



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MODELO ESTOCÁSTICO PARA LA VALUACIÓN DE PORTAFOLIOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
LIDIA LORENA ASTORGA GARCIA

DIRECTOR
ERICK TREVIÑO AGUILAR
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA (IMUNAM)

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE DEL 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

En principio quiero agradecer a la vida por haberme dado salud a mí y mi familia, y haberme permitido alcanzar esta meta en mi vida.

Agradecer de manera especial a mi esposo Rosario Alonso López, por atender a nuestro hijo en cada momento que no podía estar con él, para dedicarle tiempo a este trabajo. Por toda tu paciencia, comprensión y amor hacia nosotros; a mi amado Pabel Alonso López, quien es mi motivo y mi luz para seguir adelante.

Este trabajo no habría sido posible realizar sin la guía académica de mi estimado profesor, Erick Treviño. Gracias por toda su paciencia, sugerencias, comprensión y, sobre todo, por toda la confianza depositada en mí.

Agradecer también a todos los profesores del Posgrado en Ciencias Matemáticas que han contribuido en mi formación y el desarrollo de mi confianza. “Investigación realizada gracias Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<TA101322>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida”.

Lidia Astorga.

Modelo estocástico para valuación de portafolios

Lidia Lorena Astorga García

14 de diciembre de 2022

Palabras Clave:

Análisis de Fourier, Estimador de Fourier-Malliavin, Microestructura de mercados financieros, Volatilidad

Índice general

1. Microestructura de mercados financieros	3
1.1. Microestructura: modelo sintético	5
1.1.1. Caso I: Neutralidad al riesgo	6
1.1.2. Caso II: Aversión al riesgo	6
1.1.3. Caso III: Agente informado	7
1.2. Comunalidades en el rendimiento	
de los acciones	8
1.3. Alternativa: Libro de órdenes latente y la teoría del mercado	
inelástico	10
1.3.1. Efectos transitorios: La ley de la raíz cuadrada	11
1.3.2. Distinguiendo entre efectos: La Teoría de la Liquidez La-	
tente (LLT)	12
1.3.3. Cuantificando a LLT: Un modelo de difusión-reacción	14
1.3.4. Efectos permanentes: El multiplicador GK (M)	15
2. Estimador de co-volatilidad de Fourier	17
2.1. Definiciones básicas en el Análisis de	
Fourier	18
2.2. Cálculo estocástico	22
2.3. La convolución de Bohr	26
2.4. Estimador de co-volatilidad	26
2.5. Co-volatilidad integrada	36
2.6. Coeficientes de co-volatilidad instantánea	36
2.6.1. Discretización de integrales mediante sumas de	
Rieman-Stieltjes	38
2.7. La trayectoria de la co-volatilidad	43
3. Estimaciones con datos reales	45
3.1. Antecedente: COVID 19	46
3.2. Datos	48
3.3. Gráficas de volatilidad	50
3.4. Gráficas de dispersión	51
3.5. American Airlines Group Inc.	56
3.6. Advance Auto Parts, Inc.	57

3.7. Apple Inc.	58
3.8. Accenture plc.	61
3.9. Conclusiones	63
A. Código R	65
B. Bibliografía	67

Introducción

El concepto principal del presente trabajo de tesis es el de la volatilidad de activos financieros. El cual, abordamos desde tres diferentes perspectivas que corresponden a cada uno de los capítulos.

En el Capítulo [1](#) revisamos el concepto de volatilidad bajo la perspectiva de microestructura de mercado. Este, está formulado como una revisión de resultados de artículos selectos, en los cuales se mencionan modelos que tienen relación con la volatilidad. A su vez, nuestra motivación por mostrar estos modelos es revisar otros factores que influyen en el mercado de activos que estén asociados a la volatilidad en el precio de los mismos; y también, enlazar algunos de estos factores con los resultados que obtuvimos del precio de la volatilidad de las acciones que se mencionan en el Capítulo [3](#).

En el Capítulo [2](#), mencionamos la teoría detrás del modelo de Fourier-Malliavin para estimar la volatilidad del precio de activos como fue publicado en [\[18\]](#) y presentado sistemáticamente en [\[19\]](#). Además, damos una demostración rigurosa del Teorema 2.1, Lema 3.1 y Lema 3.2 de [\[18\]](#).

En el Capítulo [3](#), implementamos el método de Fourier-Malliavin para el cálculo de la volatilidad del precio de acciones, con datos de alta frecuencia de acciones que cotizan en el mercado de Estados Unidos. La implementación del código para el cálculo de la volatilidad del precio de acciones la realizamos en el lenguaje de programación R, el cual incluimos en el apéndice [A](#). Trabajamos con datos de acciones que cotizan en Estados Unidos debido a su disponibilidad.

Capítulo 1

Microestructura de mercados financieros

El objetivo en este capítulo es hacer una exposición de una selección de artículos en los que se analiza la formación de precios de activos financieros. Lo que tiene una relación con la volatilidad del precio de estos, bajo la perspectiva de microestructura de mercados.

En el paradigma clásico, los mercados son eficientes y los precios se alcanzan en equilibrio mediante la ley de la oferta y demanda. Sin embargo, dicha formulación no explica satisfactoriamente el comportamiento de precios, ni en todos los mercados ni en todas las situaciones. Entonces es necesario incorporar en el estudio otros elementos. Precisamente, la microestructura de mercado surge de la necesidad de determinar los precios de activos financieros como el resultado de las acciones interactuando en los mercados, incorporando nuevos elementos, especialmente el flujo de órdenes y el impacto de precios. Una de las primeras descripciones de la microestructura de mercado se encuentra en el texto clásico del prominente economista Léon Walras, *Elements d'Economie Politique Pure* [15], en el cual se describe el funcionamiento de la bolsa de París. En 1976 Mark Garman escribe un artículo que lleva como título microestructura de mercados [8]. En dicho trabajo, Garman hace referencia a nuevos elementos en el estudio de precios de acciones: La creación de mercado y el costo de inventario. A partir de entonces, se acuña el término microestructura de mercados. Creando así un área de las finanzas que estudia las causas que afectan los precios y las cotizaciones con especial atención en el flujo de órdenes, contabilizando a una descripción del mercado a nivel microscópico.

Desde entonces a la fecha del día de hoy, la perspectiva de microestructura de mercado ha cobrado fuerza y en buena medida ha tenido éxito en formular una teoría para la formación de precios. De acuerdo con [17], la microestructura de mercados es el estudio del proceso y los resultados del intercambio de activos bajo reglas comerciales explícitas. En dicho intercambio es útil el distinguir a diferentes categorías de participantes:

4 CAPÍTULO 1. MICROESTRUCTURA DE MERCADOS FINANCIEROS

- Los clientes (*customers*) son los encargados de enviar las órdenes de compra y venta.
- Los agentes de corretaje (*brokers*) organizan y llevan a cabo las transacciones entre los clientes, a cambio de recibir una comisión cuando el intercambio se realiza.
- Los negociantes (*dealers*) actúan como agentes de corretaje, y además realizan órdenes de compra y venta por cuenta propia.
- Los hacedores de mercado (*market makers*) operan como agentes de corretaje y negociantes, con la diferencia de que son instituciones virtuales o presenciales en las que los clientes realizan las órdenes.
- Las autoridades de supervisión y regulación son las encargadas de fijar el precio a los activos para los hacedores de mercado.

Cada uno de estos participantes persiguen objetivos específicos e interactúan entre sí a través de la observación del libro de órdenes, en el cual se registra el mejor precio en una orden de compra y venta realizada por los clientes en un tiempo dado. Modelos matemáticos de microestructura se basan en la correcta definición de cada uno de estos participantes y especifican mecanismos con los que interactúan. Investigación empírica busca establecer hechos estilizados en la interacción. En especial para la materia de este trabajo relacionamos la volatilidad con el impacto de precios de las acciones que se muestran en el Capítulo 3 considerando la interacción de los diferentes participantes.

En la Sección 1.1 presentamos el modelo sintético de [1], el cual determina precios en equilibrio al considerar interacciones de los participantes. Veremos que la solución al modelo involucra una cuantificación de la variación de precios, la varianza; en un contexto dinámico con precios modelados por procesos estocásticos en lugar de la varianza de variables aleatorias. En uno de los casos de este modelo, 1.1.3, se usan funcionales de la variación cuadrática, y a esto lo llamamos volatilidad. El artículo [1] es relevante para el presente trabajo y en particular para el Capítulo 3 porque motiva la volatilidad desde un enfoque de microestructura de mercados, y pone en relieve algunos hechos estilizados. Particularmente es importante la siguiente afirmación de los autores para el Capítulo 3:

...“Esta literatura ha demostrado que los intercambios tienen un impacto tanto transitorio como permanente en los precios. Mientras que el primero se remonta a los costos de manejo de pedidos e inventario, el segundo refleja información.”

Puesto que la anterior afirmación será significativa cuando analicemos datos reales y hagamos estimaciones de volatilidad. En específico, nos facilitará dar una interpretación a los resultados empíricos obtenidos.

En la Sección 1.2 presentamos el análisis empírico de [10], el cual presenta evidencia originada en la microestructura de mercado del origen de codependencias entre precios de activos. Es decir, defiende la existencia de factores comunes

entre activos de diferentes mercados, los cuales determinan el comportamiento del flujo de órdenes e influyen en el rendimiento de los activos en el mercado. Esta sección no la usaremos más adelante, sin embargo, es un resultado clásico que no podemos dejar de mencionar cuando se están revisando hechos estilizados de la microestructura de mercados.

En la Sección 1.3 mostramos el modelo sintético de [4], el cual relaciona la variación de precios y la volatilidad con fundamentos de microestructura de mercados. Con la diferencia de que en [4] los participantes de este mercado mantienen latente el precio de compra o venta del activo para realizar una orden y, cuando este precio se alcanza enseguida la orden de compra o venta se lleva a cabo. También en [4] se retoma la distinción entre efectos permanentes, Teoría de la Liquidez Latente 1.3.2 y, efectos transitorios del impacto de precios, Ley de la raíz cuadrada 1.3.1.

1.1. Microestructura: modelo sintético

En esta sección presentamos el modelo sintético del artículo [1], que considera un mercado financiero con un activo de riesgo. Se revisarán tres casos. En el primero, hacedores de mercado son neutrales al riesgo y de inicio hay una orden de mercado que debe liquidarse. En el segundo caso a diferencia del primero, los hacedores de mercado presentan aversión al riesgo. En el tercero la diferencia con los dos primeros es que la orden de mercado pendiente de liquidarse es realizada por un cliente que tiene información privilegiada, es decir, se considera una situación de información asimétrica.

Consideremos un mercado financiero con un único activo financiero con riesgo. Supongamos que este mercado tiene N hacedores de mercado que se dedican a la comercialización del activo. Sean ν el valor fundamental del activo y π su valor de mercado esperado. Para cada i -ésimo hacedor de mercado, $\{i\} \subset \{1, \dots, N\}$, su preferencia queda especificada mediante una función de utilidad U_i , la información que posee sobre el mercado financiero la definimos por H_i , su dotación de efectivo inicial queda determinada por C_i , y su cantidad inicial del activo queda especificado por I_i . Además, supongamos que existe una orden de tamaño O en el libro de órdenes de este mercado antes de iniciar las órdenes de compra-venta por parte de los participantes, y que el costo transaccional por enviar una orden de tamaño q es igual a $\frac{1}{2}cq^2$, para $\{c\} \subset \mathbb{R}$.

El i -ésimo hacedor de mercado diseña de manera óptima su agenda de órdenes eligiendo una demanda $q_i(p)$ del activo que maximice la función de utilidad:

$$\max_{q_i(p)} EU_i [C_i + I_i\nu + (\nu - p)q_i(p) \mid H_i], \text{ donde } p \text{ es el precio de mercado del activo.} \quad (1.1)$$

La variable aleatoria que maximiza de la función de utilidad del i -ésimo hacedor de mercado es $C_i + I_i\nu + (\nu - p)q_i(p)$, de la cual, solo $(\nu - p)q_i(p)$ involucra la demanda $q_i(p)$. El valor fundamental ν es desconocido y a lo más, se podrá hacer una predicción utilizando la información H_i .

También, el precio de mercado del activo p y la cantidad de demanda $q_i(p)$ para cada i -ésimo hacedor de mercado, deben cumplir la condición de vaciado de mercado (*market clearing*):

$$O = \sum_{i=1}^N q_i(p). \quad (1.2)$$

1.1.1. Caso I: Neutralidad al riesgo

En el primer caso, supongamos que tenemos N hacedores de mercado neutrales al riesgo, así la función de utilidad para cada uno de estos es trivial. Además, existe en la situación inicial una orden de mercado por un cliente para comprar O unidades del activo. También, tanto el cliente como los N hacedores de mercado no tienen ninguna información adicional que pueda beneficiar a alguno en la transacción del activo.

Del modelo (1.1) y (1.2), cada hacedor de mercado vende O/N acciones a un precio de venta (*ask price*)

$$A = \pi + (c/N)O.$$

Mientras que cada hacedor vende a un precio de compra (*bid price*)

$$B = \pi - (c/N)O.$$

Inferimos de esta manera la dispersión (*spread*) definida como $A - B$, igual a $2c/N$. No es muy emocionante el resultado obtenido, pero tampoco es realista el considerar la neutralidad al riesgo. En las subsecciones 1.1.2 y 1.1.3 veremos resultados más interesantes.

1.1.2. Caso II: Aversión al riesgo

En el segundo caso a diferencia con el primero, los hacedores de mercado presentan aversión al riesgo. En éste, consideremos funciones de utilidad con aversión absoluta al riesgo constante para cualquier hacedor de mercado (*CARA* por sus siglas en inglés, pág. 20 en [31]).

Sean κ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo para los N hacedores de mercado, σ^2 la variación del flujo del activo y I la posición de inventario promedio dada por

$$I = \sum_{i=1}^N I_i/N.$$

Al aplicarse nuevamente el modelo (1.1) y (1.2) cuando existe en la situación inicial una orden de mercado por un cliente para comprar O unidades del activo, en el que además añadimos los supuestos mencionados en el párrafo anterior. Cada hacedor de mercado establece el precio de venta

$$A = [\pi - \kappa\sigma^2 I] + \frac{c + \kappa\sigma^2}{N}O. \quad (1.3)$$

En tanto que cada hacedor de mercado establece el precio de compra

$$B = [\pi - \kappa\sigma^2 I] - \frac{c + \kappa\sigma^2}{N} O. \quad (1.4)$$

En comparación con la subsección [1.1.1](#), en este caso la dispersión es igual a $2\frac{c+\kappa\sigma^2}{N}O$. Lo cual implica que la dispersión es creciente al producto de la volatilidad al cuadrado σ^2 y la aversión absoluta al riesgo κ ; y es decreciente al aumento del número de hacedores de mercado N .

El precio medio $\frac{A+B}{2}$, igual a $\pi - \kappa\sigma^2 I$, es creciente al producto del valor esperado del activo, π ; y decreciente al producto del inventario promedio de los agentes I , la volatilidad al cuadrado σ^2 y la aversión al riesgo κ .

1.1.3. Caso III: Agente informado

En el tercer caso a diferencia de los otros dos, la orden de mercado es colocada por un cliente estratégico que opera por motivos de liquidez e información. Decimos que este es un caso de asimetría de información.

Sean γ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del cliente y L el número de acciones del activo con riesgo en su posesión. Tenemos que γ difiere del coeficiente de riesgo κ de los N hacedores de mercado. Y que la función de utilidad del cliente *CARA* para la utilidad de los hacedores de mercado.

En este modelo el cliente descompone el valor fundamental del activo como

$$\nu = \pi + s + \epsilon,$$

donde s es una señal en conocimiento de la agente informada, ϵ es un residuo con media cero y varianza que con abuso de notación escribiremos como σ^2 . Las variables L , ϵ y s son independientes y con distribución multivariada normal.

El cliente informado elige el tamaño de su orden de mercado O anticipando racionalmente su impacto en el precio. Una vez colocada la orden, los demás participantes diseñan agendas de órdenes limitadas, teniendo en cuenta el contenido de información de la orden de mercado. Esta orden refleja tanto su ventaja dada por la señal s como la necesidad de compartir el riesgo (inventario L) de la agente informada.

La solución al problema de decisión de la agente informada es una función de la variable definida por:

$$\theta := s - \gamma\sigma^2 L.$$

Claramente, hay una relación positiva entre la valoración que hace la agente informada y su información privada dada por la señal s . Por otro lado, hay una relación negativa con su inventario inicial dado por L .

Otra cantidad de interés está dada por

$$\delta := \frac{V(s)}{V(s) + \gamma\sigma^2 V(L)}.$$

La variable δ determina el peso relativo del ruido y la señal privada. También cuantifica la diferencia de información. Por ejemplo, el caso extremo $\delta = 0$

corresponde al caso simétrico de no información adicional. Es decir $s = 0$. En el régimen $\delta < 1/2$ existe un equilibrio donde la estrategia del agente informado es una función afín y creciente de la variable θ y el precio en equilibrio (denotado P). La esperanza condicional del valor del activo son afines. Es decir,

$$E(\nu|O) = [\delta m + (1 - \delta)\pi] + \delta(2\lambda + \gamma\sigma^2)O,$$

La cantidad demandada en equilibrio es

$$O = \frac{(\pi - m) + \theta}{2\lambda + \gamma\sigma^2}, \quad (1.5)$$

y el precio en equilibrio es

$$P = m + \lambda O. \quad (1.6)$$

El precio medio m y la constante λ que aparece en (1.5) y (1.6) están dadas por

$$m = \pi - \frac{\kappa V(\nu|O)}{1 - \delta} I,$$

$$\lambda = \frac{c/N + \kappa V(\nu|O)/N + \gamma\sigma^2\delta}{1 - 2\delta}.$$

Por lo tanto, de (1.5) y (1.6), se concluye que cuanto mayor sea O , mayor será P . Lo anterior restringe el tamaño de la operación de la agente informada. Similarmente al caso anterior, en el equilibrio del modelo:

El precio y la cantidad demandada dependen de la varianza del valor fundamental.

1.2. Comunalidades en el rendimiento de los acciones

Una postura bien conocida considera que, si las empresas mantienen una relación económica, en consecuencia los precios de las acciones emitidas por estas también lo tendrán, por ejemplo cuantificada a través de una covarianza. En un caso concreto, esto es así cuando las empresas comparten el mismo sector industrial. Para muchas investigaciones esta es la única fuente que origina dicha covarianza. No obstante, en la literatura de microestructura de mercados, el flujo de órdenes mismo también origina codependencias entre precios. Este es el tema que nos ocupa en la presente sección. En el artículo [10] se investigan los precios intradía de las acciones que conforman el indicador 30 Dow (*Dow Jones Industrial Average*) en New York. Para este fin, se propone un modelo que se estima utilizando componentes principales y mediante análisis de correlación canónica se comparan los factores estimados. Las preguntas iniciales que se buscan responder son:

- ¿La covarianza en las órdenes de compra de las diferentes acciones dan origen a la estructura de **covarianza de los rendimientos** de las acciones en corto plazo?

- ¿La liquidez de las acciones es determinada por factores comunes?

Los autores anticipan respuestas positivas a las preguntas y la hipótesis inicial en el trabajo es: “El punto de partida de nuestro análisis es la hipótesis de que un conjunto de variables comunes e idiosincrásicas subyace tanto a la rentabilidad de las acciones como a los flujos de pedidos”.

El modelo propuesto para dar respuesta empírica a las anteriores preguntas asume que la sección transversal de órdenes para un conjunto de n acciones puede representarse estadísticamente mediante el modelo lineal

$$x_t = \theta F_t + \varepsilon_t, \quad (1.7)$$

donde x_t es el vector columna del flujo de órdenes que llegan en el tiempo t , F_t es el vector columna de factores comunes del flujo de órdenes en el tiempo t , θ es la matriz de coeficientes para los factores (“*factor loadings*”) y ε_t es el vector de residuos idiosincráticos. Además se consideran los supuestos $E(F_t) = 0$ y $cov(F_t) = I$; y las relaciones de ortogonalidad $E(F_t \varepsilon_t^T) = 0$ y $E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{jt}) = 0$ para $i \neq j$ con $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

La estructura de interdependencia medida por la matriz de varianza-covarianza está determinada mediante

$$cov(x_t) = \theta \theta^T + \Omega_\varepsilon,$$

donde Ω_ε es una matriz diagonal. Observemos que las interdependencias entre activos y sus precios provienen directamente de las cargas en los factores comunes.

Mientras que para los rendimientos se supone un modelo lineal de la forma

$$r_t = \phi G_t + \eta_t, \quad (1.8)$$

donde G representa un vector de factores comunes y ϕ representa las cargas de dichos factores en los rendimientos. El vector η es de residuos idiosincráticos. Las preguntas ahora se pueden formular en los modelos de la siguiente forma:

- ¿Los factores F y G no son observables. Dado el conjunto de datos se puede establecer estadísticamente su existencia en las especificaciones (1.7) y (1.8)?
- Dada que la respuesta es afirmativa en la primera pregunta. ¿Los factores comunes F y G presentan claras evidencias de correlación?

Para la segunda pregunta, se observa que los rendimientos de las n acciones dependen del flujo de órdenes y un componente de perturbaciones, es decir

$$r_t = \Lambda x_t + u_t. \quad (1.9)$$

En la anterior ecuación Λ es la matriz de coeficientes del impacto de los precios y u_t es la perturbación debido a causas fuera del mercado. También se supone la ortogonalidad entre x y u . Es decir: $E(x_t u_t^T) = 0$.

Ahora bien, sustituyendo la ecuación (1.7) en (1.9), se tiene que el rendimiento de las n acciones es

$$r_t = \Lambda(\theta F_t + \varepsilon_t) + u_t. \quad (1.10)$$

De esta forma se obtiene un hecho estilizado importante al no rechazar la hipótesis nula:

Factores comunes en rendimientos pueden originarse en la microestructura del flujo de órdenes.

En particular, sorprendentemente, lo anterior apunta a algo interesante partiendo de la siguiente situación. Consideremos un caso de una estimación de covarianza, o mejor aún de co-volatilidad, que establece que dos acciones están correlacionadas sin que mantengan una relación fundamental, en particular pertenecen a sectores industriales diferentes. Entonces, no puede negarse que la relación entre las acciones se haya creado internamente en el mercado como consecuencia a la dinámica del flujo de órdenes. Por ejemplo, se ha documentado en la literatura que este puede ser el caso debido a rebalance o liquidación de portafolios (16).

1.3. Alternativa: Libro de órdenes latente y la teoría del mercado inelástico

En esta sección se describimos los puntos mas importantes del artículo 3. En el cual, se discute una teoría alternativa a la hipótesis de mercado eficiente para explicar la formación de precios mediante fundamentos de microestructura de mercado. Nuestro interés principal sigue siendo el de la volatilidad. Aquí tenemos un salto en el tiempo que vale la pena señalar y comentar. Comenzamos el presente Capítulo 1 con los artículos seminales 1 y 10 publicados al comienzo del milenio 2000. En cambio el artículo 3 con una diferencia de más de tres quinquenios con respecto a las fechas de los otros trabajos, se publicó en el mismo año que se está redactando la presente tesis. Esto permite, por un lado, revisar conceptos discutidos en la literatura expuestos en 1 y 10 que identifican algunos de los orígenes de la teoría de microestructura y por otro lado, al discutir la exposición de 3 veremos el avance del día de hoy en el tema. Además como lo mencionamos al principio del Capítulo 1 con respecto al artículo 1 que habla de una distinción entre impacto permanente e impacto transitorio, el artículo 3 también menciona dicha distinción y da una posible explicación para sus posibles orígenes.

Entremos en materia. Un mercado financiero se considera eficiente cuando los precios de los activos reflejan toda la información relevante para tomar decisiones de inversión. Consecuentemente bajo la hipótesis de mercado eficiente, ningún agente tiene una ventaja informativa para la adquisición de un activo. Sin embargo, varios acertijos, que presentan evidencia de anomalías son conocidos. El más conocido de ellos es sin duda el acertijo del exceso de volatilidad discutido por 22, los precios varían mucho más que lo que indicarían cambios en valor fundamental. Además, la volatilidad misma tiene una dinámica

que no puede explicarse por información exógena, por ejemplo, hay burbujas de inflación sin ninguna información sobresaliente. El acertijo del seguidor de tendencia (“trend-following”) defiende hallazgos empíricos como evidencia de la predictibilidad de movimientos futuros de precios de activos condicional a comportamiento pasado. Tal predictibilidad contradice flagrantemente la hipótesis de mercado eficiente. Fue en los años 80 en la literatura de microestructura cuando se afirma que una fuente importante en los cambios de precios en el mercado es el flujo de órdenes. Por si fuera poco, en la literatura de finanzas comportacionales se desafía la teoría de racionalidad en la que los participantes del mercado toman decisiones buscando siempre optimizar funciones objetivo. Profundizando en estos comentarios, el autor defiende la necesidad de nuevas explicaciones para entender el comportamiento de precios de activos financieros.

Para comenzar a dar solución al acertijo del exceso de volatilidad (“*excess-volatility*”), y otros más como el acertijo del exceso de actividad (“*excess-trading*”) discutido por [21] o el acertijo del seguidor de tendencia [12], se comenzaron a incorporar nuevos elementos que se salían de la línea marcada por la hipótesis de mercado eficiente y la racionalidad de los agentes. Un ejemplo famoso es el concepto de agente ruidoso (“*noisy trader*”) introducido por el célebre economista Fisher Black en su artículo [2]. El concepto fue adoptado y tuvo su éxito en ayudar a dar respuestas a algunas preguntas. Por ejemplo en los modelos de [24] y [25], la existencia de agentes ruidosos es crucial para que el mercado alcance un equilibrio; sin ellos, la liquidez desaparecería y los mercados ni siquiera funcionarían. El éxito del concepto de agente ruidoso es bueno, pero parcial. Así surgieron otros conceptos, o más globalmente, nuevos enfoques. Uno de ellos, es precisamente la microestructura de mercados, área que ya mencionamos anteriormente, y en la que el flujo de órdenes es un determinante importante en la fluctuación de precios de activos. De hecho, Bouchaud argumenta en el artículo [3] que partiendo del punto de vista de microestructura de mercado, en coordinación con el análisis de Gabaix & Koijen 2021 [7] basado en el principio que ellos llaman

‘The Inelastic Market Hypothesis’

es posible formular un esquema para buscar la solución a dos de los tres acertijos mencionados. Veamos en los siguientes apartados los principales puntos de su discusión.

1.3.1. Efectos transitorios: La ley de la raíz cuadrada

Diremos que una **metadorden** es la colección de todas las órdenes individuales que pertenecen a la misma decisión comercial. Por ejemplo, la decisión de liquidar un porcentaje importante de la capitalización de una acción en el inventario de algún agente. La así llamada ley de raíz cuadrada surge en el contexto de la siguiente pregunta:

- ¿Cuánto es que una metaorden de volumen total Q , ejecutada a lo largo de un periodo de duración T afecta en promedio el precio?

Desde principios de la década de los 80, estudios empíricos concluyen que el impacto de una metaorden se escala aproximadamente como la raíz cuadrada de su tamaño Q ; ver [?]. El cambio de precio promedio entre el comienzo y el final de una metaorden de volumen Q está bien descrito por la **ley de la raíz cuadrada**:

$$J(Q, T) = Y \sigma_T \sqrt{\frac{Q}{V_T}} \quad (1.11)$$

donde Y es un coeficiente que para el caso de Estados Unidos es aproximadamente $\frac{1}{2}$, σ_T es la **volatilidad** contemporánea en el horizonte de tiempo T y V_T es el volumen contemporáneo negociado en el tiempo T .

Una consecuencia de la ecuación (1.11) es que el impacto de precio $J(Q, T)$ no es lineal en Q . Para explicar dicha falta de linealidad el autor menciona un hecho que se ha observado empíricamente. Se ha encontrado en datos que la primera mitad (en el tiempo) de una metaorden impacta el precio mucho más que la segunda mitad. Una forma en que esto suceda es que exista un tiempo de liquidez T_m , tal que la influencia de las transacciones pasadas desaparece para $T_m \ll T$, pero no se puede ignorar para $T \ll T_m$. Por lo tanto, rebasando la marca de memoria T_m , es compatible que el impacto sea lineal en la fracción Q/V_T . Lo anterior lleva a descomponer el impacto de precios en dos componentes: efecto transitorio y efecto permanente con diferente especificación funcional (raíz cuadrada vs lineal) para cada uno de ellos.

No es posible dejar de observar en la ecuación (1.11) que Q no aparece como una fracción de la capitalización de mercado total α , sino como una fracción del volumen total V_T negociado durante el tiempo de ejecución T . En los mercados de valores actuales, α suele ser unas 200 veces mayor que V_T para $T = 1$ día. Por lo cual, Q/V_T es mucho mayor que Q/α para un día, lo cual amplifica el impacto del precio de una metaorden para un día.

Profundizamos en la Sección 1.3.2 en la ley de raíz cuadrada.

1.3.2. Distinguiendo entre efectos: La Teoría de la Liquidez Latente (LLT)

En esta sección hablamos de la Teoría de la Liquidez Latente (LLT) con el propósito de vincularla con la teoría de mercados inelásticos desarrollada por [7] y así incorporar en la discusión a los efectos permanentes del impacto de precios.

La teoría LLT asume que cada inversionista de largo plazo en el mercado tiene un precio de reserva (por supuesto uno de compra y otro de venta), el cual actualiza dinámicamente debido a nueva información, e.g., nuevas noticias, cambios de precios, etc. Cuando el precio de mercado alcanza el precio de reserva, se genera una intención de orden. El agregado de estas “intenciones” constituye la liquidez disponible que en su mayoría está constituida por liquidez latente, es decir, que no llega a ser enviado al libro de órdenes, pero permanece latente

en el colectivo de las mentes de los inversionistas. De lo anterior se da origen al término latente que da nombre a la teoría. Recordemos la marca de tiempo T_m que establece una frontera desde la cual se distinguen efectos permanentes y transitorios. Ahora a esta misma marca de tiempo le asociaremos con la tendencia de postergar actualización del precio de reserva en el intervalo de tiempo $[t, t + T_m]$.

La relación entre T_m y un horizonte de ejecución T es importante y establece diferentes regímenes:

1. Cuando $T \ll T_m$ el impacto de una metaorden de volumen Q es transitorio y está dado por la ley de la raíz cuadrada.
2. Cuando la metaorden se ejecuta por completo, su impacto disminuye con el tiempo desde su valor máximo (1.11) dada por la ley de la raíz cuadrada, hasta un valor que depende del contenido de la información que desencadenó la operación. Por ejemplo, si la metaorden fue desinformada, existe una recuperación total.
3. El impacto permanente de la metaorden viene dado por

$$I_\infty(Q, T) = \frac{1}{2} \sigma_1 \sqrt{T_m} \times \frac{Q}{V_1 T_m}$$

donde el subíndice 1 corresponde a un día y T_m se mide en días. Notar que este resultado es independiente del tiempo de ejecución T , que puede ser grande o pequeño en comparación con T_m .

Así, el impacto permanente $I_\infty(Q, T)$ es lineal en Q , independiente de T , y proporcional a la volatilidad en la escala del tiempo de memoria T_m , e inversamente proporcional al volumen negociado por el mercado en la misma escala de tiempo, $V_1 T_m$.

Por lo tanto, cuanto más tiempo se mantengan los participantes del mercado en sus creencias medido a través de T_m , más fuerte será la tendencia a un precio de referencia y menor será el impacto a largo plazo. De lo cual, si la liquidez fuera infinita (es decir, $V_1 = \infty$) o si las creencias permanentes fueran infinitas (es decir, $T_m = \infty$), el impacto de la metaorden a largo plazo es cero. En este caso se diría que el mercado es elástico.

El nudo que ata los diferentes elementos introducidos hasta ahora, la distinción entre efectos transitorios y permanentes, y la teoría LLT es la relación $T_m = \nu^{-1}$. Como ya se ha expuesto, T_m es una marca de tiempo que distingue entre efectos, y también se ha mencionado que esta marca puede pensarse como una memoria colectiva. El parámetro ν aparece en el siguiente apartado en un modelo específico para la teoría LLT, ver la ecuación (1.13).

1.3.3. Cuantificando a LLT: Un modelo de difusión-reacción

En el artículo [6] se discute un modelo de difusión-reacción para la teoría de la liquidez latente LLT.

En esta teoría se supone que toda intención de comerciar (*'trade'*) es caracterizado por un precio de reserva y un volumen.

Al agregar el colectivo de agentes, se da origen a lo que los autores denominan libro latente de ordenes en el cual se colectan todas las intenciones de un sector de participantes del mercado, específicamente a aquellos que tienen una necesidad de crear/reajustar sus portafolios de activos y que están dispuestas a que se realice en un lapso de tiempo de días e incluso semanas. Por otro lado, se identifica un sector de participantes que controlan su inventario y que comienzan y terminan diariamente sus posiciones en cero. Es decir, no tienen intención de formar portafolios y mantenerlos. A este sector corresponden por ejemplo, los hacedores de mercado.

Ahora bien, al agregar todas las intenciones y formar un libro latente de órdenes, se obtienen funciones de densidad $\rho_A(x, t)$ y $\rho_B(x, t)$. La función de densidad $\rho_A(x, t)$ captura el número de unidades del activo que se quieren vender a un precio x al tiempo t . Significado análogo tiene $\rho_B(x, t)$ del lado de compras. Se define implícitamente un precio p mediante la ecuación

$$\rho_A(p_t, t) = \rho_B(p_t, t). \quad (1.12)$$

Las funciones de densidades deben satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \nu \rho + \lambda f(x) - \kappa R. \quad (1.13)$$

Para ρ_A la función f es la constante igual a uno si $p_t - x > 0$ y cero en otro caso. Similarmente f es uno si $x - p_t > 0$ y cero en otro caso para la ecuación correspondiendo a ρ_B . En la ecuación, R es una función exógena que representa una propensión a que se ejecuten compras y ventas. Las intenciones de cada participante evolucionan a lo largo del tiempo y al agregar las dinámicas mediante un “límite hidrodinámico” se llega a la ecuación (1.13). Se identifican cuatro términos:

- (a) Revaluación del precio de reserva: $-V_t \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$. El primer término es una revaluación originada por un factor sistemático dado por V . Puede pensarse como información común a todos los participantes. El segundo, es un término disipativo y corresponde a agregar factores idiosincráticos.
- (b) Cancelación, total o parcial, de una intención de comerciar $\nu \rho$.
- (c) Aparición de nuevas intenciones no previamente manifiestas $\lambda f(x)$.
- (d) Ejecución de una intención debido a coincidencia (*“match”*) de intenciones de compra-venta κR .

El desbalance definido en el artículo mediante $\phi := \rho_B - \rho_A$ satisface una ecuación sin término reactivo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -V_t \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \phi + \lambda \text{sgn}(p_t - x). \quad (1.14)$$

Es posible eliminar el término $V_t \frac{\partial \phi}{\partial x}$ con la transformación $y = x - \hat{p}_t$ en donde $\hat{p}_t = \int_0^t V_s ds$ es el precio sin impacto (*'unimpacted price'* es el término que usan los autores). Para ganar intuición acerca del significado de \hat{p}_t se debe considerar la ecuación (1.14) en que los coeficientes D , ν y λ son iguales a cero, en este caso la solución viene dada por $c(t - \hat{p}_t)$. Esta transformación lleva a la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \phi + \lambda \operatorname{sgn}(p_t - \hat{p}_t - y). \quad (1.15)$$

Para ganar en intuición se considera el régimen en que los coeficientes ν y λ convergen a cero manteniendo el cociente λ/γ con un valor fijo, digamos J . En este caso, la ecuación (1.15) dará lugar a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \lambda \delta(y - y_t), \text{ con } y_t = p_t - \hat{p}_t$$

La ecuación tiene solución por convolución igual a

$$\phi(y, t) = -Ly + \int_0^t \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} e^{-\frac{(y-y_s)^2}{4D(t-s)}} ds.$$

La ecuación implícita $\phi(y, t) = 0$ tiene la solución $A\sqrt{Dt}$, es decir, satisface una ley raíz cuadrada condicionada a resolver la constante A . En efecto, la constante A queda determinada como la raíz a una ecuación integral en la que se involucra λ interpretada como un cociente $\frac{Q}{T}$, una cantidad Q a liquidarse en un horizonte de tiempo igual a T . De esta aproximación los autores recuperan la fórmula (1.11).

1.3.4. Efectos permanentes: El multiplicador GK (M)

En el artículo [3] hacen referencia a lo que ellos llaman el multiplicador GK, y denotan mediante M . El nombre es en referencia a Gabaix y Koijen, autores del artículo [7]. Este indicador esta definido como

$$M = \frac{1}{2} \sigma_1 \frac{\alpha}{V_1} \sqrt{\frac{1}{T_m}}. \quad (1.16)$$

Observar nuevamente que cuanto más tiempo crean los inversores en su estimación de valor inicial ($T_m = \infty$) y estén listos para proporcionar liquidez a ese precio ($V_1 = \infty$), el mercado será elástico y menor será M .

Ahora bien, si el multiplicador M es proporcional a $\sigma_1 \alpha / V_1$, y se tienen acciones para las cuales la volatilidad es menor y la fracción de capitalización de mercado intercambiada diariamente es mayor, para estas acciones, el multiplicador M será menor comparada con otras. En este caso se diremos que este tipo de acciones tienen demanda inelástica.

Capítulo 2

Estimador de co-volatilidad de Fourier

En este capítulo presentamos los detalles para estimar la volatilidad del precio de activos mediante Análisis de Fourier como fue publicado por [18] y presentado sistemáticamente en [19]. En lo sucesivo entendamos por co-volatilidad, la volatilidad de un activo o de dos activos en un periodo de tiempo; también, llamaremos al Análisis de Fourier el **método de Fourier-Malliavin** para la estimación de las trayectorias de volatilidad.

En la Sección [2.1] presentamos prerequisites de la teoría del análisis de Fourier que son necesarios para desarrollar el estimador de Fourier-Malliavin para la estimación de la co-volatilidad.

En la Sección [2.2] incluimos elementos del cálculo estocástico necesarios, especialmente la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, la cual usamos en la demostración del Teorema [2.4.3].

En la Sección [2.3] presentamos la convolución de Bohr, que es un elemento esencial para convertir a la co-volatilidad en cantidades estimables a pesar de que son no observables, por medio del Teorema [2.4.3].

En la Sección [2.4] el resultado principal es el Teorema [2.4.3], el cual establece una fórmula para el coeficiente de Fourier de la co-volatilidad mediante la convolución de Bohr de las correspondientes transformadas de Fourier de las diferenciales de precios logarítmicos.

En la Sección [2.5] consideramos el coeficiente de orden cero, al cual se le llama co-volatilidad integrada y se incluyen consideraciones para truncar la convolución de Bohr, lo anterior debido a que es necesario aproximar una serie infinita con una suma, fórmulas [2.7.1] y [2.7.2].

En la Sección [2.6] establecemos la consistencia del estimador a partir de [2.32], el cual representa la transformada de Fourier de la diferencial de precio logarítmico.

En la Sección [2.7] establecemos la reconstrucción de la trayectoria de la co-volatilidad gracias a la fórmula [2.7.2].

2.1. Definiciones básicas en el Análisis de Fourier

Definición 2.1.1 Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definimos el k -ésimo coeficiente de Fourier de ϕ como

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{L} \int_a^b \phi(x) \exp\left(\frac{-2\pi i k x}{L}\right) dx, \quad (2.1)$$

para cualesquiera $\{k\} \subset \mathbb{Z}$ y $L = b - a$ con $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

En particular, para $[a, b] = [c - \pi, c + \pi]$ el k -ésimo coeficiente de Fourier de ϕ es

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-\pi}^{c+\pi} \phi(x) \exp(-ikx) dx.$$

Definición 2.1.2 Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definimos la serie de Fourier de ϕ por

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(k) \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right),$$

para cualquier $L = b - a$ con $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.1.3 Sea $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que la k -ésima transformada de Fourier de ϕ cumple que

$$\mathcal{F}(\phi)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \exp(-ikx) dx, \quad (2.2)$$

para cualquier $\{k\} \subset \mathbb{Z}$.

Definición 2.1.4 Sea $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definimos la k -ésima transformada de Fourier de la diferencial de ϕ como

$$\mathcal{F}(d\phi)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ikx) d\phi(x), \quad (2.3)$$

para cualquier $\{k\} \subset \mathbb{Z}$.

Definición 2.1.5 Decimos que el Kernel de Dirichlet, D_N , está dado por

$$D_N(t) = \sum_{s=-N}^N \exp(ist) \quad (2.4)$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.6 Sea D_N el Kernel de Dirichlet. Tenemos que

$$D_N(t) = \frac{\text{sen}(Nt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})}$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Demostración: Realizaremos la demostración por inducción en N . Para $N = 1$ y cualquier $\{t\} \subset \mathbb{R}$, notemos que

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \exp(0) + \exp(it) + \exp(-it) \\ &= 1 + 2 \cos t \\ &= 2 - 1 + \cos(t) + \cos(t) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1 - \cos(t)}{2} \right) + \cos(t) \\ &= 2 \left(1 - \text{sen}^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \cos(t) \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) + \cos(t) \\ &= \frac{2 \text{sen}(\frac{t}{2}) \cos^2(\frac{t}{2}) + \cos(t) \text{sen}(\frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}(\frac{3t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

Supongamos que para cualesquiera $\{N\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$, se cumple que

$$D_N(t) = \frac{\text{sen}(Nt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})}.$$

Para $N = k + 1$ y cualquier $\{t\} \subset \mathbb{R}$, observemos que

$$\begin{aligned} D_{k+1}(t) &= D_k(t) + \exp(i(k+1)t) + \exp(-i(k+1)t) \\ &= \frac{\text{sen}(kt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} + 2 \cos((k+1)t) \\ &= \frac{\text{sen}(kt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} + \frac{\text{sen}((k+1)t + \frac{t}{2}) - \text{sen}(kt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}((k+1)t + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.7 Definimos el Kernel rescalado de Dirichlet, $\tilde{D}_N(t)$, por

$$\tilde{D}_N(t) = \frac{1}{2N+1} D_N(t), \quad (2.5)$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.1.8 Decimos que el Kernel de Fejér, $F_N(t)$, cumple que

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} D_s(t),$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.9 Sea $F_N(t)$ el Kernel de Fejér. Tenemos que

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(Nt/2)}{\text{sen}^2(t/2)}.$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Demostración:

Para $N = 1$ y cualquier $\{t\} \subset \mathbb{R}$, notemos que

$$F_1(t) = D_0(t) = \exp(0) = 1 = \frac{1 \text{sen}^2(\frac{t}{2})}{1 \text{sen}^2(\frac{t}{2})}.$$

Supongamos que para cualesquiera $\{N\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$, se cumple que

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(\frac{Nt}{2})}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})},$$

Para $N = k + 1$ y cualquier $\{t\} \subset \mathbb{R}$, concluimos que

$$\begin{aligned} (k+1)(F_{k+1}(t)) &= (k)(F_k(t)) + D_k(t) \\ &= \frac{\text{sen}^2(\frac{kt}{2})}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} + \frac{\text{sen}(kt + \frac{t}{2})}{\text{sen}(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}^2(\frac{kt}{2}) + \text{sen}(kt + \frac{t}{2}) \text{sen}(\frac{t}{2})}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}^2(\frac{kt}{2}) + \frac{\cos kt}{2} - \frac{\cos(k+1)t}{2}}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}^2(\frac{kt}{2}) + \frac{1}{2} - \text{sen}^2(\frac{kt}{2}) - \frac{\cos(k+1)t}{2}}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{\cos(k+1)t}{2})}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{\text{sen}^2((k+1)t/2)}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.10 Sea $\{K_n(t)\}$ una familia de kernels. Decimos que $\{K_n(t)\}$ es una familia de buenos kernels si

- (a) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{1\}$;
- (b) $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| dt \leq M$, para algún $M > 0$ y cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{1\}$;
- (c) $\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(t)| dt \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para cualquier $\delta > 0$.

Definición 2.1.11 Sean $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones 2π -periódicas. Definimos la convolución de f y g como

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy,$$

para cualquier $\{x\} \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.1.12 Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definimos la serie de Fourier de ϕ de orden N , $S_N(\phi)$, por

$$S_N(\phi)(t) = \sum_{s=-N}^N \hat{\phi}(s) \exp(ist),$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{t\} \subset \mathbb{R}$.

Nuestro interés en el kernel de Dirichlet se debe al hecho de que las sumas parciales de la serie de Fourier de ϕ se pueden expresar como una convolución con el kernel de Dirichlet D_N :

$$S_N(\phi) = \phi \star D_N.$$

La demostración de la afirmación anterior se encuentra en la página 44 en [28].

El siguiente teorema relaciona la integrabilidad y la continuidad de una función con su serie de Fourier.

Teorema 2.1.13 (Teorema 5.2 en [28]) Si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función integrable en el círculo. Entonces la serie de Fourier de ϕ es Cesàro sumable a ϕ en cada punto de continuidad de ϕ . Más aún, si ϕ es continua en el círculo. Entonces la serie de Fourier de ϕ es uniforme Cesàro sumable a ϕ .

Para demostrar el Teorema 2.1.13 definimos la **media Cesàro** de la serie de Fourier de ϕ por

$$\sigma_N(\phi)(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i(\phi)(x).$$

Luego, puesto que el kernel de Fejér es un buen kernel,

$$\sigma_N(\phi) = \phi \star F_N.$$

Así del Teorema 4.1 de [28], tenemos que la serie de Fourier de ϕ es Cesàro sumable a $\sigma_N(\phi)$ para cada punto de continuidad de ϕ .

2.2. Cálculo estocástico

Definición 2.2.1 Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de Ω . Decimos que \mathcal{F} es una σ -álgebra si

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(b) si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$;

(b) si la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, entonces $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Definición 2.2.2 Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{F} una σ -álgebra de Ω . Definimos (Ω, \mathcal{F}) como un espacio medible.

Definición 2.2.3 Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Determinamos que la función $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad sobre la σ -álgebra \mathcal{F} de Ω si

(a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

(b) $\mathbf{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ tal que $A_m \cap A_n = \emptyset$ para $m \neq n$.

Decimos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad si \mathcal{F} es una σ -álgebra de Ω y \mathbf{P} es una medida de probabilidad.

Definición 2.2.4 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y (Γ, \mathcal{S}) un espacio medible. Decimos que $X : \Omega \rightarrow \Gamma$ es una variable aleatoria si $X^{(-1)}(S) \in \mathcal{F}$, para cualquier $\{S\} \in \mathcal{S}$.

Definición 2.2.5 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sean X y la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias en Ω . Determinamos que la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge casi seguramente (c.s) a X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} = 0,$$

para cualquier $\{\epsilon\} \in \mathbb{R}^+$.

Definición 2.2.6 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sean X y la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias en Ω . Determinamos que la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilidad a X ($X_n \xrightarrow{P} X$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\} = 0,$$

para cualquier $\{\epsilon\} \in \mathbb{R}^+$.

Definición 2.2.7 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $T \subset \mathbb{R}$. Sean $\{X_t : t \in T\}$ una familia de variables aleatorias en Ω y $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ una familia

de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} . Decimos que

(a) $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ es una **filtración** de \mathcal{F} si la familia es no decreciente, en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para cualesquiera $\{s, t\} \subset T$ con $s < t$;

(b) la familia $\{X_t : t \in T\}$ **está adaptada** a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ si X_t es \mathcal{F}_t -medible para cualquiera $t \in T$;

(c) $\{X_t : t \in T\}$ es una **martingala con respecto a** $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ si

(c₁) $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ es una **filtración** de \mathcal{F} ,

(c₂) $\{X_t : t \in T\}$ está adaptada a $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$,

(c₃) X_t está en L_1 para cualquiera $t \in T$, y

(c₄) $E_P[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ para cualesquiera $\{s, t\} \subset T$ con $s < t$.

Un ejemplo clásico de martingala es el siguiente

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \xi^i dW^i, \quad (2.6)$$

donde $W = (W^1, \dots, W^d)$ un movimiento browniano d -dimensional y $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$ es un integrando que cumple ciertas propiedades.

Definición 2.2.8 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, (Γ, S) un espacio medible y $T \subset \mathbb{R}$. Decimos que la familia $X = \{X_t : t \in T\}$ de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con valores en S , es un proceso estocástico.

Definición 2.2.9 Sea X un proceso estocástico y $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, t]$ con $\{t\} \subset \mathbb{R}$. Determinamos la variación cuadrática de X en $[0, t]$, $\langle X \rangle_t$, como

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2,$$

donde $\|\Pi\| = \max |t_k - t_{k-1}|$.

Teorema 2.2.10 Sea X un proceso estocástico con dinámica (2.6). Entonces la variación cuadrática de X en $[0, t']$ cumple que

$$\langle X \rangle_{t'} = \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} (\xi^i)^2 dt = \int_0^{t'} \sum_{i=1}^d (\xi^i)^2 dt. \quad (2.7)$$

Demostración: Sea $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, t']$ con $\{t'\} \subset \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} \xi^i dW^i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \int_0^{t_2} \xi^i dW^i - \sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} \xi^i dW^i \right)^2 + \\
&\quad + \dots + \left(\sum_{i=1}^n \int_0^{t'} \xi^i dW^i - \sum_{i=1}^n \int_0^{t_{n-1}} \xi^i dW^i \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} \xi^i dW^i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \xi^i dW^i \right)^2 + \dots + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{n-1}}^{t'} \xi^i dW^i \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^{t_1} \xi^{i^2} dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \xi^{i^2} dt + \dots + \sum_{i=1}^n \int_{t_{n-1}}^{t'} \xi^{i^2} dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^{t'} \xi^{i^2} dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación cuadrática de X en $[0, t']$ cumple que

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle_{t'} &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \int_0^{t'} \xi^{i^2} dt \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^{t'} \xi^{i^2} dt.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.2.11 Sea $X = \{X_t : t \in T\}$ una martingala continua por la derecha en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, con $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ una filtración y $T = [0, \infty]$. Decimos que X es cuadrado integrable si $E(X^2) < \infty$ para cualquier $t \in T$. Y si, además, $X_0 = 0$ c.s., establecemos que $X \in \mathcal{M}_2$ (o $X \in \mathcal{M}_2^c$ si X es continua).

Definición 2.2.12 Sean $\{X, Y\} \subset \mathcal{M}_2^c$ y $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, t]$ con $\{t\} \subset \mathbb{R}$. Determinamos la variación cruzada de X e Y en $[0, t]$, $\langle X, Y \rangle_t$, como

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}), \quad (\text{en probabilidad})$$

donde $\|\Pi\| = \max |t_k - t_{k-1}|$.

Teorema 2.2.13 Sean $\{X, Y\} \subset \mathcal{M}_2^c$ con dinámica (2.6). Entonces la variación cruzada de X e Y en $[0, t']$ cumple que

$$\langle X, Y \rangle_{t'} = \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} \xi_s^i \eta_s^i ds.$$

Demostración: De la identidad de polarización para formas bilineales (Definición 5.5 en [29]) y (2.7), se sigue que

$$\begin{aligned} 4 \langle X, Y \rangle_{t'} &= \langle X + Y, X + Y \rangle_{t'} - \langle X - Y, X - Y \rangle_{t'} \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} (\xi_s^i + \eta_s^i)^2 ds - \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} (\xi_s^i - \eta_s^i)^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\int_0^{t'} ((\xi_s^i)^2 + 2\xi_s^i \eta_s^i + (\eta_s^i)^2) ds \right) - \sum_{i=1}^d \left(\int_0^{t'} ((\xi_s^i)^2 - 2\xi_s^i \eta_s^i + (\eta_s^i)^2) ds \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} 4\xi_s^i \eta_s^i ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación cruzada de X e Y en $[0, t']$ cumple que

$$\langle X, Y \rangle_{t'} = \sum_{i=1}^d \int_0^{t'} \xi_s^i \eta_s^i ds.$$

□

Definición 2.2.14 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y la sucesión $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una filtración de \mathcal{F} . Decimos que una variable aleatoria $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ es un tiempo de paro con respecto a la sucesión $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ si $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq n\} \subset \mathcal{F}_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.15 Sea $X = \{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico (continuo) en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, con $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ una filtración y $T = [0, \infty]$. Si existe una familia decreciente de tiempos de paro $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con respecto a \mathcal{F} tal que la sucesión $X^n = \{X_{\min\{t, T_n\}} : t \in T\}$ es una martingala para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y la $\mathbf{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty]$. Entonces, decimos que X es una martingala local (continua). Si, además, $X_0 = 0$ c.s., decimos que $X \in \mathcal{M}^{loc}$ (respectivamente, $X \in \mathcal{M}^{c,loc}$ si X es continuo).

Teorema 2.2.16 (Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy) Sea $\{X\} \subset \mathcal{M}^{c,loc}$. Entonces existen dos constantes positivas c_m y C_m tales que

$$c_m E[(\langle X \rangle_{t'})^m] \leq E \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq t'} |X_t| \right)^{2m} \right] \leq C_m E[(\langle X \rangle_{t'})^m].$$

para cualesquiera tiempo de paro t' y $\{m\} \subset \mathbb{R}^+$.

La prueba original de la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy se encuentra en el artículo [5]. Una presentación moderna se puede consultar en [26]. La desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy aplicada a X , con dinámica (2.6) nos da

$$E \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \right)^{2m} \right] \leq C_m E \left[\left(\int_0^T \sum_{k=1}^d (\xi_s^k)^2 ds \right)^m \right].$$

2.3. La convolución de Bohr

Definición 2.3.1 Sean $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones. Decimos que la **convolución producto de Bohr** $\Phi \overset{Bohr}{*} \Psi$, existe si

$$(\Phi \overset{Bohr}{*} \Psi)(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Phi(s) \Psi(k-s), \quad (2.8)$$

existe para cualesquiera $\{k, s\} \subset \mathbb{Z}$.

2.4. Estimador de co-volatilidad

Sea $p(t) = (p^1(t), \dots, p^n(t))$ una semimartingala continua tal que $p^i(t) = \log s^i(t)$ y $s^i(t)$ es el precio del i -ésimo activo en el tiempo t . Luego, para cualquiera i tenemos que

$$dp^i(t) = \sum_{l=1}^d \sigma_l^i(t) dW^l(t) + b^i(t) dt, \quad (2.9)$$

donde $W = (W^1, \dots, W^n)$ es un vector en el que cualesquiera W^i es un movimiento Browniano, y además W^i y W^j son independientes para cualesquiera $i \neq j$ con $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$. También, el coeficiente de difusión σ_l^i y el coeficiente de deriva b^i en (2.9) satisfacen que

$$E \left[\int_0^{2\pi} (b^i(t))^2 dt \right] < \infty \quad \text{y}$$

$$E \left[\int_0^{2\pi} (\sigma_l^i(t))^4 dt \right] < \infty.$$

Sea Σ , la **matriz de volatilidad**, cumple que

$$\Sigma^{i,j}(t) := \sum_{l=1}^d \sigma_l^i(t) \sigma_l^j(t), \quad \text{para cualquier } \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\} \text{ y } t \in [0, 2\pi]. \quad (2.10)$$

Observemos que $\Sigma^{i,j} = \Sigma^{j,i}$ para cualesquiera $i \neq j$. Así, la matriz de volatilidad Σ es una matriz simétrica cuadrada. Por otra lado, diremos que las

componentes $\Sigma^{i,i}$ son las co-volatilidades instantáneas del precio de un activo, mientras que las componentes $\Sigma^{i,j}$ son las co-volatilidades instantáneas del precio de dos activos.

Lema 2.4.1 *El kernel rescalado de Dirichlet, \tilde{D}_N , cumple que*

$$\int_0^{2\pi} \tilde{D}_N^2(\nu) d\nu = \frac{2\pi}{2N+1}, \text{ para cualquier } \{N\} \subset \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Demostración: Como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal ($(e_m, e_n) = 1$ si $m = n$ y $(e_m, e_n) = 0$ si $m \neq n$ para $\{n, m\} \subset \mathbb{N}$.),

$$\begin{aligned} \|\tilde{D}_N\| &= \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \exp(isx), \frac{1}{2N+1} \sum_{r=-N}^N \exp(irx) \right) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=-N}^N \left(\exp(isx), \sum_{r=-N}^N \exp(irx) \right) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=-N}^N 1 \\ &= \frac{2N+1}{(2N+1)^2} \\ &= \frac{1}{2N+1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{D}_N^2(\nu) d\nu = \|\tilde{D}_N\| = \frac{1}{2N+1}.$$

Lo cual implica que

$$\int_0^{2\pi} \tilde{D}_N^2(\nu) d\nu = \frac{2\pi}{2N+1}.$$

□

Teorema 2.4.2 *El Kernel rescalado de Dirichlet, $\tilde{D}_N(t)$ satisface que*

$$\int_0^{2\pi} dt_2 \int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \leq \frac{2\pi}{2N+1}. \quad (2.12)$$

Demostración: Primero demostraremos que $|\tilde{D}_N| \leq 1$ para cualquier

$\{N\} \subset \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_N &= \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \exp(isx) \\
&= \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{s=-N}^{-1} \cos(sx) - i \operatorname{sen}(sx) + \sum_{s=1}^N \cos(sx) + i \operatorname{sen}(sx) + 1 \right] \\
&= \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{s=-N}^{-1} \cos(sx) - i \operatorname{sen}(sx) + \sum_{s=1}^N \cos(sx) + i \operatorname{sen}(sx) + 1 \right] \\
&= \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{s=1}^N 2 \cos(sx) + 1 \right] \\
&\leq \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{s=1}^N 2 + 1 \right] \\
&= \frac{1}{2N+1} [2N+1] \\
&= 1
\end{aligned}$$

De donde concluimos que $|\tilde{D}_N| \leq 1$, por lo que el $|\tilde{D}_N|^2 \leq 1$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\nu}^{2\pi-\nu} \tilde{D}_N^4(\nu) d\nu d\nu \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} \tilde{D}_N^4(\nu) d\nu \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{D}_N(\nu)|^4 d\nu \\
&\leq 2\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{D}_N(\nu)|^2 d\nu \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} \tilde{D}_N(\nu)^2 d\nu.
\end{aligned}$$

Así, de la ecuación (2.11) obtenemos que

$$\int_0^{2\pi} \tilde{D}_N(\nu)^2 d\nu = \frac{(2\pi)^2}{2N+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \leq \frac{(2\pi)^2}{2N+1}.$$

□

En el Teorema 2.4.3 establecemos una propiedad fundamental para definir el estimador de co-volatilidad de Fourier-Malliavin. El hecho principal es que los componentes de la matriz de volatilidad Σ no son observables, pero a través del teorema son estimables. La transformada de Fourier de un diferencial se ha definido para funciones deterministas como una integral de Riemann-Stieltjes.

En [27] se interpreta la integral de Itô en un sentido de trayectoria como el límite de sumas de Riemann-Stieltjes correctamente definidas siempre que los integrandos sean càdlàg y continuos. En el Teorema 2.4.3 las integrales en las transformadas de Fourier $\mathcal{F}(dp^i)$ son estocásticas y pueden interpretarse como límites de las sumas de Riemann-Stieltjes, puesto que el integrando $\exp(ikt)$ es una función determinista continua.

Teorema 2.4.3 (Teorema 2.1 en [18]) *Si p es un proceso con dinámica (2.9). Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j}) = (\mathcal{F}(dp^i) \overset{Bohr}{*} \mathcal{F}(dp^j))(q) \text{ (en probabilidad),} \quad (2.13)$$

para cualesquiera $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Demostración: Supongamos sin pérdida de la generalidad que $b = 0$ en (2.9).

Sea

$$\Gamma_k^i(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t \exp(-iku) dp^i(u), \quad (2.14)$$

para cualesquiera $\{i\} \subset \{1, \dots, n\}$ y $\{k\} \subset \mathbb{Z}$. De (2.3)

$$\Gamma_k^i(2\pi) = \mathcal{F}(dp^i)(k). \quad (2.15)$$

Ahora, de la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned} d(\Gamma_k^i(t)\Gamma_r^j(t)) &= d\Gamma_k^i(t)d\Gamma_r^j(t) + \Gamma_k^i(t)d\Gamma_r^j(t) + \Gamma_r^j(t)d\Gamma_k^i(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\sum_{1 \leq t \leq u \leq d} \sigma_t^i \sigma_u^j dt \right) \exp(-i(k+r)t) dt + \Gamma_k^i(t)d\Gamma_r^j(t) \\ &\quad + \Gamma_r^j(t)d\Gamma_k^i(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \Sigma^{i,j}(t) \exp(-i(k+r)t) dt + \Gamma_k^i(t)d\Gamma_r^j(t) + \Gamma_r^j(t)d\Gamma_k^i(t). \end{aligned}$$

Entonces si hacemos $t = 2\pi$ en la igualdad anterior,

$$\Gamma_k^i(2\pi)\Gamma_r^j(2\pi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \Sigma^{i,j}(t) \exp(-i(k+r)t) dt + R^{ij}(k, r),$$

donde

$$R^{ij}(k, r) := \int_0^{2\pi} \Gamma_k^i(t)d\Gamma_r^j(t) + \Gamma_r^j(t)d\Gamma_k^i(t).$$

Posteriormente de (2.2),

$$\Gamma_k^i(2\pi)\Gamma_r^j(2\pi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k+r) + R^{ij}(k,r).$$

Sea

$$\gamma_q^{ij}(N) := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Gamma_s^i(2\pi)\Gamma_{q-s}^j(2\pi), \quad (2.16)$$

para cualesquiera $\{N\} \subset \mathbb{N}$ y $\{q\} \subset \mathbb{Z}$, tales que $|q| \leq N$. De (2.15),

$$\gamma_q^{ij}(N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(q-s), \quad (2.17)$$

y por (2.8),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(q-s) = (\mathcal{F}(dp^i) \overset{Bohr}{*} \mathcal{F}(dp^j))(q).$$

Por tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_q^{ij}(N) = (\mathcal{F}(dp^i) \overset{Bohr}{*} \mathcal{F}(dp^j))(q). \quad (2.18)$$

Por otra parte de (2.16) y (2.17),

$$\gamma_q^{ij}(N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(q) + R^{ij}(s, q-s) \right).$$

Así,

$$\gamma_q^{ij}(N) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(q) + R_N^{ij}, \quad (2.19)$$

donde

$$R_N^{ij} := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N R^{ij}(s, q-s).$$

Sean

$$A_N^{ij} := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} d\Gamma_s^j(t)\Gamma_{q-s}^i(t)$$

y

$$B_N^{ij} := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} \Gamma_{q-s}^i(t)d\Gamma_s^j(t).$$

Luego, de la definición de R_N^{ij} ,

$$R_N^{ij} = A_N^{ij} + B_N^{ij}. \quad (2.20)$$

Mientras que por (2.14),

$$A_N^{ij} = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \exp(-ist_2) dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \exp(-i(q-s)t_1) dp^i(t_1) \right).$$

Y de (2.5),

$$A_N^{ij} = \int_0^{2\pi} dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \frac{1}{4\pi^2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \exp(-iqt_1) dp^i(t_1),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} |A_N^{ij}|^2 &= \left(\int_0^{2\pi} dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \frac{1}{4\pi^2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 + \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \frac{1}{4\pi^2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] &= E \left[\left(\int_0^{2\pi} dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 \right] + \\ &+ E \left[\left(\int_0^{2\pi} dp^j(t_2) \int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Así, de la identidad de energía de Itô (A.5 en [?]) se sigue que

$$\begin{aligned} 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] &= E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=-1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 dt_2 \right] + \\ &+ E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=-1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 dt_2 \right], \end{aligned}$$

pero como

$$\begin{aligned} &E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=-1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 dt_2 \right] \\ &\leq E \left[\left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder (Theorem 23.10 en [II]). Y

$$E \left[\left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq \left[E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] E \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right] \right]^{\frac{1}{2}},$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 9.3 (a) en [11]). Entonces

$$\begin{aligned} & E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 dt_2 \right] \\ & \leq \left[E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] E \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Análogamente obtenemos que

$$\begin{aligned} & E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^2 dt_2 \right] \\ & \leq \left[E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] E \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por tanto, de (2.21) y (2.22),

$$\begin{aligned} & 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] \\ & \leq \left[E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] E \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left[E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] E \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora verificaremos que

$$\beta := E \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \right)^2 dt_2 \right] < \infty.$$

De la desigualdad de Hölder,

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_l^i(t_2))^2 (\sigma_l^j(t_2))^2 dt_2 \leq \left[\int_0^{2\pi} (\sigma_l^i(t_2))^4 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (\sigma_l^j(t_2))^4 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

pues $\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^4 dt_2 < \infty$.

Por tanto,

$$\beta < \infty.$$

Por otra parte, dado que

$$\begin{aligned}
& \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \beta \left[\left[\int_0^{2\pi} E \left(\left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 \right) dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \beta \left[\left[\int_0^{2\pi} E \left(\left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 \right) dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right], \tag{2.23}
\end{aligned}$$

por el Teorema de Fubini (Teorema 19 en [\[30\]](#)). Y

$$\begin{aligned}
& \beta \left[\left[\int_0^{2\pi} E \left(\left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 \right) dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \beta \left[\left[\int_0^{2\pi} E \left(\left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 \right) dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq \beta \left[\left[C_2 \int_0^{2\pi} E \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \beta \left[\left[C_2' \int_0^{2\pi} E \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right], \tag{2.24}
\end{aligned}$$

por [2.2.16](#) y el hecho de que $\cos^2(qt_1) \leq 1$ y $\operatorname{sen}^2(qt_1) \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}
& \beta \left[\left[C_2 \int_0^{2\pi} E \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \beta \left[\left[C_2' \int_0^{2\pi} E \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq \beta \left[\left[C_2 E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \right) dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] +
\end{aligned}$$

$$+\beta \left[\left[C_2' E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \right)^2 dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right], \quad (2.25)$$

por Fubini y la desigualdad de Hölder.

De (2.23), (2.24) y (2.25), tenemos que

$$\begin{aligned} & \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq \beta \left[\left[C_2 E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \right)^2 dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \beta \left[\left[C_2' E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \right)^2 dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Mientras, como

$$\begin{aligned} 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] & \leq \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \cos(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \beta \left[\left[E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N(t_1 - t_2) \operatorname{sen}(qt_1) dp^i(t_1) \right)^4 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (2.26) y (2.27),

$$\begin{aligned} & 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] \\ & \leq \beta \left[\left[C_2 E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \beta \left[\left[C_2' E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^4(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{t_2} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_1 \right) dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta \left[\left[C_2 E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^A(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \\
&\quad + \beta \left[\left[C_2' E \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_2} \tilde{D}_N^A(t_1 - t_2) dt_1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 dt_1 \right)^2 dt_2 \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \beta \left[\left[C_2 E \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{t_2} \tilde{D}_N^A(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[C_2' E \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{t_2} \tilde{D}_N^A(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right],
\end{aligned}$$

luego de (2.12),

$$16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] \leq [C_2 + C_2'] \left[\frac{2\beta\pi}{2N+1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 16\pi^4 E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] \leq [C_2 + C_2'] \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\beta\pi}{2N+1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[|A_N^{ij}|^2 \right] = 0.$$

Posteriormente de la desigualdad de Chebyshev's (Corollary 5.2 (a) de [11]), para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|A_N^{ij}| > \epsilon] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E \left[|A_N^{ij}|^2 \right]}{\epsilon^2} = 0.$$

Lo cual implica que,

$$A_N^{ij} \xrightarrow{P} 0.$$

Análogamente demostramos que

$$B_N^{ij} \xrightarrow{P} 0.$$

Entonces $A_N^{ij} + B_N^{ij} \xrightarrow{P} 0$. Posteriormente por (2.20), $R_N^{ij} \xrightarrow{P} 0$.

De (2.19), $\gamma_q^{ij}(N) - \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(q) = R_N^{ij}$. De lo cual,

$$\gamma_q^{ij}(N) - \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(q) \xrightarrow{P} 0.$$

Por lo que $\gamma_q^{ij}(N) \xrightarrow{P} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(q)$.

Por lo tanto, de (2.18),

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Sigma^{i,j}) \xrightarrow{P} \mathcal{F}(dp^i) \overset{Bohr}{*} \mathcal{F}(dp^j).$$

□

2.5. Co-volatilidad integrada

Definición 2.5.1 Definimos la **co-volatilidad integrada** de los activos i, j , como la transformada de Fourier de $\Sigma^{i,j}$ de orden 0. Es decir $\mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(0)$, para cualesquiera $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Por otra parte de (2.13), la **co-volatilidad integrada** de los activos i, j cumple que

$$\mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(q-s). \quad (2.28)$$

Así, pensemos en la problemática de como implementar (2.28) con datos reales. De lo cual, debemos considerar la discretización de los datos y la aproximación de la k -ésima **transformada de Fourier de la diferencial de p^i** por sumas de Riemman-Stieltjes. En las siguientes secciones de este capítulo proporcionaremos los detalles necesarios para realizar los dos puntos anteriores.

2.6. Coeficientes de co-volatilidad instantánea

Definición 2.6.1 Sea $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definimos la norma uniforme de ϕ por

$$\|\phi\|_{L^\infty} = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\phi(t)|.$$

Lema 2.6.2 (Lema 3.2 en [18]) Sí $\text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} < \infty$, para cualquier $\{i\} \subset \{1, \dots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} E \left[\left| \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) - \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) \right|^2 \right] \\ \leq \frac{2}{2N+1} \text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

para cualesquiera $\{k\} \subset \{1, \dots, n\}$ y $\{N\} \subset \mathbb{N}$, con $k < 2N$.

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que $b = 0$ en (2.9).

De (2.17) y (2.19), tenemos que

$$\frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) - \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) = R_N^{ij}.$$

Lo cual implica que

$$E \left[\left| \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) - \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) \right|^2 \right]$$

$$= E \left[\left| R_N^{ij} \right|^2 \right].$$

Pero de (2.20),

$$E \left[\left| R_N^{ij} \right|^2 \right] = E \left[\left| (A_N^{ij} + B_N^{ij}) \right|^2 \right].$$

Y, como en el Teorema 2.4.3 demostramos que $|A_N^{ij}|^2$ y $|B_N^{ij}|^2$ pertenecen a L_1 , se sigue que

$$E \left[\left| \frac{2\pi}{2N+1} (A_N^{ij} + B_N^{ij}) \right|^2 \right] \leq 2E \left[\left| A_N^{ij} \right|^2 \right] + 2E \left[\left| B_N^{ij} \right|^2 \right].$$

Así,

$$\begin{aligned} & E \left[\left| \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) - \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) \right|^2 \right] \\ & \leq E \left[\left| A_N^{ij} \right|^2 \right] + E \left[\left| B_N^{ij} \right|^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ahora, dado que

$$\begin{aligned} & \left| A_N^{ij} \right|^2 \\ & = \frac{1}{16\pi^4} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \cos^2(qt_1) dt_1 \right) dt_2 + \\ & \quad + \frac{1}{16\pi^4} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) \sin^2(qt_1) dt_1 \right) dt_2 \\ & \leq \frac{1}{16\pi^4} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) dt_1 \right) dt_2 + \\ & \quad + \frac{1}{16\pi^4} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) dt_1 \right) dt_2, \end{aligned}$$

la primera desigualdad se sigue por la identidad de energía de Itô, mientras que la segunda porque $\cos^2(qt_1) \leq 1$ y $\sin^2(qt_1) \leq 1$.

Por tanto, de la desigualdad anterior,

$$2E \left[\left| A_N^{ij} \right|^2 \right]$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^4} E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) dt_1 \right) dt_2 \right].$$

Luego de (2.10),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^4} E \left[\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^j(t_2))^2 \left(\int_0^{t_2} \sum_{l=1}^d (\sigma_l^i(t_1))^2 \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) dt_1 \right) dt_2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^4} E \left[\int_0^{2\pi} \Sigma^{j,j}(t_2) \left(\int_0^{t_2} \Sigma^{i,i}(t_1) \tilde{D}_N^2(t_1 - t_2) dt_1 \right) dt_2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2N+1} \text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

por (2.12) y la hipótesis de que $\text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} < \infty$ para cualquier $\{i\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Así

$$E \left[\left| A_N^{ij} \right|^2 \right] \leq \frac{\text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}}{2N+1} \quad (2.30)$$

Análogamente demostramos que

$$E \left[\left| B_N^{ij} \right|^2 \right] \leq \frac{\text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}}{2N+1} \quad (2.31)$$

Por lo tanto, de (2.29), (2.30) y (2.31),

$$\begin{aligned} & E \left[\left| \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s) - \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k) \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{2 \text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}}{2N+1} \end{aligned}$$

□

2.6.1. Discretización de integrales mediante sumas de Riemann-Stieltjes

En esta subsección, aterrizamos los puntos necesarios que se deben considerar en este modelo para la discretización de los datos y la aproximación de la k -ésima **transformada de Fourier de la diferencial de p^i** . En cuanto a la discretización de los datos, consideraremos particiones del intervalo $[0, 2\pi]$ para cada activo. De lo cual, para datos reales del precio de activos es necesario estandarizar el tiempo en que se registró su precio al intervalo $[0, 2\pi]$. Mientras que $c_k(dp^i)$ juega el papel de la k -ésima **transformada de Fourier de la**

diferencial de p^i , vista como una suma de Riemman-Stieltjes del precio del i -ésimo activo en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Sea $P_i = \{0 = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{n_i}^i = 2\pi\}$ una partición cualquiera de $[0, 2\pi]$ del i -ésimo activo, para $\{i\} \subset \{1, \dots, \dots, n\}$. En este modelo suponemos que cada activo tiene su propia partición.

Sea $\rho_i(n) := \max |t_{i+1} - t_i|$, la norma de la partición P_i del i -ésimo activo. Sea $\rho(n) := \max\{\rho_i(n), \rho_j(n)\}$, $\rho(n)$ representa el máximo de la norma de la partición del i -ésimo y j -ésimo activo.

Definamos

$$c_k(dp^i) := \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{n_i-1} \exp(-ikt_r^i) \delta_{I_r^i}(p^r), \quad (2.32)$$

para cualesquiera $\{k\} \subset \{-2N, \dots, 0, \dots, 2N\}$ y $\{i, j\} \subset \{1, \dots, \dots, n\}$. Donde $I_r^i = [t_r^i, t_{r+1}^i]$ y $\delta_{I_r^i}(p^r) = p^r(t_{r+1}^i) - p^r(t_r^i)$, con $p^r(t_r^i)$ igual al precio de transacción del activo en el tiempo t_r^i .

En la siguiente sección, veremos que $c_k(dp^i)$ es relevante para calcular la trayectoria de co-volatilidad de un activo o de dos activos.

Si queremos visualizar la co-volatilidad de los activos i, j para $i \neq j$, consideramos

$$N = 0.85 * \min(n_i^{0.75}, n_j^{0.75}), \quad (2.33)$$

donde n_i y n_j son la cantidad de elementos de la partición P_i y P_j del intervalo $[0, 2\pi]$ del i -ésimo activo y el j -ésimo activo, respectivamente. Más, si nuestro objetivo es visualizar la co-volatilidad de un activo, $N = \frac{n}{2}$, donde $n = n_i$ es la cantidad de elementos de la partición P_i del intervalo $[0, 2\pi]$ del i -ésimo activo.

Lema 2.6.3 (Lemma 3.1 en [18]) *Si $\text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} < \infty$. Entonces*

$$\begin{aligned} & E[|c_s(dp_n^i) c_{k-s}(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^i)(k-s)|^2] \\ & \leq CN^2 \rho(n)^2 \text{ess sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \text{ess sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

para cualesquiera $\{k, s\} \subset \{-N, \dots, 0, \dots, N\}$ y $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Demostración: Supongamos sin pérdida de la generalidad que $b = 0$ en (2.9).

Sea

$$\beta_u(t) := \sum_{r=0}^{n-1} \exp(-iut_r^i) (1 - \exp(-iu(t-t_r^i))) I_{[t_r^i, t_{r+1}^i]}(t).$$

Tenemos que

$$c_u(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_u(t) dp^i(t). \quad (2.34)$$

Ahora, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} & |c_s(dp_n^i)c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2 \\ & \leq (|c_{k-s}(dp_n^j)||c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)| + |\mathcal{F}(dp^i)(s)||c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|)^2, \end{aligned}$$

y por la desigualdad de la media geométrica y la media aritmética,

$$\begin{aligned} & 2|c_{k-s}(dp_n^j)||c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)||\mathcal{F}(dp^i)(s)||c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)| \\ & \leq |c_{k-s}(dp_n^j)|^2|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^2 + \\ & \quad + |\mathcal{F}(dp^i)(s)|^2|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2. \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} & (|c_{k-s}(dp_n^j)||c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)| + |\mathcal{F}(dp^i)(s)||c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|)^2 \\ & \leq 2(|c_{k-s}(dp_n^j)|^2|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^2 + \\ & \quad + |\mathcal{F}(dp^i)(s)|^2|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2) \end{aligned}$$

lo cual implica que,

$$\begin{aligned} & |c_s(dp_n^i)c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2 \\ & \leq 2(|c_{k-s}(dp_n^j)|^2|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^2 + \\ & \quad + |\mathcal{F}(dp^i)(s)|^2|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & E[c_s(dp_n^i)c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2] \\ & \leq 2(E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^2|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^2] + \\ & \quad + 2(E[|\mathcal{F}(dp^i)(s)|^2|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2])), \end{aligned}$$

aunque, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & 2(E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^2|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^2] + E[|\mathcal{F}(dp^i)(s)|^2|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2]) \\ & \leq (E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^4]E[|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^4])^{\frac{1}{2}} + \\ & \quad + (E[|\mathcal{F}(dp^i)(s)|^4]E[|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^4])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & E[|c_s(dp_n^i)c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^i)(s)\mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2] \\ & \leq 2(E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^4]E[|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^4])^{\frac{1}{2}} + \\ & \quad + 2(E[|\mathcal{F}(dp^i)(s)|^4]E[|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^4])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(2.35)

De (2.34), tenemos que

$$\begin{aligned}
E[|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^4] &= E \left[\left| \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \beta_u(t) dp^i \right|^4 \right] \\
&\leq C_2 E \left[\left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |\beta_u(t)|^2 \Sigma^{i,i}(t) dt \right)^2 \right] \\
&\leq C_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty}^2 E \left[\left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |\beta_u(t)|^2 dt \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{C_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4} E \left[\int_0^{2\pi} |\beta_u(t)|^4 dt \right] \\
&\leq \frac{C_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4} \sum_{l=0}^{n-1} \max\{h_r^4\} |t_r^i - t_{r+1}^i|,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se cumple por (2.2.16); la segunda desigualdad se sigue de la definición de $\operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty}^2$; la tercera de la desigualdad de Jensen's (Proposition 17 en [30]); y, en la última desigualdad $h_r := |(\exp(-ist_r^i))(1 - \exp(-is(t - t_r^i)))|$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
h_r &= |(\exp(-ist_r^i))(1 - \exp(-is(t - t_r^i)))| \\
&= |\exp(-ist_r^i) - \exp(-ist)| \\
&= |\cos(st_r^i) - \cos(st) - i \operatorname{sen}(st_r^i) + i \operatorname{sen}(st)| \\
&\leq |\cos(st_r^i) - \cos(st)| + |\operatorname{sen}(st) - \operatorname{sen}(st_r^i)| \\
&\leq M_1 |s(t_r^i - t)| + M_2 |s(t_r^i - t)| \\
&\leq M |s(t_r^i - t)| \\
&\leq M(N|t_r^i - t|) \\
&\leq M(N\rho(n)),
\end{aligned}$$

para $M_1 + M_2 \leq M$.

Así,

$$E[|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^4] \leq \frac{C_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4} M^4 N^4 \rho^4(n). \quad (2.36)$$

Mientras,

$$\begin{aligned}
&E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^4] \\
&= E \left[\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \exp(-i(k-s)t_r^i) I_{[t_r^i, t_{r+1}^i]}(t) dp^j \right|^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C'_2 E \left[\frac{1}{16\pi^4} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{r=0}^{n-1} \exp(-i(k-s)t_r^j) I_{[t_r^j, t_{r+1}^j]}(t) \right|^2 \Sigma^{j,j}(t) dt \right) \right] \\
&\leq \frac{C'_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4} E \left[\int_0^{2\pi} \left| \sum_{r=0}^{n-1} \exp(-i(k-s)t_r^j) I_{[t_r^j, t_{r+1}^j]}(t) \right|^4 dt \right] \\
&\leq \frac{C'_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4} \\
&= \frac{C'_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4},
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se cumple por (2.2.16); la segunda se sigue de la definición de $\operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}^2$ y la desigualdad de Jensen's; y, la última desigualdad porque $|\exp(-ist_r^i)| \leq 1$.

Así,

$$E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^4] \leq \frac{C'_2 \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty}^2}{16\pi^4}. \quad (2.37)$$

Por lo tanto de (2.36) y (2.37),

$$\begin{aligned}
&(E[|c_{k-s}(dp_n^j)|^4] E[|c_s(dp_n^i) - \mathcal{F}(dp^i)(s)|^4])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{(C'_2 C_2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty} M^2 N^2 \rho^2(n)}{16\pi^4}.
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Análogamente demostramos que,

$$\begin{aligned}
&(E[|\mathcal{F}(dp^i)(s)|^4] E[|c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^4])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{(D'_2 D_2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty} (M')^2 N^2 \rho^2(n)}{16\pi^4}.
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Por lo tanto de (2.35), (2.38) y (2.39),

$$\begin{aligned}
&E[|c_s(dp_n^i) c_{k-s}(dp_n^j) - \mathcal{F}(dp^i)(s) \mathcal{F}(dp^j)(k-s)|^2] \\
&\leq \left(\frac{(C'_2 C_2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty} M^2 N^2 \rho^2(n)}{16\pi^4} \right) + \\
&+ \left(\frac{(D'_2 D_2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty} (M')^2 N^2 \rho^2(n)}{16\pi^4} \right) \\
&\leq C \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{i,i}\|_{L^\infty} \operatorname{ess\,sup} \|\Sigma^{j,j}\|_{L^\infty} N^2 \rho^2(n),
\end{aligned}$$

para

$$\frac{\left((C'_2 C_2)^{\frac{1}{2}} + (D'_2 D_2)^{\frac{1}{2}} \right) (M^2 + (M')^2)}{2\pi^2} \leq C.$$

□

2.7. La trayectoria de la co-volatilidad

En esta sección enunciamos los resultados que concluyen que las trayectorias de la co-volatilidad estimadas convergen a la trayectoria de la co-volatilidad del modelo.

Definamos

$$\alpha_k(N, p^i, p^j) := \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^N c_s(dp_n^i) c_{k-s}(dp_n^j).$$

para cualquier $\{k\} \subset \{-N, \dots, 0, \dots, N\}$ y N fue dado en (2.33).

Teorema 2.7.1 (Teorema 3.3 en [18]) Si $\Sigma(t)$ es continua y $N\rho(n) \rightarrow 0$. Entonces

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \alpha_k(N, p_n^i, p_n^j) = \mathcal{F}(\Sigma^{i,j})(k), \text{ (en probabilidad)}$$

para cualesquiera $\{k\} \subset \{-N, \dots, 0, \dots, N\}$ y $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Para demostrar el Teorema 2.7.1 debemos usar los Lemas 2.6.2 y 2.6.3. Definamos

$$\widehat{\Sigma}_{n,N}^{i,j} := \sum_{k=-M}^M \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) \alpha_k(N, p_n^i, p_n^j) \exp(ikt).$$

Si pretendemos visualizar la co-volatilidad de los activos i, j para $i \neq j$, elegimos

$$M = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8} \sqrt{n^{\frac{3}{4}} \log(n^{\frac{3}{4}})} \sim \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{.85} N \log\left(\frac{1}{.85} N\right)}$$

donde N fue dado en (2.33). Pero nuevamente, si nuestro objetivo es visualizar la co-volatilidad de un activo, $M = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8} \sqrt{n \log(n)}$, donde $n = n_i$ es la cantidad de elementos de la partición P_i del intervalo $[0, 2\pi]$ del i -ésimo activo.

Ahora, notemos que la relevancia que mencionamos en la sección anterior con respecto a $c_k(dp^i)$ se hace presente en el Teorema 2.7.2. Puesto que en este, concluimos que las trayectorias de co-volatilidad estimadas, $\Sigma_{n,N}^{i,j}(t)$, convergen a las trayectorias de co-volatilidad del modelo, $\Sigma^{i,j}(t)$. En el código para el cálculo de la volatilidad en el Apéndice A se implementó $\Sigma_{n,N}^{i,j}(t)$ en el lenguaje de programación R.

Teorema 2.7.2 (Teorema 3.4 en [18]) Si $\Sigma(t)$ es continua y $N\rho(n) \rightarrow 0$. Entonces

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| \widehat{\Sigma}_{n,N}^{i,j}(t) - \Sigma^{i,j}(t) \right| = 0, \text{ (en probabilidad)}$$

para cualquier $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Capítulo 3

Estimaciones con datos reales

En este capítulo implementamos el estimador de Fourier-Malliavin en el lenguaje de programación R para la estimación de co-volatilidad de precios de activos. El código lo incluimos en el Apéndice [A](#) y lo probamos en series de tiempo del año 2020 del precios de las siguientes acciones:

- American Airlines Group (AAL)
- Apple Inc. (AAPL)
- Advance Auto Parts Inc. (AAP)
- Accenture plc. (ACN)

Las series de tiempo corresponden a cotizaciones en el mercado de Estados Unidos. Trabajamos con estos datos debido a la disponibilidad de información en comparación con datos de otros países.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección [3.1](#) hacemos un breve recuento de algunos de los hechos más significativos que produjo la pandemia de la COVID-19 en EUA. Esto es altamente relevante debido a que las series de tiempo corresponden al año 2020 lo que coincide con la parte más fuerte de la pandemia, con esto nos referimos al aumento de casos de contagio y a la política pública de confinamiento a nivel mundial. En la Sección [3.2](#) mostramos las series de tiempo del precio de las acciones seleccionadas. En la Sección [3.3](#) reportamos los resultados de estimar la volatilidad de las cuatro series de tiempo. En la Sección [3.4](#) presentamos la dispersión de los precios de las acciones seleccionadas. En las Secciones [3.5](#), [3.6](#), [3.7](#) y [3.8](#) mostramos algunos puntos del estado de resultados del 2020 de las empresas AAL, AAP, AAPL y ACN; la información que mencionamos en cada sección se obtuvo del informe anual 10-K; y la justificación de incorporar estas secciones es conocer la salud de las empresas durante el 2020 a partir de la rentabilidad, pues este es un valor

vital para las decisiones de compra-venta de los clientes en el mercado; también, la razón por la cual mostramos de los tres estados financieros el estado de resultados es que este contiene la utilidad neta, un indicador de la rentabilidad. Por último, en la Sección 3.9 mencionamos las relaciones y discrepancias entre la volatilidad de las acciones de la Sección 3.3, la información de los estados de resultados de las empresas de las Secciones 3.5-3.8 y algunas de las teorías del capítulo 1.

3.1. Antecedente: COVID 19

El primer caso de la Covid-19 en EUA fue reportado el 21 de enero del 2020 en Washington, ocasionando el inicio del impacto de la pandemia. Sin embargo, fue hasta el 3 de febrero del 2020 que el presidente de EUA Donald Trump, declara una emergencia de salud pública en la nación. En esta parte es importante destacar que las series de tiempo de los precios de las acciones que se estudian en la Sección 3.2 tienen una tendencia a la baja en los días finales de febrero, patrón que sigue el mismo comportamiento en cada serie hasta los días iniciales de abril del 2020, Figura 3.2. Esto era de esperarse por la incertidumbre que causaba la misma pandemia, debido a que hasta entonces no se conocía un antiviral eficaz contra la Covid-19, su tasa de mortalidad, todos los medios de propagación del virus, los continuos confinamientos, etc.

Algunos acontecimientos de la pandemia de la Covid-19 en EUA fueron:

- El 17 de marzo del 2020 Donald Trump solicitó al congreso enviar ayuda financiera directa a los estadounidenses. Consecuentemente, el 27 de marzo del 2020 el senado aprueba la ley CARES (*The Coronavirus Aid, Relief, and Economic Security*); la cual proporciona \$2 billones de dólares en ayuda a hospitales, pequeñas empresas, gobiernos estatales y locales.
- El 1 de mayo del 2020 la FDA (*The Food and Drug Administration*) otorga el uso de remdesivir como antiviral para la Covid-19.
- El 9 de junio del 2020 la OMS anunció que la Covid-19 puede transmitirse por el aire.
- El 20 de junio del 2020 EUA reportó 2 millones de casos confirmados de la Covid-19.
- El 16 de julio del 2020 EUA reportó 75,600 nuevos casos de la Covid-19. Pero el 4 de noviembre del 2020 EUA reportó 100,000 nuevos casos de la Covid-19, el aumento más grande en un día desde el comienzo de la pandemia.
- El 16 de noviembre del 2020 Moderna anunció que su vacuna tiene una eficiencia del 94.5% contra la Covid-19; y el 18 de noviembre del 2020 Pfizer y BioNTech anunciaron que su vacuna tiene una eficiencia del 95% contra

la Covid-19. La FDA certificó el uso de la vacuna de Pfizer y BioNTech el 11 de diciembre del 2020, mientras que la certificación para la vacuna de Moderna fue aprobada el 17 de diciembre del 2020. La vacunación en EUA inició el 14 de diciembre del 2020 con la aplicación de la vacuna producida por Pfizer y BioNTech.

- El índice de Rigor de Oxford (*Oxford Stringency index*) el cual se calcula a partir de los nueve parámetros: escuelas cerradas, lugares de trabajo cerrados, cancelación de eventos públicos, restricción a reuniones públicas, transportes públicos cerrados, requisitos para quedarse en casa, campañas de información pública, restricciones a movimientos internos y controles de viajes internacionales en respuesta del gobierno por causa de la Covid-19. Para más detalles sobre el cálculo de los subíndices mencionados y como es que estos se usan para obtener el índice de Rigor de Oxford para las personas vacunadas (trayectoria verde), no vacunadas (trayectoria roja) y el promedio ponderado de las mismas (trayectoria azul), Figura 3.1; proporcionamos la siguiente fuente <https://ourworldindata.org/covid-stringency-index>.

Por otra parte, aproximadamente de los últimos días de enero hasta los últimos días de marzo del 2020 el índice de Rigor de Oxford es creciente para todas las trayectorias, Figura 3.1. El 18 de noviembre del 2020, el índice de Rigor de Oxford alcanza su máximo, 75.46. Lo que se aproxima con la fecha en la que se registró el mayor aumento de nuevos casos de la Covid-19 en EUA en el 2020. Además, observemos de la Figura 3.1 que el índice de Rigor de Oxford comienza a tener valores menores o iguales a 60 a partir de los últimos días de marzo del 2021. Cabe mencionar que para el 31 de marzo del 2021, el 33 % de la población de EUA tiene al menos una dosis del esquema de vacunación.

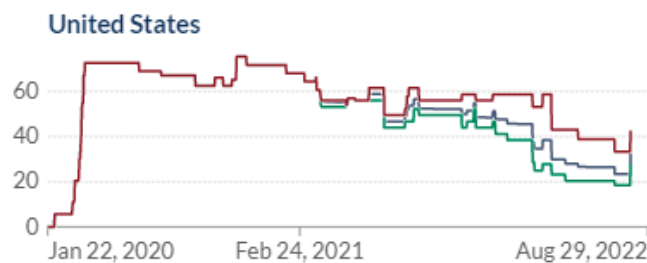


Figura 3.1: Índice de Rigor de Oxford (*Oxford Stringency index*) para EUA. Personas vacunadas (trayectoria verde), personas no vacunadas (trayectoria roja), y promedio ponderado de personas vacunadas y no vacunadas (trayectoria azul).

A causa de la reducción de las actividades comerciales debido a los continuos confinamientos, la pandemia de la COVID-19 trajo consigo una incertidumbre

económica a nivel mundial. Es por esta razón que mostramos el valor de algunos indicadores económicos de EUA durante el 2020:

- Para el 17 de agosto del 2020 EUA reportaba 1,186 millones de desempleados. La tasa de desempleo en EUA durante el 2020 fue del 8.1 % de la población activa.
- La tasa de crecimiento del producto interno bruto de EUA en el 2020 fue de -3.4 % con respecto al producto interno bruto del 2019.
- La tasa de inflación de EUA en el 2020 fue de 1.2 % con respecto al índice de precios de consumo del 2019.

La información de los indicadores económicos que acabamos de presentar la obtuvimos de las fuentes www.ajmc.com/a-timeline-of-covid19-developments-in-2020 y www.bancomundial.org.

Observamos que todas las series de tiempo de la Sección 3.2 con excepción de la serie de tiempo de AAL tienen una tendencia al alza de los días iniciales de abril a los días finales de diciembre del 2020, Figura 3.2. Lo que es un comportamiento inusual en relación con el valor de las tasas de desempleo, crecimiento del producto interno e inflación de EUA en el 2020. Así, podemos suponer que no existe una correlación positiva entre las tasas mencionadas y el precio de algunas acciones del mercado en EUA.

3.2. Datos

Trabajaremos con datos de precios de las acciones de AAL, AAP, AAPL y ACN. Las series de tiempo son de alta frecuencia, lo cual significa que para cada minuto de actividad en que está abierto el mercado tenemos al menos una observación, aunque generalmente hay dos o tres de ellas. Los datos se obtuvieron a través del proveedor de servicios de información INTRINIO. Trabajaremos con lo que el proveedor reporta como *last-price* para el cálculo de volatilidades. Entendamos por *last-price*, el precio en que se realiza la transacción de la acción en un tiempo específico. También usaremos los precios de compra-venta de primer nivel para calcular la dispersión en la Sección 3.4.

En la Figura 3.2 mostramos las gráficas de los precios, *last-price*, de las acciones de AAL, AAP, AAPL y ACN de enero del 2020 a diciembre del 2020. Además, notemos que en los últimos días de febrero el precio de las acciones tiene una tendencia a la baja en cada una de las series de tiempo, esto coincide con la declaración que haría el presidente Donald Trump en este mes con respecto a la Covid-19 y el lanzamiento de medidas como el confinamiento. Mientras que de los días iniciales de abril a los días finales de diciembre del 2020 el precio de las acciones tiene una tendencia al alza en cada una de las series de tiempo, con excepción de la acción de AAL. Con sustento en la existencia de comunalidades en el rendimiento de las acciones que se menciona en la Sección 1.2, suponemos que dicho comportamiento se debe a factores comunes entre las acciones de

AAP, AAPL y ACN, como una utilidad neta positiva, inversión en la compra de acciones e inversión en investigación y desarrollo (hacemos mención de esto en las Secciones 3.6, 3.7 y 3.8), dichos factores causan un impacto en el flujo de órdenes, lo cual crea un mayor rendimiento en las acciones, lo anterior podemos verificarlo en la ecuación (1.10). Conjeturamos otra explicación basándonos en la Ley de la raíz cuadrada o la LLT de la Sección 1.3, puesto que si los factores comunes mencionados generen una correlación positiva en el tiempo del precio de reserva de los clientes, esto implica una correlación positiva en el impacto del cambio del precio promedio de reserva de las acciones al comienzo y final de las metaórdenes, lo que también explica la tendencia al alza en el precio de las acciones de AAP, AAPL y ACN de los días iniciales de abril a los días finales de diciembre del 2020.

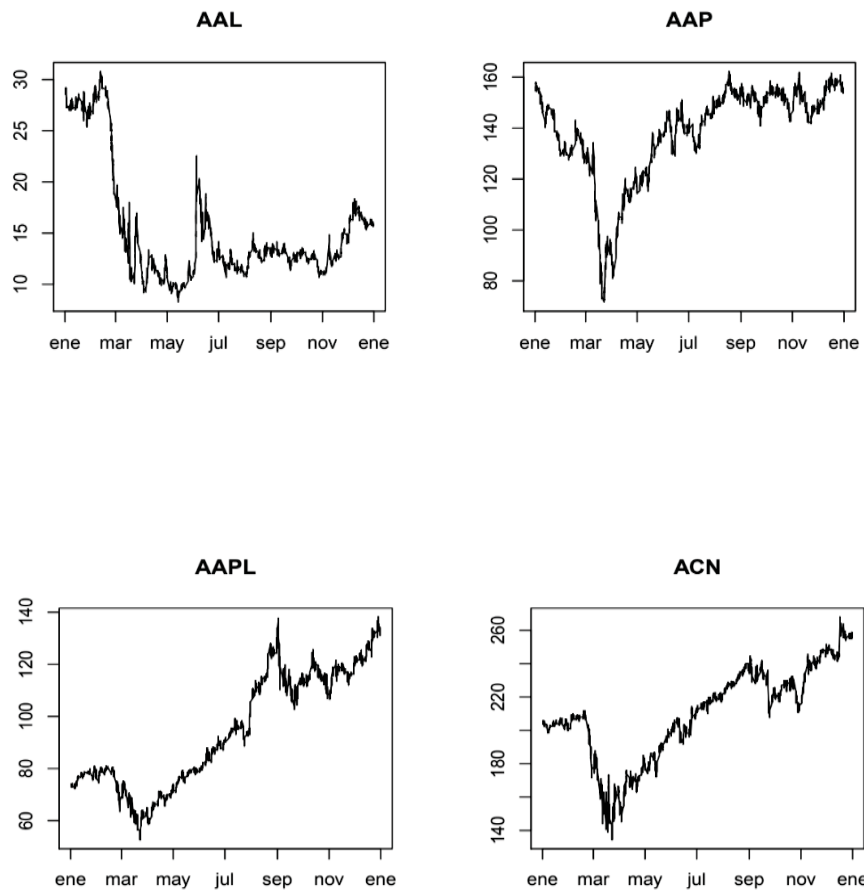


Figura 3.2: *Last price* en USD de las acciones AAL, AAP, AAPL y ACN de enero a diciembre del 2020.

3.3. Gráficas de volatilidad

En la Figura 3.3 mostramos las volatilidades estimadas de las acciones de AAL, AAP, AAPL y ACN durante el año 2020. Estimaciones realizadas mediante el método de Fourier-Malliavin, el cual desarrollamos a partir del código del Apéndice A.

También, es evidente en la Figura 3.3 un aumento de volatilidad para las cuatro acciones en los últimos días de febrero, teniendo un máximo aproximadamente en el mes de marzo, coincidiendo con el lanzamiento de medidas en contra de la Covid-19, especialmente, el confinamiento a nivel mundial. A su vez, el comportamiento mencionado en la volatilidad concuerda con la tendencia a la baja en los precios de las acciones en los últimos días febrero y la tendencia al alza en el precio de las acciones de los últimos días de abril a los últimos días de diciembre, Figura 3.2.

Observemos además que sólo las acciones de AAL tienen otros aumentos de volatilidad que destacan comparándose con la volatilidad de las acciones de AAP, AAPL y ACN, lo que corresponde con los cambios en el precio de las acciones de AAL de abril a diciembre del 2020, Figura 3.2.

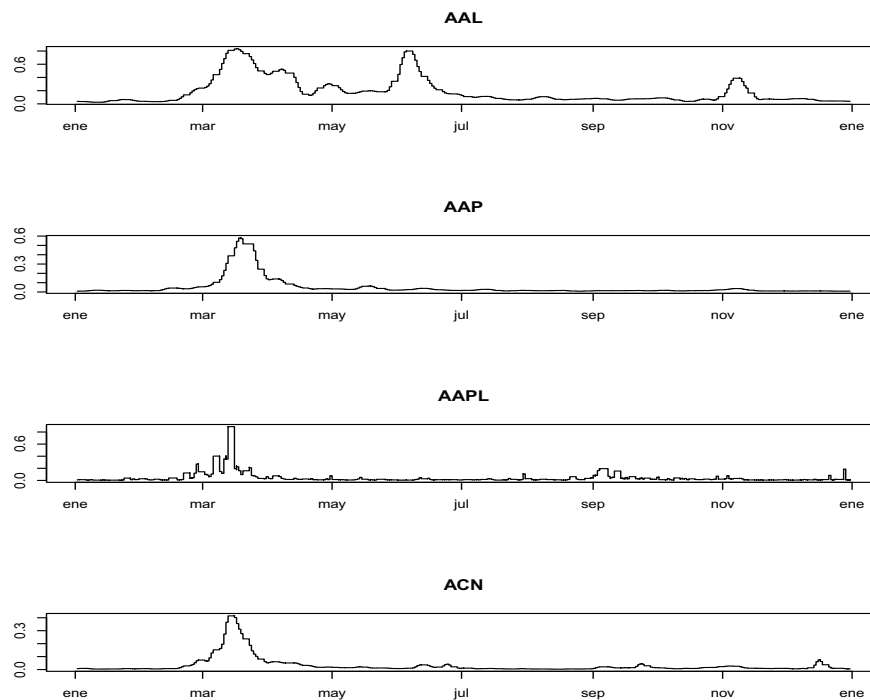


Figura 3.3: Volatilidad del *last-price* en USD de las acciones de AAL, AAP, AAPL y ACN; de enero a diciembre del 2020.

3.4. Gráficas de dispersión

De acuerdo con los resultados de la Sección 1.1.2 donde se menciona que existe una relación monótona entre la volatilidad y la dispersión. Vemos evidencia de esta relación para las acciones de AAL y AAP, puesto que para ambas acciones existe un aumento de la volatilidad en los días finales de febrero, Figura 3.2; lo que coincide con el aumento en la dispersión (*spread*) de las acciones en el tiempo mencionado, Figura 3.4 y Figura 3.5. Sin embargo, para las otras dos acciones AAPL y ACN, la relación parece ser ambigua; dado en los días finales de febrero la volatilidad de estas acciones comienza a aumentar, lo que no corresponde con el comportamiento en la dispersión de las acciones en los días finales de febrero, Figura 3.6 y Figura 3.7; la causa podría una mayor aversión al riesgo por parte de los clientes para negociar acciones de AAPL y ACN (κ en (1.3) y (1.4)).

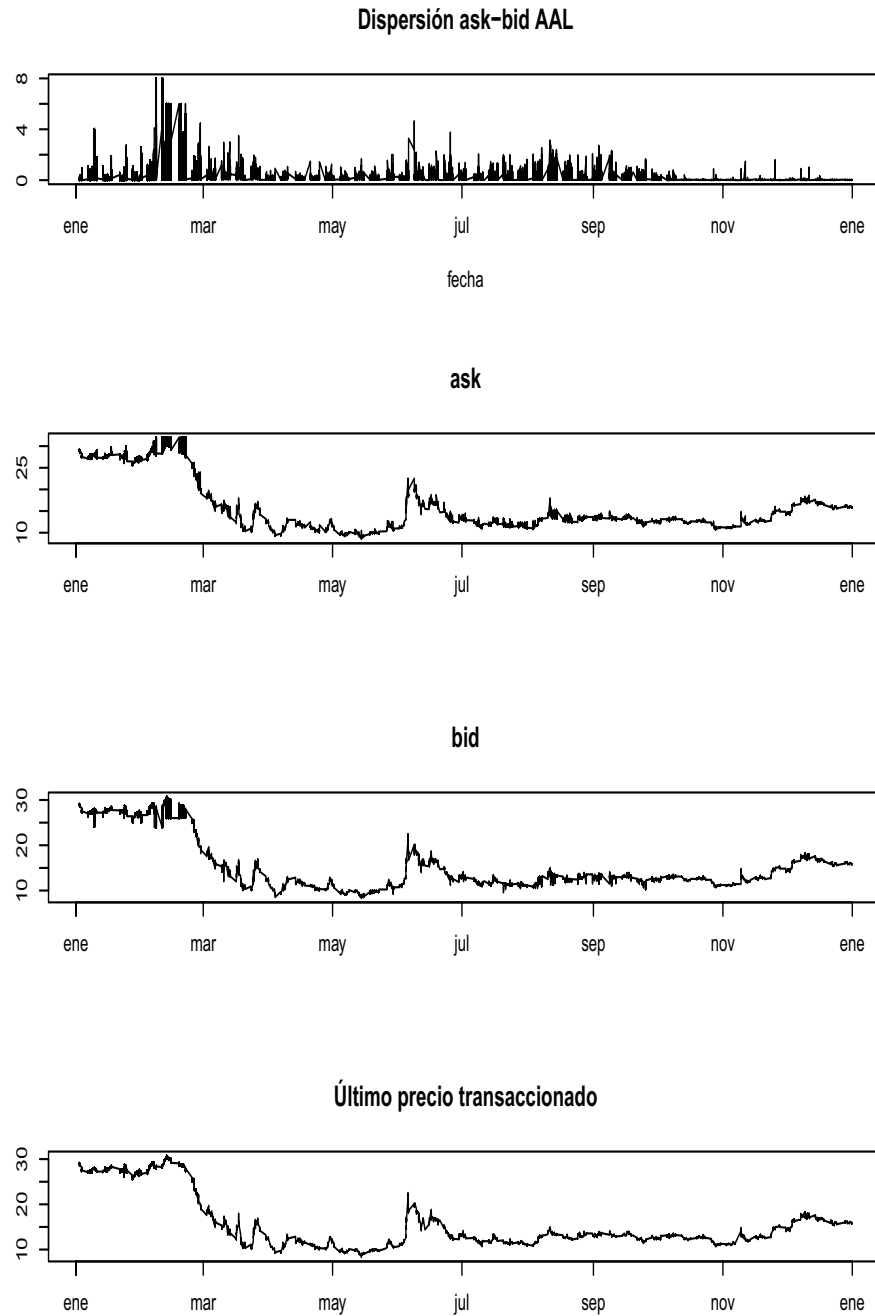


Figura 3.4: Dispersión (*spread*) en USD de AAL, primera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de venta o *ask* en USD de AAL, segunda gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de compra o *bid* en USD de AAL, tercera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Último precio transaccionado *last price* en USD de AAL, cuarta gráfica; de enero a diciembre del 2020.

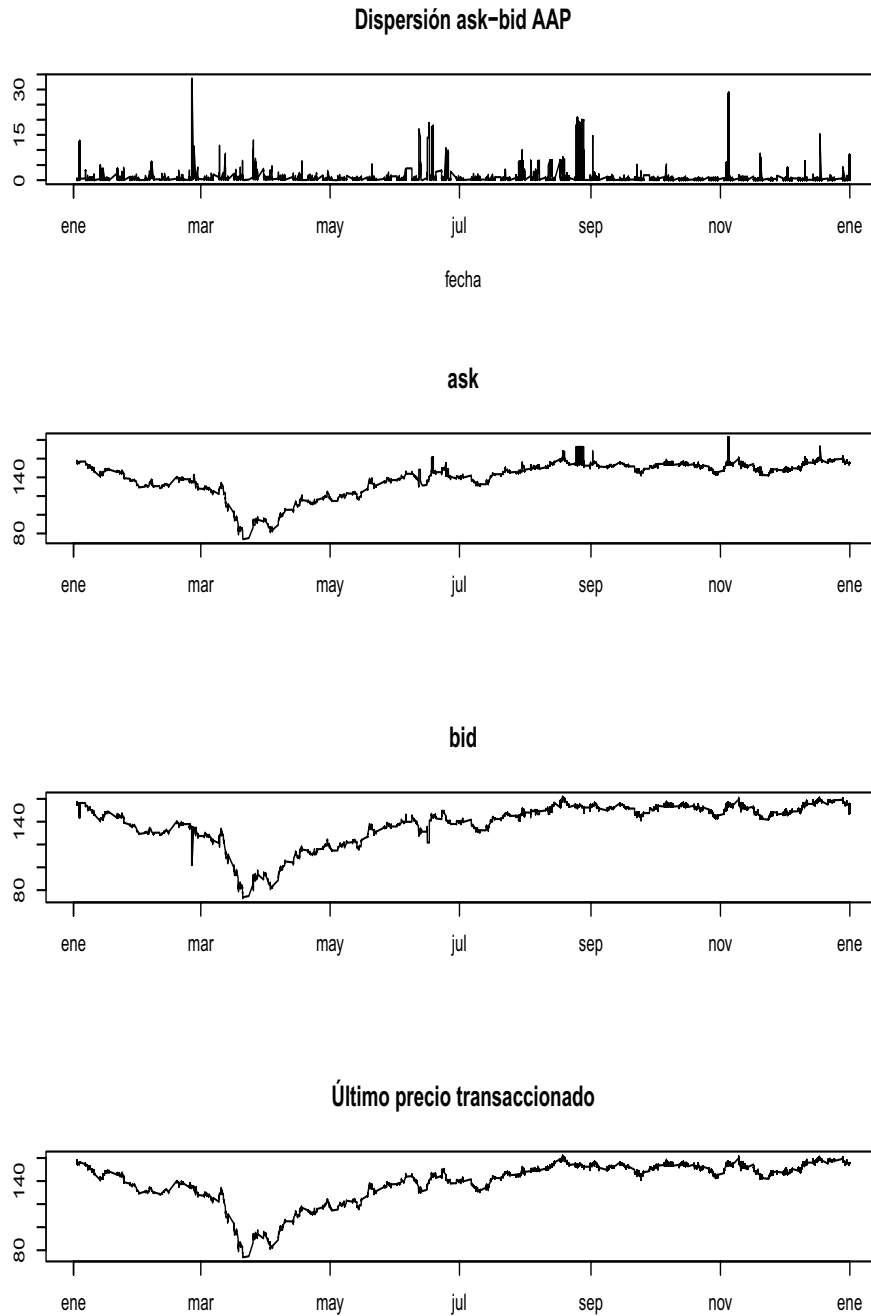


Figura 3.5: Dispersión *spread*) en USD de AAP, primera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de venta o *ask* en USD de AAP, segunda gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de compra o *big* en USD de AAP, tercera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Último precio transaccionado *last price* en USD de AAP, cuarta gráfica; de enero a diciembre del 2020.

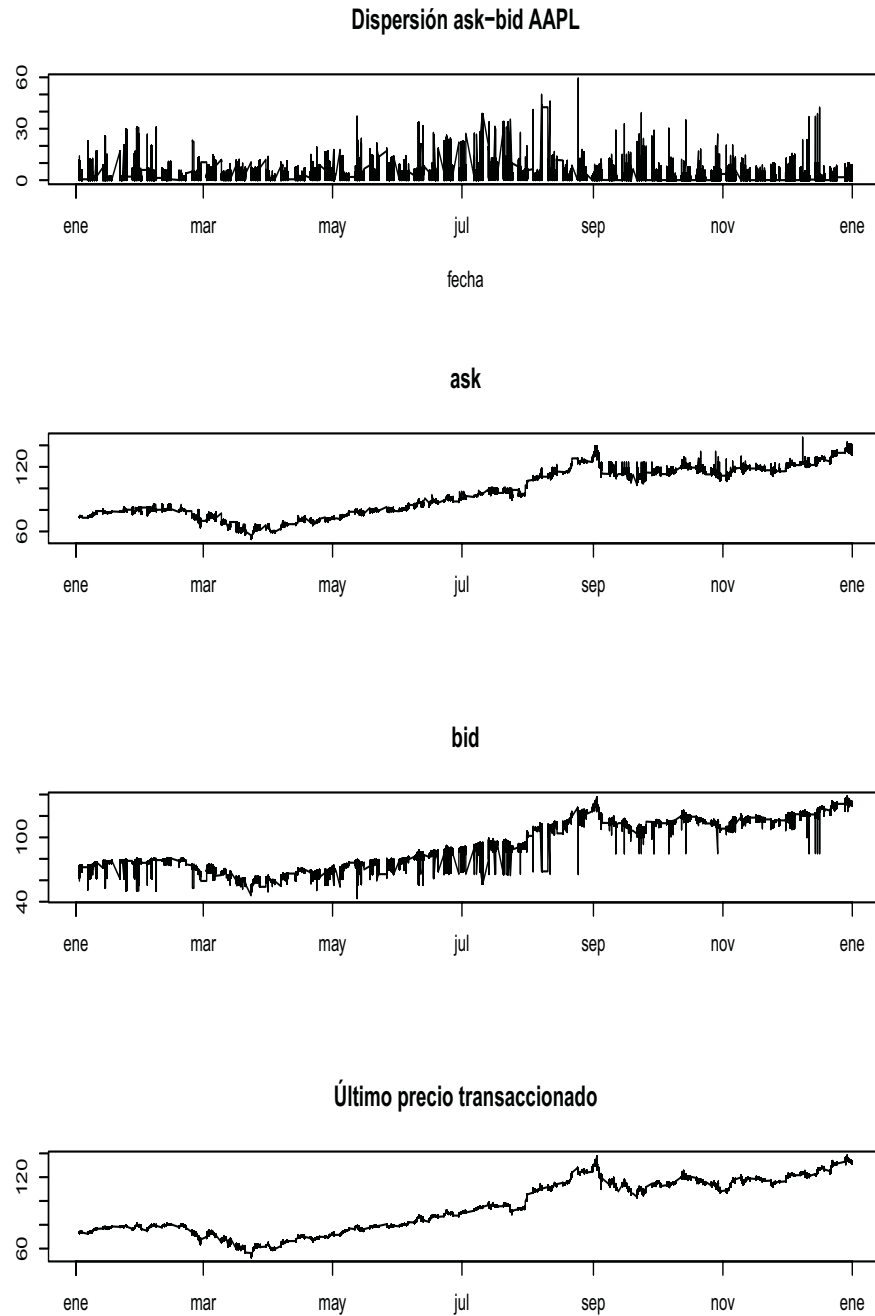


Figura 3.6: Dispersión *spread*) en USD de AAPL, primera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de venta o *ask* en USD de AAPL, segunda gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de compra o *big* en USD de AAPL, tercera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Último precio transaccionado *last price* en USD de AAPL, cuarta gráfica; de enero a diciembre del 2020.

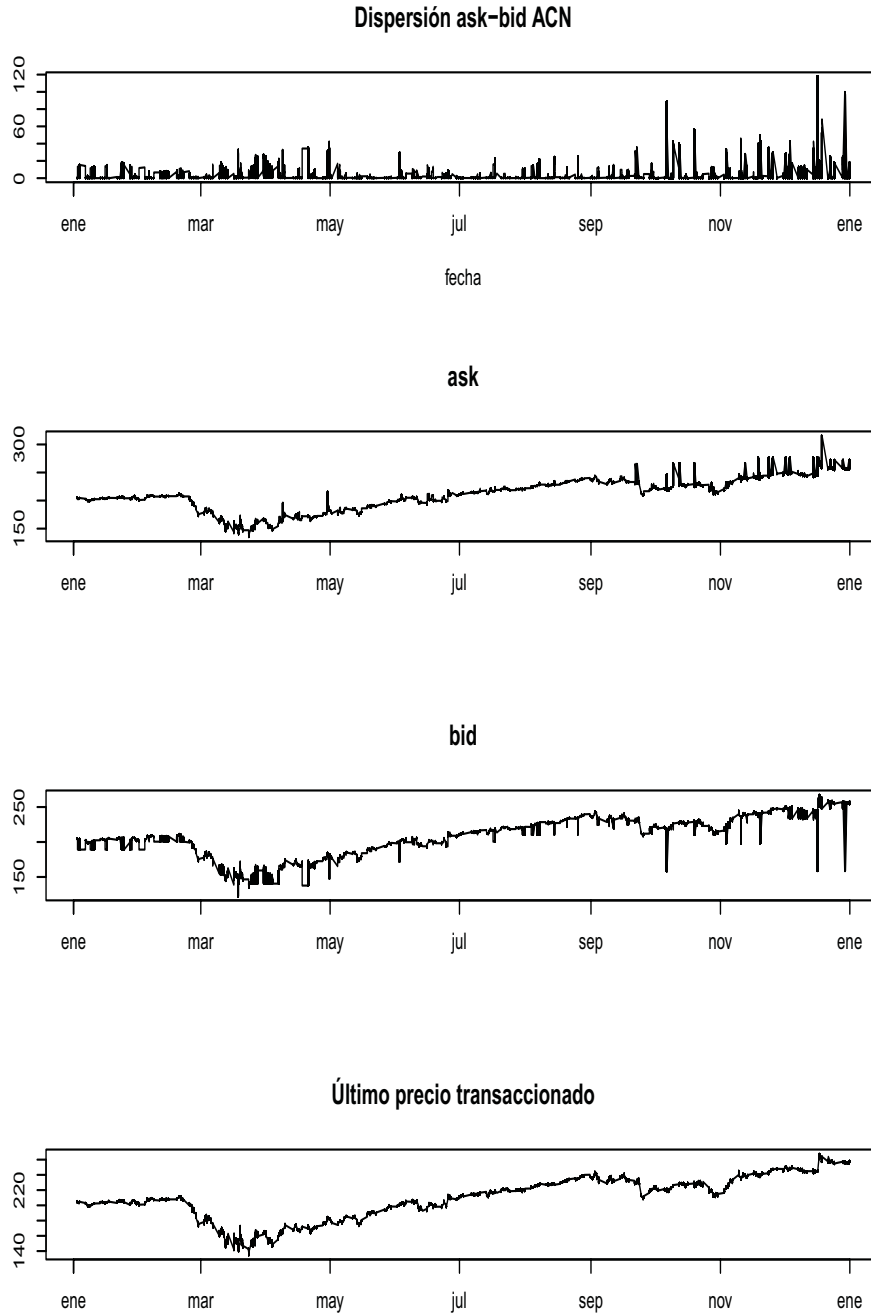


Figura 3.7: Dispersión (*spread*) en USD de ACN, primera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de venta o *ask* en USD de ACN, segunda gráfica; de enero a diciembre del 2020. Precio de compra o *bid* en USD de ACN, tercera gráfica; de enero a diciembre del 2020. Último precio transaccionado *last price* en USD de ACN, cuarta gráfica; de enero a diciembre del 2020.

3.5. American Airlines Group Inc.

En la Figura 3.2 observamos que el precio de las acciones de AAL tiene periodos de tiempo con una tendencia al alza aunque predominan los periodos de tiempo en los que el precio tiene una tendencia a la baja; por ejemplo, aproximadamente de los primeros quince días de febrero a los primeros quince días de marzo el precio tiene una tendencia a la baja, pasados los primeros quince días de marzo a los primeros días de abril el precio tiene una tendencia al alza, y transcurridos los primeros días de abril nuevamente el precio tiene una tendencia a la baja. Ahora mencionamos algunos puntos del estado de resultados de AAL, Figura 3.8:

1. Los ingresos operativos totales (*total operating revenues*) de AAL en el 2020 disminuyeron \$24,431 millones de dólares estadounidenses con respecto a los ingresos operativos totales del 2019. Lo cual muestra una reducción del 62.11%, a la causa de la reducción de vuelos nacionales y internacionales por la pandemia de la Covid-19.
2. Dado que la diferencia de los ingresos operativos totales con los gastos operativos totales (*total operating expenses*) de AAL en el 2020 fue de \$10,421 millones de dólares estadounidenses a la baja, tenemos una utilidad operativa (*operating income*) negativa para AAL en el 2020.
3. La utilidad neta (*net income*) de AAL en el 2020 fue de \$8,885 millones de dólares estadounidenses a la baja. Por lo que la aerolínea estadounidense se vio en la necesidad de recurrir a un bono por parte del Departamento del Tesoro (*Department of the Treasury*) para permanecer en operación.
4. El cociente de la utilidad neta con el número de acciones (*shares used for computation*) de AAL en el 2020 fue de 0.1836 a la baja. De lo cual el EPS (*earnings per share*) bajo 18.36%.

	Year Ended December 31,				
	2020	2019	2018	2017	2016
(in millions, except share and per share amounts)					
Consolidated Statements of Operations data:					
Total operating revenues	\$ 17,337	\$ 45,768	\$ 44,541	\$ 42,622	\$ 40,142
Total operating expenses	27,758	42,703	41,885	38,391	35,082
Operating income (loss)	(10,421)	3,065	2,656	4,231	5,060
Net income (loss)	(8,885)	1,686	1,412	1,282	2,584
Earnings (loss) per common share:					
Basic	\$ (18.36)	\$ 3.80	\$ 3.04	\$ 2.62	\$ 4.68
Diluted	(18.36)	3.79	3.03	2.61	4.65
Shares used for computation (in thousands):					
Basic	483,888	443,363	464,236	489,164	552,308
Diluted	483,888	444,269	465,660	491,692	556,099
Cash dividends declared per common share	\$ 0.10	\$ 0.40	\$ 0.40	\$ 0.40	\$ 0.40
Consolidated Balance Sheet data (at end of period):					
Total assets	\$ 62,008	\$ 59,995	\$ 60,580	\$ 52,785	\$ 53,610
Debt and finance leases	32,593	24,315	24,473	25,065	24,344
Pension and postretirement obligations ⁽¹⁾	7,131	6,081	6,937	7,596	7,946
Operating lease liabilities	8,428	9,129	9,556	—	—
Stockholders' deficit	(6,867)	(118)	(169)	(780)	(286)

Figura 3.8: Hoja de balance de AAL. Cantidades en millones de USD.

Los puntos que mencionamos del estado de resultados 10-K de AAL del 2020 y la Figura 3.8, las obtuvimos de la fuente <https://americanairlines.gcs-web.com>.

3.6. Advance Auto Parts, Inc.

Nuevamente notamos de la Figura 3.2 que de los primeros días de febrero a los primeros días de abril el precio de las acciones de AAP tiene una tendencia a la baja. Más a partir de los primeros días de abril, el precio de las acciones de AAP tiene una tendencia al alza. Seguidamente mencionamos algunos puntos del estado de resultados de AAP:

1. La creación del negocio omnicanal de AAP, DIY (bricolaje realizado por tí mismo en tu propio automóvil o por un mecánico de AAP en casa), el aumento en el número de tiendas, y las 53 semanas de operaciones de la compañía en el 2020. Fueron las principales razones por las que las ventas netas (*net sales*) en el 2020 aumentaron con respecto a las ventas netas del 2019. Lo cual representó un crecimiento del 4.1 %, ver Figura 3.9.
2. La creación de DIY, el apalancamiento de la cadena de suministro y la gestión de inventario. Fueron los motivos principales para que la ganancia neta (*gross profit*) en 2020 sea 44.3 % de las ventas netas, un aumento de 52 puntos base en comparación con 2019, Figura 3.9.
3. La utilidad neta en 2020 de AAP aumento \$6,125 millones de dólares estadounidenses, con respecto a la utilidad neta del 2019. Lo cual muestra un aumento del 1.24 %, Figura 3.9. Entre los gastos operativos que tuvo la compañía, se encuentran el desapalancamiento de los gastos de venta y administrativos (SG&A), aumento de los gastos de marketing, y mayores costos de suministro y limpieza causados por la Covid-19.
4. El precio por acción básica y diluida de AAP en el 2020 aumento \$0.3 millones de dólares estadounidenses con respecto al precio por acción básica y diluida del 2019. Lo cual muestra un aumento del 4.36 % y 4.38 %, respectivamente, Figura 3.9. Esto se debió a la recompra de 2,111,438 acciones por parte de la compañía, Figura 3.10. El costo total de la recompra de acciones en relación con la liquidación neta de acciones emitidas fue de \$1,4 millones, o un precio promedio de \$147,24 por acción, durante las 12 semanas que terminaron el 2 de enero de 2021.

<i>(in thousands, except per share data, store data and ratios)</i>	Year				
	2020	2019	2018	2017	2016
Statement of Operations Data: ⁽¹⁾					
Net sales	\$ 10,106,321	\$ 9,709,003	\$ 9,580,554	\$ 9,373,784	\$ 9,567,679
Gross profit	\$ 4,481,614	\$ 4,254,746	\$ 4,219,413	\$ 4,085,049	\$ 4,255,915
Operating income	\$ 749,907	\$ 677,180	\$ 604,275	\$ 570,212	\$ 787,598
Net income ⁽²⁾	\$ 493,021	\$ 486,896	\$ 423,847	\$ 475,505	\$ 459,622
Basic earnings per common share	\$ 7.17	\$ 6.87	\$ 5.75	\$ 6.44	\$ 6.22
Diluted earnings per common share	\$ 7.14	\$ 6.84	\$ 5.73	\$ 6.42	\$ 6.20
Cash dividends declared per basic share	\$ 1.00	\$ 0.24	\$ 0.24	\$ 0.24	\$ 0.24

Figura 3.9: Hoja de balance de AAP. Cantidades en USD.

Period	Total Number of Shares Purchased ⁽¹⁾	Average Price Paid per Share ⁽¹⁾	Total Number of Shares Purchased as Part of Publicly Announced Programs	Maximum Dollar Value that May Yet Be Purchased Under the Programs (In thousands)
October 4, 2020 to October 30, 2020	492,429	\$ 154.31	492,429	\$ 676,170
November 1, 2020 to November 28, 2020	592,062	147.07	582,298	590,534
November 29, 2020 to January 2, 2021	1,026,947	154.15	1,026,939	432,234
Total	2,111,438	\$ 152.20	2,101,666	\$ 432,234

Figura 3.10: Cantidades en USD.

Los puntos que mencionamos del estado de resultados 10-K de AAP del 2020, y las Figuras [3.9](#) y [3.10](#), las obtuvimos de la fuente [CIK-0001158449/](#).

3.7. Apple Inc.

En la Figura [3.2](#) vemos que de los primeros días de febrero a los primeros días de abril el precio de las acciones de AAPL tiene una tendencia a la baja. Aunque de los primeros días de abril a los últimos días de diciembre el precio de las acciones de APPL tiene una tendencia al alza. A continuación, mostramos algunos puntos del estado de resultados de APPL:

1. El aumento en la demanda de dispositivos vestibles, hogar y accesorios (AirPods, Apple TV, Apple Watch, productos Beats, HomePod, iPod touch y accesorios de la marca Apple) y servicios de APPL (ventas de publicidad de la compañía, AppleCare, contenido digital, la amortización del valor diferido de Maps, Siri y el almacenamiento gratuito de iCloud y los servicios de Apple TV+); en América (América del Norte y América del Sur), Europa (Europa, India y África) y el resto de Asia Pacífico (Australia, Filipinas, Nueva-Zelanda, etc.). Fue la razón por la que las ventas netas (net sales) de AAPL en el 2020 aumentaron \$14,341 millones

de dólares con respecto a las ventas netas del 2019; lo cual representó un aumento de 5.51 %, Figuras 3.11 y 3.12.

2. El margen neto (*gross margin*) de APPL en el 2020, aumento \$6,564 millones de dólares estadounidenses con respecto al margen bruto del 2019. Lo cual muestra un aumento de 6.67 %, Figura 3.13. Esto se debió a la debilidad de las monedas extranjeras con respecto al dólar estadounidense de enero a mediados del 2020, ocasionando un menor costo de producción en iPhone, Mac y iPad; un aumento en las ventas de Mac, iPad, wearables, hogar y servicios, y accesorios (Figura 3.12), dando lugar a un mayor ingreso para la empresa en ventas netas (punto anterior); y una mayor inversión en investigación y desarrollo, originando un costo mayor para la empresa en este aspecto.
3. La utilidad neta de APPL en el 2020 aumento \$2,155 millones de dólares estadounidenses con respecto a la utilidad neta del 2019, Figura 3.14. Las razones de este aumento fueron los dos puntos anteriores.
4. El precio por acción básica y diluida de APPL en el 2020 aumento \$0.32 y \$0.31 millones de dólares estadounidenses, con respecto al precio por acción básica y diluida del 2019. Lo cual muestra un aumento del 10.70 % y 10.43 %, respectivamente, Figura 3.14. Las principales razones de estos incrementos fueron que APPL recompró 917 millones de acciones ordinarias; lo cual fue posible en parte, por la división de acciones de cuatro por uno entre los accionistas registrados al 24 de agosto del 2020.

	2020	Change	2019	Change	2018
Net sales by reportable segment:					
Americas	\$ 124,556	7 %	\$ 116,914	4 %	\$ 112,093
Europe	68,640	14 %	60,288	(3)%	62,420
Greater China	40,308	(8)%	43,678	(16)%	51,942
Japan	21,418	— %	21,506	(1)%	21,733
Rest of Asia Pacific	19,593	10 %	17,788	2 %	17,407
Total net sales	\$ 274,515	6 %	\$ 260,174	(2)%	\$ 265,595

Figura 3.11: Ventas netas de AAPL por segmento reportable para 2020, 2019 y 2018. Cantidades en millones de USD.

	2020	Change	2019	Change	2018
Net sales by category:					
iPhone ⁽¹⁾	\$ 137,781	(3)%	\$ 142,381	(14)%	\$ 164,888
Mac ⁽¹⁾	28,622	11 %	25,740	2 %	25,198
iPad ⁽¹⁾	23,724	11 %	21,280	16 %	18,380
Wearables, Home and Accessories ⁽¹⁾⁽²⁾	30,620	25 %	24,482	41 %	17,381
Services ⁽³⁾	53,768	16 %	46,291	16 %	39,748
Total net sales	<u>\$ 274,515</u>	6 %	<u>\$ 260,174</u>	(2)%	<u>\$ 265,595</u>

Figura 3.12: Ventas netas de AAPL por categoría para 2020, 2019 y 2018. Cantidades en millones de USD.

	2020	2019	2018
Gross margin:			
Products	\$ 69,461	\$ 68,887	\$ 77,683
Services	35,495	29,505	24,156
Total gross margin	<u>\$ 104,956</u>	<u>\$ 98,392</u>	<u>\$ 101,839</u>
Gross margin percentage:			
Products	31.5%	32.2%	34.4%
Services	66.0%	63.7%	60.8%
Total gross margin percentage	38.2%	37.8%	38.3%

Figura 3.13: Margen neto (*gross margin*) de productos y servicios y su porcentaje de AAPL para 2020, 2019 y 2018. Cantidades en millones de USD

	2020	2019	2018	2017	2016
Total net sales	\$ 274,515	\$ 260,174	\$ 265,595	\$ 229,234	\$ 215,639
Net income	\$ 57,411	\$ 55,256	\$ 59,531	\$ 48,351	\$ 45,687
Earnings per share:					
Basic	\$ 3.31	\$ 2.99	\$ 3.00	\$ 2.32	\$ 2.09
Diluted	\$ 3.28	\$ 2.97	\$ 2.98	\$ 2.30	\$ 2.08
Cash dividends declared per share	\$ 0.795	\$ 0.75	\$ 0.68	\$ 0.60	\$ 0.545
Shares used in computing earnings per share:					
Basic	17,352,119	18,471,336	19,821,510	20,868,968	21,883,281
Diluted	17,528,214	18,595,651	20,000,435	21,006,767	22,001,126
Total cash, cash equivalents and marketable securities	\$ 191,830	\$ 205,898	\$ 237,100	\$ 268,895	\$ 237,585
Total assets	\$ 323,888	\$ 338,516	\$ 365,725	\$ 375,319	\$ 321,686
Non-current portion of term debt	\$ 98,667	\$ 91,807	\$ 93,735	\$ 97,207	\$ 75,427
Other non-current liabilities	\$ 54,490	\$ 50,503	\$ 48,914	\$ 44,212	\$ 39,986

Figura 3.14: Hoja de balance de APPL. Cantidades en millones de USD.

Los puntos que mencionamos del estado de resultados 10-K de APPL del 2020, y las Figuras [3.11](#), [3.12](#) y [3.14](#), las obtuvimos de la fuente <https://cloudfront.net/CIK-0000320193>.

3.8. Accenture plc.

De nuevo de la Figura [3.2](#) observamos que de los primeros días de febrero a los primeros días de abril el precio de las acciones de ACN tiene una tendencia a la baja. Pero, a partir los primeros días de abril el precio de las acciones de ACN tiene una tendencia al alza. A continuación, mostramos algunos puntos del estado de resultados de ACN:

1. El aumento de la demanda por grupos industriales selectos, por parte de los mercados financieros (América del Norte, Europa y Mercados en Crecimiento). Fue la razón principal por la que los ingresos (*revenues*) de ACN en 2020 aumentaron \$1,112 millones de dólares estadounidenses con respecto a los ingresos de ACN del 2019; Figura [3.15](#). Lo cual muestra un aumento del 2.57%. La mayor demanda de grupos industriales de ACN en 2020 se tuvo en el grupo de salud y servicio público (*health and public service*), lo que era de esperarse por la Covid-19, Figura [3.16](#). También, el mercado geográfico que le dio un mayor porcentaje de ingresos a ACN en 2020 fueron los Mercados en Crecimiento, Figura [3.17](#). Los cuales produjeron un aumento del 5% con respecto a los ingresos del 2019, Figura [3.16](#); una razón es que los contratos que se realizaron en los Mercados en crecimiento tenían mayor rentabilidad para la compañía.

Duck Creek Technologies, es una empresa asociada a ACN que se especializa en soluciones de software para la industria de seguros de propiedad y accidentes (P&C). Ésta generó \$332 millones de dólares estadounidenses en ingresos para la compañía.

2. La utilidad operativa (*operating income*) de ACN en 2020 aumento \$6,514 millones de dólares estadounidenses con respecto a la utilidad operativa del 2019. Lo cual representó un aumento del 3.31%. Pese a esto la utilidad operativa de la compañía fue menor que en años anteriores, Figura [3.15](#). Las razones fueron un menor aumento en los ingresos de ACN en el 2020 con respecto a años anteriores; un gasto mayor en ventas y marketing (*sales and marketing*), costos generales y administrativos (*general and administrative costs*); una mayor inversión en investigación y desarrollo, lo que generó un mayor costo en este aspecto para la compañía.
3. La utilidad neta atribuible a ACN plc. en 2020 (*net income attributable to Accenture plc.*) aumento \$329 millones de dólares estadounidenses con respecto a la utilidad neta atribuible a ACN plc. del 2019. Lo cual muestra un aumento de 6.88%, figura [3.15](#).

En el 2020, la diferencia de la utilidad de los estados financieros consolidados con la utilidad neta de Accenture plc. fue de \$77 millones de dólares

estadounidenses. Lo que implica que el 1.5% de la rentabilidad de la compañía se obtuvo de la utilidad neta de los estados financieros consolidados.

- El precio por acción básica y diluida de ACN en el 2020 aumento \$0.54 y \$0.53 millones de dólares estadounidenses con respecto al precio por acción básica y diluida del 2019. Lo cual muestra un aumento del 7.2% para cada acción, Figura 3.15. La principal razón de este incremento fue que para finales de agosto del 2020 ACN había realizado la compra de 2,554,336 acciones del tipo A.

(in millions of U.S. dollars)	Fiscal				
	2020 (1)	2019	2018 (2) (3)	2017 (2) (4)	2016 (2) (5)
Income Statement Data					
Revenues	\$ 44,327	\$ 43,215	\$ 40,993	\$ 36,177	\$ 34,254
Operating income	6,514	6,305	5,899	5,191	4,846
Net income	5,185	4,846	4,215	3,635	4,350
Net income attributable to Accenture plc	5,108	4,779	4,060	3,445	4,112
Earnings Per Class A Ordinary Share					
Basic	\$ 8.03	\$ 7.49	\$ 6.46	\$ 5.56	\$ 6.58
Diluted	7.89	7.36	6.34	5.44	6.45
Dividends per ordinary share	3.20	2.92	2.66	2.42	2.20

Figura 3.15: Hoja de Balance ACN. Cantidades en millones de USD.

(in millions of U.S. dollars)	Fiscal		Percent Increase (Decrease) U.S. Dollars	Percent Increase Local Currency	Percent of Total Revenues for Fiscal	
	2020	2019 (1)			2020	2019 (1)
GEOGRAPHIC MARKETS						
North America	\$ 20,982	\$ 19,986	5 %	5 %	47 %	46 %
Europe	14,402	14,696	(2)	—	32	34
Growth Markets	8,943	8,533	5	8	20	20
TOTAL REVENUES	\$ 44,327	\$ 43,215	3 %	4 %	100 %	100 %
INDUSTRY GROUPS						
Communications, Media & Technology	\$ 8,883	\$ 8,757	1 %	3 %	20 %	20 %
Financial Services	8,518	8,494	—	2	19	20
Health & Public Service	8,023	7,161	12	13	18	17
Products	12,272	12,005	2	3	28	28
Resources	6,612	6,772	(2)	—	15	16
Other	19	26	n/m	n/m	—	—
TOTAL REVENUES	\$ 44,327	\$ 43,215	3 %	4 %	100 %	100 %
TYPE OF WORK						
Consulting	\$ 24,227	\$ 24,177	— %	2 %	55 %	56 %
Outsourcing	20,100	19,038	6	7	45	44
TOTAL REVENUES	\$ 44,327	\$ 43,215	3 %	4 %	100 %	100 %

Figura 3.16: Hoja de balance ACN. Los montos pueden no sumar debido al redondeo. n/m = no significativo. Cantidades en millones de USD.

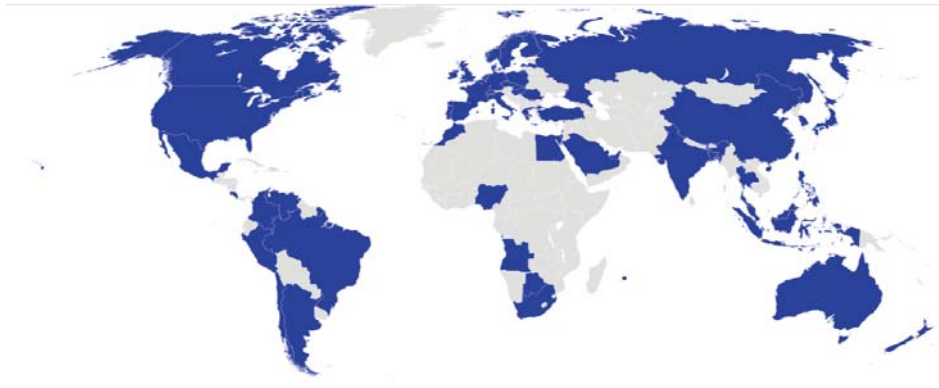


Figura 3.17: Mapa mundial que muestra los países donde Accenture plc. tiene operaciones. Los países de Asia del Pacífico, América Latina, África y Medio Oriente que se muestran en azul, constituyen los Mercados en Crecimiento.

Los puntos que mencionamos del estado de resultados 10-K de ACN del 2020, y las Figuras 3.15, 3.16 y 3.17, las obtuvimos de la fuente <https://www.accenture.com>

3.9. Conclusiones

De acuerdo con las Figuras 3.2 y 3.3 notamos que la tendencia a la baja en los precios de las acciones en los días finales de febrero y la tendencia al alza de los días iniciales de abril a los días finales de diciembre del 2020, concuerda con el aumento de volatilidad para las cuatro acciones de los días finales de febrero a los días finales de abril y, también coincide con un comportamiento más estable en la volatilidad para las acciones de AAP, AAPL y ACN de los días finales de abril a los días finales de diciembre del 2020. Mientras que para la acción de AAL, de acuerdo a la Figura 3.2 tiene una tendencia al alza y luego a la baja en los días iniciales y los días finales de junio, respectivamente, lo que a su vez concuerda con el comportamiento en la volatilidad de los días iniciales de junio a los días iniciales de julio. Por tanto, el comportamiento en el precio de las acciones de AAL, AAP, AAPL y ACN, y su volatilidad son coincidentes. Más aun así, el método de Fourier-Malliavan tiene la desventaja de que considera trayectorias continuas para el movimiento del precio de los activos, 2.9, lo cual no sucede en los mercados; pues, no se tiene un registro del precio de un activo para cualquier $t \subset [0, T]$, con $T \subset \mathbb{R}$.

Por otra parte, de las secciones 3.6, 3.7 y 3.8 vemos que la utilidad neta de AAP, AAPL y ACN, fue positiva en el 2020; lo cual coincide con la tendencia al alza en el precio de las acciones de AAP, AAPL y ACN de los primeros días de abril a los días finales de diciembre del 2020. Puesto que las acciones de AAP, AAPL y ACN son activos de las mismas, así el hecho de que el precio de sus acciones tuvo una tendencia al alza fue considerado en el cálculo de su utilidad neta en su estado de resultados 10-K, dado que el 10-K de las empresas

mencionadas fue publicado en enero del 2021, septiembre del 2020 y agosto del 2020. Ahora, observemos de la sección 3.5 que la utilidad neta de AAL fue negativa en el 2020, lo cual nuevamente concuerda con la tendencia a la baja en el precio de la acción de AAL en los días finales de febrero pues su estado de resultados 10-K fue publicado en febrero del 2020, además el hecho de que la utilidad de neta de AAL fue negativa pudo ser un factor de influencia e importancia por parte de los clientes para la realización de órdenes de compra-venta para las acciones de AAL.

Por último, suponemos que el comportamiento en el precio de las acciones de AAP, AAPL y ACN que se muestra en la Figura 3.2 de enero a diciembre del 2020, se debió por una parte a la existencia de comunalidades en el rendimiento de las acciones de AAP, AAPL y ACN que se menciona en la Sección 1.2, puesto que las acciones de las empresas mencionadas tuvieron factores comunes como una utilidad neta positiva, inversión en la compra de acciones e inversión en investigación y desarrollo (se hace mencionamos esto en las Secciones 3.6, 3.7 y 3.8). A su vez conjeturamos otra explicación basándonos en la Ley de la raíz cuadrada o la LLT de la Sección 1.3, puesto que si los factores comunes mencionados en el precio de las acciones de AAP, AAPL y ACN generen una correlación positiva en el tiempo del precio de reserva de los clientes (*ask-bid*), esto implica una correlación positiva en el impacto del cambio del precio promedio de reserva de las acciones al comienzo y final de las metaórdenes, lo que también explica la tendencia al alza en el precio de las acciones de AAP, AAPL y ACN de los días iniciales de abril a los días finales de diciembre del 2020.

Apéndice A

Código R

Utilizamos el código siguiente para calcular las volatilidades en la Figura [3.3](#)

```
#En este algoritmo, se supone que el tiempo en el están  
#dados los datos de los activos, no están normalizados al  
#intervalo 2pi; además, estos datos son sincrónicos.
```

```
#Cálculo de la transformada de Fourier de la acción C_k  
TransFck=function(logprice,tim,logptim){
```

```
  n=length(logprice)  
  N=trunc(n/2)  
  diferencias=diff(logpricetim)
```

```
  segundos=as.numeric(tim)
```

```
  longitud=max(seg)-min(seg)  
  tim2pi=2*pi*(segundos-min(segundos))/longitud  
  tim2pi=tim2pi[2:n]
```

```
  ind=seq(from=-2*N,to=2*N,by=1)  
  cdp=matrix(0, 4*N+1, 1)  
  for(k in ind){
```

```
    cdp[k+2*N+1]=(1/(2*pi))*((exp(-i*k*tim2pi))^*(dif))
```

```
  }  
  return(data.frame(ind),cdp)  
}
```



```

#Cálculo de los coeficientes de Fourier de Sigma
Coef.Sigma=function(logprice){

  n=length(logprice)
  N=trunc(n/2)

  coef.Sigma=matrix(0,2*N+1, 1)

  ind=seq(from=-N,to=N,by=1)
  for(k in ind){
    for(s in ind){

      coef.Sigma[k]=coef.Sigma[k]
      +((2*pi)/(2*N+1))*(cdp$cdp[s+2*N+1])*(cdp$cdp[k-s+2*N+1])

    }
    return(data.frame(ind,coef.Sigma))
  }
}

#Cálculo del estimador de Fourier de la matriz de
volatilidad en el tiempo t

EstF=function(t){
  n=length(logp)
  M=trunc((1/(16*pi))*sqrt(n)*log(n))
  sum=0
  ind=seq(from=-M, to=M, by=1)
  for(k in ind){

    sum = sum
    + (1 - abs(k)/M)*(coef.Sigma$coef.Sigma[k+2*M+1])*exp(-1i*k*t)

  }
  return(Re(sum))
}

plot(EstF,0,2*pi,main="Volatilidad")

```

Apéndice B

Bibliografía

- [1] Bruno Biais, Larry Glosten and Chester Spatt, Market microstructure: A survey of microfoundations, empirical results, and policy implications, *Journal of Financial Markets*, 8 (2005), 217–264.
- [2] F. Black. Noise. *The Journal of Finance*, 8 (1986), 529–543.
- [3] Jean-Philippe Bouchaud. The inelastic market hypothesis: a microstructural interpretation. *Quantitative Finance*, 10 (2022), 1–11.
- [4] Jean-Philippe Bouchaud, J. Bonart, J. Donier, and M. Gould. *Trades, Quotes and Prices: Financial Markets Under the Microscope*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [5] D. L. Burkholder y R. F. Gundy, Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales., *Acta Mathematica*, 9 (1970), 249–304.
- [6] J. Donier, J. Bonart, I. Mastromatteo, and J.-P. Bouchaud. A fully consistent, minimal model for non-linear market impact. *Quantitative Finance*, 7 (2015) 1109–1121.
- [7] X. Gabaix and R. S. J. Koijen. In search of the origins of financial fluctuations: The inelastic markets hypothesis. Working Paper 28967, National Bureau of Economic Research, 2021.
- [8] Mark B. Garman. Market microstructure. *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 257–275.
- [9] Glosten, L. R. y Milgrom, P. R., Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Economics*, 1 (1985), 71-100.
- [10] Joel Hasbrouck and Duane J. Seppi, Common factors in prices, order flows, and liquidity, *Journal of Financial Economics*, 3 (2001), 383–411.

- [11] Jean Jacob y Philip Protter, *Probability Essentials*, Springer, New York, 2003.
- [12] N. Jegadeesh and S. Titman. Momentum. *Annual Review of Financial Economics*, 1 (2011):493–509.
- [13] R. L. Karandikar. On pathwise stochastic integration. *Stochastic Processes and their Applications*, 1 (1995):11–18, 1995.
- [14] A. S. Kyle. Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*, 6 (1985), 1315–1335, 1985.
- [15] Léon Walras, *Éléments d'Économie Politique Pure, ou Théorie de la Richesse Sociale*, Forgotten Books, Londres, 2018.
- [16] A. W. Lo and J. Wang. Trading volume: Definitions, data analysis, and implications of portfolio theory. *The Review of Financial Studies*, 2 (2000), 257– 300.
- [17] M. O'Hara. *Market Microstructure Theory*, Wiley, 1998.
- [18] Paul Malliavin y Maria Elvira Mancino. A Fourier transform method for nonparametric estimation of multivariate volatility. *The Annals of Statistics*, 4 (2009), 1983–2010.
- [19] Maria Elvira Mancino, Maria Cristina Recchioni y Simona Sanfelici, *Fourier-Malliavin Volatility Estimation Theory and Practice*, Springer, New York, 2017.
- [20] C. Marinelli and M. Röckner. On the maximal inequalities of Burkholder, Davis and Gundy. *Expositiones Mathematicae*, 1 (2016), 1–26.
- [21] T. Odean. Do investors trade too much? *American Economic Review*, 5 (1999), 1279–1298.
- [22] R. J. Shiller. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? *The American Economic Review*, 3 (1981), 421–436.
- [23] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [24] Kyle, A. S., Continuous auctions and insider trading, *Journal of the Econometric Society*, 6 (1985), 1315-1335.
- [25] Glosten, L. R. y Milgrom, P. R., Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Economics*, 1 (1985), 71-100.
- [26] Carlo Marinelli y Michael Röckner, On the maximal inequalities of burkholder, Davis and Gundy, *Expositiones Mathematicae*, 1 (2016), 1–26.

- [27] Rajeeva L. Karandikar, On pathwise stochastic integration, *Stochastic Processes and their Applications*, 1 (1995), 11–18.
- [28] E. M. Stein y R. Shakarchi., *Fourier Analysis: An introduction*, Princeton University Press, New Jersey, 2003.
- [29] Ioannis Karatzas y Steven E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, 2019.
- [30] H. L. Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1968.
- [31] Louis Eeckhoudt, Christian Gollier y Harris Schlesinger, *Economic and Financial Decisions under Risk*, Princeton University Press, New Jersey, 2005.