



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

“FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA”

**MEMBRANAS FLEXO-ELÉCTRICAS FLUCTUANTES EN
MEDIOS VISCOELÁSTICOS: GENERACIÓN DE FLUJO Y
TRANSFERENCIA DE FUERZA**

T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

P R E S E N T A:

ESTEFANIA NAVA RIVERA

DIRECTOR DE TESIS;

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESORES:

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

DR. LUIS ANTONIO TORRES RAMÍREZ

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO 05 de abril del 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE**

Comunico usted que la alumna **Estefania Nava Rivera** con número de cuenta 314244411 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado en el mes de agosto de 2022 para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García
Suplente:	M. en C. Doctorante Luis Antonio Ramírez Torres
Suplente:	Dra. Guadalupe Salinas Juárez

El título de la tesis que se presenta es: “Membranas flexo-eléctricas fluctuantes en medios viscoelásticos: generación de flujo y transmisión de fuerza”.

Opción de Titulación:	Tesis convencional
Director de tesis:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Asesor de tesis:	Dr. Fausto Calderas García
Asesor de tesis:	M.C. Doctorante Luis Antonio Torres Ramírez

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN115919>> <<Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE116519>> << Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE105919>> << Material didáctico, aula virtual y blog para apoyo de las asignaturas de matemáticas I y II de la carrera de Ingeniería Química >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Facultad de Estudios Superiores Zaragoza agradezco mi gran universidad que me abrió las puertas al conocimiento, a un sin fin de gratas experiencias, dónde me permitió conocer a mis grandes profesores y a mis mejores amigos hoy colegas. Mi universidad donde pude adquirir grandes conocimientos para mi desarrollo profesional.

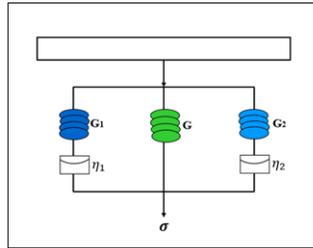
DEDICATORIAS

- Dedicado a mi madre Angelina Rivera Almaraz y a mi padre Daniel Nava Zavala, por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida, que ayudaron a la realización de uno de mis mayores sueños, depositando en mí sus esfuerzos, esperanzas, amor y sabiduría.
- A mis padrinos Reyna y Juan, que siempre creyeron en mí, me brindaron todo su cariño y apoyo moral, enseñándome que todas las oportunidades brindadas en la vida tienen que aprovecharse, y luchar, esforzándose día a día por las que no se tienen.
- Dedico a mi director de tesis el Dr. Edtson, por su constante apoyo en mi desarrollo y formación académica, así como también su apoyo moral, por las oportunidades brindadas, por sus buenas enseñanzas y por alentarme a quitarme el miedo de ir por mis metas.
- A todos los profesores que, a lo largo de toda mi formación académica desde la primaria, secundaria, preparatoria y universidad, pusieron su grano de conocimiento y esfuerzo para que esto fuera posible.
- Dedico a mis amigos de la facultad, en especial a los de la carrera de Ingeniería Química con los que pude compartir gran diversidad de conocimientos, experiencias y momentos muy agradables que hicieron mi trayectoria universitaria más amena. También me enseñaron que sin importar el lugar de donde vengas, puedes lograr lo que te propongas.
- A Yael Sandoval por brindarme siempre su amistad sincera desde el primer semestre, que soportó muchas veces mi llanto cuando me fue mal, por darme alegría y compañía cálida en la Universidad, que nunca me dejó sola ni en mis momentos de debilidad y me vio crecer en madurez, seguridad y amor, por eso y por tantos momentos de alegría en las quesadillas.

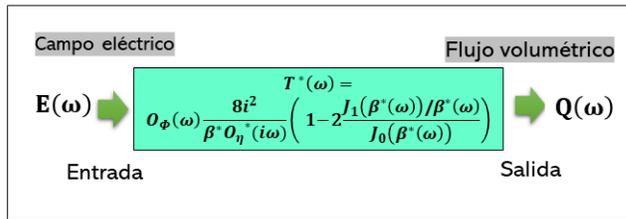
ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Introducción.....	7
1.1 Preliminares	8
1.2 Antecedentes	9
Hipótesis	10
Objetivos de la investigación.....	10
CAPÍTULO 2. Marco Teórico.....	12
2.1 Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en capilar	13
2.2 Flujo Volumétrico en Corona Circular	20
CAPÍTULO 3. Problema físico.....	25
3.1 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en un	27
capilar.....	27
3.2 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en una corona circular	35
CAPÍTULO 4. Variables, Grupos y Modelo de Burgers Modificado Adimensional ...	42
4.1 Números Adimensionales	43
4.2 Representación mecánica del modelo reológico.....	46
4.3 Deducción del Operador de Burgers Modificado	47
CAPÍTULO 5. Simulaciones.....	55
5.1 Función de Transferencia Compleja Newtoniano Modelo Capilar	56
5.2 Función de Transferencia Compleja para Modelo De Burgers Modificado en Capilar	57
CAPÍTULO 6. Conclusiones y Trabajo a Futuro.....	60
6.1 Análisis de resultados y conclusiones.....	61
6.2 Trabajo futuro	62
Bibliografía	64

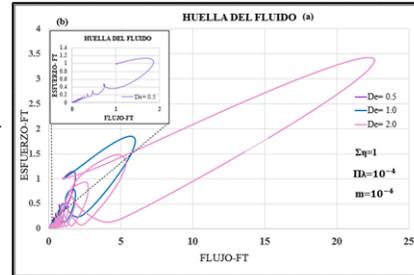
I. Red Mecánica



II. Función de Transferencia



III. Funcionalidad



Resumen

El primer punto es el modelo mecánico del sistema, el segundo punto, está relacionado con las funciones de transferencia y el último con los diagramas del dispositivo que relaciona la interacción fuerza motriz, flujo volumétrico y fuerza motriz disipación viscoelástica (Esfuerzo en la pared).

Palabras claves

Flujo Cortante Simple, modelo de Burgers Modificado, Flujo pulsátil, Permeabilidad dinámica (Función de Transferencia), membrana flexo eléctrica, Fluido Viscoelástico, Modelo Capilar, Operador de Burgers Modificado.

CAPÍTULO 1. Introducción

1.1 Preliminares

Los sistemas de fenómenos de transporte en donde una fuerza se somete a una fuerza periódica se presentan en los medios porosos, flujos pulsátiles de sistemas tensoactivos, flujo pulsátil sanguíneo con diferentes patologías (diabetes, hipercolesterolemia, cirrosis hepática) sistemas biológicos en donde se produce super fibras y amplificadores biológicos como las células ciliadas externas, que son las responsables de amplificar el sonido en el cuerpo humano. En este trabajo y con fines prácticos se presentará la solución de un problema en coordenadas cilíndricas el cual será añadido a la serie de problemas que se están investigando y que servirán para problema ríos y libros del departamento.

Un fluido viscoelástico es aquel que tiene comportamiento tanto de líquido como de sólido, y por lo tanto, presenta las propiedades de ambos. Se le considera un tipo de fluido dependiente del tiempo, no-newtoniano, sus moléculas deformadas son impulsadas por movimientos térmicos para regresar a su estado no deformado, lo que proporciona al cuerpo líquido una recuperación elástica. El modelo de Maxwell relaciona este fluido con la ley de Newton y la Ley de Hooke, considerando que tiene contribuciones elásticas y viscosas.

La permeabilidad es el termino asociado a la conductividad del medio poroso con respecto a un fluido y nos indica que tan fácilmente fluye un fluido a través de un medio poroso. **(J.A. del Río y Castrejón Pita, 2002)**. Se considera como una medida de la resistencia al flujo, cuanto mayor es la permeabilidad dinámica, menor es la resistencia al flujo.

El término permeabilidad intrínseca, sólo mide la resistencia que ofrece la geometría del medio al fluido, sin considerar las propiedades del fluido ya que aplica en fluidos newtonianos donde su viscosidad no varía con el tiempo.

La permeabilidad real o de Darcy, es una propiedad que relaciona tanto el medio geométrico como información del fluido confinado. Aplica en fluidos viscoelásticos no-newtonianos. La ecuación básica de Hagen y Poiseuille lo describe relacionando un gradiente de presión con el flujo volumétrico. **(Colleparado-Guevara y Corvera Poiré, 2007.)**

La oclusión periférica ocurre cuando en las paredes de un tubo se han absorbido internamente minerales que se depositan en las paredes de la geometría del sistema de interés y el fluido circula a través de un tubo que tiene efectivamente un radio más pequeño; puede ser causada por altos niveles de colesterol en sangre (hipercolesterolemia) o por fluidos altamente alcalinos (incrustaciones). Mientras que en una oclusión central el líquido debe fluir entre las paredes de un tubo y un obstáculo en su interior, por ejemplo, un coágulo sanguíneo que puede modelarse como un fluido entre dos tubos concéntricos. **(Bird et al. 2002; Colleparado-Guevara y Corvera Poiré, 2007.)**

Ahora bien, se ha demostrado que, al deformar el fluido con un gradiente de presión en función de una frecuencia maximizada adecuada, aumenta la permeabilidad real y, en consecuencia, la magnitud del flujo del fluido viscoelástico que sufre alguna obstrucción aumenta recuperándose considerablemente. Esto indica que se puede controlar la magnitud del flujo con una frecuencia de presión adecuada. **(Colleparado-Guevara y Corvera Poiré, 2007.)**

Células ciliadas externas

Este proyecto, versa en el estudio de las células ciliadas externas (CCE), se encuentran en el oído interno y son las causantes de amplificar la información que proviene del sonido que pasa por el sistema auditivo externo e interno respectivamente. Las CCE utilizan un concepto llamado flexo-

electricidad que es la capacidad que tiene un sistema físico de cambiar su curvatura por efecto de una fuente externa, específicamente un campo eléctrico (fuerza por unidad de carga). En particular, la flexo-electricidad aplicada a las membranas biológicas, utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno. Por otra parte, la flexo-electricidad en las membranas timpánicas, es un efecto del acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición. En el régimen lineal el modelo membrano-dinámico que describe la evolución de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado, es de segundo orden en las derivadas temporales de la curvatura promedio y del campo eléctrico y bajo ciertas transformaciones algebraicas, se mapea en modelos tipo Burgers de la mecánica de sólidos [1-4]. La respuesta dinámica del sistema es típica de un oscilador armónico forzado y puede mostrar curvas resonantes en la potencia total. La amplitud, la frecuencia y la anchura de las curvas resonantes en la potencia son de relevancia para el funcionamiento de las células ciliadas externas (CCE), las cuales dependen de la inercia que proviene de las fases viscoelásticas y la relación entre la elasticidad de la membrana y la de los líquidos en contacto [1-4]. El modelo electroreológico no lineal y las aportaciones de este trabajo, contribuyen a la búsqueda constante en el entendimiento de los motores biológicos conocidos como células ciliadas externas (Outer-Hair-Cells), especialmente en el papel fundamental de la deformación de la membrana en la entrega de energía mecánica, a través de electro-motilidad y su conversión en energía dependiente de la frecuencia.

La actual situación de pandemia ha llevado a una preocupación y reflexión de la salud pública debido al coronavirus. Este hecho, implica que todos los recursos se hayan orientado al estudio de nuevas enfermedades y padecimientos que son actualmente una pandemia.

1.2 Antecedentes

En el artículo “Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos”, se propone una expresión analítica para la permeabilidad dinámica en fluidos viscoelásticos maxwellianos. Se modela el sistema circulatorio humano en un tubo recto y la sangre como un fluido maxwelliano, se determinan las resonancias y se encuentra que la frecuencia de bombeo cardíaco natural corresponde a un máximo de permeabilidad viscoelástica. Se modela un gradiente de presión pulsátil (tren de pulsos gaussianos), donde se encuentra que en el incremento de la permeabilidad puede tener un efecto positivo en el flujo medio. (**J.A. del Río y J. R. Castrejón Pita, 2003**).

En el año 2007, Collepardo-Guevara y Corvera Poiré presentan un artículo titulado “Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions” en el cual estudian un fluido viscoelástico mediante el modelo linealizado de maxwell, en simetrías cilíndricas con oclusión central y periférica, impulsado por un gradiente de presión pulsátil, en función de la frecuencia. Donde por medio de la simulación se demuestra que al encontrar un gradiente de presión en función de una frecuencia maximizada adecuada, es posible aumentar la magnitud del flujo y tener una recuperación de hasta un 97%, en comparación con el flujo perdido gracias a las oclusiones en la simetría. (**Collepardo-Guevara y Corvera Poiré, 2007**).

En el artículo “**Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels**” se estudia la condición de no deslizamiento en la ley de Navier, modelando un fluido newtoniano en simetría rectangular (microcanales), y analizando el comportamiento de la permeabilidad dinámica

con respecto a un gradiente de presión variables, en un sistema no estacionario, se concluyó que el deslizamiento en las paredes de la geometría es diferente de cero a escala microscópica, por lo que da una opción diferente a la Ley de Navier. Estos resultados podrían probarse experimentalmente utilizando frecuencias de sonido y PIV. **(M. Castro, E. Bravo-Gutiérrez, A. Hernández-Machado, E. Corvera Poiré, 2008)**

En el artículo “**A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial**” se propone una nueva teoría dinámica línea 1D del fluido sanguíneo de redes de vasos flexibles que se basan en modelos de Darcy generalizado, que brinda una solución analítica completa en el dominio de la frecuencia y un modelo de 20 arterias de la aorta y sus ramas más grandes. Se concluye que la hemodinámica de la onda de pulso arterial en arterias grandes se puede simular con precisión utilizando un modelo elástico de Darcy generalizado. **(Flores, J., Alastruey, J., & Corvera Poiré, E., 2016)**

En el año 2017, fue publicado el artículo “**Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes**” en el cual se analiza el impacto que tiene la elasticidad de un tubo sobre la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano (aceite mineral) lineal incompresible sujeto a forzamiento pulsátil. Se obtuvo que la permeabilidad de un tubo rígido es siempre mayor a la de un tubo elástico. Se encontró que en un medio elástico se encuentran presentes resonancias capaces de aumentar la magnitud del flujo hasta en un 40% en el caso del fluido estudiado. En particular, esta resonancia desaparece más allá de un cierto radio de tubo, un cierto módulo de Young y por debajo de una cierta viscosidad de fluido. Esto hace que esta resonancia sea característica de los fluidos de viscosidad relativamente grande que fluyen en micro dispositivos de materiales elastoméricos. **(Torres Rojas, M., Pagonabarraga, I., & Corvera Poiré, 2017)**

Hipótesis

- Al utilizar la *Función de Transferencia Compleja* para determinar la permeabilidad de Darcy, se podrá calcular con mayor precisión la magnitud del flujo de un fluido viscoelástico de interés sometido a un gradiente de presión pulsátil.

Objetivos de la investigación

General

Estudiar el efecto de un gradiente dependiente del tiempo en el flujo volumétrico a través de la transformada integral y la función de transferencia compleja.

Particulares

Particular 1: Obtener una expresión analítica para el modelo electro-reológico que describa el sistema dinámico que consiste, en una membrana flexo-eléctrica inmersa en dos fases líquidas termodinámicas.

Particular 2: Aplicar la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento para deducir una ecuación diferencial parcial lineal, que describa el sistema termodinámico dos fases viscoelásticas líquida y una fase sólida flexo-eléctrica.

Particular 3: Aplicar la transformada de Fourier al modelo electrodinámico lineal para obtener expresiones para el campo de velocidades y el flujo volumétrico.

Particular 4: Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar la función de transferencia compleja, y obtener los grupos adimensionales correspondientes.

Particular 5: Aplicar los resultados teóricos obtenidos en sistemas biológicos de interés en ingeniería química (células ciliadas externas y sangre con hipercolesterolemia).

Distribución del material del proyecto-tesis:

La organización de este documento se presenta a continuación:

Sección 1: En la sección 1, se da la introducción la cual contiene los preliminares, antecedentes, hipótesis y objetivos de los problemas biológicos de interés en este proyecto de investigación.

Sección 2: Marco teórico en donde se ven los elementos básicos esenciales para entender esta investigación: (i) flujo de Poiseuille en un tubo y (ii) flujo de Poiseuille en una corona circular.

Sección 3: Problema físico y modelo constitutivo empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo.

Sección 4: Se obtiene la función de transferencia del sistema de estudio junto a la deducción del operador viscosidad de Burgers Modificado.

Sección 5: Predicciones variando los grupos adimensionales correspondientes y aplicación al sistema biológico de estudio.

Sección 6: Análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro.

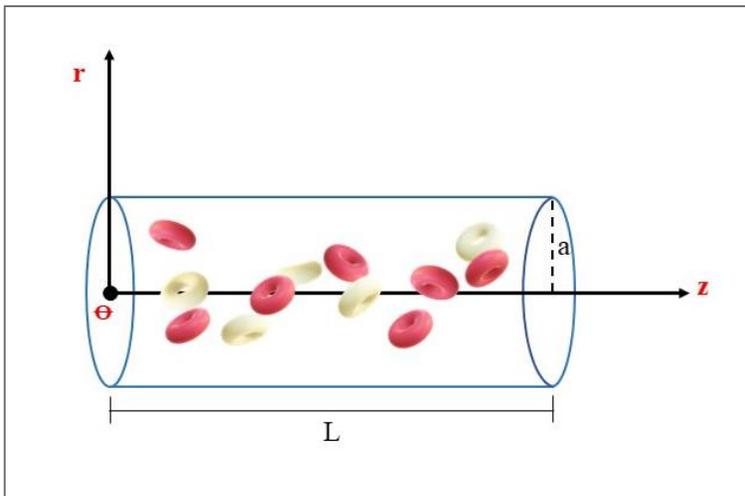
A continuación, en el siguiente capítulo se habla y desarrollan conocimientos básicos como la ecuación de Hagen Poiseuille, para una mayor comprensión de los modelados matemáticos del problema físico, y de su función de transferencia.

CAPÍTULO 2. Marco Teórico

Para que el lector comprenda el desarrollo de esta investigación, se plantean los dos problemas principales de este trabajo, la ecuación de Hagen Poiseuille que describe el flujo volumétrico para un fluido newtoniano impulsado por un gradiente de presión dentro de un capilar de simetría cilíndrica con las coordenadas correspondientes r, θ, z . El segundo problema corresponde a un fluido newtoniano que se mueve gracias a un gradiente de presión, en el ánulo de una corona circular, es decir, entre dos tubos concéntricos. Dichos problemas representan la base matemática y física para la comprensión reológica de los fluidos de este guion, es por eso por lo que a continuación se muestra el desarrollo y modelado matemático completo para la solución de estos.

2.1 Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en capilar

En esta sección se presenta el desarrollo matemático de nuestro primer problema, para el cálculo del flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en un capilar, cuyo radio r es igual a una altura a y la longitud axial del eje z es igual a L . En la siguiente figura se encuentra un esquema del problema.



Fif.2. *Flujo Newtoniano, laminar e incompresible en un capilar de coordenadas cilíndricas, las longitudes características del sistema son: $r=a$, $z=L$.*

Modelado matemático

- Fluido Newtoniano.
- Estado estacionario $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$
- Flujo laminar e incompresible. $\nabla \cdot V = 0$
- La velocidad del fluido V_z va hacia el eje axial y está en función del eje radial.
- Proceso isotérmico.
- Flujo unidireccional.
- Mecanismos unidireccionales despreciables.
- El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- Simetría cilíndrica.

Razonamiento matemático

Para poder dar solución a este problema, primeramente, se planteó un modelado matemático, con el fin de dar una interpretación matemática facilitando la resolución. Ya que se trata de un fluido en movimiento, comenzaremos por el balance de masa dentro del cilindro el cual desarrollamos para llegar a la ecuación de continuidad.

Al aplicar las condiciones de nuestro sistema a la ecuación de continuidad, esta nos describe que la velocidad del flujo no depende de z , si no que depende del eje radial. Esta condición da pauta al desarrollo y análisis de la ecuación de Movimiento Lagrangiana que con la ayuda del tensor de esfuerzos cortantes en el fluido, más conocido como la ley de Newton generalizada, se logra obtener la famosa ecuación de Navier Stokes que al operarse logramos obtener la ecuación desarrollada para

los ejes coordenados r , θ , z , que nos brindan información sobre las fuerzas de gravedad, fuerza centrífuga, fuerzas de gravedad, fuerzas de viscosidad y tensión superficial del fluido. Al hacer un análisis de la ecuación se llega a una ecuación diferencial con la información del fluido y su movimiento, la cual, nos permite encontrar el perfil de velocidades en z , que se utilizará para deducir la ecuación de flujo volumétrico Hagen Poiseuille.

Ecuación de Continuidad

Partiendo del razonamiento para obtener la ecuación de continuidad en base al balance de masa sin reacción química:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho V) \quad (1)$$

La V representa el vector velocidad del flujo y ρ representa la densidad, una magnitud escalar. Desarrollando la divergencia del producto e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V + \rho(\nabla \cdot V) = 0 \quad (2)$$

Una ecuación que representa las fuerzas de velocidad.

Ya que se habla de un fluido incompresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V = 0 \quad (3)$$

Desarrollando el gradiente de un tensor por el producto punto del vector velocidad en coordenadas cilíndricas se obtiene la *ecuación de continuidad* que describe las fuerzas de velocidad del fluido en cada dirección de eje coordenado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (4)$$

Se sabe que no existe velocidad del flujo hacia el eje radial ni rotacional y que la velocidad en z está en función únicamente del eje radial y no depende del eje θ ni de Z , es decir,

$V_z = V_z(r) \neq V_z(\theta, z)$. De acuerdo con esto la ecuación de continuidad se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (5)$$

Ecuación de Movimiento

En base a la *ecuación de movimiento en Lagrangiana* que nace del balance de movimiento de la ecuación de Euler Cauchy.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho g \quad (6)$$

Se sabe que la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos, mejor llamada Ley de Newton generalizada escrita en su forma vectorial es:

$$\bar{\tau} = \dot{\gamma} \mu \quad (7)$$

$$\dot{\gamma} = \nabla \underline{V} + (\nabla \underline{V})^T \quad (8)$$

Por lo tanto,

$$\bar{\tau} = \mu \left[\nabla \underline{V} + (\nabla \underline{V})^T \right] \quad (9)$$

Donde $\bar{\tau}$ es el tensor de esfuerzos, $\dot{\gamma}$ es la rapidez de deformación y es lo que caracteriza un fluido, \underline{V} es el vector velocidad, μ es la viscosidad del fluido, ∇ es el operador Nabla y T es el operador transpuesto.

Sustituyendo la ecuación (9) en la (6) se obtiene lo siguiente:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P - \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \underline{V} + (\nabla \underline{V})^T \right) \right] - \mu + \rho g$$

Operando y aplicando la condición de fluido incompresible,

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \underline{V} + \mu \nabla \cdot (\nabla \underline{V})^T + \rho g$$

Se obtiene de esta manera la Ec. De movimiento de Navier Stokes para un fluido incompresible:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \underline{V} + \rho g \quad (10)$$

Operando la derivada material Lagrangiana, el Laplaciano y el gradiente de presión para cada componente coordinado se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

- Componente en r:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (11)$$

- Componente θ :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (12)$$

- Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (13)$$

Aplicando las condiciones del modelado matemático para los tres componentes, Ec. (11), (12), (13) y la ecuación analizada de continuidad (5), se llega a las siguientes conclusiones:

Para la componente r:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \text{ Por lo tanto } P \neq P(r) \quad (14)$$

Para la componente Θ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \text{ Por lo tanto, } P \neq P(r) \quad (15)$$

Para la componente z:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (16)$$

Esto nos dice que la $P=P(z)$. Igualamos a una constante para calcular el perfil de presiones.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \lambda \quad (17)$$

Perfil de Presiones

Resolviendo la ecuación diferencial para el gradiente de presión.

$$\int dP = \lambda \int dz$$

$$P(z) = \lambda z + C_1 \quad (18)$$

Aplicando las condiciones de frontera a la Ec. (18) para encontrar las constantes se obtiene:

$$\text{C.F.1 } P=P_0 \rightarrow Z=0$$

$$\text{C.F.2 } P=P_L \rightarrow Z=L$$

$$C_1 = P_0$$

$$\lambda = \frac{P_L - P_0}{L} = \frac{-(P_L - P_0)}{L} \quad (19)$$

Sustituyendo dichas constantes (C_1, λ) en la Ec. (18) se obtiene el perfil de *presiones del fluido*:

$$P(z) = P_0 - \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) z \quad (20)$$

Perfil de Velocidades

Para calcular la ecuación del perfil de velocidades ($V_z(r)$) retomaremos la ecuación de movimiento simplificada (17) que describe el movimiento del fluido en el eje radial, sustituyendo el valor de la constante λ y procedemos a resolver la ecuación diferencial por el método de variables separables:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_Z}{dr} \right) = \frac{-(P_L - P_0)}{L}$$

$$\int d \left(r \frac{dV_Z}{dr} \right) = \frac{-(P_L - P_0)}{L\mu} \int r dr$$

$$\left(r \frac{dV_Z}{dr} \right) = \frac{-(P_L - P_0)r^2}{2L\mu} + C_2$$

La variable r pasa dividiendo del otro lado de la igualdad y se resuelve la integral:

$$\left(\frac{dV_Z}{dr} \right) = \frac{-(P_L - P_0)r}{2L\mu} + \frac{C_2}{r}$$

$$\int dV_Z(r) = \frac{-(P_L - P_0)}{2L\mu} \int r dr + C_2 \int \frac{dr}{r}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación de la V_Z queda de la siguiente manera:

$$V_Z(r) = \frac{-(P_L - P_0)r^2}{4L\mu} + C_2 \ln(r) + C_3 \quad (21)$$

Para encontrar la solución particular de la Ec. (21) utilizaremos las siguientes condiciones de Newman:

$$\text{C.F.1} \quad r=a, V_Z = 0$$

$$\text{C.F.2} \quad r=0, \frac{dV_Z}{dr} = 0$$

Estas condiciones se deben gracias a que, hablando de un flujo laminar, en las paredes cuando el eje r es igual a la distancia a , la velocidad es mínima y tiende a cero. En el centro del capilar, cuando r es igual a cero, la velocidad es máxima, matemáticamente hablando, el límite de la V_Z tiende a infinito, por lo que su derivada es cero. Sustituyendo estas condiciones de Newman en la ecuación (21), obtenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{-(P_L - P_0)a^2}{4L\mu} + C_2 \ln(a) + C_3$$

$$\frac{dV_Z(r=0)}{dr} = \frac{-(P_L - P_0)0}{2L\mu} + \frac{C_2}{0} = 0$$

Por lo tanto,

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L}$$

Sustituyendo las constantes C_2 y C_3 en la Ec. (21), obtenemos lo siguiente:

$$V_Z(r) = \frac{-(P_L - P_0)r^2}{4\mu L} + \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \quad (22)$$

Factorizando la Ec. (22) como se muestra a continuación, se llega al perfil de velocidades del fluido en el eje z .

$$\begin{aligned}
V_Z(r) &= \frac{(P_0 - P_L)}{4\mu L} (a^2 - r^2) \\
V_Z(r) &= \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \\
\mathbf{V}_Z(\mathbf{r}) &= \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{23}$$

Flujo Volumétrico

Una vez obtenida la ecuación que describe la velocidad en el eje z en función del eje radial, nos es posible calcular la ecuación para el flujo volumétrico de *Hagen Poiseuille*, integrando la función $V_Z(r)$ Ec. (23) marcando los límites diferenciales del área transversal al flujo dentro del capilar, ($dA = r dr d\theta$), como como se muestra a continuación:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{V}_Z(\mathbf{r}) r dr d\theta \tag{24}$$

Sustituyendo la Ec. (23) en la Ec. (24), se tiene la integral:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] r dr d\theta \tag{25}$$

El desarrollo de la integral de la Ec. (25) queda de la siguiente manera:

Las constantes salen de la integral.

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] r dr d\theta \\
Q &= \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a r dr - \frac{1}{a^2} \int_0^a r^3 dr \right] d\theta \\
Q &= \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \frac{1}{a^2} \left(\frac{r^4}{4}\right) \Big|_0^a \right] d\theta
\end{aligned}$$

Evaluando la integral de cero a R,

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{a^4}{4}\right) \right] d\theta$$

Simplificando:

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)a^2}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right] d\theta$$

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)a^4}{4\mu L} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4}$$

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)a^4}{4\mu L} \left[\frac{\theta}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)a^4}{4\mu L} \left[\frac{2\pi}{4} \right] \tag{26}$$

Simplificando la Ec. (26), obtenemos la famosa ecuación del flujo volumétrico **Hagen Poiseuille** para coordenadas cilíndricas:

$$Q = \frac{\pi(P_0 - P_L)a^4}{8\mu L} \tag{27}$$

2.2 Flujo Volumétrico en Corona Circular

Se presenta en esta sección el desarrollo para encontrar la ecuación del flujo volumétrico de un fluido Newtoniano que fluye a través de una corona circular y se mueve gracias a un gradiente de presión. La Corona circular tiene una longitud axial $z=L$, en el eje radial se encuentran un radio inferior R_1 y un radio superior R_2 .

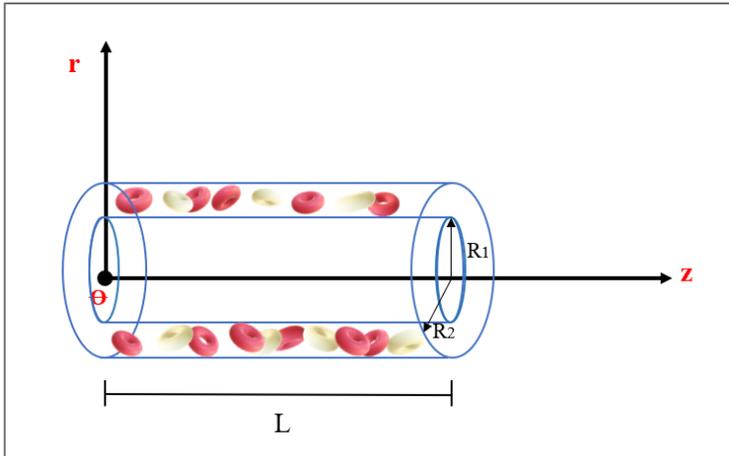


Fig.2.2. Fluido Newtoniano, incompresible que fluye a través de una corona circular de coordenadas cilíndricas (r, Θ, z) , con longitudes características $z=L$, $r=R_1$ y $r=R_2$.

Modelado matemático

- Fluido Newtoniano.
- Estado estacionario $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$
- Flujo laminar e incompresible. $\nabla \cdot V = 0$
- La velocidad del fluido V_z va hacia el eje axial y está en función del eje radial.
- Proceso isotérmico.
- Flujo unidireccional.
- Mecanismos unidireccionales despreciables.
- El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- Simetría cilíndrica.

Razonamiento Matemático

Para poder dar solución a este problema, como anteriormente, se planteó un modelado matemático, con el fin de dar una interpretación matemática facilitando la resolución. Ya que se trata de un fluido en movimiento, con las mismas características que en el problema anterior, aplica el mismo desarrollo matemático hasta el *perfil de velocidades general* en z , el cual retomamos para encontrar el perfil de velocidades particular aplicado a nuestras nuevas fronteras. Una vez obtenido este perfil, se usa para encontrar la ecuación de Hagen Poiseville, con la diferencia de que ahora se cambian las condiciones de frontera debido a que el fluido pasa a través de la zona anular de una corona circular.

Perfil de Velocidades

El fluido en la corona circular se comporta de la misma manera que en el capilar ya que tiene un modelado matemático igual, a diferencia de las longitudes características son 3, una longitud axial, y dos longitudes radiales. Por lo tanto, podemos partir desde el perfil de velocidades general:

$$V_Z(r) = \frac{-(P_L - P_0)r^2}{4L\mu} + C_2 \ln(r) + C_3 \quad (1)$$

La Ec. (21) contiene dos constantes de integración, que calcularemos mediante la aplicación de las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1.} \quad r = R_1, \quad V_Z = 0$$

$$\text{C.F.2.} \quad r = R_2, \quad V_Z = 0$$

Aplicando las C.F.1. se tiene lo siguiente:

$$V_Z(r = R_1) = \frac{-(P_L - P_0)R_1^2}{4L\mu} + C_2 \ln(R_1) + C_3 = 0 \quad (2)$$

Y respectivamente para las C.F.2:

$$V_Z(r = R_2) = \frac{-(P_L - P_0)R_2^2}{4L\mu} + C_2 \ln(R_2) + C_3 = 0 \quad (3)$$

A continuación, se muestra el desarrollo para encontrar las constantes C_2 y C_3 :

Se resta la Ec. (3) a la Ec. (2).

$$V_Z(r) = \frac{(P_0 - P_L)}{4L\mu} (R_1^2 - R_2^2) + C_2 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 0$$

Despejando C_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} C_2 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) &= \frac{(P_0 - P_L)}{4L\mu} (R_2^2 - R_1^2) \\ C_2 &= \frac{(P_0 - P_L) (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo C_2 en la Ec. (2) podemos calcular la C_3 :

$$\frac{(P_0 - P_L)R_1^2}{4L\mu} + \left[\frac{(P_0 - P_L) (R_2^2 - R_1^2)}{4L\mu \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right] \ln(R_1) + C_3 = 0$$

Despejando la C_3 y factorizando:

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{(P_0 - P_L)R_1^2}{4L\mu} - \left[\frac{(P_0 - P_L)}{4L\mu \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} (R_2^2 - R_1^2) \right] \ln(R_1) \\ C_3 &= -\frac{(P_0 - P_L)R_1^2}{4L\mu} - \frac{(P_0 - P_L)}{4L\mu} \\ C_3 &= -\frac{(P_0 - P_L)}{4L\mu} \left(\frac{\ln(R_1)(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} + R_1^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Para encontrar el perfil particular de velocidades, sustituimos las constantes de integración en la Ec. (1).

$$V_Z(r) = \frac{(P_0-P_L)r^2}{4L\mu} + \frac{(P_0-P_L)(R_2^2-R_1^2)}{4L\mu \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln(r) - \frac{(P_0-P_L)}{4L\mu} \left(\frac{\ln(R_1)(R_2^2-R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} + R_1^2 \right) \quad (6)$$

Simplificando la ec.(6):

$$V_Z(r) = \frac{(P_0-P_L)}{4L\mu} \left[r^2 + \frac{(R_2^2-R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln(r) - \frac{\ln(R_1)(R_2^2-R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - R_1^2 \right]$$

$$V_Z(r) = \frac{(P_0-P_L)}{4L\mu} \left[r^2 - R_1^2 + \frac{(R_2^2-R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} (\ln(r) - \ln(R_1)) \right]$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos queda:

$$V_Z(r) = \frac{(P_0-P_L)}{4L\mu} \left[r^2 - R_1^2 + \frac{(R_2^2-R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] \quad (7)$$

Factorizando $-R_1$ y multiplicando por -1 en los logaritmos sin alterar la igualdad, obtenemos lo siguiente:

Perfil de velocidades particular

$$V_Z(r) = -\frac{(P_0-P_L)R_1^2}{4L\mu} \left[1 - \frac{r^2}{R_1^2} - \frac{(1-R_2^2/R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] \quad (8)$$

Flujo volumétrico

Para deducir una expresión analítica para el flujo volumétrico en la zona del ánulo de la corona circular se calcula a través de la siguiente integral de superficie. Obviamente se utiliza la transformación Jacobiana para la transformación a coordenadas cilíndricas.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_Z(r) r dr d\theta \quad (9)$$

Para simplificar la integral, dividimos entre R_1 los límites de integración y los operadores para hacerlo adimensional.

$$Q = 2\pi R_1^2 \int_0^{2\pi/2\pi} \int_{\frac{R_1}{R_1}}^{\frac{R_2}{R_1}} V_Z\left(\frac{r}{R_1}\right) \left(\frac{r}{R_1}\right) d\left(\frac{r}{R_1}\right) d\left(\frac{\theta}{R_1}\right) \quad (10)$$

Estableciendo de esta manera, cambios de variables adimensionales para simplificar la integral.

$$R = \frac{R_2}{R_1} \quad u = \frac{r}{R_1} \quad \alpha = \frac{\theta}{2\pi}$$

Sustituyendo las variables obtenemos la siguiente integral:

$$Q = 2\pi R_1^2 \int_0^1 \int_1^R V_Z(u) u du d\alpha \quad (11)$$

Posteriormente se sustituye la función del perfil de velocidades, Ec. (8) en la Ec. (11) y se aplican los cambios de variables adimensionales.

$$Q = 2\pi R_1^2 \int_0^1 \int_1^R -\frac{(P_L - P_0)R_1^2}{4L\mu} \left[1 - \frac{r^2}{R_1^2} - \frac{(1 - R_2^2/R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] u du d\alpha$$

$$Q = 2\pi R_1^2 \int_0^1 \int_1^R -\frac{(P_L - P_0)R_1^2}{4L\mu} \left[1 - u^2 - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \ln(u) \right] u du d\alpha \quad (12)$$

Se sacan las constantes y se prosigue con el desarrollo de la resolución de la integral con respecto de u.

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \int_1^R \left[1 - u^2 - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \ln(u) \right] u du d\alpha$$

Distribuyendo los operadores:

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \left[\int_1^R u du - \int_1^R u^3 du - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \int_1^R u \ln(u) du \right] d\alpha$$

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \left[\frac{u^2}{2} \Big|_1^R - \frac{u^4}{4} \Big|_1^R - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \int_1^R u \ln(u) du \right] d\alpha$$

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \left[\frac{u^2}{2} \Big|_1^R - \frac{u^4}{4} \Big|_1^R - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \left(\frac{u^2 \ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4} \right) \Big|_1^R \right] d\alpha$$

Evaluando los límites:

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1^2}{2} - \frac{R^4}{4} + \frac{1^4}{4} - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \left[\frac{R^2 \ln(R)}{2} - \frac{R^2}{4} - \frac{1^2 \ln(1)}{2} + \frac{1^2}{4} \right] \right] d\alpha$$

Simplificando y después factorizando $\frac{1}{4}$ de la siguiente manera:

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4L\mu} \int_0^1 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{R^4}{4} - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} \left[\frac{R^2 \ln(R)}{2} - \frac{R^2}{4} - 0 + \frac{1^2}{4} \right] \right] d\alpha$$

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4(4)L\mu} \int_0^1 \left[2R^2 - 1 - R^4 - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} [2R^2 \ln(R) - R^2 - 0 + 1] \right] d\alpha$$

Se propone la constante K para la simplificación las constantes:

$$K = 2R^2 - 1 - R^4 - \frac{(1 - R^2)}{\ln(R)} [2R^2 \ln(R) - R^2 + 1] \quad (13)$$

Se procede a resolver la integral con respecto de θ aplicando la constante K.

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4(4)L\mu} K \int_0^1 d\theta$$

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4(4)L\mu} K(\theta)|_0^1$$

$$Q = -\frac{2\pi(P_L - P_0)R_1^4}{4(4)L\mu} K$$

Por lo tanto, se llega a la ecuación de Hagen Poiseville aplicada a el flujo en un ánulo donde la constante K está en función de los diámetros de la corona circular. Por lo tanto, K(R).

$$Q = -\frac{\pi(P_L - P_0)R_1^4}{8L\mu} K \quad (14)$$

Donde:

$$K = 2R^2 - 1 - R^4 - \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} [2R^2 \ln(R) - R^2 + 1] \quad (15)$$

En la siguiente sección, se desarrolla el problema físico, que consiste en hacer un análisis y desarrollo matemático similar al anterior, pero ahora para un fluido no newtoniano, lo cual nos lleva a encontrar una Función de Transferencia Compleja, que contiene las principales características del fluido viscoelástico, como la viscosidad y elasticidad.

CAPÍTULO 3. Problema físico

En esta sección se expondrán tres conceptos importantes. La primera de Ellas es la función de transferencia compleja la cual, es un cociente entre la variable de entrada (**Input**) y la variable de salida (**Output**). **La función de transferencia nos da una medida de la relación entre estas dos variables. La definición básica que se utiliza es la siguiente:**

$$T(s) = \frac{O(s)}{I(s)}$$

En la ecuación anterior O(s) representa la variable de salida (Output) e I(s) la variable de entrada (s). La relación básica se centra en la transformada de Laplace. La cual se define de la siguiente manera:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Esta ecuación se puede expresar en términos de la frecuencia con el formalismo de Fourier, es decir se tiene lo siguiente:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Las 3 ecuaciones son base en la descripción del presente trabajo.

Metodología

Razonamiento: El problema consiste en calcular la permeabilidad dinámica de un sistema que consiste en fase solida flexo-eléctrica en fases líquidas viscoelásticas. Para activar la membrana flexo eléctrica se aplica un campo eléctrico y las membranas oscilan en torno a una posición de equilibrio. Se analizan tres partes:

- Primer problema: Reología y transferencia de momento
- Segundo problema: Sistema mecánico
- Función de Transferencia compleja
- Sistema biológico

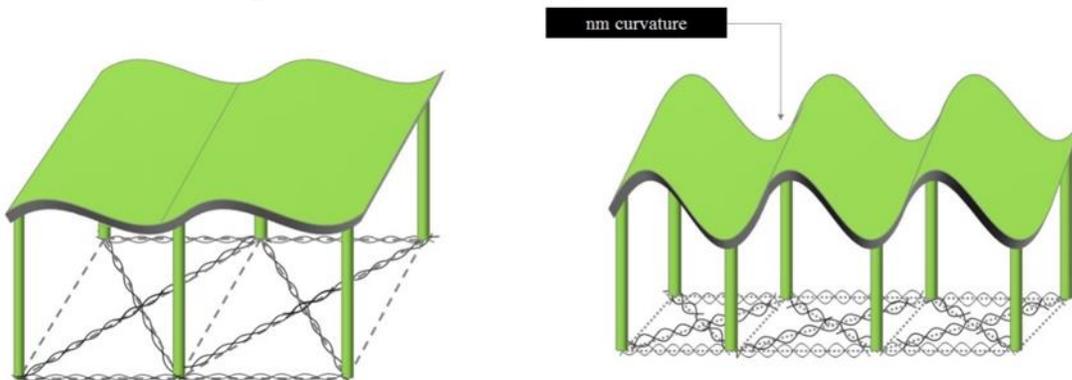


Figura 1. Ilustra el efecto del campo eléctrico en las células ciliadas externas y su deformación por efecto del campo eléctrico.

3.1 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en un capilar

En esta parte del guion se muestra el desarrollo matemático para la ecuación de flujo volumétrico con mecanismos inerciales, en relación con un fluido sanguíneo No-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano) que fluye a través de un capilar de geometría cilíndrica deformándose continua e irreversiblemente gracias a un gradiente de presión pulsátil en el eje axial. Al sistema corresponden la longitud radial $r = a$ y la longitud axial $z = L$.

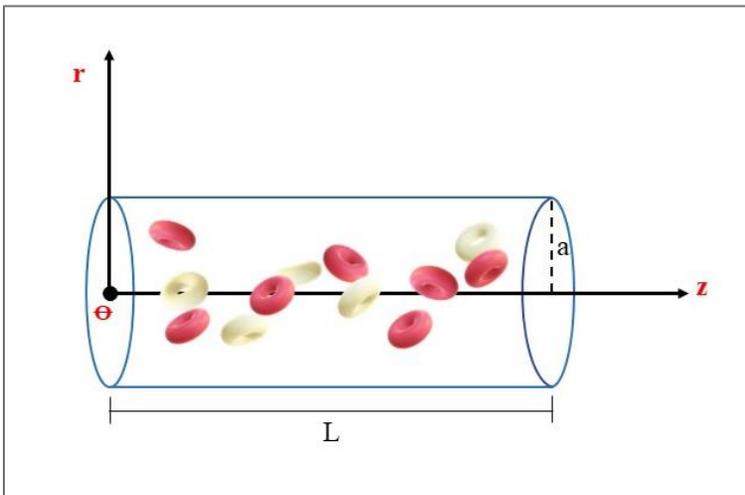


Figura. 2.3 Capilar de radio $r = a$ y longitud axial $z = L$, por el cual fluye un fluido No-Newtoniano viscoelástico (de Maxwell) que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil.

Modelado matemático

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano)
- Líquido incompresible. $\nabla \cdot V = 0$
- El proceso se lleva a cabo en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil). $\frac{\partial v_z}{\partial t} \neq 0$, $\frac{\partial p_z}{\partial t} \neq 0$
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial. $P = P(z, t)$
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ($a \ll L$) se encuentra en posición horizontal. $g_z = 0$
- Existe simetría cilíndrica, por lo tanto, corresponden los ejes coordenados r, θ, z .

Razonamiento Matemático

Las condiciones del modelado matemático se analizan durante el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de Navier Stokes, la cual nos lleva a encontrar un perfil de velocidades que para dar solución será necesario aplicar la transformada de Fourier pasando al espacio de la frecuencia y posteriormente llegar a la forma diferencial de las ecuaciones de Bessel modificado. Una vez obtenido

el perfil de velocidades, este se somete a una integral espacial para el llegar a la expresión del flujo volumétrico en función de una función de transferencia compleja.

Ecuación de Movimiento

En base a la *ecuación de movimiento en Lagrangiana* que nace del balance de movimiento de la ecuación de Euler Cauchy.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{rz} + \rho g \quad (6)$$

Que representa las fuerzas gravitacionales, los esfuerzos cortantes ($\boldsymbol{\sigma}_{rz}$) causados por el gradiente de presión, y la velocidad dependiente del tiempo.

El tensor de esfuerzos cortantes ($\boldsymbol{\sigma}_{rz}$) que se muestra en la Ec. 6 es resultado del producto de la viscosidad μ con la capidez de deformación aplicada al fluido $\frac{\partial V_z}{\partial r}$, de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{\sigma}_{rz} = \mathbf{O}_\eta \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (7)$$

Se puede sustituir dicho operador de esfuerzos cortantes en la Ec. (6) y operar, representando así la ecuación de Navier Stokes.

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV}{Dt} &= -\nabla P + \nabla \cdot \left(\mathbf{O}_\eta \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \rho g \\ \rho \frac{DV}{Dt} &= -\nabla P + \mathbf{O}_\eta \nabla^2 V + \rho g \end{aligned} \quad (8)$$

Operando la derivara material Lagrangiana, el Laplaciano y el gradiente de presión de la Ec. de Navier Stokes para cada componente coordenado se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

- Componente en r :

$$\begin{aligned} &\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{O}_\eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (9)$$

- Componente θ :

$$\begin{aligned} &\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mathbf{O}_\eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (10)$$

- Componente z :

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{O}_\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (11)$$

Aplicando las condiciones del modelado matemático para las ecuaciones de los tres componentes, Ec. (9), (10), (11) se llega a las siguientes conclusiones:

Para la componente r:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \text{ Por lo tanto } P \neq P(r) \quad (12)$$

Para la componente Θ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \text{ Por lo tanto, } P \neq P(r) \quad (13)$$

Para la componente z:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (14)$$

Perfil de Velocidades

A continuación, se muestra el desarrollo matemático para obtener el perfil de velocidades en el capilar.

Para la Ec. diferencial (14), aplicaremos la transformada de Fourier puesto que la Ec. diferencial parcial describe variaciones de la velocidad en el eje coordenado r , también en el espacio del tiempo, que, a su vez, la velocidad es influenciada por un gradiente de presión en función de una frecuencia ω y un tiempo t .

La transformada de Fourier sólo aplicará a funciones que dependan del tiempo, por lo que lo restante, saldrá del operador como constante.

$$\mathbb{F} \left\{ \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} \right\} = \rho(i\omega) V_z(r, \omega) \quad (15)$$

$$\mathbb{F} \left\{ - \frac{\partial p(t)}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{F}\{P(t)\} = - \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (16)$$

$$\mathbb{F} \left\{ \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right\} = \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \mathbb{F}\{V_z(r, t)\} = \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r} \right) \quad (17)$$

Sustituyendo las Ecs. (15), (16) y (17) en la Ec. (14) obtenemos lo siguiente:

$$\rho(i\omega) V_z(r, \omega) = - \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} + \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r} \right) \quad (18)$$

Ya que uno de los objetivos en la resolución de esta ecuación diferencial es llegar a una ecuación de Bessel para facilitar la expresión, igualamos la Ec. (18) al gradiente de presión y dividimos todo entre la viscosidad, respetando la igualdad, operando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} &= \frac{\mathbf{O}_\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \rho(i\omega) V_z(r, \omega) \\ \frac{1}{\mathbf{O}_\eta} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} &= \frac{\mathbf{O}_\eta}{r \mathbf{O}_\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \frac{\rho(i\omega)}{\mathbf{O}_\eta} V_z(r, \omega) \\ \frac{1}{\mathbf{O}_\eta} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z(r,\omega)}{\partial r} \right) - \frac{\rho(i\omega)}{\mathbf{O}_\eta} V_z(r, \omega) \end{aligned} \quad (19)$$

Se introduce la constante β^2 con el fin de simplificar la Ec. (19) y llegar a la forma de Bessel.

$$\beta^2 = \frac{\rho(i\omega)}{\mathbf{o}_\eta} \quad (20)$$

Obteniendo la siguiente expresión.

$$\frac{1}{\mathbf{o}_\eta} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) \quad (21)$$

Operando la derivada del producto se tiene:

$$\frac{1}{\mathbf{o}_\eta} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) \quad (22)$$

Para poder encontrar la solución general, debemos encontrar la solución homogénea y la solución particular.

$$V_{ZG} = V_{ZH} + V_{ZP}$$

Igualamos la Ec. (21) a cero para hacer la Ec. homogénea de Bessel y se multiplica por r^2 :

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0$$

$$r^2 \left[\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} \right) - \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0 \right]$$

Operando:

$$r^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} - r^2 \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (23)$$

Se puede apreciar que la Ec. (22) se asemeja a la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (24)$$

Donde su solución es una función del resultado de la suma de la función de Bessel de primera especie de orden n más la función de Bessel de segunda especie de orden n .

$$Y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (25)$$

Posteriormente, el primer y segundo término de la Ec. (22) se multiplican por uno de la siguiente manera:

$$\frac{i^2 \beta^2 r^2}{i^2 \beta^2} \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{i\beta}{i\beta} r \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial r} + i^2 r^2 \beta^2 V_Z(r, \omega) = 0$$

Simplificando también se puede introducir $i\beta$ al operador de la derivada de la siguiente manera:

$$(i\beta r)^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial (i\beta r)^2} + (i\beta r) \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial (i\beta r)} + (i\beta r)^2 V_Z(r, \omega) = 0 \quad (26)$$

De esta manera se puede introducir el cambio de variable $x = i\beta r$, y obtener la ecuación diferencial modificada de Bessel.

$$(x)^2 \frac{\partial^2 V_Z(r, \omega)}{\partial (x)^2} + (x) \frac{\partial V_Z(r, \omega)}{\partial (x)} + (x^2 - 0^2) V_Z(r, \omega) = 0$$

La solución de la Ec. diferencial modificada de Bessel homogénea se puede expresar de la siguiente manera:

$$V_{zH}(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) \quad (27)$$

Donde:

$I_0(\beta r)$ Representa la función de Bessel de primera especie de orden cero.

$K_0(\beta r)$ Representa la función de Bessel de segunda especie de orden cero.

C_1 y C_2 Son constantes.

A continuación, hallaremos la solución particular, para esto es necesario igualar la velocidad en z a una constante.

$$V_z = A$$

Se sustituye V_z en la Ec. (21)

$$\frac{1}{\mathbf{O}_\eta(i\omega)} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + i^2 \beta^2 A$$

Operando la diferencial de la constante.

$$\frac{1}{\mathbf{O}_\eta(i\omega)} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = 0 + i^2 \beta^2 A$$

Despejando la constante A se obtiene la solución particular:

$$A = \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (28)$$

Para encontrar la solución general, podemos ejecutar la suma de la solución homogénea más la solución particular. Ec. (27) + Ec. (28).

$$V_{zG}(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (29)$$

Para dar una solución general adecuada es necesario calcular las constantes C_1 y C_2 aplicando las condiciones de frontera del sistema; cuando nos encontramos en las paredes del capilar la velocidad en z es igual a cero debido a la condición de no deslizamiento, cuando nos encontramos en el centro del capilar la velocidad en z tiende a infinito.

$$\text{C.F.1 } r = a, \quad V_z = 0$$

$$\text{C.F.2 } r = 0, \quad V_{z\text{máx}} = \text{finita}$$

Por lo tanto,

$$0 = C_1 I_0(\beta a) + C_2 K_0(\beta a) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (30)$$

$$0 = C_1 I_0(\beta 0) + C_2 K_0(\beta 0) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (31)$$

En la Ec. (31) $K_0(0) = -\infty$ y puesto que se sabe que la ecuación es finita se puede concluir que $C_2 = 0$, cumpliendo las condiciones de frontera. Posteriormente se sustituye C_2 en la Ec. (30) y se despeja C_1 de la siguiente manera:

$$0 = C_1 I_0(\beta a) + 0 + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)}$$

Por lo tanto

$$C_1 = -\frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega) I_0(\beta a)} \quad (32)$$

Ahora se sustituyen las constantes calculadas en la solución general Ec. (29)

$$V_Z(r, \omega) = -\left[\frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega) I_0(\beta a)} \right] I_0(\beta r) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)}$$

Factorizando los términos semejantes es posible determinar la expresión del *perfil de velocidades*:

$$V_Z(r, \omega) = \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right] \quad (33)$$

Este perfil de velocidades se encuentra en función del gradiente de presión, que a su vez es influenciado por una frecuencia ω .

Flujo volumétrico

Para deducir una expresión analítica para el flujo volumétrico del capilar en función de la frecuencia ω se calcula a través de la siguiente integral de superficie. Utilizando la transformación Jacobiana para la transformación en coordenadas cilíndricas.

$$Q(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_Z(r, \omega) r dr d\theta \quad (34)$$

Se introduce nuestro perfil de velocidades en la Ec. (34) y se procede a resolver la primera integral con respecto de θ de la siguiente manera.

$$Q(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right] r dr d\theta$$

$$Q(\omega) = \theta \Big|_0^{2\pi} \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \int_0^a \left[1 - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} \right] r dr$$

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \int_0^a \left[r - \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta a)} r \right] dr$$

Distribuyendo la integral a ambos términos de r .

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \left[\int_0^a r dr - \frac{1}{I_0(\beta a)} \int_0^a I_0(\beta r) r dr \right]$$

Se procede a operar la primera integral.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathcal{O}_\eta(i\omega)} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \frac{1}{I_0(\beta a)} \int_0^a I_0(\beta r) r dr \right] \quad (35)$$

Para la Ec. (35) se hace un escalamiento en la integral restante multiplicando por β^2/β^2 y multiplicando por β los límites de la integral, esto para posteriormente hacer un cambio de variable y aplicar una propiedad de la función de Bessel en la integral.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a) \beta^2} \int_0^{a\beta} I_0(\beta r) \beta r \, dr \right] \quad (36)$$

Se aplica $x = \beta r$, con el fin de simplificar la integral, y se procede a resolver.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a) \beta^2} \int_0^{a\beta} I_0(x) x \, dx \right] \quad (37)$$

Aplicando la propiedad de Bessel cuando $\frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] = J_0(x) \cdot x$, se obtiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a) \beta^2} \int_0^{a\beta} \frac{d}{dx} [I_1(x) \cdot x] \, dx \right]$$

Calculando la integral.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a) \beta^2} [I_1(x) \cdot x] \Big|_0^{a\beta} \right]$$

Se evalúa la integral en sus límites.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{I_0(\beta a) \beta^2} [I_1(a\beta) \cdot a\beta] \right]$$

Factorizamos $\frac{a^2}{2}$ de la expresión.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \frac{a^2}{2} \left[1 - \frac{2}{a^2 I_0(\beta a) \beta^2} [I_1(a\beta) \cdot a\beta] \right]$$

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^2 \nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{2}{a^2 I_0(\beta a) \beta^2} [I_1(a\beta) \cdot a\beta] \right] \quad (38)$$

Para hacer similar nuestro flujo volumétrico a la ecuación de Hagen Poiseville más la fuerza motriz en función de la frecuencia, se debe multiplicar por $\frac{8}{8} = 1$, $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ y finalmente por $\frac{a^2}{a^2} = 1$, como se muestra a continuación:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left[\frac{8\eta_0}{i^2 a^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{2}{a\beta} \frac{I_1(a\beta)}{I_0(\beta a)} \right] \right] \nabla P(\omega) \quad (39)$$

Se puede simplificar la Ec.(39) proponiendo $a\beta = \gamma$, como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left[\frac{8\eta_0}{i^2 \gamma^2 O_\eta(i\omega)} \left[1 - \frac{2}{\gamma} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \right] \right] \nabla P(\omega)$$

Se puede simplificar con $T(\omega)$ que representa la función de transferencia para un fluido viscoelástico

$$\mathbf{T}(\omega) = \frac{8\eta_0}{i^2\gamma^2\mathcal{O}_\eta(i\omega)} \left[\mathbf{1} - \frac{2}{\gamma} \frac{I_1(\gamma)}{I_0(\gamma)} \right] \quad (40)$$

Por lo tanto, la ecuación del flujo volumétrico queda expresada de la siguiente manera, conteniendo la Ec. de Hagen Poiseuille para un fluido newtoniano, la función de transferencia para un fluido viscoelástico y la fuerza motriz en función de la frecuencia.

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \mathbf{T}(\omega) \nabla P(\omega) \quad (41)$$

3.2 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en una corona circular

En esta parte del guion se muestra el desarrollo matemático para la ecuación de flujo volumétrico con mecanismos inerciales, en relación con un fluido sanguíneo No-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano) que fluye a través de la zona anular de una corona circular de geometría cilíndrica deformándose continua e irreversiblemente gracias a un gradiente de presión pulsátil en el eje axial. Al sistema corresponden las longitudes radiales $r = R_1$, $r = R_2$ y la longitud axial $z = L$.

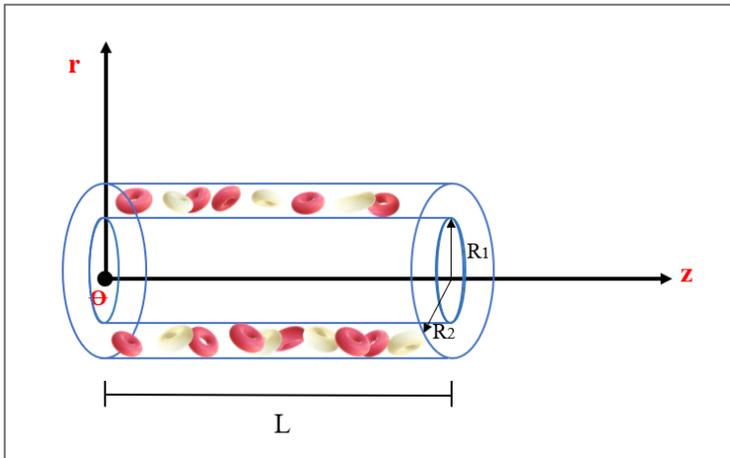


Fig. 2.4 Corona concéntrica, $r = R_1$, $r = R_2$ y longitud axial $z = L$, por el cual fluye un fluido No-Newtoniano viscoelástico (de Maxwell) que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil.

Modelado matemático

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano)
- Líquido incompresible. $\nabla \cdot V = 0$
- El proceso se lleva a cabo en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil). $\frac{\partial V_z}{\partial t} \neq 0$, $\frac{\partial P_z}{\partial t} \neq 0$
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial. $P = P(z, t)$
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ($a \ll L$) se encuentra en posición horizontal. $g_z = 0$
- Existe simetría cilíndrica, por lo tanto, corresponden los ejes coordenados r, θ, z .

Perfil de Velocidades

Para el cálculo de este perfil, ya que se cuenta con el mismo modelado matemático que en el capilar del problema anterior, el desarrollo difiere sólo hasta incluir las condiciones de frontera de este sistema, es por lo que partiremos de la solución general del perfil de velocidades en z . Ec. (29).

$$V_{Z_G}(r, \omega) = C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(t\omega)} \quad (29)$$

Es necesario calcular las constantes C_1 Y C_2 para dar una solución completa y adecuada del perfil de velocidades; cuando nos encontramos en $r = R_1$, la velocidad en la pared exterior del tubo interior es cero, cuando $r = R_2$, la velocidad en la pared interior del tubo externo es cero.

$$\text{C.F.1. } r = R_1, \quad V_z = 0$$

$$\text{C.F.2. } r = R_2, \quad V_z = 0$$

Se sustituyen las condiciones de frontera en la Ec. (29) de la siguiente manera:

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (1)$$

$$0 = C_1 I_0(\beta R_2) + C_2 K_0(\beta R_2) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (2)$$

Se hace la resta de la ecuación (1) menos la Ec. (2) para calcular la C_2 primeramente.

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + C_2 K_0(\beta R_1) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (1)$$

$$0 = C_1 I_0(\beta R_2) + C_2 K_0(\beta R_2) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (2)$$

$$0 = C_1 [I_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_2)] + C_2 [K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)] \quad (3)$$

Despejando la C_2 queda de lo siguiente:

$$C_2 = \frac{C_1 [I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} \quad (4)$$

Para encontrar la C_1 se sustituye la C_2 en la Ec. (1)

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + \frac{C_1 [I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} K_0(\beta R_1) + A$$

Operando C_1 y K_0 .

$$0 = C_1 I_0(\beta R_1) + \frac{[C_1 I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - C_1 I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_1)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} + A \quad (5)$$

Operando la fracción de la Ec. (6).

$$0 = \frac{C_1 I_0(\beta R_1) [K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)] + [C_1 I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - C_1 I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_1)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} + A$$

$$0 = \frac{[C_1 I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_1) - C_1 I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2)] + [C_1 I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - C_1 I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_1)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} + A$$

Factorizando C_1 y operando las sumatorias, despejamos C_1 .

$$0 = \frac{C_1 [I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2)]}{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]} + A$$

$$C_1 = \frac{-A [K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]}{[I_0(\beta R_2) K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1) K_0(\beta R_2)]} \quad (6)$$

Donde A tiene la información del gradiente de presión (fuerza motriz) que deforma continua e irreversiblemente el fluido. Se sustituye la Ec. (6) en la Ec. (4) para encontrar C_2 .

$$C_2 = \frac{-A[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)][I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)]}{[I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)][K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]}$$

Simplificando la expresión se obtiene la C_2 .

$$C_2 = \frac{-A[I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)]}{[I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)]} \quad (7)$$

Para simplificar las constantes C_1 y C_2 podemos simplificar de la siguiente manera:

$$C_1 = -AM_1 \quad \text{Donde} \quad M_1 = \frac{[K_0(\beta R_1) - K_0(\beta R_2)]}{[I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)]} \quad (8)$$

$$C_2 = -AM_2 \quad \text{Donde} \quad M_2 = \frac{[I_0(\beta R_2) - I_0(\beta R_1)]}{[I_0(\beta R_2)K_0(\beta R_1) - I_0(\beta R_1)K_0(\beta R_2)]} \quad (9)$$

A continuación, es posible sustituir dichas constantes en la solución general de la Ec. (29) para obtener el *perfil de velocidades* que describe el sistema, donde M_1 y M_2 están dados por las Ecs. (8) y (9).

$$V_Z(r, \omega) = -AM_1 I_0(\beta r) - AM_2 K_0(\beta r) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \quad (10)$$

El perfil de velocidades también puede expresarse de la siguiente manera facilitar su manejo.

$$V_Z(r, \omega) = -AM_1 I_0(\beta r) - AM_2 K_0(\beta r) - (-A) \quad (11)$$

Flujo Volumétrico

Para deducir una expresión analítica para el flujo volumétrico en la zona del anulo de la corona circular se calcula a través de la siguiente integral de superficie. Por supuesto se utiliza la transformación Jacobiana para la transformación en coordenadas cilíndricas.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_Z(r) r dr d\theta \quad (12)$$

Operando la integral con respecto de θ , se obtiene.

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_Z(r) r dr d\theta \quad (13)$$

Se sustituye la Ec. (11) en la Ec. (13) para proceder a resolver la integral.

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} [-AM_1 I_0(\beta r) - AM_2 K_0(\beta r) - (-A)] r dr d\theta$$

A continuación, resolveremos el integral término a término, comenzando por el primero:

$$Q_1 = \int_{R_1}^{R_2} (-AM_1 I_0(\beta r)) r dr$$

Excluyendo las constantes de la integral.

$$Q_1 = (-A)2\pi M_1 \int_{R_1}^{R_2} (I_0(\beta r) r) dr$$

Como β es una constante y no una función, se puede multiplicar y dividir para escalar la función, así que procedemos a multiplicar la integral por $\frac{\beta^2}{\beta^2}=1$, y multiplicar los límites de la integral por β de la siguiente manera:

$$Q_1 = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} (I_0(\beta r)\beta r) d\beta r \quad (14)$$

Con el propósito de simplificar la expresión, aplicamos un cambio de variable.

$$x = \beta r$$

$$Q_1 = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} (I_0(x) \cdot x) dx$$

Podemos aplicar la propiedad de la función de Bessel de la Ec. (15).

$$\frac{d}{dx} I_1(x) \cdot x = I_0(x) \cdot x \quad (15)$$

$$Q_1 = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} \frac{d}{dx} I_1(x) \cdot x dx$$

Se cancela la integral con el diferencial, y $\frac{dx}{dx} = 1$, por lo tanto.

$$Q_1 = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} [I_1(x) \cdot x]_{R_1\beta}^{R_2\beta}$$

$$Q_1 = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} [(I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] \quad (16)$$

Proseguimos a resolver la integral del segundo término.

$$Q_2 = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} [-AM_2 K_0(\beta r)] r dr$$

Excluyendo las constantes de la integral.

$$Q_2 = \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} [K_0(\beta r)r] dr$$

Escalando la integral con β^2 como en el primer término, y aplicando el cambio de variable $x = \beta r$, como se muestra.

$$Q_2 = \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} [K_0(\beta r)\beta r] d\beta r$$

$$Q_2 = \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} \int_{R_1\beta}^{R_2\beta} [K_0(x) \cdot x] dx \quad (17)$$

Aplicando la propiedad de la función de Bessel y evaluando la integral en sus límites.

$$Q_2 = \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} [K_1(x) \cdot x] \Big|_{R_1\beta}^{R_2\beta}$$

$$Q_2 = \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] \quad (18)$$

Y, por último, aplicamos la integral al tercer término.

$$Q_3 = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} (-A)r dr$$

$$Q_3 = -2\pi(-A) \left[\frac{r^2}{2} \right] \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$Q_3 = -2\pi(-A) \left[\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right]$$

Simplificando.

$$Q_3 = -2\pi(-A) \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right)$$

Por lo tanto:

$$Q_3 = \pi(-A) (R_1^2 - R_2^2) \quad (19)$$

Para finalizar la integral sumamos los términos resueltos como se muestra a continuación.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = \frac{(-A)2\pi M_1}{\beta^2} [(I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] \dots$$

$$+ \frac{(-A)2\pi M_2}{\beta^2} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] + \pi(-A) (R_1^2 - R_2^2)$$

Ahora, se simplificamos la expresión en lo posible, factorizamos $(-A)2\pi$, obteniendo:

$$Q = (-A)2\pi \left[\frac{M_1}{\beta^2} [(I_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (I_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] + \frac{M_2}{\beta^2} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2\beta) - (K_1(R_1\beta) \cdot R_1\beta)] + \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} \right) \right] \quad (20)$$

Factorizando β se obtiene lo siguiente.

$$Q = (-A)2\pi \left[\frac{M_1}{\beta} [(I_1(R_2\beta) \cdot R_2) - (I_1(R_1\beta) \cdot R_1)] + \frac{M_2}{\beta} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2) - (K_1(R_1\beta) \cdot R_1)] + \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} \right) \right] \quad (21)$$

Introducimos el valor de A y factorizamos R_2^2 como se muestra.

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{2\pi(-\nabla P(\omega))}{i^2\beta^2\mathbf{O}_\eta(i\omega)} \right) \left\{ \frac{M_1}{\beta} [(I_1(R_2\beta) \cdot R_2) - (I_1(R_1\beta) \cdot R_1)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_2}{\beta} [(K_1(R_2\beta) \cdot R_2) - (K_1(R_1\beta) \cdot R_1)] + \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} \right) \right\} \\
Q &= \left(\frac{2\pi R_2^2(-\nabla P(\omega))}{i^2\beta^2\mathbf{O}_\eta(i\omega)} \right) \left\{ \frac{M_1}{\beta} \left[\left(I_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right) \right] + \frac{M_2}{\beta} \left[\left(K_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

Factorizamos el 2, y para obtener semejanza a la ecuación de Hagen Poiseville sin alterar la ecuación, multiplicamos la expresión (22) por $\frac{R_2^2}{R_2^2} = 1$, por $\frac{8}{8} = 1$ y por último $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{2\pi R_2^4(-\nabla P(\omega))}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega) \mathbf{2}} \right) \left\{ \frac{2M_1}{\beta} \left[\left(I_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{2M_2}{\beta} \left[\left(K_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right) \right] + \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} \\
Q &= \left(\frac{\pi R_2^4(-\nabla P(\omega))}{8\eta_0} \right) \left\{ \frac{16\eta_0 M_1}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left[\frac{\left(I_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(I_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{16\eta_0 M_2}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left[\frac{\left(K_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(K_1(R_1\beta) \cdot \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + \frac{8\eta_0}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

Para simplificar la Ec. (23) podemos expresarla reescribiendo la ecuación.

$$\begin{aligned}
T_c(\omega) &= \frac{16\eta_0 M_1}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left[\frac{\left(I_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(I_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + \frac{16\eta_0 M_2}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left[\frac{\left(K_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(K_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + \\
&\quad \frac{8\eta_0}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \quad (24)
\end{aligned}$$

Factorizando la Ec. (24) obtenemos.

$$\begin{aligned}
T_c(\omega) &= \frac{16\eta_0}{i^2\beta^2 R_2^2 \mathbf{O}_\eta(i\omega)} \left\{ M_1 \left[\frac{\left(I_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(I_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + M_2 \left[\frac{\left(K_1(R_2\beta) \frac{1}{R_2} \right) - \left(K_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2^2} \right)}{\beta} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 1 \right) \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión que describe el flujo volumétrico en la zona anular de una corona circular para un fluido viscoelástico se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \right) \mathbf{T}_c(\omega) (-\nabla P(\omega)) \quad (26)$$

Donde

$\left(\frac{\pi R_2^4}{8\eta_0}\right)$ Representa la parte de la ecuación de Hagen Poiseville para un fluido newtoniano a viscosidad baja.

$T_c(\omega)$ Representa la función de transferencia del fluido viscoelástico en la corona circular, en función de una frecuencia ω .

$(-\nabla P(\omega))$ Representa la fuerza motriz que deforma al fluido continua e irreversiblemente, también en función de una frecuencia ω .

Nota: Las funciones de transferencia para un fluido viscoelástico en el modelo del capilar y de la corona circular, vistos en este capítulo fueron representadas las funciones de Bessel Modificadas de primera especie (I_n) y segunda especie (K_n). En dichas funciones de transferencia para ambos modelos, también pueden usarse las funciones de Bessel de primera especie (J_n) y segunda especie (Y_n), de tal manera que se obtienen las siguientes ecuaciones.

Capilar de radio R

Flujo volumétrico no Modificado:

$$Q(\omega) = \frac{\pi R_2^3}{4\eta_0} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) \quad (27)$$

Función de transferencia no Modificada:

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = 8i^2 \frac{\eta_0}{(R\beta(\omega)^2) O_\eta(i\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(R\beta(\omega))/R\beta(\omega)}{J_0(R\beta(\omega))} \right) \quad (28)$$

Corona circular de radios R2 y R1

Flujo volumétrico no Modificado:

$$Q(\omega) = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} T(\omega) (-\nabla p(\omega)) \quad (29)$$

Función de Transferencia no Modificada:

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{\eta_0}{(R_2\beta)^2 O_\eta(i\omega)} \left\{ 2C_3(\omega) \frac{J_1(R_2\beta) - J_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2}}{R_2\beta} + 2C_4(\omega) \frac{Y_1(R_2\beta) - Y_1(R_1\beta) \frac{R_1}{R_2}}{R_2\beta} - \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (30)$$

En donde las constantes C_3 y C_4 están dadas por:

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0(R_1\beta) - Y_0(R_2\beta)}{Y_0(R_1\beta)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0(R_1\beta)} \quad (31)$$

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(R_2\beta) - J_0(R_1\beta)}{Y_0(R_1\beta)J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta)J_0(R_1\beta)} \quad (32)$$

Ahora que se obtuvo la Función de Transferencia, sólo falta especificar a detalle el operador viscosidad $O_\eta(i\omega)$, en este caso se desarrollará para un fluido viscoelástico de Burgers Modificado, el cual, dicho operador se deduce y adimensiona en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4. Variables, Grupos y Modelo de Burgers Modificado Adimensional

Los objetivos principales de este capítulo es proponer un conjunto de variables dimensionales con el fin de escalar el operador viscosidad, la función de transferencia compleja, el parámetro beta asociado a la longitud de onda de las funciones de Bessel.

Este escalamiento permite:

- a) Simplificar las ecuaciones teóricas para facilitar las simulaciones en el programa Mathematica.
- b) Nos permite acotar el espacio de soluciones donde se encuentran nuestras ecuaciones teóricas.
- c) Obtener números adimensionales que describen la física y los mecanismos macroscópicos del sistema.

4.1 Números Adimensionales

En esta sección se describen los números adimensionales característicos de nuestro sistema. El primer número es el Deborah. Este grupo adimensional relaciona los mecanismos inerciales con los viscoelásticos del material y representa una de las contribuciones importantes de esta tesis.

Los siguientes tres números provienen de la ecuación constitutiva que estamos utilizando para caracterizar el medio.

- Viscosidad total. Este número representa la viscosidad de bulto del sistema y se compone de la viscosidad en una fase y la viscosidad en la otra fase.
- Memoria. Este número es el producto entre los dos tiempos viscoelásticos de los fluidos y relaciona la viscoelasticidad en las dos fases de estudio. Este número tiene dos límites asintóticos. A valores muy pequeños el número adimensional describe un contraste entre las fases viscoelásticas, es decir, una de las fases, tiene poca viscoelasticidad y la otra una alta viscoelasticidad. A un valor de 1/4, las dos fases tienen la misma viscoelasticidad.
- Elasticidad de la membrana. Este parámetro compara dos magnitudes elásticas, la primera de ellas asociada a la membrana flexoeléctrica y la segunda a la elasticidad de bulto. Un valor pequeño significa que la membrana es suave y deformable, mientras que un valor cercano a uno está relacionado con una membrana rígida.
- Parámetro Beta. Este es un cociente de dos longitudes características, una geométrica y la otra debido a una combinación entre los mecanismos inerciales y viscoelásticos del material. Este número está asociado a la longitud de onda en la cual se propagan las funciones de Bessel en el capilar.

Comenzando por el análisis dimensional del parámetro βa , se observa una variable adimensional.

$$\beta a = i^{3/2} \sqrt{\frac{a^2 \rho \omega}{O_\eta(i\omega)}} [=] \sqrt{m^2 \frac{kg \ rad}{m^3 \ s} \frac{1}{Pa * s}} [=] \sqrt{m^2 \frac{kg \ rad}{m^3 \ s} \frac{1}{\frac{kg}{m \ s^2} * s}} [=] \sqrt{rad} [=] 1$$

$$\beta^* = \beta a = \sqrt{\frac{a^2 \rho \omega}{O_\eta(i\omega)}}$$

De la siguiente manera para el eje coordenado axial z adimensional, se sabe que el eje z debe ser mayor a cero y menor que L :

$$0 \leq Z \leq L$$

Al dividir todo entre la longitud característica L para hacer la igualdad adimensional y acotarla en una longitud más accesible, sin alterar la ecuación:

$$0 = \frac{0}{L} \leq \frac{Z}{L} \leq \frac{L}{L} = 1$$

Se obtiene la variable adimensional, acotada de cero a uno.

$$\mathbf{Z}^* = \frac{Z}{L} [=] \frac{m}{m} [=] 1 \quad (1)$$

Donde:

Z es la coordenada axial.

L es la longitud característica de la coordenada axial.

Z* es la variable adimensional.

Para hacer adimensional la frecuencia $\omega [=] \frac{rad}{s}$, analizaremos las dimensiones de los términos que la acompañan, especificando la variable viscosidad como una constante, es decir, para un fluido newtoniano:

$$O_{\eta}(i\omega) \rightarrow \mu$$

$$\beta^* = \beta a = \sqrt{\frac{a^2 \rho}{\mu}}(\omega) [=] \sqrt{\frac{1 \text{ rad}}{s} \frac{1}{s}}$$

Se puede igualar dichos términos a una frecuencia característica:

$$\frac{a^2 \rho}{\mu} [=] \frac{1}{s} [=] \frac{1}{\omega_c}$$

De esta manera, podemos obtener la variable adimensional beta en función de una frecuencia adimensional:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\omega^*} \quad (2)$$

$$\text{Donde } \omega^* = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (3)$$

ω^* es una variable adimensional.

ω es la frecuencia presente en el sistema

ω_c es una frecuencia característica de la densidad, y la viscosidad.

Con estos grupos adimensionales y los mencionados a continuación, podemos adimensionar la función de transferencia para el modelo del capilar de la siguiente manera.

Función de transferencia:

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = 8i^2 \frac{1}{(R_2 \beta(\omega))^2 \frac{O_{\eta}(i\omega)}{\eta_0}} \left(1 - 2 \frac{J_1(R\beta(\omega))/R\beta(\omega)}{J_0(R\beta(\omega))} \right) \quad (4)$$

Grupos adimensionales:

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = T^*(\omega) \quad (5)$$

$$\beta^* = R\beta \quad (6)$$

$$\frac{O_\eta(i\omega)}{\eta_0} = O_\eta^*(i\omega) \quad (7)$$

Función de Transferencia Adimensional Newtoniana para el capilar:

$$T^*(\omega) = 8i^2 \frac{1}{\beta^* O_\eta^*(i\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta^*(\omega))/\beta^*(\omega)}{J_0(\beta^*(\omega))} \right) \quad (8)$$

Ahora adimensionamos la Función de Transferencia para el modelo de la corona circular como se muestra a continuación.

Función de Transferencia Adimensional Newtoniana para la corona circular:

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{\eta_0}{(R_2\beta)^2 O_\eta(i\omega)} \left\{ 2C_3(\omega) \frac{J_1(R_2\beta) - J_1\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right) \frac{R_1}{R_2}}{R_2\beta} + 2C_4(\omega) \frac{Y_1(R_2\beta) - Y_1\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right) \frac{R_1}{R_2}}{R_2\beta} - \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right] \right\} \quad (9)$$

En donde las constantes C_3 y C_4 están dadas por:

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right) - Y_0(R_2\beta)}{Y_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right) J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta) J_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right)} \quad (10)$$

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(R_2\beta) - J_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right)}{Y_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right) J_0(R_2\beta) - Y_0(R_2\beta) J_0\left(\frac{R_1}{R_2} R_2\beta\right)} \quad (11)$$

Grupos adimensionales:

$$\frac{T(\omega)}{\varphi_0} = T^*(\omega) \quad (5)$$

$$\beta^* = R_2\beta \quad (12)$$

$$\frac{O_\eta(i\omega)}{\eta_0} = O_\eta^*(i\omega) \quad (13)$$

$$R^* = \frac{R_1}{R_2} \quad (14)$$

Aplicando estos grupos adimensionales en la función de Transferencia obtenemos lo siguiente:

$$T^*(\omega) = 8i^2 \frac{1}{(\beta^*)^2 O_\eta^*(i\omega)} \left\{ 2C_3(\omega) \frac{J_1(\beta^*) - J_1(R^*\beta^*)R^*}{\beta^*} + 2C_4(\omega) \frac{Y_1(\beta^*) - Y_1(R^*\beta^*)R^*}{\beta^*} - [1 - (R^*)^2] \right\} \quad (15)$$

En donde las constantes C_3 y C_4 están dadas por:

$$C_3(\omega) = \frac{Y_0(R^*\beta^*) - Y_0(\beta^*)}{Y_0(R^*\beta^*) J_0(\beta^*) - Y_0(\beta^*) J_0(R^*\beta^*)} \quad (16)$$

$$C_4(\omega) = \frac{J_0(\beta^*) - J_0(R^*\beta^*)}{Y_0(R^*\beta^*) J_0(\beta^*) - Y_0(\beta^*) J_0(R^*\beta^*)} \quad (17)$$

4.2 Representación mecánica del modelo reológico

Este operador es utilizado en la ecuación función de transferencia de un fluido viscoelástico, Ecs. (40) y (25) de los casos del capilar y corona circular. A continuación, se desarrolla el operador de Burgers que describe la interacción polímero-polímero y membrana flexo eléctrica. El modelo matemático se describe mediante la suma de todas las contribuciones en un sistema mecánico en paralelo:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + G_y \quad (18)$$

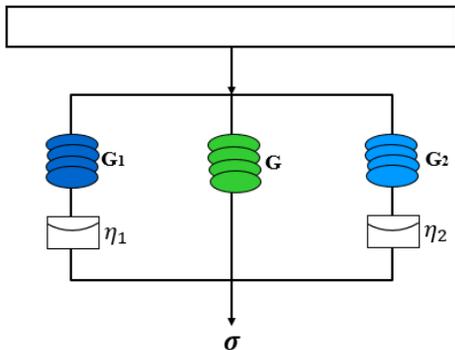


Figura 4.1. Sistema de Burgers Modificado, donde G_1 , η_1 y G_2 , η_2 representan la viscoelasticidad del primer polímero. contribución elástica y viscosa del primer y segundo polímero. G representa la contribución elástica de una membrana intermedia.

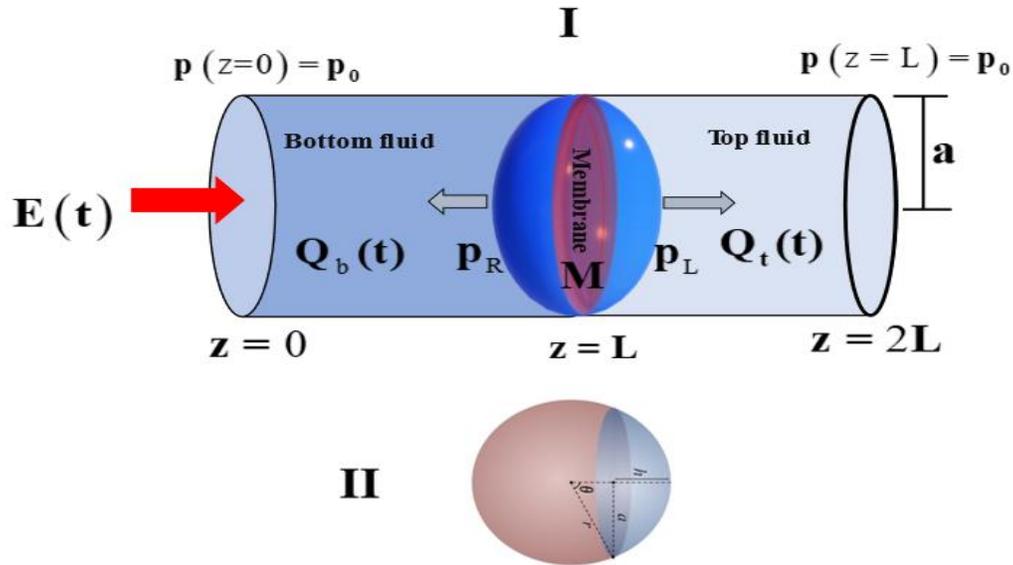


Figura 2. Ilustra el sistema de estudio en este trabajo de investigación. El campo eléctrico producido por los fenómenos electrofisiológicos del cuerpo humano, en este caso, las células ciliadas del oído interno. Induce que la membrana se deforme hacia arriba y hacia abajo y forme un domo esférico, como el que se observa en el sistema. Los flujos volumétricos $Q_1 = Q_2$ y son generados por el movimiento de las fases líquidas viscoelástica en el medio.

Donde

σ_1 : Representa el esfuerzo viscoelástico del primer polímero

$$\sigma_1 + \lambda_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \eta_1 \dot{\gamma} \quad (19)$$

σ_2 : Representa el esfuerzo viscoelástico del segundo polímero

$$\sigma_2 + \lambda_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \eta_2 \dot{\gamma} \quad (20)$$

G : Representa una contribución elástica de la membrana flexoeléctrica. En la Ec. (21) γ representa la deformación de la membrana flexoeléctrica.

$$\sigma_3 = G \cdot \gamma \quad (21)$$

$\dot{\gamma}$: Tensor rapidez de deformación.

$$\dot{\gamma} = 2D \quad (22)$$

D : Tensor de rapidez de deformación.

$$D = \frac{1}{2}(\nabla V + (\nabla V)^T) \quad (23)$$

∇V : Tensor espacial gradiente de velocidad, el cual representa los cambios espaciales del vector velocidad.

$(\nabla V)^T$: Transpuesta del tensor espacial del gradiente de velocidad.

4.3 Deducción del Operador de Burgers Modificado

En esta sección, se desarrollará la deducción del operador viscosidad para el modelo de un sistema de Burgers Modificado. De las Ecs. (5) y (6) se factoriza el esfuerzo viscoelástico σ_1 y σ_2 con el fin de sustituirlos en la Ec. (4) como se muestra a continuación:

$$\sigma_1 = \frac{2\eta_1 D}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (24)$$

$$\sigma_2 = \frac{2\eta_2 D}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} \quad (25)$$

Sustituyendo las Ecs. (10) y (11) en la Ec. (4):

$$\sigma = \frac{2\eta_1 D}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{2\eta_2 D}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} + G\gamma \quad (26)$$

Se multiplica la Ec. (26) por el siguiente producto sin afectar la igualdad como se muestra a continuación:

$$\left(\sigma = \frac{2\eta_1 D}{1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{2\eta_2 D}{1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}} + G\gamma \right) \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Obteniendo lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = 2\eta_1 \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) D + 2\eta_2 \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) D + G \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \gamma \quad (27)$$

Operando el producto del lado izquierdo de la ecuación:

$$\sigma + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\lambda_1 \lambda_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \quad (28)$$

La Ec. (28) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\sigma + \sum \lambda \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + \prod \lambda \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}\right) \quad (29)$$

Ahora bien, se comenzará a simplificar el lado derecho de la igualdad de la Ec. (27) y factorizando 2D:

$$\left[\eta_1 + \eta_2 + (\eta_1 \lambda_2 + \eta_2 \lambda_1) \frac{\partial}{\partial t}\right] 2D + G \left(1 + \sum \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \prod \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right) \gamma \quad (30)$$

Simplificando todo el primer término de la Ec. (30) como se muestra:

$$\eta_1 + \eta_2 = \sum \eta \quad (31)$$

$$\eta_1 \lambda_2 + \eta_2 \lambda_1 = G_1 \lambda_1 \lambda_2 + G_2 \lambda_2 \lambda_1 = \lambda_1 \lambda_2 (G_1 + G_2) = \prod \lambda \cdot \sum G \quad (32)$$

Contemplando las Ecs. (31) y (32), se puede escribir la Ec. (27) como:

$$\left(1 + (\sum \lambda) \frac{\partial}{\partial t} + (\prod \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma = \left[\sum \eta + (\prod \lambda \cdot \sum G) \frac{\partial}{\partial t}\right] 2D + G \left(1 + \sum \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \prod \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right) \gamma \quad (33)$$

Ya que σ, D y γ representan un tensor de deformación, se tiene que $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = 2\dot{D}$, se aplicará esta definición a la Ec. (33):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\sum \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\prod \lambda) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \sigma = \left[\sum \eta \frac{\partial}{\partial t} + (\prod \lambda \cdot \sum G) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] 2D + G \left(1 + \sum \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \prod \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right) 2D \quad (34)$$

Factorizando 2D y posteriormente operando G, como se muestra:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\sum \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\prod \lambda) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \sigma = \left[\sum \eta \frac{\partial}{\partial t} + (\prod \lambda \cdot \sum G) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + G + G \sum \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + G \prod \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right] 2D \quad (35)$$

Agrupando términos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\sum \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\prod \lambda) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \sigma = \left[G + (G \sum \lambda + \sum \eta) \frac{\partial}{\partial t} + (\prod \lambda \cdot \sum G + G \prod \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] 2D \quad (36)$$

Factorizando G se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\Sigma \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\Pi \lambda) \frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \sigma = G \left[1 + (\Sigma \lambda + \Sigma \eta/G) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\Pi \lambda}{G} \cdot \Sigma G + \Pi \lambda\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] 2D \quad (37)$$

Donde

$$\Sigma \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Pi \lambda = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Sigma \eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\Sigma G = G_1 + G_2$$

Y dado que:

$$O_\eta = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{\sigma}{2D} \quad (38)$$

Tomando en cuenta la Ec. (38), se despeja el esfuerzo (σ) obteniendo lo siguiente:

$$O_\eta = G \frac{1 + (\Sigma \lambda + \Sigma \eta/G) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\Pi \lambda}{G} \cdot \Sigma G + \Pi \lambda\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{\frac{\partial}{\partial t} + (\Sigma \lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\Pi \lambda) \frac{\partial^3}{\partial t^3}} \quad (39)$$

Siendo O_η el operador viscosidad de Burgers modificado.

I. Números adimensionales

A continuación, se muestra el escalamiento para el Burgers modificado, que facilita la programación y el encontrar números adimensionales. La Ec. (39) puede ser expresada en términos de la fluidez $\left(\frac{1}{O_\eta}\right)$, por lo que:

$$O_\Phi(D_t) = \frac{1}{G} \frac{D_t + \Sigma \lambda D_t^2 + \Pi \lambda D_t^3}{1 + \left(\frac{\Sigma \eta}{G} + \Sigma \lambda\right) D_t + \Pi \lambda \left(1 + \frac{\Sigma G}{G}\right) D_t^2} \quad (40)$$

Aplicando las siguientes variables adimensionales:

$$O_\Phi(D_t) = \frac{O_\Phi(D_t)}{\text{Fluidez}} = \frac{O_\Phi(D_t)}{1/\Sigma_G \Sigma_\lambda} = \Sigma_G \Sigma_\lambda O_\Phi(D_t) \quad (41)$$

Se escribe la Ec. (40) como:

$$\Sigma_G \Sigma_\lambda O_\Phi(D_t) = \Sigma_G \Sigma_\lambda \frac{1}{G} \frac{D_t + \Sigma \lambda D_t^2 + \Pi \lambda D_t^3}{1 + \left(\frac{\Sigma \eta}{G} + \Sigma \lambda\right) D_t + \Pi \lambda \left(1 + \frac{\Sigma G}{G}\right) D_t^2} \quad (42)$$

Se opera el producto Σ_λ del lado derecho de la ecuación y se multiplica por la memoria Π_λ por $\frac{(\Sigma_\lambda)^2}{(\Sigma_\lambda)^2}$ para tener el término adimensional, ya que $\Pi_\lambda [=] \text{seg}^2$, como se muestra a continuación:

$$O_\Phi(D_t) = \frac{1}{G/\Sigma_G} \frac{\Sigma_\lambda D_t + (\Sigma_\lambda)^2 D_t^2 + \frac{\Pi_\lambda}{(\Sigma_\lambda)^2} (\Sigma_\lambda)^3 D_t^3}{1 + \frac{1}{\Sigma_\lambda} \left(\frac{\Sigma_\eta}{G} + \Sigma_\lambda\right) \Sigma_\lambda D_t + \frac{\Pi_\lambda}{(\Sigma_\lambda)^2} \left(1 + \frac{1}{G/\Sigma_G}\right) (\Sigma_\lambda)^2 D_t^2}$$

Operando el producto de la Σ_η y multiplicando Σ_η por $\frac{\Sigma_G}{\Sigma_G}$, podemos obtener la viscosidad total mínima Ec. (43) dentro de nuestro operador, de la siguiente manera:

$$\Sigma_\eta = \frac{\Sigma_\eta}{\Sigma_\lambda \Sigma_G} \text{Viscosidad total}_{min} \quad (43)$$

$$O_{\Phi}(D_t) = \frac{1}{G/\Sigma_G} \frac{\Sigma_{\lambda} D_t + (\Sigma_{\lambda})^2 D_t^2 + \frac{\Pi_{\lambda}}{(\Sigma_{\lambda})^2} (\Sigma_{\lambda})^3 D_t^3}{1 + \left(\frac{\Sigma_{\eta}}{\Sigma_{\lambda} \Sigma_G} \frac{1}{G/\Sigma_G} + \frac{\Sigma_{\lambda}}{\Sigma_{\lambda}} \right) \Sigma_{\lambda} D_t + \frac{\Pi_{\lambda}}{(\Sigma_{\lambda})^2} \left(1 + \frac{1}{G/\Sigma_G} \right) (\Sigma_{\lambda})^2 D_t^2} \quad (44)$$

Aplicando la Ec. (43) de la viscosidad total mínima y la definición de la memoria de los fluidos

$$\Pi_{\lambda} = \frac{\Pi_{\lambda}}{(\Sigma_{\lambda})^2}_{min} \quad \text{obtenemos:}$$

$$O_{\Phi}(D_t) = \frac{1}{G/\Sigma_G} \frac{D_t + D_t^2 + \Pi_{\lambda} D_t^3}{1 + \left(\Sigma_{\eta} \frac{1}{G/\Sigma_G} + 1 \right) \Sigma_{\lambda} D_t + \Pi_{\lambda} \left(1 + \frac{1}{G/\Sigma_G} \right) D_t^2} \quad (45)$$

En el término señalado en un círculo azul, se comparan dos mecanismos elásticos del sistema, G que está asociado con la elasticidad de la membrana suave y Σ_G que relaciona la elasticidad de los fluidos del sistema. La elasticidad de la membrana es mínima mientras que la elasticidad de los fluidos es macroscópica. El propósito de esta operación es cuantificar la elasticidad de la membrana G , es por eso por lo que se propone lo siguiente:

$$\frac{1}{G} = \frac{1-m}{m} \quad (46)$$

Donde m representa la elasticidad de la membrana.

Por lo tanto, podemos aplicar esta propuesta a la Ec. (47).

$$O_{\Phi}(D_t) = \frac{1}{G} \frac{D_t + D_t^2 + \Sigma_{\lambda} D_t^3}{1 + \left(\Sigma_{\eta} \frac{1}{G} + 1 \right) \Sigma_{\lambda} D_t + \Pi_{\lambda} \left(1 + \frac{1}{G} \right) D_t^2} \quad (47)$$

Aplicando la Ec. (42) y operando se obtiene finalmente nuestro Operador viscosidad de Burgers Modificado, adimensional:

$$O_{\Phi}(D_t) = \frac{1-m}{m} \cdot \frac{D_t + D_t^2 + \Pi_{\lambda} D_t^3}{1 + \left(1 + \frac{1-m}{m} \Sigma_{\eta} \right) D_t + \frac{1}{m} \Pi_{\lambda} D_t^2} \quad (48)$$

De esta manera nos es posible cuantificar la elasticidad de la membrana.

- $m \ll 1$: *Membrana deformable* o membrana suave, que permite la vibración y resonancia que aumenta la magnitud del flujo de fluido que pasa a través de ella.
- $m = 1$: *Membrana sólida*, que no posibilita una resonancia que aumente la magnitud del flujo.

Se hace uso de la Transformada de Fourier en la Ec. (48) para transformar lo que está en función del tiempo al espacio de la frecuencia ω , obteniendo lo siguiente:

$$O_{\Phi}(\omega) = \frac{1-m}{m} (i\omega) \frac{1 + (i\omega) + \Pi_{\lambda} (i\omega)^2}{1 + \left(1 + \frac{1-m}{m} \Sigma_{\eta} \right) (i\omega) + \frac{1}{m} \Pi_{\lambda} (i\omega)^2} \quad (49)$$

Por lo tanto, nuestra Función de Transferencia Compleja (FTC) para el capilar, con el operador viscosidad en términos de fluidez para un fluido de Burgers Modificado, queda de la siguiente manera:

$$T^*(\omega) = O_{\Phi}(\omega) \frac{8i^2}{\beta^* O_{\eta}^*(i\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta^*(\omega)) / \beta^*(\omega)}{J_0(\beta^*(\omega))} \right) \quad (50)$$

A continuación, se utilizan las variables adimensionales con el fin de escalar los resultados obtenidos. La nueva función de transferencia que contiene el operador viscosidad de Burgers Modificado.

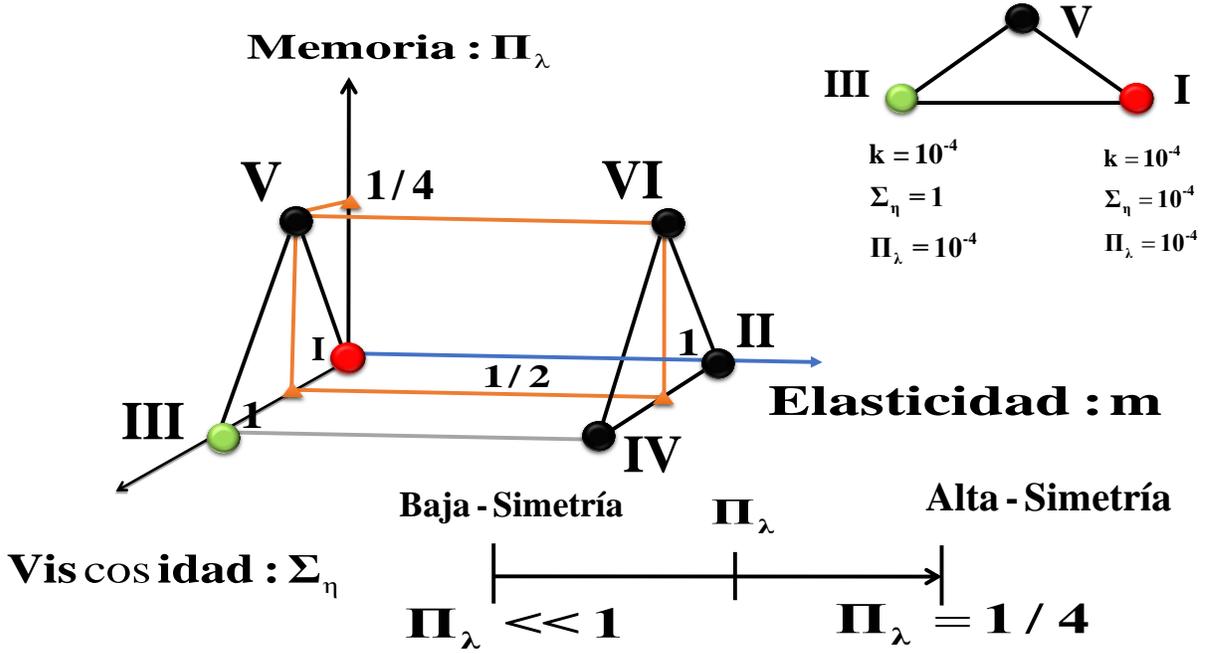


Figura 4. Sistema de Burgers Modificado, donde G_1, η_1 y G_2, η_2 representan la viscoelasticidad del primer polímero. contribución elástica y viscosa del primer y segundo polímero. G representa la contribución elástica de una membrana intermedia.

Es necesario establecer nuestro parámetro adimensional beta en términos de la fluidez $O_\phi(\omega)$ y del número de Deborah, para eso es necesario multiplicar primeramente el operador viscosidad por $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 1$ para poder introducir la variable adimensional $\frac{On(i\omega)}{n_0} = On^*$, como se muestra en el siguiente desarrollo.

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{n_0 \frac{On(i\omega)}{n_0}}} \right)$$

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\frac{R^2 \rho \omega}{n_0 On^*}} \right) \quad (51)$$

A continuación, se vuelve a escalar la ecuación multiplicando por el tiempo de relajación $\frac{\lambda}{\lambda} = 1$, para poder hacer la frecuencia adimensional que está dada por $\omega^* = \omega \lambda$, obteniendo lo siguiente.

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\frac{R^2 \rho \omega^*}{\lambda n_0 On^*}} \right) \quad (52)$$

La viscosidad a bajo corte (n_0) es igual al módulo elástico de corte (G_0) por el tiempo de relajación de Maxwell (λ).

$$n_0 = G_0 \lambda \quad (53)$$

Se sustituye la Ec. (53) en la Ec. (52) y se reacomoda con el fin de obtener un tiempo característico que viene dado por $\sqrt{R^2 \rho / G_0} = T_C$.

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\frac{R^2 \rho \omega^*}{G_0 \lambda^2 \omega n^*}} \right)$$

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{R^2 \rho / G_0}}{\lambda} \right)^2 \frac{\omega^*}{\omega n^*}} \right) \quad (54)$$

Sustituyendo el T_C en la Ec. (54) queda.

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\left(\frac{T_C}{\lambda} \right)^2 \frac{\omega^*}{\omega n^*}} \right) \quad (55)$$

El número de Deborah viene dado por $De = \frac{\lambda}{T_C}$. Ahora es posible sustituirlo en la Ec. (55) y ya que la fluidez es $\frac{1}{\omega n^*} = O_\phi$, finalmente nuestro parámetro Beta dimensional queda establecido como:

$$\beta^* = I^{3/2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{De} \right)^2 O_\phi \omega^*} \right) \quad (56)$$

Donde la fluidez (O_ϕ) queda en función de las variables *memoria de los fluidos* Π_λ , viscosidad total Σ_η , elasticidad m y la frecuencia ω . Y el parámetro beta queda en función de Π_λ , Σ_η , m , ω y el número De.

La variable $\Pi_\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ relaciona el tiempo de relajación de ambos fluidos, cuando ambos fluidos tienen la misma viscosidad $\Sigma \lambda$, da un valor máximo numérico de $1/4$. A continuación, se muestra una demostración de dicho valor.

La memoria $\Pi_\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ cuanta con la siguiente restricción.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (57)$$

De la Ec. (58) despejamos λ_1 y se sustituye en la memoria.

$$\Pi_\lambda = (1 - \lambda_2) \lambda_2 \quad (58)$$

Posteriormente derivamos la Ec. (58) con respecto de λ_2 como se muestra:

$$\frac{d\Pi_\lambda}{d\lambda_2} = \frac{d}{d\lambda_2} (\lambda_2 - \lambda_2^2)$$

$$\frac{d\Pi_\lambda}{d\lambda_2} = \frac{d}{d\lambda_2} (\lambda_2) - \frac{d}{d\lambda_2} (\lambda_2^2)$$

$$\frac{d\Pi_\lambda}{d\lambda_2} = 1 - 2\lambda_2 \quad (59)$$

Igualando a cero la Ec. (59) y despejando λ_2 obtenemos el punto crítico:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad (60)$$

Sustituyendo el punto crítico Ec. (60) en la Ec. (58) obtenemos el valor.

$$\Pi_\lambda = (1 - \lambda_2)\lambda_2 = (1 - 1/2) * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (61)$$

De acuerdo con la restricción de la Ec. (57), y el valor obtenido de la memoria, al despejar λ_1 obtenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, esto nos indica que las fases de ambos fluidos son simétricas entre sí ya que tienen la misma elasticidad. El valor de Π_λ que relaciona la elasticidad de ambos fluidos cambia cuando las fases del sistema son asimétricas.

Para describir el esfuerzo de la magnitud de flujo en la pared, es necesario partir del perfil de velocidades de la Ec. 29 del apartado 3.1 de este guion, ya que el esfuerzo viene dado por la siguiente ecuación.

$$\sigma = \frac{1}{O_\phi(D_t)} \frac{\partial V_z(r, \omega)}{\partial r} \quad (62)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades en la Ec. (62) y se continúa operando la derivada.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{O_\phi(D_t)} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_1 J_0(\beta r) + \frac{\nabla P(\omega)}{i^2 \beta^2 O_\eta(i\omega)} \right) \\ \sigma &= \frac{1}{O_\phi(D_t)} C_1 \frac{\partial}{\partial r} (J_0(\beta r)) \\ \sigma &= \frac{1}{O_\phi(D_t)} C_1 \frac{\partial}{\partial \beta r} J_0(\beta r) \cdot \frac{\partial(\beta r)}{\partial r} \\ \sigma &= \frac{1}{O_\phi(D_t)} C_1 \beta J_1(\beta r) \end{aligned} \quad (63)$$

Sustituyendo la constante C_1 se obtiene.

$$\sigma = \frac{1}{O_\phi(D_t)} \frac{\nabla P(\omega)}{\beta^2 O_\eta(i\omega) J_0(\beta a)} \beta J_1(\beta r) \quad (64)$$

Ya que se trata del esfuerzo en la pared, la fluidez y la viscosidad a bajas velocidades de deformación serán igual a uno ($O_\phi(D_t) = O_\eta(i\omega) = \mathbf{1}$) y se multiplica por $2/2=1$, $\frac{a}{a} = 1$ con el fin de simplificar y adimensionar la ecuación.

$$\sigma = \frac{2\nabla P(\omega)a}{2\beta a J_0(\beta a)} J_1(\beta r) \quad (65)$$

Se puede simplificar la Ec. (65) sabiendo que el esfuerzo en la pared es $\sigma_\omega = \frac{\nabla P(\omega)a}{2}$ y $\beta^* = \beta a = \beta r$ por lo que se obtiene una expresión para el esfuerzo inercial.

$$\sigma_I = 2 \frac{\sigma_\omega J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \quad (66)$$

Entonces el esfuerzo en la pared está dado por $\sigma = \frac{\sigma_I}{\sigma_\omega}$, y finalmente se obtiene la *función de transferencia en la pared*.

$$\sigma = 2 \frac{J_1(\beta^*)}{\beta^* J_0(\beta^*)} \quad (67)$$

Una vez obtenidas las funciones adimensionales necesarias como la FTC, el parámetro Beta y el número de Deborah, estamos listos para realizar las simulaciones y observar el comportamiento de nuestro sistema, cuando se tiene un fluido viscoelástico de Burgers Modificado que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil, que se muestran en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5. Simulaciones

En este capítulo, se desarrollan las simulaciones de la función de Transferencia Compleja en el programa Mathematica. En particular, se analizaron los modelos de Newton y Burgers modificado en un capilar de radio $r = a$ y $z = L$.

5.1 Función de Transferencia Compleja Newtoniano Modelo Capilar

A continuación, se muestra el gráfico de la simulación obtenida, de un fluido newtoniano modelado como un viscoelástico que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil.

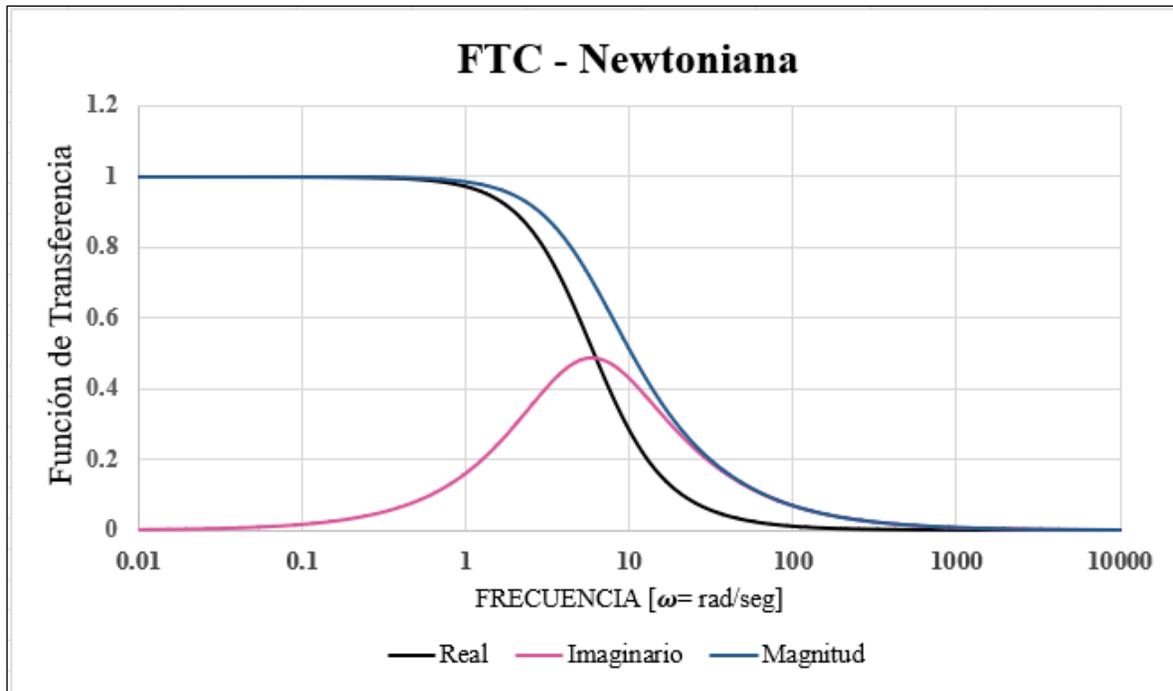


Figura 5.1. Ilustra la contribución real, imaginaria y de magnitud de la función de transferencia compleja vs frecuencia, para un líquido Newtoniano, i.e. sin elasticidad.

Matemáticamente, en la Fig.5.1 se muestra la parte real e imaginaria de la función de transferencia compleja (FTC) para un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. La parte real de la FTC describe un comportamiento constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia crítica, ésta muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un segundo valor crítico, seguido de un comportamiento asintótico hasta el valor cero.

Físicamente, se observa en la parte real un comportamiento de relajación asociado a que el sistema llega de estado de menor a mayor frecuencia por efecto del gradiente de presión pulsátil. Mientras que, la parte imaginaria está asociada a la disipación.

La parte imaginaria de la FTC vs frecuencia muestra el clásico comportamiento resonante a bajas frecuencias [0.01, 0.10] este es casi constante e independiente de la frecuencia. En el intervalo de [0.1, 8] el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. Este valor es conocido como resonancia y se puede interpretar como la máxima energía liberada en el sistema u oscilatorio. La frecuencia a la que se lleva esta vibración se le conoce como frecuencia resonante. A una frecuencia mayor a la crítica, i.e., $w > w_c$, la parte I-FTC decrece monótonamente hasta un valor asintótico que se aproxima a cero.

- a) Nótese que el máximo de la parte imaginaria se obtiene debido a un acoplamiento entre los mecanismos, fuerzas viscosas e inerciales.
- b) A frecuencias bajas la respuesta real domina sobre la parte imaginaria, mientras que a frecuencias grandes se invierten los mecanismos.

Biológicamente, la anchura y el máximo están asociados a proceso biológicos, en este punto se necesita más información.

5.2 Función de Transferencia Compleja para Modelo De Burgers Modificado en Capilar

Matemáticamente, en la Fig. 5.2 se muestra el comportamiento de la magnitud del flujo volumétrico de un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en función de una frecuencia ω , en diferentes números de Deborah, que transporta un fluido viscoelástico de Burgers Modificado. Cuando se tiene un $De = 0.1$ la magnitud del flujo tiene un comportamiento decreciente asintótico con forme se aumenta la frecuencia. En un $De = 0.5$ se muestra un comportamiento creciente en un intervalo de $[0.2, 1]$ en el cual alcanza una frecuencia crítica y posteriormente decrece asintóticamente. Cuando el $De = 1$ el sistema refleja un crecimiento exponencial en el intervalo de $[0.1, 1.3]$ hasta un valor de magnitud máximo en una frecuencia de aproximadamente 1.3 rad/seg y posteriormente decrece asintóticamente.

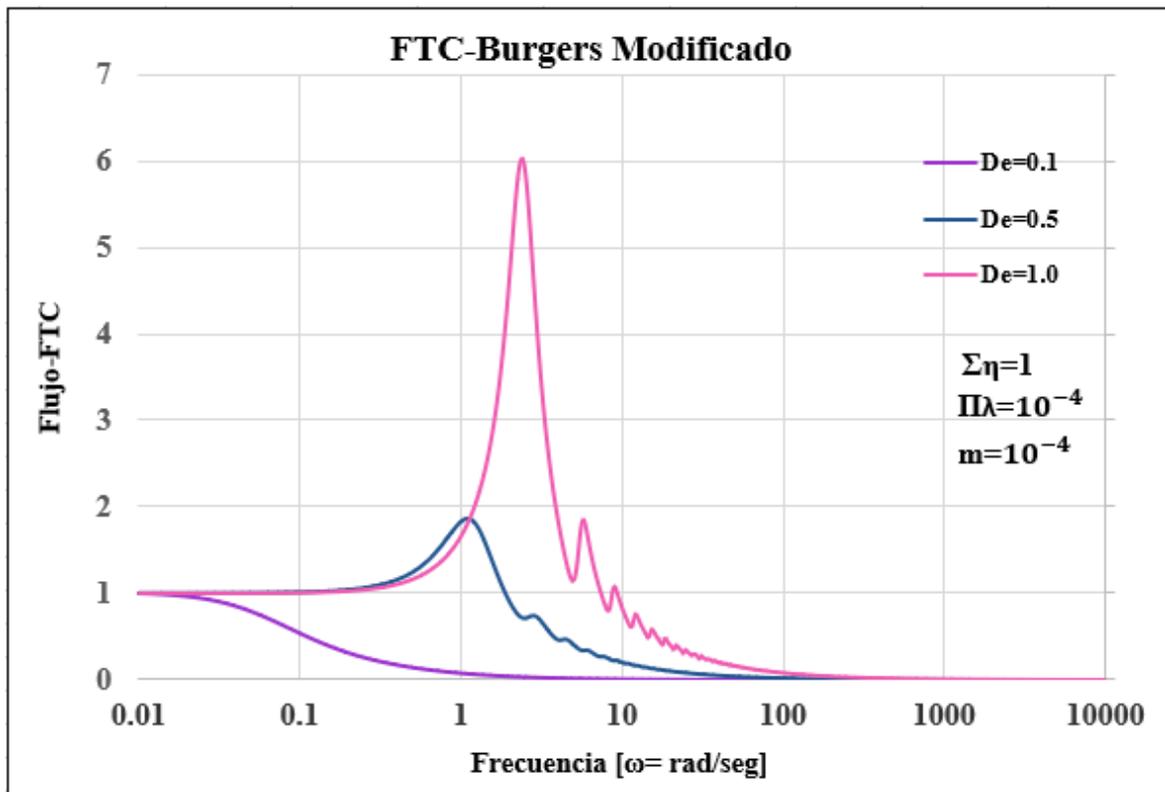


Figura 5.2 Ilustra la magnitud de flujo con la Función de Transferencia Compleja vs la frecuencia, para un fluido viscoelástico de Burgers Modificado sujeto a tres valores diferentes del número de Deborah.

Físicamente, en la Fig.5.2 esta máxima frecuencia a la que se lleva esta vibración es su frecuencia resonante o resonancia, lo que provoca un aumento considerable en la magnitud del flujo. Cuando alcanza una frecuencia mayor a la crítica ($\omega > \omega_c$) el sistema decrece asintóticamente hasta un valor cercano a cero.

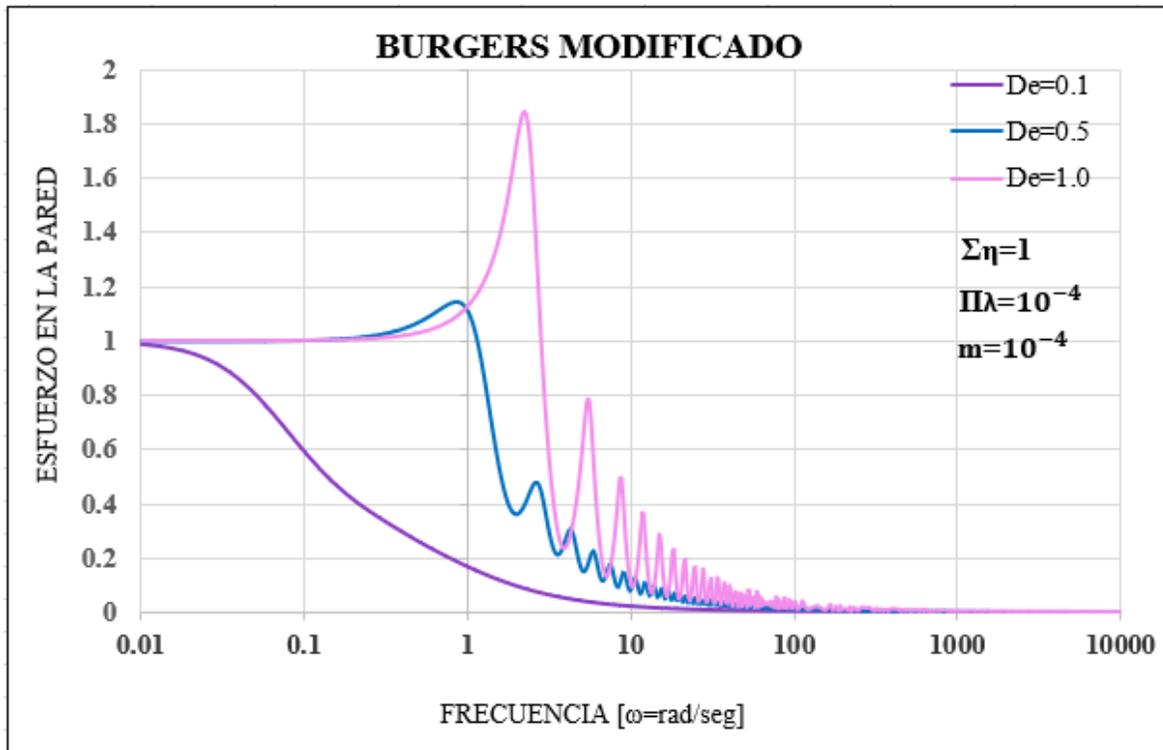


Figura 5.3 Ilustra la magnitud del esfuerzo en la pared de una simetría cilíndrica a diferentes números de Deborah, en función de la frecuencia $\omega [=] \frac{rad}{s}$, que transporta un fluido viscoelástico de Burgers Modificado.

En la Fig. 5.3 se muestra matemáticamente el esfuerzo en la pared del capilar causado por la magnitud de flujo en función de la Función de Transferencia Compleja para un fluido viscoelástico de Burgers Modificado, impulsado por un gradiente de presión pulsátil. Se aprecia como en el gráfico anterior, que con un $De=0.1$ el esfuerzo decrece asintóticamente cercano a cero, sin en cambio, en un $De=0.5$ se puede apreciar que ya existe una llamada resonancia, lo cual indica que la frecuencia crítica del sistema se encuentra en el intervalo de $[0.1,0.5]$, una vez que alcanza una frecuencia 1 rad/s aproximadamente, se tiene el punto resonante, posteriormente el esfuerzo desciende con una resonancia hasta un comportamiento asintótico a cero. Cuando el $De=1.0$ se tiene un fluido más viscoelástico y se aprecia un máximo esfuerzo en la pared que va de la mano con una resonancia, es decir, una frecuencia máxima mayor a la crítica. Físicamente, al tener un gradiente de presión con una frecuencia de 2 rad/s se alcanza una máxima magnitud de flujo en la pared.

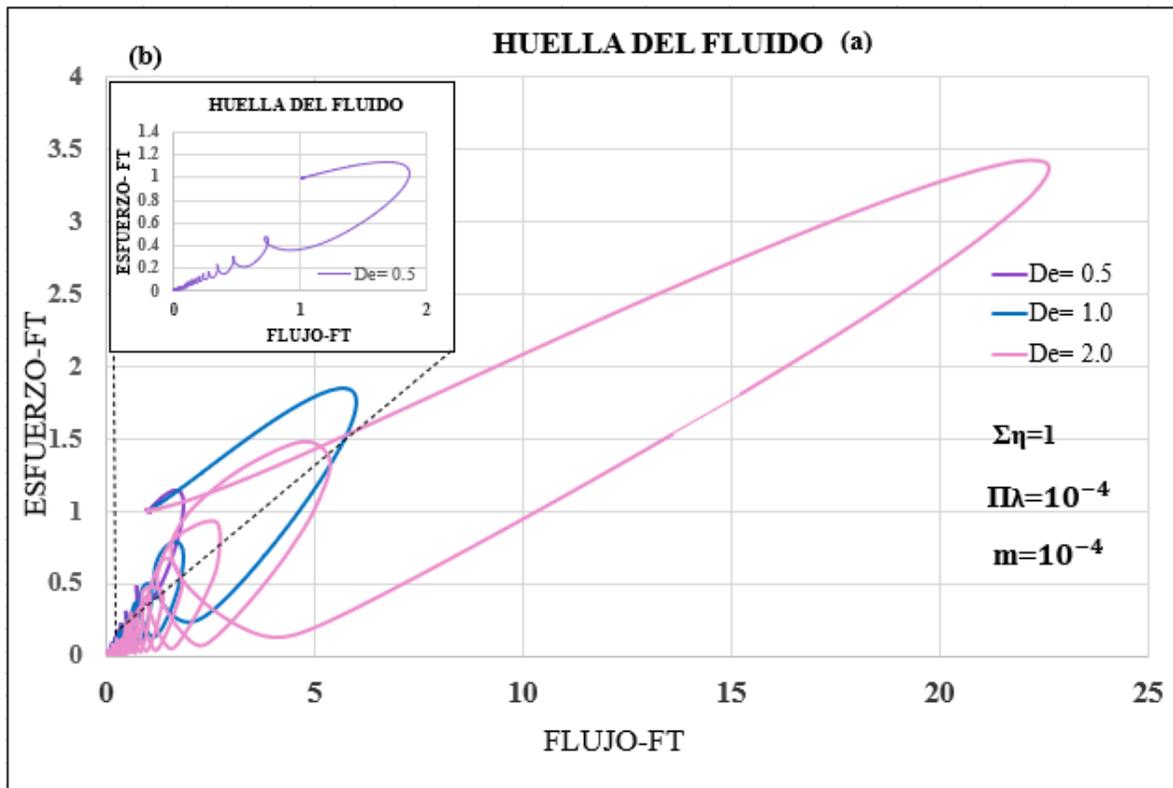


Figura 5.4 Ilustra la magnitud del flujo volumétrico vs el esfuerzo en la pared, a dos números de De diferentes.

En la Fig. 5.4 se aprecia un flujo volumétrico muy alto con el número $De=2.0$ lo cual contiene un gran esfuerzo en la pared de la geometría cilíndrica debido a la alta viscoelasticidad, sin en cambio, con el $De=1.0$ se tiene un menor flujo máximo, pero en ambos Deborah se alcanza una resonancia observable en los ciclos circulares. Los ciclos obtenidos son huellas digitales del sistema y son controlados por las propiedades reológicas, y de la membrana tipo cristal líquido de este estudio.

CAPÍTULO 6. Conclusiones y Trabajo a Futuro

6.1 Aportación al conocimiento

En este trabajo se analizó el efecto de un gradiente de presión pulsátil sobre el flujo volumétrico de líquidos newtonianos y no newtonianos para un fluido viscoelástico de Burgers Modificado en una geometría capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$. Suponiendo que el sistema se encuentra en estado no estacionario, proceso isotérmico, simetría cilíndrica, los mecanismos gravitacionales son despreciables y el fluido es caracterizado por las siguientes ecuaciones: (i) newtoniano, (ii) newtoniano con elasticidad, (iii) Maxwell, (iv) Burgers Modificado, se obtuvo una expresión analítica la cual describe la relación entre el gradiente de presión pulsátil y el flujo volumétrico. Para obtener la expresión analítica de la Función de Transferencia Compleja, se aplicó el formalismo de Fourier. Suponiendo que la velocidad y el gradiente de presión son funciones continuas, se dedujo una expresión cerrada para el perfil de velocidades, asumiendo que no existe deslizamiento en la pared del sistema. La expresión de la velocidad depende de la coordenada radial r y de las propiedades materiales del sistema. Para un fluido newtoniano la viscosidad, la elasticidad para el hematocrito y el tiempo de relajación para el fluido viscoelástico. Integrando el perfil de velocidades sobre el área de sección transversal, se obtuvo la expresión para el flujo volumétrico en función de la frecuencia. Esta expresión, es punto de partida para los cálculos presentado en la sección de simulación y análisis de resultados. La ventaja de esta formulación es la de generalizar los resultados para cualquier ecuación constitutiva reológica lineal y lo único que cambia es el operador viscosidad con el cual, se describe la reología del sistema.

En el caso newtoniano se observa que la parte real describe una función de relajación en donde hay dos mesetas y una zona de transición tipo ley de potencia. En el caso imaginario, se observa una curva resonante la cual se aprecia en los sistemas de estudio de la mecánica clásica en donde se tiene un sistema físico que está vibrando (oscilador armónico simple). Este tipo de campanas resonantes son punto de partida para el estudio de sistemas que se someten a campo eléctricos y magnéticos, por ejemplo: (i) la resonancia magnética nuclear, (ii) los movimientos geofísicos asociados a los temblores en donde las capas tectónicas se mueven y al contacto existen fuerzas de fricción las cuales liberan energía y con los gases combinados que salen del subsuelo hay una reacción y se producen luces de color azul (tribología).

La simulación de la parte imaginaria de la Función de Transferencia Compleja Newtoniana demuestra que con una frecuencia de 6 rad/s, se encuentra la máxima resonancia que se puede aplicar en el sistema.

En el caso de un fluido viscoelástico de Burgers Modificado la dinámica cambia significativamente. Las simulaciones de la parte real de la Función de Transferencia Compleja demuestran que se tiene una mayor magnitud de flujo con un $De=1.0$, $De=2.0$, en donde se encuentra la máxima resonancia que se puede aplicar en el sistema.

Se observa que existe una resonancia dominante seguida de resonancias secundarias. El primer hecho importante es que el máximo y la anchura de la curva resonante dominante depende de los mecanismos inerciales y viscoelásticos a través del número de Deborah el cual, es un cociente de tiempos característicos asociados a la inercia y la viscoelasticidad del material. Se observa el clásico comportamiento tipo diente de sierra, es decir, se observan funciones oscilantes y discontinuas para ciertos valores de la frecuencia. Desde un punto de vista biológico, las sub-resonancias pueden estar relacionadas a procesos biológicos asociados a la amplificación de la información acústica (células ciliadas del oído interno humano) o al bombeo dinámico de sangre con hipercolesterolemia.

6.2 Trabajo futuro

En este trabajo se analizó el flujo pulsátil en el régimen de viscoelasticidad lineal, es decir, fluidos que poseen las dos propiedades, viscosas (disipativas) y elásticas (almacenamiento de energía). Una continuación natural del mismo sería analizar y simular la Función de Transferencia Compleja para una simetría cilíndrica de tubos concéntricos el cual transporta un fluido viscoelástico de Burgers Modificado a través de la zona anular. Finalmente, la parte experimental es un pilar para contrastar estos resultados teóricos y los de laboratorio. Por último, este trabajo representa un esfuerzo constante y permanente en la búsqueda de conocimiento basado en fenómenos de transporte y reología como herramientas fundamentales en la descripción de nuevos sistemas y materiales.

NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
\mathbf{V}	Vector de velocidad [m/s]
\mathbf{g}	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$	Operador Nabla [1/m]
$\partial/\partial x^i$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
π	Constante Pi [1]
\mathcal{F}	Formalismo de la Transformada de Fourier

Variables dimensionales

\mathbf{a}	Radio del capilar [m]
\mathbf{L}	Longitud del capilar [m]
\mathbf{V}_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
\mathbf{V}_r	Componente radial del vector velocidad [m/s]

\mathbf{V}_θ	Componente angular del vector velocidad [m/s]
\mathbf{r}	Coordenada radial adimensional [m]
\mathbf{t}	Tiempo [s]
\mathbf{Q}	Flujo volumétrico [m ³ /s]
\mathbf{G}_0	Modulo Elástico [Pa]
\mathbf{G}'	Modulo de almacenamiento de Maxwell
\mathbf{G}''	Modulo de pérdida de Maxwell
∇p	Gradiente de presión [Pa]
∇p_z	Gradiente de presión en la dirección axial [Pa]

Variables adimensionales

σ_{rz}	Esfuerzo cortante adimensional [1]
ω	Frecuencia adimensional [1]
λ	Tiempo de relajación adimensional [1]
φ_I	Fluidez imaginaria adimensional [1]
φ_R	Fluidez real adimensional [1]
ω^*	Frecuencia adimensional [1]
ω	Frecuencia presente en el sistema [1]
ω_c	Frecuencia característica de la densidad, y la viscosidad [1]

Letras Griegas

β	Exponente del modelo de ley de potencia y Ellis.
$\partial V_z / \partial r$	Rapidez de deformación en z [1/s]
φ_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
φ_1	Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pa s]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
λ_J	Tiempo de retardo de Jeffrey [s]

ω	Frecuencia angular [rad/s]
ρ	Densidad [rad/s]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
η_0	Viscosidad a bajo corte [Pa s]
η_s	Viscosidad del solvente [Pa s]
η_p	Viscosidad del polímero [Pa s]
η'	Parte real de la Viscosidad compleja [Pa s]
η''	Viscosidad compleja [Pa s]

GLOSARIO

Deformación:	Cambio de posición con respecto a otra.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.
Esfuerzo en la pared:	Esfuerzo evaluado en la pared.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.
Flujo cortante:	Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
Flujo homogéneo:	Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Flujo oscilante:	Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Frecuencia Angular:	Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Modelo de Jeffreys:	Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.
Modelo de Burgers Modificado:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidezces de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.

Tensor de Esfuerzo:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.
Tiempo de retardo:	Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscoelasticidad no lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un sistema.

Bibliografía

- Aimee M. Torres Rojas, I. Pagonabarraga, E. Corvera-Poiré, Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes, *Physics Fluids* 29, 122003 (2017).
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Castro, M., Gutiérrez, M. E., Hernández, A., & Corvera Poiré, E. (2008, 26 noviembre). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 101(1), 1–4.
- Collepardo Guevara, R., & Corvera Poiré, E. (2007, 2 agosto). Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions. *PHYSICAL REVIEW E*, 76(2), 1–8.
- Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. *Phys. Rev. E*. 64, 016313/1-7.
- Currie, I.G, 1974 Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Phys. Rev. E*. 58 (5) 6323.
- Del Río, J. A., & Castrejón Pita, J. R. (2003, febrero). Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. *REVISTA MEXICANA DE FÍSICA*, 49(1), 74–85.
- Flores, J., Alastruey, J., & Corvera Poiré, E. (2016, 2 mayo). A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial. *Analysis of Biomedical Engineering*, 44(10), 3047–3068.
- Flores, J., Corvera Poiré, E., del Río, J. A., & López De Haro, M. (2010, 8 junio). A plausible explanation for heart rates in mammals. *ELSEVIER*, 265(1), 599–603.

- Herrera-Valencia E.E. & Rey, A, D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 372: 20130369/1-28.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.
- J. Flores, J. Alastruey, E. Corvera-Poiré, A novel analytical approach to pulsatile blood flow in the arterial network, *Annals of Biomedical Engineering*, 44, 3047-3068, 2016.
- M. Castro, M.E. Bravo-Gutiérrez, A. Hernández-Machado, E. Corvera-Poiré, Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels. *Physical Review Letters*, 101, 224501 (2008).
- Middleman, S. *Fundamentals of polymer Processing*, McGraw-Hill.
- R. Collepardo-Guevara, E. Corvera Poiré, Controlling viscoelastic flow tuning frequency during occlusions, *Physical Review E*, 76, 02630, (2007).
- Torres Rojas, M., Pagonabarraga, I., & Corvera Poiré, E. (2017, 14 diciembre). Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Physics of Fluids*, 29(1). <https://doi.org/10.1063/1.5001061>