



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES –
YACIMIENTOS

Análisis de Curvas de Producción por medio de Mapas de Recurrencia

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
YSLAS PACHECO LUIS RAMÓN

TUTORA
DRA. GARCÍA BENÍTEZ SILVIA RAQUEL
INSTITUTO DE INGENIERÍA – UNAM

CDMX FEBRERO 2023



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción	1
Capítulo I – El sistema: Yacimiento	3
1.1 Sistema	3
1.2 Propiedades de la roca	4
1.3 Propiedades de los fluidos de yacimiento	9
1.4 Estímulos al sistema	14
1.5 Interpretación de la respuesta del sistema: Históricos de Producción	23
Capítulo II – Análisis de la Producción de Petróleo	25
2.1 Producción de Petróleo – Estudio y Utilidad	25
2.2 Anatomía de la Producción	29
2.3 Una nueva filosofía	32
Capítulo III – Análisis de Series de Tiempo	38
3.1 Complejidad	38
3.2 Sistemas Complejos	39
3.3 Teoría del Caos – Orden y desorden	42
3.4 Mapas de Recurrencia	48
3.5 Construcción de Mapas de Recurrencia	49
3.6 Interpretación de Mapas de Recurrencia	55
Capítulo IV – Resultados – MRs de Series de Tiempo	59
4.1 Base de Datos	61
4.2 Histogramas y Diagramas de Cajas de la Base de Datos	62
4.3 MRs de Producción de Petróleo	65
4.4 Análisis de Topología (macro – escala)	67
4.5 Análisis de Textura (micro – estructura)	86
Capítulo IV.I – Resultados Predicciones de Series de Tiempo	93
4.6 Predicciones no Paramétricas	93

4.7 Predicciones en Periodo Inicial o de Apertura	94
4.8 Predicciones en Zona de Transición – Inicio del Decremento	96
4.9 Predicciones en Comportamiento Asintótico – Predicciones Estables	98
Conclusiones	101
Referencias	104
Anexo A	109

Lista de Figuras

Capítulo I – El Sistema: Yacimiento

Figura 1.1 Esquema general de un yacimiento, modificada de Bjrolykke (2010)	3
Figura 1.2 Figura 1.2: Representación de la porosidad, modificada de Wheaton (2016)	4
Figura 1.3: Representación de la saturación de fases (petróleo, gas y agua)	5
Figura 1.4: Representación de la porosidad efectiva, modificada de Wheaton (2016)	6
Figura 1.5: Esquema del experimento propuesto por Henry Darcy	7
Figura 1.6: Esquema de esfuerzos en un yacimiento, modificado de Xuetao (2017)	9
Figura 1.7: Esquema representativo de un diagrama de fase, modificada de Lozano (2016)	11
Figura 1.8: Tipos de hidrocarburos de acuerdo con sus condiciones iniciales de presión y temperatura, modificada de McCain (1990)	12
Figura 1.9: Envoltentes de fase de diferentes tipos de hidrocarburos, modificada de Xuetao (2017)	12
Figura 1.10: Perfil de distribución de presión en un pozo vertical donde \bar{P} es la presión promedio del yacimiento, P_{wf} es la presión de fondo fluyendo y ΔP es la caída de presión generada en el sistema; r_w representa el radio de pozo, r el radio de drene y r_e el radio del yacimiento, modificado de Cook (1990)	15
Figura 1.11: Gradiente de presión generado en todo el yacimiento	15
Figura 1.12: Esquema de entradas y salidas del fenómeno	16
Figura 1.13: Expansión de la roca, donde P_i es la presión inicial y P la presión a la que se encuentra el sistema	17
Figura 1.14: Cambios en la saturación de fases donde p_i es la presión inicial del sistema y p la presión a la que se encuentra	18

Figura 1.15: Curvas de permeabilidad relativa al petróleo y al agua, donde S_{or} y S_{wir} son la saturación de petróleo residual y agua irreductible, k_{ro} y k_{rw} representan las curvas de permeabilidad relativa del petróleo y agua. Modificada de Cook (1990) 19

Figura 1.16: Proceso de cambio de fase de un petróleo volátil, modificado de Cook (1990) 22

Figura 1.17: Producción de fluidos 23

Figura 1.18: Ejemplo de histórico de producción del arrendamiento Black Stone ‘D’ del yacimiento Arroyo (Kansas), Construido de la base de datos de Kansas (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1037721185)

Capítulo II – Análisis de la Producción de Petróleo

Figura 2.1: Histórico de producción del arrendamiento Estelle Smith perteneciente al yacimiento Kinsler. En el eje de las abscisas se representa la variable tiempo (t) y en el de las ordenadas la variable medida mensualmente, en este caso es la producción de petróleo (q_o). El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001133991) 26

Figura 2.2: Ejemplo gráfico del comportamiento de la tasa de declinación en la producción de hidrocarburos, modificada de Poston y Poe (2002) 27

Figura 2.3: Comportamiento de las Curvas de Declinación de Arps. Modificada de Poston y Poe (2002) 27

Figura 2.4: Comportamiento gráfico de las curvas tipo de Fetkovich en variables adimensionales y escala cartesiana. Las curvas se dividen en 2 secciones; la primera de ellas cuando el comportamiento no es afectado por la frontera, es decir, estado transitorio. La segunda cuando los datos de flujo son dominados por efecto de frontera. Modificado de Poston y Poe (2002) 28

Figura 2.5: Histórico de producción del arrendamiento Six M Farms ‘A’ perteneciente al yacimiento Amazon Ditch East. El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas, (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001141042) 30

Figura 2.6: Histórico de producción del arrendamiento Waterflood Unit perteneciente al yacimiento Zenith Peace Creek El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas, (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001116068)	31
Figura 2.7: Producción del yacimiento Claymore. El accidente de la plataforma Piper Alpha se presenta en julio de 1988, modificado de Höök (2009)	32
Figura 2.8: Ejemplo de periodos representados en un histórico de producción, modificada de Siavash (2019)	34
Figura 2.9: Ejemplo de agrupamiento en la producción de hidrocarburos realizada por el algoritmo DBSCAN. Tomada de Shashipal (2020)	36
Figura 2.10: Ejemplo del esquema de la topología de la red neuronal recurrente empleada por Sheremetov. Tomada de Sheremetov (2013)	37

Capítulo III – Análisis de Series de Tiempo

Figura 3.1: Sistema mecánico masa – resorte. Del lado izquierdo se representa a un cuerpo con cierta masa colgando de un resorte que se encuentra fijo por la parte superior. Del lado derecho se tiene las gráficas que registran las variables de interés en series de tiempo, el desplazamiento se representa con x y la velocidad con la que ocurre el cambio de posición es \dot{x} . Modificada de García et al. (2013)	39
Figura 3.2: Sistema piso – mesa. En el estado A, la mesa se encuentra en un equilibrio aparente y no existe cambio alguno (movimiento) por lo que, el estado del sistema se denomina subcrítico. En B es el instante donde es el instante donde ocurre el primer movimiento, el estado se define como punto crítico de transición de fase. Continuando con el empuje como se muestra en C, el movimiento es constante y el estado del sistema es supercrítico	41
Figura 3.3: Comparativo de iteraciones de la ecuación de Verhulst, en el inciso a) se muestra la órbita del sistema sin interrupciones, b) interrumpiendo el sistema en la décima iteración y c) es el cálculo de la diferencia. Modificada de Martínez et al., (2017)	45

Figura 3.4: Comportamiento de la ecuación de May con un valor de $x_0 = 0.2$ y tres valores diferentes de a (2.75, 3.2 y 4). Al costado izquierdo se presenta la órbita del sistema y al derecho, el estado del sistema. Modificada de Martínez et al., (2017)	46
Figura 3.5: Diagrama de Feigenbaum, inspirado en Martínez et al. (2017)	47
Figura 3.6: Idea de un mapa de recurrencia	48
Figura 3.7: Mapa de Recurrencia (parte superior) generado a partir de la función seno (parte inferior), modificada de Bradley et al., (1998)	49
Figura 3.8: Proyección de un espacio en dos dimensiones, modificada de Hand et al., (2002)	54
Figura 3.9: Tipología en Mapas de Recurrencia; el primera (a) proviene ecuación de comportamiento matemático lineal; (b) es periódico, corresponde a la señal generada de la función senoidal; finalmente (c) presenta una estructura homogénea y proviene de la señal del ruido blanco. Tomada y modificada de Takakura et al., (2016)	56
Figura 3.10: Comportamientos distintos en los Mapas de Recurrencia. Tomada y modificada de Marwan et al., (2007)	57
Figura 3.11: Ejemplos de Mapas de Recurrencia a partir de señales conocidas. Tomada de García et al., (2013)	58
 Capítulo IV – Mapas de Recurrencia de Series de Tiempo de Producción de Petróleo	
Figura 4.1: Localización de los arrendamientos en el estado de Kansas	61
Figura 4.2: Histograma de frecuencias del conjunto total de datos de producción de petróleo	62
Figura 4.3: Diagrama de cajas y bigotes de los datos de producción	63
Figura 4.4: Análisis exploratorio del arrendamiento Cahoj Unit,	63
Figura 4.5: Histogramas y Diagrama de Cajas de arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit	64

Figura 4.6: Ejemplo de la construcción de vectores de embebido en una serie de tiempo de producción de petróleo	66
Figura 4.7: Mapa de Recurrencia del arrendamiento Close. En la parte superior se encuentra el Mapa de Recurrencia generado con la serie de tiempo (parte inferior), del lado derecho del MR se encuentra la barra del código de color-distancia	67
Figura 4.8: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Cahoj Unit, Estelle Smith, Patton y Potts	68
Figura 4.9: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’, Waterflood Unit, Black Stone ‘D’ y Cht Hume Bros	69
Figura 4.10: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett – Gaito, Harnett ‘C’, Harnett Hazen y Miller Farms ‘C’	70
Figura 4.11: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Ranch N – 35, Charles Einsel, Ranc ‘G’ y Federal Land Bank ‘C’	71
Figura 4.12: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Hall, Louie ‘A’, Krug ‘A’ y Close	72
Figura 4.13: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Ruggels ‘A’ y Wegener	73
Figura 4.14: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Cahoj Unit y Estelle Smith (parte superior) haciendo énfasis en su clúster generado en el periodo de respuesta (parte inferior)	75
Figura 4.15: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit (parte superior) haciendo énfasis en su clúster generado en el periodo de respuesta (parte inferior)	76
Figura 4.16: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ (parte superior) y Waterflood Unit (parte inferior). En ambos arrendamientos se ha señalado el clúster generado por una segunda intrusión	78

Figura 4.17: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett ‘C’ y Federal Land Bank ‘C’. En ambos arrendamientos se ha señalado el punto de inicio del decremento y la duración de la zona de transición	80
Figura 4.18: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Close y Hall. En ambos arrendamientos se ha señalado el punto de inicio del decremento y la duración de la zona de transición	81
Figura 4.19: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Estelle Smith, Patton, Potts y Cahoj Unit. En cada uno de ellos se marcó con una línea punteada el inicio de la zona diluida y cuanto tiempo tardo en alcanzarse	83
Figura 4.20: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit. En estos MRs se indica el tiempo en el cual se inició el tiempo en el cual se llegó al primer comportamiento de estabilización (t) y el tiempo de recurrencia (t_r) en el cual se alcanza nuevamente tras la estimulación	85
Figura 4.21: Clusters generados en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett – Gaito y Estelle Smith	86
Figura 4.22: Clusters generados en la etapa inicial y posterior a una segunda intrusión en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit	87
Figura 4.23: Mapas de Recurrencia, Series Temporales y Espacios de Fase de la función senoidal y el ruido blanco	88
Figura 4.24: Comparativo entre la señal de Lorenz y una señal de producción	90
Figura 4.25: Espacios de Fase reconstruidos de los arrendamientos Cht Hume Bros, Close y Harnett – Gaito	91
Figura 4.26: Representación de las estructuras en el MR del arrendamiento Harnett – Gaito	92

Capítulo IV.I – Predicción de Series de Tiempo

Figura 4.27: Predicción en Periodo de Apertura del arrendamiento Six M Farms ‘A’	94
--	----

Figura 4.28: Predicciones en Periodo de Apertura de los arrendamientos Louie ‘A’ y Estelle Smith	95
Figura 4.29: Predicción en la Zona de Transición del arrendamiento Six M Farms ‘A’	96
Figura 4.30: Predicciones en Zona de Transición de los arrendamientos Louie ‘A’ y Estelle Smith	97
Figura 4.31: Predicción en Comportamiento Asintótico – Etapa Estable del arrendamiento Six M Farms ‘A’	98
Figura 4.32: Predicciones en Comportamiento Asintótico – Etapa Estable de los arrendamientos Louie ‘A’ y Estelle Smith	99
Anexo	
Figura A.1: Algoritmo Vecino más Cercano, modificada de Tanuk (2019)	109
Figura A.3: Ejemplos de funciones de Kernel, modificada de Takeda (2019)	111

Lista de Tablas

Capítulo III – Análisis de Series de Tiempo

Tabla 3.1: Comparación de iteraciones de la ecuación de Verhulst, modificada de Martínez et al., (2017)	44
Tabla 3.2: Serie de tiempo de una dimensión, modificada de Hand et al., (2002)	50
Tabla 3.3: Serie de tiempo con un espacio embebido igual a dos ($d_E = 2$) y tiempo de retraso de 0.005 segundos ($\tau = 0.005$)	51

Capítulo IV – Mapas de Recurrencia de Series de Tiempo de Producción de Petróleo

Tabla 4.1: Yacimiento y etiqueta asignada para la base de datos	59
Tabla 4.1 Continuación	60
Tabla 4.2: Comparativo de franja y cluster en los arrendamientos Cahoj Unit, Estelle Smith, Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit generados en el periodo de respuesta	77
Tabla 4.3: Comparativo de clusters de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit	79
Tabla 4.4: Tamaño de zonas cálidas en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett ‘C’, Federal Land Bank ‘C’, Close y Hall	82
Tabla 4.5: Información sobre el inicio del comportamiento asintótico en los arrendamientos Estelle Smith, Patton, Potts y Cahoj Unit	84
Tabla 4.6: Información sobre la estabilización de la producción en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit	86

Capítulo IV.I – Predicción de Series de Tiempo

Tabla 4.7: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en Etapa de Apertura	100
Tabla 4.8: Error Cuadrático Medio y Coeficiente de Correlación	101

Tabla 4.9: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en la Zona de Transición	102
Tabla 4.10: Error Cuadrático Medio y Coeficiente de Correlación en la predicción en la Zona de Transición	103
Tabla 4.11: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en la Zona de Transición	104
Tabla 4.12: Error Cuadrático Medio en la predicción en la Etapa Estable	106

Introducción

El análisis de datos función del tiempo – series temporales – debe generar conclusiones significativas sobre los sistemas que las producen. En el caso de las señales registradas durante el proceso productivo de hidrocarburos, a nivel de pozo y/o yacimiento, el reto se complica debido a que existe, de manera simultánea, multiparámetros en abundancia y en carencia (algunos que física o económicamente son prohibitivos). El Ingeniero Petrolero debe, con base en análisis como el descrito, dar respuesta con pertinencia y calidad suficiente a preguntas sobre el proceso de extracción y el comportamiento de masas naturales.

Algunas veces, los detallados modelos geológicos y petrofísicos no son la mejor alternativa para definir actividades petroleras, por lo que investigadores e ingenieros flexibilizan las tomas de decisión y acuden a técnicas más asequibles, más cercanas al fenómeno y menos exigentes en cuanto a parametrización. El estudio de las series de tiempo, procedentes de la explotación, requiere de estrategias sólidas para detectar (y, de ser necesario, eliminar) atípicos, faltantes, anómalos o errores de forma que el modelo funcional se acerque a ajustes aceptables. Debe considerarse también que las técnicas lineales están lejos de expresar la dinámica de los fenómenos petroleros por lo que las estimaciones (pronósticos y reservas) podrían desviarse significativamente del comportamiento real.

El análisis de curvas de declinación (ACD) ha sido tradicionalmente abordado desintegrando a los componentes del sistema [masas naturales – procesos de extracción]. Por ejemplo, la icónica propuesta de Arps (1945), como base para la interpretación de la producción, ha sido modificada en numerosas ocasiones (Fetkovich, 1980; Blasingame, 1995; Siavash, 2019, entre otros) involucrando ajustes empíricos lo que ocasiona límites de aplicación (condicionando a características del flujo, por ejemplo). Por otro lado, las ciencias de la economía (incluso las políticas) estudian el fenómeno desde la perspectiva que completa al sistema pero poco dicen sobre la dinámica de los entes naturales.

En esta investigación se aplican conceptos de la Teoría del Caos para la caracterización del comportamiento de los registros de producción. Con las estructuras o imágenes bidimensionales de Mapas de Recurrencia (Eckman et al., 1986) MRs, herramienta de la teoría del caos que trabaja sobre la topología, se explota la visualización y análisis cualitativo de la dinámica multidimensional de los registros. Se muestra cómo la interpretación de la

evolución en los MRs, señala patrones, cambios estructurales y similitudes que, ligadas al conocimiento del experto en hidrocarburos, se convierten en información adicional sobre las causas-efectos detrás de las series.

Sobre la lectura de series completas y el estudio detallado de las zonas que la constituyen, un MR oferta la evaluación cuantitativa de estas configuraciones. Con la efectividad de los pronósticos precisamente en estos dos niveles de acercamientos (total y por etapas) se ratifica el potencial de esta herramienta para analizar y controlar con menores incertidumbres las actividades de producción. El enfoque es no paramétrico, de la mano de la postura para elegir los MRs, y se presentan funcionales flexibles que trabajan muy acertadamente en las series usadas.

En este documento de tesis se presenta en el *Capítulo I al Sistema*, donde se describen los componentes del medio natural y su reacción ante las modificaciones antrópicas. Después, en el *Capítulo II* se aborda el tradicional *Análisis de Curvas de Producción*, desde la definición de las curvas de producción, su anatomía y la importancia de su estudio, además de una breve revisión de las técnicas de análisis más empleadas; importante es que se incluyen algunas alternativas recientes sobre este mismo tema (funcionales matemáticos de avanzada). En el *Capítulo III* es el *Análisis de Series de Tiempo* el tema que se trata para que el lector conozca aspectos básicos de los sistemas complejos, así como la construcción e interpretación de los Mapas de Recurrencia. Finalmente, en el *Capítulo IV* se aplica la técnica a la base de datos y se discute sobre los *Resultados MR's* y su interpretación desde la ingeniería petrolera, además se reconoce la susceptibilidad a ser predichos. A través de algunas técnicas (Vecino Cercano, Regresión de Kernel y Función de Base Radial) se muestra cómo funciona un no-paramétrico sobre este tipo de series de tiempo

CAPÍTULO I - El sistema: Yacimiento

En este capítulo se describe al medio natural, los estímulos a los que está sujeto y sus respuestas asociadas. Las acciones humanas, con fines de extracción, se relacionan con la descripción del sistema desde las propiedades de la roca y propiedades de los fluidos desde la perspectiva de la explotación de hidrocarburos.

1.1 Sistema

Se define *yacimiento* como una acumulación de hidrocarburos en estado líquido y/o gaseoso en una formación subterránea con características porosas, permeables y que invariablemente se encuentran asociadas con agua de formación o acuíferos (Archer et al., 1986) (**figura 1.1**). Se considera que este sistema ha alcanzado la condición de equilibrio termodinámico, lo que quiere decir que la resultante de las fuerzas que actúan en el yacimiento es igual a 0 (equilibrio mecánico). El sistema además se encuentra a una misma temperatura (equilibrio térmico) y no se produce ninguna reacción química entre los componentes (equilibrio químico). Los fluidos contenidos han alcanzado una presión de fluido a lo largo de todo el sistema lo que significa que no existen cambios de fase (Xuetao et al., 2017).

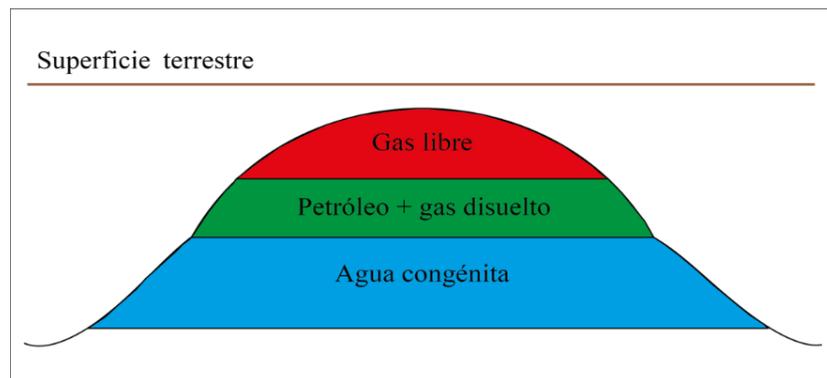


Figura 1.1: Esquema general de un yacimiento, modificada de Bjrolykke (2010)

Cada yacimiento cuenta con características esenciales y únicas que definen su estado inicial, comportamiento, potencial de producción y, por ende, sus reservas. Estas características se clasifican en 3 grupos fundamentales (Xuetao et al., 2017):

- I. Propiedades de la roca, que dependen principalmente de la distribución y el empaquetado de las partículas sólidas.
- II. Propiedades de los fluidos y comportamiento de fase, en función de las condiciones de presión y temperatura.
- III. Propiedades del sistema roca-fluidos, que se refiere a las fuerzas interfaciales generadas por la interacción entre ambos componentes.

1.2 Propiedades de la roca

Una roca de yacimiento se define como el material capaz de almacenar y producir hidrocarburos en cantidades comerciales. Variables en composición y propiedades físicas, la información y el conocimiento que sobre ellas se tengan permitirán una adecuada determinación de la reserva geológica y la recuperación final, así como el establecimiento del proceso óptimo de producción. La primera característica esencial de una roca de yacimiento es que contiene poros o vacíos que le permiten almacenar los hidrocarburos suficientes para justificar su explotación. Esta propiedad se conoce como porosidad (ϕ) y se define como la relación entre el volumen de poros V_p y el volumen de total de roca V_t (**figura 1.2**) (Cook et al., 1990; Xuetao et al., 2017).

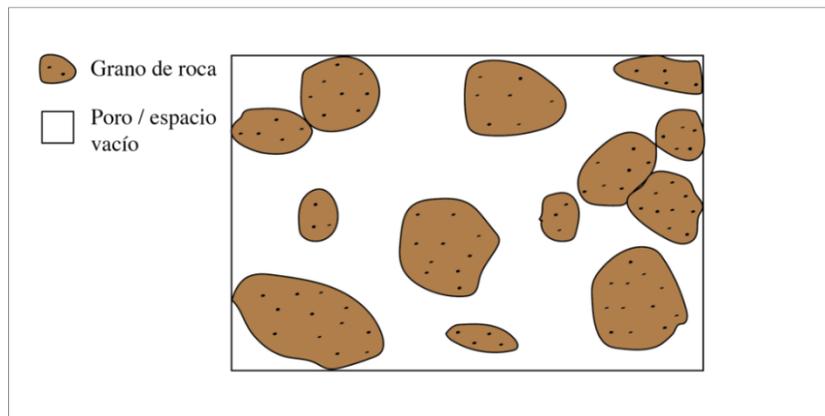


Figura 1.2: Representación de la porosidad, modificada de Wheaton (2016)

Y se define matemáticamente con la ecuación (1.1):

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (1.1)$$

La fracción de este volumen poroso que es ocupada por un fluido se conoce como saturación de fase (**figura 1.3**), y se calcula con (ecuación 1.2):

$$S_i = \frac{V_i}{V_p} \quad (1.2)$$

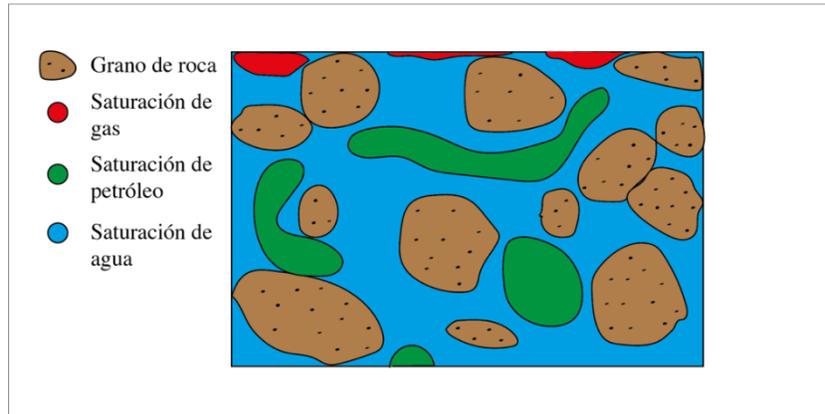


Figura 1.3: Representación de la saturación de fases (petróleo, gas y agua)

donde S_i y V_i representan la saturación y el volumen inicial del fluido que analiza (gas, petróleo o agua) en el volumen de poros V_p . De tal forma que, si los fluidos los tres fluidos se encuentran simultáneamente en el yacimiento, la ecuación (1.2) es reescrita para cada una de las fases mediante las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5).

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} \quad (1.3)$$

$$S_o = \frac{V_o}{V_p} \quad (1.4)$$

$$S_g = \frac{V_g}{V_p} \quad (1.3)$$

Cada subíndice define el fluido el cual este siendo estudiado, es decir, w para agua, o para petróleo y g para gas.

Los yacimientos son medios que se encuentran completamente saturados por fluidos y, por lo tanto, se debe cumplir la igualdad de la ecuación (1.6). Cabe destacar que, antes de la explotación pudiese o no estar presente la fase gaseosa. De no estarlo, su saturación tomará un valor igual a 0. Sin embargo, una vez iniciado el proceso de producción, el gas

inexorablemente hará presencia y su incremento de saturación será gradual (Satter et al., 2015; Xuetao et al., 2017; Bashbush, 2020).

Otro punto importante por destacar de esta propiedad es que, durante la producción de cualquier yacimiento, la saturación de los fluidos contenidos jamás podrá llegar a tomar un valor igual a 0 debido que existe una saturación irreducible para el agua y residual para los hidrocarburos, que por efectos de presión capilar resultan imposibles de extraer con métodos convencionales (Bashbush, 2020).

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (1.6)$$

La porosidad y una saturación elevada de petróleo y/o gas no son suficientes para la explotación de un yacimiento. Estos poros deben encontrarse interconectados de tal manera que se genere una red que permita el flujo de fluidos a través del medio poroso, de lo contrario, los hidrocarburos almacenados no se podrían producir de manera convencional o inclusive ser irrecuperables (Fanchi, 2000; Satter et al., 2015). Este tipo de porosidad se denomina porosidad efectiva y no involucra aquellos poros que se encuentren aislados o sean muy pequeños para contribuir con la producción de fluidos (**figura 1.4**).

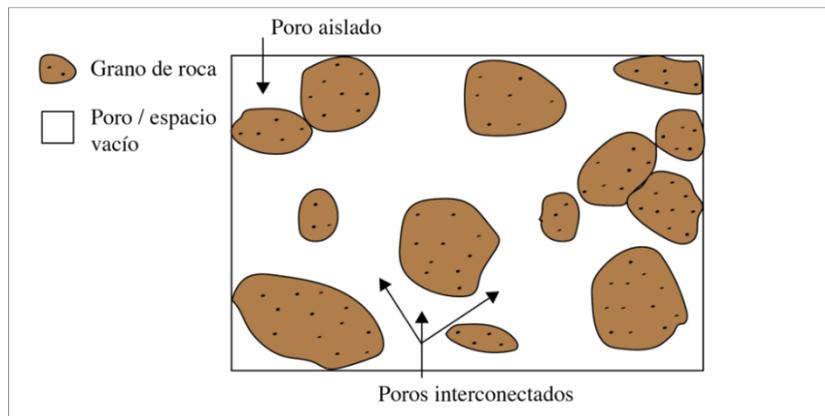


Figura 1.4: Representación de la porosidad efectiva, modificada de Wheaton (2016)

Si la roca cuenta con la porosidad y la estructura adecuada para permitir flujo de fluidos, se dice que la roca es permeable o tiene permeabilidad. La permeabilidad se define como la facilidad que tiene una roca para transmitir fluidos a través de la red de poros y es considerada la más importante dentro del estudio de yacimientos (Xuetao et al., 2017).

La permeabilidad, desde la pionera propuesta de Darcy en 1856, se conceptualiza a través del caudal volumétrico de un fluido homogéneo proporcional a la altura hidráulica del agua. La constante K en esta relación es la constante de proporcionalidad conocida como permeabilidad (**figura 1.5**). La ecuación (1.7) muestra la equivalencia matemática a esta expresión y se conoce como Ley de Darcy (Satter et al., 2015; Fanchi, 2005).

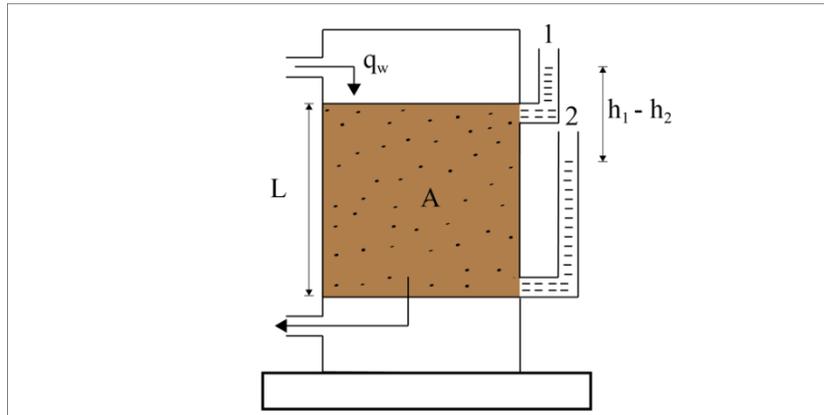


Figura 1.5: Esquema del experimento propuesto por Henry Darcy

$$q = K \frac{A \Delta h}{L} \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) es válida para el flujo laminar en estado estacionario en un medio homogéneo. Lo que significa que las propiedades del medio poroso, incluida la permeabilidad, son uniformes. Sin embargo, las formaciones geológicas no son homogéneas, además de que el flujo de fluido siempre se encuentra en estado inestable debido a los cierres y aperturas del pozo (Satter et al., 2015). La ecuación (1.7) es modificada para fluidos petroleros (petróleo, gas y agua de formación) mediante la inclusión del efecto de viscosidad del fluido en estudio ecuación (1.8):

$$q = - \left(\frac{KA}{\mu} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial L} \right) \quad (1.8)$$

Donde q es la tasa de flujo de fluido que atraviesa el medio poros en $\left(\frac{m^3}{s} \right)$, K es la constante universal conocida como permeabilidad en (mD) , A es el área de la sección transversal en (m^2) , μ es la viscosidad del fluido medida en (cp) y la derivada $\left(\frac{\partial p}{\partial L} \right)$ la caída de presión

generada para obtener dicho caudal de flujo medido en $\left(\frac{atm}{cm}\right)$. Además, el signo negativo deriva porque el fluido se dirige en dirección opuesta a la presión creciente.

Ya que el sistema presenta más de una fase es necesario contemplar el movimiento relativo de las dos o más fases presentes en el medio poroso. Entonces cuando se habla de la transmisión de un fluido se denomina permeabilidad absoluta, caso contrario se trata de un sistema multifásico que requiere análisis de permeabilidad para cada fase presente conocida como permeabilidad efectiva, que de manera análoga a la saturación de fase se define con una sigla dependiendo el fluido que este siendo analizado: petróleo (k_o), gas (k_g) y agua (k_w) (Fanchi, 2000).

De tal forma, que la permeabilidad relativa se define como la relación entre la permeabilidad efectiva de cada fluido y la permeabilidad absoluta (ecuaciones 1.9, 1.10 y 1.11):

$$k_{ro} = \frac{k_o}{K} \quad (1.9)$$

$$k_{rg} = \frac{k_g}{K} \quad (1.10)$$

$$k_{rw} = \frac{k_w}{K} \quad (1.11)$$

Donde k_o , k_w y k_g representan las permeabilidades efectivas a cada uno de los fluidos, petróleo, agua y gas en (mD), respectivamente; K es la permeabilidad absoluta del medio en (mD) y finalmente k_{ro} , k_{rw} y k_{rg} son las permeabilidades relativas de los fluidos analizados y son adimensionales.

Finalmente, estas rocas al estar sepultadas a ciertas profundidades se encuentran sujetas a presiones internas y externas (**figura 1.6**). Donde la presión interna es ejercida por los fluidos contenidos en los poros y la externa por el peso de sobrecarga de las formaciones suprayacentes y las tensiones tectónicas que las acompañen (Xuetao et al., 2017; Lozano, 2016).

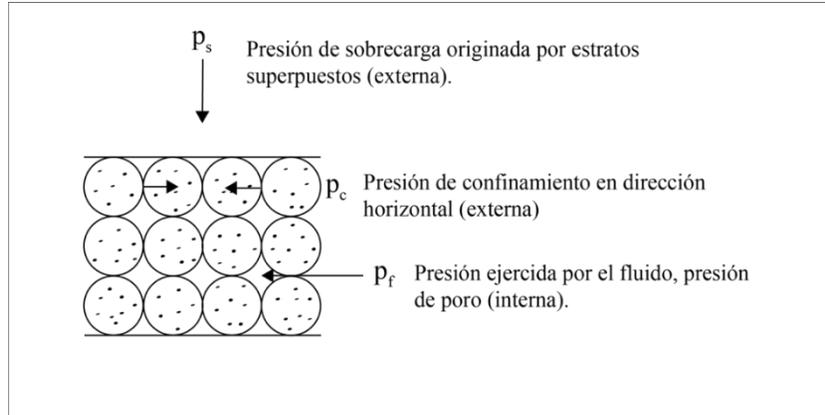


Figura 1.6: Esquema de esfuerzos en un yacimiento, modificado de Xuetao (2017)

La presión interna (presión de poro) y presión externa (presión de sobrecarga) a condiciones iniciales se mantienen en equilibrio y debido a esto las rocas se encuentran comprimidas. Este concepto se define como compresibilidad de la roca y se define como la tasa de cambio de volumen con una unidad de cambio de presión en el yacimiento. Matemáticamente, la compresibilidad de la roca se define con la ecuación (1.12).

$$c_r = \frac{1}{V_p} \frac{\Delta V_p}{\Delta p} \quad (1.12)$$

Donde c_r es la compresibilidad de la roca medida en $\left(\frac{1}{psi}\right)$; V_p es el volumen de poros y $\left(\frac{\Delta V_p}{\Delta p}\right)$ es el cambio fraccional del volumen poroso con una unidad de presión.

De manera análoga que los depósitos o rocas de yacimiento son particulares en composición y propiedades físicas. Los fluidos contenidos en ellos nunca son idénticos y, por lo tanto, su comportamiento gobernado por su composición y condiciones termodinámicas será diferente. Comprender y anticipar de alguna forma este comportamiento, antes de la producción y durante el proceso, es tarea fundamental para el ingeniero. La selección del método óptimo de producción, diseño de instalaciones superficiales y evaluación de un posible método de recuperación secundaria y/o mejorada dependerán de esta condición (Wheaton, 2016; Bashbush, 2020; Lozano, 2016).

1.3 Propiedades de los fluidos de yacimiento

Un fluido de yacimiento es aquel que permanece en el depósito a condiciones de alta presión y temperatura, y que, además, ha alcanzado una presión en todo el sistema (Cook et

al, 1990; Fanchi, 2000). Su composición dependerá principalmente de su origen y condiciones termodinámicas bajo las cuales se encuentre y su distribución dentro del yacimiento dependerá tanto de las propiedades petrofísicas de la roca como de las propiedades físicas y químicas de los propios fluidos.

Estos fluidos son clasificados en 3 categorías (Xuetao et al, 2017):

- I. Hidrocarburos en estado líquido o petróleo.
- II. Gases hidrocarburos y no hidrocarburos (contaminantes).
- III. Agua de formación con alto contenido de minerales.

Los hidrocarburos en estado líquido o gaseoso son los fluidos de mayor interés en la industria, sin embargo, el agua de formación es un fluido siempre presente y por lo tanto, el estudio de su comportamiento es importante ya que puede contribuir significativamente en el mecanismo de accionamiento del yacimiento (Wheaton, 2016; Fanchi, 2000; Bashbush, 2020).

Hidrocarburos en estado líquido

Los hidrocarburos en estado líquido son mezclas de compuestos orgánicos, que en su mayoría son moléculas conformadas por hidrógeno y carbono, pero también pueden incluir contaminantes como azufre, nitrógeno, oxígeno y componentes metálicos. Dichos hidrocarburos a condiciones iniciales de presión y temperatura se encuentran en equilibrio y en un yacimiento de petróleo, son predominantemente líquidos. En caso de ser un yacimiento de gas, pudiese o no contener líquidos formados. Sin embargo, a medida que estas condiciones son modificadas, las fases en las que se encuentran originalmente, junto con su composición y propiedades físicas, cambiarán (Bashbush, 2020; Lozano, 2016; Satter et al, 2005).

Este comportamiento que describe la fase o fases en las que existe una masa de fluido a las condiciones de presión (P), temperatura (T) y volumen (V) se conoce como comportamiento de fase y en el caso de los hidrocarburos, al ser un sistema multicomponente, se representa en un diagrama presión contra temperatura (**figura 1.7**).

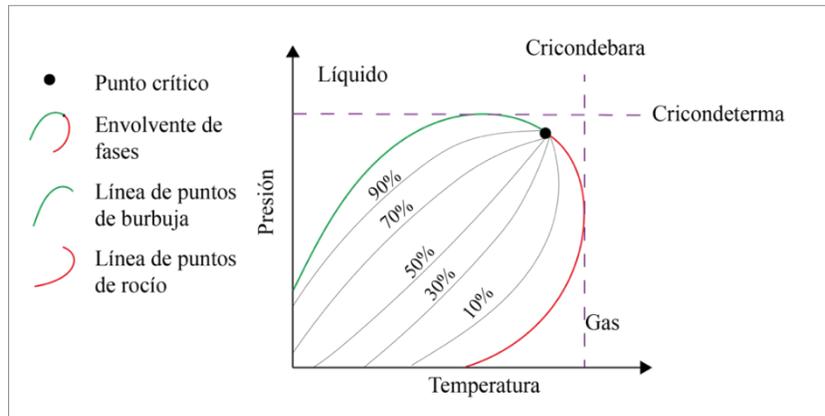


Figura 1.7: Esquema representativo de un diagrama de fase, modificada de Lozano (2016)

Si la producción es un proceso bajo el cual se reduce la presión del sistema, la línea de puntos de burbuja representa las condiciones en las que se genera cambio de fase, haciéndose presente la primera burbuja de gas (presión que se denomina presión de burbuja o saturación).

La línea de puntos de rocío representa las condiciones bajo las cuales se tiene presente la última gota de líquido (presión denominada presión de rocío). Estas líneas definen la envolvente de fase, que es la zona donde coexisten ambas fases o zona bifásica (líquido y gas) y el punto donde se unen se conoce como punto crítico que representa las condiciones de presión y temperatura bajo las cuales las propiedades de las fases son indistinguibles, es decir, los fluidos tienen un comportamiento supercrítico (Bashbush, 2020; Lozano, 2016). Además, la cricondeterma es la línea imaginaria que representa la temperatura máxima por sobre la cual no se puede formar líquido sin importar cual sea la presión. De manera similar, la cricondebara se define como la línea imaginaria de presión máxima por arriba de la cual la fase gaseosa no se puede formar independiente de la temperatura.

Cada acumulación de hidrocarburos tiene su diagrama de fase en particular y existe una clasificación de acuerdo con el fluido contenido en el yacimiento (condiciones iniciales). Esta clasificación se enlista a continuación y se representa gráficamente en la **figura 1.8** (McCain, 1990; Wheaton, 2016):

- Petróleo negro.
- Petróleo volátil.
- Gas y condensado.
- Gas húmedo.

- Gas seco.

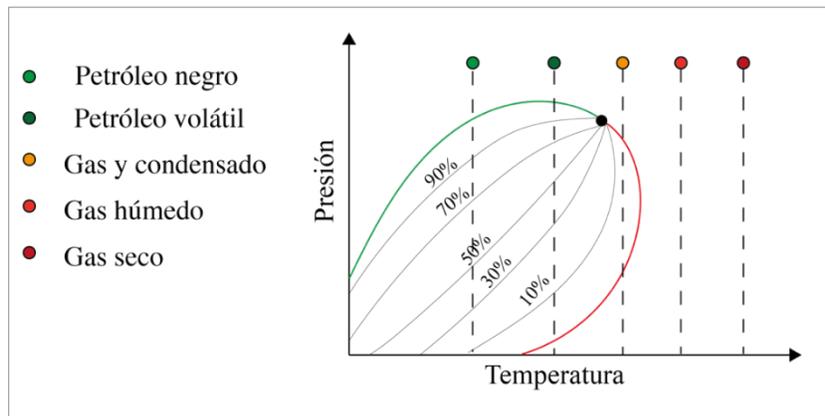


Figura 1.8: Tipos de hidrocarburos de acuerdo con sus condiciones iniciales de presión y temperatura, modificada de McCain (1990)

Estos diagramas de fase pueden ser analizados en un mismo gráfico donde se observa que si la temperatura del sistema aumenta, la cantidad de componentes en la acumulación de hidrocarburos es menor y, por ende, la envolvente es más pequeña (**figura 1.9**).

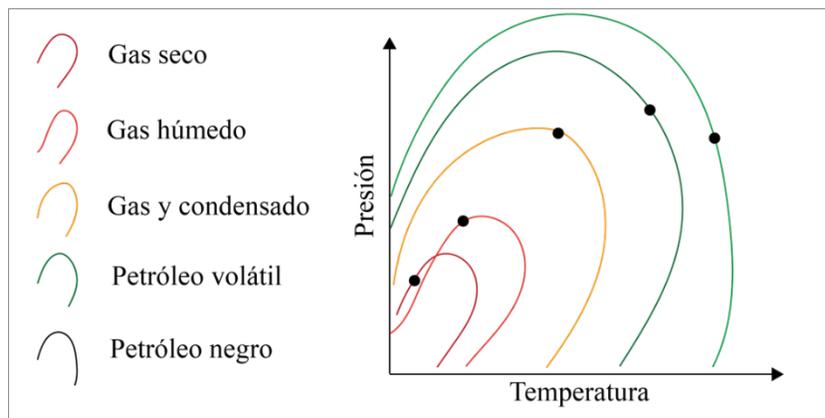


Figura 1.9: Envolventes de fase de diferentes tipos de hidrocarburos, modificada de Xuetao (2017)

Por otro lado, en la ingeniería petrolera resulta imprescindible estudiar por separado cada una de las fases que pudiesen estar presentes en el yacimiento, ya que tienen un comportamiento y propiedades físicas completamente diferentes (McCain, 1990; Fanchi, 2005).

Para las intenciones de esta investigación únicamente se mencionan brevemente las principales propiedades físicas de las fases. En el caso de petróleo o hidrocarburos en estado

líquido, las propiedades físicas requeridas en los cálculos ingenieriles para el flujo en medios porosos son:

- Factor de volumen de petróleo, (B_o)
- Relación gas en solución-aceite, (RGA)
- Relación de solubilidad, (R_s)
- Viscosidad, (μ_o)
- Compresibilidad del petróleo, (c_o)

Hidrocarburos en estado gaseoso

El siguiente fluido a analizar es el gas o hidrocarburos en estado gaseoso, que se define como un fluido homogéneo de baja densidad y viscosidad, que no tiene volumen ni forma definida. Sin embargo, llenan completamente el espacio que los contiene. Sus propiedades cambian considerablemente respecto a las propiedades de los líquidos, principalmente debido a que las moléculas del gas se encuentran más alejadas respecto a las moléculas en los líquidos (Bashbush, 2020; Lozano, 2016).

Sus propiedades físicas se pueden calcular directamente por mediciones en laboratorio o por pronósticos a partir de su composición química de la mezcla de gases. Cuando se trata de pronósticos, los cálculos se basan en las propiedades físicas de los componentes individuales, referidas como reglas de mezclado. A continuación, se presenta una lista de las principales propiedades físicas del gas utilizadas para cálculos de flujo en medios porosos:

- Factor de volumen de gas, (B_g)
- Factor de compresibilidad, (z)
- Densidad del gas, (ρ_g)
- Viscosidad del gas, (μ_g)
- Compresibilidad del gas, (c_g)

Agua de formación

El agua de formación, también conocida como salmuera siempre se encuentra asociado a un yacimiento petrolero, por lo que los ingenieros deben tener conocimiento de sus propiedades y comportamiento, ya que su expansión y movimiento contribuyen al mecanismo de accionamiento, especialmente si el volumen de agua que rodea al yacimiento en estudio es

grande. El estudio de este fluido y sus propiedades es esencial para la determinación de la presión de soporte que se pudiese proporcionar y el diseño de instalaciones superficiales y del proyecto de recuperación mejorada futuro (Bashbush, 2020).

El comportamiento de las propiedades físicas de la salmuera o agua de formación es muy similar a las propiedades físicas del petróleo. Sin embargo, debido al enlace químico que presenta el agua, su capacidad de disolución de gas es mínima y, por ende, los cambios generados en las propiedades físicas del agua en función de los cambios de presión también lo son (McCain, 1990; Lozano, 2016). A continuación, se presenta una lista de las principales propiedades físicas utilizadas en el análisis de su comportamiento:

- Cantidad de sólidos disueltos
- Densidad del agua, (ρ_w)
- Factor de volumen del agua, (B_w)
- Relación de solubilidad, (R_{sw})
- Viscosidad del agua, (μ_w)
- Compresibilidad del agua, (c_w)

1.4 Estímulos al sistema

La extracción de hidrocarburos modifica las condiciones originales del sistema, rompe los equilibrios y activa las propiedades de los componentes (Cook et al., 1990). La extracción adopta el nombre de producción y se lleva a cabo a través de la perforación de pozos en las zonas de interés, proporcionando una conexión entre el yacimiento y la superficie t generando un gradiente de presión alrededor del pozo (**figura 1.10**) y con el paso del tiempo en todo el yacimiento (**figura 1.11**). Este gradiente permite que los fluidos se dirijan primeramente hacia el pozo y posteriormente hacia la superficie de manera natural.

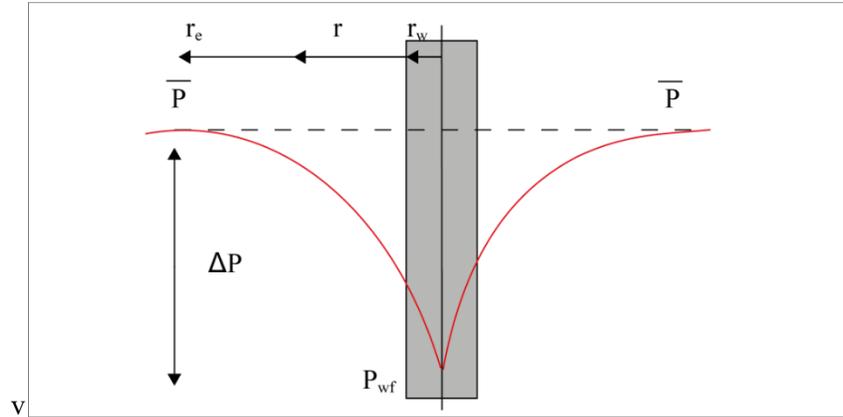


Figura 1.10: Perfil de distribución de presión en un pozo vertical donde \bar{P} es la presión promedio del yacimiento, P_{wf} es la presión de fondo fluyendo y ΔP es la caída de presión generada en el sistema; r_w representa el radio de pozo, r el radio de drenaje y r_e el radio del yacimiento, modificado de Cook (1990)

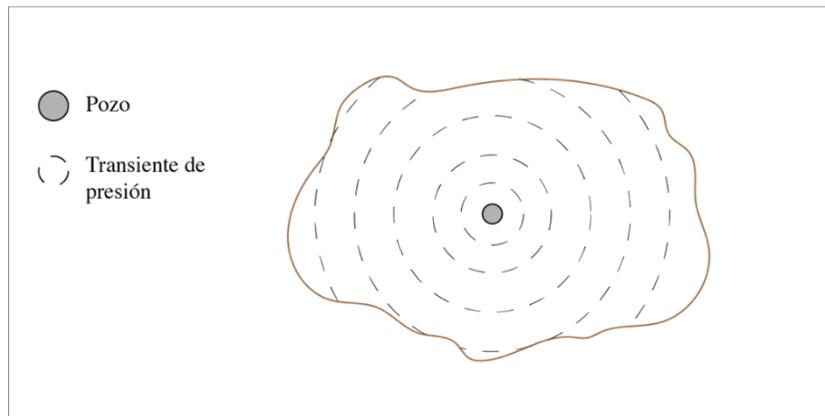


Figura 1.11: Gradiente de presión generado en todo el yacimiento

Este fenómeno de producción es un proceso isotérmico por lo que únicamente cambian las condiciones de presión del sistema y con ello, las proporciones, composiciones, propiedades físicas de la roca y de los fluidos a medida que avanza este proceso. Entonces, el estudio de las alteraciones de presión que sufra el sistema y las consecuencias que generen (cambios las propiedades) durante toda la vida productiva del yacimiento, serán fundamentales para promover la explotación eficiente de hidrocarburos (Bashbush, 2020).

En la **figura 1.12** se muestra un esquema representativo de las entradas y salidas que representa este fenómeno de producción de fluidos.

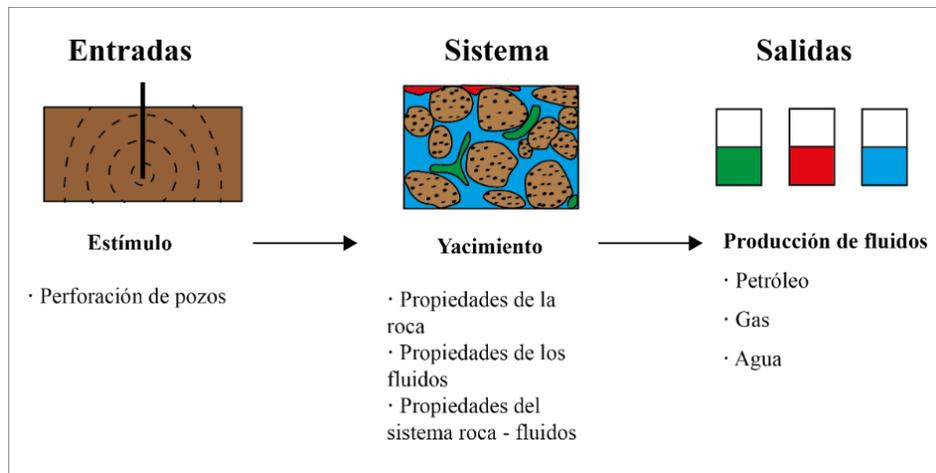


Figura 1.12: Esquema de entradas y salidas del fenómeno

Donde la entrada son los parámetros que describen las acciones para modificar el equilibrio del yacimiento. De acuerdo con el Instituto Mexicano del Petróleo, esta irrupción en el medio, perforación de pozos, se describe como el proceso de construir un agujero en la corteza terrestre para extraer los fluidos almacenados en el yacimiento y se explica de una manera sencilla en los siguientes pasos (Luna et al., 2015):

- A. Primero, mediante el movimiento rotatorio de una barrena (seleccionada de acuerdo con el tipo de toca a perforar y profundidad) se genera el agujero y se inyectan fluidos para extraer los recortes de roca y tierra.
- B. Posteriormente se inserta una tubería de acero y cemento para darle estructura y fortalecer el pozo. Esta parte del proceso resulta especialmente compleja y costosa.
- C. Finalmente, se entra en el proceso de terminación, que consiste en realizar pequeñas perforaciones a los pozos a través de los disparos en las zonas donde se encuentran alojados los hidrocarburos para permitir que estos fluyan de manera natural a la superficie.

La primera característica de las rocas que sufre cambios cuando se perfora sobre es la compresibilidad. Al encontrarse comprimida con la presión interna y externa, ante cambios en la presión del sistema mediante la perforación de pozos y extracción de fluidos, la roca se expande en volumen y, por lo tanto, aumenta su compresibilidad original. Este fenómeno se representa gráficamente en la **figura 1.13** (Fanchi, 2000).

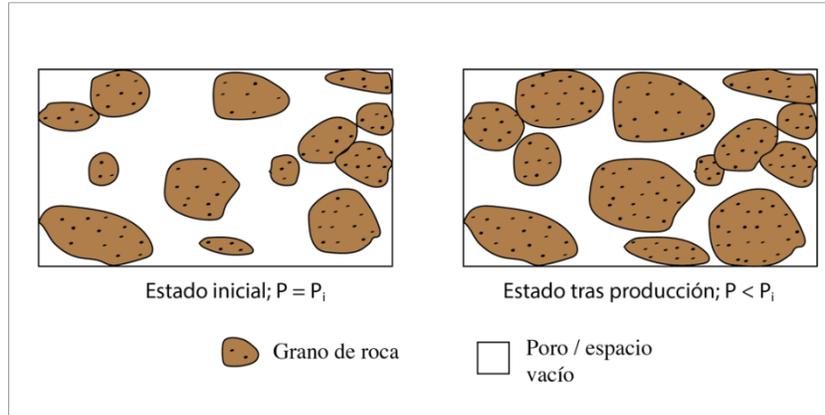


Figura 1.13: Expansión de la roca, donde P_i es la presión inicial y P la presión a la que se encuentra el sistema

De esta forma se puede establecer una relación directa entre la compresibilidad de la roca y su porosidad, considerando que la reducción en la presión de poro y el aumento de volumen de las partículas sólidas da como resultado una reducción en la porosidad. Esta relación se establece usando las ecuaciones (1.1) y (1.12). Despejando de (1.1) el volumen de poros y sustituyendo en la definición de compresibilidad de la roca, se tiene la ecuación (1.13):

$$c_r = \frac{1}{\phi V_t} \frac{\Delta \phi V_t}{\Delta p} \quad (1.13)$$

Donde c_r es la compresibilidad de la roca, ϕ es la porosidad del sistema, V_t el volumen total y $\Delta \phi V_t$ es el cambio fraccional de la porosidad generado con la caída de presión Δp .

Aplicando la definición de derivada cuando ΔV_t tiende a ser 0, se tiene la ecuación (1.14).

$$c_r = \frac{1}{\phi V_t} \frac{\partial \phi V_t}{\partial p} \quad (1.14)$$

El volumen total (V_t) permanece constante, por lo que derivando (15) se llega a la ecuación (1.15).

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (1.15)$$

Si se desea conocer el valor de porosidad a una presión determinada del sistema. La ecuación (1.16) es integrada en el rango de presión y porosidad conocidos.

$$\int_{p_i}^p c_r \partial p = \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{1}{\phi} \partial \phi \quad (1.16)$$

Y se obtiene la ecuación (1.17), con la que se obtiene el nuevo valor de porosidad en función de la compresibilidad y la caída de presión.

$$\phi = \phi_i e^{-c_r(p_i - p)} \quad (1.17)$$

Es importante mencionar que esta disminución en el volumen de poros es provocada por la energía elástica almacenada en las rocas. Esto representa un aporte natural para la producción de fluidos. Sin embargo, comparado con la expansión de fluidos es muy pequeña, cerca del 3% (Cook et al, 1990; Bashbush., 2020).

De manera análoga a la porosidad, la saturación de fluidos se altera significativamente. En la **figura 1.14** se muestra un ejemplo de los cambios generados en la saturación de fases debido a la caída de presión.

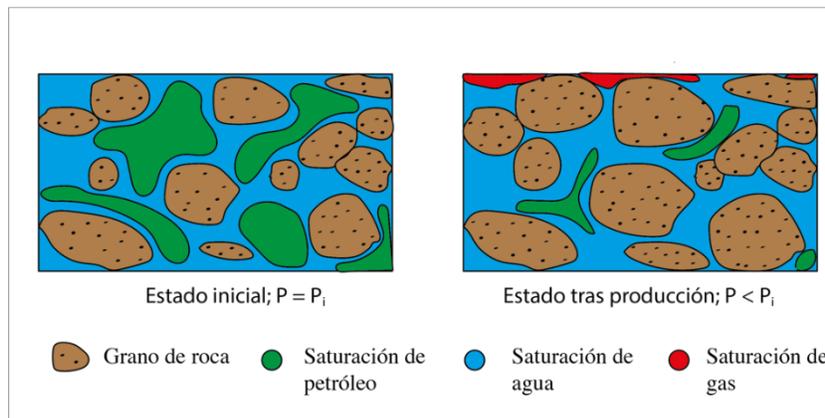


Figura 1.14: Cambios en la saturación de fases donde p_i es la presión inicial del sistema y p la presión a la que se encuentra

En este fenómeno se observa la disminución gradual de la saturación de petróleo y el aumento de las saturaciones de gas y agua, ocasionadas por el cambio de fase y la invasión o inyección de fluidos no miscibles. En los yacimientos productores, estas saturaciones no sólo varían en tiempo sino también en ubicación debido al desplazamiento de los fluidos a las zonas de menor presión (Satter et al, 2015). En consecuencia, la propiedad final de la roca que experimenta alteraciones constantes debido a los cambios de saturación en las fases presentes es la permeabilidad relativa. Si bien se definió como la relación que existe entre la

permeabilidad efectiva de un fluido y la permeabilidad absoluta del medio, esta propiedad representa la capacidad que tiene la formación para transmitir un fluido en específico al existir 2 o más presentes en función de su saturación. En la **figura 1.15** se muestra un ejemplo de curvas típicas de permeabilidad relativa al agua y al petróleo.

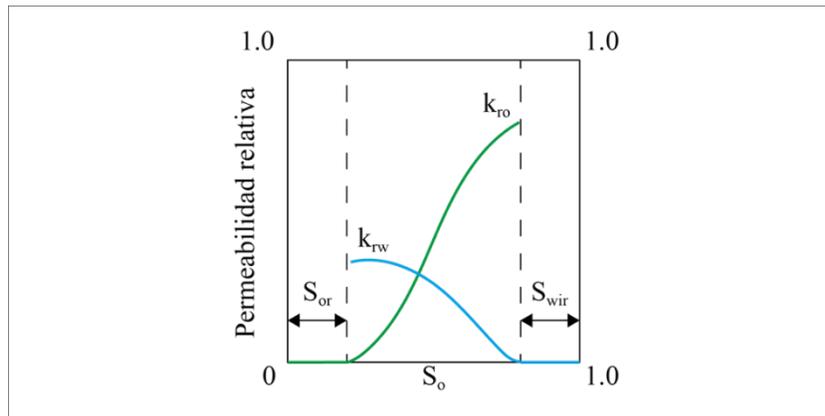


Figura 1.15: Curvas de permeabilidad relativa al petróleo y al agua, donde S_{or} y S_{wir} son la saturación de petróleo residual y agua irreductible, k_{ro} y k_{rw} representan las curvas de permeabilidad relativa del petróleo y agua. Modificada de Cook (1990).

Se observa que, en cualquiera de las fases, la permeabilidad relativa tiene un valor de 0 por debajo de la saturación irreductible o residual (dependiendo la fase que este siendo analizada). Esto se debe a que como se mencionó, por fenómenos de presión capilar, no fluyen conforme los métodos convencionales de producción y existe un contenido mínimo requerido de fluido para su flujo, este concepto se conoce como saturación crítica de fase. Estas curvas no alcanzan el valor de 1 por los mismos motivos de saturaciones inamovibles, siempre existen al menos 2 fases presentes en el medio (Bashbush, 2020; Xuetao et al., 2017).

Las propiedades de la roca no son las únicas que sufren cambios en este proceso. Inexorablemente las propiedades de los fluidos también lo hacen e influyen en el comportamiento futuro de producción (Fanchi, 2000).

Como se mencionó, estos fluidos contenidos en el yacimiento se encuentran comprimidos a las condiciones iniciales de presión y temperatura. Por lo que, al existir un abatimiento de presión del sistema, la presión del fluido también disminuirá provocando la expansión de estos fluidos. Este concepto se conoce como compresibilidad de fluido y se define matemáticamente con la ecuación (1.18).

$$c_f = -\frac{1}{V_f} \left(\frac{dV_f}{dp} \right)_T \quad (1.18)$$

Donde c_f es la compresibilidad del fluido que se este analizando, V_f el volumen de fluido y $\left(\frac{dV_f}{dp} \right)_T$ representa el cambio fraccional del fluido por unidad de presión a una temperatura constante. Utilizando las siglas para cada uno de los fluidos del yacimiento se tienen las ecuaciones (1.19), (1.20) y (1.21).

$$\text{Petróleo} \rightarrow c_o = -\frac{1}{V_o} \left(\frac{dV_o}{dp} \right)_T \quad (1.19)$$

$$\text{Gas} \rightarrow c_g = -\frac{1}{V_g} \left(\frac{dV_g}{dp} \right)_T \quad (1.20)$$

$$\text{Agua} \rightarrow c_w = -\frac{1}{V_w} \left(\frac{dV_w}{dp} \right)_T \quad (1.21)$$

Donde el grado de compresibilidad que presente el petróleo depende principalmente de su composición. Ya que entre más componentes de menor peso molecular contenga, más compresible es el fluido. De lo contrario, entre más componentes de mayor peso molecular presente, más difícil es de comprimir debido al tamaño de moléculas que lo constituyen. Por otro lado, el gas es el fluido con mayor compresibilidad comparado con el agua o el petróleo debido al arreglo molecular que presenta. Por lo tanto, un pequeño cambio en la presión del sistema involucrará un gran cambio en el volumen original de gas. Finalmente, el agua de formación es considerado en la mayoría de los casos de estudio como un fluido incompresible, ya que sus enlaces químicos impiden el desplazamiento de sus partículas con los pequeños cambios de presión (McCain, 1990; Bashbush, 2020; Fanchi, 2005).

Es importante mencionar que en la ingeniería petrolera no se tiene un interés especial en las compresibilidades individuales de cada uno de los componentes, ya que tanto los fluidos como la roca se encuentran a condiciones de alta presión y temperatura, por lo que se

encuentran comprimidos en relación con sus densidades y cualquier reducción en la presión del sistema resultará en un aumento de volumen (Cook et al, 1990),

Aplicando directamente al yacimiento, cuando se extrae un volumen de fluido del yacimiento a través de la producción, la caída de presión resultante estará determinada por la compresibilidad y el volumen de los componentes del sistema. Esta relación se representa matemáticamente con la ecuación (1.22).

$$dV = [c_o V_o + c_g V_g + c_w V_w + c_r] \quad (1.22)$$

donde dV es el cambio fraccional de volumen. $c_o V_o$, $c_w V_w$ y $c_g V_g$ representan el producto de la compresibilidad del fluido correspondiente (petróleo, agua y gas) por su volumen ocupado en el sistema. c_r es la compresibilidad de la roca.

Este concepto se conoce como compresibilidad total de la formación y también puede ser representado en función de la saturación de fase con la ecuación (1.23).

$$c_f = c_o S_o + c_g S_g + c_w S_w + c_r \quad (1.23)$$

donde $c_o S_o$, $c_w S_w$ y $c_g S_g$ representan el producto de la compresibilidad del fluido correspondiente (petróleo, agua y gas) por su valor de saturación presente en el medio.

Dicha expansión de los componentes, que es función de su saturación o volumen y compresibilidad, actúa como una fuente de energía impulsora que puede actuar para apoyar la producción primaria del yacimiento. Esto significa que se utiliza la energía natural almacenada en el yacimiento como mecanismo de producción.

Sin embargo, no son los únicos cambios que sufren los fluidos almacenados en el yacimiento. Como se mencionó anteriormente, la saturación de fase es una propiedad que cambia constantemente en espacio y tiempo debido al abatimiento de presión en el sistema (Xuetao et al, 2017; McCain, 1990). Esto se debe al cambio de fase que existe y puede ser descrito a través de un diagrama (**figura 1.16**).

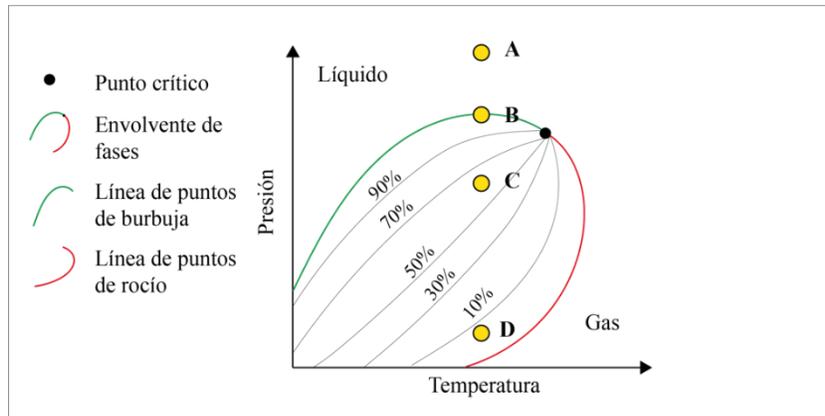


Figura 1.16: Proceso de cambio de fase de un petróleo volátil, modificado de Cook (1990)

Donde el punto **A** representa las condiciones originales de presión y temperatura del yacimiento. En estas estas condiciones el sistema se encuentra en equilibrio y no existen cambios en sus propiedades. A medida que las condiciones originales son modificadas con la reducción de presión, existe una expansión de fluidos que no presenta un cambio de fase hasta llegar al punto **B** (línea de puntos de burbuja). A estas condiciones existe un cambio de fase, liberando la primera burbuja de gas y se conoce como presión de saturación o burbujeo. Finalmente, si la presión continúa disminuyéndose (punto **C**) existe una liberación de gas constante ocasionando que el líquido cada vez tenga menor presencia en el medio hasta llegar a **D**, que representa las condiciones bajo las cuales se abandona el yacimiento. De esta forma se presentan los cambios de fase en los hidrocarburos almacenados en el yacimiento en estudio. Sin embargo, las propiedades individuales de cada uno de estos fluidos (petróleo, gas y agua) también lo hacen en función de la presión (Satter et al, 2005; Fanchi, 2000; Bashbush, 2020; Velasco, 2016). Sin embargo, no son abordados en esta investigación.

Finalmente, la salida o producto que se tiene por la modificación generada en el sistema es una cierta cantidad de fluidos producidos (gas, petróleo y agua) (**figura 1.17**). Esta producción es medida en condiciones de superficie y reportada en barriles para los líquidos (petróleo y agua) y en pies cúbicos para el gas, por pozo o yacimiento y de manera diaria o mensual.

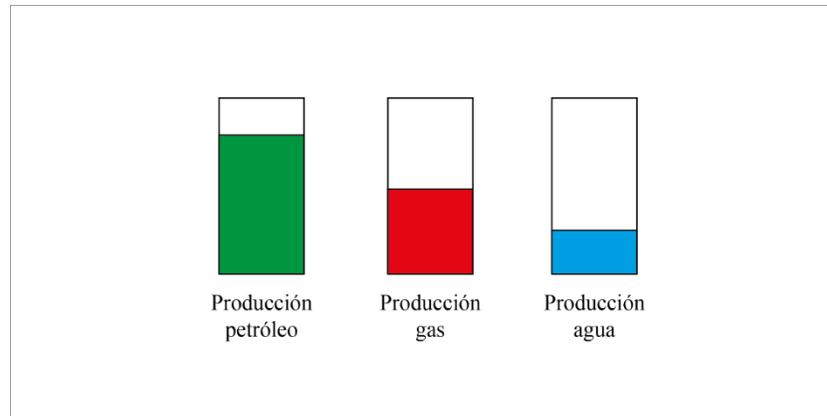


Figura 1.17: Producción de fluidos

1.5 Interpretación de la respuesta del sistema: Históricos de Producción

Esta producción es reportada diaria o mensualmente en las unidades correspondientes y el conjunto de datos recolectados a lo largo de un tiempo considerable se presenta en un gráfico semilogarítmico (**figura 1.18**) con producción contra el tiempo. Este lugar geométrico es conocido como histórico de producción o curva de producción.

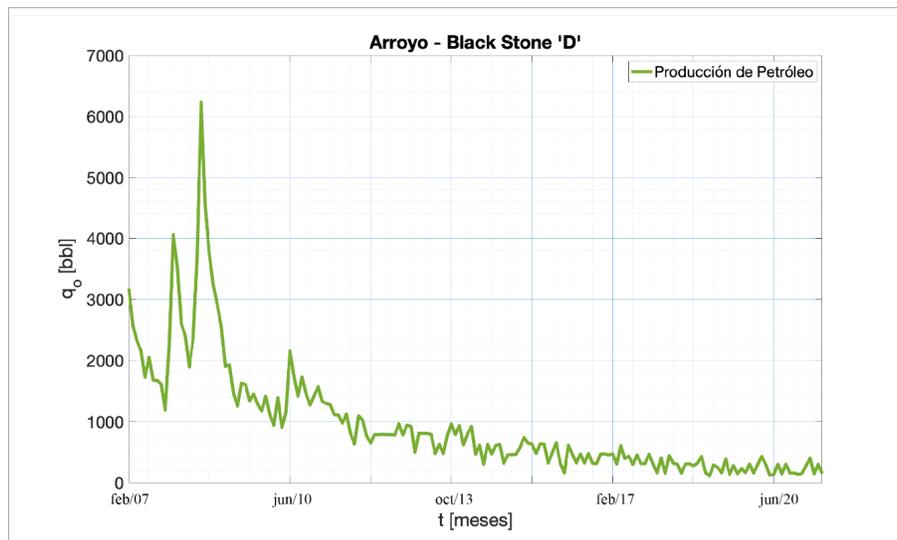


Figura 1.18: Ejemplo de histórico de producción del arrendamiento Black Stone 'D' del yacimiento Arroyo (Kansas), Construido de la base de datos de Kansas (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1037721185)

La tasa de producción de hidrocarburos de un pozo o yacimiento generalmente declina en función del tiempo. Esto debido a la pérdida de energía que se presenta a través de la expansión volumétrica de los fluidos y las rocas. Además, al ser sistemas particulares en

propiedades de cada uno de sus componentes, las curvas también tendrán un comportamiento único y, por lo tanto, con el objetivo de tener una producción óptima, se convierten en una de las principales herramientas de análisis del comportamiento del yacimiento. Es por esto por lo que se ha dedicado mucho esfuerzo en el desarrollo de técnicas que permita estudiar el comportamiento de la producción en un tiempo determinado, ya sea presente y/o futuro.

CAPÍTULO II – Análisis de la Producción de Petróleo

El estudio de las curvas de producción de petróleo y/o gas es fundamental para el análisis del rendimiento a nivel de pozo o de yacimiento y requiere del trabajo multidisciplinario de geólogos, geofísicos, ingenieros de yacimientos, químicos, entre otros y, en ausencia de modelos geológicos y de simulación bien definidos; investigadores e ingenieros deben tener cierta flexibilidad para modelar los yacimientos y han desarrollado técnicas simplificadas con el objetivo de mitigar estas deficiencias.

2.1 Producción de Petróleo – Estudio y Utilidad

Una de las tareas más importantes en la ingeniería de yacimientos es pronosticar cuál será el valor futuro de la producción de hidrocarburos. Sin embargo, realizar dicha tarea con precisión requiere del conocimiento sobre parámetros del yacimiento que en la mayoría de los casos no se encuentran disponibles o no están totalmente definidos. Por lo tanto, uno de los caminos asequibles al cual investigadores e ingenieros han dedicado mucho esfuerzo, es el estudio de la propia curva y su anatomía (Yogendra et al., 2020).

Las curvas de producción de hidrocarburos son el recuento de una serie de mediciones ordenadas a lo largo del proceso productivo de un yacimiento y/o pozo. En otras palabras, se define como la tasa de producción de un fluido en particular (petróleo o gas) medida una vez iniciada la explotación, y a su vez, con cada cierto paso en el tiempo (Δt) hasta su culminación. A estas curvas también se les denomina históricos de producción (**figura 2.1**) y reflejan la crónica que el pozo y/o yacimiento ha atravesado, estudiarlas tiene como objetivo maximizar la producción de hidrocarburos evaluando que tan acertadas han sido las decisiones que se han tomado a lo largo de la vida productiva del sistema (Yogendra et al., 2020; Höök, 2009).

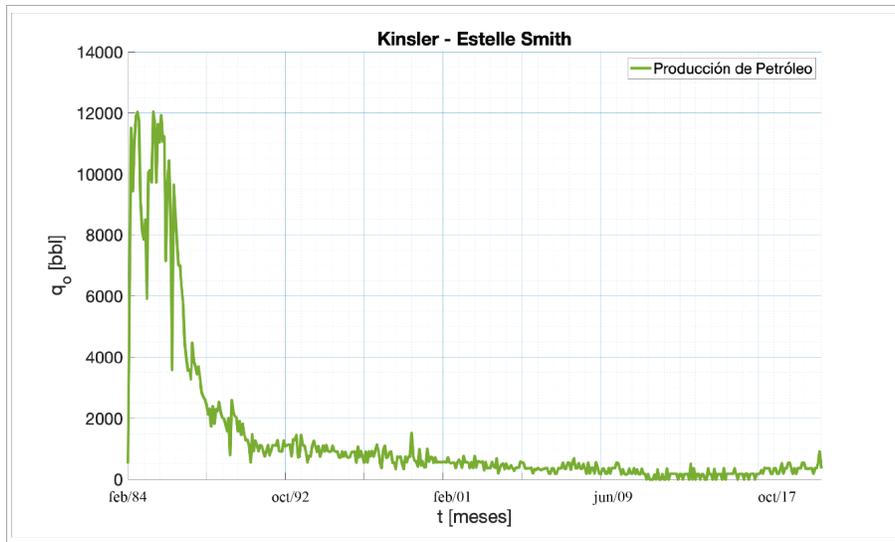


Figura 2.1: Histórico de producción del arrendamiento Estelle Smith perteneciente al yacimiento Kinsler. El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001133991)

Naturalmente, la producción de petróleo tiene una tendencia de decremento debido a las limitantes físicas de los yacimientos y bajo esta premisa se han desarrollado la mayoría de las técnicas empleadas hoy en día. Los primeros en estudiar dicho comportamiento fueron Arnold y Anderson (1908) quienes definieron esta tendencia como *tasa de declinación* (ecuación 2.1 tomada de Poston et al., 2002):

$$D = \frac{\text{Producción}_t - \text{Producción}_{t-1}}{\text{Producción}_{t-1}} \quad (2.1)$$

donde la tasa de declinación (D) es la relación de la producción medida a un tiempo (t) determinado y a un tiempo posterior ($t - 1$). Gráficamente esta tendencia se observa en la **figura 2.2**.

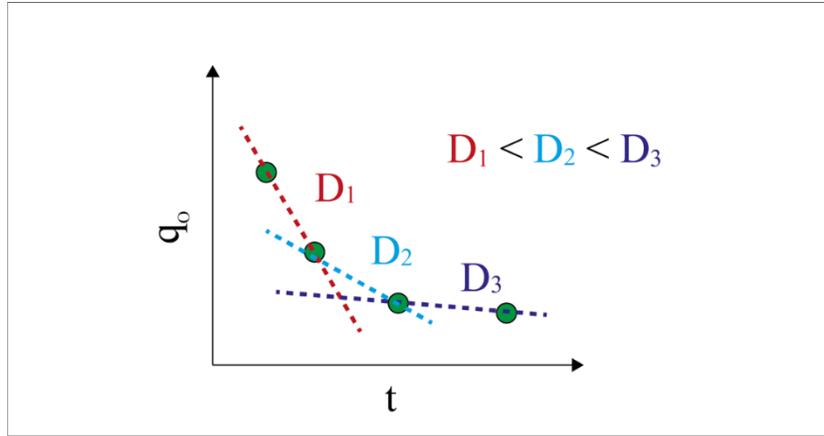


Figura 2.2: Ejemplo gráfico del comportamiento de la tasa de declinación en la producción de hidrocarburos, modificada de Poston y Poe (2002)

A partir de esta premisa, Arps (1945) utilizó las ciencias matemáticas y la física de yacimientos para dar origen a la ecuación (2.2) (Arps, 1945).

$$q(t) = \frac{q_i}{(1 + bD_i t)^{\frac{1}{b}}} \tag{2.2}$$

donde $q(t)$ es la producción de petróleo pronosticada y es función de la producción inicial $q(i)$, la tasa de declinación D_i , b se define como el exponente de curvatura y toma valores entre $[0 - 1]$. Esta ecuación permite crear un conjunto de *curvas de declinación* para extrapolar la tendencia de la producción (**figura 2.3**) (Arps, 1945; Poston et al., 2002).

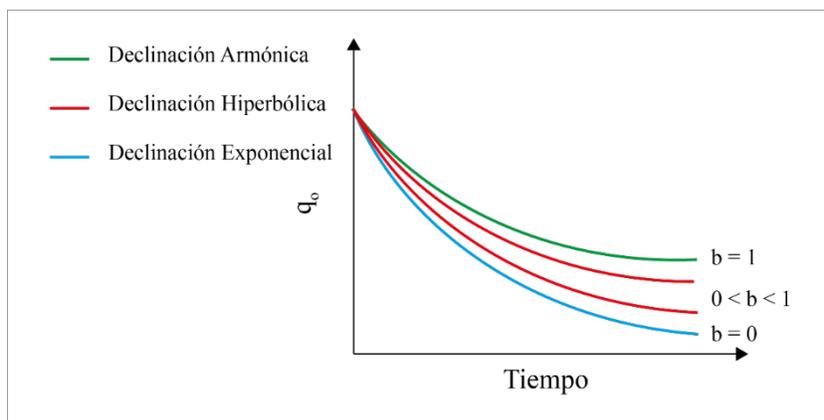


Figura 2.3: Comportamiento de las Curvas de Declinación de Arps. Modificada de Poston y Poe (2002)

El proceso de ajuste de estas curvas se denomina *análisis de curvas de declinación* y se conforma de tres pasos (Arps, 1945; Siavash, 2019):

1. Encontrar el periodo más representativo del histórico de producción.
2. Detectar la tasa inicial o punto de partida para el pronóstico.
3. Seleccionar el tipo de declinación que ajuste de mejor manera a los puntos.

Siendo las principales limitantes (deben suceder estas premisas) de su aplicación las siguientes (Mannon, 1965; Wei et al., 2020):

1. La producción de hidrocarburos siempre se da a una presión de fondo constante.
2. El área de drene, la permeabilidad y el daño permanecen constantes.
3. Los datos de producción están dominados por efectos de frontera, es decir, el transiente de presión ha afectado a todo el yacimiento.

Dadas las limitantes que presentaba el análisis de curvas de declinación de Arps, Fetkovich y colaboradores (1980) proporcionaron un método de análisis en variables adimensionales para solucionar la ecuación de difusión. Dicho método combinado con el análisis de curvas de declinación fue desarrollado con el objetivo de abarcar aquellos datos que no se encontrarán bajo el efecto de frontera, dando como resultado el conjunto denominado *curvas tipo* (**figura 2.4**) (Wei et al., 2020; Fetkovich et al., 1987; Poston et al., 2002).

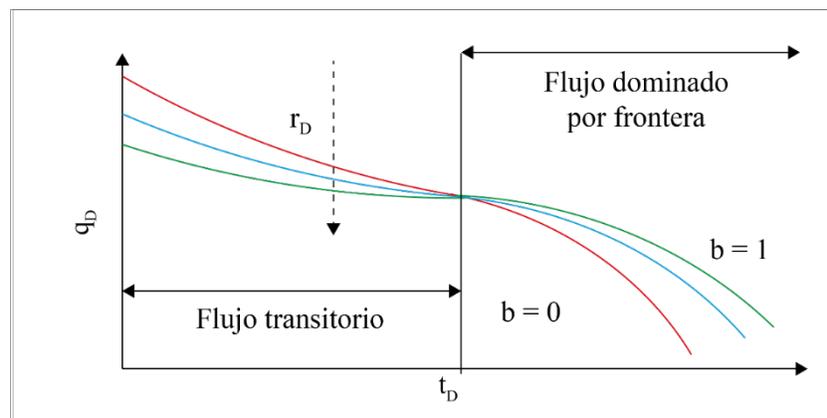


Figura 2.4: Comportamiento gráfico de las curvas tipo de Fetkovich en variables adimensionales y escala cartesiana. Las curvas se dividen en 2 secciones; la primera de ellas cuando el comportamiento no es afectado por la frontera, es decir, estado transitorio. La segunda cuando los datos de flujo son dominados por efecto de frontera. Modificado de Poston y Poe (2002).

El principio del análisis de curvas de declinación y curvas tipo es el mismo, ambas técnicas buscan el modelo matemático de la curva que mejor ajuste a los datos reales de producción y están desarrollados bajo la restricción de que no existirá ningún evento que modifique su comportamiento y por lo tanto, se asume que la tendencia de declinación siempre estará presente y en caso de presentarse un dato fuera del rango se etiqueta como *outlier* y se elimina manualmente (Siavash, 2019; Gupta et al., 2014). Entonces, ¿la anatomía o la estructura de las curvas de producción siempre es la misma? Es aquí donde comienza a cuestionarse la aplicabilidad y precisión de las técnicas tradicionales.

2.2 Anatomía de la Producción

Si bien es cierto que la tendencia natural de la producción de petróleo es la declinación constante en función del tiempo, asumir que este comportamiento se presentará durante toda la vida de un yacimiento y/o pozo es una suposición ideal ya que el sistema puede llegar a sufrir modificaciones que beneficien o no la extracción de hidrocarburos (Yogendra et al., 2020). Dichas modificaciones alterarán su comportamiento y se verán reflejadas en los históricos de producción.

En la **figura 2.1** se mostró una curva de producción de petróleo que no presenta ningún evento o modificación que cambie abruptamente su comportamiento y su tendencia natural es observable a simple vista. Sin embargo, en la industria petrolera siempre se buscan los caminos que permitan mejorar el factor de recuperación de combustibles fósiles (Bashbush, 2020). Tal es el caso del arrendamiento Six M Farms ‘A’ del yacimiento Amazon Ditch East mostrado en la **figura 2.5**.



Figura 2.5: Histórico de producción del arrendamiento Six M Farms 'A' perteneciente al yacimiento Amazon Ditch East. El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas, (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001141042)

El histórico muestra un comportamiento natural a inicios del proceso productivo. Sin embargo, en enero de 1999 ocurre un cambio que se refleja como un periodo en el cual la tasa de producción de petróleo tiene un comportamiento contrario a lo que implicaría su naturaleza, es decir, incrementa (Shashipal et al., 2020). En este caso de estudio se realizaron modificaciones mecánico – operativas al sistema mediante la implementación de sistemas artificiales de producción (SAP) y la perforación de al menos diez pozos productores más.

Es importante mencionar que las modificaciones mecánico – operativas no son el único camino para aumentar la producción. Existen casos más sofisticados en los cuales se suministra energía al yacimiento por medio de un método de recuperación secundaria o se modifican las propiedades del sistema roca – fluidos en un método mejorado (Bashbush, 2020). Un ejemplo claro de esta situación es el arrendamiento Waterflood Unit del yacimiento Zenith Peace Creek mostrado en la **figura 2.6**.

De manera análoga a los casos prácticos anteriores, el comportamiento natural se hace presente a inicios del proceso en el histórico de producción. Sin embargo, gracias al estudio holístico del yacimiento, se llegó a la conclusión de que era candidato para implementar la inyección de agua. Entonces, el proceso de inyección comenzó en febrero de 1983 y no se

vio reflejado sino hasta mayo de 1984 donde se observa un incremento abrupto en la producción.

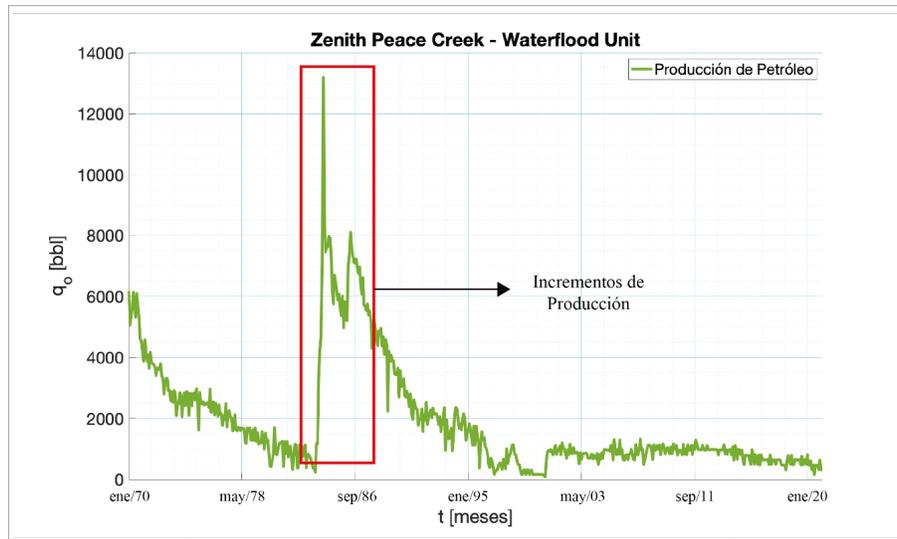


Figura 2.6: Histórico de producción del arrendamiento Waterflood Unit perteneciente al yacimiento Zenith Peace Creek. El gráfico fue construido con la base de datos abierta de Kansas, (https://chasm.kgs.ku.edu/ords/oil.ogl_plot.LeasePlot?f_lc=1001116068)

Estos procesos tienen la intención de incrementar la producción de combustibles fósiles, se debe tener claro no son permanentes; la pérdida de energía por la extracción de fluidos es constante y, por lo tanto, el yacimiento recurre al decremento en algún punto de su vida productiva (Shashipal et al., 2020; Siavash, 2019).

Se mencionó que además de existir procesos que beneficien la producción de hidrocarburos, existen aquellos que la perjudican o inclusive la detengan por completo. Normalmente, estos eventos se presentan debido al reacondicionamiento de pozos productores para la seguridad de las personas encargadas de su operación y en casos más drásticos, por la presencia de un accidente (Sun, 2015). Tal es el caso del yacimiento Claymore ubicado en el Mar del Norte, donde se presentó un accidente en la plataforma Piper Alpha que se refleja como una caída abrupta en la producción de petróleo (**figura 2.7**).

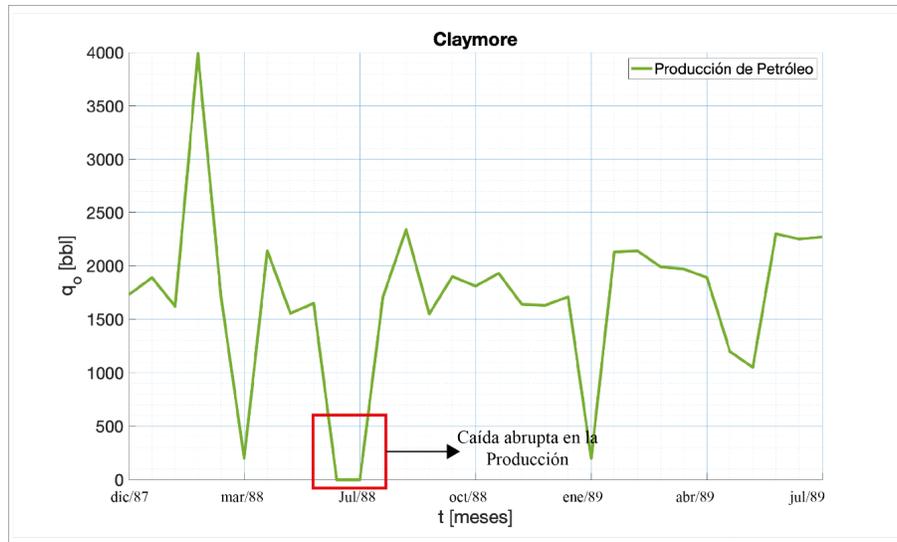


Figura 2.7: Producción del yacimiento Claymore. El accidente de la plataforma Piper Alpha se presenta en julio de 1988, modificado de Höök (2009)

A pesar de que estos eventos muestran una tendencia de decremento en el histórico de producción, la realidad es que el comportamiento del sistema queda muy alejado de su naturaleza (Shashipal et al., 2020; Yogendra et al., 2020). Por lo tanto, el enfoque de las técnicas tradicionales pierde solidez y con el objetivo de mitigar estas deficiencias, investigadores e ingenieros han tratado de cambiar los paradigmas con los cuales se observa la ciencia tradicional, y un campo que ganado un crecimiento exponencial a partir de inicios del siglo XXI es el *análisis de datos a través de series de tiempo* (Al – Abbasi et al., 2013).

2.3 Una nueva filosofía

El crecimiento de la infraestructura computacional combinado con el uso generalizado de las tecnologías de la información y el almacenamiento eficiente de un gran número de datos en función del tiempo da origen a nuevos análisis exploratorios mediante el uso de herramientas y metodologías modernas como el análisis de series de tiempo; definiendo una serie de unidad tiempo como el registro de la evolución de cualquier unidad en el tiempo (Garcia, 2019; Sheremetov et al., 2013). El análisis de series de tiempo es comúnmente asociado al descubrimiento de patrones (tendencia, periodicidad, estacionalidad o ciclos) y predicciones de los valores futuros (Sheremetov; 2013). Sin embargo, antes realizar cualquier predicción es importante estudiar y analizar los datos que se tienen presentes, ya que de lo contrario se podrían generar conclusiones erróneas acerca del sistema (Baker, 2001).

En el caso de los históricos de producción el análisis debe ser muy profundo. Se debe comprender de manera general a la curva y con ello interpretar la dinámica bajo la cual se desarrolla el sistema. Además, la producción de fluidos es función de una gran cantidad de variables y, por lo tanto, la curva puede reflejar muchos cambios que están sujetos a diversas interpretaciones (Siavash, 2019; Shashipal et al., 2020; Baker, 2001). Cada yacimiento es particular tanto en propiedades geológicas como en fluidos almacenados y como consecuencia, cada curva o histórico tiene un comportamiento propio. Entonces, las preguntas inherentes a estas dificultades son: ¿cada yacimiento y/o pozo en estudio requiere de un análisis en particular?, ¿cada uno de ellos requiere de un modelo únicamente aplicable a este? (Bashbush, 2020; Yogendra et al, 2020; Sheremetov, 2013). Sin embargo, a pesar de ser los yacimientos sistemas particulares (en términos de valores en sus propiedades geológicas y de fluidos), estos comparten una gran cantidad de variables y características en común que han permitido encontrar patrones en los históricos de producción (Yogendra et al., 2020; Siavash, 2019; Baker, 2001).

Un patrón es una sucesión de elementos que se construye siguiendo una regla. Esta regla puede ser de repetición o de recurrencia y basado en las similitudes que las curvas pueden mostrar, mediante el uso de técnicas estadísticas y de agrupamiento se han encontrado patrones asociados a cierto comportamiento en particular del sistema (Yogendra et al., 2020; Siavash, 2019; Al – Jasmi et al., 2013; Shashipal et al; 2020). Estos patrones que componen al histórico de producción son 3 y se denominan de la siguiente forma y se muestran en la **figura 2.8** (Siavash, 2019; Shashipal et al., 2020):

1. Periodo inicial o de apertura.
2. Periodo de decremento e inicio del comportamiento natural.
3. Periodo de estabilización total, comportamiento asintótico.

Esta clasificación de patrones encontrados en los históricos de producción se realizó mediante la combinación de la física de yacimientos y el análisis estadístico de una gran cantidad de curvas (Siavash, 2019; Gupta et al., 2014; Shashipal et al., 2020).

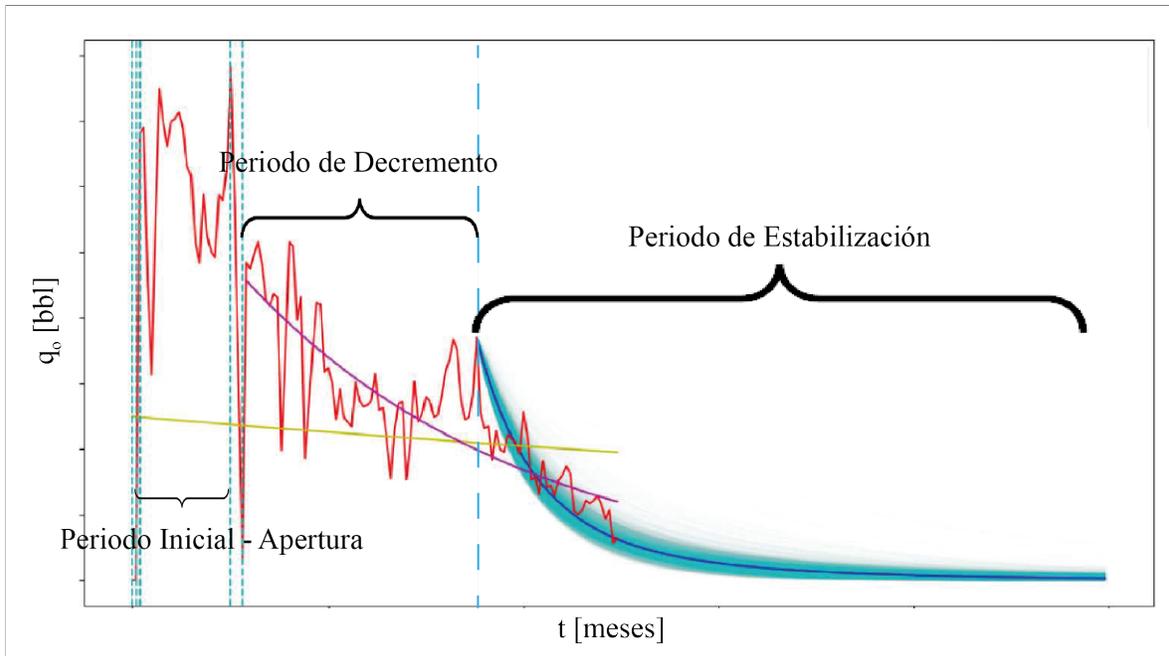


Figura 2.8: Ejemplo de periodos representados en un histórico de producción, modificada de Siavash (2019)

Comenzando con el análisis de los periodos mostrados en la **figura 2.8**, el primero de ellos denominado *periodo de apertura* se encuentra a inicios del proceso producción del yacimiento o pozo en estudio, su duración no es muy amplia debido a que aquí ocurre la irrupción al sistema y la ruptura del equilibrio bajo el cual se encontraba; el yacimiento sufre un choque y tiene una respuesta abrupta liberando una gran cantidad de energía, y dando como respuesta los valores máximos de producción (Shashipal et al., 2020). Es importante destacar que en este periodo se observa un comportamiento aparentemente periódico (Yogendra et al., 2020). Sin embargo, los modelos de simulación basados en situaciones análogas son los más empleados en generar aproximaciones en función de propiedades como la cantidad y configuración de los disparos, el diseño integral del sistema de producción (tubería de perforación, tubería de producción, presión de la cabeza de pozo, etc.), parámetros del yacimiento (presión original, saturación promedio de hidrocarburos cercana a los pozos, etc.), entre otros (Baker, 2001).

Por consiguiente, el segundo periodo denominado *inicio del decremento* implica que, en la producción de hidrocarburos, ha iniciado el comportamiento natural. En este periodo el comportamiento de la curva comienza a estabilizarse debido al agotamiento de algunas de

sus propiedades (presión del yacimiento, saturación de petróleo, etc.) y sin la existencia de algún proceso o evento que modifique las condiciones bajo las cuales se encuentra produciendo el sistema, es imposible que exista algún valor de producción que supere a los presentados en el periodo de respuesta (Gupta et al., 2014; Shashipal., 2020). La duración del periodo de decremento va a depender del plan de explotación desarrollado. Por ejemplo, en caso de un yacimiento de gas este periodo suele ser muy corto debido a que se prioriza la extracción rápida para evitar la canalización del agua. En el caso de yacimientos de petróleo es recomendable medir más la producción, ya que con ello se conserva la energía del yacimiento, se evita la canalización de fluidos no deseados (agua y/o gas) y su vida puede ser prolongada durante un mayor tiempo, mejorando el factor de recuperación (Bashbush, 2020; Lozano, 2017).

Finalmente, se tiene el periodo de estabilización total en donde la producción de hidrocarburos tiene un comportamiento asintótico. Es decir, tiende a tener el valor 0. Sin embargo, jamás llegan a alcanzarlo por simple conveniencia económica. En este periodo las propiedades del sistema se han estabilizado por completo y se dice que responden de manera proporcional a los cambios que siguen presentes (Siavash, 2019; Gupta et al., 2014; Yogendra et al., 2020).

Una vez iniciado el decremento en los históricos de producción, las técnicas tradicionales son las más utilizadas en la industria (Shashipal et al., 2020) y ejemplos de ello se muestran en la **figura 2.8** donde se realizaron dos ajustes; el primero de ellos iniciando el periodo de decremento (color morado) y el segundo se presenta como un área azul sombreada mostrando un conjunto de curvas aplicables una vez iniciada la estabilización.

Otro punto importante por destacar es la detección de los inicios de cada uno de los periodos que normalmente se realizan de manera manual y queda a la interpretación del ingeniero en cargo. Sin embargo, un método más novedoso para la identificación de los cambios de periodos es el cambio de punto estadístico. Este método consiste en realizar la derivada de primer y segundo orden a la serie de tiempo, posteriormente se analizan sus propiedades estadísticas (varianza, media y mediana) y con ello se detecta el punto de inicio para el pronóstico (Siavash, 2019).

Otros métodos utilizados en el estudio de curvas de producción pueden basarse en técnicas agrupamiento como se muestra en la **figura 2.9**.

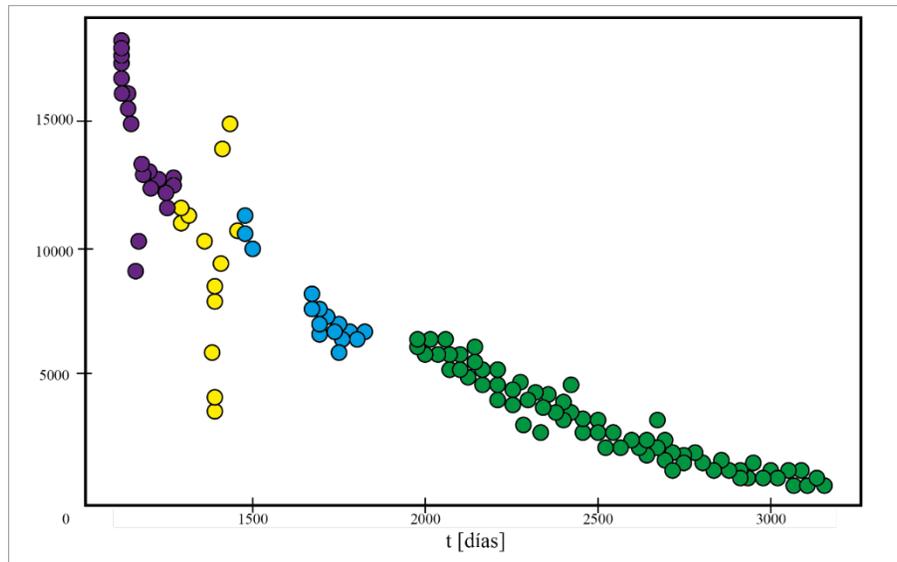


Figura 2.9: Ejemplo de agrupamiento en la producción de hidrocarburos realizada por el algoritmo DBSCAN. Tomada de Shashipal (2020)

En dicha figura se observan la formación de 4 bloques de agrupamiento o clusters, entendiendo por clusters aquellos conjuntos que comparten características en común. Además, se pueden asemejar a los patrones mostrados anteriormente. El primero de ellos (morado) representaría el periodo de apertura; el segundo (azul marino) muestra la presencia de un fenómeno con valores atípicos; el tercero (verde fuerte) representaría el periodo de decremento y finalmente (verde claro) el periodo de estabilización total. Sin embargo, la interpretación de cada uno de los patrones encontrados siempre dependerá del ingeniero y su comprensión acerca de la dinámica del sistema (Shashipal et al., 2020; Siavash, 2019).

Sin duda, encontrar patrones asociados a un comportamiento en particular en los históricos de producción es de gran utilidad para mejorar la comprensión de la dinámica del sistema en un determinado periodo de tiempo. Estos patrones pueden ser útiles para modelar y realizar un pronóstico. Tal es el caso propuesto de Sheremetov y colaboradores (2013) quienes desarrollaron una metodología basado en el análisis de series de tiempo y clasificador gamma para encontrar patrones y utilizarlos como entradas de una red neuronal recurrente (**figura 2.10**) (Sheremetov et al., 2013).

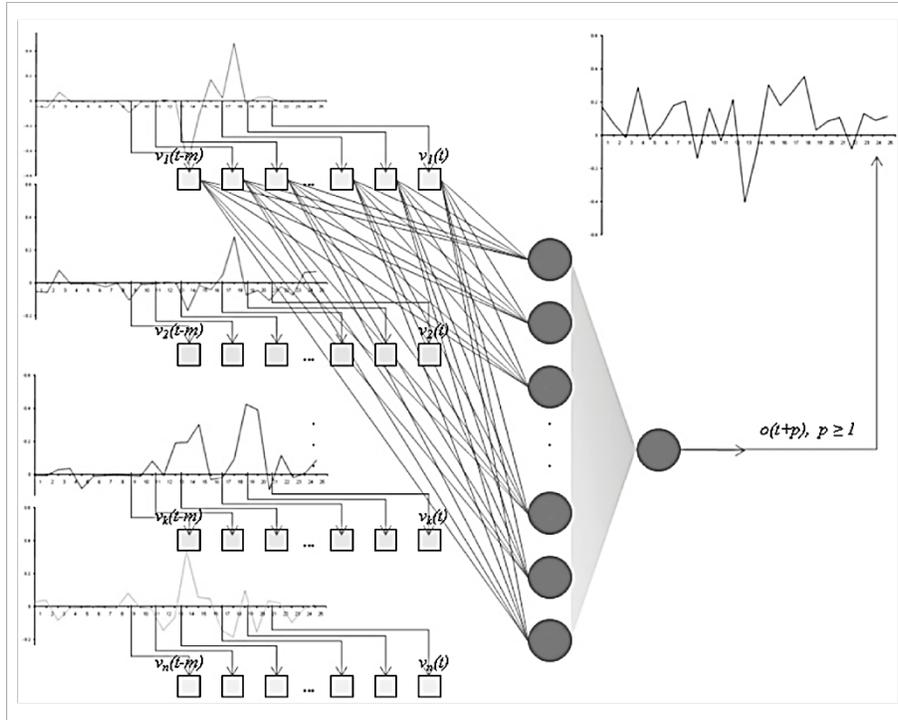


Figura 2.10: Ejemplo del esquema de la topología de la red neuronal recurrente empleada por Sheremetov. Tomada de Sheremetov (2013)

CAPÍTULO III – Análisis de Series de Tiempo

Los seres humanos han realizado grandes esfuerzos para comprender y conceptualizar a la naturaleza con el objetivo de explotar sus recursos o manejar sus comportamientos. Esta tarea ha demostrado ser un gran reto debido a que los sistemas naturales resultan ser altamente complejos, no fácilmente descrito por medio de modelos matemáticos convencionales.

El análisis de datos, que se conceptualiza a través de series temporales registradas con un sensor, parece ser un camino asequible para generar conclusiones significativas sobre estos sistemas. Sin embargo, por un lado, existe el registro de megabytes de un solo parámetro y por otro, hay poca o nula información sobre otros importantes. Entonces, surgen dos preguntas fundamentales: ¿la información disponible describe completamente al sistema?, ¿cómo generar conocimiento a partir de la escasez parcial de parámetros o información importante sobre los fenómenos provenientes de la naturaleza? (García et al., 2013)

3.1 Complejidad

Para resolver el problema de las conceptualizaciones, por ejemplo, un arreglo muy utilizado en las ingenierías (sofisticado y complejo) es el sistema mecánico de masa – resorte (**figura 3.1**). En este sistema las variables analizadas son la posición y la velocidad, que si se registran en una serie de tiempo podría concluirse que si se tira la masa dos unidades hacia abajo (estrictamente sobre su eje vertical) esto provocará una oscilación del doble de lo que lo hace si se tira una unidad, es decir, el sistema responde proporcionalmente a los cambios. A esta proporcionalidad en la respuesta del sistema se le conoce como *linealidad* (Martínez et al., 2017; Laguna et al., 2016; García et al., 2013).

Ahora, ¿qué pasaría si la masa se tira con cierto ángulo?, ¿el sistema sigue teniendo un comportamiento lineal?, la respuesta es no. Por muy pequeños que parezcan estos cambios en las condiciones iniciales, tendrán un efecto significativo en la respuesta del sistema, lo que se llama *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Por lo tanto, el sistema pierde proporcionalidad y su comportamiento es *no lineal* (Martínez et al., 2017; Laguna et al., 2000).

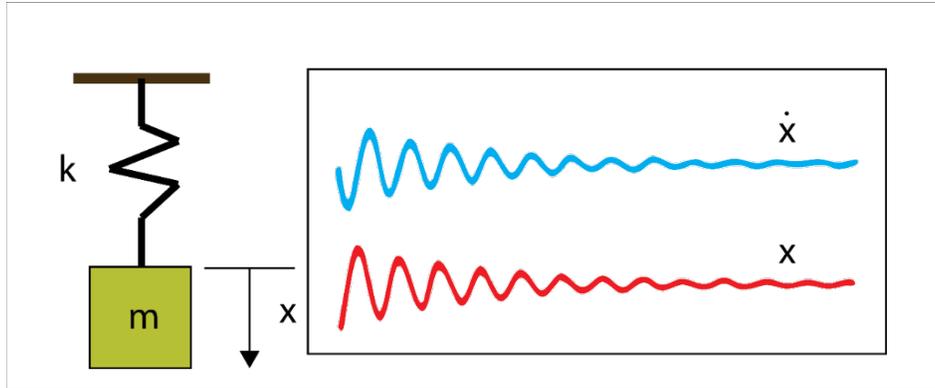


Figura 3.1: Sistema mecánico masa – resorte. Del lado izquierdo se representa a un cuerpo con cierta masa colgando de un resorte que se encuentra fijo por la parte superior. Del lado derecho se tiene las gráficas que registran las variables de interés en series de tiempo, el desplazamiento se representa con x y la velocidad con la que ocurre el cambio de posición es \dot{x} . Modificada de García et al. (2013).

En el sistema mecánico masa – resorte resulta bastante intuitivo identificar las dos variables analizadas, ambas son medibles y describen completamente el estado del sistema. Sin embargo, existen sistemas que involucran tantas variables que resulta imposible identificarlas todas y en algunos casos es imposible medirlas mediante algún sensor (García et al., 2013). Tal es el caso de los yacimientos petroleros, donde el proceso de extracción de fluidos hidrocarburos se encuentra en función de una gran cantidad de variables y no todas se encuentran disponibles o bien definidas. Es aquí donde el ingeniero petrolero afronta grandes desafíos para responder y dar conclusiones precisas sobre dinámicas reconstruidas, ya que los sistemas completamente observables son muy raros (García et al., 2013; Ramírez, 2010; Martínez, 2000).

3.2 Sistemas complejos

Sistema se define como un conjunto de elementos que, ante ciertas condiciones iniciales (causas), operan en conjunto por conseguir un objetivo (respuesta), mientras que el adjetivo *complejo* se otorga a aquellos que posean las siguientes características (Martínez et al., 2017; Serrano et al., 2012)

- La comprensión y análisis de los elementos que componen al sistema es más sencillo en su totalidad.
- Son *multidimensionales*, es decir, no existe causa única para los efectos.

- Carecen de proporcionalidad entre las causas y los efectos (*no linealidad*).
- A partir de un estado de equilibrio aparente que genera el mismo sistema, la más mínima perturbación puede generar consecuencias muy diferentes, es decir, *criticalidad auto – organizada*.
- Existe una relación entre la intensidad y la frecuencia de ocurrencia que se determina por medio de una *ley de escala*.
- Los elementos del sistema pueden actuar distinto de forma conjunta que como lo harían individualmente (se dice que el sistema es más que la suma de sus elementos).

Multidimensionalidad y no linealidad

Cuando se habla de un sistema *multidimensional* se entiende que no existe una única causa que propicie ciertos efectos. Es decir, la respuesta o el resultado no se encuentra en función de una variable sino de varias y los parámetros de los que depende su ocurrencia son numerosos y, además, éstos pueden cambiar en valor bajo leyes distintas. Por lo tanto, se dice que un sistema complejo es un sistema de múltiples grados de libertad (Serrano et al., 2012)

Criticalidad auto – organizada

Bak y colaboradores (1987) introdujeron el concepto de *criticalidad auto – organizada* con el objetivo de explicar el patrón de comportamiento de diversos sistemas o fenómenos existentes en la naturaleza. En esta visión los sistemas complejos evolucionan hacia estados críticos donde pequeñas alteraciones pueden desencadenar una serie de eventos de cualquier tamaño (Jiménez et al., 2008).

Un ejemplo donde se presenta la *criticalidad auto – organizada* es al intentar desplazar una mesa empujándola o arrastrándola sobre el piso (**figura 3.2**). Al comienzo la mesa no se mueve, parece empotrarse al piso por las rugosidades entre el material de la mesa y el piso. Se dice que el sistema se encuentra en un estado de equilibrio aparente que alcanza por sí mismo. Continuando con el empuje y venciendo el “empotramiento” (o fricción) la mesa se moverá repentina y abruptamente y si no dejamos de empujar, el proceso continúa porque la mesa enfrentará otra parte de la superficie y este ciclo tendrá que ser repetido continuamente hasta llevar la mesa al lugar deseado.

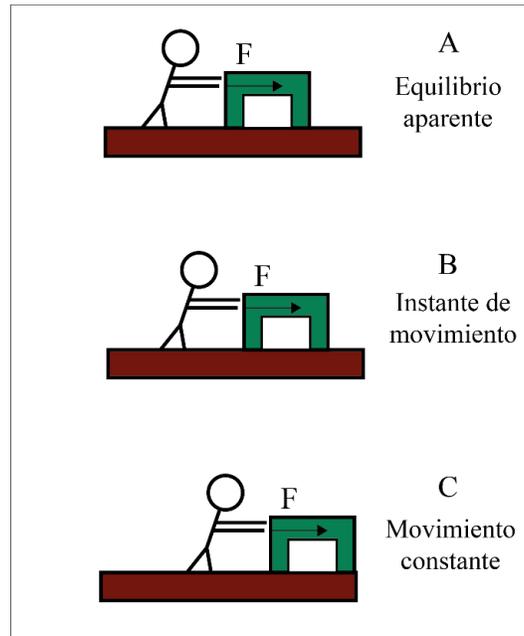


Figura 3.2: Sistema piso – mesa. En el estado A, la mesa se encuentra en un equilibrio aparente y no existe cambio alguno (movimiento) por lo que, el estado del sistema se denomina subcrítico. En B es el instante donde ocurre el primer movimiento, el estado se define como punto crítico de transición de fase. Continuando con el empuje como se muestra en C, el movimiento es constante y el estado del sistema es supercrítico

En el sistema piso – mesa existe un cambio claro entre el equilibrio aparente y el movimiento de la mesa, a este cambio se le denomina *transición de fase* y al punto exacto donde el cambio de fase ocurre se le conoce como *punto crítico de transición de fase*. Cada instante de la evolución de un fenómeno se denomina *estado del sistema* y a todo estado en la fase antes del punto crítico se llama *estado subcrítico*; posterior al punto crítico se le llama *estado supercrítico* (Serrano et al., 2012).

Los sistemas complejos naturalmente tienden a organizarse hacia un estado crítico, obedeciendo una *ley de potencias* y este estado al cual el sistema recurre se le conoce como *atractor* (Serrano et al., 2012; Bak et al., 1998; Martínez et al., 2017).

Entropía

Ludwing Boltzmann introdujo el concepto de *entropía* con el objetivo de comprender hacia cuál lado se inclina más un sistema, es decir, que tan ordenado o desordenado está. Esto se

logró contando el número de configuraciones posibles para cierto estado en particular y planteó la ecuación (3.1) (Fariña et al., 2002):

$$S = K \cdot \log (\omega) \quad (3.1)$$

donde S es la entropía que es función de ω que se define como el número de configuraciones totales para cierto estado del sistema y K es la constante de Boltzmann con un valor de $1.3805 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$. Si el número de configuraciones aumenta también lo hará la entropía. Entonces a mayor grado de entropía, mayor grado será el desorden de un sistema (Fariña et al., 2002).

3.3 Teoría del Caos – Orden y desorden

La ciencia tradicional esta desarrollada considerando que los sistemas evolucionan de manera rígida y ordenada, lo que los hace predecibles y esto, en muchos casos, ha sido exitoso. Sin embargo, los sistemas que se presentan en la naturaleza han demostrado no ser deterministas y presentan caos.

La *teoría del caos* es una rama de las matemáticas propuesta para estudiar los sistemas complejos, aquellos que resultan ser muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales, es decir, pequeños cambios en las causas generarán grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando su predicción a largo plazo (De Régules, 2000; Miramontes, 1996; García et al., 2013)

Accionamiento del caos – ¿Cómo opera el caos?

Un fenómeno caótico se encuentra en todos los fenómenos naturales estudiados por el ser humano y, además, detrás de un desorden aparente, se oculta un orden matemático (De Régules, 2000; Aldana et al., 2011). La disciplina encargada de estudiar al caos y por ende, a dichos fenómenos caóticos se conoce como *teoría de sistemas dinámicos no lineales* y se puede aplicar en una gran cantidad de áreas de la ciencia (matemáticas, biología, ingeniería, etc.) (De Régules, 2000).

Un *sistema dinámico* es aquel para el cual las variables que dominan su comportamiento definen el *estado del sistema* y la receta bajo la cual dichas variables actúan se denomina como *dinámica* (De Régules, 2000; Martínez et al., 2017)

En todos los sistemas dinámicos se puede obtener una secuencia de valores a partir de un punto de partida o valor inicial (x_0) y su comportamiento está determinado por una función (f) de la cual se obtienen los valores subsecuentes $x_1, x_2, x_3 \dots$ etc. Esto se representa matemáticamente con la ecuación (3.2) (Martínez et al., 2017):

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad (3.2)$$

donde $x_i + 1$ es el valor que se obtiene de su antecesor (x_i) aplicándole la función f .

Con esta ecuación se entiende que, si a un valor inicial (condición inicial) se le aplican ciertas operaciones matemáticas se puede obtener el siguiente, creando una serie de datos de manera ordenada ($x_0, x_1, x_2 \dots$) que se denomina *orbita*, donde el subíndice i representa el orden de los valores (King et al., 2014).

Para ejemplificar este proceso se presenta el estudio del crecimiento poblacional de los seres humanos de Verhulst en la ecuación (3.3) (Martínez et al., 2017);

$$x_{i+1} = x_i + ax_i(1 - x_i) \quad (3.3)$$

Ahora, con el objetivo de observar la presencia de caos se realizan 2 iteraciones desde $i = 0$ hasta $i = 50$ con valores de $a = 3$ y $x_0 = 0.2$. Sin embargo, en la segunda iteración se interrumpirá la evolución del sistema en $i = 10$ redondeando a 3 decimales significativos. Los resultados se muestran en la **tabla 3.1** con la diferencia calculada para cada una de las iteraciones.

Tabla 3.1: Comparación de iteraciones de la ecuación de Verhulst, modificada de Martínez et al., (2017)

# Iteración (i)	Observación (x) de iteración # 1	Observación (x) de iteración # 2	Diferencia
0	0.2	0.2	0
1	0.68	0.68	0
2	1.3328	1.3328	0
3	0.00213248	0.00213248	0
4	0.00851628	0.00851628	0
5	0.03384753	0.03384753	0
6	0.13195315	0.13195315	0
7	0.4755777	0.4755777	0
8	1.22378836	1.22378836	0
9	0.40217959	0.40217959	0
10	1.1234731	1.123	0.0004731
11	0.70731699	0.7086130	-0.001296
12	1.32837599	1.3280548	0.00032114
13	0.01975566	0.0210304	-0.0012747
14	0.07785177	0.0827946	-0.0049428
15	0.2932244	0.3106135	-0.0173891
...
47	0.082022655	1.1386275	-0.318401
48	1.26259142	0.6650921	0.59749929
49	0.26795439	1.3333259	-1.0653715
50	0.85641889	0.0000297	0.85638914

Numéricamente es complicado ver la diferencia entre los valores que se obtienen en las dos iteraciones. Entonces, si se observa el comportamiento gráfico de las 2 iteraciones y la diferencia se hace obvio la presencia del caos (**figura 3.3**).

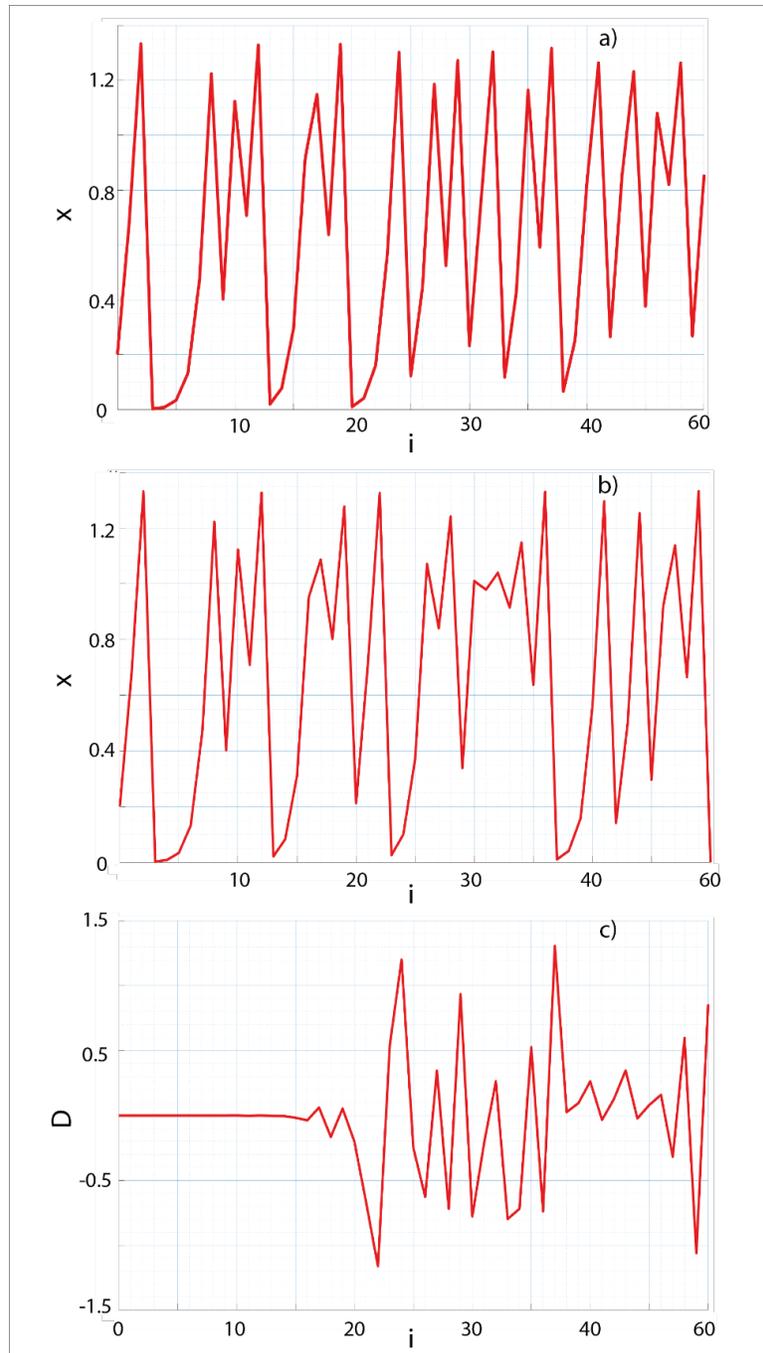


Figura 3.3: Comparativo de iteraciones de la ecuación de Verhulst, en el inciso a) se muestra la órbita del sistema sin interrupciones, b) interrumpiendo el sistema en la décima iteración y c) es el cálculo de la diferencia. Modificada de Martínez et al., (2017)

De manera análoga, Robert May (1932) presentó la ecuación (3.4) que es similar a la desarrollada por Verhulst.

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i) \quad (3.4)$$

La ecuación de May cumple de igual manera con la forma de (31) y en este caso se sustituirá el valor de $x_0 = 0.2$ y a tendrá tres valores diferentes iguales a 2.75, 3.2 y 4. Se obtiene el comportamiento de la **figura 3.4**.

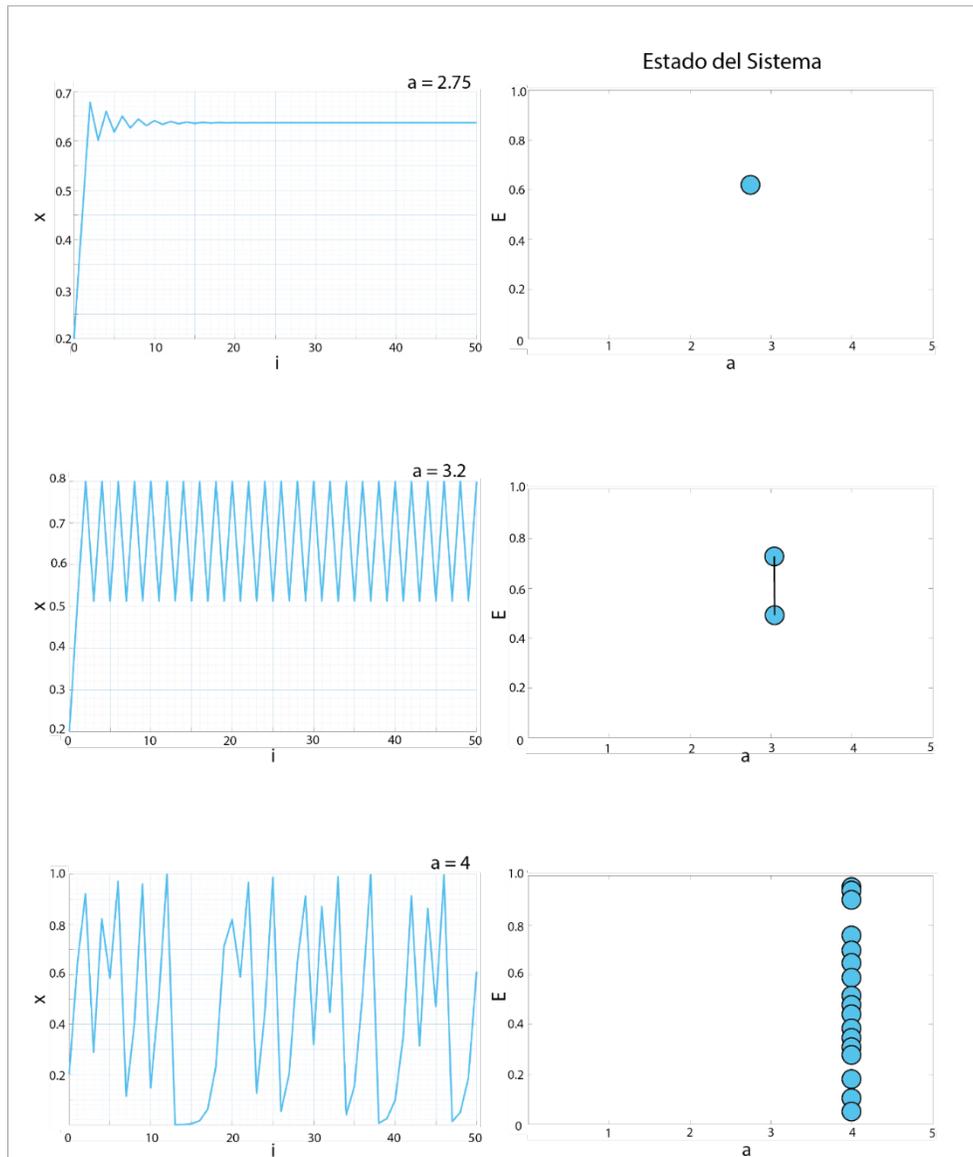


Figura 3.4: Comportamiento de la ecuación de May con un valor de $x_0 = 0.2$ y tres valores diferentes de a (2.75, 3.2 y 4). Al costado izquierdo se presenta la órbita del sistema y al derecho, el estado del sistema. Modificada de Martínez et al., (2017)

En la parte superior se observa que el comportamiento de la órbita sustituyendo los valores de $a = 2.75$ se estabiliza rápidamente hacia el valor de $\frac{7}{11}$. Dicho valor es considerado el estado final del sistema dinámico y se denomina *punto fijo* (p_a).

Por otro lado, en la parte media, es decir, con un valor de $a = 3.2$ el sistema no muestra una dinámica donde se estabilice en un punto fijo. En este caso, oscila entre dos puntos (0.79945549 y 0.51304450), por lo que el atractor es un ciclo.

Finalmente, la evolución del sistema con un valor de $a = 4$ no presenta una estabilización hacia un punto fijo o un ciclo. Por lo tanto, se hace presente el caos.

Evaluar la ecuación de May en diferentes valores de a resulta ser bastante interesante (**figura 3.5**); en el intervalo de $[0 - 1]$ todos los resultados son igual a 0 pues a es un factor común de la ecuación. De $[1 - 3]$ muestra un comportamiento donde la evolución del sistema se estabiliza en un punto fijo; para valores mayores a tres, el sistema comienza a bifurcarse, apareciendo 2 puntos (como en el caso de $a = 3.2$) y si se sigue incrementando el valor de a volverá a bifurcarse en cuatro, ocho... y así sucesivamente. Sin embargo, cuando se llega a un valor de a aproximadamente de 3.5699456 ya no se encuentra ningún ciclo y el estado final se vuelve caótico. Fue Michelle Feigenbaum (1944) quien encontraría este comportamiento y al punto donde el caos inicia se le denominó *punto de Feigenbaum* (Martínez et al., 2017).

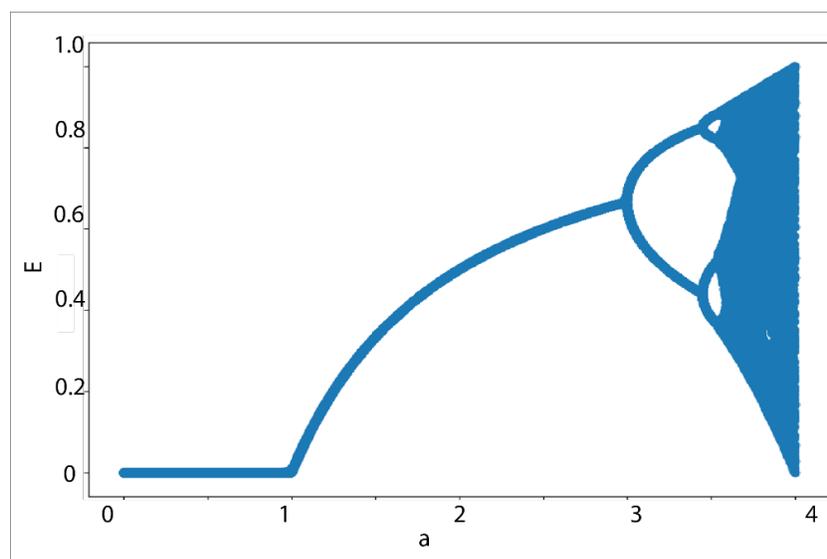


Figura 3.5: Diagrama de Feigenbaum, inspirado en Martínez et al. (2017)

3.4 Mapas de Recurrencia

Los sistemas complejos y la evolución de su dinámica normalmente tienden a *recurrir* a comportamientos o estados que previamente ya habían presentado; este retorno de condiciones puede ser periódico o irregular (Marwan, 2003).

Una de las principales herramientas topológicas de la teoría del caos para estudiar dicha recurrencia en la evolución de los sistemas complejos son los *mapas de recurrencia*, los cuales permitirán analizar la dinámica no lineal de series de tiempo provenientes de observaciones de los sistemas complejos. Además, se podrán detectar patrones ocultos, cambios estructurales en los datos o similitudes en patrones que no son distinguibles en una serie de tiempo a simple vista (Eckmann, 1987).

Un mapa de recurrencia es una representación en dos dimensiones de la trayectoria en el espacio de fase, que se define como la colección de todos estados posible de un sistema dinámico. En el MR los 2 ejes coordenados (abscisas y ordenadas) corresponden a la misma variable, en este caso, la serie de tiempo (Marwan, 2003; García et al., 2013) (**figura 3.6**).

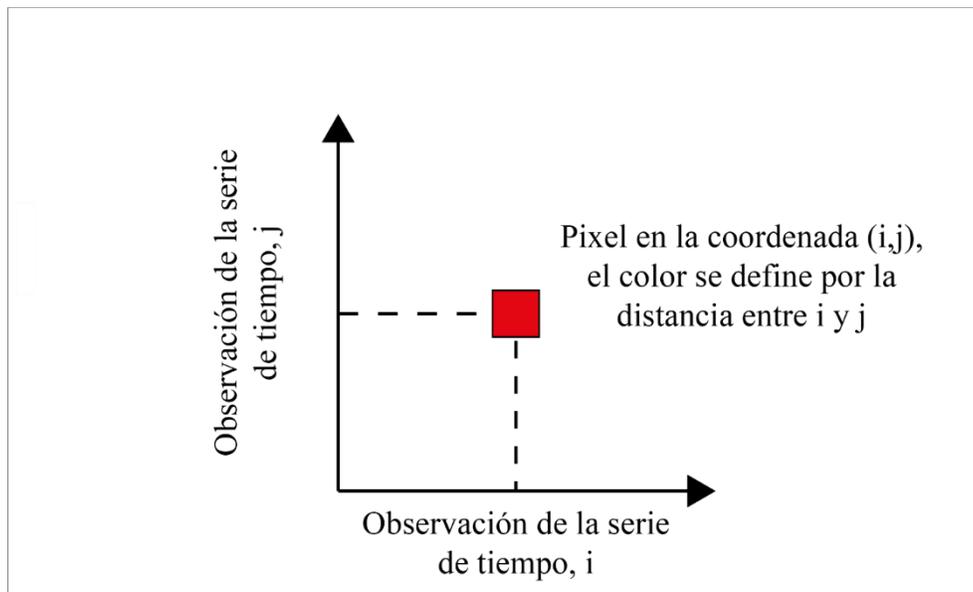


Figura 3.6: Idea de un mapa de recurrencia

Los MR en lugar de formar y trazar una gráfica consideran píxeles dentro del plano cartesiano y cada uno de estos píxeles es coloreado según la distancia entre sus coordenadas (García et al., 2013). En la **figura 3.7** se presenta un ejemplo de MR de una función senoidal.

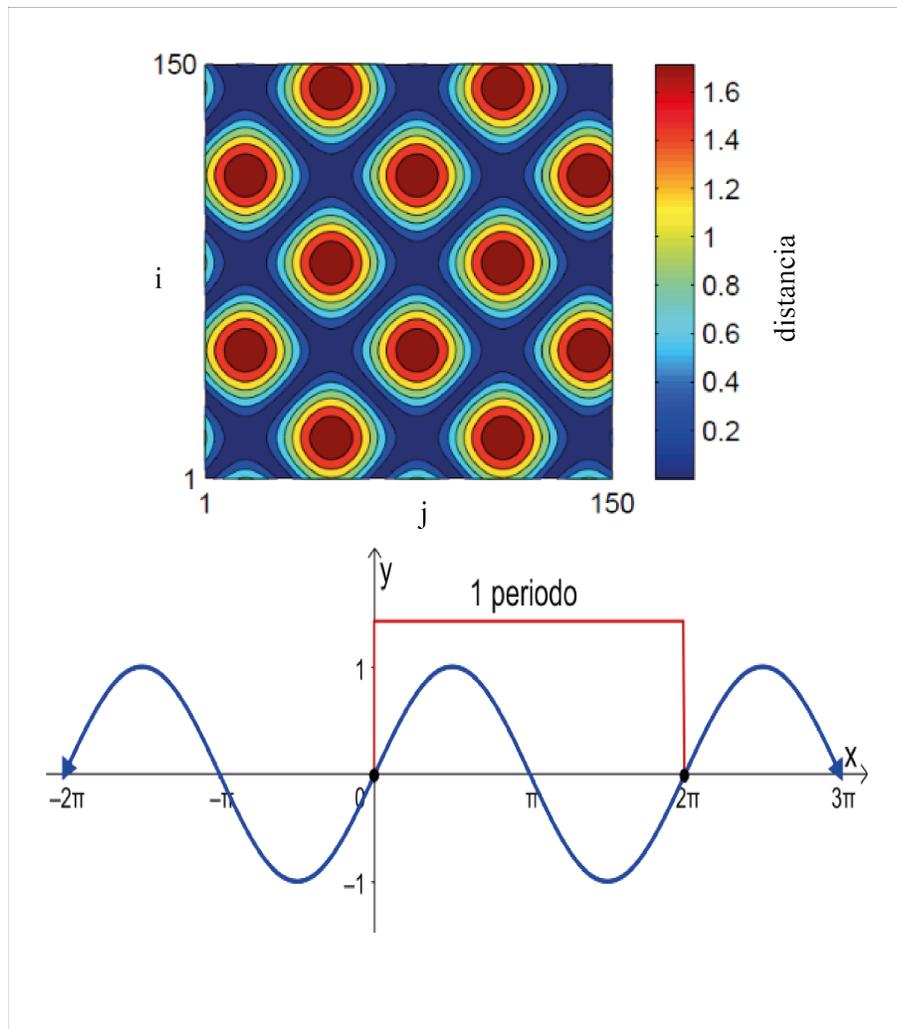


Figura 3.7: Mapa de Recurrencia (parte superior) generado a partir de la función seno (parte inferior), modificada de Bradley et al., (1998)

Este mapa de recurrencia resulta simple de comprender; cada uno de los “bloques” que se muestran en diversos colores representan la mitad del periodo de la señal (García et al., 2013) y la barra representa el código de color de acuerdo con la distancia que presenten los puntos.

3.5 Construcción de Mapas de Recurrencia

Los MR se componen a través de la reconstrucción del espacio de fase, es decir, obteniendo el *espacio embebido o reconstruido* (García et al., 2013). En dicho proceso se conoce al *tiempo de retraso* (τ) y la *dimensión de embebido* (d_E), que son parámetros necesarios para generar el MR (Eckmann, 1987). Se reconstruye la dinámica del sistema

embebido una serie de tiempo de una dimensión (una única variable observada en el tiempo) en un espacio reconstruido de dimensión d_E (García et al., 2013).

Como ejemplo se toma una serie de tiempo de una dimensión como la que se muestra en la **tabla 3.2**.

Tabla 3.2: Serie de tiempo de una dimensión, modificada de Hand et al., (2002)

# Iteración (i)	t	x_i
0	0.000	1.6352
1	0.001	1.6337
2	0.002	1.6322
3	0.003	1.6306
4	0.004	1.6276
5	0.005	1.6260
6	0.006	1.6230
7	0.007	1.6214
8	0.008	1.6214
9	0.009	1.6183
10	0.010	1.6183
11	0.011	1.6168
12	0.012	1.6137
13	0.013	1.6107
14	0.014	1.6076
15	0.15	1.6045

Si el espacio embebido es de dimensión dos ($d_E = 2$) y el tiempo de retraso es de 0.005 segundos ($\tau = 0.005$), la nueva columna con los mismos elementos de la columna x_i pero desplazando el vector de acuerdo con τ , corresponderá a dicho retraso: ahora el primer elemento de la nueva columna o serie de tiempo será el elemento correspondiente a 0.005 segundos (**tabla 3.3**) (Hand et al., 2002).

Tabla 3.3: Serie de tiempo con un espacio embebido igual a dos ($d_E = 2$) y tiempo de retraso de 0.005 segundos ($\tau = 0.005$)

# Iteración (i)	t	x_i	$x_{i+\tau}$
0	0.000	1.6352	1.6260
1	0.001	1.6337	1.6230
2	0.002	1.6322	1.6214
3	0.003	1.6306	1.6214
4	0.004	1.6276	1.6183
5	0.005	1.6260	1.6183
6	0.006	1.6230	1.6168
7	0.007	1.6214	1.6137
8	0.008	1.6214	1.6107
9	0.009	1.6183	1.6076
10	0.010	1.6183	1.6045
11	0.011	1.6168	
12	0.012	1.6137	
13	0.013	1.6107	
14	0.014	1.6076	
15	0.15	1.6045	

Estas dos series de tiempo corresponden a un vector en el espacio embebido; las componentes de este vector representan estados del espacio embebido del que se observó la variable a través de la serie de tiempo. Por ejemplo, la componente del vector en $i = 3$ es (1.6306, 1.6214).

Observar una sola variable (serie de tiempo) es equivalente a ver proyectado el espacio de fase de dimensión (d) en un único eje, y el embeber tiene como objetivo principal “desdoblar” dicha proyección en ejes diferentes a los reales, es decir, d_E . Por lo tanto, la teoría garantiza que si se eligen valores correctos para los parámetros de dimensión de embebido (d_E) y tiempo de retraso (τ), las propiedades de ambos espacios serán equivalentes (Hand et al., 2002).

Con los elementos de la serie original x_i , que corresponderán al primer elemento del vector del espacio embebido; la segunda componente del vector será el elemento $x_{i+\tau}$, que será la serie original desplazada τ intervalos y así sucesivamente hasta tener d_E componentes; esto significa la dimensión del espacio reconstruido. La última componente $d_E - \text{ésima}$ es el elemento $x_{i+(d_E-1)\tau}$ de la serie original desplazada $(d_E - 1)\tau$ intervalos respecto a la original (Hand et al., 2002).

De esta forma se generan los vectores cuyas componentes son $x_i = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau} + \dots x_{i+(d_E-1)\tau})$ y su dimensión es (d_E) , donde el número posible de vectores que se pueden formar es $N - (d_E - 1)\tau$ (Chelidze, 2017).

En el ejemplo mostrado d_E y τ se seleccionaron al azar con objetivos prácticos. Sin embargo, la reconstrucción del espacio de fase requiere que sean seleccionados apropiadamente (Marwan, 2007).

Para obtener el valor correcto de la dimensión de embebido se utiliza el método de *falso vecino más cercano* y para el tiempo de retraso se utiliza el método de *información recíproca o mutua* (Marwan, 2003).

Comenzando con el método de información recíproca, propuesto por Frasier y Swinney (1986), el método de información mutua sirve para obtener el tiempo de retraso (τ) que mide la dependencia de dos variables. Cuando la información es recíproca τ es cero (García et al., 2013). Información mutua o *mutual information* es una medida encontrada en el campo de la teoría de la información. Consideremos S como un sistema de comunicación con un conjunto de posibles mensajes $[s_1, s_2, s_3 \dots s_n]$ asociado a probabilidades, es decir, $[P_s(s_1), P_s(s_2), P_s(s_3) \dots P_s(s_n)]$.

La entropía H de un sistema es la cantidad promedio de información que se obtiene al medir S y se define con (3.5).

$$H(S) = - \sum_i P_s(s_i) \log(P_s(s_i)) \quad (3.5)$$

La información mutua mide la dependencia de $x(t + \tau)$. Sea $[s, q] = [x(t), x(t + \tau)]$ y se considera un sistema emparejado (S, Q) . Entonces, para los mensajes enviados s_i la medición correspondiente se obtiene la ecuación (3.6).

$$\begin{aligned} H(Q|s_i) &= - \sum_j P_{q|s}(q_j|s_i) \log[P_{q|s}(q_j|s_i)] = \dots \\ &\dots = \sum_j \frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)} \log\left(\frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $P_{q|s}(q_j|s_i)$ es la probabilidad de que una medida de q resulte en q_j , sujeta a la condición de que el valor medio de s es s_i . Como siguiente paso, se toma la incertidumbre promedio de $H(Q|s_i)$ sobre s_i :

$$\begin{aligned} H(Q|S) &= \sum_i P_s(s_i) H(Q|s_i) = - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_j) \log\left(\frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)}\right) = \dots \\ &\dots = H(S, Q) - H(S) \end{aligned} \quad (3.7)$$

con:

$$H(S, Q) = - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_j) \log(P_{sq}(s_i, q_j)) \quad (3.8)$$

La reducción de incertidumbre de q por medir s se llama información mutua $I(S, Q)$ que se expresa como:

$$I(Q, S) = H(Q) - H(Q|S) = H(Q) + H(S) - H(S, Q) = I(S, Q) \quad (3.9)$$

La información mutua se entiende como: “dada una medida de s , ¿cuánta información en promedio se puede predecir acerca de q ”. Por otro lado, el método de falso vecino cercano utiliza el valor del tiempo de retraso previamente calculado (τ) para saber el desfase a

emplear en dicha serie. En este método también se considera el tiempo como implícito, es decir, la órbita se dibuja en el espacio de fase siguiendo la secuencia de las observaciones (Marwan, 2003) (**figura 3.8**).

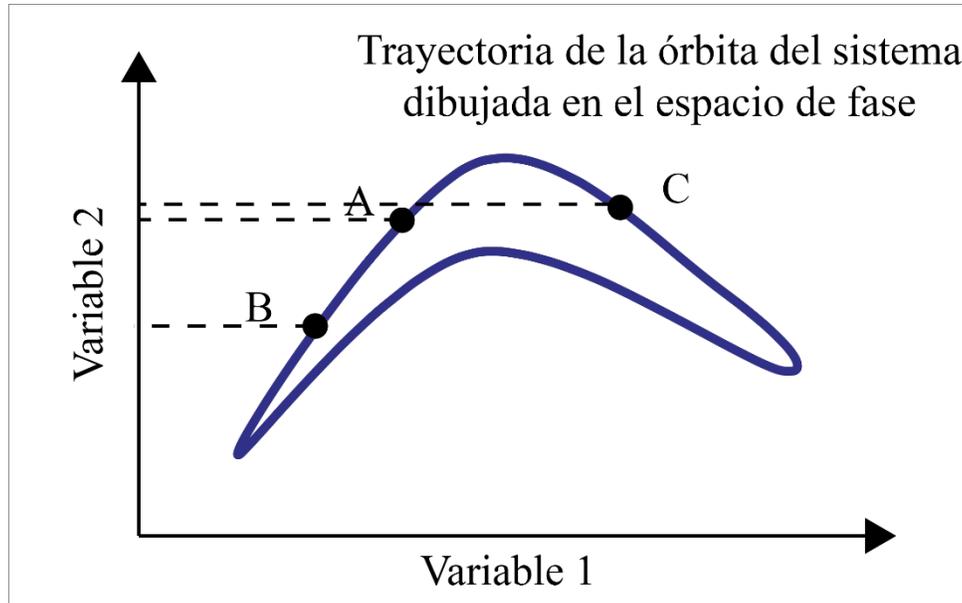


Figura 3.8: Proyección de un espacio en dos dimensiones, modificada de Hand et al., (2002)

Para encontrar d_E mediante el método de falso vecino cercano, se comienza considerando una dimensión de embebido igual a la unidad ($d_E = 1$) y se calcula la distancia entre puntos (cada punto de la serie original). Después se crea un sistema embebido elevando la dimensión a dos ($d_E = 2$) con ayuda del tiempo de retraso (τ). Si la separación entre los puntos cambia abruptamente al pasar de una dimensión uno a la dimensión 2, entonces los puntos se etiquetan como falsos vecinos. De esta manera, se continúa incrementando la dimensión hasta tener un número suficientemente pequeño de falsos vecinos (Hand et al., 2002). Para construir el MR se debe seleccionar una norma (D) con la cual se calculará la distancia entre los puntos x_i y x_j . A la distancia entre estos puntos, se le denota como $D(x_i, x_j)$ y se le asigna un color (García et al., 2013).

Entonces, un mapa de recurrencia es una matriz cuadrada cuyos elementos no son números, sino colores y cada color está determinado por $D(x_i, x_j)$ de orden m que es igual al número de observaciones de la serie de tiempo. Además, esta matriz es simétrica respecto de la diagonal secundaria, dicha diagonal se conoce como *línea de identidad* (Marwan, 2003). A

esta matriz se le denomina *matriz de recurrencia* y se denota como $A(i, j)$ y sus elementos están determinados por $A(i, j) = D(x_i, x_j)$ donde el proceso se hace para cada par de vectores (x_i, x_j) , es decir, $1 \leq i, j \leq N - (d_E - 1)\tau$. De esto deriva que cada píxel sea coloreado en la coordenada (i, j) de acuerdo con el código de color establecido (García et al., 2013).

3.6 Interpretación de Mapas de Recurrencia

El objetivo fundamental de los MR's es visualizar trayectorias de los espacios de fase reconstruidos en sistemas de altas dimensiones (sistemas complejos). Estos mapas guían a diferentes perspectivas respecto a la evolución de las trayectorias en el tiempo debido a que patrones típicos son asociados a comportamientos específicos (Marwan, 2003).

Identificar patrones en las estructuras de los mapas requiere entrenamiento y conviene visualizarlos a dos escalas; la primera de ellas a macro escala (tipología) y la segunda a una micro – escala (textura) por medio de acercamiento en zonas específicas del mapa (Eckmann et al., 1987).

La tipología de los MR's, o caracterización general de patrones típicos, se clasifican en la siguiente lista (García et al., 2013; Marwan, 2007):

- Homogeneidad: característicos de procesos estacionarios en los cuales los tiempos de relajación son cortos comparados con el tiempo que genero el mapa. Las series de tiempo aleatorias generan este tipo de mapas.
- Cíclicos o periódicos: presentan una diagonal orientada y estructura periódica, esto significa líneas diagonales o estructuras repetidas regularmente en todo el mapa. También pueden presentar intervalos irregulares que se conocen como procesos cuasi – periódicos.
- Sistemas cuyos parámetros varían lentamente generan desvanecimientos y, por lo tanto, el proceso es no estacionario.
- Cuando en la dinámica se hace presente un cambio drástico o eventos raros, se generan interrupciones con áreas blancas o bandas y son procesos no estacionarios que presentan estados inusuales o alejados de los estados normales o recurrentes.

Un ejemplo claro de estos casos se muestra en la **figura 3.9**.

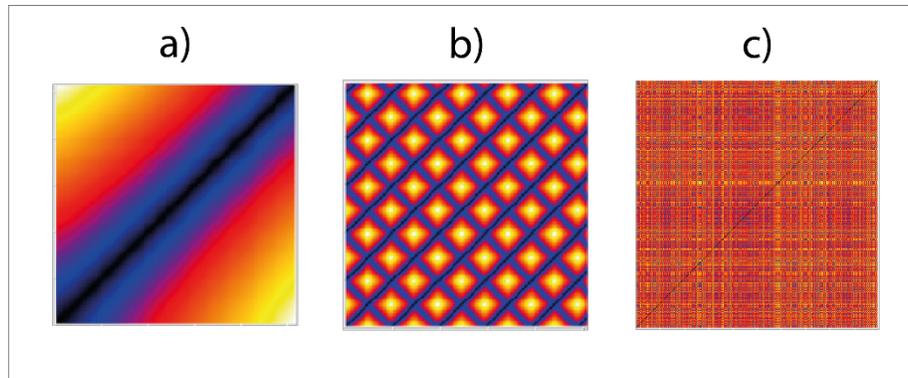


Figura 3.9: Tipología en Mapas de Recurrencia; el primera (a) proviene ecuación de comportamiento matemático lineal; (b) es periódico, corresponde a la señal generada de la función senoidal; finalmente (c) presenta una estructura homogénea y proviene de la señal del ruido blanco. Tomada y modificada de Takakura et al., (2016)

Ahora, una inspección más detallada permitirá revelar estructuras a escalas menores, es decir, la textura del mapa y son consideradas las siguientes (Marwan et al., 2007; García et al., 2013):

- Puntos aislados: si ocurren estados inusuales que persisten en periodos de tiempo cortos, o dadas altas fluctuaciones.
- Líneas paralelas a la diagonal: ocurren si un segmento de la trayectoria en el espacio de fase es paralelo a otro de dicha trayectoria; la longitud de la diagonal es el tiempo en el que ambos segmentos evolucionaron de manera paralela o similar. Si las diagonales son perpendiculares a la diagonal, es un embebido insuficiente.
- Líneas verticales u horizontales: definen a un intervalo de tiempo en el cual un estado no cambia o lo hace muy lentamente. Característico de estados laminares (intermitencia).
- Líneas curvas: representan la relación temporal local entre los correspondientes segmentos de trayectoria que son cercanos. Procesos similares a diferentes escalas con velocidades diferentes, es decir, la dinámica podría estar cambiando.

También es importante mencionar que si se presentan estructuras repetidas puede tratarse de un proceso determinista; pero si, por ejemplo, las líneas diagonales se aparecen en zonas

aisladas, podría ser caótico (Marwan et al., 2007). En la **figura 3.10** se muestran 4 MR's generados a partir de la ecuación de May ($x_{i+1} = ax_i(1 - x_i)$).

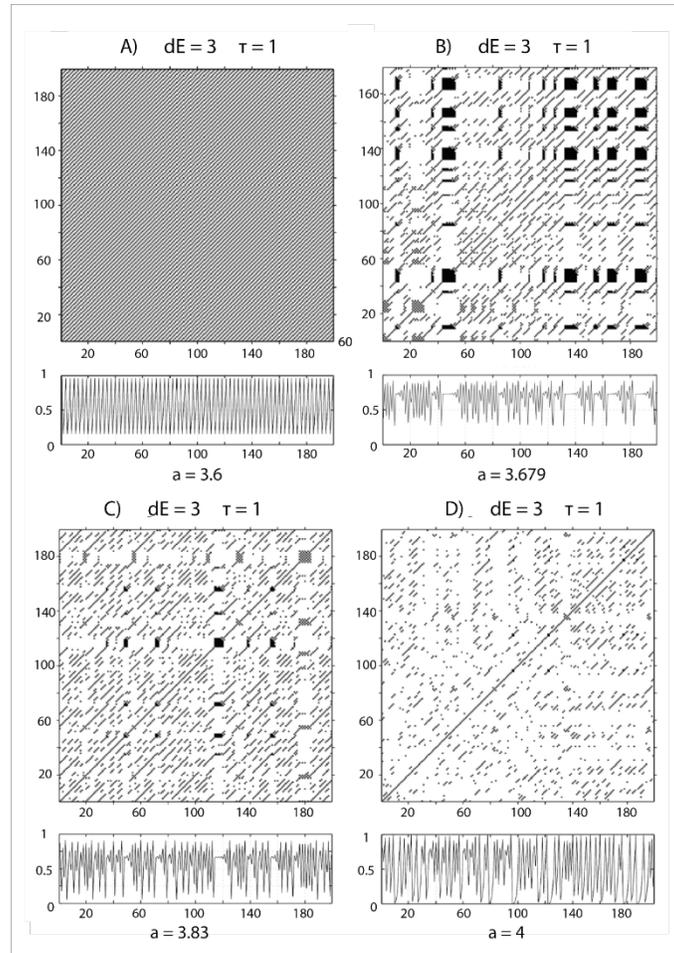


Figura 3.10: Comportamientos distintos en los Mapas de Recurrencia. Tomada y modificada de Marwan et al., (2007)

Estos mapas fueron creados con valores distintos de a más allá del punto de Feigenbaum de tal manera que se tengan 4 dinámicas diferentes. El primero de ellos, es decir, el inciso A) ($a = 3.6$) presenta líneas diagonales con separación periódica entre ellas. Dicho patrón es característico de sistemas deterministas (Marwan et al., 2007). Por otro lado, cuando el sistema se sale del determinismo y su estado evoluciona hacia el caos, se dibujan extensiones verticales y horizontales de amplitudes máximas, tal es el caso de los incisos B) y C). Finalmente, los sistemas que están en estado caótico por completo generan MR homogéneos

con muchas regiones aisladas y líneas diagonales o verticales de longitudes cortas y se representa en el inciso D) (Marwan et al., 2007).

En la **figura 3.11** se muestran otros ejemplos de MRs generados a partir de series de tiempo o señales bien conocidas; desde la función seno hasta el ruido blanco. Además, se acompaña con el espacio de fase de cada sistema.

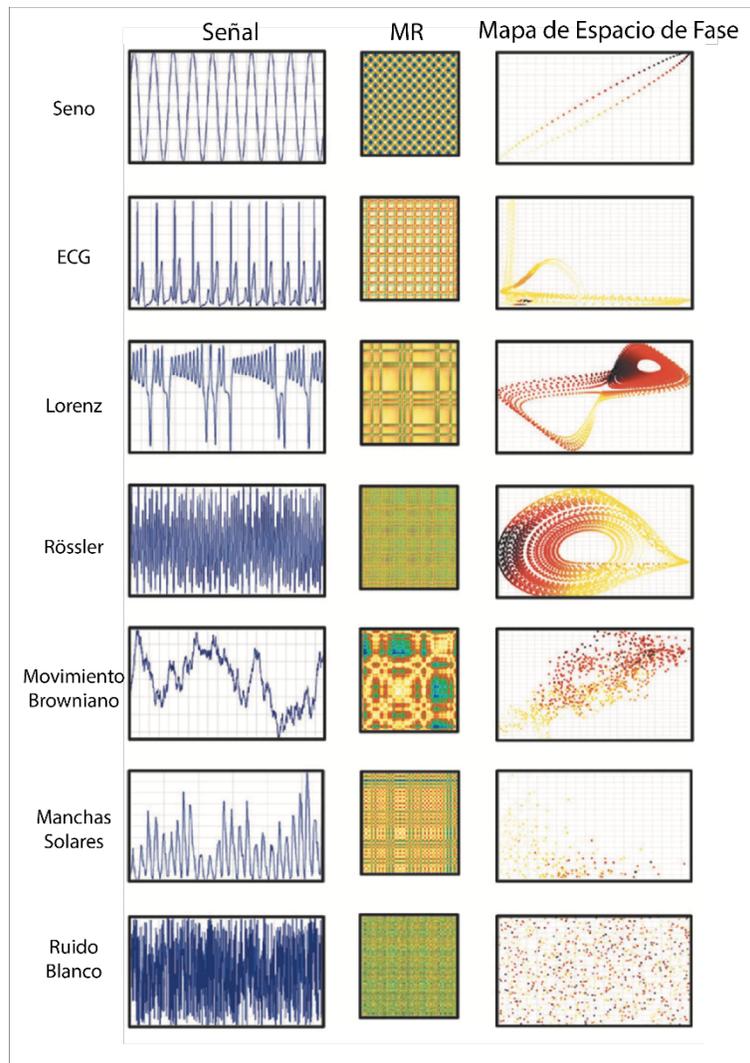


Figura 3.11: Ejemplos de Mapas de Recurrencia a partir de señales conocidas. Tomada de García et al., (2013)

CAPÍTULO IV – Mapas de Recurrencia de Series de Tiempo de Producción de Petróleo

En el 2021 la demanda energética mundial fue de 552 cuatrillones de unidades térmicas británicas (quads) de las que el 32% (177 quads) fueron aportados por petróleo y 23% (127 quads) por gas; en términos generales el 55% de la demanda energética mundial se satisface con la industria petrolera. A este ritmo, para el año 2040 el porcentaje podría llegar al 57%. Estos números demuestran el gran impacto presente y futuro que tiene la industria petrolera en el desarrollo humano (ExxonMobile, 2021).

Conseguir la producción de ciertos fluidos (petróleo o gas) es una actividad que involucra una gran cantidad de variables, relacionadas en formas complejas y con evoluciones distintas, por lo que el estudio de su registro como una serie de tiempo ($q_o = f(t)$), es fundamental para optimizar los procesos y responder, lo más adecuadamente posible, a la demanda social.

4.1 Base de datos

Para lograr el objetivo de esta investigación, mostrar un método alternativo y ventajoso para el estudio de $q_o = f(t)$, se compilaron 22 series de tiempo de producción de petróleo de la base de datos abierta de Kansas (<https://www.kgs.ku.edu/PRS/petroDB.html>) de diferentes arrendamientos (**figura 4.1**). En la **tabla 4.1** se presenta la información referida al nombre del yacimiento, arrendamientos, ubicación y el periodo de producción registrado.

Tabla 4.1: Yacimiento y etiqueta asignada para la base de datos

Nombre del yacimiento	Arrendamiento (Etiqueta asignada)	Latitud	Longitud	Tiempo de Mediciones
				*Primera fecha (inicio del proceso productivo); segunda (reporte final)
Amazon	Six M Farms 'A' (ADE_SMFA)	38.12413	-101.04584	May 91 – Mar 21
Ditch East	Harnett – Hazen (ADE_HH)	38.13147	-101.06307	Jun 93 – Jun 21
	Harnet 'C' (ADE_HC)	38.12784	-101.05622	Feb 92 – Abr 21
	Miller Farms 'C' (ADE_MFC)	38.12602	-101.05167	Nov 91 – Ago 21

Tabla 4.1: Continuación

Nombre del yacimiento	Arrendamiento (Etiqueta asignada)	Latitud	Longitud	Tiempo de Mediciones
				*Primera fecha (inicio del proceso productivo); segunda (reporte final)
Amazon Ditch	Harnett – Gaito (AD_HG)	38.12974	-101.06542	May 01 – Jun 21
Kinsler	Estelle Smith (K_ES)	37.33244	-101.71009	Feb 84 – Feb 21
McClain	Potts (Mc_P)	39.71294	-95.88531	Jun 82 – Jun 95
Norcan	Patton (NE_P)	37.461489	-100.04074	Mar 83 – Sep 96
East	Hall (NE_H)	37.46311	-100.03321	Jun 84 – Abr 21
Zenith Peace Creek	Waterflood Unit (ZPC_WU)	37.97697	-98.50086	Ene 70 – Feb 21
Arroyo	Black Stone ‘D’ (A_BSD)	37.49792	-101.80769	Feb 07 – Jun 21
	Cht Hume Bros (A_CHTHB)	37.48549	-101.79639	Ene 99 – Jun 21
Cahoj	Cahoj Unit (C_CU)	37.48549	-101.15094	Dic 72 – Mar 20
Eulert	Eulert Ranch N – 35 (E_ERN)	39.96683	-98.95496	Jun 08 – Jun 21
Fralick West	Charles Einsel (FW_CHE)	37.67896	-99.50857	Ene 70 – Jun 21
Hagaman North	Eulert Ranch ‘G’ (HN_ERG)	39.07556	-98.98601	Abr 02 – Jun 21
Hall	– Krug ‘A’ (HG_KA)	38.81207	-98.84932	Ene 70 – Jun 21
Gurney	Louie ‘A’ (HG_LA)	38.79568	-98.86786	Feb 76 – Jun 21
Riverford	Close (R_C)	39.16117	-100.92725	Sep 98 – Jun 21
Ruggels	Ruggels ‘A’ (R_RA)	39.17569	-98.97242	Ene 70 – Jun 21
Thirty Six	Wegener (TS_W)	39.85145	-100.05614	Jun 80 – Jul 18
Wide Awake	Federal Land Bank ‘C’ (WA_FLBC)	37.05574	-101.05614	Oct 97 – Jun 21

Cada arrendamiento está representado por su vector de producción de petróleo y, por lo tanto, contiene específicas propiedades geológicas y de fluidos. El delta de tiempo, Δt , de todas las señales es 1 mes.

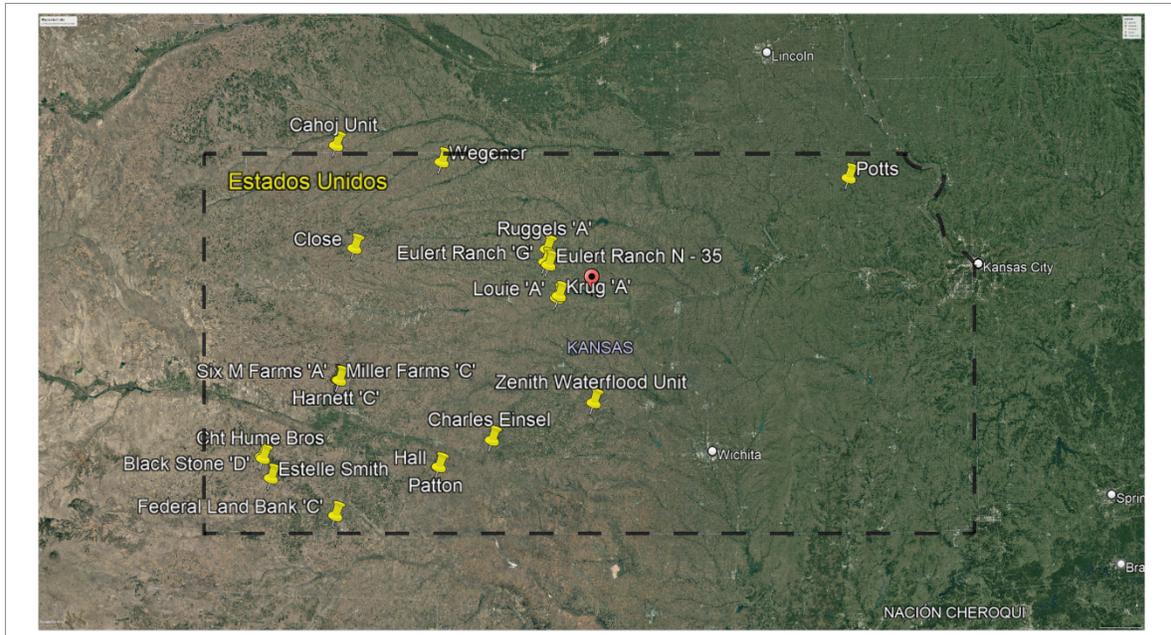


Figura 4.1: Localización de los arrendamientos en el estado de Kansas

4.2 Histogramas y Diagramas de Cajas de la Base de Datos

El *análisis exploratorio de datos (EDA)* se refiere al proceso de realizar investigaciones iniciales sobre los datos para descubrir patrones, detectar anomalías, probar hipótesis y verificar suposiciones con la ayuda de estadísticas resumidas y representaciones gráficas (Jambu, 1991). En este trabajo se aplicaron algunas herramientas básicas para calificar la pertinencia de los datos.

La variable levantada es la producción de petróleo reportada en barriles (~159 litros por contenedor -barril- completado el proceso extracción – separación – almacenaje). La base cuenta con 8,231 instancias medidas, el valor mínimo es 6 barriles hasta un máximo de 15,872 barriles. La distribución del conjunto de datos se muestra en el *histograma* de la **figura 4.2**.

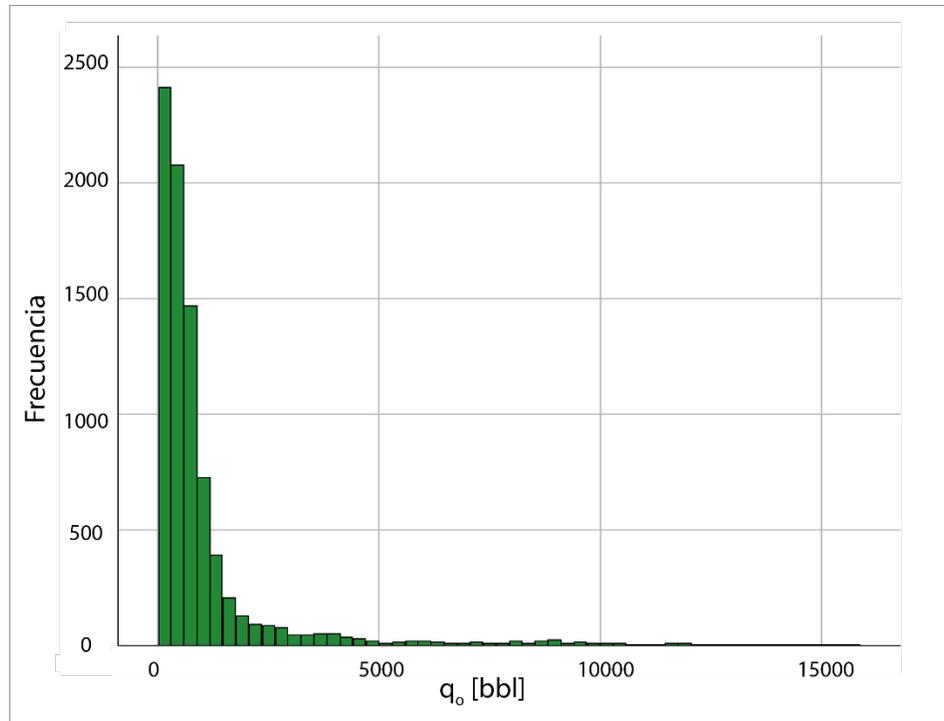
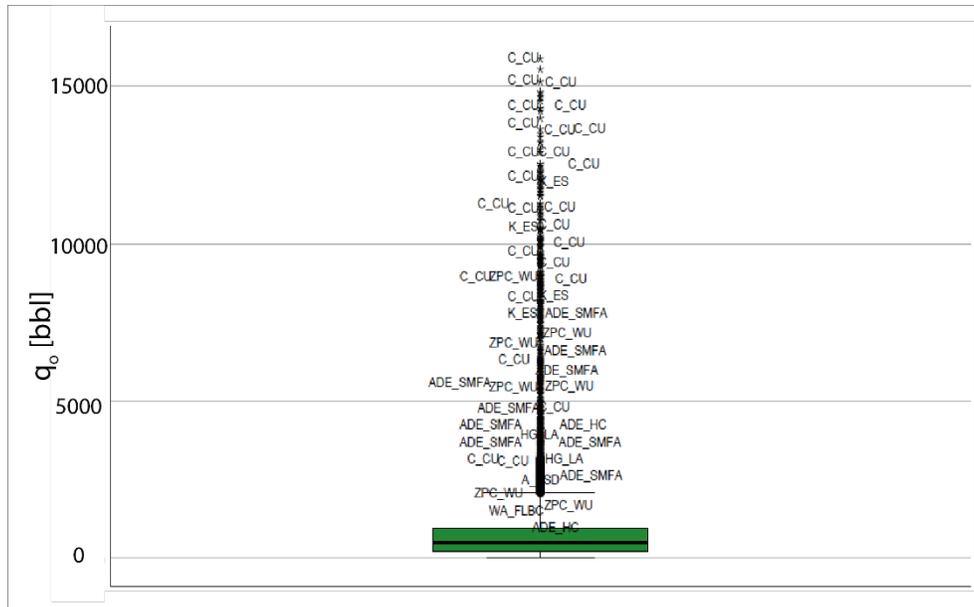


Figura 4.2: Histograma de frecuencias del conjunto total de datos de producción de petróleo

La distribución muestra un fuerte sesgo hacia la derecha indicando que la mayoría de los datos son producciones “bajas” como lo corrobora el *diagrama de cajas* o *box plot* que se muestra en la **figura 4.3**. La concentración de los 4 cuartiles está en la parte baja del gráfico (el 100% de la población) y los *atípicos* son altas producciones. En la figura se han etiquetado por el arrendamiento al cual pertenecen: Cahoj Unit del yacimiento Cahoj (C_CU), Six M Farms ‘A’ perteneciente yacimiento Amazon Ditch East (ADE_SMFA) y Waterflood Unit del yacimiento Zenith Peace Creek (ZPC_WU).



Nota: consultar abreviaturas en la tabla 6.

Figura 4.3: Diagrama de cajas y bigotes de los datos de producción

Para los atípicos se construyeron sus propios histogramas y diagramas de caja (**figura 4.4**) para verificar sus altos valores de producción y la congruencia con la base total.

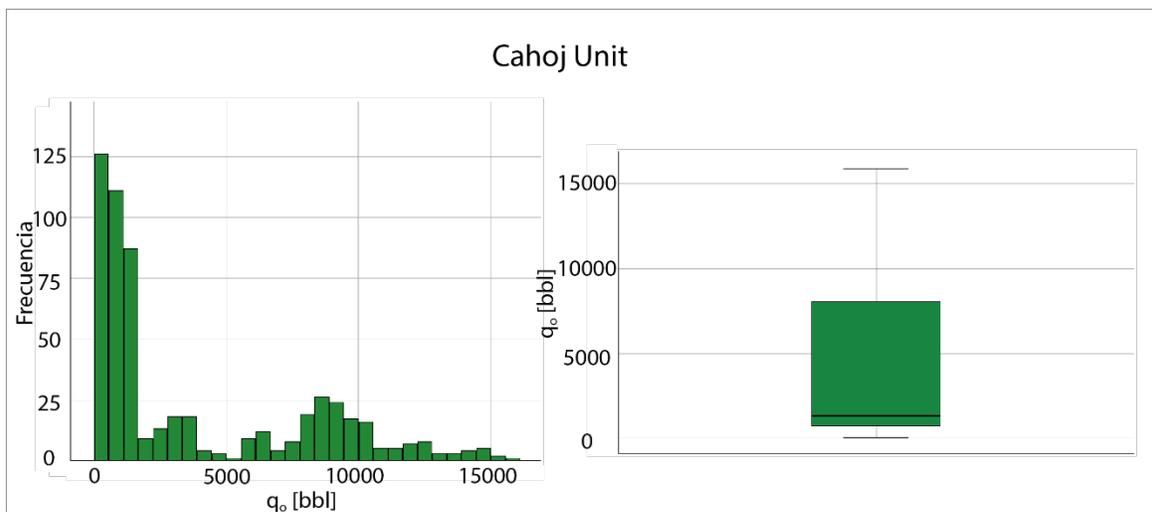


Figura 4.4: Histograma y Diagrama de Cajas para el arrendamiento Cahoj Unit

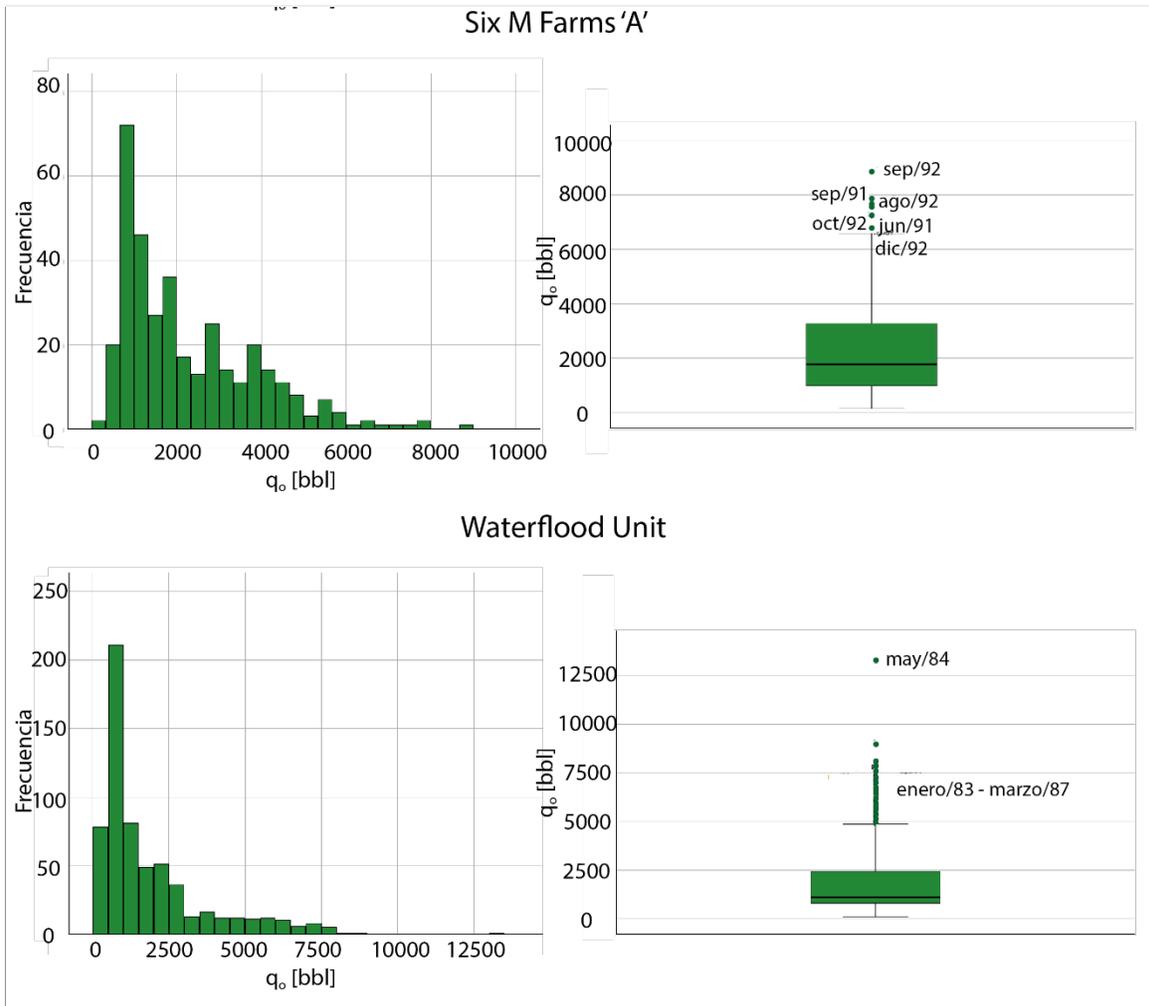


Figura 4.5: Histogramas y Diagrama de Cajas de arrendamientos Six M Farms 'A' y Waterflood Unit

En los arrendamientos Six M Farms 'A' y Waterflood Unit se efectuaron actividades para mejorar sus condiciones de producción y eso los separa fuertemente del grosso de la población. En el caso del arrendamiento Six M Farms 'A' se implementaron ciertas medidas que terminan en la perforación de por lo menos 10 pozos productores adicionales que comenzaron a producir en septiembre de 1999. En Waterflood Unit, arrendamiento que se encuentra bajo el método de inyección de agua, se optimizaron las actividades de barrido, reflejándose como un incremento en la extracción (Sun, 2015; Bashbush, 2020). Entonces, para Six M Farms 'A' estos máximos se deben a la etapa "natural" de máxima producción (inicio de la serie) y para Waterflood Unit (presentes de 1984 a 1987) se deben a modificaciones *ad-hoc* del sistema.

Identificar y dar explicación a valores extremos es crucial en el modelado de series de tiempo, ya que en algunos casos se considera dar un tratamiento o remover estas instancias para mejorar los análisis y pronósticos (Brockwell et al., 2016). En estos casos se categorizan como susceptibles de ser analizados en la base de datos original.

4.3 MRs de Producción de Petróleo

Como ejemplo de construcción de un MR de una serie de producción se usa el arrendamiento Close perteneciente al yacimiento Riverford (273 componentes). El procedimiento fue:

1. Se calculó el tiempo de retraso y la dimensión de embebido. En el caso del arrendamiento Close son $d_E = 10$ y $\tau = 1$.
2. Se generaron los vectores de embebido. Close contará con 10 componentes que se formarán desplazando la serie 1 observación (tiempo de retraso). En la **tabla 4.2** se ejemplifica la construcción de dichos vectores donde la producción es reportada por fecha (mes con mes) se transformó en un valor numérico ordinario, es decir, el mes de inicio de la producción se le denominó 0, al consecuente 1 y así sucesivamente.
3. Por ejemplo, el cuarto vector ($i = 4$) que se denota como x_4 tendría los siguientes componentes en su forma explícita $x_4 = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, x_{i+3\tau} \dots x_{i+(d_E-1)\tau}) \rightarrow (x_4, x_5, x_6, x_7 \dots x_{13})$ de la serie original que son: $x_4 = (658, 663, 1657, 1501, 1328, 1317, 993, 1152, 825, 991)$.
4. El total de vectores que se construyen en el espacio de embebido de esta serie está determinado por $N(d_E - 1)\tau = 274(10 - 1)1 = 2466$ vectores del espacio embebido.

# de componentes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# de orbitas	Tiempo										
1	0	983	981	660	658	663	1657	1501	1328	1317	993
2	1	981	660	658	663	1657	1501	1328	1317	993	1152
3	2	660	658	663	1657	1501	1328	1317	993	1152	825
4	3	658	663	1657	1501	1328	1317	993	1152	825	991
5	4	663	1657	1501	1328	1317	993	1152	825	991	830
6	5	1657	1501	1328	1317	993	1152	825	991	830	...
7	6	1501	1328	1317	993	1152	825	991	830	...	161
8	7	1328	1317	993	1152	825	991	830	...	161	
9	8	1317	993	1152	825	991	830	...	161		
10	9	993	1152	825	991	830	...	161			
11	10	1152	825	991	830	...	161				
12	11	825	991	830	...	161					
13	12	991	830	...	161						
14	13	830	...	161							
...	161								
274	274	161									

Figura 4.6: Ejemplo de la construcción de vectores de embebido en una serie de tiempo de producción de petróleo

- Se calculó la distancia entre los vectores del espacio de embebido. Por ejemplo, entre x_3 y x_4 se calcula la distancia para cada componente (mismo subíndice) del vector, es decir, primera componente sería $|660 - 658| = 2$. Se realiza este proceso para cada par de componentes que se tenga, por lo tanto, en el caso de los vectores 3° y 4° se tiene el siguiente conjunto de distancias: 2, 5, 994, 156, 173, 11, 324, 159, 327, 166. Donde la distancia máxima se presenta en la 3° componente del vector, el proceso matemático se realiza de la siguiente manera:

$$D(x_i, x_j) = \max_{1 \leq k \leq d_E} |x_{i(k-1)\tau} - x_{j(k-1)\tau}|$$

$$\rightarrow D(3,4) = \max_{1 \leq k \leq d_E} |x_{3(k-1)1} - x_{4(k-1)1}| = |x_{3(3-1)1} - x_{4(3-1)1}| = \dots$$

$$= |x_5 - x_6| = |663 - 1657| = 994 [bbl]$$

Este se repite para cada vector (x_i, x_j) generado del espacio embebido, es decir, desde i y j valen 1 hasta que valen 2466 y finalmente, se le asigna un color a cada valor de $D(x_i, x_j)$ que representa un elemento del MR (**figura 4.5**), donde la barra del costado derecho indica el código de distanciamiento por color asignado.

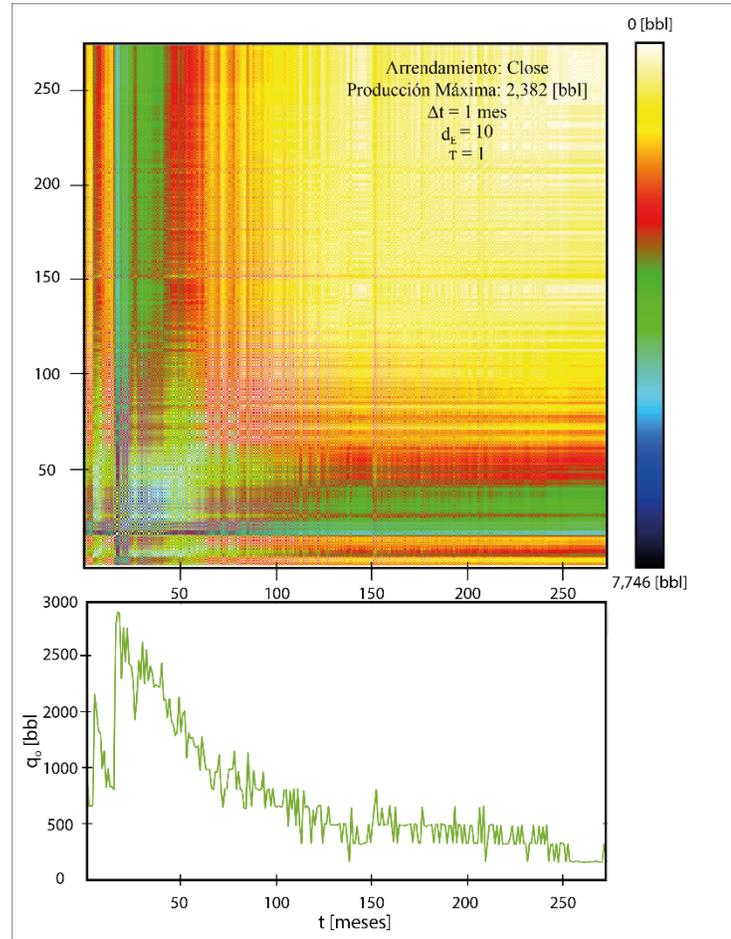


Figura 4.7: Mapa de Recurrencia del arrendamiento Close. En la parte superior se encuentra el Mapa de Recurrencia generado con la serie de tiempo (parte inferior), del lado derecho del MR se encuentra la barra del código de color-distancia

Para reconocer las diferencias en los MRs de producción es preciso compararlos o analizarlos desde la macro – escala (tipología) y la micro – escala o microestructura (textura).

4.4 Análisis de Tipología (macro – escala)

Desde el punto de vista más general, es decir, tipología o macro – escala, los MRs muestran estructuras excepcionalmente comparables, lo que lleva a construir la **Hipótesis 1**

– la evolución de todos los sistemas, a nivel de macro – escala, es similar-. En las **figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11** se presentan todos los MRs generados con las señales compiladas.

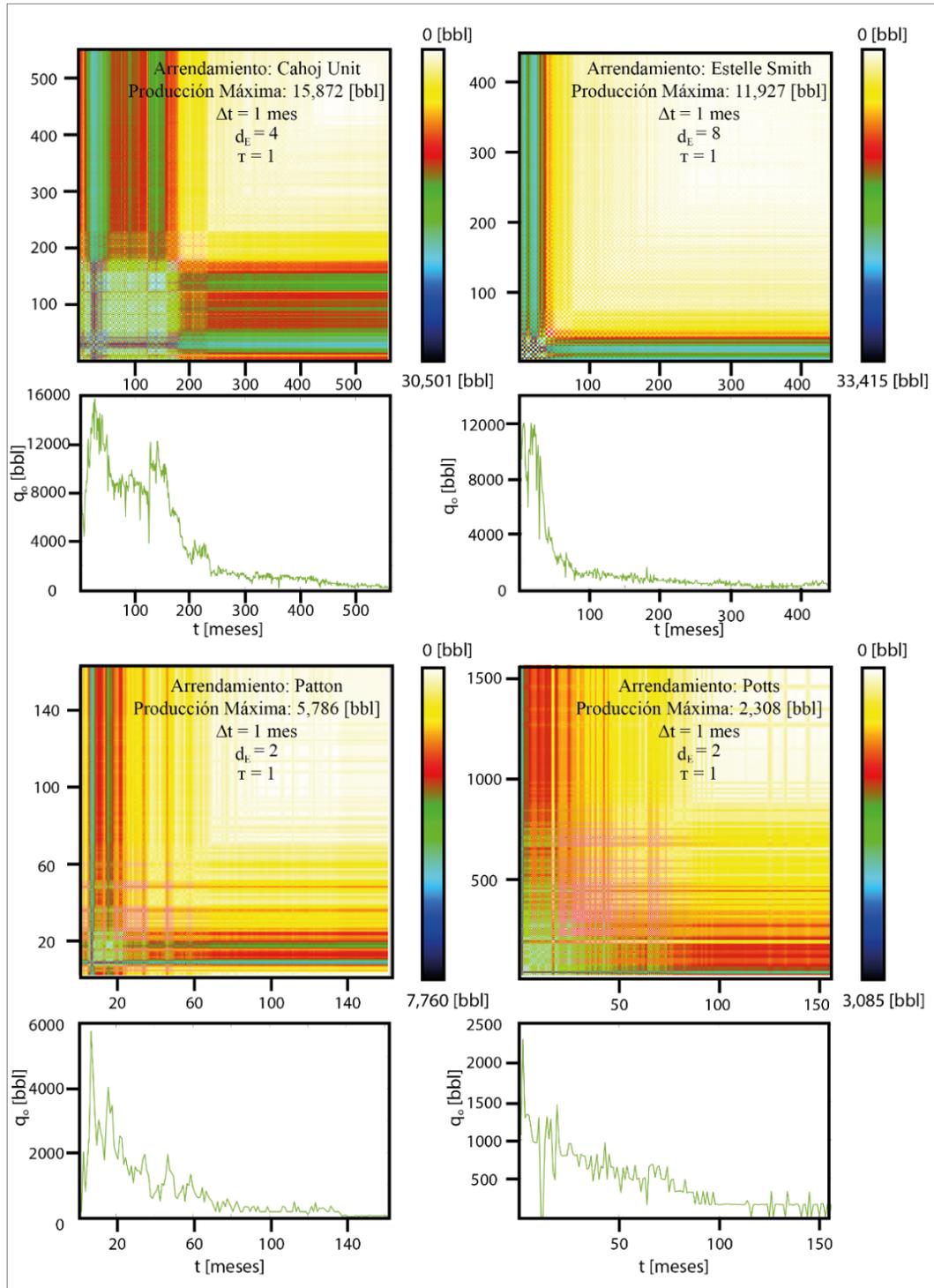


Figura 4.8: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Cahoj Unit, Estelle Smith, Patton y Potts

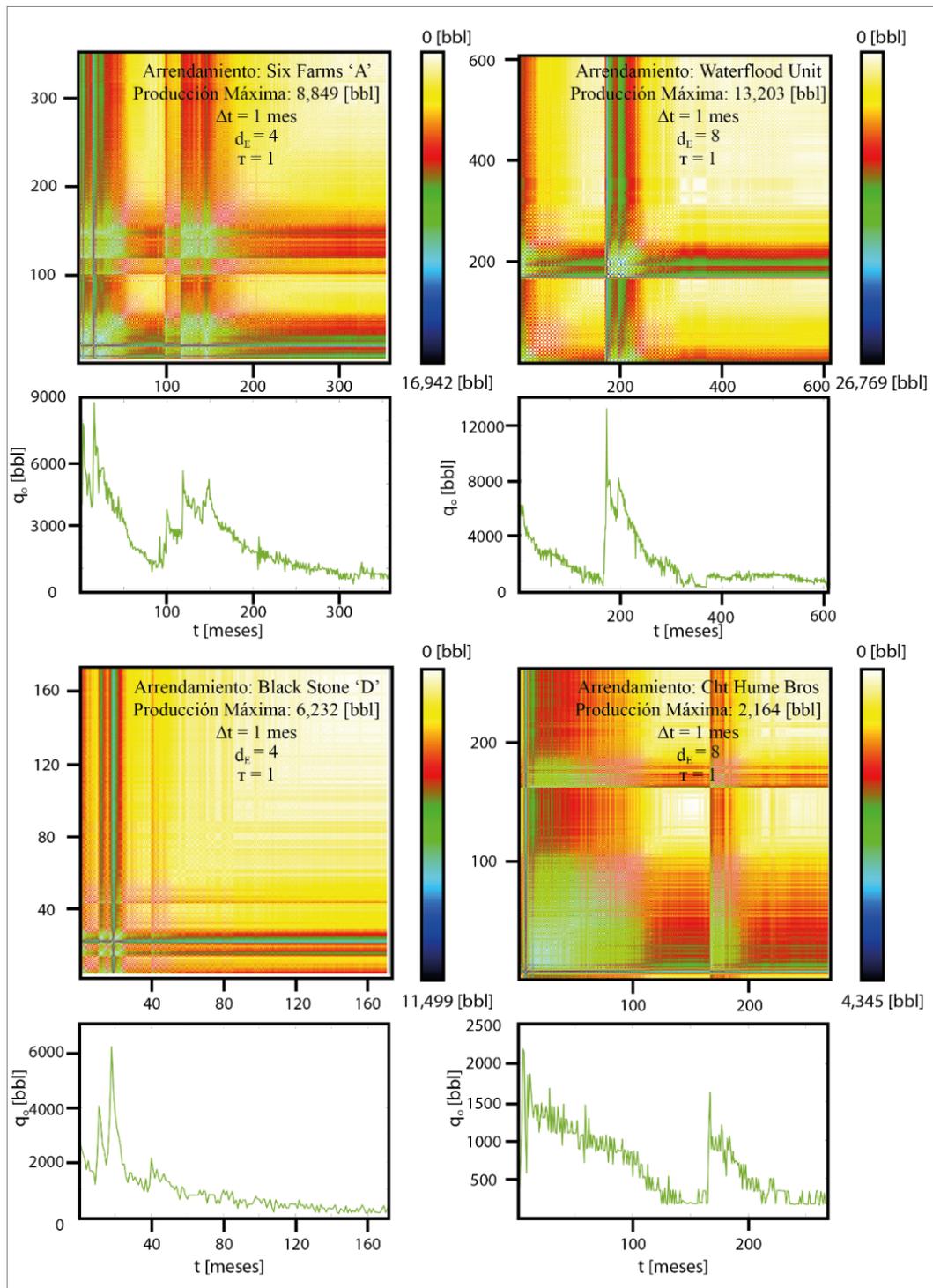


Figura 4.9: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms 'A', Waterflood Unit, Black Stone 'D' y Cht Hume Bros

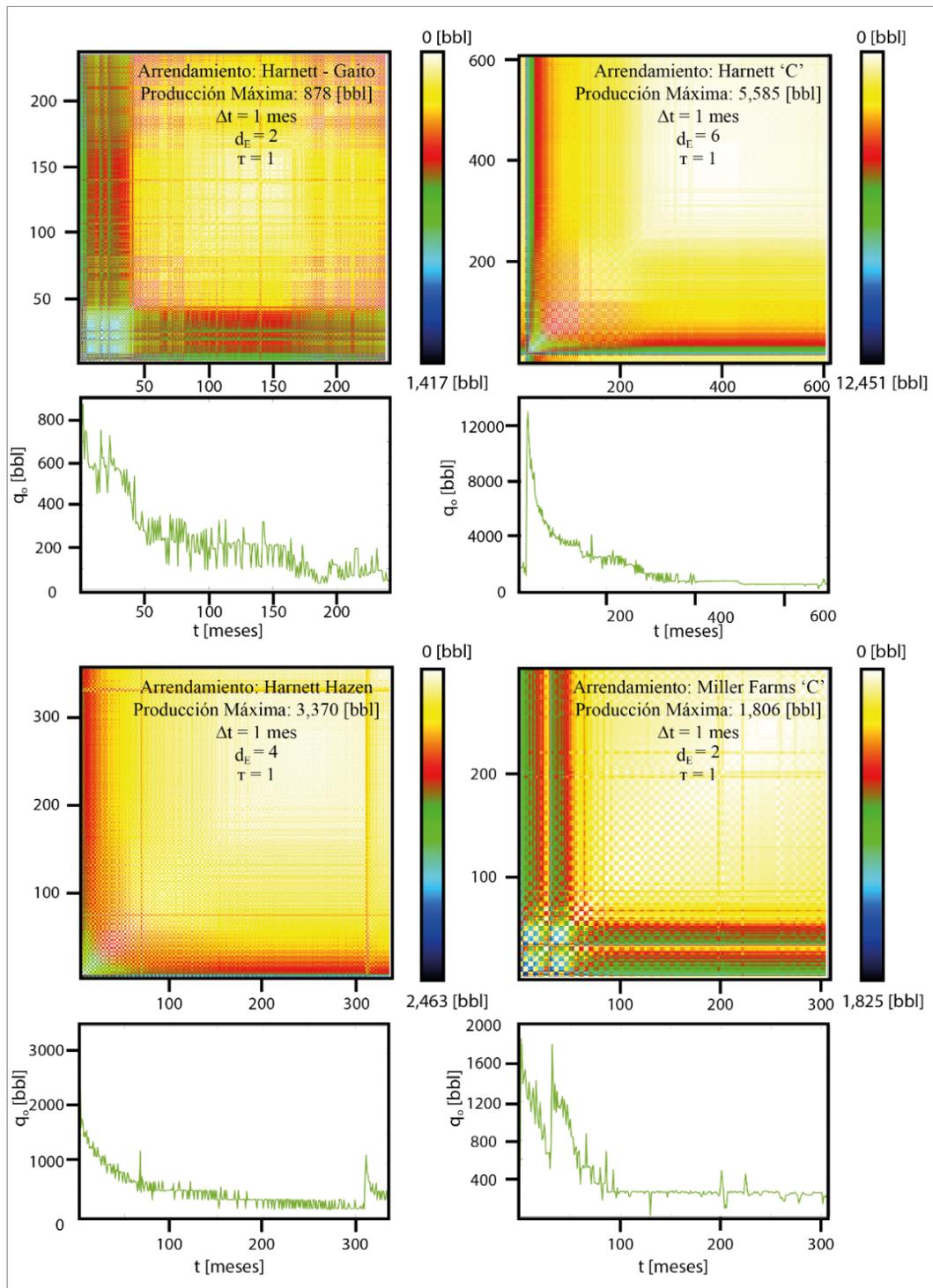


Figura 4.10: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett – Gaito, Harnett ‘C’, Harnett Hazen y Miller Farms ‘C’

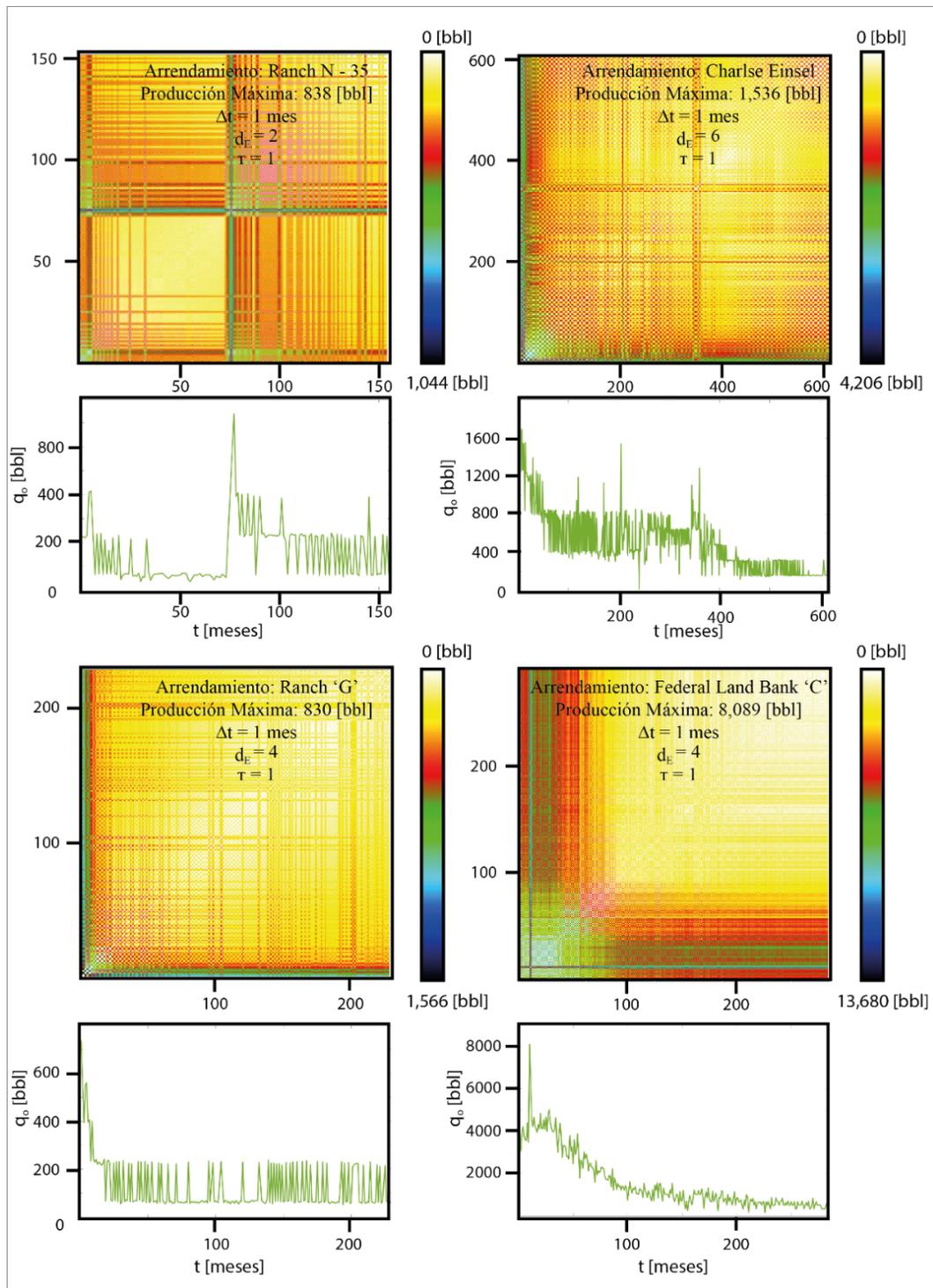


Figura 4.11: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Ranch N–35, Charles Einsel, Ranc ‘G’ y Federal Land Bank ‘C’

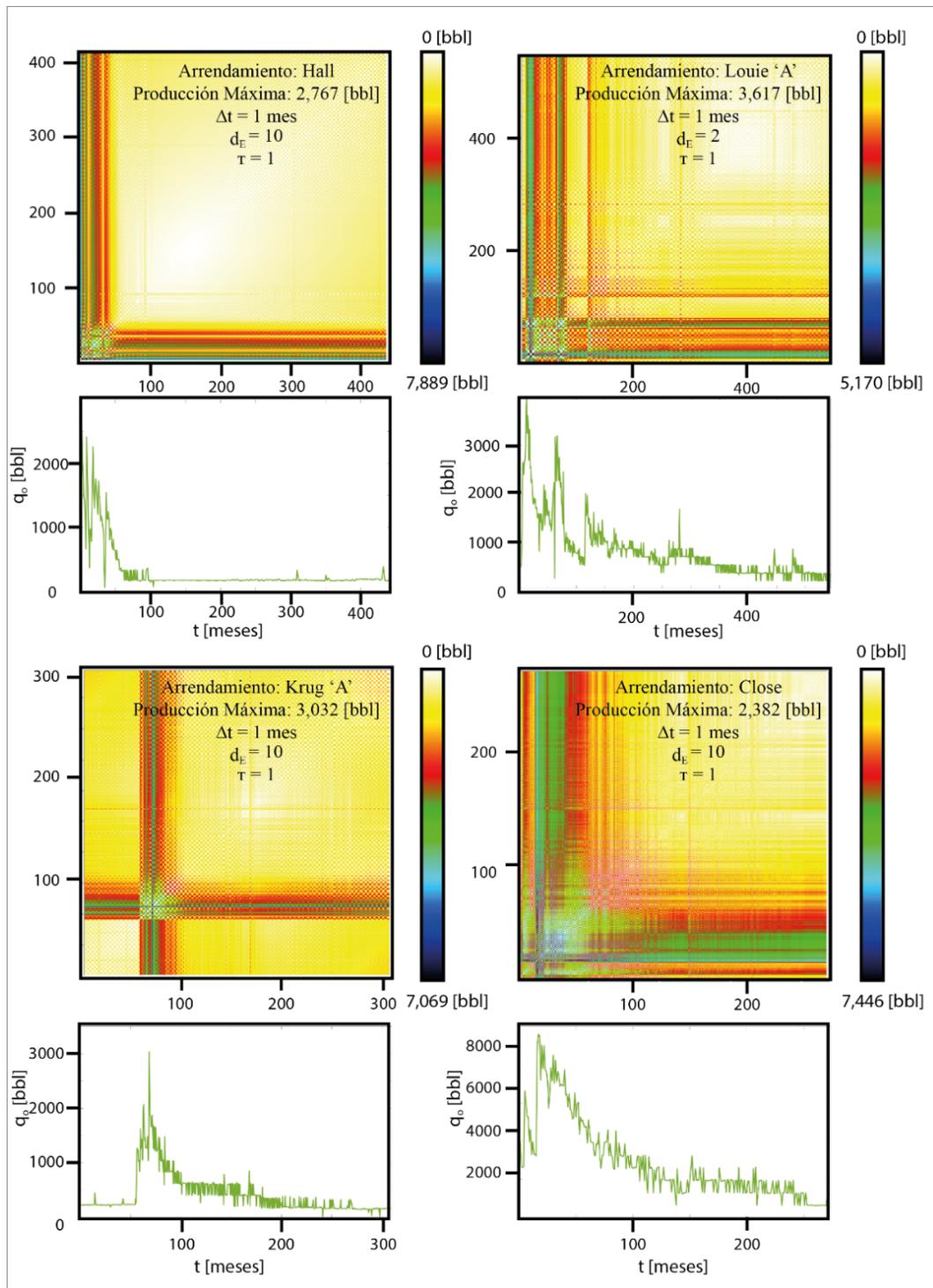


Figura 4.12: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Hall, Louie 'A', Krug 'A' y Close

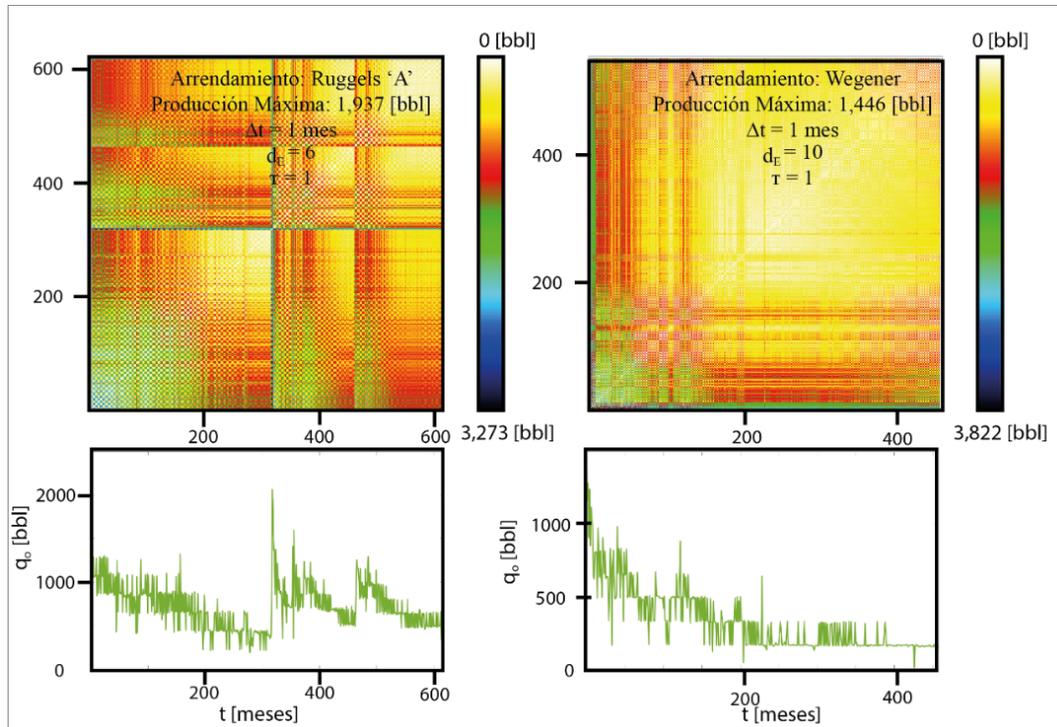


Figura 4.13: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Ruggels 'A' y Wegener

En todos los mapas se observa la presencia de bandas frías (azules / verdes) y después de ellas, áreas que diluyen de colores cálidos (rojo / amarillo) hacia el blanco. Estos patrones son característicos de sistemas no estacionarios, entendiendo como sistema no estacionario a aquel en el que los valores de las condiciones que lo definen cambian asintóticamente desde un estado inicial hasta un estado final, que sería el estado no estacionario (García et al., 2013). El régimen o estado transitorio o no estacionario es un concepto útil para explicar la

Hipótesis 1:

“El estado transitorio (no estacionario) es aquel estado de un sistema donde los valores de las variables involucradas en su estudio cambian a lo largo del tiempo, es decir, son dinámicas. Este cambio en las variables del sistema se debe a una acumulación de materia o energía (Weber, 1979).”

Para efectos del sistema bajo estudio, estos procesos responden a un mecanismo general que caracteriza este tipo de estado y que se encuentra conformado por:

- Un estado de partida o estado inicial.

- Un flujo de entrada al proceso o al sistema.
- Un flujo de salida del proceso o del sistema.
- Una posible diferencia entre la entrada y la salida.
- Algo que cambia dentro del sistema o proceso.

Lo que cambia dentro del proceso transitorio, o sistema en estudio (bajo régimen de estado transitorio), puede ser masa, energía, volumen, concentración, temperatura, presión o cualquier otra variable que integre al sistema.

Entonces **la Hipótesis 1** se acepta. Todos los sistemas, bajo condiciones de explotación estándar y características geológicas reconocidas, presentan tres ciclos (ordenados): i) una banda fría (azul – verde), ii) una fase cálida (naranjas – rojos) y iii) un desvanecimiento (amarillo – blanco). Estos ciclos se relacionan directamente con el periodo inicial, el inicio del decremento y el periodo de estabilización (general), respectivamente.

Las bandas frías, que ocupan tiempos cortos respecto al total de la señal, se refieren a la ruptura del equilibrio inicial del sistema y el primer ciclo de respuesta. De esto deriva la **Hipótesis 2** – *el cruce de bandas frías define al clúster “tiempo de los máximos de producción”*. En las **figuras 4.12** y **4.13** se observa una franja de color azul y una zona o clúster de color verde. Para hacer una comparación temporal se presenta la **tabla 4.3**.

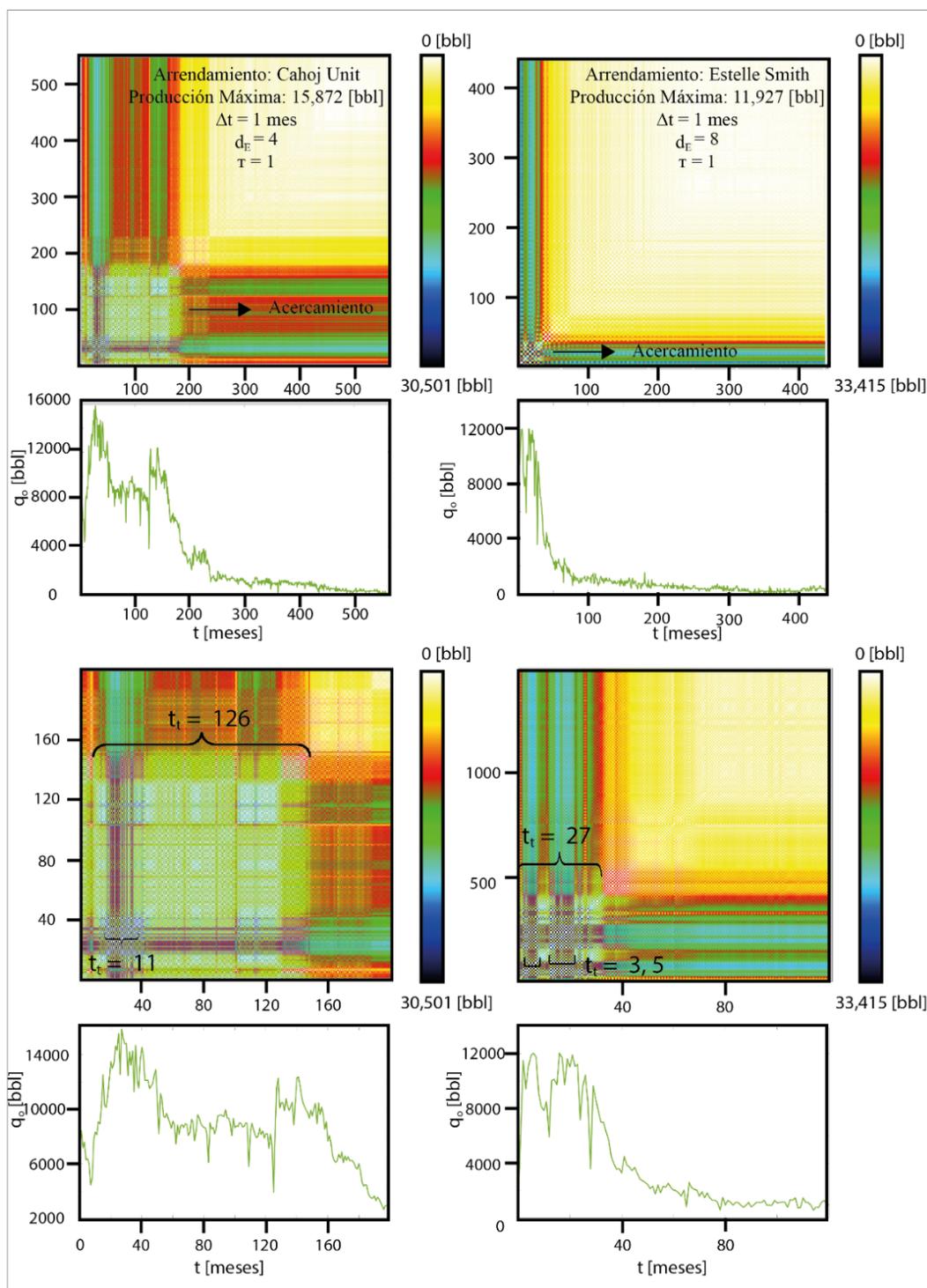


Figura 4.14: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Cahoj Unit y Estelle Smith (parte superior) haciendo énfasis en su clúster generado en el periodo de respuesta (parte inferior)

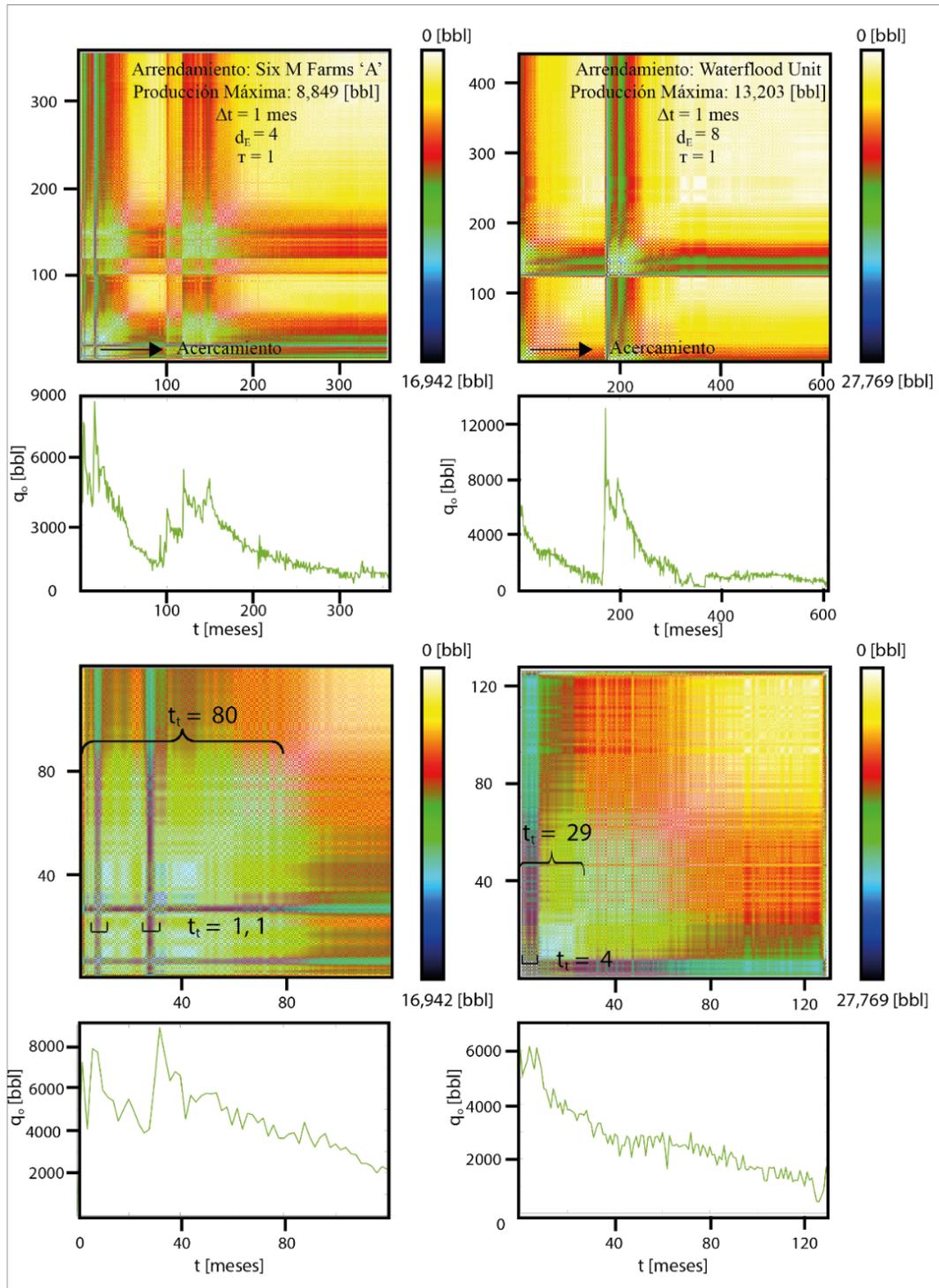


Figura 4.15: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms 'A' y Waterflood Unit (parte superior) haciendo énfasis en su clúster generado en el periodo de respuesta (parte inferior)

Tabla 4.2: Comparativo de franja y cluster en los arrendamientos Cahoj Unit, Estelle Smith, Six M Farms 'A' y Waterflood Unit generados en el periodo de respuesta

Arrendamiento	Tamaño del Clúster		Relativo (Azul / Verde)
	Azul [meses]	Verde [meses]	
Cahoj Unit	11	126	11.5
Estelle Smith	5	27	5.4
Six M Farms 'A'	1	80	80
Waterflood Unit	4	29	7.25

El tamaño de los clusters se conoce como *tiempo de entrampamiento* (t_t) y se define como el tiempo en el cual la dinámica del sistema se atrapa en un estado laminar – estado en el que las variables que definen su comportamiento no cambian o lo hacen de manera muy lenta y, por lo tanto, su comportamiento se encuentra en la misma región del espacio de fase reconstruido (García et al., 2013) –. En la producción la franja azul representa el máximo de producción del periodo analizado y que, en la mayoría de los casos, resulta ser el de la señal completa mientras que el clúster o bracket verde indica el periodo de apertura. Comparar estos tiempos permite reconocer el comportamiento de la actividad de extracción en sus máximos. Obsérvese el caso de Six M Farms 'A' (con el mayor relativo), esto indica que el sistema queda atrapado por un mayor tiempo en una *zona de producción atractiva* (máximos, por sobre la media de producción). El estudio de los casos que han sufrido una segunda intervención para excitar al sistema muestra que el tamaño del clúster que se genera posterior a la intrusión puede llegar a ser mayor respecto al inicial, como se muestra en el MR del arrendamiento Waterflood Unit (**figura 4.14**).

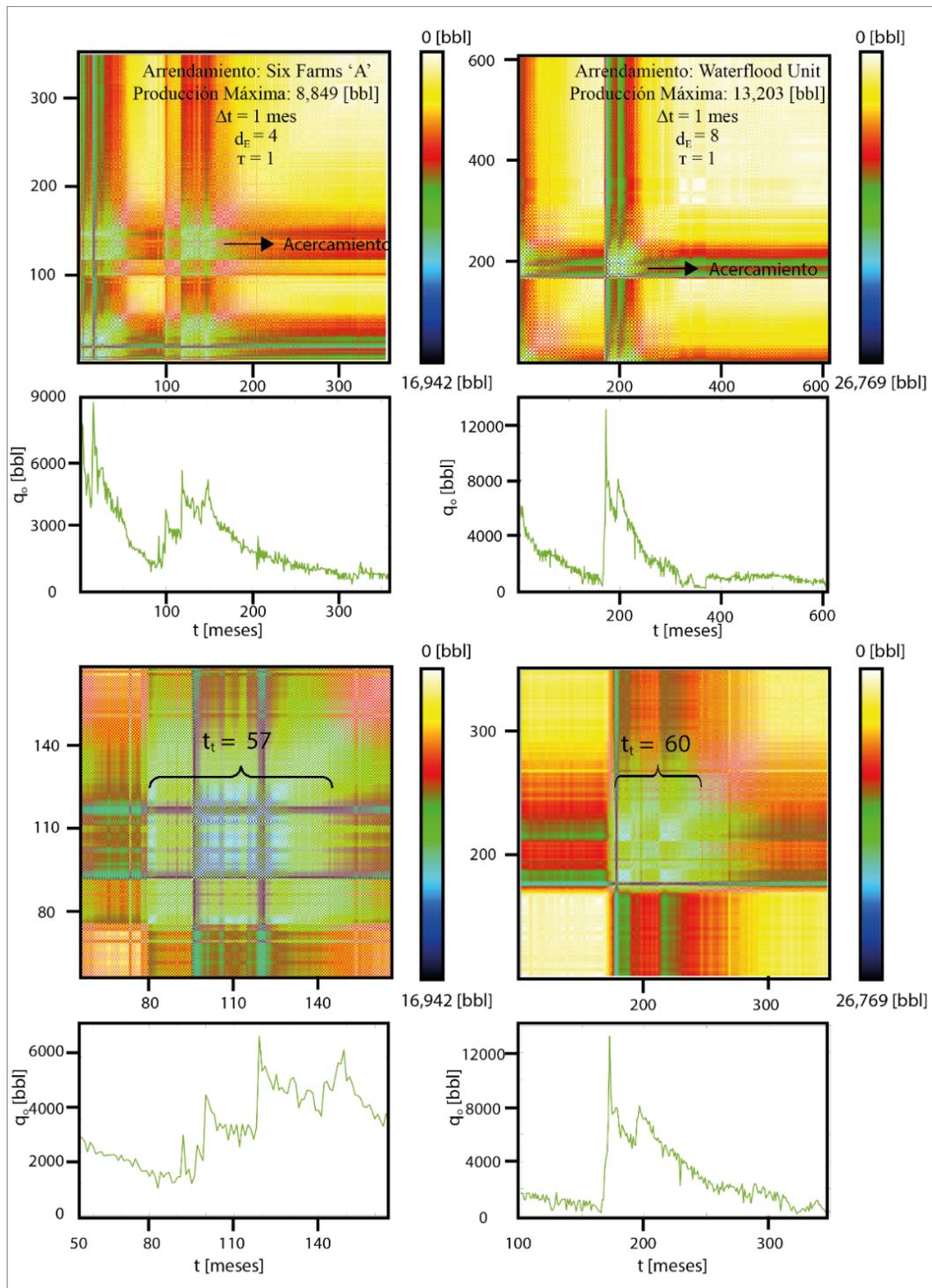


Figura 4.16: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms 'A' (parte superior) y Waterflood Unit (parte inferior). En ambos arrendamientos se ha señalado el clúster generado por una segunda intrusión

La **tabla 4.4** muestra la información referida al tamaño de los clusters que se generaron en el periodo de respuesta y a los ocasionados por una segunda intrusión.

Tabla 4.3: Comparativo de clusters de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit

Arrendamiento	Tamaño del Clúster	Tamaño del Clúster
	Inicial [meses]	Secundario [meses]
Six M Farms ‘A’	80	57
Waterflood Unit	29	60

En los arrendamientos mostrados en la **figura 4.14** se observa que en la serie temporal (antes de la modificación) se ha llegado a un comportamiento asintótico a un tiempo relativamente corto. En el MR se refleja un área desvanecida (amarillos – blancos) que marcaría el límite para la toma de decisión sobre el abandono o continuación del proyecto (y una posible estimulación) (Bashbush, 2020). En los casos mostrados las estimulaciones permitieron alcanzar nuevamente zonas de producción atractiva: para el arrendamiento Six M Farms ‘A’, tras las modificaciones operativas y la perforación de más pozos productores, se alcanzaron condiciones similares al clúster inicial lo cual es muy importante si se reconoce que la producción había llegado a la región asintótica, para Waterflood Unit la inyección de agua en la zona de desvanecimiento permitió alcanzar niveles más allá de los registrados al inicio de la serie que se mantuvieron casi dos veces la duración del clúster inicial. De acuerdo con la Hipótesis 1, tras modificaciones o no sobre el sistema, la evolución se dirige hacia las zonas cálidas (naranjas – rojos) y posteriormente se diluye (amarillos – blancos).

Una de las zonas de mayor interés prácticos es el *inicio del decremento o desvanecimiento*. Un MR permite trazar los límites entre la respuesta inicial y la asíntota. Estos “estados esperados” que ocurren claramente después del desequilibrio inicial y antes de la entrada al estancamiento representan una métrica de la producción *característica* de cada arrendamiento. El tamaño del decremento se obtuvo para todas las señales y en la **figura 4.15** y **4.16** se muestran los valores para los arrendamientos Harnett ‘C’, Federal Land Bank ‘C’, Close y Hall como ejemplos.

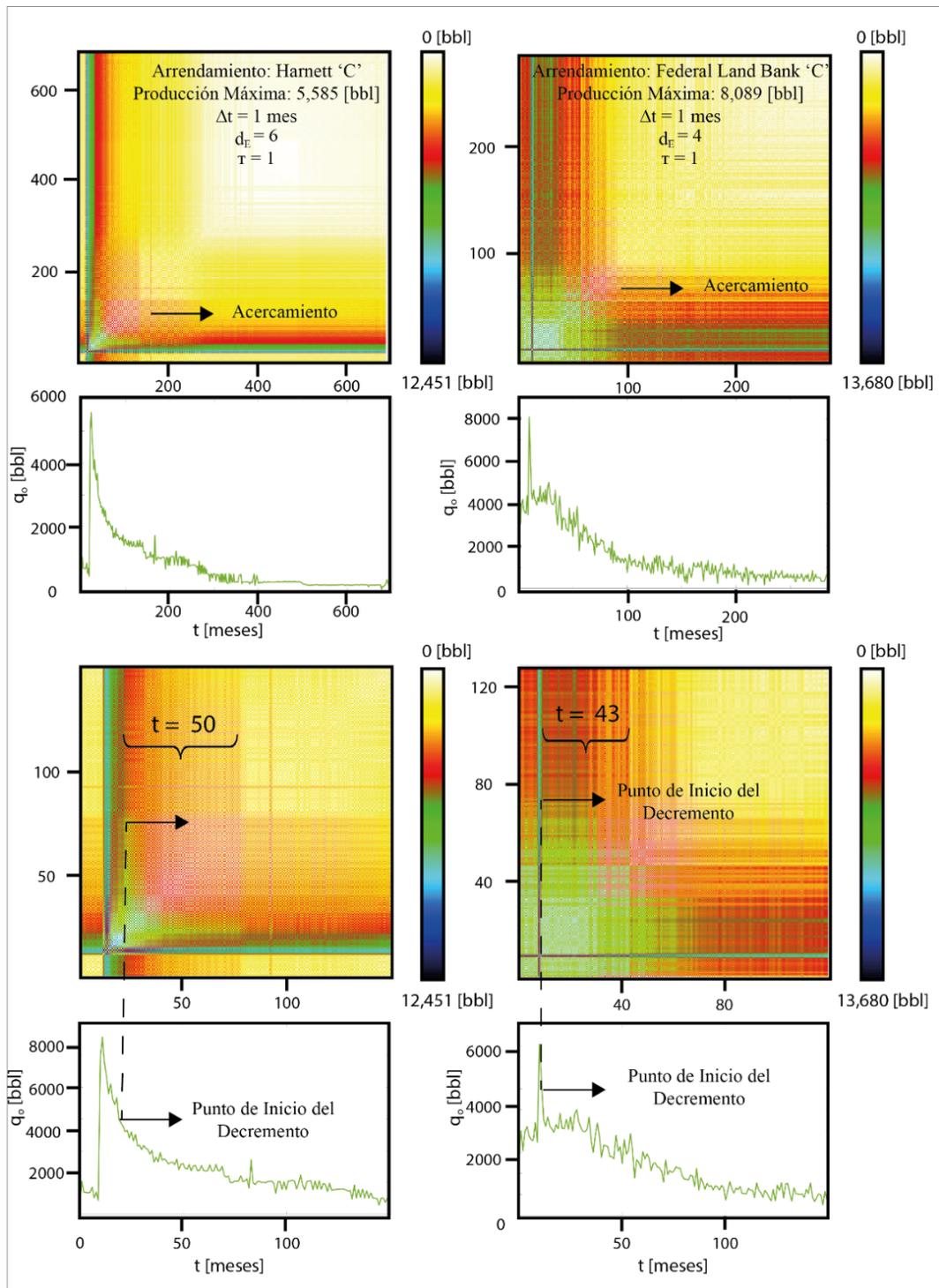


Figura 4.17: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett 'C' y Federal Land Bank 'C'. En ambos arrendamientos se ha señalado el punto de inicio del decremento y la duración de la zona de transición

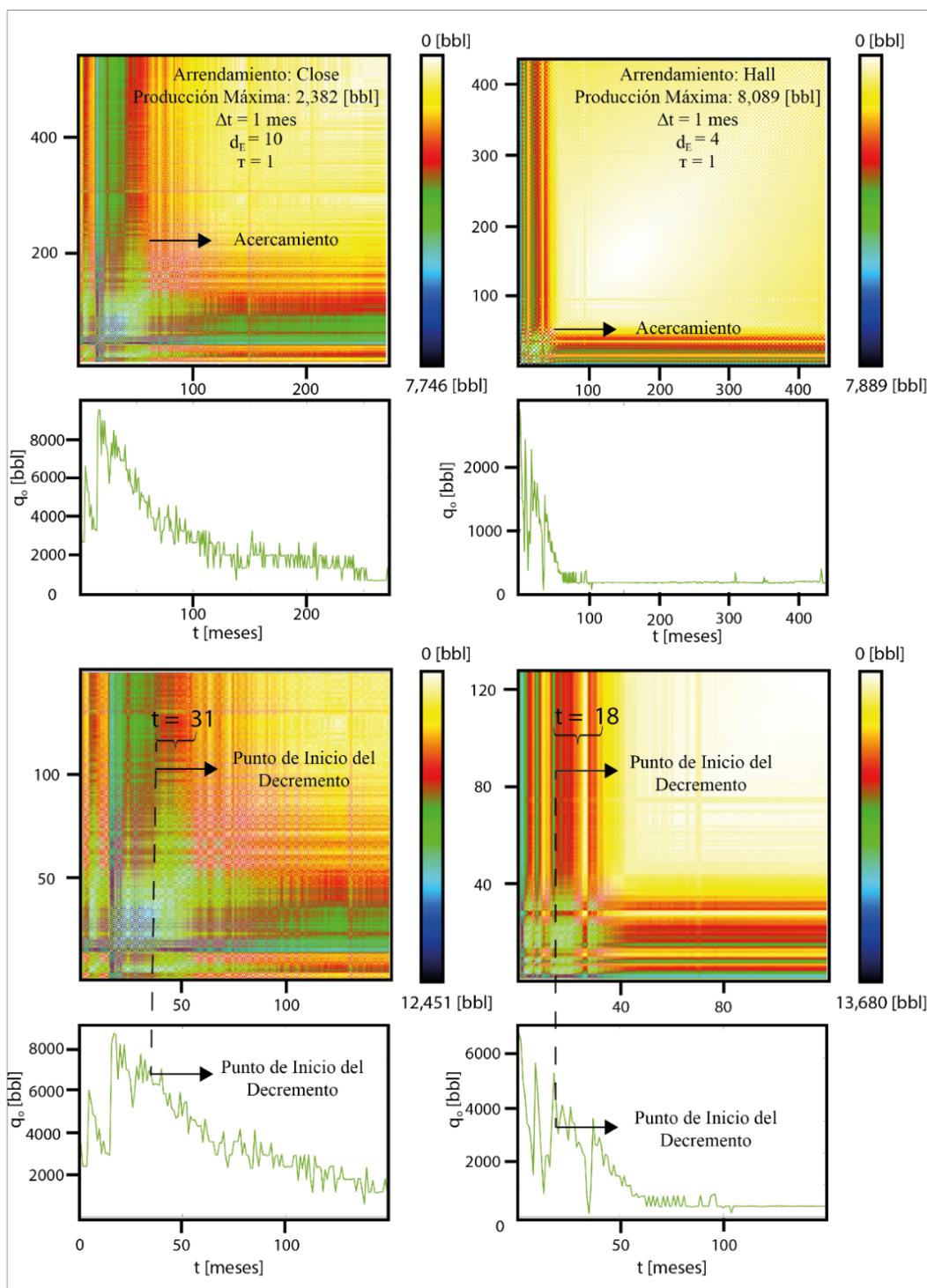


Figura 4.18: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Close y Hall. En ambos arrendamientos se ha señalado el punto de inicio del decremento y la duración de la zona de transición

En la **tabla 4.5** se presenta la información referida al tamaño de las áreas cálidas en los MRs mostrados anteriormente.

Tabla 4.4: Tamaño de zonas cálidas en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett 'C', Federal Land Bank 'C', Close y Hall

Arrendamiento	Duración de la Zona de Transición
Harnett 'C'	50
Federal Land Bank 'C'	43
Close	31
Hall	18

En la serie de tiempo se define un punto que se denomina *punto de inicio del decremento* (depletion point) y a partir del cual se recomiendan tareas de reactivación por lo que definir un punto o establecer una zona en la curva es fundamental para la optimización de los procesos (Shashipal et al., 2020). Cuando las áreas cálidas se presentan, el estudio de la extracción se dirige hacia la calificación del decaimiento y si el comportamiento asintótico es insalvable, por lo que esta fase es un área de oportunidad para la planeación y quizá la implementación de una estimulación al sistema. Un MR podría indicar, bajo el código de color, si los rojos – naranjas están en su fase final o son reversibles (pueden convertirse en verdes). Por otro lado, las áreas blancas – amarillas, etapa de relajación, tienen tamaños diferentes por mapa, para visualizar dicha situación en la **figura 4.17** se presentan los MRs de los arrendamientos Estelle Smith, Patton, Potts y Cahoj Unit

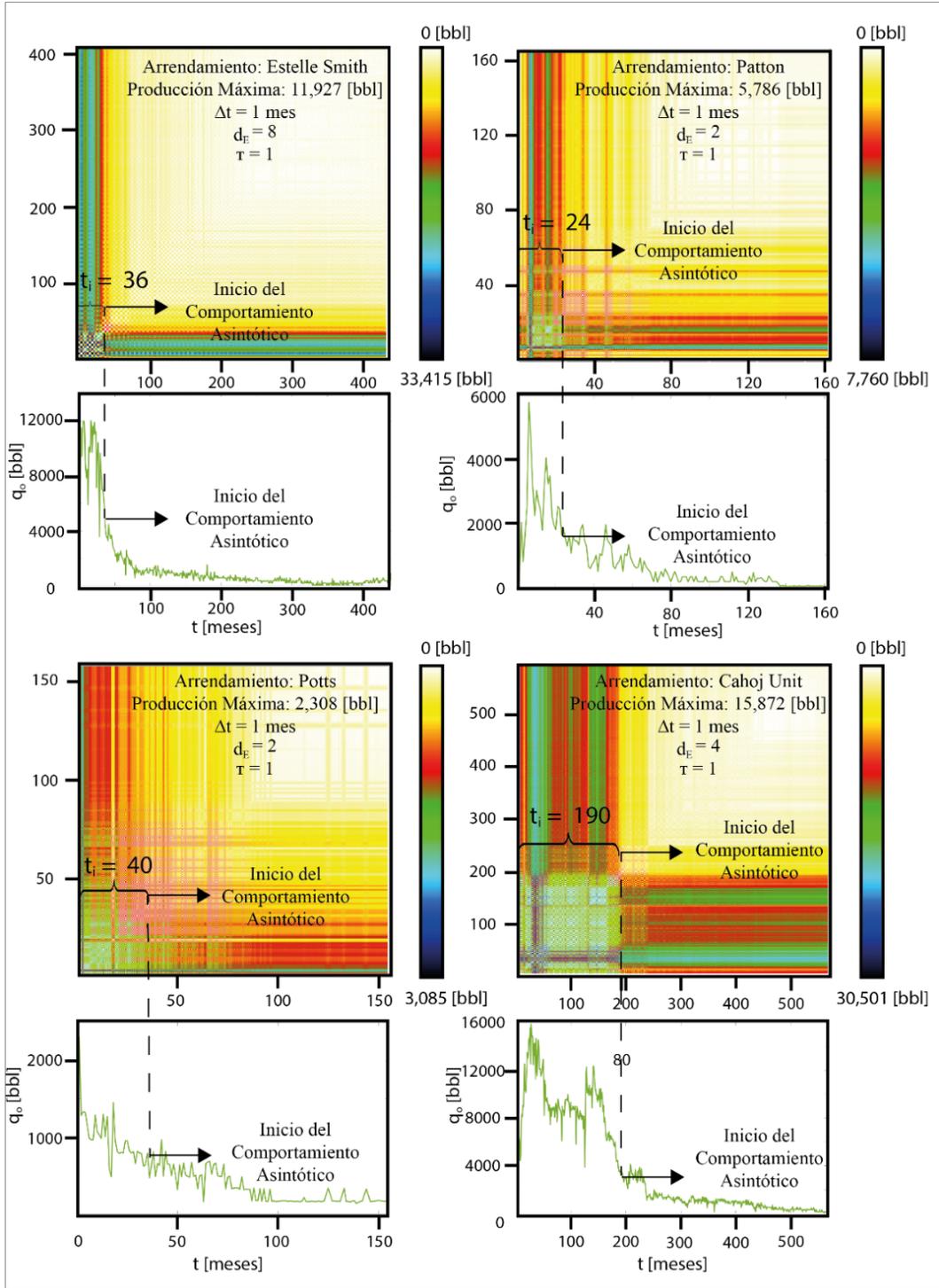


Figura 4.19: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Estelle Smith, Patton, Potts y Cahoj Unit. En cada uno de ellos se marcó con una línea punteada el inicio de la zona diluida y cuanto tiempo tarda en alcanzarse

La línea punteada en la **figura 4.17** se indica cómo, con un MR, el trazo del punto subcrítico a la fase de *desvanecimiento* es relativamente fácil de lograr. Esta fase referida a la estabilización del sistema no es importante desde su tamaño sino desde el valor distancia al cual ocurre relativo al total. En la **tabla 4.6** se muestra el tiempo en los cuales los arrendamientos mostrados en la **figura 4.17** alcanzaron el comportamiento asintótico o estabilización.

Tabla 4.5: Información sobre el inicio del comportamiento asintótico en los arrendamientos Estelle Smith, Patton, Potts y Cahoj Unit

Arrendamiento	Tiempo para el Inicio del Comportamiento Asintótico
Estelle Smith	36
Patton	24
Potts	40
Cahoj Unit	190

El objetivo principal de la industria petrolera es extraer la mayor cantidad de hidrocarburos intentado reducir los costos al mínimo posible (Bashbush, 2020), entonces, el tiempo de inicio de la estabilización o comportamiento asintótico es una métrica crucial. Véase lo reportado en los arrendamientos Estelle Smith y Cahoj Unit que muestran comportamientos muy diferentes; en el primero de ellos, la estabilización de la producción es prácticamente inmediata al área de producción atractiva y presenta una transición muy pequeña, mientras que Cahoj Unit tiene una transición de mayor tamaño, es decir, más meses hasta el inicio de la estabilización de la producción, comportamiento más atractivo.

Ahora, recordando que los sistemas complejos naturalmente tienden a organizarse hacia un estado crítico obedeciendo una ley de potencias (Serrano et al., 2012; Bak et al., 1998; Martínez et al., 2017). La estabilización de la producción en los sistemas petroleros es un área que se presenta con y sin una segunda intervención o estimulación. Por lo tanto, es un estado crítico al cual el sistema recurre. Para ello, se muestra la **figura 4.18** de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit.

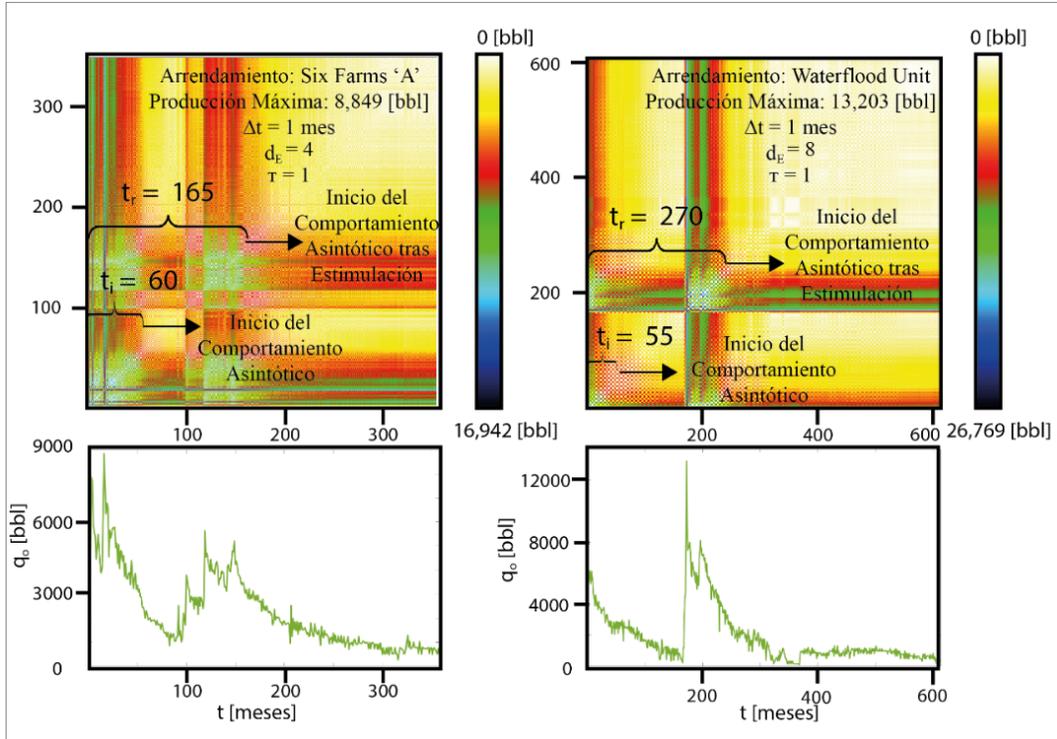


Figura 4.20: Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit. En estos MRs se indica el tiempo en el cual se inició el tiempo en el cual se llegó al primer comportamiento de estabilización (t) y el tiempo de recurrencia (t_r) en el cual se alcanza nuevamente tras la estimulación

Donde la **tabla 4.7** muestra la información sobre los tiempos de inicio de las 2 áreas de estabilización presentadas en los MRs. A partir de estas reflexiones se establece la **Hipótesis 3** – *el desvanecimiento significa valores de extracción mínimos constantes que nunca llegan a ser 0-*. Esta hipótesis se confirma tomando en cuenta las 2 anteriores sobre la evolución de los sistemas: todos terminarán de forma natural en este estado y aún más importante es la visión desde su significado como el *límite económico* (la relación entre el costo de la producción y el valor de venta marca las acciones y las decisiones (Kasriel et al., 2014)).

Tabla 4.6: Información sobre la estabilización de la producción en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Waterflood Unit

Arrendamiento	Tiempo de Inicio del Primer Ciclo Estable (t_i)	Tiempo de Recurrencia para el Segundo Ciclo Estable (t_r)
Six M Farms ‘A’	60	165
Waterflood Unit	55	270

La inspección profunda de los MR conduce a los análisis de micro – escala o textura.

4.5 Análisis de Textura (micro – escala)

El análisis de textura o a nivel de micro – escala permite definir comportamientos característicos en las zonas de los clusters, muy relevantes por tratarse de las zonas de máxima producción. En las **figuras 4.19 y 4.20** se muestran ejemplos de las texturas en los MRs de algunas de las señales de producción de petróleo.

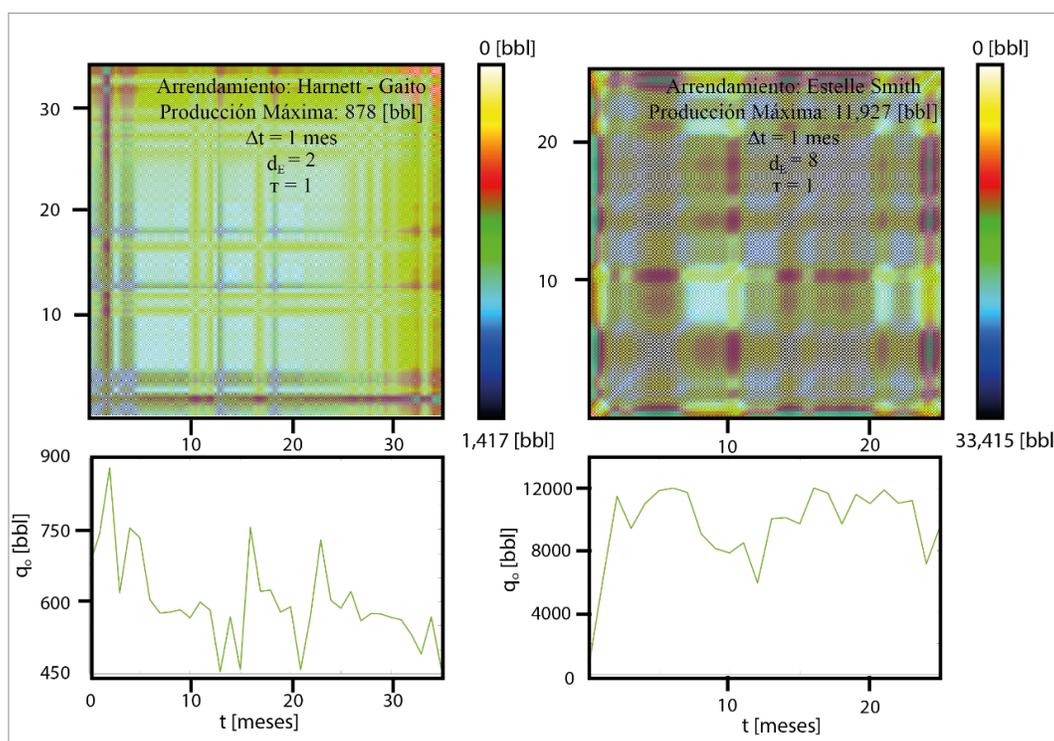


Figura 4.21: Clusters generados en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Harnett – Gaito y Estelle Smith

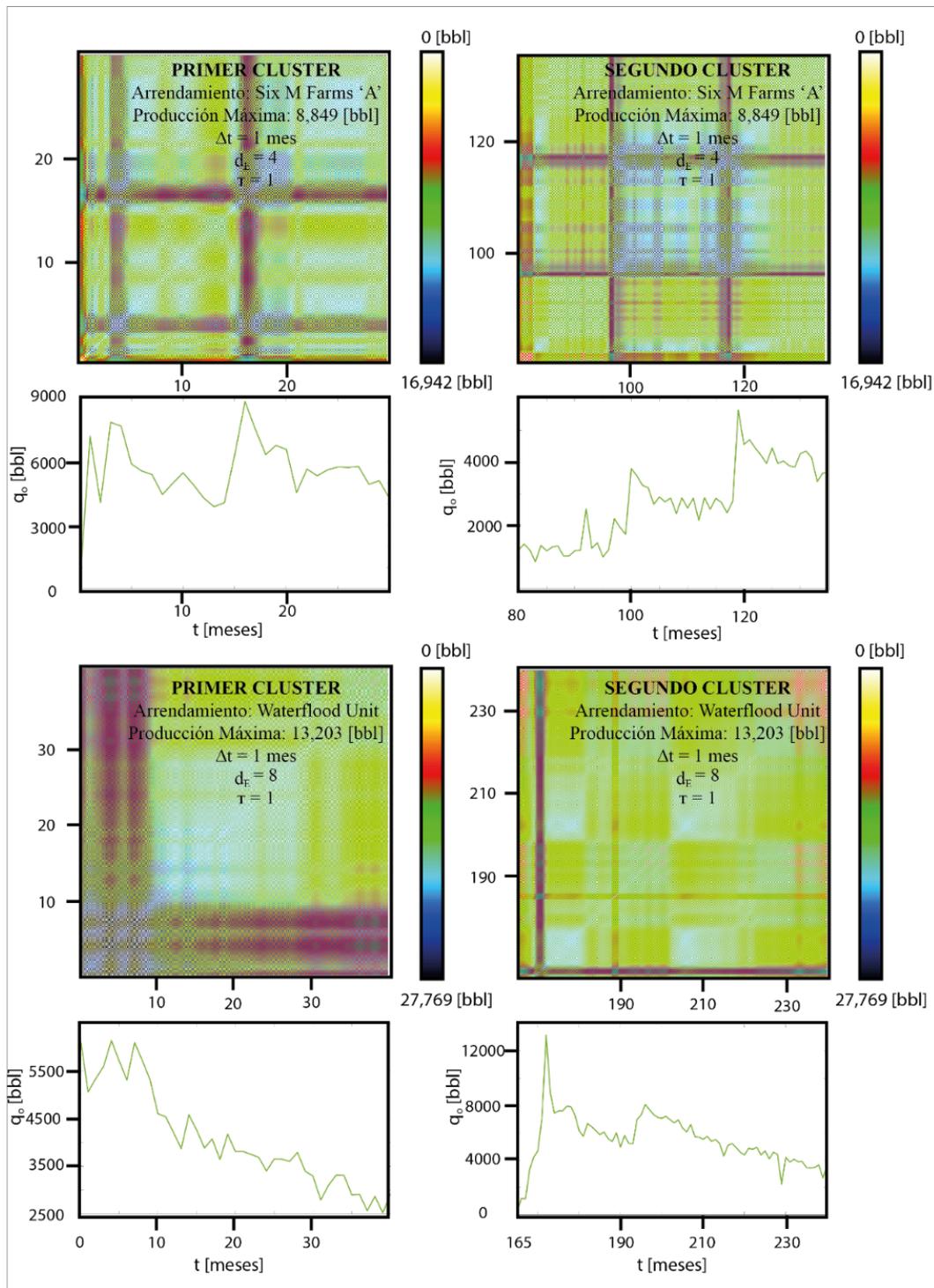


Figura 4.22: Clusters generados en la etapa inicial y posterior a una segunda intrusión en los Mapas de Recurrencia de los arrendamientos Six M Farms 'A' y Waterflood Unit

Ahora, con el objetivo de dar una explicación al comportamiento de la dinámica en estos tiempos se utilizan las señales de la función seno y el ruido blanco; dichas señales corresponden a un comportamiento periódico y aleatorio, respectivamente (**figura 4.21**).

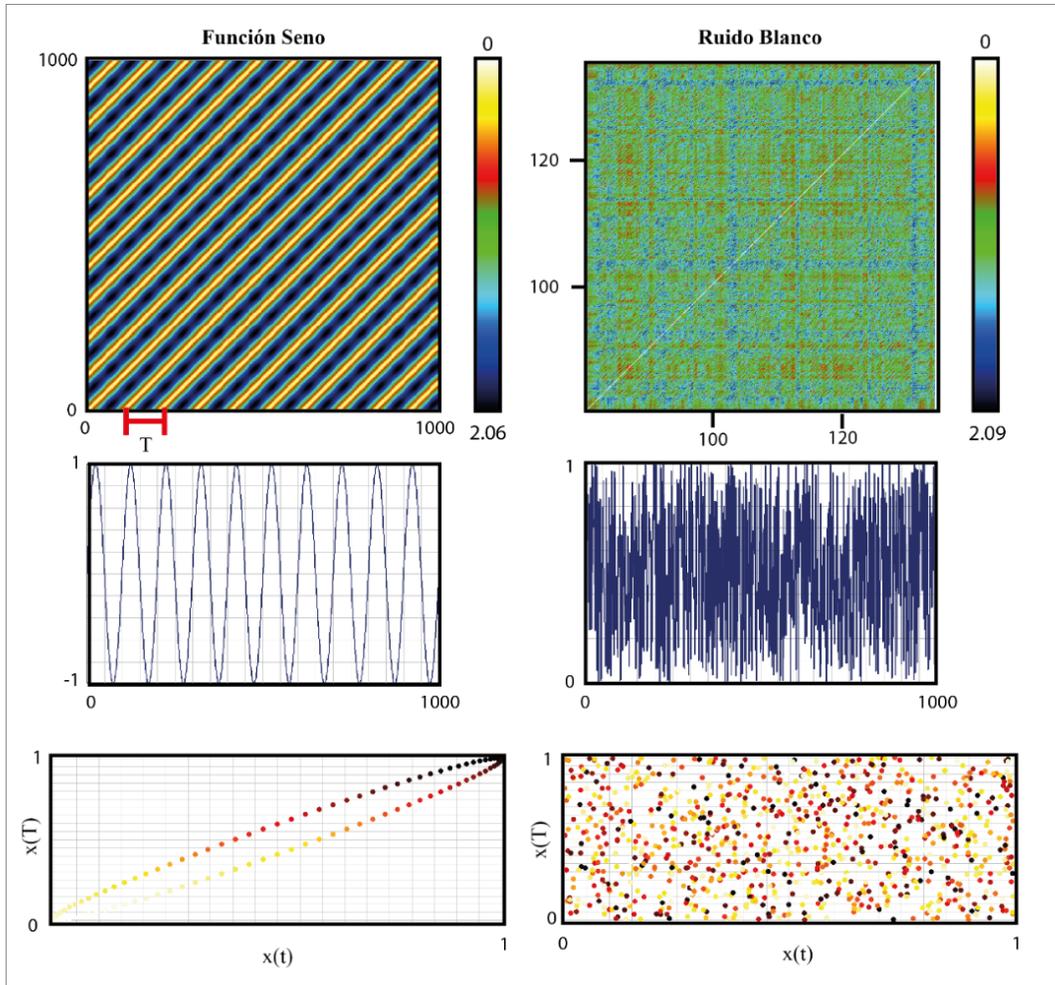


Figura 4.23: Mapas de Recurrencia, Series Temporales y Espacios de Fase de la función senoidal y el ruido blanco

Los MRs y el espacio de fase reconstruido a partir de estas señales en la **figura 4.21** presentan 2 sistemas cuales su dinámica es opuesta. Los sistemas deterministas, representada con la función seno, es bastante simple de comprender con las estructuras repetidas; el MR generado a partir de esta señal presenta colores amarillos – blancos que corresponden a los mínimos espaciamentos, hasta el azul marino que representa las máximas distancias. Cada bloque, línea diagonal, representa la mitad del periodo de la señal. En el caso de la señal generada por el ruido blanco, lo más cercano al comportamiento *aleatorio*, genera un MR de estructura

homogénea, es decir, sin algún patrón reconocible, sello de sistemas que evolucionan de manera *aleatoria* y, por lo tanto, son *impredecibles* (Thiel, 2003; Blomberg, 2007).

Reconociendo que las series de producción no están en ninguno de estos extremos, se presenta el sistema de Lorenz para categorizar dichas series. El modelo de Lorenz sirve para predecir el comportamiento atmosférico con ecuaciones diferenciales no lineales (4.1), (4.2) y (4.3) (Miramontes, 2010; Cárdenas, 2014; Gao et al., 2000).

$$\frac{dx}{dt} = -10(x - y) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8z}{3} \quad (4.3)$$

Dichas ecuaciones sostienen la idea de que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales en los sistemas complejos (naturales) pueden separarse exponencialmente conforme evolucionen en el tiempo. A esto se denominó *comportamiento caótico* (Miramontes, 2010; García et al., 2013) y con el objetivo de comprender el comportamiento de la producción de petróleo en las zonas atractivas, se compara la señal, MR y el espacio de fase reconstruido de Lorenz con la serie temporal de producción de petróleo en la **figura 4.22**.

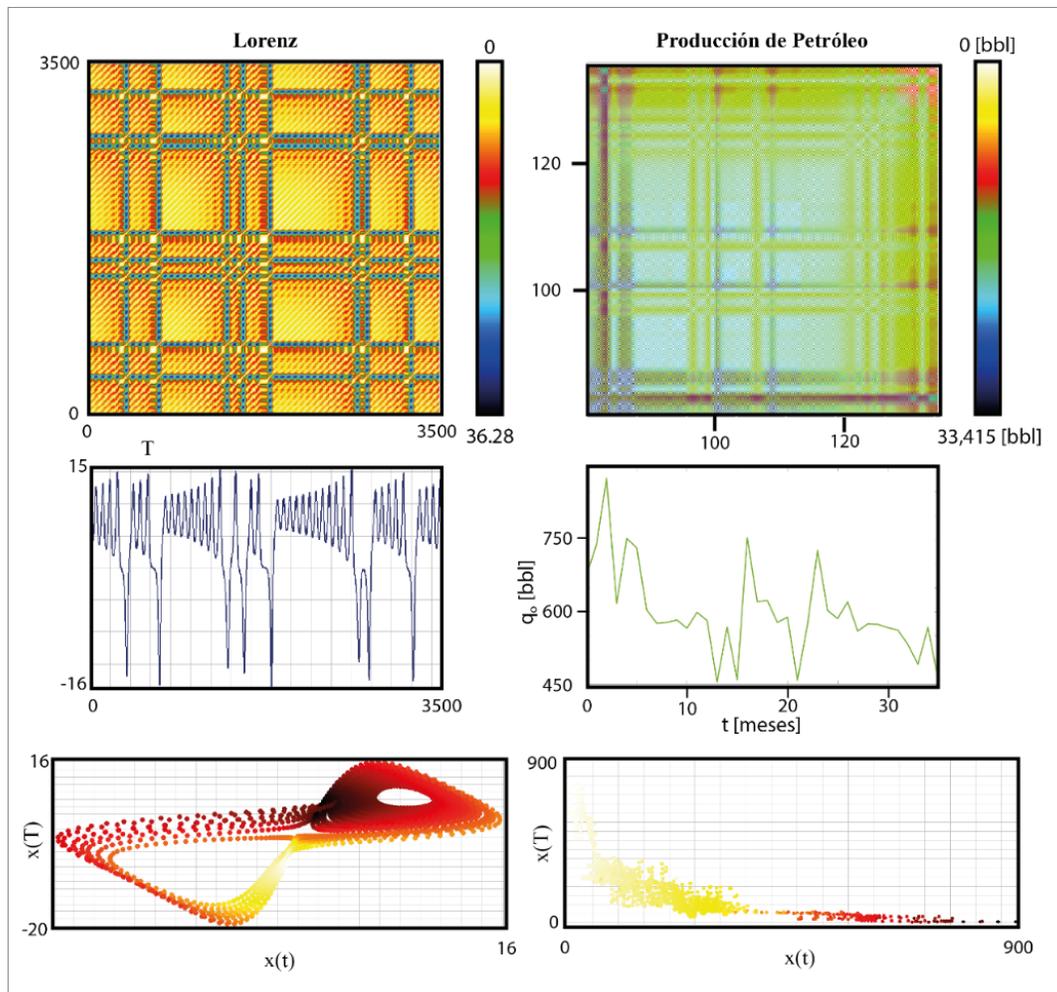


Figura 4.24: Comparativo entre la señal de Lorenz y una señal de producción

Otros ejemplos de espacio de fase reconstruidos de las series de tiempo de producción de petróleo se presentan en la **figura 4.23**.

Observando los MR's generados de las señales correspondientes se presenta una estructura similar a la de un tablero de ajedrez, donde el tiempo que separa dichas estructuras (por líneas o bandas verticales) son irregulares (García et al., 2013). Entonces, en el caso de la señal de producción de petróleo dicha estructura se presenta por la presencia de picos y valles en la señal (**figura 4.24**).

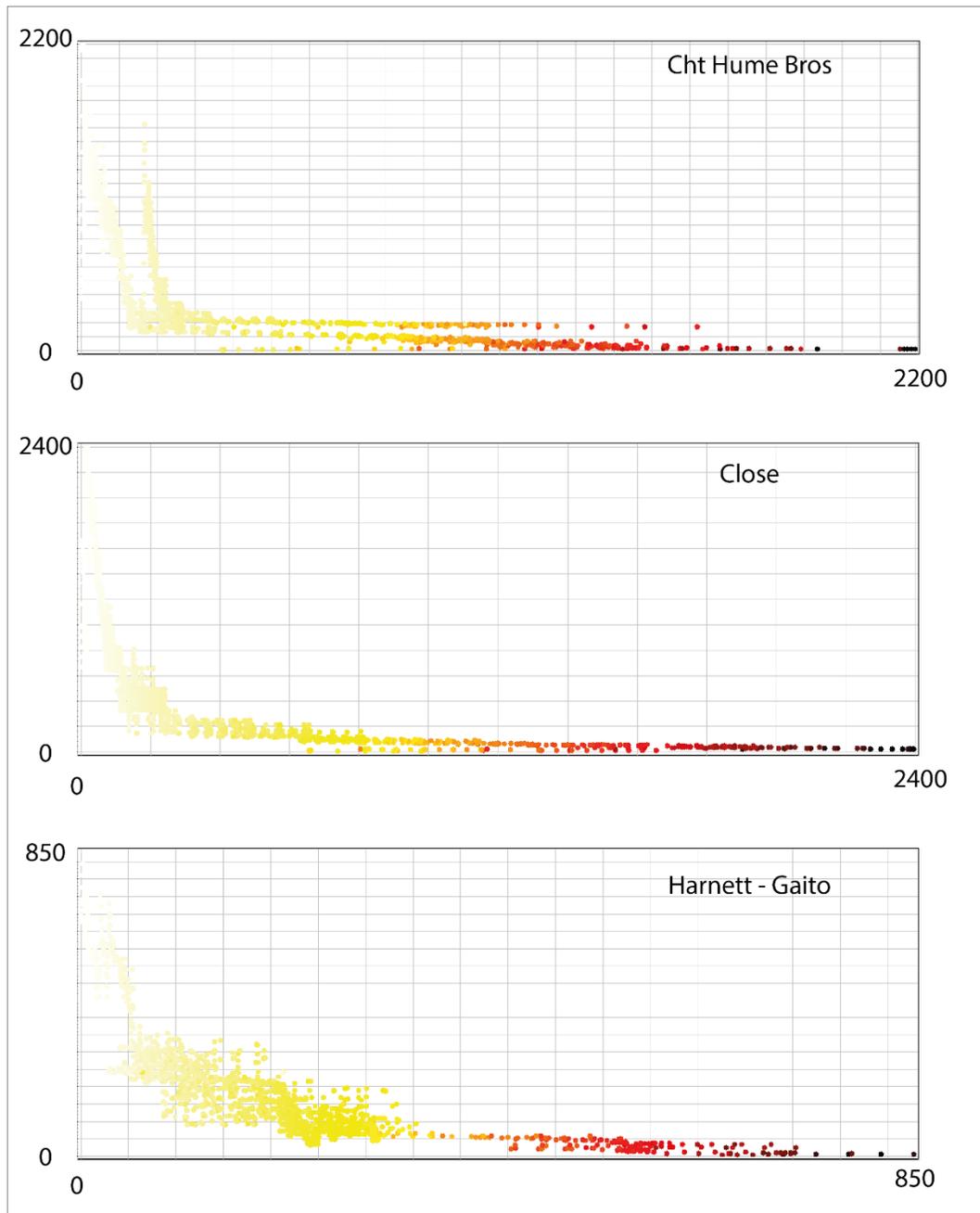


Figura 4.25: Espacios de Fase reconstruidos de los arrendamientos Cht Hume Bros, Close y Harnett – Gaito

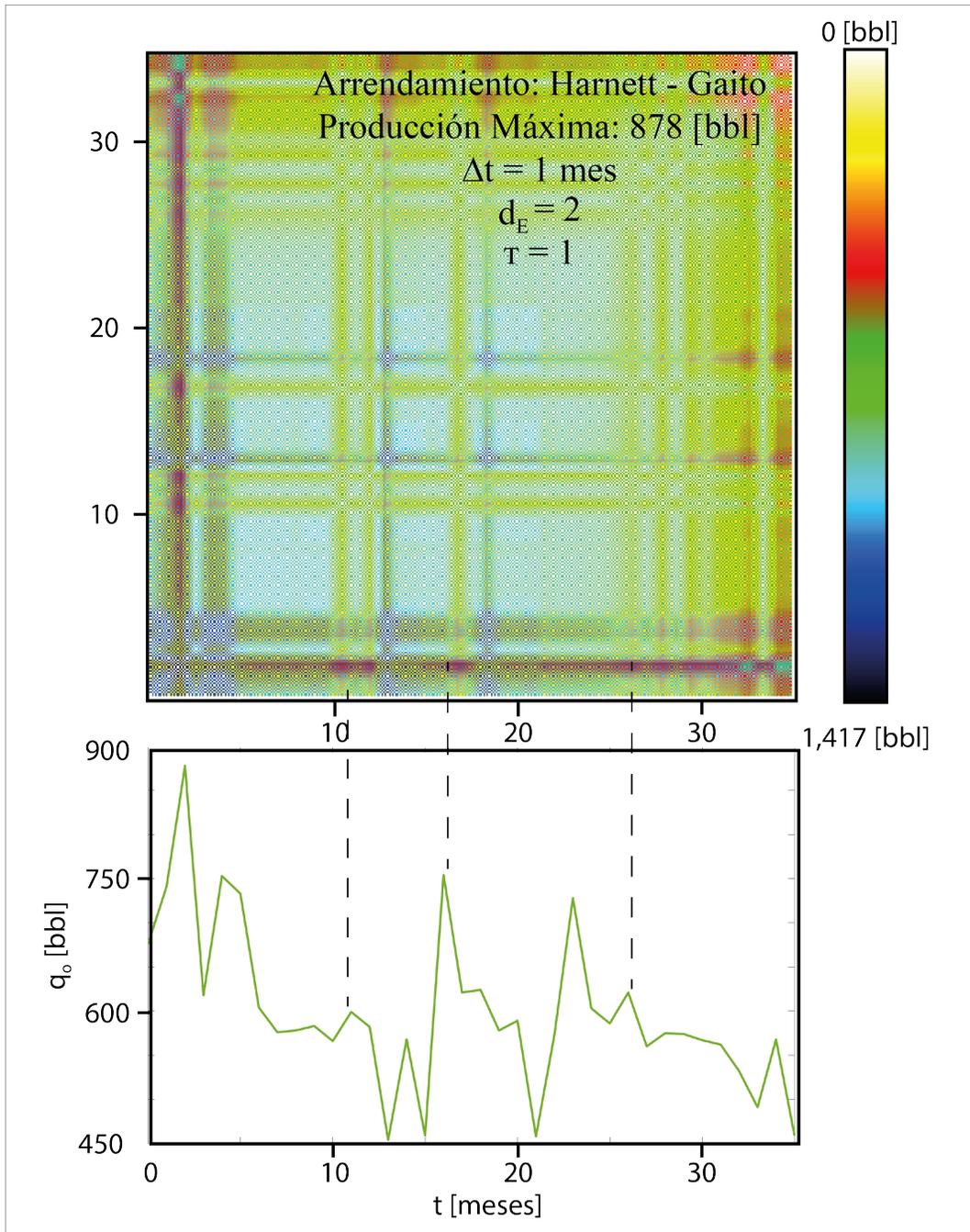


Figura 4.26: Representación de las estructuras en el MR del arrendamiento Harnett – Gaito

CAPÍTULO IV.I – Predicción de Series de Tiempo

Predecir o pronosticar la producción de petróleo es una de las tareas más importantes en la ingeniería de yacimientos, sin embargo, no es una tarea sencilla debido a que los sistemas (naturales y antrópicos) involucrados son muy complejos y las informaciones se caracterizan por una sobreabundancia de algunos parámetros y carencia de otros que podrían ser importantes para describir la evolución del sistema (García et al., 2013; Sheremetov et al., 2013; Siavash et al., 2019).

La aproximación a datos de este tipo se da entonces con herramientas y métodos que permitan asociar, calificar y predecir las series de tiempo, a través de la evolución observada en espacios multidimensionales en los que se descubran la periodicidad, ciclos y/o estacionalidad del(os) comportamiento(s) (Sheremetov et al., 2013; Pollock, 1999; Schelter et al., 2016).

En el presente trabajo se emplearon diferentes algoritmos de predicción no paramétrica en diferentes etapas del(os) sistema(s).

4.6 Predicciones no Paramétricas

Las predicciones no paramétricas se utilizan en situaciones donde no se desean o no se pueden realizar consideraciones sobre el proceso que genera la serie de tiempo observable. Por lo tanto, en lugar de asumir un modelo matemático (funcional) específico y calcular sus coeficientes, se deriva un modelo de datos directamente. Es decir, se permite a los datos “hablar por sí mismos” (Brockwell et al., 2016). En esta investigación los algoritmos no paramétricos aplicados son i) Vecinos Cercanos, ii) Regresión de Kernel y iii) Función de Base Radial (descritos en el Apéndice A).

Para aplicar estos métodos, el conjunto total de datos se divide en el *conjunto de ajuste dinámico* que se usa para encontrar la máxima *verosimilitud* entre el conjunto de ajuste y el vector pronosticado y el *conjunto de prueba* (o datos de validación) (Yogendra et al., 2020). Para calificar la actuación de cada modelo se usa la distancia euclidiana con la que, de forma muy simple, se establece la diferencia entre las instancias observadas y las predichas (Brockwell et al., 2016). Por último, se elige la forma (o tipo) de predicción entre “un paso adelante” (el último vector conocido está siempre compuesto de los valores verdaderos) o

“multi-pasos” (el último vector conocido está compuesto de los valores predichos previamente). En esta investigación se usó “un paso adelante”.

Para mostrar las predicciones sobre la producción de petróleo se seleccionaron a los arrendamientos Six M Farms ‘A’, Louie ‘A’ y Estelle Smith.

4.7 Predicciones en Periodo Inicial o de Apertura

El periodo de extracción inicial, donde se irrumpe al sistema y el equilibrio se rompe, contiene, en la mayoría de los casos, los máximos valores de producción de la señal (Shashipal et al., 2020). Su duración no es grande (comparada con toda la serie) ya que el desequilibrio ocurre unos instantes (sobre el delta de tiempo) para dar entrada al siguiente estado del sistema (natural) en el que se dirige a un nuevo estado de equilibrio (el periodo final asintótico). Para las predicciones en este periodo, en la **tabla 4.7** se presentan los datos usados y en la **figura 4.24** los resultados de la aplicación.

Tabla 4.7: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en Etapa de Apertura

Arrendamiento	Conjunto de Ajuste [bbl]	Conjunto de Prueba [bbl]
Six M Farms ‘A’	[0 – 10]	[11 – 44]
Louie ‘A’	[0 – 10]	[11 – 51]
Estelle Smith	[0 – 10]	[11 – 40]

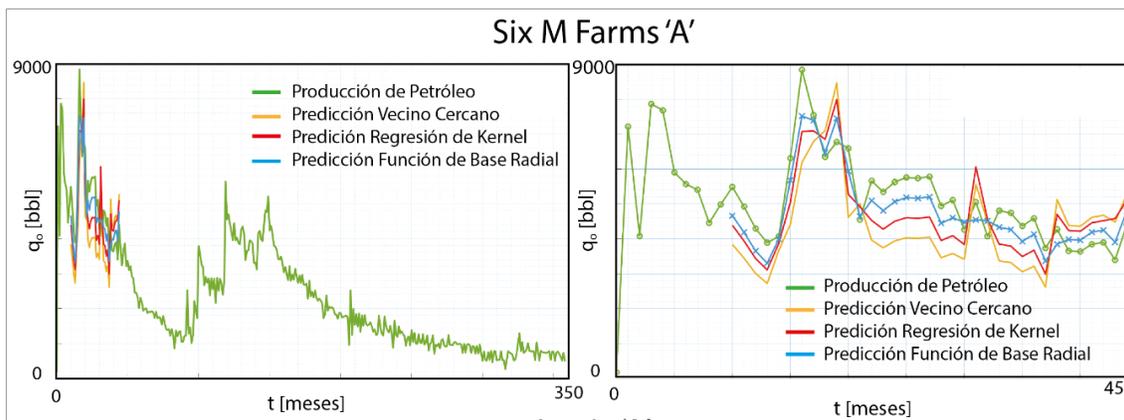


Figura 4.27: Predicción en Periodo de Apertura del arrendamiento Six M Farms ‘A’

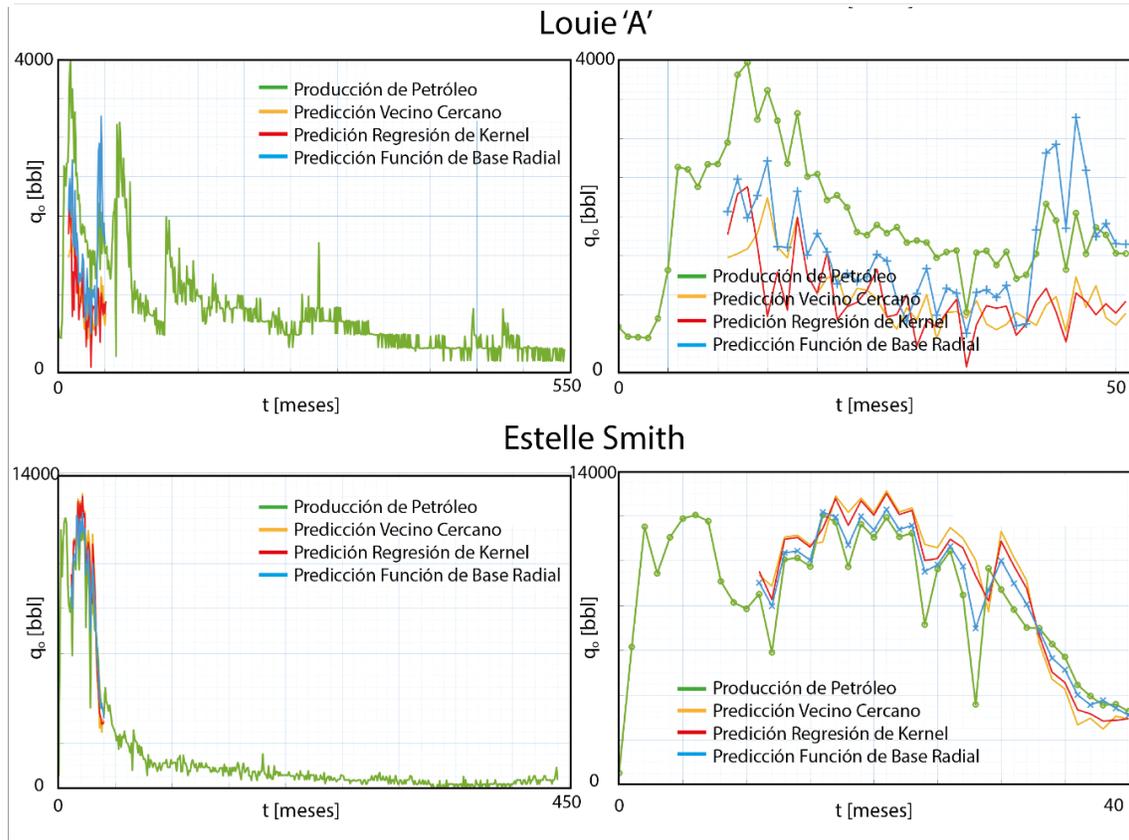


Figura 4.28: Predicciones en Periodo de Apertura de los arrendamientos Louie ‘A’ y Estelle Smith

En las predicciones de la **figura 4.24**, arrendamientos Six M Farms ‘A’ y Estelle Smith, los 3 algoritmos muestran un comportamiento adecuado, sin embargo, para Louie ‘A’ las curvas generadas por los algoritmos están por debajo de las mediciones reales prácticamente todo el periodo. Para categorizar el trabajo de los modelos predictivos se usa el error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de correlación (**tabla 4.8**).

Tabla 4.8: Error Cuadrático Medio y Coeficiente de Correlación

Arrendamiento	Algoritmo					
	Vecino Cercano		Regresión de Kernel		Función de Base Radial	
	RMSE	r	RMSE	r	RMSE	r
Six M Farms ‘A’	250	0.84	293	0.86	202	0.9
Louie ‘A’	680	0.8	653	0.82	579	0.85
Estelle Smith	365	0.89	398	0.94	303	0.95

4.8 Predicciones en Zona de Transición – Inicio del Decremento

El periodo entre el desequilibrio inicial y la estabilización final se denomina inicio del decremento o zona de transición. Su duración depende, principalmente, de las condiciones bajo las cuales se encuentre produciendo el sistema (Shashipal et al., 2020). En esta zona las tareas de reactivación son posibles desde la eficiencia. En la **tabla 4.9** se presenta la información referente a los conjuntos de ajuste y prueba y los comportamientos predichos en la **figura 4.25**.

Tabla 4.9: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en la Zona de Transición

Arrendamiento	Conjunto de Ajuste [bbl]	Conjunto de Prueba [bbl]
Six M Farms ‘A’	[0 – 25]	[26 – 70]
Louie ‘A’	[0 – 50]	[51 – 150]
Estelle Smith	[0 – 30]	[31 – 70]

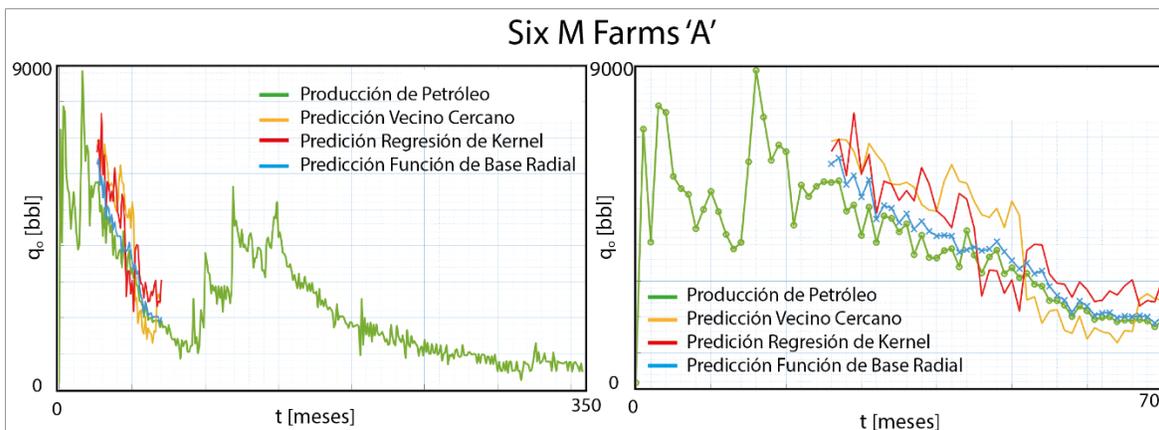


Figura 4.29: Predicción en la Zona de Transición del arrendamiento Six M Farms ‘A’

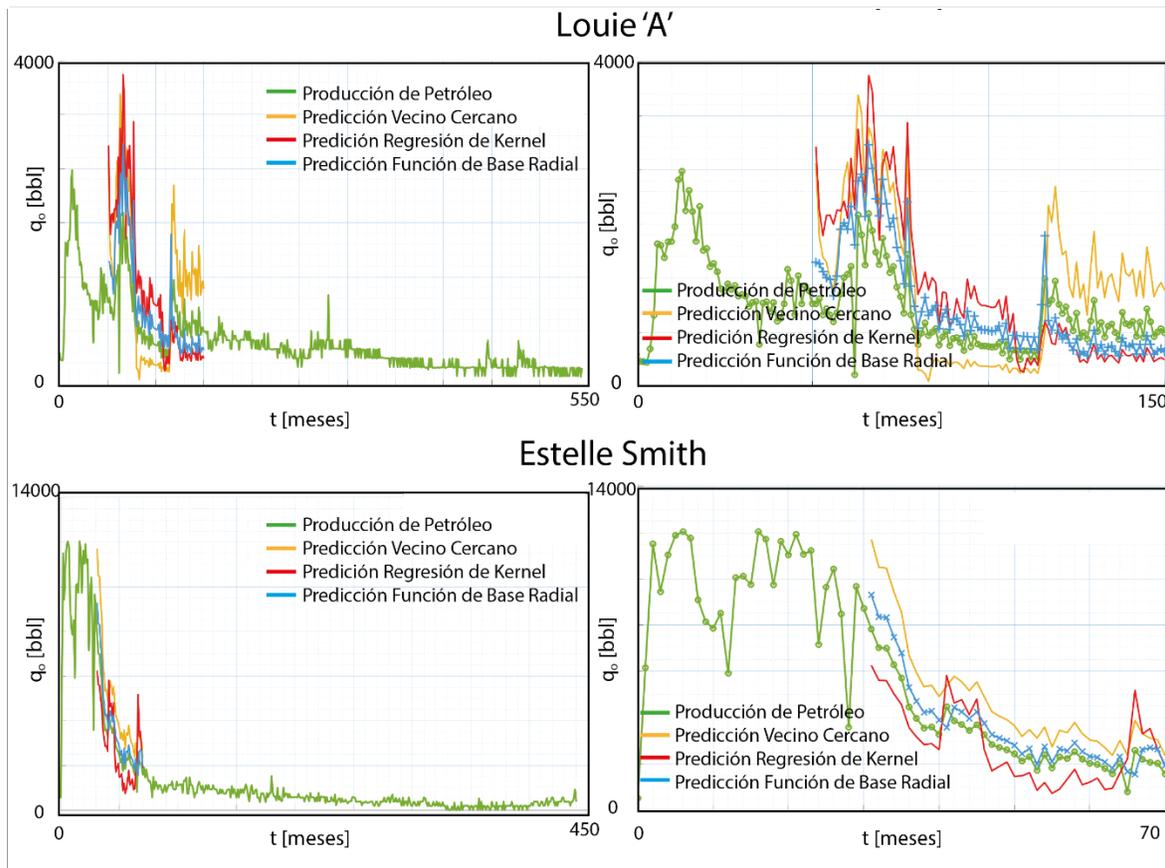


Figura 4.30: Predicciones en Zona de Transición de los arrendamientos Louie 'A' y Estelle Smith

Los 3 algoritmos generan buenas aproximaciones, pero debe señalarse que la Función de Base Radial es la que más se acerca al comportamiento objetivo. En la **tabla 4.10** se presenta el RSME y el coeficiente de correlación de las predicciones para cada una de las curvas.

Tabla 4.10: Error Cuadrático Medio y Coeficiente de Correlación en la predicción en la Zona de Transición

Arrendamiento	Algoritmo					
	Vecino Cercano		Regresión de Kernel		Función de Base Radial	
	RMSE	r	RMSE	r	RMSE	r
Six M Farms 'A'	198	0.9	204	0.92	132	0.96
Louie 'A'	650	0.69	720	0.72	579	0.8
Estelle Smith	205	0.86	254	0.91	183	0.95

4.9 Predicciones en Comportamiento Asintótico – Predicciones Estables

Finalmente, en el periodo de estabilización de la producción o de comportamiento asintótico donde los valores de producción son muy similares en delta de tiempo consecutivos, se predice de acuerdo con la información de la **tabla 5.5** y los resultados se muestran en la **figura 5.3**.

Tabla 4.11: Conjuntos de ajuste y prueba seleccionados para la predicción en la Zona de Transición

Arrendamiento	Conjunto de Ajuste	Conjunto de Prueba
Six M Farms 'A'	[0 – 189]	[190 – 358]
Louie 'A'	[0 – 300]	[301 – 544]
Estelle Smith	[0 – 100]	[101 – 440]

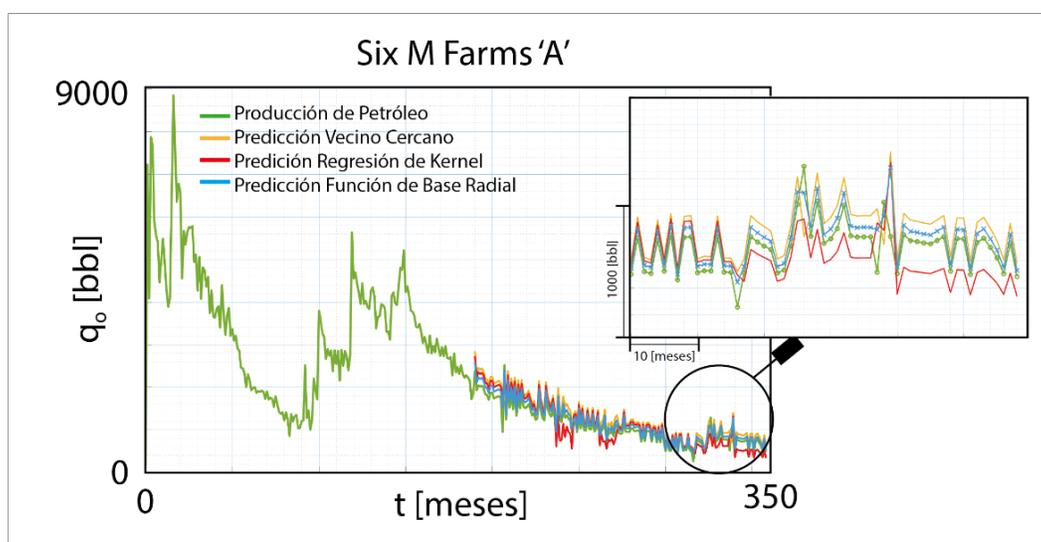


Figura 4.31: Predicción en Comportamiento Asintótico – Etapa Estable del arrendamiento Six M Farms 'A'

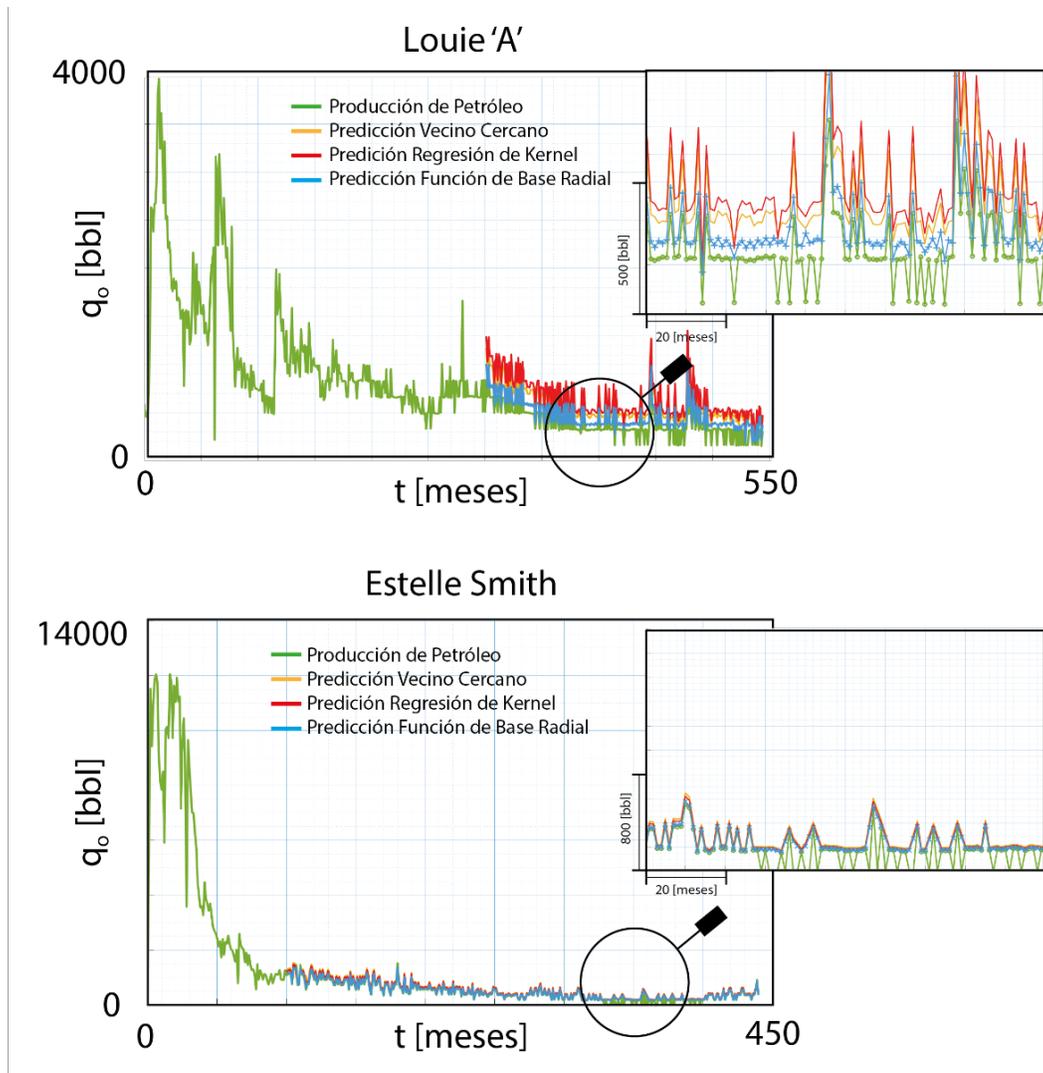


Figura 4.32: Predicciones en Comportamiento Asintótico – Etapa Estable de los arrendamientos Louie 'A' y Estelle Smith

Las predicciones en este periodo se mantienen constantes alrededor de un cierto valor y vuelve a ser el algoritmo de Función Base Radial el que mejor lo hace y los resultados se muestran en la **tabla 4.12**.

Tabla 4.12: Error Cuadrático Medio en la predicción en la Etapa Estable

Arrendamiento	Algoritmo					
	Vecino Cercano		Regresión de Kernel		Función de Base Radial	
	RMSE	r	RMSE	r	RMSE	r
Six M Farms 'A'	63	0.92	55	0.93	40	0.97
Louie 'A'	356	0.8	343	0.86	269	0.89
Estelle Smith	53	0.91	64	0.94	39	0.96

El ejercicio de distinguir diferentes ventanas de tiempo – producción – para mostrar las capacidades de los algoritmos ayuda para definir cuál de los seleccionados funciona mejor para predecir la dinámica de los sistemas mostrados. El algoritmo que lo hace bien para todos los periodos fue el de Función de Base Radial. El análisis asertivo de las series de tiempo puede ser utilizado para modelar la producción de petróleo y, con las predicciones generadas, alimentar simulaciones de procesos del yacimiento (Oluwafemi et al., 2014).

Conclusiones

Sobre el fenómeno:

- Las curvas de producción representan un proceso complejo. Los MRs de estas series de tiempo, desde la macroestructura, son muy similares y, por esto, los factores (naturales y antrópicos) que la componen no deberían ser desintegrados sin la ratificación absoluta de alguno(s) de sus componentes. Este hecho obliga a su consideración y análisis como un “todo”.
- Las etapas (o regiones) que constituyen a los MRs son claramente distinguibles: se considera que una curva ha completado la evolución del sistema si se reconocen, sin ambigüedad, cada una de estas fases.
- La etapa de producción inicial, cuya predicción es fundamental en la programación de las actividades de explotación, genera estructuras tipo tablero de ajedrez por lo que se califica como comportamiento caótico – determinista: la conducta es compleja pero muestra cierto grado de control. Conforme crece la componente caótica, el sistema es más sensible a las condiciones iniciales y cualquier modificación (por mínima que sea) de éstas podría ocasionar que el comportamiento de salida diverja (se separe absolutamente del pronóstico). Entonces, el estudio de esta zona debe considerar las incertidumbres paramétricas y desarrollarse con herramientas que permitan la visualización y simulación multiparamétrica, no lineal, de escenarios.
- Con los MRs se puede identificar la región de transición entre los máximos de producción y el inicio del decremento asintótico. Esta métrica permite la planificación y aplicación técnicas de reactivación en los “mejores” tiempos tomando en cuenta objetivos económicos (rentabilidad).
- La zona estable es el sello de los datos no – estacionarios, además indica que el proceso contiene un tendencia o desvío. Es decir, el sistema después del desequilibrio inicial escapa de este estado o se desvía hacia la zona blanca/amarilla y lo hará siempre.
- Se verifica con el estudio de los MRs el estado no transitorio (no estacionario) del sistema (arrendamiento). Los parámetros petrofísicos simples que indican ciertas cualidades del yacimiento, por ejemplo, la capacidad de contener petróleo, agua y/o

gas (porosidad), el porcentaje contenido de cada uno (saturación), la capacidad transmisión (permeabilidad efectiva), etc., cambian a partir de que el proceso de extracción comienza. Las variables antrópicas como rezago tecnológico, infraestructura física para la extracción de hidrocarburos o condiciones de mercado, por ejemplo, son parámetros cuya dinámica también se ratifica.

Sobre la herramienta:

- El reconocimiento de la(s) recurrencia(s) de las capturas de producción (medidas de la extracción / Δt) es posible con los MRs. La importancia de la aplicación de esta herramienta alternativa radica en que la recurrencia, como propiedad fundamental de los sistemas dinámicos, se puede aprovechar para caracterizar el comportamiento del sistema [masas naturales – procesos de extracción] en el espacio de fase.
- En el espacio de fase del sistema [masas naturales – procesos de extracción] cada estado posible del sistema o combinación permitida de valores de los parámetros del sistema, es un punto en el espacio multidimensional así la evolución del sistema trazada a lo largo del tiempo representa el conjunto de estados compatibles a partir de una condición inicial particular (**figura 4.23**). Entonces, lo calculado en esta tesis y mostrado con MRs representa todo lo que puede ser el sistema y su forma puede dilucidar fácilmente las cualidades del sistema que de otro modo no serían obvias.
- La calificación y cuantificación de los gráficos de recurrencia, específicamente en esta tesis los MRs, resulta muy eficaz para detectar las transiciones en la dinámica del sistema [masas naturales – procesos de extracción] a partir de sus series de tiempo. Conocimiento adicional sobre la estructura de cada componente (materia natural y decisiones de administración) podría añadirse a estos avances para caracterizar más contundentemente las recurrencias y definir acciones para mantener o sacar al sistema de ellas (en caso de que así convenga).
- Un punto principal de explotar los MRs es cómo vincular recurrencias a invariantes dinámicos y órbitas periódicas inestables. Particularmente determinar si el sistema [masas naturales – procesos de extracción] tiene una función dependiente del tiempo y está ligada a una función de entrada dependiente del tiempo, entonces este sistema

es invariante en el tiempo. Esto es muy importante ya que los sistemas no lineales invariantes en el tiempo carecen de una teoría completa de referencia.

Referencias

1. Abierta, S. U., Antonio, P., Sevilla, M., Doctor, A. : & Sandoval, R. M. *Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Filosofía y Letras Lecturas caóticas*. (2006).
2. Abraham, R.H. y Shaw, C.D. (1992). *Dynamic: the geometry of behavior*. E.U.A.: Addison – Wesley Publishing Company.
3. Al-Abbasi, A. *et al. SPE 163812 New Generation of Petroleum Workflow Automation: Philosophy and Practice*. (2013).
4. Alatríste, F. R. *Motores Brownianos: Transporte, Caos y Sincronización*. (2007).
5. Archer, J. S. and G. S. W. *Petroleum Engineering: Principles and Practice*.
6. Arps, J. J. *Analysis of Decline Curves*. (1945).
7. Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. *Self-organized criticality*. Vol. 38 (1988).
8. Bradley, E. e Iwanski, J.S. (1998) *Recurrence plots of experimental data: To embed or not embed?* Revista Chaos, vol 8.
9. Brockwell, R., Davis, R., *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer. Third Edition. (2016).
10. Buhmann, M. *Radial Basis Function*. Cambridge University Press (2003).
11. Cedillo, N. (2008). *Aplicación de la dinámica no lineal para caracterizar la función de la presión arterial y presión ventricular en rata Wistar*. UNAM
12. Chakraborty, C., Song, K.-Y., N Saraf, D. & M Gupta, M. Production Forecasting of Petroleum Reservoir applying Higher-Order Neural Networks (HONN) with Limited Reservoir Data. *Int. J. Comput. Appl.* **72**, 23–35 (2013).
13. Chen, G., Shah, D. *Explaining the Success of Nearest Neighbor Methods in Prediction*. Massachusetts Institute Technology. (2002).
14. Cook, R. A. & Davey, F. J. *Hydrocarbon exploration and potential. Antarctic sector of the Pacific* (1990).
15. De Régule, S. (2000). *Caos: el desorden ordenado*. México: ¿Cómo ves? Revista de Divulgación de la Ciencia en la UNAM, núm 22.
16. Du Sautoy, M. (2018). Henri Poincaré, *el profeta del caos que probó que hay problemas imposibles de resolver*. “Breve historia de las matemáticas”

17. Echeverri, J., Losada, M., Bravo, A. *Images improvement using radial basis function*. Revista Ingenierías, Universidad de Medellín (2009).
18. Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O. y Ruelle, D. (1987). *Recurrence plots of Dynamical Systems*. Europhysics Letters.
19. Elahi Hakim Siavash. A Novel Workflow for Oil Production Forecasting using Ensemble-Based Decline Curve Analysis. (2019).
20. Esteva, P. (1985). *Matemáticas y caos*. México: Revista Ciencias #8
21. Fanchi, J. R. Integrated Flow Modeling. *Angew. Chemie Int. Ed.* **6**, 951–952 (2000).
22. Franchi, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. (2005).
23. Fetkovich, M. J., Vienot, M. E., Bradley, M. D. & Kiesow, U. G. Decline-Curve Analysis Using Type Curves - Case Histories. *SPE Form. Eval.* **2**, 637–656 (1987).
24. Gannoun, A., Saracco, J., Yu, K. *Nonparametric prediction by conditional median and qualities*. Journal of statistical planning and inference. (2002).
25. Gao, J., & Cai, H. (2000). *On the structures and quantification of recurrence plots*. In Physics Letters A (Vol. 270). www.elsevier.nl/locate/pla
26. García, S. *Chaos theory for determining the fundamental period of soils Nanosustances for improving mechanical and dynamic properties of problematic soils View project Geodynamic laboratory View project*. <https://www.researchgate.net/publication/316045202> (2017).
27. García, S., Romo, M. (2013) *Characterization of ground motions using Recurrence Plots*.
28. Gupta, S., Fuehrer, F. & Jeyachandra, B. C. *SPE-171588-MS Production Forecasting in Unconventional Resources using Data Mining and Time Series Analysis*. (2014).
29. Hand, D. y Berethold, M. (2002). *Intelligent Data Analysis* (2da ed.). E.U.A.: Springer - Verlag
30. Härdle, W., Vieu, P. *Kernel Regression Smoothing of Time Series*. Journal of Time Series Analysis. (1992).
31. Höök, M. *Depletion and Decline Curve Analysis in Crude Oil Production Licentiate thesis*. (2009).
32. Jin, F. *Physics of Petroleum Reservoirs*. (2017).

33. King Dávalos, J. E. & Méndez Lango, H. *Sistemas dinámicos discretos*. (UNAM, Facultad de Ciencias, 2014).
34. Lèfevre, S., Sun, C., Bajcsy, R., Laugier, C. *Comparision of Parametric and Non – Parametric Approaches for Vehicle Speed Prediction*. American Control Conference. (2014)
35. Liu, W., Liu, W. D. & Gu, J. Forecasting oil production using ensemble empirical model decomposition based Long Short-Term Memory neural network. *J. Pet. Sci. Eng.* **189**, 107013 (2020).
36. Lockwood, G. W. & Cannon, D. E. Production Forecasting. *JPT, J. Pet. Technol.* **34**, 413–418 (1982).
37. Lozano, M. V. Apuntes de clase: Propiedades de los Fluidos Petroleros. 137–176 (2016).
38. L.P.Dake. *Fundamentals of Reservoir Engineering. Proceedings - SPE Annual Technical Conference and Exhibition* vol. Sigma (1993).
39. Mannon, R. W. Some aspects of production forecasting. *Soc. Pet. Eng. - SPE Rocky Mt. Reg. Meet. RM 1964* (1964) doi:10.2118/832-ms.
40. Masini, S. R., Goswami, S., Kumar, A., Chennakrishnan, B. & Baghele, A. *OTC-30332-MS Artificial Intelligence Assisted Production Forecasting and Well Surveillance*. (2020).
41. Martínez, G. (2000). *Una aproximación a los sistemas complejos*. México: RevistaCiencias, UNAM, núm. 59 – 6
42. Martínez V.J., Ballesteros, F.J., y Paredes, S. (2017). *Fractales y caos: la aventura de la complejidad*. España: Talenbook.
43. Marwan, N. Romano, M.C., Thiel, M y Kurths, J. (2007). *Recurrence plots for the analysis of complex systems*. Physics Reports, vol. 438.
44. McCain, W. D. Reservoir-Fluid Property Correlations-State of the Art (includes associated papers 23583 and 23594). *SPE Reserv. Eng.* **6**, 266–272 (1991).
45. Miramontes, P (1998). *Predecir el clima es una cosa, predecirlo correctamente es otra*. México: Revista Ciencias #51
46. Padilla, J. M., Silvia, D. & García Benítez, R. *Caracterización de registros sísmicos del Valle de México utilizando Mapas de Recurrencia P R E S E N T A*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO FACULTAD DE INGENIERÍA.

47. Poston, S. W. & Poe, B. D. Analysis of production decline curves. 158 (2008).
48. Pratikno, H., Rushing, J. A. & Blasingame, T. A. Decline Curve Analysis Using Type Curves - Fractured Wells. *Proc. - SPE Annu. Tech. Conf. Exhib.* 2023–2036 (2003) doi:10.2118/84287-ms.
49. Rebeschini, J. *et al. SPE 167393 Building Neural-Network-Based Models Using Nodal and Time-Series Analysis for Short-Term Production Forecasting.* (2013).
50. Richard Baker. *Streamline Technology - Reservoir History Marching and Forecasting.* (2001).
51. Rodríguez, J. L. V. *Pronósticos de Producción en Yacimientos Naturalmente Fracturados.* (2015).
52. Satter, A. & Iqbal, G. M. *Reservoir Engineering: The Fundamentals, Simulation, and Management of Conventional and Unconventional Recoveries. Reservoir Engineerig: The Fundamentals, Simulation, and Management of Conventional and Unconventional Recoveries* (2015).
53. Schifter, I. (2003). *La ciencia del caos* (3ra edición). México: Fonde de Cultura Económica.
54. Sheremetov, L. B., González-Sánchez, A., López-Yáñez, I. & Ponomarev, A. V. Time series forecasting: Applications to the upstream oil and gas supply chain. in *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* vol. 46 957–962 (IFAC Secretariat, 2013).
55. Shumway, R., Stoffer, D. *Time Series Analysis and its Applications.* Springer. Third Edition, (2011).
56. Sun, H. *Advanced production decline analysis and application.* (2015).
57. Takeda, H., Farsiu, S., Milanfar, P. *Kerner Regression for Image Processing and Reconstruction* (2007).
58. Taunk, K., De, S., Verma, S., Swetapadma, A. *A Brief Review of Nearest Neighbor Algorithm for Learning and Classification* (2019).
59. Wheaton, R. *Fundamentals of Applied Reservoir Engineering: Appraisal, Economics and Optimization. Fundamentals of Applied Reservoir Engineering:*

- Appraisal, Economics and Optimization* (2016). doi:10.1016/C2015-0-04617-2.
60. Yogendra, N., Ayush, R., Sribharath, K., Srimoyee, B., Saputelli, L. *Machine Learning in the Oil and Gas Industry*. Apress. Firts Edition. (2019)

ANEXO A

En esta sección se describen los algoritmos de predicción no paramétrica utilizados.

Vecino Cercano

El algoritmo Vecino más Cercano es un algoritmo de aprendizaje supervisado no paramétrico, que utiliza la proximidad para hacer clasificaciones o predicciones sobre un conjunto de datos (Taunk et al., 2019).

El algoritmo asume que los datos se encuentran en un espacio de características y, sus instancias o puntos se pueden ubicar en un espacio métrico. Los datos pueden ser escalares o vectores multidimensionales, pero deben tener una noción de *distancia* (figura A.1) (Rangel et al., 2018).

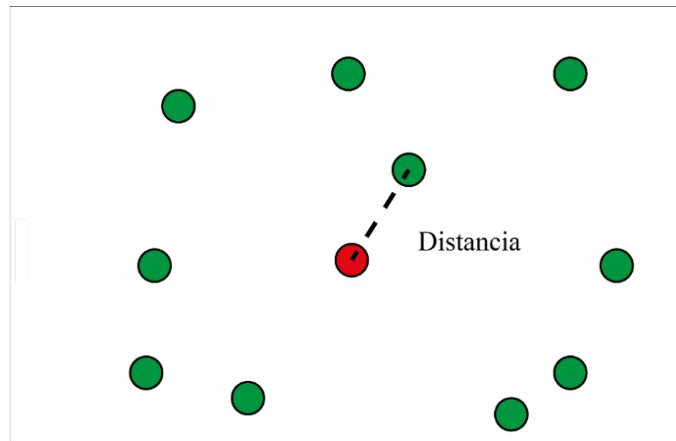


Figura A.1: Algoritmo Vecino más Cercano, modificada de Tanuk (2019)

En la regresión de vecino cercano, para determinar cuál debe ser la etiqueta para un punto $x \in X$, se deben encontrar sus k vecinos más cercanos en los datos de ajuste del modelo y promediar sus etiquetas (Chen et al., 2017). Para ser más precisos, sea $(X_{(i)}(x), Y_{(i)}(x))$ el i –ésimo punto más cercano entre los datos de ajuste $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. Entonces, la distancia entre cada dato de ajuste x satisface:

$$p(x, X_{(1)}(x)) \leq p(x, X_{(2)}(x)) \leq \dots \leq p(x, X_{(n)}(x)) \quad (\text{A.1})$$

La estimación de la función de regresión (η) al punto $x \in X$ es la etiqueta promedio de los k vecinos cercanos:

$$\hat{\eta}_{k-NN}(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{(i)}(x) \quad (\text{A.2})$$

donde se pre – especifica el número de vecinos cercanos $k \in \{1,2,3 \dots n\}$

Regresión de Kernel

Los métodos de regresión de Kernel se utilizan muy comúnmente para la detección de patrones y problemas de discriminación (Takeda, 2007). Funcionan por medio de estimadores promedios ponderados que utilizan “funciones de Kernel” (K) como ponderaciones.

Entonces, sea la función de Kernel $K: R_+ \rightarrow [0,1]$ que toma como entrada una distancia normalizada (porque se divide entre el ancho de banda, $h > 0$) y genera una puntuación de similitud entre 0 y 1. Específicamente, la estimación de regresión de Kernel para $\eta(x)$ se denota como (Chen et al., 2017):

$$\hat{\eta}_K(x; h) \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{p(x, X_i)}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{p(x, X_i)}{h}\right)} ; \text{ solo sí : } \sum_{i=1}^n K\left(\frac{P(x, X_i)}{h}\right) > 0 \\ 0; \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Una suposición natural que se realiza es que K es decreciente, lo que quiere decir que dos puntos que se encuentran más lejos tienen una puntuación de similitud más pequeña (o posiblemente la misma).

La función Kernel (K) afecta cuánto contribuye cada punto de entrenamiento (X_i) a la predicción final a través de un promedio ponderado. Idealmente, para un punto de prueba x , los puntos de entrenamiento con etiquetas diferentes a la etiqueta esperada $\eta(x)$ deberían aportar poco o ningún peso al promedio ponderado. En lugar de reducir los puntos de entrenamiento con etiquetas diferentes a la etiqueta esperada $\eta(x)$, la función kernel K reduce los puntos de entrenamiento que están lejos de x . La esperanza es que los puntos de entrenamiento cercanos a x tengan etiquetas cercanas a $\eta(x)$, y los puntos de entrenamiento más alejados de x tengan etiquetas que puedan desviarse más de $\eta(x)$. Por lo tanto, además

de elegir el ancho de banda (h) para que no sea demasiado pequeño ni demasiado grande o, ahora tenemos la flexibilidad adicional de elegir la función kernel K , que debería decaer lo suficientemente rápido como para reducir el impacto de los puntos de entrenamiento de x que puede tener etiquetas diferentes a $\eta(x)$. Algunos ejemplos de funciones de Kernel se presentan en la **figura A.2**.

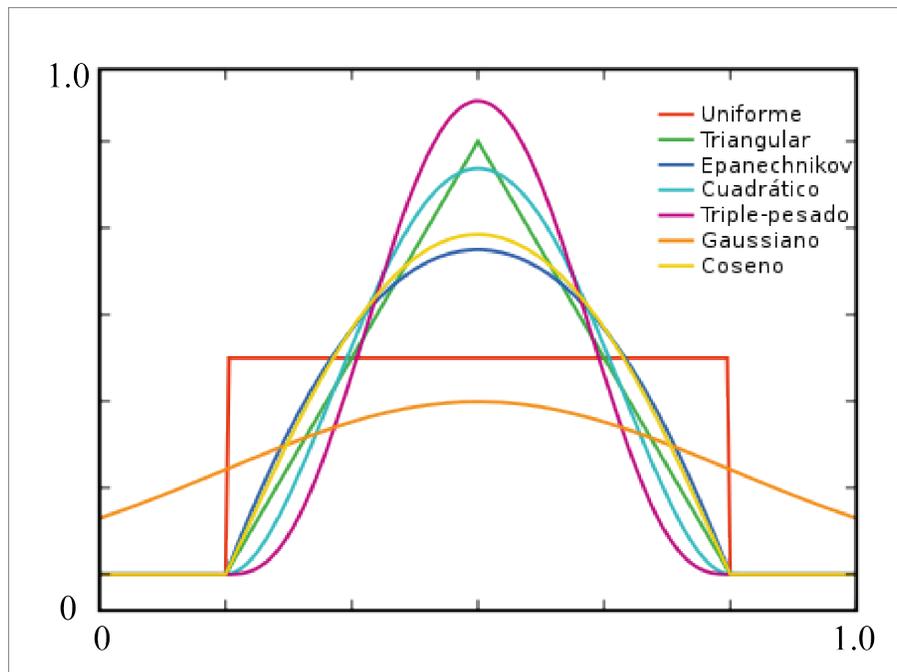


Figura A.3: Ejemplos de funciones de Kernel, modificada de Takeda (2019)

Función de Base Radial

Las Funciones de Base Radial (FBR) es un algoritmo ampliamente utilizado para estimar funciones multi – variables. Sea α un conjunto finito de puntos en R^n , que tradicionalmente se denominan centros dado que las FBR serán radialmente simétricas. El objetivo es aproximar una función $s(x)$ desconocida que solo se presenta en esos centros de un conjunto de números reales (Buhman, 2000).

Sea Ξ un conjunto finito de puntos distintos en R^n , que tradicionalmente se denominan centros de funciones de base radial, porque nuestras funciones de base serán radialmente simétricas con respecto a estos puntos. El objetivo es aproximar una función desconocida que solo se da en esos centros a través de un conjunto de números reales $f_\xi \in \mathbb{R}, \xi \in \Xi$. Estos casi siempre se interpretan como evaluaciones de funciones de alguna función suave $f: R^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$\Omega \rightarrow R$, de modo que $f_\xi = f(\xi)$. Aquí, Ω es un dominio en R^n . Este punto de vista nos permitirá medir convenientemente el error de aproximación uniforme entre f y su aproximante s . Este error depende de la elección de la aproximante, de Ξ , de f , y en particular de su suavidad.

Para aproximarnos con s , que suele ser por interpolación, tomamos una función continua univariante φ que se radializa por composición con la norma euclidiana en R^n , o un reemplazo adecuado de la misma cuando estamos trabajando en una esfera en un espacio euclidiano de n dimensiones, por ejemplo. Esta $\varphi: R_+ \rightarrow R$ es la *función de base radial*. Además, tomamos los centros dados ξ del conjunto finito dado Ξ de puntos distintos y se usan simultáneamente para desplazar la función de base radial y como puntos de interpolación (colocación). Por lo tanto, nuestras aproximaciones estándar de funciones radiales ahora tienen la forma:

$$s(x) = \sum_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \varphi(\|x - \xi\|), \quad x \in R^n \quad (\text{A.4})$$

Se hacen los ajustes adecuados cuando x no es de todo el espacio, y el vector de coeficientes $\lambda = (\lambda_{\xi \in \Xi})$ es un elemento de R^Ξ . En muchos casos, la interpolación requiere:

$$s|_\Xi = f|_\Xi \quad (\text{A.5})$$