UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

DINÁMICA DE FUNCIONES INDUCIDAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
LEONEL RITO RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, 23 DE ENERO DE 2023.

Agradecimientos

Eclesiastés 3.
1 Todo tiene su momento oportuno; hay un tiempo para todo lo que se hace
bajo el cielo: 2 un tiempo para nacer, y un tiempo para morir; un tiempo
para plantar, y un tiempo para cosechar; 3 un tiempo para matar, y un
tiempo para sanar; un tiempo para destruir, y un tiempo para construir;
4 un tiempo para llorar, y un tiempo para reír; un tiempo para estar de
luto, y un tiempo para saltar de gusto; 5 un tiempo para esparcir piedras, y
un tiempo para recogerlas; un tiempo para abrazarse, y un tiempo para
despedirse; 6 un tiempo para intentar, y un tiempo para desistir; un tiempo
para guardar, y un tiempo para desechar; 7 un tiempo para rasgar, y un
tiempo para coser; un tiempo para callar, y un tiempo para hablar; 8 un
tiempo para amar, y un tiempo para odiar; un tiempo para la guerra, y un
tiempo para la paz.

Esta vez, por fortuna, me toco el tiempo de agradecer. Empezaré agradeciendo a mis familiares y amigos y después a mis profesores.

Vengo de una familia indígena mixe, crecí en un pueblo pequeño de Oaxaca. A diferencia de mi, mis padres no tuvieron la oportunidad de estudiar, salieron adelante como sus antepasados les enseñaron, por una parte mi papá, Faustino Rito, sembraba maíz, frijol, calabaza, malanga, yuca, etc, también se dedicaba a la corta de leña y un poco a la ganadería, trabajando de sol a sol en el campo. Por otra parte mi mamá, Antonia Rodríguez, con el maíz que daba el campo se dedicaba a la elaboración de totopos, soportando el duro calor del horno, para luego comercializarlas en ciudades cercanas. Durante mucho tiempo se dedicó a la venta de distintos productos que se dan en el campo como son: yuca, camote, malanga, naranjas, mandarinas, etc, en distintos lugares ya sea en trenes, en topes de carretera o en otras ciudades. De esta forma mis padres obtuvieron ingresos para darnos educación y sustento.

Mi papá siempre quería que estudiáramos, de hecho, esta es la razón del porqué casi no nos llevaba a trabajar al campo.

Por otra parte mi mamá me cuenta que cuando era joven quiso salir de casa para buscar un mejor empleo en la ciudad, pero que su familia la descubrió y no la dejó salir. Es por esta razón que mi madre nos a apoyado, motivado y nos ha permitido salir de casa hacia otras ciudades en busca de mejores oportunidades.

Estoy muy agradecido con mis padres por todo los esfuerzos y sacrificios que han hecho para que yo saliera adelante.

En especial agradezco a mi mamá, la cual admiro mucho, su ejemplo de trabajo, su amor a nosotros sus hijos y su forma de vida son el motor que hace que yo le eche ganas día con día.

Como saben a pesar de que el trabajo del campo es duro, la paga es poca. Es por eso que cuando mis hermanos mayores, Miguel, Olegario, Alberto y Salomé, se hicieron jovenes, entre 15 y 18 años de edad, salieron de casa a las grandes ciudades para poder encontrar nuevas formas de ingreso. Gracias al esfuerzo y sacrificio que ellos hicieron es que logré estudiar un carrera. Es por eso que dedico a ellos un especial agradecimiento.

Por el año 2001 mi padre cayo en una enfermedad que lo dejó en cama por 9 años, mi hermano Jesus apoyo mucho a mi madre en los cuidados de mi padre. Por esa ayuda que el ofreció, yo no tuve que truncar mis estudios de licenciatura, por eso y por todo el apoyo que siempre ha brindado a la familia le dedico un especial agradecimiento.

Actualmente mi mamá ya es grande y últimamente se ha enfermado mucho, gracias a Dios en estos momentos se encuentra bien. Mi hermana Dalid se ha dedicado mucho al cuidado de ella. Gracias a eso he podido continuar con mis estudios de doctorado, por esa razón y porque me dio a conocer la existencia de la carrera de matemáticas y en general porque siempre me a apoyado mucho, le dedico un especial agradecimiento.

Un especial agradecimiento a la tía Elisa de la ciudad de México que durante la carrerra me dio hospedaje en su casa, además de cariño y atención.

Agradezco a mi gran amigo Jose Juan, que es doctor en matemáticas. Desde que lo conocí en en el Cbtis 31 siempre lo he admirado mucho, su ejemplo de trabajo y estudio y el hecho que también sea mixe como yo, me motiva mucho a echarle ganas, además le agradezco también por el apoyo que siempre me ha brindado sobre la escritura de LaTeX.

Agradezco a mi primo Delfino, que también es mixe y es egresado de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la UNAM. El hecho de saber que te está yendo bien me da mucha alegría y me hace pensar que otras personas de mi pueblo también pueden salir adelante mediante el estudio. Muchas gracias por tu apoyo y por tus visitas en la CDMX.

Sin duda en el camino he tenido amigos a los cuales les agradezco mucho por el apoyo y la motivación que me han dado para continuar con mis estudios, a continuación menciono algunos de sus nombres:

Jorge Vega, Berenice, Jorge Moreno, Anabel, Fran, Gustavo, Andreina, Octavio, Mayra, Juan Buchanan, Elena, Erick, Nidia, Aleman Juanin, Antonia, Sheila, Yael, Eduardo Jacobo, Itzel, Rodrigo Domínguez, Rodrigo Cepeda, Fernando, Anallely, Marco, Cuautemoc, Ricardo, Pablo Palomino, Pablo Vazquez, Karina, Jacob Orenday, Mindy, Omar, Diana, Carlos Chiapas, Endy, Lucio, etc.

Ahora agradeceré a mis profesores.

Agradezco especialmente a mi asesor de doctorado, el Dr. Héctor Méndez, por todo el apoyo que me ha brindado desde que lo conocí, en un mi curso de cálculo 2, hasta la fecha. Es para mi un privilegio y una felicidad haber trabajado en el doctorado con el, ya que considero que es uno de los mejores profesores de la facultad de ciencias. Héctor es una persona increíble que siempre me ha apoyado en mis estudios, sobre todo cuando estuvimos en pandemia, y siempre me ha tratado con amabilidad y respeto.

Agradezco especialmente al Dr. Jorge Martínez porque desde que me dirigió la tesis de licenciatura hasta estos momentos he recibido su apoyo y sus consejos.

Finalmente agradezco a mis sinodales los doctores, Alejandro Illanes, Raúl Escobedo, Jorge Martínez, Héctor Méndez y la doctora Alicia Santiago por haber leído mi tesis y por darme sus correcciones y sugerencias.

En especial me da alegría saber que el Dr. Alejandro Illanes es mi sinodal. Alejandro es un profesor que admiro mucho, lo conocí cuando inicie la carrera de matemáticas, en primer semestre me dio el curso de Geometría moderna, después tome otros 4 cursos con el. El empeño que le pone a sus clase hace que uno entienda y comprenda cada cosa que explica. Los cursos que me dió en la carrera hicieron que me naciera el gusto por las matemáticas.

Es para mi una alegría saber que estoy apunto de titularme del último grado de estudios, doy gracias a Dios por ello, se que no cualquiera logra hacer un doctorado y menos si a uno le toca vivir en un pueblo donde el acceso a la educación es difícil, espero que el hecho de yo haber estudiado un doctorado motive a gente de mi pueblo y a mis sobrinos Yahir, Miguelito, Sharon, Ariatna, Anita, Brandon, Cristopher Sadoc, Antonio, Alejandro, Elisa Jatzibe, Aracely, Pilar y Josecito, a echarle ganas en la escuela y en algún futuro a estudiar alguna carrera.

Índice general

Introducción

Un sistema dinámico es una pareja (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. A partir del sistema dinámico (X, f) podemos obtener otros sistemas, llamados sistemas dinámicos inducidos. Los tres sistemas dinámicos inducidos que abordaremos en este trabajo son los siguientes:

i) $(2^X, 2^f)$, donde 2^X es el espacio que consta de todos los subconjuntos compactos, no vacíos, de X, y $2^f : 2^X \to 2^X$ es la función definida así: para cada $A \in 2^X$, $2^f(A) = f(A)$. El espacio 2^X es conocido como el *hiperespacio de los conjuntos compactos de* X.

ii) $(F_n(X), f_n)$, donde $F_n(X)$ es el espacio que consta de todos los subconjuntos no vacíos de X que tienen a lo más n puntos y $f_n = 2^f|_{F_n(X)}$. El espacio $F_n(X)$ es conocido como el *enésimo producto simétrico.*

iii) $(X^n, f^{\times n})$, donde X^n es el producto cartesiano de X, *n veces*, y $f^{\times n} : X^n \to X^n$, está dada así: para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$,

$$f^{\times n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))\,.$$

El objetivo de este trabajo es estudiar las relaciones que hay entre algunas propiedades dinámicas de los sistemas $(X, f), (2^X, 2^f), (F_n(X), f_n)$ y $(X^n, f^{\times n})$. Algunos resultados interesantes en esta dirección se presentan en [**1**, Teoremas 6.3 y 6.9], [**11**, Teoremas 1, 2 y 13] y [**12**, Teoremas 4.3 y 4.5]. Varios de los resultados contenidos en esta tesis se pueden considerar como una continuación del estudio realizado en [**11**] y [**12**].

La propiedad central en esta tesis, y de la cual partimos para analizar otras propiedades cercanas a ésta, es la transitividad fuerte. Otras propiedades que también trabajamos tienen que ver con parejas proximales. Estas propiedades son la equicontinuidad, la distalidad, la de ser puntualmente casi periódica, la de tener parejas de Li-Yorke y la propiedad de ser proximal.

A continuación mencionaremos brevemente, algunos de los resultados que obtuvimos en este trabajo.

En el artículo *Dynamics of induced systems*, [1], los autores E. Akin, J. Auslander y A. Nagar prueban que en los sistemas inducidos en el hiperespacio de los conjuntos de compactos de X las propiedades de ser fuertemente transitiva y ser localmente eventualmente suprayectiva son equivalentes. En esta tesis demostramos que en los sistemas inducidos en los productos simétricos estas propiedades no son equivalentes. Para demostrar este hecho recurrimos a los subshifts tipo gap. En el Capítulo 2 se encuentran estos resultados y también se encuentran algunas propiedades interesantes de este tipo de subshifts.

En el artículo *Variations on the concept of topological transitivity* , [2], los autores E. Akin, J. Auslander y A. Nagar definen los conjuntos $N(U,x) = \{n \geq 0 : f^n(x) \in U\}$, donde U es un subconjunto abierto no vacío de X y $x \in X$. Es inmediato que si (X, f) es eventualmente localmente suprayectiva, entonces para todo subconjunto abierto no vacío U, y para todo $x \in X$, $N(U, x)$ es cofinito. En [2, Observación 2.25, pág. 239] se plantea la siguiente pregunta: ¿Si $N(U, x)$ es cofinito para todo subconjunto abierto no vacío U, y para toda $x \in X$, entonces el sistema (X, f) es eventualmente localmente suprayectiva? En el Capítulo 2 usamos un subshift tipo gap para responder negativamente a esta pregunta.

Los resultados que obtuvimos en el Capítulo 2 se encuentran publicados en el artículo [19], *Strongly transitive maps on symmetric products*, de H. Méndez y L. Rito.

En el artículo, [6], *Dynamics of spacing shift* , los autores J. Banks, T.T.D. Nguyen, P. Oprocha, B. Stanley y B. Trota estudian algunas propiedades dinámicas en los subshifts tipo spacing, $(S_P, \sigma|_{S_P})$, donde P es un subconjunto de los números naturales y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ es la función shift. En el Capítulo 3 estudiamos la propiedades de ser LES, mezclante, débilmente mezclante, exactamente transitivo y fuertemente transitivo en los subshifts tipo spacing. Demostramos que las propiedades de mezclante y localmente eventualmente suprayectiva son equivalentes en este tipo de subshifts. Vemos que cuando $P \subseteq \mathbb{N}$, es de la forma $P = k\mathbb{N}$, entonces S_P es fuertemente transitivo. También mostramos que en los subshifts tipo spacing las propiedades de ser fuertemente transitivo y ser débilmente mezclante no se implican entre sí.

En [2], E. Akin, J. Auslander y A. Nagar introducen la propiedad dinámica de ser exactamente transitivo. En [2, pág. 248] aparece la siguiente pregunta: ¿Exactamente transitivo implica mezclante? en la Sección 2 del

Capítulo 3 producimos un ejemplo para mostrar que la respuesta a esta pregunta es negativa. Para dar el ejemplo recurrimos a los subshifts tipo spacing. También demostramos que en los subshifts tipo spacing las propiedades de ser débilmente mezclante y exactamente transitivo son equivalentes.

Los resultados que ofrecemos en la Sección 2 del Capítulo 3 , son en esencia, el contenido del artículo [**22**], *Exact transitivity does not imply mixing*, de mi autoría.

En el artículo [**1**] los autores estudian las propiedades dinámicas de distalidad, casi periodicidad y equicontinuidad. Ahí demuestran que estas propiedades son equivalentes en los sistemas inducidos en el hiperespacio de los conjuntos compactos de X. Con respecto a los sistemas inducidos en los productos simétricos demostramos que las propiedades de distalidad y casi periodicidad también son equivalentes. Vemos que cuando la función es suprayectiva la equicontinuidad también implica las otras dos propiedades en los sistemas inducidos en los productos simétricos. Sin embargo, hay sistemas inducidos en los productos simétricos que son distales y puntualmente casi periódicos pero no son equicontinuos. También estudiamos la propiedad de tener conjuntos densos de puntos distales, demostramos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(F_n(X), f_n)$ tiene densidad de puntos distales si y sólo si (X, f) tiene densidad de puntos distales. Comparamos este resultado con el ejemplo dado en [**16**, Sección 6.1] de los autores J. Li, P. Oprocha, X. Ye y R. Zhang que muestran un sistema (X, f) tal que $(2^X, 2^f)$ tiene densidad de puntos distales, pero (X, f) no tiene densidad de puntos distales.

Con respecto a la propiedad de tener parejas de Li-Yorke, demostramos que un sistema (X, f) no tiene parejas de Li-Yorke si y sólo si el sistema inducido en el producto simétrico $(F_n(X), f_n)$ no tiene parejas de Li-Yorke. Comparamos este resultado con el ejemplo dado en [**25**, Ejemplo 2.26, pp. 16-17] que muestra un sistema (X, f) que no tiene parejas de Li-Yorke, pero que $(2^X, 2^f)$ tiene una cantidad infinita no numerable de parejas de Li-Yorke.

El resultado principal que obtuvimos para la propiedad de ser proximal nos dice que un sistema (X, f) es proximal si y sólo si el sistema inducido en el producto simétrico $(F_n(X), f_n)$ es proximal. También mostramos un sistema dinámico (X, f) que es proximal, pero que $(2^X, 2^f)$ no es proximal.

Al estudiar el artículo [**2**] nos dimos cuenta de que podríamos formular una propiedad dinámica que tendría relaciones interesantes con varias propiedades dadas en [**2**]. Esta propiedad la bautizamos con el nombre de *fuertemente mezclante*. Demostramos que un sistema es fuertemente mezclante si y sólo si los sistemas inducidos en los productos simétricos son fuertemente mezclantes. Sin embargo notamos que si el sistema es fuertemente mezclante no implica que el sistema inducido en el hiperespacio de los conjuntos compactos de X sea fuertemente mezclante. Mostramos también que en los sistemas inducidos en el hiperespacio de los conjuntos compactos de X las propiedades de fuertemente mezclante, fuertemente transitiva y localmente eventualmente suprayectiva son equivalentes. Notamos que en los sistemas inducidos en los productos simétricos la propiedad de fuertemente mezclante no implica la propiedad de localmente eventualmente suprayectiva. Estos resultados se presentan en el Capítulo 5. En este capítulo también analizamos las funciones fuertemente exactamente transitivas y fuertemente transiva en productos, que se definen en [**2**]. Obtuvimos propiedades equivalentes a éstas en el lenguaje de hiperespacios. Estas propiedades nos permitieron dar una forma equivalente a la pregunta: ¿fuertemente exactamente transitivo implica fuertemente transitivo en productos?, que aparece en [**2**, pág. 248]. Esta nueva forma de ver a la pregunta nos hace pensar que su respuesta es negativa. En el Capítulo 5 demostramos también que las propiedades de ser LES, fuertemente mezclante, fuertemente exactamente transitivo y fuertemente transitiva en productos son equivalentes en los sistemas (I, f) donde I es intervalo cerrado no degenerado de $\mathbb{R}$. Sin embargo mostraremos que existe un continuo X, y una función $f : X \to X$ tal que el sistema (X, f) es fuertemente mezclante pero no es LES.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones de algunas propiedades dinámicas que ayudarán a entender los primeros capítulos de la tesis. Conforme avancemos necesitaremos más definiciones y algunos resultados ya conocidos que en su momento serán mencionados.

1.1. Propiedades dinámicas

Un sistema dinámico discreto es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico, compacto y $f : X \to X$ es una función continua. De aquí en adelante la letra X siempre representa un espacio métrico y compacto, y la letra f denota una función continua de X en sí mismo.

Sean $f : X \to X$ y $n \in \mathbb{N}$. La función $f^n : X \to X$, es la composición de f consigo misma, n veces.

Definición 1. Dado un punto $x \in X$ el conjunto

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$$

es la *órbita* de x bajo f.

Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, entonces x es un *punto periódico de* f. El conjunto de todos los puntos periódicos de f es denotado por $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces el *periodo* de x bajo f es el mínimo número natural n tal que $f^n(x) = x$.

Definición 2. Dados una función $f : X \to X$, y $A \subseteq X$.

i) Decimos que A es un conjunto *invariante* si $f(A) \subseteq A$.

ii) Decimos que A es *fuertemente invariante* si $f(A) = A$.

iii) Decimos que A es un conjunto *minimal* si A es un conjunto cerrado e invariante tal que si $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ y B es un conjunto cerrado e invariante, entonces $B = A$.

Sea $A \subseteq X$. Los símbolos $int(A)$ y $cl(A)$ denotan el interior y la cerradura de A en X, respectivamente.

Definición 3. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto.

i) f es *localmente eventualmente suprayectiva (LES)* si para todo conjunto abierto no vacío U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) = X.$$

ii) f es *mezclante* si para toda pareja U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$,

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

iii) f es *débilmente mezclante* si para toda colección U, V, W, Z, de cuatro subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap W \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f^n(V) \cap Z \neq \emptyset.$$

iv) f es *exactamente transitiva*, si para cualesquiera tres subconjuntos abiertos no vacíos U, V, W, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U \cap f^n(V) \cap f^n(W) \neq \emptyset.$$

v) f es *fuertemente transitiva*, si para toda $x \in X$ y para todo subconjunto abierto no vacío $U \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^n(U)$.

vi) f es *transitiva* si para toda pareja U, V, de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

En el siguiente diagrama mostramos algunas implicaciones de las propiedades dinámicas antes mencionadas. Sus demostraciones se pueden consultar en [2]. En [2, pág. 246] se hace un esquema de estas implicaciones.

$$\begin{tikzcd}
\text{LES} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & \text{Mezclante} \arrow[r] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[dd] \\
& \text{Fuertemente transitivo} \arrow[dr] & \\
\text{Exactamente transitivo} \arrow[rr] & & \text{Transitivo}
\end{tikzcd}$$

En [2, Teorema 2.20 (a), pág. 237] se demuestra que:

$$Exactamente\ transitivo \Rightarrow Débilmente\ mezclante.$$

En [2, Proposición 2.36 (1), pág. 246] se demuestra que:

$$Mezclante \not\Rightarrow Exactamente\ transitivo.$$
$$Mezclante \not\Rightarrow Fuertemente\ transitivo.$$

En [2, Proposición 2.36 (5), pág. 246] se demuestra que

$$Exactamente\ transitivo\ y\ mezclante \not\Rightarrow Fuertemente\ transitivo.$$

En [6, Ejemplo 2.2, pág. 5] se demuestra que:

$$Débilmente\ \ mezclante \not\Rightarrow Mezclante$$

En el Ejemplo 82, página 43, demostramos por primera vez que

$$Exactamente\ transitivo \not\Rightarrow Mezclante$$

En la Observación 73, página 41, argumentamos que:

$$Fuertemente\ transitivo \not\Rightarrow Débilmente\ mezclante.$$

Esto termina el análisis de todas las implicaciones posibles dadas en la Definición 3.

A continuación enunciamos algunos resultados conocidos que nos ayudan a demostrar algunas proposiciones.

Una propiedad que cumplen las funciones transitivas se enuncia en la siguiente proposición, cuya demostración se encuentra en [18, Corolario 6.9, pág. 79].

Proposición 4. *Sea X un espacio métrico. Sea $f : X \to X$ una función transitiva en X. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de X no vacíos. Existe una sucesión estrictamente creciente, $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, tal que para toda $i \in \mathbb{N}, f^{n_i}(U) \cap V \neq \emptyset$. En particular, para cada $N \in N$, existe $M > N$ tal que $f^M(U) \cap V \neq \emptyset$.*

El siguiente teorema es conocido como Teorema de Furstenberg su demostración se encuentra en [18, Teorema 8.10, págs. 106-108].

Teorema 5. *Sea X un espacio métrico y compacto. Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces f es débilmente mezclante si y sólo si para cada par de colecciones de k elementos, $k \geq 2$, de conjuntos abiertos y no vacíos de X,*

$$\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}\ y\ \{V_1, V_2, \ldots, V_k\},$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^N(U_i) \cap V_i \neq \emptyset, \text{ para toda } 1 \leq i \leq k.$$

La siguiente definición se enuncia en [18, pág. 50].

Definición 6. Decimos que f es de tipo γ_4 si para toda terna de subconjuntos abiertos y distintos del vacío, U, V_1 y V_2, de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ y } f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

En [18, Corolario 7.9, pág. 52], se argumenta la siguiente proposición.

Proposición 7. *Sea X un espacio métrico y compacto. La función $f : X \to X$ es débilmente mezclante si y sólo si f es de tipo γ_4.*

La siguiente proposición se puede consultar en [18, Lema 8.13, págs. 109-110].

Proposición 8. *Sea X un espacio métrico compacto. Sea $f : X \to X$ una función que es continua y débilmente mezclante. Sean*

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \text{ y } V_1, V_2, \ldots, V_k,$$

dos colecciones de $k \geq 2$ subconjuntos abiertos, no vacíos, de X. Sea $N \in N$ tal que

$$f^N(U_i) \cap V_i \neq \emptyset, \text{ para toda } 1 \leq i \leq k.$$

Entonces existe $M > N$ tal que

$$f^M(U_i) \cap V_i \neq \emptyset, \text{ para toda } 1 \leq i \leq k.$$

Algunos subconjuntos de $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ que usaremos son los siguientes:

Definición 9. Sea $P \subseteq \mathbb{N}_0$.

- Decimos que P es *grueso* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N \in P$ tal que los números $N, N+1, N+2, \ldots, N+n$ están en P.
- Decimos que P es *sindético* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $\{k, k+1, \ldots, k+N\} \cap P \neq \emptyset$.
- Decimos que P es *cofinito*, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $n \in P$.

Las definiciones dadas en la Definición 9 se presentan en [6, págs. 6, 15].

Definición 10. Dados dos subconjuntos no vacíos U y V de X, definimos el subconjunto de los números naturales

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Si $V = \{x\}$, para algún $x \in X$, denotamos a $N(U, \{x\})$ por $N(U, x)$.

Con la notación dada en la Definición 10, obtenemos la siguiente observación.

Observación 11. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto, entonces:

i) f es transitiva si y sólo si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U, V, se tiene que $N(U, V) \neq \emptyset$.

ii) f es mezclante si y sólo si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U, V, se tiene que $N(U, V)$ es cofinito.

Otros sistemas dinámicos que analizaremos en este trabajo son los sitemas equicontinuos, los sistemas distales y los sistemas puntualmente casi periódicos. Las definiciones de estos sistemas las daremos en el Capítulo 4.

1.2. Sistemas dinámicos inducidos

Un sistema dinámico (X, f) induce otros sistemas dinámicos, en esta sección veremos los sistemas inducidos que estudiaremos a lo largo del trabajo.

Definición 12. Dado X un espacio métrico compacto definimos

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto compacto no vacío de X}\}.$$

El espacio 2^X es conocido como el *hiperespacio de los conjuntos compactos de X.*

Un estudio detallado del hiperespacio 2^X se puede consultar en el capítulo 1 de [**13**].

Definición 13. Sean X un espacio métrico compacto, $n \in \mathbb{N}$ y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

El espacio $F_n(X)$ es conocido como el *enésimo producto simétrico de X.*

Observemos que $F_n(X)$ es un subespacio de 2^X.

La topología de 2^X, y por lo tanto de $F_n(X)$, se da en la siguiente definición.

Definición 14. Sean X un espacio métrico compacto, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Definimos el *conjunto vietórico de* $U_1, \ldots, U_n$ como:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \text{ y para cada } 1 \leq i \leq n,\ U_i \cap A \neq \emptyset\}.$$

La colección de todos los conjuntos vietóricos forma una base para una topología de 2^X. Esta topología es llamada *Topología de Vietoris*, ver [**13**, Definition 1.1, pág. 3].

Definición 15. Dada $f : X \to X$, definimos la función inducida en 2^X, $2^f : 2^X \to 2^X$, dada por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$.

Algunas relaciones de propiedades dinámicas entre 2^f y f se encuentran en [1], [7] y [18]. La mayoría de los autores considera que el primer trabajo donde se estudia la relación, desde el punto de vista de la dinámica discreta, entre los sistemas (X, f) y $(2^X, 2^f)$ es en [7].

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m$, subconjuntos abiertos no vacíos de X. Para cada par m, n en $\mathbb{N}$ definimos

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_n = \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \cap F_n(X).$$

El Lema 16 es demostrado en [12, Lema 4.2]

Lema 16. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La familia*

$$\{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_n : \text{ para toda } 1 \leq i \leq n, \quad U_i \text{ es un subconjunto abierto de } X\}$$

es una base para la topología de $F_n(X)$.

Algunas propiedades topológicas del hiperespacio $F_n(X)$ aparecen en [3, sección 1].

Definición 17. Dado un sistema dinámico, (X, f), obtenemos el sistema inducido en el producto simétrico, $(F_n(X), f_n)$, donde $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$ es la función 2^f restringida a $F_n(X)$.

Algunos resultados interesantes sobre propiedades dinámicas y sus relaciones entre los sistemas (X, f) y $(F_n(X), f_n)$ se encuentran en los artículos [1], [11] y [12].

Otro sistema que se obtiene a partir de un sistema dinámico (X, f) es el sistema inducido en el producto cartesiano.

Definición 18. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para cada $k \in \mathbb{N}$, X^k denota el producto cartesiano $X \times X \times \cdots \times X$ con k factores. Sea $f^{\times k} : X^k \to X^k$ la función en el producto X^k, dada por:

$$f^{\times k}(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_k)),$$

para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in X^k$.

Para cada par de puntos

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \; \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

en X^k, la distancia entre ellos está dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{d(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq k\}.$$

La topología que induce esta métrica coincide con la topología producto del espacio X^k.

Capítulo 2

Funciones fuertemente transitivas en productos simétricos

En [1, Teorema 6.3] se demuestra que las propiedades de LES y fuertemente transitiva son equivalentes en el sistema inducido en el hiperespacio de los conjuntos compactos. El objetivo principal de este capítulo es demostrar que las propiedades de LES y fuertemente transitiva no son equivalentes en los productos simétricos. Para llegar a este resultado recurriremos a los subshifts tipo gap.

2.1. Productos simétricos y productos cartesianos de X

En esta sección analizaremos la propiedad de ser localmente eventualmente suprayectiva (LES) y la de ser fuertemente transitiva en los sistemas inducidos en los productos cartesianos y en los productos simétricos.

En el Capítulo 1 dimos la definición de transitividad fuerte, a continuación recordaremos la definición y haremos algunos comentarios sobre esa propiedad.

Definición 19. $f : X \to X$ es *fuertemente transitiva* si para todo $x \in X$ y para todo subconjunto abierto no vacío, $U \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^n(U)$.

Definición 20. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x \in X$. La *semiórbita negativa de x* está dada por:

$$o^-(x, f) = \{y \in X : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(y) = x\}.$$

En la siguiente proposición damos algunas condiciones equivalentes a la propiedad de ser fuertemente transitiva.

Proposición 21. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *$f : X \to X$ es fuertemente transitiva.*

ii) *Para todo punto $x \in X$, la semiórbita negativa de x forma un subconjunto denso en X. Es decir, $cl(o^{-}(x, f)) = X$.*

iii) *Para todo subconjunto $U \subseteq X$ abierto, distinto del vacío, se tiene que*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^n(U) = X.$$

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Supongamos que f es fuertemente transitva. Sean $x \in X$ y $U \subset X$, un subconjunto abierto no vacío. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^n(U)$. Se sigue que existe $y \in U$ tal que $f^n(y) = x$. Por lo tanto $y \in U \cap o^{-}(x, f)$. Lo cual nos dice que la semiórbita $o^{-}(x, f)$ es un subconjunto denso de X.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Sea $U \subseteq X$ un subconjunto abierto no vacío. Tomemos $x \in X$, por *ii)*, existe $y \in o^{-}(x, f) \cap U$. Luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) = x$. Esto prueba que $x \in f^n(U)$, por lo tanto

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^n(U) = X.$$

iii) $\Rightarrow$ *ii)*. Se da de manera inmediata usando la definición de transitividad fuerte. □

Recordemos la definición de la propiedad LES.

Definición 22. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Decimos que (X, f) es *localmente eventualmente suprayectiva (LES)*, si para todo subconjunto abierto no vacío U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) = X.$$

El Teorema 23 está demostrado en [**11**, Teorema 13, pág. 1186].

Teorema 23. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces (X, f) es LES si y sólo si $(F_n(X), f_n)$ es LES.*

Con ayuda del Teorema 23, obtenemos el Teorema 24 que dice que la presencia en productos simétricos y en productos cartesianos de la propiedad de ser LES es equivalente. Ambos sistemas, $(F_n(X), f_n)$ y $(X^n, f^{\times n})$, la tienen o ambos carecen de ella.

Los elementos A de $F_k(X)$ los denotaremos de la siguiente forma: si la cardinalidad de A es l, con $l \leq k$, entonces

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}.$$

Si $l < k$, vamos a denotar a A de la siguiente manera

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_l, a_l, \dots, a_l\}.$$

Teorema 24. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

$i)$ $f : X \to X$ es LES.

$ii)$ $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es LES.

$iii)$ $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es LES.

Demostración. $i) \implies ii)$.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \dots, U_k$, subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como $f : X \to X$ es LES, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $1 \leq i \leq k$.

$$f^N(U_i) = X.$$

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$. Para cada $1 \leq i \leq k$, tomemos $z_i \in U_i$ tal que $f^N(z_i) = x_i$. Entonces $(f^{\times k})^N(z_1, z_2, \dots, z_k) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Se sigue que,

$$(f^{\times k})^N(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k) = X^k.$$

Por lo tanto, $f^{\times k}$ es LES.

$ii) \implies iii)$.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \dots, U_k$, subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ un elemento de $F_k(X)$. Consideremos el punto $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ en el producto X^k. Como $f^{\times k}$ es LES, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(f^{\times k})^N(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k) = X^k.$$

Entonces, existe $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k$ tal que

$$(f^{\times k})^N(x_1, x_2, \dots, x_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Notemos que $\{x_2, x_2, \dots, x_k\}$ es un elemento de $\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle_k$, y $(f_k)^N(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Por lo tanto

$$(f_k)^N\left(\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle_k\right) = F_k(X).$$

El Lema 16 nos dice que los subconjuntos de la forma $\langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle_k$ de $F_k(X)$, son una base de la topología de $F_k(X)$. Se sigue que $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es LES.

La implicación $iii) \implies i)$ se sigue del Teorema 23. $\square$

A continuación demostramos que la presencia en productos simétricos y en productos cartesianos de la propiedad de ser fuertemente transitiva también es equivalente en los sistemas $(F_n(X), f_n)$ y $(X^n, f^{\times n})$.

Proposición 25. *Sea $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Si $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva, entonces $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva.*

Demostración. Sean $A \in F_k(X)$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ y

$$U = \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle_k \,,$$

donde $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Consideremos el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in X^k$. Como $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva, la semiórbita $o^-(\mathbf{a}, f^{\times k})$ es un subconjunto denso en X^k. Por lo tanto, existen $N \in \mathbb{N}$ y un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$ tales que

$$\mathbf{x} \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k, \quad \text{y} \quad (f^{\times k})^N(\mathbf{x}) = \mathbf{a}.$$

Se sigue que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un elemento de $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle_k$ y

$$(f_k)^N(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Entonces $o^-(A, f_k) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle_k \neq \emptyset$.

Así, la semiórbita $o^-(A, f_k)$ es un subconjunto denso de $F_k(X)$. Por lo tanto, f_k es fuertemente transitiva.

□

En la demostración de la implicación: Si $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva, entonces $f^{\times k} : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva utilizamos los Lemas 26 y 27.

Lema 26. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto fuertemente transitivo. Sean U un subconjunto abierto no vacío de X y $x \in X$. Entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $y \in U$, y $n > N$ tales que $f^n(y) = x$.*

Demostración. Como f es fuertemente transitiva, entonces f es suprayectiva. Sea $z \in X$ tal que $f^N(z) = x$. Por hipótesis existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(y) = z$. Luego $f^{k+N}(y) = x$. Tomando $n = k + N$ finalizamos la demostración. □

Lema 27. *Sean $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, y $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ una función fuertemente transitiva. Entonces para toda colección $U_1, \ldots, U_k$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$W = int\left(\bigcap_{i=1}^{k} f^N(U_i)\right) \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Tomemos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Para cada i, $1 \leq i \leq k$, sea V_i un subconjunto abierto no vacío tal que

$$V_i \subseteq cl(V_i) \subseteq U_i.$$

Sea $x \in X$. Consideramos $\{x\} \in F_k(X)$. Como f_k es fuertemente transitiva, entonces la semiórbita $o^-(\{x\}, f_k)$ es un subconjunto denso de $F_k(X)$. Por lo tanto, existen $m \in \mathbb{N}$, y un elemento

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_k \rangle \cap F_k(X),$$

tal que $(f_k)^m(\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}) = \{x\}$.

Se sigue que $x \in \bigcap_{i=1}^k f^m(cl(V_i))$.

Entonces,

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{k} f^m(cl(V_i)) \right).$$

Por el Teorema de Categoría de Baire [**23**, Corolario 16, pág. 139], existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$int \left(\bigcap_{i=1}^{k} f^N(cl(V_i)) \right) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $W = int \left(\bigcap_{i=1}^k f^N(U_i) \right) \neq \emptyset$. □

Proposición 28. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Si $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva, entonces $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva.*

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$ y $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Demostraremos que

$$o^- \left(\mathbf{x}, f^{\times k} \right) \cap (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k) \neq \emptyset.$$

Por el Lema 27, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$W = int \left(\bigcap_{i=1}^{k} f^N(U_i) \right) \neq \emptyset.$$

Como f_k es fuertemente transitiva, existen $M \in \mathbb{N}$, y $z_1, z_2, \ldots, z_k \in X$ tales que

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \in \langle W \rangle \cap F_k(X),$$

y

$$(f_k)^M \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Renombrando los puntos z_i, si fuese necesario, podemos suponer que

$$(f^{\times k})^M(z_1, z_2, \dots, z_k) = (x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Notemos que $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subseteq W$, y $W \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{k} f^N(U_i)\right)$. Para cada i, $1 \leq i \leq k$, sea $w_i \in U_i$ tal que $f^N(w_i) = z_i$.

Entonces,

$$(f^{\times k})^{N+M}(w_1, w_2, \dots, w_k) = (x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Luego, $(w_1, w_2, \dots, w_k) \in o^- \left((x_1, x_2, \dots, x_k), f^{\times k}\right)$, y

$$(w_1, w_2, \dots, w_k) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k.$$

Por lo tanto, $o^- \left((x_1, x_2, \dots, x_k), f^{\times k}\right)$ es un subconjunto denso de X^k. □

Corolario 29. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Entonces $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva si y sólo si $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de las Proposiciones 25 y 28. □

Al analizar la propiedad dinámica de fuertemente transitiva en productos cartesianos, $f^{\times n}$, $f^{\times m}$ $n \neq m$, obtuvimos el Teorema 30.

Teorema 30. *Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $k < m$. Si $f^{\times m} : X^m \to X^m$ es fuertemente transitiva, entonces $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva.*

Demostración. Supongamos que $f^{\times m} : X^m \to X^m$ es fuertemente transitiva y $k < m$.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$. Veamos que $o^-(\mathbf{x}, f^{\times k})$ es un subconjunto denso de X^k. Sean $U_1, U_2, \dots, U_k$, subconjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces

$$W = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \times X^{m-k}$$

es un subconjunto abierto no vacío de X^m.

Sea $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_k, \dots, x_k) \in X^m$. Como $f^{\times m}$ es fuertemente transitiva, existen $n \in \mathbb{N}$, y un punto

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m) \in W,$$

tales que para cada i, con $1 \leq i \leq k$, se tiene que $f^n(z_i) = x_i$. Tenemos que

$$o^-(\mathbf{x}, f^{\times k}) \cap (U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k) \neq \emptyset.$$

Esto nos dice que la semiórbita $o^-(\mathbf{x}, f^{\times k})$ es un subconjunto denso en X^k.

Por lo tanto, $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva. □

Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos. Se dice que (X, f) y (Y, g) son *equivalentes*, si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para cada $x \in X$, $g(h(x)) = h(f(x))$. Es fácil demostrar que si (X, f) y (Y, g) son equivalentes, entonces f es fuertemente transitiva si y sólo si g es fuertemente transitiva.

Sea $h : X \to F_1(X)$ dada por $h(x) = \{x\}$. No es difícil demostrar que h es un homeomorfismo con la siguiente propiedad: Para cada $x \in X$, $f_1(h(x)) = h(f(x))$. Por lo tanto, (X, f) y $(F_1(X), f_1)$ son sistemas equivalentes.

Al analizar la propiedad dinámica de fuertemente transitiva en productos simétricos obtuvimos el Teorema 31.

Teorema 31. *Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $k < m$. Si $f_m : F_m(X) \to F_m(X)$ es fuertemente transitiva, entonces $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva. En particular, si $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$ es fuertemente transitiva, entonces $f : X \to X$ es fuertemente transitiva.*

Demostración. Supongamos que f_m es fuertemente transitiva. Por el Corolario 29, $f^{\times m}$ es fuertemente transitiva. Por el Teorema 30, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva. Finalmente, por el Corolario 29, f_k es fuertemente transitiva.

Si para alguna $n \in \mathbb{N}$, f_n es fuertemente transitiva, entonces f_1 es fuertemente transitiva. Se sigue que f es fuertemente transitiva. □

En el Capítulo 1 observamos que las siguientes implicaciones son ciertas.

$$LES \implies Mezclante \implies Débilmente\ \ Mezclante \implies Transitivo.$$

También en el Capítulo 1 mencionamos que las implicaciones recíprocas dadas anteriormente no se cumplen.

El Teorema 32, demostrado en [**12**, Teorema 4.5, pág. 390], nos habla de estas propiedades en los productos simétricos.

Teorema 32. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *El sistema (X, f) es débilmente mezclante.*
- *El sistema $(F_n(X), f_n)$ es débilmente mezclante para toda $n \in \mathbb{N}$.*
- *El sistema $(F_n(X), f_n)$ es transitivo para toda $n \in \mathbb{N}$.*
- *El sistema $(F_n(X), f_n)$ es débilmente mezclante para algún $n \geq 2$.*
- *El sistema $(F_n(X), f_n)$ es transitivo para algún $n \geq 2$.*

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. En el Ejemplo 33 mostramos que la condición de que $f : X \to X$ sea fuertemente transitiva, no implica que la función inducida $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$ sea fuertemente transitiva.

Ejemplo 33. Sea $f_\theta : S^1 \to S^1$ una rotación de ángulo irracional con respecto a 2π definida sobre el circulo unitario S^1. No es difícil demostrar que f_θ es fuertemente transitiva pero no es débilmente mezclante. Por el Teorema 32, para cada $n \geq 2$, la función inducida $(f_\theta)_n : F_n(S^1) \to F_n(S^1)$ no es transitiva. Por lo tanto $(f_\theta)_n$ no es fuertemente transitiva.

Notemos lo siguiente: Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$ es fuertemente transitiva, entonces es transitiva, y por el Teorema 32 es débilmente mezclante. Por lo tanto, fuertemente transitivo implica débilmente mezclante en los sistemas inducidos en productos simétricos, $(F_n(X), f_n)$. El Ejemplo 34 muestra que el recíproco de esta implicación no es válido.

Ejemplo 34. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua, lineal a pedazos, definida como sigue: para cada $z \in \mathbb{Z}$,

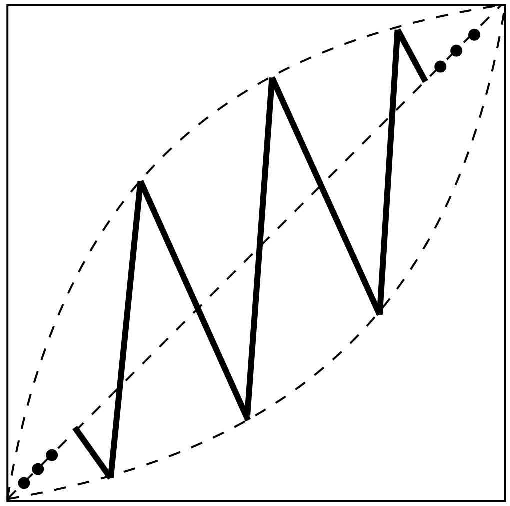
$$g(z) = \begin{cases} z+2, & \text{si } z \text{ es par.} \\ z-2, & \text{si } z \text{ es impar.} \end{cases}$$

Sea $h : \mathbb{R} \to (0,1)$, dado por $h(x) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan(x)\right) + \frac{1}{2}$. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0. \\ 1, & \text{si } t = 1. \\ h \circ g \circ h^{-1}(t), & \text{si } t \neq 0 \text{ y } t \neq 1. \end{cases}$$

No es difícil ver que $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua y mezclante. Por lo tanto f es débilmente mezclante. Como $o^-(0, f) = \{0\}$, entonces f no es fuertemente transitiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. De los Teoremas 31 y 32 se sigue que la función inducida $f_n : F_n([0,1]) \to F_n([0,1])$ es débilmente mezclante y no es fuertemente transitiva. Este ejemplo es similar al dado en el punto 5 de [**2**, Proposición 2.36, págs. 246-247].

La función $f : [0,1] \to [0,1]$ que aparece en el Ejemplo 34 tiene aproximadamente la siguiente gráfica.



2.2. Subshifts y la propiedad de transitividad fuerte

En esta sección $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Sean $A = \{0, 1\}$ y $\Sigma_2 = \prod_{i=1}^{\infty}\{0, 1\}$ el producto infinito del espacio $\{0, 1\}$. Al espacio $\{0, 1\}$ le damos la topología discreta y a Σ_2 le damos la topología producto. Escribimos los elementos de Σ_2 en la forma $\mathbf{x} = x_1x_2x_3\ldots$ Para cada $i \in \mathbb{N}$, x_i es la *iésima coordenada* de $\mathbf{x}$.

Definición 35. Una *palabra* $w = w_1w_2\ldots w_k$ es una sucesión finita donde cada $w_i \in \{0, 1\}$. La *longitud* de w se denota por $|w| = k$. Sea $\mathbf{x} \in \Sigma_2$. Decimos que w *está presente* en $\mathbf{x}$ si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$w_1w_2\ldots w_k = x_ix_{i+1}\ldots x_{i+k-1}.$$

Dada una palabra $w_1w_2\ldots w_k$, el *cilindro* definido por $w_1w_2\ldots w_k$ es el subconjunto de Σ_2:

$$[w_1w_2\ldots w_k] = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2 : \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, k\},\ x_i = w_i\}.$$

Se sabe que la colección de todos los cilindros, $[w_1w_2\ldots w_k]$, forma una base para el espacio Σ_2, que coincide con la topología producto de Σ_2 (ver [6, págs. 2-3]).

Sea $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, la función definida como:

$$\text{para toda } \mathbf{x} = x_1x_2\ldots \in \Sigma_2,\ \sigma(x_1x_2\ldots) = x_2x_3\ldots$$

Esta función es continua. Se le llama *función shift.*

Definición 36. Un subshift es un sistema dinámico discreto (A, σ_A) donde A es un subconjunto cerrado de Σ_2 e invariante bajo σ. Denotamos con $\sigma_A : A \to A$ a la función shift restringida a A, $\sigma|_A = \sigma_A$.

Sea (A, σ_A) un subshift. Al conjunto de todas la palabras que aparecen en algún elemento de A junto con la palabra vacía se le llama *el lenguaje de* A. Lo denotamos como $L(A)$.

Definición 37. Sean $w = w_1 w_2 \dots w_l$, $u = u_1 u_2 \dots u_k$ palabras de Σ_2, $\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \dots$ un elemento de Σ_2 y $n \geq 0$. Entonces:

i) La concatenación de las palabras u y w es la palabra

$$uw = u_1 u_2 \dots u_k w_1 w_2 \dots w_l.$$

ii) Si $n = 0$, denotaremos como $w^0 = e$ a la palabra vacía.

iii) Si $n \geq 1$, entonces $w^n = \underbrace{w \cdots w}_{n \text{ veces}}$, es decir, w concatenada con sí misma n veces.

iv) Con w^∞ denotamos al elemento de Σ_2 que obtenemos al concatenar la palabra w consigo misma una cantidad infinita de veces.

v) uw^∞ es el elemento de Σ_2 que consiste de u concatenado con w una infinidad de veces.

vi) La sucesión $w\mathbf{x}$ es el elemento de Σ_2 que consiste de concatenar w con $\mathbf{x}$. Es decir, $w\mathbf{x} = w_1 w_2 \dots w_l x_1 x_2 x_3 \dots$

Observación 38. Sean (A, σ_A) un subshift y $u \in L(A)$ con $u = u_1 u_2 \dots u_k$. Como A es invariante bajo σ, tenemos que $[u_1 u_2 \dots u_k] \cap A \neq \emptyset$.

En [2, Teorema 2.26, págs. 239-241] se demuestran las siguientes dos proposiciones, estas nos dan equivalencias de las propiedades de transitividad fuerte y LES en los subshifts. Estas herramientas nos permitirán caracterizar a las funciones fuertemente transitivas para los subshift tipo gap. Con la equivalencia de LES podremos dar condiciones necesarias para que un subshift tipo gap sea LES.

Proposición 39. *Sea (A, σ_A) un subshift. (A, σ_A) es fuertemente transitivo, si y sólo si para toda $\boldsymbol{x} \in A$ y para toda palabra $w \in L(A)$, $w \neq e$, existe una palabra $u \in L(A)$ tal que $wu\boldsymbol{x} \in A$.*

Proposición 40. *Sea A un subshift. (A, σ_A) es LES si y sólo si para toda palabra $u \in L(A), u \neq e$, existe $l \in \mathbb{N}_0$ tal que para toda $\boldsymbol{x} \in A$, existe una palabra $w \in L(A)$ con $|w| = l$ tal que $uw\boldsymbol{x} \in A$.*

A continuación definiremos a los subshifts tipo gap, para esto seguiremos la siguiente idea: Dado un subconjunto no vacío P de $\mathbb{N}_0$, un punto $x = x_1 x_2 \dots$ de Σ_2 está en G_P si cumple que para cualesquiera $i < j$ con x_i y x_j iguales a 1 y $x_i x_{i+1} \dots x_j = 10^k 1$, entonces $k \in P$. Es decir, el número de ceros entre dos unos consecutivos tiene que estar en P. Usamos el subconjunto $P \subseteq \mathbb{N}$ para restringir el número de ceros entre dos unos consecutivos en cada uno de los elementos de G_P.

Por ejemplo, si $P = \emptyset$ entonces el subshift tipo gap inducido por P está dado por $G_P = \{0^\infty, 0^k10^\infty : k \in \mathbb{N}_0\}$. Veamos la definición formal.

Definición 41. Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y $G_P = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2 :$ si $x_i = x_j = 1$ *y* $x_i x_{i+1} \dots x_j = 10^k1,$ para algún $k \geq 0,$ entonces $k \in P\}$.

Dado $P \subseteq \mathbb{N}_0$, es fácil ver que el subconjunto $G_P \subseteq \Sigma_2$ es no vacío, cerrado e invariante bajo la función shift, $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. El sistema (G_p, g_p) es llamado *subshift tipo gap.*

La definición de subshift tipo gap es mencionada en [**6**, págs. 11-13].

El Ejemplo 42, se menciona en [**1**, Ejemplo 6.2, pág. 2052], y ahí se argumenta que es un sistema fuertemente transitivo.

Ejemplo 42. Sea $P = \{n \in \mathbb{N} : n = 3^k, k \in \mathbb{N}\}$. El conjunto G_P es la cerradura en Σ_2 de los puntos de la forma

$$\mathbf{x} = 0^k 10^{3^{n_1}} 10^{3^{n_2}} 10^{3^{n_3}} 1 \dots 10^{3^{n_m}} 10^\infty$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ y para toda $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ se tiene que $n_i \in \mathbb{N}$.

La propiedad de ser fuertemente transitiva tiene una caracterización interesante en los subshifts tipo gap. La veremos a continuación.

Proposición 43. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}_0$ con $P \neq \emptyset$. Sea G_P el subshift tipo gap dado por P. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) (G_P, g_P) *es transitivo.*

ii) P *es infinito.*

iii) (G_P, g_P) *es fuertemente transitivo.*

Demostración. *i)* $\implies$ *ii)*

Supongamos que (G_P, g_P) es transitivo. Sea $k \in P$. Como $1 \in L(G_P)$ y $0^{k+1}10^\infty \in G_P$, tenemos que $[1] \cap G_P$ y $[0^{k+1}1] \cap G_P$ son subconjuntos abiertos no vacíos en G_P. Luego existen $u \in L(G_P)$ y $x \in G_P$ tales que

$$1u0^{k+1}1x \in G_P.$$

Puedes pasar que la palabra u sea de la forma $u = 0^{|u|}$ o que sea de la forma

$$u = 0^l 10^t, \text{ con } 0 \leq l, t \leq |u| - 1 \text{ y } l + t = |u| - 1.$$

En ambos casos se deduce que existe $j \in \{0, 1, 2, \dots, |u|\}$, tal que $k + 1 + j \in P$. Observa que $k < k + 1 + j$. Por lo tanto P es infinito.

ii) $\implies$ *iii)*

Supongamos que P es infinito.

Sean $\mathbf{x} \in G_P$ con $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots$, y $w \in L(G_P)$ donde $w = w_1w_2\ldots w_k$.

Si sucede que $\mathbf{x} = 0^\infty$, o sucede que $w = 0^k$, entonces $w\mathbf{x} \in G_P$.

Por lo tanto $[w_1w_2\ldots w_k] \cap o^-(\mathbf{x}, g_P) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que $\mathbf{x} \neq 0^\infty$, y $w \neq 0^k$.

Sean $i = \max\{n \in \mathbb{N} : w_n = 1\}$, y $j = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\}$. Como P es infinito, existe $l \in P$ tal que $l > (k-i)+(j-1)$. Sea $t = l-(k-i)-(j-1)$. Entonces

$$\mathbf{y} = w_1w_2\ldots w_i0^lx_jx_{j+1\ldots} = w0^t\mathbf{x} \in G_P.$$

Luego $\mathbf{y} \in [w_1w_2\ldots w_k] \cap G_P$, y $(g_P)^{l+i-j+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Por lo tanto (G_P, g_P) es fuertemente transitivo.

La implicación $iii) \implies i)$ es inmediata. □

El siguiente lema nos ayudará a demostrar la Proposición 46.

Lema 44. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y G_P el subshift inducido por P. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G_P$ con $\boldsymbol{x} = x_1x_2\ldots$ y $\boldsymbol{y} = y_1y_2\ldots$ Entonces*

i) Para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_1x_2\ldots x_m0^\infty \in G_P$.

ii) Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = y_m = 1$, entonces

$$x_1x_2\ldots x_my_{m+1}y_{m+2}\ldots \in G_P.$$

Demostración. Ambos incisos se siguen de la definición de G_P. □

Observación 45. La función dada en el Ejemplo 34 induce un sistema $(F_2([0,1]), f_2)$ que es transitivo, pero no es fuertemente transitivo. Notemos que esta función también cumple que el sistema $([0,1]^2, f^{\times 2})$ es transitivo, pero no es fuertemente transitivo.

En las funciones inducidas al producto cartesiano $(G_P)^2 = G_P \times G_P$ de un subshift tipo gap, (G_P, g_P), se tiene que las condiciones de ser fuertemente transitivo y transitivo son equivalentes. Eso nos muestra la siguiente proposición.

Proposición 46. *Sea (G_P, g_P) un subshift tipo gap con $P \subseteq \mathbb{N}_0$, $P \neq \emptyset$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

i) $(g_P)^{\times 2} : (G_P)^2 \to (G_P)^2$ es transitiva.

ii) $(g_P)^{\times 2} : (G_P)^2 \to (G_P)^2$ es fuertemente transitiva.

Demostración. La implicación $ii) \implies i)$ es inmediata.

Mostremos que $i \implies ii)$.

Sean $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G_P \times G_P$ con $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots$, $\mathbf{y} = y_1y_2\ldots$, y $u, v \in L(G_P)$, con $|u| = s$, $|v| = t$ y $s, t \in \mathbb{N}$.

Veamos que $o^{-}((\mathbf{x},\mathbf{y}),(g_P)^{\times 2})\cap\big(([u]\times[v])\cap(G_P)^2\big)\neq\emptyset$.

Caso 1. Supongamos que $\mathbf{x}\neq 0^\infty$, y $\mathbf{y}\neq 0^\infty$.

Sean $i=\min\{n\in\mathbb{N}: x_n=1\}$ y $j=\min\{n\in\mathbb{N}: y_n=1\}$.

Observemos que

$$([u]\times[v])\cap(G_P)^2 \text{ y } ([x_1x_2\dots x_i]\times[y_1y_2\dots y_j])\cap(G_P)^2$$

son subconjuntos abiertos y no vacíos de $(G_P)^2$. Como $(g_P)^{\times 2}$ es transitiva, por la Proposición 4, existen

$$(\alpha,\beta)\in([u]\times[v])\cap(G_P)^2$$

y $N\in\mathbb{N}$, con $N>\max\{|u|,|v|\}$, tales que

$$((g_P)^{\times 2})^N(\alpha,\beta)\in([x_1x_2\dots x_i]\times[y_1y_2\dots y_j])\cap(G_P)^2.$$

Por lo tanto

$$\alpha=u_1\dots u_s\alpha_{s+1}\dots\alpha_N x_1\dots x_i\alpha_{N+i+1}\alpha_{N+i+2}\dots$$

y

$$\beta=v_1\dots v_t\beta_{t+1}\dots\beta_N y_1\dots y_j\beta_{N+j+1}\beta_{N+j+2}\dots$$

Esto es, $\alpha=u\alpha_{s+1}\dots\alpha_N x_1\dots x_i\alpha_{N+i+1}\alpha_{N+i+2}\dots$ y $\beta=v\beta_{t+1}\dots\beta_N y_1\dots y_j\beta_{N+j+1}\beta_{N+j+2}\dots$

Sean $\lambda=u\alpha_{s+1}\dots\alpha_N\mathbf{x}$ y $\eta=v\beta_{t+1}\dots\beta_N\mathbf{y}$.

Como $x_i=1$, y $y_j=1$, se sigue por el Lema 44 que $\lambda,\eta\in G_P$. Por lo tanto

$$(\lambda,\eta)\in([u]\times[v])\cap(G_P)^2, \text{ y } ((g_P)^{\times 2})^N(\lambda,\eta)=(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Caso 2. Supongamos que $\mathbf{x}\neq 0^\infty$, y $\mathbf{y}=0^\infty$.

Sea $i=\min\{n\in\mathbb{N}: x_n=1\}$. Como $(g_P)^{\times 2}$ es transitiva, existen $N\in\mathbb{N}$ con $N>\max\{|u|,|v|\}$ y $(\alpha,\beta)\in([u]\times[v])\cap(G_P)^2$ tales que

$$\big((g_P)^{\times 2}\big)^N(\alpha,\beta)\in\big([x_1x_2\dots x_i]\times[0^i]\big)\cap(G_P)^2.$$

A partir de aquí la prueba continúa como en el *Caso 1.*

Caso 3. Supongamos que $\mathbf{x}=0^\infty$ y $y\neq 0^\infty$. El argumento es similar al dado en el Caso 2.

Caso 4. Supongamos que $\mathbf{x}=0^\infty$ y $\mathbf{y}=0^\infty$.

Sean $\lambda=u0^\infty$ y $\eta=v0^\infty$.

Entonces $(\lambda,\eta)\in([u]\times[v])\cap(G_P)^2$, y $(\lambda,\eta)\in o^{-}((\mathbf{x},\mathbf{y}),(g_P)^{\times 2})$. □

Recordemos algunas definiciones que nos serán utiles.

Definición 47. Sea $P\subseteq\mathbb{N}_0$.

- Decimos que P es *grueso* si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $N \in P$ tal que los números $N, N+1, N+2, \dots, N+n$ están en P.
- Decimos que P es *sindético* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $\{k, k+1, \dots, k+N\} \cap P \neq \emptyset$.

Sea $P \subseteq \mathbb{N}_0$. Si P es grueso o sindético, entonces P es infinito. De acuerdo a la Proposición 43, en estos casos, el sistema inducido (G_P, g_P) es fuertemente transitivo.

Usando los conjuntos gruesos podemos generar ejemplos de funciones débilmente mezclantes.

Proposición 48. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y G_P el subshift tipo gap inducido por P. Si P es grueso, entonces G_P es débilmente mezclante.*

Demostración. Por la Proposición 7 basta demostrar que dadas tres palabras u, v, w en $L(G_P)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

(1) $(g_P)^N([u] \cap G_P) \cap ([v] \cap G_P) \neq \emptyset$ y $(g_P)^N([u] \cap G_P) \cap ([w] \cap G_P) \neq \emptyset$.

Sean $u = u_1u_2\dots u_k$, $v = v_1v_2\dots v_l$ y $w = w_1w_2\dots w_m$ tres palabras en $L(G_P)$. A continuación mostramos, por medio de tres casos, que se cumple la Ecuación (1).

Caso 1. Si $u = 0^k$, entonces ambos uv y uw están en $L(G_P)$.

Caso 2. Supongamos que $u \neq 0^k$, $v \neq 0^l$ y $w = 0^m$. Como P es infinito, por la Proposición 43, (G_P, g_P) es transitivo. Por lo tanto, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $u0^tv$ y $u0^tw = u0^t0^m$ están en $L(G_P)$.

Caso 3. Supongamos que $u \neq 0^k$, $v \neq 0^l$ y $w \neq 0^m$. Sean $q = \max\{n \in \mathbb{N} : u_n = 1\}$, $r = \min\{n \in \mathbb{N} : v_n = 1\}$ y $s = \min\{n \in \mathbb{N} : w_n = 1\}$. Sea

$$N = \max\{(k-q) + (r-1),\ (k-q) + (s-1)\}.$$

Como P es grueso, existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $\{T, T+1, T+2, \dots, T+N\} \subseteq P$. Se sigue que,

$$T + (k-q) + (r-1) \in P, \text{ y } T + (k-q) + (s-1) \in P.$$

Entonces

$$u_1 \dots u_q 0^{k-q} 0^T 0^{r-1} v_r \dots v_l \in L(G_P).$$

y

$$u_1 \dots u_q 0^{k-q} 0^T 0^{s-1} w_s \dots w_m \in L(G_P).$$

Por lo tanto $u0^Tv$ y $u0^Tw$ están en $L(G_P)$.

El caso cuando $u \neq 0^k$, $v = 0^l$ y $w \neq 0^m$ es análogo al Caso 2.

El caso cuando $u \neq 0^k$, $v = 0^l$ y $w = 0^m$ es inmediato. □

El recíproco de la Proposición 48 es discutido después de la Proposición 51, en el Ejemplo 52.

Proposición 49. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}_0$ con $P \neq \emptyset$. Si el subshift (G_P, g_P) es LES, entonces P es sindético.*

Demostración. Supongamos que el sistema (G_P, g_P) es LES. Como $[1] \cap G_P$ es un subconjunto abierto no vacío de G_P, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(g_P)^N ([1] \cap G_P) = G_P.$$

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Como $\mathbf{x} = 0^k 10^\infty \in G_P$, existe $v \in L(G_P)$, $|v| = N - 1$, tal que $1v0^k 10^\infty \in G_P$. Por lo tanto, $\{k, k+1, k+2, \ldots, k+N-1\} \cap P \neq \emptyset$. $\square$

La Proposición 51 y el Ejemplo 53 muestran que la implicación recíproca de la Proposición 49 no es válida.

En el año 2017 E. Akin, J. Auslander y A. Nagar demostraron en [**1**, Teorema 6.3, págs. 2052-2053] que en un sistema dinámico (X, f) las siguientes condiciones son equivalentes:

- $f : X \to X$ es LES.
- $2^f : 2^X \to 2^X$ es LES.
- $2^f : 2^X \to 2^X$ es fuertemente transitiva.

El Ejemplo 50 muestra que para los sistemas inducidos $(F_2(X), f_2)$ la situación es diferente.

Ejemplo 50. Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$,

$$P = \{10^n, 10^n + 1, 10^n + 2, \ldots, 10^n + n : n \in \mathbb{N}\},$$

y (G_P, g_P) el subshift tipo gap inducido por P. Entonces $(g_P)_2 : F_2(G_P) \to F_2(G_P)$ es fuertemente transitiva, pero no es LES.

Demostración. Primero notemos que P es grueso, luego por la Proposición 48, el sistema (G_P, g_P) es débilmente mezclante. Entonces

$$(g_P)^{\times 2} : G_P \times G_P \to G_P \times G_P$$

es transitiva. Luego por la Proposición 46, $(g_P)_2 : F_2(G_P) \to F_2(G_P)$ es fuertemente transitiva.

Notemos que P no es un conjunto sindético. Por la Proposición 49, el sistema (G_P, g_P) no es LES. Finalmente, por el Teorema 23, $(g_P)_2$ no es LES. $\square$

2.3. Subshifts tipo gap y la propiedad de ser mezclante

Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y (G_P, g_P) el subshift inducido por P. Definimos

$R_P = \{n \in \mathbb{N} :$ existe $w \in L(G_P)$ tal que $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ y $w_1 = w_n = 1\}$.

Proposición 51. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y (G_P, g_P) el subshift inducido por P. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) El sistema (G_P, g_P) es mezclante.

ii) El conjunto P es infinito y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > N$, existe una palabra $u \in L(G_P)$, $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, tal que $u_1 = u_n = 1$. Es decir, R_P es un subconjunto cofinito de $\mathbb{N}$.

Demostración. $i) \implies ii)$.

Supongamos que (G_P, g_P) es mezclante. Entonces (G_P, g_P) es transitivo. Por la Proposición 43, P es infinito.

Ahora $[1] \cap G_P$ es un subconjunto abierto y no vacío de G_P. Como (G_P, g_P) es mezclante, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq M$,

$$(g_P)^n([1] \cap G_P) \cap ([1] \cap G_P) \neq \emptyset.$$

Se sigue que, para cada $n \geq M$, existe $v \in L(G_P)$, con $|v| = n - 1$, tal que $1v1 \in L(G_P)$, y $|1v1| = n + 1$. Por lo tanto, para cada $n \geq M + 1$, existe $u \in L(G_P)$ tal que $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ con $u_1 = u_n = 1$. Tomando $N = M + 1$ se concluye la demostración.

$ii) \implies i)$.

Sean $u, v \in L(G_P)$ con $u = u_1 u_2 \ldots u_l$, $v = v_1 v_2 \ldots v_k$, $l, k \in \mathbb{N}$.

Caso 1. Supongamos que $u = 0^l$ o $v = 0^k$. Entonces para cada $m \geq 0$, $u0^m v \in L(G_P)$; por lo tanto

$$(g_P)^{l+m}([u] \cap G_P) \cap ([v] \cap G_P) \neq \emptyset.$$

Caso 2. Supongamos que $u \neq 0^l$ y $v \neq 0^k$.

Sean $i = \text{máx}\{r : u_r = 1\}$ y $j = \text{mín}\{r : v_r = 1\}$. Sean $M \in P$ tal que $M > \text{máx}\{l - i, j - 1\}$, y $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ existe $w \in L(G_P)$, $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ con $w_1 = w_n = 1$. Ahora consideraremos la palabra

$$u_1 \ldots u_i 0^M w 0^M v_j \ldots v_k = u 0^{M-(l-i)} w 0^{M-(j-1)} v.$$

Notemos que $u_1 \ldots u_i 0^M w 0^M v_j \ldots v_k$ es un elemento de G_P.

Sea $m = l + M - (l - i) + n + M - (j - 1) = 2M + i + n - (j - 1)$. Entonces

$$(g_P)^m([u] \cap G_P) \cap ([v] \cap G_P) \neq \emptyset.$$

Se sigue que para cada $m \geq 2M + i + N - (j - 1)$, la intersección de $(g_P)^m([u] \cap G_P)$ y $([v] \cap G_P)$ es no vacía.

Por lo tanto, el sistema (G_P, g_P) es mezclante. $\square$

Ejemplo 52. Sean $P = \{10^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{11\}$ y (G_P, g_P) el subshift tipo gap inducido por P. Entonces el sistema (G_P, g_P) es mezclante.

Demostración. De acuerdo a la Proposición 51 es suficiente demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: Para cada $n \geq N$, existe $w \in L(G_P),\ w = w_1 w_2 \ldots w_n$, con $w_1 = w_n = 1$.

Sean $l \in \mathbb{N}$ con $l \geq 11$, e $i \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq i \leq 10$. Considera la palabra

$$v_{(i,l)} = (10^{11})^i (10^{10})^{l-i} 1.$$

La palabra 10^{11} es la misma que $100\ldots0$ es decir, uno seguido de 11 ceros y la palabra $(10^{11})^i$ es $10^{11}10^{11}\ldots10^{11}$ es decir, concatenamos i veces la palabra 10^{11}. De esta misma manera se explica el significado de la palabra $(10^{10})^{l-i}$.

Notemos que $v_{(i,l)} \in L(G_P,)$ y

$$|v_{(i,l)}| = i(11+1) + (l-i)(11) + 1 = i + l(11) + 1.$$

Por el algoritmo de la división para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 122$, existen $l \geq 11$ e $i \in \mathbb{N}$, con $0 \leq i \leq 10$ tales que $n = i + l(11) + 1$. Por lo tanto para cada $n \geq 122$, existe una palabra $w \in L(G_P,)\ w = w_1 w_2 \ldots w_n$, con $w_1 = w_n = 1$. $\square$

El sistema dado en el Ejemplo 52 es mezclante, por lo tanto es débilmente mezclante. Notemos que el conjunto P no es grueso. Este ejemplo muestra que la implicación recíproca de la Proposición 48 no es válida.

El siguiente ejemplo muestra que la implicación recíproca de la Proposición 49 no es válida.

Ejemplo 53. Sean $P = \{n = 3k - 1 : k \in \mathbb{N}\} = \{2, 5, 8, \ldots\}$ y (G_P, g_P) el subshift tipo gap inducido por P. Entonces P es un conjunto sindético y el sistema (G_P, g_P) no es mezclante, por lo tanto, no es LES.

Demostración. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{n, n+1, n+2\} \cap P \neq \emptyset$. Por lo tanto P es un conjunto sindético.

Sean $n \in R_P$ y $w \in L(G_P),\ w = w_1 w_2 \ldots w_n$ tales que $w_1 = w_n = 1$.

Notemos que

$$w = 10^{3k_1 - 1} 10^{3k_2 - 1} \ldots 10^{3k_l - 1} 1.$$

Entonces $n = |w| = 3k_1 + 3k_2 + \cdots + 3k_l + 1 = 3(k_1 + k_2 + \cdots + k_l) + 1$. Se sigue que $R_P \subseteq \{n = 3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces R_P no es un subconjunto cofinito en $\mathbb{N}$. Por la Proposición 51, (G_P, g_P) no es un sistema mezclante. $\square$

Los Ejemplos 52 y 53 muestran que no hay conexión entre estas dos propiedades:

i) El sistema (G_P, g_P) es mezclante.

ii) El conjunto P es sindético.

El Ejemplo 52 dice que *i*) no implica *ii*), el Ejemplo 53 dice que *ii*) no implica *i*).

Con el Lema 54 y la Proposición 55 mostraremos que en los subshifts tipo gap, las propiedades de mezclante y débilmente mezclante son equivalentes.

Lema 54. *Sea P un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface las siguientes dos condiciones:*

- *Para cada par $n, m \in P, n+m-1 \in P$.*
- *Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n, n+1 \in P$.*

Entonces P es un subconjunto cofinito en $\mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in P$ tal que $n+1 \in P$. Entonces

$$\{n+n-1, (n+1)+n-1, (n+1)+(n+1)-1\} \subseteq P.$$

Así, $2n-1, 2n$ y $2n+1$ son elementos de P. Con estos números, y usando las dos propiedades, obtenemos que

$$\{(2n-1)+n-1,\ (2n)+n-1,\ (2n+1)+n-1,\ (2n+1)+(n+1)-1\} \subseteq P.$$

Luego, $3n-2,\ 3n-1, 3n$ y $3n+1$ están en P.

Siguiendo este argumento y usando inducción matemática obtenemos que para cada $k \geq 2$,

$$\{kn-(k-1), kn-(k-2), kn-(k-3), \ldots, kn, kn+1\} \subseteq P. \tag{2}$$

Haciendo $k = n+1$, y usando la ecuación (2), obtenemos que

$$\{n^2, n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+n+1\} \subseteq P.$$

Para $k = n+2$ obtenemos que

$$\{n^2+n-1, n^2+n, n^2+n+1, n^2+n+2, \ldots, n^2+2n+1\} \subseteq P.$$

Lo cual implica que

$$\{n^2+n, n^2+n+1, \ldots, n^2+2n+1\} \subseteq P.$$

Para $k = n+3$, y usando la ecuación (2), obtenemos que

$$\{n^2+2n-2, n^2+2n-1, n^2+2n, n^2+2n+1, \ldots, n^2+3n+1\} \subseteq P.$$

Se sigue que

$$\{n^2+2n, n^2+2n+1, n^2+2n+2, \ldots, n^2+3n+1\} \subseteq P.$$

En general para $k = n+l$, con $l \in \mathbb{N}$, y usando la ecuación (2) obtenemos que

$$\{n^2 + (l-1)n - (l-1), n^2 + (l-1)n - (l-1) + 1, \ldots, n^2 + ln + 1\} \subseteq P.$$

Lo cual implica que

$$\{n^2 + (l-1)n, n^2 + (l-1)n + 1, n^2 + (l-1)n + 2, \ldots, n^2 + ln + 1\} \subseteq P.$$

Por lo tanto $\{m \in \mathbb{N} : m \geq n^2\} \subseteq P$. □

Proposición 55. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$ y (G_P, g_P) el subshift tipo gap inducido por P. Entonces el sistema (G_P, g_P) es mezclante si y sólo si es débilmente mezclante.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si (G_P, g_P) es débilmente mezclante, entonces es mezclante.

Paso 1. Veamos que para cada $m, n \in R_P$, $m + n - 1 \in R_P$.

Sean $m, n \in R_P$, $u = u_1u_2 \ldots u_n$ y $v = v_1v_2 \ldots v_m$ dos palabras en $L(G_P)$ tales que $u_1 = u_n = 1$, y $v_1 = v_m = 1$.

Sea $w = u_1u_2 \ldots u_nv_2v_3 \ldots v_m$. Como $u_n = v_1 = 1$, entonces $w \in L(G_P.)$ Además se cumple que $w_1 = w_{m+n-1}$, por lo tanto $m + n - 1 \in R_P$.

Paso 2. Ahora veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k, k+1 \in R_P$.

Sean $u = 10$, $v = 1$ y $w = 01$. Los subconjuntos $[10] \cap G_P$, $[1] \cap G_P$ y $[01] \cap G_P$ de Σ_2 son no vacíos y abiertos.

Como (G_P, g_P) es débilmente mezclante, existen $k \in \mathbb{N}$, $r, s \in L(G_P)$ tales que $|ur| = |us| = k - 1$, y $urv \in L(G_P)$, $usw \in L(G_P)$.

Notemos que la primera y la última coordenada de urv y usv son iguales a 1. Además $|urv| = k$ y $|usw| = k + 1$.

Por lo tanto, $k, k+1 \in R_P$. Esto termina la prueba del Paso 2.

Ahora, por el Lema 54, el subconjunto R_P es cofinito en $\mathbb{N}$.

Paso 3. Como (G_P, g_P) es débilmente mezclante, entonces por la Proposición 43 el conjunto P es infinito. Finalmente, por la Proposición 51, (G_P, g_P) es mezclante. □

Observación 56. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es *fuertemente transitivo en productos,* (SPT), si para cada $k \in \mathbb{N}$ el sistema producto (X^k, f^k) es fuertemente transitivo, esta definición se da en [**2**, Definición 2.7, pág. 230]. Se sigue de la definición que si (X, f) es SPT, entonces es débilmente mezclante. En [**2**, pág. 248] los autores establecen la siguiente pregunta: ¿Fuertemente transitiva en productos implica mezclante? De acuerdo a la Proposición 55 en los subshift tipo gap débilmente mezclante y mezclante son equivalentes. Así, para los subshift tipo gap SPT implica mezclante.

2.4. Algunas observaciones

En la primera parte de esta sección usaremos un subshift tipo gap para resolver una pregunta planteada en [2, Observación 2.25, pág. 239].

En la segunda parte de esta sección mostraremos que si el sistema $(F_k(X), f_k)$ es fuertemente transitivo para $k \geq 2$. Entonces para cada $A \in F_k(X)$, la semiórbita negativa $o^-(A, 2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X.

Sean $U \subseteq X$ con $U \neq \emptyset$ y $x \in X$. Recordemos que

$$N(U, x) = \{n \in \mathbb{N} : x \in f^n(U)\} = \{n \in \mathbb{N} : f^{-n}(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

En [2, Observación 2.25, pág. 239] los autores notan lo siguiente: Es claro que si (X, f) es LES, entonces para todo subconjunto abierto no vacío U de X y para todo punto $x \in X$, $N(U, x)$ es cofinito en $\mathbb{N}$. No es claro que el recíproco de esta implicación se cumpla, incluso si f es una función abierta. El siguiente ejemplo nos muestra una función abierta, $f : X \to X$, que cumple que para todo subconjunto abierto no vacío U de X y para todo punto $x \in X$, $N(U, x)$ es cofinito en $\mathbb{N}$, pero que no es LES.

Ejemplo 57. Sean $P = \{10^n, 10^n + 1, \ldots, 10^n + n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 8\}$ y (G_P, g_P) el subshift tipo gap inducido por P. Entonces $g_P : G_P \to G_P$ es una función abierta, no es LES, pero para todo subconjunto abierto $U \subseteq \Sigma_2$, con $U \cap G_P \neq \emptyset$, y para todo $\mathbf{x} \in G_P$, se tiene que $N(U \cap G_P, \mathbf{x})$ es un conjunto cofinito.

Demostración. Es fácil ver que para toda palabra $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ de G_P se tiene que $g_P([w] \cap G_P) = [w_2 w_3 \ldots w_n] \cap G_P$. Lo cual implica que la función g_P es abierta. Como el conjunto P no es sindético, (G_P, g_P) no es LES.

Ahora, sean $U \subseteq \Sigma_2$ un subconjunto abierto con $U \cap G_P \neq \emptyset$ y $\mathbf{x} \in G_P$ con $\mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots$ Sea $u \in L(G_P)$ con $u = u_1 u_2 \ldots u_k$, tal que $[u] \subseteq U$.

Caso 1. Supongamos que $u = 0^k$. Como para cada $s \in \mathbb{N}_0, u0^s\mathbf{x} \in G_P$, entonces

$$\{n = k + s : s \in \mathbb{N}_0\} \subseteq N([u] \cap G_P, \mathbf{x}) \subseteq N(U \cap G_P, \mathbf{x}).$$

Por lo tanto $N(U \cap G_P, \mathbf{x})$ es cofinito.

Caso 2. Supongamos que $\mathbf{x} = 0^{\infty}$.

Similarmente como en el caso anterior, para cada $s \in \mathbb{N}_0$, $u0^s\mathbf{x} \in G_P$. Por lo tanto $N(U \cap G_P, \mathbf{x})$ es cofinito.

Caso 3. Supongamos que $u \neq 0^k$, y $\mathbf{x} \neq 0^{\infty}$.

Sean $i = \max\{n \in \mathbb{N} : u_n = 1\}$ y $j = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 4$, tal que $10^{m-1} > \text{máx}\{k-i, j-1\}$. Observemos que como $10^m \in P$, tenemos que

$$u_1 u_2 \dots u_i 0^{10^m} x_j x_{j+1} \dots \in G_P.$$

Sean $v, w \in L(G_P)$ tales que $v = 10^{10},\ w = 10^8 1, |v| = 11,\ |w| = 10$.

Para cada $s, t \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq s \leq 9$, sea

$$\mathbf{y}_{(s,t)} = u_1 u_2 \dots u_i 0^{10^{m-1}} (v)^s (w)^{8(10^{m-2})+t-s} 0^{10^{m-1}} x_j x_{j+1} \dots .$$

El exponente $8(10^{m-2})+t-s$ se refiere a que estoy concatenando $8(10^{m-2})+t-s$ veces la palabra w, es decir

$$\underbrace{ww \dots ww}_{8(10^{m-2})+t-s \text{ veces}}.$$

$\mathbf{y}_{(s,t)}$, se escribe también como:

$$\mathbf{y}_{(s,t)} = u_1 u_2 \dots u_i 0^{10^{m-1}} (10^{10})^s (10^8 1)^{8(10^{m-2})+t-s} 0^{10^{m-1}} x_j x_{j+1} \dots$$

La palabra $(10^8 1)^{8(10^{m-2})+t-s}$ se refiere a que estamos concatenando la palabra $10^8 1$ una cantidad $8(10^{m-2})+t-s$ de veces, es decir

$$(10^8 1)^{8(10^{m-2})+t-s} = \underbrace{10^8 1 10^8 1 \dots 10^8 1 10^8 1}_{8(10^{m-2})+t-s \text{ veces}}$$

Notemos lo siguiente:

- Para cada $0 \leq s \leq 9$, y para cada $t \in \mathbb{N}_0, \mathbf{y}_{(s,t)} \in [u] \cap G_P$.
- La longitud de la palabra $(10^{10})^s (10^8 1)^{8(10^{m-2})+t-s}$ es
$$10s + s + 8(10)^{m-1} + 10t - 10s = 8(10)^{m-1} + 10t + s.$$
- $(g_P)^{10^m + 10t + s + i - (j-1)}(\mathbf{y}_{(s,t)}) = \mathbf{x}$.

Por el algoritmo de la división para cada número $n \in \mathbb{N}_0$, existe $t \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq s \leq 9$ tal que $n = 10t + s$. Por lo tanto

$$\{k = 10^m + i - (j-1) + n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq N([u] \cap G_P, \mathbf{x}).$$

Como

$$N([u] \cap G_P, \mathbf{x}) \subseteq N(U \cap G_P, \mathbf{x}),$$

entonces $N(U \cap G_P, \mathbf{x})$ es un conjunto cofinito. $\square$

Sean (X, f) un sistema dinámico y $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Nuestro objetivo en esta parte final es demostrar lo siguiente: Si la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva, entonces para cada $A \in F_k(X)$, la semiórbita negativa $o^-(A, 2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X.

Lema 58. *Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tal que la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$, con $n > N$, y existen k puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que para cada i, con $1 \leq i \leq k$, $x_i \in U_i$ y $f^n(x_i) = a_i$.*

Demostración. Sean $k \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ puntos de X, y $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Por la Proposición 28, $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es fuertemente transitiva. Considera el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in X^k$. Como $f^{\times k}$ es suprayectiva, existe un punto $(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in X^k$ tal que $(f^{\times k})^N(y_1, y_2, \ldots, y_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

La semiórbita negativa $o^-((y_1, y_2, \ldots, y_k), f^{\times k})$ es un subconjunto denso de X^k.

En consecuencia existe un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$ y existe $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k,$$

y $(f^{\times k})^m(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Por lo tanto, para cada $1 \leq i \leq k$, $x_i \in U_i$ y

$$f^{N+m}(x_i) = f^N(f^m(x_i)) = f^N(y_i) = a_i.$$

Tomando a n como $n = N + m$ se concluye la demostración. □

Proposición 59. *Sea $k \geq 2$. Tal que la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva. Entonces para cada $A \in F_k(X)$ la semiórbita negativa $o^-(A, f_{k+1})$ es un subconjunto denso de $F_{k+1}(X)$.*

Demostración. Sea $A \in F_k(X)$. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}$, subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Demostraremos que

$$o^-(A, f_{k+1}) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1} \rangle \neq \emptyset.$$

Por el Lema 27, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$W = int(f^N(U_k) \cap f^N(U_{k+1})) \neq \emptyset.$$

Notemos que cada elemento de la colección

$$F = \{U_1, U_2, \ldots, U_{k-1}, U_k \cap f^{-N}(W)\}$$

es un subconjunto no vacío y abierto en X. Por el Lema 58, existe $n > N$ y existen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, k puntos en X tales que para cada $1 \leq i \leq k-1$, $x_i \in U_i$, $x_k \in U_k \cap f^{-N}(W)$, y para cada $1 \leq i \leq k$, $f^n(x_i) = a_i$.

Como $f^N(x_k) \in W$, existe un punto $x_{k+1} \in U_{k+1}$ tal que $f^N(x_{k+1}) = f^N(x_k)$. Entonces

$$f^n(x_{k+1}) = f^{n-N}(f^N(x_{k+1})) = f^{n-N}(f^N(x_k)) = f^n(x_k) = a_k.$$

Por lo tanto, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}\rangle_{k+1}$, y

$(f_{k+1})^n (\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = A$.

Así $o^-(A, f_{k+1}) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}\rangle_{k+1} \neq \emptyset$. □

Lema 60. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, tal que la función inducida en el producto simétrico $F_k(X)$, $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$, es fuertemente transitiva. Sea $l \in \mathbb{N}$, con $l \geq k$, tal que para toda $A \in F_k(X)$, la semiórbita negativa $o^-(A, f_l)$ es un subconjunto denso de $F_l(X)$. Entonces se cumple la siguiente condición: Para toda colección $U_1, U_2, \ldots, U_l$, de l subconjuntos abiertos, no vacíos, de X, y para toda $A \in F_k(X)$, existen una sucesión estrictamente creciente $\{n_1, n_2, \ldots\}$ en $\mathbb{N}$, y una colección infinita $\{C_1, C_2, \ldots\} \subseteq F_l(X)$, tales que para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$C_j \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle_l \text{ y } (f_l)^{n_j}(C_j) = A.$$

Demostración. Sean $A \in F_k(X)$ y $U_1, U_2, \ldots, U_l$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como $o^-(A, f_l)$ es denso en $F_l(X)$, existe

$$C_1 \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle_l$$

y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(f_l)^{n_1}(C_1) = A$.

Sea $C = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq C_1$ tal que

$$\{f^{n_1}(y_1), f^{n_1}(y_2), \ldots, f^{n_1}(y_k)\} = A.$$

Por hipótesis, la semiórbita negativa $o^-(C, f_l)$ es un subconjunto denso de $F_l(X)$. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$, y $C_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\} \in F_l(X)$ tales que

$C_2 \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle_l$, y

$$(f_l)^m(C_2) = \{f^m(z_1), f^m(z_2), \ldots, f^m(z_l)\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\} = C.$$

Sea $n_2 = n_1 + m$. Entonces

$$(f_l)^{n_2}(C_2) = (f_l)^{n_1}((f_l)^m(C_2)) = (f_l)^{n_1}(C) = A.$$

De aquí la demostración se sigue por inducción matemática. □

Proposición 61. *Sea $k \geq 2$ tal que la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitiva. Sea $l \geq k$ tal que, para cada $A \in F_k(X)$, la semiórbita negativa $o^-(A, f_l)$ es un subconjunto denso de $F_l(X)$. Entonces para cada $A \in F_k(X)$, la semiórbita negativa $o^-(A, f_{l+1})$ es un subconjunto denso de $F_{l+1}(X)$.*

Demostración. Sean $A \in F_k(X)$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_l$, U_{l+1}, subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Por el Lema 27, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $W = int(f^N(U_l) \cap f^N(U_{l+1})) \neq \emptyset$.

El subconjunto $\left\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \cap f^{-N}(W) \right\rangle_l$ es no vacío y abierto en $F_l(X)$.

Como $o^-(A, f_l)$ es denso en $F_l(X)$, por el Lema 60, existen

$$B \in \left\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \cap f^{-N}(W) \right\rangle_l, \quad B = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\},$$

y $n > N$ tal que

$$\{f^n(x_1), f^n(x_2), \ldots, f^n(x_l)\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = A.$$

Renombrando los elementos de B, si es necesario, podemos suponer que $x_l \in U_l \cap f^{-N}(W)$. Por lo tanto, $f^N(x_l) \in W = int(f^N(U_l) \cap f^N(U_{l+1}))$.

Sea $x_{l+1} \in U_{l+1}$ tal que $f^N(x_{l+1}) = f^N(x_l)$. Se sigue que $f^n(x_{l+1}) = f^n(x_l)$.

En consecuencia, $\{f^n(x_1), \ldots, f^n(x_l), f^n(x_{l+1})\} = A$, y

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l, U_{l+1} \rangle_{l+1}.$$

Se sigue que $o^-(A, f_{l+1}) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_l, U_{l+1} \rangle_{l+1} \neq \emptyset$.

Por lo tanto, la semiórbita negativa $o^-(A, f_{l+1})$ es un subconjunto denso de $F_{l+1}(X)$. $\square$

Corolario 62. *Sea $k \geq 2$ tal que la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es fuertemente transitva. Entonces para cada $A \in F_k(X)$ la semiórbita negativa $o^-(A, 2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X.*

Demostración. *Paso 1.* Por la Proposición 61 e inducción matemática, tenemos el siguiente resultado: Para cada $A \in F_k(X)$ y para toda $l \geq k$, la semiórbita negativa $o^-(A, f_l)$ es un subconjunto denso de $F_l(X)$.

Paso 2. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_m$ con $m \geq k$, subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como la semiórbita $o^-(A, f_m)$ es un subconjunto denso de $F_m(X)$, existe $B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_m$ tal que $B \in o^-(A, f_m)$. Se sigue que

$$B \in o^-(A, 2^f) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle.$$

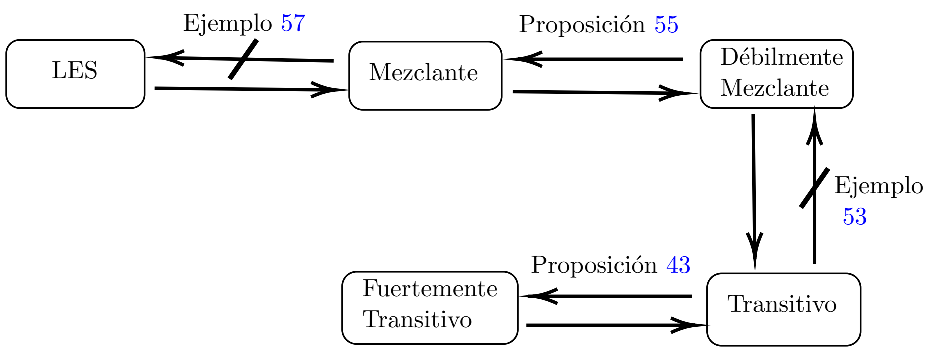
Así, $o^-(A, 2^f)$ es un subconjunto denso en el hiperespacio 2^X. $\square$

Dejamos la siguiente pregunta.

Pregunta 63. Sea $2 \leq k < m$. ¿Si el sistema inducido $(F_k(X), f_k)$ es fuertemente transitivo, entonces $(F_m(X), f_m)$ es fuertemente transitivo?

A continuación mostraremos un resumen, mediante un diagrama, donde mostramos las implicaciones y no implicaciones de las propiedades dinámicas que mencionamos en este capítulo con respecto a los subshifts tipo gap. Las implicaciones o no implicaciones que aparecen con el nombre de alguna proposición o ejemplo es porque son demostradas en esta tesis. Las implicaciones que no tienen nombre es porque se dan de forma general y sus demostraciones son inmediatas.

Finalmente, consideramos importante mencionar que los resultados que se colocaron en este capítulo, se encuentran publicados en el artículo [**19**].



Capítulo 3

Subshifts tipo spacing

En este capítulo trabajaremos con un tipo especial de subshifts, los llamados *subshift tipo spacing*.

En la primera sección nos concentraremos en las propiedades dinámicas de ser LES, mezclante, débilmente mezclante y fuertemente transitivo en este tipo especial de subhsifts. Demostraremos que en este tipo de subshifts la propiedades de mezclante y LES son equivalentes. Veremos también que cuando el conjunto $P \subseteq \mathbb{N}$ es cerrado bajo la suma, entonces el subshift tipo spacing generado por P es fuertemente transitivo. En la parte final de la primera sección mostraremos a través de ejemplos que las propiedades de ser débilmente mezclante y fuertemente transitivo son ajenas en este tipo de subshifts.

En la segunda sección estudiaremos la propiedad de ser exactamente transitivo. Demostraremos que en los subshifts tipo spacing exactamente transitivo y débilmente mezclantes son propiedades equivalentes. Con ayuda de esta equivalencia resolveremos la tercera pregunta planteada en [**2**, pág. 248].

3.1. Funciones fuertemente transitivas en subshifts tipo spacing

Dado $P \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$S_P = \{\mathbf{x} \in \Sigma_2 : \text{ si } i < j \text{ y } x_i = x_j = 1, \text{ entonces } j - i \in P\}.$$

Observemos que para toda $P \subseteq \mathbb{N}$, S_P es un conjunto cerrado en Σ_2 y es fuertemente invariante bajo la función shift, $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Denotaremos a la función $\sigma|_{S_P} : S_P \to S_P$ como $\sigma|_{S_P} = \sigma_P$. Los sistemas (S_P, σ_P), son llamados *subshifts tipo spacing*. Estos sistemas se estudian con detalle en el artículo [6]. En [6] los autores comentan que este tipo de subshifts fue introducido en [15] para mostrar, de manera accesible, funciones que son débilmente mezclantes, y no son mezclantes. El siguiente teorema, sobre subshifts tipo spacing, es un resultado conocido de J. Banks, T.T.D. Nguyen, P. Oprocha, B. Stanley y B. Trota.

La definiciones de conjunto cofinito y conjunto grueso las enunciamos en el Capítulo 1.

El Teorema 64 fue demostrado en [6, Teorema 2.1, págs. 4-5].

Teorema 64.

1.- *El subshift (S_P, σ_P) es mezclante si y sólo si P es cofinito.*

2.- *El subshift (S_P, σ_P) es débilmente mezclante si y sólo si P es grueso.*

Siguiendo la idea, del Teorema 64, de proponer una propiedad dinámica para los subshifts tipo spacing en términos del conjunto P, tenemos el Lema 66 y la Proposición 67.

Con los subshifts tipo spacing podemos obtener rapídamente funciones fuertemente transitivas. El Lema 66 nos ayudará para eso.

Definición 65. Sea $P \subseteq \mathbb{N}$. Decimos que P es *cerrado bajo la suma* si para todo par de números $n, m \in P$,

$$n + m \in P.$$

Lema 66. *Sean $P \subset \mathbb{N}$, con $P \neq \emptyset$, un subconjunto cerrado bajo la suma, $\boldsymbol{x} = x_1x_2\ldots$, $\boldsymbol{y} = y_1y_2\ldots$ elementos de S_P con $x_1 = 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_1 = 1$ y sea $w = y_1\ldots y_n$. Entonces, para toda $k \in P$, se tiene que*

$$\boldsymbol{z} = w0^{k-1}\boldsymbol{x} \in S_P.$$

Demostración. Sean $k \in P$, $\mathbf{z} = w0^{k-1}\mathbf{x}$.

Sean $i, j \in \mathbb{N}$, con $i < j$, tales que $z_i = z_j = 1$.

Si z_i, z_j aparecen en la palabra w, o z_i, z_j aparecen en $\mathbf{x}$, como $w \in L(S_P)$ y $\mathbf{x} \in S_P$, entonces $j - i \in P$.

Supongamos que $i \leq n$ y $j \geq k + n$. Observemos que $z_n = y_n = 1$, $z_{n+k} = x_1 = 1$ y

$$j - i = j - (n + k) + k + n - i$$

Además, $\mathbf{x} \in S_P$ y $w \in L(S_P)$. Luego,

$$\{j - (n + k),\ n - i\} \subseteq P.$$

Como P es cerrado bajo la suma, entonces

$$j - i = j - (n + k) + k + n - i \in P.$$

Por lo tanto, $j - i \in P$. Concluimos que $\mathbf{z} \in S_P$. $\square$

Proposición 67. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}$. Si $P \neq \emptyset$ y es cerrado bajo la suma, entonces el subshift tipo spacing generado por P, (S_P, σ_P), es fuertemente transitivo.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in S_P$ y $w = y_1 y_2 \dots y_n \in L(S_P)$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $w = 0^n$. Entonces $w\mathbf{x} \in S_P$.

Caso 2. Si $\mathbf{x} = 0^\infty$. Entonces $w\mathbf{x} \in S_P$.

En los dos casos anteriores obtenemos que $o^-(x, \sigma_P) \cap [w] \cap S_P \neq \emptyset$.

Supongamos que $\mathbf{x} \neq 0^\infty$ y $w \neq 0^n$.

Sean $i \in \mathbb{N}$ tal que y_i es el último elemento de w que es 1, $j \in \mathbb{N}$ tal que x_j es el primer elemento de $\mathbf{x}$ que es 1 y $k \in P$. Como P es cerrado bajo la suma, entonces $k\mathbb{N} \subseteq P$, donde $k\mathbb{N}$ denota al conjunto $k\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} : m = kl,\ l \in \mathbb{N}\}$. Por el Lema 66 se cumple que para toda $l \in \mathbb{N}$,

$$y_1 y_2 \dots y_i 0^{kl-1} x_j x_{j+1} \dots \in S_P.$$

Se sigue que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$w0^t\mathbf{x} \in S_P.$$

Entonces $o^-(x, \sigma_P) \cap [w] \cap S_P \neq \emptyset$. Por lo tanto (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo. $\square$

Para toda $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $k\mathbb{N}$ es un subconjunto cerrado bajo la suma. De la Proposición 67 se sigue el Corolario 68.

Corolario 68. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $P = k\mathbb{N}$. Entonces (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo.*

El Ejemplo 70 nos da un conjunto $P \subseteq \mathbb{N}$ tal que (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo pero P no es cerrado bajo la suma.

A continuación veremos que en los subshifts tipo spacing las propiedades de ser mezclante y LES son equivalentes.

Proposición 69. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}_0$. Los siguientes incisos son equivalentes:*

i) (S_P, σ_P) *es LES.*

ii) (S_P, σ_P) *es mezclante.*

iii) P *es cofinito.*

Demostración. *i)* $\implies$ *ii)* se sigue de las definiciones. *ii)* $\implies$ *iii)*, es por el inciso 1 del Teorema 64.

Veamos que *iii)* $\implies$ *i)*.

Sea $u \in L(S_P)$ con $u = u_1u_2 \ldots u_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Por ser P cofinito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{n : n \geq N\} \subseteq P$. Veamos que

$$(\sigma_P)^{N+k}([u] \cap S_P) = S_P.$$

Sea $\mathbf{x} \in S_P$. Consideramos el elemento de Σ_2 dado por $\mathbf{z} = u0^N\mathbf{x}$. Como $\{n : n \geq N\} \subseteq P$, se sigue que para todo $i < j$, con $x_i = x_j = 1$, se tiene que $j - i \in P$. Luego $\mathbf{z} \in S_P$. Además, tenemos que $(\sigma_P)^{N+k}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. Se sigue que $\mathbf{x} \in (\sigma_P)^{N+k}([u] \cap S_P)$. Por lo tanto (S_P, σ_P) es LES. □

Ejemplo 70. Sea $P = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 10\} \cup \{1\}$. Por el Teorema 69, (S_P, σ_P) es LES y por lo tanto es fuertemente transitivo, pero P no es cerrado bajo la suma.

Proposición 71. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}$. Si (S_P, σ_P) es mezclante, entonces (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 69 y del hecho que LES implica fuertemente transitivo. □

El Ejemplo 34 muestra que la Proposición 71 no se cumple para funciones en el intervalo unitario, ya que propone una función, $f : [0, 1] \to [0, 1]$, que es mezclante pero no es fuertemente transitiva.

El siguiente ejemplo muestra un subshift tipo spacing que es débilmente mezclante pero que no es fuertemente transitivo.

Ejemplo 72. Sea $P = 2\mathbb{N} \cup \{2^n + i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces el subshift (S_P, σ_P) es débilmente mezclante pero no es fuertemente transitivo.

Demostración. Observemos que, por el Teorema 64, como $P \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto grueso, entonces (S_P, σ_P) es débilmente mezclante.

Veamos que (S_P, σ_P) no es fuertemente transitivo. Sea

$$\mathbf{x} = 101010\ldots = (10)^\infty \in \Sigma_2.$$

Como $2\mathbb{N} \subseteq P$, se sigue que $\mathbf{x} \in S_P$. Sea $u = 10^81$ una palabra de Σ_2. Como $u_1 = u_{10} = 1$ y $10 - 1 = 9 \in P$, se sigue que u es una palabra de S_P. Veamos que no existe $v \in L(S_P)$ tal que $uv\mathbf{x} \in S_P$. Supongamos que existe $v \in L(S_P)$ tal que $\mathbf{z} = uv\mathbf{x} \in S_P$. Luego $\mathbf{z}$ se ve como:

$$\mathbf{z} = 10^81v101010\ldots$$

Se sigue que para toda $k \in \mathbb{N}_0$,

$$10 + |v| + 2k \in P.$$

Tenemos dos casos:

Caso 1. $|v|$ es un número impar.

Entonces para toda $k \in \mathbb{N}_0$, $10 + |v| + 2k$ es impar. Sabemos que todos los naturales pares están en P. Se sigue que $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 10 + |v|\} \subseteq P$. Lo cual implica que P es cofinito y por la definición de P esto no pasa.

Caso 2. $|v|$ es un número par.

Como suponemos que $\mathbf{z} \in S_P$, se sigue que $\mathbf{w} = (\sigma_P)^9(\mathbf{z}) \in S_P$. Es decir,

$$\mathbf{w} = 1v101010\ldots \in S_P$$

Con lo cual tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $|v| + 2k - 1 \in P$. Observemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $|v| + 2k - 1$ es impar. Por lo tanto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq |v| + 1\} \subseteq P$. Esto nos dice que P es cofinito y por la definición de P esto no pasa.

En ambos casos llegamos a una contradicción. En consecuencia, no existe $v \in L(S_P)$ tal que $10^8 1v(10)^\infty \in S_P$. Esto prueba que $o^-(\mathbf{x}, \sigma_P)$ no es denso en S_P. Por lo tanto (S_P, σ_P) no es fuertemente transitivo. $\square$

Observación 73. Sean $k \geq 2$ y $P = k\mathbb{N}$. Observemos $P = k\mathbb{N}$ no es cofinito ni grueso. Además, por el Corolario 68, (S_P, σ_P), es fuertemente transitivo. Esto argumenta que en los subshifts tipo spacing no siempre se cumple la implicación de regreso de la Proposición 71. También nos dice que en los subshifts tipo spacing, la propiedad de ser fuertemente transitivo no siempre implica débilmente mezclante.

Observemos que el Ejemplo 70 es un subshift tipo spacing (S_P, σ_P) el cual es fuertemente transitivo con $10\mathbb{N} \subseteq P$.

Terminamos esta sección con las siguientes preguntas:

Pregunta 74. Sea $P \subseteq \mathbb{N}$. ¿Si (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\mathbb{N} \subseteq P$?

Pregunta 75. ¿Si $P = \mathbb{N} \setminus \{n! : n \in \mathbb{N}\}$, entonces (S_P, σ_P) es fuertemente transitivo?

Pregunta 76. ¿Hay una caracterización de la propiedad de ser fuertemente transitivo para los subshfits tipo spacing, (S_P, σ_P), en términos de propiedades de los conjuntos $P \subseteq \mathbb{N}$?

3.2. Exactamente transitivo no implica mezclante

En [**2**, pág. 248], E. Akin, J. Auslander y A. Nagar hacen la siguiente pregunta: ¿Exactamente transitivo implica mezclante? El objetivo de esta sección es producir un ejemplo para mostrar que la respuesta a esta pregunta es negativa. Para dar el ejemplo recurriremos a los subshift tipo spacing.

La propiedad de ser exactamente transitivo se definió en el Capítulo 1. Recordemos la definición de esta propiedad.

Definición 77. Un sistema dinámico discreto, (X, f), es *exactamente transitiva*, si para cualesquiera tres subconjuntos abiertos no vacíos U, V, W, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U \cap f^n(V) \cap f^n(W) \neq \emptyset.$$

En el Capítulo 1 mencionamos que mezclante implica débilmente mezclante. Se sabe que mezclante no implica exactamente transitivo, ver [**2**, Proposición 2.36, pág. 246]. Notemos que [**2**, Proposición 2.36, (1)] también muestra que débilmente mezclante no implica exactamente transitivo.

Con ayuda de la Proposición 78, la cual es demostrada en [**2**, Teorema 2.20, pág. 237], y la Observación 79 demostraremos la Proposición 80.

Proposición 78. *Si el sistema (X, f) es exactamente transitivo, entonces es débilmente mezclante.*

De la definición de subshift tipo spacing se sigue inmediatamente la siguiente observación.

Observación 79. Sean $P \subseteq \mathbb{N}_0$, (S_P, σ_P) su subshift tipo spacing y $\mathbf{x} \in S_P$. Consideramos $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ el punto obtenido al reemplazar alguno o todos los unos de $\mathbf{x}$ con ceros. Entonces $\mathbf{s}$ también es un elemento de S_P. Ver [**2**, Observación 2.3, (2), pág. 5].

Proposición 80. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}$ y (S_P, σ_P) el subshift tipo spacing inducido por P. Entonces el sistema (S_P, σ_P) es exactamente transitivo si y sólo si (S_P, σ_P) es débilmente mezclante.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 78, es suficiente demostrar que si (S_P, σ_P) es débilmente mezclante, entonces (S_P, σ_P) es exactamente transitivo.

Supongamos que (S_P, σ_P) es débilmente mezclante. Sean $u, v, w \in L(S_P)$ con $u = u_1 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_m$, $w = w_1 w_2 \dots w_l$. Como el sistema (S_P, σ_P) es débilmente mezclante. Por la Proposición 8, existe $N \in \mathbb{N}$, con $N > \text{máx}\{|u|, |v|\}$, tal que

$$(\sigma_P)^N([u] \cap S_P) \cap ([w] \cap S_P) \neq \emptyset,$$

y

$$(\sigma_P)^N([v] \cap S_P) \cap ([w] \cap S_P) \neq \emptyset.$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_P$ tales que

$$\mathbf{x} \in ([u] \cap S_P), \text{ y } (\sigma_P)^N(\mathbf{x}) \in ([w] \cap S_P),$$

$$\mathbf{y} \in ([v] \cap S_P), \text{ y } (\sigma_P)^N(\mathbf{y}) \in ([w] \cap S_P).$$

Entonces existen $r, 1 \in L(S_P)$, y $s, t \in S_P$, tales que $\mathbf{x} = urw\mathbf{s}$, y $\mathbf{y} = vqw\mathbf{t}$. Notemos que $N = |ur| = |vq|$. De acuerdo a la Observación 79,

$$urw0^\infty \in S_P, \text{ y } vqw0^\infty \in S_P.$$

Como $(\sigma_P)^N(urw0^\infty) = w0^\infty$, y $(\sigma_P)^N(vqw0^\infty) = w0^\infty$, entonces

$$(\sigma_P)^N([u] \cap S_P) \cap (\sigma_P)^N([v] \cap S_P) \cap ([w] \cap S_P) \neq \emptyset.$$

Así, el sistema (S_P, σ_P) es exactamente transitivo. □

Corolario 81. *Sean $P \subseteq \mathbb{N}$ y (S_P, σ_P) el subshift tipo spacing inducido por P. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *(S_P, σ_P) es exactamente transitivo.*
- *(S_P, σ_P) es débilmente mezclante.*
- *El conjunto P es grueso.*

Demostración. Se sigue del Teorema 64 inciso 2 y de la Proposición 80. □

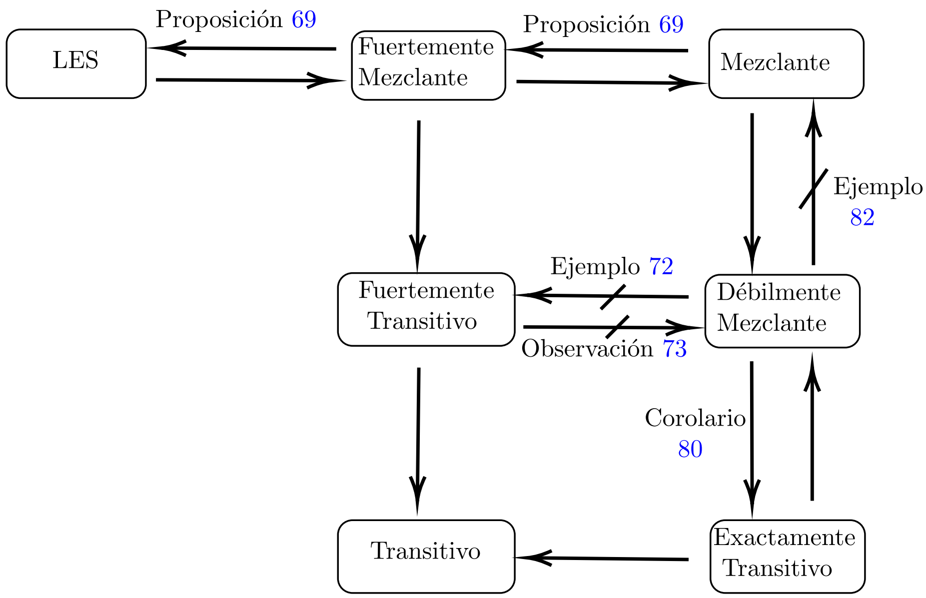
Con el Ejemplo 82 mostraremos que en los subshifts tipo spacing exactamente transitivo no implica mezclante.

Ejemplo 82. Sean $P = \{m = 2^n + i : n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ y (S_P, σ_P) el subshift tipo spacing inducido por P. Entonces el sistema (S_P, σ_P) es exactamente transitivo pero no es mezclante.

Demostración. Como el conjunto P es grueso, por el Corolario 81, tenemos que (S_P, σ_P) es exactamente transitivo. Como el conjunto P no es un conjunto cofinito, entonces, por el Teorema 64 inciso 1, tenemos que (S_P, σ_P) no es mezclante. □

A continuación mostraremos un resumen, mediante un diagrama, donde mostramos las implicaciones y no implicaciones de las propiedades dinámicas que mencionamos en este capítulo con respecto a los subshifts tipo spacing. Las implicaciones o no implicaciones que aparecen con el nombre de alguna proposición o ejemplo es porque son demostradas en esta tesis. Las implicaciones que no tienen nombre es porque se dan de forma general y sus demostraciones son inmediatas.

Finalmente, consideramos importante mencionar que los resultados que se colocaron en la segunda sección de este capítulo se encuentran publicados en el artículo [**22**].



Proposición 69
Proposición 69
LES
Fuertemente Mezclante
Mezclante
Ejemplo 82
Ejemplo 72
Fuertemente Transitivo
Débilmente Mezclante
Observación 73
Corolario 80
Transitivo
Exactamente Transitivo

Capítulo 4

Funciones distales e hiperespacios

En este capítulo nos enfocamos en el estudio de algunas propiedades dinámicas que tienen relación con las parejas proximales. La propiedades dinámicas que estudiamos son: la propiedad de ser distal, la propiedad de ser puntualmente casi periódica, la propiedad de ser equicontinua, la propiedad de tener parejas de Li-Yorke y la propiedad de ser proximal. Obtuvimos varios resultados de estas propiedades para las funciones inducidas en los productos simétricos y los productos cartesianos. A continuación mencionamos los resultados más importantes.

En el año 2017, en [**1**, Teorema 6.9], E. Akin, J. Auslander y A. Nagar prueban que en los sistemas inducidos en el hiperespacio de los conjuntos compactos, $(2^X, 2^f)$, las propiedades de distalidad, puntualmente casi periódica y equicontinuidad son equivalentes. En este capítulo mostramos que las propiedades de distalidad y puntalmente casi periódica son equivalentes en los sistemas inducidos en los productos simétricos y en los productos cartesianos.

Con respecto a la propiedad de equicontinuidad, mostramos que cuando $f_n : F_n(X) \to F_n(X)$ es una función equicontinua y suprayectiva, entonces f_n es distal y puntualmente casi periódica. Sin embargo presentamos una función inducida en el producto simétrico que es puntualmente casi periódica y distal, pero no es equicontinua.

En la Proposición 120 demostramos que si (X, f) tiene densidad de puntos distales, entonces $(2^X, 2^f)$ tiene densidad de puntos distales. En el año 2017 en el artículo [**16**, Sección 6.1] J. Li, P. Oprocha, X. Ye y R. Zhang muestran un sistema (X, f) tal que $(2^X, 2^f)$ tiene densidad de puntos distales, pero (X, f) no tiene densidad de puntos distales. En la sección 4.5 demostramos para cada $n \in \mathbb{N}$, $(F_n(X), f_n)$ tiene densidad de puntos distales si y sólo si (X, f) tiene densidad de puntos distales.

En la Sección 4.6 estudiamos las parejas de Li-Yorke, el resultado principal nos dice que un sistema (X, f) no tiene parejas de Li-Yorke si y sólo si el sistema inducido en el enésimo producto simétrico $(F_n(X), f_n)$ no tiene parejas de Li-Yorke. En [**25**, Example 2.26, págs. 16-17] se muestra un sistema (X, f) que no tiene parejas de Li-Yorke, pero que $(2^X, 2^f)$ tiene una cantidad infinita no numerable de parejas de Li-Yorke.

En la Sección 4.7, nos enfocamos en la propiedad dinámica de ser proximal. El resultado principal nos dice que un sistema (X, f) es proximal si y sólo si el producto simétrico $(F_n(X), f_n)$ es proximal. También mostramos un sistema dinámico (X, f) que es proximal, pero que $(2^X, 2^f)$ no es proximal.

4.1. Introducción y algunas definiciones

A continuación daremos las definiciones de las propiedades dinámicas que utilizaremos en este capítulo.

En este capítulo, cada vez que mencionemos a un espacio X y a una función $f : X \to X$, estamos suponiendo que X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua. Recordemos que a la pareja (X, f) se le llama sistema dinámico discreto.

Definición 83. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $(x, y) \in X \times X$. Se dice que (x, y) es un *par proximal* de f si se cumple que

$$\liminf\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

El conjunto denotado por $Prox(f)$ consta de todas las parejas proximales $(x, y) \in X \times X$ de f. La diagonal de $X \times X$ es denotada por $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. El par (x, y) es proximal si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) = 0$.

Definición 84. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto distal* de f si cada vez que $(x, y) \in Prox(f)$ se cumple que $x = y$. El sistema (X, f) es *distal* si cada punto $x \in X$ es un punto distal de f.

Observemos que (X, f) es distal si y sólo si $Prox(f) = \Delta$.

Dado un punto $x \in X$, recordemos que el conjunto

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}$$

es la *órbita* de x bajo f. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, entonces x es un *punto periódico de* f. El conjunto de todos los puntos periódicos de f es denotado por $Per(f)$.

La definición de conjunto minimal la dimos en la Definición 2, a continuación la enunciaremos nuevamente.

Decimos que, $A \neq \emptyset$, es un conjunto *minimal* si A es un conjunto cerrado e invariante bajo f tal que si $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ y B es un conjunto cerrado e invariante, entonces $B = A$. Si el espacio X es un conjunto minimal, decimos que $f : X \to X$ es una función minimal.

Definición 85. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto casi periódico de* f si se cumple que $cl(o(x, f))$ es un conjunto minimal de f. El sistema (X, f) es *puntualmente casi periódico* si todos los puntos de X son casi periódicos de f.

En el Capítulo 1 utilizamos los conjuntos vietóricos para definir la topología de 2^X. Se sabe que 2^X es un espacio métrico, cuando X lo es. En este capítulo será más conveniente utilizar la métrica de 2^X para obtener los resultados. A continuación presentamos la métrica de 2^X.

Dada $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en x y radio ϵ es denotada por $B(x, \epsilon)$. Sea $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$. Definimos el *diámetro de* A como

$$\text{díam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

El símbolo $\text{card}(A)$ denota la cardinalidad de A. La *nube de radio* ϵ *con centro en* A es el conjunto:

$$N(A, \epsilon) = \{y \in X : \text{ existe } x \in A,\ d(x, y) < \epsilon\} = \bigcup\{B(x, \epsilon) : x \in A\}.$$

Sean A, B dos elementos de 2^X. Entonces

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B, \epsilon) \quad y \quad B \subseteq N(A, \epsilon)\}$$

define una métrica llamada la *métrica de Hausdorff*. Ver [**13**, Observación 2.5, pág. 13] y [**20**, pág. 53].

Es conocido que la topología generada por la métrica de Hausdorff coincide con la Topología de Vietoris, ver [**13**, Teorema 3.1, págs. 16-18].

4.2. Funciones distales

En esta sección demostraremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ las siguientes propiedades son equivalentes: (X, f) es distal, $(F_n(X), f_n)$ es distal y $(X^n, f^{\times n})$ es distal.

Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x \in X$. Un punto $y \in X$ es un *punto límite* de x si existe una sucesión $\{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y$. El conjunto de todos los puntos límites de x es el *omega conjunto límite* de x. El cual es denotado por $\omega(x, f)$. Se dice que x es un punto *recurrente* de f si $x \in \omega(x, f)$. El símbolo $R(f)$ denota al conjunto de todos los puntos recurrentes de f. Notemos que $Per(f) \subseteq R(f)$.

Observación 86. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x \in X$. Las siguientes propiedades son conocidas (ver [**10**, Chapter IV]):

- $\omega(x, f)$ no es vacío y es un conjunto cerrado.
- $\omega(x, f)$ es fuertemente invariante bajo f.
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\omega(x, f) = \omega(f^k(x), f)$.
- Para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ con $\omega(x, f) \subseteq U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x) \in U$.

Las propiedades dadas en la Observación 87 se deducen inmediatamente de las definiciones.

Observación 87. Sean (X, f) un sistema dinámico, $A \subseteq X$, con $A \neq \emptyset$, un subconjunto cerrado, y $x, y \in X$.

- Si $(x, y) \in Prox(f)$, entonces $\omega(x, f) \cap \omega(y, f) \neq \emptyset$.
- A es un conjunto minimal si y sólo si para cada $x \in A$, se tiene que $\omega(x, f) = A$.
- El omega conjunto límite $\omega(x, f)$ es minimal si y sólo si para toda $y \in \omega(x, f),\ \omega(y, f) = \omega(x, f)$.
- Si A es un conjunto minimal, entonces el sistema $(A, f|_A)$ es transitivo.
- Supongamos que x es un punto casi periódico de f. Como $\omega(x, f) \subseteq cl\,(o(x, f))$ y $cl\,(o(x, f))$ es minimal, entonces $\omega(x, f) = cl\,(o(x, f))$. Además, $x \in \omega(x, f)$.
- Sea $k \geq 2$. Supongamos que $A \in F_k(X)$. Si $B \in \omega(A, f_k)$, entonces $card(B) \leq card(A)$.
- Si (X, f) es distal, entonces f es inyectiva.

Proposición 88. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $a \in X$ un punto distal de f. Entonces $A = \{a\}$ es un punto distal de la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$.*

Demostración. Sean $a \in X$ un punto distal de f y $C \in 2^X$ tales que $(\{a\}, C)$ es una pareja proximal de la función 2^f. Sabemos que existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} H((2^f)^{n_i}(\{a\}), (2^f)^{n_i}(C)) = 0.$$

Entonces para cada $c \in C$, $\lim\limits_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a), f^{n_i}(c)) = 0$. Como a es un punto distal de f, $c = a$. Por lo tanto, $C = \{a\}$. $\square$

Proposición 89. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, y $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ puntos distales de f, tales que para cada (i, j), $i \neq j$, $a_i \neq a_j$. Entonces $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ es un punto distal de la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$.*

Demostración. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ puntos distales de f tales que si $i \neq j$, entonces $a_i \neq a_j$. Considere $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Paso 1. Sean $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. Como

$$\liminf\{d(f^n(a_i), f^n(a_j) : n \in \mathbb{N}\} > 0,$$

existe $\delta_{ij} > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(a_i), f^n(a_j)) \geq \delta_{ij}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cada par (i, j), $i \neq j$, $d(f^n(a_i), f^n(a_j)) \geq \delta$.

Sea $\eta = \frac{\delta}{2}$. Observemos lo siguiente: Si $C \in 2^X$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$H((2^f)^n(A), (2^f)^n(C)) < \eta, \quad \text{o} \quad H((2^f)^n(A), C) < \eta,$$

entonces $card(C) \geq card(A)$.

Se sigue de la Observación 87, que si $C \in \omega(A, 2^f)$, entonces, $card(C) = card(A)$. Así,

$$\omega(A, 2^f) \subseteq F_k(X) \setminus F_{k-1}(X).$$

Paso 2. Sea $C \in 2^X$ tal que

$$\liminf\{H((2^f)^n(A), (2^f)^n(C)) : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Mostraremos que $A = C$. Tomemos δ y η descritas como en el Paso 1. Existe una sucesión creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, $H((2^f)^{n_i}(A), (2^f)^{n_i}(C)) < \eta$.
- $\lim\limits_{i\to\infty} H((2^f)^{n_i}(A), (2^f)^{n_i}(C)) = 0$.

Sea $\{\gamma_i\}$ una sucesión tal que el $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 0$, y para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$H((2^f)^{n_i}(A), (2^f)^{n_i}(C)) < \gamma_i < \eta.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, la imagen $f^{n_i}(C)$ satisface las siguientes dos condiciones:

- $f^{n_i}(C)$ está contenida en la union $\bigcup_{l=1}^{k} cl(B(f^{n_i}(a_l), \gamma_i))$.
- Para cada $1 \leq l \leq k$, $f^{n_i}(C) \cap cl(B(f^{n_i}(a_l), \gamma_i)) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto C es la unión de k conjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos por pares, $C = C_1^i \cup C_2^i \cup \cdots \cup C_k^i$, donde

$$C_l^i = C \cap f^{-n_i}(cl(B(f^{n_i}(a_l)), \gamma_i)).$$

Sea $c_0 \in C$. Existe un número natural fijo l, $1 \leq l \leq k$, y una subsucesión $\{n_{ij}\}$ de $\{n_i\}$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, el punto c_0 es un elemento del conjunto

$$C_l^{ij} = C \cap f^{-n_{ij}}(cl(B(f^{n_{ij}}(a_l)), \gamma_{ij}))).$$

Se sigue que el par (c_0, a_l) es proximal. Como a_l es un punto distal de f, entonces $c_0 = a_l$. Así $c_0 \in A$, y por lo tanto $C \subseteq A$.

En el Paso 1 vimos que $card(C) \geq k$. Se sigue que $card(C) = k$, con lo cual se concluye que $C = A$. $\square$

Corolario 90. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $k \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *El sistema (X, f) es distal.*

ii) *Para cada $k \geq 2$, el sistema $(F_k(X), f_k)$ es distal.*

iii) *Existe $k \geq 2$ tal que el sistema $(F_k(X), f_k)$ es distal.*

Demostración. $i) \implies ii)$. Sea $k \geq 2$.

Supongamos que (X, f) es distal. Sea $A \in F_k(X)$. Entonces $A = \{a_1\}$, o $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, donde $2 \leq l \leq k$ y $a_i \neq a_j$ para cada $i \neq j$. Por las Proposiciones 88 y 89, A es un punto distal de la función inducida 2^f. Entonces, A es un punto distal del sistema $(F_k(X), f_k)$. Por lo tanto $(F_k(X), f_k)$ es distal.

La implicación $ii) \implies iii)$ es inmediata.

$iii) \implies i)$. Supongamos que $(F_k(X), f_k)$ es distal para algún $k \geq 2$. Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in Prox(f)$, $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$. Como $A, B \in F_k(X)$ y (A, B) es un par proximal de f_k, entonces $A = B$. Así $x = y$. Por lo tanto, el sistema (X, f) es distal. $\square$

El Ejemplo 91 es dado por W. Bauer y K. Sigmund en [**7**, Teorema 3, págs. 90-92]. Muestra un sistema (X, f) que es distal, pero el sistema $(2^X, 2^f)$ no es distal. A continuación daremos una idea de la prueba de dicho ejemplo.

Ejemplo 91. Sean $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $f : D \to D$ la función dada por

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = re^{i(\theta + 2\pi \cdot r)}.$$

Entonces (X, f) es distal, pero $(2^X, 2^f)$ no es distal.

Demostración. Sean $u, z \in D$ con $u \neq z$. Si $|z| = |u|$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(f^n(z), f^n(u)) = d(z, u) > 0$. Si $|z| = r$ y $|u| = s$ con $r \neq s$, se puede demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(z), d(f^n(u)) \geq |r - s| > 0.$$

Entonces $(z, u) \notin Prox(f)$. Así (X, f) es distal.

Sea $A \subseteq D$ el segmento de línea que va de 0 a 1,

$$A = \{z \in D : z = x,\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Aquí no lo vamos hacer, pero se puede probar la segunda desigualdad que aparece a continuación.

$$\lim_{n\to\infty} H((2^f)^n(A), (2^f)^n(D)) = \lim_{n\to\infty} H((2^f)^n(A), D) = 0.$$

Por lo tanto, A y D no son puntos distales de 2^f. $\square$

Proposición 92. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) El sistema (X, f) es distal.

ii) Para cada $k \geq 2$, el sistema $(X^k, f^{\times k})$ es distal.

iii) Existe $k \geq 2$ tal que el sistema $(X^k, f^{\times k})$ es distal.

Demostración. $i \implies ii$). Sean $k \geq 2$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^k$, con $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, y $\{n_i\}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} d((f^{\times k})^{n_i}(\mathbf{a}), (f^{\times k})^{n_i}(\mathbf{b})) = 0.$$

Por lo tanto, para cada $1 \leq l \leq k$, $\lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a_l), f^{n_i}(b_l)) = 0$. Como f es distal, $a_l = b_l$. Así $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

$ii) \implies iii$). Es inmediata.

$iii) \implies i$). Sea $k \geq 2$ tal que el sistema $(X^k, f^{\times k})$ es distal.

Sean $a, b \in X$ y $\{n_i\}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tales que $\lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a), f^{n_i}(b)) = 0$. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} \in X^k$, con $\mathbf{a} = (a, a, \ldots, a)$, $\mathbf{b} = (b, b, \ldots, b)$. Entonces

$$\lim_{i\to\infty} d((f^{\times k})^{n_i}(\mathbf{a}), (f^{\times k})^{n_i}(\mathbf{b})) = 0.$$

Como el sistema $(X^k, f^{\times k})$ es distal, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Así $a = b$. $\square$

4.3. Funciones casi periódicas

A diferencia de las funciones distales que cumplen que (X, f) es distal si y sólo si $(F_n(X), f_n)$ es distal para $n \geq 2$. En esta sección veremos que el hecho de (X, f) sea puntualmente casi periódico, no implica que $(F_n(X), f_n)$ sea puntualmente casi periódico para toda $n \geq 2$. Sin embargo veremos que para $n \neq m$, con $n, m \geq 2$, $(F_n(X), f_n)$ es puntualmente casi periódico si y sólo si $(F_m(X), f_m)$ es puntualmente casi periódico. Más aún, veremos que para $n \geq 2$, $(F_n(X), f_n)$ es distal si y sólo si $(F_n(X), f_n)$ es puntualmente casi periódico.

Recordemos que $x \in X$ es un punto casi periódico de f si el conjunto $cl(o(x, f))$ es un conjunto minimal.

Observación 93. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x \in X$. Entonces x es casi periódico si y sólo si $x \in \omega(x, f)$, y $\omega(x, f)$ es minimal.

Demostración. Empecemos con la implicación de ida.

$\Rightarrow$). Supongamos que x es un punto casi periódico, entonces $cl(o(x, f))$ es un conjunto minimal. Sabemos que

$$\omega(x, f) \subseteq cl(o(x, f))$$

y que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante de X. Por lo tanto $\omega(x, f) = cl(o(x, f))$. De esto se sigue que $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal. Por otra parte como como $x \in o(x, f)$, entonces $x \in \omega(x, f)$.

$\Leftarrow$). Supongamos que $x \in \omega(x, f)$ y que $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal. Del hecho de que $x \in \omega(x, f)$ se sigue que

$$cl(o(x, f)) \subseteq \omega(x, f).$$

Como $cl(o(x, f))$ es un conjunto cerrado e invariante de X concluimos que $\omega(x, f) = cl(o(x, f))$. Por lo tanto $cl(o(x, f))$ es un conjunto minimal.

$\square$

Si cada punto $x \in X$ es casi periódico, entonces $f : X \to X$ es una función *puntualmente casi periódica*. Esta propiedad la abreviamos como PCP.

La Proposición 94 es demostrada en [**10**, Lema 3, pág. 92].

Proposición 94. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Todo subconjunto, A de X, no vacío, cerrado e invariante bajo f contiene un subconjunto minimal.*

De la Proposicón 94 obtenemos la siguiente observación.

Observación 95. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Para toda $x \in X$, existe $z \in \omega(x, f)$ tal que $\omega(z, f) \subseteq \omega(x, f)$ y $\omega(z, f)$ es un conjunto minimal.

Demostración. Sea $x \in X$. Sabemos que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante bajo f, luego por la Proposición 94, existe $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \omega(x, f)$, un conjunto minimal. Se sigue que para todo $z \in A$, $\omega(z, f) = A$. $\square$

La Proposición 96 es demostrada en [**4**, Lema 2, pág. 891]. Esta proposición nos dice que todo punto de X es proximal a un punto casi periódico.

Proposición 96. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Para cada $x \in X$, existe $z \in X$ tal que el par (x, z) es proximal, $z \in \omega(z, f)$, y $\omega(z, f)$ es minimal.*

Observación 97. Sean x y z como en la Proposición 96. Entonces

$$\omega(x, f) \cap \omega(z, f) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \omega(z, f) \subseteq \omega(x, f).$$

Demostración. Como (x, z) es una pareja proximal existe una sucesión $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, estrictamente creciente, tal que

$$\lim_{i \to \infty} d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(z)) = 0.$$

Lo cual implica que existen una subsucesión, $\{m_j\}$, estrictamente creciente de $\{n_i\}$ y $x_0 \in X$ tales que

$$\lim_{j \to \infty} f^{m_j}(x) = x_0 = \lim_{j \to \infty} f^{m_j}(z).$$

Con lo cual tenemos que

$$x_0 \in \omega(x, f) \cap \omega(z, f).$$

Por lo tanto $\omega(x, f) \cap \omega(z, f) \neq \emptyset$. Además

$$\omega(x_0, f) \subseteq \omega(x, f) \text{ y } \omega(x_0, f) \subseteq \omega(z, f).$$

Como z es un punto casi periódico, entonces

$$\omega(x_0, f) = \omega(z, f).$$

De lo cual se deduce que $\omega(z, f) \subseteq \omega(x, f)$. $\square$

En el siguiente corolario demostramos que distal implica puntualmente casi periódico.

Corolario 98. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x \in X$.*

i) Si x es un punto distal de f, entonces x es un punto casi periódico de f.

ii) Si $f : X \to X$ es distal, entonces f es PCP.

Demostración. *i*) Sea $x \in X$ un punto distal. De acuerdo a la Proposición 96, existe $z \in X$ tal que el par (x,z) es proximal, $z \in \omega(z,f)$ y $\omega(z,f)$ es minimal. Como x es distal, $x = z$. Así $x \in \omega(x,f)$, y $\omega(x,f)$ es minimal.

Observemos que *ii*) se sigue inmediatamente del inciso *i*). □

Corolario 99. *Sea* (X,f) *un sistema dinámico discreto. Si* $f : X \to X$ *es distal, entonces* f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es distal, es inyectiva. Por el Corolario 98, para cada punto $x \in X$, $x \in \omega(x,f)$. Como $\omega(x,f)$ es fuertemente invariante, existe $y \in \omega(x,f)$ tal que $f(y) = x$. Así, f es suprayectiva. □

Observación 100. En [**14**, Teorema 3.4, pág. 155] los autores muestran una función, $f : X \to X$, minimal no invertible. Notemos que, en este caso, la función f es PCP y no es distal.

A continuación demostraremos que para productos cartesianos y productos simétricos las propiedades de ser distal y PCP son equivalentes.

Sean $f : X \to X$, $k \geq 2$ y $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i < j \leq k$. Definimos

$$S_{ij} = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in X^k : a_i = a_j\}.$$

Los conjuntos S_{ij} satisfacen las siguientes condiciones:

- S_{ij} no es vacío y es cerrado.
- Si X no tiene puntos aislados, $int(S_{ij}) = \emptyset$.
- $f^{\times k}(S_{ij}) \subseteq S_{ij}$. Si $f : X \to X$ es suprayectiva, entonces $f^{\times k}(S_{ij}) = S_{ij}$.
- Sea $\mathbf{a} \in S_{ij}$. Entonces $\omega(\mathbf{a}, f^{\times k}) \subseteq S_{ij}$.

Proposición 101. *Sean* (X,f) *un sistema dinámico discreto y* $k \geq 2$. *Si la función* $f^{\times k} : X^k \to X^k$ *es* PCP, *entonces* $f : X \to X$ *es distal.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ tales que (a,b) es un par proximal de f. Tomemos una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, y un punto $c \in X$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(a) = \lim_{i \to \infty} f^{n_i}(b) = c. \tag{3}$$

Sea $\mathbf{a} = (a, b, b, \ldots, b) \in X^k$. Como $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es PCP, $\mathbf{a} \in \omega(\mathbf{a}, f^{\times k})$ y $\omega(\mathbf{a}, f^{\times k})$ es un conjunto minimal bajo la función $f^{\times k}$.

Por (3),

$$\lim_{i \to \infty} (f^{\times k})^{n_i}(\mathbf{a}) = (c, c, \ldots, c) = \mathbf{c}.$$

Por lo tanto $\mathbf{c} \in \omega(\mathbf{a}, f^{\times k})$. Como $\omega(\mathbf{a}, f^{\times k})$ es minimal, $\omega(\mathbf{c}, f^{\times k}) = \omega(\mathbf{a}, f^{\times k})$.

Ahora, $\mathbf{c} \in S_{12}$, luego $\omega(\mathbf{c}, f^{\times k}) \subseteq S_{12}$. Así $\mathbf{a} \in S_{12}$, y $a = b$. $\square$

Corolario 102. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

i) *$f : X \to X$ es distal.*

ii) *$f^{\times k} : X^k \to X^k$ es distal.*

iii) *$f^{\times k} : X^k \to X^k$ es PCP.*

Demostración. Por la Proposición 92 *i*) implica *ii*). Por el Corolario 98, inciso *ii*), tenemos que *ii*) implica *iii*). Por la Proposición 101, *iii*) implica *i*). $\square$

Del Corolario 102 obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 103. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $n \neq m$, y $n, m \geq 2$. Entonces $(X^n, f^{\times n})$ es PCP si y sólo si $(X^n, f^{\times n})$ es PCP.*

Proposición 104. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Si la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es PCP, entonces $f : X \to X$ es distal.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ con (a, b) una pareja proximal de f, $c \in X$ y $\{n_i\}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tales que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(a) = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(b) = c$. Luego, $\{c\} \in \omega(\{a, b\}, f_k)$. Como $\omega(\{a, b\}, f_k)$ es un conjunto minimal de f_k,

$$\omega(\{a, b\}, f_k) = \omega(\{c\}, f_k).$$

Sabemos que $\omega(\{c\}, f_k) \subseteq F_1(X)$. Como $\{a, b\} \in \omega(\{a, b\}, f_k)$, se sigue que $a = b$. $\square$

En funciones inducidas en productos simétricos obtenemos un resultado análogo al Corolario 102.

Corolario 105. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

i) *$f : X \to X$ es distal.*

ii) *$f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es distal.*

iii) *$f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es PCP.*

Demostración. Por el Corolario 90, *i*) implica *ii*). Por el Corolario 98, inciso *ii*), se tiene que *ii*) implica *iii*). Finalmente, por la Proposición 104 , *iii*) implica *i*). $\square$

Del Corolario 105, obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 106. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico discreto. Sean* $n, m \in \mathbb{N}$, *tal que* $n \neq m$ *y* $n, m \geq 2$. *Entonces* $(F_n(X), f_n)$ *es PCP si y sólo si* $(F_m(X), f_m)$ *es PCP.*

Observación 107. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Usando los Corolarios 102 y 105 obtenemos lo siguiente: para cada $k \geq 2$,

- $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es distal si y sólo si $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es distal.
- $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es PCP si y sólo si $f^{\times k} : X^k \to X^k$ es PCP.

4.4. Funciones equicontinuas

En esta sección demostraremos que si $f : X \to X$ es una función equicontinua y suprayectiva, entonces f es distal y puntualmente casi periódica.

Definición 108. La función $f : X \to X$ es *equicontinua* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $x, y \in X$ y para toda $n \geq 0$ si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$.

La Proposición 109 es ya conocida. Proporcionaremos una prueba con el objetivo de aplicarla a la Proposición 110.

Proposición 109. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico discreto. La función* $f : X \to X$ *es equicontinua si y sólo si la función inducida* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es equicontinua.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to X$ es equicontinua. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tales que para cada par de puntos $x, y \in X$ si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ para toda $n \geq 0$.

Sean $A, B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$, y $a \in A$. Tomemos $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Por lo tanto, para cada $n \geq 0$, $d(f^n(a), f^n(b)) < \epsilon$. Se sigue que para cada $n \geq 0$, $f^n(A) \subseteq N(f^n(B), \epsilon)$.

Con un argumento similar obtenemos que para cada $n \geq 0$, $f^n(B) \subseteq N(f^n(A), \epsilon)$.

Por lo tanto, para cada $n \geq 0$,

$$H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \epsilon.$$

Así, $2^f : 2^X \to 2^X$ es equicontinua.

Ahora supongamos que la función inducida 2^f es equicontinua.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tales que para cada par de elementos $A, B \in 2^X$, si $H(A, B) < \delta$, entonces para toda $n \geq 0$

$$H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \epsilon.$$

Sean $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Consideremos $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$. Tenemos que $H(A, B) < \delta$. Se sigue que, para cada $n \geq 0$,

$$H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \epsilon.$$

Así, $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para toda $n \geq 0$. □

Proposición 110. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. La función $f : X \to X$ es equicontinua si y sólo si la función inducida $f_k : F_k(X) \to F_k(X)$ es equicontinua.*

Demostración. El argumento es similar al dado en la Proposición 109. □

El siguiente lema y las demás proposiciones nos ayudarán a demostrar que si f es equicontinua y suprayectiva, entonces f es puntualmente casi periódica.

Lema 111. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Si para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, entonces $H(\omega(x, f), \omega(y, f)) \leq \epsilon$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$.

Sean $u \in \omega(x, f)$ y $\{n_i\}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tales que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = u$. Podemos suponer que la sucesión $\{f^{n_i}(y)\}$ también es convergente.

Sea $v = \lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(y)$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) < \epsilon$, $d(u, v) \leq \epsilon$.

Así, $u \in cl(N(\omega(y, f), \epsilon))$. Por lo tanto $\omega(x, f) \subseteq cl(N(\omega(x, f), \epsilon))$.

Siguiendo un argumento similar obtenemos que

$$\omega(y, f) \subseteq cl(N(\omega(x, f), \epsilon)).$$

Entonces $H(\omega(x, f), \omega(y, f)) \leq \epsilon$. □

Proposición 112. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $f : X \to X$ es una función equicontinua, entonces para cada $x \in X$, $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal de f.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por la Observación 95 existe $z \in \omega(x, f)$ tal que $\omega(z, f)$ es un conjunto minimal de f. Sean $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tales que para cada par de puntos si $u, v \in X$ y $d(u, v) < \delta$, entonces $d(f^n(u), f^n(v)) < \epsilon$, para toda $n \geq 0$.

Como $z \in \omega(x, f)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^N(x), z) < \delta$. Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(f^N(x)), f^n(z)) < \epsilon$.

Por el Lema 111, $H(\omega(f^N(x), f), \omega(z, f)) \leq \epsilon$. Dado que $\omega(f^N(x), f) = \omega(x, f)$. Se sigue que para cada $\epsilon > 0$.

$$H(\omega(x, f), \omega(z, f)) \leq \epsilon.$$

Así $\omega(x, f) = \omega(z, f)$. Por lo tanto, $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal de f. $\square$

Proposición 113. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $f : X \to X$ es una función equicontinua y suprayectiva, entonces para cada $x \in X$, $x \in \omega(x, f)$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Como f es suprayectiva, existe una sucesión $\{x_{-n} : n \geq 0\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{-n}) = x_{(-n)+1}$. Ahora, como X es un espacio métrico compacto, existe un punto $y_0 \in X$ y una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, tal que el $\lim_{i\to\infty} x_{-n_i} = y_0$.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $u, v \in X$, si $d(u, v) < \delta$ entonces, para cada $n \geq 0$, $d(f^n(u), f^n(v)) < \epsilon$. Sea $M \in \mathbb{N}$. Existe $m > M$ tal que $d(x_{-m}, y_0) < \delta$ y $d(x_0, f^m(y_0)) < \epsilon$.

Así, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $M \in \mathbb{N}$. Existe $m > M$ tal que $d(x_0, f^m(y_0)) < \epsilon$. Por lo tanto $x_0 \in \omega(y_0, f)$.

Por la Proposición 112, $\omega(y_0, f)$ es un conjunto minimal de f. Entonces $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$. Se sigue que $x_0 \in \omega(x_0, f)$. $\square$

Corolario 114. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $f : X \to X$ es una función equicontinua y suprayectiva, entonces f es PCP.*

Demostración. La afirmación se sigue de las proposiciones 112 y 113. $\square$

La afirmación dada en la Proposición 115 es mencionada en [**8**, pág. 30], pero ahí no se da referencia de la demostración. A continuación proporcionamos una demostración utilizando un resultado previo en productos simétricos.

Proposición 115. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $f : X \to X$ una función equicontinua y suprayectiva, entonces f es distal.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ una función suprayectiva y equicontinua. Por la Proposición 110, la función inducida $f_2 : F_2(X) \to F_2(X)$ es equicontinua y suprayectiva. Por el Corolario 114, f_2 es una función PCP. Finalmente, de acuerdo al Corolario 105, la función f es distal. $\square$

De las proposiciones 110, 114 y 115 obtenemos el siguiente colorario.

Corolario 116. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $n \in \mathbb{N}$. Si $(F_n(X), f_n)$ es equicontinuo y suprayectivo, entonces $(F_n(X), f_n)$ es puntualmente casi periódico y distal.*

Observación 117. La función, $f : D \to D$, dada en el Ejemplo 91 es un homeomorfismo que es distal y PCP, pero no es equicontinuo. Se sigue que para $n \in \mathbb{N}$, $f_n : F_n(D) \to F_n(D)$ es distal y puntualmente casi periódica, pero no es equicontinua.

La afirmación dada en la Proposición 118 es mencionada en [8].

Proposición 118. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $f : X \to X$ es una función equicontinua. Entonces f es minimal si y sólo si es transitiva.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ una función equicontinua. Si f es minimal, entonces es fácil ver que f es transitiva. Por otra parte, supongamos que f es transitiva. Se sigue que f es suprayectiva. Por el Corolario 114, para cada $x \in X$, el omega conjunto $\omega(x, f)$ es un conjunto minimal. Como f es transitiva, existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0, f) = X$. Por lo tanto, f es una función minimal. □

4.5. Densidad de conjuntos distales

En esta sección demostraremos que la propiedad de tener densidad de puntos distales es equivalente en los sistemas (X, f) y en los sistemas inducidos en los productos simétricos $(F_k(X), f_k)$. Primero analizaremos lo que pasa en el hiperespacio 2^X.

Lema 119. *Sean $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$, y*

$$F(A) = \{B \in 2^X : B \subseteq A, \text{ la cardinalidad de } B \text{ es finito}\}.$$

Si A es un subconjunto denso de X, entonces $F(A)$ es un subconjunto denso de 2^X.

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la definición de $F(A)$. □

Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Denotamos por $Distal(f)$ al conjunto de los puntos distales de f.

Proposición 120. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si $Distal(f)$ es denso en X, entonces $Distal(2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X.*

Demostración. Supongamos que $Distal(f)$ es un subconjunto denso en X. Por el Lema 119, el subconjunto $F(Distal(f))$ es denso en 2^X. Por la

Proposición 89, para cada $A \in F(Distal(f))$, se tiene que A es un elemento distal de la función inducida 2^f. Se sigue que $F(Distal(f)) \subseteq Distal(2^f)$. Por lo tanto $Distal(2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X. $\square$

En [16, Section 6.1] se da un ejemplo de un sistema (X, f) tal que $Distal(2^f)$ es un subconjunto denso del hiperespacio 2^X, pero $Distal(f)$ no es denso en X.

La siguiente proposición nos muestra que si $A \in Distal(f_k)$, entonces cada elemento de A es un punto distal de f.

Proposición 121. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Sean $k \geq 2$ y $A \in Distal(f_k)$. Entonces para cada $a \in A$, a es un punto distal de f.*

Demostración. Sea $A \in Distal(f_k)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso1. Supongamos que $A = \{a_1\}$.

Sea $x \in X$ tal que $(a_1, x) \in Prox(f)$. Existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a_1), f^{n_i}(x)) = 0$. Esto implica que $\lim\limits_{i\to\infty} H(f^{n_i}(\{a_1\}), f^{n_i}(\{a_1, x\})) = 0$. Por lo tanto
$(\{a_1\}), \{a_1, x\})$ es un par proximal de f_k. Por lo tanto, $\{a_1\} = \{a_1, x\}$, y $a_1 = x$.

Caso 2. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ con $l \geq 2$ y $a_i \neq a_j$, para $i \neq j$.

Afirmación 1. Para cada $p \neq q,\ 1 \leq p \leq l,\ 1 \leq q \leq l,\ (a_p, a_q)$ no es un par proximal de f.

Supongamos, lo contrario, que $(a_p, a_q) \in Prox(f)$. Luego existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a_p), f^{n_i}(a_q)) = 0.$$

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$H(f^{n_i}(A)), f^{n_i}(A \setminus \{a_q\}) \leq d(f^{n_i}(a_p), f^{n_i}(a_q)),$$

$(A, A \setminus \{a_q\})$ es un par proximal de f_k. Se sigue que $A = A \setminus \{a_q\}$, lo cual es una contradicción.

Afirmación 2. Sea $a_p \in A$. Entonces $a_p \in Distal(f)$.

Sea $x \in X$ tal que $(a_p, x) \in Prox(f)$. Entonces existe un sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} d(f^{n_i}(a_p), f^{n_i}(x)) = 0$. Por lo tanto x no es un elemento de $A \setminus \{a_p\}$.

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$H(f^{n_i}((A \setminus \{a_p\}\}) \cup \{x\}), f^{n_i}(A)) \leq d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(a_p)),$$

$((A \setminus \{a_p\}) \cup \{x\}, A) \in Prox(f_k)$. Luego $(A \setminus \{a_p\}) \cup \{x\} = A$, se sigue que $a_p = x$. Por lo tanto, a_p es un punto distal de f. □

En la siguiente proposición demostraremos que la densidad de puntos distales en los productos simétricos, implica la densidad de puntos distales en X.

Proposición 122. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Si $Distal(f_k)$ es denso en $F_k(X)$, entonces $Distal(f)$ es denso en X.*

Demostración. Supongamos que $Distal(f_k)$ es denso en $F_k(X)$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Existe $A \in Distal(f_k)$ tal que $H(\{x\}, A) < \epsilon$.

Sea $a \in A$. Entonces $d(x, a) < \epsilon$, y por la Proposición 121, $a \in Distal(f)$. □

Proposición 123. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Si $Distal(f)$ es denso en X, entonces $Distal(f_k)$ es denso en $F_k(X)$.*

Demostración. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos, no vacíos, de X. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $x_i \in U_i$ tal que x_i es un punto distal de f. Por la Proposición 4, tenemos que $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un punto distal de f_k. Además

$$A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle_k \cap Distal(f_k).$$

Por lo tanto $Distal(f_k)$ es un subconjunto denso de $F_k(X)$. □

De las proposiciones 122 y 123 obtenemos el Corolario 124.

Corolario 124. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $k \geq 2$. Entonces $Distal(f_k)$ es denso en $F_k(X)$ si y sólo si $Distal(f)$ es denso en X.*

Pregunta 125. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Supongamos que $Distal(f)$ es denso en X. Sea $x_0 \in X$ tal que x_0 no es un punto distal de f. ¿Cómo es la dinámica en la órbita $o(x_0, f)$?

4.6. Parejas de Li-Yorke

Dado un sistema dinámico (X, f) decimos que $(x, y) \in X \times X$ es una pareja de Li-Yorke si se cumple que

$$\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Las parejas de Li-yorke han sido estudiadas en los artículos [**24**] y [**25**]. No es difícil de demostrar que si (X, f) tiene parejas de Li-Yorke, entonces $(2^X, 2^f)$ tiene parejas de Li-Yorke. En [**25**, Example 2.26, págs. 16-17] se presenta un sistema (X, f) que no tiene parejas de Li-Yorke, pero que sin embargo $(2^X, 2^f)$ tiene una cantidad, infinita, no numerable de parejas de Li-Yorke.

En esta sección demostraremos que dado $n \in \mathbb{N}$ el sistema (X, f) no tiene parejas de Li-Yorke si y sólo si el sistema $(F_n(X), f_n)$ tampoco tiene parejas de Li-Yorke.

El siguiente lema nos ayudará a demostrar el resultado principal de esta sección.

Lema 126. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Supongamos que (X, f) no tiene parejas de Li-Yorke. Si (x, y) es una pareja proximal, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Demostración. Como (x, y) no es un pareja de Li-Yorke. Entonces

$$\limsup d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Lo cual implica, que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \geq N\} < \epsilon.$$

Luego, si $n \geq N$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

□

El siguiente resultado lo enunciaremos para el sistema inducido en el hiperespacio de los conjuntos compactos, $(2^X, 2^f)$, el cual nos implicará inmediatamente un resultado para el sistema inducido en el enésimo producto simétrico $(F_n(X), f_n)$.

Proposición 127. *Sean (X, f) un sistema dinámico que no tiene parejas de Li-Yorke y A, B dos subconjuntos de X, finitos y no vacíos. Entonces la pareja $(A, B) \in 2^X \times 2^X$ no es una pareja de Li-Yorke para el sistema inducido $(2^X, 2^f)$.*

Demostración. Supongamos que (A, B) es un pareja proximal de 2^f. Luego existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} H(f^{n_i}(A), f^{n_i}(B)) = 0.$$

Dados $a \in A$ y $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $i \geq N$, existe $b_i \in B$, con

$$d(f^{n_i}(a), f^{n_i}(b_i)) < \epsilon.$$

De esto se sigue que existe una sucesión estrictamente creciente $\{m_j\}$ en $\mathbb{N}$ tal que para toda $j \in \mathbb{N}$, existe $b_j \in B$ con

$$d(f^{m_j}(a), f^{m_j}(b_j)) < \frac{1}{j}.$$

Lo cual implica que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{b\in B} \left\{ j \in \mathbb{N} : d(f^{m_j}(a), f^{m_j}(b)) < \frac{1}{j} \right\}.$$

Como B es un subconjunto finito, existe $b_a \in B$ tal que la cardinalidad del conjunto

$$\left\{ j \in \mathbb{N} : d(f^{m_j}(a), f^{m_j}(b_a)) < \frac{1}{j} \right\}$$

es infinita. Lo cual implica que $\liminf d(f^n(a), f^n(b_a)) = 0$. Esto nos dice que (a, b_a) es una pareja proximal. Como A es un subconjunto finito, usando un argumento análogo al anterior, se tiene que para cada $b \in B$, existe $a_b \in A$ tal que (b, a_b) es una pareja proximal. Por el Lema 126 se sigue que para cada $a \in A$ existe $b_a \in B$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(a), f^n(b_a)) = 0.$$

Y para cada $b \in B$, existe $a_b \in A$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(b), f^n(a_b)) = 0.$$

Afirmación: $\lim\limits_{n\to\infty} H(f^n(A), f^n(B)) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Para cada $a \in A$, sea $N_a \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N_a$,

$$d(f^n(a), f^n(b_a)) < \epsilon.$$

Para cada $b \in B$ sea $N_b \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_b$,

$$d(f^n(b), f^n(a_b)) < \epsilon.$$

Sea $N = \max(\{N_a : a \in A\} \cup \{N_b : b \in B\})$. Veamos que si $n \geq N$, entonces $H(f^n(A), f^n(B)) < \epsilon$.

Sean $n \geq N$ y $a \in A$. Como $N \geq N_a$, se sigue que $n \geq N_a$, luego $d(f^n(a), f^n(b_a)) < \epsilon$. Esto prueba que

$$f^n(A) \subseteq N(f^n(B), \epsilon). \tag{4}$$

Ahora si $b \in B$. Como $N \geq N_b$, se tiene que $d(f^n(b), f^n(a_b)) < \epsilon$. Luego

$$f^n(B) \subseteq N(f^n(A), \epsilon). \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) se sigue que $H(f^n(A), f^n(B)) < \epsilon$. Lo cual prueba que

$$\lim_{n\to\infty} H(f^n(A), f^n(B)) = 0.$$

Con lo cual

$$\limsup H(f^n(A), f^n(B)) = 0.$$

Por lo tanto (A, B) no es una pareja de Li-Yorke. □

La siguientes dos observaciones se siguen de la definición de la métrica de Hausdorff.

Observación 128. Sean $n \geq 2$ y $A, B \in F_n(X)$. Entonces (A, B) es una pareja de Li-Yorke para el sistema $(F_n(X), f_n)$ si y sólo si (A, B) es una pareja de Li-Yorke para el sistema $(2^X, 2^f)$.

Observación 129. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $n \in \mathbb{N}$. Si (x, y) es un pareja de Li-Yorke del sistema (X, f). Entonces $(\{x\}, \{y\})$ es un pareja de Li-Yorke del sistema $(F_n(X), f_n)$.

De la Proposición 127 y las Observaciones 128 y 129 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 130. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. El sistema (X, f) no tiene parejas de Li-Yorke si y sólo si $(F_n(X), f_n)$ no tiene parejas de Li-Yorke.*

4.7. Sistemas proximales

En esta sección analizaremos a los sistemas dinámicos proximales. Los sistemas proximales son estudiados en [**17**]. En [**17**, Teorema 5.8, pág. 47] se demuestra que el sistema inducido en el hiperespacio de los conjuntos compactos $(2^X, 2^f)$ es proximal si y sólo si $\bigcap_{n_1}^{\infty} f^n(X)$ tiene solo un elemento. En la Observación 132 mencionamos que si $(2^X, 2^f)$ es un sistema proximal, entonces (X, f) es un sistema proximal. Sin embargo en el Ejemplo 133 damos un sistema (X, f) que es proximal, pero que $(2^X, 2^f)$ no es un sistema proximal. Finalmente, veremos en el Teorema 135 que la propiedad de ser proximal es equivalente en los sistemas inducidos en los productos simétricos, en los productos cartesianos y en el sistema base.

Definición 131. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Decimos que (X, f) es un sistema *proximal*. Si para todo $(x, y) \in X \times X$, se tiene que (x, y) es una pareja proximal, es decir que $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

La siguiente observación se sigue del hecho de que la función, $h : X \to F_1(X)$, dada por $h(x) = \{x\}$ es una isometría.

Observación 132. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es un sistema proximal, entonces (X, f) es un sistema proximal.

El siguiente ejemplo nos muestra un sistema (X, f) que es proximal pero que $(2^X, 2^f)$ no es proximal.

Ejemplo 133. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$, $x_{-n} = e^{-\frac{2\pi i}{2^n}}$ y sea $x_0 = e^{2\pi i}$. Observemos que $x_1 = x_{-1}$. Sean $S = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $f : S \to S$ dada por

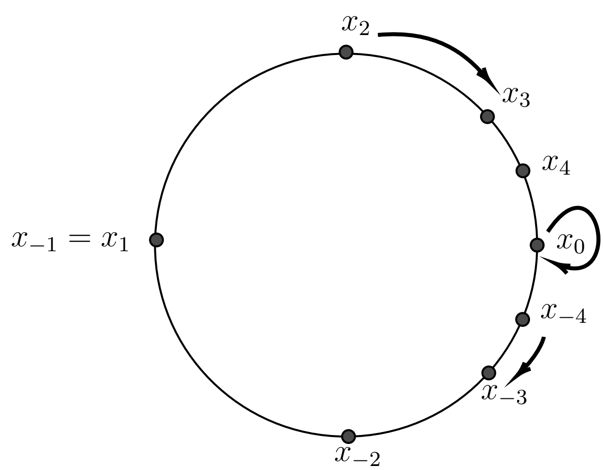
$$f(x_0) = x_0 \text{ y para cada } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\},\ f(x_n) = x_{n+1}.$$

Notemos que $f(x_1) = f(x_{-1})$. Es inmediato que $f : S \to S$ es una función continua. También se cumple que para toda $m \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_m) = x_0.$$

Esto argumenta que el sistema (S, f) es proximal. Observemos que S y $\{x_0\}$ son dos elementos de 2^S que no forman una pareja proximal. Por lo tanto, el sistema $(2^S, 2^f)$ no es proximal.

Una representación gráfica de cómo se comporta la función $f : S \to S$ se muestra a continuación.



A continuación presentamos un teorema que nos da algunas equivalencias de la propiedad de ser proximal. La equivalencia entre los inicisos (1) y (2) del Teorema 134 se menciona en [**17**, Teorema 5.1, pág. 45], aunque no se da una prueba de ello. La demostración que hacemos, del Teorema 134, utiliza el sistema inducido $(F_2(X), f_2)$.

Teorema 134. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *El sistema (X, f) es proximal.*

(2) *La función $f : X \to X$ tiene un punto fijo x_0, tal que $\{x_0\}$ es el único conjunto minimal de f.*

(3) *Existe $x_0 \in X$, tal que $\{\{x_0\}\}$ es el único conjunto minimal del sistema $(F_2(X), f_2)$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2).

Supongamos que (X, f) es un sistema proximal. Si f no tiene puntos fijos, entonces para toda $x \in X$, $d(x, f(x)) > 0$. Como X es un espacio métrico compacto y $g : X \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = d(x, f(x))$ es un función continua, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda $x \in X$, $d(x, f(x)) \geq \epsilon_0$.

Sea $u_0 \in X$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(u_0), f^n(f(u_0))) \geq \epsilon_0.$$

Esta desigualdad nos dice que $(u_0, f(u_0))$ no es una pareja proximal. Lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto existe $x_0 \in X$, tal que $f(x_0) = x_0$.

Ahora, tomemos $A \subseteq X$ un subconjunto minimal y $a \in A$. Como (a, x_0) es una pareja proximal y x_0 es un punto fijo, se sigue que $x_0 \in cl(o(a, f))$. Además por ser A un subconjunto invariante, se tiene que $cl(o(a, f)) \subseteq A$. Como A es un subconjunto minimal, se sigue que $A = \{x_0\}$. Por lo tanto el único conjunto minimal es $\{x_0\}$.

(2) $\implies$ (3).

Por hipótesis existe $x_0 \in X$, un punto fijo de f, tal que $\{x_0\}$ es el único subconjunto minimal de X. Supongamos que existe $A \subseteq F_2(X)$ un subconjunto minimal tal que $\{\{x_0\}\} \neq A$. Entonces:

i) El subconjunto $\{x_0\} \notin A$.

Ya que si $\{x_0\} \in A$, se tiene que $\{\{x_0\}\} = A$. Lo cual contradice la hipótesis.

ii) El subconjunto A no tiene puntos de la forma $\{x\}$, con $x \in X$.

Ya que si existe $x \in X$, con $\{x\} \in A$. Como $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado e invariante, entonces $\omega(x, f)$ contiene un conjunto minimal. Por hipótesis se sigue que $x_0 \in \omega(x, f)$. Luego $\{x_0\} \in \omega(\{x\}, f_2) \subseteq A$. Por lo tanto $\{x_0\} \in A$. Esto último contradice el inciso *i*).

Tenemos $A \neq \{\{x_0\}\}$ y, por el inciso *ii*), existen $x, y \in X$, con $x \neq y$, tales que $\{x, y\} \in A$. Por ser $\{x_0\}$ el único subconjunto minimal de X, se cumple que $x_0 \in \omega(x, f)$. Luego existe una sucesión estrictamente creciente, $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x_0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $z_0 \in X$, tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(y) = z_0.$$

Se sigue que

$$\lim_{i\to\infty} (f_2)^{n_i}(\{x, y\}) = \{x_0, z_0\}.$$

Esto prueba que

$$\{x_0, z_0\} \in \omega(\{x, y\}, f_2) \subseteq A.$$

Luego $\{x_0, z_0\} \in A$. Como $\{x_0\}$ es el único subconjunto minimal de X, se tiene que $x_0 \in \omega(z_0, f)$. Se sigue que $\{x_0\} \in \omega(\{x_0, z_0\}, f_2) \subseteq A$. Con lo cual

$\{x_0\} \in A$, y esto contradice el inciso i). Por lo tanto, el único subconjunto minimal de $F_2(X)$ es $\{\{x_0\}\}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1).

Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis $\{x_0\} \in \omega(\{x, y\}, f_2)$. Luego existe una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{i \to \infty} (f_2)^{n_i}(\{x, y\}) = \{x_0\}.$$

Esto implica que

$$\lim_{i \to \infty} d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) = 0.$$

Por lo tanto (x, y) es una pareja proximal. $\square$

El siguiente teorema nos dice que la propiedad de ser proximal es equivalente en los sistemas inducidos en los productos cartesianos y en los productos simétricos.

Teorema 135. *Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *El sistema (X, f) es proximal.*

(2) *El sistema $(X^n, f^{\times n})$ es proximal.*

(3) *El sistema $(F_n(X), f_n)$ es proximal.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2).

Supongamos que (X, f) es un sistema proximal, luego por el Teorema 134 existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$ y $\{x_0\}$ es el único subconjunto minimal de (X, f). Veamos que $\{(x_0, x_0, \ldots, x_0)\}$ es el único subconjunto minimal en X^n bajo la función $f^{\times n}$.

Supongamos que existe $A \subseteq X^n$ un subconjunto minimal en $(X^n, f^{\times n})$ tal que

$$\{(x_0, x_0, \ldots, x_0)\} \neq A.$$

Se sigue que:

i) $(x_0, x_0, \ldots, x_0) \notin A$.

ii) Dado $x \in X$, los elementos de la forma $(x, x, \ldots, x)$, no pertenecen al subconjunto A. Ya que si existe $x \in X$ tal que $(x, x, \ldots, x) \in A$, como $x_0 \in \omega(x, f)$, se sigue que $(x_0, x_0, \ldots, x_0) \in \omega((x, x, \ldots, x), f^{\times n})$. Por ser A un conjunto invariante, bajo $f^{\times n}$, se tiene que $\omega((x, x, \ldots, x), f^{\times n}) \subseteq A$. Luego $(x_0, x_0, \ldots, x_0) \in A$. Lo cual contradice el inciso i).

De i) e ii) se sigue que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de X tales que:

a) $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$.

b) Existe $2 \leq j \leq n$ tal que la cardinalidad del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es igual a j, y
$j = \text{mín}\{2 \leq m :$ existe $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A$ con la cardinalidad del conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ igual a $m\}$.

Sean $s, r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $s < r$, tales que $x_r \neq x_s$. Por hipótesis la pareja (x_r, x_s) es proximal, luego existen una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}$ en $\mathbb{N}$ y $z_0 \in X$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_r) = z_0 = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_s).$$

Sin perdidad de generalidad podemos suponer que para cada

$$l \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{r, s\},$$

existe $z_l \in X$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_l) = z_l.$$

Entonces,

$$(z_1, z_2, \ldots, \underbrace{z_0}_{s}, \ldots, \underbrace{z_0}_{r}, \ldots, z_n) \in \omega((x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_s, \ldots, x_n), f^{\times n})$$

y

$$\omega((x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_s, \ldots, x_n), f^{\times n}) \subseteq A.$$

Observemos que la cardinalidad del conjunto

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_0, \ldots, z_0, z_{r+1}, \ldots, z_n\}$$

es estrictamente menor que j. Además

$$(z_1, z_2, \ldots, \underbrace{z_0}_{s}, \ldots, \underbrace{z_0}_{r}, z_{r+1}, \ldots, z_n) \in A.$$

Lo cual contradice el inciso *b*). Por lo tanto el único subconjunto minimal de $(X^n, f^{\times n})$ es $\{(x_0, x_0, \ldots, x_0)\}$. Se sigue, por el Teorema 134, que el sistema $(X^n, f^{\times n})$ es proximal.

(2) $\Longrightarrow$ (3).

Sean $A, B \in F_n(X)$ con $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ tales que la cardinalidad del subconjunto A es $1 \leq k \leq n$ y la cardinalidad del subconjunto B es $1 \leq r \leq n$. Consideramos los puntos

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_k, \ldots, x_k) \text{ y } \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r, y_r, \ldots, y_r)$$

de X^n. Por hipótesis $(\overline{x}, \overline{y})$ es una pareja proximal de $f^{\times n}$. Por las propiedades de la métrica de Hausdorff se sigue que

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \text{ y } B = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

es un pareja proximal de f_n.

(3) $\implies$ (1). Sean $x, y \in X$. Por hipótesis $(\{x\}, \{y\})$ es una pareja proximal de f_n. Se sigue que (x, y) es una pareja proximal de f. $\square$

Capítulo 5

Funciones fuertemente mezclantes

En este capítulo introducimos el concepto de función fuertemente mezclante. El trabajo *Variations on the Concept of Topological Transitivity*, [**2**], de E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, nos motivó hacia su definición. En el mismo trabajo se definen las propiedades de fuertementente exactamente transitiva y fuertemente transitiva en productos y se hacen la siguiente pregunta:

¿Fuertemente exactamente transitiva implica fuertemente transitiva en productos?

Con las herramienteas que desarrollamos en este capítulo damos una equivalencia de dicha pregunta en términos de hiperespacios. Esta nueva equivalencia nos permitará trabajar la pregunta en los sistemas inducidos en los hiperespacios.

Demostraremos que la propiedad de ser fuertemente mezclante es equivalente en cualquier producto simétrico. Sin embargo, veremos que el hecho de que (X, f) sea fuertemente mezclante no implica que $(2^X, 2^f)$ sea fuertemente mezclante.

Mostraremos también que las propiedades de LES, fuertemente transitivo y fuertemente mezclante son equivalentes para la función $2^f : 2^X \to 2^X$.

Además, demostraremos que las propiedades de ser LES, fuertemente mezclante, fuertemente exactamente transitivo y fuertemente transitiva en productos son equivalentes en los sistemas (I, f), donde I es un intervalo cerrado no degenerado de $\mathbb{R}$. Sin embargo, mostraremos que hay un continuo X, tal que (X, f) es fuertemente mezclante pero no es LES.

5.1. Introducción

A continuación mencionamos la definición de un sistema dinámico fuertemente mezclante.

Definición 136. Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que f es *fuertemente mezclante* si para toda $x \in X$ y para todo subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x \in f^n(U)$. Esta propiedad la abreviamos con FM.

Recordemos que dado $x \in X$ y U un conjunto abierto de X, denotamos a $N(U, x)$, por

$$N(U, x) = \{n \in \mathbb{N} : x \in f^n(U)\}.$$

De la definición de $N(U, x)$ es claro la siguiente observación.

Observación 137. Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces $f : X \to X$ es fuertemente mezclante si y sólo si para toda $x \in X$ y para todo conjunto abierto no vacío, U de X, $N(U, x)$ es cofinito.

De las definiciones se sigue la Observación 138.

Observación 138. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Entonces

i) *LES* $\Rightarrow$ *fuertemente mezclante* $\Rightarrow$ *mezclante* $\Rightarrow$ *transitivo.*

ii) *Fuertemente mezclante* $\Rightarrow$ *fuertemente transitivo* $\Rightarrow$ *transitivo.*

Observación 139. Las implicaciones recíprocas a las dadas en la Observación 138 no se cumplen.

i) Transitividad no implica ser mezclante. Sea $f : S^1 \to S^1$ una rotación irracional sobre el círculo S^1. Es conocido que f es transitiva, pero no es mezclante.

ii) Transitividad no implica transitividad fuerte. Sean $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $\sigma : X \to X$ la función shift,

$$\sigma(\ldots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2 \ldots) = (\ldots t_{-2}t_{-1}t_0 \cdot t_1t_2 \ldots).$$

El sistema dinámico (X, σ) es transitivo. Sea $\mathbf{x} = (\ldots 00{\cdot}00 \ldots) \in X$. Como $\sigma^{-1}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$, el sistema (X, σ) no es fuertemente transitivo.

iii) Mezclante no implica fuertemente mezclante. El sistema dinámico (X, σ) dado en el inciso *ii*) es mezclante y no es fuertemente mezclante.

iv) Fuertemente transitivo no implica fuertemente mezclante. Cualquier rotación irracional sobre el círculo S^1, $f : S^1 \to S^1$, es fuertemente transitiva. Como f no es mezclante, no es fuertemente mezclante.

v) Fuertemente mezclante no implica localmente eventualmente suprayectiva. El Ejemplo 57, en la página 30, nos muestra un subshift tipo gap que es fuertemente mezclante pero que no es LES.

En la Sección 5.2 estudiamos la propiedad de ser fuertemente mezclante en los productos simétricos y en productos cartesianos.

5.2. Resultados en productos simétricos y productos cartesianos

Un sistema (X, f) es *fuertemente transitivo en productos*, si para toda $n \in \mathbb{N}$, el sistema $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente transitivo (ver [**2**, Definition 2.7, pág. 230]).

Siguiendo la idea al definir fuertemente transitiva en productos, definimos fuertemente mezclante en productos.

Definición 140. Un sistema dinámico (X, f) es *fuertemente mezclante en productos (FMP)* si para toda $n \in \mathbb{N}$, el sistema $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente mezclante.

Enseguida demostraremos que FMP es equivalente a fuertemente mezclante.

Proposición 141. *El sistema (X, f) es fuertemente mezclante si y sólo si el sistema (X, f) es fuertemente mezclante en productos.*

Demostración. $\Rightarrow$). Supongamos que (X, f) es FM. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ elementos de X y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_i$, $x_i \in f^m(U_i)$. Sea $N = \text{máx}\{N_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Se cumple que si $m \geq N$, entonces $x_i \in f^m(U_i)$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esto prueba que $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente mezclante. Por lo tanto, (X, f) es FMP.

$\Leftarrow$). Es inmediato de la definición de FMP, ya que $(X^1, f^{\times 1})$ es equivalente al sistema (X, f). $\square$

Observación 142. Sabemos por el Ejemplo 33, página 18, que la propiedad de ser fuertemente transitiva no es equivalente a la propiedad de ser fuertemente transitiva en productos. Mientras que, como acabamos de ver, la propiedad de ser fuertemente mezclante sí es equivalente a la propiedad de ser fuertemente mezclante en productos.

La propiedad de ser fuertemente mezclante es equivalente para productos simétricos y para productos cartesianos, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 143. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1) *(X, f) es fuertemente mezclante.*
2) *$(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente mezclante.*
3) *$(F_n(X), f_n)$ es fuertemente mezclante.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). En la Proposición 141 demostramos que si (X, f) es fuertemente mezclante, entonces, para toda $m \in \mathbb{N}$, $(X^m, f^{\times m})$ es fuertemente mezclante; en particular, $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente mezclante.

2) $\Rightarrow$ 3). Sean $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in F_n(X)$ y $U = \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ un subconjunto abierto básico de $F_n(X)$.

Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (f^{\times n})^m (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n).$$

Se sigue que, si $m \geq N$, entonces

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in (f_n)^m (\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle).$$

Por lo tanto, $(F_n(X), f_n)$ es fuertemente mezclante.

3) $\Rightarrow$ 1). Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \in (f_n)^m(\langle U \rangle)$ para cada $m \geq N$. Se sigue que $x \in f^m(U)$. Por lo tanto (X, f) es fuertemente mezclante. $\square$

La Proposición 141 nos ayuda a demostrar fácilmente que fuertemente mezclante implica fuertemente transitiva en productos.

Corolario 144. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es fuertemente mezclante, entonces (X, f) es fuertemente transitivo en productos.*

Demostración. Si (X, f) es fuertemente mezclante, entonces por la Proposición 141, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente mezclante y, por lo tanto, $(X^n, f^{\times n})$ es fuertemente transitivo. Con lo cual concluimos que (X, f) es fuertemente transitivo en productos. $\square$

El sistema (X, f) dado en los incisos *ii*) y *iii*) de la Observación 139 es mezclante pero no es fuertemente transitivo. Por lo tanto, no es fuertemente transitivo en productos.

En [**2**, pág. 348], E. Akin, J. Auslander y A. Nagar hacen la siguiente pregunta.

Pregunta 145. ¿Si (X, f) es fuertemente transitiva en productos, entonces (X, f) es mezclante?

Con lo que hemos desarrollado sobre el tema de funciones fuertemente mezclantes, nos parece natural hacernos la siguientes preguntas.

Pregunta 146. ¿Si (X, f) es fuertemente transitiva en productos, entonces (X, f) es fuertemente mezclante?

Pregunta 147. ¿Si (X, f) es fuertemente transitiva en productos y mezclante, entonces (X, f) es fuertemente mezclante? Es decir, ¿la presencia simultánea de las propiedades de mezclante y fuertemente transitiva en productos es equivalente a fuertemente mezclante?

Pregunta 148. ¿En productos simétricos las propiedades de transitividad fuerte y fuertemente mezclante son equivalentes?

La siguiente observación nos dice que las propiedades de mezclante y fuertemente mezclante no son equivalentes en los productos simétricos.

Observación 149. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. El sistema (X, f) es fuertemente mezclante si y sólo si el sistema $(F_n(X), f_n)$ es fuertemente mezclante. También, sabemos que el sistema (X, f) es mezclante si y sólo si $(F_n(X), f_n)$ es mezclante. Como mezclante no implica fuertemente mezclante, el hecho de que $(F_n(X), f_n)$ sea mezclante, no implica que $(F_n(X), f_n)$ sea fuertemente mezclante.

5.3. Resultados en subshifts tipo gap

Los subshifts tipo gap los definimos en la Sección 2.2. Con respecto a la propiedad de fuertemente mezclante tenemos el siguiente resultado para los subshifts tipo gap.

Teorema 150. *Sea (G_P, g_P) un subshift tipo gap. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) (G_P, g_P) *es débilmente mezclante.*
2) (G_P, g_P) *es mezclante.*
3) (G_P, g_P) *es fuertemente mezclante.*
4) (G_P, g_P) *es fuertemente transitivo en productos.*
5) (G_P, g_P) *es exactamente transitivo.*

Demostración. 1) $\implies$ 2). Se sigue de la Proposición 55.

2) $\implies$ 3). Sean $\mathbf{x} \in G_P$ y $u = u_1u_2 \ldots u_k$ una palabra de G_P. Veamos que $N([u], \mathbf{x})$ es cofinito.

Caso 1. Si $\mathbf{x} = 0^\infty$, es claro que $u0^\infty \in G_P$. Se sigue que:

$$\{i : i \geq k\} \subseteq N([u], \mathbf{x}).$$

Caso 2. Si $\mathbf{x} \neq 0^\infty$. Sea $i = \text{mín}\{j : x_j = 1\}$. Considera las palabras $u = u_1 u_2 \ldots u_k$ y $x_1 x_2 \ldots x_i$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, existe una palabra v tal que $|v| = n$ y la palabra $uvx_1x_2 \ldots x_i \in L(G_P)$. Como $x_i = 1$ y $\mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots x_i x_{i+1} \ldots \in G_P$, por el Lema 44 se sigue que el elemento de Σ_2 dado por $uvx_1x_2 \ldots x_i x_{i+1} \ldots$ está en G_P, es decir $uv\mathbf{x} \in G_P$.

Hemos probado que para cada $n \geq N$, existe una palabra v tal que $|v| = n$ y $uv\mathbf{x} \in G_P$. Esto prueba que $\{j : j \geq N + k\} \subseteq N([u], \mathbf{x})$. Por lo tanto $N([u], \mathbf{x})$ es cofinito. Con lo cual demostramos que (X, f) es fuertemente mezclante.

3) $\implies$ 4). Se demostró en el Corolario 144.

Las demostración de la implicación 4) $\implies$ 5) se sigue inmediatamente de [**2**, Teorema 2.22, págs. 237 y 238] y la prueba de 5) $\implies$ 1) se encuentran en [**2**, Teorema 2.20, pág. 237]. Estas pruebas se siguen directamente de las definiciones y se cumplen de manera general para cualquier sistema dinámico (X, f). □

Observación 151. En el inciso v) de la Observación 139, argumentamos que hay un subshift tipo gap que es fuertemente mezclante pero que no es LES. Ese mismo ejemplo muestra que las otras propiedades dadas en la Proposición 150 no implican la propiedad de ser LES.

5.4. Algunas observaciones sobre el sistema inducido $(2^X, 2^f)$

En el año 2017 E. Akin, J. Auslander y A. Nagar demostraron en [**1**, Teorema 6.3, págs. 2052-2053] que en un sistema dinámico (X, f) las siguientes condiciones son equivalentes:

- La función $f : X \to X$ es LES.
- La función $2^f : 2^X \to 2^X$ es LES.
- La función $2^f : 2^X \to 2^X$ es fuertemente transitiva.

La propiedad fuertemente mezclante también es equivalente a la propiedad fuertemente transitiva en el hiperespacio 2^X, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 152. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) La función $f : X \to X$ es LES.

ii) *La función* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es LES.*

iii) *La función* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es fuertemente mezclante.*

iv) *La función* $2^f : 2^X \to 2^X$ *es fuertemente transitiva.*

Demostración. Por el Teorema 6.3 de [**1**], tenemos que $i) \implies ii)$. Por la Observación 138 se siguen las implicaciones $ii) \implies iii)$ y $iii) \implies iv)$. Otra vez por el Teorema 6.3 de [**1**], tenemos que $iv) \implies i)$. □

El siguiente resultado es demostrado en [**5**, Teorema 3, pág. 683].

Proposición 153. *El sistema inducido* $(2^X, 2^f)$ *es mezclante si y sólo si el sistema* (X, f) *es mezclante.*

Observación 154. La propiedad de ser mezclante no implica la propiedad de ser fuertemente mezclante para funciones inducidas en el hiperespacio 2^X.

Demostración. Sea (X, f) el subshift dado en el Ejemplo 57, $(X, f) = (G_P, g_P)$. Como el sistema (X, f) es mezclante, entonces el sistema inducido $(2^X, 2^f)$ es mezclante. Como (X, f) no es localmente eventualmente suprayectivo, entonces el sistema inducido $(2^X, 2^f)$ no es fuertemente mezclante. □

Observación 155. Sea (X, f) el subshift tipo gap descrito en el Ejemplo 57, $(X, f) = (G_P, g_P)$. Este sistema es fuertemente mezclante. Por la Proposicion 143 y el Teorema 150 para cada $n \in \mathbb{N}$, $(F_n(X), f_n)$ es fuertemente mezclante, pero esto no es suficiente para asegurar que el sistema $(2^X, 2^f)$ sea fuertemente mezclante.

5.5. Funciones fuertemente exactamente transitivas

En [**2**, Definición 2.7, pág. 30] se da la definición de función fuertemente exactamente transitivo.

Definición 156. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Decimos que (X, f) es un sistema *fuertemente exactamente transitivo* si para cualquier par U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de X, se cumple que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) \cap f^n(V) = X.$$

Esta propiedad la abreviamos como FET.

En el artículo [**2**] se demuestran algunas propiedades de los sistemas FET. En esta sección daremos algunas definiciones equivalentes para esta definición, veremos que la propiedad de ser fuertemente mezclante y FET cumplen una relación parecida a las propiedades de ser mezclante y débilmente mezclante.

En la siguiente observación damos una propiedad equivalente a la propiedad de ser FET. Esta equivalencia se sigue rápidamente de la definición de ser FET.

Observación 157. Un sistema dinámico, (X, f), es fuertemente exactamente transitivo (FET) si y sólo si para toda $x \in X$ y para cualesquiera dos conjuntos abiertos no vacíos, U, V, de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tales que $x \in f^n(U) \cap f^n(V)$.

Observemos que en la Definición 156 para definir sistema dinámico FET se usan solamente dos subconjuntos abiertos no vacíos de X. La siguiente proposición nos dice que cuando un sistema dinámico es FET, se puede usar una cantidad finita de subconjuntos abiertos no vacíos.

Proposición 158. *Si (X, f) es FET, entonces para cualesquiera k subconjuntos abiertos no vacíos, $U_1, U_2, \ldots, U_k$, de X se tiene que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U_1) \cap f^n(U_2) \cap \cdots \cap f^n(U_k) = X.$$

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Sen $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Primero veremos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U_1) \cap f^n(U_2) \cap f^n(U_3) = X.$$

Sean V_1, V_2, dos subconjuntos abiertos de X, tales que $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \subseteq cl(V_1) \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq cl(V_2) \subseteq U_2$. Por ser (X, f) FET se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^n(V_1) \cap f^n(V_2) = X,$$

se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^n(cl(V_1)) \cap f^n(cl(V_2)) = X.$$

Por el Teorema de Categoría de Baire, [**23**, Corolario 16, pag. 139], existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$int(f^m(cl(V_1)) \cap f^m(cl(V_2))) \neq \emptyset.$$

De lo cual se deduce que

$$W = int(f^m(U_1) \cap f^n(U_2)) \neq \emptyset.$$

Se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^i(f^{-m}(W)) \cap f^i(U_3) = X. \tag{6}$$

Como f es suprayectiva $f^m(X) = X$, además

$$f^m\left(f^i(f^{-m}(W)) \cap f^i(U_3)\right) \subseteq f^i(W) \cap f^{i+m}(U_3)$$

y

$$f^i(W) \cap f^{i+m}(U_3) \subseteq f^{i+m}(U_1) \cap f^{i+m}(U_2) \cap f^{i+m}(U_3)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. De estas contenciones y de la ecuación (6) se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{i+m}(U_1) \cap f^{i+m}(U_2) \cap f^{i+m}(U_3) = X.$$

Procediendo de igual forma, al usar inducción matemática, obtenemos el mismo resultado para una cantidad finita de k subconjuntos abiertos no vacíos. $\square$

Corolario 159. *Si (X, f) es FET, entonces para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X y para toda $x \in X$ se tiene que $N(U, x)$ es grueso.*

Demostración. Sean U un subconjunto abierto no vacío de X, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes $n+1$ subconjuntos abiertos, no vacíos, de X,

$$U, f^{-1}(U), f^{-2}(U), \ldots, f^{-n}(U).$$

Por la Proposición 158, existe $m > n$ tal que

$$x \in f^m(U) \cap f^m(f^{-1}(U)) \cap \cdots \cap f^m((f^{-n}(U)).$$

Se sigue que $\{m, m-1, m-2, \ldots, m-n\} \subseteq N(U, x)$. Por lo tanto $N(U, x)$ es un conjunto grueso. $\square$

La afirmación recíproca a la contenida en el Corolario 159 también se cumple, lo demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 160. *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que para todo conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ y todo $x \in X$, $N(U, x)$ es grueso. Entonces (X, f) es FET.*

Demostración. Sean U, V, dos conjuntos abiertos no vacíos de X, y $x \in X$. De la hipótesis se sigue que (X, f) es transitiva, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-m}(V) \neq \emptyset$. Como $N(U \cap f^{-m}(V), x)$ es grueso, para esa m, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in f^n(U \cap f^{-m}(V)), x \in f^{n+1}(U \cap f^{-m}(V)), \ldots, x \in f^{n+m}(U \cap f^{-m}(V)).$$

Como $f^n(U \cap f^{-m}(V)) \subseteq f^n(U)$, $x \in f^n(U)$. También

$$x \in f^{n+m}(U \cap f^{-m}(V)) \subseteq f^n(V).$$

Por lo tanto $x \in f^n(U) \cap f^n(V)$.

Esto prueba que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) \cap f^n(V)$. □

De la Proposición 160 y el Corolario 159 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 161. *El sistema (X, f) es FET si y sólo si para toda $x \in X$ y para todo conjunto abierto no vacío de X, U, se cumple que $N(U, x)$ es grueso.*

Recordemos que dados un sistema dinámico (X, f) y U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X, el conjunto $N(U, V)$ se define como

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$$

En [**21**, pág. 379] se menciona la siguiente proposición.

Proposición 162. *Un sistema dinámico (X, f) es débilmente mezclante si y sólo si para todo par, U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de X, se cumple que $N(U, V)$ es grueso.*

La siguiente observación se sigue rápidamente del Corolario 161 y la Proposición 162.

Observación 163. Sea (X, f) es un sistema dinámico discreto. Si (X, f) es FET, entonces (X, f) es débilmente mezclante.

El Corolario 161 implica inmediatamente la siguiente observación.

Observación 164. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si (X, f) es fuertemente mezclante, entonces (X, f) es FET.

La Proposición 162 y el Corolario 161 nos hablan de conjuntos, $N(U, V)$. Para débilmente mezclante se usan dos subconjuntos abiertos, U, V, de X y se pide que $N(U, V)$ sea grueso. Para la definición de FET se usa un subconjunto abierto U de X y un subconjunto $V = \{x\}$ y se pide que $N(U, x)$ también sea grueso. Por otro lado en la definición de mezclante se pide que el conjunto $N(U, V)$ sea cofinito y para la defınción de fuertemente mezclante se piede que $N(U, x)$ sea cofinito. Además tenemos implicaciones similares

$$\text{Mezclante} \implies \text{débilmente mezclante.}$$

$$\text{Fuertemente mezclante} \implies \text{fuertemente exactamente transitivo.}$$

Esto nos dice que la propiedad de ser mezclante y fuermente mezclante son parecidas, en cierta forma, al igual que débilmente mezclante con fuertemente exactamente transitivo.

Otra equivalencia de ser FET involucra al hiperespacio 2^X. Lo demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 165. *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Entonces (X, f) es FET si y sólo si, para toda $x \in X$, la semiórbita negativa $o^-(\{x\}, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X.*

Demostración. $\Rightarrow$). Sean $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Por la Proposición 158, existen $x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2, \ldots,\ x_n \in U_n$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $f^m(x_i) = x$. Se sigue que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y

$$(2^f)^m(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \{x\}.$$

Por lo tanto $o^-(\{x\}, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X.

$\Leftarrow$). Sean $x \in X$ y U, V dos subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como $o^-(\{x\}, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X. Existen $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \langle U, V\rangle$, tales que $f^n(A) = \{x\}$. Como $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, existen $z \in U \cap A$ y $y \in V \cap A$ tales que $f^n(z) = x$ y $f^n(y) = x$. Con esto concluimos que $x \in f^n(U) \cap f^n(V)$. $\square$

Un resultado parecido a la Proposición 165, lo tenemos para funciones fuertemente transitivas en productos.

Proposición 166. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces (X, f) es FTP si y sólo si para todo $F \subseteq X$, $F \neq \emptyset$, y F finito, se cumple que la semiórbita negativa $o^-(F, 2^f)$ es un subconjunto denso en 2^X.*

Demostración. $\Rightarrow$). Sea $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ con $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m$ subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Caso 1. Si $m < n$. Consideremos el conjunto abierto de X^n dado por

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times U_m \times \cdots \times U_m,$$

consideramos el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$. Por hipótesis se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (f^{\times n})^N(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times U_m \times \cdots \times U_m).$$

Entonces existe $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ tal que $f^N(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Caso 2. Si $m > n$. Ahora consideramos el punto de X^m dado por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots, x_n).$$

Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots, x_n) \in (f^{\times m})^N(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m).$$

Se sigue que existe $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle$ tal que $f^N(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

En ambos casos tenemos que $o^-(F, 2^f) \cap (\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle) \neq \emptyset$. Por lo tanto $o^-(F, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X.

$\Leftarrow$). Veamos ahora que (X, f) es FTP. Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de X, y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subconjuntos abiertos de X tales que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que

$$V_i \neq \emptyset \text{ y } V_i \subseteq cl(V_i) \subseteq U_i.$$

Veamos primero que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(cl(V_1)) \cap f^k(cl(V_2)) \cap \cdots \cap f^k(cl(V_n)) = X. \tag{7}$$

Sea $x \in X$. Por hipótesis $o^-(\{x\}, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X. Entonces existen $N \in \mathbb{N}$ y $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$ tales que $f^N(A) = \{x\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $z_i \in V_i$ tal que $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subseteq A$. Se sigue que $f^N(z_i) = x$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Lo cual prueba que

$$x \in f^N(V_1) \cap f^N(V_2) \cap \cdots \cap f^N(V_n) \subseteq f^N(cl(V_1)) \cap f^N(cl(V_2)) \cap \cdots \cap f^N(cl(V_n)).$$

Por lo tanto se cumple la ecuación (7).

Del Teorema de Categoría de Baire, [**23**, Corolario 16, pág. 139], se sigue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$int(f^k(cl(V_1)) \cap f^k(cl(V_2)) \cap \cdots \cap f^k(cl(V_n))) \neq \emptyset.$$

De esto se deduce que

$$W = inf(f^k(U_1) \cap f^k(U_2) \cap \cdots \cap f^k(U_n)) \neq \emptyset.$$

Como $o^-(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, 2^f)$ es un subconjunto denso en 2^X, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in (2^f)^M(\langle W\rangle).$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $w_i \in W$ tal que $f^M(w_i) = x_i$. Como cada

$$w_i \in f^k(U_1) \cap f^k(U_2) \cap \cdots \cap f^k(U_n),$$

podemos tomar un $y_i \in U_i$ tal que $f^k(y_i) = w_i$. Se sigue que $f^{k+M}(y_i) = x_i$, y $y_i \in U_i$. Esto prueba que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (f^{\times n})^{k+M}(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n).$$

Lo cual implica que (X, f) es FTP. $\square$

De las Proposiciones 166 y 165 obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 167. *Si* (X, f) *es fuertemente transitivo en productos, entonces* (X, f) *es fuertemente exactamente transitivo.*

Observación 168. En [**2**, pág. 248], se plantea la siguiente pregunta:

¿Fuertemente exactamente transitivo implica fuertemente transitivo en productos? Por la Proposiciones 165 y 166 esta pregunta es equivalente a la siguiente pregunta:

¿Si para toda $x \in X$, la semiórbita, $o^-(\{x\}, 2^f)$ es densa en 2^X, entonces para todo subconjunto finito no vacío $F \subseteq X$, la semiórbita, $o^-(F, 2^f)$ es un subconjunto denso de 2^X?

Concluimos este sección con algunas preguntas relacionadas con los temas que hemos analizado.

Pregunta 169. ¿Si (X, f) es FET, entonces es fuertemente mezclante?

Pregunta 170. ¿Si (X, f) es fuertemente transitiva y débilmente mezclante, entonces (X, f) es fuertemente transitiva en productos‘?

5.6. Fuertemente mezclante y LES en continuos

El Ejemplo 57, página 30, nos da un sistema (X, f) que es fuertemente mezclante pero que no es LES. Observemos que en ese ejemplo X es un espacio totalmente disconexo. En esta sección mostramos un espacio métrico compacto y conexo X, es decir un continuo, y una función continua $f : X \to X$ tal que el sistema (X, f) es fuertemente mezclante, pero que no es LES. Para llegar a ese ejemplo utilizaremos algunas herramientas que a continuación construimos.

La siguiente observación es un hecho conocido y es muy fácil de probar.

Observación 171. Sean (X, f), (Y, g) dos sistemas dinámicos discretos. Sea $p : X \to Y$ una función tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir que para toda $x \in X$, $p(f(x)) = g(p(x))$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in X$, se tiene que

$$p(f^n(x)) = g^n(p(x)).$$

Si el diagrama anterior conmuta y p es una función continua y suprayectiva, diremos que el sistema (Y, g) es *semiconjugado* al sistema (X, f), o simplemente, que g es *semiconjugada* a f.

Recordemos que dadas una función $f : X \to X$, un punto $x \in X$ y un subconjunto abierto no vacío, U de X denotamos a $N(U, x, f)$ como el subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por

$$N(U, x, f) = \{n \in \mathbb{N} : x \in f^n(U)\}.$$

En caso de que sólo estemos trabajando con un sistema, (X, f), denotaremos a $N(U, x, f)$ solamente como $N(U, x)$.

La siguiente proposición nos dice que un sistema semiconjugado a otro sistema fuertemente mezclante es fuertemente mezclante.

Proposición 172. *Sean (X, f) un sistema dinámico fuertemente mezclante y (Y, g) otro sistema dinámico. Supongamos que existe $p : X \to Y$ una función continua y suprayectiva tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces $g : Y \to Y$ es fuertemente mezclante.

Demostración. Sean U un subconjunto abierto no vacío de Y, y sea $y \in Y$. Veamos que $N(U, y)$ es cofinito.

Sea $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Como f es fuertemente mezclante, tenemos que $N(p^{-1}(U), x)$ es cofinito. Veamos que $N(p^{-1}(U), x) \subseteq N(U, y)$. Sea $n \in N(p^{-1}(U), x)$. Entonces existe $z \in p^{-1}(U)$ tal que $x = f^n(z)$. Se sigue que $p(x) = p(f^n(z))$. Por la Observación 171 tenemos que

$$y = p(x) = p(f^n(z)) = g^n(p(z)).$$

Como $p(z) \in U$, se sigue que $y \in g^n(U)$. Luego $n \in N(U, y)$. Por lo tanto $N(p^{-1}(U), x) \subseteq N(U, y)$. Como $N(p^{-1}(U), x)$ es un conjunto cofinito, entonces $N(U, y)$ es un conjunto cofinito. $\square$

Definición 173. Dados dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g), definimos la función producto de f con g dada por:

$$\text{para cada } (x, y) \in X \times Y,\ (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

El sistema $(X \times Y, f \times g)$ es llamado el *sistema producto de f con g*.

Lo que sigue a continuación es demostrar que el producto de dos funciones fuertemente mezclantes es fuertemente mezclante.

La siguiente observación se sigue de las definiciones.

Observación 174. Sean (X, f), (Y, g) dos sistemas dinámicos discretos y $(X \times Y, f \times g)$ el sistema producto inducido por f y g. Entonces para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X y de Y, respectivamente, y para todo $(x, y) \in X \times Y$, se tiene que

$$N(U \times V, (x, y), f \times g) = N(U, x, f) \cap N(V, y, g).$$

Demostración. Sean $(x, y) \in X \times Y$, con $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$, subconjuntos abiertos no vacíos, y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(x, y) \in (f \times g)^n(U \times V)$ si y sólo si $x \in f^n(U)$ y $y \in f^n(V)$. De esta equivalencia se sigue la Observación 174. □

Proposición 175. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos discretos. Entonces el sistema $(X \times Y, f \times g)$ es fuertemente mezclante si y sólo si (X, f) y (Y, g) son fuertemente mezclantes.*

Demostración. Se sigue directamente de la Observación 174. □

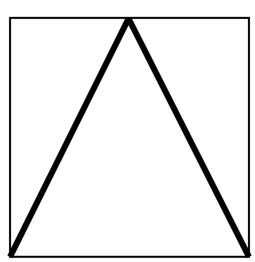
En la siguiente proposición veremos que el producto de dos funciones LES es LES.

Proposición 176. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos. Entonces el sistema $(X \times Y, f \times g)$ es LES si y sólo si (X, f), (Y, g) son LES.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ dos subconjuntos abiertos no vacíos. Entonces $(f \times g)^n(U \times V) = X \times Y$ si y sólo si $f^n(U) = X$ y $f^n(V) = Y$. De este hecho se sigue la Proposición 176. □

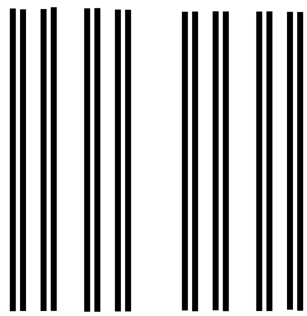
La Proposiciones 176 y 175 nos ayudan a encontrar más ejemplos de sistemas fuertemente mezclantes que no son LES. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 177. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función tienda, cuya gráfica se muestra a continuación.



Sea $g_P : G_P \to G_P$, el subshift tipo gap inducido por $P \subseteq \mathbb{N}_0$ dado en el Ejemplo 57. Sabemos que g_P es una función fuertemente mezclante, pero no es LES. También sabemos que la función tienda, $T : [0, 1] \to [0, 1]$, es una función LES. Se sigue de la Proposiciones 175 y 176 que el sistema $(G_P \times I, g_P \times T)$ es fuertemente mezclante pero no es LES.

Recordemos que G_P se puede ver como un subespacio del conjunto de Cantor. De hecho, G_P es un conjunto de Cantor. A continuación mostramos un esbozo gráfico del conjunto $G_P \times [0, 1]$.



Una modificación del Ejemplo 177 nos permite dar una función continua, $f : X \to X$, definida sobre un continuo X, que es fuertemente mezclante pero que no es LES.

Ejemplo 178. Sean $([0, 1], T)$ y (G_P, g_P) los sistemas dados en el Ejemplo 177. En $G_P \times [0, 1]$ definimos la siguiente relación: Dados $(a, b), (c, d)$ elementos de $G_P \times [0, 1]$

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } b = d = 0, \text{ o } (b > 0 \text{ y } (a, b) = (c, d)$$

Las clases de equivalencia que genera esta relación de equivalencia son:

1) Si $b = 0$, $[(a, b)] = \{(x, 0) \in G_P \times [0, 1] : x \in G_P\}$.
2) Si $b > 0$, $[(a, b)] = \{(a, b)\}$.

Sean $Z = G_P \times [0, 1]$ y $Z/\sim$ el espacio cociente generado por la relación $\sim$ en Z. Sea $q : Z \to Z/\sim$ la función proyección, dada por

$$q(a, b) = [(a, b)].$$

Dotamos a $Z/\sim$ con la topología cociente. Se sabe que $p : Z \to Z/\sim$, es una función continua. Observemos que por ser 0 un punto fijo de la función tienda, se cumple que para todo (a, b) y (c, d) en $G_P \times [0, 1]$ se tiene que:

$$\text{(8)} \qquad \text{Si } (a, b) \sim (c, d), \text{ entonces } (g_P(a), T(b)) \sim (g_P(c), T(d)).$$

Por la ecuación (8), tenemos que la función $h : Z/\sim \to Z/\sim$ dada por

$$h([(a, b)]) = [(g_P(a), T(b))].$$

está bien definida.

Notamos también que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
G_P \times [0,1] \arrow[r, "g_P \times T"] \arrow[d, "q"'] & G_P \times [0,1] \arrow[d, "q"] \\
Z/\sim \arrow[r, "h"] & Z/\sim
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

es conmutativo. Lo cual implica que la función $h : Z/\sim \to Z/\sim$ es una función continua. Sabemos que el sistema (G_P, g_P) no es LES. Entonces existe un subconjunto abierto no vacío, $U \subseteq G_P$, tal que para toda $n \geq 0$. Se cumple que

$$(g_P)^n(U) \neq G_P. \tag{10}$$

Considera el subconjunto abierto $U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ de $G_P \times [0,1]$. Observemos que

$$q^{-1}\left(q\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) = U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Esto indica que el subconjunto $q\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ de $Z/\sim$ es un subconjunto abierto. Por la conmutatividad del diagrama dado en la ecuación 9 se sigue que para $n \geq 0$

$$h^n\left(q\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) = q\left((g_P \times T)^n\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right). \tag{11}$$

Si

$$q\left((g_P \times T)^n\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) = Z/\sim.$$

Entonces para cada $a \in G_P$, existen $t \in U$ y $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ tales que

$$[(g^n(t), T^n(c))] = \left[\left(a, \frac{1}{2}\right)\right].$$

Se sigue que $g^n(t) = a$. Lo cual dice que

$$(g_P)^n(U) = G_P.$$

Esto contradice la ecuación (10).

Por lo tanto

$$q\left((g_P \times T)^n\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) \neq Z/\sim.$$

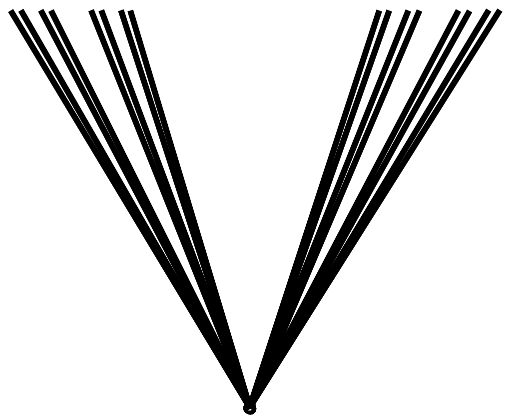
De la igualdad dada en la ecuación (11) se sigue que para toda $n \geq 0$,

$$h^n\left(q\left(U \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) \neq Z/\sim.$$

Por lo tanto, el sistema dinámico $(Z/\sim, h)$ no es LES.

Como el diagrama dado en la ecuación (9) conmuta y el sistema dinámico $(G_P \times [0,1], g_P \times T)$ es fuertemente mezclante, entonces por la Proposición 172 el sistema $(Z/\sim, h)$ es fuertemente mezclante.

Observa que el espacio $Z/\sim$ es un continuo. Este continuo se puede representar de la siguiente manera.



5.7. Funciones fuertemente mezclantes en el intervalo

En esta sección demostraremos que las propiedades de ser LES, fuertemente mezclante, fuertemente transitiva en productos y fuertemente exactamente transitiva son equivalentes para funciones continuas definidas sobre un intervalo.

En particular la equivalencia de las propiedades FTP y FET, sobre funciones definidas en un intervalo, nos muestra que la pregunta dada en [**2**, pág. 248] tiene una respuesta positiva para este tipo de funciones.

En esta sección el espacio I es un intervalo cerrado, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, con $a < b$.

Proposición 179. *Sea $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f : I \to I$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El sistema (I, f) es LES.*

(2) *El sitema (I, f) es fuertemente mezclante.*

(3) *El sistema (I, f) es fuertemente transitivo en productos.*

(4) *El sistema $\left(I, f^{\times 2}\right)$ es fuertemente transitivo.*

Demostración. Las implicaciones (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3) y (3) $\implies$ (4) se dan de manera general, ya antes las hemos mencionado.

Veamos la implicación (4) $\implies$ (1).

Supongamos que el sistema $\left(I, f^{\times 2}\right)$ es fuertemente transitivo. Sea $U \subseteq I$ un subconjunto abierto no vacío, y sean $c, d \in \mathbb{R}$, con $c < d$, elementos de U, tales que el intervalo $(c,d) \subseteq U$. Como $f^{\times 2}$ es fuertemente transitiva, para el punto $(a,b) \in I \times I$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el punto

$$(a,b) \in \left(f^{\times 2}\right)^n ((c,d) \times (c,d)).$$

Luego existen $x, y \in (c,d)$ tales que $f^n(x) = a$ y $f^n(y) = b$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$. Por el Teorema del Valor Intermedio se sigue que

$$I = [a,b] \subseteq f^n([x,y]) \subseteq f^n(c,d) \subseteq f^n(U).$$

Lo cual implica que $f^n(U) = [a,b] = I$. Por lo tanto, $f : I \to I$ es LES. $\square$

El objetivo de lo que sigue es demostrar que la propiedad de ser fuertemente exactamente transitivo (FET), en los sistemas (I,f), es equivalente a LES. Para esto necesitamos algunas herramientas.

El símbolo $Fix(f)$ denota el conjunto de puntos fijos de la función f.

La siguiente proposición nos da una condición sobre una función fuertemente transitiva, $f : I \to I$, para asegurar que sea LES.

Proposición 180. *Sean $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y (I,f) un sistema dinámico discreto fuertemente transitivo tal que $\{a,b\} \cap Fix(f) \neq \emptyset$. Entonces el sistema (I,f) es LES.*

Demostración.

Caso 1. $a \in Fix(f)$.

Sean $U \subseteq I$ un subconjunto abierto no vacío y $(c,d) \subseteq U$, con $c < d$, un intervalo abierto. Por ser f fuertemente transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $x \in (c,d)$ tal que $f^n(x) = a$. Como a es un punto fijo, entonces para toda $m \geq n$, $f^m(x) = a$. Usando nuevamente que f es fuertemente transitivo tenemos que existe $m \geq n$ y existe $y \in (c,d)$ tales que $f^m(y) = b$. Se sigue que $f^m(x) = a$ y $f^m(y) = b$.

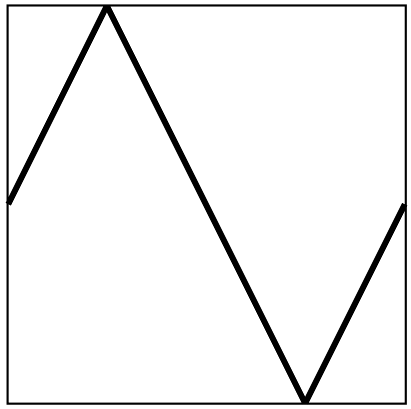
Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$. Por el Teorema del Valor Intermedio, se tiene que $f^m([x,y]) = [a,b]$. Como $f^m([x,y]) \subseteq f^m((c,d)) \subseteq f^m(U)$, entonces $f^m(U) = [a,b] = I$.

Caso 2. $b \in Fix(f)$.

Este caso se hace de forma similar al Caso 1. $\square$

Se sabe que todo sistema dinámico LES es fuertemente transitivo. El siguiente ejemplo nos da un sistema dinámico, (I,f), con $I = [0,1]$, que es fuertemente transitivo, pero que no es LES.

Ejemplo 181. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función lineal por partes definida por $f(0) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ y $f(1) = \frac{1}{2}$. La gráfica de f se muestra a continuación.



Observemos que $f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{2},1\right]$ y $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$. En general si n es par $f^n\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$, y si n es impar $f^n\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{2},1\right]$. Por lo tanto f no es LES. Observemos que la función

$$\left(f|_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right)^2:\left[\frac{1}{2},1\right]\to\left[\frac{1}{2},1\right],$$

es conjugada a la segunda interación de la función tienda, $T^2:[0,1]\to[0,1]$. Usando este hecho y recordando que la función $T^2:[0,1]\to[0,1]$ es LES se sigue que f es fuertemente transitiva.

Lema 182. *Sean $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, (I,f) un sistema dinámico discreto fuertemente exactamente transitivo, y $x_0\in(a,b)$. Entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f^n([a,x_0])=I$ o $f^n([x_0,b])=I$.*

Demostración. Por ser $f:I\to I$ fuertemente transitiva, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $a\in f^n(a,x_0)$, y $a\in f^n(x_0,b)$. Como $f:I\to I$ es suprayectiva, f^n también lo es. Luego $f^n([a,b])=[a,b]$. Se sigue que

$$b\in f^n([a,x_0]),\text{ o }b\in f^n([x_0,b]).$$

Por lo tanto,

$$\{a,b\}\subseteq f^n([a,x_0]),\text{ o }\{a,b\}\subseteq f^n([x_0,b]).$$

Entonces $f^n([a,x_0])=[a,b]$ o $f^n([x_0,b])=[a,b]$. □

La siguiente proposición nos dice que si (I,f) es un sistema fuertemente exactamente transtivo, entonces es LES.

Proposición 183. *Sea $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. Si (I,f) es un sistema dinámico discreto fuertemente exactamente transitivo, entonces (I,f) es LES.*

Demostración. Como $f:I\to I$ es una función continua, existe $x_0\in I$, tal que $f(x_0)=x_0$.

Caso 1. $x_0 \in \{a, b\}$

Como $f : I \to I$ es fuertemente exactamente transitivo, entonces $f : I \to I$ es fuertemente transitiva. Luego por la Proposición 180 se sigue que f es LES.

Caso 2. $x_0 \in (a, b)$.

Por el Lema 182, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n([a, x_0]) = [a, b] \text{ o } f^n([x_0, b]) = [a, b].$$

Supongamos que $f^n([a, x_0]) = [a, b]$. Sean $U \subseteq [a, b]$ un subconjunto abierto no vacío, y $(c, d) \subseteq U$, con $c < d$, un intervalo abierto. Por ser f fuertemente transitiva, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_0 \in f^N(c, d)$. Como x_0 es un punto fijo, para toda $k \geq N$, $x_0 \in f^k(c, d)$. Por otra parte existe $k \geq N$, tal que $a \in f^k(c, d)$. Luego $[a, x_0] \subseteq f^k(c, d)$, se sigue que

$$[a, b] = f^n([a, x_0]) \subseteq f^{k+n}(c, d) \subseteq f^{k+n}(U).$$

Por lo tanto $f^{k+n}(U) = [a, b]$. Luego, f es LES.

Si $f^n([x_0, b]) = [a, b]$. En este caso se procede de forma similar y se obtiene también que f es LES. □

De las Proposiciones 183 y 180 obtenemos el Corolario 184.

Corolario 184. *Sea $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Sea (I, f) un sistema dinámico discreto. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *El sistema (I, f) es LES.*

(2) *El sistema (I, f) es fuertemente mezclante.*

(2) *El sistema (I, f) es fuertemente transitivo en productos.*

(3) *El sistema $(I \times I, f^{\times 2})$ es fuertemente transitivo.*

(4) *El sistema (I, f) es fuertemente exactamente transitivo.*

Recordemos que en [**2**, pág. 248] se hace la pregunta: ¿Fuertemente exactamente transitivo implica fuertemente transitiva en productos? El Corolario 184 nos da una respuesta positiva a esta pregunta cuando el sistema es de la forma (I, f), con $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Observación 185. Hemos demostrado que en los sistemas dinámicos discretos de la forma (I, f), con $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, las propiedades de LES y fuertemente mezclante son equivalentes. Mientras que el Ejemplo 178 muestra que existe un continuo X tal que el sistema (X, f) es fuertemente mezclante pero no es LES.

Bibliografía

[1] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar. *Dynamics of induced systems.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. **37**, (2017), 2034-2059.

[2] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar. *Variations on the concept of topological transitvity.* Studia Mathematica, Vol. **235**, (2016), 225-249.

[3] G. Andablo y E. Castañeda. *Una mirada a los productos simétricos.* Ciencia Ergo Sum, Vol. **16**, núm. 2, (2009), 189-197.

[4] J. Auslander. *On the proximal relation in topological dynamics.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. **11**, (1960), 890-895.

[5] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps.* Chaos Solitons and Fractals, Vol. **25** (2005), 681–685.

[6] J. Banks, T.T.D. Nguyen, P. Oprocha, B. Stanley y B. Trota. *Dynamics of spacing shift.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. **33**, (2013), 4207-4232.

[7] W. Bauer y K. Sigmund. *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures.* Monatshefte für Mathematik, Vol. **79**, (1975), 81-92.

[8] F. Blanchard. *Topological chaos: what may this mean?* Journal of Difference Equations and Applications, Vol. **15**, (2009), 23-46.

[9] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada y A. Mass. *On Li-Yorke pairs.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Vol. **547**, (2002), 51-68.

[10] L. S. Block y W. A. Coppel. *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1513,** Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[11] J. L. Gómez-Rueda, A. Illanes y H. Méndez. *Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products.* Chaos, Solitons and Fractals, Vol. **45**, (2012), 1180-1187.

[12] G. Higuera y A. Illanes. *Induced mappings on symmetric products.* Topology Proceedings, Vol. **37**, (2011), 367-401.

[13] A. Illanes y S.B. Nadler Jr. *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[14] S. Kolyada, L. Snoha y S. Trofimchuk. *Noninvertible minimal maps.* Fundamenta Mathematicae, Vol. **168,** No. 2, (2001), 141-163.

[15] K. Lau and A. Zame. *On weak mixing of cascades.* Mathematical Systems Theory, Vol. **6** (1973), 307–311.

[16] J. Li, P. Oprocha, X. Ye y R. Zhang. *When are all closed subsets recurrent?* Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. **37**, No. 7, (2017), 2223-2254.

[17] J. Li y S. Tu. *On proximality with Banach density one.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **416,** 2014, 36-51.

[18] H. Méndez. *Dinámica discreta e hiperespacios.* Facultad de Ciencias, UNAM. Disponible en https://drive.google.com/file/d/1r2UQ3cgVSJEQJBWe42uZF6qGSzaIzEek/view.

[19] H. Méndez y L. Rito. *Strongly transitive maps on symmetric products.* Topology Proceedings, Vol. **60**, (2022), 147-167.

[20] S. B. Nadler Jr. *Continuum Theory, An Introduction.* Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[21] A. Nagar. *Revisiting variations in topological transitivity.* European Journal of Mathematics, Vol. **8**, 2022, 369–387 .

[22] L. Rito. *Exact transitivity does not imply mixing.* European Journal of Mathematics, Vol. **8**, 2022, 499-503.

[23] H. L. Royden. *Real Analysis.* Second Edition, Collier MacMillan, London, 1968.

[24] P. Sharma y A. Nagar. *Inducing sensitivity on hyperspaces.* Topology and its Applications, Vol. **157**(13), 2010, 2052-2058.

[25] P. Sharma y A. Nagar. *Topological dynamics on hyperspaces.* Applied General Topology, Vol. **11**(1), 2010, 1-19.