UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Fundamentos de la Teoría Espectral, Operadores Continuos y Álgebras de Banach

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA: JORGE ALBERTO COLEOTE DOMÍNGUEZ

DIRECTOR: DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

CIUDAD DE MÉXICO FEBRERO 2023

Dedicatoria

Dedicado a la perseverancia

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi madre por sus palabras de aliento y ánimo durante todos mis estudios. Por otra parte también le agradezco sinceramente a la Universidad Nacional Autónoma de México por su gran hospitalidad y generosidad durante los años de mis cursos de maestría, en particular a los profesores de posgrado Dra. Edith Corina Saénz, Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña, Dr. Hugo Arizmendi Peimbert, Dra. Eugenia O'Reilly Regueiro, Dra. Catherine García Reimbert y Dra. Silvia Ruíz Velasco, ya que ellos fueron muy buenos y comprensivos conmigo. A su vez agradezco a Tere, María Inés y Lucy de las oficinas del posgrado, porque fueron extremadamente amables y agradables en la Unidad de Posgrado. También quisiera agradecer a los compañeros de cursos de posgrado que me brindaron su ayuda. Por último le doy las gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo.

Muchas gracias!

Prefacio

El trabajo de tesis de Maestría que presento es del área de Análisis; comprende un tratado con resultados interesantes de la teoría de los espacios de Banach y del Álgebra de Operadores. Estos temas del área de Análisis Matemático fueron de interés durante mi maestría en la UNAM, y generalmente son de dominio de todo posgraduado de Matemáticas. Cabe señalar que como es una tesis de posgrado hemos omitido algunos teoremas, conceptos y definiciones que se estudian en niveles más básicos de Matemáticas; por tal motivo se espera que el lector tenga la suficiente preparación para abordar la lectura de este trabajo.

En el capítulo 1, que es la introducción de este trabajo, se presenta el objetivo de este trabajo.

En el segundo capítulo se exponen los conceptos sobre álgebras y espacios topológicos relacionados al análisis matemático; tales como *Álgebra desde un espacio vectorial, Espacios Métricos y Topología inducia por una métrica*, entre otros.

En el capítulo tercero de este trabajo, entraremos en detalles más avanzados y minuciosos relacionados a los temas de *espacios completos y normados, Teoría espectral, y Espacios y Álgebras de Banach.*

Ya en el cuarto capítulo, se tratará el tema de funcionales lineales multiplicativos, para lo cual solo consideraremos álgebras conmutativas. Para estos temas es deseable contar con un nivel avanzado en temas de análisis complejo.

De esta forma, en este trabajo quisimos ahondar en los fundamentos de estos temas de una forma más avanzada que en el círculo básico que se ve en la licenciatura. Esto se hizo principalmente considerando varios tipos de normas definidas en un álgebra; además se estudió Teoría Espectral y su relación con los funcionales y operadores[1]. Se verá que estos últimos son continuos si y sólo si son acotados con la norma definida en su espacio, y posteriormente estudiaremos los operadores lineales multiplicativos.
Todo lo anterior tiene como objeto, llegar a comprender como actúan otros espacios de las matemáticas, más allá de los conocidos campos de los reales o complejos, los cuales son solo una pequeña parte de las matemáticas.
Espero que este trabajo sea del agrado del lector y que no resulte tedioso.

[1]Normalmente se llama funcionales a las funciones lineales con valores en el campo $\mathbb{C}$, y operadores a las funciones lineales entre espacios vectoriales iguales

Índice general

Fundamentos de la Teoría Espectral, Operadores Continuos y Álgebras de Banach

Jorge Alberto Coleote Domínguez

01/02/2023

Capítulo 1

Introducción

OBJETIVO DE LA TESIS: Las aportaciones relevantes de esta tesis se resumen en decir que: **Se centra en dar un panorama adecuado de una buena parte de lo que alguien interesado en conocer la Teoría de Operadores y su relación con las Álgebras de Banach necesita saber para abordar el estudio en forma seria.**

Los números π y e son fundamentales en las matemáticas. El primero de ellos, π, es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, era conocido desde los tiempos de la antigua Babilonia. El segundo, e, conocido como el número de Euler o constante de Napier, aparece en varias ramas de las matemáticas, al ser la base de los logaritmos naturales. Ambos números son irracionales y trascendentes.
A continuación presentamos las pruebas de la irracionalidad de ambos como una motivación del estudio de la parte del Análisis Funcional relativa a los espacios y álgebras de Banach. También presentamos aquí una historia del desarrollo del Análisis Funcional durante el final del siglo XIX y el principio del XX, la cual es parte de la conferencia por invitación impartida por la Dra. Berta Gamboa de Buen en las Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas organizadas por la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV y el CIMAT, y celebradas en el CIMAT, Guanajuato, Gto., del 20 al 22 de mayo de 1999.

Los conceptos, proposiciones y demostraciones que se presentan en este capítulo fueron tomados de [9], [10] y [19].

1.1. Prueba de la Irracionalidad del número e

Pocos son los resultados analíticos de las matemáticas tan interesantes, como la irracionalidad del número de Euler, cuya prueba se presenta a continuación:

Proposición 1.1.1 (Demostración de la irracionalidad del número e de Euler)**.** *El número*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots > 0$$

es irracional.

Demostración. La prueba se hará por contradicción.

Entonces supongamos que $e \in \mathbb{Q}$, así $\exists a, b \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ tal que $e = a/b$

$$\Rightarrow b!e = b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!} + \cdots$$

$$= (b-1)!a \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}.$$

Ahora sea S un número de la siguiente forma

$$S = b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!} \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\};$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^+ \setminus \{0\} \ni R = b!e - S &= \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \frac{b!}{(b+3)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+2)(b+1)} + \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} + \cdots \\ &< \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \frac{b+1}{b} - 1 = \frac{1}{b} \leq 1.\end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido que $\mathbb{Z}^+ \setminus \{0\} \ni R < 1$, pero esto es una contradicción ya que ningún entero positivo es menor que 1 (note que $\mathbb{Z}^+ \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$).

Por lo tanto e debe ser irracional. $\square$

1.2. Prueba de la Irracionalidad de π

También la irracionalidad del número π, tiene mucho de interesante en la comunidad matemática; a continuación la presentamos:
Esta sección se incluye en este trabajo de tesis para demostrar que estamos ya en condiciones de entrar en matemática de cierta altura. Se dedica a una demostración elemental de que π es irracional.
Dos observaciones deben hacerse antes de la demostración. La primera se refiere a la función

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

la cual satisface, evidentemente,

$$0 < f_n(x) < \tfrac{1}{n!} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1.$$

Una propiedad importante de la función f_n queda revelada al considerar la expresión que se obtiene al desarrollar $x^n(1-x)^n$. La menor potencia de x que aparece será n y la mayor $2n$. Así pues, f_n puede escribirse en la forma

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

donde los números c_i son enteros. De esta expresión es evidente que:

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad k < n \text{ o } k > 2n.$$

Además,

$$f_n^{(n)}(x) = \tfrac{1}{n!}[n!c_n + p_n(x)]$$

$$f_n^{(n+1)}(x) = \tfrac{1}{n!}[(n+1)!c_{n+1} + p_{n-1}(x)]$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n-1)}(x) = \tfrac{1}{n!}[(2n-1)!c_{2n-1} + p_1(x)]$$

$$f_n^{(2n)}(x) = \tfrac{1}{n!}[(2n)!c_{2n}],$$

donde p_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es un polinomio con coeficientes enteros δ_k, todos distintos de cero, de la forma

$$p_k(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \delta_k x^k.$$

Esto significa que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n,$$

$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1},$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x) = (2n)(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n},$$

donde los números de la derecha son todos enteros. Así pues,

$$f_n^{(k)}(0) \text{ es un entero para todo } k.$$

La relación

$$f_n(x) = f_n(1-x)$$

indica que

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x);$$

por lo tanto,

$$f_n^{(k)}(1) \text{ es también un entero para todo } k.$$

La demostración de que π es irracional exige una observación más: si a es un número cualquiera, y $\varepsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande tendremos

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Para demostrar esto, obsérvese que si $n \geq 2a$ entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Sea ahora n_0 un número natural cualquiera con $n_0 \geq 2a$. Entonces, cualquiera que sea el valor de

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

los valores sucesivos satisfacen

$$\begin{array}{lcl}
\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} & < & \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} & < & \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} & < & \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.
\end{array}$$

Si k es tal que $\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon} < 2^k$, entonces

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon,$$

lo cual es el resultado deseado. Una vez hechas estas observaciones, estamos preparados para el único teorema en esta subsección.

Teorema 1.2.1. *El número π es irracional; en efecto, π^2 es irracional. (Obsérvese que la iracionalidad de π^2 implica la irracionalidad de π, pues si π fuese racional, entonces ciertamente lo sería también π^2.)*

Demostración. Supóngase que π^2 fuese racional, de modo que

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

para ciertos números positivos a y b. Sea

$$G(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]. \tag{1.1}$$

Obsérvese que cada uno de los factores

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = b^n a^{n-k} b^{k-n} = a^{n-k} b^k$$

es entero. Puesto que $f_n^{(k)}(0)$ y $f_n^{(k)}(1)$ son enteros, esto demuestra que

$$G(0) \text{ y } G(1) \text{ son enteros.}$$

Derivando G dos veces se obtiene

$$G''(x) = b^n[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)]. \tag{1.2}$$

El último término, $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$ es cero. Así pues, sumando (1.1) y (1.2) se obtiene

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x). \tag{1.3}$$

Sea ahora

$$H(x) = G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x)\cos(\pi x) + G''(x)\sin(\pi x) - \pi G'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 G(x)\sin(\pi x) \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)]\sin(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x), \text{ según (1.3).} \end{aligned}$$

Según el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal,

$$\begin{aligned} \pi^2 \textstyle\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1)\sin(\pi) - \pi G(1)\cos(\pi) - G'(0)\sin(0) + \pi G(0)\cos(0) \\ &= \pi[G(1) + G(0)]. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx \text{ es un entero.}$$

Por otra parte, $0 < f_n(x) < 1/n!$ para $0 < x < 1$, de modo que

$$0 < \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} \text{ para } 0 < x < 1.$$

En consecuencia,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Este razonamiento ha sido independiente por completo del valor de n. Ahora bien, si n es suficientemente grande, entonces

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Pero esto es absurdo, puesto que la integral es un entero, y no existe ningún entero entre 0 y 1. Así pues, nuestra suposición original debe haber sido incorrecta, por tanto, π^2 es irracional. $\square$

También existen en el área de análisis matemático conceptos muy interesantes como los Espacios de Banach, Álgebras de Banach y Operadores continuos. Pero es frecuente preguntarse: ¿cuál fue su origen?
Para responder esta pregunta tenemos lo siguiente:

1.3. Breve Historia del Origen del Análisis Funcional

El análisis funcional surge y se desarrolla como disciplina propia en el siglo XX, generado por la evolución del análisis clásico, de la física matemática y de las nuevas ideas del álgebra y de la geometría, y muy ligado al progreso de la topología.

1.3.1. Antecedentes

Las ecuaciones cuyas incógnitas son funciones son el objeto esencial de estudio de los analistas del siglo XIX. En 1822 Fourier publicó su trabajo de transferencia de calor en *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor), en la que basó su razonamiento en la *ley de enfriamiento de Newton*, esto es, que la trasferencia de calor entre dos moléculas adyacentes es proporcional a diferencias extremadamente pequeñas de sus temperaturas. En este libro Fourier expone la ecuación del calor para la difusión conductiva del calor. Esta ecuación en derivadas parciales es actualmente objeto de estudio en la física matemática. A las ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales, cuyo estudio había comenzado durante el siglo XVIII, se añadieron a partir del siglo XIX las ecuaciones integrales, las ecuaciones integro-diferenciales y otros tipos de ecuaciones funcionales.
Poco a poco, y paralelamente con la evolución en el Álgebra Lineal que da a la noción de matriz y luego a la de aplicación lineal un papel preponderante, la noción de ecuación cede lugar al concepto de operador o de funcional.
Asimismo, la comunidad se acostumbra paulatinamente a la idea de que se debe manipular a las funciones como objetos matemáticos *primitivos*, es decir, como elementos del espacio desprovistos de la idea de desarrollo progresivo ligado a una variación, y a partir de la expansión del lenguaje conjuntista se empieza a considerar sistemáticamente a los conjuntos cuyos elementos son funciones.
Por otra parte el carácter dinámico del análisis, que diera nacimiento al cálculo infinitesimal, se acentúa y se diversifica, sobre todo bajo la influencia de Riemann y Poincaré.

En efecto, en el siglo XVIII aumentó considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica, causaban todavía confusión y controversia sobre sus fundamentos. Uno de sus críticos más notables fue el filósofo Berkeley.
En el siglo XIX los analistas matemáticos sustituyeron esas vaguedades por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas: Bolzano y Cauchy definieron con precisión los límites y las derivadas, Cauchy y Bernhard Riemann hicieron lo propio con las integrales, y Dedekind y Weierstrass con los números reales. Por ejemplo, se supo que las funciones diferenciables son continuas y que las funciones continuas son integrables, aunque los recíprocos son falsos.

Ahora lo que varía, no son únicamente los números, sino también las funciones consideradas como puntos de un espacio, y hacía finales del siglo XIX se impone la distinción entre diferentes nociones de convergencia de una sucesión de funciones hacia una función límite, lo que conducirá a la idea general de topología sobre un conjunto de funciones y, por extensión, dará origen a la topología general.
Así, a estos conjuntos de funciones se les va dotando de ciertas estructuras algebraicas y topológicas que permiten realizar en ellos muchas de las operaciones del análisis clásico, y se les llama espacios funcionales, origen del nombre análisis funcional: estudio de los espacios funcionales.
Una vez teniendo como objeto de estudio espacios cuyos puntos son funciones, es posible dar otro salto cualitativo y estudiar espacios abstractos con definiciones abstractas, que es ahora como se trata esta rama de las matemáticas.
Por ejemplo, en 1903 Erik Ivar Fredholm desarrolló un método para resolver la ecuación

integral

$$\int_a^b k(x,y)\phi(y)dy = \phi(x),$$

en ciertos casos: se trata de expresar la función buscada ϕ mediante otras funciones. La existencia de la solución depende de la función $k(x,y)$, la cual es llamada en este caso «kernel integral».

Entre 1903 y 1907, la escuela matemática de Gotinga, unida en torno a David Hilbert , utiliza y desarrolla el método de Fredholm, el cual se asemeja mucho al método del álgebra lineal para resolver un sistema de ecuaciones. Al hacerlo, se desarrolla una correspondecia entre los espacios funcionales y la geometría; en particular, Hilbert introduce una forma cuadrática usando las funciones propias de estas ecuaciones integrales y de los extremos de los valores propios, y luego da una descripción de las soluciones de la ecuación integral. Es Erhard Schmidt quien depura la situación en 1905, en su tesis, al definir directamente un producto escalar que permite una lectura de espacios de funciones como espacios euclidianos de dimensión infinita, y encuentra las soluciones ya planteadas por Hilbert, utilizando lo que hoy se llama «las funciones propias del operador»(la noción general de operador no está definida en esta fecha).

1.3.2. Entre 1907 y 1920: Riesz y Fréchet

En 1907, utilizando series de Fourier, Riesz demostró la «equivalencia»entre un espacio de sucesiones, y un espacio de funciones: estos espacios se denotarán, posteriormente, ℓ^2 para el espacio de sucesiones y L^2 para el espacio de funciones. Además, Riesz especifica la estructura geométrica del espacio $L^2([0,2\pi])$ mediante las relaciones de ortogonalidad y de base ortonormal . El teorema se denominará en lo sucesivo teorema de Riesz-Fischer, porque Fischer había dado una demostración de él de forma independiente y casi simultánea. Poco tiempo después, Maurice Fréchet publicó un artículo (Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées) en el que definía:

- una topología de funciones a partir de una noción de distancia entre funciones integrables (en el sentido de Lebesgue) definida en $[0,2\pi]$ (definida a partir de su tesis), y utilizando la noción de convergencia definida por Frédéric Riesz, el año anterior, a partir de cálculos similares a la distancia de Fréchet;
- el concepto de operador lineal, limitado a los continuos, de los que se atribuye la invención a Jacques Hadamard.

La principal herramienta utilizada por Fréchet es la equivalencia de Riesz, el principal teorema demostrado es lo que ahora llamamos el teorema de representación de Riesz en el caso del espacio $L^2([0,2\pi])$; Fréchet también demuestra, de forma analítica, un criterio necesario y suficiente para que un subconjunto de $L^2([0,2\pi])$ sea completo, utilizando un vocabulario extraído de la geometría euclidiana (habla de espacio «acotado»de funciones) y análisis.

En 1908, el Congreso Internacional de Matemáticos se reunió en Roma, donde se establecieron estándares de denominación y escritura para asegurar la unidad de este campo naciente pero aún no nombrado. De un extremo a otro de Europa y en los Estados Unidos, respetan este deseo de unidad.

En 1916, Riesz redefine el conjunto de estructuras de forma abstracta y general sobre el espacio de funciones continuas en un segmento, definiendo la norma de una función

$$\|f\| = \sup |f(x)|$$

y la continuidad de un operador lineal U, esto es, la existencia de una constante positiva M tal que

$$\forall f, |U(f)| \leq M\|f\|$$

y la más pequeña de estas constantes es, por definición, la norma $\|U\|$ porque satisface las propiedades usuales de las normas. Además, la métrica así definida hace de este espacio un espacio completo, término introducido posteriormente por Stefan Banach.

1.3.3. Años posteriores a la Primera Guerra Mundial

Después de la Primera Guerra Mundial, la resurgente Polonia decidió construir una escuela polaca de matemáticas, como símbolo del renacimiento intelectual: la atención se centró principalmente en la lógica matemática, la topología y el análisis funcional que finalmente llegó a ser llamado así en esta época. Durante más de diez años de esfuerzos en este último campo se ilustran matemáticos como Hugo Steinhaus, Stanisław Saks, Otto Toeplitz y Ernst Hellinger. Luego, en 1932, Stefan Banach le dio a esta escuela sus letras de nobleza: publicó su libro *Teoría de los Operadores Lineales*.
Este texto abandona la analogía entre espacios vectoriales de dimensión finita y espacios funcionales al exhibir diferentes topologías posibles para cada espacio funcional (mientras que en dimensión finita todas las métricas definen la misma topología). Sin embargo, al incluir todo el trabajo anterior, se nota la marcada diferencia entre el texto de Banach y sus predecesores. Es en este tiempo cuando surgen el teorema de Hahn-Banach , el teorema de Banach-Steinhaus y el del mapeo abierto .
La arquitectura de este texto, particularmente eficaz, constituye todavía hoy la base teórica de este campo y ciertas demostraciones siguen siendo las de origen, pero no deja problemas menos abiertos «además no fáciles de solucionar», comenta Banach, que alimentará la investigación matemática hasta la década de 1970.
Ya en el año de 1932, John von Neumann publicó *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, cuya importancia todavía se siente hoy a través de la geometría no conmutativa de Alain Connes. Este trabajo enriquece los de su profesor, Hilbert, al definir los espacios de Hilbert sobre el modelo de L^2 y sus operadores, mostrando todo su interés y abriendo nuevas vías de investigación que van más allá del análisis funcional.

Capítulo 2

Conceptos Algebraicos y Topológicos

El objetivo de este capítulo es recordar conceptos algebraicos y topológicos referentes a Análisis Funcional. Se asumirá que la mayoría de ellos son esencialmente conocidos por el lector. Sin embargo otros no lo son tanto. Cabe mencionar que por brevedad se omitirán algunas demostraciones. Las definiciones, teoremas, proposiciones y ejemplos en este capítulo fueron tomadas en parte de la bibliografía [7], [12] y [20].

2.1. Notación de Teoría de Conjuntos y Funciones

En esta ocasión utilizaremos los siguientes símbolos (muy conocidos) que funcionarán a modo de operaciones de conjuntos: $A \cup B$ denota la unión, $A \cap B$ la intersección, $A - B$ (o quizá también $A \setminus B$) la diferencia de conjuntos A y B, $X - A$ es el complemento del conjunto A. Así mismo, los símbolos:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha, \bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A \text{ ó } \bigcup \mathfrak{U} (= \bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A)$$

significan uniones infinitas; y similarmente para intersecciones.
Ahora, la clase de todos los subconjutos de un conjunto X se denotará por 2^X. También vamos a escribir el producto Cartesiano de dos conjuntos A y B como $A \times B$, y a su vez un producto infinito de este tipo lo denotaremos por:

$$\prod_{\alpha \in \mathfrak{I}} A_\alpha,$$

esto último también se podrá escribir como:

$$A^{\mathfrak{U}}$$

siempre y cuando todas las A_α's sean idénticas a un conjunto A. Prosiguiendo, tenemos también que el subconjunto de todos los elementos x de un conjunto X que cumplen con una propiedad W (i. e., para los cuales $W(x)$ se cumple) será denotado por:

$$\{x \in X : W(x)\}.$$

El símbolo $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ significa el conjunto finito que consiste de los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\emptyset$ denotará al conjunto vacio.
El hecho de que una función φ esté definida sobre un conjunto A y tome valores en el

conjunto B será escrito por $\varphi : A \to B$; la función en sí misma será denotada por φ o por el símbolo $x \mapsto \varphi(x)$, donde el símbolo $\varphi(x)$ será reservado para el valor de φ en el punto $x \in A$. La función característica χ_A relativa a un subconjunto $A \subseteq X$ es definida por la ecuación:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

En particular, si X es el conjunto $\mathbb{N}$ de todos los enteros positivos o el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros, entonces la función característica del conjunto $\{n\}$, que consiste del único punto n, será denotado por el *símbolo de Kronecker* $k \to \delta_{nk}$.
También tenemos que el símbolo B^A será empleado para denotar a la familia de todas las funciones de un conjunto A al conjunto B. Esta notación coincide por ejemplo con la notación $A^{\mathfrak{U}}$ y 2^X (lo último se justifica por una identificación del los subconjuntos de X con sus respectivas funciones características). Enseguida si

$$x \in X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{U}} X_\alpha$$

entonces escribimos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ y el elemento $x_\alpha \in X_\alpha$ es llamado *la α-ésima coordenada de x*.
La función $p_\alpha : X \to X_\alpha$ dada por $x \mapsto x_\alpha$ tiene por nombre *la proyección de X sobre el eje X_α*. Aquí (como de costumbre) $\mathbb{R}$ denotará la recta de los números reales y $\mathbb{C}$ el plano complejo. Entonces las funciones $\varphi : X \to \mathbb{R}$ y $\varphi : X \to \mathbb{C}$ serán llamadas funciones de valores reales y valores complejos respectivamente; esto sobre X.

2.2. Conjuntos ordenados

Un conjunto X de elementos $x, y, z, \dots$ será llamado un *conjunto ordenado* si una relación $x \prec y$ está definida para cada par de sus elementos, tales que las siguientes condiciones se cumplen:

I. $x \prec x$,

II. si $x \prec y$ y $y \prec z$, entonces $x \prec z$,

III. si $x \prec y$ y $y \prec x$, entonces $x = y$.

Un conjunto ordenado es llamado *conjunto linealmente ordenado* si cualquier par de sus elementos, digamos $x, y \in X$, cumple con que $x \prec y$ ó bien $y \prec x$. Un subconjunto linealmente ordenado de un conjunto ordenado X es también llamado una *cadena* en X.
También hemos establecido que un elemento x_0 de un conjunto ordenado X será llamado *la mínima cota superior de un subconjunto $A \subseteq X$, i. e., el supremo,* si $y \prec x_0$ para todo $y \in A$ y si la condición $z \succ y$ para todo $y \in A$ implica que $z \succ x_0$. De manera similar; *el ínfimo ó máxima cota inferior* de $B \subseteq X$ será un elemento $y_0 \in X$ que cumple con que $y_0 \prec x \; \forall x \in B$ y que si $z \prec x$ para toda $x \in B$ entonces $z \prec y_0$.
Un elemento $x_0 \in X$ (conjunto ordenado) es llamado un *elemento maximal* si la condición $y \succ x_0$ implica que $y = x_0$. Un *elemento minimal* se define similarmente.
Ahora, un conjunto ordenado $\mathfrak{U}$ será llamado *conjunto dirigido* si para culesquiera dos elementos $\alpha, \beta \in \mathfrak{U}$ existe un elemento $\gamma \in \mathfrak{U}$ tal que $\gamma \succ \alpha$ y $\gamma \succ \beta$.
Un conjunto linealmente ordenado se dice que es *bien ordenado* si cada subconjunto no vacio tiene un elemento minimal. En un conjunto bien ordenado todo elemento tiene un sucesor, pero no necesariamente un predecesor.

2.3. Espacios Vectoriales, Álgebras e Ideales

Empezamos esta sección con el concepto de *Espacio Vectorial*, el cual es muy conocido desde siempre en las Matemáticas universitarias. En esta ocasión nos hemos profundizado un poco más con definiciones más abstractas, además de conceptos nuevos. Entonces a continuación:

Definición 2.3.1. *Un **espacio vectorial** sobre un campo K ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) es un conjunto no vacío, digamos X, cuyos elementos son llamados **vectores**; en el cual se definen dos operaciones, la adición*

$$X \times X \to X, (x, y) \mapsto x + y$$

y la multiplicación por un escalar

$$K \times X \to X, (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

tales que cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades de la adición.

- *Asociativa:* $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- *Conmutativa:* $x + y = y + x$.
- *Existe un elemento neutro, el cual es denotado por* 0, *tal que* $0+x = x$ *para cualquier* $x \in X$.
- *Para cada* $x \in X$ *existe un elemento opuesto,* $-x$, *que sumado con él da* 0.

Propiedades de la multiplicación por un escalar.

- *Asociativa:* $\beta(\alpha x) = (\beta\alpha)x$.
- *Distributivas:*
  - *Respecto de la suma de escalares:* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
  - *Respecto de la adición de vectores:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Si X es un espacio vectorial, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $x \in X$, y $\lambda \in K$, considérese la siguiente notación:

$$x + A := \{x + a : a \in A\},$$

$$x - A := \{x - a : a \in A\},$$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

En particular (tomando $\lambda = -1$), $-A$ denota el conjunto de todos los inversos aditivos de miembros de A.

Definición 2.3.2. *Se denomina* ***aplicación lineal o transformación lineal*** [1]*, a toda función cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales, tal que satisfaga lo siguiente:*

Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una función T de V en W, es decir, $T : V \to W$, es una ***transformación lineal*** *si para todo par de vectores $u, v \in V$ y para todo escalar $k \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se satisface que:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(ku) = kT(u)$.

Definición 2.3.3. *Un conjunto $Y \subseteq X$, con X espacio vectorial, es llamado* ***subespacio vectorial*** *de X si Y es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones de X.*

Se puede verificar fácilmente que Y es un subespacio vectorial del espacio vectorial X si y sólo si $0 \in Y$ y

$$\alpha Y + \beta Y \subseteq Y$$

$\forall \alpha, \beta$ escalares en K.

Definición 2.3.4. *Se dice que $C \subseteq X$, con X un espacio vectorial, es* ***convexo*** *si*

$$tC + (1 - t)C \subseteq C, \ (0 \leq t \leq 1).$$

En otras palabras, que $tx + (1 - t)y \in C$ si $x, y \in C$ y $0 \leq t \leq 1$.

A continuación otras definiciones relacionadas con espacios vectoriales

Definición 2.3.5. *Se dice que un conjunto $B \subseteq X$, con X espacio vectorial, es* ***balanceado*** *si $\alpha B \subseteq B$ $\forall \alpha \in K$ (de ahora en adelante $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) con $|\alpha| \leq 1$.*

Definición 2.3.6. *Un* ***álgebra*** *es un K-espacio vectorial A equipado con una multiplicación*

$$* : A \times A \to A, \ (u, v) \mapsto u * v$$

la cual satisface las siguientes condiciones:

1. $u * (v + w) = u * v + u * w$
2. $(v + w) * u = v * u + w * u$
3. $u * (\lambda v) = (\lambda u) * v = \lambda(u * v)$

$\forall u, v, w \in A$, $\forall \lambda \in K$.

Se dice que A ***tiene unidad*** *e si este elemento es tal que $ea = ae = a$ $\forall a \in A$.*

Existen un tipo de álgebras que son de utilidad en el estudio de los *funcionales lineales multiplicativos* (veáse Capítulo 4 de este trabajo), entonces consideremos la defnición correspondiente a continuación:

[1] En este ámbito también existe el término *operador lineal*, el cual usualmente se reserva para transformaciones lineales $V \to V$.

Definición 2.3.7. *Se dice que un* ***álgebra*** *A es* ***conmutativa*** *si $\forall a, b \in A$ se cumple que $a * b = b * a$.*

Restringiremos nuestra atención solamente a espacios vectoriales y álgebras sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$; y nos referimos a cada uno de ellos como un espacio o álgebra real o complejo respectivamente. Un ejemplo de álgebra es el espacio de todos los endomorfismos de algún espacio vectorial X (recordemos que un endomorfismo de un espacio vectorial X es cualquier transformación lineal $f : X \to X$) con la multiplicación definida como la composición de funciones.

Definición 2.3.8. *Un subespacio I de un álgebra A es llamada un* ***ideal derecho*** *si $IA \subset I$, y un* ***ideal izquierdo*** *si $AI \subset I$.*

Decimos que un ideal es bilateral si es izquierdo y derecho. En una álgebra conmutativa todos sus ideales son bilaterales.

2.3.1. Espacios Cociente

Definición 2.3.9. *Sea X un espacio vectorial y N un subespacio de éste.*
Definimos para cada x su ***clase lateral***

$$\pi(x) = x + N = \{x + y : y \in N\}. \tag{2.1}$$

El ***espacio cociente*** *X/N de X módulo N es aquel cuyos elementos son*

$$X/N = \{\pi(x) = x + N, x \in X\}.$$

Se definen las operaciones en X/N de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pi(x + y) &= \pi(x) + \pi(y), \\ \alpha\pi(x) &= \pi(\alpha x), \end{aligned} \tag{2.2}$$

ya que como N es un subespacio de X, entonces

$$x + y + N = x + y + N + N = (x + N) + (y + N)$$

y

$$\alpha(x + N) = \alpha x + \alpha N = \alpha x + N.$$

Estas operaciones están bien definidas, ya que si $\pi(x) = \pi(x')$, entonces

$$x + N = x' + N,$$

lo cual implica que $x - x' \in N - N \subset N$.
Análogamente si $\pi(y) = \pi(y')$, entonces $y - y' \in N$. Por lo tanto tenemos que

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y')$$

y

$$\alpha\pi(x) = \alpha\pi(x').$$

A continuación también definimos el **cero de** X/N de la siguiente forma: $\pi(0) = N$.

La función $\pi : X \to X/N$ tal que $x \to \pi(x) = x + N$ es lineal, suprayectiva. Es llamada *el homomorfismo canónico.*
En cierta ocasión en este trabajo por brevedad también denotaremos por $\overline{x}$ a la clase lateral de $x \in X$ espacio vectorial (veáse subsección Espacio Cociente de un Espacio Normado).

2.4. Espacios Topológicos

Definición 2.4.1. *Un **espacio topológico** es un par (X, τ), donde τ denota a una familia de subconjuntos de un conjunto X, llamados **abiertos**, los cuales satisfacen las siguientes propiedades:*

τ(1): El conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a τ.

τ(2): Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

τ(3): Si $A_\alpha \in \tau$, $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

2.4.1. Ejemplos de Espacios Topológicos

Ejemplo 2.4.1. $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} :$ *para toda* $x \in U$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U\}$ *es la topología usual en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4.2. *Dado un subconjunto X, siempre es posible definir alguna topología en él. Por ejemplo, podemos considerar:*

1. *La topología discreta. Está es el conjunto potencia*

$$\mathcal{P}(X) := \{U | U \subseteq X\}.$$

   Es fácil verificar que $\mathcal{P}(X)$ es una topología para X.

2. *La topología indiscreta. La cual también es llamada topología trivial y se define como*

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}.$$

En el caso en que X posea más de un elemento, la colección de posibles topologías en X consta de más de un elemento. En efecto, en este caso la topología discreta y la indiscreta difieren. Denotemos por $\tau(X)$ al conjunto

$$\tau(X) = \{\tau \subseteq \mathcal{P}(X) : \tau \text{ es una topología en } X\}.$$

Podemos considerar en $\tau(X)$ el orden parcial definido por la inclusión: $\tau_1 \leq \tau_2 \iff \tau_1 \subseteq \tau_2$. En este caso diremos que τ_2 es más fina que τ_1 o que τ_1 es más gruesa que τ_2. Por ejemplo:
Si τ_1 es la topología discreta en X y τ_0 es la indiscreta, entonces para cualquier otra topología τ en X se cumple que $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$.

Ejemplo 2.4.3. *Si X es un conjunto, $\tau := \{A \in \mathcal{P}(X) : X - A$ es finito o $A = \emptyset\}$ es la topología cofinita.*

Demostración. Sea X un conjunto y $\tau := \{A \in \mathcal{P}(X) : X - A$ es finito o $A = \emptyset\}$. Como $X - X = \emptyset$ es finito, $X \in \tau$. Sean A_1, A_2 en τ. Si $A_1 = \emptyset$ o $A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau$. Si $A_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \neq \emptyset$, $X - A_1$ y $X - A_2$ son finitos $\therefore X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2)$ es finito y $\therefore A_1 \cap A_2 \in \tau$. Si $I = \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \tau$. Si $I \neq \emptyset$ y, para toda $i \in I$, $A_i = \emptyset$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \tau$. Supongamos entonces que existe $i_0 \in I$ tal que $A_{i_0} \neq \emptyset$ $\therefore X - A_{i_0}$ es finito $\therefore X - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I}(X - A_i) \subseteq X - A_{i_0}$ es finito y $\therefore \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$. □

Ejemplo 2.4.4. *Consideremos un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto Y de X. Siempre podemos construir una topología más fina que τ al considerar la colección*

$$\tau_Y := \{A \cup E : A \in \tau \text{ y } E \subseteq Y\}.$$

Demostración. Es claro que cualquier elemento $A \in \tau$ pertenece a τ_Y ya que $A = A \cup \emptyset$ y $\emptyset \subseteq Y$. Por lo tanto, $\tau \subseteq \tau_Y$. En particular, $\emptyset$ y X también pertenecen a τ_Y. Resulta también que cualquier subconjunto E de Y pertenece a τ_Y ya que $E = \emptyset \cup E$ y $\emptyset \in \tau$.
Ahora bien, si A_1, A_2 y $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(Y)$, entonces

$$(A_1 \cup E_1) \cap (A_2 \cup E_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap A_2) \cup (E_1 \cap E_2).$$

Y como $A_1 \cap A_2 \in \tau$ y $(A_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap A_2) \cup (E_1 \cap E_2)$ es un subconjunto de Y, entonces $(A_1 \cup E_1) \cap (A_2 \cup E_2)$ pertenece a τ_Y.
Finalmente, supongamos que $\mathcal{A} := \{O_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una subcolección de τ_Y. Para cada $\alpha \in \Lambda$, O_α es de la forma $A_\alpha \cup E_\alpha$, en donde $A_\alpha \in \tau$ y $E_\alpha \subseteq Y$. Resulta claro que

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha, \quad \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau \text{ y } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \subseteq Y;$$

por lo cual $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_Y$. □

De esta manera podemos concluir que τ_Y es una topología en X más fina que τ. Es usual denotar al espacio (X, τ_Y) con el símbolo X_Y. Al espacio particular $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{P}})$ en donde τ es la topología usual en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números irracionales, se le denomina línea de Michael.

Ejemplo 2.4.5. *Dado el espacio topológico (X, τ) y dado $Y \subseteq X$, definimos la colección*

$$\tau \restriction_Y := \{A \cap Y : A \in \tau\}.$$

Entonces $\tau \restriction_Y$ es una topología en Y.

Demostración. Como $\emptyset, X \in \tau$, tenemos que $\emptyset, Y \in \tau \restriction_Y$. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y \in \tau \restriction_Y$. Y para concluir, si $\mathcal{A} \subseteq \tau$,

$$\bigcup \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\} = \left(\bigcup \mathcal{A}\right) \cap Y \in \tau \restriction_Y .$$

□

Obsérvese que la condición $\tau(2)$, en la Definición 2.4.1, implica, usando un proceso inductivo, que la intersección de cualquier subcolección finita de elementos en τ, también es un elemento en τ. Los primeros intentos por definir estructuras topológicas se deben a M. Fréchet y a F. Riez entre los años 1906 y 1908. La primera definición satisfactoria al respecto fue dada por F. Hausdorff en 1914 (veáse F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914). A continuación varias definiciones referentes a este tema las cuales son bastante relevantes:

Definición 2.4.2. *Un subconjunto C de X se dice* ***cerrado*** *si $X \setminus C$ es un abierto.*

Continuamos con otra definición de utilidad:

Definición 2.4.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces* ***el interior*** *de A, denotado por $int(A)$ es la unión de todos los abiertos de X contenidos en A. Así, $x \in int(A)$ si y sólo si existe una vecindad abierta U de x tal que $x \in U \subseteq A$. Asímismo, se define* ***la cerradura*** *$\overline{A}$ de A como la intersección de todos los cerrados que contienen a A.*
Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cualquier vecindad abierta U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. Se define la ***frontera*** *de A como el subconjunto $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

Proseguimos con la siguiente

Proposición 2.4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces se cumple que:*

1. *X y $\emptyset$ son cerrados.*
2. *Si C y D son cerrados, entonces $C \cup D$ es cerrado.*
3. *Si F_α, $\alpha \in I$, es cerrado, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ también es cerrado.*

Demostración. La demostración se sigue de las Definiciones 2.4.1 y 2.4.2, además de las leyes de De Morgan. □

Enseguida prosigamos con otra definición

Definición 2.4.4. *Sea x un elemento del espacio topológico (X, τ). Un subconjunto V de X es una* ***vecindad de*** *x en el espacio (X, τ) si podemos encontrar un $A \in \tau$ que satisfaga $x \in A \subseteq V$. A la colección de todas las vecindades de x en (X, τ) le llamamos* ***sistema de vecindades del punto*** *x* ***en*** *(X, τ) y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.*

Proposición 2.4.2. *Un subconjunto A de un espacio (X, τ) es abierto si y sólo si para cada $x \in A$ sucede que $A \in \mathcal{V}(x)$.*

Demostración. Supongamos que A es abierto y que $x \in A$ es cualquier elemento. Como A es abierto y $x \in A \subseteq A$, por definición de vecindad, sucede que $A \in \mathcal{V}(x)$.
Inversamente, supongamos que para cada punto $x \in A$ se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$. Por definición de vecindad, existe un abierto B_x tal que $x \in B_x \subseteq A$. Entonces $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ y por consiguiente, $A \in \tau$. □

Continuaremos con la definición de función continua entre espacios topológicos.

Definición 2.4.5. *Sea f una función cuyo dominio X y codominio Y son espacios topológicos.*

1. *Diremos que f es continua en el punto $x_0 \in X$ si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x_0 y que satisface $f(B) \subseteq A$.*

2. *En el caso en que f sea continua en todos los puntos de X, se dirá simplemente que f es **continua**.*

3. *f es **discontinua** en $x_0 \in X$ si no es continua en x_0.*

Ahora veamos el siguiente teorema sobre funciones continuas y espacios topológicos

Teorema 2.4.1. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos, entonces se cumple que $\pi : X \to Y$ es continua si y sólo si $\pi^{-1}(U) \in \tau_1$, $\forall U \in \tau_2$*

Demostración. Supongamos que π es continua y que $U \in \tau_2$. Dado $x \in \pi^{-1}(U)$, tenemos que existe $B_x \in \tau_1$ que contiene a x, de tal forma que $\pi(B_x) \subseteq U$ y, por ende, $x \in B_x \subseteq \pi^{-1}(U)$. El resto es aplicar la Proposición 2.4.2 para concluir que $\pi^{-1}(U)$ es abierto.
Por otro lado, sea $x \in X$ un punto arbitrario y sea V un abierto en Y que contiene a $\pi(x)$; entonces $x \in \pi^{-1}(V)$, luego como $\pi^{-1}(V) \in \tau_1$ y $\pi(\pi(V)) \subseteq V$ se concluye que π es continua en X. □

Definición 2.4.6. 1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X si $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathcal{U}$ le llamaremos **cubierta abierta** de X.*
*Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una **subcubierta** de $\mathcal{U}$ si $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.*

2. *Un espacio topológico X es un espacio **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Corolario 2.4.1 (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si A es un subconjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en la página 206 de [7]. □

Definición 2.4.7. *Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$, es llamada una **base** para un espacio topológico (X, τ) (o también se dice a veces base para su topología τ) si cada subconjunto abierto no vacío de X puede ser representado como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.*

Ejemplo 2.4.6. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Si $\mathcal{B}$ es una base para τ_X y $\mathcal{C}$ es una base para τ_Y, entonces $\{B \times C : B \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}\}$ resulta una base para la topología producto (veáse el libro de Casarrubias y Tamariz [7], pág. 4.2).*

2.4.2. Espacios Vectoriales Topológicos

Definición 2.4.8. *Sean X un espacio vectorial y τ una topología sobre X tal que*

(I) cada punto $x \in X$ es un conjunto cerrado.

(II) *Las operaciones*

$$\begin{aligned} + : \quad & X \times X \to X \\ & (x,y) \mapsto x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & F \times X \to X \\ & (\alpha,x) \mapsto \alpha x \end{aligned}$$

son continuas.

Entonces (X,τ) *es un* ***espacio vectorial topológico*** *y* τ *es llamada una* ***topología vectorial*** *sobre* X*.*

Decir que la operación $+$ es continua significa que dada una vecindad V de 0, existen un par de vecindades V_1, V_2 del cero tales que para cada $x \in V_1$, $y \in V_2$, se tiene que

$$x + y \in V.$$

Análogamente para $\bullet$.

Definición 2.4.9. *Sean* (X,τ) *un espacio vectorial topológico y* N *un subespacio de* X*, entonces se define una* ***topología cociente*** τ_N *sobre* X/N *que hace a* X/N *un espacio vectorial topológico,* τ_N *se define como la colección de todos los conjuntos* $E \subset X/N$ *tales que* $\pi^{-1}(E)$ *es un abierto.*

Teorema 2.4.2. *Sean* (X,τ) *un espacio vectorial topológico y* N *un subespacio cerrado de* X*. Entonces se tiene:*

(I) τ_N *es una topología vectorial sobre* X/N *y el homomorfismo canónico* $\pi : X \to X/N$ *es continuo y abierto, donde abierto significa que envía conjuntos abiertos de* X *en conjuntos abiertos de* X/N*.*

Demostración. Ya que

$$\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B)$$

y

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in I} E_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in I} \pi^{-1}(E_\lambda),$$

se tiene que entonces τ_N es una topología.

Tenemos que $F \subset X/N$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(F)$ es cerrado en X. Entonces como

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}(x+N) = x$$

se tiene que $x + N$ es cerrado.
π es continua ya que $V \in \tau_N$ si y sólo si $\pi^{-1}(V) \in \tau$.

Ahora, sea $V \in \tau$, entonces

$$\pi(V) = V + N = \bigcup_{x\in N} (x + V)$$

el cual es abierto en X/N. Por lo tanto π es un mapeo abierto.

Ahora, sea U una vecindad del cero en X/N. Entonces $\pi^{-1}(U)$ es una vecindad del cero en X y por lo tanto existen V_1 y V_2 vecindades del 0 en X tales que

$$V_1 + V_2 \subset \pi^{-1}(U)$$

y como π es abierto, entonces $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son vecindades del cero en X/N tales que

$$\pi(V_1) + \pi(V_2) \subset U.$$

□

2.5. Espacios Métricos

Dos de los objetos matemáticos más estudiados en un curso de análisis funcional son los espacios métricos y los espacios normados, los cuales se definirán más adelante. Los últimos son un tipo particular de espacios vectoriales topológicos, por lo que durante las próximas secciones los abordaremos más a detalle.

Definición 2.5.1. *Sea X un conjunto no vacío sobre un campo $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*
*Una **métrica** d sobre X es una función*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$*;*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetría);*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdad triangular).*

*A la pareja ordenada (X, d) le llamaremos **espacio métrico**. En general, diremos simplemente espacio métrico X.*
Si la función d cumple con 2 y 3 y en lugar de 1 cumple con

$$1'.\ d(x, x) = 0,$$

*diremos que d es una **pseudométrica** en X.*
Es decir, en el caso de que d sea una pseudométrica, no garantizamos que $d(x, y) = 0$, implique que $x = y$.

Definición 2.5.2. *Dado $x \in X$ y $r > 0$, definimos la bola abierta*

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

La distancia o métrica d define una topología τ_d de la siguiente manera:

$$E \text{ es abierto} \quad \text{o} \quad E \in \tau_d$$

si $\forall x \in E$, $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E$. Es fácil comprobar que τ_d es una topología para X. De esto surge la siguiente

Proposición 2.5.1. *Toda bola $\mathcal{B}(x, r)$ es un abierto.*

Demostración. En efecto, sea $y \in B(x, r)$ y $d(x, y) = s$. Entonces $B(y, r - s) \subset B(x, r)$, puesto que si $z \in B(y, r - s)$ se tiene que $d(y, z) < r - s$ y así $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = s + d(y, z) < r$, lo cual implica que $d(x, z) < r$ y esto es si y sólo si $z \in B(x, r)$. □

2.5.1. Ejemplos de Espacios Métricos y Pseudométricos

Ejemplo 2.5.1. *Sea $X = \mathbb{R}$, definimos $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

En los cursos elementales de matemáticas, se demuestran las propiedades 1, 2 y 3. Esta métrica se conoce como la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5.2. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, definimos $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, como*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Las propiedades 1, 2, 3 se siguen inmediatamente de las propiedades del valor absoluto. Esta métrica se conoce como la métrica del taxista.

Ejemplo 2.5.3. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definimos $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como*

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \text{ con } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n).$$

En el curso de cálculo diferencial en varias variables, se demuestran las propiedades 1, 2, 3. Esta métrica se conoce como la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.5.4. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$. Definimos $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \text{ donde } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Frecuentemente a $\mathbb{R}^n$ con esta métrica se le denota por $\ell^p(n)$[2]*.*

Ejemplo 2.5.5. *Veamos ahora el siguiente ejemplo de sucesiones reales, aquí $X = \{(x_n) : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$, donde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ fijo. Como en el caso inmediato anterior, la demostración de que la función $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida por*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

es una métrica se encuentra en [12]. Este espacio se denota por ℓ^p.

Ejemplo 2.5.6. *Sea $X = \{(x_n) : (x_n)$ es una sucesión acotada de números reales$\}$. Definimos $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como*

$$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup\{|x_j - y_j| : j \in \mathbb{N}\}.$$

Las propiedades 1 y 2 son inmediatas, para la desigualdad triangular, se usa

$$|x_j - y_j| \leq d_\infty((x_n), (y_n)), \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Este espacio se denota por ℓ^∞.

[2] La demostración de que d_p es una métrica se encuentra en [12]

Ejemplo 2.5.7. *Sea* $X = \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R} | f$ *es una función acotada en* $A\}$. *Definimos* $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}.$$

Observe que $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$ *ya que, la función* $f - g$ *es acotada.*
Las propiedades 1 y 2 son inmediatas, para la desigualdad del triángulo se usa

$$|f(x) - g(x)| \leq d_\infty(f, g), \text{ para } x \in A.$$

Esta métrica se conoce como la métrica uniforme en $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$.
Si $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ *coincide con* $\ell^\infty(n)$. *En el caso de que* $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ *es el espacio de sucesiones acotadas que ya dijimos que se denota por* ℓ^∞.

Ejemplo 2.5.8. *Sea* $X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f$ *es continua en* $[a, b]\}$. *Definimos* $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Observe que como $\mathcal{C}[a, b]$ *es un subconjunto de* $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ *y la función* d_∞ *es la misma, entonces* d_∞ *es una métrica.*

Ejemplo 2.5.9. *Sea* X *como en el ejemplo anterior. Definimos* $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *por*

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Recuerde que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ *es Riemann-integrable en* $[a, b]$ *esto nos dice que* $d_1(f, g) \in \mathbb{R}$. *Las propiedades 1, 2 y 3 son consecuencia de las propiedades de la integral de Riemann para funciones continuas.*
Observación. Si $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f$ *es Riemann integrable en* $[a, b]\}$ *y consideramos en* $X \times X$ *la misma función* d_1, *entonces* d_1, *en este caso, es una pseudométrica, ya que,* $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0$, *no nos garantiza que* $f = g$.

Ejemplo 2.5.10. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *inyectiva, definimos* $d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *como*

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Es fácil demostrar que es una métrica en $\mathbb{R}$. *En el caso de que la función* f *no sea inyectiva,* d_f *es una pseudométrica, ya que no podemos garantizar que si* $d_f(x, y) = 0$, *entonces* $x = y$.

Ejemplo 2.5.11. *Si* (X_1, d_1) *y* (X_2, d_2) *son espacios métricos la métrica producto* d *definida en* $X_1 \times X_2$ *está dada por*

$$d((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = \textit{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Se pueden usar otras métricas en $X_1 \times X_2$, *por ejemplo:*

$$d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \quad o \quad [d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente en esta subsección presentamos el siguiente

Ejemplo 2.5.12. *Si (X, d) es un espacio métrico, muestra que se puede definir otra métrica en X como*

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Se trata de una métrica en la que la distancia entre cualquier par de puntos es menor que 1.

Demostración.

1. Observe que $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ y que $d(x, y) \geq 0$ porque d es una métrica en X. Por consiguiente se sigue que $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$ y así se cumple la primera propiedad de las métricas.

2. [$\Rightarrow$] Supongamos que $\tilde{d}(x, y) = 0$. Entonces $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ implica que $d(x, y) = 0$, y como d es una métrica tenemos que $x = y$. [$\Leftarrow$] Y a la inversa, supongamos que tenemos $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$ (de nuevo porque d es una métrica), entonces $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$. Y con esto último se cumple la segunda propiedad de las métricas.

3. Observe que $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \tilde{d}(y, x)$. Así se cumple la tercera propiedad de las métricas.

4. Aquí debemos verificar que $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$. En efecto como $\forall x, y, z \in X$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(x, y)\,[d(x, z) + d(z, y)] &\leq d(x, z) + d(z, y) + d(x, y)\,[d(x, z) + d(z, y)] \\ &= d(x, z) + d(z, y) + [d(x, z) + d(z, y)]\,d(x, y), \end{aligned}$$

sacamos factor común en ambos lados de la última igualdad y obtenemos:

$$d(x, y)\,[1 + d(x, z) + d(z, y)] \leq [d(x, z) + d(z, y)]\,[1 + d(x, y)]\,,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \tfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\leq \tfrac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &= \tfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \tfrac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\leq \tfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \tfrac{d(z,y)}{1+d(z,y)}; \end{aligned}$$

con lo que obtenemos que

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}.$$

Así $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$. Y se cumple la desigualdad del triángulo, cuarta propiedad de las métricas.

Entonces, con las 4 propiedades verificadas se tiene que $\tilde{d}$ es una métrica sobre X. □

2.5.2. Espacios Vectoriales Métricos

Definición 2.5.3. *Sea X un espacio vectorial sobre $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y d una métrica sobre X. Decimos que (X, d) es un espacio vectorial métrico si las operaciones*

$$+ : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : F \times X \to X, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

son continuas.

Decimos que una métrica $d(x, y)$ es invariante si

$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para todas x, y, z en X. Es fácil ver que en este caso se tiene el siguiente

Lema 2.5.1. *Sea X un espacio vectorial métrico. Entonces se tiene que*

(I) *$B(x, s) \subset B(x, r)$ si $s < r$ para toda $x \in X$.*

(II) *Si la métrica d sobre X es invariante, entonces se tiene que*

$$B(x, r) = x + B(0, r)$$

$\forall x \in X$.

También se da la siguiente

Proposición 2.5.2. *Sea $d(x, y)$ una métrica sobre un espacio vectorial X. Entonces se tiene*

(1) La operación $+$ es continua si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B(0, \delta)$ entonces

$$x + y \in B(0, \varepsilon).$$

(2) La operación $\cdot$ es continua si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $|\alpha| < r$ y $x \in B(0, \delta)$, entonces

$$\alpha \cdot x \in B(0, \varepsilon).$$

Demostración. Demostramos (1) a continuación:
[$\Rightarrow$]. Como $+ : X \times X \to X$, $+(x, y) = x + y$ es continua; dado $(x_0, y_0) \in X \times X$ se cumple que para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $d_{X\times X}((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ entonces $d_X(x + y, x_0 + y_0) < \varepsilon$. De esta forma; como $d_X(x, x_0), d_X(y, y_0) \leq d_{X\times X}((x, y), (x_0, y_0))$, si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, se sigue que: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B(0, \delta)$ entonces

$$x + y \in B(0, \varepsilon).$$

[$\Leftarrow$]. Sea $\varepsilon > 0$, entonces se cumple que $\exists \delta > 0$ tal que si $x, y \in B(0, \delta)$ entonces $x+y \in B(0, \varepsilon)$, o sea que si $d_{X\times X}((x, y), (0, 0)) < \delta_1$, con $\delta_1 \geq \delta$, entonces $d_X(x+y, 0) < \varepsilon$. Por lo tanto se cumple que para cada $(x_0, y_0) \in X \times X$;

$$\begin{aligned} \text{si } d_{X\times X}((x, y), (x_0, y_0)) &\leq d_{X\times X}((x, y), (0, 0)) + d_{X\times X}((0, 0), (x_0, y_0)) \\ &< \delta_1 + d_{X\times X}((0, 0), (x_0, y_0)) = d_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} d_X(x+y, x_0+y_0) &\leq d_X(x+y, 0) + d_X(0, x_0+y_0) \\ &< \varepsilon + d_X(0, x_0+y_0) = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Luego como $d_2 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$, se tiene que $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x+y$ es continua. $\square$

En vista de que una vecindad U de un punto x debe contener a una bola abierta $B(x, r)$ y la Definición 2.4.3 se tiene la siguiente

Proposición 2.5.3. *Sea A un subconjunto de X un espacio vectorial métrico. Entonces se tiene que el interior y la cerradura de A se pueden escribir como:*

(a) $int(A) = \{x : \text{existe } B(x, r) \subset A\}$.

(b) $cl(A) = \{x : \text{para toda } B(x, r) \text{ se tiene que } B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$.

Note además que por la Definición 2.4.1, la Proposición 2.4.1 y la Definición 2.4.3 se sigue que $\overline{A}$ es cerrado e $int(A)$ es abierto.

Seguimos con la siguiente

Proposición 2.5.4. *Sean A y B suconjuntos de un espacio vectorial métrico (X, d). Entonces:*

(a) A es abierto si y sólo si $A = \operatorname{int}(A)$;

(b) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$;

(c) $\operatorname{int}(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$; $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$; $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$;

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

Demostración. Demostramos (d) por contenciones de conjuntos.
$[\subset]$. Aquí note que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$, por consiguiente $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, así

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$[\supset]$. Por otro lado, $A, B \subset A \cup B$, y entonces $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por lo tanto

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

$\square$

Considérese la siguiente

Definición 2.5.4. *Sean d y d' dos **métricas** sobre un conjunto X. Decimos que estas son **equivalentes** si las topologías definidas por ellas son la misma. Es decir, si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existen $\delta, \delta' > 0$ tales que*

$$\{y : d'(x, y) < \delta\} \subset \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$$

&

$$\{y : d(x, y) < \delta'\} \subset \{y : d'(x, y) < \varepsilon\}.$$

Uno de los conceptos más útiles en un espacio vectorial métrico es el de **sucesión convergente**, veamos su definición a continuación.

Definición 2.5.5. *Si $\{x_1, x_2, \dots\}$ es una sucesión en un espacio vectorial métrico (X, d) entonces $\{x_n\}$ **converge** a x (en símbolos $x = \lim x_n$ o $x_n \to x$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$.*

Continuamos con la siguiente

Proposición 2.5.5. *Un subconjunto F de un espacio vectorial métrico (X, d) es cerrado si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}$ en F con $x = \lim x_n$ tenemos que $x \in F$.*

Demostración. Supongamos que F es cerrado y $x = \lim x_n$ donde cada x_n está en F. Así para cada $\varepsilon > 0$, existe un punto $x_n \in B(x, \varepsilon)$; i. e., $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, de esta manera $x \in \overline{F} = F$ dada la Proposición 2.5.4 (b) y la Proposición 2.5.3.
Ahora supongamos que F no es cerrado; entonces existe un punto x_0 en $\overline{F}$ que no está en F. Entonces de nuevo usando la Proposición 2.5.3, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que $B(x_0, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Así, en particular para cada número natural n existe un punto x_n en $B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap F$. Por lo tanto, $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ lo cual implica que $x_n \to x_0$. Y ya que $x_0 \notin F$, esto nos indica que la condición «para cada sucesión $\{x_n\}$ en F con $x = \lim x_n$ tenemos que $x \in F$»falla. □

Proseguimos con estas otras definiciones:

Definición 2.5.6. *Se dice que E es **denso** en X un espacio vectorial métrico, si $\overline{E} = X$, E es **denso en ninguna parte** si $\operatorname{int}(\overline{E}) = \emptyset$, y X es **separable** si contiene un subconjunto denso numerable.*

Definición 2.5.7. *Sea (X, d) un espacio vectorial métrico, sea $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A si para cada $B(x, r)$ existe $y \neq x$, tal que*

$$y \in B(x, r) \cap A.$$

Proposición 2.5.6. *Sea x un punto de acumulación de un subconjunto $A \subseteq X$, con X un espacio vectorial topológico métrico, entonces existe una sucesión (x_n) de puntos distintos en A tal que (x_n) converge a x.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto de acumulación de $A \subseteq X$. Entonces existe $x_1 \neq x$ tal que

$$x_1 \in B(x, 1) \cap A.$$

Sea $r_2 := \min\{d(x_1, x), \frac{1}{2}\}$, entonces existe $x_2 \neq x$ tal que

$$x_2 \in B(x, r_2) \cap A.$$

Y así recursivamente, dada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$r_n := \min\{d(x_{n-1}, x), \frac{1}{n}\},$$

entonces existe $x_n \neq x$ tal que

$$x_n \in B(x, r_n) \cap A.$$

Es claro que esto define una sucesión (x_n) de puntos todos ellos distintos entre sí tal que (x_n) converge a x. □

Ahora continuamos con las últimas definiciones en esta sección:

Definición 2.5.8. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios vectoriales métricos. Se dice que $f : X \to Y$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para toda $x, y \in X$.*

Definición 2.5.9. *Diremos que $M \subset X$, con X un espacio vectorial métrico, es un **conjunto acotado** si su diámetro*

$$\delta(M) := \sup_{x,y \in M} d(x, y) < \infty.$$

*Diremos que $\{x_n\}$ es una **sucesión acotada** si $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. En particular que M sea acotado implica que $M \subset B(x_0, r)$ para algunas $x_0 \in X$, $r > 0$.*

Por último veamos el siguiente

Teorema 2.5.1. *Una aplicación $T : X \to Y$, con X, Y espacios vectoriales métricos es continua si y sólo si para cada sucesión (x_n) convergente en X se tiene que (Tx_n) converge en Y.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T es continua en x_0. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ esto para toda $x \in X$. Entonces como $x_n \to x_0$ se tiene que $T(x_n) \to T(x_0)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $x_n \to x_0 \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0)$ pero sin embargo T no es continua. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ existe $x \neq x_0$ con la propiedad de que $d_X(x, x_0) < \delta$ y sin embargo se tiene que $d_Y(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$. Sea $\delta = \frac{1}{n}$, entonces existe $x_n \neq x_0$ tal que $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ y $d(T(x_n), T(x_0)) > \varepsilon$ lo que supone una contradicción, puesto que esto implica que (x_n) converge a x_0 pero (Tx_n) no converge a Tx_0. $\square$

2.6. Espacios Semi-normados y Normados

Comenzaremos con la definición de *norma* y *seminorma*:

Definición 2.6.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.*
*Una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se llama una **norma** si se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;

(b) $\|ax\| = |a|\|x\|$ $\forall a$ *escalar,* $\forall x \in X$;

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ *(la desigualdad del triángulo).*

*Decimos que $\|\cdot\|$ es una **seminorma** si en el inciso (a) previo se cumple únicamente que: $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$.*
*También se dice que el par $(X, \|\cdot\|)$ es un **espacio normado** ó **seminormado** según sea el caso.*

Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma sobre X. Entonces se tiene que la ecuación

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

define una métrica invariante sobre X, y por lo tanto las operaciones $+$ y $\cdot$ son continuas. A su vez con la última definición, y considerando las bolas abiertas $B(x,r) := \{y \in X : \|x-y\| < r\}$, se puede hablar de la *topología inducida por una norma*:

$$T(\|\cdot\|) := \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\},$$

la cual es la misma que la topología inducida por la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$. También vamos a definir el concepto de *normas equivalentes.*

Definición 2.6.2. *Decimos que dos* ***normas*** *sobre un conjunto X son* ***equivalentes*** *cuando generan la misma topología, es decir, los conjuntos abiertos para ambas normas son los mismos.*

La equivalencia entre dos normas se caracteriza de forma muy sencilla, como vamos a ver con la siguiente Proposición y su continuación:

Proposición 2.6.1. *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre un espacio vectorial X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Existe una constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_2 \leq \rho\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

2. *La topología de la norma $\|\cdot\|_2$ esta contenida en la de $\|\cdot\|_1$.*

Demostración. Para la demostración, dados $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $B_1(x,r)$ y $B_2(x,r)$ a las bolas abiertas con centro en x y radio r, para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente. Ahora:
$1 \Rightarrow 2$. Sea U un conjunto abierto en la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$, entonces para todo $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2(x,\varepsilon) \subset U$. De 1 deducimos que $B_1(x,\varepsilon/\rho) \subset B_2(x,\varepsilon) \subset U$, luego U es abierto en la topología inducida por la norma $\| \ \|_1$.
$2 \Rightarrow 1$. Aquí se tiene que dada la bola $B_2(0,1)$, existe otra bola $B_1(0,\delta)$ tal que

$$B_1(0,\delta) \subset B_2(0,1).$$

Entonces por la propiedad de Arquimides, si $x \in X$ y $\|x\|_1 > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\tfrac{1}{N}\tfrac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 < \delta \Rightarrow$$

$$\left\|\tfrac{1}{N}\tfrac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 < 1 \Rightarrow$$

$$\|x\|_2 < N\|x\|_1.$$

Ahora, si $\|x\|_1 = 0$, entonces $\|x\|_2 = 0$. Por lo tanto es claro que $\|x\|_1 = N\|x\|_2$. $\square$

Corolario 2.6.1. *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que*

$$\forall x \in X, \quad \lambda\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho\|x\|_1$$

2.6.1. Espacio Cociente de un Espacio Normado

A continuación presentamos la siguiente Proposición de gran relevancia.

Proposición 2.6.2. *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y sea* W *un subespacio cerrado de* V*. Entonces la función, definida mediante la siguiente fórmula, es una norma en* V/W *(este último es el espacio cociente definido en la subsección 2.3.1):*

$$\|\overline{x}\|_{V/W} = \text{ínf}\{\|x+w\|_V : w \in W\}.$$

La función $\pi : V \to V/W$ *(homomorfismo canónico definido en la subsección 2.3.1),* $\pi(x) = x + W$ *es continua.*

Demostración. Demostraremos la desigualdad del triángulo. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in V/W$ (recordemos esta notación definida en la subsección 2.3.1). Entonces para cualesquiera $u \in \overline{x}$ y $v \in \overline{y}$ tenemos que $u + v \in \overline{x+y}$, luego

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{V/W} \leq \|u+v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V;$$

lo cual implica que

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{V/W} \leq \|\overline{x}\|_{V/W} + \|\overline{y}\|_{V/W}.$$

La continuidad de π se sigue de la desigualdad $\|\pi(x)\|_{V/W} \leq \|x\|_V$. $\square$

Capítulo 3

Espacios y Álgebras de Banach

Durante este capítulo profundizaremos el estudio de los espacios y álgebras de Banach de dimensión finita. El nombre Banach viene de Stefan Banach (1892-1945), él fue un matemático polaco, y ya ha sido mencionado en la introducción de este trabajo. Esperamos que el capítulo les sea de agrado.
Las definiciones, teoremas y proposiciones en este capítulo fueron tomadas en su mayoría de [5], [17] y [20].

3.1. Espacios de Banach

Definición 3.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una* ***sucesión*** *$\{x_n\} \subset X$ se llama* ***de Cauchy*** *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $n, m > N$ implica $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definición 3.1.2. *Diremos que un espacio métrico es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.*

Ejemplos de tales espacios son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la métrica euclidiana.
Evidentemente no todo espacio vectorial métrico es completo: por ejemplo $\mathbb{R} \backslash \{a\}, \mathbb{Q}$ o (a, b), (estos con la métrica inducida por $\mathbb{R}$) no lo son. Sin embargo el siguiente resultado es siempre válido:

Teorema 3.1.1. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.*

Demostración. Si $x_n \to x$ para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N$. Tenemos entonces que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon \text{ si } m, n > N$$

□

Ahora una definición importante.

Definición 3.1.3. *Un* ***espacio de Banach*** *X es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma*

Esto quiere decir que un espacio de Banach es un espacio vectorial X sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos con una norma $\|\cdot\|$ tal que toda sucesión de Cauchy (con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ en X) tiene un límite x en X.

Definición 3.1.4. *Una* ***transformación lineal acotada*** *o* ***transformación lineal estable*** *es una aplicación entre dos espacios vectoriales normados tal que la norma de sus valores puede acotarse. Más precisamente, la aplicación lineal* $B : X \to Y$ *es una transformación lineal acotada si y sólo si:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X,\ \|B(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

El espacio de todas las transformaciones lineales acotadas se denota por $B(X, Y)$ *o* $L(X, Y)$ *y en el caso de ser operadores lineales simplemente se denotará por* $B(X)$ *o* $L(X)$.

Teorema 3.1.2. *Una transformación lineal* $T : X \to Y$ *es continua si y sólo si es acotada.*

Demostración. [$\Rightarrow$]. Si (x_n) es una sucesión en X que converge a x, entonces $\lim_n \|x_n - x\|_X = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_n \|T(x_n) - T(x)\|_Y &= \lim_n \|T(x_n - x)\|_Y \\ &\leq \lim_n M\|x_n - x\|_X = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x)$. Por lo tanto T es continuo (veáse Teorema 2.5.1).
[$\Leftarrow$]. Por otro lado, dada la continuidad de T en el elemento cero, existe $\delta > 0$, tal que si $\|x\|_X < \delta$ entonces $\|T(x)\|_Y < \delta$. Así para $x \neq 0$, se tiene que:

$$\|T(x)\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X}\right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X;$$

con lo que en este caso T es acotado, y si $x = 0$ también se da la acotación. □

Presentamos ahora una

Proposición 3.1.1. *Sea* X *un espacio de Banach con respecto a una norma* $\|\cdot\|$, *entonces* $B(X)$ *el espacio de los operadores lineales acotados de* X *en* X *es un espacio de Banach con la norma*

$$|T| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|.$$

Demostración. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en $B(X)$, entonces para todo número positivo ε existe un entero positivo N tal que

$$|T_m - T_n| \leq \varepsilon \quad (m > n \geq N).$$

Cuando $x \in X$,

$$\|T_m x - T_n x\| \leq |T_m - T_n|\|x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad (m > n \geq N). \tag{3.1}$$

Por lo tanto $(T_n x)$ es una sucesión de Cauchy, la cual converge a un elemento que denotamos por $T(x)$.
Esto define una función $T : X \to X$, la cual es fácil de ver que es lineal.

Consideremos en la expresión (3.1) únicamente que $m, n > N$. Conservemos n fijo y hagamos tender m a ∞. Entonces tenemos que

$$\|Tx - T_n x\| = \|(T - T_n)x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Lo cual demuestra que $T - T_n$ es un operador lineal acotado, y entonces T es acotado. También se tiene que $|T - T_n| < \varepsilon$ si $n \geq N$. Por lo tanto $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, y así $B(X)$ es un espacio de Banach. □

Veamos ahora el siguiente

Lema 3.1.1. *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas sobre X, y sea X un espacio de Banach con respecto a ambas normas mencionadas. Suponga que existe una constante $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, tal que para cada $x \in X$ tenemos que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $T : X \to X$ definido para toda $x \in X$ por $T(x) = x$. Esto es, T es la función identidad sobre X, es fácil verificar que T es un operador lineal biyectivo. Y además, se tiene que $\forall x \in X$

$$\|T(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

de esta forma T es acotado. También note que $T(X) = X$, entonces $T(X)$ es un subespacio cerrado de X. Así por el Teorema del Mapeo Abierto (veáse el libro de Kadison y Ringrose [13], pág. 61), tenemos que T es abierto. Por lo tanto T^{-1} es continuo y por lo tanto acotado. Así $\forall x \in X$ se cumple que

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}(x)\|_1 \leq |T^{-1}|\|x\|_2.$$

Por consiguiente, para cada $x \in X$

$$\frac{1}{|T^{-1}|}\|x\|_1 \leq \|x\|_2.$$

Finalmente, $\forall x \in X$ obtenemos que:

$$\frac{1}{|T^{-1}|}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

así poniendo $D = \frac{1}{|T^{-1}|} > 0$, vemos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes. □

A continuación veremos el Teorema de la Gráfica Cerrada, el cual nos será de utilidad posteriormente.

Teorema 3.1.3 (Teorema de la Gráfica Cerrada)**.** *Si T es una aplicación lineal del espacio de Banach X al espacio de Banach Y tal que la gráfica $\{(x, T(x)) : x \in X\}$ de T es un subespacio cerrado de $X \times Y$, entonces T es acotada.*

Demostración. Definimos una nueva norma $\|\cdot\|_T$ sobre X de la siguiente manera:

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y.$$

Entonces, si $\|x\|_X \geq 0$ y $\|T(x)\|_Y \geq 0$ se cumple que $\forall x \in X$

$$\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y = 1 \cdot \|x\|_T \tag{3.2}$$

y

$$\|T(x)\|_Y \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y = 1 \cdot \|x\|_T \tag{3.3}$$

Prosiguiendo, demostraremos que X con la norma $\|\cdot\|_T$ es un espacio de Banach. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X con respecto a la norma $\|\cdot\|_T$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces de (3.2) y (3.3) se sigue que:

$$\|x_m - x_n\|_X \leq \|x_m - x_n\|_T \tag{3.4}$$

y

$$\|T(x_m) - T(x_n)\|_Y \leq \|x_m - x_n\|_T \tag{3.5}$$

De (3.4) (x_n) debe ser de Cauchy en X con la norma original de X; y a su vez de (3.5) $(T(x_n))$ es de Cauchy en Y con la norma $\|\cdot\|_Y$. Entonces, como la gráfica de T es cerrada, además de que X y Y son espacios de Banach, se sigue que (x_n) converge a $x \in X$, y $(T(x_n))$ converge a $y \in Y$ (confrontar Proposición 2.5.5), de esta manera $T(x) = y$.
Por lo tanto, en esta primera parte solo falta probar que la sucesión de Cauchy (x_n) converge a $x \in X$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_T$. Efecto, note que:

$$\begin{aligned}
\text{lím}_{n\to\infty} \|x_n - x\|_T &= \text{lím}_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X + \text{lím}_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_Y \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X + \text{lím}_{n\to\infty} \|T(x_n) - y\|_Y \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente por el Lema 3.1.1 y lo obtenido en (3.2), se sigue que $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_T$ son normas equivalentes. Así, existe $C > 0$ tal que $\forall x \in X$

$$\|x\|_T \leq C\|x\|_X$$

Pero de (3.3), esto significa que para toda $x \in X$

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|.$$

Así T es una aplicación lineal acotada. □

Enseguida exponemos el Teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 3.1.4 (Banach-Steinhaus)**.** *Sean X y Y dos espacios de Banach, asumimos que $A_\alpha \in L(X, Y)$ $(\alpha \in \mathcal{F})$ es una familia puntualmente acotada de operadores acotados, i. e., para toda $x \in X$ existe una constante C_x tal que $\|A_\alpha x\| \leq C_x$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$. Entonces existe una constante C tal que $\|A_\alpha\| \leq C$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Definimos el espacio $\oplus_\alpha Y := \{(y_\alpha) : y_\alpha \in Y, \sup_\alpha \|y_\alpha\| < \infty\}$ con norma $\|(y_\alpha)\| = \sup_\alpha \|y_\alpha\|$. Es fácil verificar que $\oplus_\alpha Y$ también es un espacio de Banach. Ahora definimos $T : X \to \oplus_\alpha Y$ por $Tx = (A_\alpha x)$. Note que $Tx \in \oplus_\alpha Y$, ya que la colección A_α es puntualmente acotada. Claramente T es lineal y afirmamos que T es cerrado. Para ver esto, sea $x_n \to 0$ y $Tx_n \to (y_\alpha)$. Entonces $A_\alpha x_n \to y_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$, pero también $A_\alpha x_n \to 0$ para toda α. Por lo tanto $(y_\alpha) = (0)$ y T es cerrado. Por el Teorema de la Gráfica Cerrada (véase, Teorema 3.1.3 en este trabajo, y considere el hecho de que X es Hausdorff[1]), T es acotado, es decir, existe una constante C tal que para toda $\|x\| \leq 1$ obtenemos que $\sup_\alpha \|A_\alpha x\| \leq C$. Así $\|A_\alpha\| \leq C$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$. □

[1]En topología, especificamente en el tema de los axiomas de separación, que un espacio sea tipo T_2 «o Hausdorff»implica que sea espacio tipo T_1, y en los T_1 los conjuntos singulares son cerrados.

Otros Ejemplos de Espacios de Banach

Recordemos que $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplo 3.1.1. *Los conocidos espacios euclidianos F^n, donde la norma euclidiana de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ esta dada por*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2},$$

son espacios de Banach.

Ejemplo 3.1.2. *El espacio de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to F$ definidas sobre un intervalo compacto (cerrado y acotado) $[a, b]$ tiene la estructura de espacio de Banach si definimos la norma como*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Esta es una norma, gracias al hecho de que las funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado están acotadas. Este espacio es completo con esta norma, y el espacio de Banach resultante se denota por $C[a, b]$. Este ejemplo se puede generalizar al espacio $C(X)$ de todas las funciones continuas $X \to F$, donde X es un espacio compacto, o al espacio de todas las funciones continuas acotadas $A \to F$, donde A es cualquier espacio topológico; y aún al espacio $B(\mathfrak{X})$ de todas las funciones acotadas $\mathfrak{X} \to F$, donde $\mathfrak{X}$ es cualquier conjunto.

Ejemplo 3.1.3 (Espacios de sucesiones ℓ^p)**.** *Si $p \geq 1$ es un número real, podemos considerar el espacio de todas las sucesiones infinitas $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de elementos en F tales que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ (i. e., es finita). Entonces se define la p-norma (o norma-p) de la sucesión x como*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Este espacio, junto a su norma, es un espacio de Banach; se denota por ℓ^p

El espacio ℓ^∞ consiste de todas las sucesiones acotadas $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de elementos en F; la norma de una de estas sucesiones se define como el supremo de los valores absolutos de los miembros de la sucesión y se denota por

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

Ejemplo 3.1.4. *Si X y Y son dos espacios de Banach, entonces podemos formar su suma directa $X \oplus Y$, que es un espacio de Banach también, considerando cualquiera de las siguientes normas:*

1. $\|x \oplus y\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$, $\forall x \in X$ *y* $\forall y \in Y$.

2. $\|x \oplus y\|_\infty = \sup\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$, $\forall x \in X$ *y* $\forall y \in Y$.

3.1.1. Espacio Cociente de un Espacio de Banach

Proposición 3.1.2. *Sea V un espacio de Banach y sea W un subespacio cerrado de V. Entonces V/W es un espacio de Banach.*

Demostración. Para la demostración usaremos el hecho de que una sucesión convergente es de Cauchy. Entonces, sea $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V/W tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\overline{x}_k\|_{V/W} < \infty.$$

Aquí $(\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, y por lo tanto es de Cauchy. Demostraremos que converge a un elemento de V/W.
En efecto, usando la definición de la norma en V/W se tiene que $\forall k \in \mathbb{N}$ encontramos $\alpha_k \in \overline{x}_k$ tal que $\|\alpha_k\|_V < \|\overline{x}_k\|_{V/W} + 2^{-k}$; entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\|_V < \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\overline{x}_k\|_{V/W} + \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} < \infty.$$

Como V es de Banach, la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\alpha_k\|_V$ converge a un elemento en V que denotaremos por β. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \beta$ es un elemento de la clase $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{x}_k - (\beta + W)$, así que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{x}_k - (\beta + W) \right\|_{V/W} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \beta \right\|_V .$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_k = \beta + W$. □

3.2. Algebras Cociente

Sea I un ideal bilateral propio de una álgebra A. Entonces ya que I es también un subespacio propio, tenemos al espacio cociente A/I con la suma y multiplicación por un escalar ya anteriormente definidas.

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}(x+I)\cdot(y+I) &= xy + Iy + xI + I\cdot I \\ &= xy + I + I + I \\ &= xy + I;\end{aligned}$$

lo cual define una multiplicación en A/I, por lo tanto A/I tiene estructura de álgebra.

Esta álgebra será denotada como A/I y será llamada el **álgebra cociente de** A **módulo** I.
Si A tiene una unidad e, entonces $(e + I) \cdot (x + I) = xe + I = x + I$, por lo tanto A/I tiene como unidad a $e + I$.
La función $\pi : A \to A/I$ dada por $x \mapsto x + I$ es llamada el homomorfismo canónico de A sobre A/I.

Definición 3.2.1. *Un ideal (izquierdo, derecho, bilateral) es llamado **ideal maximal** (izquierdo, derecho, bilateral) si no está contenido en otro ideal propio del mismo tipo.*

En una álgebra conmutativa con unidad todo ideal propio está contenido en algún ideal maximal; lo mismo se cumple para las álgebras no conmutativas, con la observación de que los ideales izquierdos y derechos deben ser tratados de forma separada (los correspondientes ideales maximales son también izquierdos o derechos).

Ahora presentamos la siguiente

Definición 3.2.2. *Sean A un álgebra conmutativa con una unidad e, y S un subconjunto de A. Definimos el **ideal generado por** S de la siguiente manera:*

$$\langle S\rangle = \left\{\sum a_i s_i (\textit{suma finita}) : a_i \in A, s_i \in S\right\}.$$

De acuerdo con lo anterior presentamos el siguiente

Ejemplo 3.2.1. *1. $\langle S\rangle$ es un ideal de A.*

Demostración. Tenemos que $0 = 0s$ para cualquier $s \in S$, luego $0 \in \langle S\rangle$. Si $x = \sum a_i s_i \in \langle S\rangle$ y $y = \sum a'_j s'_j \in \langle S\rangle$, entonces

$$x - y = \sum a_i s_i - \sum a'_j s'_j = \sum a_i s_i + \sum(-a'_j)s'_j,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S\rangle$. Si $a \in A$ y $x = \sum a_i s_i \in \langle S\rangle$, entonces

$$ax = a\sum a_i s_i = \sum(aa_i)s_i,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S\rangle$. □

2. $\langle S\rangle$ es el menor de todos los ideales de A que contienen a S.

Demostración. Todo elemento $s \in S$ es de la forma $s = es$, por tanto $s \in \langle S\rangle$. Sea ahora I un ideal de A conteniendo al subconjunto S. Para elementos cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de A y $s_1, s_2, \ldots, s_m$ de S se verifica,

$$a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m \in I$$

por ser I ideal, luego $\langle S\rangle \subseteq I$. □

Por último veamos la siguiente

Proposición 3.2.1. *El álgebra cociente A/M de alguna álgebra A conmutativa con unidad módulo un ideal maximal M es un campo, i. e., todo elemento no cero de A/M tiene un inverso.*

Demostración. Sea $x + M \in A/M$ tal que no es el cero, entonces $x \notin M$. Luego, note que M está contenido en el ideal generado por x y M, es decir:

$$M \subset \langle x, M\rangle = \{\textstyle\sum x_i y_i (\text{suma finita}) : x_i \in A, y_i \in M\}$$

(Aquí cada x_i es de la forma $x_i = xa_i$ con $a_i \in A$).

Puesto que $x \notin M$ y M es maximal se tiene que $\langle x, M\rangle = A$. Entonces por lo tanto

$$e = \sum x_j y_j (\text{suma finita}), \text{ con } x_j \in A \text{ y } y_j \in M;$$

x no aparece en esta suma finita, ya que si así fuese, entonces $e = \sum x_j y_j \in M$, lo cual es una contradicción. Entonces

$$e \;=\; x(y_{j_1} + \cdots + y_{j_s}) + \sum x_i y_i \in xy + M.$$

Por lo tanto $e + M = (x + M)(y + M)$.

□

3.3. Álgebras Semitopológicas y Topológicas

Empezamos esta sección con las siguientes definiciones:

Definición 3.3.1. *Sea A un álgebra con una topología τ tal que (A, τ) es un espacio vectorial topológico. Se dice que A es un* ***álgebra semi-topológica*** *si se cumple que las transformaciones lineales*

$$L_b : A \to A, \qquad L_b(a) = ba$$

$$y$$

$$R_b : A \to A, \qquad R_b(a) = ab$$

son continuas para toda b en A.
En este caso se dice que la multiplicación es ***separadamente continua****.*
Se dice que A es un ***álgebra topológica*** *si la multiplicación es* ***conjuntamente continua****.*
Es decir

$$\cdot : A \times A \to A, \;\; (a, b) \mapsto a \cdot b$$

es continua.

Es fácil ver que un álgebra topológica es también semi-topológica.

Definición 3.3.2. *Sea A un álgebra, una seminorma $\|\cdot\|$ sobre A se dice que es* ***A-convexa*** *si para cada x en A existe una constante $M_x \geq 0$ (dependiendo de x) tal que*

$$\|xy\| \leq M_x \|y\| \text{ para toda } y \text{ en } A.$$

Decimos que $\|\cdot\|$ es ***multiplicativamente convexa*** *ó* ***m-convexa*** *si*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \;\forall x, y \in A.$$

Se dice entonces que A es un álgebra ***A-seminormada*** *ó* ***seminormada*** *si $\|\cdot\|$ es A-convexa ó m-convexa respectivamente, y en caso de que se trabaje solo con normas diremos que esta es una* ***A-norma*** *ó simplemente* ***norma*** *en cada caso.*

Claramente, toda norma m-convexa es A-convexa, pero el recíproco no es cierto en general, por ejemplo, considere el espacio vectorial de matrices cuadradas $A := M_{2,2}(\mathbb{R})$ con la norma

$$\|M\| = \text{máx}_{i,j}(|m_{ij}|),$$

donde se utiliza la notación $M = (m_{ij})$ sobre $\mathbb{R}$.
La anterior norma es A-convexa, sin embargo no es m-convexa, porque dada la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

se obtiene que

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

y así:

$$\|Q \cdot Q\| = 8 > 4 = \|Q\| \cdot \|Q\|.$$

Ahora añadimos la siguiente

Definición 3.3.3. *Sea A un álgebra, decimos que $\|\cdot\|$ es una* ***seminorma de algebra*** *sobre A, si cumple con:*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para toda x, y en A.

Proposición 3.3.1. *Sea $\|\cdot\|$ una seminorma sobre un álgebra A. Entonces*

(1) $(A, \tau_{\|\cdot\|})$ es semitopológica si y sólo si $\|\cdot\|$ es A-convexa.

(2) $(A, \tau_{\|\cdot\|})$ es topológica si y sólo si $\|\cdot\|$ es m-convexa.

Demostración. Demostración de (1): [$\Rightarrow$]. Sea $x \in A$, entonces la transformación lineal $L_x : A \to A$ tal que $L_x(a) = xa$ es continua, por lo tanto existe $M_x \geq 0$ tal que

$$\|L_x(a)\| = \|xa\| \leq M_x\|a\|$$

para toda $a \in A$.
El regreso es inmediato.

Demostración de (2): [$\Rightarrow$]. Supongamos que la multiplicación es continua en $(A, \|\cdot\|_\tau)$, entonces dada $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x\| < \delta$ y $0 < \|y\| < \delta$, se cumple que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{y}{\|y\|} \right\| < 1.$$

De esta manera se sigue que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Y si $\|x\| = 0$ o $\|y\| = 0$, es claro que se cumple que $\|xy\| = |\|x\|\|y\|$.
El regreso es inmediato. $\square$

Se puede probar (aquí confrontar Teorema 3.8.2 de este trabajo) que si $\|\cdot\|$ es m-convexa, entonces existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ tal que

$$|||xy||| \leq |||x||| \cdot |||y|||.$$

Por lo tanto, en este caso $|||\cdot|||$ es una *seminorma de álgebra*. Es decir, se tiene que $|||\cdot||| = M\|\cdot\|$ con $M > 0$.

A continuación otra

Definición 3.3.4. *Sea A un álgebra con uno e. Se dice que $a \in A$ es **invertible** si existe $b \in A$ tal que*

$$ab = ba = e$$

*A b lo llamamos **el inverso** de a, lo denotamos por a^{-1} y decimos que a es invertible, el cual es único.*

Denotamos por $G(A)$ al conjunto de todos los elementos invertibles de A.

Proposición 3.3.2. *Si $\alpha, \beta \in G(A)$ entonces $\alpha\beta \in G(A)$.*

Demostración. $\alpha\beta\beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\beta = e$. □

Enseguida veamos una definición sobre elementos inversos de un álgebra A con unidad e:

Definición 3.3.5. *Dado E un subconjunto de un álgebra A con uno e, definimos el **conmutante de** E, denotado por E^c, como el subconjunto*

$$E^c := \{a \in A : ax = xa, x \in E\}.$$

*$(E^c)^c$ es abreviado por E^{cc}, y es llamado el **segundo conmutante** de E.*

Definición 3.3.6. *Sea $(G, \odot)$ un grupo, si (G, τ) forma un espacio topológico decimos que $(G, \odot, \tau)$ es un **grupo topológico** si cumple que*

1. $\odot : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ es una función continua.

2. $i : (G, \tau) \to (G, \tau)$, tal que $\forall x \in G : i(x) = x^{-1}$ es también una función continua.

Aquí $(G, \tau) \times (G, \tau)$ es considerado como $G \times G$ con la topología producto.

Así, continuamos con la siguiente

Proposición 3.3.3. *Sea $a \in G(A)$. Entonces $a^{-1} \in \{a\}^{cc}$.*

Demostración. Sea $x \in \{a\}^c$. Entonces $ax = xa$, y así

$$xa^{-1} = a^{-1}(ax)a^{-1} = a^{-1}(xa)a^{-1} = a^{-1}x.$$

□

Es fácil probar que $G(A)$ es un grupo con respecto a el producto en A, i. e., que

$$a, b \in G(A) \Rightarrow ab, a^{-1} \in G(A).$$

$G(A)$ es por esta razón llamado *el grupo de elementos invertibles* de A, o *el grupo de elementos regulares* de A.

A continuación se presenta otra proposición relacionada

Proposición 3.3.4. *La multiplicación en un álgebra A provista con una norma de álgebra $\|\cdot\|$ es una función continua de $A \times A$ en A.*

Demostración. Sean $x, y, a, b \in A$ entonces note que

$$\begin{aligned} \|xy - ab\| &= \|(x-a)(y-b) + a(y-b) + (x-a)b\| \\ &\leq \|x-a\|\|y-b\| + \|a\|\|y-b\| + \|x-a\|\|b\|. \end{aligned}$$

□

Continuamos con el siguiente

Lema 3.3.1. *Sea A una álgebra con uno e y con una norma de álgebra $\|\cdot\|$. Si $a, b \in G(A)$ y $\|b - a\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, entonces*

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a - b\|$$

Demostración. Para tales a, b tenemos que

$$\|b^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|b^{-1} - a^{-1}\| = \|b^{-1}(a-b)a^{-1}\| \leq \frac{1}{2}\|b^{-1}\|.$$

Por lo tanto $\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|$, y así

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq \|b^{-1}\|\|a - b\|\|a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a - b\|.$$

□

Proposición 3.3.5. *Sea A un álgebra con uno e y con una norma de álgebra $\|\|$. Entonces, con la topología inducida de la norma de A, la función $a \mapsto a^{-1}$ es un homeomorfismo de $G(A)$ en $G(A)$, y $G(A)$ es un grupo topológico.*

Demostración. La multiplicación en $G(A)$ es continua por la Proposición 3.3.4, además note que si $a, b \in G(A)$ entonces $ab \in G(A)$ ya que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in G(A)$. Por lo tanto la función $h : a \mapsto a^{-1}$ con $a \in G(A)$ preserva la operación. Por último se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, bend right, "I"'] & G(A) \arrow[d, "h"] \\ & G(A) \end{tikzcd}$$

donde $I : G(A) \to G(A)$ es la función identidad. Así h es un homeomorfismo.
Por consiguiente concluimos también que $G(A)$ es un grupo topológico. □

3.4. El Concepto de Espectro de un Elemento x

Definición 3.4.1. *Sea A un álgebra con uno e, entonces para un elemento $a \in A$ definimos respectivamente el **espectro** y el **radio espectral** sobre A de la siguiente forma:*

$$\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \text{ no tiene inverso en } A\}$$

$$\rho_A(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

Si no hay confusión sobre el álgebra podemos solo escribir $\sigma(a)$ y $\rho(a)$ respectivamente.

A continuación definimos la seminorma $\|\cdot\|^{\infty}$ la cual tiene propiedades muy interesantes.

Definición 3.4.2. *Sea A un álgebra con una norma de algebra $\|\|$. Definimos*

$$\|a\|^{\infty} = \text{ínf}\{\|a^n\|^{1/n}, n = 1, 2, \dots\}. \tag{3.6}$$

Si A tiene uno e y $\|e\| = 1$, entonces denotaremos a $\|a\|^{\infty}$ por $r(a)$. Demostraremos más adelante que

$$r(a) = \|a\|^{\infty} = \rho(a). \tag{3.7}$$

A continuación se exponen algunas propiedades del radio espectral, sin embargo para mostrar algunas, se usaran hechos de secciones posteriores, por lo tanto hay que poner atención a esto.

Proposición 3.4.1. *Sea A un álgebra con uno e, entonces se verifican las siguientes propiedades sobre el radio espectral:*

1. *$\forall a, b \in A$ y $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\rho(\lambda a) = |\lambda|\rho(a)$ y $\rho(ab) = \rho(ba)$.*
2. *Si B es una subálgebra de A, entonces cada $b \in B$ con espectro no vacío sobre B satisface que:*

$$\rho_A(b) \leq \rho_B(b).$$

Demostración. 1. En la primera parte de este inciso, sabemos que

$$\rho(\lambda a) := \sup\{|\varphi| : \varphi \in \sigma(\lambda a)\}.$$

Entonces, como aquí $\varphi \in \sigma(\lambda a)$, existe $\alpha \in \sigma(a)$ tal que $\lambda\alpha = \varphi$, de esta forma

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda a) &= \sup\{|\varphi| : \varphi \in \sigma(\lambda a)\} \\
&= \sup\{|\lambda\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\} \\
&\leq |\lambda| \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\} = |\lambda|\rho(a).
\end{aligned}$$

Por otro lado $|\lambda|\rho(a) \geq \{|\lambda\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\}$; por lo tanto si hacemos $\varphi := \lambda\alpha$ obtenemos que:

$$|\lambda|\rho(a) \geq \{|\lambda\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\} = \{|\varphi| : \varphi \in \sigma(\lambda a)\}.$$

De donde $|\lambda|\rho(a) \geq \rho(\lambda a)$.

Para la segunda parte de este inciso, basta con probar que si $a, b \in A$ se cumple que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$. En efecto, nos interesa demostrar que $1 \in \sigma(ab)$ si y sólo si $1 \in \sigma(ba)$ ó equivalentemente que ab es quasi-invertible si y sólo si ba es quasi-invertible. Pero esto es la Proposición 3.7.3.

2. Note que bajo las hipótesis de este inciso se tiene que $\forall b \in B$, $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$. En efecto, sea $\lambda \notin \sigma_B(b)$, entonces, $b-\lambda e$ es invertible en $B \subseteq A$; así, $b-\lambda e$ es invertible en A, de donde $\lambda \notin \sigma_A(b)$. De esta manera se tiene que:

$$\rho_B(b) \geq \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_B(b)\} \supseteq \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(b)\},$$

por lo tanto

$$\rho_B(b) \geq \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(b)\}$$

de donde se obtiene que cada $b \in B$ satisface que: $\rho_B(b) \geq \rho_A(b)$.

□

A continuación mostraremos algunas propiedades de $\|\cdot\|^\infty$.

Teorema 3.4.1. *Para toda $a, b \in A$, un álgebra con una norma de algebra $\|\|$, se tiene:*

(a) $\|a\|^\infty = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

(b) $0 \leq \|a\|^\infty \leq \|a\|$.

(c) $\|\lambda a\|^\infty = |\lambda| \|a\|^\infty$.

(d) $\|ab\|^\infty = \|ba\|^\infty$.

(e) $\|a^n\| = (\|a\|^\infty)^n$.

(f) $\|e\|^\infty = 1$ *si A tiene una identidad e y* $\|e\| = 1$.

(g) Si a y b conmutan, entonces

$$\begin{aligned} \|a+b\|^\infty &\leq \|a\|^\infty + \|b\|^\infty \ \& \\ \|ab\|^\infty &\leq \|a\|^\infty \|b\|^\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\cdot\|^\infty$ es una seminorma de álgebra sobre cualquier álgebra que sea conmutativa.

(h) Sea (a_n) una sucesión en A que converge a a en A. Entonces

$$\limsup \|a_n\|^\infty \leq \|a\|^\infty.$$

Demostración. Nótese que (b), (c), y (f) son inmediatas de la ecuación (3.6). Por lo tanto para probar (a), supongamos que $\|a\|^\infty \leq \|a\| < 1$. Escogemos $\varepsilon > 0$ que satisface $\varepsilon < 1 - \|a\|^\infty$. Ahora, por definición de $\|a\|^\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a^m\|^{1/m} < \|a\|^\infty + \varepsilon/2.$$

También note que podemos elegir un $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a\|^\infty + \varepsilon/2 < (\|a\|^\infty + \varepsilon)^{\frac{r+1}{r}}.$$

A su vez, tenemos que $\forall n \geq mr$, se puede escribir

$$n = mp + q$$

con $p \geq r$, y $0 \leq q < m$. Por lo tanto, todo lo anterior implica que:

$$\begin{aligned}
\|a\|^\infty &\leq \|a^n\|^{1/n} \leq \|a^{mp}\|^{1/n}\|a^q\|^{1/n} \\
&\leq \left(\|a^m\|^{1/m}\right)^{mp/n} \|a\|^{q/n} < (\|a\|^\infty + (\varepsilon/2))^{mp/n} \\
&< (\|a\|^\infty + \varepsilon)^{mp(r+1)/nr} < \|a\|^\infty + \varepsilon,
\end{aligned}$$

puesto que $mp(r+1) > mpr + qr = nr$. Y de esto se sigue que $\|a\|^\infty = \text{lím}\, \|a^n\|^{1/n}$.
De (a) es fácil demostrar (d). En efecto, sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(ab)^n = a(ba)^{n-1}b$, entonces por una parte:

$$\begin{aligned}
\|ab\|^\infty &= \text{lím}_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{1/n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \|a(ba)^{n-1}b\|^{1/n} \\
&\leq \text{lím}_{n\to\infty} \|a\|^{1/n}\|(ba)^n\|^{1/n}\|(ba)^{-1}\|^{1/n}\|b\|^{1/n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \|(ba)^n\|^{1/n} = \|ba\|^\infty
\end{aligned}$$

y por otra:

$$\begin{aligned}
\|ba\|^\infty &= \text{lím}_{n\to\infty} \|(ba)^n\|^{1/n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \|b(ab)^{n-1}a\|^{1/n} \\
&\leq \text{lím}_{n\to\infty} \|b\|^{1/n}\|(ab)^n\|^{1/n}\|(ab)^{-1}\|^{1/n}\|a\|^{1/n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{1/n} = \|ab\|^\infty.
\end{aligned}$$

Gracias a la propiedad (a) es fácil probar (e) y la segunda desigualdad de (g).
Probaremos la primera desigualdad en (g). Sean $a, b \in A$ que conmutan, $s > \|a\|^\infty$ y $t > \|b\|^\infty$. Entonces definimos a_0 y b_0 como $s^{-1}a$ y $t^{-1}b$ respectivamente. Ahora, como $\|{a_0}^n\|^{1/n}$ y $\|{b_0}^n\|^{1/n}$ son estrictamente mayores que cero inclusive para una n suficientemente grande, existe $M < \infty$ que satisface que

$$\sup\{\|{a_0}^n\|, \|{b_0}^n\| : n \in \mathbb{N}\} \leq M.$$

De esta manera tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
\|(a+b)^n\| &= \left\|\textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\right\| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k}t^k \|{a_0}^{n-k}\|\|b_0^k\| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k}t^k M^2 = (s+t)^n M^2.
\end{aligned}$$

Así obtenemos que:

$$\|a+b\|^\infty = \text{lím}\, \|(a+b)^n\|^{1/n} \leq s + t.$$

Esto último completa la prueba de (g), ya que $s > \|a\|^\infty$ y $t > \|b\|^\infty$ fueron arbitrarios.

(h): Como en la demostración de (a), supongamos que $\|a\| < 1$ y $\|a_n\| < 1$ para toda n. Sea $\varepsilon > 0$ un número dado. La definición nos muestra que es suficiente hallar n_0 y m en $\mathbb{N}$ tales que

$$\|{a_n}^m\|^{1/m} < \|a\|^\infty + \varepsilon/2 \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.8}$$

Elegimos m tal que $\|a^m\|^{1/m} < \|a\|^\infty + \varepsilon/4$. La desigualdad

$$\begin{aligned} \|{a_n}^m - a^m\| &= \left\| \sum_{j=0}^{m-1} {a_n}^j (a_n - a) a^{m-j-1} \right\| \\ &\leq m \max\{\|a_n\|, \|a\|\}^{m-1} \|a_n - a\| < m\|a_n - a\| \end{aligned}$$

implica la existencia de un n_0 tal que

$$\|{a_n}^m - a^m\| < m(\|a\|^\infty + \varepsilon/4)^{m-1}\varepsilon/4$$

para toda $n \geq n_0$. La expansión binomial para $((\|a\|^\infty + \varepsilon/4) + \varepsilon/4)^m$ nos muestra que

$$\begin{aligned} \|{a_n}^m\| &= \|a^m + ({a_n}^m - a^m)\| \leq \|a^m\| + \|{a_n}^m - a^m\| \\ &< (\|a\|^\infty + \varepsilon/4)^m + m(\|a\|^\infty + \varepsilon/4)^{m-1}\varepsilon/4 \\ &< (\|a\|^\infty + \varepsilon/2)^m \end{aligned}$$

para toda $n \geq n_0$. Tomando la raíz m-ésima obtenemos la desigualdad (3.8). □

Sea A un álgebra con uno e y con una norma de álgebra $\|\cdot\|$. Entonces con el fin de demostrar que

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \rho(a)$$

elaboramos la siguiente teoría siguiendo a [5].
Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ no vacío. Denotamos por $P(D)$ al álgebra de todos los polinomios con coeficientes complejos valuados en D, y por $R(D)$ al álgebra de todas las funciones racionales valuadas en D tales que no tienen polos en D. Es decir,

$$R(D) := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in P(D) \text{ y } q(z) \neq 0 \ \forall z \in D \right\}.$$

Sea $a \in A$, entonces dado $p \in P(D)$, denotamos por $p(a)$ al elemento de A dado por

$$p(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n,$$

donde

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n \ (z \in D)$$

Es claro que $p(a)$ está bien definido para toda $a \in A$. Es cuestión de una manipulación el demostrar que

$$p(z) \mapsto p(a) : P(D) \to A$$

es un homomorfismo lineal. Con el fin de extender este homomorfismo a $R(D)$, es necesario suponer que

$$\sigma_A(a) \subseteq D.$$

Sea $q(z) \in P(D)$ tal que $q(z) \neq 0 \ \forall z \in D$, entonces

$$q(z) = \alpha(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n)$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus D$. Entonces es claro que

$$q(a) = \alpha(a - \lambda_1 e)(a - \lambda_2 e)\cdots(a - \lambda_n e),$$

con no todos los λ_i diferentes.
Entonces tenemos que $q(a)$ es invertible y podemos definir

$$q(a)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(a - \lambda_1 e)^{-1}(a - \lambda_2 e)^{-1}\cdots(a - \lambda_n e)^{-1}$$

por conmutar estos elementos entre sí.
Por lo tanto podemos definir

$$\frac{p}{q}(a) = p(a)q^{-1}(a) = q^{-1}(a)p(a),$$

por la misma razón. Es claro que esto extiende apropiadamente nuestro homomorfismo a

$$R(D) \longrightarrow A. \tag{3.9}$$

Con lo anterior veamos la siguiente

Proposición 3.4.2. *Sea A un álgebra con uno e, a un elemento cualquiera en A y D una vecindad abierta no vacía de $\sigma(a)$; entonces, dado $p \in P(D)$, no constante, se cumple que:*

$$\sigma(p(a)) = \{p(z) : z \in \sigma(a)\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lambda - p(z) = \beta(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)\cdots(\alpha_n - z) \text{ con } z \in D.$$

Por lo tanto, utilizando el homomorfismo de $P(D)$ en A, tenemos que

$$\lambda e - p(a) = \beta(\alpha_1 e - a)(\alpha_2 e - a)\cdots(\alpha_n e - a).$$

Ahora, como p es un polinomio no constante, se tiene que $\beta \neq 0$. Por lo tanto $\lambda e - p(a)$ es no invertible si y sólo si $\alpha_k e - a$ es no invertible para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, si y sólo si $\alpha_k \in \sigma(a)$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$. De esta forma se tiene que $\lambda \in \sigma(p(a))$ si y sólo si $\lambda - p(z) = 0$ para algún $z \in \sigma(a)$. $\square$

La representación p/q para f es única salvo factores comunes en el numerador y denominador. Además los polinomios en a y los inversos de tales polinomios conmutan uno con el otro (véase la Proposición 3.3.3) y así $f(a)$ es independiente de la elección de p y q. Esto nos genera la siguiente

Proposición 3.4.3. *Sean A un álgebra con uno e, $a \in A$ y D una vecindad abierta no vacía de $\sigma(a)$. Entonces la función $f := p/q \mapsto f(a) := p(a)(q(a))^{-1}$ es un homomorfismo lineal de $R(D)$ en A el cual es una extensión del homomorfismo de $P(D)$ en A, y además satisface que*

$$\sigma(f(a)) = \{f(z) : z \in \sigma(a)\}.$$

En este caso f no puede ser una constante.

Demostración. La primera parte se verifica con lo obtenido previamente en (3.9).
Para la segunda parte sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma \in \mathbb{C}$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C} \setminus D$ tales que

$$\lambda - f(z) = \gamma(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z) \cdots (\alpha_n - z)(\beta_1 - z)^{-1}(\beta_2 - z)^{-1} \cdots (\beta_m - z)^{-1} \text{ con } z \in D.$$

Por lo tanto, utilizando el homomorfismo de $R(D)$ en A, tenemos que

$$\lambda e - f(a) = \beta(\alpha_1 e - a)(\alpha_2 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)(\beta_1 e - z)^{-1}(\beta_2 e - z)^{-1} \cdots (\beta_m e - z)^{-1}.$$

Ahora, como p es un polinomio no constante, se tiene que $\gamma \neq 0$. Por lo tanto $\lambda e - f(a)$ es no invertible si y sólo si $\alpha_k e - a$ es no invertible para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, si y sólo si $\alpha_k \in \sigma(a)$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$. De esta forma se tiene que $\lambda \in \sigma(f(a))$ si y sólo si $\lambda - f(z) = 0$ para algún $z \in \sigma(a)$. □

Enseguida se expone un Teorema de importancia. Pero para su demostración usaremos el siguiente

Lema 3.4.1. *Dado un entero positivo n, sean $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ los ceros del polinomio $z^n - 1$. Entonces se tiene la igualdad*

$$\frac{1}{1 - z^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega_k}}$$

Demostración. Sea ω_k, $k = 1, \ldots, n$, uno de los ceros de $1 - z^n$. Entonces

$$\begin{aligned} Res(\tfrac{1}{1-z^n}; \omega_k) &= -\lim_{z \to \omega_k} \tfrac{\omega_k - z}{1 - z^n} \\ &= -\lim_{z \to \omega_k} \tfrac{1}{z^{n-1} + z^{n-2}\omega_k + \cdots \omega_k{}^{n-1}} = -\tfrac{1}{n \omega_k{}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{1 - z^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1/\omega_k{}^{n-1}}{\omega_k - z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \omega_k{}^{n-1} z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega_k}}.$$

□

Teorema 3.4.2. *Sea a un elemento de un álgebra compleja con uno e, equipada con una norma de álgebra $\|\cdot\|$. Entonces existe un número complejo λ en $\sigma(a)$ tal que $|\lambda| \geq r(a)$. Lo cual implica la desigualdad:*

$$r(a) = \|a\|^{\infty} \leq \rho(a).$$

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad que $\rho(a) = 1$ y también suponemos que existe $\eta > 1$ tal que el anillo $E := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq \eta\}$ tiene intersección vacía con $\sigma(a)$. Se tiene entonces que para toda $z \in E$ se cumple que

$$ze - a \in G(a),$$

y así, por la Proposición 3.3.5, la función $z \mapsto z(ze - a)^{-1}$ es continua de E en A, y como E es compacto, esta función es uniformemente continua, por lo tanto dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\lambda(\lambda e - a)^{-1} - \mu(\mu e - a)^{-1}\| < \varepsilon \text{ con } \lambda, \mu \in E \text{ y } |\lambda - \mu| \leq \delta. \tag{3.10}$$

Ahora, dado un entero positivo n, sean $\omega_1, \ldots, \omega_n$ los ceros del polinomio $z^n - 1$; así por el lema anterior se tiene que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-{\omega_k}^{-1}z} = \frac{1}{1-z^n}.$$

Sea $D = \mathbb{C} \setminus E$. Entonces D es una vecindad abierta no vacía de $\sigma(a)$, y cuando $\lambda \in E$ se tiene que $\lambda\omega_k \in E$, y esto implica que la ecuación

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-{\omega_k}^{-1}\lambda^{-1}z} = \frac{1}{1-\lambda^{-n}z^n} \quad (z \in D)$$

relaciona funciones racionales que pertenecen a $R(D)$. Por lo tanto, por la Proposición 3.4.3

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n}(e-{\omega_k}^{-1}\lambda^{-1}a)^{-1} = (e-\lambda^{-n}a^n)^{-1} \quad (\lambda \in E). \tag{3.11}$$

Así podemos definir para toda $\lambda \in E$ la función $c_n(\lambda) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e-{\omega_k}^{-1}\lambda^{-1}a)^{-1}$. Enseguida note que si $\lambda, \mu \in E$ con $|\lambda-\mu| < \delta$ se obtiene que $\lambda\omega_k, \mu\omega_k \in E$ y $|\lambda\omega_k-\mu\omega_k| < \delta$. Entonces por (3.10) obtenemos que

$$\|\lambda\omega_k(\lambda\omega_k e - a)^{-1} - \mu\omega_k(\mu\omega_k e - a)^{-1}\| < \varepsilon \text{ con } k = 1, \ldots, n;$$

y así

$$\|c_n(\lambda) - c_n(\mu)\| < \varepsilon \quad (\lambda, \mu \in E, |\lambda-\mu| < \delta). \tag{3.12}$$

Si $|\lambda| > 1$, $\lim_{n\to\infty} e - \lambda^{-n}a^n = e$, y así, por la Proposición 3.4.3 y (3.11),

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\lambda) = e.$$

Continuando, elegimos λ en E con $|\lambda| > 1$ y $|\lambda - 1| < \delta$. Entonces, por (3.12)

$$\|c_n(\lambda) - c_n(1)\| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

y así $\|e - c_n(1)\| \leq \varepsilon$ para una n suficientemente grande. Por lo tanto, cuando $n \to \infty$, tenemos en turno que $c_n(1) \to e$, $(e-a^n)^{-1} \to e$, $e - a^n \to e$ y $a^n \to 0$!!. Pero esto es imposible, ya que

$$\|a^n\| \geq (r(a))^n = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Esta contradicción prueba que $E \cap \sigma(a)$ no es vacío. □

Queremos hacer notar que como consecuencia de este último Teorema 3.4.2 se tiene que

$$\|a\|^{\infty} \leq \rho(a). \tag{3.13}$$

Ahora considere la siguiente definición de un álgebra de Banach.

Definición 3.4.3. *Sea A con una norma de* ***álgebra*** $\|\cdot\|$*. Decimos que A es* ***de Banach*** *si A es completa con respecto a $\|\cdot\|$. Tal álgebra también es llamada* ***álgebra de tipo*** **B** ***o*** **B*****-álgebra****. Esto en símbolos se puede escribir $A \in$* **B**.

Ejemplos de Álgebras de Banach

Ejemplo 3.4.1. *Sea X un espacio de Banach con respecto a una norma $\|\cdot\|$, y consideremos $B(X)$ el espacio de Banach de las transformaciones lineales acotadas de X en X con la norma*

$$|T| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|.$$

(veáse la Proposición 3.1.1).

Definimos la multiplicación

$$T \cdot S : X \to X$$

como

$$T \cdot S(x) := T(S(x))$$

para toda $x \in X$. Se tiene que este producto tiene todas las propiedades para que $B(X)$ sea un álgebra. Además de ello, tenemos que

$$\begin{aligned} |T \cdot S| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(S(x))\| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} (|T|\|S(x)\|) \\ &= |T||S|. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que $B(X)$ es un álgebra de Banach con respecto a esta norma de álgebra $|\cdot|$.

Ejemplo 3.4.2. *Sea Ω un espacio Hausdorff compacto. Denotamos por $C(\Omega)$ al espacio de todas las funciones continuas de valores complejos definidas en Ω. Este es un espacio de Banach bajo la norma $\|x\| := \text{máx}_{t\in\Omega}|x(t)|$. Ahora; como es claro que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $C(\Omega)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación de funciones. Y de hecho es un álgebra conmutativa con unidad.*

Ejemplo 3.4.3. *Sea Ω un espacio topológico Hausdorff. Denotamos por $C_B(\Omega)$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas y acotadas sobre Ω con la norma $\|x\| := \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$. Entonces tal espacio es un álgebra de Banach bajo la multiplicación de funciones.*

Ejemplo 3.4.4. *Denotamos por $L_1(-\infty,\infty)$ al espacio de Banach de funciones absolutamente integrables sobre la recta real, con la norma*

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt, x \in L_1(-\infty,\infty).$$

La multiplicación en $L_1(-\infty,\infty)$ se define:

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

Esta multiplicación es conmutativa y asociativa, además,

$$\begin{aligned} \|x * y\| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau) \right| d\tau dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||y(\tau)|d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)|dtd\tau = \|x\|\|y\|, \end{aligned}$$

de esta manera $L_1(-\infty,\infty)$ es una álgebra de Banach. Se puede verificar también que $L_1(-\infty,\infty)$ no tiene uno e. En efecto, supongamos que sí lo tiene; entonces consideremos la función en $L_1(-\infty,\infty)$

$$\delta_{t_0}(t)=\begin{cases} 0 \quad , \quad t\neq t_0 \\ \\ 1 \quad , \quad t=t_0. \end{cases}$$

Por consiguiente se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \delta_{t_0}(t_0) \\ &= e*\delta_{t_0}(t_0) \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e(t_0-\tau)\delta_{t_0}(\tau)d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1=0.$$

Pero esto último es una contradicción, por lo tanto tal uno e no existe.

Ejemplo 3.4.5. *Denotemos por $\ell_1(-\infty,\infty)$ al espacio de Banach de sucesiones dobles de números complejos $\alpha=\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con la norma*

$$\|\alpha\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|.$$

Es un álgebra de Banach con la multiplicación definida de la siguiente forma:

$$(\alpha*\beta)_n:=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-k}\beta_k,$$

es decir, $\alpha*\beta$ es la sucesión cuya n-ésima entrada es igual a $(\alpha*\beta)_n$. Se puede verificar fácilmente que $\ell_1(-\infty,\infty)$ es un álgebra con uno e. El elemento uno es la sucesión $e:=\{\delta_{0n}\}$,

$$\delta_{ij}:=\begin{cases} 0 \quad para \quad i\neq j, \\ \\ 1 \quad para \quad i=j. \end{cases}$$

Esto es claro puesto que para toda $\alpha\in\ell_1(-\infty,\infty)$ se cumple que:

$$\begin{aligned} (\alpha*e)_n &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-k}e_k \\ &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-k}\delta_{0k} \\ &= \alpha_n \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha*e=\alpha.$$

Asimismo también se cumple que

$$\begin{aligned} (e*\alpha)_n &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_{n-k}\alpha_k \\ &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{0(n-k)}\alpha_k \\ &= \alpha_n \end{aligned}$$

$$\therefore e*\alpha=\alpha.$$

Ejemplo 3.4.6. *Denotamos por $\mathcal{A}$ al álgebra de todas las funciones holomorfas en el disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y continuas en su cerradura. Esta es un álgebra de Banach bajo la norma*

$$\|x\| = máx_{|t|\leq 1}|x(t)| = máx_{|t|=1}|x(t)|$$

y multiplicación puntual de funciones. El álgebra $\mathcal{A}$ puede ser considerada como una subálgebra del álgebra $C(\overline{D})$.

Ejemplo 3.4.7. *Denotamos por H_∞ al álgebra de todas las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario complejo D con la multiplicación puntual de funciones, y la norma $\|x\| = \sup|x(t)|$. Esta es un álgebra de Banach, una superálgebra de $\mathcal{A}$.*

3.5. La norma $\|\|_{\rm op}$ de una A-norma $\|\|$

Sea $\|\cdot\|$ una norma A-convexa sobre un álgebra A. Entonces se define la **norma operador** $\|\|_{\rm op}$ asociada a $\|\|$ como:

$$\|x\|_{\rm op} := \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\|. \tag{3.14}$$

A continuación probaremos que $\|\|_{\rm op}$ es una norma m-convexa sobre A. Pero antes notamos lo siguiente, lo cual es de cierto interés:

Puesto que $\|\|$ es A-convexa, se tiene que para cada $x \in A$, existe $M_x > 0$ tal que

$$\|xy\| \leq M_x\|y\| \text{ para cada } y \in A.$$

para toda $x, y \in A$. Entonces, vale que

$$\|x\|_{\rm op} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\| \leq M_x \sup_{\|y\|\leq 1} \|y\| = M_x.$$

Si A tiene uno e, entonces $\|e\|_{\rm op} = 1$, puesto que por definición:

$$\|e\|_{\rm op} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|y\| = 1$$

También es fácil ver que

$$\|xy\| \leq \|x\|_{\rm op}\|y\|, \tag{3.15}$$

ya que

$$\|x\frac{y}{\|y\|}\| \leq \|x\|_{\rm op}.$$

Enseguida nuestro propósito.

Teorema 3.5.1. $\|\|_{op}$ *es m-convexa*

Demostración. Sean $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \|xy\| &= \sup\nolimits_{\|z\|\leq 1} \|xyz\| \\ &\leq \|x\|_{\rm op} \cdot \sup\nolimits_{\|z\|\leq 1} \|yz\| \\ &= \|x\|_{\rm op}\|y\|_{\rm op}. \end{aligned}$$

$\square$

Enseguida, consideraremos una norma A-convexa, y observaremos que la norma operador $\|\|\|_{\text{op}}$ nos puede inducir la m-convexidad de la norma A-convexa. Entonces veamos esto con el siguiente:

Lema 3.5.1. *Sea A una álgebra conmutativa con una norma $\|\|\|$ A-convexa. Entonces $\|\|\|$ es m-convexa si y sólo si $\forall x \in A$, $\|x\|_{op} \leq \|x\|$.*

Demostración. [$\Rightarrow$]. $\|\|\|$ es m-convexa si $\forall x, y \in A$ se cumple que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

Entonces si $y \neq 0$, $\frac{\|xy\|}{\|y\|} \leq \|x\|$, por lo tanto por (3.14)

$$\|x\|_{\text{op}} \leq \|x\|.$$

[$\Leftarrow$]. Aquí tenemos que $\forall x \in A$, $\|x\|_{\text{op}} \leq \|x\|$, entonces si $y \in A$ se cumple que $\|x\|_{\text{op}}\|y\| \leq \|x\|\|y\|$, por lo tanto dada la propiedad (3.15) obtenemos que $\forall x, y \in A$

$$\|xy\| \leq \|x\|_{\text{op}}\|y\| \leq \|x\|\|y\|$$

de donde $\|\|\|$ es m-convexa. □

Por lo tanto, si deseamos estudiar la estructura multiplicativa de $\|\|\|$, es de utilidad comparar $\|\|\|$ con su norma operador $\|\|\|_{\text{op}}$. Ahora, en [3] se define una constante, la cual es de importancia en el estudio de la relación entre $\|\|\|$ y $\|\|\|_{\text{op}}$. Así, sea

$$m(\|\|\|) := \sup_{\|y\| \leq 1} \|y\|_{\text{op}}, \;\; y \in A.$$

Diremos que $m(\|\|\|)$ es *el módulo de m-convexidad de* $\|\|\|$ sobre A. De la definición de $m(\|\|\|)$ se sigue que, para cada $x \in A$, $\|x\|_{\text{op}} \leq m(\|\|\|)\|x\|$. Por consiguiente, por el Lema 3.5.1 se sigue la siguiente

Proposición 3.5.1. *Una norma $\|\|\|$ es m-convexa sobre A si y sólo si $m(\|\|\|) \leq 1$.*

Demostración. [$\Rightarrow$]. Supongamos que $\|\|\|$ es una norma m-convexa y $m(\|\|\|) > 1$, entonces tenemos que $\forall x \in A$:

$$\|x\|_{\text{op}} \leq \|x\| < m(\|\|\|)\|x\|,$$

así si $x = 0$, se obtiene que $0 < 0$, lo cual es un absurdo.

[$\Leftarrow$]. Sea $x \in A$, luego como $m(\|\|\|) \leq 1$, se sigue que $m(\|\|\|)\|x\| \leq \|x\|$. Por lo tanto, como se cumple que $\|x\|_{\text{op}} \leq m(\|\|\|)\|x\|$, se sigue que $\forall x \in A$, $\|x\|_{\text{op}} \leq \|x\|$, de donde $\| \cdot \|$ es m-convexa. □

Por otro lado, es fácil verificar que si $m(\|\|\|)$ es finito (i.e., $m(\|\|\|) < \infty$), entonces $\forall k > 0$, $m(k\|\|\|) = (1/k)m(\|\|\|)$. En efecto

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k}m(\|\|\|) &= \tfrac{1}{k}\sup\nolimits_{\|y\|\leq 1} \|y\|_{\text{op}} \\
&= \sup\nolimits_{\|y\|\leq 1} \tfrac{1}{k}\|y\|_{\text{op}} \\
&= \sup\nolimits_{\|\frac{k}{k}y\|\leq 1} \|\tfrac{1}{k}y\|_{\text{op}} \\
&= \sup\nolimits_{k\|\frac{1}{k}y\|\leq 1} \|\tfrac{1}{k}y\|_{\text{op}} \\
&= k\sup\nolimits_{\|\frac{1}{k}y\|\leq 1} \|\tfrac{1}{k}y\|_{\text{op}} = km(\|\|\|).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\|\|$ puede ser considerado como una norma m-convexa sobre A si $m(\|\|\|)$ es finita.

3.6. Ideales y Álgebras de Banach

Antes de continuar consideremos la siguiente Proposición sobre ideales y cerradura en ideales.

Proposición 3.6.1. *Si I es un ideal (derecho izquierdo o bilateral) de un álgebra normada $(A, \|\cdot\|)$* [2] *su cerradura también lo es (derecho, izquierdo o bilateral).*

Demostración. Aquí probaremos el caso de ideal izquierdo, siendo similar para los otros casos.
Primero demostraremos que $\mathrm{cl}(I)$ es un grupo con la suma. Sean $x, y \in \mathrm{cl}(I)$, entonces se cumple que

$$B(x, \varepsilon_1) \cap I \neq \emptyset \tag{3.16}$$

y que

$$B(y, \varepsilon_2) \cap I \neq \emptyset \tag{3.17}$$

Demostraremos entonces que $B(x-y, \varepsilon_1+\varepsilon_2) \cap I \neq \emptyset$.
En efecto, de (3.16) supongamos que $\alpha \in B(x, \varepsilon_1) \cap I$, y de (3.17) supongamos que $\beta \in B(x, \varepsilon_2) \cap I$; entonces se tiene que $\|x-\alpha\| < \varepsilon_1$ y $\|y-\beta\| < \varepsilon_2$.
Ahora note que

$$\begin{aligned} \|x-y-(\alpha-\beta)\| &= \|x-y+\beta-\alpha\| = \|x-\alpha+\beta-y\| \\ &\leq \|x-\alpha\| + \|\beta-y\| < \varepsilon_1+\varepsilon_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha-\beta \in B(x-y, \varepsilon_1+\varepsilon_2)$, y a su vez $\alpha-\beta \in I$ puesto que I es ideal. Así $x-y \in \mathrm{cl}(I)$.

Enseguida probaremos que si $a \in A$ y $x \in \mathrm{cl}(I)$ entonces $ax \in \mathrm{cl}(I)$. En efecto, si $a = 0$, $ax = 0 \in I \subset \mathrm{cl}(I)$. Supongamos entonces que $a \neq 0$. De esta forma $\forall\delta > 0$, $B(x,\delta) \cap I \neq 0$. Supongamos que $\alpha \in B(x,\delta) \cap I$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|x-\alpha\| < \delta && \text{y} \quad \alpha \in I \\ &\Rightarrow \|a\|\|x-\alpha\| < \|a\|\delta && \text{y} \quad a\alpha \in I \\ &\Rightarrow \|ax-a\alpha\| < \|a\|\delta && (\text{aquí note que } \|a\|\delta > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore a\alpha \in B(ax, \|a\|\delta) \cap I,$$

de donde $ax \in \mathrm{cl}(I)$.

Así $\mathrm{cl}(I)$ es un ideal de $(A, \|\cdot\|)$. □

[2] Aquí estamos considerando ya algebras de Banach A, además de que sean A-normadas o también llamadas normas de álgebra.

Ahora veamos una proposición adicional que trata sobre el conjunto de los invertibles de una álgebra normada.

Proposición 3.6.2. *El conjunto $G(A)$ de los elementos invertibles en un álgebra de Banach $(A, \|\cdot\|)$ con uno e es abierto.*

Demostración. Primero demostraremos que los elementos del conjunto abierto $U := \{x \in A : \|e - x\| < 1\}$ son invertibles. En efecto, poniendo $y = e - x$ para $x \in U$ tenemos que $\|y\| < \alpha < 1$ para algún α, por lo tanto $\|y^n\| < \alpha^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ converge absolutamente en A. Entonces, sea $z := \sum_{n=0}^{\infty} y^n$; luego se obtiene que:

$$zx = z(e - y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = e.$$

Similarmente $xz = e$, así $z = x^{-1}$. Ahora, sea $t \in G(A)$, y sea $y \in A$ tal que $\|y - t\| < \frac{1}{\|t^{-1}\|}$, entonces

$$\begin{aligned} \|yt^{-1} - e\| &= \|yt^{-1} - tt^{-1}\| \\ &\leq \|t^{-1}\|\|y - t\| < 1, \end{aligned}$$

de esta forma, yt^{-1} es invertible, y como t es invertible, entonces $y \in G(A)$. Por lo tanto todo elemento de $G(A)$ tiene una vecindad abierta que consiste enteramente de elementos invertibles. □

Corolario 3.6.1. *La cerradura de un ideal (izquierdo, derecho, bilateral) propio I de un álgebra de Banach $(A, \|\cdot\|)$ con uno e, es un ideal, del mismo tipo, propio.*

Demostración. Es fácil ver que la cerradura de un ideal es un ideal (veáse la Proposición 3.6.1). Puesto que I es propio, se tiene que $I \cap G(A) = \emptyset$.
Supongamos que I es un ideal izquierdo propio tal que $\exists y \in I \cap G(A)$, entonces $\exists x \in G(A)$ tal que

$$xy = e \in I,$$

lo cual es un absurdo.
Por lo tanto como $G(A)$ es abierto, se tiene que

$$\mathrm{cl}_A(I) \cap G(A) = \emptyset,$$

lo cual implica que la cerradura de I está contenida propiamente en A. □

Corolario 3.6.2. *Todo ideal maximal M de un álgebra de Banach A con uno e es cerrado.*

Demostración. Ya sabemos que $M \subseteq \mathrm{cerr}(M)$. Demostremos entonces que $\mathrm{cerr}(M) \subseteq M$, en efecto, si $M = A$ es claro; pero si no, como no existe otro ideal propio J de A tal que $M \subsetneq J$, por ser M maximal; se tiene que por el Corolario anterior $\mathrm{cerr}(M) \subseteq M$. Así M es cerrado. □

Teorema 3.6.1. *Todo ideal propio está contenido en un ideal maximal.*

Demostración. Esto es consecuencia del lema de Zorn-Kuratowski el cual nos dice que:

«Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal»

Aquí puede confrontar la Sección 1.3 del libro de Zelazko [20]. □

Teorema 3.6.2. *Sea a un elemento de un álgebra de Banach $(A, \|\cdot\|)$ con uno e. Entonces $\sigma(a)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.*
Además

$$\text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a). \tag{3.18}$$

Demostración. Sea $|\lambda| > r(a)$. Entonces $r(\lambda^{-1}a) < 1$, de esta forma por definición de radio espectral $e - \lambda^{-1}a$ es invertible, es decir, $\lambda \notin \sigma(a)$. Esto demuestra que $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(a)\}$, y junto con el Teorema 3.4.2 también se demuestra (3.18). Así, solo falta probar que $\sigma(a)$ es cerrado, en efecto, note que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es la imagen inversa del conjunto abierto $G(A)$ con respecto a la función continua $z \mapsto z - a$. Por lo tanto $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es abierto. □

Teorema 3.6.3. *Sea A un álgebra de Banach con uno e; entonces la operación $x \to x^{-1}$ es continua sobre $G(A)$.*

Demostración. Sea $x_n \in G(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim x_n = y \in G(A)$. Queremos entonces probar que $\lim x^{-1} = y^{-1}$. Supongamos entonces que $y = e$; de esta forma existe un entero positivo N tal que $\|e - x_n\| < \frac{1}{2}$ para $n > N$. Con esto último obtenemos que:

$$\|{x_n}^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(e - x_n)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|e - x_n\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2$$

para $n > N$, así

$$\|{x_n}^{-1} - e\| = \|{x_n}^{-1}(e - x_n)\| \leq \|{x_n}^{-1}\|\|e - x_n\| \leq 2\|e - x_n\|$$

para $n > N$, de donde $\lim {x_n}^{-1} = e$. Ahora sea y algún elemento invertible de A. Entonces, como $y^{-1}x_n \in G(A)$ y $\lim y^{-1}x_n = e$, obtenemos que:

$$\lim(y^{-1}x_n)^{-1} = \lim {x_n}^{-1}y = e \quad \text{y} \quad \lim {x_n}^{-1} = y^{-1}.$$

□

Posteriormente vamos a establecer que si A es un álgebra de Banach entonces $\forall a \in A$ $\sigma(a)$ es no vacío (aquí veáse el Teorema 4.1.2).

Ahora probaremos el Teorema de Gelfand-Mazur, el cual es crucial para la teoría integral de álgebras de Banach.

Teorema 3.6.4 (Gelfand-Mazur)**.** *Sea A un campo de tipo* **B** *sobre $\mathbb{C}$ (i. e., A considerado como un espacio vectorial topológico resulta un espacio de Banach). Entonces A es isomorfo al campo de los números complejos.*

Demostración. Es suficiente demostrar que cada elemento $x \in A$ tiene la forma $x = \lambda e$, donde λ es un escalar complejo. Suponga que este no es el caso, es decir, que existe un $x \neq \lambda e$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto tenemos que $x - \lambda e \neq 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$; de esta forma el inverso $(x - \lambda e)^{-1}$ existe para $\lambda \in \mathbb{C}$.
Sea f un funcional lineal continuo sobre A tal que $f(x^{-1}) \neq 0$ y escribimos $\varphi(\lambda) = f\left([x - \lambda e]^{-1}\right)$. Enseguida probaremos que $\varphi(\lambda)$ es una función entera. En efecto,

$$\frac{\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)}{h} = f\left([x - \lambda e]^{-1}[x - (\lambda + h)e]^{-1}\right);$$

hacemos $h \to 0$; el límite en el lado derecho existe por el Teorema 3.6.3. Además,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left(\left[\frac{x}{\lambda} - e\right]^{-1}\right)$$

para $\lambda \neq 0$, y ya que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} = -e,$$

así

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |\varphi(\lambda)| = 0.$$

Entonces en virtud del Teorema de Liouville (veáse el libro de Conway [8], pág. 77) obtenemos que $\varphi(\lambda) \equiv 0$, lo cual es imposible puesto que $\varphi(0) = f(x^{-1}) \neq 0$. Esto es una contradicción a la suposición de que $x \neq \lambda e$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Enseguida examinaremos los conceptos de espectro de un elemento para las álgebras sin unidad mediante la siguiente teoría:

3.7. Álgebras sin uno

En esta sección veremos álgebras que carecen uno, a menos de que se indique lo contrario. Comencemos entonces con las siguientes definiciones:

Definición 3.7.1. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada. Entonces si A no tiene uno, definimos su* ***unitización*** *$A \oplus \mathbb{C}e$ de la siguiente manera*

$$A \oplus \mathbb{C}e := \{x + \lambda e : x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

con las operaciones siguientes

$$\begin{aligned} (x + \lambda e) + (y + \beta e) &= (x + y) + (\lambda + \beta)e \\ \alpha(x + \lambda e) &= \alpha x + \lambda \alpha e \\ (x + \lambda e)(y + \beta e) &= xy + \lambda y + \beta x + \lambda\beta e. \end{aligned}$$

$A \oplus \mathbb{C}e$ tiene como norma

$$\|x + \lambda e\|_1 = \|x\| + |\lambda|. \tag{3.19}$$

Es de rutina verificar que $\|\cdot\|_1$ es una norma.

Definición 3.7.2. *Dados x, y elementos de una álgebra A, el* ***cuasi-producto*** *de x con y es el elemento $x \circ y$ de A definido de la siguiente forma*

$$x \circ y = x + y - xy$$

De aquí surge la siguiente

Proposición 3.7.1. *(1) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.*

(2) $x \circ 0 = 0 \circ x = x$.

Demostración. (1) Nótese que:

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (x \circ y) + z - (x \circ y)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x \circ (y \circ z).\end{aligned}$$

(2) Esta demostración es clara.

□

Proseguimos con otra

Definición 3.7.3. *Sea x un elemento de un álgebra A. Se dice que los elementos y, z de A son respectivamente **cuasi-inversos izquierdo** y **derecho** de x si cumplen que:*

$$y \circ x = 0, \quad x \circ z = 0$$

Un **cuasi-inverso** de x es un elemento de A que es cuasi-inverso izquierdo y derecho de x, y se denota por x^q. En este caso se dice que x es **cuasi-invertible**; si x no lo es, entonces se dice que x es **cuasi-singular**.
Si x tiene un cuasi-inverso izquierdo y y un quasi-inverso derecho z, entonces por la Proposición 3.7.1 $y = z$.

Observación 3.7.1. *Cabe señalar en este momento que en álgebras con uno también son completamente válidos los conceptos de cuasi-producto, cuasi-invertible, cuasi-singular y cuasi-inverso.*

Continuamos con la siguiente

Proposición 3.7.2. *Sea A un álgebra. Entonces un elemento $u \in A$ tiene cuasi-inverso v si y sólo si $(u - e)$ tiene como inverso a $(v - e)$ en $A \oplus \mathbb{C}e$.*

Demostración. Considere que:

$$(u - e)(v - e) = e - u \circ v.$$

□

Observación 3.7.2. *En este caso es conveniente mencionar que la función $a \to a + 0e$ es un isomorfismo isométrico de A un álgebra cualquiera (ya sea con uno o sin uno) sobre una subálgebra de $A + \mathbb{C}e$.*

Proposición 3.7.3. *Si xy es cuasi-invertible por la izquierda (derecha), entonces yx es cuasi-invertible por la izquierda (derecha).*

Demostración. Note que si z es el cuasi-inverso izquierdo de xy, entonces se tiene que

$$(yzx - yz) \circ yx \quad = \quad y(z \circ xy)x = 0,$$

y a su vez, si z es el inverso derecho de xy, entonces se tiene que

$$yx \circ (yzx - yx) \quad = \quad y(xy \circ z)x = 0.$$

□

Corolario 3.7.1. *Si A tiene uno e, entonces $(e - ab)$ es invertible si y sólo si $(e - ba)$ es invertible.*

3.8. Completación de un álgebra A-normada

Empezamos esta parte con una

Definición 3.8.1. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Se dice que (Y, ρ) es una* ***completación*** *de (X, d) si (Y, ρ) es completo y existe una isometría $f : X \to Y$ tal que $f[X]$ es un subconjunto denso de Y.*

Aquí, antes de continuar veamos el siguiente

Teorema 3.8.1. *Si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach entonces la unitización $A \oplus \mathbb{C}e$ también lo es.*

Demostración. Es de rutina verificar que $A \oplus \mathbb{C}e$ es un álgebra según las operaciones definidas en la Definición 3.7.1. Entonces ahora probaremos que $A \oplus \mathbb{C}e$ es completo. Sea (α_n) una sucesión de Cauchy en $A \oplus \mathbb{C}e$, por demostrar que $\exists \alpha \in A \oplus \mathbb{C}e$ tal que $\alpha_n \to \alpha$. En efecto, como (α_n) es de Cauchy $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n > N$ se cumple que

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|_1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|x_m - x_n\| + |\lambda_m - \lambda_n| < \varepsilon,$$

luego, como A es de Banach y $\mathbb{C}$ es un espacio completo, existen $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\&$$

$$\text{lím}_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda_n e) = x + \lambda e = \alpha \in A + \mathbb{C}e,$$

de donde $A + \mathbb{C}e$ es completo. □

Ahora presentamos un Teorema relevante enunciado originalmente por Gelfand.

Teorema 3.8.2. *Sea $(A, \|\|)$ un álgebra de Banach. Entonces existe $|\|\cdot\||$ una norma m-convexa sobre A equivalente a $\|\cdot\|$. Por lo tanto A resulta ser de Banach. Si A tiene uno e, entonces $|\|e\|| = 1$.*

Demostración. Sea $X = A$, si A tiene uno e. Si no, $X = A \oplus \mathbb{C}e$. Por consiguiente por el Teorema 3.8.1, X es un álgebra de Banach con uno e, y A es una subálgebra propia o no de X.
Entonces hay una transformación $\varphi : A \to B(X)$, $\varphi(x) = T_x$, donde $T_x(y) = xy$. Es fácil ver que $\forall x, y \in A$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $T_{\lambda x + \mu y} = \lambda T_x + \mu T_y$ y $T_{xy} = T_x T_y$; además si $T_x = 0$ en $B(X)$, entonces $\forall y \in A$, $T_x(y) = xy = 0$, y por consiguiente se tiene que $x = 0$ poniendo $y = e$. Esto nos verifica que φ es un isomorfismo algebraico de A en $B(X)$.
Ahora veamos que $|\|x\|| = |T_x|$ es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$ definida en A. En efecto,

$$|\|x\|| = |T_x| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\| \geq \left\| \frac{xe}{\|e\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|e\|},$$

así,

$$\|x\| \leq \|e\| |||x|||.$$

Las normas $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son por lo tanto comparables y la equivalencia será probada si demostramos que el álgebra A es completa con la norma $||||||$ (veáse 1.17 del libro de Zelazko [20]) o, lo que es lo mismo, que la subálgebra $\varphi(A)$ es cerrada con respecto a la norma $|||\cdot|||$. Sea entonces $(T_{x_n})_n$ una sucesión de operadores lineales en $\varphi(A)$ los cuales convergen a un operador lineal T en $B(X)$. Para cualquier $y, z \in X$ tenemos que $T_{x_n}(yz) \to T(yz)$. Sabemos que la convergencia de operadores implica la convergencia de ellos valuados en cada punto de X, y como la multiplicación es separadamente continua, tenemos pasando al límite que

$$T_{x_n}(yz) = x_n yz = (x_n y)z = T_{x_n}(y)z \to T(y)z$$

por lo tanto $T(yz) = T(y)z$; y si $y = e$ se obtendrá que $T(z) = T(e)z$. Enseguida nótese que $T(e) = \lim T_{x_n}(e) = \lim x_n = x_0$ en A, porque A es completa. O sea que obtenemos que $T(z) = x_0 z = T_{x_0}(z)$. De esto último se sigue que $\varphi(A)$ es una subálgebra cerrada, y así $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. Por último, también es fácil ver que $|T_e| = 1$, y que $\|\|_{\mathrm{op}} = ||||||$. □

Para el caso de álgebras carentes de uno, la prueba de este Teorema se ha presentado en la literatura matemática de la siguiente forma: Sea $A_e = A \oplus \mathbb{C}e$ la unitización de A, y sea $\|\|_1$ como en (3.19). Así, en este caso, la norma equivalente a $\|\|$ es el operador norma de $\|\|_1$ sobre A_e restringido a A, i. e.,

$$|x| = (\|x + 0e\|_1)_{\mathrm{op}(e)} = \sup_{\|y\|+|\beta|\leq 1} \|(x + 0e)(y + \beta e)\|_1.$$

Aquí $\mathrm{op}(e)$ denota el operador norma sobre A_e. Debe hacerse notar que esta norma incluye un componente escalar extra que es independiente del álgebra A, lo cual hace el uso de $(\|\|_1)_{\mathrm{op}(e)}$ más o menos complicado.

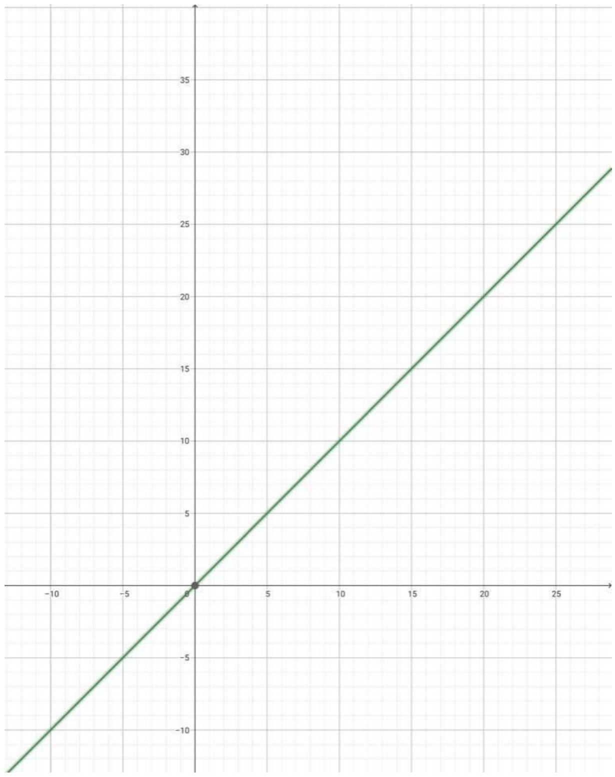
Corolario 3.8.1. *En cada álgebra de Banach A existe una norma $|\cdot|_{equiv}$ equivalente a la norma original $\|\cdot\|_A$ en A, la cual satisface la condición*

$$|xy|_{equiv} \leq |x|_{equiv} |y|_{equiv},$$

y además también cumple que $|e|_{equiv} = 1$ si A es unitaria.

Si A tiene una A-norma, entonces puede resultar que su completación no sea un álgebra. Lo anterior se puede ver en el siguiente

Ejemplo 3.8.1. *Aquí el álgebra A es $C[0,1]$ la cual consiste de todas las funciones continuas de valores reales o complejos definidas en el intervalo $[0,1]$, equipada con las operaciones de suma y producto de funciones. Sea φ la función cuya gráfica es:*



$$\varphi(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Se define la norma en $C[0,1]$ relativa a φ como:

$$\|f\|_\varphi = max_{0\leq x\leq 1}|f(x)\varphi(x)|.$$

Se puede probar que esta norma es A-convexa. En efecto:

$$\begin{aligned} \|fg\|_\varphi &= max_{0\leq x\leq 1}|f(x)g(x)\varphi(x)| \\ &\leq max_{0\leq x\leq 1}|f(x)| \cdot max_{0\leq x\leq 1}|g(x)\varphi(x)| \\ &= \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\varphi. \end{aligned}$$

Esta álgebra no es completa y cuando la completamos no es álgebra. Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{2}{3}} & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x^{-\frac{2}{3}} & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces se tiene que $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy, ya que si suponemos, sin perdida de generalidad, que $n > m$ obtenemos que:

$$(f_n - f_m)(x) = \begin{cases} n^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x^{-\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}} & , \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{m} \\ 0 & , \quad \frac{1}{m} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$|f_n - f_m|\varphi(x) \leq \begin{cases} \left(n^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{n} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \left(x^{-\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{n} & , \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{m} \\ 0 & , \quad \frac{1}{m} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Y así

$$|f_n - f_m|\varphi(x) \leq \begin{cases} \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}} & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \left(n^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{n} & , \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{m} \\ 0 & , \quad \frac{1}{m} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

de donde $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\varphi = 0$. *Sin embargo se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f^2{}_{n^3}\|_\varphi = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} f_n$ *pertenece a la completación del álgebra, sin embargo, si* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, *entonces* f^2 *no está en la completación.*

3.9. Normas Espectrales

Definición 3.9.1. *Una **seminorma espectral** sobre un álgebra A es un una seminorma ξ sobre el álgebra A, la cual es mayor o igual al radio espectral. Es decir,*

$$\rho(a) \leq \xi(a) \ \forall a \in A.$$

Si la seminorma es de hecho una norma, en ese caso se dirá que es una *norma espectral.* Un álgebra junto con una seminorma o norma espectral es respectivamente llamada *álgebra espectral seminormada* ó *álgebra espectral normada.*
Enseguida veamos el siguiente

Teorema 3.9.1. *Para una norma ξ sobre un álgebra A con uno e, son equivalentes los siguientes incisos:*

(a) ξ es una norma espectral.

(b) Para $a \in A$, $|\lambda| \leq \xi(a) < 1$, $\lambda \in \sigma(a)$, implica que $e - a$ es invertible en A.

Demostración. (a)⇒(b). Aquí tenemos que $\rho(a) < 1$, entonces $1 \notin \sigma(a)$, por consiguiente $e - a$ es invertible en A.

(b)⇒(a). Sea $a \in A$ que cumpla la hipotesis en (b), por lo tanto se tiene que $e - a \in G(a)$, de esta forma obtenemos que

$$\rho(a) < 1$$

de donde $\rho(a) \leq \xi(a)$. Con lo cual ξ es una norma espectral. □

Proseguimos presentando esta

Proposición 3.9.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una norma de algebra ξ definida en un álgebra A con uno e.*

(a) ξ es una norma espectral.

(b) Si la sucesión $(\xi(a^n))$ converge a 0, entonces la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ tiene suma en (A, σ).

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \xi(a^n)$ es finita entonces la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ tiene suma en (A, ξ).

(d) Si $|\lambda| \leq \xi(a) < 1$, $\lambda \in \sigma(a)$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ tiene suma en (A, ξ).

Demostración. (a)$\Rightarrow$ (b). Note que para una norma de algebra espectral ξ, la ecuación $\lim_{n\to\infty} \xi(a^n) = 0$ implica que a es cuasi-invertible en A, esto se sigue del hecho de que:

$$a \circ \left(-\sum_{n=1}^{N} a^n\right) = \left(-\sum_{n=1}^{N} a^n\right) \circ a = a^{N+1}.$$

Enseguida demostraremos que $-a^q$ es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. En efecto, note que

$$\begin{aligned}
\xi\left(a^q + \textstyle\sum_{n=1}^{N} a^n\right) &= \xi\left((e-a^q)(e-a)\left(a^q + \textstyle\sum_{n=1}^{N} a^n\right)\right) \\
&\leq \xi(e-a^q)\xi\left((e-a)\left(a^q + \textstyle\sum_{n=1}^{N} a^n\right)\right) \\
&\leq (1+\xi(a^q))\,\xi\left(a^q + \textstyle\sum_{n=1}^{N} a^n - aa^q - \textstyle\sum_{n=1}^{N} a^{n+1}\right) \\
&= (1+\xi(a^q))\,\xi\left(a^q - aa^q + a - a^{N+1}\right) \\
&= (1+\xi(a^q))\,\xi(a^{N+1}).
\end{aligned}$$

Entonces $\xi\left(a^q + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\right) = 0$, de donde se obtiene lo que se quería.

(b)$\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$(d). Estas pruebas son inmediatas.

(d)$\Rightarrow$ (a). Si la serie converge entonces note que:

$$(e-a)\left(e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\right) = \left(e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\right)(e-a) = e.$$

De esta forma $e-a$ es invertible y por el inciso (b) del Teorema 3.9.1 se tiene el resultado. □

Ahora concluimos con las proposiciones en este capítulo.

Proposición 3.9.2. *En el caso de álgebra de Banach $(A, \|\cdot\|)$ se tiene que:*

$$\|a\|^{\infty} = \rho(a).$$

Demostración. Esto es porque según el libro de Palmer [17] página 215 Corolario 2.2.8 toda norma de álgebra completa es una norma espectral, así tenemos que:

$$\rho(a) \leq \|a\| \ \forall a \in A$$

$$\Rightarrow \rho(a^n) \leq \|a^n\| \ \forall n \in \mathbb{N},$$

luego, sea $\lambda \in \sigma(a)$, entonces por la Proposición 3.4.2 se tiene que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ y entonces:

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \leq \|a^n\|,$$

por lo tanto $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

$$\Rightarrow \rho(a) \leq \|a\|^{\infty}.$$

Ya teníamos en (3.13) que $\|a\|^{\infty} \leq \rho(a)$ $\forall a \in A$ y por cosiguiente se da la igualdad. □

Enseguida, note que el modulo de m-convexidad (definido en la Subsección 3.5 de este trabajo) es de hecho el valor óptimo de aquellas constantes $k > 0$, que hacen a la norma $k\|\|$ m-convexa sobre A. Es decir, si $k \geq m(\|\|)$, entonces $k\|\|$ es m-convexa sobre A, y si $k < m(\|\|)$, entonces $k\|\|$ no es m-convexa sobre A. Establezcamos lo anterior con el siguiente

Lema 3.9.1. *Sea el número real $k > 0$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $m(\|\|) \leq k$ entonces $k\|\|$ es m-convexa.*
2. *Si $m(\|\|) > k$ entonces $k\|\|$ no es m-convexa*

Demostración. Demostraremos 1).

$$m(\|\|) \leq k \Rightarrow \tfrac{1}{k}m(\|\|) \leq 1 \Rightarrow m(k\|\|) \leq 1$$

$$\Rightarrow k\|\| \text{ es } m\text{-convexa (veáse Proposición 3.5.1)}$$

Demostraremos 2).

$$m(\|\|) > k \Rightarrow \tfrac{1}{k}m(\|\|) > 1 \Rightarrow m(k\|\|) > 1$$

$$\Rightarrow m(k\|\|) \text{ no es menor o igual a } 1$$

$$\Rightarrow k\|\| \text{ no es } m\text{-convexa (veáse Proposición 3.5.1)}$$

□

Continuamos con el siguiente

Teorema 3.9.2. *Sea A una álgebra conmutativa, y $\|\|$ una norma completa sobre A que hace a la multiplicación separadamente continua. Entonces $m(\|\|)$ es finito.*

Demostración. Para $y \in A$, sea T_y el operador multiplicación sobre A, definido por $T_y(x) = xy$, $x \in A$. Es fácil verificar que T_y es un operador lineal $\|\|$-continuo sobre A. De hecho, para cada $x \in A$, se tiene que $\|T_y(x)\| = \|xy\| \leq \|x\|_{\text{op}}\|y\|$. Por lo tanto, para cada $x \in A$ fijo, el conjunto $\{T_y(x)|\|y\| \leq 1\}$ está acotado por la norma $\|\|$. De esta manera, por el Teorema de Acotación Uniforme (veáse el libro de Brezis [6] página 32), $m(\|\|) = \sup_{\|y\|\leq 1} \|y\|_{\text{op}} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T_y\|$ es finito. □

A continuación presentamos un ejemplo tomado de la página 371 del artículo de Arhippainen y Kauppi [3].

Ejemplo 3.9.1. *Sea $A = C([a,b])$ el álgebra de todas las funciones continuas de valores complejos definidas sobre el intervalo $[a,b]$ y equipada con operaciones algebraicas puntuales (i.e., suma y composición de funciones). A su vez, sea v una función continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ para la cual $v(a) = v(b) = 0$ y $v(t) > 0$, si $t \neq a, b$. Sean también $\|\|_{\ell_1}$ y $\|\|_v$ dos normas A-convexas no completas sobre A, definidas por*

$$\|x\|_{\ell_1} = \int_a^b |x(t)|dt \;\&\; \|x\|_v = \sup_{t\in[a,b]} v(t)|x(t)|, \;\; x \in A.$$

Aquí se deduce que $(\|\|_{\ell_1})_{op} = (\|\|_v)_{op} = \|\|_\infty$, y también que $m(\|\|_{\ell_1}) = m(\|\|_v) = \infty$. Note que las completaciones de $(A, \|\|_{\ell_1})$ y $(A, \|\|_v)$ no son álgebras normadas. Enseguida demostraremos que esta es una de las características presentes en toda álgebra normada $(A, \|\|)$ con $m(\|\|) = \infty$.

Para una norma $\|\|$ sobre A dada, se denotará por A_c a la completación de A con respecto a $\|\|$ y por $\|\|_c$ la extensión de $\|\|$ sobre A_c.

Teorema 3.9.3. *Sea A una álgebra conmutativa y $\|\|$ una norma A-convexa no completa sobre A. Entonces $(A_c, \|\|_c)$ es un álgebra normada si y sólo si $m(\|\|)$ es finito.*

Demostración. Si $m(\|\|)$ es finito, entonces $\|\|$ es m-convexa en A, o bien, equivalente a alguna norma m-convexa en A. Por lo tanto, de la teoría general de álgebras normadas se sigue que $(A_c, \|\|_c)$ es una álgebra normada.
Supongamos ahora que $(A_c, \|\|_c)$ es una álgebra normada. Ahora, como $\|\|_c$ es completa en A_c, se tiene que $m(\|\|_c) < \infty$. Por otro lado, es fácil verificar que $m(\|\|) \leq m(\|\|_c)$, y así $m(\|\|)$ es finito. $\square$

Capítulo 4

Álgebras de Banach Conmutativas

Todas las álgebras en esta sección serán álgebras de Banach complejas conmutativas con una unidad e, a menos que se diga lo contrario.
Los teoremas y definiciones en este capítulo fueron tomados de [11] y [20].

4.1. Los Funcionales Lineales Multiplicativos

Definición 4.1.1. *Sea A un espacio de Banach. Una función f de A en $\mathbb{C}$ es un* ***funcional lineal acotado*** *si:*

(1) $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A$ y $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$; y

(2) Existe M tal que $|f(x)| \leq M\|x\|$ para todo $x \in A$.

Proposición 4.1.1. *Sea f un funcional lineal sobre un espacio de Banach A. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f es acotado;

(2) f es continuo;

(3) f es continuo en cero.

Demostración. (1) implica (2). Si (x_n) es una sucesión en A que converge a x, entonces $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_n |f(x_n) - f(x)| &= \lim_n |f(x_n - x)| \\ &\leq \lim_n M\|x_n - x\| = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Por lo tanto f es continuo.
El caso (2) implica (3) es una implicación obvia.
Ahora (3) implica (1). Si f es continuo en 0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica que $|f(x)| < 1$. Por lo tanto para cualquier $b \in A$ distinta de cero se cumple que

$$\begin{aligned} |f(b)| &= \tfrac{2\|b\|}{\delta} \left| f\left(\tfrac{\delta}{2\|b\|} b\right)\right| \\ &< \tfrac{2}{\delta}\|b\|. \end{aligned}$$

□

Enseguida definimos una norma sobre el espacio de funcionales lineales acotados sobre un espacio de Banach A.

Definición 4.1.2. *Denotaremos por A^* al conjunto de todos los funcionales lineales acotados sobre el espacio de Banach A. Para f en A^*, definimos la* ***norma de un funcional lineal*** *por*

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}.$$

Entonces A^* es llamado ***el espacio dual o conjugado*** *de A.*

Proposición 4.1.2. *El espacio dual A^* es un espacio de Banach.*

Demostración. Es claro que A^* es un espacio vectorial, también son obvias las propiedades (a) y (b) de una norma (veáse la Definición 2.6.1). Vamos a probar la propiedad (c), i. e., la desigualdad triangular. Para esto, nótese que

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\| &= \sup_{x\neq 0} \tfrac{|(f_1+f_2)(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \tfrac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|} \\
&\leq \sup_{x\neq 0} \tfrac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \tfrac{|f_2(x)|}{\|x\|} \\
&= \|f_1\| + \|f_2\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, debemos demostrar que A^* es completo. Para este fin, supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en A^*. Para cada $x \in A$ tenemos que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|\|x\|$, así que la sucesión de números complejos $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para cada $x \in A$. Por lo tanto, podemos definir $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)$. La linealidad de f se sigue de la correspondiente linealidad de los funcionales f_n. Además, tenemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_0$, entonces $\|f_n - f_m\| < 1$; de esta manera para x en A obtenemos que:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(x) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x)| \\
&\leq \text{lím}_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x)| \\
&\leq \text{lím sup}_{n\to\infty} \|f_n - f_{N_0}\|\|x\| + \|f_{N_0}\|\|x\| \\
&\leq (1 + \|f_{N_0}\|)\|x\|.
\end{aligned}$$

Así, de esto último se tiene que f está en A^*, con lo que únicamente nos resta probar que $\text{lím}_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se puede escoger N tal que si $n, m \geq N$ entonces $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Entonces para $x \in A$ y $m, n \geq N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|(f - f_n)(x)| &\leq |(f - f_m)(x)| + |(f_m - f_n)(x)| \\
&\leq |(f - f_m)(x)| + \varepsilon\|x\|.
\end{aligned}$$

Y como $\text{lím}_{m\to\infty} |(f - f_m)(x)| = 0$, de lo último se obtiene que $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Por lo tanto la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f y A^* es completo. $\square$

Ahora probaremos el Teorema de Gelfand-Mazur, el cual es crucial para la teoría integral de álgebras de Banach.

Teorema 4.1.1 (Gelfand-Mazur). *Sea A un campo de tipo* **B** *sobre $\mathbb{C}$ (i. e., A considerado como un espacio vectorial topológico resulta un espacio de Banach). Entonces A es isomorfo al campo de los números complejos.*

Demostración. Es suficiente demostrar que cada elemento $x \in A$ tiene la forma $x = \lambda e$, donde λ es un escalar complejo. Suponga que este no es el caso, es decir, que existe un $x \neq \lambda e$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto tenemos que $x - \lambda e \neq 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$; de esta forma el inverso $(x - \lambda e)^{-1}$ existe para $\lambda \in \mathbb{C}$.
Sea f un funcional lineal continuo sobre A tal que $f(x^{-1}) \neq 0$ y escribimos $\varphi(\lambda) = f\left([x - \lambda e]^{-1}\right)$. Enseguida probaremos que $\varphi(\lambda)$ es una función entera. En efecto,

$$\frac{\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)}{h} = f\left([x - \lambda e]^{-1}[x - (\lambda + h)e]^{-1}\right);$$

hacemos $h \to 0$; el límite en el lado derecho existe por el Teorema 3.6.3. Además,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left(\left[\frac{x}{\lambda} - e\right]^{-1}\right)$$

para $\lambda \neq 0$, y ya que

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} = -e,$$

así

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} |\varphi(\lambda)| = 0.$$

Entonces en virtud del Teorema de Liouville (veáse el libro de Conway [8], pág. 77) obtenemos que $\varphi(\lambda) \equiv 0$, lo cual es imposible puesto que $\varphi(0) = f(x^{-1}) \neq 0$. Esto es una contradicción a la suposición de que $x \neq \lambda e$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Enseguida un Teorema de interés

Teorema 4.1.2. *Si A es un álgebra de Banach con uno e y $x \in A$, entonces $\sigma(x)$ no es vacío.*

Demostración. Si $\sigma(x) = \emptyset$, $\forall f \in A^*$, la función $\lambda \mapsto f[(x - \lambda e)^{-1}]$ sería una función entera que se va al cero cuando $\lambda \to \infty$. Entonces por el Teorema de Liouville, tal función es identicamente la función 0. En particular se tiene que $f(x^{-1}) = 0$ para cada funcional lineal $f \in A^*$. Así del Teorema de Hahn-Banach (veáse Corolario 1.28 del libro de Douglas [11], pág. 12) se sigue que $x^{-1} = 0$, una contradicción. Por lo tanto $\sigma(x)$ no es vacío. □

Extendiendo la notación de la Definición 3.4.3 escribiremos $A \in \mathbf{B}$ si A es un álgebra de Banach y $A \in \mathbf{BC}$ si A es conmutativa. Similarmente, $A \in \mathbf{B_e}$ ($A \in \mathbf{BC_e}$) significará que A es un álgebra (conmutativa) con unidad. Esta notación se puede usar por conveniencia, es decir, para no escribir todo el enunciado: $(A, \|\|)$ es de Banach (o Banach conmutativa, o quiza Banach conmutativa con uno), se abreviará solo para $A \in \mathbf{B}$ (o $A \in \mathbf{BC}$ o quizá $A \in \mathbf{BC_e}$).

Definición 4.1.3. *Sea A un álgebra de Banach con ó sin unidad. Un funcional lineal f definido sobre A es llamado* ***funcional lineal multiplicativo*** *si*

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in A, \tag{4.1}$$

$$f(x) \not\equiv 0. \tag{4.2}$$

El conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos será denotado por $\mathfrak{M}'(A)$ o simplemente $\mathfrak{M}'$ cuando no hay confusión.

A continuación presentamos unos ejemplos.

Ejemplo 4.1.1. *Si un funcional lineal f satisfsface (4.1) y (4.2) entonces:* $f(e) = 1$

Demostración. Tenemos que $f \not\equiv 0$, entonces existe $x \in A$ con $f(x) \neq 0$, de esta forma la ecuación $f(e)f(x) = f(ex) = f(x)$ implica que $f(e) = 1$. □

Ejemplo 4.1.2. *Si $f \in \mathfrak{M}'(A)$ y x es un elemento invertible en A, entonces $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.*

Demostración. En este caso, note que se tiene que:

$$1 = f(e) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$$

$$\Rightarrow f(x)f(x^{-1}) = 1$$
$$\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}.$$

□

Consideremos ahora la siguiente definición:

Definición 4.1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y W un subespacio de V. Decimos que la* ***codimensión*** *de W es n, con n un número entero positivo, si el espacio vectorial V/W tiene dimensión n.*

Observación 4.1.1. *En 1976 W. Zelazko (veáse el periódico matemático Studia Mathematica de la Academia de Ciencias de Polonia: referencia exacta «Studia Math. 58:291–298, 1976») dio una caracterización de las álgebras complejas conmutativas unitarias completas con norma $m-$convexa, ésta es que todos los ideales maximales en estas álgebras son de codimensión 1.*

Ahora vamos a establecer la conexión entre los funcionales lineales multiplicativos de un álgebra A y sus ideales maximales.

Lema 4.1.1. *Si $f \in \mathfrak{M}'(A)$, entonces $M_f := \{x \in A : f(x) = 0\}$ es un ideal en A.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $x \in M_f$, entonces $f(ax) = f(a)f(x) = 0$. □

Proposición 4.1.3. *Sea $f \in \mathfrak{M}'(A)$, entonces $M_f := \{x \in A : f(x) = 0\}$ es un ideal maximal de codimensión 1.*

Demostración. Tenemos que $f(e) = 1$, entonces $\langle e, M_f \rangle = A$, ya que si $y \in A$, entonces $(y - f(y)e) \in M_f$ y por lo tanto

$$y = f(y)e + (y - f(y)e)$$

con $(y - f(y)e) \in M_f$.
Por lo tanto

$$A/M_f = \{\lambda e + M_f : \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}.$$

□

El homomorfismo natural $A \to A/M \cong \mathbb{C}$, $a \mapsto a + M$, define entonces un funcional lineal multiplicativo en A. Este funcional será denotado por f_M.

Teorema 4.1.3. *Existe una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales de un álgebra de Banach A y sus funcionales lineales multiplicativos; esta correspondencia está dada por la relación*

$$f \leftrightarrow M_f \quad (M \leftrightarrow f_M).$$

Demostración. Si M es un ideal maximal, entonces es cerrado; y también el álgebra cociente A/M es isomorfa al campo de los números complejos (veáse Teorema 4.1.1), por lo cual A/M también es un álgebra de Banach con unidad y sin ideales propios. El homomorfismo natural $f_M : A \to A/M \cong \mathbb{C}$, $a \mapsto a + M$, es un funcional lineal multiplicativo.
Por otro lado, si f es un funcional lineal multiplicativo no cero, es fácil ver que $M_f = \{x \in A : f(x) = 0\}$ es un ideal (veáse Lema 4.1.1), de esta manera por la Proposición 4.1.3, M_f es un ideal maximal de codimensión 1. $\square$

Por esta correspondencia también podemos llamar a los elementos de $\mathfrak{M}'(A)$ ideales maximales, asimismo se puede identificar cada ideal maximal M de A con el correspondiente f_M. El conjunto $\mathfrak{M}'$ será llamado *conjunto de ideales maximales de* A.
Veamos ahora la siguiente

Proposición 4.1.4. *Dada un álgebra de Banach A, se cumple que un funcional lineal f es continuo si y solo si $\{x \in A : f(x) = 0\}$ es cerrado en A.*

Demostración. [$\Rightarrow$]. En efecto, $\{x \in A : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, el cual es cerrado por la continuidad de f.
[$\Leftarrow$]. Supongamos que f no es continuo, entonces se cumple que:

$$\forall c > 0, \exists x \in A \text{ tal que } |f(x)| > c\|x\|,$$

por consiguiente podemos definir una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que

$$|f(x_n)| > n\|x_n\| > 0.$$

De esta manera también se puede definir $u_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$, con lo cual tenemos una sucesión unitaria (u_n) tal que $|f(u_n)| > n$, y entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \neq 0$; y asimismo, podemos definir la sucesión (v_n) de la siguiente forma:

$$v_n := \frac{1}{f(u_n)} u_n.$$

Note que hasta aquí se tiene que:

$$\|v_n\| < \frac{1}{n},$$

entonces $(v_n) \to 0$.
Ahora, como $\{x \in A : f(x) = 0\} \neq A$, existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq 0$, y entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a - f(a)v_n \in \{x \in A : f(x) = 0\}$. De esta forma

$$a - f(a)v_n \to a \notin \{x \in A : f(x) = 0\},$$

lo cual implica que $\{x \in A : f(x) = 0\}$ no es cerrado. $\square$

Ya que los ideales maximales de un álgebra de Banach A son cerrados y como precisamente ellos son conjuntos cero de los funcionales lineales multiplicativos f; entonces por la Proposición 4.1.4 se tiene el siguiente

Teorema 4.1.4. *Todo funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach A es continuo.*

Continuamos con el siguiente

Lema 4.1.2. *Sea A un álgebra de Banach; entonces todos los elementos $x \in A$ con $\|x\| < 1$ son cuasi-invertibles.*

Demostración. Como $\|x\| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x^n\| = 0$, de esta forma el resultado se sigue del hecho de que:

$$x \circ \left(-\sum_{n=1}^{N} x^n \right) = \left(-\sum_{n=1}^{N} x^n \right) \circ x = x^{N+1}.$$

□

Enseguida considere el siguiente

Teorema 4.1.5. *El conjunto de elementos cuasi-invertibles de un álgebra de Banach A es abierto*

Demostración. Escribimos $A_1 = A \oplus \mathbb{C}e$. Si x es un elemento cuasi-regular de A, entonces existe un elemento $x^q \in A$ con $x^q \circ x = 0$. Así para cualquier $y \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^q \circ y &= x^q + y - x^q y = x^q + y - x^q y - x^q \circ x \\ &= x^q + y - x^q y - x^q - x + x^q x \\ &= y - x - x^q y + x^q x = (e - x^q)(y - x). \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\|x^q \circ y\| \leq \|e - x^q\| \|y - x\|,$$

así, por el Lema 4.1.2, $x^q \circ y$ es cuasi-regular para y lo suficientemente cerca a x. Por lo tanto existe un $z \in A$ tal que $z^q \circ x^q \circ y = 0$, de esta manera, como A es conmutativa, se sigue que y es cuasi-regular. Así existe una vecindad abierta de x que consiste de elementos cuasi-regulares. □

Ahora va otra

Definición 4.1.5. *Sea A un álgebra cualquiera. Un ideal $I \subseteq A$ es llamado un* ***ideal modular derecho (izquierdo)*** *si existe un* ***uno derecho (izquierdo) modulo*** *I, es decir, si existe un elemento $e_I^r \in A$ ($e_I^l \in A$) tal que $x - xe_I^r \in I$ ($x - e_I^l x \in I$) para toda $x \in A$.*

Observación 4.1.2. *Obviamente, los elementos e_I^r (e_I^l) en la última definición pueden ser reemplazados por cualquier elemento $e_I^r + m$ y $e_I^l + m$ con $m \in I$. También note que si I es un ideal propio, entonces $e_I^r \notin I$ ($e_I^l \notin I$), en efecto, probaremos esto último para I ideal modular propio derecho de A, siendo similar para los otros casos:*

Demostración. Supongamos que I es un ideal modular propio derecho de A un álgebra, y que $e_I^r \in I$. Entonces, sea $\alpha \in A$, por lo tanto se tiene que $\alpha - \alpha e_I^r \in I$ y $\alpha e_I^r \in I$, pero esto implica que $\alpha \in I$, y así $A = I$, lo cual es absurdo. □

A su vez note que si $I \subseteq J$ con J un ideal de A, entonces J también es un ideal modular izquierdo (derecho) con unidad modular e_I^r (e_I^l).
Un ideal I de A es llamado ideal modular si es a la vez un ideal modular izquierdo y derecho. Por las observaciones previas, se sigue que para un ideal modular I existe un uno modulo I, i. e., existe un elemento $e_I \in A$ tal que $x - xe_I \in I$ y $x - e_I x \in I$ para toda $x \in A$. En este caso tenemos que $e_I^l - e_I^l e_I^r \in I$ y $e_I^r - e_I^l e_I^r \in I$, así $e_I^l - e_I^r \in I$, entonces e_I^l puede ser tomado como e_I.

Teorema 4.1.6. *Todo ideal modular propio está contenido en un ideal modular maximal.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del lema de Kuratowski-Zorn (aquí puede confrontar la Sección 1.3 del libro de Zelazko [20]). $\square$

Lema 4.1.3. *Sean A un álgebra de Banach e I un ideal modular propio en A. Entonces*

$$I \cap \{x \in A : \|e_I - x\| < 1\} = \emptyset.$$

Demostración. Si $\|e_I - x\| < 1$, entonces por el Lema 4.1.2, $e_I - x$ es un elemento de A cuasi-regular. Escribimos $u := (e_I - x)^q$; por lo tanto $u + e_I - x - ue_I + ux = 0$, de donde $e_I = (ue_I - u) + x - ux$. Supongamos que $x \in I$; entonces se obtendría que $e_I \in I$, contrario a lo que remarcamos en la Observación 4.1.2. $\square$

Este último lema implica los siguientes 2 corolarios:

Corolario 4.1.1. *La cerradura de un ideal modular propio es un ideal modular propio.*

Corolario 4.1.2. *Todo ideal modular maximal es cerrado.*

Ahora probaremos el análogo al Teorema 4.1.3 para álgebras sin uno.

Teorema 4.1.7. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa compleja sin uno. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los funcionales lineales multiplicativos de A y los ideales maximales modulares de A; esta correspondencia está dada por la relación*

$$f \leftrightarrow M_f \quad (M \leftrightarrow f_M).$$

Demostración. Si M es un ideal maximal modular, entonces es cerrado por el Corolario 4.1.2; y también el álgebra cociente A/M es isomorfa al campo de los números complejos (veáse Teorema 4.1.1), por lo cual también es un álgebra de Banach con unidad y sin ideales propios. El homomorfismo natural $f_M : A \to A/M \cong \mathbb{C}$, $a \mapsto a + M$, es un funcional lineal multiplicativo como lo fue en el Teorema 4.1.3.
Por otro lado, si f es un funcional lineal multiplicativo no cero, entonces $M_f = \{x \in A : f(x) = 0\}$ es un ideal modular. Porque entonces existe un elemento $e_{M_f} \in A$ tal que $f(e_{M_f}) = 1$ (esto es porque se tiene que $\forall \alpha \in A$, $\alpha - e_{M_f}\alpha \in M_f$, y entonces $f(\alpha - e_{M_f}\alpha) = 0$, así $f(\alpha) = f(e_{M_f})f(\alpha)$, lo cual implica que $f(e_{M_f}) = 1$) y para cualquier $x \in A$ tenemos que $f(x - e_{M_f}x) = f(x) - f(e_{M_f})f(x) = 0$, i. e., $x - e_{M_f}x \in M$. Por lo tanto el elemento e_{M_f} define una unidad módulo M_f, de donde M_f es un ideal modular. Por último, por la Proposición 4.1.3, M_f es un ideal maximal de codimensión 1. $\square$

Observación 4.1.3. *Para álgebras sin uno el símbolo $\mathfrak{M}'$ también denotará el conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos o el conjunto de todos los ideales modulares maximales.*

Corolario 4.1.3. *En álgebras de Banach complejas conmutativas sin uno los funcionales lineales multiplicativos son continuos.*

Corolario 4.1.4. *Si A es un álgebra de Banach y $f \in \mathfrak{M}'(A)$, entonces $\|f\| = 1$.*

Demostración. Primero note que para toda $x \in A$ se cumple que $|f(x)| \leq \|x\|$. En efecto, si tuvieramos que $|f(x_0)| > \|x_0\|$ para álgun $x_0 \in A$, entonces, reemplazando x_0 por un múltiplo escalar apropiado αx_0, obtenemos que $|f(\alpha x_0)| > 1 > \|\alpha x_0\|$ de donde se tiene que $|f[(\alpha x_0)^n]| = |f(\alpha x_0)|^n \to \infty$ mientras $\|(\alpha x_0)^n\| \leq \|\alpha x_0\|^n \to 0$, pero esto último es contrario al Corolario 4.1.3. Así obtenemos que $\|f\| \leq 1$.
Por otro lado, $f(e) = 1$ y $\|e\| = 1$, lo cual implica que $\|f\| = 1$. □

Corolario 4.1.5. *En toda álgebra de Banach A compleja conmutativa con uno e, existe al menos un funcional lineal multiplicativo.*

Demostración. Si A es el campo complejo, entonces la identidad es tal funcional. Si A no es un campo, entonces existe un elemento $x \in A$ que no es invertible y entonces el conjunto xA es un ideal propio, así por el Teorema 3.6.1, tal ideal propio xA está contenido en un ideal maximal. Por lo tanto el álgebra A tiene un ideal maximal o, equivalentemente, tiene un funcional lineal multiplicativo. □

Ejemplo 4.1.3. *A continuación exponemos un álgebra de Banach real conmutativa con uno y sin funcionales lineales reales multiplicativos.*

Sea $\mathbb{C}$ con la estructura usual de álgebra de Banach real conmutativa con uno. Si $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal real y multiplicativo, entonces $\psi(1) = 1$, de esta forma

$$-1 = -\psi(1) = \psi(-1) = \psi(i^2) = \psi^2(i)$$

lo cual implica que ψ no es real. Por consiguiente no existe tal funcional lineal multiplicativo.

Ahora veamos otra

Definición 4.1.6. *Sea A un álgebra de Banach, $x \in A$. Definimos la función $\hat{x}(M)$ sobre $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'(A)$ por la fórmula*

$$\hat{x}(M) := f_M(x). \tag{4.3}$$

*Esta función será llamada la **transformada de Gelfand** del elemento $x \in A$. Por el Corolario 4.1.4*

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}'} |\hat{x}(M)| \leq \|x\|. \tag{4.4}$$

Denotamos por $C_B(\mathfrak{M}')$ al álgebra de Banach de todas las funciones acotadas de valores complejos definidas en $\mathfrak{M}'$ con la norma $\|\varphi\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}'} |\varphi(M)|$.

Lo siguiente es una consecuencia inmediata de la Definición 4.1.6 y la desigualdad (4.4):

Teorema 4.1.8. *La función $h : x \to \hat{x}$ es un homomorfismo continuo*[1] *del álgebra de Banach A hacia el álgebra $C_B(\mathfrak{M}')$. La imagen del uno e de A (bajo este homomorfismo) es la función constante $\hat{e}(M) \equiv 1$. Todo funcional lineal multiplicativo en A es de la forma $f(x) = \hat{x}(M_0)$, donde M_0 es un punto fijo de $\mathfrak{M}'$.*

[1] Este homomorfismo será llamado de ahora en adelante *representación o transformación de Gelfand.*

Observación 4.1.4. *A partir de ahora $\hat{A}$ denotará la imagen de A bajo el homomorfismo h, es decir, $\hat{A} = h(A) \subseteq C_B(\mathfrak{M}')$. $\hat{A}$ es un álgebra normada (posiblemente no completa) con la norma*

$$\|x\|_s = \sup |\hat{x}(M)|. \tag{4.5}$$

Concluímos con el siguiente

Teorema 4.1.9. *Un elemento $x \in A$ es invertible si y sólo si $\hat{x}(M) \neq 0$ para todo $M \in \mathfrak{M}'$. En este caso*

$$(\hat{x}^{-1})(M) = [\hat{x}(M)]^{-1}. \tag{4.6}$$

Demostración. Si $\hat{x}(M_0) = 0$, entonces $x \in M_0$ y x no puede ser invertible. Por otro lado, si x no es invertible en A, entonces xA es un ideal propio en A, por consiguiente está contenido en algún ideal maximal M_0. Claramente $x \in M_0$, así $\hat{x}(M_0) = 0$. La fórmula (4.6) se sigue inmediatamente del Ejemplo 4.1.2. □

Observación 4.1.5. *El símbolo $\mathfrak{M}'$ es preliminar, y hasta ahora lo hemos visto como un simple conjunto. Sin embargo puede ser equipado con una topología (o inclusive con dos topologías distintas) y el espacio topológico que resulta se denota por $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{M}(A)$. Por supuesto, todos los teoremas de esta sección son válidos con $\mathfrak{M}$ en vez de $\mathfrak{M}'$ ya que estos no involucran a la estructura topológica de $\mathfrak{M}$.*

Proseguimos con el siguiente

Teorema 4.1.10. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con uno e. Sea $a \in A$, entonces*

$$\sigma(a) = \{f(a) : f \in \mathfrak{M}(A)\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $\lambda e - a$ no es invertible. Luego tomamos el ideal $(\lambda e - a) \cdot A$ que es propio; así por el Lema de Zorn-Kuratowski, existe M ideal maximal que lo contiene, por consiguiente, ya que $e \in A$, $\lambda e - a \in M$. De esta manera, como

$$M \leftrightarrow f_M,$$

se tiene que

$$f(\lambda e - a) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = f(a)$$

$$\therefore \sigma(a) \subset \{f(a) : f \in \mathfrak{M}(A)\}.$$

Por otro lado, sea $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $f(a)e - a$ no es invertible, ya que

$$f\left(f(a)e - a\right) = 0.$$

□

A continuación presentamos esta

Proposición 4.1.5. [2] *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con uno e. Entonces $a \in A$ es invertible si y sólo si $f(a) \neq 0$, $\forall f \in \mathfrak{M}(A)$.*

[2]Esta es la llamada *Propiedad de Norbert-Wiener* para un álgebra de Banach.

Demostración. Por un lado es fácil, porque si $f(a) = 0$ para alguna $f \in \mathfrak{M}(A)$ entonces, $a \in M_f$, y por lo tanto a no es invertible.
Por otro lado, supongamos que $f(a) \neq 0$, $\forall f \in \mathfrak{M}(A)$, y que a no es invertible. Entonces aA es un ideal propio de A, por consiguiente existe M ideal maximal de A tal que $aA \subset M$. Así $a \in M$, y por la biyección $M \leftrightarrow f_M$, se tiene que $f_M(a) = 0$, lo cual es absurdo. □

Ahora veamos el siguiente

Ejemplo 4.1.4. $M_{2\times2}(\mathbb{C})$ *es un álgebra, pero no tiene funcionales lineales multiplicativos.*

Demostración. En efecto, supongamos que f es un funcional multiplicativo del álgebra $M_{2\times2}(\mathbb{C})$, es decir, $f \in \mathfrak{M}(M_{2\times2}(\mathbb{C}))$. Ahora considere los siguientes elementos de $M_{2\times2}(\mathbb{C})$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\alpha^2 = \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y además

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(\alpha\beta + \beta\alpha) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Lo cual es absurdo. □

Enseguida otra

Definición 4.1.7. *Una función $x \to x^*$ de un álgebra de Banach A sobre sí misma es llamada una* ***involución*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. $(x^*)^* = x$,
2. $(x + y)^* = x^* + y^*$,
3. $(xy)^* = y^* x^*$,
4. $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$,

donde $x, y \in A$ y α es un escalar complejo.

A continuación presentamos 2 ejemplos de álgebras con involución.

Ejemplo 4.1.5. $A = C(\Omega)$ *(veáse el Ejemplo 3.4.2),*

$$x^*(t) = \overline{x(t)}, t \in \Omega.$$

Verificamos que x^* cumple con 1-4 de la definición anterior.

1. $(x^*)^* = x$. *En efecto; veamos que* $(x^*)^*(t) = x(t)$, *para toda* $t \in \Omega$:

$$\begin{aligned}(x^*)^*(t) &= \overline{x^*(t)}\\ &= \overline{\overline{x(t)}} = x(t).\end{aligned}$$

2. $(x+y)^* = x^* + y^*$. *Para la prueba note que si* $t \in \Omega$ *se cumple que:*

$$\begin{aligned}(x+y)^*(t) &= \overline{(x+y)(t)}\\ &= \overline{x(t)} + \overline{y(t)}\\ &= x^*(t) + y^*(t) = (x^* + y^*)(t).\end{aligned}$$

3. $(xy)^* = y^*x^*$. *Aquí se tiene lo siguiente para toda* $t \in \Omega$:

$$\begin{aligned}(xy)^*(t) &= \overline{(xy)(t)}\\ &= \overline{x(t)\cdot y(t)}\\ &= \overline{x(t)}\cdot\overline{y(t)}\\ &= \overline{y(t)}\cdot\overline{x(t)}\\ &= y^*(t)\cdot x^*(t)\\ &= (y^*x^*)(t).\end{aligned}$$

4. $(\alpha x)^* = \overline{\alpha}x^*$. *En efecto,*

$$\begin{aligned}(\alpha x)^*(t) &= \overline{\alpha x(t)}\\ &= \overline{\alpha}\cdot\overline{x(t)}\\ &= \overline{\alpha}x^*(t).\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.6. *Sea* $A = H_\infty$ *como en el ejemplo 3.4.7.*
Aquí se define la siguiente involución:

$$x^* = \overline{x(\overline{t})}, |t| < 1.$$

Verificamos las propiedades 1-4 de la definición de involución:

1. $(x^*)^* = x$. *En efecto; demostraremos que* $(x^*)^*(t) = x(t)$, $|t| < 1$:

$$\begin{aligned}(x^*)^*(t) &= \overline{x^*(\overline{t})}\\ &= \overline{\overline{x(\overline{\overline{t}})}} = x(t).\end{aligned}$$

2. $(x+y)^* = x^* + y^*$. *Para la prueba note que si* $|t| < 1$ *se cumple que:*

$$\begin{aligned}
(x+y)^*(t) &= \overline{(x+y)(\bar{t})} \\
&= \overline{x(\bar{t})} + \overline{y(\bar{t})} \\
&= x^*(t) + y^*(t) = (x^* + y^*)(t).
\end{aligned}$$

3. $(xy)^* = y^*x^*$. *En esta parte se tiene lo siguiente para toda* $t \in \mathbb{C}$ *tal que* $|t| < 1$*:*

$$\begin{aligned}
(xy)^*(t) &= \overline{(xy)(\bar{t})} \\
&= \overline{x(\bar{t}) \cdot y(\bar{t})} \\
&= \overline{x(\bar{t})} \cdot \overline{y(\bar{t})} \\
&= \overline{y(\bar{t})} \cdot \overline{x(\bar{t})} \\
&= y^*(t) \cdot x^*(t) \\
&= (y^*x^*)(t).
\end{aligned}$$

4. $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$. *En efecto, si* $|t| < 1$ *se cumple que:*

$$\begin{aligned}
(\alpha x)^*(t) &= \overline{\alpha x(\bar{t})} \\
&= \overline{\alpha} \cdot \overline{x(\bar{t})} \\
&= \overline{\alpha} x^*(t).
\end{aligned}$$

Conclusiones

Concluimos este trabajo con un problema de dos incisos resueltos. Note que se pueden comparar, en cierta parte, características en el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$ con característicos en un álgebra de Banach. Por ejemplo, sabemos que el radio de convergencia de la serie de potencias de la exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

es infinito (esta definición es, de hecho aplicable a todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$), y entonces, por el Teorema 3.3.5 del libro de Kadison-Ringrose [13], descubrimos que también existe convergencia para la exponencial (e^a, $a \in A$) pero ahora no en un campo solamente, sino también en espacio matemático más elaborado, el cual en este caso es un álgebra de Banach unitaria A. O quizá por ejemplo podríamos extender la siguiente propiedad de la exponencial en el campo de los complejos, hacia un álgebra de Banach: $e^z e^w = e^{z+w}, z, w \in \mathbb{C}$. Esto parece que evidentemente se cumple también en un álgebra de Banach, pero en el siguiente Teorema se demuestra que los elementos del álgebra de Banach unitaria deben ser conmutativos

Teorema 4.1.11. *Sea A un álgebra de Banach con uno. Definimos la **función exponencial** $exp : A \to A$ por $exp(a) = e^a$, donde*

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \forall a \in A. \tag{4.7}$$

Entonces se cumple que si $a, b \in A$ conmutan

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

Demostración. Como la expansión (4.7) converge además de que a y b conmutan, se obtiene que:

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^n b^{k-n} = e^{a+b}. \end{aligned}$$

□

Como se puede ver hay algunas similitudes entre los resultados ya obtenidos en espacios más sencillos, a un espacio más elaborado. Entonces veamos a continuación el problema prometido:

Problema 1

Sea A una álgebra de Banach con uno y sea $a \in A$ tal que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Usando el cálculo funcional holomorfo se define $c := e^{ia}$ (es decir, se debe tener en consideración que $f(z) = e^z$ con $z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en todo el plano complejo, esto es, se dice que es entera y se define:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ ,$$

es paralela a la definición de la serie de potencias para los argumentos reales, donde la variable real se reemplaza por una compleja). Entonces:

(a) c es invertible.

(b) $\sigma(c)$ está contenido en el círculo unitario.

(a). *Demostración.* Sabemos que la función $f(z) := e^{iz}$ es entera y como por hipótesis $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, tenemos que por el Teorema 3.3.5 del libro de Kadison-Ringrose [13]

$$c := e^{ia} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} \in A;$$

del mismo modo usando la función entera $h(z) := e^{-iz}$ podemos definir

$$d := e^{-ia} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{n!} \in A.$$

Entonces, proponemos que d es el inverso de c. Para demostrar esto usaremos el hecho de que si α y β son conmutativos en un álgebra de Banach unitaria A, entonces se cumple que:

$$e^{\alpha}e^{\beta} = e^{\alpha+\beta} \text{ (aquí véase el Teorema 4.1.11).}$$

Por consiguiente veamos en este caso que ia y $-ia$ (elementos del álgebra de Banach A) son conmutativos, así

$$(ia)(-ia) = -i^2a^2 = a^2$$

y a su vez

$$(-ia)(ia) = -i^2a^2 = a^2;$$

de esta manera

$$(ia)(-ia) = (-ia)(ia) = a^2,$$

de donde ia & $-ia$ son verdaderamente conmutativos.
Así:

$$cd = e^{ia}e^{-ia} = e^{ia+(-ia)} = e^0 = 1_{\mathcal{A}}$$

$$\&$$

$$dc = e^{-ia}e^{ia} = e^{-ia+ia)} = e^0 = 1_{\mathcal{A}}$$

es decir,

$$cd = dc = 1_{\mathcal{A}}.$$

Con lo último se prueba que c es invertible en $\mathcal{A}$. $\square$

(b). *Demostración.* Sea $\mathcal{C}$ el círculo unitario, entonces

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Ahora, sabemos que la función $g(z) := e^{iz}$ es una función entera, por lo tanto como por hipótesis $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, tenemos que por el Teorema 3.3.6 del libro de Kadison-Ringrose [13]

$$\sigma(g(a)) = \{g(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\},$$

es decir,

$$\sigma(c) = \{e^{i\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\} \tag{4.8}$$

y ya que $|e^{i\lambda}| = 1$, obtenemos de (4.8) que

$$\sigma(c) \subseteq \mathcal{C}.$$

□

Entonces concluímos diciendo que en este trabajo también quisimos comenzar a investigar sobre las similitudes que existen entre objetos matemáticos no tan complicados como los campos $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, y espacios a menudo bastante más complejos como son las álgebras de Banach. También esperamos que alguien (a parte de nosotros) se interese en hacer un trabajo más específico sobre las comparaciones que mencionamos en esta conclusión. Por último, note que se trato de llevar un «hilo conductor»sobre los temas en la tesis, llendo de lo más simple hasta lo más complicado. Sin más ¡hasta pronto!

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. and Lavrent'ev M. A. *Mathematics Its Contents, Methods, and Meaning I and II.* The M. I. T. Press, Second Edition, 1969.

[3] Arhippainen, J and Kauppi, K. *On A-convex Norms on Commutative Algebras.* Article of Rocky Mountains Journal of Mathematics. Volume 40, Number 2, 2010.

[4] Bombal, F. *Los Principios del Análisis Funcional*, Preprint.

[5] Bonsall, F. F and Duncan, J. *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[6] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York 2011.

[7] Casarrubias, Fidel & Tamariz, Ángel. *Elementos de Topología General*, 1a Edición, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas UNAM. CDMX 2012.

[8] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Springer, New York 1978.

[9] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis*, Mathematics Studies 49, North Holland 1981.

[10] Dieudonné, J. *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900 I y II*, Hermann, 1978.

[11] Douglas, Ronald G. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Second Edition, Springer, New York 1998.

[12] Giles, J. R. *Introduction to the Analysis of Metric Spaces,* 1^a edition, Cambridge University Press, 1999.

[13] Kadison, Richard V. & Ringrose, Jhon R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Academic Press, New York and London 1983.

[14] Larsen, R. *Functional Analysis an Introduction*, Editorial Marcel Dekker, New York 1973.

[15] Larsen, R. *Banach Algebras an Introduction*, Editorial Marcel Dekker, New York 1973.

[16] Lax, Peter D. *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, USA, 2002.

[17] Palmer, T. W. *Banach Algebras and The General Theory of *-Algebras*, Cambridge University Press, 1994.

[18] Salicrup, G. *Introducción a la Topología*, Editores J. Rosenblueth y C. Prieto. Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[19] Spivak, M. *Cálculo Infinitesimal*, 2a Edición, Editorial Reverté, S.A.

[20] Zelazko, W. *Banach Algebras*, Co-edición Elsevier Publishing Company & PWN-Polish Scientific Publishers, 1973.