Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ciencias

Identidades de Slavnov-Taylor para teorías de Yang-Mills usando BRST

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en física

presenta:

Daniel Hilario Montero García

Asesor:

Dr. José David Vergara Oliver

Ciudad de México 2022

Agradecimientos

Agradezco mucho al Dr. David por todo su apoyo y enseñanzas en el tiempo que nos hemos conocido, en verdad aprecio mucho el tiempo y la guía que me ha dado en el camino de la física y en la realización de esta tesis.

Le doy muchas gracias mis padres, Daniel y Gloria, y mi hermano, Pablo, por la ayuda de todo tipo que me han dado durante todos los años, en todas las situaciones. Al igual que a mis abuelos, tíos y primos.

Muchas gracias a los doctores sinodales; Luis Urrutia, Catalina Espinoza, Saúl Ramos y Rodolfo Martínez, por sus observaciones, correciones y comentarios para posibles futuras indagaciones.

Agradezco mucho a mis amigos que me han apoyado inmensamente en todos los sentidos y las charlas sobre física que he tenido con mi amigo Juan que han ayudado a entender mejor muchas cosas e incluso ayudaron en el contenido de la tesis.

También muchas gracias al Proyecto UNAM-PAPIIT IN105422 ”Información cuántica en teoría de campos y sistemas afines” por la beca de maestría otorgada para la elaboración de esta tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años se ha descubierto que las teorías de norma son de gran importancia para la física fundamental. La primera vez que se propuso una teoría de este tipo fue en 1919 por Hermann Weyl, que surgió de ver una simetría en la teoría de gravedad que podía ser generalizada al electromagnetismo y desde entonces se ha descubierto que es algo muy general con lo que se describen las fuerzas fundamentales conocidas actualmente. Aunque al principio hubo partes de la teoría que parecían no funcionar, años después se pudieron interpretar correctamente y seguirse desarrollando.

En la relatividad especial hay una simetría ante transformaciones de Lorentz, las cuales indican como cambian las coordenadas entre observadores cuando uno se mueve a una velocidad fija con respecto a otro, y es la misma transformación sin importar que tan lejos o cerca estén los observadores entre sí, es decir, son *transformaciones globales*, es la misma transformación para todos los puntos en el espacio-tiempo. Sin embargo esto cambia en la relatividad general, donde ahora hay gravedad y entonces las transformaciones dependen de los puntos en el espacio-tiempo que se consideren, estas son *transformaciones locales*, por ejemplo la fuerza de gravedad que siente un cuerpo cercano a un planeta no es igual a la que sentiría si estuviera muy lejos de éste.

Por ejemplo [16], consideremos que tenemos las componentes un vector V^μ. Si un observador en x mide un cambio dV^μ, otro observador inercial en x' mide

$$dV'^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dV^\mu$$

Esto porque las transformaciones de Lorentz son lineales. En cambio si ahora consideramos la relatividad general donde las transformaciones ya no son lineales necesariamente, el cambio que mediría el segundo observador es

$$\begin{aligned} dV'^\nu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dV^\mu + V^\mu d\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dV^\mu + V^\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} dx'^\alpha \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dV^\mu + V^\mu \Gamma^\mu_{\nu\alpha} dx'^\alpha \end{aligned}$$

donde $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} \equiv \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\alpha}}$ es la *conexión* [16], indica como es el cambio del vector debido a esa curvatura del espacio-tiempo. Esta ecuación es la derivada covariante, con la cual las ecuaciones de la relatividad general se mantienen invariantes, y se mantiene el carácter tensorial del vector. A esto se le conoce como una *teoría de norma*; son aquellas en las que se impone una transformación local y las ecuaciones de movimiento se matienen invariantes, con la posible introducción de un campo de norma o conexión, en el caso de la relatividad, $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$.

En el primer capítulo revisaremos como esto se generaliza a otras teorías, desarrollando entonces las teorías de norma no abelianas, que son no conmutativas debido a que los generadores de la transformación no los son. Después revisaremos un poco sobre grupos de Lie, para dar un panorama más general y comprender mejor estas transformaciones.

En el siguiente capítulo veremos la cuantización de las teorías de campo, por el método de cuantización canónica y por el método de integrales de trayectoria, también introduciendo las funcionales generadoras con las cuales se obtienen las funciones de Green a partir de las integrales de trayectoria. El método de integrales de trayectoria será el que ocuparemos principalmente en el desarrollo de los demás capítulos. Una vez la teoría está cuantizada vemos las consecuencias que tienen las simetrías y como éstas están relacionadas con su contraparte clásica.

Ya que hayamos visto sobre teorías de norma y cuantización en general, veremos la cuantización de las teorías de norma, abelianas y no abelianas. En el caso abeliano, tenemos la electrodinámica cuántica, desarrollaremos las funcionales generadoras en esta teoría y como de éstas se pueden obtener vértices de la teoría. Como consecuencia de la simetría ante transformaciones de norma en la electrodinámica cuántica se obtienen las identidades de Ward-Takahashi que son ecuaciones en diferencias funcionales que relacionan los campos con sus fuentes y tienen como consecuencia resultados generales para la teoría, a todos los órdenes, como por ejemplo la relación entre el vértice de la teoría y el propagador del fermión.

Después se cuantiza la teoría de norma no abeliana, utilizando el método de Faddeev-Popov para la cuantización del campo de norma. Este método es necesario ya que como la teoría es invariante ante las transformaciones de norma, para no contar de más configuraciones del campo que son equivalentes, al hacer la integral de trayectoria es necesario fijar la norma, y de este método aparecen los llamados fantasmas de Faddeev-Popov. A partir de esto, obtenemos los propagadores de los campos, fermiónico, de norma y de fantasmas, y los vértices que hay en la teoría de acuerdo con los términos de interacción en el Lagrangiano.

En el siguiente capítulo revisamos las consecuencias de la transformación de norma no abeliana (antes de la cuantización) con un ejemplo específico: el péndulo de Gribov, que considera una transformación de norma del grupo SU(2) sobre un campo de norma simétricamente esférico. Con ello vemos las condiciones que se imponen sobre el parámetro de norma, que son más complejas que en el caso abeliano precisamente a causa de la no conmutatividad de los generadores y analizamos la estabilidad de las soluciones para el parámetro de norma en el espacio fase.

Después, regresando a la parte cuántica de la teoría de norma no abeliana, revisamos la simetría BRST, que es una simetría remanente después de haber fijado la norma, es una transformación del tipo de norma que involucra a los fantasmas como parámetro de norma y tiene consecuencias importantes sobre los estados físicos de la teoría.

Finalmente se obtienen las identidades de Slavnov-Taylor que son la generalización de la identidades de Ward al caso no abeliano que igualmente tienen como consecuencia resultados generales. Esta parte se realiza bajo la suposición de que la teoría no presenta anomalías, que se puede mostrar con métodos más avanzados [17]. Una anomalía se refiere a que una simetría se rompe al cuantizar la teoría. Para que la teoría se pueda renormalizar es importante que no ocurran estas anomalías cuando se trate de transformaciones de norma, es lo revisado brevemente al final del capítulo 8.

Capítulo 2

Teorías de norma

Como mencionamos en la introducción las teorías de norma son aquellas en las que la física se mantiene invariante ante transformaciones locales, concretamente buscamos que el Lagrangiano se mantenga invariante. Para generalizar la idea, aplicamos entonces la mencionada transformación local sobre el campo de la teoría que estemos estudiando, digamos un campo $\psi(x)$ (por ejemplo la función de onda de la ecuación de Dirac), que transforme de acuerdo a

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

Estamos transformando el campo agregándole una fase $e^{i\alpha(x)}$, que es local ya que el parámetro α depende del punto en el espacio-tiempo donde se hace la transformación. Con esto, como la transformación es local, el campo tiene una transformación distinta en cada punto del espacio-tiempo, entonces para poder comparar correctamente el campo en los distintos puntos y para que con ello las ecuaciones de movimiento se mantengan invariantes, como es el caso en la relatividad, es necesaria la introducción de un nuevo campo A_μ, que es la conexión o campo de norma de la teoría, análogo a $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ en la relatividad, cuya forma y transformación depende de la transformación aplicada a ψ. En este caso el campo resulta ser el potencial electromagnético, y transforma como

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

donde α es el mismo parámetro en la transformación de ψ. Con la introducción de este campo y su transformación, el Lagrangiano de ψ es invariante, al igual que el Lagrangiano correspondiente al campo A_μ, que en este caso donde describe al campo electromagnético, es el Lagrangiano para las ecuaciones de Maxwell. Es con el Lagrangiano resultante del campo de Dirac y del campo electromagnético, junto con sus transformaciones de norma mencionadas, que se desarrolla la electrodinámica cuántica.

La teoría de norma depende del elemento que transforma al campo, en el caso anterior el elemento era $e^{i\alpha(x)}$, que es un número complejo de norma unitaria, que pertenece a un grupo de Lie conocido como $U(1)$. En general se pueden tener elementos de otros grupos que, como veremos en un momento, también se pueden escribir como exponenciales que podrían ser matrices, y con esto modificar las reglas de transformación para los campos.

A este nivel, la teoría sigue siendo clásica. Cuando se cuantiza, los cuantos de los campos de norma son los llamados bosones de norma, mediante los cuales se llevan a cabo las interacciones entre partículas.

La teoría de norma con la transformación sobre ψ que acabamos de ver es abeliana, esto significa que los elementos del grupo de Lie que generan la transformación son conmutativos: $e^{i\alpha(x)}$ es un número complejo y entonces conmuta. En general el grupo de Lie (la exponencial) puede ser más complicado y podría no ser conmutativo, esto es conocido como una teoría de norma no abeliana, que es lo que trataremos principalmente aquí.

2.1. Teorías de norma no abelianas

En estas teorías tenemos las transformaciones de norma conocidas del caso abeliano que mencionamos anteriormente, con la diferencia de que ahora el exponente tendrá elementos no conmutativos, como por ejemplo matrices. Las transformaciones globales son de la forma

$$\psi(x) \to e^{i\alpha^a T^a}\psi(x) \tag{2.1}$$

donde α^a son los parámetros y T^a son los generadores de la transformación de norma y hay suma implícita sobre a. Se pueden construir Lagrangianos invariantes ante estas transformaciones. Ahora lo que procede, como en el caso abeliano, es hacer que la transformación sea local, es decir,

$$\psi(x) \to e^{i\alpha^a(x)T^a}\psi(x) \tag{2.2}$$

y modificar el Lagrangiano de tal forma que éste sea invariante ante la transformación por medio de la derivada covariante. Para ello debemos encontrar la forma de comparar los campos en lugares diferentes y esto lo hacemos por medio de un comparador $U(x,y)$ que, como lo dice su nombre, compara los campos en distintos lugares. Éste transforma como

$$U(y,x) \to V(y)U(y,x)V^\dagger(x) \tag{2.3}$$

donde $V(x) = e^{i\alpha^a(x)T_a}$. Si comparamos dos campos en el mismo punto tendremos que transforman de la misma manera, por lo que el comparador es la identidad cuando comparamos en el mismo punto: $U(x,x) = Id$. $U(x,y)$ está dado por

$$U(y,x) = e^{ig\int_x^y dx^\mu A_\mu(x)} \tag{2.4}$$

donde $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a$ es una matriz. Entonces, bajo una transformación infinitesimal tenemos,

$$
\begin{aligned}
U(x+\epsilon n, x) &= e^{ig\int_x^{x+\epsilon n} dx^\mu A_\mu(x)} \\
&= 1 + ig\int_x^{x+\epsilon n} dx^\mu A_\mu(x) + \ \cdots \\
&\approx 1 + ig\Big((x^\mu + \epsilon n^\mu) - x^\mu\Big)\Big(\frac{1}{2}(A_\mu(x+\epsilon n) + A_\mu(x))\Big) \\
&= 1 + ig\epsilon n^\mu\Big(\frac{1}{2}(A_\mu(x+\epsilon n) + A_\mu(x))\Big) \\
&\approx 1 + ig\epsilon n^\mu\Big(\frac{1}{2}\ 2A_\mu(x)\Big) \\
&= 1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu(x)
\end{aligned}
$$

Con esto construimos la derivada covariante:

$$
\begin{aligned}
n^\mu D_\mu\psi &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\psi(x+\epsilon n) - \psi(x) - ig\epsilon n^\mu A_\mu(x)\psi(x)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)}{\epsilon} - ign^\mu A_\mu(x)\psi(x) \\
&= n^\mu\partial_\mu\psi(x) - ign^\mu A_\mu(x)\psi(x) \\
&= n^\mu\Big(\partial_\mu - igA_\mu(x)\Big)\psi(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la derivada covariante para las teorías de norma no abelianas es

$$
\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) = \partial_\mu - igA^a_\mu(x)T^a} \tag{2.5}
$$

A continuación veremos como transforman los parámetros de la transformación, $A^a_\mu(x)$, también llamados conexiones o campos de norma. Usamos la ley de transformación del comparador (ecuación 2.3),

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(x+\epsilon n, x) &= V(x+\epsilon n)U(x+\epsilon n, x)V^\dagger(x) \\
1 + ig\epsilon n^\mu\tilde{A}_\mu(x) &= V(x+\epsilon n)\Big(1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu(x)\Big)V^\dagger(y) \\
&= V(x+\epsilon n)V^\dagger(x) + ig\epsilon n^\mu V(x+\epsilon n)A_\mu(x)V^\dagger(x)
\end{aligned}
$$

Usando que $V(x)V^\dagger(x) = 1$ y que, por tanto,

$$
\partial_\mu(V(x)V^\dagger(x)) = 0 \Rightarrow (\partial_\mu V(x))V^\dagger(x) + V(x)\partial_\mu V^\dagger(x) = 0
$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
V(x+x\epsilon n)V^\dagger(x) &\approx \Big(V(x) + \epsilon n^\mu\partial_\mu V(x)\Big)V^\dagger(x) \\
&= 1 + \epsilon n^\mu(\partial_\mu V(x))V^\dagger(x) \\
&= 1 - \epsilon n^\mu V(x)\partial_\mu V^\dagger(x)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} 1 + ig\epsilon n^\mu \tilde{A}_\mu(x) &= 1 - \epsilon n^\mu V(x)\partial_\mu V^\dagger(x) + ig\epsilon n^\mu V(x+\epsilon n)A_\mu(x)V^\dagger(x) \\ &\approx 1 - \epsilon n^\mu V(x)\partial_\mu V^\dagger(x) + ig\epsilon n^\mu V(x)A_\mu(x)V^\dagger(x) \end{aligned}$$

donde, haciendo la expansión de $V(x+\epsilon n)$ también en el segundo término, nos hemos quedados solo con los términos de primer órden en ϵ. Por lo tanto, reacomodando términos,

$$\tilde{A}_\mu(x) = V(x)\left(\frac{i}{g}\partial_\mu + A_\mu(x)\right)V^\dagger(x) \tag{2.6}$$

Solamente nos falta calcular la derivada en el primer término. Para ello expandimos $V(x) = e^{i\alpha^a(x)T^a}$ y $V^\dagger(x) = e^{-i\alpha^a(x)T^a}$ y nos quedamos solo con los términos hasta primer orden en α:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu(x) &\approx (1 + i\alpha^a T^a)\left(\frac{i}{g}\partial_\mu + A_\mu\right)(1 - i\alpha^a T^a) \\ &= (1 + i\alpha^a T^a)\left(\frac{i}{g}\partial_\mu(-i\alpha^a T^a) + A_\mu - iA_\mu\alpha^a T^a\right) \\ &= (1 + i\alpha^a T^a)\left(\frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a)T^a + A_\mu - iA_\mu\alpha^a T^a\right) \\ &\approx \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a)T^a + A_\mu + i\alpha^a T^a A_\mu - i\alpha^a A_\mu T^a \\ &= \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a)T^a + A_\mu + i\alpha^a A^b_\mu T^a T^b - i\alpha^a A^b_\mu T^b T^a \\ &= \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a)T^a + A_\mu + i\alpha^a A^b_\mu[T^a, T^b] \end{aligned}$$

Los generadores, T^a, de cada grupo cumplen unas regla de conmutación (llamada álgebra de Lie) dada por

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{2.7}$$

donde las *constantes de estrucura*, f^{abc}, son antisimétricas en todos los índices (siempre se puede escoger una base para las matrices T^a donde esta antisimetría se cumpla). Usando esto, podemos escribir al campo de norma transformado como

$$\tilde{A}_\mu(x) = \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^a)T^a + A_\mu + i\alpha^a A^b_\mu(if^{abc}T^c)$$

Entonces,

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu + \frac{1}{g}\left((\partial_\mu\alpha^c) - g\alpha^a A^b_\mu f^{abc}\right)T^c \tag{2.8}$$

O bien,

$$\tilde{A}^c_\mu(x)T^c = A^c_\mu T^c + \frac{1}{g}\left((\partial_\mu\alpha^c) - g\alpha^a A^b_\mu f^{abc}\right)T^c$$

Por lo que, renombrando índices y usando la antisimetría en los índices de las constantes de estructura f^{abc}, obtenemos que los parámetros $A^a_\mu(x)$ transforman bajo transformaciones de norma como

$$\tilde{A}^a_\mu(x) = A^a_\mu + \frac{1}{g}\left(\partial_\mu \alpha^a - g\alpha^b A^c_\mu f^{abc}\right) = A^a_\mu + \frac{1}{g}(\bar{D}_\mu \alpha)^a \tag{2.9}$$

donde la derivada covariante para el parámetro de norma es

$$\boxed{(\bar{D}_\mu \alpha)^a = \partial_\mu \alpha^a - g\alpha^b A^c_\mu f^{abc}} \tag{2.10}$$

Si tomamos la norma de Lorentz ($\partial^\mu A_\mu = \partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0$), obtenemos que

$$\begin{aligned}\partial^\mu \tilde{A}^a_\mu(x) &= \partial^\mu A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu (\bar{D}_\mu \alpha)^a \\ \partial^\mu (\bar{D}_\mu \alpha)^a &= \partial^\mu \partial_\mu \alpha^a - g f^{abc} \partial^\mu (\alpha^b A^c_\mu) = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

lo cual nos da constricciones para el parámetro α^a, que estudiaremos con más detalle en el capítulo 6. También podemos escribir la condición sobre α^a en la norma de Lorentz de forma exacta si regresamos a la ecuación (2.6), y aplicamos la norma de Lorentz directamente, antes de aproximar V y $V^\dagger$, si derivamos esta ecuación,

$$\begin{aligned}\partial^\mu \tilde{A}_\mu(x) &= \partial^\mu \left(V(x)\left(\frac{i}{g}\partial_\mu + A_\mu(x)\right) V^\dagger(x)\right) \\ &= \frac{i}{g}\partial^\mu \left[V\partial_\mu V^\dagger - igVA_\mu V^\dagger\right] \\ &= \frac{i}{g}\partial^\mu \left[V(\partial_\mu V^\dagger - igA_\mu V^\dagger)\right] \\ &= \frac{i}{g}\partial^\mu \left[V(D_\mu V^\dagger)\right]\end{aligned}$$

Tomando la norma de Lorentz obtenemos

$$\partial^\mu \left[V(D_\mu V^\dagger)\right] = 0 \tag{2.12}$$

Es la condición que la norma de Lorentz impone sobre α^a de forma no perturbativa (sin aproximar V y $V^\dagger$).

En el caso abeliano el término $-gf^{abc}\partial^\mu(\alpha^b A^c_\mu)$ de (2.6) no aparece, por lo que se tiene solución única para α. En el caso no abeliano hay que ser más cuidadosos con ello, justamente las consecuencias de esto son lo que revisaremos en el capítulo 6 sobre el péndulo de Gribov.

Por último, veamos que existe también el análogo al tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, el cual es obtenido del conmutador de las derivadas covariantes. Si calculamos el conmutador en este caso, obtenemos que

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -igF_{\mu\nu}\psi$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$. Este es un resultado general para las teorías no abelianas. Si nuevamente utilizamos el álgebra de Lie,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.13}$$

con $F_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu} T^a$. Con este elemento se construye análogamente al caso abeliano, el Lagrangiano para el campo de norma de la teoría no abeliana dado por $F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ (teoría de Yang-Mills). Utilizaremos esto nuevamente cuando cuanticemos la teoría. Por ahora revisaremos brevemente los grupos de Lie para tener más clara la procedencia de las transformaciones que ocupamos.

2.2. Grupos de Lie

Un grupo de Lie es un grupo que además es una variedad diferenciable, y queda determinado por su álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, esto es la relación entre sus generadores y siempre es de la forma

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

donde $T^i \in \mathfrak{g}$ son los generadores del grupo y f^{abc} son llamadas constantes de estructura del grupo y el número de generadores linealmente independientes corresponde con la dimensión de la variedad diferenciable que es el grupo.

El espacio tangente sobre el elemento identidad de un grupo de Lie siempre tiene la estructura de un álgebra de Lie, la cual determina la estructura local del grupo de Lie mediante el mapeo exponencial. Este mapeo va de los elementos del álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, a los elementos del grupo de Lie G , por lo que podemos escribir a un elemento del grupo como

$$e^{\alpha^a T^a} \in G$$

(suma implícita sobre a). Por esta razón es que el álgebra de Lie es una herramienta útil para estudiar a los grupos de Lie.

Por ejemplo consideremos un círculo unitario en el centro del plano complejo, el cual es el grupo de Lie U(1); unitario de dimensión 1. Si tomamos el espacio tangente sobre el elemento identidad, es decir, en 1, obtenemos la línea imaginaria it, con t real. Entonces el mapeo exponencial para este grupo es dado por

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

que efectivamente son los elementos del círculo unitario.

Existe una clasificación de grupos de Lie; los grupos unitarios $U(n)$, ortogonales $O(n)$, simplecticos $Sp(n)$, Euclidianos E(n), de Poincaré $P(n)$, de Heisenberg, entre otros. Cada uno con sus condiciones y se pueden pensar como grupos matriciales.

Por ejemplo consideremos el grupo $U(n)$ que satisface $UU^\dagger = Id$. Cuando $n = 1$, tenemos el caso que acabamos de ver del círculo unitario complejo, cuando $n = 2$ se debe satisfacer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} aa^* + bb^* &= 1 \\ cc^* + dd^* &= 1 \\ ac^* + bd^* &= 0 \\ ca^* + db^* &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y ocho cantidades reales (parte real e imaginaria de cada elemento), entonces solo cuatro están fijas, por lo que el número de generadores del grupo resulta $8 - 4 = 4$. En general para n dimensiones es el número de generadores del grupo unitario $U(n)$ es n^2.

El grupo en que nos enfocaremos será el $SU(n)$, esto es, el grupos especial unitario de dimensión n que cumple

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= Id \\ det\ U &= 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

La restricción de que el determinante sea igual a uno elimina un grado de libertad, a los que teníamos con $U(n)$ entonces $SU(n)$ tiene $n^2 - 1$ generadores. Como hemos dicho, podemos representar las matrices que conforman al grupo con exponenciales, en el caso de las matrices unitarias tenemos que

$$U = e^{iH}$$

donde H es hermítico ($H^\dagger = H$). Entonces los elementos de $SU(n)$ pueden ser escritos como

$$U = e^{i\alpha^a T^a}; \qquad a = 1, ..., n^2 - 1$$

donde T^a son los $n^2 - 1$ generadores, que son hermíticos, de $SU(n)$.

Aquí nos enfocamos en los grupos $U(n)$ y $SU(n)$ ya que bajo transformaciones de estos grupos se producen transformaciones de norma en teorías físicas. La electrodinámica corresponde con transformaciones de norma generadas por elementos de $U(1)$, que son conmutativos (son números complejos unitarios), y la cromodinámica cuántica corresponde a transformaciones de norma generadas por elementos de $SU(3)$, que no son conmutativos. En general, desarrollamos teorías de norma generadas por grupos no conmutativos.

Capítulo 3

Cuantización

La teoría cuántica de campos es la aplicación de la mecánica cuántica y relatividad especial a campos, en vez de sistemas de partículas como ocurre en la mecánica cuántica. Uno se podría preguntar por qué en vez de simplemente cuantizar partículas relativistas es necesario cuantizar campos. Lo que ocurre es que si se hace lo primero, resultan inconsistencias en la teoría, como por ejemplo energías negativas. Esto se resuelve con la teoría cuántica de campos al incluir las antipartículas.

Una razón muy importante para considerar esta teoría es que se necesita describir procesos en los que se pueden crear o destruir partículas, es decir, se necesita una teoría en la que el número de partículas ya no sea una constante como ocurre en la mecánica cuántica, con la teoría cuántica de campos esto es posible. También es necesario tener una teoría de campos con múltiples partículas por motivos de causalidad, ya que de lo contrario, al calcular amplitudes de propagación se obtienen probabilidades de amplitud distintas de cero fuera del cono de luz, violando entonces la causalidad. Sin embargo cuando consideramos una teoría cuántica de campos, la propagación de una partícula en un intervalo tipo espacio es exactamente igual a la propagación de una anti-partícula en ese intervalo en la dirección opuesta, y por ello encontramos que cuando hacemos una observación, la amplitud de propagación de la partícula y la antipartícula se cancelan exactamente, por lo tanto la causalidad se preserva.

Existen distintas formas de realizar la cuantización de los campos, que pueden ser más o menos útiles dependiendo la situación en que se utilicen.

3.1. Cuantización canónica

Para cuantizar la teoría se toma el campo y su momento conjugado,

$$\phi(x) \qquad y \qquad \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \ ,$$

y se promueven a operadores que cumplan las relaciones de conmutación conocidas para los operadores de posición y de momento en la mecánica cuántica, ahora de forma generalizada para estos operadores que tienen índices continuos (x) en vez de discretos:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\hat{\pi}(\mathbf{y},t)] &= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x},t),\hat{\phi}(\mathbf{y},t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x},t),\hat{\pi}(\mathbf{x},t)] = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

que notemos son válidas para tiempos iguales y estamos considerando unidades naturales; $\hbar = c = 1$. En el caso de tiempos diferentes se obtienen expresiones distintas más generales. Esto es para partículas bosónicas, si se consideran fermiones, se imponen relaciones de anticonmutación para que se cumpla el principio de exclusión de Pauli. Con estos operadores se pueden construir otros, como por ejemplo el Hamiltoniano, y la teoría se "resuelve" encontrando los eigenvalores de los operadores y obteniendo amplitudes de propagación.

Por ejemplo, consideremos el caso de la densidad Lagrangiana de Klein-Gordon, que describe un campo escalar, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.2}$$

En consecuencia, la densidad Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \end{aligned}$$

Aquí es la ecuación de campo clásica, es decir, antes de su cuantización. Para cuantiazarla se promueven ϕ y π a los operadores que cumplan las relaciones de conmutación (3.1). Como en mecánica cuántica, la evolución de los operadores viene dada por la ecuación de Heisenberg

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O} = [\hat{O},\hat{H}]\ , \tag{3.3}$$

donde el Hamiltoniano es $\hat{H} = \int d^3x\hat{\mathcal{H}}$. Mediante esta ecuación y las relaciones de conmutación se pueden obtener las dependencias temporales de ϕ y π, que resultan

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi} &= i\hat{\pi} \\ i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\pi} &= -i(-\nabla^2 + m^2)\hat{\phi} \end{aligned}$$

Combinando estos resultados se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\phi} = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}$$

lo cual es la ecuación de Klein-Gordon, es decir, la ecuación de movimiento.

Luego, la probabilidad de que una partícula de este campo se propague de x a y es dada por $\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle$; a esta cantidad se le conoce como propagador y se denota $D(x-y)$.

Para calcularla se utiliza la forma explícita de los campos en términos de operadores de aniquilación y creación, $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ y $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ [11], respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\right) \\ \hat{\pi}(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Con esto, como el operador $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ aniquila el vacío, $|0\rangle$, se puede llegar a que la amplitud de que una partícula se propague de x a y es

$$D(x-y) \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.5}$$

Y la función de Green para la ecuación de Klein-Gordon es

$$G(x-y) = \langle 0|[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)]|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.6}$$

Esta integral tiene dos polos al considerar también una integral sobre p_0, entonces se debe escoger la manera de rodearlos para hacer la integral sobre p_0, y según esta elección el tipo de propagador que se obtiene. Cuando se escoge rodear un polo por arriba (donde $k_0 = -E_{\mathbf{k}}$) y uno por debajo (donde $k_0 = +E_{\mathbf{k}}$) se obtiene el propagador de Feynman:

$$D_F(x-y) \equiv \langle 0|T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle = \begin{cases} D(x-y), & \text{para } x^0 > y^0 \\ D(y-x), & \text{para } x^0 < y^0 \end{cases} \tag{3.7}$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal. Con este propagador y agregando interacciones en la teoría se construyen diagramas de Feynman para procesos entre partículas que calculan las probabilidades de que dicho proceso ocurra.

Hasta ahora, estamos en la representación de Heisenberg donde la dependencia temporal está dentro de los operadores. Podemos pasar a la representación de Schrödinger donde los operadores no contienen la dependencia temporal. Los operadores entre estas dos representaciones están relacionados mediante

$$\hat{O}(x) = \hat{O}(\mathbf{x},t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}(\mathbf{x})e^{-i\hat{H}t} \tag{3.8}$$

Vemos a continuación brevemente acerca de la representación de Schrödinger.

Teoría de campos en la representación de Schrödinger

Ahora veremos la teoría cuántica de campos en la representación de Schrödinger, donde la dependencia temporal no está en los operadores, sino en los estados, los cuales serán funcionales de los campos, en vez de funciones.

En mecánica cuántica tenemos ecuaciones de eigenvalores, en donde aplicamos un operador al estado del sistema y el eigenvalor correspondiente nos da el valor de la que se puede medir en el laboratorio, por ejemplo el Hamiltoniano tiene de eigenvalores a la energía. En mecánica cuántica los eigenestados son funciones, lo que tenemos aquí, como los estados dependen de los campos, es que los eigenestados son funcionales, es decir, funciones que toman funciones como argumento y dan números. De esta forma, la ecuación de Schrödinger se vuelve una ecuación diferencial funcional y los eigenestados de ésta son eigenfuncionales del Hamiltoniano, el cual es un operador diferencial funcional. Igualmente para cuantizar la teoría imponemos las relaciones de conmutación sobre el operador del campo y el de su momento conjugado, que ahora solo tendrán dependencia espacial.

Consideremos un eigenestado, $|\phi\rangle$, del operador $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$, y con eigenvalor $\phi(\mathbf{x})$ (que es una función escalar):

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x})|\phi\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi\rangle \tag{3.9}$$

Junto con el momento conjugado, $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, los operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] &= i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ [\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Estos operadores son independientes del tiempo, o bien, son las relaciones de conmutación a tiempos iguales, ya que estamos trabajando en la representación de Schrödinger. Además tenemos que

$$\left[\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}, \phi(\mathbf{y})\right] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

ya que $\frac{\delta\phi(\mathbf{y})}{\delta\phi(\mathbf{x})} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Entonces si

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \tag{3.11}$$

se cumplen las relaciones de conmutación (3.10) (usando también la ecuación de eigenvalor 3.9), por lo que estas variables son una representación diferencial funcional de las relaciones de conmutación [10]. Dada esta representación del momento del campo, el Hamiltoniano se vuelve un operador diferencial funcional.

Si tomamos nuevamente el ejemplo de la teoría escalar libre (clásica), tenemos la acción dada por

$$S = \int d^4x\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) \tag{3.12}$$

Entonces el Hamiltoniano queda dado por

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\pi^2 + |\nabla\varphi|^2 + m^2\varphi^2\right)$$

Cuantizamos imponiendo la forma del momento como el operador diferencial funcional (3.11) (que es consecuencia de las relaciones de conmutación), obteniendo que

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\mathbf{x})} + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2\right)$$

Así, la ecuación de Schrödinger se vuelve la ecuación diferencial funcional

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$$
$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\phi,t] = \frac{1}{2}\int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\mathbf{x})} + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2\right)\Psi[\phi,t]$$

donde $\Psi[\phi,t] = \langle\phi|\Psi\rangle$, es la funcional de onda en la representación de coordenadas. Notamos que Hamiltoniano no depende del tiempo, así que podemos separar la dependencia temporal de la espacial de $\Psi[\phi,t]$, quedando así,

$$\Psi[\phi,t] = e^{-iEt}\Psi[\phi]$$

$\Psi[\phi]$ satisface la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$\frac{1}{2}\int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\mathbf{x})} + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2\right)\Psi[\phi] = E\Psi[\phi]$$

Usando este formalismo también se pueden obtener amplitudes para los campos. Este método puede ser útil en algunas circunstancias, aunque en otras no tanto o incluso podría no ser posible utilizar este método. A continuación veremos la forma de cuantizar que nos será más útil e ilustrativa para lo que necesitamos aquí.

3.2. Integrales de trayectoria

Esta forma de cuantizar conocida como integral de trayectoria o integral funcional es muy útil para obtener relativamente fácil los propagadores de los campos de norma y generalizar a otras teorías con interacción sobre todo teorías de norma no abelianas. El concepto fundamental de esta cuantización es que el proceso que se esté llevando a cabo, como la propagación de una partícula de un punto a otro, puede ocurrir de todas las formas posibles y entonces se deben considerar todas las posibilidades integrando todas las trayectorias, con una función de peso cada una, que es una fase dependiente de la acción.

Por esta parte no usaremos unidades naturales para tener claro donde aparecen los factores de $\hbar$ al desarrollar este método. Empezamos calculando la amplitud de una partícula para ir de q_0 al tiempo t_0, a q al tiempo t:

$$\langle q,t|q_0,t_0\rangle = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}|q_0\rangle$$

Vamos a insertar una relación de completez

$$\int dq_i|q_i,t_i\rangle\langle q_i,t_i| = Id$$

en un tiempo intermedio t_1, de forma que ahora la amplitud es

$$\langle q,t|q_0,t_0\rangle = \int dq_1 \langle q,t|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q_0,t\rangle$$

Repitiendo N veces este proceso obtenemos

$$\langle q,t|q_0,t_0\rangle = \int dq_N \cdots dq_1 \langle q,t|q_N,t_N\rangle\langle q_N,t_N|q_{N-1},t_{N-1}\rangle \cdots \langle q_1,t_1|q_0,t_0\rangle$$

Tomemos el j-ésimo factor, y ahora insertemos una relación de completez en el espacio de momentos, para que de esta forma obtengamos una exponencial:

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j\rangle &= \langle q_{j+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}}|q_j\rangle \\
&= \int dp_j \langle q_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}}|q_j\rangle \\
&= \int dp_j \langle q_{j+1}|p_j\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H}\langle p_j|q_j\rangle \\
&= \int dp_j \left(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_j q_{j+1}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H} \left(\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p_j q_j}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right) \\
&= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\Big(p_j(q_{j+1}-q_j)-\Delta t H(q_j,p_j)\Big)}
\end{aligned}$$

donde $H = H(q_j,p_j)$ es el eigenvalor de los estados j-ésimos. Haciendo esto en cada paso de la amplitud [1], obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle q,t|q_0,t_0\rangle &= \lim_{N\to\infty} \int dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \\
&\quad e^{\frac{i}{\hbar}\Big(p_N(q-q_N)-\Delta t H(q_N,p_N)\Big)} \cdots e^{\frac{i}{\hbar}\Big(p_0(q_1-q_0)-\Delta t H(q_0,p_0)\Big)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \int dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\Big[p_j(q_{j+1}-q_j)-\Delta t H(q_j p_j)\Big]}
\end{aligned}$$

Tenemos que $q_{j+1} = q(t_{j+1}) = q(t_j + \Delta t)$, y ya que Δt es pequeño y cada vez más conforme $N \to \infty$, podemos expandir q_{j+1} alrededor de q_j:

$$q_{j+1} = q(t_j) + \Delta t\dot{q}(t_j) = q_j + \Delta t\dot{q}_j$$

Entonces la amplitud queda como

$$\begin{aligned}
\langle q,t|q_0,t_0\rangle &= \lim_{N\to\infty} \int dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\Big[p_j\dot{q}_j - H(q_j,p_j)\Big]\Delta t} \\
&= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \lim_{N\to\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\Big[p_j\dot{q}_j - H(q_j,p_j)\Big]\Delta t} \qquad (3.13) \\
&= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \; e^{\frac{i}{\hbar}\int dt \; [p\dot{q}-H]}
\end{aligned}$$

donde definimos la *medida de la integral de trayectoria* como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}q &= \lim_{N\to\infty} dq_1 \cdots dq_N \\
\mathcal{D}p &= \lim_{N\to\infty} \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}}
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Como $L = p\dot{q} - H$, obtenemos

$$
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \; e^{\frac{i}{\hbar}S} \tag{3.15}
$$

Por último, haremos que esta integral que tiene dependencia en q y p, tenga dependencia en q y $\dot{q}$, es decir utilizaremos el Lagrangiano en vez del Hamiltoniano, para que la expresión sea explícitamente covariante, pero los resultados son equivalentes. El Hamiltoniano clásicamente es $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, entonces, retomando en la ecuación (3.13), tenemos que

$$
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{N\to\infty} \int dq_1 \cdots dq_N \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\left[p_j\dot{q}_j - \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_j)\right)\right]\Delta t}
$$

Alguna de las integrales sobre p resulta

$$
\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t\left(p_j\dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m}\right)} = \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{i\Delta t}} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t \frac{m}{2}\dot{q}_j^2}
$$

Usando esto podemos hacer todas las integrales de p y entonces reescribir la amplitud como

$$
\begin{aligned}
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \lim_{N\to\infty} \int \frac{dq_1 \cdots dq_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} \left(\frac{2m\pi\hbar}{i\Delta t}\right)^{\frac{N+1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{m}{2}\dot{q}_j^2 - V(q_j)\right]\Delta t} \\
&= \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right)} \\
&= \int \mathcal{D}q \; e^{\frac{i}{\hbar}S}
\end{aligned}
$$

donde ahora definimos

$$
\mathcal{D}q = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N+1}{2}} dq_1 \cdots dq_N
$$

Esto se puede aplicar al caso de teoría cuántica de campos. Hasta la ecuación (3.15) no hicimos ninguna suposición sobre la forma del Hamiltoniano, entonces es una fórmula general. Después dimos una forma específica del Hamiltoniano, con lo cual pudimos integrar las $p's$ y escribir la integral solo sobre las $q's$. El Hamiltoniano que consideramos fue el clásico, sin embargo, la parte crucial para hacer las integrales sobre p de esa forma, es que sean cuadráticas en p. Entonces también se pueden hacer así las integrales sobre p en el caso cuántico siempre y cuando la exponencial sea cuadrática en p. Así, para los campos cuánticos, ϕ, que cumplan la condición, podemos escribir la amplitud de que el campo tenga la configuración $\phi_a(\mathbf{x})$ en $x^0 = 0$ y $\phi_b(\mathbf{x})$ en $x^0 = \Delta t$ [11] como

$$\langle\phi_b(x)|\phi_a(x)\rangle = \langle\phi_b(\mathbf{x})|e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H}|\phi_a(\mathbf{x})\rangle = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{\frac{i}{\hbar}S} = \int \mathcal{D}\phi(x)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \mathcal{L}(\phi,\partial\phi)} \quad (3.16)$$

Notemos que aquí los campos ya no son operadores; la cuantización fue hecha al considerar todas las trayectorias con la integral. A partir de esto, podremos calcular amplitudes para distintos procesos, incluyendo interacciones entre partículas.

Funcionales generadoras

Las funcionales generadoras de funciones de Green, $Z[J]$, que dependen de fuentes arbitrarias asociadas a los campos, permiten obtener las funciones de Green de la teoría al derivarlas con respecto a las fuentes. Para un campo, ϕ, está definida por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi(x)\ e^{i\int\ d^4x[\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)+J(x)\phi(x)]} \quad (3.17)$$

con J la fuente asociada a ϕ, donde estamos usando nuevamente a partir de ahora unidades naturales. En general las funcionales generadoras son de la misma forma, sumando al Lagrangiano términos con cada campo multiplicado por su fuente:

$$Z[J_1, ..., J_n] = \int \mathcal{D}\phi_1 \cdots \mathcal{D}\phi_n\ e^{i\int\ d^4x[\mathcal{L}+J_1(x)\phi_1(x)+\cdots+J_n(x)\phi_n(x)]} \quad (3.18)$$

En algunos casos, el orden en qué se multiplica la fuente con el campo importa ya que podrían no conmutar, como ocurre con las variables de Grassmann, utilizadas para describir los campos fermiónicos, como veremos pronto.

Las funciones de Green, en términos de integrales de trayectoria se definen como

$$\begin{aligned} G_n(x_1, ..., x_n) &= \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle \\ &= \lim_{t_0\to-\infty; t\to\infty} \frac{\langle\phi, x|T\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)|\phi_0, x_0\rangle}{\langle\phi, x|\phi_0, x_0\rangle} \\ &= \lim_{t_0\to-\infty; t\to\infty} \frac{\int \mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{i\int d^4x\mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi(\tau)e^{i\int d^4x\mathcal{L}}} \\ &= \lim_{t_0\to-\infty; t\to\infty} \frac{\int \mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{i\int d^4x\mathcal{L}}}{Z[0]} \end{aligned} \quad (3.19)$$

con T el operador de ordenamiento temporal. Para obtener funciones de Green derivamos Z funcionalmente con respecto a las fuentes y evaluamos la expresión resultante con la fuente igual a cero. Esto porque al derivar "bajamos" al campo y al evaluar en las fuentes igual a cero nos que una expresión de la forma (3.19). Entonces las funciones de Green o funciones de correlación se obtienen de

$$G_n(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} Z[J]\Big|_{J=0} \quad (3.20)$$

En el siguiente capítulo desarrollaremos la funcional generadora para la electrodinámica cuántica, en donde hay dos campos fermiónicos (fermión, antifermión) y un campo vectorial (fotón). A partir de ésta, construiremos las funciones de Green y otras funcionales.

3.3. Transformaciones y simetrías

En la teoría clásica existe el teorema de Noether, que nos dice que ciertas cantidades son conservadas al realizar una transformación al sistema. Ahora, veremos que en la teoría cuántica existe lo análogo a este teorema, que nos da una simetría en las funciones de correlación al realizar una transformación.

Empezamos considerando una función de correlación para un campo $\phi(x)$:

$$\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\ e^{iS[\phi]} \tag{3.21}$$

A esta función de correlación le aplicaremos una transformación de coordenadas, $x \to x'$. Consideraremos una acción S invariante ante transformaciones del campo; $S[\phi'] = S[\phi]$, y también consideraremos el caso en el que no hay anomalías, esto es, la medida de la integral se mantiene invariante: $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$. Entonces, haciendo un cambio de variable $\phi \to \phi'$, tendremos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x_1')\cdots\phi(x_n')|0\rangle &= \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x_1')\cdots\phi(x_n')\ e^{iS[\phi]} \\
&= \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\phi'\ \phi'(x_1')\cdots\phi'(x_n')\ e^{iS[\phi']} \\
&= \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\phi\ \phi'(x_1')\cdots\phi'(x_n')\ e^{iS[\phi]} \\
&= \langle 0|\phi'(x_1')\cdots\phi'(x_n')|0\rangle
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora vamos a considerar una transformación en términos de sus parámetros ω^a y sus generadores G_a:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \tilde{\delta}\phi(x) = e^{-i\omega^a G_a}\phi(x) = (1 - i\omega^a G_a + \cdots)\phi(x) \tag{3.23}$$

Entonces, infinitesimalmente la variación es

$$\tilde{\delta}\phi(x) = -i\omega^a G_a \phi(x) \tag{3.24}$$

Notemos que en esta transformación las coordenadas, x, son invariantes, esto es, estamos considerando variaciones virtuales $\tilde{\delta}$. Cambiando la etiqueta de los campos dentro de la integral funcional, podemos escribir la función de correlación como

$$\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\phi'(x)\phi'(x_1)\cdots\phi'(x_n)e^{iS[\phi']} \tag{3.25}$$

En la acción estamos integrando al Lagrangiano $\mathcal{L}$ sobre las coordenadas, en esta integral realicemos un cambio de coordenadas (no estamos haciendo el cambio de coordenas para los campos en la función de correlación, sigue siendo una variación virtual en los campos que se multiplican por la exponencial):

$$S[\phi'] = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x'))$$

Aquí el lagrangiano ya está variando totalmente, en los campos y coordenadas, entonces tenemos que la variación es *real* o total, δ, esta variación es dada por

$$\delta\mathcal{L} = \tilde{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x^\mu \tag{3.26}$$

También tenemos el Jacobiano de la transformación $x \to x'$,

$$d^4x' = \Big(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\Big) d^4x \tag{3.27}$$

Entonces la acción transformada resulta, a primer orden en las variaciones,

$$\begin{aligned}
S[\phi'] &= \int d^4x \Big(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\Big)\Big(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}\Big) \\
&= \int d^4x \Big(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\Big)\Big(\mathcal{L} + \tilde{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x^\mu\Big) \\
&= \int d^4x \Big(\mathcal{L} + \tilde{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L}\ \delta x^\mu + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}\Big) \\
&= \int d^4x \Big(\mathcal{L} + \tilde{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L}\ \delta x^\mu)\Big)
\end{aligned}$$

Sabemos que la variación virtual del Lagrangiano es

$$\tilde{\delta}\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\tilde{\delta}\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\tilde{\delta}\phi\right) \tag{3.28}$$

donde, recordemos, lo que está entre parétesis en el primer término es la ecuación de movimiento al igualarlo a cero. Por lo que la acción nos queda

$$S[\phi'] = \int d^4x \left(\mathcal{L} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\tilde{\delta}\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\tilde{\delta}\phi\right) + \partial_\mu(\mathcal{L}\ \delta x^\mu)\right)$$

Considerando que se cumple la ecuación de movimiento y con $\tilde{\delta}\phi = \delta\phi - \partial_\nu\phi\ \delta x^\nu$,

$$\begin{aligned}
S[\phi'] &= \int d^4x \left(\mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\tilde{\delta}\phi\right) + \partial_\mu(\mathcal{L}\ \delta x^\mu)\right) \\
&= S[\phi] + \int d^4x\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\tilde{\delta}\phi + \mathcal{L}\ \delta x^\mu\right) \\
&= S[\phi] + \int d^4x\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\delta\phi - \partial_\nu\phi\delta x^\nu) + \mathcal{L}\ \delta x^\mu\right) \\
&= S[\phi] + \int d^4x\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right)\delta x^\nu\right) \\
&= S[\phi] + \int d^4x\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - T^\mu_\nu \delta x^\nu\right)
\end{aligned}$$

donde T^{μ}_{ν} es el tensor de energía-momento. Tomando en cuenta que los parámetros ω_a son constantes y que tenemos

$$\delta\phi = \omega_a \frac{\partial \phi'(x')}{\partial \omega_a}, \qquad \delta x^{\mu} = \omega_a \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \omega_a}, \tag{3.29}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} S[\phi'] &= S[\phi] + \int d^4x\ \omega_a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi'(x')}{\partial \omega_a} - T^{\mu}_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \omega_a} \right) \\ &= S[\phi] + \int d^4x\ \omega_a \partial_\mu j^{\mu a} \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde

$$j^{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi'(x')}{\partial \omega_a} - T^{\mu}_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \omega_a} \tag{3.31}$$

es la corriente coservada. Entonces la función de correlación (3.25) queda como

$$\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\phi'(x_1)\cdots\phi'(x_n) e^{iS[\phi]+i\int d^4x\ \omega_a \partial_\mu j^{\mu a}} \tag{3.32}$$

Definiendo $X = \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$, $X' = \phi'(x_1)\cdots\phi'(x_n)$ para simplificar notación y considerando hasta primer orden la exponencial,

$$\begin{aligned} \langle 0|X|0\rangle &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\ X' e^{iS[\phi]} e^{i\int d^4x\ \omega_a \partial_\mu j^{\mu a}} \\ &\approx \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\ (X + \tilde{\delta} X) e^{iS[\phi]} \Big(1 + i \int d^4x\ \omega_a \partial_\mu j^{\mu a}\Big) \\ &\approx \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\ X e^{iS[\phi]} + \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\ \tilde{\delta} X e^{iS[\phi]} \\ &+ i \int d^4x \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi'(x)\ X\ \omega_a \partial_\mu j^{\mu a} e^{iS[\phi]} \\ &= \langle 0|X|0\rangle + \langle 0|\tilde{\delta} X|0\rangle + i\omega_a \int d^4x \langle 0|X\partial_\mu j^{\mu a}|0\rangle \end{aligned}$$

donde usamos que la medida de la integral funcional es invariante. Por lo que

$$\langle 0|\tilde{\delta} X|0\rangle = -i\omega_a \int d^4x \langle 0|X\partial_\mu j^{\mu a}|0\rangle$$

Sustituyendo que

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} X = \tilde{\delta}(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)) &= -i\omega_a \sum_{i=1}^{n} (\phi_1(x_1)\cdots G^a \phi_i(x_i)\cdots\phi_n(x_n)) \\ &= -i\omega_a \int d^4x \sum_{i=1}^{n} (\phi_1(x_1)\cdots G^a \phi_i(x)\cdots\phi_n(x_n)) \delta^4(x - x_i) \end{aligned}$$

tenemos

$$-i\omega_a \int d^4x \langle 0| \sum_{i=1}^{n} (\phi_1(x_1)\cdots G^a\phi_i(x)\cdots\phi_n(x_n))\delta^4(x-x_i)|0\rangle$$
$$= -i\omega_a \int d^4x \langle 0|X\partial_\mu j^{\mu a}|0\rangle$$

O bien, ya que los campos hasta ahora no tienen forma específica, lo que está siendo integrado es igual:

$$\langle 0|X\partial_\mu j^{\mu a}|0\rangle = \langle 0| \sum_{i=1}^{n} (\phi_1(x_1)\cdots G^a\phi_i(x)\cdots\phi_n(x_n))|0\rangle\delta^4(x-x_i) \tag{3.33}$$

Esta es la identidad de Ward para la corriente $j^{\mu a}$ en su forma general. Nos dice que la corriente es conservada, a excepción de puntos donde $x = x_i$. En el capítulo siguiente veremos esta identidad para la electrodinámica cuántica considerando transformaciones de norma.

Capítulo 4

Cuantización de teorías de norma abelianas

4.1. Electrodinámica cuántica

Ahora vamos a continuar con el desarrollo de las funcionales generadoras, desarrollándolas para la electrodinámica. La funcional generadora de funciones de Green dada por (3.17) para la electrodinámica cuántica es

$$
\begin{aligned}
Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int} + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)} \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L} + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

donde las fuentes y campos fermiónicos son números de Grassmann (anticonmutan), para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, y el Lagrangiano está dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int} \\
\mathcal{L}_A &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\
\mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \\
\mathcal{L}_{int} &= -e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi
\end{aligned}
$$

El segundo término de $\mathcal{L}_A$ fija la norma, lo cual es necesario para que al hacer la integral de trayectoria del campo de norma, A_μ, no estemos contando de más, ya que muchas configuraciones de este campo son equivalentes debido a la invariancia de norma de éste, entonces es necesario fijar la norma para que la teoría esté bien definida. Veremos más adelante como se obtiene este término para el caso más general de teorías no abelianas. Por otro lado, también notamos que las fuentes J^μ, η y $\bar{\eta}$, son campos clásicos, es decir, no han sido integrados funcionalmente como los campos A_μ, ψ y $\bar{\psi}$. Esta forma es correcta para obtener funciones de Green y gran parte de las expresiones en teoría cuántica de campos, pero para algunas cosas y tener un análisis más general se pueden cuantizar también las fuentes, como en se realiza en [17].

Por simplicidad para definir de forma más clara a las funcionales, por el momento tomamos en cuenta solo la parte de A_μ (los otros campos tienen un desarrollo similar) y sin el término de interacción. La funcional generadora de la teoría libre para el campo A_μ, después de integrar funcionalmente, resulta

$$Z_0[J^\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_A + J^\mu A_\mu)} = Z_0[0]e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \ J_\mu(x)M^{\mu\nu}J_\nu(y)} \tag{4.2}$$

con el subíndice 0 indicando que se trata de la funcional para la teoría libre (sin el término $\mathcal{L}_{int}$). Con esto definimos la *funcional generadora de funciones de Green conectadas*, $W_0[J]$:

$$\frac{Z_0[J^\mu]}{Z_0[0]} = e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \ J_\mu(x)M^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)} \equiv e^{iW_0[J]} \tag{4.3}$$

En el caso de interacciones definimos análogamente:

$$\frac{Z[J^\mu]}{Z[0]} = e^{iW[J]} \tag{4.4}$$

Podemos desarrollar en serie de potencias de J^μ [9]:

$$iW[J^\mu] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int d^4x_1 \cdots d^4x_n J^{\mu_1}(x_1)\cdots J^{\mu_n}(x_n)W_n(x_1,...,x_n)_{\mu_1,...,\mu_n} \tag{4.5}$$

donde los coefientes son dados por:

$$W_n(x_1,...,x_n)_{\mu_1,...,\mu_n} = \frac{\delta^n iW}{\delta J^{\mu_1}(x_1)\cdots\delta J^{\mu_n}(x_n)}\Big|_{J^{\mu_1}=\cdots=J^{\mu_n}=0} \tag{4.6}$$

(en el caso de incluir a los otros campos saldrían muchos otros términos incluyendo las combinaciones de todos ellos). Al derivar W respecto a la fuente obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta iW}{\delta J^\mu(x)} &= \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} ln\left(\frac{Z[J]}{Z[0]}\right)\\ &= \frac{1}{\frac{Z[J]}{Z[0]}}\frac{1}{Z[0]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J^\mu(x)}\\ &= \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J^\mu(x)}\end{aligned}$$

Dado esto e incluyendo ahora los otros campos, calcularemos la tercer derivada de iW con respecto a J^μ, $\bar{\eta}$, η y evaluaremos en las fuentes iguales a cero para obtener la función de Green conectada de tres puntos, correspondiente al vértice de dos fermiones y un fotón. Como vemos en (4.1), la fuente η está del lado derecho de $\bar{\psi}$, por lo que necesitamos derivar del lado derecho para no obtener un signo menos extra al conmutar a η con $\bar{\psi}$, denotaremos a esta derivada del lado derecho como $\frac{\delta^r}{\delta}$. Equivalentemente podríamos introducir un signo extra al efectuar esta derivación ya que estas variables anticonmutan. Entonces la derivada que calcularemos es $\frac{\delta^r}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{\delta J^\mu}iW$.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta iW[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)} &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{1}{Z[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}\frac{\delta Z[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{1}{Z}\right)\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} + \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)} \\
&= -\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} + \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)}
\end{aligned}$$

Luego, derivando (de derecha a izquierda) con respecto a η tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta iW[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&= -\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)}\right) - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\right)\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&+ \left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{1}{Z^2}\right)\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&+ \frac{1}{Z}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)}\right) - \left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{1}{Z}\right)\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)} \\
\\
&= -\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)}\right) - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\right)\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&- \frac{2}{Z^3}\frac{\delta^r Z}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x_1)} \\
&+ \frac{1}{Z}\left(\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)}\right) + \frac{1}{Z^2}\frac{\partial^r Z}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x_2)\delta J^\mu(x_1)}
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\frac{\delta iW}{\delta J^\mu(x)} = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} = i\langle 0|A^\mu(x)|0\rangle_J \tag{4.7}$$

$\langle 0|A^\mu(x)|0\rangle_J$ es el valor esperado en el vacío del campo modificado por una fuente, obtenido el cálculo de esta ecuación con la funcional generadora (4.1). Evaluando en $J^\mu = 0$ obtenemos simplemente el valor esperado en el vacío:

$$\left.\frac{\delta iW}{\delta J^\mu(x)}\right|_{J^\mu=0} = \frac{1}{Z}\left.\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)}\right|_{J^\mu=0} = i\langle 0|A^\mu(x)|0\rangle \tag{4.8}$$

y el análogo respectivo para los otros dos campos. Entonces la expresión encontrada en términos de los valores esperados resulta

$$\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta iW[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)}\Big|_{fuentes=0}$$

$$\begin{aligned}
&= -i^2\langle 0|\psi(x_2)|0\rangle\langle 0|T(\bar{\psi}(x_3)A^\mu(x_1))|0\rangle - i^2\langle 0|T(\bar{\psi}(x_3)\psi(x_2))|0\rangle\langle 0|A^\mu(x_1)|0\rangle\\
&- 2i^3\langle 0|\bar{\psi}(x_3)|0\rangle\langle 0|\psi(x_2)|0\rangle\langle 0|A^\mu(x_1)|0\rangle\\
&+ i\langle 0|T(\bar{\psi}(x_3)\psi(x_2)A^\mu(x_1))|0\rangle + i^2\langle 0|\bar{\psi}(x_3)|0\rangle\langle 0|T(\psi(x_2)A^\mu(x_1))|0\rangle
\end{aligned}$$

Asumiendo que los valores esperados en el vacío de los campos (individuales) se anulan, tenemos que

$$\frac{\delta^r}{\delta\eta(x_3)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)}\frac{\delta W[J^\mu,\eta,\bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)}\Big|_{fuentes=0} = \langle 0|T(\bar{\psi}(x_3)\psi(x_2)A^\mu(x_1))|0\rangle \tag{4.9}$$

lo cual es el vértice de dos fermiones y un fotón de la electrodinámica cuántica, que se puede calcular explícitamente. De esta forma hemos visto, para la electrodinámica cuántica, como se obtienen los vértices (funciones de Green de tres puntos). Más adelante calcularemos de forma similar explícitamente los propagadores y vértices para la cromodinámica cuántica.

Ahora introduciremos la *acción efectiva*, que como mencionamos en el capítulo anterior, da la acción completa a nivel cuántico, y genera las funciones de Green irreducibles por una partícula (1PI, aquellos diagramas que no se pueden desconectar de solo cortar una línea). Como acabamos de ver, al derivar W con respecto a la fuente, obtenemos el valor esperado del campo correspondiente en el vacío modificado por una fuente (ecuación 4.7), al que también podemos llamar *campo clásico*, que denotamos con cl como subíndice:

$$\phi_{cl} \equiv \langle 0|\phi(x)|0\rangle_J = \frac{1}{iZ[J]}\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x)e^{i(S+\int d^4x' J\phi)} \tag{4.10}$$

En lo siguiente vamos a suponer que es equivalente decir que la fuente es cero o que el campo clásico es cero, en ocasiones esto no ocurre, y en tal situación el campo clásico se cambia por uno nuevo dado por $\bar{\phi}_{cl} = \phi_{cl} - \phi_{cl}|_{J=0}$ que se anula cuando la fuente es igual a cero.

Este campo se utiliza para escribir las cosas en términos de los campos clásicos en vez de escribirlas en términos de los campos cuánticos. Esto se logra con una tranformada de Legendre, de forma análoga a los potenciales en termodinámica. La acción efectiva se define por

$$\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] - \int d^4x\ J(x)\phi_{cl}(x) \tag{4.11}$$

para algún campo ϕ con fuente J. En el caso de la electródinamica tenemos

$$\Gamma[A^\mu_{cl},\psi_{cl},\bar{\psi}_{cl}] = W[J^\mu,\eta,\bar{\eta}] - \int d^4x\ J_\mu(x)A^\mu_{cl}(x) - \int d^4x\ \bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x) - \int d^4x\ \bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x) \tag{4.12}$$

De esta definición obtenemos que

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)} = -J^{\mu}(x); \qquad \frac{\delta^r\Gamma}{\delta\psi_{cl}(x)} = -\bar{\eta}(x); \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(x)} = -\eta(x) \tag{4.13}$$

Verifiquemos que en efecto solo depende de los campos clásicos, es decir, que

$$\delta\Gamma[A^{\mu}_{cl},\psi_{cl},\bar{\psi}_{cl}] = \int d^4x\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)}\delta A^{\mu}_{cl}(x) + \frac{\delta^r\Gamma}{\delta\psi_{cl}(x)}\delta\psi_{cl}(x) + \delta\bar{\psi}_{cl}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(x)}\right) \tag{4.14}$$

Con la definición de la acción efectiva,

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma &= \delta\left(W[J^{\mu},\eta,\bar{\eta}] - \int d^4x\ J_{\mu}(x)A^{\mu}_{cl}(x) - \int d^4x\ \bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x) - \int d^4x\ \bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x)\right)\\
&= \delta W[J^{\mu},\eta,\bar{\eta}] - \int d^4x\ \delta(J_{\mu}(x)A^{\mu}_{cl}(x)) - \int d^4x\ \delta(\bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x)) - \int d^4x\ \delta(\bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x))\\
&= \int d^4x\frac{\delta W}{\delta J^{\mu}(x)}\delta J^{\mu}(x) + \int d^4x\frac{\delta^r W}{\delta\eta(x)}\delta\eta(x) + \int d^4x\ \delta\bar{\eta}(x)\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}}\\
&- \int d^4x\ \delta J_{\mu}(x)A^{\mu}_{cl}(x) - \int d^4x\ J_{\mu}(x)\delta A^{\mu}_{cl}(x)\\
&- \int d^4x\ \delta\bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x) - \int d^4x\ \bar{\psi}_{cl}(x)\delta\eta(x)\\
&- \int d^4x\ \delta\bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x) - \int d^4x\ \bar{\eta}(x)\delta\psi_{cl}(x)\\
\\
&= \int d^4x\ A^{\mu}_{cl}\delta J_{\mu}(x) + \int d^4x\ \bar{\psi}_{cl}(x)\delta\eta(x) + \int d^4x\ \delta\bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x)\\
&- \int d^4x\ \delta J_{\mu}(x)A^{\mu}_{cl}(x) - \int d^4x\ J_{\mu}(x)\delta A^{\mu}_{cl}(x)\\
&- \int d^4x\ \delta\bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x) - \int d^4x\ \bar{\psi}_{cl}(x)\delta\eta(x)\\
&- \int d^4x\ \delta\bar{\eta}(x)\psi_{cl}(x) - \int d^4x\ \bar{\eta}(x)\delta\psi_{cl}(x)\\
\\
&= -\int d^4x\ J_{\mu}(x)\delta A^{\mu}_{cl}(x) - \int d^4x\ \delta\bar{\psi}_{cl}(x)\eta(x) - \int d^4x\ \bar{\eta}(x)\delta\psi_{cl}(x)\\
\\
&= \int d^4x\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}_{cl}(x)}\delta A^{\mu}_{cl}(x) + \frac{\delta^r\Gamma}{\delta\psi_{cl}(x)}\delta\psi_{cl}(x) + \delta\bar{\psi}_{cl}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(x)}\right)
\end{aligned}$$

Comprobando así que la acción efectiva Γ no depende de las corrientes. Al evaluar en las fuentes iguales a cero obtenemos $\delta\Gamma = 0$ (porque como vimos las derivadas de la acción efectiva con respecto a los campos clásicos son las fuentes), es decir, tenemos un valor extremo del valor esperado de los campos, entonces esta funcional hace para la teoría cuántica lo que la acción para la teoría clásica, por ello su nombre, acción efectiva.

La acción efectiva también la podemos escribir en serie de potencias de los campos clásicos, así, nuevamente por simplicidad ocupando solo el campo A_μ,

$$\Gamma[A^\mu_{cl}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \; A^{\mu_1}_{cl}(x_1) \cdots A^{\mu_n}_{cl}(x_n) \Gamma_n(x_1, ..., x_n)_{\mu_1, ..., \mu_n} \tag{4.15}$$

donde los coeficientes, dados por,

$$\Gamma_n(x_1, ..., x_n)_{\mu_1, ..., \mu_n} = \frac{\delta^n \Gamma}{\delta A^{\mu_1}_{cl}(x_1) \cdots \delta A^{\mu_n}_{cl}(x_n)}\Big|_{A^{\mu_1}_{cl} = \cdots = A^{\mu_n}_{cl} = 0} \tag{4.16}$$

son llamados vértices propios [9].

Ahora que hemos definido la acción efectiva veamos una propiedad que tienen las transformaciones lineales de los campos. Consideremos una transformación infinitesimal del campo:

$$\delta\phi(x) = A(\phi)\delta\omega(x) \tag{4.17}$$

donde $\delta\omega(x)$ es una función infinitesimal de x y $A(\phi)$ es una expresión lineal de los campos, que podría tener estructura matricial. Supongamos también que el cambio de la acción bajo esta transformación igualente es lineal:

$$\delta S = \int d^4x \; B(\phi)\delta\omega(x)$$

En esta acción la norma puede ya estar fija, y su variación tiene esta forma siempre y cuando la condición de norma sea a lo más cuadrática en los campos. Esto por ejemplo, es el caso de la electrodinámica. Lo que haremos es ver, que dadas estas condiciones, la variación de esta acción clásica, S, es igual a la variación de la acción efectiva, Γ.

Para ver que esto sucede, apliquemos un cambio de variable en la funcional generadora:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi' \; e^{i(S[\phi'] + \int d^4x \; J\phi')}$$

donde

$$\phi' = \phi + \delta\phi, \qquad \mathcal{D}\phi' = J\mathcal{D}\phi$$

y consideramos el Jacobiano J una constante. Entonces dejando de lado esta constante (que se une al factor de normalización) tenemos que la funcional generadora queda como

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi+\delta\phi]+\int d^4x \;\; J(\phi+\delta\phi))} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi+\int d^4x \;\; (J\phi+J\delta\phi))} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \;\; J\phi)} e^{\int d^4x (\frac{\delta S}{\delta\phi}+J)\delta\phi} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \;\; J\phi)} \left(1+\int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta\phi}+J\right)\delta\phi + O(\delta\phi^2)\right)
\end{aligned}$$

El término de órden cero es justamente $Z[J]$ antes de la transformación, entonces se cancela con el $Z[J]$ del lado izquierdo. Entonces

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \;\; J\phi)} \left(\int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta\phi}+J\right)\delta\phi\right)$$

O bien, como $\delta S[\phi] = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi$,

$$\int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \;\; J\phi)}\delta S = -\int d^4x \; J \int \mathcal{D}\phi \; e^{i(S[\phi]+\int d^4x \;\; J\phi)}(\delta\phi)$$

$$\langle \delta S\rangle_J = -\int d^4x \; J \; \langle\delta\phi\rangle_J$$

donde $\langle A\rangle_J \equiv \langle 0|A|0\rangle_J$ es el valor esperado de A en el vacío modificado por la fuente J. Además, como hemos visto, la fuente se puede escribir como una derivada de la acción efectiva con respecto al campo clásico, $\phi_{cl} \equiv \langle\phi\rangle_J$:

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = -J(x)$$

Entonces

$$\langle\delta S\rangle_J = \int d^4x \; \frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)}\langle\delta\phi\rangle_J \tag{4.18}$$

Al inicio dijimos que las variaciones $\delta\phi$ y δS serían consideradas lineales, esto para lo siguiente; para una función lineal arbitraria F tenemos que

$$\langle F[\phi]\rangle_J = F[\langle\phi\rangle_J] = F[\phi_{cl}]$$

Por lo que

$$\delta S[\phi_{cl}] = \langle\delta S\rangle_J = \int d^4x \; \frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)}\delta\phi_{cl} = \delta\Gamma[\phi_{cl}] \tag{4.19}$$

La variación de la acción clásica y efectiva es la misma, mientras la transformación sea lineal en los campos y no cambie la medida de la integral funcional, es decir, que no hayan anomalías. Así la acción efectiva tendrá las mismas simetrías que la acción clásica. Esto es un resultado general para cualquier campo que transforme de la forma lineal que usamos para llegar al resultado.

4.2. Identidades de Ward-Takahashi en la electrodinámica cuántica

Como vimos en el capítulo anterior, las identidades de Ward generales nos dicen las consecuencias de realizar una transformación bajo la cual la teoría es invariante. Lo que haremos ahora será aplicar la transformación de norma del grupo $U(1)$ a la electrodinámica cuántica. Es decir, consideremos las transformaciones

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \approx (1 - ie\alpha(x))\psi(x)\\ \bar{\psi}'(x) &= e^{ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \approx (1 + ie\alpha(x))\bar{\psi}(x)\\ A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}$$

Queremos ver como cambia la funcional generadora de la electrodinámica cuántica (4.1) bajo esta transformación, de forma infinitesimal. La transformación deja invariante la medida de la integral de trayectoria ya que el parámetro de norma α no depende de los campos. Luego, en el término $\mathcal{L}_A$, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es invariante, y la segunda parte queda como

$$\begin{aligned}-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A'^\mu)^2 &= -\frac{\lambda}{2}\Big(\partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu\alpha)\Big)^2\\ &= -\frac{\lambda}{2}\Big(\partial_\mu A^\mu + \partial_\nu\partial^\nu\alpha\Big)^2\\ &= -\frac{\lambda}{2}\Big((\partial_\mu A^\mu)^2 + 2(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha) + (\partial_\nu\partial^\nu\alpha)^2\Big)\\ &\approx -\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)$$

El término $\mathcal{L}_\psi$ junto con $\mathcal{L}_{int}$ son invariantes de norma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{0,\psi} + \mathcal{L}'_{int} &= \bar{\psi}'(i\partial\!\!\!/ - m)\psi' - e\bar{\psi}'A\!\!\!/'\psi'\\ &= e^{ie\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-ie\alpha}\psi - ee^{ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu(A_\mu - \partial_\mu\alpha)e^{-ie\alpha}\psi\\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu(-ie\partial_\mu\alpha)\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}m\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi\\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi\\ &= \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{int}\end{aligned}$$

Y de los términos con las fuentes tenemos

$$\begin{aligned}J^\mu A'_\mu + \bar{\psi}'\eta + \bar{\eta}\psi' &= J^\mu(A_\mu + \partial_\mu\alpha) + (1 + ie\alpha)\bar{\psi}\eta + (1 - ie\alpha)\bar{\eta}\psi\\ &= J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu\partial_\mu\alpha + ie\alpha(\bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi)\end{aligned}$$

Juntándolo, tenemos que la funcional generadora transformada queda como

$$
\begin{aligned}
Z'[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x \left(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi+[-\lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)+J^\mu\partial_\mu\alpha+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]\right)} \\
&= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
&\times \left(1+i\int d^4x[-\lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)+J^\mu\partial_\mu\alpha+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]+\cdots\right) \\
&= Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] \\
&+ \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
&\left(i\int d^4x[-\lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)+J^\mu\partial_\mu\alpha+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Como esta transformación es un cambio de variable para la integral de trayectoria, debemos tener que $Z' = Z$. Entonces, a primer orden tenemos que,

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
&\left(\int d^4x[-\lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)+J^\mu\partial_\mu\alpha+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Integrando por partes dentro del paréntesis dos veces el primer término y una vez el segundo término,

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x[-\lambda(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu\partial^\nu\alpha)+J^\mu\partial_\mu\alpha+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)] \\
&= \int d^4x[-\lambda\alpha\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)-\alpha\partial_\mu J^\mu+ie\alpha(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)] \\
&= \int d^4x\ \alpha[-\lambda\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)-\partial_\mu J^\mu+ie(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]
\end{aligned}
$$

Por tanto, (4.20) queda como,

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x\ \alpha \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
&\Big(-\lambda\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)-\partial_\mu J^\mu+ie(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]\Big) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
&\Big(-\lambda\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)-\partial_\mu J^\mu+ie(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)]\Big) = 0
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Esta última igualdad porque $\alpha(x)$ es arbitrario, entonces las integrales funcionales son lo que debe ser cero. Luego, como tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
A^\mu(x)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} &= -i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
\psi(x)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} &= -i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} \\
\bar{\psi}(x)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)} &= -i\frac{\delta^r}{\delta\eta(x)}e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)}
\end{aligned}$$

podemos reescibir (4.21) como

$$-\lambda\partial_\nu\partial^\nu\left(\partial_\mu(-i)\frac{\delta Z}{\delta J_\mu(x)}\right)-\partial_\mu J^\mu Z+ie\left(-i\frac{\delta^r Z}{\delta\eta(x)}\eta-\bar{\eta}(-i)\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)=0$$

$$i\lambda\partial_\nu\partial^\nu\left(\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta J_\mu(x)}\right)-\partial_\mu J^\mu Z+e\left(\frac{\delta^r Z}{\delta\eta(x)}\eta-\bar{\eta}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)=0 \tag{4.22}$$

Usando la funcional generadora de funciones de Green conectadas, $W[J,\eta,\bar{\eta}]$, definida por $Z[J,\eta,\bar{\eta}]=Z[0,0,0]e^{iW[J,\eta,\bar{\eta}]}$,

$$-\lambda\partial_\nu\partial^\nu\left(\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}\right)-\partial_\mu J^\mu+ie\left(\frac{\delta^r W}{\delta\eta(x)}\eta-\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)=0 \tag{4.23}$$

También lo podemos reescribir en términos de la acción efectiva, Γ, definida por

$$\Gamma[A_{\mu,cl},\psi_{cl},\bar{\psi}_{cl}]=W[J,\eta,\bar{\eta}]-\int d^4x(J^\mu A_{\mu,cl}+\bar{\eta}\psi_{cl}+\bar{\psi}_{cl}\eta)\ ,$$

y de los campos clásicos, como

$$-\lambda\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu_{cl})+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu,cl}}-ie\left(\bar{\psi}_{cl}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}}-\frac{\delta^r\Gamma}{\delta\psi_{cl}}\psi_{cl}\right)=0 \tag{4.24}$$

Así que las ecuaciones (4.22, 4.23, 4.24) nos dan, en términos de tres distintas funcionales, la condición que se tiene como consecuencia de la invarianza ante transformaciones de norma, a primer orden. Estas son las llamada identidades de Ward-Takahashi en la electrodinámica cuántica.

Veamos ahora una forma de usar esta identidad. Para ello tomemos las derivadas funcionales de (4.24) con respecto a $\bar{\psi}_{cl}$ (por la derecha) y ψ_{cl}:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta^r\delta}{\delta\psi_{cl}(y)\delta\bar{\psi}_{cl}(z)}\left(-\lambda\partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu_{cl})+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu,cl}}-ie\bar{\psi}_{cl}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}}+ie\frac{\delta^r\Gamma}{\delta\psi_{cl}}\psi_{cl}\right) \\
&= \partial_\mu\frac{\delta^r\delta^2\Gamma}{\delta\psi_{cl}(y)\delta\bar{\psi}_{cl}(z)\delta A_{\mu,cl}(x)}-ie\delta^4(x-z)\frac{\delta^r\delta\Gamma}{\delta\psi_{cl}(y)\delta\bar{\psi}_{cl}(x)}+ie\frac{\delta\delta^r\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(z)\delta\psi_{cl}(x)}\delta^4(x-y)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

La derivada funcional en el primer término es un vértice propio de la electrodinámica cuántica; $\Gamma^{(3)\mu}(x,y,z)$. Multiplicando la ecuación anterior por $e^{i(p'z-qx-py)}$ e integrando sobre x,y,z, obtenemos las transformadas de Fourier del espacio de momentos. Tomemos el primer término y lo integramos por partes:

$$\begin{aligned}
&\int d^4xd^4yd^4z\ e^{i(p'z-qx-py)}\partial_\mu\Gamma^{(3)\mu}(x,y,z)\\
&\qquad\qquad= -\int d^4xd^4yd^4z\ \partial_\mu\Big(e^{i(p'z-qx-py)}\Big)\Gamma^{(3)\mu}(x,y,z)\\
&\qquad\qquad= \int d^4xd^4yd^4z\ e^{i(p'z-qx-py)}q_\mu\Gamma^{(3)\mu}(x,y,z)\\
&\qquad\qquad= q_\mu(2\pi)^4\delta(p'-q-p)\tilde{\Gamma}^{(3)\mu}(p,q,p')
\end{aligned}$$

Del segundo término tenemos

$$\begin{aligned}
&-ie\int d^4xd^4yd^4z\ e^{i(p'z-qx-py)}\delta^4(x-z)\frac{\delta^r\delta\Gamma}{\delta\psi_{cl}(y)\delta\bar{\psi}_{cl}(x)}\\
&= -ie\int d^4yd^4z\ e^{i(z(p'-q)-py)}\frac{\delta^r\delta\Gamma}{\delta\psi_{cl}(y)\delta\bar{\psi}_{cl}(z)}\\
&= -ie\int d^4yd^4z\ e^{i(z(p'-q)-py)}\Gamma^{(2)}(y,z)\\
&= -ie\int d^4yd^4z\ e^{i(p(z-y))}\Gamma^{(2)}(y,z)\\
&= -ie(2\pi)^4\delta(p'-q-p)\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)
\end{aligned}$$

donde usamos que $p+q-p'=0$. Del tercer término tenemos

$$\begin{aligned}
&ie\int d^4xd^4yd^4z\ e^{i(p'z-qx-py)}\frac{\delta\delta^r\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(z)\delta\psi_{cl}(x)}\delta^4(x-y)\\
&= ie\int d^4yd^4z\ e^{i(p'z-y(q+p))}\frac{\delta\delta^r\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{cl}(z)\delta\psi_{cl}(y)}\\
&= ie\int d^4yd^4z\ e^{ip'(z-y)}\Gamma^{(2)}(y,z)\\
&= ie(2\pi)^4\delta(p'-q-p)\tilde{\Gamma}^{(2)}(p')
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación (4.25) queda como

$$\delta(p'-q-p)q_\mu\tilde{\Gamma}^{(3)\mu}(p,q,p') = ie\Big(-\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)+\tilde{\Gamma}^{(2)}(p')\Big)$$

Ya que se tiene que $\tilde{\Gamma}^{(2)} = i\tilde{S}^{-1}$, donde $i\tilde{S}^{-1}$ el propagador fermiónico, en el espacio de momentos, reescribimos lo anterior como

$$q_\mu\tilde{\Gamma}^{(3)\mu}(p,q,p') = e\Big(\tilde{S}^{-1}(p)-\tilde{S}^{-1}(p')\Big) \tag{4.26}$$

donde $p+q-p'=0$. Entonces la identidad de Ward-Takahashi nos dice la relación que hay entre el vértice de la electrodinámica cuántica y el propagador femiónico a cualquier orden. Notemos que a orden más bajo, es decir, en la teoría libre esta identidad en efecto se cumple; sabemos que el vértice y el propagador libre vienen dados por

$$\tilde{\Gamma}^{(3)\mu}_{libre} = -e\gamma^\mu; \qquad \tilde{S}^{-1}_{libre}(p) = \not{p} - m$$

Calculando la parte derecha de (4.26) con el propgador libre obtenemos

$$\begin{aligned} e\Big(\tilde{S}^{-1}_{libre}(p) - \tilde{S}^{-1}_{libre}(p')\Big) &= e\Big((\not{p} - m) - (\not{p}' - m)\Big) \\ &= e\Big(\not{p} - \not{p}'\Big) \\ &= e\Big(\not{p} - (\not{p} + \not{q})\Big) \\ &= -e\gamma^\mu q_\mu \end{aligned}$$

De esta forma vemos que es equivalente calcular el vértice de la electrodinámica cuántica o calcular la diferencia entre los propagadores de los fermiones de dicho vértice.

Las identidades de Ward (4.20, 4.22, 4.22 o 4.22) y las identidades de Ward generales (3.33) llevan a resultados equivalentes; las identidades desarrolladas mediante el método de integrales funcionales llevan a mismas relaciones entre las funciones de correlación de los campos y las funciones de correlación asociadas con las fuentes asociada a la transformación, es decir la identidad de Ward general (3.33). Esto se puede ver más fácilmente con un ejemplo sencillo. Si consideramos la transformación $\psi(x) \to (1 + ie\alpha(x))\psi(x)$, el Lagrangiano de QED cambia como

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - e(\partial_\mu \alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Con este cambio en la funcional generadora de QED, se puede llegar a que [11]

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu \; e^{i\int d^4x \; \mathcal{L}}\Big\{ -i\int d^4x\partial_\mu\alpha(x)[j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)] \\ + ie(\alpha(x_1)\psi(x_1))\bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1)(-ie\alpha(x_2)\psi(\bar{x}_2))\Big\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Dividiendo entre la funcional generadora Z,

$$\begin{aligned} i\partial_\mu\langle 0|Tj^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle = -ie\delta(x - x_1)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \\ + ie\delta(x - x_2)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde vemos que se relacionan las funciones de correlación de los campos fermiónicos con la función de correlación que incluye a la fuente correspondiente a la transformación, $j^\mu(x)$. Es justamente la identidad de Ward general (3.33) para los campos fermiónicos.

Capítulo 5

Cuantización de teorías de norma no abelianas

5.1. El método de Faddeev-Popov

Empezaremos la cuantización de la teoría de norma no abeliana con la cuantización del campo de norma A^a_μ, mediante la integral de trayectoria. El propagador del campo de norma, o bien, la funcional generadora con la fuente $J^{a\mu}$ igualada a cero, análogamente a (3.16), es

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right]} \tag{5.1}$$

Notemos que el integrando tiene el mismo valor para todos los A^a_μ que estén relacionados por una transformación de norma $\tilde{A}^a_\mu(x) = A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a$, ya que $F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ es invariante de norma [6]. Si integramos sobre todos los A^a_μ posibles tendremos un factor infinito debido a todas las transformaciones de norma para un A^a_μ dado. Entonces lo que debemos hacer es factorizar este infinito y hacerlo parte del factor de normalización. Para ello aplicamos el *método de Faddeev-Popov*. Vamos a introducir la función

$$\Delta_g^{-1}[A^a_\mu] = \int \mathcal{D}\alpha^a(x)\delta[g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)]$$

donde g es alguna función que asignaremos más adelante. Δ_g^{-1} es invariante de norma: si evaluamos la función en $A^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha'^a$, con α'^a fija,

$$\begin{aligned}\Delta_g^{-1}[A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha'^a] &= \int \mathcal{D}\alpha^a(x)\delta[g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha'^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)] \\ &= \int \mathcal{D}\alpha^a(x)\delta[g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu(\alpha'^a + \alpha^a))]\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\alpha^a \to \tilde{\alpha}^a = \alpha'^a + \alpha^a$,

$$\mathcal{D}\alpha^a \to \mathcal{D}\tilde{\alpha}^a = \mathcal{D}(\alpha'^a + \alpha^a) = \mathcal{D}\alpha^a$$

(porque α'^a es fija). Entonces

$$\Delta_g^{-1}[A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu \alpha'^a] = \int \mathcal{D}\tilde{\alpha}^a(x)\delta[g(A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\tilde{\alpha}^a)]$$
$$= \Delta_g^{-1}[A_\mu^a]$$

Con esto hemos comprobado que Δ_g^{-1} es invariante de norma. Ahora vamos a introducir esta función junto con su inversa Δ_g dentro de la integral en la funcional generadora (5.1).

$$\begin{aligned}
Z_A[0] &= \int \mathcal{D}A_\mu^a \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\right]}\Delta_g[A_\mu^a]\Delta_g^{-1}[A_\mu^a] \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu^a \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\right]}\Delta_g[A_\mu^a]\int \mathcal{D}\alpha^a(x)\delta[g(A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)] \\
&= \int \mathcal{D}\alpha^a \int \mathcal{D}A_\mu^a \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\right]}\Delta_g[A_\mu^a]\delta[g(A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)] \\
&= \int \mathcal{D}\alpha^a \int \mathcal{D}A_\mu^a \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\right]}\Delta_g[A_\mu^a]\delta[g(A_\mu^a)]
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $\Delta_g^{-1}[A_\mu^a]$ es invariante de norma. Así, dentro de la integral ya nada depende de α^a y entonces $\gamma \equiv \int \mathcal{D}\alpha^a$ es el infinito que debíamos factorizar:

$$Z_A[0] = \gamma \int \mathcal{D}A_\mu^a \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}\right]}\Delta_g[A_\mu^a]\delta[g(A_\mu^a)]$$

Para ver qué es $\Delta_g[A^a]$ haremos un cambio de variable en $\Delta_g^{-1}[A_\mu^a]$. Consideramos (con A^a fija), $g(A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a) = \tilde{g}^\alpha(\alpha^a)$, y el cambio de variable $\alpha^a \to \tilde{g}^\alpha$. Así, la medida estará dada por el determinante del Jacobiano:

$$\mathcal{D}\alpha^a = det\left|\frac{\delta\alpha^a}{\delta\tilde{g}^b}\right|\mathcal{D}\tilde{g}^b$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_g^{-1}[A_\mu^a] &= \int \mathcal{D}\alpha^a\delta[g(A_\mu^a + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)] \\
&= \int det\left|\frac{\delta\alpha^a}{\delta\tilde{g}^b}\right|\mathcal{D}\tilde{g}^b \; \delta[\tilde{g}^b] \\
&= det\left|\frac{\delta\alpha^a}{\delta\tilde{g}^b}\right|_{\tilde{g}=0}
\end{aligned}$$

Multiplicando por la función inversa,

$$1 = \Delta_g[A^a]\Delta_g^{-1}[A_\mu^a] = \Delta_g[A_\mu^a]det\left|\frac{\delta\alpha^a}{\delta\tilde{g}^b}\right|_{\tilde{g}=0}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_g[A_\mu^a] = det\left|\frac{\delta\tilde{g}^b}{\delta\alpha^a}\right|_{\tilde{g}=0} = det\left|\frac{\delta g(A_\mu^b + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^b)}{\delta\alpha^a}\right|_{g=0}$$

Sustituyendo en la funcional generadora, obtenemos,

$$Z_A[0] = \gamma \int \mathcal{D}A^a_\mu \; e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right]} \; det\left|\frac{\delta g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)}{\delta\alpha^b}\right|_{g=0} \delta[g(A^a)] \tag{5.2}$$

Recordemos que $(\bar{D}_\mu\alpha)^a = \partial_\mu\alpha^a - gf^{abc}\alpha^b A^c_\mu$, por lo que al derivar funcionalmente a g con respecto a α^a nos quedará una dependencia con A^a_μ, así que este determinante no puede salir de la integral funcional. Esto es la diferencia importante con respecto al campo electromagnético; en ese caso el determinante salía de la integral y simplemente se unía al factor de normalización. Lo que haremos aquí con este determinante será reescribirlo de una forma conveniente: como una integral funcional Grassmaniana [7].

$$detM^{ab}(x,z) \equiv det\left|\frac{\delta g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)}{\delta\alpha^b}\right|_{g=0} = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\; e^{-i\int d^4x d^4z \bar{c}_a(x)M^{ab}(x,z)c_b(z)}$$

c y $\bar{c}$ son números de Grassmann conocidos como *fantasmas de Faddeev-Popov* [3], ya que resultan ser variables fermiónicas (de Grassmann) que a la vez cumplen una ecuación de movimiento bosónica. Lo que necesitamos entonces es encontrar la forma de M^{ab}. Consideraremos la función g como

$$g(A^a) = \partial_\mu A^{a\mu}(x) - k^a(x) \tag{5.3}$$

con $k^a(x)$ una constante. Esta es la condición que fija la norma (tenemos que $g(A^a) = 0$ porque está dentro de la delta en la integral, por lo que $\partial_\mu A^{a\mu}(x) = k^a(x)$, similar a la norma de Lorentz que ocurre si $k^a = 0$). Entonces la derivada funcional que buscamos resulta

$$\begin{aligned}
M^{ab(x,z)} &= \frac{\delta g(A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^b)}{\delta\alpha^a(z)} \\
&= \frac{\delta\Big(\partial_\mu A^{a\mu}(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\partial^\mu\alpha^a(x) - f^{adc}\partial_\mu(\alpha^d(x)A^{c\mu}(x)) - k^a(x)\Big)}{\delta\alpha^b(z)} \\
&= \frac{1}{g}\partial_\mu\partial^\mu\frac{\delta\alpha^a(x)}{\delta\alpha^b(z)} - f^{adc}\partial_\mu A^{c\mu}(x)\frac{\delta\alpha^d(x)}{\delta\alpha^b(z)} \\
&= \frac{1}{g}\partial_\mu\partial^\mu\Big(\delta^{ab}\delta^4(x-z)\Big) - f^{adc}\partial_\mu\Big(A^{c\mu}\delta^{db}\delta^4(x-z)\Big) \\
&= \partial_{x\mu}\left[\frac{\delta^{ab}}{g}\partial^\mu_x\delta^4(x-z) - f^{abc}\Big(A^{c\mu}(x)\delta^4(x-z)\Big)\right]
\end{aligned}$$

con el subíndice x en las parciales para recordarnos que son respecto a esta variable. Por lo que el determinante queda como

$$det\left|\frac{\delta g(A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)}{\delta\alpha^b}\right|_{g=0} = \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\bar{c}^a\; e^{-i\int d^4x d^4z \bar{c}_a(x)\left\{\partial_{x\mu}\left[\frac{\delta^{ab}}{g}\partial^\mu_x\delta^4(x-z) - f^{abc}\left(A^{c\mu}(x)\delta^4(x-z)\right)\right]\right\}c_b(z)}$$

Integrando por partes dos veces el primer término y una vez el segundo término,

$$det\left|\frac{\delta g(A^a_\mu+\frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a)}{\delta\alpha^a}\right|_{g=0} = \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{-i\int d^4xd^4z\ \delta^4(x-z)\left\{\frac{\delta^{ab}}{g}\partial_{x\mu}\partial^\mu_x\bar{c_a}(x)+f^{abc}A^{c\mu}(x)\partial_{x\mu}\bar{c}_a(x)\right\}c_b(z)}$$

$$= \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{-i\int d^4x\left\{\frac{1}{g}\partial_\mu\partial^\mu\bar{c_a}(x)c_a(x)+f^{abc}A^{c\mu}(x)\partial_\mu\bar{c}_a(x)c_b(x)\right\}}$$

Integrando por partes el primer término,

$$det\left|\frac{\delta g(A^a_\mu+\frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^b)}{\delta\alpha^a}\right|_{g=0} = \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{-i\int d^4x\left\{-\frac{1}{g}\partial^\mu\bar{c_a}\partial_\mu c_a+f^{abc}A^{c\mu}\partial_\mu\bar{c}_a c_b\right\}}$$

$$= \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\ \partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}\left\{\partial^\mu c_a-gf^{abc}A^{c\mu}c_b\right\}}$$

$$= \int \mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\ \partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a}$$

Entonces la funcional generadora (5.2), dejando implícito el factor de normalización, queda como

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}A^a_\mu\mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}}\delta[g(A^a)]$$

$$= \int \mathcal{D}A^a_\mu\mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}}\delta[\partial_\mu A^{a\mu}-k^a(x)]$$

Haciendo el cambio de variable $\tilde{A}^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}\bar{D}_\mu\alpha^a$ obtenemos

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}\tilde{A}^a_\mu\mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}}\delta[\partial_\mu\tilde{A}^{a\mu}(x)-k^a(x)]$$

$$= \int \mathcal{D}\tilde{A}^a_\mu\mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}}\delta[\partial_\mu(A^{a\mu}+\frac{1}{g}\bar{D}^\mu\alpha^a)-k^a(x)]$$

$$= \int \mathcal{D}A^a_\mu\mathcal{D}c^a\mathcal{D}\overline{c}^a\ e^{i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu\bar{c}_a\frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}}\delta[\partial_\mu A^{a\mu}(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\bar{D}^\mu\alpha^a-k^a(x)]$$

El término en la exponencial con $[\bar{D}^\mu c]_a$ incluye una A^a_μ y por tanto es afectado al hacer el cambio de norma, sin embargo, recordemos que las integrales de los fantasmas vienen del determinante $det|\delta\tilde{g}/\delta\alpha|$, que es invariante de norma, entonces el término se queda igual al realizar la transformación. Así que, para recuperar la integral original,

$$\partial_\mu(\bar{D}^\mu\alpha)^a = \partial_\mu\partial^\mu\alpha^a - gf^{abc}\partial_\mu(\alpha^bA^{c\mu}) = 0$$

que es justo la condición (2.11) ya que viene de escoger la norma de Lorentz, es la condición que debe cumplir esta α^a para que la transformación quede definida dentro de esta norma. Luego, la integral que estamos tratando es independiente de $k^a(x)$, así que vamos a multiplicar todo por un factor constante

$$\int \mathcal{D}k^a(x)\ e^{-i\frac{\lambda}{2}\int d^4x\ k^{a2}(x)}$$

que es una integral gaussiana. Así, la funcional generadora queda

$$\begin{aligned}
Z_A[0] &= \int \mathcal{D}k^a(x) \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \; e^{-i\frac{\lambda}{2}\int d^4x \;\, k^{a2}(x)} e^{i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu \bar{c}_a \frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}} \\
&\quad\; \delta[\partial_\mu A^{a\mu} - k^a(x)] \\
&= \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \; e^{-i\frac{\lambda}{2}\int d^4x \;\, (\partial_\mu A^{a\mu})^2} e^{i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\partial_\mu \bar{c}_a \frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}} \\
&= \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \; e^{i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2+\partial_\mu \bar{c}_a \frac{1}{g}[\bar{D}^\mu c]_a\right\}} \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

El integrando ya no es invariante de norma, ya tiene factorizado el infinito y es la exponencial de una función cuadrática en A^a_μ, con excepción de los términos que involucran interacción, es decir los términos con g; los productos con $gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ (que están incluidos en $F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$) y el término con g de $[\bar{D}c]_a$, pero no afectan al cálculo de propagador libre que haremos a continuación porque no se consideran las interacciones para ello.

5.2. Propagadores de la cromodinámica cuántica

Propagador del gluón

Para obtener el propagador queremos escribir la funcional generadora de la forma

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \; e^{\frac{i}{2}\int d^4x \left(A^a_\mu(x) M^{\mu\nu}_{ab} A^b_\nu(x) + O(g)\right)}$$

Veamos que forma tiene $M^{\mu\nu}_{ab}$. Podemos escribir el término de las F's en (5.4), sin tomar en cuenta la parte de la interacción $g = 0$, como

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\Big|_{g=0} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}[\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu} \\
&\quad - \partial_\nu A^a_\mu \partial^\mu A^{a\nu} + \partial_\nu A^a_\mu \partial^\nu A^{a\mu}] \\
&= -[\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu} \\
&\quad - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu} + \partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu}] \\
&= -[\partial_\mu A^a_\nu \partial^\mu A^{a\nu} - \partial_\mu A^a_\nu \partial^\nu A^{a\mu}]
\end{aligned}$$

Integrando por partes ambos términos,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\Big|_{g=0} &= +[A^{a\nu}\partial_\mu \partial^\mu A^a_\nu - A^{a\mu}\partial^\nu \partial_\mu A^a_\nu] \\
&= [\eta^{\mu\nu} A^a_\mu \partial_\mu \partial^\mu A^a_\nu - A^a_\mu \partial^\nu \partial^\mu A^a_\nu] \\
&= \delta^a_b A^a_\mu [\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial^\mu - \partial^\nu \partial^\mu] A^b_\nu
\end{aligned}$$

El término con λ en (5.4), lo reescribimos como

$$\begin{aligned}-\lambda(\partial_\mu A^{a\mu})^2 &= -\lambda(\partial^\mu A^a_\mu)(\partial^\nu A^a_\nu)\\ &= +\lambda\ A^a_\mu \partial^\mu \partial^\nu A^a_\nu\\ &= \delta^a_b \lambda\ A^a_\mu \partial^\mu \partial^\nu A^b_\nu\end{aligned}$$

Entonces, juntando los resultados, el operador $M^{\mu\nu}_{ab}$ que buscamos es

$$\begin{aligned}M^{\mu\nu}_{ab} &= \delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - \partial^\nu\partial^\mu] + \delta^a_b\lambda\partial^\mu\partial^\nu\\ &= \delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial^\mu]\end{aligned} \tag{5.5}$$

Y la integral queda como

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}A^a_\mu\ e^{\frac{i}{2}\int d^4x\left(A^a_\mu(x)\delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial^\mu]A^b_\nu(x) + O(g)\right)}$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces $det\ M^{\mu\nu}_{ab} \neq 0$, y la forma cuadrática es no degenerada, por lo que $M^{\mu\nu}_{ab}$ tiene inverso.

Ahora insertemos la fuente vectorial arbitraria J_μ. La funcional generatriz entonces queda definida por

$$Z_A[J_\mu] = \int \mathcal{D}A^a_\mu\ e^{i\int d^4x\left(-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + J_\mu A^{a\mu}\right)} \tag{5.6}$$

O bien,

$$\begin{aligned}Z_A[J_\mu] &= \int \mathcal{D}A^a_\mu\ e^{\frac{i}{2}\int d^4x\left(A^a_\mu(x)M^{\mu\nu}_{ab}A^b_\nu(x) + 2J_\mu A^{a\mu} + O(g)\right)}\\ &= \int \mathcal{D}A^a_\mu\ e^{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \delta^4(x-y)\left(A^a_\mu(y)M^{\mu\nu}_{ab}A^b_\nu(x) + J_\mu(x)A^{a\mu}(y) + J_\mu(y)A^{a\mu}(x) + O(g)\right)}\end{aligned}$$

Reescribimos la delta de Dirac como $\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}$. El primer término en la exponencial queda como (integrando por partes),

$$\begin{aligned}\delta^4(x-y)A^a_\mu(y)M^{\mu\nu}_{ab}A^b_\nu(x) &= A^a_\mu(y)\delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial^\mu]_x\delta^4(x-y)A^b_\nu(x)\\ &= A^a_\mu(y)\delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial^\mu]_x\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}A^b_\nu(x)\\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu(y)\delta^a_b[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\mu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial^\mu]_x e^{-ik(x-y)}A^b_\nu(x)\\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu(y)\delta^a_b[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]e^{-ik(x-y)}A^b_\nu(x)\end{aligned}$$

Entonces el operador M en espacio de k es

$$M^{\mu\nu}_{ab}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta_{ab}[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]e^{-ik(x-y)}$$

Y su inverso es

$$M^{bc(-1)}_{\nu\alpha}(y,z) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\delta^{bc}\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{q^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{q_\nu q_\alpha}{(q^2)^2}\right)e^{-iq(y-z)}$$

Comprobemos que realmente son inversos:

$$\begin{aligned}
\int d^4y M^{\mu\nu}_{ab}(x,y)M^{bc(-1)}_{\nu\alpha}(y,z) &= \int \frac{d^4yd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\delta_{ab}\delta^{bc}[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{q^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{q_\nu q_\alpha}{(q^2)^2}\right)\\
&\quad e^{-ik(x-y)-iq(y-z)}\\
&= \int \frac{d^4yd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\delta^c_a[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{q^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{q_\nu q_\alpha}{(q^2)^2}\right)\\
&\quad e^{-ikx+iky-iqy+iqz}\\
&= \int \frac{d^4yd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\delta^c_a[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{q^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{q_\nu q_\alpha}{(q^2)^2}\right)\\
&\quad e^{-iy(q-k)}e^{-ikx+iqz}\\
&= \int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^4}\delta^c_a[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{q^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{q_\nu q_\alpha}{(q^2)^2}\right)\\
&\quad \delta^4(q-k)e^{-ikx+iqz}\\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta^c_a[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{k^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{k_\nu k_\alpha}{(k^2)^2}\right)\\
&\quad e^{-ik(x-z)}\\
&= \delta^c_a\delta^4(x-z)[-\eta^{\mu\nu}k^2 - (1-\lambda)k^\nu k^\mu]\left(-\frac{\eta_{\nu\alpha}}{k^2} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{k_\nu k_\alpha}{(k^2)^2}\right)\\
&= \delta^c_a\delta^4(x-z)\Big(\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\eta^{\mu\nu}k^2\frac{k_\nu k_\alpha}{(k^2)^2}\\
&\quad -(1-\lambda)k^\mu k^\nu\frac{\eta_{\nu\alpha}}{k^2} - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\frac{k^\mu k^\nu k_\nu k_\alpha}{(k^2)^2}\Big)\\
&= \delta^c_a\delta^4(x-z)\left(\delta^\mu_\alpha + \frac{k^\mu k_\alpha}{k^2}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} - \frac{(1-\lambda)\lambda}{\lambda} - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\right)\right)\\
&= \delta^c_a\delta^4(x-z)\left(\delta^\mu_\alpha + \frac{k^\mu k_\alpha}{k^2}\left(\frac{1-\lambda-\lambda+\lambda^2-1+2\lambda-\lambda^2}{\lambda}\right)\right)\\
&= \delta^c_a\delta^\mu_\alpha\delta^4(x-z)
\end{aligned}$$

Entonces hemos encontrado el propagador:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(A^a_\mu(y)A^b_\nu(x))|0\rangle &= iD^{ab}_{\mu\nu}(x-y) = iM^{ab(-1)}_{\mu\nu}(x,y)\\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left(-\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)e^{-ik(x-y)}\\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\delta^{ab}}{k^2}d_{\mu\nu}(k)e^{-ik(x-y)}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde definimos $d_{\mu\nu}(k) = \left(-\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$. Gráficamente lo representamos como en la figura (5.1).

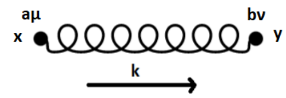

Figura 5.1: Propagador de gluón

Las cantidades físicas no dependen de λ; escoger el valor de λ es escoger una norma. Escoger $\lambda = 1$ es la norma de Feynman:

$$D^{F\ ab}_{\mu\nu}(x-y) = -\delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

Y $\lambda = \infty$ es la norma de Landau:

$$D^{f\ ab}_{\mu\nu}(x-y) = \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} - \eta^{\mu\nu}\right)\frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

Entonces la funcional generadora para la parte libre ($g = 0$) es

$$Z^0_A[0] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \; e^{\frac{i}{2}\int d^4x \;\; A^a_\mu M^{\mu\nu}_{ab} A^b_\mu} \tag{5.8}$$

con el índice 0 denotando que $g = 0$. Si se realiza la integral funcional con las fuentes ya incluidas, se obtiene [12]

$$Z^0_A[J^{a\mu}] = exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \;\, J^{d\alpha}(x) D^{de}_{\alpha\beta}(x-y) J^{e\beta}(y)\right\} \tag{5.9}$$

Propagador de fantasmas

Ahora, vamos a calcular el propagador correspondiente a los fantasmas c^a, $\bar{c}^a$. Igualmente, usamos la funcional con las fuentes ξ, $\bar{\xi}$ iguales a cero:

$$Z_c[0] = \int \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \;\; e^{i\int d^4x(\partial^\mu \bar{c}^a)(D_\mu c)^a}; \qquad (\bar{D}_\mu c)^a = \partial_\mu c^a - g f^{abc} A^c_\mu c^b \tag{5.10}$$

Vamos a integrar por partes la integral de la exponencial

$$\begin{aligned}
\int d^4x(\partial^\mu \bar{c}^a)(D_\mu c^a) &= (D_\mu c^a)(\bar{c}^a) - \int d^4x\ \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a \\
&= -\int d^4x\ \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a \\
&= -\int d^4x\ \bar{c}^a \partial^\mu (\partial_\mu c^a - g f^{abc} A^c_\mu c^b) \\
&= -\int d^4x\ \Big(\bar{c}^a \partial^\mu \partial_\mu c^a - \bar{c}_a g f^{abc} \partial^\mu (A^c_\mu c^b)\Big) \\
&= -\int d^4x\ \Big(\bar{c}^a \delta_{ab} \partial^\mu \partial_\mu c^b + O(g)\Big) \\
&= \int d^4x\ \Big(\bar{c}^a M_{ab} c^b + O(g)\Big)
\end{aligned}$$

donde $M_{ab} = -\delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu$ y separamos el término con g porque de igual forma, para encontrar el propagador, usamos la parte sin interacción. Escribimos la integral con M_{ab} como

$$\begin{aligned}
\int d^4x\ \bar{c}^a M_{ab} c^b &= \int d^4x d^4y\ \bar{c}^a(y) \delta^4(x-y) M_{ab} c^b(x) \\
&= -\int d^4x d^4y\ \bar{c}^a(y) (\delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu)_x \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)}\right) c^b(x) \\
&= -\int \frac{d^4k d^4x d^4y}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(y)(\delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu)_x e^{-ik(x-y)} c^b(x) \\
&= \int \frac{d^4k d^4x d^4y}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(y)(\delta_{ab} k^\mu k_\mu) e^{-ik(x-y)} c^b(x) \\
&= \int d^4x d^4y\ \bar{c}^a(y) \left(\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_{ab} k^\mu k_\mu e^{-ik(x-y)}\right) c^b(x)
\end{aligned}$$

Entonces en el espacio de k's,

$$M_{ab}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_{ab} k^\mu k_\mu e^{-ik(x-y)}$$

Y su inverso es

$$M^{bc(-1)}(y,z) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta^{bc} \frac{1}{q^\nu q_\nu} e^{-iq(y-z)}$$

Lo comprobamos:

$$\begin{aligned}\int d^4y M_{ab}(x,y) M^{bc(-1)}(y,z) &= \int \frac{d^4yd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\delta_{ab}\delta^{bc}\frac{k^\mu k_\mu}{q^\nu q_\nu}e^{-ikx+iky-iqy+iqz} \\ &= \int \frac{d^4yd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\delta_{ac}\frac{k^\mu k_\mu}{q^\nu q_\nu}e^{-iy(q-k)}e^{-ikx+iqz} \\ &= \int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^4}\delta_{ac}\frac{k^\mu k_\mu}{q^\nu q_\nu}\delta^4(q-k)e^{-ikx+iqz} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^8}\delta_{ac}\frac{k^\mu k_\mu}{k^\nu k_\nu}e^{-ikx+ikz} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta_{ac}e^{-ik(x-z)} \\ &= \delta_{ac}\delta^4(x-z)\end{aligned}$$

Entonces, concluimos que el propagador de los fantasmas es

$$\langle 0|T(\bar{c}^a(y)c^b(x))|0\rangle = iD^{ab}(x-y) = iM^{ab(-1)}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\delta^{ab}}{k^\mu k_\mu}e^{-ik(x-y)} \tag{5.11}$$

Gráficamente lo representamos como en la figura (5.2)

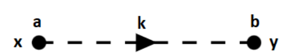

Figura 5.2: Propagador de fantasma

Con esto, la funcional generadora libre ($g = 0$) queda escrita como

$$Z_c^0[0] = \int \mathcal{D}c^b\mathcal{D}\bar{c}_b\ e^{i\int d^4x\ \bar{c}^a M_{ab}c^b} \tag{5.12}$$

Al realizar la integral funcional con las fuentes incluidas se obtiene [12]

$$Z_c^0[\xi,\bar{\xi}] = exp\left\{-i\int d^4xd^4y\ \bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y)\xi^e(y)\right\} \tag{5.13}$$

Propagador fermiónico

Para calcular el propagador fermíonico, introducimos el Lagrangiano completo, incluyendo el campo de norma (gluones), fanstasmas y campo fermiónico, este último correspondiente a los cuarks:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{phys} + \mathcal{L}_{gf+gh}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{phys} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_s \bar{\psi}_{sB}(i\not{D} - \delta^B_C m_s)\psi^{sC} \\ &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_s \bar{\psi}_{sBi}\big(i\gamma^\mu_{ij}(\delta^B_C\partial_\mu - igA^a_\mu(T^a)^B_C) - \delta^i_j\delta^B_C m_s\big)\psi^{sCj}\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\mathcal{L}_{gf+gh} = \partial_\mu\bar{c^a}\bar{D}_\mu c^a - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2$$

donde por sus nombres en inglés, $\mathcal{L}_{gf+gh}$ se refiere a la parte del Lagrangiano que fija la norma, y a los fantasmas (gauge fixing, ghosts), $\mathcal{L}_{phys}$ (physics) se refiere a la parte pura del campo de norma y del campo de fermiones, que son el primer y segundo término respectivamente. En la parte femiónica, s es el sabor del cuark (por si hay varios), B, C son los índices del grupo y los índices i, j son los índices espinoriales que aquí escribimos por claridad pero en lo que sigue, para hacer más entendible y simple la notación, omitiremos. D_μ es la derivada covariante fermiónica definida en (2.5) y $\bar{D}_\mu$ es la derivada del parámetro de norma definida en (2.9). Entonces la funcional generadora de las funciones de Green del sistema cuarks-gluones-fantasmas es dada por:

$$\begin{aligned}Z[J^a_\mu, \xi^a, \bar{\xi}^a, \zeta^B_s, \bar{\zeta}^B_s] = &\int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \mathcal{D}\psi_s \mathcal{D}\bar{\psi}_s \\ &e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial^\mu\bar{c}_a)(\bar{D}_\mu c^a) + J^a_\mu A^{a\mu} + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a\xi^a\right]} \\ &e^{i\int d^4x\left[\bar{\psi}_{Bs}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^B_s + g\bar{\psi}_{Bs}\gamma^\mu A^a_\mu (T^a)^B_C\psi^C_s + \bar{\zeta}^B_s\psi^B_s + \bar{\psi}^B_s\zeta^B_s\right]}\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde ahora la suma sobre s también está implícita. Con la inclusión del campo fermiónico el Lagrangiano de interacción, es decir todos los términos del Lagrangiano con g, es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I = &-\frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu}A^{d\nu} \\ &- gf^{abc}(\partial^\mu\bar{c}^a)c^b A^c_\mu + g\bar{\psi}_{Bs}\gamma^\mu A^a_\mu(T^a)^B_C\psi^C_s\end{aligned} \tag{5.16}$$

Con esto, ahora calcularemos el propagador fermiónico libre y posteriormente los vértices de la teoría. Para calcular el propagador fermiónico tomamos la parte libre de éste campo:

$$Z^0_\psi[0] = \int \mathcal{D}\psi_s \mathcal{D}\bar{\psi}_s \; e^{i\int d^4x\;\left[\bar{\psi}_{Bs}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^B_s(x)\right]} \tag{5.17}$$

Insertamos una delta de Dirac de la siguiente manera en la intergal de la exponencial,

$$\begin{aligned}
&\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)\delta^4(y-x)(i\gamma^\mu\partial_{x\mu}-m)\psi_s^B(x)\\
&=\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)\Big((-i\gamma^\mu\partial_{x\mu}-m)\delta^4(y-x)\Big)\psi_s^B(x)\\
&=\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)\Big((-i\gamma^\mu\partial_{x\mu}-m)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(y-x)}\Big)\psi_s^B(x)\\
&=\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)\Big(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(\gamma^\mu k_\mu-m)e^{-ik(y-x)}\Big)\psi_s^B(x)\\
&=\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)\Big(\delta_C^B\delta_{ss'}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(\gamma^\mu k_\mu-m)e^{-ik(y-x)}\Big)\psi_{s'}^C(x)\\
&=\int d^4x d^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(y)M_{Css'}^B(x-y)\psi_{s'}^C(x)
\end{aligned}$$

donde $M_{Css'}^B(x-y)=\delta_C^B\delta_{ss'}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(\not{k}-m)e^{-ik(x-y)}$ y en el segundo paso integramos por partes. El operador inverso de M es

$$M^{(-1)C}{}_{Ds'r}(z-x)=\delta_D^C\delta_{s'r}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(z-x)}}{\not{q}-m}$$

Comprobamos:

$$\begin{aligned}
\int d^4x M_{Css'}^B(x-y)M^{(-1)C}{}_{Ds'r}(z-x)&=\delta_C^B\delta_D^C\delta_{ss'}\delta_{s'r}\int\frac{d^4xd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\ (\not{k}-m)e^{-ik(x-y)}\frac{e^{-iq(z-x)}}{\not{q}-m}\\
&=\delta_D^B\delta_{sr}\int\frac{d^4xd^4kd^4q}{(2\pi)^8}\frac{\not{k}-m}{\not{q}-m}e^{-ix(k-q)}e^{iky-iqz}\\
&=\delta_D^B\delta_{sr}\int\frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}-m}{\not{q}-m}\delta^4(k-q)e^{iky-iqz}\\
&=\delta_D^B\delta_{sr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}-m}{\not{k}-m}e^{iky-ikz}\\
&=\delta_D^B\delta_{sr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(z-y)}\\
&=\delta_D^B\delta_{sr}\delta^4(z-y)
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que el propagador libre de los cuarks es

$$\langle 0|T(\psi_{sB}(x)\bar{\psi}_{s'C}(y))|0\rangle=iS_{Css'}^B(x-y)=iM^{(-1)B}{}_{Css'}(x-y)=\delta_{ss'}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{\not{k}-m}\delta_C^B\ e^{-ik(x-y)} \tag{5.18}$$

Gráficamente está representado como en la figura (5.3). Entonces la funcional generadora libre ($g=0$) queda escrita como

$$Z_\psi^0[0]=\int\mathcal{D}\psi_s\mathcal{D}\bar{\psi}_s\ e^{i\int d^4xd^4y\ \bar{\psi}_{Bs}(x)M_{Css'}^B(x-y)\psi_{s'}^B(y)} \tag{5.19}$$

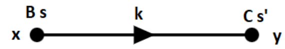

Figura 5.3: Propagador de cuark

Al realizar la integral funcional con las fuentes incluidas se obtiene [12]

$$Z_\psi^0[\zeta,\bar{\zeta}] = exp\left\{-i\int d^4xd^4y\ \bar{\zeta}_{Bs}(x)S^B_{Css'}(x-y)\zeta^C_{s'}(y)\right\} \tag{5.20}$$

5.3. Vértices de la cromodinámica cuántica

Ya tenemos los propagadores libres; ecuaciones (5.7), (5.11) y (5.18). Ahora lo que haremos será incluir interacciones, esto es, introducir los términos que contienen g. Para ello vamos a separar el lagrangiano en la parte libre y la parte de interacción:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \\
\mathcal{L}_0 &= A^a_\mu M^{\mu\nu}_{ab} A^b_\nu + \bar{c}^a M_{ab} c_b + \bar{\psi}_{Bs} M^B_{Css'}\psi^B_{s'} \\
\mathcal{L}_I &= -\frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abe}f^{cde}A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu}A^{d\nu} \\
&\quad - g f^{abc}(\partial^\mu \bar{c}^a)c^b A^c_\mu + g\bar{\psi}_{Bs}\gamma^\mu A^a_\mu (T^a)^B_C \psi^C_s
\end{aligned}$$

Recordando que un campo lo podemos escribir como la derivada de la funcional generadora con respecto a su fuente, vamos a escribir la funcional generadora de la forma

$$\begin{aligned}
Z[J,\bar{\xi},\xi,\bar{\zeta},\zeta] &= exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a},\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\zeta}},\frac{\delta}{i\delta(-\zeta)}\right)\right\}Z_0 \\
&= \left\{1 + i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a},\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\zeta}},\frac{\delta}{i\delta(-\zeta)}\right) + \cdots\right\}Z_0
\end{aligned}$$

donde Z_0 es la contribución de las funcionales generadoras libres de los gluones (5.9), fantasmas (5.13) y cuarks (5.20), es decir, $Z_0 = Z^0_A[J]Z^0_c[\xi,\bar{\xi}]Z^0_\psi[\zeta,\bar{\zeta}]$. Al realizar las integrales funcionales, sin tomar en cuenta los factores constantes irrelevantes, como mencionamos al final de la obtención de cada propagador, se obtiene [12]

$$\begin{aligned}
Z^0_A[J] &= exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J^{d\alpha}(x)D^{de}_{\alpha\beta}(x-y)J^{e\beta}(y)\right\} \\
Z^0_c[\xi,\bar{\xi}] &= exp\left\{-i\int d^4xd^4y\ \bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y)\xi^e(y)\right\} \\
Z^0_\psi[\zeta,\bar{\zeta}] &= exp\left\{-i\int d^4xd^4y\ \bar{\zeta}_{Bs}(x)S^B_{Css'}(x-y)\zeta^C_{s'}(y)\right\}
\end{aligned}$$

Con todo esto podemos calcular perturbativamente las interacciones. Así entonces, calcularemos los vértices de tomar cada término en el lagrangiano de interacción.

Vértice de tres gluones

Primero calculemos la interacción a primer orden debida al primer término en el lagrangiano de interacción, al que llamaremos $\mathcal{L}_I^{3G}$. Vemos que los términos tienen tres campos A_μ^a, esto significa que las interacciones de este término son de tres gluones (por eso el superíndice $3G$).

$$
\begin{aligned}
&i\int d^4z\mathcal{L}_I^{3G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0 = iZ_c^0 Z_\psi^0 \int d^4z\mathcal{L}_I^{3G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_A^0[J] \\
&= iZ_c^0 Z_\psi^0 \int d^4z\frac{-g}{2}f^{abc}\left(\partial_\mu\frac{\delta}{i\delta J^{a\nu}} - \partial_\nu\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)\frac{\delta}{i\delta J_\mu^b}\frac{\delta}{i\delta J_\nu^c}exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^{d\alpha}(x)D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)J^{e\beta}(y)\right\} \\
&= Z_c^0 Z_\psi^0 \int d^4z\frac{g}{2}f^{abc}\left(\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J^{a\nu}} - \partial_\nu\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}}\right)\frac{\delta}{\delta J_\mu^b}\frac{\delta}{\delta J_\nu^c}exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^{d\alpha}(x)D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)J^{e\beta}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Hagamos la primer derivada funcional:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J_\nu^c}Z_A^0[J] &= -Z_A^0[J]\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\Big(\frac{\delta J^{d\alpha}(x)}{\delta J_\nu^c(z)}D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)J^{e\beta}(y) \\
&\quad + J^{d\alpha}(x)D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)\frac{\delta J^{e\beta}(y)}{\delta J_\nu^c(z)}\Big) \\
&= -Z_A^0[J]\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\Big(\eta^{\alpha\nu}\delta^{dc}\delta(x-z)D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)J^{e\beta}(y) \\
&\quad + J^{d\alpha}(x)D_{\alpha\beta}^{de}(x-y)\eta^{\beta\nu}\delta^{ec}\delta^4(y-z)\Big) \\
&= -Z_A^0[J]\left(\frac{i}{2}\int d^4y\ \eta^{\alpha\nu}D_{\alpha\beta}^{ce}(z-y)J^{e\beta}(y) + \frac{i}{2}\int d^4x\ J^{d\alpha}(x)D_{\alpha\beta}^{dc}(x-z)\eta^{\beta\nu}\right) \\
&= -Z_A^0[J]\frac{i}{2}\int d^4y\left(\eta^{\alpha\nu}D_{\alpha\beta}^{ce}(z-y)J^{e\beta}(y) +\ J^{d\alpha}(y)D_{\alpha\beta}^{dc}(y-z)\eta^{\beta\nu}\right) \\
&= -Z_A^0[J]\frac{i}{2}\int d^4y\left(\eta^{\alpha\nu}D_{\alpha\beta}^{ce}(z-y)J^{e\beta}(y) +\ J^{e\beta}(y)D_{\beta\alpha}^{ec}(y-z)\eta^{\alpha\nu}\right) \\
&= -iZ_A^0[J]\int d^4y\ \eta^{\alpha\nu}D_{\alpha\beta}^{ce}(z-y)J^{e\beta}(y)
\end{aligned}
$$

Cambiamos los nombres de algunas variables mudas para que los cálculos sean más comprensibles, y hacemos la siguiente derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J^b_\mu}\frac{\delta}{\delta J^c_\nu}Z^0_A[J] &= \frac{\delta}{\delta J^b_\mu}\left(-iZ^0_A[J]\int d^4y_3\ \eta^{\alpha\nu}D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)\right)\\
&= -i\frac{\delta Z^0_A[J]}{\delta J^b_\mu(z)}\int d^4y_3\ \eta^{\alpha\nu}D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3) - iZ^0_A[J]\int d^4y\ \eta^{\alpha\nu}D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)\frac{\delta J^{a_3\lambda_3}(y_3)}{\delta J^b_\mu(z)}\\
&= (-i)^2Z^0_A[J]\int d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)J^{a_2\lambda_2}(y_2)\int d^4y_3\ \eta^{\alpha\nu}D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)\\
&\quad - iZ^0_A[J]\int d^4y_3\ \eta^{\alpha\nu}D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)\eta^{\lambda_3\mu}\delta^{a_3b}\delta^4(y_3-z)\\
&= -Z^0_A[J]\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)J^{a_2\lambda_2}(y_2)\\
&\quad - iZ^0_A[J]\ \eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda_3\mu}D^{cb}_{\alpha\lambda_3}(z-z)
\end{aligned}$$

Derivamos respecto a $J^{a\mu}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta J^b_\mu}\frac{\delta}{\delta J^c_\nu}Z^0_A[J]\\
&= -\frac{\delta Z^0_A[J]}{\delta J^{a\mu}}\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)J^{a_2\lambda_2}(y_2)\\
&- Z^0_A[J]\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}}\left(J^{a_3\lambda_3}(y_3)J^{a_2\lambda_2}(y_2)\right)\\
&- i\frac{\delta Z^0_A[J]}{\delta J^{a\mu}}\ \eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda_3\mu}D^{cb}_{\alpha\lambda_3}(z-z)\\
&= iZ^0_A[J]\int d^4y_1\delta^{\gamma\mu}D^{aa_1}_{\gamma\lambda_1}(z-y_1)J^{a_1\lambda_1}(y_1)\\
&\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)J^{a_2\lambda_2}(y_2)\\
&- Z^0_A[J]\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)\frac{\delta J^{a_3\lambda_3}(y_3)}{\delta J^{a\mu}(z)}J^{a_2\lambda_2}(y_2)\\
&- Z^0_A[J]\int d^4y_3d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)\frac{\delta J^{a_2\lambda_2}(y_2)}{\delta J^{a\mu}(z)}\\
&+ (-i)^2Z^0_A[J]\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda_3\mu}D^{cb}_{\alpha\lambda_3}(z-z)\int d^4y_1\ D^{ae}_{\mu\beta}(z-y_1)J^{e\beta}(y_1)
\end{aligned}$$

Derivamos las fuentes y ordenamos los factores con la fuente al final para mayor clairdad,

$$= iZ_A^0[J]\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3$$
$$\eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{aa_1}_{\mu\lambda_1}(z-y_1)D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)J^{a_2\lambda_2}(y_2)J^{a_1\lambda_1}(y_1)$$
$$- Z_A^0[J]$$
$$\int d^4y_3 d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)\delta^{a_3a}\delta^{\lambda_3\mu}\delta^4(y_3-z)J^{a_2\lambda_2}(y_2)$$
$$- Z_A^0[J]$$
$$\int d^4y_3 d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a_3\lambda_3}(y_3)\delta^{a_2a}\delta^{\lambda_2\mu}\delta^4(y_2-z)$$
$$- Z_A^0[J]\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda_3\mu}D^{cb}_{\alpha\lambda_3}(z-z)\int d^4y_1\ D^{ae}_{\mu\beta}(z-y_1)J^{e\beta}(y_1)$$
$$= iZ_A^0[J]\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3$$
$$D^{aa_1}_{\mu\lambda_1}(z-y_1)D^{ba_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J^{a_1\lambda_1}(y_1)J^{a_2\lambda_2}(y_2)J^{a_3\lambda_3}(y_3)$$
$$- Z_A^0[J]\int d^4y_2\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-y_2)D^{ca}_{\alpha\mu}(z-z)J^{a_2\lambda_2}(y_2)$$
$$- Z_A^0[J]\int d^4y_3\ \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}D^{ba_2}_{\beta\lambda_2}(z-z)D^{ca_3}_{\alpha\lambda_3}(z-y_3)J^{a\mu}(y_3)$$
$$- Z_A^0[J]\eta^{\alpha\nu}\eta^{\lambda_3\mu}D^{cb}_{\alpha\lambda_3}(z-z)\int d^4y_1\ D^{ae}_{\mu\beta}(z-y_1)J^{e\beta}(y_1)$$

Los últimos tres términos tienen solamente una J aparte de las que hay en $Z_A^0[J]$, y solo nos interesan los términos con tres J. Esto porque vamos a calcular la contribución a la función de Green de tres patas, la cual se obtiene de derivar tres veces (que es el número de patas) al término de interacción y evaluar en $J=0$, por lo que los últimos tres términos no van a contribuir (pero si estuvieramos calculando funciones de Green con diferente número de patas, los términos podrían contribuir según el número de patas que se busque). Así que solo nos quedamos con el primer término:

$$\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta J^b_\mu}\frac{\delta}{\delta J^c_\nu}Z_A^0[J] = iZ_A^0[J]\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3$$
$$D^{aa_1}_{\mu\lambda_1}(z-y_1)D^{ba_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J^{a_1\lambda_1}(y_1)J^{a_2\lambda_2}(y_2)J^{a_3\lambda_3}(y_3)$$

Análogamente, derivando respecto a $J^{a\nu}$,

$$\frac{\delta}{\delta J^{a\nu}}\frac{\delta}{\delta J^b_\mu}\frac{\delta}{\delta J^c_\nu}Z_A^0[J] = iZ_A^0[J]\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3$$
$$D^{aa_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{ba_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ca_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J^{a_1\lambda_1}(y_1)J^{a_2\lambda_2}(y_2)J^{a_3\lambda_3}(y_3)$$

Entonces, la integral para los tres gluones (quedándose solo con los términos con tres J's) resulta

$$\begin{aligned}
&i\int d^4x\mathcal{L}_I^{3G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0[J,\xi,\bar{\xi}]= \\
&i\frac{g}{2}f^{abc}Z_c^0Z_\psi^0Z_A^0\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4y_3\ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1)-\partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
&D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2)D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3)J^{s_1\lambda_1}(y_1)J^{s_2\lambda_2}(y_2)J^{s_3\lambda_3}(y_3)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Recordemos que las derivadas parciales son respecto a x. Ahora de esto podemos obtener la contribución a la función de Green (a primer orden) para los tres gluones

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{\ a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) &= \langle 0|T(A^{a_1}_{\mu_1}(x_1)A^{a_2}_{\mu_2}(x_2)A^{a_3}_{\mu_3}(x_3))|0\rangle \\
&= \frac{1}{Z_0i^3}\frac{\delta^3}{\delta J^{a_1\mu_1}(x_1)J^{a_2\mu_2}(x_2)J^{a_3\mu_3}(x_3)}i\int d^4x\mathcal{L}_I^{3G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z_0i^3}\frac{\delta^3}{\delta J_1J_2J_3}i\int d^4x\mathcal{L}_I^{3G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0|_{J=0}
\end{aligned}$$

donde $J_i=J^{a_i\mu_i}(x_i)$, $i=1,2,3$. Derivemos, por ahora dejando de lado al factor $i\frac{g}{2}f^{abc}Z_c^0[\xi,\bar{\xi}]$. Todos los términos que invoulcren derivadas de $Z_A^0[J]$ "bajan" J's, y al evaluar estos términos en $J=0$ se harán cero, por lo que descartaremos todos esos términos. Para abreviar, llamemos B a la integral de (5.21). Así,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J_3} Z_0 B &= \frac{\delta Z_0}{\delta J_3} B + Z_0 \frac{\delta B}{\delta J_3} \\
&= Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) \frac{\delta}{\delta J^{a_3\mu_3}(x_3)} \Big(J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_2\lambda_2}(y_2) J^{s_3\lambda_3}(y_3) \Big) \\
\\
&= Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{s_2\lambda_2}(y_1) J^{s_3\lambda_3}(y_3) \delta^{s_1 a_3} \delta^{\lambda_1\mu_3} \delta^4(y_1-x_3) \\
& + Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_3\lambda_3}(y_3) \delta^{s_2 a_3} \delta^{\lambda_2\mu_3} \delta^4(y_2-x_3) \\
& + Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_2\lambda_2}(y_2) \delta^{s_3 a_3} \delta^{\lambda_3\mu_3} \delta^4(y_3-x_3) \\
\\
&= Z_0 \int d^4x d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{aa_3}_{\nu\mu_3}(x-x_3) - \partial_\nu D^{aa_3}_{\mu\mu_3}(x-x_3)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{s_2\lambda_2}(y_1) J^{a_3\mu_3}(x_3) \\
& + Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{ba_3\mu}_{\mu_3}(x-x_3) D^{cs_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_3\lambda_3}(y_3) \\
& + Z_0 \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 \ \left(\partial_\mu D^{as_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{as_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) \\
& D^{bs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{ca_3\nu}_{\mu_3}(x-x_3) J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_2\lambda_2}(y_2)
\end{aligned}
$$

Derivando de esta forma respecto a J_2 y J_1, igualmente descartando los términos con derivadas de Z_0, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3}(Z_0 B) = 2Z_0 \int d^4x \ & \left(\partial_\mu D^{aa_1}_{\nu\mu_1}(x-x_1) - \partial_\nu D^{aa_1}_{\mu\mu_1}(x-x_1)\right) \\
& D^{ba_2\mu}_{\mu_2}(x-x_2) D^{ca_3\nu}_{\mu_3}(x-x_3) \\
& + (231) + (312)
\end{aligned}
$$

donde (231) y (312) se refieren a términos como el primero con los índices (1,2,3) reemplazados por (2,3,1) y (3,1,2) respectivamente. Entonces la contribución a la función de

Green de tres gluones es

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) &= \langle 0|T(A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)A_{\mu_2}^{a_2}(x_2)A_{\mu_3}^{a_3}(x_3))|0\rangle \\
&= \frac{1}{Z_0 i^3}\Big(i\frac{g}{2}f^{abc}Z_0\int d^4x\ \left(\partial_\mu D_{\nu\mu_1}^{aa_1}(x-x_1)-\partial_\nu D_{\mu\mu_1}^{aa_1}\right) \\
&\quad D_{\mu_2}^{ba_2\mu}(x-x_2)D_{\mu_3}^{ca_3\nu}(x-x_3)(x-x_1)+(231)+(312)\Big) \\
&= -gf^{abc}\int d^4x\ \left(\partial_\mu D_{\nu\mu_1}^{aa_1}(x-x_1)-\partial_\nu D_{\mu\mu_1}^{aa_1}(x-x_1)\right) \\
&\quad D_{\mu_2}^{ba_2\mu}(x-x_2)D_{\mu_3}^{ca_3\nu}(x-x_3) \\
&\quad +(231)+(312)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ahora, con (231), (312) similares al primer término de la misma forma que antes. Finalmente vamos a sustituir las D, dada por (5.7), para obtener la función de Green en el espacio de momento (recordemos que $d_{\mu\nu}(k)=\Big(-\eta_{\mu\nu}-\frac{(1-\lambda)}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big)$).

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) &= -gf^{abc}\int d^4x\int\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4} \\
&\quad \left\{-ik_{1\mu}\frac{e^{-ik_1\cdot(x-x_1)}}{k_1^2}d_{\nu\mu_1}(k_1)\delta^{aa_1}+ik_{1\nu}\frac{e^{-ik_1\cdot(x-x_1)}}{k_1^2}d_{\mu\mu_1}(k_1)\delta^{aa_1}\right\} \\
&\quad \frac{e^{-ik_2\cdot(x-x_2)}}{k_2^2}d_{\mu_2}^{\ \mu}(k_2)\delta^{ba_2}\frac{e^{-ik_3\cdot(x-x_3)}}{k_3^2}d_{\mu_3}^{\ \nu}(k_3)\delta^{ca_3} \\
&\quad +(231)+(312) \\
&= -gf^{a_1a_2a_3}\int d^4x\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^{12}}\frac{1}{k_1^2k_2^2k_3^2}e^{-i(k_1+k_2+k_3)x} \\
&\quad d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu}\ e^{ik_1x_1+ik_2x_2+ik_3x_3}(-ik_{1\mu}d_{\nu\mu_1}+ik_{1\nu}d_{\mu\mu_1}) \\
&\quad +(231)+(312)
\end{aligned}$$

Tomando la delta de Dirac,

$$\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{-i(k_1+k_2+k_3)x}=\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

e integrando sobre k_3 se tiene

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) &= -gf^{a_1a_2a_3} \\
&\quad \int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}\frac{e^{ik_1x_1+ik_2x_2-i(k_2+k_1)x_3}}{k_1^2k_2^2(k_1+k_2)^2}\Big[i(-k_{1\mu}d_{\nu\mu_1}+k_{1\nu}d_{\mu\mu_1})d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu} \\
&\quad +i(-k_{2\mu}d_{\nu\mu_2}+k_{2\nu}d_{\mu\mu_2})d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu} \\
&\quad +i(-k_{3\mu}d_{\nu\mu_3}+k_{3\nu}d_{\mu\mu_3})d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu}\Big]
\end{aligned}$$

Simplifiquemos el término entre paréntesis cuadrados. Dos de los términos dentro de éste, cambiando índices $\mu \leftrightarrow \nu$, los podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
i[k_{1\nu}d_{\mu\mu_1}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu} - k_{2\mu}d_{\nu\mu_2}d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu}] &= i[k_{1\nu}d_{\mu_1\mu}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu} - k_{2\nu}d_{\mu\mu_2}d_{\mu_3}^{\ \nu}d_{\mu_1}^{\ \mu}] \\
&= i[k_{1\nu}d_{\mu_1\mu}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu} - k_{2\nu}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu}d_{\mu_1\mu}] \\
&= i(k_{1\nu} - k_{2\nu})d_{\mu_1\mu}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu} \\
&= i(k_1 - k_2)^{\lambda_3}\eta^{\lambda_1\lambda_2}d_{\mu_1\lambda_1}d_{\mu_2\lambda_2}d_{\mu_3\lambda_3}
\end{aligned}$$

Análogamente para otros dos términos,

$$\begin{aligned}
i[k_{2\nu}d_{\mu\mu_2}d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu} - k_{3\mu}d_{\nu\mu_3}d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu}] &= i[k_{2\nu}d_{\mu_2\mu}d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu} - k_{3\nu}d_{\mu\mu_3}d_{\mu_1}^{\ \nu}d_{\mu_2}^{\ \mu}] \\
&= i[k_{2\nu}d_{\mu_2\mu}d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu} - k_{3\nu}d_{\mu_3}^{\ \mu}d_{\mu_1}^{\ \nu}d_{\mu_2\mu}] \\
&= i(k_{2\nu} - k_{3\nu})d_{\mu_1}^{\ \nu}d_{\mu_2\mu}d_{\mu_3}^{\ \mu} \\
&= i(k_2 - k_3)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_3}d_{\mu_1\lambda_1}d_{\mu_2\lambda_2}d_{\mu_3\lambda_3}
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
i[k_{3\nu}d_{\mu\mu_3}d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu} - k_{1\mu}d_{\nu\mu_1}d_{\mu_2}^{\ \mu}d_{\mu_3}^{\ \nu}] &= i[k_{3\nu}d_{\mu_3\mu}d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu} - k_{1\nu}d_{\mu\mu_1}d_{\mu_2}^{\ \nu}d_{\mu_3}^{\ \mu}] \\
&= i[k_{3\nu}d_{\mu_3\mu}d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu} - k_{1\nu}d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu}d_{\mu_3\mu}] \\
&= i(k_{3\nu} - k_{1\nu})d_{\mu_1}^{\ \mu}d_{\mu_2}^{\ \nu}d_{\mu_3\mu} \\
&= i(k_3 - k_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_1}d_{\mu_1\lambda_1}d_{\mu_2\lambda_2}d_{\mu_3\lambda_3}
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) = -i\int \frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}e^{i(k_1\cdot x_1+k_2\cdot x_2+k_3\cdot x_3)} \\
\frac{d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)}{k_1^2\ k_2^2\ k_3^2}gf^{a_1a_2a_3} \\
\{(k_1-k_2)^{\lambda_3}\eta^{\lambda_1\lambda_2} + (k_2-k_3)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_3} + (k_3-k_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_1}\}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde $k_3 = -(k_1 + k_2)$. La ecuación (5.23) nos proporciona las reglas de Feynman para el vértice de tres gluones en el espacio de momentos. Para obtener el vértice tenemos que truncar el factor $-\frac{id_{\mu\nu}(k)}{k^2}$ de cada pierna. Vemos que podemos escribir (5.23) como

$$\begin{aligned}
G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1,x_2,x_3) &= -i\int \frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^8}\frac{i^3(2\pi)^4}{i^3(2\pi)^4}gf^{abc}\delta^4(k_1+k_2+k_3) \\
&\left(e^{ik_1x_1}\frac{d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)}{k_1^2}\delta^{aa_1}\right)\left(e^{ik_2x_2}\frac{d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)}{k_2^2}\delta^{ba_2}\right)\left(e^{ik_3x_3}\frac{d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)}{k_3^2}\delta^{ca_3}\right) \\
&\{(k_1-k_2)^{\lambda_3}\eta^{\lambda_1\lambda_2} + (k_2-k_3)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_3} + (k_3-k_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_1}\} \\
&= \int \frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^{12}}\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\tilde{\Gamma}_{abc}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(k_1,k_2,k_3) \\
&\left(ie^{ik_1x_1}\frac{d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)}{k_1^2}\delta^{aa_1}\right)\left(ie^{ik_2x_2}\frac{d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)}{k_2^2}\delta^{ba_2}\right)\left(ie^{ik_3x_3}\frac{d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)}{k_3^2}\delta^{ca_3}\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(k_1,k_2,k_3) = gf^{abc}\{(k_1-k_2)^{\lambda_3}\eta^{\lambda_1\lambda_2} + (k_2-k_3)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_3} + (k_3-k_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_1}\} \quad (5.24)$$

es el vértice de tres gluones. La transformada de Fourier de $(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\tilde{\Gamma}$ es

$$\Gamma^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(x,y,z) = \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}}\; e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(k_1,k_2,k_3)$$

En términos de ésta,

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(k_1,k_2,k_3) = \int d^4z d^4y d^4z\; e^{-i(k_1x+k_2y+k_3z)}\Gamma^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(x,y,z)$$

Sustituyendo en la función de Green,

$$\begin{aligned} G^{a_1a_2a_3}_{3\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3) &= \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \int d^4x d^4y d^4z\; e^{-i(k_1x+k_2y+k_3z)}\Gamma^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(x,y,z) \\ &\left(ie^{ik_1x_1}\frac{d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)}{k_1^2}\delta^{aa_1}\right)\left(ie^{ik_2x_2}\frac{d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)}{k_2^2}\delta^{ba_2}\right)\left(ie^{ik_3x_3}\frac{d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)}{k_3^2}\delta^{ca_3}\right) \\ &= \int d^4x d^4y d^4z\; \Gamma^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(x,y,z) \\ &\left(i\int \frac{e^{ik_1(x_1-x)}}{(2\pi)^4}\frac{d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)}{k_1^2}\delta^{aa_1}\right)\left(i\int \frac{e^{ik_2(x_2-y)}}{(2\pi)^4}\frac{d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)}{k_2^2}\delta^{ba_2}\right) \\ &\left(i\int \frac{e^{ik_3(x_3-z)}}{(2\pi)^4}\frac{d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)}{k_3^2}\delta^{ca_3}\right) \\ &= \int d^4z d^4y d^4z \\ &iD^{aa_1}_{\mu_1\lambda_1}(x_1-x)iD^{ba_2}_{\mu_2\lambda_2}(x_2-y)iD^{ca_3}_{\mu_3\lambda_3}(x_3-z)\Gamma^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{abc}(x,y,z) \end{aligned}$$

Entonces vemos que la representación gráfica del vértice es la mostrada en la figura (5.4).

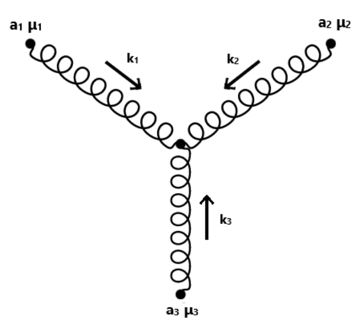

Figura 5.4: Vértice de tres gluones

Vértice de cuatro gluones

Vamos a considerar ahora el segundo término en el lagrangiano de interacción, que tiene cuatro A^a_μ, esto es, interacción de cuatro gluones. Llamaremos a este término del lagrangiano de interacción como $\mathcal{L}_I^{4G}$ y calculamos nuevamente la interacción a primer orden.

$$
\begin{aligned}
&i\int d^4z\mathcal{L}_I^{4G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0\\
&\quad= iZ_c^0Z_\psi^0\int d^4z\mathcal{L}_I^{4G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_A^0[J]\\
&\quad= iZ_c^0Z_\psi^0\int d^4z\frac{-g^2}{4}f^{abe}f^{cde}\frac{\delta^4}{i^4\delta J^{a\mu}\delta J^{b\nu}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z_A^0[J]\\
&\quad= -i\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}Z_c^0Z_\psi^0\int d^4z\frac{\delta^4}{\delta J^{a\mu}\delta J^{b\nu}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z_A^0[J]
\end{aligned}
$$

Como fue en el caso de los tres gluones, las primeras tres derivadas funcionales resultan

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^3}{\delta J^{b\nu}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z_A^0[J] = iZ_A^0[J]&\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3\\
&D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J_1(y_1)J_2(y_2)J_3(y_3)
\end{aligned}
$$

Derivando respecto a $J^{a\mu}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^4}{\delta J^{a\mu}\delta J^{b\nu}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z_A^0[J] = i\frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{a\mu}}&\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3\\
&D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J_1(y_1)J_2(y_2)J_3(y_3)\\
&+iZ_A^0[J]\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3\\
&D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}}J_1(y_1)J_2(y_2)J_3(y_3)
\end{aligned}
$$

Ahora estamos intersados en los términos con cuatro $J's$, así que el segundo término no contribuirá a la función de Green de cuatro puntos que buscamos. Entonces seguimos solo con el primer término:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^4}{\delta J^{a\mu}\delta J^{b\nu}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z_A^0[J] = i\frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{a\mu}}&\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3\\
&D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)J_1(y_1)J_2(y_2)J_3(y_3)\\
&= i(-i)Z_A^0[J]\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_4\\
&D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(z-y_1)D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(z-y_2)D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(z-y_3)D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(z-y_4)J_1(y_1)J_2(y_2)J_3(y_3)J_4(y_4)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo, la interacción de los cuatro gluones a primer orden es,

$$
\begin{aligned}
& i\int d^4z\mathcal{L}_I^{4G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0 \\
& = -i\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}Z_c^0[\xi,\bar{\xi}]Z_A^0[J]\int d^4zd^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_4 \\
& D_{\nu\lambda_1}^{bs_1}(z-y_1)D_{\lambda_2}^{ca_2\mu}(z-y_2)D_{\lambda_3}^{da_3\nu}(z-y_3)D_{\mu\lambda_4}^{as_4}(z-y_4)J^{s_1\lambda_1}(y_1)J^{s_2\lambda_2}(y_2)J^{s_3\lambda_3}(y_3)J^{s_4\lambda_4}(y_4)
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Ahora con ello procederemos a calcular la contribución a la función de Green de 4 puntos de los gluones. Derivamos cuatro veces respecto a las fuentes:

$$
\begin{aligned}
G_{4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{\;a_1a_2a_3a_4} &= \langle 0|T(A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)A_{\mu_2}^{a_2}(x_2)A_{\mu_3}^{a_3}(x_3)A_{\mu_4}^{a_4}(x_4))|0\rangle \\
&= \frac{1}{Z_0i^4}\frac{\delta^4}{\delta J_1J_2J_3J_4}i\int d^4x\mathcal{L}_I^{4G}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0[J,\xi,\bar{\xi}]|_{J=0} \\
&= -\frac{1}{Z_0}i\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}Z_\psi^0Z_c^0\frac{\delta^4}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4}Z_A^0[J]\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_4 \\
& D_{\nu\lambda_1}^{bs_1}(x-y_1)D_{\lambda_2}^{cs_2\mu}(x-y_2)D_{\lambda_3}^{ds_3\nu}(x-y_3)D_{\mu\lambda_4}^{as_4}(x-y_4) \\
& J^{s_1\lambda_1}(y_1)J^{s_2\lambda_2}(y_2)J^{s_3\lambda_3}(y_3)J^{s_4\lambda_4}(y_4)|_{J=0}
\end{aligned}
$$

Como en el caso anterior, todos los términos con derivadas de $Z_A^0[J]$ no van a contribuir a la función de Green de cuatro puntos (porque dejarían $J's$ que al ser evaluadas en cero harían a todo el término cero), entonces no los tomaremos en cuenta y solo derivaremos la integral I,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J^{a_4\mu_4}(x_4)} I = & \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \\
& D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(x-y_4) \\
& \left(\frac{\delta}{\delta J^{a_4\mu_4}(x_4)} J^{s_1\lambda_1}(y_1) J^{s_2\lambda_2}(y_2) J^{s_3\lambda_3}(y_3) J^{s_4\lambda_4}(y_4) \right) \\
\\
& = \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \\
& D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(x-y_4) \\
& \Big(\delta^4(x_4-y_1)\delta^{s_1a_4}\delta^{\lambda_1\mu_4} J_2J_3J_4 + \delta^4(x_4-y_2)\delta^{s_2a_4}\delta^{\lambda_2\mu_4} J_1J_3J_4 \\
& + \delta^4(x_4-y_3)\delta^{s_3a_4}\delta^{\lambda_3\mu_4} J_1J_2J_4 + \delta^4(x_4-y_4)\delta^{s_4a_4}\delta^{\lambda_4\mu_4} J_1J_2J_3 \Big) \\
\\
& = \int d^4x d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \; D^{ba_4}_{\nu\mu_4}(x-x_4) D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(x-y_4) J_2J_3J_4 \\
& + \int d^4x d^4y_1 d^4y_3 d^4y_4 \; D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) D^{ca_4\mu}_{\mu_4}(x-x_4) D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(x-y_4) J_1J_3J_4 \\
& + \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_4 \; D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{da_4\nu}_{\mu_4}(x-x_4) D^{as_4}_{\mu\lambda_4}(x-y_4) J_1J_2J_4 \\
& + \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \; D^{bs_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) D^{cs_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2) D^{ds_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) D^{aa_4}_{\mu\mu_4}(x-x_4) J_1J_2J_3
\end{aligned}
$$

Calculando las siguientes tres derivadas aparecen $4! = 24$ términos que son las posibles combinaciones en que pueden estar las $D's$ con x_1, x_2, x_3, x_4 y sus índices correspondientes a_i, μ_i. Estos términos resultan ser iguales en grupos de 4, quedando entonces 6 términos. Reacomodando y renombrando índices se obtiene la contribución a la función de Green de cuatro puntos (a primer orden) para gluones:

$$
\begin{aligned}
G_{4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{\,a_1a_2a_3a_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = & -ig^2 \Big\{ (f^{b_1b_3b} f^{b_2b_4b} - f^{b_1b_4b} f^{b_3b_2b}) g^{\lambda_1\lambda_2} g^{\lambda_3\lambda_4} \\
& + (f^{b_1b_2b} f^{b_3b_4b} - f^{b_1b_4b} f^{b_2b_3b}) g^{\lambda_1\lambda_3} g^{\lambda_2\lambda_4} \\
& + (f^{b_1b_3b} f^{b_4b_2b} - f^{b_1b_2b} f^{b_3b_4b}) g^{\lambda_1\lambda_4} g^{\lambda_3\lambda_2} \Big\} \\
& \int d^4x \; D^{b_1a_1}_{\lambda_1\mu_1}(x-x_1) D^{b_2a_2}_{\lambda_2\mu_2}(x-x_2) D^{b_3a_3}_{\lambda_3\mu_3}(x-x_3) D^{b_4a_4}_{\lambda_4\mu_4}(x-x_4) \\
& = \tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4} \\
& \times \int d^4x \; iD^{b_1a_1}_{\lambda_1\mu_1}(x-x_1) iD^{b_2a_2}_{\lambda_2\mu_2}(x-x_2) iD^{b_3a_3}_{\lambda_3\mu_3}(x-x_3) iD^{b_4a_4}_{\lambda_4\mu_4}(x-x_4)
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4} &= -ig^2\Big\{(f^{b_1b_3b}f^{b_2b_4b} - f^{b_1b_4b}f^{b_3b_2b})g^{\lambda_1\lambda_2}g^{\lambda_3\lambda_4} \\ &+ (f^{b_1b_2b}f^{b_3b_4b} - f^{b_1b_4b}f^{b_2b_3b})g^{\lambda_1\lambda_3}g^{\lambda_2\lambda_4} \\ &+ (f^{b_1b_3b}f^{b_4b_2b} - f^{b_1b_2b}f^{b_3b_4b})g^{\lambda_1\lambda_4}g^{\lambda_3\lambda_2}\Big\}\end{aligned} \tag{5.27}$$

es el vértice de 4 gluones. Podemos reescribir (5.26) como

$$\begin{aligned}&G_{4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{\;a_1a_2a_3a_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \int d^4x \left(i\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_1(x-x_1)}d_{\lambda_1\mu_1(k_1)}}{k_1^2}\delta^{b_1a_1}\right)\left(i\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_2(x-x_2)}d_{\lambda_2\mu_2(k_2)}}{k_2^2}\delta^{b_2a_2}\right) \\ &\left(i\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_3(x-x_3)}d_{\lambda_3\mu_3(k_3)}}{k_3^2}\delta^{b_3a_3}\right)\left(i\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_4(x-x_4)}d_{\lambda_4\mu_4(k_4)}}{k_4^2}\delta^{b_4a_4}\right)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4} \\ &= \int \frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4}{(2\pi)^{16}}\left(\frac{ie^{-ik_1x_1}d_{\lambda_1\mu_1(k_1)}}{k_1^2}\delta^{b_1a_1}\right)\left(\frac{ie^{-ik_2x_2}d_{\lambda_2\mu_2(k_2)}}{k_2^2}\delta^{b_2a_2}\right) \\ &\left(\frac{ie^{-ik_3x_3}d_{\lambda_3\mu_3(k_3)}}{k_3^2}\delta^{b_3a_3}\right)\left(\frac{ie^{-ik_4x_4}d_{\lambda_4\mu_4(k_4)}}{k_4^2}\delta^{b_4a_4}\right)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}(2\pi)^4\int d^4x\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)x} \\ &= \int \frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4}{(2\pi)^{16}}\left(\frac{ie^{-ik_1x_1}d_{\lambda_1\mu_1(k_1)}}{k_1^2}\delta^{b_1a_1}\right)\left(\frac{ie^{-ik_2x_2}d_{\lambda_2\mu_2(k_2)}}{k_2^2}\delta^{b_2a_2}\right) \\ &\left(\frac{ie^{-ik_3x_3}d_{\lambda_3\mu_3(k_3)}}{k_3^2}\delta^{b_3a_3}\right)\left(\frac{ie^{-ik_4x_4}d_{\lambda_4\mu_4(k_4)}}{k_4^2}\delta^{b_4a_4}\right)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}\end{aligned}$$

La transformada de Fourier de $(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}$ es

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}(x,y,z,u) = \int \frac{e^{i(k_1x+k_2y+k_3z+k_4u)}}{(2\pi)^{16}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}$$

En términos de ésta,

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4} = \int d^4xd^4yd^4zd^4u\; e^{i(k_1x+k_2y+k_3z+k_4u)}\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}(x,y,z,u)$$

Entonces, escribimos la función de Green en términos de esto,

$$\begin{aligned}&G_{4\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{\;a_1a_2a_3a_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \int d^4xd^4yd^4zd^4u \left(i\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_1(x-x_1)}d_{\lambda_1\mu_1(k_1)}}{k_1^2}\delta^{b_1a_1}\right)\left(i\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_2(y-x_2)}d_{\lambda_2\mu_2(k_2)}}{k_2^2}\delta^{b_2a_2}\right) \\ &\left(i\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_3(z-x_3)}d_{\lambda_3\mu_3(k_3)}}{k_3^2}\delta^{b_3a_3}\right)\left(i\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_4(u-x_4)}d_{\lambda_4\mu_4(k_4)}}{k_4^2}\delta^{b_4a_4}\right)\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}(x,y,z,u) \\ &= \int d^4xd^4yd^4zd^4u\; iD^{b_1a_1}_{\lambda_1\mu_1}(x-x_1)iD^{b_2a_2}_{\lambda_2\mu_2}(y-x_2)iD^{b_3a_3}_{\lambda_3\mu_3}(z-x_3) \\ &\quad iD^{b_4a_4}_{\lambda_4\mu_4}(u-x_4)\;\tilde{\Gamma}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{b_1b_2b_3b_4}(x,y,z,u)\end{aligned}$$

Gráficamente el vértice de cuatro gluones se representa como en la figura (5.5).

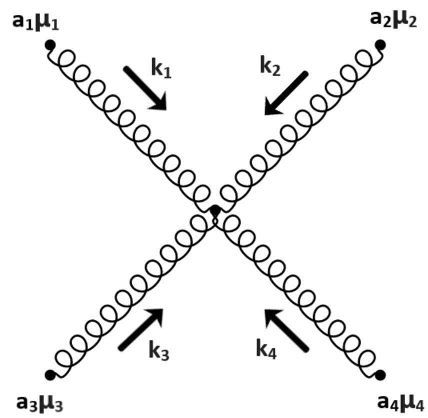

Figura 5.5: Vértice de cuatro gluones

Vértice gluon-fantasmas

Ahora haremos el cálculo de la función de Green para el tercer término del lagrangiano de interacción. Este término tiene dos fantasmas $\bar{c}^a$, c^a y un glún A^a_μ. Llamaremos a este término del lagrangiano $\mathcal{L}_I^{FP}$ (índices superiores por ser fantasmas de Faddeev Popov).

$$
\begin{aligned}
&i\int d^4z\mathcal{L}_I^{FP}\left(\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a},\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0\\
&=-igf^{abc}Z_\psi^0\int d^4z\left(\partial^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}_a}\right)\frac{\delta}{i\delta(-\xi_b)}\frac{\delta}{i\delta J^{c\mu}}Z_c^0[\bar{\xi},\xi]Z_A^0[J]\\
&=-gf^{abc}Z_\psi^0\int d^4z\left(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_a}\right)\frac{\delta Z_c^0[\bar{\xi},\xi]}{\delta\xi_b}\frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{c\mu}}
\end{aligned}
$$

La derivada con respecto a $J^{c\mu}$, análogo a lo ya calculado, es

$$
\frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{c\mu}}=-iZ_A^0[J]\int d^4y_3D_{\mu\beta}^{ce}(z-y_3)J^{e\beta}(y_3)
$$

La derivada con respecto a ξ_b es

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta Z_c^0[\bar{\xi},\xi]}{\delta\xi_b} &= \frac{\delta}{\delta\xi_b(z)} exp\left\{-i\int d^4xd^4y\; \bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y)\xi^e(y)\right\} \\
&= -iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \frac{\delta}{\delta\xi_b(z)}\left(\bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y)\xi^e(y)\right) \\
&= -iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \frac{\delta\bar{\xi}^d(x)}{\delta\xi_b(z)}D^{de}(x-y)\xi^e(y) \\
&+ iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \frac{\delta\xi^e(y)}{\delta\xi_b(z)}\bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y) \\
&= iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \delta^{eb}\delta^4(z-y)\bar{\xi}^d(x)D^{de}(x-y) \\
&= iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z)
\end{aligned}
$$

donde el signo menos es debido a la anticonmutación de las variables de Grassmann, ξ, $\bar{\xi}$. Derivando esto respecto a $\bar{\xi}_a$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_a}\frac{\delta Z_c^0[\bar{\xi},\xi]}{\delta\xi_b} &= i\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_a(z)}Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z) \\
&= i\frac{\delta Z_c^0[\bar{\xi},\xi]}{\delta\bar{\xi}_a(z)}\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z) \\
&+ iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4x\; \frac{\delta\bar{\xi}^d(x)}{\delta\bar{\xi}_a(z)}D^{db}(x-z) \\
&= -i^2Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \frac{\delta\bar{\xi}^d(x)}{\delta\bar{\xi}_a(z)}D^{de}(x-y)\xi^e(y)\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z) \\
&+ iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4x\; \delta^{ad}\delta^4(x-z)D^{db}(x-z) \\
&= +Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; \delta^{da}\delta^4(x-z)D^{de}(x-y)\xi^e(y)\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z) \\
&+ iZ_c^0[\bar{\xi},\xi]D^{ab}(z-z) \\
&= Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4y\; D^{ae}(z-y)\xi^e(y)\int d^4x\; \bar{\xi}^d(x)D^{db}(x-z) \\
&= Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4xd^4y\; D^{ae}(z-y)D^{db}(x-z)\xi^e(y)\bar{\xi}^d(x) \\
&= Z_c^0[\bar{\xi},\xi]\int d^4w_1d^4w_2\; D^{ae}(z-w_2)D^{db}(w_1-z)\xi^e(w_2)\bar{\xi}^d(w_1)
\end{aligned}
$$

(donde descartamos el término sin fuentes porque no va a contribuir). Así que la interacción a primer orden de los fantasmas y el gluón queda como

$$\begin{aligned}
& i\int d^4x\ \mathcal{L}_I^{FP}\left(\frac{\delta}{i\delta\xi^a},\frac{\delta}{i\delta(-\bar{\xi}^a)},\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0[\bar{\xi},\xi,J] \\
& = igf^{abc}Z_\psi^0 Z_c^0 Z_A^0\int d^4x d^4w_1 d^4w_2 d^4y_3 \\
& \Big(\partial^\mu D^{ae}(x-w_2)\Big)D^{db}(w_1-x)D^{cs}_{\mu\beta}(x-y_1)\xi^e(w_2)\bar{\xi}^d(w_1)J^{s\beta}(y_3) \\
& = igf^{abc}Z_0\int d^4x d^4w_1 d^4w_2 d^4y_3 \\
& \Big(\partial^\mu D^{ae}(x-w_2)\Big)D^{db}(w_1-x)D^{cs}_{\mu\beta}(x-y_1)\xi^e(w_2)\bar{\xi}^d(w_1)J^{s\beta}(y_3)
\end{aligned}$$

Para la función de Green de tres puntos, derivamos tres veces (de igual manera, ignoramos las derivadas de las funcionales generadoras) y evaluamos en $J=\xi=\bar{\xi}=0$.

$$\begin{aligned}
& G\,{}^{a_1,a_2,a_3}_{3FP\mu_3}(x_1,x_2,x_3)=\langle 0|T(\bar{c}^{a_1}(x_1)c^{a_2}(x_2)A^{a_3\mu_3}(x_3))|0\rangle \\
& =\frac{1}{Z_0 i^3}\frac{\delta^3}{\delta\bar{\xi}^{a_1}(x_1)\delta(-\xi^{a_2})(x_2)\delta J^{a_3\mu_3}(x_3)}i\int d^4x\ \mathcal{L}_I^{FP}\left(\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a},\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)Z_0[\bar{\xi},\xi,J]\Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0} \\
& =\frac{1}{Z_0 i^3}igf^{abc}Z_0\int d^4x\Big(\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)\Big)D^{a_1b}(x_1-x)D^{ca_3}_{\mu\mu_3}(x_3-x)\Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0} \\
& =-gf^{abc}\int d^4x\Big(\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)\Big)D^{a_1b}(x_1-x)D^{ca_3}_{\mu\mu_3}(x_3-x)
\end{aligned}$$

Sustituimos las $D's$:

$$\begin{aligned}
G\,{}^{a_1,a_2,a_3}_{3FP\mu_3}(x_1,x_2,x_3) &= -gf^{abc}\int d^4x\left(\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{aa_2}}{k_2^2}(-ik_2^\mu)e^{-ik_2(x-x_2)}\right) \\
&\quad\left(\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{ba_1}}{k_1^2}e^{-ik_1(x-x_1)}\right)\left(\delta^{ca_3}\int\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_3(x-x_3)}}{k_3^2}d_{\mu\mu_3}(k_3)\right) \\
&= \int d^4x\ (igf^{abc}k_2^\mu)D^{aa_2}(x_2-x)D^{a_1b}(x_1-x)D^{ca_3}_{\mu\mu_3}(x_3-x) \\
&= \int d^4x\ \tilde{\Gamma}^\mu_{abc}(k_2)iD^{aa_2}(x_2-x)iD^{a_1b}(x_1-x)iD^{ca_3}_{\mu\mu_3}(x_3-x)
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{abc}(k_2)=-gf^{abc}k_2^\mu \tag{5.28}$$

es el vértice gluon-fantasmas, recordemos que el momento k_2 es el correspondiente a la fuente ξ. Ahora vamos a escribir la función de Green en el espacio de momentos:

$$
\begin{aligned}
G\,{}^{a_1,a_2,a_3}_{3FP\mu_3}(x_1,x_2,x_3) &= \int d^4x\ \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{abc}(k_2)\left(i\frac{\delta^{aa_2}}{k_2^2}e^{-ik_2x_2}\right) \\
&\quad \left(i\frac{\delta^{ba_1}}{k_1^2}e^{-ik_1x_1}\right)\left(i\delta^{ca_3}\frac{e^{-ik_3x_3}}{k_3^2}d_{\mu\mu_3}(k_3)\right)e^{i(k_1+k_2+k_3)x} \\
&= \int \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^8}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{a_2a_1a_3}(k_2)\left(\frac{i}{k_2^2}e^{-ik_2x_2}\right) \\
&\quad \left(\frac{i}{k_1^2}e^{-ik_1x_1}\right)\left(\frac{ie^{-ik_3x_3}}{k_3^2}d_{\mu\mu_3}(k_3)\right)\delta^4(k_1+k_2+k_3) \\
&= \int \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^8}\tilde{\Gamma}^{\mu}_{a_2a_1a_3}(k_2)i^3\frac{d_{\mu\mu_3}(k_3)}{k_1^2k_2^2k_3^2}e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}
\end{aligned}
$$

donde $k_3 = -(k_1+k_2)$. El vértice es representado gráficamente como en la figura (5.6).

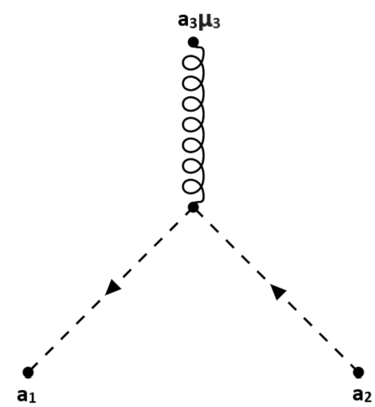

Figura 5.6: Vértice gluon-fantasmas

Vértice gluon-cuarks

Finalmente calcularemos el último término del Lagrangiano de interacción, que llamaremos $\mathcal{L}_I^{CG}$ (ya que el término involucra dos cuarks y un gluón). La interacción a primer orden está dada por

$$
\begin{aligned}
& i\int d^4z\mathcal{L}_I^{CG}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\bar{\zeta}},\frac{\delta}{i\delta(-\zeta)}\right)Z_0 \\
&= igZ_c^0\int d^4z\ \frac{\delta}{i\delta(-\zeta^{Bs})}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}(T_a)^B_C\frac{\delta}{i\delta\bar{\zeta}_{Cs}}Z_{\psi}^0[\zeta,\bar{\zeta}]Z_A^0[J] \\
&= gZ_c^0\int d^4z\ \frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{a\mu}}\gamma^{\mu}(T_a)^B_C\frac{\delta^2 Z_{\psi}^0[\zeta,\bar{\zeta}]}{\delta\zeta^{Bs}\delta\bar{\zeta}_{Cs}}
\end{aligned}
$$

La derivada con respecto a $\bar{\zeta}$ es

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]}{\delta\bar{\zeta}_{Cs}} &= \frac{\delta}{\delta\bar{\zeta}_{Cs}(z)} exp\left\{-i\int d^4xd^4y\ \bar{\zeta}_{Dr}(x)S^{D}_{Err'}(x-y)\zeta^{E}_{r'}(y)\right\} \\
&= -iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4y\ \frac{\delta\bar{\zeta}_{Dr}(x)}{\delta\bar{\zeta}_{Cs}(z)}S^{D}_{Err'}(x-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&= -iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4y\ \delta^{DC}\delta_{rs}\delta^4(x-z)S^{D}_{Err'}(x-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&= -iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y)
\end{aligned}
$$

Derivando de nuevo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]}{\delta\zeta^{Bs}\delta\bar{\zeta}_{Cs}} &= -\frac{\delta}{\delta\zeta^{Bs}(z)}iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&= -i\frac{\delta Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]}{\delta\zeta^{Bs}(z)}\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y) - iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\frac{\delta\zeta^{E}_{r'}(y)}{\delta\zeta^{Bs}(z)} \\
&= -i^2Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4w\ \bar{\zeta}_{Fp}(x)S^{F}_{Gpp'}(x-w)\frac{\delta\zeta^{G}_{p'}(w)}{\delta\zeta^{Bs}(z)}\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&- iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\delta^{EB}\delta_{r's}\delta^4(y-z) \\
&= -i^2Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4w\ \bar{\zeta}_{Fp}(x)S^{F}_{Gpp'}(x-w)\delta^{GB}\delta_{p's}\delta^4(w-z)\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&- iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]S^{C}_{Bss}(z-z) \\
&= -i^2Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4x\ \bar{\zeta}_{Fp}(x)S^{F}_{Bps}(x-z)\int d^4y\ S^{C}_{Esr'}(z-y)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&- iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]S^{C}_{Bss}(z-z) \\
&= -i^2Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4y\ S^{F}_{Bps}(x-z)S^{C}_{Esr'}(z-y)\bar{\zeta}_{Fp}(x)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&- iZ_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]S^{C}_{Bss}(z-z)
\end{aligned}
$$

Como en los casos anteriores solo nos quedamos con el término con dos fuentes porque al calcular la función de Green los demás se vuelven cero. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]}{\delta\zeta^{Bs}\delta\bar{\zeta}_{Cs}} &= -i^2Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4y\ S^{F}_{Bps}(x-z)S^{C}_{Esr'}(z-y)\bar{\zeta}_{Fp}(x)\zeta^{E}_{r'}(y) \\
&= Z_{\psi}^{0}[\zeta,\bar{\zeta}]\int d^4xd^4y\ S^{F}_{Bps}(x-z)S^{C}_{Esr'}(z-y)\bar{\zeta}_{Fp}(x)\zeta^{E}_{r'}(y)
\end{aligned}
$$

La derivada respecto a $J^{a\mu}$ es

$$
\frac{\delta Z_{A}^{0}[J]}{\delta J^{a\mu}} = -iZ_{A}^{0}[J]\int d^4y_3D^{ae}_{\mu\beta}(z-y_3)J^{e\beta}(y_3)
$$

Entonces el término de interacción a primer orden es

$$
\begin{aligned}
& i\int d^4z\mathcal{L}_I^{CG}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\zeta},\frac{\delta}{i\delta(-\zeta)}\right)Z_0 \\
&= gZ_c^0\int d^4z\ \frac{\delta Z_A^0[J]}{\delta J^{a\mu}}\gamma^\mu(T_a)_C^B\frac{\delta^2 Z_\psi^0[\zeta,\bar\zeta]}{\delta\zeta^{Bs}\delta\bar\zeta_{Cs}} \\
&= -igZ_0\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4y_3\ \gamma^\mu(T_a)_C^B \\
& S_{Bps}^F(x-y_1)S_{Esr'}^C(x-y_2)D_{\mu\beta}^{ae}(x-y_3)\bar\zeta_{Fp}(y_1)\zeta_{r'}^E(y_2)J^{e\beta}(y_3)
\end{aligned}
$$

La contribución de primer orden de esta función de Green de tres puntos, G_{3F} (F de fermión), es

$$
\begin{aligned}
G_{3F}^{a_3\mu}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{Z_0 i^3}\frac{\delta^3}{\delta\bar\zeta^{B_1s_1}(x_1)\delta(-\zeta_{B_2s_2})(x_2)\delta J^{a_3\mu_3}(x_3)}i\int d^4z\mathcal{L}_I^{CG}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\zeta},\frac{\delta}{i\delta\zeta}\right)Z_0 \\
&= \frac{1}{Z_0 i^3}(-i)gZ_0\frac{\delta^3}{\delta\bar\zeta^{B_1s_1}(x_1)\delta(-\zeta_{B_2s_2})(x_2)\delta J^{a_3\mu_3}(x_3)}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4y_3\ \gamma^\mu(T_a)_C^B \\
& S_{Bps}^F(x-y_1)S_{Esr'}^C(x-y_2)D_{\mu\beta}^{ae}(x-y_3)\bar\zeta_{Fp}(y_1)\zeta_{r'}^E(y_2)J^{e\beta}(y_3) \\
&= \int d^4x\ (g\gamma^\mu(T_a)_C^B)\ S_{Bp_1s}^{B_1}(x-x_1)S_{B_2ss_2}^C(x-x_2)D_{\mu\mu_3}^{aa_3}(x-x_3) \\
&= \int d^4x\ \tilde\Gamma_{a\mu}^{BC}\ iS_{Bs_1s}^{B_1}(x-x_1)iS_{B_2ss_2}^C(x-x_2)iD_{\mu\mu_3}^{aa_3}(x-x_3)
\end{aligned}
$$

donde el vértice cuark-gluones es

$$
\tilde\Gamma_{a\mu}^{BC} = ig\gamma^\mu(T_a)_C^B \tag{5.29}
$$

Sustituyendo los propagadores obtenemos la expresión en el espacio de momento:

$$
\begin{aligned}
G_{3F}^{a_3\mu_3\ B_1B_2}(x_1,x_2,x_3) &= \int d^4x\ \tilde\Gamma_{a\mu}^{BC}\left(i\delta_B^{B_1}\delta_{s_1s}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_1(x-x_1)}}{\not k_1-m_{s_1}}\right)\left(i\delta_C^{B_2}\delta_{s_2s}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_2(x-x_2)}}{\not k_2-m_{s_2}}\right) \\
&\quad\left(i\delta^{aa_3}\int\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_3(x-x_3)}}{k_3^2}d_{\mu\mu_3}(k_3)\right) \\
&= \int d^4x\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^{12}}\tilde\Gamma_{a\mu}^{BC}\left(i\delta_B^{B_1}\delta_{s_1s}\frac{e^{ik_1x_1}}{\not k_1-m_{S_1}}\right)\left(i\delta_C^{B_2}\delta_{s_2s}\frac{e^{ik_2x_2}}{\not k_2-m_{s_2}}\right) \\
&\quad\left(i\delta^{aa_3}\frac{e^{ik_3x_3}}{k_3^2}d_{\mu\mu_3}(k_3)\right)e^{i(k_1+k_2+k_3)x} \\
&= \int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}\tilde\Gamma_{a\mu}^{BC}\left(i\delta_B^{B_1}\delta_{s_1s}\frac{e^{ik_1x_1}}{\not k_1-m_{s_1}}\right)\left(i\delta_C^{B_2}\delta_{s_2s}\frac{e^{ik_2x_2}}{\not k_2-m_{s_2}}\right) \\
&\quad\left(i\delta^{aa_3}\frac{e^{ik_3x_3}}{k_3^2}d_{\mu\mu}(k_3)\right)\delta(k_1+k_2+k_3) \\
&= \int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}\tilde\Gamma_{a_3\mu}^{B_1B_2}\frac{d_{\mu\mu_3}(k_3)}{(\not k_1-m)(\not k_2-m)k_3^2}i^3e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}
\end{aligned}
$$

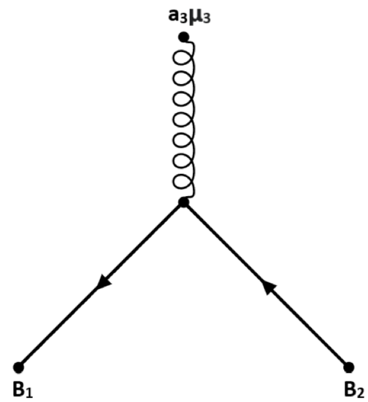

Figura 5.7: Vértice gluon-cuarks

donde $k_3 = -(k_1 + k_2)$ y la masas de los cuarks son $m = m_{s_1} = m_{s_2}$, es decir, son del mismo sabor. Gráficamente el vértice es representado como en la figura (5.7).

El procedimiento que hemos hecho para calcular los propagadores y vértices es perturbativo, ya que estamos aproximando el Lagrangiano de interacción y haciendo transformaciones de norma infinitesimales. Ahora vamos a revisar qué ocurre cuando utilizamos la transformación de norma no perturbativa, (2.6), en un ejemplo específico.

Capítulo 6

Péndulo de Gribov

En este capítulo revisaremos las consecuencias de las transformaciones de norma de las teorías no abelianas, antes de cuantizarlas, veremos las condiciones que debe cumplir el parámetro de norma α. Utilizaremos una convención distinta a la que vimos en la sección sobre teorías de norma no abelianas (2.1), ya que con esta se simplificará la notación, quitando la i y la g de las ecuaciones, esto porque son absorbidas en el campo de norma, de forma que la ecuación (2.4) se vuelve $exp(-\int dx^{\mu} A_{\mu}(x))$. Y la ecuación (2.6) ahora queda como

$$\tilde{A}_{\mu}(x) = V(x)\Big(\partial_{\mu} + A_{\mu}(x)\Big)V^{\dagger}(x) \tag{6.1}$$

Gribov consideró un campo de norma independiente del tiempo y simétricamente esférico de tres componentes [13], dado por

$$A^{i} = f_1(r)\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_2(r)\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_3(r)\hat{n}n^{i} \; ; \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6.2}$$

donde $r = \sqrt{x^i x_i}$, el vector unitario $n_i = x_i/r$ y $\hat{n} = i\sigma^i n_i$. con σ^i las matrices de Pauli, que son los generadores de $SU(2)$. En este ejemplo, vamos a ver como transforma A^i y qué condición se da sobre el parámetro de norma al imponer la norma de Lorentz.

Calculemos y simplifiquemos los términos de A^i. La derivada parcial de $\hat{n}$ es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} &= i\sigma^k \frac{\partial}{\partial x_i} n_k \\
&= i\sigma^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_k}{\sqrt{x^j x_j}} \right) \\
&= i\sigma^k \left(\frac{\delta^{ik}}{\sqrt{x^j x_j}} - \frac{x^i x_k}{(x^j x_j)^{3/2}} \right) \\
&= i\sigma^k \left(\frac{\delta^{ik}}{r} - \frac{x^i x_k}{r^3} \right) \\
&= \frac{i}{r} \left(\sigma^i - (\sigma^k \frac{x_k}{r}) \frac{x^i}{r} \right) \\
&= \frac{i}{r} \left(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) n^i \right)
\end{aligned}$$

Con esto, y usando la identidad $\sigma_j \sigma^k = \delta_j^k \; Id + i\epsilon_{ijl}\sigma^l$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} &= \frac{i}{r} i n^j \sigma_j \left(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) n^i \right) \\
&= -\frac{1}{r} n^j \sigma_j \left(\sigma^i - \sigma^k n_k n^i \right) \\
&= -\frac{1}{r} n^j \sigma_j \sigma^i + \frac{1}{r} n^j \sigma_j \sigma^k n_k n^i \\
&= -\frac{1}{r} n^j \Big(\delta_j^i \; Id + i\epsilon_{jil}\sigma^l \Big) + \frac{1}{r} n^j \Big(\delta_j^k \; Id + i\epsilon_{jkl}\sigma^l \Big) n_k n^i \\
&= -\frac{1}{r} n^i \; Id - \frac{i}{r} n^j \epsilon_{jil}\sigma^l + \frac{1}{r} n^j n_j n^i \; Id + \frac{i}{r}\epsilon_{ijl} n^j n_k \sigma^l n^i
\end{aligned}$$

El último término es cero por la antisimetría de ϵ_{ijl} (aparecen términos con partes como $\epsilon_{12l}n^1n^2 + \epsilon_{21l}n^2n^1 = \epsilon_{12l}n^1n^2 - \epsilon_{12l}n^1n^2 = 0$). Además $n^j n_j = (x^j x_j)/r^2 = r^2/r^2 = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{r} n^i \; Id - \frac{i}{r} n^j \epsilon_{jil}\sigma^l + \frac{1}{r} n^i \; Id \\
&= -\frac{i}{r} \epsilon_{jil} n^j \sigma^l \\
&= +\frac{i}{r^2} \epsilon_{ijk} x^j \sigma^k
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Sustituyendo, podemos escribir al campo de norma como

$$\begin{aligned}
A^i &= f_1 \left(\frac{i}{r} \left(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) n^i \right) \right) + f_2 \left(\frac{i}{r^2} \epsilon_{ijk} x^j \sigma^k \right) + f_3 \Big(i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) n^i \Big) \\
&= \frac{i}{r} f_1 \sigma^i - \frac{i}{r} f_1 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) n^i + \frac{i}{r^2} f_2 \epsilon_{ijk} x^j \sigma^k + i f_3 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) n^i
\end{aligned} \tag{6.4}$$

En el caso en que f_1 y f_3 sean cero, el campo de norma se simplifica a

$$A^i = \frac{i}{r^2} f_2 \epsilon_{ijk} x^j \sigma^k \tag{6.5}$$

Notemos que es transverso, es decir, la divergencia es cero:

$$\begin{aligned}
\partial_i A^i &= \frac{i}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k \partial_i(x^j f_2) \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k \Big(f_2 \delta_i^j + x^j \partial_i f_2 \Big) \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{iik}\sigma^k + \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j \partial_i f_2 \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j \partial_i f_2 \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{x^j x_j} \\
&= \frac{1}{r^2}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{x_i}{r} \\
&= \frac{1}{r^3}\frac{\partial f_2}{\partial r}\epsilon_{ijk}\sigma^k x^j x_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

por la antisimetría de ϵ_{ijk}.

Análogo a (6.3), obtenemos que $\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} = -\frac{i}{r^2}\epsilon_{ijk}x^j\sigma^k = -\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}$, además

$$\begin{aligned}
\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} &= i n^\alpha \sigma_\alpha \left(-\frac{i}{r^2}\epsilon_{ijk}x^j\sigma^k \right) \\
&= i n^\alpha \sigma_\alpha \left(-\frac{i}{r}\epsilon_{ijk}n^j\sigma^k \right) \\
&= \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}n^\alpha n^j \Big(\delta_\alpha^k \; Id + i\epsilon_{\alpha k l}\sigma^l \Big) \\
&= \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}n^k n^j \; Id + \frac{i}{r}n^\alpha n^j \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha k l}\sigma^l \\
&= \frac{i}{r}n^\alpha n^j \Big(\delta_{j\alpha}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{i\alpha} \Big)\sigma^l \\
&= \frac{i}{r}\Big(n^j n^j \sigma^i - n^j \sigma^j n^i \Big) \\
&= \frac{i}{r}\Big(\sigma^i (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) n^i \Big) \\
&= \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

También notamos que

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= n^i n_j \sigma_i \sigma^j \\
&= n^i n_j (\delta^i_j \; Id + i\epsilon_{ijk}\sigma^k) \\
&= n^i n_i \; Id + i n^i n_j \epsilon_{ijk}\sigma^k \\
&= n^i n_i \; Id \\
&= Id
\end{aligned}
$$

En resumen de lo anterior, tenemos las siguientes identidades que usaremos en lo que sigue:

$$
\begin{aligned}
\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} &= -\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} \\
\hat{n}\frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} &= \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} \\
(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= Id
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Las condiciones para la existencia de copias de Gribov [14] son

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= V\mathbf{A}V^\dagger + V\nabla V^\dagger \\
\partial_i \tilde{A}^i &= \partial_i A^i
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Consideraremos $V = e^{-\frac{i}{2}\alpha(r)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})}$, que usando (6.6), podemos reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]^k \\
&= Id + \left(-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right)^3 \\
&+ \frac{1}{4!}\left(-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(-\frac{i}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right)^5 + \cdots \\
\\
&= Id - i\frac{1}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 + i\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^3 \\
&+ \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^4 - i\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^5(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^5 + \cdots \\
\\
&= Id - i\frac{1}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 Id + i\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&+ \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4 Id - i\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^5(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \cdots \\
\\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4 + \cdots\right) Id \\
&- i\left(\frac{1}{2}\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^5 + \cdots\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
\\
&= cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) Id - i\ sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= cos\ \beta\ Id - sin\ \beta\ \hat{n}
\end{aligned}
$$

donde, para abreviar, $\beta \equiv \alpha/2$. Análogamente, $V^\dagger = cos\ \beta\ Id + sin\ \beta\ \hat{n}$. Ahora que tenemos esto podemos calcular el campo transformado $\tilde{A}^i$ usando (6.1) y (6.2). Calculemos el primer término:

$$
\begin{aligned}
V\left(f_1\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\right)V^{\dagger} &= (cos\ \beta\ Id - sin\ \beta\ \hat{n})f_1\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}(cos\ \beta\ Id + sin\ \beta\ \hat{n})\\
&= f_1 cos^2\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_1 cos\ \beta\ sin\ \beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} - f_1 sin\ \beta\ cos\ \beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1 sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\hat{n}\\
&= f_1 cos^2\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1 cos\ \beta\ sin\ \beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1 sin\ \beta\ cos\ \beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1 sin^2\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= f_1\Big(cos^2\beta - sin^2\beta\Big)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1\Big(cos\ \beta\ sin\ \beta + cos\ \beta sin\ \beta\Big)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= f_1\ cos\ 2\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1\ sin\ 2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= f_1\ cos\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1\ sin\ \alpha\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

Segundo término:

$$
\begin{aligned}
V\left(f_2\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\right)V^{\dagger} &= (cos\ \beta\ Id - sin\ \beta\ \hat{n})f_2\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}(cos\ \beta\ Id + sin\ \beta\ \hat{n})\\
&= f_2 cos^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2 cos\beta\ sin\ \beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\hat{n} - f_2 sin\ \beta\ cos\ \beta\ \hat{n}^2\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_2 sin^2\beta\ \hat{n}^2\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\hat{n}\\
&= f_2 cos^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2 cos\beta\ sin\ \beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2 sin\ \beta\ cos\ \beta\ \frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_2 sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= f_2(cos^2\beta - sin^2\beta)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2(cos\ \beta\ sin\ \beta + cos\ \beta\ sin\ \beta)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= f_2\ cos\ \alpha\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2\ sin\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

Tercer término:

$$
\begin{aligned}
V\left(f_3\hat{n}n^i\right)V^{\dagger} &= (cos\ \beta\ Id - sin\ \beta\ \hat{n})f_3\hat{n}n^i(cos\ \beta\ Id + sin\ \beta\ \hat{n})\\
&= f_3 cos^2\beta\ \hat{n}n^i + f_3 cos\beta\ sin\ \beta\ \hat{n}^2 n^i - f_3 sin\ \beta\ cos\ \beta\ \hat{n}^2 n^i - f_3 sin^2\beta\ \hat{n}^2\hat{n}n^i\\
&= f_3 cos^2\beta\ \hat{n}n^i - f_3 cos\beta\ sin\ \beta\ n^i + f_3 sin\ \beta\ cos\ \beta\ n^i + f_3 sin^2\beta\ \hat{n}n^i\\
&= f_3(cos^2\beta + sin^2\beta)\hat{n}n^i\\
&= f_3\hat{n}n^i
\end{aligned}
$$

Y del cuarto término:

$$
\begin{aligned}
V\partial_i V^{\dagger} &= V\partial_i(cos\ \beta + sin\ \beta\ \hat{n})\\
&= V\left(-sin\ \beta\frac{\partial\beta}{\partial x^i} + cos\ \beta\frac{\partial\beta}{\partial x^i}\hat{n} + sin\ \beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\right)
\end{aligned}
$$

La parcial de β es

$$
\frac{\partial\beta}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha(r)}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dr}\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dr}\frac{x_i}{r} = \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}
$$

Susituyendo, obtenemos

$$V\partial_i V^\dagger = (cos\ \beta - sin\ \beta\ \hat{n})\left(-\frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin\ \beta + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos\ \beta\ \hat{n} + sin\ \beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos\ \beta\ sin\ \beta + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos^2\beta\ \hat{n} + cos\ \beta\ sin\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&+ \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin^2\beta\ \hat{n} - \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin\ \beta\ cos\ \beta\ \hat{n}^2 - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos\ \beta\ sin\ \beta + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos^2\beta\ \hat{n} + cos\ \beta\ sin\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&+ \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin^2\beta\ \hat{n} + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin\ \beta\ cos\ \beta - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}cos^2\beta\ \hat{n} + cos\ \beta\ sin\beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}sin^2\beta\ \hat{n} - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}(cos^2\beta + sin^2\beta)\hat{n} + cos\ \beta\ sin\ \beta\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}\hat{n} + \frac{1}{2}(cos\ \beta\ sin\ \beta + cos\ \beta\ sin\ \beta)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\\
&= \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}\hat{n} + \frac{1}{2}sin\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - sin^2\beta\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Reescribimos $sin^2\beta$ como

$$\begin{aligned}
sin^2\beta &= -cos\ 2\beta + cos^2\beta\\
&= -cos\ \alpha + \Big(cos(\beta - \beta) - sin^2\beta\Big)\\
&= -cos\ \alpha + 1 - sin^2\beta\\
\Rightarrow sin^2\beta &= -\frac{1}{2}cos\ \alpha + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$V\partial_i V^\dagger = \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}\hat{n} + \frac{1}{2}sin\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{2}cos\ \alpha - \frac{1}{2}\right)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}$$

Juntando todos los terminos obtenemos que el campo transformado es

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i &= VA^iV^\dagger + V\partial^iV^\dagger \\
&= f_1\ cos\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} - f_1\ sin\ \alpha\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2\ cos\ \alpha\ \hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + f_2\ sin\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
&+ f_3\hat{n}n^i + \frac{n_i}{2}\frac{d\alpha}{dr}\hat{n} + \frac{1}{2}sin\ \alpha\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{2}cos\ \alpha - \frac{1}{2}\right)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
\\
&= \left(f_1\ cos\ \alpha + f_2\ sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha\right)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
&+ \left(-f_1\ sin\ \alpha + f_2\ cos\ \alpha + \left(\frac{1}{2}cos\ \alpha - \frac{1}{2}\right)\right)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
&+ \left(f_3 + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dr}\right)\hat{n}n^i \\
\\
&= \left(f_1\ cos\ \alpha + \left(f_2 + \frac{1}{2}\right)sin\ \alpha\right)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
&+ \left(\left(f_2 + \frac{i}{2g}\right)cos\ \alpha - f_1\ sin\ \alpha - \frac{1}{2}\right)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i} \\
&+ \left(f_3 + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dr}\right)\hat{n}n^i \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Ahora lo que haremos será usar la condición $\partial_i A^i = \partial_i\tilde{A}^i$, con las ecuaciones (6.2) y (6.8). Derivando A^i obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_i A^i &= \partial_i\left(f_1\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_3\hat{n}n^i\right) \\
&= (\partial_i f_1)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_1\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} + (\partial_i f_2)\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2\hat{n}\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&+ (\partial_i f_3)\hat{n}n^i + f_3\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}n^i + f_3\hat{n}(\partial_i n^i)
\end{aligned}$$

Notamos que al derivar una cantidad que depende de r se tiene

$$\partial_i S(r) = \frac{\partial S(r)}{\partial x^i} = \frac{dS}{dr}\frac{\partial r}{\partial x^i} = S'(r)\frac{x_i}{r} = S'n_i$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\partial_i A^i &= f_1'n_i\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_1\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} + f_2'n_i\hat{n}\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2\left(\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i}\right)^2 + f_2\hat{n}\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&+ f_3'n_in^i\hat{n} + f_3n^i\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_3\hat{n}(\partial_i n^i) \\
&= (f_1' + f_2'\hat{n} + f_3)n_i\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + (f_1 + f_2\hat{n})\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} + f_2\left(\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i}\right)^2 + f_3'\hat{n} + f_3\hat{n}(\partial_i n^i)
\end{aligned}$$

Para simplificar el resultado notamos varias cosas:

$$\partial_i n^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{x^i}{r} = \frac{\delta^i{}_i}{r} - \frac{x^i x_i}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} n_i \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} &= n_i \frac{i}{r}(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n^i) \\ &= \frac{i}{r}(n_i\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n_i n^i) \\ &= \frac{i}{r}((\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_i^2} &= \partial_i \frac{i}{r}(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n^i) \\ &= i\sigma^i \partial_i \left(\frac{1}{r}\right) - i\sigma^j \partial_i \left(\frac{1}{r} n_j n^i\right) \\ &= -i\sigma^i \frac{n_i}{r^2} + i\sigma^j \frac{n_i}{r^2} n_j n^i - \frac{i}{r}\sigma^j \partial_i(n_j n^j) \\ &= -\frac{i}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) + \frac{i}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) - \frac{i}{r}\sigma^j \partial_i(n_j n^j) \\ &= -\frac{i}{r}\sigma^j \partial_i(n_j n^j) \\ &= -\frac{i}{r}\sigma^j \left(n_j(\partial_i n^i) + n^i(\partial_i n^j)\right) \\ &= -\frac{i}{r}\sigma^j \left(\frac{2n_j}{r} + n^i\Big(\frac{\delta^{ij}}{r} - \frac{n_i n^j}{r}\Big)\right) \\ &= -\frac{i}{r^2}\sigma^j \left(2n_j + n^j - n^i n_i n^j\right) \\ &= -\frac{i}{r^2}\sigma^j \left(2n_j + n^j - n^j\right) \\ &= -\frac{2i}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) \\ &= -\frac{2}{r^2}\hat{n} \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i}\right)^2 &= \frac{i^2}{r^2}(\sigma_i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n_i)(\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n^i) \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\sigma_i\sigma^i - \sigma_i n^i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n_i\sigma^i + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})n_i n^i\right] \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\sigma_i\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2\right] \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\sigma_i\sigma^i - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2\right] \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[3\ Id - Id\right] \\ &= -\frac{2}{r^2}\ Id \end{aligned} \tag{6.12}$$

Por lo tanto, la divergencia de A^i resulta

$$\begin{aligned}
\partial_i A^i &= -\frac{2}{r^2}(f_1 + f_2\hat{n})\hat{n} - \frac{2}{r^2}f_2\ Id + f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} \\
&= -\frac{2}{r^2}f_1\hat{n} + \frac{2}{r^2}f_2\ Id - \frac{2}{r^2}f_2\ Id + f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} \\
&= -\frac{2}{r^2}f_1\hat{n} + f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la divergencia de $\tilde{A}^i$ de (6.8). Del primer término,

$$\begin{aligned}
\partial_i\left(f_1\ cos\ \alpha + \left(f_2 + \frac{1}{2}\right)sin\ \alpha\right)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} &= (\partial_i f_1)cos\ \alpha\ \frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_1(\partial_i cos\ \alpha)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_1 cos\ \alpha\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&+ (\partial_i f_2)sin\ \alpha\ \frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2(\partial_i sin\ \alpha)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2 sin\ \alpha\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_i sin\ \alpha)\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}sin\ \alpha\frac{\partial^2\hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&= f_1' n_i cos\ \alpha\ \frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} - f_1 sin\ \alpha\ n_i\alpha'\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} - \frac{2}{r^2}f_1 cos\ \alpha\ \hat{n} \\
&+ f_2' n_i sin\ \alpha\ \frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} + f_2 cos\ \alpha\ n_i\alpha'\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} - \frac{2}{r^2}f_2 sin\ \alpha\ \hat{n} \\
&+ \frac{1}{2}cos\ \alpha\ n_i\alpha'\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{2}{r^2}sin\ \alpha\ \hat{n} \\
&= \Big(f_1' cos\ \alpha - f_1\alpha' sin\ \alpha + f_2' sin\ \alpha \\
&+ f_2\alpha' cos\ \alpha + \frac{1}{2}\alpha' cos\ \alpha\Big)n_i\frac{\partial\hat{n}}{\partial x_i} \\
&- \left(f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha\right)\frac{2}{r^2}\hat{n} \\
&= -\frac{2}{r^2}\left(f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha\right)\hat{n}
\end{aligned}$$

Del segundo término,

$$
\begin{aligned}
&\partial_i \left(\left(f_2 + \frac{1}{2}\right) cos\ \alpha - f_1\ sin\ \alpha - \frac{1}{2} \right) \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \\
&= (\partial_i f_2) cos\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_2 (\partial_i cos\ \alpha) \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_2 cos\ \alpha \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_2 cos\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&+ \frac{1}{2} (\partial_i cos\ \alpha) \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} cos\ \alpha\ \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} cos\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&- (\partial_i f_1) sin\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_1 (\partial_i sin\ \alpha) \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_1 sin\ \alpha \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_1 sin\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_i^2} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \hat{n} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial x_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_2 n_i cos\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_2 sin\ \alpha\ n_i \alpha' \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + f_2 cos\ \alpha \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{r^2} f_2 cos\ \alpha\ \hat{n}\hat{n} \\
&- \frac{1}{2} sin\ \alpha\ n_i \alpha' \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} cos\ \alpha\ \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{2}{r^2} cos\ \alpha\ \hat{n}\hat{n} \\
&- f_1' n_i sin\ \alpha\ \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_1 cos\ \alpha\ n_i \alpha' \hat{n} \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} - f_1 sin\ \alpha \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{2}{r^2} f_1 sin\ \alpha\ \hat{n}\hat{n} \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{r^2} \hat{n}\hat{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(f_2 cos\ \alpha\ \hat{n} - f_2 sin\ \alpha\ \alpha' \hat{n} - \frac{1}{2} sin\ \alpha\ \alpha' \hat{n} - f_1' sin\ \alpha\ \hat{n} \right) n_i \frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \\
&+ \left(f_2 cos\ \alpha + \frac{1}{2} cos\ \alpha - f_1 sin\ \alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial x_i} \right)^2 \\
&- \left(f_2 cos\ \alpha + \frac{1}{2} cos\ \alpha - f_1 sin\ \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{r^2} \hat{n}^2
\end{aligned}
$$

$$
= - \left(f_2 cos\ \alpha + \frac{1}{2} cos\ \alpha - f_1 sin\ \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{r^2} Id + \left(f_2 cos\ \alpha + \frac{1}{2} cos\ \alpha - f_1 sin\ \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{r^2} Id
$$

$$
= 0
$$

Del tercer término,

$$\partial_i\left(f_3+\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dr}\right)\hat{n}n^i = (\partial_i f_3)\hat{n}n^i + f_3\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}n^i + f_3\hat{n}(\partial_i n^i)$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\partial_i\alpha'(r)\Big)\hat{n}n^i + \frac{1}{2}\alpha'\frac{\partial\hat{n}}{\partial x^i}n^i + \frac{1}{2}\alpha'\hat{n}(\partial_i n^i)$$

$$= f_3' n_i n^i\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n}$$
$$+\frac{1}{2}\alpha'' n_i n^i\hat{n} + \frac{1}{2}\frac{2}{r}\alpha'\hat{n}$$

$$= f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} + \frac{1}{2}\alpha''\hat{n} + \frac{1}{r}\alpha'\hat{n}$$

Juntando los resultados de las ecuaciones (6.13) y (6.8) tenemos que

$$\partial_i A^i = \partial_i\tilde{A}^i$$

$$-\frac{2}{r^2}f_1\hat{n} + f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} = -\frac{2}{r^2}\Big(f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha\Big)\hat{n} + f_3'\hat{n} + \frac{2}{r}f_3\hat{n} + \frac{1}{2}\alpha''\hat{n} + \frac{1}{r}\alpha'\hat{n}$$

$$-\frac{2}{r^2}f_1\hat{n} = -\frac{2}{r^2}\Big(f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha\Big)\hat{n} + \frac{1}{2}\alpha''\hat{n} + \frac{1}{r}\alpha'\hat{n}$$

$$-\frac{2}{r^2}\Big(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{2}\alpha'' - \frac{r}{2}\alpha' + f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha - f_1\Big)\hat{n} = 0$$

Como $\hat{n}$ es una combinación lineal de las matrices de Pauli, para algunos coeficientes n^i arbitrarios, lo que está entre paréntesis debe ser cero:

$$-\frac{r^2}{4}\alpha'' - \frac{r}{2}\alpha' + f_1 cos\ \alpha + f_2 sin\ \alpha + \frac{1}{2}sin\ \alpha - f_1 = 0$$

$$\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha' - \frac{4}{r^2}f_1 cos\ \alpha - \frac{4}{r^2}f_2 sin\ \alpha - \frac{2}{r^2}sin\ \alpha + \frac{4}{r^2}f_1 = 0$$

Finalmente, obtenemos la ecuación diferencial para $\alpha(r)$:

$$\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha' - \frac{4}{r^2}\left(f_1\Big(cos\ \alpha - 1\Big) + sin\ \alpha\Big(f_2 + \frac{1}{2}\Big)\right) = 0 \tag{6.14}$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = \ln r$ tenemos

$$\alpha'(r) = \frac{d}{dr}\alpha(r) = \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{dr} = \alpha'(\tau)\frac{d}{dr}\ln r = \frac{1}{r}\alpha'(\tau)$$

$$\alpha''(r) = \frac{d}{dr}\alpha'(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\alpha'(\tau)\right) = \frac{1}{r^2}\alpha''(\tau) - \frac{1}{r^2}\alpha'(\tau)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.14),

$$\frac{1}{r^2}\alpha''(\tau) - \frac{1}{r^2}\alpha'(\tau) + \frac{2}{r^2}\alpha'(\tau) - \frac{4}{r^2}\left(f_1\Big(cos\ \alpha - 1\Big) + sin\ \alpha\Big(f_2 + \frac{1}{2}\Big)\right) = 0$$

$$\alpha''(\tau) + \alpha'(\tau) - 4\left(f_1\Big(cos\ \alpha - 1\Big) + sin\ \alpha\Big(f_2 + \frac{1}{2}\Big)\right) = 0 \tag{6.15}$$

donde las f y α son funciones de $r = e^{\tau}$. Ahora, veremos esta ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden: Consideraremos

$$\begin{aligned}\omega(\tau) &= \alpha'(\tau)\\ \omega'(\tau) &= -\omega(\tau) + 4\left(f_1\Big(cos\ \alpha - 1\Big) + sin\ \alpha\Big(f_2 + \frac{1}{2}\Big)\right)\end{aligned} \tag{6.16}$$

Analizaremos este sistema considerando a $\mathbf{r} = (\alpha, \alpha')$ las coordenadas del espacio fase, por lo que el sistema (6.16) nos da la velocidad de fase $\mathbf{r}' = (\alpha', \alpha'') = (\omega, \omega')$. Los puntos fijos (en el espacio fase) de este sistema, es decir cuando $\mathbf{r}' = (0, 0)$, se dan donde $\alpha = 2\pi n,\ n = 0, 1, 2, ...$ Así que alrededor de estos puntos fijos analizaremos el comportamiento del sistema para conocer su estabilidad.

Para escribir el sistema de forma lineal vamos a desarrollar en serie de Taylor y considerar hasta primer orden, entonces, $sin\ \alpha \approx \alpha$ y $cos\ \alpha \approx 1$, por lo que el sistema queda aproximadamente como

$$\begin{aligned}\omega(\tau) &= \alpha'(\tau)\\ \omega'(\tau) &= -\omega(\tau) + 4\alpha\Big(f_2 + \frac{1}{2}\Big)\end{aligned}$$

O en forma matricial,

$$\begin{pmatrix}\omega\\ \omega'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 4\left(f_2 + \frac{1}{2}\right) & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Para obtener información de la estabilidad, obtendremos los eigenvalores λ y veremos de qué tipo son. Llamando a la matriz del sistema A, con la ecuación característica tenemos

$$0 = det(A - \lambda\ Id) = det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 4\left(f_2 + \frac{1}{2}\right) & -(\lambda + 1)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 4\left(f_2 + \frac{1}{2}\right)$$

Por lo que los eigenvalores son

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{16f_2 + 9}\right) \tag{6.18}$$

Entonces, los eigenvalores son (i) reales y distintos si $f_2 > -9/16$, (ii) complejos y distintos si $f_2 < -9/16$, (iii) reales e iguales si $f_2 = -9/16$. La estabilidad depende del signo de la parte real de los eigenvalores [18]; cuando es negativa el punto fijo es estable y la solución tiende (conforme avanza el parámetro) al punto fijo, cuando es cero es oscilante (punto elíptico) y cuando es positiva es inestable. Entonces la estabilidad del sistema depende del valor de f_2.

Analizaremos el comportamiento de las soluciones en el espacio fase para cada caso, viendo para que valores de f_2 hay estabilidad. Las soluciones a la ecuación son

$$\alpha(\tau) = Ae^{\lambda_+ \tau} + Be^{\lambda_- \tau} \tag{6.19}$$

donde A, B son constantes que se fijan de acuerdo a las condiciones de borde.

Para el caso (i) donde los eigevalores son reales y distintos, como vemos de (6.18), puede ser que un eigenvalor sea negativo y otro no negativo, o también puede ser que los eigenvalores sean ambos negativos según si el discriminante es mayor o menor que uno. En el primer caso, el valor que sea no negativo da una solución es inestable, entonces para que sea estable, la constante (A o B) que acompaña la solución debe ser igual a cero. Por ejemplo consideremos que el discriminate es igual a uno : $\sqrt{16f_2 + 9} = 1$. Tenemos entonces que $f_2 = -1/2$, y los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{1}{2}(-1+1) = 0 \\ \lambda_- &= \frac{1}{2}(-1-1) = -1 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Entonces la solución es

$$\alpha(\tau) = Ae^{(0)\tau} + Be^{(-1)\tau} = A + Be^{-\tau} \tag{6.21}$$

Vemos que el eigenvalor no negativo resultó un término no estable, es decir, no se va a cero conforme el parámetro avanza, entonces debemos tener que $A = 0$ para la estabilidad. Así, la solución y su derivada son

$$\alpha(\tau) = Be^{-\tau}, \qquad \alpha'(\tau) = -Be^{-\tau} \tag{6.22}$$

Al graficar esto en el espacio fase obtenemos la figura (6.1)
Como vemos, la solución tiende al punto fijo $\mathbf{r}' = (0, 0)$, debido a la estabilidad de la solución.

Si los dos eigenvalores son negativos, la solución y su derivada son

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= Ae^{a\tau} + Be^{b\tau} \\ \alpha'(\tau) &= Aae^{a\tau} + Bbe^{b\tau} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Aquí ambas partes de la solución son reales y la gráfica en el espacio fase es dada por la figura (6.2)

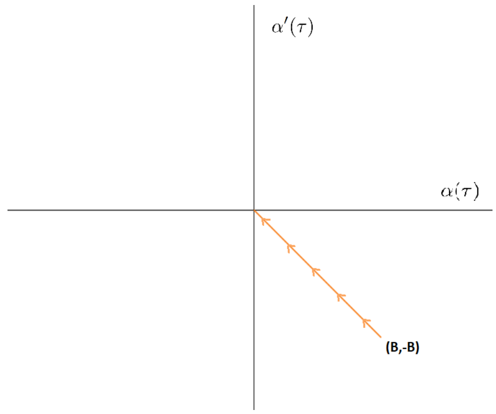

Figura 6.1: Estabilidad de solución, eigenvalores reales y distintos; positivo y negativo

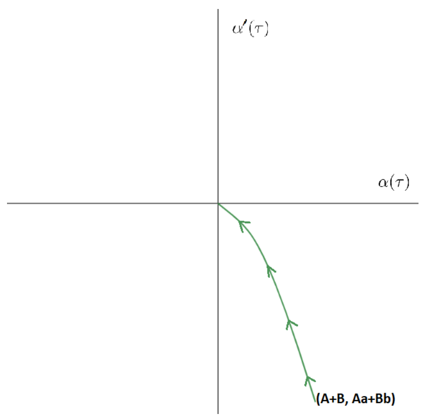

Figura 6.2: Estabilidad de solución, eigenvalores reales y distintos; ambos negativos

En el caso (ii) que tenemos eigenvalores complejos distintos podemos escribir la solución como

$$\alpha(\tau) = Ae^{(\beta+i\gamma)\tau} + Be^{(\beta-i\gamma)\tau}$$

Para este caso, $\beta = -1/2$ y $\gamma = \sqrt{16f_2 + 9}/2$. La derivada es

$$\alpha'(\tau) = A(\beta + i\gamma)e^{(\beta+i\gamma)\tau} + B(\beta - i\gamma)e^{(\beta-i\gamma)\tau}$$

Tomando la parte real de la solución,

$$\begin{aligned} Re(\alpha) &= Ce^{\beta\tau}\cos(\gamma\tau) \\ Re(\alpha') &= Ce^{\beta\tau}\Big(\beta\cos(\gamma\tau) + \gamma\sin(\gamma\tau)\Big) \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde $C = A + B$. Al graficarlo obtenemos la figura (6.3).

Es una solución que oscila en el espacio fase, con un factor de frenado exponencial, hasta llegar al origen, por lo que vemos que la solución efectivamente es estable.

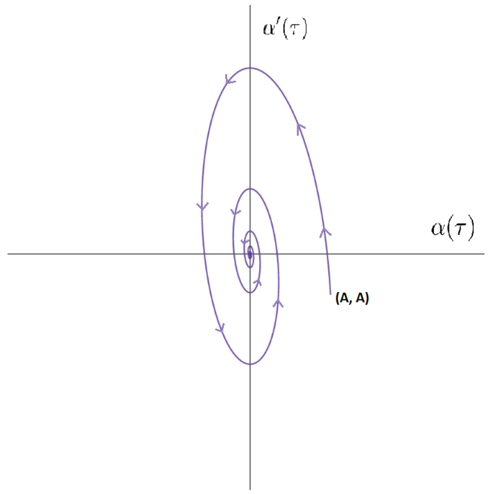

Figura 6.3: Estabilidad de solución, eigenvalores complejos y distintos

Finalmente para el caso (iii) en donde solo hay un eigenvalor ya que el discriminante se hace cero tenemos que la solución y su derivada es

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= Ae^{\lambda\tau} = Ae^{-\frac{\tau}{2}} \\ \alpha'(\tau) &= -\frac{A}{2}e^{-\frac{\tau}{2}} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Tenemos una gráfica similar al caso en qué hicimos una constante cero (6.1), con una pendiente distinta. La gráfica de este último caso es (6.4)

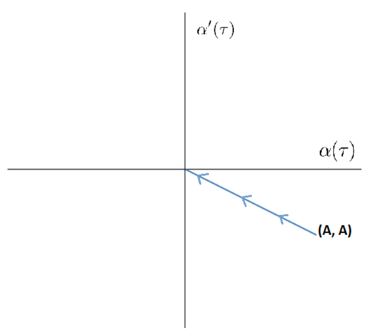

Figura 6.4: Estabilidad de solución, eigenvalor único

Entonces la función $f_2(r)$ da distintos tipos de estabilidad según su valor, que depende de la distancia física al punto fijo (recordemos estos puntos ocurren en $\alpha(r) = 2\pi n$). En los tres casos es estable si para el caso (i) cuando sale un eigenvalor positivo, requerimos que esa parte de la solución sea cero.

Además requerimos que A_i sea regular en $r = 0$, lo cual implica que $\alpha(r)$ sea un múltiplo de π cuando r se va a cero, y que tienda a cero cuando r tiende a infinito. La condición en infinito implica que $f_2(r)$ es del orden de r en el origen y en infinito, puede tender a alguna constante o a cero; se le llama condición de borde débil a la primera y condición de borde fuerte a la segunda [15]. En el caso de la condición de borde fuerte la función f_2 puede tener la forma

$$f_2(r) = Cre^{-r} \tag{6.26}$$

donde C es constante.

Ahora continuaremos con el estudio de la teoría cuantizada, donde ya se fijó la norma, sin embargo aun hay cierta libertad en las transformaciones de norma que se pueden hacer y seguir dejando la teoría invariante, pues fijar la norma no está limitando a solo un posible valor para los campos (aunque con ello fue suficiente para no contar de más en la integral de trayectoria), es lo que veremos con la simetría de BRST.

Capítulo 7

Simetría BRST

La transformación BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) [4] [5] deja invariante a la teoría de norma con los fantasmas incluidos (deja invariante al Lagrangiano), esto es, una simetría de la teoría. Esta transformación es una transformación norma para el campo de norma y el fermiónico y cierta transformación de los fantasmas, como veremos en un momento. El punto de esta transformación es relacionar los fantasmas y los campos de norma longitudinales entre sí de forma que siempre se cancelen unos con otros de todos los procesos físicos, resultando en una teoría con solo los estados físicos.

Consideremos el lagrangiano de la QCD

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{phys} + \mathcal{L}_{gf+gh}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{phys} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_s \bar{\psi}_s(i\not{D} + m_s)\psi^s \\ \mathcal{L}_{gf+gh} &= \partial_\mu \bar{c}^a \bar{D}_\mu c^a + \frac{1}{2\lambda}(b^a)^2 - b^a(\partial^\mu A^a_\mu) \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde b^a son campos auxiliares que serán integrados; es una forma equivalente a la de (5.14) para escribir el término que fija la norma en el Lagrangiano. Para $\lambda \to \infty$ los términos de los campos auxiliares nos dan multilpicadores de Lagrange (esto es la norma de Landau), mientras que para otro λ, los términos son eliminados por su ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\left(\frac{1}{2\lambda}(b^a)^2 - b^a(\partial^\mu A^a_\mu)\right) &= \frac{1}{2\lambda}2b^a\delta b^a - \delta b^a(\partial^\mu A^a_\mu) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}b^a - \partial^\mu A^a_\mu\right)\delta b^a \\ \Rightarrow \qquad b^a &= \lambda\partial^\mu A^a_\mu \end{aligned}$$

Por lo que la parte que fija la norma queda como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\lambda}(b^a)^2 - b^a(\partial^\mu A^a_\mu) &= \frac{1}{2\lambda}(\lambda\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \lambda\partial^\mu A^a_\mu(\partial^\mu A^a_\mu)\\ &= -\frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A^a_\mu)^2\end{aligned}$$

recuperando así el Lagrangiano (5.14) conocido anteriormente. Los campos fantasma y antifantasma no son antipartículas uno del otro, sin embargo, tienen cargas opuestas bajo una simetría global del grupo U(1):

$$\begin{aligned}c^a(x) &\to e^{i\theta}c^a(x)\\ \bar{c}^a(x) &\to \bar{c}^a(x)e^{-i\theta}\end{aligned} \tag{7.2}$$

y los demás campos sin cambio. A la carga conservada correspondiente a esta transformación se le llama *número de fanstasma*, denotado por $\mathcal{G}$.

Ahora vamos a introducir una transformación de norma para el campo de norma y el fermiónico, donde el parámetro de norma es dado por $\alpha^a = -i\varepsilon c^a(x)$, los fanstasmas transforman de cierta forma:

$$\begin{aligned}\delta\psi^{si}(x) &= \varepsilon\{Q,\psi^{si}(x)\} = \varepsilon g c^a(T^a)^i_j\psi^{sj}(x)\\ \delta\bar{\psi}_{si}(x) &= \varepsilon\{Q,\bar{\psi}_{si}(x)\} = \varepsilon g\bar{\psi}_{sj}(T^a)^j_i c^a(x)\\ \delta A^a_\mu(x) &= \varepsilon[Q,A^c_\mu(x)] = i\varepsilon(\bar{D}_\mu c)^a = i\varepsilon(\partial_\mu c^a - gf^{abc}A^b_\mu c^c)\\ \delta c^a(x) &= \varepsilon[Q,c^a(x)] = i\varepsilon g f^{abc}c^b c^c\\ \delta\bar{c}^a(x) &= \varepsilon\{Q,\bar{c}^a(x)\} = -i\varepsilon b^a\\ \delta b^a(x) &= \varepsilon[Q,b^a(x)] = 0\end{aligned} \tag{7.3}$$

donde ε es un número de Grassmann. Esta es la transformación de BRST y Q es la carga asociada a ésta [2]; Q es el operador fermiónico que genera la simetría BRST. Bajo el grupo U(1), Q tiene un número de fanstasma $\mathcal{G} = 1$. Como mencionamos anteriormente, vemos que mediante esta transformación los campos de norma, fermiónico y fanstasma están relacionados entre sí. Notemos que el parámetro ε es independiente de x, así la simetría BRST es una simetría global y no local.

Ahora vamos a cambiar a trabajar con las matrices, en vez de las componentes que multiplican a los generadores, y absorberemos a la constante de acoplamiento g en estas matrices. Es decir,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= g\psi(x)\\ \bar{\psi}(x) &= g\bar{\psi}(x)\\ A_\mu(x) &= gA^a_\mu(x)T^a\\ c(x) &= gc^a(x)T^a\\ \bar{c}(x) &= g\bar{c}^a(x)T^a\\ B(x) &= gb^a(x)T^a\end{aligned} \tag{7.4}$$

Entonces las derivadas covariantes y $F_{\mu\nu}$ quedan como

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &= \partial_\mu\psi(x) + iA_\mu(x)\psi(x) \\ \bar{D}_\mu c(x) &= \partial_\mu c(x) + i[A_\mu(x), c(x)] \\ F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] \end{aligned} \tag{7.5}$$

El Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{phys} &= -\frac{1}{2g^2} tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\not{D} + m_s)\psi \\ \mathcal{L}_{gf+gh} &= \frac{2}{g^2} tr\left(\partial_\mu\bar{c}\ \bar{D}^\mu c + \frac{1}{2\lambda}B^2 - B\partial^\mu A_\mu\right) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Y la transformación de BRST es

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= \varepsilon\{Q, \psi(x)\} = \varepsilon c(x)\psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) &= \varepsilon\{Q, \bar{\psi}(x)\} = \varepsilon\bar{\psi}(x)c(x) \\ \delta A_\mu(x) &= \varepsilon[Q, A_\mu(x)] = i\varepsilon\bar{D}_\mu c(x) \\ \delta c(x) &= \varepsilon\{Q, c(x)\} = \varepsilon c(x)c(x) \\ \delta\bar{c}(x) &= \varepsilon\{Q, \bar{c}(x)\} = -i\varepsilon B(x) \\ \delta B(x) &= \varepsilon[Q, B(x)] = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Como la transformación de BRST es una transformación de norma, el Lagrangiano físico $\mathcal{L}_{phys}$ es invariante, por lo que

$$[Q, \mathcal{L}_{phys}] = 0 \tag{7.8}$$

También la otra parte del Lagrangiano es invariante ante la transformación BRST, pero para probar eso, antes veremos que el operador de BRST, Q, es nilpotente.

Para ello, primero mostraremos que Q^2 conmuta con todos los campos. Por la identidad de Jacobi esto es equivalente a

$$\{Q, [Q, campo\ bosónico]\} = 0, \qquad [Q, \{Q, campo\ fermiónico\}] = 0 \tag{7.9}$$

para cualesquiera campos bosónicos o fermiónicos. Vamos a comprobar que se cumple para todos los campos de la teoría usando (7.7). Para los campos bosónicos del Lagrangiano; B, A_μ, tenemos

$$\{Q, [Q, B]\} = \{Q, 0\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{Q, [Q, A_\mu]\} &= \{Q, i\bar{D}_\mu c\} \\ &= i\{Q, \partial_\mu c + i[A_\mu, c]\} \\ &= i\partial_\mu\{Q, c\} - \{Q, [A_\mu, c]\} \\ &= i\partial_\mu(cc) - \{Q, [A_\mu, c]\} \end{aligned}$$

El anticonmutador del segundo término es

$$
\begin{aligned}
\{Q,[A_\mu,c]\} &= QA_\mu c - QcA_\mu + A_\mu cQ - cA_\mu Q \\
&= QA_\mu c - (cc - cQ)A_\mu + A_\mu(cc - Qc) - cA_\mu Q \\
&= (QA_\mu - A_\mu Q)c + (A_\mu cc - ccA_\mu) + c(QA_\mu - A_\mu Q) \\
&= [Q,A_\mu]c + [A_\mu,cc] + c[Q,A_\mu] \\
&= i(\bar{D}_\mu c)c + [A_\mu,cc] + ic\bar{D}_\mu c \\
&= [A_\mu,cc] + i\{\bar{D}_\mu c,c\}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\{Q,[Q,A_\mu]\} &= i\partial_\mu(cc) - [A_\mu,cc] - i\{\bar{D}_\mu c,c\} \\
&= \partial_\mu(cc) + i[A_\mu,cc] - \{\bar{D}_\mu c,c\} \\
&= \bar{D}_\mu(cc) - \{\bar{D}_\mu c,c\} \\
&= (\bar{D}_\mu c)c + c\bar{D}_\mu c - \{\bar{D}_\mu c,c\} \\
&= \{\bar{D}_\mu c,c\} - \{\bar{D}_\mu c,c\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para los campos fermiónicos del Lagrangiano; $\bar{\psi}$, ψ, $\bar{c}$, c, usando la identidad $[A,BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
[Q,\{Q,\bar{\psi}\}] &= [Q,c\psi] \\
&= \{Q,c\}\psi - c\{Q,\psi\} \\
&= cc\psi - cc\psi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q,\{Q,\bar{\psi}\}] &= [Q,\bar{\psi}c] \\
&= \{Q,\bar{\psi}\}c - \bar{\psi}\{Q,c\} \\
&= \bar{\psi}cc - \bar{\psi}cc \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q,\{Q,c\}] &= [Q,cc] \\
&= \{Q,c\}c + c\{c,Q\} \\
&= ccc - ccc \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
[Q,\{Q,\bar{c}\}] = [Q,-iB] = -i[Q,B] = 0
$$

Como Q^2 conmuta con todos los campos de la teoría, en el espacio de Hilbert de la teoría, este operador se anula o actúa como una constante. Pero el número de fantasma de Q^2 es distinto de cero, por lo que éste no puede actuar como una constante. En consecuencia tenemos que el operador de BRST es nilpotente: $Q^2 = 0$.

Para mostrar la invariancia del Lagrangiano (7.6) ante la tranformación BRST, mostraremos que la parte que fija la norma y la parte de los fantasmas la podemos escribir como

$$\mathcal{L}_{gf+gh} = \{Q, Z\} \tag{7.10}$$

para algún operador fermiónico Z. Esto es equivalente a mostrar la invariancia ya que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{gf+gh} &= [Q, \mathcal{L}_{gf+gh}] \\
&= [Q, \{Q, Z\}] \\
&= [Q, QZ] + [Q, ZQ] \\
&= QQZ - QZQ + QZQ - ZQQ \\
&= Q^2 Z - ZQ^2 \\
&= [Q^2, Z] \\
&= 0
\end{aligned}$$

gracias a que Q es nilpotente. Para ver que podemos escribir a la parte del lagrangiano como $\{Q, Z\}$, tomemos

$$Z = \frac{2i}{g^2} tr\left(\bar{c}\left(\frac{1}{2\lambda}B - \partial^\mu A_\mu\right)\right) = tr(\bar{c}E) \tag{7.11}$$

donde definimos

$$E \equiv \frac{2i}{g^2}\left(\frac{1}{2\lambda}B - \partial^\mu A_\mu\right) \tag{7.12}$$

Entonces, al anticonmutar con Q,

$$\begin{aligned}
\{Q, Z\} &= \{Q, tr(\bar{c}E)\} \\
&= tr\{Q, \bar{c}E\} \\
&= tr(Q\bar{c}E + \bar{c}EQ) \\
&= tr(Q\bar{c}E + \bar{c}QE - \bar{c}QE + \bar{c}EQ) \\
&= tr(\{Q, \bar{c}\}E - \bar{c}[Q, E]) \\
&= tr(-iBE - \bar{c}[Q, E])
\end{aligned}$$

El conmutador en esta expresión resulta

$$\begin{aligned}
[Q, E] &= \left[Q, \frac{2i}{g^2}\left(\frac{1}{2\lambda}B - \partial^\mu A_\mu\right)\right] \\
&= \frac{2i}{g^2}\left(\frac{1}{2\lambda}[Q, B] - \partial^\mu [Q, A_\mu]\right) \\
&= \frac{2i}{g^2}\left(0 - i\partial^\mu D_\mu c\right) \\
&= \frac{2}{g^2}\partial^\mu D_\mu c
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\{Q, Z\} &= tr\left(-iB\left[\frac{2i}{g^2}\left(\frac{1}{2\lambda}B - \partial^\mu A_\mu\right)\right] - \frac{2}{g^2}\bar{c}\partial^\mu D_\mu c\right)\\ &= \frac{2}{g^2}tr\left(B\left(\frac{1}{2\lambda}B - \partial^\mu A_\mu\right) - \bar{c}\partial^\mu D_\mu c\right)\end{aligned}$$

Integrando por partes el último término,

$$\{Q, Z\} = \frac{2}{g^2}tr\left(\frac{1}{2\lambda}B^2 - B\partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \bar{c} D_\mu c\right) \tag{7.13}$$

que es justamente la expresión que tenemos para $\mathcal{L}_{gf+gh}$ en (7.6), por lo tanto hemos probado que la transformación BRST deja invariante a la acción $S = \int d^4x\mathcal{L}$.

Ya hemos visto que el operador de BRST es nilpotente y la acción (7.6) es invariante ante la transformación BRST. Ahora veremos como es que esta transformación funciona para identificar los estados físicos de los no físicos, como podrían ser estados con fantasmas. Para ello encontraremos una condición que nos permita separar el subconjunto de estados físicos, V_{phys}, de todos los estados en el espacio de Fock V.

Como hemos visto, la tranformación de BRST es una tranformación de norma que involucra a los fantasmas, entonces para obtener los estados físicos lo que queremos es quedarnos con los estados que son invariantes ante esta transformación. Es decir, seleccionar a los estados aniquilados por la carga Q, aunque simplemente seleccionar todo ese conjunto puede quedar aun con estados no físicos. Para seleccionar solo los estados físicos notemos los siguiente.

Un operador que es nilpotente y conmuta con el Hamiltoniano H, divide a los eigenestados de H en tres: H_1, el subespacio de estados que no son aniquilados por Q, H_2, el conjunto de estados de la forma

$$|\psi_2\rangle = Q|\psi_1\rangle, \tag{7.14}$$

donde $|\psi_1\rangle$ está en H_1 (notemos que todos los estados en H_2 son aniquilados por Q debido a la nilpotencia del operador) y H_0, que es el conjunto de estados $|\psi_0\rangle$ que satisfacen $Q|\psi_0\rangle = 0$ pero que no se pueden escribir como (7.14).

Entonces, como dijimos, podríamos pensar en considerar solo los estados en H_0 y H_2, es decir, todos los que cumplen $Q|\psi\rangle = 0$, pero es una constricción muy fuerte y puede llevar a que se rompa la invariancia de Lorentz, lo cual no es bueno. Los estados físicos son los de H_0, aquellos que son eliminados por el operador de BRST pero no se pueden escribir como (7.14). Esto es el espacio cociente

$$H_{phys}(M) = \frac{Ker(Q)}{Im(Q)} = H_0, \tag{7.15}$$

donde $Ker(Q)$ es el núcleo del operador Q, es decir, todos los estados en H_0 y H_2. $Im(Q)$ la imagen de Q, es decir, los estados en H_2. Este espacio cociente es llamado *espacio de cohomología BRST*, el espacio donde se encuentran los estados físicos de la teoría. Realmente, todos los estados que difieren por un elemento en el kernel de Q pertenecen al mismo estado físico ya que, si $|\psi\rangle = |\psi'\rangle + Q|\phi\rangle$ está en el kernel de Q,

$$0 = Q|\psi\rangle = Q(|\psi'\rangle + Q|\phi\rangle) = Q|\psi'\rangle + Q^2|\phi\rangle = Q|\psi'\rangle$$

Así, $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ pertenecen a la misma clase de equivalencia, correspondiendo al mismo estado físico.

Para comprender más esto, veamos un ejemplo de cohomología en la mecánica clásica. Consideraremos formas locales en $\mathbb{R}$ en una variedad M, esto es, que los campos de la variedad solo dependan de una variable, t, que elijamos. La 1-forma que tomaremos será expresada como

$$\omega = L(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, ...)dt$$

Podemos tomar por ejemplo,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= L_1 dt = \frac{1}{2}\dot{q}^2 dt \\ \omega_2 &= L_2 dt = \dot{q}q\ dt \end{aligned}$$

Tomando la derivada exterior de estas 1-formas obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(L_1 dt) = dL_1 \wedge dt + L_1 \wedge d(dt) = dL_1 \wedge dt = d\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2\right) \wedge dt \\ d\omega_2 &= d(L_2 dt) = dL_2 \wedge dt + L_2 \wedge d(dt) = dL_2 \wedge dt = d(\dot{q}q) \wedge dt \end{aligned}$$

Las derivadas exteriores en estas expresiones son

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2\right) dt = \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{q}^2}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} dt = \dot{q}\ddot{q}\ dt \\ d(\dot{q}q) &= \frac{\partial}{\partial t}(\dot{q}q)dt = (\dot{q}^2 + q\ddot{q})dt \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \dot{q}\ddot{q}\ dt \wedge dt = 0 \\ d\omega_2 &= (\dot{q}^2 + q\ddot{q})dt \wedge dt = 0 \end{aligned}$$

ya que el producto $\wedge$ es antisimétrico. La derivada total de estas dos 1-formas es cero, es decir, son cerradas. Veamos si estas 1-formas son o no exactas, es decir que se puedan escribir como la derivada exterior de alguna 0-forma (una función) o no, respectivamente. Al aplicar el operador de Euler Lagrange sobre L_1 y L_2 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_1}{\delta q} &= \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right)\frac{1}{2}\dot{q}^2 = 0 - \ddot{q} = -\ddot{q} \\ \frac{\delta L_2}{\delta q} &= \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}q = \dot{q} - \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

Se tiene que el operador de Euler-Lagrange al ser aplicado sobre una derivada total resulta cero (demostrado abajo en la demostración A), así que cualquier resultado distinto de cero al aplicar el operador de Euler-Lagrange nos indica que la expresión a la que se está aplicando no es una derivada total. Entonces ω_1 no se puede escribir como una derivada de una función, mientras que ω_2 es exacta ya que en efecto es la derivada exterior de una función; $\omega_2 = d\left(\frac{1}{2}q^2\right)$. Así, el primer grupo de cohomología $H^1(M)$, que es el grupo de 1-formas que son cerradas pero no exactas:

$$H^1(M) = \frac{B^1(M)}{Z^1(M)}$$

es no trivial porque ω_1 forma parte de él. (B^1 es el espacio de 1-formas exactas y Z^1 el espacio de 1-formas cerradas). Por esto L_1 resulta ser una manera correcta para escribir el término de energía cinética del Hamiltoniano.

Demostración A

Consideremos una función F que dependa de q^j y t, de tal forma que su derivada total (con respecto al tiempo) tenga dependencia en q^j, $\dot{q}^j$, y t:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Al aplicar el operador de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta F}{\delta q^i} = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial t}\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial q^j}\delta^i_j + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}^i \partial t}\right) \tag{7.16}$$

Los términos que tienen derivadas con respecto a $\dot{q}^i$ son cero ya que F no tiene dependencia es esta variable. El término restante entre paréntesis es

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^i} = -\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{dF}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial t}$$

Estos términos se cancelan con los dos primeros de (7.16), resultando así que

$$\frac{\delta F}{\delta q^i} = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{dF}{dt} = 0 \tag{7.17}$$

Capítulo 8

Identidades de Slavnov Taylor

En esta sección desarrollaremos las identidades de Ward para teorías de norma no abelianas, a las cuales se les nombra *identidades de Slavnov-Taylor*. Utilizaremos el procedimiento análogo al de la sección 4.2.

Desarrollaremos estas identidades para la parte de la teoría del campo de norma y los fantasmas. Entonces consideramos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{gf+gh} \\ \mathcal{L}_{gf+gh} &= \partial_\mu \bar{c}^a \bar{D}_\mu c^a + \frac{1}{2\lambda}(b^a)^2 - b^a(\partial^\mu A^a_\mu) \end{aligned} \tag{8.1}$$

La funcional generadora correspondiente es

$$Z[J^{a\mu}, \bar{\xi}^a, \xi^a] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{i\int d^4x[\mathcal{L} + J^{a\mu}A^a_\mu + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a \xi^a]}$$

Además de los términos en la exponencial, vamos a agregar otros dos que tengan la parte con campos de las variaciones de BRST de A^a_μ y c^a (7.3) con sus respectivas fuentes:

$$K_1^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a \qquad y \qquad K_2^a(-gf^{abc}c^b c^c) \tag{8.2}$$

donde K_1 y K_2 son números de Grassmann. Hacemos esto con el objetivo de que al final no queden explícitamente estos factores entre paréntesis que son no lineales en los campos. Entonces la funcional generadora que utilizaremos será

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv Z[J^{a\mu}, \bar{\xi}^a, \xi^a, (\bar{D}_\mu c^a), (-gf^{abc}c^b c^c)] \\ &= \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{i\int d^4x[\mathcal{L} + J^{a\mu}A^a_\mu + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a\xi^a + K_1^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a + K_2^a(-gf^{abc}c^b c^c)]} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Esta Z es equivalente a la anterior ya que la parte física son las funciones de Green que se obtienen de derivar Z con respecto a la fuente de los campos. Con esta nueva Z se obtiene lo mismo que con la anteior cuando derivamos con respecto a la fuente de los campos individuales.

Consideraremos la variación de BRST y veremos como transforma esta funcional; $\mathcal{L}$ es invariante y también los términos $K_1^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a$, $K_2^a(gf^{abc}c^bc^c)$, como vimos antes, cuando demostramos la invariancia de BRST. Los demás términos transforman como

$$\begin{aligned}
J_a^\mu A_\mu'^a &= J_a^\mu\Big(A_\mu^a + i\varepsilon(\bar{D}_\mu c)^a\Big) \\
&= J_a^\mu A_\mu^a + i\varepsilon J_a^\mu(\bar{D}_\mu c)^a \\
&= J_a^\mu A_\mu^a + i\varepsilon J_a^\mu(\partial_\mu c^a - gf^{abc}A_\mu^b c^c) \\
&= J_a^\mu A_\mu^a + i\varepsilon J_a^\mu(\bar{D}_\mu c)^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_a c'^a &= \bar{\xi}_a(c^a + i\varepsilon g f^{abc}c^bc^c) \\
&= \bar{\xi}^a c^a + \bar{\xi}^a i\varepsilon g f^{abc}c^bc^c \\
&= \bar{\xi}^a c^a - i\varepsilon g f^{abc}\bar{\xi}^a c^bc^c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_a'\xi^a &= (\bar{c}_a - i\varepsilon b^a)\xi^a \\
&= \bar{c}_a\xi^a - i\varepsilon b^a\xi^a
\end{aligned}$$

El término con b^a queda igual porque $\delta b^a = 0$. Entonces, si asumimos que la medida de la integral funcional se queda igual ante la transformación, la funcional generadora resulta

$$\begin{aligned}
Z'[J] &= \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(\cdots)} e^{-\varepsilon\int d^4x[J^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a - gf^{abc}\bar{\xi}^a c^bc^c - b^a\xi^a]} \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(\cdots)}\left(1 - \varepsilon\int d^4x\Big[J^{a_\mu}(\bar{D}_\mu c)^a - gf^{abc}\bar{\xi}^a c^bc^c - b^a\xi^a\Big] + \cdots\right) \\
&\approx Z[J] - \varepsilon\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(\cdots)}\int d^4x\Big[J^{a_\mu}(\bar{D}_\mu c)^a - gf^{abc}\bar{\xi}^a c^bc^c - b^a\xi^a\Big]
\end{aligned}$$

donde $e^{(\cdots)} = e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+(t\acute{e}rminos\ con\ fuentes)]}$. Integrando por partes el primer término en la integral sobre x,

$$\begin{aligned}
\int d^4x\ J^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a &= \int d^4x\ J^{a\mu}(\partial_\mu c^a - gf^{abc}A_\mu^b c^c) \\
&= \int d^4x(-c^a\partial_\mu J^{a\mu} - gf^{cba}J^{c\mu}A_\mu^b c^a) \\
&= \int d^4x(-c^a\partial_\mu J^{a\mu} + gf^{abc}J^{c\mu}A_\mu^b c^a) \\
&= -\int d^4x\ c^a(\partial_\mu J^{a\mu} - gf^{abc}J^{c\mu}A_\mu^b) \\
&= -\int d^4x\ c^a(\bar{D}_\mu J^\mu)^a
\end{aligned}$$

Entonces

$$Z'[J] = Z[J] - \varepsilon\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(\cdots)}\int d^4x\Big[c^a(\bar{D}_\mu J^\mu)^a - gf^{abc}\bar{\xi}^a c^bc^c - b^a\xi^a\Big]$$

Como estamos haciendo un cambio de variable en la integral funcional al hacer la variación de BRST, debemos tener que $Z' = Z$. Por lo tanto

$$\int d^4x \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a \Big[c^a(\bar{D}_\mu J^\mu)^a - gf^{abc}\bar{\xi}^a c^b c^c - b^a \xi^a\Big] e^{(\cdots)} = 0 \tag{8.4}$$

Aparte, tenemos que para alguno de los campos, ϕ^a con su respectiva fuente J^a,

$$\phi^a e^{(\cdots)} = \frac{\delta}{i\delta J^a} e^{(\cdots)}, \tag{8.5}$$

con signo menos o derivada derecha cuando hay una variable de Grassmann a la izquierda del campo en la exponencial, en este caso pasa solo para $\bar{c}^a$. Entonces podemos reescribir los términos de (8.4) como

$$\begin{aligned}
-c^a(\bar{D}_\mu J^\mu)^a e^{(\cdots)} &= -c^a(\partial_\mu J^{a\mu} - gf^{abc}A^b_\mu J^{c\mu})e^{(\cdots)} \\
&= -\Big((\partial_\mu J^{a\mu})c^a - gf^{abc}J^{c\mu}c^a A^b_\mu\Big)e^{(\cdots)} \\
&= -\Big(\partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a} - gf^{abc}J^{c\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^a}\frac{\delta}{i\delta J^{b\mu}}\Big)e^{(\cdots)} \\
&= \Big(i\partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^a} - gf^{abc}J^{c\mu}\frac{\delta^2}{\delta\bar{\xi}^a\delta J^{b\mu}}\Big)e^{(\cdots)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-gf^{abc}\bar{\xi}^a c^b c^c e^{(\cdots)} &= -gf^{abc}\bar{\xi}^a c^b \frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^c} e^{(\cdots)} \\
&= +gf^{abc}\bar{\xi}^a \frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^c}\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}^b} e^{(\cdots)} \\
&= +gf^{abc}\bar{\xi}^a \frac{\delta^2}{\delta\bar{\xi}^b\delta\bar{\xi}^c} e^{(\cdots)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-b^a\xi^a e^{(\cdots)} &= -\xi^a \frac{\delta}{i\delta J^a_b} e^{(\cdots)} \\
&= i\xi^a \frac{\delta}{\delta J^a_b} e^{(\cdots)}
\end{aligned}$$

Ya que con esto la única dependencia en los campos está en $e^{(\cdots)}$, las integrales funcionales pueden pasar hasta este factor en cada término, entonces, recordando que $Z[J] = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a e^{(\cdots)}$, podemos reescribir (8.4) como

$$\int d^4x \left\{ \left(i\partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^a} - gf^{abc}J^{c\mu}\frac{\delta^2}{\delta\bar{\xi}^a\delta J^{b\mu}} \right) Z + gf^{abc}\bar{\xi}^a \frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\xi}^b\delta\bar{\xi}^c} + i\xi^a\frac{\delta Z}{\delta J^a_b} \right\} = 0 \tag{8.6}$$

Esta es la identidad de Slavnov-Taylor en términos de Z, vamos a escribirla también ahora en términos de W y Γ. Tenemos definida la funcional generadora de funciones de Green conectadas W definida por $Z[J] = Z[0]e^{iW[J]}$. Con ello escribiremos la ecuación anterior en términos de W. Primero, notemos que para fuentes J^1, J^2 con campos respectivos ϕ^1, ϕ^2 tendremos

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z}{\delta J^1 \delta J^2} &= \frac{\delta}{\delta J^1}\frac{\delta}{\delta J^2} Z[0] e^{iW[J]} \\
&= Z[0]\frac{\delta}{\delta J^1}\left(e^{iW} i \frac{\delta W}{\delta J^2}\right) \\
&= iZ[0]\left(\frac{\delta e^{iW}}{\delta J^1}\frac{\delta W}{\delta J^2} + e^{iW}\frac{\delta^2 W}{\delta J^1 \delta J^2}\right) \\
&= iZ[0]\left(e^{iW} i \frac{\delta W}{\delta J^1}\frac{\delta W}{\delta J^2} + e^{iW}\frac{\delta^2 W}{\delta J^1 \delta J^2}\right) \\
&= Z[0]e^{iW}\left(-\frac{\delta W}{\delta J^1}\frac{\delta W}{\delta J^2} + i\frac{\delta^2 W}{\delta J^1 \delta J^2}\right) \\
&= Z[J]\left(-\frac{\delta W}{\delta J^1}\frac{\delta W}{\delta J^2} + i\frac{\delta^2 W}{\delta J^1 \delta J^2}\right) \\
&\equiv \alpha(J^1, J^2)
\end{aligned}
$$

Usando esto para las segundas derivadas en (8.6), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int d^4x \Big\{ &- Z[J]\partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a} - g f^{abc} J^{c\mu}\alpha(\bar{\xi}^a, J^{b\mu}) + g f^{abc}\alpha(\bar{\xi}^b, \bar{\xi}^c) \\
&+ i\xi^a Z[0]e^{iW} i\frac{\delta W}{\delta J a_b}\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z[J]\int d^4x \Big\{ &- \partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a} - g f^{abc} J^{c\mu}\left(-\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a}\frac{\delta W}{\delta J^{b\mu}} + i\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\xi}^a \delta J^{b\mu}}\right) \\
&+ g f^{abc}\left(-\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^b}\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^c} + i\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\xi}^a \delta \bar{\xi}^c}\right) - \xi^a\frac{\delta W}{\delta J a_b}\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

Entonces llegamos a la identidad de Slavnov-Taylor en términos de W:

$$
\begin{aligned}
\int d^4x \Big\{ &- \partial_\mu J^{a\mu}\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a} - g f^{abc} J^{c\mu}\left(-\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^a}\frac{\delta W}{\delta J^{b\mu}} + i\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\xi}^a \delta J^{b\mu}}\right) \\
&+ g f^{abc}\left(-\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^b}\frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}^c} + i\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\xi}^a \delta \bar{\xi}^c}\right) - \xi^a\frac{\delta W}{\delta J a_b}\Big\} = 0
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

Luego, la acción efectiva estará definida por

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[A^a_\mu, c^a, \bar{c}^a, (\bar{D}_\mu c)^a, (-g f^{abc} c^b c^c)] = W[J^{a\mu}, \bar{\xi}^a, \xi^a, K_1^{a\mu}, K_2^a] \\
&- \int d^4x \Big(J^{a\mu}A^a_\mu + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a \xi^a + K_1^{a\mu}(\bar{D}_\mu c)^a + K_2^a(-g f^{abc} c^b c^c)\Big)
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

donde aquí, para tener más clara la escritura de las ecuaciones, los campos denotan a los campos clásicos, es decir, a sus valores espereados en el vacío.

Notamos de la definición de la acción efectiva que

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^a} = -J^a \qquad y \qquad \frac{\delta W}{\delta J^a} = \phi^a$$

para alguno de los campos ϕ^a con su respectiva fuente J^a. Esto se cumple aun incluyendo los términos con las fuentes $K_1^{a\mu}$ y K_2^a ya que los factores $(\bar{D}_\mu c)^a$ y $(-gf^{abc}c^b c^c)$ son invariantes ante las transformaciones de BRST. Entonces las segundas derivadas de (8.7) son

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\xi}^a \delta J^{b\mu}} &= \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^a}\frac{\delta W}{\delta J^{b\mu}} = \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^a} A_\mu^b = 0 \\
\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\xi}^b \delta\bar{\xi}^c} &= \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^b}\frac{\delta W}{\delta\bar{\xi}^c} = \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^b} c^c = 0
\end{aligned}$$

Con esto la ecuación (8.7) queda

$$\begin{aligned}
\int d^4x \Big\{ -\left[\partial_\mu \left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\right)\right] c^a - gf^{abc}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^c}\right)(-c^a A_\mu^b) \\
+ gf^{abc}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\right)(-c^b c^c) - \left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\right) b^a \Big\} = 0
\end{aligned}$$

$$\int d^4x \Big\{ \left(\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\right) c^a - gf^{abc} A_\mu^b \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^c} c^a + gf^{abc}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} c^b c^c + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a} b^a \Big\} = 0$$

Notamos que en los primero dos términos tenemos la derivada covariante $\bar{D}_\mu$ de $\delta\Gamma/\delta A_\mu^a$, entonces

$$\int d^4x \Big\{ \left(\bar{D}_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\right) c^a - \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}(-gf^{abc}c^b c^c) + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a} b^a \Big\} = 0$$

$$\int d^4x \Big\{ \left(\bar{D}_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\right) c^a - \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a}\right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a} b^a \Big\} = 0$$

Usando que $b^a = \lambda\, \partial^\mu A_\mu^a$,

$$\int d^4x \left\{ \left(\bar{D}_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\right) c^a + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \lambda \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu A_\mu^a \right\} = 0 \tag{8.9}$$

Finalmente, integrando por partes como antes para cambiar sobre qué actúa la derivada covariante, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int d^4x \left\{ -\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\left(\bar{D}_\mu c^a\right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \lambda \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu A_\mu^a \right\} = 0 \\
\int d^4x \left\{ -\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\right) + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \lambda \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu A_\mu^a \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(\Gamma) \equiv \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu A^a_\mu \right\} = 0 \tag{8.10}$$

Esta es la identidad de Slavnov-Taylor en términos de la acción efectiva. Veamos ahora las consecuencias de la identidad (8.10). Tenemos que [8]

$$\begin{aligned}\int d^4y \ \Bigg[&\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu(y)}\frac{\delta}{\delta K_1^{a\mu}(y)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(y)}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu(y)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(y)}\frac{\delta}{\delta K_2^a(y)} \\ &+\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a}\frac{\delta}{\delta c^a(y)} + \lambda\partial^\mu A^a_\mu(y)\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a(y)}\Bigg]\mathcal{P}(\Gamma) = 0\end{aligned} \tag{8.11}$$

Por otro lado, podemos calcular cada término, recordando que las fuentes K_1, K_2 también son de carácter fermiónico, y ver que todos los términos se cancelan entre sí a excepción de uno. Los términos resultan

$$\begin{aligned}&\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta K_1^{b\nu}(y)} \\ &= \int d^4xd^4y\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)A^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)\delta K_1^{a\mu}(x)}\right. \\ &\quad+\frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)\delta c^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)\delta K_2^a(x)} \\ &\quad\left.+\lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu A^a_\mu\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta A^b_\nu(y)} \\ &= \int d^4xd^4y\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)A^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)\delta K_1^{a\mu}(x)}\right. \\ &\quad+\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)\delta c^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^{b\nu}(y)\delta K_2^a(x)} \\ &\quad\left.+\lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\nu(y)\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu A^a_\mu(x) + \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu\frac{\delta A^a_\mu(x)}{\delta A^b_\nu(y)}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta K_2^b(y)} \\ &= \int d^4xd^4y\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_2^b(y)\delta A^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_2^b(y)\delta K_1^{a\mu}(x)}\right. \\ &\quad+\frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_2^b(y)\delta c^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_2^b(y)\delta K_2^a(x)} \\ &\quad\left.+\lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta c^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta K_2^b(y)\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu A^a_\mu(x)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d^4y \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta c^b(y)}\\
&= \int d^4x d^4y \left\{ \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^b(y)\delta A_\mu^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^b(y)\delta K_1^{a\mu}(x)}\right.\\
&\quad + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^b(y)\delta c^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^b(y)\delta K_2^a(x)}\\
&\quad \left. +\lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^b(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^b(y)\delta \bar{c}^a(x)}\partial^\mu A_\mu^a(x)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d^4y\ \lambda\partial^\nu A_\nu^b(y)\frac{\delta\mathcal{P}}{\delta\bar{c}^b(y)}\\
&= \lambda\int d^4x d^4y\ \partial^\nu A_\nu^b(y)\left\{\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}^b(y)\delta A_\mu^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}^b(y)\delta K_1^{a\mu}(x)}\right.\\
&\quad \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}^b(y)\delta c^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a(y)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}^b(y)\delta K_2^a(x)}\\
&\quad \left. +\lambda\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}^b(y)\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu A_\mu^a(x)\right\}
\end{aligned}$$

Algunos términos se van por simetría, como el primero de la primer integral (intercambiando índices el término es igual a su negativo y por tanto es cero), y otros se cancelan entre sí, como por ejemplo el tercer término de la primer integral con el segundo término de la cuarta integral. El único término que sobrevive es el último de la segunda integral, por lo tanto obtenemos con este término que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\int d^4x\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu\frac{\delta A_\mu^a(x)}{\delta A_\nu^b(y)}\\
&= \lambda\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{b\nu}(y)}\int d^4x\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu\ \delta^{ab}\delta_\nu^\mu\delta^4(x-y)\\
&= \lambda\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(y)}\int d^4x\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(x)}\partial^\mu\delta^4(x-y)\\
&= -\lambda\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(y)}\int d^4x\delta^4(x-y)\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(x)}\\
&= -\lambda\int d^4y\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}(y)}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a(y)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando por partes nuevamente,

$$\int d^4x\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} = 0 \tag{8.12}$$

Esto implica que

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a} = \partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} = -\partial^\mu\bar{D}_\mu c^a \tag{8.13}$$

Esta es la ecuación de movimiento cuántica para los fantasmas $\bar{c}^a$, como podemos ver (clásicamente) del lagrangiano (8.1) al integrar por partes el primer término de $\mathcal{L}_{gf+gh}$ y derivar funcionalmente la acción con respecto a $\bar{c}^a$. Entonces hemos obtenido que la ecuación de movimiento del fantasma de Faddeev-Popov es una consecuencia de la identidad de Slavnov-Taylor.

Para simplificar aun más la ecuación de Slavnov-Taylor, vamos a definir

$$\bar{\Gamma} = \Gamma - \frac{\lambda}{2}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^a) \tag{8.14}$$

De esta forma,

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \int d^4x \left[\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_1^{a\mu}} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta c^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_2^a}\right] = 0 \tag{8.15}$$

ya que al derivar $(\partial^\mu A_\mu^a)$ con respecto a cualquier campo que no sea A_μ^a resulta cero. Efectivamente, para el primer término tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_1^{a\mu}} &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\frac{\delta}{\delta A_\mu^a}(\partial^\nu A_\nu^b)^2\right)\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\frac{\delta}{\delta K_1^{a\mu}}(\partial^\nu A_\nu^b)^2\right)\\
&= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\; 2(\partial^\nu A_\nu^b)\partial^\nu\frac{\delta A_\nu^b}{\delta A_\mu^a}\right)\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\int d^4y\; \partial^\mu A_\mu^a\partial^\mu\delta^4(x-y)\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} - \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\int d^4y\; \delta^4(x-y)\partial_\mu\partial^\mu A_\mu^a(y)\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} - \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\partial_\mu\partial^\mu A_\mu^a\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \lambda\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}}\partial^\mu A_\mu^a\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\partial^\mu A_\mu^a
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos la ecuación de movimiento de los fanstasmas. Para el segundo término simplemente tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta c^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_2^a} &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\frac{\delta}{\delta c^a}(\partial^\nu A_\nu^b)^2\right)\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\frac{\delta}{\delta K_2^a}(\partial^\nu A_\nu^b)^2\right)\\
&= \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a}
\end{aligned}$$

Recuperando entonces la identidad de Slavnov-Taylor (8.10). Análogamente a lo anterior, podemos obtener

$$B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} \equiv \frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta}{\delta K_1^{a\mu}} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_1^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta K_2^a} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_2^a}\frac{\delta}{\delta c^a}\right]\bar{\Gamma} = 0 \tag{8.16}$$

[8]. Este nuevo operador B_A tiene la propiedad de que para cualquier funcional T se tiene

$$\begin{aligned} B_A B_A T &= 0 \\ B_A B_A &= 0 \qquad si\ B_A T = 0 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Lo cual es una ecuación de cohomología, similar a lo visto del operador de BRST que también es nilpotente. Esto es importante para la renormalización de la teoría, ya que para que la teoría sea renormalizable es necesario que no hayan anomalías de norma.

8.1. Anomalías

En el procedimiento hicimos la suposición de que la medida de la integral de trayectoria $\mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a$ resultaba invariante bajo el cambio de variable, que en este caso fue la transformación BRST. Se puede mostrar que la transformación BRST en efecto deja invariante la medida, como en [17], y por lo tanto la identidad de Slavnov Taylor es correcta. Sin embargo existen casos donde esto no es cierto, lo cual implica que hay una corriente que no se conserva cuánticamente cuando sí se conserva clásicamente, a esto se le llama una anomalía. Lo importante para que la teoría sea renormalizable y esté bien defnida es que la anomalía no provenga de una transformación de norma, en otro caso es posible que ocurran y no hay problema. Veamos brevemente el ejemplo de cuando sucede una anomalía.

Consideremos el Lagrangiano con la parte del campo de norma y el fermiónico:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{8.18}$$

La transformación que consideraremos será

$$\begin{aligned} \delta\psi &= i\lambda(x)\gamma_5\psi \\ \delta\bar{\psi} &= i\lambda(x)\bar{\psi}\gamma_5 \end{aligned} \tag{8.19}$$

donde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, que claramente, no es de norma. Estas son las transformaciones quirales de los fermiones, y como solo estamos transformando los campos fermiónicos podremos hacer el análisis dejando de lado la parte del campo de norma en el Lagrangiano. Entonces, a primer orden en λ, la transformación del Lagrangiano resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i(\bar{\psi} + i\lambda\bar{\psi}\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu(\psi + i\lambda\gamma_5\psi) - m(\bar{\psi} + i\lambda\bar{\psi}\gamma_5)(\psi + i\lambda\gamma_5\psi) \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \lambda\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu D_\mu\psi - \lambda\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\gamma_5\psi + m\bar{\psi}\psi + 2im\lambda\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ &= \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi\right) - \lambda\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu D_\mu\psi + \lambda\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu D_\mu\psi + 2im\lambda\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ &= \mathcal{L} + 2im\lambda\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

donde usamos que $\{\gamma\mu, \gamma_5\} = 0$. Como podemos ver de la transformación, en caso de que los fermiones sean no masivos, el Lagrangiano se mantiene invariante. Por el teorema de

Noether se tiene una corriente asociada a esta transformación:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi + \bar{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(i\lambda\gamma_5\psi) + (i\lambda\bar{\psi}\gamma_5)(0) \\ &= -\lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \\ &= +\lambda\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \end{aligned}$$

Entonces, usando las ecuaciones de movimiento;

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu(\partial_\mu - iA^a_\mu T^a - m)\psi = 0 \\ i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \bar{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu T^a + m\bar{\psi} = 0 \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \lambda(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma_5\gamma^\mu\psi + \lambda\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \\ &= -\lambda(\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu)\gamma_5\psi + \lambda\bar{\psi}\gamma_5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \\ &= -\lambda(i\bar{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu T^a + im\bar{\psi})\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5(-im\psi - i\gamma^\mu A^a_\mu T^a\psi) \\ &= -2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

Por lo que vemos que, efectivamente, solo si $m = 0$, la corriente se conserva $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Cuando calculamos el cambio que produce esta transformación quiral cuánticamente, es decir, con las integrales funcionales siguiendo el método para obtener las identidades de Ward y de Slavnov-Taylor, vemos que la corriente ya no se conserva (aunque $m = 0$) a causa de que esta transformación introduce un cambio en la medida de la integral. El Jacobiano que introduce esta transformación es [9]

$$J = e^{\frac{i}{16\pi^2}\int dx\beta(x)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}Tr[F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}]}.$$

Con este Jacobiano el valor esperado de la derivada de la corriente tendría un término extra, rompiendo así la simetría quiral a nivel cuántico. Este rompimiento de la simetría no es un problema para que la teoría sea cuantizada ya que no es una anomalía de norma.

En el caso de las identidades de Slavnov-Taylor, en donde sí estamos tratando con una transformación de norma, si no suponemos que no hay anomalías, es decir, que no cambia la medida de la integral, en principio $B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma}$ no es cero directamente como obtuvimos en la ecuación (8.16), sino que

$$\mathcal{P}(\Gamma) = B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} = \Delta + \textit{términos de orden } \hbar\Delta$$

donde Δ es una inserción de ultravioleta e infrarrojo [8]. La identidad de Slavnov-Taylor es $\mathcal{P} = 0$, entonces para ver que efectivamente se cumple la identidad obtenida, se deben eliminar los términos del lado derecho. Si Δ se escribe como la aplicación del operador B sobre otra funcional, se pueden añadir contra-términos al Lagrangiano para que solo queden los términos de orden $\hbar\Delta$, y así recursivamente para tener a cualquier orden que

$$\mathcal{P}(\Gamma) = B_{\bar{\Gamma}}\bar{\Gamma} = 0$$

Por tanto es necesario ver que realmente Δ se puede escribir como la aplicación de B sobre alguna funcional. Si este es el caso, se cumplen las ecuaciones de cohomología (8.17) y se debe ver que la solución trivial, es decir, solo se cumple $B_{\bar{\Gamma}}\Delta = 0$ si Δ se escribe como la aplicación de B sobre alguna funcional. Si no fuera este el caso, habrían soluciones que no se podrían absorber en los contra-términos y sí habrían anomalías.

Para Yang-Mills se puede descomponer Δ, imponer la ecuación de cohomología sobre ésta y obtener que la solución general es efectivamente de la forma $B_{\bar{\Gamma}}l$. Por lo que la teoría resulta renormalizable.

Capítulo 9

Conclusiones

Estudiamos las teorías de norma abelianas y no abelianas, y se estudió su cuantización por el método de integrales de trayectoria. En el capítulo ″cuantización de teorías no abelianas″ se desarrollaron las funcionales generadoras de funciones de Green, Z, las funcionales generadoras de funciones de Green conectadas, W, y la funcional generadora de funciones de Green irreducibles por una partícula (1PI) llamada acción efectiva, Γ. Después se encontró la expresión en términos de valores de expectación para el vértice de la electrodinámica cuántica que incluye dos fermiones y un fotón. Posteriormente se exploraron las consecuencias de la simetría de norma de forma cuántica, obteniendo así las identidades de Ward-Takahashi.

En el siguiente capítulo se trató la cuantización de teorías de norma no ablelianas, cuantizando la teoría con el método de Faddeev-Popov para obtener correctamente la integral de trayectoria correspondiente al campo de norma A_μ^a, de donde surgieron los campos fantasmas, c y $\bar{c}$, al escribir un determinante como una integral de trayectoria sobre éstos. Después, con la funcional generadora Z se calcularon explícitamente los propagadores de la teoría no abeliana: el propagador del campo de norma (gluones para QCD), el propagador de los fantasmas y el propagador de los fermiones (cuarks para QCD). Como último paso en este capítulo se calcularon explícitamente los vértices de la teoría al tomar cada término en el Lagrangiano de interacción, obteniendo así los vértices de: tres gluones, cuatro gluones, gluon-fanstasmas y gluon-cuarks.

Después de esto se desarrolló y analizó con detalle el ejemplo del péndulo de Gribov, donde se tiene una tranformación de norma para un campo en SU(2). Se llegó, mediante la transformación para los campos no perturbativa (ecuación (2.6)) e imponiendo la norma de Lorentz, a la condición que debe cumplir la magnitud del parámetro de norma, $\alpha(r)$. Para obtener una solución analítica se aproximó la ecuación para α pequeño alrededor de los puntos fijos del espacio fase (α, α'). Se obtuvieron entonces los eigenvalores y soluciones correspondientes. Con ello se analizó la estabilidad y el tipo de estabilidad de la solución según los eigenvalores, que resultaron depender de un parámetro $f_2(r)$:

(i) Los eigenvalores resultaron reales y distintos si $f_2 > -9/16$. Aquí puede ser que ambos eigenvalores sean negativos en cuyo caso se obtuvo la curva en el espacio fase de la figura

(6.1). En caso de que un eigenvalor resulte positivo y otro negativo es necesario eliminar la parte de la solución con el eigenvalor positivo para que ésta sea estable, esto haciendo cero la constante que acompaña a esta parte de la solución, y en este caso la curva tiende al origen del espacio fase de forma lineal (figura 6.2).

(ii) Los eigenvalores son complejos y distintos si $f_2 < -9/16$. En este caso la solución oscila tanto para α como para α' y entonces la curva en el espacio fase es una espiral (figura 6.3).

(iii) Se tiene un solo eigenvalor cuando $f_2 = -9/16$. En este caso la solución tiende al centro del espacio fase de forma lineal como se muestra en la figura (6.4).

Además se requiere que el campo de norma sea regular en el origen espacial, $r = 0$, lo cual implica que α tienda a un múltiplo de π cuando r tiende a cero y que tienda a cero cuando r tiende a infinito. Esto implica que $f_2(r)$ debe ser de orden r en cero y en infinito tender a cero (condición de borde fuerte) o a una constante (condición de borde fuerte). En el caso en que α tiende a cero en infinito podemos entonces decir que f_2 es de la forma

$$f_2(r) = Cre^{-r}$$

donde C es constante. Cumpliendo así la condición de borde fuerte y teniendo los distintos tipos de estabilidad discutidos anteriormente.

En el capítulo siguiente se trató la simetría de BRST, que es una simetría de norma que relaciona a los fanstasmas con los otros campos. Se mostró la invariancia del Lagrangiano ante esta simetría y se probó también que el operador que genera la transformación de BRST Q; la carga de BRST, es nilpotente, es decir $Q^2 = 0$.

En el último capítulo se llegó a las identidades de Slavnov-Taylor que son la generalización de las identidades de Ward-Takahashi para el caso no abeliano, usando la parte del Lagrangiano corrrespondiente al campo de norma y los fantasmas. En términos de la acción efectiva se llegó a la expresión

$$\mathcal{P}(\Gamma) \equiv \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu} \frac{\delta\Gamma}{\delta K_1^{a\mu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta K_2^a} + \lambda \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^a} \partial^\mu A^a_\mu \right\} = 0$$

Se llegó a estas identidades mediante el método utlizado para la derivación de las identidades de Ward-Takahashi en el capítulo 4, bajo la suposición de que no hubieran anomalías. De la identidad se obtuvo como una consecuencia la ecuación de movimiento general de los fantasmas, es decir, en términos de la acción efectiva. Finalmente se revisó brevemente sobre anomalías, que son el rompimiento de una simetría al cuantizar la teoría, y se mostró un ejemplo sobre simetría quiral donde esto ocurre. En el ejemplo, la teoría está bien definida a nivel cuántico, ya que la simetría rota no es de norma y entonces no hay problema al cuantizarla. Sin embargo, es importante que al cuantizar la teoría, las simetrías de norma se mantengan, ya que para que una teoría se pueda renormalizar es necesario que no presente anomalías de este tipo, llamadas anomalías de norma.

Bibliografía

[1] Kleinert, H. *Path Integrals, in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*, World Scientific, 5th ed. 2009, USA.

[2] Henneaux, M., Vergara, J.D., *BRST Formalism and Gauge Invariant Operators: The Example of the Free Relativistic Particle*, Nova Science Publishers Inc, 1992.

[3] R.P. Feynman, Acta Phys.Pol. **XXIV**(1963)697.

[4] C. Becchi, A. Rouet y R. Stora, Phys.Lett. **52B**(1974)344.

[5] I.V. Tyutin, Preprint FIAN (P.N. Lebedev Physical Institute)No.39(1975).

[6] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1992.

[7] F.A. Berezin,The method of second quantization, Academic Press, New York 1966.

[8] A. Rouet, *Some features of recent results in renormalization theory*, Rivista del nuovo cimento **3**(1979)1.

[9] J. D. Vergara, *Notas de Teoría Cuántica de Campos*, 2021.

[10] B. Hatfield, *Quantum field theory of point particles and strings*, CRC Press, 2018.

[11] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, CRC Press, 2018.

[12] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 2010.

[13] V. N. Gribov, *Quantization of non-abelian gauge theories*, Nuclear physics **B1 39**(1978)1.

[14] L. V. Smekal, A. G. Williams y M. Ghiotti, *Gauge fixing and BRST formalism in non-Abelian gauge theories*, 2008.

[15] R. F. Sobreiro y S. P. Sorella, *Introduction to the Gribov Ambiguities In Euclidean Yang-Mills Theories*, 2005.

[16] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, World scientific, 1983.

[17] G. Barnich y M. Henneaux, *Renormalization of Gauge Invariant Operators and Anomalies in Yang-Mills Theory*, Physical review letters **72**(1994)1588.

[18] I. Percival y D. Richards, *Introduction to Dynamics*, Cambridge University Press, 1994.