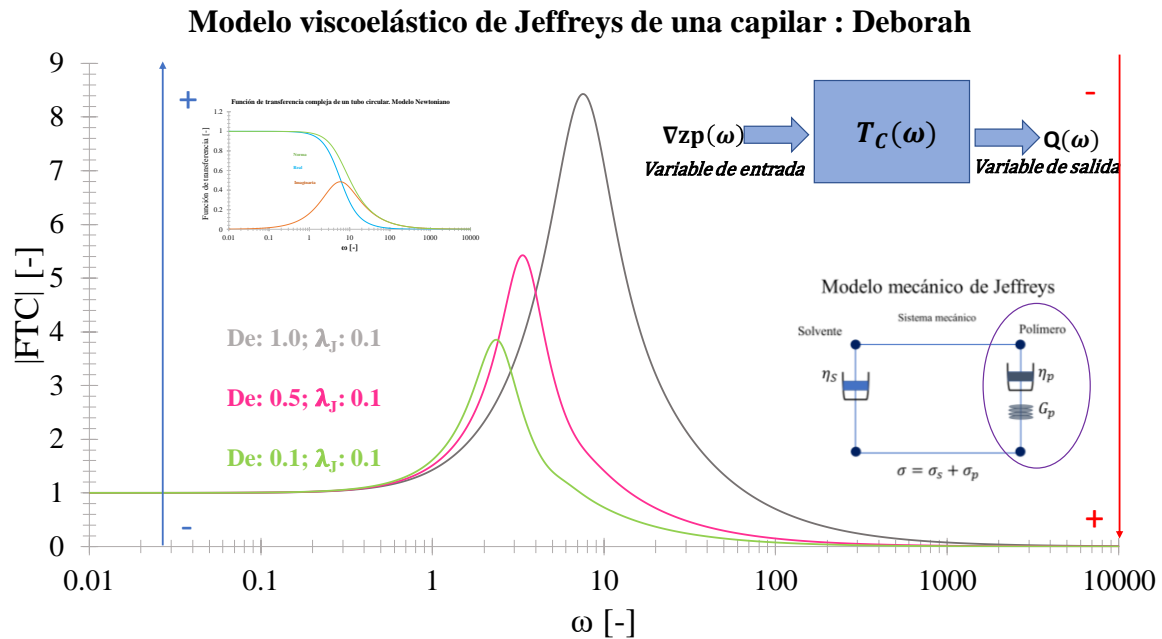


Figura 19. Se observa la norma de la función de transferencia vs frecuencia de un modelo viscoelástico de un capilar cuando se varía el polímero (De).

En la Fig. 19 se analiza el factor de fricción en el espacio de Fourier a través de la parte real de la función de transferencia compleja. En esta simulación se analiza el efecto del solvente y se deja constante la viscoelasticidad del material a través del número de Deborah. El valor del número de Jeffreys empleado es $\lambda_J = 0.1$.

En esta simulación, se presenta un comportamiento monótono creciente para frecuencias moderadas reflejando la máxima resonancia. En frecuencias más altas el comportamiento que refleja la simulación resulta ser monótono decreciente hasta un valor próximo a 0. Es importante destacar que el efecto del número adimensional de Deborah está directamente relacionado con las curvas resonantes del sistema, ya que a valores pequeños los mecanismos viscoelásticos predominan ante los mecanismos inerciales, caso contrario al

descrito anteriormente se observa un comportamiento decreciente lo cual refleja el dominio de las fuerzas inerciales y la carencia de resonancia.

4.10.4 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte real)

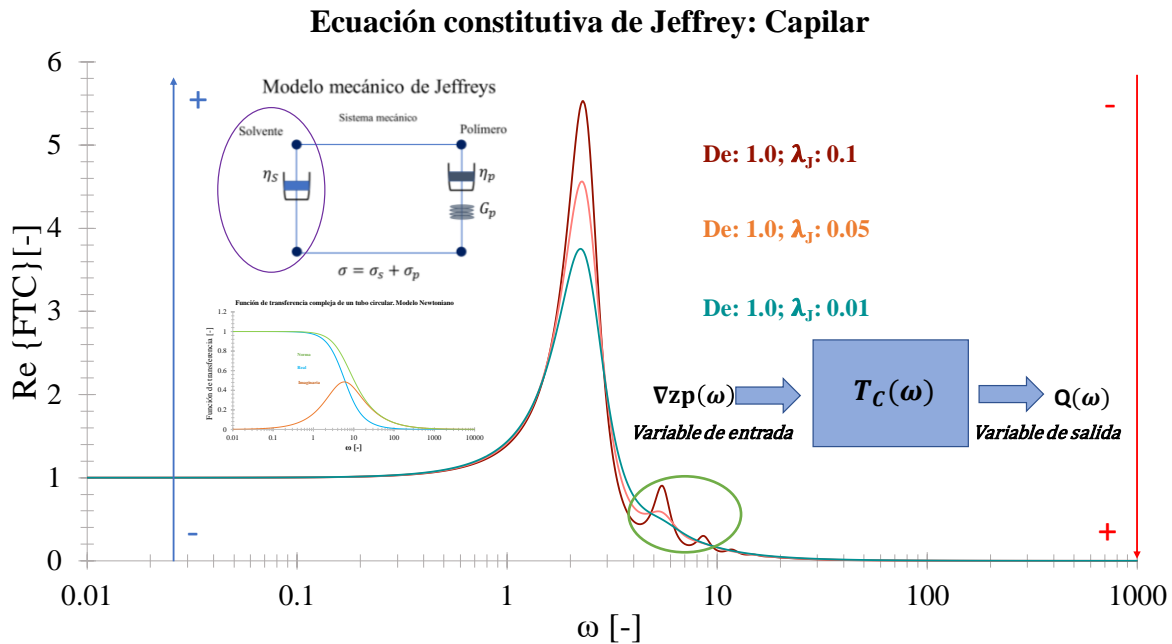


Figura 20. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional λ_J . En esta simulación en particular, el valor de $De= 1.0$ (viscoelástico).

En la Fig. 20 se analiza la parte real del factor de fricción en el espacio de Fourier, empleando como herramienta de carácter organizacional, la función de transferencia compleja. En este experimento computacional, se analiza el efecto del solvente y se deja constante la viscoelasticidad del material a través del número de Deborah.

A bajas frecuencias se muestra un comportamiento asintótico aproximándose a un valor de 1.0. En frecuencias críticas se observa un comportamiento monótono creciente hasta una máxima resonancia en donde el efecto del solvente favorece a la fluidez y viscoelasticidad del fluido. Es importante señalar que a frecuencias específicas mayores muestra un comportamiento monótono decreciente seguido de un tren de picos secundarios tipo dientes de sierra representativos de la discontinuidad en sistemas resonantes, esto puede verse remarcado en el círculo de color verde.

Al mismo tiempo el efecto del factor de fricción y la viscosidad tendrán respuestas positivas con relación a su valor característico. Finalmente, a frecuencias mayores, el comportamiento se aproxima asintóticamente a cero.

4.10.5 Efecto del solvente en el factor de fricción (parte imaginaria)

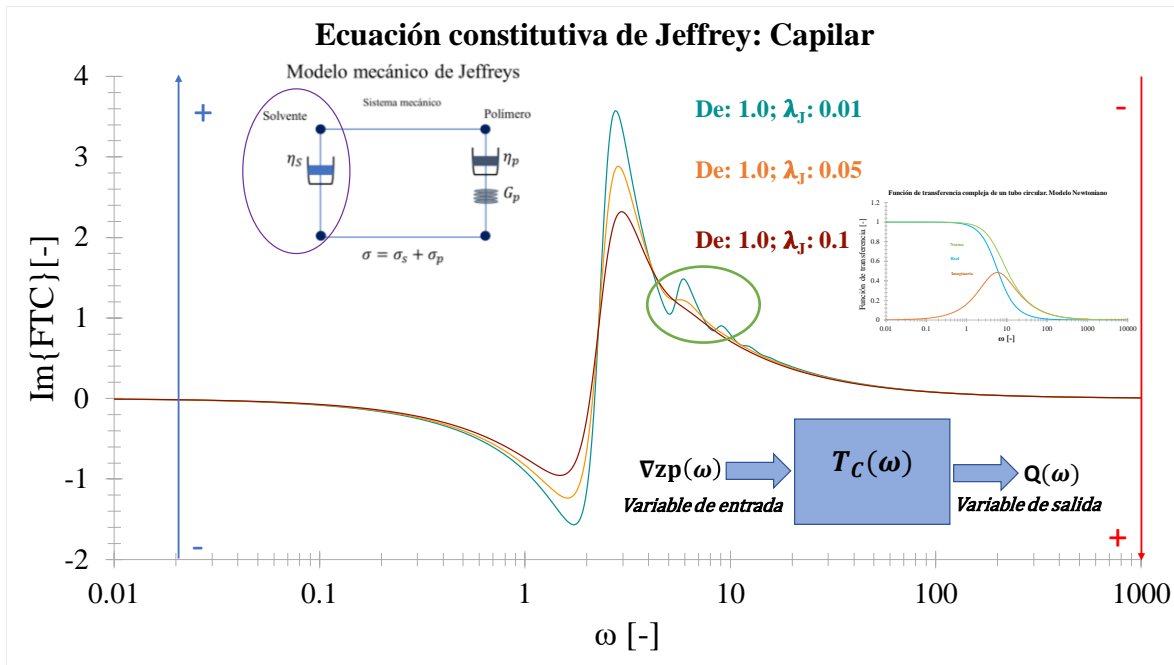


Figura 21. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia para diferentes valores del número adimensional λ_J . En esta simulación en particular, el valor de $De = 1.0$ (viscoelástico).

En la Fig. 21 se analiza la parte imaginaria del factor de fricción en el espacio de Fourier. Para su análisis, se emplea la función de transferencia compleja. En este experimento, se analizan los mecanismos del solvente (λ_J), y los mecanismos viscoelásticos se mantienen constantes a través del número de Deborah ($De = 1$).

A frecuencias bajas, el sistema es independiente de la frecuencia y a una frecuencia crítica, el sistema presenta un comportamiento monótonico decreciente hasta un valor mínimo anti resonante, seguido de una transición (posible discontinuidad de salto) hasta un valor máximo resonante. En este valor resonante, se acoplan todos los mecanismos del sistema: (i) viscoso, (ii) elástico, (iii) solvente, etc. A un valor crítico del sistema, se observan

un tren de picos secundarios asociados a tiempos característicos del material de estudio. Es importante señalar que a frecuencias significativas muestra un comportamiento anti resonante, debido a los efectos del solvente relacionados con el número adimensional de Jeffrey, en donde el factor de fricción y la viscosidad serán favorecidos considerablemente ya que tendrán su máximo valor dentro del sistema como lo muestra la flecha color rojo. Cabe resaltar que a frecuencias específicas se muestra un comportamiento monótono creciente hasta un máximo valor resonante alcanzando la mayor fluidez y viscoelasticidad en el sistema. Por último, a frecuencias mayores se muestra un comportamiento decreciente respecto a la resonancia, sin embargo, se observa que en determinadas frecuencias presenta un tren de picos secundarios tipo dientes de sierra remarcadas en un círculo verde, en donde la viscosidad y el factor de fricción presentan valores significativos.

4.10.6 Efecto del solvente en el factor de fricción (norma)

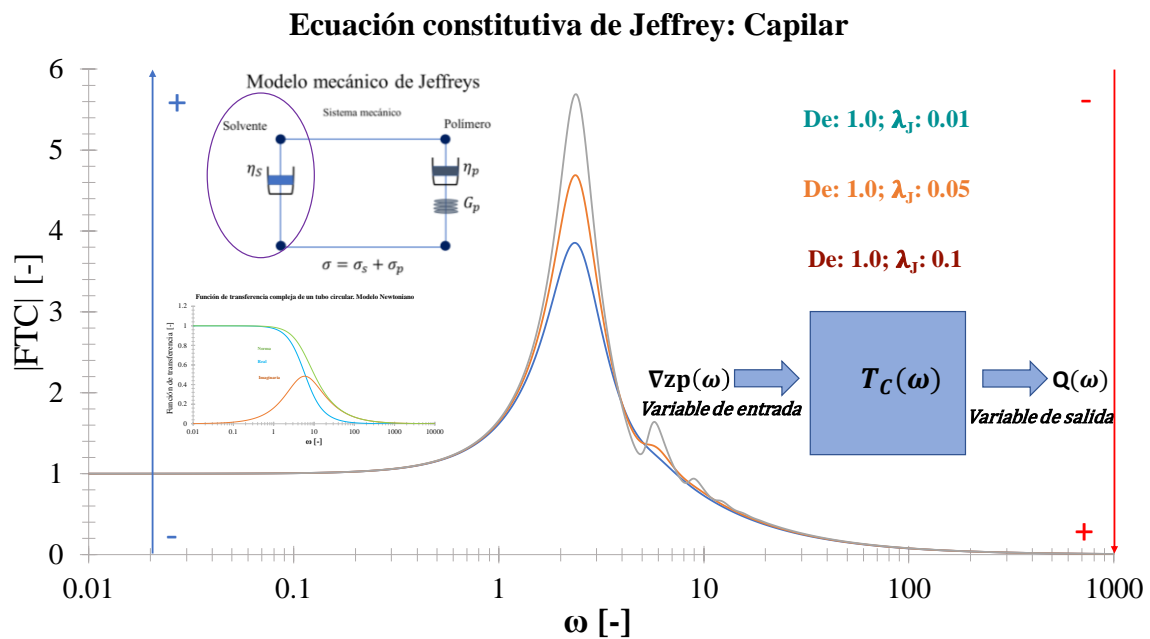


Figura 22. Se ilustra la parte norma de la función de transferencia vs frecuencia en la ecuación constitutiva de Jeffrey para un capilar donde se evalúa a diferentes valores de solvente (λ_j).

En la Fig.22 se analiza la norma del factor de fricción en función de los mecanismos del solvente los cuales, incluyen las contribuciones de la viscosidad del

polímero y la del solvente. Se observa que a bajas frecuencias es constante. Y en frecuencias moderadas presenta un comportamiento monótono creciente hasta llegar a su máximo punto. En frecuencias más altas la curva pasa a decrecer y en valores de frecuencias específicas presenta picos secundarios resonantes que finalmente cesan. Es importante resaltar que el efecto del solvente se ve reflejado en el valor máximo resonante de la función de transferencia compleja.

4.11 Efecto de un fluido newtoniano en el factor de fricción

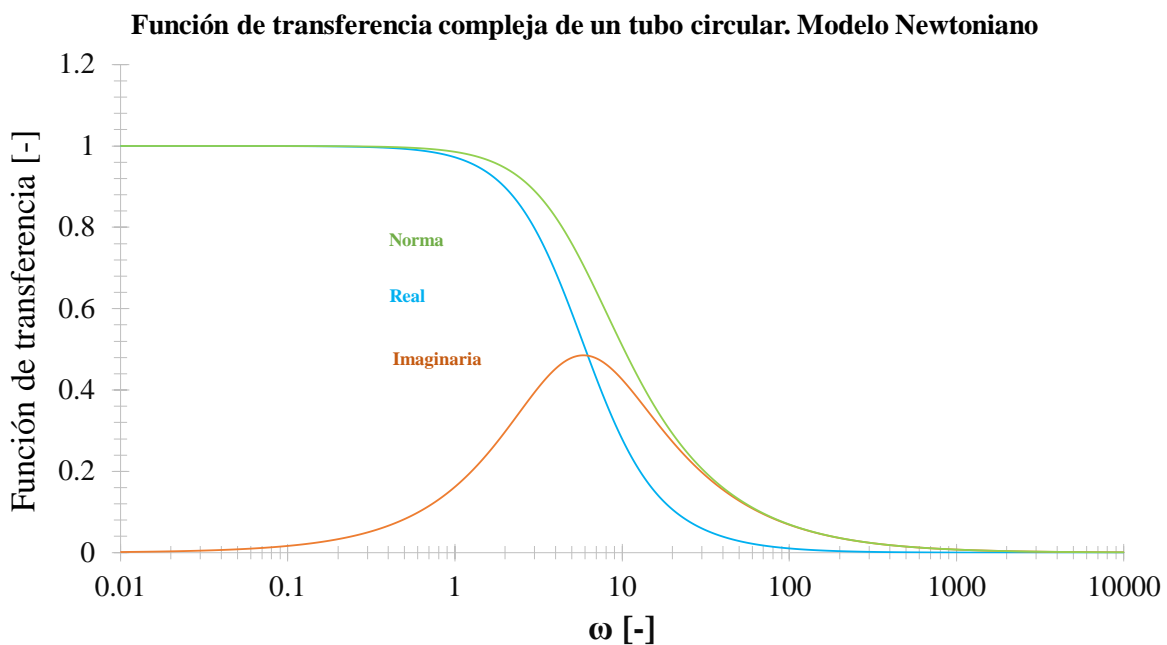


Figura 23. Ilustra las partes real, imaginaria y norma de la función de transferencia compleja vs frecuencia para un fluido newtoniano.

En la Fig. 23 se analiza el factor de fricción del fluido Newtoniano en términos de las partes: (i) Real, (ii) Imaginaria y (iii) Norma de la función de Transferencia Compleja. Este análisis, implica que la función Beta adimensional, se debe de modificar como:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\omega}$$

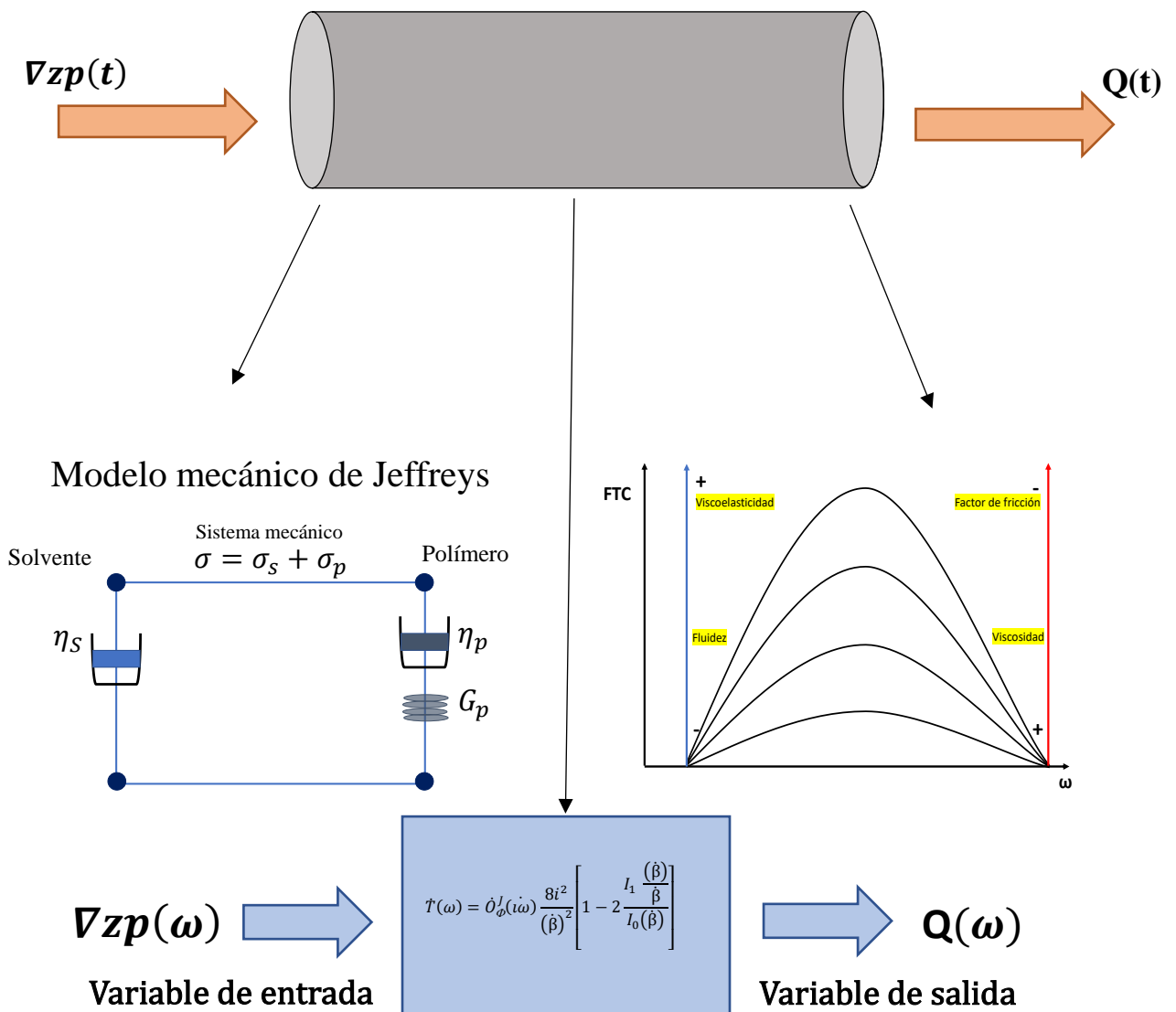
En esta simulación, solo se presentan los resultados numéricos. En el fluido Newtoniano, no se tiene números adimensionales por lo que, se que analiza la respuesta con la frecuencia. En el caso de la parte real, se observa un comportamiento constante a bajas frecuencias y

para una frecuencia característica, se observa un comportamiento de relajación hasta un segundo valor asintótico cercano a cero. La parte imaginaria, despliega un comportamiento resonante tipo campana Gaussiana típicas de los mecanismos disipativos. Por último, la norma combina las dos contribuciones real e imaginaria, por lo que, es claro que el proceso es dominado por los mecanismos relajantes. La norma se define como el teorema de Pitágoras:

$$|T(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}[T(\omega)])^2 + (\operatorname{Im}[T(\omega)])^2}$$

En todos los casos, el factor de fricción decrece en función de la frecuencia. Nótese, que, en el fluido newtoniano, no existe resonancia.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO



Esquema de conclusiones del gradiente de presión en el factor de fricción

5.1 Conclusiones.

En este trabajo se analizó el factor de fricción de Darcy en estado transitorio de un fluido viscoelástico mediante un gradiente de presión pulsátil fluyendo en dos geometrías diferentes. La primera de ellas es la geometría de un capilar de radio $r = a$ y longitud $z=L$. La segunda geometría, es una corona circular de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y longitud $z=L$, la cual puede ser visualizada mediante dos cilindros concéntricos.

Para caracterizar la transferencia de momento y reología del sistema se utilizó el modelo constitutivo de Jeffrey el cual, consiste en dos contribuciones asociadas al polímero y al solvente.

En particular, el fluido de estudio es un líquido de Jeffrey el cual contiene dos números adimensionales los cuales son: el número de Deborah y el número de retardo asociado a las propiedades del solvente. Aplicando esto a la ecuación dinámica obtenemos el perfil de velocidades como función de la coordenada radial R y la frecuencia. La solución queda en términos de funciones de Bessel de orden cero y al integrar el perfil de velocidades con respecto a la sección de área transversal se obtiene el flujo volumétrico. El flujo volumétrico se puede expresar como un múltiplo del fluido newtoniano y este no es otra cosa que la función de transferencia compleja la cual se puede interpretar como una generalización del operador fluidez modificado por los mecanismos inerciales del sistema.

La programación se hizo en el paquete computacional de Wolfram mathematica versión 12.3 licencia UNAM. Este programa se basa en una estructura matemática por objetos similar al lenguaje de programación de lenguaje C. Wolfram Language (el lenguaje de programación de Mathematica) es un lenguaje de programación multi-paradigma desarrollado por Wolfram Research, que sirve como el principal idioma de interfaz para Mathematica 1 y Wolfram Programming Cloud. Está diseñado para ser lo más general posible, con énfasis en computación simbólica, programación funcional y programación basada en reglas.

Se obtuvieron expresiones analíticas para el factor de fricción en las dos configuraciones. Las principales conclusiones son:

- a) La resonancia decrece conforme el solvente aumenta
- b) El factor de fricción aumenta conforme la viscosidad aumenta

- c) El factor de fricción decrece conforme la elasticidad del material aumenta
- d) La resonancia es un efecto de la dispersión en el sistema y se relaciona directamente con el factor de fricción

El efecto del gradiente de presión en el factor de fricción se puede observar que en el punto máximo de la función de transferencia, se induce la mínima fricción ya que, esta es el inverso de la viscosidad, y si la fluidez disminuye la viscosidad aumenta, si aumenta la viscosidad el factor de fricción aumentará esto debido a que hay mayor disipación.

La viscoelasticidad no contribuye al factor de fricción, esto quiere decir que si la viscoelasticidad aumenta el factor de fricción disminuye.

5.2 Trabajo futuro.

Estudiar el régimen de viscoelasticidad no lineal por medio de diferentes ecuaciones constitutivas, que contengan información adicional de los mecanismos elásticos y comportamientos complejos como son: (i) adelgazamiento al corte, (ii) engrosamiento al corte, (iii) tixotropía, (iv) reopexia, (v) flujo bandeado, (vi) primera y (vii) segunda diferencia de esfuerzos normales.

Desde el punto de vista experimental, este trabajo puede ser punto de partida para proponer protocolos experimentales que ayuden a la ciencia de la medicina con diferentes fluidos biológicos y materia blanda extraídos de pruebas en estado estacionario no estacionario con diferentes geometrías en un reómetro.

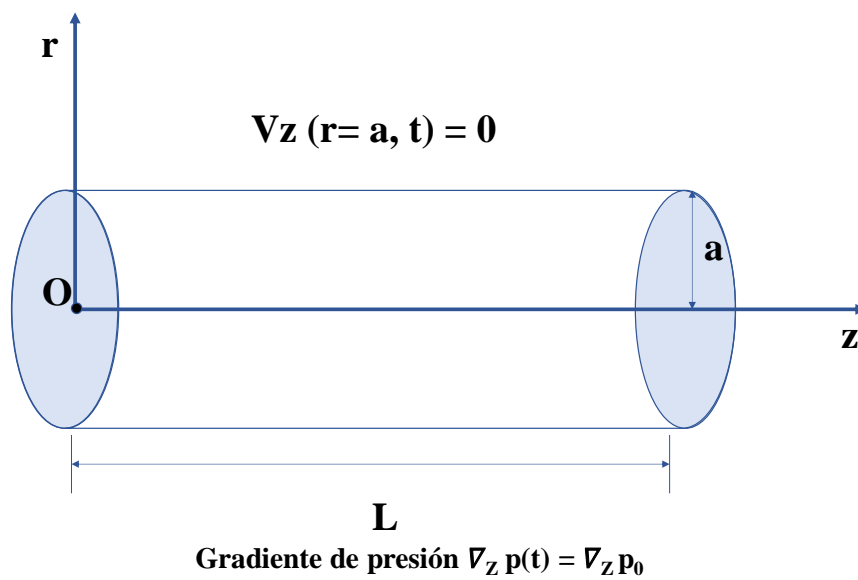
En este punto, se puede calcular la respuesta del flujo volumétrico vs gradiente de presión con datos de sangre humana fresca, con diferentes concentraciones de colesterol, cirrosis hepática y la mucosidad del pulmón con agentes patógenos como el SARS-CoV-2 (De la Guerra y Corvera-Poré 2022).

Por otra parte, el estudio de este tipo de fluidos variando la geometría a través diámetro, sería un ejemplo interesante de transiciones de flujo cortante a extensional. Este tipo de sistemas implicaría utilizar métodos numéricos como: (i) diferencias finitas, (ii) métodos de Galerkin (formulaciones débiles), (iii) elemento finito, (iv) volumen finito, e híbridos. Esto con el fin de obtener predicciones de las ecuaciones no-lineales acopladas.

Finalmente, este trabajo demuestra que el modelo de Jeffrey posee la física necesaria para representar y describir fluidos viscoelásticos y fluidos complejos.

Esta investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de ecuaciones reológicas que utilicen los fenómenos de transporte y reología como herramienta de carácter organizacional y que empleen las matemáticas como un lenguaje común para describir la naturaleza física de los sistemas.

Apéndice A. Deducción del factor de fricción en un capilar



En el espacio de Fourier, el esfuerzo en la pared toma la siguiente forma:

$$\sigma_w(\omega) = -\frac{1}{2} \nabla_z p(\omega) a \quad (\text{A-1})$$

En donde, la función de transferencia, esat dada por la siguiente expresión analítica:

$$T_Q(\omega) = O_\Phi^N(i\omega) \frac{8i^2}{(\beta a)^2} \left[1 - 2 \frac{J_1(a\beta)/a\beta}{J_0(a\beta)} \right] \quad (\text{A-2})$$

La velocidad promedio $\langle V_z \rangle$, se defien como:

$$\langle V_z(\omega) \rangle = \frac{a}{4} T_Q(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (\text{A-3})$$

El componente rz del tensor de esfuerzo puede expresarse en terminos del modelo Newtoniano de la siguiente manera:

$$\sigma_{rz}(r, \omega) = \frac{1}{O_\Phi^N(i\omega)} \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \quad (\text{A-4})$$

Derivando el perfil de velocidades, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} = O_\Phi^N(i\omega) \frac{i^2}{\beta} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \quad (\text{A-5})$$

Entonces, el esfuerzo en la pared, toma la siguiente forma:

$$\sigma(\omega) = -\sigma_{rz}(r, \omega) \Big|_{r=a} = \frac{2}{a\beta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \quad (\text{A-5})$$

Simplificando

$$\sigma(\omega) = \frac{2}{a\beta} \frac{J_1(\beta r)}{J_0(\beta r)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) = \frac{2}{a\beta} \frac{J_1(\beta a)}{J_0(\beta a)} \sigma_w(\omega) \quad (\text{A-6})$$

La Ec. (A-6), se puede expresar en terminos de una función de transferencia del sistema:

$$\sigma(\omega) = T_\sigma(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (\text{A-7})$$

En donde, la función de transferencia toma la forma:

$$T_\sigma(\omega) = 2 \frac{J_1(\beta a)/a\beta}{J_0(\beta a)} \quad (\text{A-8})$$

El factor de fricción en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, tiene la siguiente forma:

$$f(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\frac{1}{2}\rho\langle Vz(\omega)\rangle^2} \quad (\text{A-9})$$

Si se define el Reynolds Newtoniano en el espacio de Fourier, de la siguiente manera:

$$\text{Re}(\omega) = \rho\langle Vz(\omega)\rangle_N D\varphi_\mu \quad (\text{A-10})$$

Es fácil demostrar que la expresión para el fluido viscoelástico no lineal, toma la forma:

$$f(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\frac{1}{2}\rho\langle Vz(\omega)\rangle_N^2 \left(\frac{\langle Vz(\omega)\rangle}{\langle Vz(\omega)\rangle_N} \right)^2} = \frac{16}{\text{Re}(\omega)} \frac{T_\sigma(\omega)}{(T_Q(\omega))^2} \quad (\text{A-11})$$

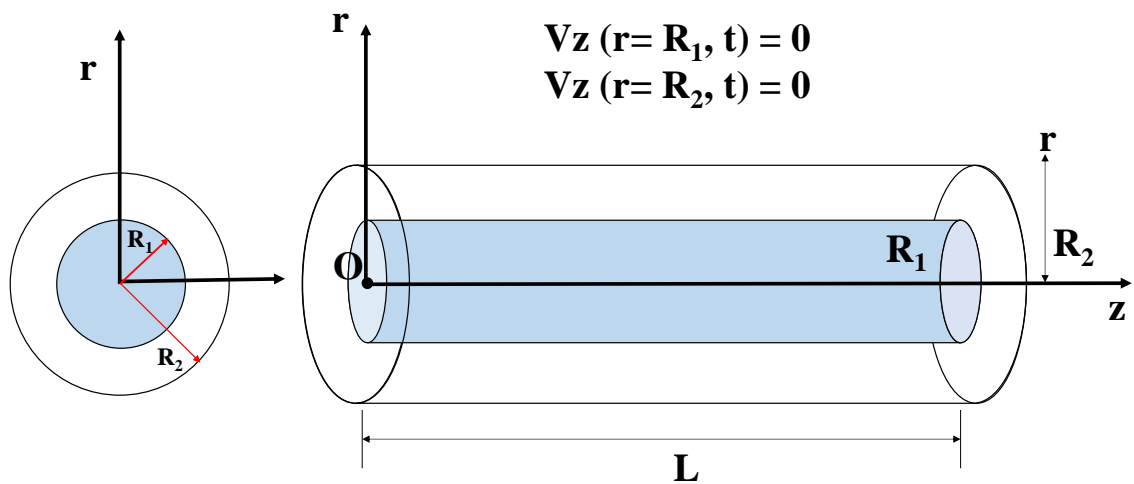
Simplificando, se tiene finalmente:

$$f(\omega) = \frac{16}{\text{Re}(\omega)} R(\omega) \quad (\text{A-12})$$

En la Ec. (A-12), $R(\omega)$ se define como un cociente entre las dos funciones de transferencia estudiadas.

$$\therefore \boxed{R_c(\omega) = \frac{T_\sigma^c(\omega)}{(T_Q^c(\omega))^2}} \quad (\text{A-13})$$

Apéndice B. Deducción del factor de fricción en una corona circular



En este apéndice se muestra la deducción del factor de fricción del sistema

Para el esfuerzo en la pared, se tiene la siguiente expresión analítica, por lo que:

$$\sigma = -\sigma_{rz} \left((i\omega) \right) \Big|_{r=R_2} = -\frac{1}{O_\Phi(i\omega)} \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} \quad (\text{B-1})$$

Por lo que:

$$\sigma(\omega) = -\frac{(C_1/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta J_1(\beta) - \frac{(C_2/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta Y_1(\beta) \quad (\text{B-2})$$

En terminos de las variables adimensionales, se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle V_Z(\omega) \rangle = \frac{O_\Phi^N(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} + \frac{C_1}{1-R^2} 2 \frac{J_1(\beta)\beta - J_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \\ + \frac{C_2}{1-R^2} 2 \frac{Y_1(\beta)\beta - Y_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

En donde, las contantes se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{C_1}{R_2} = O_\Phi^N(i\omega) \frac{-2}{(R_2\beta)^2} \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-4})$$

$$\frac{C_2}{R_2} = O_\Phi^N(i\omega) \frac{2}{(R_2\beta)^2} \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-5})$$

Definiendo el esfuerzo en la pared como:

$$\sigma_{w2}(\omega) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2 \quad (\text{B-6})$$

Finalmente, se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_1 = R_2 O_\Phi^N(i\omega) C_3 \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-7})$$

En donde la constante C3, tiene la forma:

$$C_3(\omega) = \frac{-2}{\beta^2} \frac{Y_0(\beta R) - Y_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (\text{B-8})$$

De la misma manera, se tiene lo siguiente:

$$C_2 = R_2 O_\Phi^N(i\omega) C_4(\omega) \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-9})$$

Por lo que, la constante C4, tiene la forma:

$$C_4(\omega) = \frac{2}{(R_2\beta)^2} \frac{J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)}{Y_0(\beta R_2)J_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \quad (\text{B-10})$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresion para la velocidad media del flujo e un líquido viscoelástico en una corona circular:

$$\langle Vz(\omega) \rangle = R_2 \cdot T_Q^{CC}(\omega) \cdot \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-11})$$

En donde la función de transferencia se defien:

$$T_Q(\omega) = O_\Phi^N(i\omega) \left[\frac{2}{\beta^2} + 2 \frac{C_3(\omega)}{1-R^2} \frac{J_1(\beta)\beta - J_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} + 2 \frac{C_4(\omega)}{1-R^2} \frac{Y_1(\beta)\beta - Y_1(\beta R)\beta R}{\beta^2} \right] \quad (\text{B-12})$$

Y las constantes C3 y C4

$$C_3(\omega) = \frac{-2}{\beta^2} \frac{Y_0(\beta R) - Y_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (\text{B-13})$$

$$C_4(\omega) = \frac{2}{\beta^2} \frac{J_0(\beta R) - J_0(\beta)}{Y_0(\beta)J_0(\beta R) - Y_0(\beta R)J_0(\beta)} \quad (\text{B-14})$$

Para el esfuerzo, se tiene la siguiente expresión:

$$\sigma(\omega) = -\frac{(C_1/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta J_1(\beta) - \frac{(C_2/R_2)}{O_\Phi(i\omega)} \beta Y_1(\beta) \quad (\text{B-15})$$

En donde, las contantes se pueden expresar de la siguiente manera:

$$C_1 = R_2 O_\Phi^N(i\omega) C_3(\omega) \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-16})$$

$$C_2 = R_2 O_\Phi^N(i\omega) C_4(\omega) \sigma_{w2}(\omega) \quad (\text{B-17})$$

El esfuerzo inercial, tiene la forma:

$$\sigma(\omega) = T_\sigma^{CC}(\omega) \sigma_w(\omega) \quad (\text{B-18})$$

En donde la función de transferencia se define como:

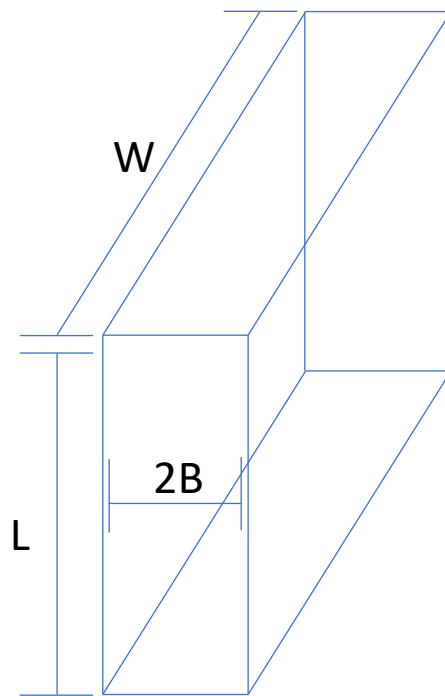
$$T_\sigma^{CC}(\omega) = i^2 \beta [C_3(\omega) J_1(\beta) + C_4(\omega) Y_1(\beta)] \quad (\text{B-19})$$

El factor de fricción para este sistema, queda expresado como:

$$f_v(\omega) = \frac{16}{\text{Re}(\omega)} R(\omega) = f_N(\omega) R_{CC}(\omega) \quad (\text{B-20})$$

$$\therefore \mathbf{R}_{\text{CC}}(\omega) = \frac{\mathbf{T}_{\sigma}^{\text{CC}}}{(\mathbf{T}_{\text{Q}}^{\text{CC}}(\omega))^2} \quad (\text{B-21})$$

Apéndice C. Deducción del factor de fricción en una rendija



Factor de fricción para una rendija de espesor $2B$, anchura W y longitud L

En este apéndice se calcula el factor de fricción en una rendija, la cual para ciertos valores se aproxima al de una corona circular.

Para ciertos valores de R , el sistema de corona circular se aproxima a un flujo entre una rendija, por lo que:

$$\frac{\partial^2 V_z(r, \omega)}{\partial r^2} + \beta^2 V_z(r, \omega) = O_\phi^N(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (C-1)$$

La solución de esta ecuación diferencial tiene la forma:

$$V_z(r, \omega) = C_1 \cos(\beta r) + C_2 \operatorname{Sen}(\beta r) + \frac{O_\phi^N(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (C-2)$$

$$V_z(r=a, \omega) = 0 \quad (C-3)$$

$$V_z(r=-a, \omega) = 0 \quad (C-4)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en el perfil de velocidades general, se tiene lo siguiente:

$$C_1 \cos(\beta a) + C_2 \operatorname{Sen}(\beta a) + \frac{O_\phi^N(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 \quad (C-5)$$

$$C_1 \cos(\beta a) - C_2 \operatorname{Sen}(\beta a) + \frac{O_\phi^N(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 \quad (C-6)$$

Las constantes C_1 y C_2

$$C_1 = -\frac{1}{\cos(\beta a)} \frac{O_\phi^N(i\omega)}{\beta^2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (C-7)$$

$$C_2 = 0 \quad (C-8)$$

El perfil de velocidades, para la rendija tiene la forma:

$$V_z(r, \omega) = \frac{O_\phi^N(i\omega)}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos(\beta r)}{\cos(\beta a)} \right) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (C-9)$$

El flujo volumétrico, se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Q(\omega) &= 2 \int_0^w \int_0^a V_z(r, \omega) dr dy = 2a^2 W \frac{O_\Phi^N(i\omega)}{(a\beta)^2} \left(1 - \frac{1}{a\beta} \frac{\text{Sen}(\beta a)}{\text{Cos}(\beta a)} \right) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \\
&= 2a^2 W O_\Phi^N(i\omega) \frac{1}{(a\beta)^2} \left(1 - \frac{\text{Tan}(\beta a)}{a\beta} \right) \left(-\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right)
\end{aligned} \tag{C-10}$$

La Ec. (C-10) se puede expresar en términos de una función de transferencia para la rendija

$$Q(\omega) = 2a^2 W T_R(\omega) \sigma_w \tag{C-11}$$

En donde la función de transferencia:

$$T_R(\omega) = O_\Phi^N(i\omega) \frac{i^2}{(a\beta)^2} \left(1 - \frac{\text{Tan}(\beta a)}{\beta a} \right) \tag{C-12}$$

El esfuerzo en la pared, se define como:

$$\sigma_w = -\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \tag{C-13}$$

EL flujo volumétrico, se puede expresar como el producto de la velocidad promedio por el área de sección transversal.

$$Q = \langle V_z(\omega) \rangle 2aW \tag{C-14}$$

Entonces la velocidad axial

$$\therefore \langle V_z(\omega) \rangle = a T_R(\omega) \sigma_w \tag{C-15}$$

El esfuerzo en la pared tiene la forma:

$$\sigma = T_\sigma^R(\omega) \sigma_w \tag{C-16}$$

La función de transferencia de una rendija

$$\frac{\sigma}{\sigma_w} = T_\sigma^R(\omega) \tag{C-17}$$

$$T_\sigma^R = i^2 \frac{\text{Tan}(\beta a)}{(a\beta)} \tag{C-18}$$

El factor de fricción, se puede definir en terminos del cociente entre las funciones de transferencia del esfuerzo y la del flujo volumétrico

$$f_V(\omega) = R_R(\omega) f_N \tag{C-19}$$

La función de transferencia, toma la forma:

$$\therefore \mathbf{R}_R(\omega) = \frac{\mathbf{T}_\sigma^R(\omega)}{(\mathbf{T}_Q^R(\omega))^2} \quad (\text{C-20})$$

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar-Barrios A. (2013) Desarrollo de programas de computación para la solución de problemas de flujo de fluidos. Ingeniería Química, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Anaya-Duran AI, Cauch-Segovia GI, Furnabazama-Bárcenas O, Gracia-Medrano- Bravo VA (2014). Evaluación de ecuaciones de factor de fricción explícito para tuberías. Educ.quím. 25, 128-134.

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Bravo-Gutierrez ME, Castro M, Hernández-Machado A, Corvera-Poiré E (2011). Controlling viscoelastic flow in microchannels with slip. Langmuir 27, 2075-2079.

Cárdenas-I JC, Lopez-H OJ, Pinto-R KT (2011) Estudio Reológico de los fluidos viscoelásticos surfactantes utilizados en operaciones de fracturamiento hidráulico. El Rev. Ene. 9, 1.

Castrejón-Pita J, Del Rio. J, Castrejón-Pita A, Huelsz G (2003). Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of Newtonian and Maxwellian fluids. Phys. Rev. E 68, 046301 (2003).

Castro M, Bravo-Gutierrez ME, Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. Phys. Rev. Lett. 101, 224501.

Collepardo-Guevera R & Corvera-Piré E (2007). Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions. *Phys. Rev. E* 76, 026301

Corvera-Poire E, Hernández-Machado E (2010). Frequency-induced stratification in viscoelastic microfluidics. *Langmuir* 26, 15084-15086

Estratificación inducida por frecuencia en microfluidos viscoelásticos

Crispí-Llorens D. (2015) Comportamiento de fluidos no newtonianos en intercambiadores de calor tubulares con rascados alternativo. Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos, Universidad Politécnica de Cartagena

Cuevas S, del Rio JA (2001) Dynamic permeability of electrical conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. *Phys. Rev. E* 64, 016313. Permeabilidad dinámica de fluidos conductores eléctricos bajo campos magnéticos en conductos anulares.

Díaz del Castillo-Rodríguez F. (2013) Laboratorio de termo fluidos. Departamento de Ingeniería, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Universidad Nacional Autónoma de México

De la Guerra A y Corvera-Piré E (2022). Pulsatile parallel flow of air and a viscoelastic fluid with multiple characteristic times. An application to mucus in the trachea and the frequency of cough. *J. Phys: Condens.* 34, 31.

Del Rio JA, De Haro ML, Castrejón-Pita JR (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E* 58 6323.

Flores J, Corvera Poire E, Del Rio JA, Lopez de Haro M (2010). A plausible explanation for heart rates in mammals. *J. the Biol.* 265. 599-603.

Flores J, Alastruey J, Corvera-Poiré E. A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network. *Annals of Biomedical Engineering.* 44, 30047-3068.

Fombuena V, Boronat T, Sánchez-Nácher L, García-Sanoguera D, Balart R (2017) Utilidad de los modelos de viscoelasticidad en el aprendizaje de la ingeniería de materiales poliméricos. *Modelling in Science Education and Learning*. 10(1)

Gutiérrez-Varela OJ. (2019) Validando la ley de Stokes a escala molecular. Maestría en Ciencias (Física), Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México

Hernández-Machado A, Corvera-Poire E (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannel. *Phys. Rev. Lett.* 101, 224501.

Herrera-Valencia EE, Sánchez-Villavicencio ML, Calderas García F, Ramírez-Torres LA, Ortiz Bautista D. Soriano-Correa C. Nuñez-Ramirez DM, Medina-Torres L, Hernández Abad VJ (2022). Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: Flujo pulsátil de sangre humana. UNAM, FES Zaragoza, agosto 2022. ISBN: 978-607-30-6436-1.

Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009). Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.

Herrera EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010). Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.

Lombard J, Pagonabarraga I, Poiré EC (2020). Dynamic response of a compressible binary fluid mixture. *Phys. Rev. Fluids* 5, 064201.

Lopez de Haro M, del Rio JA, Whitaker S (1996). Flow of Maxwell fluids in a porous media. *Transp. Porous Media* 25, 167.

Macosko CW, Rheology: Principles, Measurement and Applications (Wiley, Germany 1994).

Muralevta L (2021). Viscoplastic flow in a pipe of a complex cross section with stick-slip at the wall. *Phys. Fluids* 33, 073107.

Pinho FT, Oliveira PJ, Miranda JP (2003). Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power law fluid across a sudden axisymmetric expansion. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24, 747-761.

Pimenta TA, Campos JBLM (2012). Friction losses of Newtonian and non-Newtonian fluids flowing in laminar regime in a helical coil. 36, 194-204

Pinho FT, Whitelaw (1990). Flow of Non-Newtonian Fluids in a pipe 34, 129-144.

Sadek Samir H, Pinho FT (2019). Electro-osmotic oscillatory flow of viscoelastic fluids in a microchannel, 266, 46-58.

Shah NA, Mahsud Y, Aziz M, Tlili I. Analytical solutions for unsteady electrohydrodynamics flows of a Maxwell fluids in microchannels with circular cross section. *Phys. Fluids* 32, 013107 (2020).

Sochi T (2015). Analytical solutions for the flow of Carreau and Cross fluids in circular pipes and thin slits. *Rheol. Acta* 54, 745-756.

Tozzi E, Hartt W (2022), non-Newtonian laminar flows in pipes using radius, stress, shear rate or velocity as the independent variable. *Phys. Fluids* 33, 103104.

Torres Herrera U (2021). Dynamic permeability of fluids in rectangular and square microchannels: Shift and coupling of viscoelastic bidimensional resonances. *Phys. Fluids* 33, 012016.

Torres-Herrera U, Corvea-Poiré E (2018). An analytical framework to determine flow velocities with nanotubes from their vibration frequencies. *Phys. Fluids* 30, 122001

Torres Rojas AM, Pagonabarraga, Corvera-Poiré (2017). Resonances of Non-Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Phys. Fluids* 29, 122003.

Tsiklauri D, Beresnev I (2006). Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid. *Phys. Rev.* 73, 029901.

Wolfram Research, Inc., Mathematica (Licencia UNAM) Version 13, Champaign, IL., 2020.

Youbing Y y Ke-Oin Z (2006). Oscillating flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell model. *Applied Mathematics and Computation.* 173, 231-242.